Kicsiny metrikus terek

Legyen (X,d) metrikus tér. Az X tér *Luzin* vagy (L)-tulajdonságú, ha szeparábilis és bármely sehol sem sűrű altere megszámlálható.

Az X tér *koncentrált* vagy (C)-tulajdonságú, ha van olyan $M \subset X$ megszámlálható halmaz, hogy minden M-et tartalmazó G nyílt halmazra $X \setminus G$ megszámlálható.

Az X tér *erősen nullmértékű* vagy (SN), ha minden $\varepsilon_n > 0$-ra van olyan $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ lefedés, hogy $\operatorname{diam} X_n < \varepsilon_n$ minden $n = 1, 2, \ldots$-ra.

Az X tér *univerzálisan nullmértékű* vagy (UN), ha X Borel-halmazain minden véges, folytonos mérték nulla. (Egy mérték akkor folytonos, ha minden pont mértéke nulla.)

Az X tér (SUN), ha szeparábilis és (UN).

Az X tér (B)-tulajdonságú, ha minden $f : X \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvényre $f(X)$ Lebesgue-nullmértékű.

Az X tér (F)-tulajdonságú, ha minden $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre $f(X)$ Lebesgue-nullmértékű.

Az X tér (E)-tulajdonságú, ha minden $f : X \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvényre $f(X)$ Lebesgue-nullmértékű.

Tétel 1 *Tetszőleges metrikus térre fennállnak az alábbi implikációk:*

$$\begin{array}{ccccccc}
(\mathrm{L}) & \Longrightarrow & (\mathrm{C}) & \Longrightarrow & (\mathrm{SN}) & \Longrightarrow & (\mathrm{SUN}) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
(\mathrm{B}) & \Longrightarrow & (\mathrm{F}) & \Longrightarrow & (\mathrm{E}) & \Longrightarrow & (\mathrm{UN}).
\end{array}$$

Lemma 2 *Ha μ véges, folytonos Borel-mérték X-en, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van $\delta > 0$ úgy, hogy ha $B \subset X$ Borel és* $\operatorname{diam} B < \delta$, *akkor $\mu(B) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Ha ez nem igaz, akkor $\exists\ \varepsilon > 0$ és $\exists\ B_n \subset X$ Borel, amelyekre $\operatorname{diam} B_n < 1/2^n$ és $\mu(B_n) \geq \varepsilon$. Mivel μ véges, nincs végtelen sok páronként diszjunkt B_n. Így a Ramsey-tétel szerint van végtelen sok páronként metsző B_n. Feltehető, hogy $B_n \cap B_m \neq \emptyset$ minden n, m-re. Legyen $G_n = \{x : \operatorname{dist}(x, B_n) < 1/2^{n-1}\}$, ekkor $G_1 \supset G_2 \supset \ldots$. Mivel $\operatorname{diam} G_n \to 0$, ezért $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ legfeljebb egyelemű, tehát $\mu(G) = 0$. Másrészt $\mu(G_n) \geq \mu(B_n) \geq \varepsilon$ minden n-re, ami lehetetlen, mert $\mu(G_n) \to \mu(G)$. $\square$

Lemma 3 *Legyen $X \subset \mathbb{R}$ az altértopológiával ellátva. Ha X-en van véges, folytonos és nem azonosan nulla Borel-mérték, akkor van olyan $Y \subset \mathbb{R}$ halmaz, amely homeomorf X-szel és amelynek a Lebesgue-féle külső mértéke pozitív.*

Bizonyítás. Legyen μ egy véges, folytonos és nem azonosan nulla Borel-mérték X-en, és legyen

$$f(x) = \begin{cases} \mu(X \cap [0, x)) & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ -\mu(X \cap [x, 0)) & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Ekkor f monoton növő és folytonos $\mathbb{R}$-en. Így $g(x) = x + f(x)$ az $\mathbb{R}$ homeomorfizmusa önmagára, és $Y = g(X)$ homeomorf X-szel. Legyen $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Ha $g^{-1}(a_n) = c_n$ és $g^{-1}(b_n) = d_n$, akkor

$$b_n - a_n = g(d_n) - g(c_n) \geq f(d_n) - f(c_n) = \mu(X \cap [c_n, d_n]).$$

Mivel a $[c_n, d_n]$ intervallumok lefedik X-et, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X \cap [c_n, d_n]) \geq \mu(X),$$

és így Y külső mértéke legalább $\mu(X)$. $\square$

Következmény 4 *Tegyük fel, hogy a κ számosságon van valós mérték. Ekkor $\kappa \geq$* non $\mathcal{N}$. $\square$

