Debreceni Egyetem

Természettudományi Kar

Losonczi László

Funkcionálanalízis

2009

Tartalomjegyzék

0.1. Előszó

Ez a jegyzet eredetileg a KLTE, TTK, matematikus hallgatói számára készült. Az első kiadás 1982-ben a Tankönyvkiadónál jelent meg, majd néhány év elteltével egy utánnyomásra is sor került. Ezen kiadások példányai már nincsenek forgalomban, de a funkcionálanalízist jelenleg is oktatunk, és ez (remélhetőleg) a jövőben sem fog változni. Főleg a KLTE Matematikai Intézet, Analízis Tanszékén lévő kollégáim rábeszélésére vállalkoztam arra, hogy ezt a jegyzetet LaTeX formátumban újragépeltessem (lényegében változatlan tartalommal) és mindenki számára hozzáférhetővé tegyem. Az eredeti jegyzetben talált hibákat, elírásokat kijavítottam, de a LaTeX szerkesztésnél ismét nagyon sok elírás, hiba keletkezett. Ezek kijavításában Barczy Mátyás kollégám segített, aki tüzetesen átnézte a javítás javítását is. Molnár Lajos, aki a Debreceni Egyetemen évek óta oktatja a funkcionálanalízis c. tárgyat, szintén átolvasta a kéziratot, több hibára hívta fel a figyelmemet, és több kisebb változtatást is javasolt. Mindkettőjük segítségét ezúton is köszönöm. 1967-től 1971-ig Czách László aspiránsvezető irányítása mellett ismertem meg a funkcionálanalízis részleteit, az Ő hatása természetesen érezhető a jegyzeten is.

A sok javítás ellenére is biztosan maradtak hibák a kéziratban. Hálás volnék, ha az olvasó az általa észrevett hibákról tájékoztatna, a Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet, Analízis Tanszék honlapján található e-mail címemen.

Debrecen, 2009. december 9. Losonczi László

0.2. Jelölések

0.3. Ábrák jegyzéke

1. fejezet

Metrikus terek

1.1. Metrikus tér fogalma, példák

1.1.1. Definíció. Az X nem üres halmazt *metrikus tér*nek nevezzük, ha X bármely két x, y eleméhez hozzá van rendelve egy $\varrho(x, y)$ valós szám úgy, hogy

(1) $\varrho(x, y) \geq 0$ és $\varrho(x, y) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x = y$,

(2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,

(3) $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$

teljesül bármely $x, y, z \in X$ esetén.
Az X halmaz elemeit *pont*oknak, a ϱ függvényt *metriká*nak vagy *távolság*nak, a $\varrho(x, y)$ számot x és y *távolságá*nak nevezzük.

Egy metrikus térnek egy másik metrikus térre való távolságtartó leképezését *izometriá*nak, vagy *izometrikus leképezés*nek nevezzük (egy ilyen leképezés mindig kölcsönösen egyértelmű, mert a különböző pontok képe különböző). Két metrikus teret *izometrikus*nak nevezünk, ha köztük izometria létesíthető.

Egy X metrikus tér egy nem üres Y részhalmaza maga is metrikus tér (X metrikájával ellátva), melyet az X metrikus tér *alteré*nek nevezünk. $\diamondsuit$

Az (1)–(3) tulajdonságok (a metrika axiómái) azt fejezik ki, hogy a távolság *nemnegatív*, és csak különböző pontok távolsága pozitív, a távolság *szimmetrikus*, és teljesül a *háromszög-egyenlőtlenség*.

A háromszög-egyenlőtlenséget n-szer alkalmazva kapjuk, a

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z_1) + \varrho(z_1, z_2) + \cdots + \varrho(z_n, y) \qquad (x, y, z_1, \ldots, z_n \in X)$$

*sokszög-egyenlőtlenség*et.

Speciálisan $n = 2$-re

$$\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z_1) + \varrho(z_1,z_2) + \varrho(z_2,y),$$

vagy

$$\varrho(x,y) - \varrho(z_1,z_2) \leq \varrho(x,z_1) + \varrho(z_2,y).$$

Az x és z_1 valamint y és z_2 szerepét megcserélve az egyenlőtlenség jobb oldala nem változik, így

$$\varrho(z_1,z_2) - \varrho(x,y) \leq \varrho(x,z_1) + \varrho(z_2,y).$$

Az utolsó két egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$|\varrho(x,y) - \varrho(z_1,z_2)| \leq \varrho(x,z_1) + \varrho(y,z_2),$$

melyet *négyszög-egyenlőtlenség*nek fogunk nevezni.

Ugyanazon halmazon többféle metrika is értelmezhető. Ezért, ha a félreértés veszélye áll fenn, akkor az X metrikus teret a ϱ metrikával ellátva (X,ϱ)-val fogjuk jelölni.

A következőkben $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ a valós és a komplex számok halmazát jelölik.

Tegyük fel, hogy X egy nem üres halmaz és a $\varrho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ függvény csak a (2), (3) tulajdonságokat és az (1) első részét ($\varrho(x,y) \geq 0$ és $\varrho(x,x) = 0$ bármely $x,y \in X$-re) teljesíti. Definiáljuk a $\equiv$ relációt a következőképpen

$$x \equiv y \text{ , ha } \varrho(x,y) = 0 \qquad (x,y \in X).$$

ϱ metrika tulajdonságai miatt $\equiv$ ekvivalencia reláció: reflexív, szimmetrikus és tranzitív, így az X halmazon egy osztályozást indukál, oly módon, hogy ekvivalens elemek azonos osztályba kerülnek. Jelölje $\tilde{x}$ az x elem osztályát, azaz legyen $\tilde{x} = \{y \in X \mid \varrho(x,y) = 0\}$, és jelölje $\tilde{X}$ az összes osztályok halmazát. Könnyű belátni, hogy $\tilde{X}$-on a

$$\tilde{\varrho}(\tilde{x},\tilde{y}) = \varrho(x,y) \qquad (\tilde{x},\tilde{y} \in \tilde{X})$$

egyenlőséggel definiált $\tilde{\varrho}$ függvény metrika lesz. Ez azt jelenti, hogy az X halmaz elemei között egy új egyenlőséget, az $\equiv$-t bevezetve X metrikus tér lesz ϱ metrikával. Példáinkban ez a szituáció többször is elő fog fordulni.

Példák metrikus terekre

1. Legyen X egy tetszőleges nem üres halmaz, $x,y \in X$ és

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = y, \\ 1 & \text{ha } x \neq y. \end{cases}$$

   Azonnal látható, hogy ϱ metrika X-en, melyet *diszkrét metriká*nak nevezünk.

2. Legyen $X = \{\ x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\ \mid\ \xi_i \in \mathbb{C}\quad (i = 1, 2, \ldots, n)\ \}$ a komplex szám n-esek halmaza. Legyen $1 \le p \le \infty$ és $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in X$ esetben

$$\varrho_p(x, y) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{ha } 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1 \le i \le n} |\xi_i - \eta_i| & \text{ha } p = \infty. \end{cases}$$

ϱ_p metrika, mellyel ellátva X-et, kapjuk az $l_p^{(n)}$ *metrikus ter*et. A $p = 2$ esetén az n-dimenziós komplex Euklideszi teret kapjuk.

3. Ismét $1 \le p \le \infty$, és

$$l_p = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \,\middle|\, \xi_i \in \mathbb{C}\, (i \in \mathbb{N}) \text{ és } \begin{array}{ll} \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty & \text{ha } 1 \le p < \infty \\ \sup\limits_i |\xi_i| < \infty & \text{ha } p = \infty \end{array} \right\}.$$

A metrika a 2. példával analóg módon van definiálva: tetszőleges $x, y \in l_p$ esetén

$$\varrho_p(x, y) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{ha } 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{i} |\xi_i - \eta_i| & \text{ha } p = \infty. \end{cases}$$

4. A c teret a *konvergens komplex számsorozatok* alkotják, a metrika ugyanaz, mint l_∞-ben.

5. A c_0 tér elemei a *komplex nullsorozatok*, a metrika ugyanaz, mint vagy mint l_∞-ben.

6. A s tér elemei az *összes komplex számsorozatok*, $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots) \in s$ esetén

$$\varrho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}.$$

7. Legyen X egy kompakt Hausdorff-féle topológikus tér. Az X-en definiált *összes komplex értékű folytonos függvények* halmazát a

$$\varrho(x, y) = \sup_{t \in X} |x(t) - y(t)| \qquad (x, y : X \to \mathbb{C} \text{ folytonosak})$$

metrikával ellátva kapjuk a $C(X)$ metrikus teret.

8. Legyen $(X, \mathcal{S}, \mu)$ egy tetszőleges véges mértéktér. Jelölje $S = S(X, \mathcal{S}, \mu)$ az X-en értelmezett *komplex értékű mérhető függvények* halmazát. Két S-beli függvényt egyenlőnek tekintve, ha azok majdnem mindenütt egyenlők, a

$$\varrho(x, y) = \int\limits_X \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} \, d\mu_t \qquad (x, y \in S)$$

formula metrikát definiál S-en.

9. Legyen $(X, \mathcal{S}, \mu)$ egy tetszőleges mértéktér, $p \geq 1$ egy valós szám, és $L_p = L_p(X, \mathcal{S}, \mu)$ jelölje azon $x : X \to \mathbb{C}$ mérhető függvények halmazát, melyekre

$$\int\limits_X |x(t)|^p \, d\mu_t < \infty.$$

Két L_p-beli függvényt azonosnak tekintünk, ha azok majdnem mindenütt egyenlőek. A metrika definíciója L_p-ben:

$$\varrho_p(x, y) = \left(\int\limits_X |x(t) - y(t)|^p \, d\mu_t \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (x, y \in L_p).$$

10. Legyen $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ismét egy tetszőleges mértéktér, és $L_\infty = L_\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ jelölje azon $x : X \to \mathbb{C}$ mérhető függvények halmazát, melyek abszolút értéke egy nullmértékű halmaztól eltekintve korlátos. Két L_∞-beli függvényt egyenlőnek tekintünk, ha azok majdnem mindenütt egyenlők. A metrika definiciója L_∞-ben:

$$\varrho_\infty(x, y) = \inf_{\substack{E \in \mathcal{S} \\ \mu E = 0}} \left(\sup_{t \in X \setminus E} |x(t) - y(t)| \right) \qquad (x, y \in L_\infty).$$

Ha a 2-9. példákban a sorozatok, illetve függvények értékei valós számok, úgy ismét metrikus teret kapunk, melyeket valós $l_p^{(n)}, l_p, \ldots, L_\infty$ tereknek nevezünk. (Az L_p és S tereknél megengedhetjük azt is, hogy a függvények értékei a bővített valós számok halmazába essenek, de ekkor az S tér esetén ki kell kötni azt, hogy a függvények majdnem mindenütt végesek legyenek.)
Azt, hogy a 2-9. példák valóban metrikus terek a következő szakaszban fogjuk bizonyítani.
Ha a 7. példában $X = [a, b]$ egy korlátos zárt intervallum, akkor a $C([a, b])$ jelölés helyett $C[a, b]$-t használjuk, míg ha a 9-10. példákban $X = [a, b]$ vagy (a, b) a Lebesgue-mértékkel van ellátva, úgy az $L_p[a, b]$ vagy $L_p(a, b)$ jelölést használjuk.

1.2. A Hölder és Minkowski egyenlőtlenség

Megmutatjuk, hogy az **1.1**-ben szereplő 2-9. példákban definiált terek valóban metrikus terek, azaz kielégítik a metrika axiómáit.

Elegendő ezt az S, $L_p(1 \leq p \leq \infty)$ és a $C(X)$ terek esetén igazolni, ugyanis a mértéktér alkalmas megválasztásával S-ből s, L_p-ből l_p, $l_p^{(n)}$ speciális esetenként megkapható, c_0, c-ben pedig a metrika ugyanaz, mint l_∞-ben.

1.2.1. Tétel. *A* $\varrho(x,y) = \int\limits_X \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|} d\mu_t$ *függvény metrika S-en.*

Bizonyítás. Mivel a mértéktér véges, világos, hogy $0 \leq \varrho(x,y) < \infty$. Ha $\varrho(x,y) = 0$, úgy $x(t) = y(t)$ majdnem mindenütt, tehát $x = y$ az S térben. Az abszolút érték jel miatt $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$. A háromszög-egyenlőtlenség bizonyításához tekintsük a

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda} = 1 - \frac{1}{1+\lambda} \qquad (\lambda \geq 0)$$

függvényt. Látható, hogy φ szigorúan monoton növekvő, így bármely u, $v \in \mathbb{C}$ esetén

$$\frac{|u+v|}{1+|u+v|} \leq \frac{|u|+|v|}{1+|u|+|v|} = \frac{|u|}{1+|u|+|v|} + \frac{|v|}{1+|u|+|v|} \leq \frac{|u|}{1+|u|} + \frac{|v|}{1+|v|},$$

amiből $u = x(t) - y(t)$, $v = y(t) - z(t)$ helyettesítéssel, integrálás után a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk. □

Ahhoz, hogy bebizonyítsuk azt, hogy

$$\varrho_p(x,y) = \left(\int\limits_X |x(t)-y(t)|^p d\mu_t \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty)$$

metrika L_p-n, szükségünk van a Hölder és a Minkowski egyenlőtlenségre.

1.2.2. Tétel. (Hölder egyenlőtlenség) *Ha* $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x \in L_p$ *és* $y \in L_q$, *akkor* $xy \in L_1$,

$$\left| \int\limits_X x(t)y(t) d\mu_t \right| \leq \int\limits_X |x(t)y(t)| d\mu_t, \tag{1.2.1}$$

és

$$\int_X |x(t)y(t)|d\mu_t \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q, \tag{1.2.2}$$

ahol

$$\|x\|_p = \varrho_p(x,0) = \left(\int_X |x(t)|^p d\mu_t\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|y\|_q = \varrho_q(y,0).$$

(1.2.1)*-ben akkor és csakis akkor van egyenlőség, ha*

$$\operatorname{sgn}\left(x(t)y(t)\right) = \textit{konstans} \tag{1.2.3}$$

majdnem mindenütt az $X' := \{\ t \in X \mid x(t)y(t) \neq 0\ \}$ *halmazon, (ahol* $\operatorname{sgn} z = \dfrac{z}{|z|}$ *ha* $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$*, és* $\operatorname{sgn} 0 = 0$*).*
(1.2.2)*-ben pontosan akkor van egyenlőség, ha*

$$\alpha|x(t)|^p = \beta|y(t)|^q \tag{1.2.4}$$

majdnem minden $t \in X-$*re teljesül* $\alpha, \beta \geq 0, \alpha^2 + \beta^2 > 0$ *konstansokkal.*

Bizonyítás. A Taylor-formula szerint bármely $a, b > 0$-ra

$$\ln a^p = \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) + \frac{1}{\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}\left(a^p - \frac{a^p}{p} - \frac{b^q}{q}\right) - \frac{1}{2\xi^2}\left(a^p - \frac{a^p}{p} - \frac{b^q}{q}\right)^2$$

$$\ln b^q = \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) + \frac{1}{\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}\left(b^q - \frac{a^p}{p} - \frac{b^q}{q}\right) - \frac{1}{2\eta^2}\left(b^q - \frac{a^p}{p} - \frac{b^q}{q}\right)^2$$

ahol ξ illetve η az a^p illetve b^q és $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ közötti értékek. Az első egyenlőtlenség $\dfrac{1}{p}$ -szeresét a második egyenlőtlenség $\dfrac{1}{q}$ -szorosához adva kapjuk, hogy

$$\ln ab = \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) - \frac{1}{2p\xi^2}\left(\frac{b^q - a^p}{q}\right)^2 - \frac{1}{2q\eta^2}\left(\frac{a^p - b^q}{p}\right)^2 \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$$

amiből

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.2.5}$$

és itt egyenlőség csak $a^p = b^q$ esetén van. Ez nyilvánvalóan igaz $a \geq 0$, $b \geq 0$ esetén is.

Helyettesítsünk (1.2.5)-ben $a = \dfrac{|x(t)|}{\|x\|_p}$, $b = \dfrac{|y(t)|}{\|y\|_q}$ -t feltéve, hogy $\|x\|_p\|y\|_q \neq 0$. A kapott egyenlőtlenséget integrálva kapjuk, hogy

$$\frac{\int_X |x(t)y(t)|d\mu_t}{\|x\|_p\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^q} = 1,$$

amiből következik $xy \in L_1$ és (1.2.2). Az (1.2.1) egyenlőtlenség $xy \in L_1$-ből és az integrál alaptulajdonságaiból következik. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn (1.2.2)-ben, ha $\dfrac{|x(t)|^p}{\|x\|_p^p} = \dfrac{|y(t)|^q}{\|y\|_q^q}$ majdnem minden $t \in X$-re teljesül, azaz, ha (1.2.4) fennáll $\beta = \|x\|_p^p$, $\alpha = \|y\|_q^q$-val.

Ha $\|x\|_p\|y\|_q = 0$, úgy $\|x\|_p = 0$ vagy $\|y\|_q = 0$. Ha például $\|x\|_p = 0$, akkor $x(t) = 0$ majdnem minden $t \in X$-re, így (1.2.2)-ben egyenlőség van, és $\alpha = 1$, $\beta = 0$-val (1.2.4) is teljesül. Az $\|y\|_q = 0$ eset hasonló.