Tétel 5 [Szpilrajn-Marczewski] *Egy $X \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor univerzálisan nullmértékű, ha $\mathbb{R}$ minden X-szel homeomorf részhalmaza Lebesgue-nullmértékű.*

Bizonyítás. Ha X nem univerzálisan nullmértékű, akkor a 2. Lemma szerint van X-szel homeomorf halmaz $\mathbb{R}$-ben, amelynek a Lebesgue-féle külső mértéke pozitív. Most legyen X univerzálisan nullmértékű, és legyen f homeomorfizmus X-ről az $Y \subset \mathbb{R}$ halmazra. Ha $\lambda(Y) > 0$, akkor λ folytonos mérték az Y relatíve Borel részhalmazain, amelyet f^{-1} átvisz X-re, ami lehetetlen. $\square$

Lemma 6 *Legyen μ véges Borel-mérték az (X, d) metrikus téren. Ekkor az alábbi állítások közül legalább az egyik igaz.*

(i) *μ-nek van szeparábilis tartója, azaz van olyan $F \subset X$ zárt halmaz, amely (altérként) szeparábilis és amelyre $\mu(X \setminus F) = 0$.*

(ii) *Van olyan $Y \subset X$ halmaz, hogy $\inf\{d(x,y) : x, y \in Y,\ x \neq y\} > 0$ és $P(Y)$-on van valós mérték.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Legyen

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \{B \subset X : B \text{ Borel, } \operatorname{diam} B < 3\varepsilon,\ \mu(B) > 0\}.$$

Legyen $\mathcal{A}_\varepsilon$ egy maximális, páronként diszjunkt halmazokból álló részrendszere $\mathcal{H}_\varepsilon$-nak. Mivel μ véges, ezért $\mathcal{A}_\varepsilon$ megszámlálható, tehát $A = A_\varepsilon = \bigcup \mathcal{A}_\varepsilon$ Borel. Legyen $Z = X \setminus A$. Ekkor Z is Borel. Tegyük fel, hogy $\mu(Z) > 0$.

Ha $B \subset Z$ Borel és $\operatorname{diam} B < 3\varepsilon$, akkor $\mu(B) = 0$. Legyen Y olyan maximális részhalmaza Z-nek, amelyben bármely két pont távolsága legalább ε. Ekkor $\bigcup_{y \in Y} B(y, \varepsilon)$ lefedi Z-t.

Legyen $Y = \{y_\alpha : \alpha < \gamma\}$, és legyen $E_\alpha = B(y_\alpha, \varepsilon) \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} B(y_\beta, \varepsilon)$ minden $\alpha < \gamma$-ra. Belátjuk, hogy tetszőleges $A \subset \gamma$ rendszámhalmazra az $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ halmaz Borel (pontosabban F_σ).

Legyen $\overline{B}_{\alpha,n} = \{x \in X : d(y_\alpha, x) \leq \varepsilon - (1/n)\}$ minden $\alpha < \gamma$-ra és $n = 1, 2, \ldots$-re. Világos, hogy a $\overline{B}_{\alpha,n}$ és $F_{\alpha,n} = \overline{B}_{\alpha,n} \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} B(y_\beta, \varepsilon)$ halmazok zártak minden $\alpha < \gamma$-ra. Azt is könnyű ellenőrizni, hogy $\operatorname{dist}(F_{\alpha,n}, F_{\beta,n}) \geq 1/n$ minden $\alpha \neq \beta$-ra, és így $\bigcup_{\alpha \in A} F_{\alpha,n}$ zárt. Mivel

$$\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\alpha \in A} F_{\alpha,n},$$

ezért $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ valóban F_σ. Legyen

$$\nu(A) = \mu\left(Z \cap \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right)$$

minden $A \subset \gamma$-ra. Mivel az E_α halmazok páronként diszjunktak, ν mérték $P(\gamma)$-n. Minden $\alpha < \gamma$-ra $\nu(\{\alpha\}) = \mu(Z \cap E_\alpha) = 0$, hiszen $E_\alpha \subset B(y_\alpha, \varepsilon)$, tehát $\operatorname{diam} E_\alpha \leq 2\varepsilon < 3\varepsilon$. Végül

$$\nu(\gamma) = \mu\left(Z \cap \bigcup_{\alpha < \gamma} E_\alpha\right) = \nu\left(Z \cap \bigcup_{\alpha < \gamma} B(y_\alpha, \varepsilon)\right) = \mu(Z) > 0,$$

amivel beláttuk, hogy $P(\gamma)$-n van valós mérték. Így $P(Y)$-on is van valós mérték, ekkor tehát (ii) igaz.