Vizsgáljuk meg hogy *mikor van egyenlőség* (1.2.1)-ben! Vezessük be a $h(t) = x(t)y(t)$ $(t \in X)$ jelölést, akkor $h \in L_1$ miatt

$$\left|\int_X h(t)d\mu_t\right| \leq \int_X |h(t)|d\mu_t. \tag{1.2.6}$$

Ha $\operatorname{sgn} h(t) = e^{i\gamma}$ $(\gamma \in \mathbb{R})$ majdnem mindenütt X'-n, akkor

$$\int_X h(t)d\mu_t = \int_X e^{i\gamma}|h(t)|d\mu_t = e^{i\gamma}\int_X |h(t)|d\mu_t,$$

így (1.2.6)-ban egyenlőség van. Fordítva, tegyük fel, hogy (1.2.6)-ban egyenlőség van. Ez akkor is fennáll, ha az integrációs halmazt X'-re cseréljük, azaz, ha

$$\int_{X'} |h(t)|d\mu_t = \left|\int_{X'} h(t)d\mu_t\right| = e^{i\delta}\int_{X'} h(t)d\mu_t,$$

alkalmas $\delta \in \mathbb{R}$ számmal. Az

$$e^{i\delta}h(t) = u(t) + iv(t)$$

felbontással, ahol u, v valós értékű függvények, kapjuk, hogy

$$\int_{X'} |h(t)|d\mu_t = \left|\int_{X'} h(t)d\mu_t\right| = \int_{X'} e^{i\delta}h(t)d\mu_t = \int_{X'} u(t)d\mu_t + i\int_{X'} v(t)d\mu_t,$$

amiből $\int\limits_{X'} v(t)d\mu_t = 0$, $\int\limits_{X'} u(t)d\mu_t \geq 0$.

Mivel $|h| = |e^{i\delta}h| = (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}$, így integrálással

$$\int\limits_{X'} u = \int\limits_{X'} |h| = \int\limits_{X'} |e^{i\delta}h| = \int\limits_{X'} (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}},$$

továbbá

$$\int\limits_{X'} u \leq \int\limits_{X'} |u| \leq \int\limits_{X'} (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} = \int\limits_{X'} u.$$

Ebből következik, hogy $u(t) \geq 0$ majdnem mindenütt X'-n, mert, ha $u(t) < 0$ volna X' egy pozitív mértékű részén, akkor innen $\int\limits_{X'} |u| < 0$-t kapnánk, ami lehetetlen. Az is következik, hogy $v(t) = 0$ majdnem mindenütt X'-n ti. ellenkező esetben $\int\limits_{X'} (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} > \int\limits_{X'} u$ volna, ami nem lehet.

Az $e^{i\delta}h = u + iv$ felbontás alapján, majdnem minden X'-beli pontban

$$|h| = |e^{i\delta}h = (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} = |u| = u, \quad h = e^{-i\delta}(u+v) = e^{-i\delta}u$$

amiből $h(t) = e^{-i\delta}|h(t)|$ majdnem mindenütt X'-n.

□

1.2.3. Tétel. (Minkowski egyenlőtlenség) *Ha* $1 \leq p < \infty$, $x, y \in L_p$, *akkor* $x + y \in L_p$ *és*

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{1.2.7}$$

(1.2.6)*-ban* $p = 1$*-nél egyenlőség pontosan akkor van, ha*

$$\frac{y(t)}{x(t)} \geq 0 \tag{1.2.8}$$

majdnem minden $t \in N'_x$ *esetén fennáll, ahol*

$$N'_x = \{\ t \in X \ \mid\ x(t) \neq 0\ \}.$$

$1 < p < \infty$ *esetén* (1.2.7)*-ban akkor és csakis akkor áll fenn egyenlőség, ha*

$$\alpha x(t) = \beta y(t) \tag{1.2.9}$$

majdnem minden $t \in X$*-re fennáll,* $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ *konstansokkal.*

Bizonyítás. $p = 1$-nél (1.2.7) az

$$|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)|$$

egyenlőtlenség integrálásával adódik. $1 < p < \infty$-nél

$$\begin{aligned}|x(t)+y(t)|^p &\le \Big(|x(t)|+|y(t)|\Big)^p \le \Big(2\max\big\{|x(t)|,|y(t)|\big\}\Big)^p\\ &= 2^p\max\big\{|x(t)|^p,|y(t)|^p\big\} \le 2^p\Big(|x(t)|^p+|y(t)|^p\Big),\end{aligned}$$

amiből következik, hogy $|x+y|^p \in L_1$, azaz $x+y \in L_p$. Ezért az

$$\int\limits_X |x(t)+y(t)|^p d\mu_t \le \int\limits_X |x(t)+y(t)|^{p-1}|x(t)|d\mu_t + \int\limits_X |x(t)+y(t)|^{p-1}|y(t)|d\mu_t \tag{1.2.10}$$

egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő integrálokra alkalmazható a Hölder egyenlőtlenség, mert $|x+y|^{(p-1)q} = |x+y|^p \in L_1$ miatt $|x+y|^{p-1} \in L_q$, ahol $q = \frac{p}{p-1}$, és a feltevés szerint $x, y \in L_p$. Ezért

$$\int\limits_X |x(t)+y(t)|^{p-1}|x(t)|d\mu_t \le \left(\int\limits_X |x(t)+y(t)|^p d\mu_t\right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p \tag{1.2.11}$$

$$\int\limits_X |x(t)+y(t)|^{p-1}|y(t)|d\mu_t \le \left(\int\limits_X |x(t)+y(t)|^p d\mu_t\right)^{\frac{1}{q}} \|y\|_p \tag{1.2.12}$$

és (1.2.10)-ből

$$\|x+y\|_p^p \le \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}} \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \tag{1.2.13}$$

adódik. Ha $\|x+y\|_p \ne 0$, akkor $\|x+y\|_p^{\frac{p}{q}}$-val osztva kapjuk (1.2.7)-et, ha $\|x+y\|_p = 0$, akkor (1.2.7) nyilvánvalóan igaz.

Vizsgáljuk meg, mikor van egyenlőség (1.2.7)*-ben!* $p = 1$-nél ennek az a szükséges és elegendő feltétele, hogy

$$|x(t)+y(t)| = |x(t)| + |y(t)| \tag{1.2.14}$$

majdnem minden $t \in X$-re teljesüljön. Ha

$$N_x = \{\ t \in X \ \mid\ x(t) = 0\ \} \quad \text{és} \quad N'_x = X \setminus N_x = \{\ t \in X \ \mid\ x(t) \ne 0\ \},$$

akkor (1.2.14) a $t \in N_x$ értékekre mindig teljesül. Így (1.2.7)-ben akkor és csakis akkor van egyenlőség, ha

$$|x(t)+y(t)| = |x(t)| + |y(t)| \qquad \text{majdnem minden } t \in N'_x\text{-re}$$

vagy, ezzel ekivivalens módon

$$\left|1 + \frac{y(t)}{x(t)}\right| = 1 + \left|\frac{y(t)}{x(t)}\right| \qquad \text{majdnem minden } t \in N'_x\text{-re.}$$

Ez pontosan akkor igaz, ha $\frac{y(t)}{x(t)}$ majdnem minden $t \in N'_x$-re valós és nemnegatív, azaz ha (1.2.8) fennáll.

Ha $1 < p < \infty$, akkor könnyű belátni, hogy (1.2.9) teljesülése esetén (1.2.7)-ben egyenlőség van. Megmutatjuk, hogy ez fordítva is igaz.

Ha $\|x + y\|_p = 0$ és (1.2.7)-ben egyenlőség van, akkor $\|x\|_p = \|y\|_p = 0$, azaz $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ majdnem minden $t \in X$-re. Így pl. $\alpha = \beta = 1$-gyel (1.2.9) fennáll.
Ha $\|x+y\|_p \neq 0$ és (1.2.7)-ben egyenlőség van, akkor (amint (1.2.7) bizonyításából látható) egyenlőség kell hogy legyen (1.2.13)-ban, így az (1.2.10), (1.2.11), (1.2.12) egyenlőtlenségekben is. Ennek feltételei rendre ((1.2.11), (1.2.12)-nél felhasználva az 1.2.2 tételt):

$$|x(t) + y(t)| = |x(t)| + |y(t)| \qquad \text{majdnem minden } t \in X\text{-re,} \tag{1.2.15}$$

$$\gamma_1|x(t) + y(t)| = \delta_1|x(t)| \qquad \text{majdnem minden } t \in X\text{-re,} \tag{1.2.16}$$

$$\gamma_2|x(t) + y(t)| = \delta_2|y(t)| \qquad \text{majdnem minden } t \in X\text{-re,} \tag{1.2.17}$$

ahol $\gamma_i, \delta_i \geq 0$, $\gamma_i^2 + \delta_i^2 > 0 \quad (i = 1, 2)$.

Ha $\mu N'_x = 0$, úgy $x(t) = 0$ majdnem minden $t \in X$-re, (1.2.7)-ben egyenlőség van és (1.2.9) pl. $\alpha = 1$, $\beta = 0$-val teljesül. Így feltehető, hogy $\mu N'_x \neq 0$. Ekkor $\gamma_1 \neq 0$, mert ellenkező esetben $\delta_1 = 0$ volna, ami $\gamma_1^2 + \delta_1^2 > 0$ miatt nem lehet. Tudjuk, hogy (1.2.15) pontosan akkor teljesül, ha majdnem minden $t \in N'_x$-re $\frac{y(t)}{x(t)}$ nemnegatív, így (1.2.16), (1.2.15)-ből

$$\frac{\delta_1}{\gamma_1} = \left|1 + \frac{y(t)}{x(t)}\right| = 1 + \frac{y(t)}{x(t)} \qquad \text{majdnem minden } t \in N'_x\text{-re,}$$

azaz

$$y(t) = \alpha x(t) \qquad \text{majdnem minden } t \in N'_x\text{-re,} \tag{1.2.18}$$

ahol $\alpha = \frac{\delta_1}{\gamma_1} - 1$ egy nemnegatív konstans. Továbbá (1.2.16)-ból

$$\gamma_1|y(t)| = 0 \qquad \text{majdnem minden } t \in N_x\text{-re,}$$

amiből $\gamma_1 \neq 0$ miatt $y(t) = 0$ majdnem minden $t \in N_x$-re. Ez

$$y(t) = \alpha x(t) \qquad \text{majdnem minden } t \in N_x\text{-re} \tag{1.2.19}$$

alakba is írható. (1.2.18) és (1.2.19) azt jelenti, hogy

$$y(t) = \alpha x(t) \qquad \text{majdnem minden } t \in X\text{-re},$$

azaz $\beta = 1$-gyel (1.2.9) teljesül. □

A Minkowski egyenlőtlenség $p = \infty$ esetén is érvényes. Többek között ennek igazolásához fogjuk használni a következő tételt.

1.2.4. Tétel. *Bármely $x \in L_\infty$-hez van olyan x-től függő $E_0 \subset X$ nullmértékű halmaz, melyre*

$$\|x\|_\infty = \varrho_\infty(x, 0) = \sup_{t \in X \setminus E_0} |x(t)|. \tag{1.2.20}$$

Bizonyítás. $\|x\|_\infty = \inf\limits_{\substack{E \\ \mu E = 0}} \left(\sup\limits_{t \in X \setminus E} |x(t)| \right)$, így bármely $n \in \mathbb{N}$-hez van olyan E_n nullmértékű halmaz, hogy

$$\|x\|_\infty \leq \sup_{t \in X \setminus E_n} |x(t)| < \|x\|_\infty + \frac{1}{n}.$$

$E_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ szintén nullmértékű, és $E_0 \supset E_n$ miatt

$$\|x\|_\infty \leq \sup_{t \in X \setminus E_0} |x(t)| \leq \sup_{t \in X \setminus E_n} |x(t)| < \|x\|_\infty + \frac{1}{n}.$$

Innen $n \to \infty$-nel kapjuk (1.2.20)-at. □

Következmények.

1. *A (1.2.6) Minkowski egyenlőtlenség $p = \infty$ esetén is érvényes.*

   Legyen ugyanis $x, y \in L_\infty$ és $E_0, F_0 \subset X$ olyan nullmértékű halmazok, hogy

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in X \setminus E_0} |x(t)|, \qquad \|y\|_\infty = \sup_{t \in X \setminus F_0} |y(t)|.$$

   Az

$$|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)| \qquad (t \in X),$$

egyenlőtlenségből

$$\sup_{t\in X\setminus(E_0\cup F_0)}|x(t)+y(t)|\le \sup_{t\in X\setminus(E_0\cup F_0)}|x(t)|+\sup_{t\in X\setminus(E_0\cup F_0)}|y(t)|\le \|x\|_\infty+\|y\|_\infty,$$

de $E_0\cup F_0$ nullmértékű lévén $x+y\in L_\infty$, és egyenlőtlenségünk bal oldala $\|x+y\|_\infty$-nél nem kisebb, tehát

$$\|x+y\|_\infty\le\|x\|_\infty+\|y\|_\infty.$$

2. *Az* (1.2.1) *Hölder egyenlőtlenség* $p=1, q=\infty$ *és* $p=\infty, q=1$ *esetén is érvényes.*

   A szimmetria miatt elég a $p=1, q=\infty$ esettel foglalkozni. Legyen $x\in L_1$, $y\in L_\infty$ és $F_0\subset X$ olyan nullmértékű halmaz, melyre $\|y\|_\infty=\sup\limits_{t\in X\setminus F_0}|y(t)|$. Ekkor

$$\begin{aligned}\|xy\|_1 &=\int_X|x(t)y(t)|d\mu_t=\int_{X\setminus F_0}|x(t)y(t)|d\mu_t\\ &\le\|y\|_\infty\int_{X\setminus F_0}|x(t)|d\mu_t=\|x\|_1\cdot\|y\|_\infty.\end{aligned}$$

1.2.5. Tétel. *A*

$$\varrho_p(x,y)=\begin{cases}\left(\int_X|x(t)-y(t)|^p d\mu_t\right)^{\frac{1}{p}} & \text{ha } 1\le p<\infty,\\[2ex] \inf\limits_{\substack{E\\ \mu E=0}}\left(\sup\limits_{t\in X\setminus E}|x(t)-y(t)|\right) & \text{ha } p=\infty,\end{cases}$$

függvény metrika $L_p(X,\mathcal{S},\mu)$*-n.*

Bizonyítás. $x,y\in L_p$ esetén a Minkowski-egyenlőtlenség miatt $x-y=x+(-1)y\in L_p$, így $\varrho_p(x,y)$ minden $x,y\in L_p$ mellett véges. Világos, hogy $\varrho_p(x,y)\ge 0$ és $\varrho_p(x,y)=0$, ha $x=y$, azaz ha $x(t)=y(t)$ majdnem minden $t\in X$-re. Tegyük fel, hogy $\varrho_p(x,y)=0$.

$1\le p<\infty$ esetén innen $\int_X|x(t)-y(t)|^p d\mu_t=0$, amiből $x(t)=y(t)$ majdnem minden $t\in X$-re.

$p = \infty$ esetén az 1.2.4 tétel szerint van olyan E_0 nullmértékű halmaz, hogy

$$\varrho_\infty(x, y) = \sup_{t \in X \setminus E_0} |x(t) - y(t)| = 0, \qquad \text{amiből } x(t) = y(t), \qquad \text{ha } t \in X \setminus E_0,$$

azaz $x(t) = y(t)$ majdnem minden $t \in X$-re.

A távolság szimmetriája nyilvánvaló, a háromszög-egyenlőtlenséget pedig úgy kaphatjuk meg, hogy az $x - z$ és $z - y$ függvényekre alkalmazzuk a Minkowski-egyenlőtlenséget. □

1.2.6. Tétel. *A $\varrho(x, y) = \sup_{t \in X} |x(t) - y(t)|$ függvény metrika $C(X)$-en.*

Bizonyítás. $x, y, z \in C(X)$-re

$$|x(t) - y(t)| \le |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \qquad (t \in X),$$

amiből a jobb, majd a baloldal szuprémumát véve kapjuk, a háromszög-egyenlőtlenséget. A metrika másik két tulajdonsága nyilvánvalóan teljesül. □

1.3. Konvergencia speciális terekben

1.3.1. Definíció. Legyen X egy metrikus tér ϱ metrikával és $\{x_n\}$ legyen egy X-beli sorozat. Azt mondjuk, hogy az $\{x_n\}$ *sorozat konvergens* (az X metrikus térben) és *határértéke* $x \in X$, ha

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$$

Jelölés:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n, \text{ vagy } x_n \to x \quad (n \to \infty)$$

◊

Azonnal látható, hogy *konvergens sorozat határértéke egyértelmű.* Az alábbiakban az a célunk, hogy az **1.1** szakasz 2-9. példáiban szereplő metrikus terekben lehetőség szerint jellemezzük a konvergens sorozatokat.

1.3.1. Tétel. *A $S = S(X, \mathcal{S}, \mu)$ metrikus térben egy $\{x_n\}$ sorozat akkor és csakis akkor konvergál $x \in S$-hez, ha az $\{x_n\}$ függvénysorozat μ-mértékben konvergál x-hez X-en.*

Bizonyítás. Ha $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, akkor tetszőleges $\sigma > 0$ mellett legyen

$$E_n(\sigma) = \{t \in X \mid |x_n(t) - x(t)| \ge \sigma\}.$$

A $\varphi(\lambda) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ $(\lambda \geq 0)$ függvény monotonitása miatt

$$\varrho(x_n, x) = \int\limits_X \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} d\mu_t \geq \int\limits_{E_n(\sigma)} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} d\mu_t \geq \frac{\sigma}{1+\sigma} \mu E_n(\sigma).$$

Így $\lim\limits_{n\to\infty} \mu E_n(\sigma) = 0$, tehát $\{x_n\}$ μ mértékben konvergál x-hez.