Ezért feltehetjük, hogy $\mu(X \setminus \bigcup \mathcal{A}_\varepsilon) = 0$ minden $\varepsilon > 0$-ra. Legyen $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{A}_{1/n}$. Ekkor C Borel és $\mu(X \setminus C) = 0$. Világos, hogy C (mint X altere) szeparábilis, hiszen minden n-re lefedhető megszámlálhatóan sok $3/n$-nél kisebb átmérőjű halmazzal. Ekkor $F = \operatorname{cl} C$ szintén szeparábilis, tehát (i) teljesül. Ezzel a lemmát beláttuk. □

Lemma 7 *Legyen (X, d) metrikus tér, és legyen $f : A \to \mathbb{R}$ korlátos és egyenletesen folytonos, ahol $A \subset X$. Ekkor f kiterjeszthető X-re egyenletesen folytonos függvényként.*

Bizonyítás. Legyen $\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in A,\ d(x, y) \leq \delta\}$ minden $\delta \geq 0$-ra. Ekkor $\omega(0) = 0$, ω monoton növő és korlátos $[0, \infty)$-n, valamint jobbról folytonos 0-ban. Belátjuk, hogy van olyan $\eta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\omega(x) \leq \eta(x)$ minden $x \geq 0$-ra, $\eta(0) = 0$, η monoton növő, korlátos és konkáv $[0, \infty)$-n, valamint jobbról folytonos 0-ban.

Tegyük fel, hogy $\omega(x) \leq K$ minden $x \geq 0$-ra, és legyen $a_n > 0$ olyan, hogy $\omega(a_n) \leq K/2^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Legyen $b_0 = a_1$. Ha a $b_0 > \ldots > b_{n-1} > 0$ számokat már definiáltuk, akkor legyen $b_n = \min(b_{n-1}/3, a_{n+1})$. Legyen $\eta(0) = 0$, $\eta(b_n) = K/2^n$ minden $n = 0, 1, \ldots$-re, $\eta(x) = K$ minden $x \geq b_0$-ra, valamint legyen η lineáris a $[b_n, b_{n-1}]$ intervallumban minden $n = 1, 2, \ldots$-re. Ekkor $\eta(0) = 0$, η monoton és korlátos $[0, \infty)$-n, valamint jobbról folytonos 0-ban. Ha $x \in [b_n, b_{n-1}]$, akkor $\eta(x) \geq \eta(b_n) = K/2^n \geq \omega(x)$, hiszen $x \leq b_{n-1} \leq a_n$. Ha $x \geq b_0$, akkor $\eta(x) = K \geq \omega(x)$, amivel beláttuk, hogy $\omega(x) \leq \eta(x)$ minden $x \geq 0$-ra. Mivel η grafikonjának meredeksége a $[b_{n+1}, b_n]$ és $[b_n, b_{n-1}]$ intervallumokban $K/(2^{n+1}(b_n - b_{n+1}))$, illetve $K/(2^n(b_{n-1} - b_n))$, továbbá $b_{n-1} - b_n \geq 2b_n > 2(b_n - b_{n+1})$, látható, hogy η konkáv.

Ebből következik, hogy az $\eta(x + b) - \eta(x)$ függvény monoton csökken $[0, \infty)$-ben, amiből nyilvánvaló, hogy $\eta(a + b) \leq \eta(a) + \eta(b)$ minden $a, b \geq 0$-ra. Legyen

$$g(y) = \inf\{f(x) + \eta(d(x, y)) : x \in A\}$$

minden $y \in X$-re. Nyilvánvaló, hogy g kiterjesztése f-nek. Belátjuk, hogy $|g(y) - g(z)| \leq \eta(d(y, z))$ minden $y, z \in X$-re, és így g egyenletesen folytonos. Legyen $y, z \in X$ rögzített. Elég belátni, hogy $g(y) - g(z) \leq \eta(d(y, z))$, azaz $g(y) - \eta(d(y, z)) \leq g(z)$. Ehhez elég megmutatni, hogy $g(y) - \eta(d(y, z)) \leq f(x) + \eta(d(x, z))$, azaz $g(y) \leq f(x) + \eta(d(x, z)) + \eta(d(y, z))$ minden $x \in A$-ra.

Ez azért igaz, mert

$$g(y) \leq f(x) + \eta(d(x,y)) \leq f(x) + \eta(d(x,z)) + \eta(d(y,z)).$$

□

Tétel 8 [K. Prikry tételének élesítése] *Tetszőleges metrikus térre* (E) $\Longrightarrow$ (UN).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy X nem univerzálisan nullmértékű, és legyen μ egy véges, folytonos Borel-mérték X-en, amelyre $\mu(X) > 0$. A 3. Lemma szerint elég a következő két esetet megvizsgálni.