Fordítva, tegyük fel, hogy az $\{x_n\}$ sorozat μ mértékben konvergál x-hez, azaz tetszőleges $\sigma \geq 0$ esetén $\mu E_n(\sigma) \to 0$, ha $n \to \infty$. Ekkor

$$\begin{aligned} \varrho(x_n, x) &= \int\limits_{E_n(\sigma)} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} d\mu_t + \int\limits_{X \setminus E_n(\sigma)} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} d\mu_t \\ &\leq \mu E_n(\sigma) + \frac{\sigma}{1+\sigma} \mu X. \end{aligned}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott, és válasszuk $\sigma = \sigma^* > 0$-t olyanra, hogy $\dfrac{\sigma^*}{1+\sigma^*} \mu X < \dfrac{\varepsilon}{2}$, másrészt $\mu E_n(\sigma^*) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ha $n > N\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, így

$$\varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{ha } n > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

azaz $\{x_n\}$ az x-hez konvergál S-ben. □

1.3.2. Tétel. *A $C(X)$ metrikus térben egy $\{x_n\}$ sorozat akkor és csakis akkor konvergál $x \in C(X)$-hez, ha az $\{x_n\}$ függvyénysorozat egyenletesen konvergál x-hez X-en.*

Bizonyítás. Állításunk következik abból, hogy

$$\varrho(x_n, x) = \sup_{t\in X} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon \iff |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon \qquad (t \in X)$$

□

1.3.1. Következmény. *Mivel a c, c_0, l_∞ terekben a metrika analóg módon van definiálva, így kapjuk, hogy ezekben a terekben a konvergencia éppen a koordinátánkénti egyenletes konvergencia, vagyis ha*

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots), \qquad x = (\xi_1, \xi_2, \dots),$$

akkor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ $(c_0, c$ vagy l_∞-ben) akkor és csakis akkor, ha $n \to \infty$ esetén $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$ az i indexben egyenletesen $i \in \mathbb{N}$-en.

1.3.3. Tétel. *Az* $x_n = \big(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots\big) \in s$ *sorozat akkor és csakis akkor konvergál* $x = \big(\xi_1, \xi_2, \dots\big) \in s$*-hez az* s *térben, ha*

$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Bizonyítás.

$$\varrho(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k|} \geq \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} \qquad (i \in \mathbb{N}),$$

így ha $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$ $(i \in \mathbb{N})$.

A fordított állítás igazolásához legyen $\varepsilon > 0$ adott, és k_0 olyan index, hogy $\sum\limits_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$, $N(\varepsilon)$ pedig olyan, hogy $k = 1, 2, \dots, k_0$ esetén

$$\frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k|} < \frac{\varepsilon}{2k_0}, \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

Ekkor

$$\varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

□

L_p (és l_p)-ben $1 \leq p < \infty$ esetén a konvergencia nem jellemezhető a fentiekhez hasonló egyszerű módon. A $p = \infty$ esetre vonatkozik a következő tétel.

1.3.4. Tétel. *Az* $\{x_n\}$ L_∞*-beli sorozat akkor és csakis akkor konvergál* $x \in L_\infty$*-hez az* L_∞ *térben, ha az* $\{x_n\}$ *függvénysorozat majdnem mindenütt egyenletesen konvergál* x*-hez* X*-en, azaz van olyan (a sorozattól függő)* E_0 *nullmértékű halmaz, hogy* $\{x_n\}$ *egyenletesen konvergál* x*-hez az* $X \setminus E_0$ *halmazon.*

Bizonyítás. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_\infty(x_n, x) = 0$, akkor az $x_n - x$ függvényekhez megkeressük azokat az E_n nullmértékű halmazokat, melyekre

$$\varrho_\infty(x_n, x) = \|x_n - x\|_\infty = \sup_{t \in X \setminus E_n} |x_n(t) - x(t)|$$

teljesül (lásd az 1.2.4 tételt). $E_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ is nullmértékű, és

$$\varrho_\infty(x_n, x) \geq \sup_{t \in X \setminus E_0} |x_n(t) - x(t)| \geq |x_n(t) - x(t)| \qquad (t \in X \setminus E_0),$$

így $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_\infty(x_n, x) = 0$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ egyenletesen $X \setminus E_0$-on.

Ha viszont $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ egyenletesen $X \setminus F_0$-on, ahol $\mu F_0 = 0$, akkor

$$\sup_{t\in X\setminus F_0} |x_n(t) - x(t)| \to 0 \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

így

$$\varrho_\infty(x_n, x) = \inf_{E,\mu E=0} \sup_{t\in X\setminus E} |x_n(t) - x(t)| \leq \sup_{t\in X\setminus F_0} |x_n(t) - x(t)|$$

miatt

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_\infty(x_n, x) = 0.$$

□

1.4. Topologikus fogalmak metrikus terekben

1.4.1. Definíció. Legyen X egy metrikus tér ϱ metrikával. Ha $a \in X, r > 0$, akkor a

$$G(a, r) = \{x \in X \mid \varrho(a, x) < r\}$$

halmazt r sugarú a középpontú *nyílt gömb*nek nevezzük, míg az

$$S(a, r) = \{x \in X \mid \varrho(a, x) \leq r\}$$

halmazt r sugarú a középpontú *zárt gömb*nek nevezzük (Utóbbi esetben $r = 0$-t is megengedjük). ♢

1.4.2. Definíció. Jelölje $\mathcal{G}$ X azon részhalmazainak osztályát, melyek bármely pontjukkal együtt valamely a pont körüli nyílt gömböt is tartalmaznak. Könnyű belátni, hogy $\mathcal{G}$ topológia X-en, melyet X *természetes topológiájá*nak nevezünk.

Hacsak mást nem mondunk, akkor egy metrikus teret mindig a természetes topológiával látjuk el, és az összes topologikus fogalmat (nyílt, zárt halmaz, stb.) *e topológia szerint vesszük.* ♢

Így pl. egy $A \subset X$ halmazt akkor nevezünk *nyílt*nak, ha eleme $\mathcal{G}$-nek, vagyis ha bármely pontjával együtt valamely a pont körüli nyílt környezetet is tartalmaz. $B \subset X$ *zárt*, ha a komplementere nyílt.

Könnyű belátni, hogy nyílt gömb nyílt halmaz, zárt gömb zárt halmaz, továbbá, hogy egy *metrikus tér normális topologikus tér* (ld. a Függelék 9.6.1 definíciót).

Legyen T egy X metrikus térnek az Y metrikus térbe való leképezése. A fentiek alapján (lásd a Függelék 8.4.2 definíciót) T-t *folytonos*nak nevezzük az $x \in X$ pontban, ha Tx bármely V környezetéhez megadható x-nek olyan U környezete, hogy $TU \subset V$.

1.4.1. Tétel. *A T leképezés akkor és csakis akkor folytonos $x \in X$-ben, ha bármely x-hez konvergáló $\{x_n\}$ sorozat esetén $\{Tx_n\}$ a Tx-hez konvergál.*

A bizonyítást az olvasóra bizzuk.

1.5. Teljes metrikus terek

Legyen X egy metrikus tér ϱ metrikával. X-beli elemek egy $\{x_n\}$ sorozatáról azt mondtuk (ld. az 1.3.1 definíciót), hogy *konvergál* az $x \in X$ elemhez, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$.

1.5.1. Definíció. Az $\{x_n\}$ sorozatot *Cauchy-sorozat*nak nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N(\varepsilon)$ szám, hogy

$$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon, \qquad \text{ha } n, m > N(\varepsilon).$$

♢

1.5.1. Tétel. *Egy metrikus térben minden konvergens sorozat Cauchy sorozat.*

Bizonyítás. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ és $\varepsilon > 0$, úgy van olyan $N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ szám, hogy

$$\varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ha } n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

így

$$\varrho(x_n, x_m) \le \varrho(x_n, x) + \varrho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{ha } n, m > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

tehát $\{x_n\}$ Cauchy-sorozat. □

A *fordított állítás nem igaz.* Legyen ugyanis $\mathbb{Q}$ az összes racionális számok halmaza, akkor

$$\varrho(r, s) = |r - s| \qquad (r, s \in \mathbb{Q}),$$

metrika $\mathbb{Q}$-n. Legyen $\{r_n\}$ a $\sqrt{2}$-t alulról közelítő racionális számok egy olyan sorozata, melyre

$$0 < \sqrt{2} - r_n < \frac{1}{10^n}$$

teljesül. Bármely $\varepsilon > 0$ mellett

$$|r_m - r_n| < \max\left\{\frac{1}{10^n}, \frac{1}{10^m}\right\} < \varepsilon \qquad \text{ha } n, m > \lg\frac{1}{\varepsilon},$$

azaz $\{r_n\}$ Cauchy sorozat $\mathbb{Q}$-ban. De ez a sorozat nem konvergens $\mathbb{Q}$-ban, mert ha $r_n \to r \in \mathbb{Q}$ volna, úgy

$$|r - \sqrt{2}| \leq |r - r_n| + |r_n - \sqrt{2}|$$

miatt $r = \sqrt{2}$ volna, ami lehetetlen, mert $\sqrt{2}$ irracionális.

1.5.2. Definíció. Egy metrikus teret *teljes*nek nevezünk, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens. ♢

Példák

1. Az **1.1** szakasz első példájában szereplő metrikus tér (X egy tetszőleges halmaz, $\varrho(x, y) = 0$, ha $x = y$, $\varrho(x, y) = 1$, ha $x \neq y$) teljes, mert ha $\{x_n\}$ egy Cauchy-sorozat, úgy

$$\varrho(x_n, x_m) < \frac{1}{2} \qquad \text{ha } n, m > N\left(\frac{1}{2}\right),$$

de ekkor $x_n = x_m$, azaz $x_n = x_k$ minden $n \geq k$-ra, ahol k a legkisebb $N(\frac{1}{2})$-nél nagyobb természetes szám. Ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_k$.

2. Megmutatjuk, hogy $C(X)$ teljes metrikus tér. Ha $\{x_n\}$ egy Cauchy-sorozata e térnek, úgy

$$\varrho(x_n, x_m) = \sup_{t \in X} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon, \qquad \text{ha } n, m > N(\varepsilon),$$

amiből bármely $t \in X$-re

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon, \qquad \text{ha } n, m > N(\varepsilon). \tag{1.5.1}$$

Ez mutatja, hogy bármely rögzített $t \in X$ mellett $\{x_n(t)\}$ komplex (vagy valós) elemű Cauchy-sorozat, mely konvergens. Ha $\{x_n(t)\}$ határértékét $x(t)$ jelöli, akkor (1.5.1)-ből $m \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon, \qquad \text{ha} \qquad n > N(\varepsilon), \quad t \in X. \tag{1.5.2}$$

Megmutatjuk, hogy x folytonos függvény X-en. Legyen $n > N(\varepsilon)$ rögzített index, az x_n függvény $t_0 \in X$-beli folytonossága miatt bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik t_0-nak olyan U környezete, hogy

$$|x_n(t) - x_n(t_0)| < \varepsilon, \qquad \text{ha} \qquad t \in U. \tag{1.5.3}$$

Ekkor (1.5.2) és (1.5.3) miatt tetszőleges $t \in U$ esetén

$$|x(t) - x(t_0)| \leq |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_n(t_0)| + |x_n(t_0) - x(t_0)| < 3\varepsilon$$

ami az x függvény t_0-beli folytonosságát jelenti, így $x \in C(X)$. (1.5.2)-ből

$$\varrho(x_n, x) \leq \varepsilon \qquad \text{ha} \qquad n > N(\varepsilon)$$

következik, azaz $\{x_n\}$ konvergens $C(X)$-ben.

Eredményünk könnyen általánosítható a $C_n(X)$ tér esetére is. Itt X egy kompakt Hausdorff-tér, n egy természetes szám, és $C_n(X)$ az összes $x : X \to \mathbb{C}^n$ (vagy $\mathbb{R}^n$) X-en folytonos függvények halmaza,

$$\varrho(x, y) = \sup_{t \in X} |x(t) - y(t)|,$$

ahol $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ esetén $|z| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

3. *Teljes metrikus tér egy altere akkor és csakis akkor teljes, ha zárt.*

   Legyen X teljes metrikus tér, és tegyük fel, hogy Y zárt altere X-nek, $\{y_n\}$ pedig egy Cauchy-sorozat Y-ban. Ez X-ben is Cauchy-sorozat, így a teljesség miatt konvergens X-ben: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $y \in X$. Mivel $y_n \in Y$, így y érintkezési pontja Y-nak, tehát Y zártsága miatt $y \in Y$, vagyis $\{y_n\}$ konvergens Y-ban.

   Fordítva, ha az Y altér teljes, úgy zárt is. Legyen ugyanis $y \in Y^-$,akkor y érintkezési pontja Y-nak, így van olyan $\{y_n\}$ $(y_n \in Y)$ sorozat, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. $\{y_n\}$ Cauchy-sorozat, mely Y teljessége miatt egy Y-beli elemhez konvergál. A határérték egyértelműsége miatt így $y \in Y$.

4. A 2. fejezetben be fogjuk bizonyítani, hogy az $L_p(l_p, l_p^{(n)})$, c, c_0 metrikus terek teljesek.

   Láttuk, hogy a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza a $\varrho(r, s) = |r - s|$ távolsággal nem alkot teljes metrikus teret. $\mathbb{Q}$ azonban mindenütt sűrű altere az összes valós számok teljes metrikus terének. Hasonló állítás érvényes bármely metrikus térre.

1.5.3. Definíció. Legyenek X, X^* metrikus terek a ϱ, ϱ^* metrikával. Azt mondjuk, hogy X^* az X metrikus tér *teljes metrikus burka* , ha

(1) X^* teljes,

(2) $X \subset X^*$ és $x, y \in X$ esetén $\varrho(x, y) = \varrho^*(x, y)$,

(3) $X^- = X^*$ azaz X mindenütt sűrű X^*-ban.

$\diamondsuit$

1.5.2. Tétel. *Bármely metrikus térnek létezik teljes metrikus burka, és ez az eredeti teret fixen hagyó izometriától eltekintve egyértelmű. (Más szóval: minden metrikus tér beágyazható egy teljes metrikus térbe mindenütt sűrű altérként).*

Bizonyítás. Legyen X egy metrikus tér ϱ metrikával. Az alábbiakban megkonstruáljuk X teljes metrikus burkát.

Az $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ X-beli Cauchy-sorozatokat *ekvivalensek*nek nevezzük, ha

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = 0.$$

Jelölés: $\{x_n\} \sim \{y_n\}$.

Azonnal látható, hogy $\sim$ ekvivalencia reláció, így egy osztályozást indukál X-en, oly módon, hogy egy osztályba kerülnek az ekvivalens sorozatok. Jelölje X^* az összes osztályok halmazát és $x^*, y^* \in X^*$ esetén legyen

$$\varrho^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n), \text{ ahol } \{x_n\} \in x^*, \{y_n\} \in y^*. \tag{1.5.4}$$

I. Megmutatjuk, hogy ϱ^* metrika X^*-on. Először belátjuk, hogy az (1.5.4) jobboldalán álló limesz létezik. Ugyanis a négyszög-egyenlőtlenség miatt

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x_m, y_m)| \le \varrho(x_n, x_m) + \varrho(y_n, y_m),$$

amiből következik, hogy $\{\varrho(x_n, y_n)\}$ valós Cauchy-sorozat, így konvergens. Továbbá, a limesz független az x^*, y^*-beli reprezentáns megválasztásától, mert ha $\{\overline{x}_n\} \in x^*, \{\overline{y}_n\} \in y^*$, úgy

$$0 \le |\varrho(x_n, y_n) - \varrho(\overline{x}_n, \overline{y}_n)| \le \varrho(x_n, \overline{x}_n) + \varrho(y_n, \overline{y}_n),$$

és itt a jobboldal határértéke nulla, mivel $\{x_n\} \sim \{\overline{x}_n\}, \{y_n\} \sim \{\overline{y}_n\}$. Ezért

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \varrho(\overline{x}_n, \overline{y}_n).$$

Az, hogy ϱ^* metrika, határátmenettel egyszerűen belátható.

II. Jelölje X_0^* az összes $(x, x, x, \dots)$, $x \in X$ alakú Cauchy-sorozatok osztályait. Világos, hogy $X_0^* \subset X^*$. Azt állítjuk, hogy X_0^* izometrikus X-szel. Jelölje x' az $(x, x, x, \dots)$ sorozat osztályát, úgy az

$$x' \longrightarrow x$$

X_0^*-ot X-re képezi le, és ez a leképezés távolságtartó, mert

$$\varrho^*(x', y') = \lim_{n\to\infty} \varrho(x, y) = \varrho(x, y).$$

III. $\overline{X_0^*} = X^*$, azaz X_0^* mindenütt sűrű X^*-ban.
Legyenek ugyanis $x^* \in X^*$, $\varepsilon > 0$ tetszőlegesek, és $\{x_n\} \in x^*$, akkor

$$\varrho^*(x'_n, x^*) = \lim_{k\to\infty} \varrho(x_n, x_k) < \varepsilon, \qquad \text{ha} \qquad n > N(\varepsilon),$$

mert $\{x_n\}$ Cauchy-sorozat. Ezzel megmutattuk, hogy bármely X^*-beli pont bármely környezetében van X_0^*-beli pont, így $(X_0^*)^- = X^*$.

IV. X^* teljes metrikus tér.
Legyen $\{x_n^*\}$ Cauchy-sorozat X^*-ban. III. miatt létezik olyan $x'_n \in X_0^*$, hogy

$$\varrho^*(x_n^*, x'_n) < \frac{1}{n}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy x'_n az $(x_n, x_n, x_n, \dots)$ reprezentánsú osztályt jelöli. Azt állítjuk, hogy $\{x_n\}$ Cauchy-sorozat X-ben. Fennáll a

$$\varrho(x_n, x_m) = \varrho^*(x'_n, x'_m) \leq \varrho^*(x'_n, x_n^*) + \varrho^*(x_n^*, x_m^*) + \varrho^*(x_m^*, x'_m)$$

egyenlőtlenség. A jobboldal első és harmadik tagja x'_n választása miatt $\frac{1}{n}$ és $\frac{1}{m}$-nél kisebb, a középső tag $< \varepsilon$, ha $n, m > N^*(\varepsilon)$, mert $\{x_n^*\}$ Cauchy-sorozat. Így

$$\varrho(x_n, x_m) < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \varepsilon < 3\varepsilon, \qquad \text{ha} \qquad n, m > \max\left\{N^*(\varepsilon), \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

Jelölje most x^* az $\{x_n\}$ Cauchy-sorozat osztályát. Megmutatjuk, hogy $x_n^* \to x^*$, ha $n \to \infty$ X^*-ban, s ez X^* teljességét jelenti. Ugyanis

$$\varrho^*(x_n^*, x^*) \leq \varrho^*(x_n^*, x'_n) + \varrho^*(x'_n, x^*) < \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

ha n elég nagy.

Cseréljük most ki X elemeit a II. alatti izometrikus leképezés által megfeleltetett X_0^*-beli elemekkel, úgy X-et sűrű részhalmazként beágyaztuk a teljes X^*-ba, és ezzel a teljes metrikus burok létezését igazoltuk.

V. Egyértelműség.
Tegyük fel, hogy X^*, X^{**} metrikus terek ϱ^*, ϱ^{**} metrikával mindketten X teljes metrikus burkai. Megmutatjuk, hogy ezek izometrikusak.

Legyen $x^* \in X^*$, úgy $\overline{X} = X^*$ miatt létezik olyan $x_n \in X, (n \in \mathbb{N})$ sorozat, hogy

$$\varrho^*(x_n, x^*) \to 0 \;\text{ ha }\; n \to \infty.$$

$\{x_n\}$ Cauchy-sorozat X^*-ban, így az X-ben és X^{**}-ban is, és X^{**} teljessége miatt van olyan $x^{**} \in X^{**}$, hogy $\varrho^{**}(x_n, x^{**}) \to 0$.
Legyen

$$\varphi(x^*) = x^{**}, \qquad (x^* \in X^*).$$

Belátjuk, hogy $\varphi : X^* \to X^{**}$ izometria, mely X-et fixen hagyja. φ egyértelműen van definiálva, mert ha $\{x_n\}$,$\{\overline{x}_n\}$ olyan sorozatok X-ben, hogy

$$\varrho^*(x_n, x^*) \to 0, \quad \varrho^*(\overline{x}_n, x^*) \to 0, \quad \text{úgy } \varrho^*(x_n, \overline{x}_n) \to 0,$$

amiből $\varrho^{**}(x_n, \overline{x}_n) \to 0$. Ezért, ha

$$\varrho^{**}(x_n, x^{**}) \to 0, \quad \varrho^{**}(\overline{x}_n, y^{**}) \to 0,$$

akkor

$$\varrho^{**}(x^{**}, y^{**}) \le \varrho^{**}(x^{**}, x_n) + \varrho^{**}(x_n, \overline{x}_n) + \varrho^{**}(\overline{x}_n, y^{**}) \to 0$$

és így $x^{**} = y^{**}$.

$\varphi(x) = x$, ha $x \in X$, mert $x_n = x \, (n \in \mathbb{N})$ választással $\varrho^{**}(x_n, x) \to 0$.
φ az X^{**}-ra képez le, és ha $x^*, y^* \in X^*$, $\varrho^*(x_n, x^*) \to 0$, $\varrho^*(y_n, y^*) \to 0$, és $\varrho^{**}(x_n, x^{**}) \to 0$, $\varrho^{**}(y_n, y^{**}) \to 0$ (ahol $\{x_n\}, \{y_n\}$ alkalmas X-beli sorozatok), úgy

$$\begin{aligned} \varrho^*(x^*, y^*) &= \lim_{n\to\infty} \varrho^*(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varrho^{**}(x_n, y_n) = \varrho^{**}(x^{**}, y^{**}), \end{aligned}$$

azaz φ távolságtartó.

Megjegyzés. Az utolsó egyenlőségben felhasználtuk a metrika folytonosságát, azaz ha $\varrho(x_n, x) \to 0$ és $\varrho(y_n, y) \to 0$ egy metrikus térben, úgy

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = \varrho(x, y).$$

Ez a négyszög-egyenlőtlenségből azonnal következik, mivel

$$|\varrho(x, y) - \varrho(x_n, y_n)| \le \varrho(x, x_n) + \varrho(y, y_n),$$

és a jobboldali sorozatok nullsorozatok. □

1.6. A Banach-féle fixponttétel

1.6.1. Definíció. Legyen X egy metrikus tér ϱ metrikával. A $T : X \longrightarrow X$ leképezést *kontraháló leképezés*nek vagy *kontrakció*nak nevezzük, ha van olyan $0 \le \alpha < 1$ konstans, hogy bármely $x, y \in X$-re

$$\varrho(Tx, Ty) \le \alpha \varrho(x, y).$$

Egy $x \in X$ elemet a T leképezés *fixpontjá*nak nevezünk, ha $Tx = x$. $\diamondsuit$

1.6.1. Tétel. (Banach-féle fixponttétel) *Egy teljes metrikus tér önmagába való kontraháló leképezésének pontosan egy fixpontja van.*

Bizonyítás. Legyen X teljes metrikus tér ϱ metrikával, $T : X \longrightarrow X$ kontrakció, és $x_0 \in X$ tetszőleges. Tekintsük az $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots, x_{n+1} = Tx_n, \dots$ sorozatot.
Azt állítjuk, hogy $\{x_n\}$ Cauchy-sorozat. Ha $\varrho(x_0, x_1) = d$, úgy

$$\varrho(x_1, x_2) = \varrho(Tx_0, Tx_1) \le \alpha \varrho(x_0, x_1) = \alpha d,$$

$$\varrho(x_2, x_3) = \varrho(Tx_1, Tx_2) \le \alpha \varrho(x_1, x_2) = \alpha^2 d.$$

Indukcióval kapjuk, hogy

$$\varrho(x_n, x_{n+1}) \le \alpha^n d \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A sokszög egyenlőtlenséget alkalmazva, $m > n$ esetén

$$\begin{aligned}\varrho(x_n, x_m) &\le \varrho(x_n, x_{n+1}) + \varrho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \varrho(x_{m-1}, x_m)\\ &\le \alpha^n d + \alpha^{n+1} d + \dots + \alpha^{m-1} d \le \alpha^n d(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots) = \frac{\alpha^n d}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Mivel $\dfrac{\alpha^n d}{1-\alpha} \to 0$, ha $n \to \infty$, így $\{x_n\}$ Cauchy sorozat, mely a teljesség miatt konvergens: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Megmutatjuk, hogy x *fixpontja* T-nek. A háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával

$$0 \le \varrho(x, Tx) \le \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, Tx) \le \varrho(x, x_n) + \alpha \varrho(x_{n-1}, x) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

amiből $n \to \infty$-nel $\varrho(x, Tx) = 0$, vagyis $x = Tx$ következik.

A fixpont egyértelműsége. Ha x, y a T leképezésnek fixpontjai, úgy

$$\varrho(x, y) = \varrho(Tx, Ty) \le \alpha \varrho(x, y).$$

$\varrho(x, y) > 0$ nem lehet, mert ekkor $\varrho(x, y)$-nal elosztva az előző egyenlőtlenséget $1 \le \alpha$ ellentmondásra jutnánk. Ezért $\varrho(x, y) = 0, \quad x = y$. $\square$

Megjegyzés. A $\varrho(x_n, x_m) \le \dfrac{\alpha^n d}{1-\alpha}$ egyenlőtlenségből $m \to \infty$ határátmenettel

$$\varrho(x_n, x) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\varrho(x_1, x_0),$$

ami becslést ad az $\{x_n\}$ sorozat elemei és a fixpont távolságára.

1.6.1. Lemma. *Legyenek T, S valamely X halmaznak önmagába való felcserélhető leképezései, azaz legyen $TS = ST$, és tegyük fel, hogy S-nek pontosan egy fixpontja van X-ben. Akkor S fixpontja T-nek is fixpontja.*

Bizonyítás. Ha x az S egyetlen fixpontja, úgy

$$S(Tx) = T(Sx) = Tx$$

miatt Tx is fixpontja S-nek, így $Tx = x$. □

Megjegyzés. T-nek lehetnek más fixpontjai is. Például, ha T az X-nek önmagába való identikus leképezése, úgy a lemma feltételei teljesülnek, és X minden pontja fixpontja T-nek.

1.6.2. Tétel. *Legyen T egy teljes metrikus térnek önmagába való leképezése úgy, hogy valamely n természetes szám esetén T^n kontraháló leképezés. Akkor T-nek pontosan egy fixpontja van.*

Bizonyítás. A Banach-féle fixponttétel szerint T^n-nek pontosan egy fixpontja van. Az 1.6.1 Lemmát alkalmazva a T és $S = T^n$ leképezésekre, kapjuk, hogy T-nek van fixpontja. T-nek pontosan egy fixpontja van, ugyanis ha x, y is fixpontok volnának, úgy $Tx = x, Ty = y$-ból $T^n x = x$ és $T^n y = y$ következne, amiből $x = y$. □

1.7. A Banach-féle fixponttétel alkalmazásai

Legyenek $f \in C[a, b]$, $\mathcal{K} \in C([a, b] \times [a, b])$ adott folytonos valós vagy komplex értékű függvények, $\lambda \in \mathbb{K}$ adott valós vagy komplex szám. Az

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t, s)x(s)ds, \qquad t \in [a, b] \tag{1.7.1}$$

egyenletet *másodfajú lineáris inhomogén Fredholm-féle integrálegyenlet*nek nevezzük. f az egyenlet szabad tagja, λ az egyenlet paramétere, $\mathcal{K}$-t magfüggvénynek nevezzük, x az ismeretlen függvény. $f = 0$ esetén homogén egyenletről beszélünk. Ha az (1.7.1) baloldalán $x(t)$ helyett 0 áll, akkor elsőfajú lineáris Fredholm-féle integrálegyenletről beszélünk. Ha az (1.7.1)-ben az integrálás határai a és t, akkor Volterra-féle integrálegyenletet kapunk.

1.7.1. Tétel. *Folytonos f, $\mathcal{K}$ függvények esetén az* (1.7.1) *másodfajú lineáris inhomogén Fredholm-féle integrálegyenletnek egyetlen folytonos megoldása van, feltéve, hogy*

$$|\lambda| \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|ds < 1. \tag{1.7.2}$$

Bizonyítás. Tekintsük a

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)ds \qquad t \in [a,b],\ x \in C[a,b]$$

formulával definiált T leképezést. Könnyen beláthatjuk, hogy T a $C[a,b]$ teret önmagába képezi le. Továbbá

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &= |\lambda| \left| \int_a^b \mathcal{K}(t,s)(x(s) - y(s))ds \right| \\ &\le |\lambda| \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)||x(s) - y(s)|ds \le |\lambda|\varrho(x,y) \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|ds, \end{aligned}$$

ahol $\varrho(x,y) = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$. Így

$$\varrho(Tx,Ty) = \sup_{t\in[a,b]} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| \le |\lambda|\varrho(x,y) \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|ds \le \alpha\varrho(x,y),$$

ahol

$$\alpha = |\lambda| \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|ds < 1.$$

A Banach-féle fixponttétel miatt T-nek pontosan egy fixpontja van $C[a,b]$-ban. Mivel T fixpontjai éppen az (1.7.1) megoldásai, így állításunkat bebizonyítottuk. □

Az (1.7.1) egyenlet megoldása $x = \lim\limits_{n\to\infty} T^n x_0$ (lásd a Banach-féle fixponttétel bizonyítását), ahol x_0 tetszőleges eleme $C[a,b]$-nek, a limesz pedig $C[a,b]$

metrikájában értendő. $x_0 = f$ választással x-re egy végtelen sort kaphatunk. Ha azonban a $\mathcal{K}$ magfüggvény

$$\mathcal{K}(t,s) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) g_i(s) \qquad t,s \in [a,b] \tag{1.7.3}$$

alakú, ahol $f_i, g_i \in C[a,b]$, akkor az (1.7.1) integrálegyenlet megoldása nagyon egyszerű. Az (1.7.3) alakú magfüggvényt *elfajult mag*nak nevezzük.

Legyen az (1.7.1)-ben szereplő $\mathcal{K}$ (1.7.3) alakú. Tegyük fel, hogy x az (1.7.1) megoldása, akkor (1.7.1) alapján

$$x(t) = f(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t) \tag{1.7.4}$$

adódik, ahol $c_i = \int\limits_a^b g_i(s) x(s) ds$, $(i = 1, \ldots, n)$. A jobb oldalon csak a c_i konstansok ismeretlenek. E konstansok meghatározása céljából helyettesítsük (1.7.4)-et a c_i-ket definiáló egyenletbe. Azt kapjuk, hogy

$$c_i = \int\limits_a^b g_i(s) \left[f(s) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(s) \right] ds, \tag{1.7.5}$$

azaz

$$c_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j a_{ij} - b_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.7.6}$$

ahol $a_{ij} = \int\limits_a^b g_i(s) f_j(s) ds$, $b_i = -\int\limits_a^b g_i(s) f(s) ds$. Az (1.7.6) rendszer

$$(\lambda A - E)c = b \tag{1.7.7}$$

alakba írható, ahol c, b a c_i, b_i elemekből álló oszlopvektorok, A az a_{ij} elemekből álló mátrix, E az egységmátrix. Így, ha (1.7.3) alakú, elfajult magú (1.7.1) integrálegyenletnek létezik x megoldása, úgy az (1.7.4) alakú, és a c_i konstansokra (1.7.7) teljesül. (1.7.7) teljesülése esetén az (1.7.4) függvény megoldása (1.7.1)-nek (amint azt behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük).
Ezzel beláttuk, hogy az (1.7.3) *alakú magfüggvénnyel felírt* (1.7.1) *integrálegyenlet akkor és csakis akkor oldható meg, ha az* (1.7.7) *egyenletrendszer c-re megoldható, és ebben az esetben a megoldást az* (1.7.4) *függvények adják, ahol c_i-k az* (1.7.7)*-ből számolandók.*

Ha λ olyan, hogy $\det(\lambda A - E) \neq 0$, akkor (1.7.7), így integrálegyenletünk is egyértelműen megoldható. Ha $\det(\lambda A - E) = 0$, akkor integrálegyenletünk vagy nem oldható meg, vagy megoldható, de nem egyértelműen.

1.7.2. Tétel. *Legyenek* $f \in C[a,b]$, $\mathcal{K} \in C(\triangle)$ *adott folytonos függvények,* $\triangle = \{\ (t,s)\ \mid\ a \le s \le t \le b)\ \}$. *Az*

$$x(t) = f(t) + \lambda \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)ds \qquad (t \in [a,b]) \tag{1.7.8}$$

másodfajú lineáris inhomogén Volterra-féle integrálegyenletnek bármely $\lambda(\in \mathbb{C})$ *esetén pontosan egy folytonos megoldása van.*

Bizonyítás. A

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)ds \qquad x \in C[a,b],\ t \in [a,b]$$

összefüggéssel definiált T a $C[a,b]$ teljes metrikus térnek önmagába való leképezése (mint könnyen belátható). Megmutatjuk, hogy T^n kontrakció elég nagy n-re.