I: Van olyan $Y \subset X$ halmaz, hogy $\inf\{d(x,y) : x, y \in Y,\ x \neq y\} > 0$ és $P(Y)$-on van valós mérték. Ekkor a 4. Következmény szerint $|Y| \geq \operatorname{non}\mathcal{N}$. Legyen $A \subset [0,1]$ olyan pozitív külső mértékű halmaz, amelyre $|A| \leq |Y|$. Legyen f egy szürjekció Y-ról A-ra. Mivel $d(x,y) \geq \delta > 0$ minden $x, y \in Y$, $x \neq y$-ra, ezért f egyenletesen folytonos (sőt Lipschitz), és így egyenletesen folytonosan kiterjeszthető X-re. A kiterjesztett függvény X-et $\mathbb{R}$ egy pozitív külső mértékű részhalmazába képezi, ami lehetetlen.

II: Van olyan $F \subset X$ zárt halmaz, amely (altérként) szeparábilis és amelyre $\mu(X \setminus F) = 0$. Elég belátni, hogy ekkor F-et egy egyenletesen folytonos függvénnyel $\mathbb{R}$ egy pozitív külső mértékű részhalmazára képezhetjük, mert a függvényt egyenletesen folytonosan X-re kiterjesztve ellentmondást kapunk. Feltehetjük tehát, hogy X szeparábilis. Azt is feltehetjük, hogy $\mu(X) = 1$.

Minden $x \in X$-re van olyan $r > 0$, hogy $\mu(B(x,r)) < 1/2$. Ezért a tér szeparabilitása miatt vannak olyan $B(x_n, r_n)$ gömbök, amelyek lefedik X-et, és amelyekre $\mu(B(x_n, r_n)) < 1/2$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re. Legyen

$$D_{n,k} = B(x_n, r_n - (1/k)) \setminus \bigcup_{i<n} B(x_i, r_i)$$

minden $n, k = 1, 2, \ldots$-re. Ekkor

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{n,k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) = X,$$

ezért van olyan k, hogy $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{n,k}\right) > 1/2$. Így választhatunk egy N_1 indexet, amelyre $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N_1} D_{n,k}\right) > 1/2$. Legyen $X_i = D_{i,k}$ minden $i = 1, \ldots, N_1$-re. Ekkor $X_1, \ldots, X_{N_1}$ olyan Borel-halmazok, melyek mértéke kisebb mint

$1/2$, összmértékük nagyobb mint $1/2$, és bármely $1 \leq i < j \leq N_1$-re az X_i és X_j halmazok távolsága pozitív.

Rögzített i-re a fenti konstrukciót megismételjük az X_i altérben. Így olyan $X_{i,1}, \ldots, X_{i,N_2} \subset X_i$ Borel-halmazokat kapunk, melyek mértéke kisebb mint $1/4$, összmértékük tetszőlegesen megközelíti $\mu(X_i)$-t, és bármely $1 \leq j < k \leq N_2$-re az $X_{i,j}$ és $X_{i,k}$ halmazok távolsága pozitív. Az N_2 szám lehet minden i-re ugyanaz, mert az $X_{i,j}$ halmazrendszereket kipótolhatjuk üres halmazokkal. Végül is olyan $X_{i,j}$ $(1 \leq i \leq N_1,\ 1 \leq j \leq N_2)$ halmazokat kapunk, amelyekre $X_{i,j} \subset X_i$ minden i, j-re, mindegyik mértéke kisebb mint $1/4$, az összmértékük nagyobb mint $1/2$, és közülük bármely kettő távolsága pozitív.

Az eljárást folytatva minden k-ra kapjuk az N_k indexeket és az $X_{n_1 \ldots n_k}$ $(1 \leq n_1 \leq N_1, \ldots, 1 \leq n_k \leq N_k)$ Borel-halmazokat a következő tulajdonságokkal: $X_{n_1 \ldots n_{k+1}} \subset X_{n_1, \ldots, n_k}$ minden szóbajövő indexsorozatra, $\mu\left(X_{n_1 \ldots n_k}\right) < 1/2^k$ szintén minden szóbajövő indexsorozatra,

$$\mu\left(\bigcup_{n_1}^{N_1} \ldots \bigcup_{n_k}^{N_k} X_{n_1, \ldots, n_k}\right) > \frac{1}{2},$$

valamint rögzített k-ra bármely két $X_{n_1 \ldots n_k}$ halmaz távolsága pozitív. Legyen

$$Y = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_1}^{N_1} \ldots \bigcup_{n_k}^{N_k} X_{n_1, \ldots, n_k}.$$

Ekkor $Y \subset X$ Borel és $\mu(Y) \geq 1/2$.