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \le |\lambda| \int\limits_a^t |\mathcal{K}(t,s)||x(s) - y(s)|ds \le |\lambda|\varrho(x,y) \int\limits_a^t |\mathcal{K}(t,s)|ds,$$

ha $t \in [a,b]$, $x,y \in C[a,b]$. $\mathcal{K}$ folytonos a kompakt $\triangle$-n, ezért ott korlátos: $|\mathcal{K}(t,s)| \le M$, ha $(t,s) \in \triangle$, így

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \le |\lambda|\varrho(x,y)M(t-a) \qquad t \in [a,b].$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}
|(T^2x)(t) - (T^2y)(t)| &= \left|\lambda \int_a^t \mathcal{K}(t,s)[(Tx)(s) - (Ty)(s)]ds\right| \\
&\le |\lambda| \int_a^t |\mathcal{K}(t,s)||(Tx)(s) - (Ty)(s)|ds \\
&\le |\lambda| \int_a^t M|\lambda|\varrho(x,y)M(s-a)ds = \varrho(x,y)\frac{(|\lambda|M(t-a))^2}{2!}.
\end{aligned}$$

Indukcióval igazolható, hogy

$$\big|(T^nx)(t) - (T^ny)(t)\big| \le \frac{\big(|\lambda|M(t-a)\big)^n}{n!}\varrho(x,y),$$

amiből

$$\varrho(T^nx, T^ny) = \sup_{t\in[a,b]} \big|(T^nx)(t) - (T^ny)(t)\big| \le \frac{\big(|\lambda|M(b-a)\big)^n}{n!}\varrho(x,y).$$

A jobboldalon $\varrho(x,y)$ együtthatója nullsorozat, ezért elég nagy n esetén < 1. Egy ilyen n-re T^n kontrakció, így az 1.6.2 tétel miatt T-nek egyetlen fixpontja van $C[a,b]$-ben, ami éppen az (1.7.8) integrálegyenlet folytonos megoldása. $\square$

Megjegyezzük, hogy

$$\mathcal{K}(t,s) = \sum_{i=0}^{n} t^i g_i(s) \qquad t,s \in [a,b] \tag{1.7.9}$$

alakú magfüggvény esetén (ha $f^{(n+1)}$, $g_i^{(n)} \in C[a,b]$ $(i = 0,\dots,n)$) (1.7.8) visszavezethető egy $n+1$-edrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladatra. Ekkor ugyanis egyenletünk jobb oldala $n+1$-szer folytonosan differenciálható, és differenciálással

$$x'(t) = f'(t) + \lambda\mathcal{K}(t,t)x(t) + \lambda\int_a^t \mathcal{K}_t(t,s)x(s)ds, \quad x(a) = f(a)$$

adódik, ahol $\mathcal{K}_t = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K}$. Még n-szer differenciálva a jobboldal egyetlen integrált tartalmaz csak, ahol az integrandus $\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}\mathcal{K}(t,s)x(s) \equiv 0$. Így x-re $n+1$-edrendű lineáris differenciálegyenletet kaptunk, és az $x^{(k)}(a)$ $(k = 0,\dots,n)$ értékek a differenciálással kapott egyenletből meghatározhatók.

Elsőrendű explicit differenciálegyenletrendszerre vonatkozik az következő egzisztencia és unicitás tétel.

1.7.3. Tétel. (Picard-Lindelöf tétel) *Legyenek a,b pozitív számok, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$,*

$$Q = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \ \mid\ |x-\xi| \le a, \quad \|y-\eta\| \le b\ \},$$

ahol $z = (z_1,z_2,\dots,z_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|z\| = \|z\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Tegyük fel, hogy $f : Q \to \mathbb{R}^n$ (nem azonosan nulla) folytonos függvény Q-n, mely teljesíti a Lipschitz-feltételt (a második, vektorváltozójában), azaz van olyan k konstans, hogy

$$\big\|f(x,y) - f(x,z)\big\| \le k\|y-z\| \qquad \text{ha } (x,y),(x,z) \in Q.$$

Ekkor az

$$y' = f(x,y), \quad y(\xi) = \eta$$

kezdeti-érték problémának pontosan egy (folytonosan differenciálható) megoldása van a $[\xi-h,\xi+h]$ intervallumon, ahol $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$, $M = \sup_Q \|f(x,y)\|$.

Bizonyítás. Legyen Y a valós $C_n[\xi - h, \xi + h]$ tér (lásd az **1.5**-ben szereplő 2. és 3. példát) azon y függvényeinek halmaza, melyekre

$$\|y(x) - \eta\| \le b \qquad \text{ha } x \in [\xi - h, \xi + h]$$

teljesül. Y zárt altere a teljes $C_n[\xi - h, \xi + h]$ térnek, így maga is teljes metrikus tér. Legyen T a

$$(Ty)(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y(t))dt \qquad y \in Y, x \in [\xi - h, \xi + h]$$

képlettel definiálva.

T az Y teret önmagába képezi le, mert Ty folytonos $[\xi - h, \xi + h]$-n, és ebből az intervallumból vett x-ekre

$$\big\|(Ty)(x) - \eta\big\| = \left\|\int_{\xi}^{x} f(t, y(t))dt\right\| \le M|x - \xi| \le Mh \le M\frac{b}{M} = b.$$

Elég nagy n-re T^n kontrakció Y-on, mert $\xi \le x \le \xi + h$ mellett

$$\big\|(Ty)(x) - (Tz)(x)\big\| \le \int_{\xi}^{x} \big\|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\big\|dt \le$$

$$\le \int_{\xi}^{x} k\|y(t) - z(t)\|dt \le k\varrho(y, z)|x - \xi|.$$

Ezt felhasználva, ismét $\xi \le x \le \xi + h$-ra

$$\begin{aligned}\big\|(T^2y)(x) - (T^2z)(x)\big\| &\le \int_{\xi}^{x} \big\|f(t, (Ty)(t)) - f(t, (Tz)(t))\big\|dt \\ &\le \int_{\xi}^{x} k\big\|(Ty)(t) - (Tz)(t)\big\|dt \\ &\le \int_{\xi}^{x} k^2\varrho(y, z)|t - \xi|dt = k^2\varrho(y, z)\frac{|x - \xi|^2}{2!},\end{aligned}$$

és ugyanez érvényes, ha $\xi - h \le x < \xi$.
Indukcióval igazolhatjuk, hogy

$$\big\|(T^ny)(x) - (T^nz)(x)\big\| \le k^n\varrho(y, z)\frac{|x - \xi|^n}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in [\xi - h, \xi + h],$$

amiből

$$\varrho(T^n y, T^n z) = \sup_{x\in[\xi-h,\xi+h]} \left\|(T^n y)(x) - (T^n z)(x)\right\| \le \frac{(kh)^n}{n!}\varrho(y,z).$$

Mivel $\frac{(kh)^n}{n!} \to 0$, ha $n \to \infty$, így elég nagy n-re T^n kontrakció Y-on, ezért az 1.16 tétel miatt T-nek pontosan egy fixpontja van Y-ban, mely az

$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt \qquad x \in [\xi - h, \xi + h]$$

(Volterra-féle másodfajú) integrálegyenlet folytonos megoldása, így kezdeti-érték problémánk folytonosan differenciálható megoldása is. □

Megjegyzés. A bizonyításban többször felhasználtuk azt, hogy $z \in C_n[a,b]$, $a \le \alpha \le \beta \le b$ esetén

$$\left\|\int_{\alpha}^{\beta} z(t)dt\right\| \le \int_{\alpha}^{\beta} \|z(t)\|dt. \tag{1.7.10}$$

Ez a következőképpen látható be: ha $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t))$, $c_i = \int_\alpha^\beta z_i(t)dt$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$, akkor

$$\begin{aligned}
\|c\|^2 &= \left\|\int_\alpha^\beta z(t)dt\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\int_\alpha^\beta z_i(t)dt\right)^2 = \sum_{i=1}^n c_i \int_\alpha^\beta z_i(t)dt \\
&= \int_\alpha^\beta \sum_{i=1}^n c_i z_i(t)dt \le \int_\alpha^\beta \|c\| \cdot \|z(t)\|dt = \|c\| \int_\alpha^\beta \|z(t)\|dt,
\end{aligned}$$

amiből következik (1.7.10). Az itt felhasznált $\sum_{i=1}^n c_i z_i(t) \le \|c\| \cdot \|z(t)\|$ egyenlőtlenség a Hölder-egyenlőtlenség ($l_2^{(n)}$-re vonatkozó) speciális esete.

1.8. A Baire-féle kategória tétel

1.8.1. Tétel. (Baire tétele) *Egy teljes metrikus térben megszámlálható sok nyílt, mindenütt sűrű halmaz metszete is mindenütt sűrű.*

Bizonyítás. Legyen X teljes metrikus tér ϱ metrikával, $V_n \subset X$ ($n \in \mathbb{N}$) ($\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza) nyílt, mindenütt sűrű halmazok. Megmutatjuk, hogy bármely G nyílt gömb esetén $G \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right)$ nem üres, ebből következik, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ mindenütt sűrű X-ben.

A $G \cap V_1$ metszet nyílt, és nem üres (mert $V_1^- = X$ miatt G-ben van V_1-beli pont), így tartalmaz egy nyílt gömböt, és ezzel koncentikus kisebb sugarú zárt gömböt is. Ezért van olyan $x_1 \in X$ és $0 < r_1 < \frac{1}{2}$ úgy, hogy

$$S(x_1, r_1) \subset G \cap V_1$$

($S(x_1, r_1)$ jelöli az x_1 középpontú r_1 sugarú zárt gömböt, $G(x_1, r_1)$ a megfelelő nyílt gömb).
$G(x_1, r_1) \cap V_2$ nyílt, nem üres halmaz, így van olyan $x_2 \in X$ és $0 < r_1 < \frac{1}{2^2}$, hogy

$$S(x_2, r_2) \subset G(x_1, r_1) \cap V_2.$$

Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ és x_n, r_n-et kiválasztottuk, úgy $G(x_n, r_n) \cap V_{n+1}$ nyílt, nem üres halmaz, ezért található olyan $x_{n+1} \in X$ és $0 < r_{n+1} < \dfrac{1}{2^{n+1}}$, melyre

$$S(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset G(x_n, r_n) \cap V_{n+1}.$$

Így olyan gömbsorozatot konstruáltunk, melyre

$$G \supset S(x_1, r_1) \supset S(x_2, r_2) \supset \cdots, \qquad 0 < r_k < \frac{1}{2^k}, \; k = 1, 2 \dots$$

teljesül. E gömbök középpontjai Cauchy sorozatot alkotnak, mert

$$\varrho(x_n, x_m) \leq 2r_k < \frac{2}{2^k} \qquad \text{ha } m, n > k.$$

A tér teljessége miatt van olyan $x \in X$, melyre $x_n \to x$. Megmutatjuk, hogy $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S(x_k, r_k)$.

$x_n \in S(x_k, r_k)$, ha $n \geq k$, így $S(x_k, r_k)$ zártsága miatt $x \in S(x_k, r_k)$ $(k \in \mathbb{N})$, de akkor $x \in G$ és $x \in S(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset G(x_n, r_n) \cap V_{n+1}$ miatt $x \in V_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$, azaz $x \in G \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right)$. □

1.8.1. Definíció. Megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként előállítható halmazokat G_δ *halmazok*nak nevezzük. ♢

1.8.1. Következmény. *Teljes metrikus térben megszámlálható sok mindenütt sűrű G_δ halmaz metszete is mindenütt sűrű G_δ halmaz.*

Ez azonnal adódik a Baire tételből, mivel minden ilyen G_δ halmaz megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszete, és megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.

A Baire tételt gyakran *kategória tétel*nek nevezik a következők miatt.

1.8.2. Definíció. Egy metrikus tér egy részhalmazát *első kategóriájú* halmaznak nevezzük, ha előállítható megszámlálható sok seholsem sűrű halmaz egyesítéseként. Egy halmazt *második kategóriájú*nak nevezünk, ha nem első kategóriájú.

$\diamondsuit$

Baire tételéből következik az

1.8.2. Tétel. *Teljes metrikus tér második kategóriájú halmaz.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy X teljes metrikus tér, és első kategóriájú halmaz, azaz

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{ahol } A_n^{-\,\circ} = \emptyset \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor természetesen $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^-$ is fennáll, amiből komplementerképzéssel

$$\emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{-\,\prime} \tag{1.8.1}$$

következik. $A_n^{-\,\prime}$ nyílt halmaz, és mindenütt sűrű X-ben, mert (a Függelék 8.2.7 tételét felhasználva)

$$\left(A_n^{-\,\prime}\right)^- = A_n^{-\,\prime\prime\circ\prime} = A_n{}^{-\,\circ\,\prime} = \emptyset\,' = X.$$

Baire tételét az $A_n^{-\,\prime}$ halmazokra alkalmazva kapjuk, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{-\,\prime}$ mindenütt sűrű X-ben, így nem üres, ami ellentmond (1.8.1)-nek.

$\square$

1.8.2. Következmény. *Ha egy teljes metrikus tér megszámlálhatóan sok halmaz uniója, úgy e halmazok közül legalább egynek a lezártja tartalmaz gömböt.*

Ugyanis $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, és mivel X második kategóriájú, van olyan n_0 index, hogy B_{n_0} nem seholsem sűrű. Így $B_{n_0}^{-\,\circ} \neq \emptyset$, $B_{n_0}^-$ tartalmaz nyílt gömböt.

Példa. Tekintsük a valós számok $\mathbb{R}$ metrikus terét a $\varrho(x, y) = |x - y|$ metrikával. (Ez azonos a valós l_2^1 térrel.) Ha $A \subset \mathbb{R}$ egy megszámlálható halmaz, úgy A első kategóriájú (mivel megszámlálható sok pont uniója és egy pont sehol sem sűrű $\mathbb{R}$-ben). Ebből következik, hogy a természetes, egész, racionális számok halmaza első kategóriájú halmazok $\mathbb{R}$-ben. Mivel $\mathbb{R}$ teljes metrikus tér, az összes irracionális pontok halmaza szükségképpen második kategóriájú halmaz $\mathbb{R}$-ben.

1.9. A Baire tétel egy alkalmazása: sehol sem differenciálható folytonos függvény létezése

A Baire tétel segítségével bizonyítható az

1.9.1. Tétel. *Léteznek az egész számegyenesen definiált valós értékű függvények, melyek mindenütt folytonosak, de sehol sem differenciálhatók.*

Bizonyítás. Jelölje $\widetilde{C}[0, 1]$ a valós $C[0, 1]$ azon x függvényeinek halmazát, melyekre $x(0) = x(1)$ teljesül. $\widetilde{C}[0, 1]$ zárt altere a $C[0, 1]$ teljes metrikus térnek, így maga is teljes metrikus tér. Terjesszük ki 1 szerint periódikusan $\widetilde{C}[0, 1]$ függvényeit az egész számegyenesre, és jelöljük Γ-val a kiterjesztett függvények metrikus terét. (Γ-ban a metrika ugyanaz, mint $\widetilde{C}[0, 1]$-ben, azaz $x, y \in \Gamma$-ra $\varrho(x, y) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)|$, és így Γ is teljes metrikus tér.) Legyen

$$E_n = \left\{ x \in \Gamma \mid \text{valamely } \xi \in [0, 1]\text{-re} \left| \frac{x(\xi + h) - x(\xi)}{h} \right| \leq n \quad \text{minden } h > 0 \text{ mellett} \right\}$$

és

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

E tartalmazza azon Γ-beli függvények halmazát, melyek valahol differenciálhatók. Megmutatjuk, hogy

1. E_n zárt,
2. $E_n' = \Gamma \setminus E_n$ mindenütt sűrű Γ-ban.

Ebből (a Függelék 8.2.7 tételét használva) következik, hogy $E_n^{-\circ} = E_n^{\circ} = E_n'^{-\prime} = \Gamma' = \emptyset$, azaz E_n sehol sem sűrű, E első kategóriájú.

1. igazolásához legyen x az E_n egy torlódási pontja, és $\{x_k\}$ egy E_n-beli sorozat, mely x-hez konvergál. Válasszuk a $\xi_k \in [0, 1]$ pontot úgy, hogy

$$\left| \frac{x_k(\xi_k + h) - x_k(\xi_k)}{h} \right| \leq n \qquad \text{minden } h > 0 \text{ esetén.}$$

Legyen ξ a $\{\xi_k\}$ sorozat egy torlódási pontja, akkor van $\{\xi_k\}$-nak ξ-hez konvergáló részsorozata. A jelölés egyszerűsítése érdekében tegyük fel, hogy az $\{x_k\}$ sorozatot úgy választottuk, hogy a teljes $\{\xi_k\}$ sorozat konvergens. Érvényes az

$$\left|\frac{x(\xi+h)-x(\xi)}{h}\right| \le \left|\frac{x(\xi+h)-x(\xi_k+h)}{h}\right| + \left|\frac{x(\xi_k+h)-x_k(\xi_k+h)}{h}\right|$$

$$+\left|\frac{x_k(\xi_k+h)-x_k(\xi_k)}{h}\right| + \left|\frac{x_k(\xi_k)-x(\xi_k)}{h}\right| + \left|\frac{x(\xi_k)-x(\xi)}{h}\right|$$

egyenlőtlenség. Tetszőleges $\varepsilon > 0$, $h > 0$-hoz létezik olyan $N(\varepsilon, h)$, hogy

$$\sup_{t\in[0,1]} |x_k(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon h}{4} \qquad \text{ha } k > N(\varepsilon, h).$$

Felhasználva, hogy $\xi_k \to \xi$, az x függvény folytonossága miatt létezik $M(\varepsilon, h) > N(\varepsilon, h)$, úgy hogy $k > M(\varepsilon, h)$ esetén

$$|x(\xi+h) - x(\xi_k+h)| < \frac{\varepsilon h}{4} \text{ és } |x(\xi_k) - x(\xi)| < \frac{\varepsilon h}{4}.$$

Így, ha $k > M(\varepsilon, h)$ akkor

$$\left|\frac{x(\xi+h)-x(\xi)}{h}\right| \le \left|\frac{x_k(\xi_k+h)-x_k(\xi_k)}{h}\right| + \varepsilon \le n + \varepsilon,$$

amiből következik, hogy bármely $h > 0$ mellett

$$\left|\frac{x(\xi+h)-x(\xi)}{h}\right| \le n,$$

azaz $x \in E_n$, tehát E_n zárt.