Vegyünk fel zárt $I_{n_1 \ldots n_k}$ intervallumokat a következő tulajdonságokkal: $I_{n_1 \ldots n_{k+1}} \subset I_{n_1 \ldots n_k}$ és

$$|I_{n_1, \ldots, n_k}| = \mu(X_{n_1, \ldots, n_k}) < \frac{1}{2^k} \tag{1}$$

minden szóbajövő indexsorozatra, valamint adott k-ra az $I_{n_1 \ldots n_k}$ intervallumok egymásba nem nyúlóak.

Tetszőleges $x \in Y$-ra van egy egyértelmű $n_1, n_2, \ldots$ sorozat, amelyre $x \in X_{n_1 \ldots n_k}$ minden k-ra. Ekkor az $I_{n_1 \ldots n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ intervallumok egymásba vannak skatulyázva és a hosszuk nullához tart (1) szerint, így $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{n_1 \ldots n_k}$ pontosan egyelemű. Legyen $f(x)$ ez az elem. Ekkor $f : Y \to \mathbb{R}$ jóldefiniált. Belátjuk, hogy f egyenletesen folytonos. Adott $\varepsilon > 0$-hoz legyen k olyan, hogy $1/2^k < \varepsilon$. Létezik egy $\delta > 0$ szám azzal a tulajdonsággal, hogy az $X_{n_1 \dots n_k}$ halmazok közül bármely kettőnek a távolsága nagyobb mint δ. Ha $x, y \in Y$ és $d(x, y) < \delta$, akkor van olyan $n_1, \dots, n_k$ indexsorozat, hogy $x, y \in X_{n_1 \dots n_k}$. Ekkor $f(x), f(y) \in I_{n_1 \dots n_k}$, és így (1) alapján $|f(x) - f(y)| \leq 1/2^k < \varepsilon$.

Könnyen láthatóan $f(Y)$ minden pontjának legfeljebb két őseképe van. Ha ui. $x, y, z \in Y$ különböző pontok, akkor van olyan k, hogy az $X_{n_1 \dots n_k}$ halmazok mindegyike csak egyet tartalmaz x, y, z közül. E halmazok között tehát három különböző van, amelyik tartalmazza x, y, z valamelyikét. Ekkor a három, ezeknek megfelelő $I_{n_1 \dots n_k}$ intervallum között van két diszjunkt, tehát x, y, z képei nem lehetnek azonosak. Jelöljük M-mel azon $x \in Y$ pontok halmazát, amelyek valamelyik $I_{n_1 \dots n_k}$ intervallum végpontjába képződnek. Ekkor tehát M megszámlálható.

Most belátjuk, hogy $\lambda(f(Y)) \geq 1/2$. Tegyük fel, hogy $\lambda(f(Y)) < 1/2$, és legyen $f(Y) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ egy olyan intervallum-lefedés, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| < 1/2 - \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$. Minden n-re választunk egy k-t, amelyre $1/2^k < \varepsilon/2^{n+1}$, és kicseréljük J_n-et azon $I_{n_1 \dots n_k}$ intervallumok uniójára, amelyek metszik J_n-et. Az így kapott intervallumok szintén lefedik $f(Y)$-t, és az összhosszuk legfeljebb $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot (\varepsilon/2^{n+1}) = \varepsilon$-nal nagyobb $\sum_{n=1}^{\infty} |J_n|$-nél, tehát még mindig kisebb 1/2-nél. Vegyük a lefedő $I_{n_1 \dots n_k}$ intervallumok rendszerének maximális elemeit; legyenek ezek az $I_{n_1 \dots n_k}$ $((n_1, \dots, n_k) \in S)$ intervallumok. Ezek még mindig lefedik $f(Y)$-t, és páronként egymásba nem nyúló intervallumokból állnak. Belátjuk, hogy az $X_{n_1 \dots n_k}$ $((n_1, \dots, n_k) \in S)$ halmazok lefedik az $Y \setminus M$ halmazt. Tegyük fel ui., hogy egy $x \in Y$ pontot nem fednek le. Ekkor $f(x)$-et lefedi az $I_{n_1 \dots n_k}$ intervallum valamely $(n_1, \dots, n_k) \in S$ -re, de x-et nem fedi le $X_{n_1 \dots n_k}$. Ha $x \in X_{m_1 \dots m_k}$, akkor $(m_1, \dots, m_k) \neq (n_1, \dots, n_k)$. Az $f(x)$ pont közös pontja az $I_{n_1 \dots n_k}$ és $I_{m_1 \dots m_k}$ intervallumoknak, tehát $f(x)$ az $I_{n_1 \dots n_k}$ intervallum egyik végpontja kell hogy legyen. Ezzel beláttuk, hogy $x \in M$.