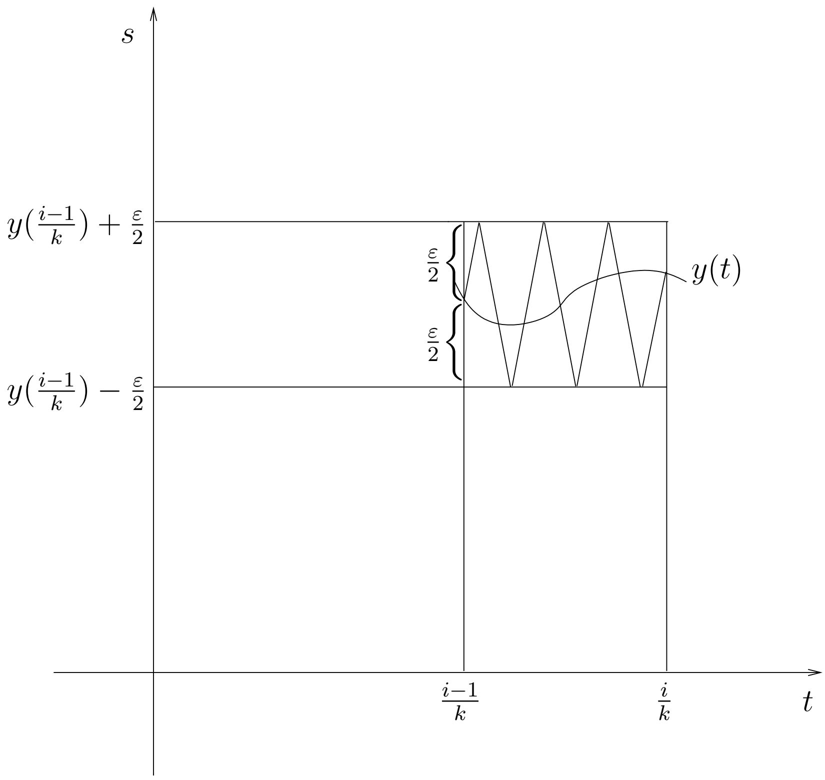
2. bizonyításához legyen $y \in \Gamma$ és $\varepsilon > 0$. Megmutatjuk, hogy $\Gamma \setminus E_n$-nek van olyan eleme (ami egy függvény), mely ε-nál közelebb van y-hoz. Osszuk fel $[0, 1]$-et k egyenlő részre úgy, hogy ha t és t' a beosztás ugyanazon intervallumából valók, akkor

$$|y(t) - y(t')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tekintsük a

$$\left\{ (t, s) \;\middle|\; \frac{i-1}{k} \le t \le \frac{i}{k}, \quad y\left(\frac{i-1}{k}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \le s \le y\left(\frac{i-1}{k}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

téglalapot, ahol $1 \le i \le k$ (lásd az 1. ábrát), akkor az $\left(\frac{i}{k}, y\left(\frac{i}{k}\right)\right)$ pont a téglalap jobb-, az $\left(\frac{i-1}{k}, y\left(\frac{i-1}{k}\right)\right)$ pont a téglalap baloldalán fekszik.



1. ábra

Minden téglalapban ($i = 1, 2, \ldots, k$ esetén) összekötve a két pontot egy olyan törtvonallal, mely a téglalapban marad és melynek meredeksége abszolút értékben nagyobb, mint n, a kapott törtvonalak egyesítésének 1 szerint periódikus kiterjesztése olyan folytonos függvényt ad $\mathbb{R}$-en, mely eleme $\Gamma \setminus E_n$-nek és ε-nál közelebb van y-hoz.

$\square$

1.10. Kompaktság

1.10.1. Definíció. Egy metrikus tér egy részhalmazát *szekvenciálisan (sorozatosan) kompakt*nak nevezzük, ha e részhalmaz bármely végtelen sorozatából kiválasztható konvergens részsorozat, melynek határértéke a szóban forgó részhalmazban van.

Egy metrikus tér egy részhalmazát *relatív szekvenciálisan kompakt*nak nevezzük, ha e részhalmaz lezártja szekvenciálisan kompakt. Ez azt jelenti, hogy e részhalmaz bármely végtelen sorozatából kiválasztható konvergens részsorozat; a határérték ugyanis a Függelék 8.2.2 tétele miatt mindig a halmaz lezártjában van. ♢

1.10.2. Definíció. Egy metrikus tér egy részhalmazát *korlátos*nak nevezzük, ha van olyan gömb, mely e részhalmazt tartalmazza.

Egy metrikus tér egy részhalmazát *teljesen korlátos*nak nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén e részhalmaz véges sok ε sugarú nyílt gömbbel lefedhető. ♢

Így, egy X metrikus tér K részhalmaza teljesen korlátos, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan véges $M \subset X$ halmaz, hogy az M-beli középpontú ε sugarú nyílt gömbök uniója tartalmazza K-t. Az M halmazt *ε-háló*nak nevezzük *K számára*, Megjegyezzük, hogy itt feltételezhető az is, hogy M a K részhalmaza. Ugyanis, ha M egy $\frac{\varepsilon}{2}$-háló K számára, úgy mindegyik M-beli középpontú $\frac{\varepsilon}{2}$ sugarú gömbből véve egy K-beli pontot (ha van ilyen) a kivett pontok M_1 halmaza véges ε-háló K számára, és $M_1 \subset K$.

Világos, hogy teljesen korlátos halmaz korlátos is, fordítva azonban nem, mert pl. egy végtelen X halmazt véve a diszkrét metrikával, X korlátos, de nem teljesen korlátos ($\varepsilon = \frac{1}{3}$-hoz nincs véges ε-háló).

Ismeretes, hogy egy topologikus térben a kompaktságot nyílt halmazokkal való lefedés segítségével szokás definiálni.

1.10.3. Definíció. Egy topologikus tér egy részhalmazát *kompakt*nak nevezzük, ha nyílt halmazokkal való bármely lefedésből kiválasztható véges nyílt lefedés.

Egy topologikus tér egy részhalmazát *relatív kompakt*nak nevezzük, ha lezártja kompakt. ♢

Metrikus terek esetén a kompaktság, szekvenciálisan kompaktság, teljesen korlátosság közötti kapcsolatot mutatja az

1.10.1. Tétel. *Egy metrikus tér egy K részhalmazára a következő három feltétel ekvivalens*

1. *K kompakt,*
2. *K szekvenciálisan kompakt,*
3. *K teljes és teljesen korlátos (K teljessége azt jelenti, hogy K-beli Cauchy-sorozatok K-ban konvergensek, azaz határértékük is K-ban van).*

Bizonyítás.

1.⇒ 2. Legyen $\{x_n\}$ egy sorozat K-ban. Indirekt úton igazoljuk, hogy $\{x_n\}$-nek van K-ban konvergens részsorozata. Tegyük fel, hogy $\{x_n\}$-nek nincs K-ban konvergens részsorozata. Ekkor az

$$E_i = \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots\} \qquad (i \in \mathbb{N})$$

halmazok zártak (mert tartalmazzák összes torlódási pontjukat: t.i. nincs torlódási pontjuk indirekt feltevésünk miatt), és $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i = \emptyset$. Innen

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i'$$

tehát $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i'$ a K halmaz egy nyílt lefedése. K kompaktsága miatt van olyan n természetes szám, hogy

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i'$$

azaz

$$K' \supset \bigcap_{i=1}^{n} E_i = \{x_n, x_{n+1}, \dots\},$$

ami ellentmondás, mert $x_n \in K$.

2. ⇒ 3. Legyen $\{x_n\}$ egy Cauchy sorozat K-ban. 2. miatt van olyan $\{x_{n_k}\}$ részsorozata, mely egy K-beli x-hez konvergál. Megmutatjuk, hogy a teljes $\{x_n\}$ sorozat x-hez konvergál. Legyen $\varepsilon > 0$, akkor van olyan $N(\varepsilon)$ és $N_1(\varepsilon)$, hogy

$$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{ha } n, m > N(\varepsilon), \qquad \varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon \quad \text{ha } k > N_1(\varepsilon).$$

Válasszuk a k-t úgy, hogy $k > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $n_k > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Ekkor

$$\varrho(x_n, x) \le \varrho(x_n, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{ha } n > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

tehát $x_n \to x$, így K *teljes*. Tegyük fel, hogy K nem teljesen korlátos. Akkor van olyan $\varepsilon^* > 0$, hogy K nem fedhető le véges sok ε^* sugarú nyílt gömbbel. Ezért $x_1 \in K$ biztosan nem alkot ε^*-hálót K számára, azaz $G(x_1, \varepsilon^*)$ nem fedi le K-t, van tehát olyan $x_2 \in K$, hogy $\varrho(x_1, x_2) \ge \varepsilon^*$. $\{x_1, x_2\}$ ismét nem ε^*-háló K számára, azaz $G(x_1, \varepsilon^*) \cup G(x_2, \varepsilon^*)$ nem fedi le K-t, ezért van olyan $x_3 \in K$, hogy $\varrho(x_1, x_3) \ge \varepsilon^*$, $\varrho(x_2, x_3) \ge \varepsilon^*$. Hasonlóan folytatva egy $\{x_n\}$ K-beli sorozatot kapunk, melyre

$$\varrho(x_n, x_m) \ge \varepsilon^* \qquad \text{ha } n \ne m.$$

Ebből következik, hogy $\{x_n\}$-ből nem választható ki konvergens részsorozat, ami 2.-nek ellentmond, így K *teljesen korlátos*.

3. $\Rightarrow$ 1. Legyen $\{U_\alpha\}$ $(\alpha \in \Gamma)$ a K halmaz egy nyílt lefedése, és tegyük fel, hogy nincs olyan véges részrendszere mely lefedné K-t. K teljesen korlátossága miatt véges sok K-beli középpontú $\frac{1}{2}$ sugarú nyílt gömb lefedi K-t, így van olyan $G(x_1, \frac{1}{2})$ $(x_1 \in K)$ nyílt gömb, hogy $K \cap G(x_1, \frac{1}{2})$-et $\{U_\alpha\}$ $(\alpha \in \Gamma)$ egyetlen véges részrendszere sem fedi le.
K teljesen korlátossága miatt K lefedhető véges sok K-beli középpontú $\frac{1}{2^2}$ sugarú gömbbel is. Ezen gömbök közül tekintsük azokat, melyeknek van közös pontjuk $K \cap G(x_1, \frac{1}{2})$-del. Ezen véges sok gömb lefedi $K \cap G(x_1, \frac{1}{2})$-et, így van köztük olyan, $G(x_2, \frac{1}{2^2})$ $(x_2 \in K)$ gömb, hogy $K \cap G(x_2, \frac{1}{2^2})$-et $\{U_\alpha\}$ egyetlen véges részrendszere sem fed le. Hasonlóan, ha $K \cap G(x_n, \frac{1}{2^n})$-et már megkonstruáltuk, úgy $K \cap G(x_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}})$ olyan K-beli középpontú gömb, melynek van közös pontja $K \cap G(x_n, \frac{1}{2^n})$-nel, és $K \cap G(x_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}})$ nem fedhető le $\{U_\alpha\}$ egyetlen véges rendszerével sem.
Ekkor $\varrho(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$, mert

$$G(x_n, \frac{1}{2^n}) \cap G(x_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}) \neq 0.$$

Így $m < n$-re

$$\varrho(x_m, x_n) \leq \varrho(x_m, x_{m+1}) + \cdots + \varrho(x_{n-1}, x_n) < \frac{1}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} < \frac{1}{2^{m-2}},$$

tehát $\{x_n\}$ Cauchy-sorozat, mely K teljessége miatt konvergál egy $x \in K$ elemhez. Van olyan $\alpha_0 \in \Gamma$, hogy $x \in U_{\alpha_0}$, és U_{α_0} nyíltsága miatt van olyan $r > 0$, hogy $G(x, r) \subset U_{\alpha_0}$. Legyen n egy olyan index, hogy $\varrho(x_n, x) < \frac{r}{2}$ és $\frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$G(x_n, \frac{1}{2^n}) \subset G(x, r) \subset U_{\alpha_0},$$

ami ellentmondás, mert $G(x_n, \frac{1}{2^n})$-et $\{U_\alpha\}$ egyetlen véges részrendszere sem fedi le.

$\square$

Következmények.

1. *Egy metrikus tér egy részhalmaza akkor és csakis akkor relatív kompakt, ha relatív szekvenciálisan kompakt.*

2. (Hausdorff tétele) *Ahhoz, hogy egy metrikus tér egy részhalmaza kompakt (szekvenciálisan kompakt) legyen szükséges, és ha a tér teljes elegendő is, hogy e részhalmaz zárt és teljesen korlátos legyen.*

   Állításunk abból következik, hogy egy teljes halmaz mindig zárt, és teljes metrikus térben zárt részhalmaz teljes is.

3. (Hausdorff tétele) *Ahhoz, hogy egy metrikus tér egy részhalmaza relatív kompakt (relatív szekvenciálisan kompakt) legyen szükséges, és ha a tér teljes elegendő is, hogy e részhalmaz teljesen korlátos legyen.*

   Ugyanis, ha K relatív kompakt, úgy K^- kompakt, és az 1.10.1 tétel miatt teljesen korlátos, de akkor K is teljesen korlátos. Ha a tér teljes, és K teljesen korlátos, akkor K^- is teljesen korlátos (ha M egy ε-háló K számára, úgy 2ε-háló K^- számára), továbbá a tér teljessége miatt K^- teljes is. Ezért az 1.10.1 tétel alapján K relatív kompakt.

1.10.4. Definíció. Egy metrikus teret *szeparábilis*nak nevezünk, ha van megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaza. Egy metrikus tér egy részhalmazát pedig akkor nevezzük szeparábilisnak, ha mint altér szeparábilis. $\diamondsuit$

Az $L_p(X,\mathcal{S},\mu)$, $S(X,\mathcal{S},\mu)$ terek szeparábilitása a mértéktértől függ, hasonlóan $C(X)$ szeparábilitása az X topologikus tértől függ. Az $l_p^{(n)}(1 \leq p \leq \infty)$, $l_p(1 \leq p < \infty)$, c, c_0, $C[a,b]$ és az $L_p(a,b)$ $(1 \leq p < \infty)$ terek *szeparábilisak*, l_∞, $L_\infty(a,b)$ *nem szeparábilisak.*

Egy metrikus tér kompakt (vagy szekvenciálisan kompakt) részhalmaza szeparábilis.

Ha ugyanis K szekvenciálisan kompakt, az 1.10.1 tétel alapján teljes és teljesen korlátos, és így létezik M_n véges $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$-háló K számára, és feltehetjük, hogy $M_n \subset K$. Az $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ halmaz megszámlálható, $M \subset K$, és K zártsága miatt $\overline{M} \subset K$. K minden pontja M érintkezési pontja, így $M^- \supset K$, tehát $M^- = K$.

2. fejezet

Lineáris terek

2.1. Lineáris terek, alapfogalmak

2.1.1. Definíció. Az X (nemüres) halmazt *lineáris tér*nek vagy *vektortér*nek nevezzük az F test felett, ha

1. X Abel-csoport, azaz bármely két $x, y \in X$ elemhez hozzá van rendelve egy $x + y$-nal jelölt eleme X-nek (melyet x és y összegének nevezünk) úgy, hogy bármely $x, y, z \in X$ mellett,

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x + y) + z, \\ x + y &= y + x, \\ \text{létezik } 0 \in X \text{ melyre } x + 0 &= x, \\ \text{létezik } -x \in X \text{ melyre } x + (-x) &= 0, \end{aligned}$$

2. bármely $x \in X$ és $\lambda \in F$-hez hozzá van rendelve egy λx-szel jelölt eleme X-nek (melyet λ és x szorzatának nevezünk) úgy, hogy bármely $x, y \in X$, $\lambda, \mu, 1 \in F$ (1 az F egységeleme) esetén,

$$\begin{aligned} \lambda(x + y) &= \lambda x + \lambda y, \\ (\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x, \\ (\lambda\mu)x &= \lambda(\mu x) \\ 1x &= x \end{aligned}$$

   teljesül.

X elemeit *vektorok*nak, F elemeit *skalárok*nak, az F testet X *skalártartományá*nak nevezzük. $\diamondsuit$

Az F test nálunk mindig az $\mathbb{R}$ valós, vagy a $\mathbb{C}$ komplex számtest lesz, ennek megfelelően *valós vagy komplex* lineáris térről beszélünk. Ha állításaink mind valós, mind komplex lineáris tér esetén érvényesek, úgy egyszerűen lineáris teret mondunk, és a skalártartomány jelölésére a $\mathbb{K}$ szimbólumot használjuk (így $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Igazolható, hogy egy lineáris térben ugyanazok a számolási szabályok érvényesek, mint a 3 dimenziós vektortérben (pl. többtagú összegben a tagok tetszőlegesen csoportosíthatók és tetszőleges sorrendbe írhatók, a nullvektor egyértelműen meg van határozva, $\lambda x = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\lambda = 0$ vagy $x = 0$, $-(\lambda x) = (-\lambda)x$, $\overbrace{x + x + \cdots + x}^{n\text{-szer}} = nx$, stb.

Példák.

1. Legyenek $x = (\xi_1, \xi_2, \dots), y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ a c_0 (komplex nullsorozatok) elemei. Ha az összeadást és a skalárral való szorzást természetes módon az

$$\begin{aligned} x + y &= (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots) \\ \lambda x &= (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \dots) \end{aligned}$$

   összefüggésekkel definiáljuk, akkor c_0 lineáris tér lesz. Hasonló módon értelmezve a műveleteket, $l_p^{(n)}, l_p, c, s$ is lineáris terek.

2. $C(X)$ lineáris tér az

$$\begin{aligned} (x + y)(t) &= x(t) + y(t) \\ (\lambda x)(t) &= \lambda x(t) \end{aligned} \qquad (x, y \in C(X), \lambda \in \mathbb{K}, t \in X)$$

   műveletekre nézve (függvények így definiált összeadását és számmal való szorzását pontonkénti összeadásnak és számmal való szorzásnak mondjuk).