Mivel $\mu(Y \setminus M) = \mu(Y) \geq 1/2$, ezért az $X_{n_1 \dots n_k}$ $((n_1, \dots, n_k) \in S)$ halmazok mértékösszege legalább 1/2. Az $I_{n_1 \dots n_k}$ $((n_1, \dots, n_k) \in S)$ intervallumok hosszösszege ugyanez az összeg, tehát nem lehet 1/2-nél kisebb. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy $\lambda(f(Y)) \geq 1/2$. Az f függvényt kiterjeszthetjük X-re egyenletesen folytonos függvényként, amivel a tételt beláttuk. $\square$

Az 1. Tétel bizonyítása. (L)$\Longrightarrow$(C): Ha M tetszőleges megszámlálható és sűrű halmaz X-ben, akkor könnyen láthatóan X M-re koncentrált.

(C)$\Longrightarrow$(SN): Legyen $M = \{x_1, x_2, \dots\} \subset X$ olyan megszámlálható halmaz, hogy X M-re koncentrált. Legyenek ε_n $(n = 1, 2, \dots)$ tetszőleges pozitív számok. Ha $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, \varepsilon_{2n}/3)$, akkor $X \setminus G$ megszámlálható, amiből világos, hogy X (SN).

(SN)$\Longrightarrow$(SUN): Világos, hogy X szeparábilis. Az 2. Lemmából egyszerűen következik, hogy X (UN).

A (B)$\Longrightarrow$(F)$\Longrightarrow$(E) implikációk triviálisak. Az (E)$\Longrightarrow$(UN) impliációt beláttuk a 8. Tételben.

(L)$\Longrightarrow$(B): Tegyük fel, hogy (B) nem igaz, és legyen $f : X \to \mathbb{R}$ olyan Borel-mérhető függvény, amelyre $\lambda(f(X)) > 0$. Tudjuk, hogy f Baire-tulajdonságú, tehát van egy első kategóriájú H halmaz X-ben, amelyre az $f|_{X\setminus H}$ megszorítás folytonos. Mivel X Luzin, ezért H megszámlálható. Legyen $M \subset X \setminus H$ olyan megszámlálható halmaz, amely sűrű $X \setminus H$-ban. Ekkor $f(M)$ megszámlálható, tehát van olyan $G \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, amelyre $f(M) \subset G$ és $\lambda(G) < \lambda(f(X))$. Az $f^{-1}(G)$ halmaz relatíve sűrű és nyílt $X \setminus H$-ban, tehát $(X \setminus H) \setminus f^{-1}(G)$ sehol sem sűrű $X \setminus H$-ban, tehát X-ben is, tehát megszámlálható. Így $f(X)$ csak egy megszámlálható halmazzal lehet bővebb G-nél, tehát $\lambda(f(X)) \leq \lambda(G)$, ami lehetetlen.

(C)$\Longrightarrow$(F): Legyen $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos. Tegyük fel, hogy $\lambda(f(X)) > 0$. Legyen $M \subset X$ olyan megszámlálható halmaz, amelyre teljesül, hogy X M-re koncentrált. Ekkor $f(M)$ megszámlálható, tehát van olyan $G \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, amelyre $f(M) \subset G$ és $\lambda(G) < \lambda(f(X))$. Az $f^{-1}(G)$ nyílt és tartalmazza M-et, tehát $X \setminus f^{-1}(G)$ megszámlálható. Így $f(X)$ csak egy megszámlálható halmazzal lehet bővebb G-nél, tehát $\lambda(f(X)) \leq \lambda(G)$, ami lehetetlen.

(SN)$\Longrightarrow$(E): Ez világos.

(SUN)$\Longrightarrow$(UN): Triviális. Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

Kiegészítések az 1. Tételhez.