   Hasonló műveleti értelmezéssel $S(X, \mathcal{S}, \mu)$ és $L_p(X, \mathcal{S}, \mu)$ is lineáris terek, de itt ellenőrizni kell azt, hogy a térben egyenlő (vagyis majdnem mindenütt egyenlő) függvények összege és skalárszorosa is (majdnem mindenütt) egyenlő a térben.

3. Legyen B egy tetszőleges nem üres halmaz, és jelölje $F(B)$ a B-n értelmezett összes olyan $\mathbb{K}$-beli értékű függvények halmazát, melyek csak véges sok B-beli pontban vesznek fel zérustól különböző értéket. Ekkor $F(B)$ lineáris tér a pontonkénti összeadásra, és skalárral való szorzásra nézve, melyet a B-n értelmezett *finit függvények lineáris teré*nek nevezünk.

2.1.2. Definíció. Legyenek X, Y ugyanazon $\mathbb{K}$ skalártartománnyal rendelkező lineáris terek. Az $A : X \to Y$ leképezést *lineáris leképezés*nek vagy *lineáris operátor*nak nevezzük, ha bármely $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$\begin{aligned} A(x + y) &= Ax + Ay & \qquad &(A \text{ additív}) \\ A(\lambda x) &= \lambda Ax & &(A \text{ homogén}) \end{aligned}$$

teljesül.

Az X-nek Y-ra való kölcsönösen egyértelmű lineáris leképezését *izomorf leképezés*nek mondjuk. Azt mondjuk, hogy X *izomorf* Y-nal, ha X-nek van izomorf leképezése Y-ra.

Egy lineáris tér *alterén* X olyan részhalmazát értjük, mely maga is lineáris tér az X-beli műveletekre nézve. $\diamondsuit$

Az egész X és a $\{0\}$ alterek, melyeket triviális altereknek nevezünk. Világos, hogy $Y \subset X$ akkor és csakis akkor altere az X lineáris térnek, ha Y (nem üres és) zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve, azaz $x, y \in Y$, $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $x + y \in Y$, $\lambda x \in Y$ teljesül.

Példák.

1. A $C(X)$ lineáris térben X egy rögzített M részhalmazán zérus értéket felvevő $C(X)$-beli függvények alteret alkotnak $C(X)$-ben.
2. L_1-ben az $\int\limits_X x(t)d\mu_t = 0$ tulajdonságú függvények összessége altér.
3. Lineáris tér altereinek metszete is altér.

2.1.3. Definíció. Egy lineáris tér egy A részhalmazát tartalmazó összes alterek metszetét az A *lineáris burká*nak (az A által kifeszített vagy generált altérnek) nevezzük és $[A]$-val jelöljük. $\diamondsuit$

$[A]$ az A halmazt tartalmazó altér, mely legszűkebb a következő értelemben: ha Y A-t tartalmazó altér, úgy $Y \supset [A]$.

2.1.4. Definíció. Egy lineáris tér $x_1, \dots, x_n$ vektorainak *lineáris kombinációi*n értjük az összes $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ alakú vektort, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalárok. $\diamondsuit$

2.1.1. Tétel. *Egy lineáris tér A részhalmazának lineáris burka az A-beli vektorok lineáris kombinációinak halmaza, azaz*

$$[A] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{K}, \quad a_i \in A, \quad i = 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Bizonyítás. Jelölje D a jobboldalon álló halmazt, akkor $[A] \subset D$, mert D az A-t tartalmazó altér.

$D \subset [A]$ is teljesül, mert D egy $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ elemét véve $a_i \in [A]$, $\lambda_i a_i \in [A]$, $x \in [A]$, ugyanis $[A]$ altér. $\square$

2.1.5. Definíció. Legyen Y az X lineáris tér altere, és tetszőleges $x \in X$ esetén jelölje x' az $x + Y = \{ x + h \mid h \in Y \}$ halmazt. Az $\{x'\}$ $(x \in X)$ halmazok osztálya az

$$\begin{aligned} x' + y' &= (x+y)' \\ \lambda x' &= (\lambda x)' \end{aligned} \qquad (x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$$

összefüggéssel értelmezett összeadással és skalárral való szorzással ellátva lineáris tér (amint az könnyen látható), melyet az X lineáris tér Y altér szerint vett *faktorteré*nek nevezünk, és X/Y-nal jelölünk. ♢

Példa. A konvergens sorozatok c lineáris terében a nullsorozatok c_0 halmaza altér. A c/c_0 faktortér elemei olyan sorozatokból álló halmazok, melyeknek ugyanaz a határértékük.

2.1.6. Definíció. Egy lineáris tér $x_1, \ldots, x_n$ vektorait *lineárisan függetlene*knek nevezzük, ha $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ $\quad (\lambda_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n)$ csak $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ esetén áll fenn.

Egy lineáris tér végtelen S részhalmazát lineárisan függetlennek nevezzük, ha S bármely, különböző vektorokból álló véges vektorrendszere lineárisan független.

Egy lineáris tér egy részhalmazát *lineárisan függő*nek nevezünk, ha nem lineárisan független.

A B halmazt az X lineáris tér *Hamel-bázisá*nak nevezzük, ha B lineárisan független, és $[B] = X$. ♢

A következőkben szükségünk lesz a Zorn lemmára, ezért először ezt fogjuk kimondani a szükséges előkészületek után.

2.1.7. Definíció. Egy halmazon értelmezett $\leq$ binér relációt *féligrendezés*nek nevezzük, ha bármely x, y, z halmazelemre teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} x &\leq x && (\leq \text{ reflexív}) \\ x &\leq y \text{ és } y \leq x\text{-ből következik } x = y && (\leq \text{ antiszimmetrikus}) \\ x &\leq y \text{ és } y \leq z\text{-ből következik } x \leq z && (\leq \text{ tranzitív}). \end{aligned}$$

Egy halmazt *félig rendezett*nek nevezünk, ha értelmezve van rajta egy félig rendezés.

Ha egy félig rendezett halmaz egy B részhalmazának bármely két x, y eleme esetén $x \leq y$ és $y \leq x$ közül legalább az egyik fennáll (vagyis B bármely két eleme összehasonlítható), akkor B-t *teljesen rendezett halmaz*nak, más szóval *lánc*nak nevezzük.

Az X félig rendezett halmaz valamely B részhalmazát *felülről korlátos*nak nevezzük, ha van olyan $k \in X$ elem, melyre $b \leq k$ bármely $b \in B$ esetén. k-t B *felső korlátjá*nak nevezzük.

Az X félig rendezett halmaz egy m elemét X *maximális elem*ének nevezzük, ha nincs olyan $x \in X$, melyre $x \geq m$ és $x \neq m$ teljesül. $\diamondsuit$

2.1.1. Lemma. (Zorn) *Ha egy félig rendezett halmaz minden lánca felülről korlátos, akkor e félig rendezett halmaznak van maximális eleme.*

A Zorn lemma segítségével fogjuk bizonyítani a következő tételt.

2.1.2. Tétel. *Ha E egy lineárisan független halmaza az X lineáris térnek, akkor van olyan B Hamel-bázisa X-nek, mely tartalmazza E-t.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{L}$ az X lineáris tér összes E-t tartalmazó lineárisan független részhalmazainak osztálya, félig rendezve a halmazelméleti tartalmazással. Ha $\mathcal{L}_0$ egy lánca $\mathcal{L}$-nek és

$$L_0 = \bigcup_{L \in \mathcal{L}_0} L$$

az összes $\mathcal{L}_0$-beli halmazok uniója, úgy $L_0 \in \mathcal{L}$, mert L_0 nyilvánvalóan tartalmazza E-t és L_0 lineárisan független. Legyen ugyanis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ egy tetszőleges véges részrendszere L_0-nak, akkor $x_i \in L_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, ahol $L_i \in \mathcal{L}$. Mivel $\mathcal{L}_0$ lánc, így mindegyik x_i eleme a legbővebb L_j-nek, így $\{x_1, \ldots, x_n\}$ lineárisan független. Így L_0 felső korlátja az $\mathcal{L}_0$ láncnak.
A Zorn lemma alkalmazásával kapjuk, hogy $\mathcal{L}$-nek van B maximális eleme.

Ekkor B lineárisan független és $E \subset B$. Megmutatjuk, hogy $[B] = X$, így B a kívánt Hamel-bázis. Ha $x \in X$ tetszőleges elem és $x \in B$, úgy $x \in [B]$. Ha $x \notin B$, akkor $B \cup \{x\}$ B-nél bővebb E-t tartalmazó részhalmaza X-nek, mely B maximalitása miatt nem lehet $\mathcal{L}$-ben, így $B \cup \{x\}$ lineárisan függő, azaz

$$\lambda x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0,$$

és $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nem mind zérusok. $\lambda \neq 0$, mert különben $\{b_1, \ldots, b_n\}$ lineáris függetlensége miatt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ volna. Így λ-val osztva

$$x = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda} \right) b_i,$$

azaz $x \in [B]$. $\square$

2.1.1. Következmény. *Minden lineáris térnek (kivéve a $\{0\}$ teret) van Hamel-bázisa.*

Legyen ugyanis x egy zérustól különböző eleme a térnek, $E = \{x\}$ és alkalmazzuk a 2.1.2 tételt!

Legyen B az X lineáris tér egy Hamel-bázisa. Ekkor X *bármely eleme egyértelműen felírható B-beli elemek lineáris kombinációjaként.* Legyen $x \in X$, akkor $x \in [B]$, ezért

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i.$$

Ha $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i b_i$ az x vektor egy másik előállítása, úgy $\sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) b_i = 0$, amiből B lineáris függetlensége miatt $\lambda_i - \mu_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Egy lineáris térnek több Hamel-bázisa van, de ezek mind azonos számosságúak.

2.1.3. Tétel. *Egy lineáris tér bármely két Hamel-bázisának számossága egyenlő.*

Bizonyítás. Legyenek B és B' az X lineáris tér Hamel-bázisai, és jelölje Φ azon $\varphi : D_\varphi \to R_\varphi$ leképezések halmazát, melyekre teljesülnek a következők:

(1) $B \cap B' \subset D_\varphi \subset B$, $B \cap B' \subset R_\varphi \subset B'$,

(2) φ kölcsönösen egyértelmű leképezése D_φ-nek R_φ-re,

(3) φ identitásként hat a $B \cap B'$ halmazon,

(4) $R_\varphi \cup (B \setminus D_\varphi)$ lineárisan független.

Φ *nemüres halmaz.* Ha $B \cap B' \neq \emptyset$, akkor az a függvény, mely identitásként hat a $B \cap B' (= D_\varphi = R_\varphi)$ halmazon, eleme Φ-nek.

Ha $B \cap B' = \emptyset$, akkor rögzítsünk egy $u \in B$ elemet. Azt állítjuk, hogy $[B \setminus \{u\}] \neq B'$ (ahol $[A]$=az A halmaz lineáris burkát jelöli) ugyanis, ellenkező esetben $X = [B'] = [[B \setminus \{u\}]] = [B \setminus \{u\}]$ volna, ami nem lehet, mivel B bázis. Így $B' \setminus [B \setminus \{u\}] \neq \emptyset$ van tehát egy u' eleme. Azt állítjuk, hogy $\{u'\} \cup (B \setminus \{u\})$ lineárisan független. Ugyanis e halmaz különböző elemeiből álló véges vektorrendszer csak úgy lehet lineárisan függő, ha tartalmazza u'-t és ekkor u' előállítható $B \setminus \{u\}$-beli elemek lineáris kombinációjaként, azaz, $u' \in [B \setminus \{u\}]$, ami lehetetlen. Legyen $D_\varphi = \{u\}$, $R_\varphi = \{u'\}$ és $\varphi(u) = u'$, akkor $\varphi \in \Phi$.

A Φ-n egy $\succ$ *féligrendezést definiálunk*: $\varphi, \varphi' \in \Phi$ esetén legyen $\varphi' \succ \varphi$, ha φ' kiterjesztése φ-nek, azaz

$$\varphi' \succ \varphi, \text{ ha } D_{\varphi'} \supset D_\varphi, \text{ és } \varphi'(s) = \varphi(s), \text{ ha } s \in D_\varphi.$$

A Φ féligrendezett halmaz *minden lánca felülről korlátos.* Legyen Φ_0 egy lánca Φ-nek, $D_{\varphi_0} = \bigcup_{\varphi\in\Phi_0} D_\varphi$, és $s \in D_{\varphi_0}$-ra legyen

$$\varphi_0(s) = \varphi(s) \qquad \text{ha } \varphi \in \Phi_0, s \in D_\varphi.$$

Φ_0 láncsága miatt φ_0 egyértelműen definiálva van D_{φ_0}-on, kölcsönösen egyértelműen képezi le D_{φ_0}-t $R_{\varphi_0} = \bigcup_{\varphi\in\Phi_0} R_\varphi$-ra, és identitásként hat a $B \cap B'$ halmazon.

$R_{\varphi_0} \cup (B \setminus D_{\varphi_0})$ lineárisan független, mert véve egy tetszőleges, különböző vektorokból álló véges $\{x_1, \ldots, x_n\}$ vektorrendszerét, feltehető, (az elemek indexelésének megváltoztatásával, ha erre szükség van), hogy $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset R_{\varphi_0}$, és $\{x_{m+1}, \ldots, x_n\} \subset B \setminus D_{\varphi_0}$ valamely $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ esetén. De akkor $x_i \in R_{\varphi_i}$ valamely $\varphi_i \in \Phi_0$-ra $(i = 1, \ldots, m)$. Legyen φ_k a $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$-ek közül a legnagyobb. Ekkor $x_i \in R_{\varphi_i} \subset R_{\varphi_k}$ $(i = 1, \ldots, m)$, és $x_j \in B \setminus D_{\varphi_0} \subset B \setminus D_{\varphi_k}$ $(j = m+1, \ldots, n)$, tehát $\{x_1, \ldots, x_n\}$ az $R_{\varphi_k} \cup (B \setminus D_{\varphi_k})$ halmaz különböző vektorokból álló véges vektorrendszere lévén, lineárisan független. A *Zorn lemma szerint Φ-nek van φ maximális eleme.*

Azt állítjuk, hogy $D_\varphi = B$. Tegyük fel, hogy $D_\varphi \neq B$. Ekkor $R_\varphi \neq B'$, ugyanis, ha $R_\varphi = B'$, akkor a $B' \cup (B \setminus D_\varphi)$ halmaz nem lineárisan független (mivel B' Hamel-bázis). Így a nemüres $B' \setminus R_\varphi$-ből egy b' elemet véve két eset lehetséges.

a) *Ha $\{b'\} \cup R_\varphi \cup (B \setminus D_\varphi)$ lineárisan független,* akkor $B \setminus D_\varphi$-ből egy b elemet véve a
$$\varphi'(s) = \begin{cases} \varphi(s) & \text{ha } s \in D_\varphi \\ b' & \text{ha } s = b \end{cases}$$
képlettel definiált φ' függvény Φ-beli, és kiterjesztése φ-nek, ami **ellentmond** φ maximalitásának.

b) *Ha $\{b'\} \cup R_\varphi \cup (B \setminus D_\varphi)$ lineárisan függő,* akkor b' egyértelműen előállítható $R_\varphi \cup (B \setminus D_\varphi)$-beli elemek lineáris kombinációjaként
$$b' = \sum_{b'_i \in R_\varphi} \lambda'_i b'_i + \sum_{b_j \in B \setminus D_\varphi} \lambda_j b_j,$$
és itt legalább egy λ_{j_0} nem zérus (ellenkező esetben $b' = \sum_{b'_i \in R_\varphi} \lambda'_i b'_i$ volna, ami B' lineáris függetlensége miatt nem lehet). Legyen
$$\varphi'(s) = \begin{cases} \varphi(s) & \text{ha } s \in D_\varphi \\ b' & \text{ha } s = b_{j_0}, \end{cases}$$
akkor φ' az (1), (2), (3) feltételeket nyilvánvalóan kielégíti, és $R_{\varphi'} \cup (B \setminus D_{\varphi'})$ is lineárisan független, mivel egyébként b' $R_\varphi \cup (B \setminus D_{\varphi'})$-beli elemek

lineáris kombinációja volna, ami b' fenti előállításának egyértelműsége, és b_{j_0} választása miatt nem lehet. Ezért $\varphi' \in \Phi$ ismét valódi kiterjesztése φ-nek, ami **ellentmondás**. Ezzel beláttuk, hogy $D_\varphi = B$.

φ tehát kölcsönösen egyértelmű leképezése $D_\varphi = B$-nek $R_\varphi \subset B'$-re, amiből következik, hogy B számossága B' számosságánál nem nagyobb. B és B' szerepét felcserélve, kapjuk a fordított egyenlőtlenséget, amiből a tétel állítása következik.