Először is megjegyezzük, hogy a (B) feltétel ekvivalens a következővel: *ha egy Y metrikus tér az X tér Borel-mérhető leképezés általi képe, akkor Y (UN).* Világos, hogy ez utóbbi tulajdonságból következik (B). A fordított irányt bizonyítandó tegyük fel, hogy (B) igaz, és legyen $Y = f(X)$ metrikus tér, ahol f Borel-mérhető. Ha $g : Y \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető, akkor $g \circ f$ is, tehát X (B)-tulajdonsága alapján $g(Y) = (g \circ f)(X)$ Lebesgue-nullmértékű. Így Y-ra teljesül (B), tehát (UN) is.

Most belátjuk, hogy az (F) feltétel ekvivalens a következővel: *ha egy Y metrikus tér az X tér folytonos képe, akkor Y (UN).* Világos, hogy ez utóbbi tulajdonságból következik (F). A fordított irányt bizonyítandó tegyük fel, hogy (F) igaz, és legyen $Y = f(X)$ metrikus tér, ahol f folytonos. Ha $g : Y \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $g \circ f$ is, tehát X (F)-tulajdonsága alapján $g(Y) = (g \circ f)(X)$ Lebesgue-nullmértékű. Így Y-ra teljesül (F), tehát (UN) is.

Ugyanígy láthatjuk be, hogy az (E) feltétel ekvivalens a következővel: *ha egy Y metrikus tér az X tér egyenletesen folytonos képe, akkor Y (UN).*

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy az 1. Tételben szereplő implikációk megfordításai nem bizonyíthatóak ZFC-ben.

Tétel 9 [Rothberger] *Ha* (CH) *igaz, akkor van olyan halmaz $\mathbb{R}$-ben, amely $\mathbb{Q}$-ra koncentrált és amely kölcsönösen egyértelműen és folytonosan $\mathbb{R}$-re képezhető.*

Bizonyítás. Jelöljük N-nel az irracionális számok halmazát. Ismeretes, hogy N és $N \times N$ homeomorfak; legyen ϕ egy homeomorfizmus N-ről $N \times N$-re. Legyen G_α $(\alpha < \omega_1)$ a $\mathbb{Q}$-t tartalmazó nyílt halmazok egy felsorolása, és legyen c_α $(\alpha < \omega_1)$ az N elemeinek egy felsorolása.

Minden $\alpha < \omega_1$-re az $U_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} G_\beta$ halmaz G_δ és sűrű, mert tartalmazza $\mathbb{Q}$-t. Belátjuk, hogy minden $c \in N$-re $U_\alpha \cap \phi^{-1}(\{c\} \times N) \neq \emptyset$.

Az $N \setminus U_\alpha = \mathbb{R} \setminus U_\alpha$ halmaz F_σ, tehát σ-kompakt. Így $\phi(N \setminus U_\alpha)$ is σ-kompakt. Mivel $\{c\} \times N$ nem σ-kompakt, ezért $(\{c\} \times N) \setminus \phi(N \setminus U_\alpha)$ nem üres, és így

$$U_\alpha \cap \phi^{-1}(\{c\} \times N) = \phi^{-1}\left((\{c\} \times N) \setminus \phi(N \setminus U_\alpha)\right) \neq \emptyset.$$

Válasszunk ki minden $\alpha < \omega_1$-re egy $x_\alpha \in U_\alpha \cap \phi^{-1}(\{c_\alpha\} \times N)$ pontot, és legyen $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Ekkor X koncentrált, hiszen ha $G \supset \mathbb{Q}$ nyílt, akkor $G = G_\alpha$ valamely $\alpha < \omega_1$-re, tehát $X \setminus G \subset \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$ megszámlálható. A $\phi(X)$ halmaz homeomorf X-szel, és minden $c \in N$-re $\phi(N) \cap (\{c\} \times N)$ pontosan egyelemű. Így a vetítés $\phi(X)$-et kölcsönösen egyértelműen és folytonosan N-re képezi. Másrészt N kölcsönösen egyértelműen és folytonosan $\mathbb{R}$-re képezhető, amivel a tételt beláttuk. $\square$

A fenti tételben szereplő X halmaz (SN). Így (CH) esetén nem teljesül (SN)$\Longrightarrow$(F).

Legyen X a 9. Tételben konstruált halmaz, és legyen f olyan folytonos függvény, amely X-et $\mathbb{R}$-re képezi. Legyen $Y = X \cup \mathbb{Q}$. Világos, hogy Y kielégíti a (C) feltételt. Az f függvényt tetszőlegesen Y-ra kiterjesztve Borel-mérhető függvényt kapunk, amely Y-t $\mathbb{R}$-re képezi. Így Y-ra nem teljesül (B).

Legyen ϕ 9. Tételben konstruált homeomorfizmus. Ekkor $\phi(X)$ homeomorf X-szel, tehát szeparábilis és (UN), hiszen az (UN) tulajdonság invariáns a homeomorfizmusokra nézve. Mivel $\phi(X)$ egy vetítéssel $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$-ra képezhető, így (CH) esetén nem teljesül (SUN)$\Longrightarrow$(E).

A fenti példák mutatják, hogy (CH) esetén a 1. Tételben szereplő vízszintes nyilak egyike sem fordítható meg.

A következő tétel szerint, ha a κ számosságon van valós mérték, akkor $\kappa >$ non $\mathcal{N}$. Ismert, hogy non $\mathcal{N} > \omega_1$ konzisztens ZFC-vel. Tegyük ezt fel, és legyen X egy ω_1 számosságú diszkrét metrikus tér. Ekkor minden, X-et $\mathbb{R}$-be képező függvény képe nullmértékű, tehát X-re teljesül (B). Másrészt X nem szeparábilis, ami azt mutatja hogy a függőleges nyilak egyike sem fordítható meg.

ZFC-vel konzisztens, hogy a függőleges nyilak (az utolsó kivételével) akkor sem fordíthatók meg, ha csak szeparábilis metrikus tereket tekintünk. Ismeretes ui., hogy ZFC-nek van olyan modellje, amelyben non $\mathcal{N} > \omega_1$, valamint $\mathbb{R}$ ω_1 számosságú részhalmazai nem rendelkeznek az (SN) tulajdonsággal. Ebben a modellben $\mathbb{R}$ tetszőleges ω_1 számosságú X részhalmaza rendelkezik a (B) tulajdonsággal (hiszen X minden $\mathbb{R}$-beli képe nullmértékű), de nem rendelkezik az (SN) tulajdonsággal. Így ebben a modellben nem igaz a (B)$\Longrightarrow$(SN) implikáció.

Tétel 10 *Ha a κ számosságon van valós mérték, akkor $\kappa >$ non $\mathcal{N}$.*

Bizonyítás. A 4. Következmény szerint $\kappa \geq$ non $\mathcal{N}$, tehát elég belátni, hogy $\kappa \neq$ non $\mathcal{N}$. Tegyük fel, hogy $\kappa =$ non $\mathcal{N}$, és legyen $X \subset \mathbb{R}$ olyan halmaz, amelyre $|X| = \kappa =$ non $\mathcal{N}$ és $\lambda(X) = 1$. Legyen $X = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ és $X_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ minden $\alpha < \kappa$-ra. Legyen μ folytonos mérték $P(X)$-en, amelyre $\mu(X) = 1$. Ekkor $\mu(X_\alpha) = 0$ és $\lambda(X_\alpha) = 0$ minden $\alpha < \kappa$-ra. (Mindkét állítás abból következik, hogy $|X_\alpha| < \kappa =$ non $\mathcal{N}$.)

Legyen $\mathcal{A} = \{X \cap B : B \subset \mathbb{R}$ Borel$\}$, ekkor λ mérték $\mathcal{A}$-n. Legyen $\{B_n : n = 1, 2, \ldots\}$ egy bázis $\mathbb{R}$-ben. Minden $\alpha < \kappa$-ra van olyan G_α nyílt halmaz, hogy $X_\alpha \subset G_\alpha$ és $\lambda(G_\alpha) < 1/2$. Legyen $U_n = \{x_\alpha : B_n \subset G_\alpha\}$

minden n-re, és legyen

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((X \cap B_n) \times U_n).$$

Ekkor $A \subset X \times X$, és A mérhető abban a szorzattérben, amelynek az első tényezője $(X, \mathcal{A}, \lambda)$, második tényezője $(X, P(X), \mu)$.

Ha $\alpha < \beta < \kappa$, akkor $x_\alpha \in X_\beta \subset G_\beta$, tehát van olyan B_n, hogy $x_\alpha \in B_n \subset G_\beta$, és így $x_\beta \in U_n$ és $(x_\alpha, x_\beta) \in A$. Ebből $A_{x_\alpha} \supset X \setminus (X \cup \{x_\alpha\})$ és $\mu(A_{x_\alpha}) = 1$ minden α-ra, tehát A mértéke a szorzatmérték szerint 1.

Másrészt, ha $(x_\alpha, x_\beta) \in A$, akkor alkalmas n-nel $x_\beta \in U_n$ és $x_\alpha \in B_n \subset G_\beta$, tehát $A^{x_\beta} \subset G_\beta$ és $\lambda\left(A^{x_\beta}\right) < 1/2$. Így A mértéke a szorzatmérték szerint $\leq 1/2$, ami lehetetlen. $\square$