$\square$

2.1.8. Definíció. Egy lineáris tér Hamel-bázisainak közös számosságát a tér *(algebrai) dimenziójá*nak nevezzük. A $\{0\}$ tér dimenziója 0. $\diamondsuit$

2.1.4. Tétel. *Minden lineáris tér (kivéve a $\{0\}$ teret) izomorf a tér egy Hamel-bázisán értelmezett finit függvények terével.*

Bizonyítás. Ha B az X lineáris tér egy Hamel-bázisa, akkor bármely $x \in X$ egyértelműen előáll

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \qquad (b_i \in B, \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n)$$

alakban. x-hez hozzárendelve azt az $F(B)$-beli függvényt, mely b_i-n a λ_i értéket $(i = 1, \dots, n)$, többi pontjában pedig 0-t vesz fel, X-nek kölcsönösen egyértelmű műveletartó leképezését kapjuk $F(B)$-re. $\square$

2.1.2. Következmény. *Azonos (algebrai) dimenziójú (valós vagy komplex) lineáris terek izomorfak.*

2.1.9. Definíció. Egy lineáris tér A részhalmazát *konvex*nek nevezzük, ha bármely $x, y \in A$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in A.$$

$\diamondsuit$

2.1.10. Definíció. Egy lineáris tér A részhalmazát tartalmazó összes konvex halmazok metszetét *A konvex burká*nak nevezzük, és $\operatorname{co} A$-val jelöljük. $\diamondsuit$

Mivel konvex halmazok metszete konvex, így $\operatorname{co} A$ konvex halmaz és minimális a következő értelemben: Ha B az A-t tartalmazó konvex halmaz, akkor $B \supset \operatorname{co} A$.

2.1.11. Definíció. Egy lineáris tér $x_1, \dots, x_n$ vektorainak *konvex kombinációi*n értjük az összes $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ alakú vektort, ahol $\lambda_i \geq 0\,(i = 1, \dots, n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. $\diamondsuit$

2.1.5. Tétel. *Egy lineáris tér A részhalmazának konvex burka az A-beli vektorok összes konvex kombinációinak halmaza.*

Bizonyítás. Jelölje D_n az A-beli elemek legfeljebb n tagú konvex kombinációit, azaz

$$D_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0,\, a_i \in A,\, i = 1, \ldots, n,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

és legyen $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$. Azt kell belátnunk, hogy $\operatorname{co} A = D$.

$\operatorname{co} A \subset D$, mert $A = D_1 \subset D$ és D konvex. Legyenek ugyanis $x, y \in D$, akkor $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i a_i$, ahol $\lambda_i, \mu_i \geq 0$, $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i = 1$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$\lambda x + (1 - \lambda) y = \sum_{i=1}^{n} \big(\lambda\lambda_i + (1 - \lambda)\mu_i\big) a_i \in D,$$

mert

$$\lambda\lambda_i + (1 - \lambda)\mu_i \geq 0 \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{n} \big(\lambda\lambda_i + (1 - \lambda)\mu_i\big) = 1.$$

A fordított tartalmazás $D \subset \operatorname{co} A$ igazolásához n szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy $D_n \subset \operatorname{co} A$. $n = 1$-re $D_1 = A \subset \operatorname{co} A$. Tegyük fel, hogy $D_n \subset \operatorname{co} A$, és legyen $x \in D_{n+1}$. Ekkor

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \lambda_{n+1} a_{n+1} \qquad (\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, n+1, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1).$$

Ha $\lambda_{n+1} = 1$, akkor $x = a_{n+1} \in A \subset \operatorname{co} A$, ha $\lambda_{n+1} < 1$, akkor

$$x = \lambda_{n+1} a_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} a_i,$$

de $a_{n+1} \in A \subset \operatorname{co} A$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} a_i \in D_n \subset \operatorname{co} A$, így $\operatorname{co} A$ konvexsége miatt $x \in \operatorname{co} A$. □

Ha A, B egy lineáris tér részhalmazai, λ, μ skalárok, akkor szokásos a

$$\lambda A + \mu B = \{\lambda a + \mu b \mid a \in A, b \in B\}$$

jelölést használni. Ha itt pl. $B = \{b\}$ egyelemű halmaz, úgy $\lambda A + \mu\{b\}$ helyett egyszerűen $\lambda A + \mu b$-t írunk. E jelölésekkel pl. az A halmaz konvexitása azt jelenti, hogy bármely $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$\lambda A + (1 - \lambda) A \subset A.$$

2.2. A Hahn-Banach tétel

Egy X lineáris térnek ugyanazon skalárokkal rendelkező Y lineáris térbe való A leképezését akkor neveztük lineáris leképezésnek, ha A additív és homogén, azaz ha

$$\begin{aligned} A(x+y) &= Ax + Ay \\ A(\lambda x) &= \lambda Ax \end{aligned} \qquad (x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}).$$

A $\mathbb{K}$ test (ahol $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) maga is lineáris tér $\mathbb{K}$ felett, így van értelme a következő definíciónak.

2.2.1. Definíció. Egy lineáris térnek a skalártartományába való (lineáris) leképezését *(lineáris) funkcionál*nak nevezzük. ♢

Így az X lineáris téren értelmezett $f : X \to \mathbb{K}$ funkcionál lineáris, ha bármely $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$-ra

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

teljesül.

Megjegyzés. Az $f : X \to \mathbb{K}$ funkcionál valós vagy komplex értékű függvény, így $x \in X$-beli értékét $f(x)$-szel jelöljük, ha $A : X \to Y$ egy operátor (leképezés), úgy A x-beli értékét Ax-szel jelöljük, itt x-et nem tesszük zárójelbe.

2.2.1. Tétel. (Hahn-Banach) *Legyen X egy valós lineáris tér és $p : X \to \mathbb{R}$ egy szubadditív pozitív homogén függvény X-en, azaz*

$$\begin{aligned} p(x+y) &\le p(x) + p(y) \qquad &(p \text{ szubadditív}) \\ p(\alpha x) &= \alpha p(x) \qquad &(p \text{ pozitív homogén}) \end{aligned}$$

teljesül minden $x, y \in X$, $\alpha \ge 0$ esetén. Tegyük fel, hogy $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ az X lineáris tér X_0 alterén definiált lineáris funkcionál, melyre

$$f_0(u) \le p(u) \quad (u \in X_0).$$

Akkor létezik olyan, az egész X téren értelmezett $f : X \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, hogy

$$\begin{aligned} f(u) &= f_0(u) \qquad &(u \in X_0), \\ f(x) &\le p(x) \qquad &(x \in X). \end{aligned}$$

Röviden: *valós lineáris tér egy alterén értelmezett és ott egy szubadditív, pozitív homogén függvénnyel majorált lineáris funkcionál kiterjeszthető az egész térre a linearitás és a majorálás megtartása mellett.*

Bizonyítás. 1. Legyen $x_1 \in X \setminus X_0$ és X_1 az $X_0 \cup \{x_1\}$ lineáris burka. Bármely $y \in X_1$ elem $X_0 \cup \{x_1\}$-beli elemnek lineáris kombinációja, így

$$y = x + \lambda x_1 \qquad (x \in X_0, \lambda \in \mathbb{R})$$

alakú. Megfordítva, bármely $x + \lambda x_1\,(x \in X_0, \lambda \in \mathbb{R})$ alakú elem X_1-beli. Továbbá, ez az előállítás egyértelmű, mert ha

$$y = x' + \lambda' x_1 \qquad (x' \in X_0, \lambda' \in \mathbb{R}),$$

úgy $x - x' = (\lambda' - \lambda)x_1 \in X_0$, ami csak $\lambda' - \lambda = 0$, $x - x' = 0$ esetén igaz. Megmutatjuk, hogy f_0-t ki lehet terjeszteni X_1-re a linearitás és a majorálás megtartásával. Ha f_1 egy ilyen kiterjesztés, úgy $y = x + \lambda x_1$-re

$$f_1(y) = f_1(x) + \lambda f_1(x_1) = f_0(x) + \lambda c \qquad (c = f_1(x_1)). \tag{2.2.1}$$

Világos, hogy a $c \in \mathbb{R}$ konstans bármely választásánál ez lineáris kiterjesztése f_0-nak X_1-re. Azt fogjuk belátni, hogy c megválasztható úgy, hogy

$$f_1(y) \le p(y) \qquad (y \in X_1) \tag{2.2.2}$$

teljesüljön. (2.2.1) segítségével (2.2.2) a

$$f_0(x) + \lambda c \le p(x + \lambda x_1) \qquad (x \in X_0, \lambda \in \mathbb{R}) \tag{2.2.3}$$

alakba írható át.

Ha $\lambda = 0$, akkor (2.2.3) teljesül tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén.

Ha $\lambda > 0$, akkor (2.2.3) pontosan akkor igaz, ha

$$f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) + c \le p\left(\frac{x}{\lambda} + x_1\right),$$

vagy ha (az $u = \dfrac{x}{\lambda} \in X_0$ jelöléssel)

$$c \le p(u + x_1) - f_0(u) \qquad (u \in X_0)$$

fennáll.

Ha $\lambda < 0$, úgy $-\lambda > 0$, így osztva vele kapjuk, hogy (2.2.3) akkor és csakis akkor teljesül, ha

$$f_0\left(-\frac{x}{\lambda}\right) - c \le p\left(-\frac{x}{\lambda} - x_1\right),$$

azaz ha (a $v = -\dfrac{x}{\lambda} \in X_0$ jelöléssel)

$$f_0(v) - p(v - x_1) \le c \qquad (v \in X_0)$$

teljesül.

Összefoglalva az eseteket azt kapjuk, hogy (2.2.3) vagy (2.2.2) pontosan akkor teljesül, ha bármely $u, v \in X_0$ mellett

$$f_0(v) - p(v - x_1) \le c \le p(u + x_1) - f_0(u). \tag{2.2.4}$$

Legyen $u, v \in X_0$. Ekkor

$$\begin{aligned} f_0(u) + f_0(v) = f_0(u + v) &\le p(u + v) = p(u + x_1 + v - x_1) \\ &\le p(u + x_1) + p(v - x_1), \end{aligned}$$

amiből

$$f_0(v) - p(v - x_1) \le p(u + x_1) - f_0(u),$$

$$\sup_{v \in X_0} \{f_0(v) - p(v - x_1)\} \le \inf_{u \in X_0} \{p(u + x_1) - f_0(u)\}. \tag{2.2.5}$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalán egy valós szám áll, ha c-t úgy választjuk, hogy e két valós szám között legyen, úgy nyilvánvaló, hogy (2.2.4) és ezzel együtt (2.2.2) is teljesül. Így f_1 olyan lineáris funkcionál X_1-en, melyet p majorál.

2. Azt fogjuk mondani, hogy f' majorált kiterjesztése f_0-nak, ha f' egy az X_0-t tartalmazó X' altéren definiált lineáris funkcionál, melyre

$$\begin{aligned} f'(u) &= f_0(u) \qquad && (u \in X_0), \\ f'(x) &\le p(x) \qquad && (x \in X') \end{aligned}$$

teljesül. Legyen Φ az f_0 funkcionál összes majorált kiterjesztéseinek halmaza. Φ-n definiáljuk a $\prec$ féligrendezést a következőképpen: $f', f'' \in \Phi$-re

$$f' \prec f'' \quad \text{ha} \quad X' \subset X'' \qquad \text{és} \qquad f'(x) = f''(x) \quad \text{ha} \quad x \in X'.$$

Φ minden lánca felülről korlátos, mert ha Φ_0 egy lánc, úgy legyen

$$Y = \bigcup_{f' \in \Phi_0} X', \quad \text{és} \quad g(x) = f'(x), \quad \text{ha} \quad x \in X'.$$

Mivel Φ_0 lánc, g egyértelműen definiálva van Y-on, lineáris és p majorálja g-t Y-on, tehát $g \in \Phi$. Továbbá $f' \prec g$ bármely $f' \in \Phi_0$ esetén, így g felső korlátja Φ_0-nak. A Zorn lemma szerint Φ-nek van maximális f eleme. f az egész X téren értelmezett lineáris funkcionál, mely majorált kiterjesztése f_0-nak, ha ugyanis f nem volna az egész X téren értelmezve, akkor az 1. alatti eljárást f-re alkalmazva ellentmondásra jutnánk f maximalitásával.

□

Megjegyzés. Ha (2.2.5)-ben $<$ áll fenn, akkor kontinuum sok $c \in \mathbb{R}$ van, mellyel a (2.2.1) szerint képzett f_1 majorált kiterjesztése f_0-nak. Igy, a Hahn-Banach tételben szereplő f kiterjesztés általában *nem egyértelmű.*

2.2.1. Következmény. *Legyen X valós lineáris tér, $p : X \to \mathbb{R}$ szubadditív, pozitív homogén függvény X-en. Ekkor létezik olyan $f : X \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, melyre bármely $x \in X$ esetén*

$$-p(-x) \leq f(x) \leq p(x).$$

Alkalmazzuk ugyanis a 2.2.1 tételt (Hahn-Banach tétel) $X_0 = \{0\}$, $f_0(0) = 0$ választásokkal ($f_0(0) = 0 = p(0)$ miatt X_0-on f_0-t p majorálja). Létezik tehát egy olyan $f : X \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, melyre $f(x) \leq p(x)$, de akkor $-f(x) = f(-x) \leq p(-x)$, amiből $-p(-x) \leq f(x)$ $(x \in X)$.

A Hahn-Banach tétel kis módosítással komplex lineáris terek esetében is érvényes.

2.2.2. Tétel. (Bohnenblust-Sobczyk) *Legyen X egy komplex lineáris tér és $p : X \to \mathbb{R}$ egy X-en definiált valós értékű függvény, melyre bármely $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{C}$ esetén*

$$\begin{aligned} p(x+y) &\leq p(x) + p(y), \\ p(\lambda x) &= |\lambda|\, p(x) \end{aligned}$$

teljesül. (Az ilyen tulajdonságú p függvényt félnormának nevezzük.) Tegyük fel, hogy f_0 az X lineáris tér X_0 alterén definiált lineáris funkcionál, melyre

$$|f_0(u)| \leq p(u) \quad (u \in X_0).$$

Akkor létezik olyan $f : X \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál X-en, hogy

$$\begin{aligned} f(u) &= f_0(u) \qquad (u \in X_0), \\ |f(x)| &\leq p(x) \qquad (x \in X). \end{aligned}$$

Röviden: *Egy komplex lineáris tér egy alterén definiált és ott abszolút értékben egy félnormával majorált lineáris funkcionál kiterjeszthető az egész térre a linearitás és a majorálás megtartásával.*

Bizonyítás. Legyenek g_0, h_0 az f_0 funkcionál valós és képzetes részei, azaz

$$g_0(x) = \frac{f_0(x) + \overline{f_0(x)}}{2}, \qquad h_0(x) = \frac{f_0(x) - \overline{f_0(x)}}{2i} \qquad (x \in X_0).$$

g_0, h_0 valós értékű funkcionálok, melyek f_0 linearitása miatt additívak és a valós skalárokkal való szorzásra nézve homogének is. Továbbá, $x \in X_0$-ra

$$-ig_0(ix) = -i\frac{f_0(ix) + \overline{f_0(ix)}}{2} = -i\frac{if_0(x) - i\overline{f_0(x)}}{2} = \frac{f_0(x) - \overline{f_0(x)}}{2} = ih_0(x),$$

így

$$f_0(x) = g_0(x) + ih_0(x) = g_0(x) - ig_0(ix) \quad (x \in X_0).$$

Az X valós lineáris tér is, ha a skalárral való szorzást leszűkítjük a *valós skalárokkal* való szorzásra. X_0 ennek valós lineáris altere, és az előbbiek alapján $g_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ valós lineáris funkcionál X_0-on, melyet a p félnorma majorál, mert

$$g_0(x) = \mathrm{Re} f_0(x) \leq |f_0(x)| \leq p(x) \qquad (x \in X_0).$$

Mivel p szubadditív és pozitív homogén is, alkalmazhatjuk g_0-ra a Hahn-Banach tételt. Létezik tehát olyan $g : X \to \mathbb{R}$ valós lineáris funkcionál, melyre

$$\begin{aligned} g(u) &= g_0(u) \qquad && (u \in X_0), \\ g(x) &\leq p(x) \qquad && (x \in X). \end{aligned}$$

Legyen

$$f(x) = g(x) - ig(ix) \qquad (x \in X).$$

Azt állítjuk, hogy f teljesíti a tétel követelményeit.
$f : X \to \mathbb{C}$ *additív*, mert $x, y \in X$-re

$$f(x+y) = g(x+y) - ig(i(x+y)) = g(x) + g(y) - ig(ix) - ig(iy) =$$

$$= \big(g(x) - ig(ix)\big) + \big(g(y) - ig(iy)\big) = f(x) + f(y),$$

és f *homogén* (a komplex számokkal való szorzásra nézve is), mert ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in X$, úgy

$$\begin{aligned} f\big((\alpha + i\beta)x\big) &= g\big((\alpha + i\beta)x\big) - ig\big(i(\alpha + i\beta)x\big) \\ &= \alpha g(x) + \beta g(ix) - i\alpha g(ix) - i\beta g(-x) \\ &= \alpha\,[g(x) - ig(ix)] + i\beta\,[g(x) - ig(ix)] = (\alpha + i\beta) f(x). \end{aligned}$$

Ha $u \in X_0$, úgy $iu \in X_0$, és

$$f(u) = g(u) - ig(iu) = g_0(u) - ig_0(iu) = f_0(u).$$

Továbbá tetszőleges $x \in X$ esetén létezik olyan $\varphi \in [0, 2\pi)$, hogy $f(x) = |f(x)|e^{i\varphi}$, és így

$$|f(x)| = e^{-i\varphi} f(x) = f\left(e^{-i\varphi} x\right) = \mathrm{Re} f(e^{-i\varphi} x) = g(e^{-i\varphi} x) \leq p(e^{-i\varphi} x) = p(x),$$

ezzel a bizonyítás teljes. □

2.3. A Hahn-Banach tétel alkalmazásai

1. Banach-limesz egzisztenciája

2.3.1. Definíció. A valós l_∞ lineáris téren értelmezett L lineáris funkcionált *Banach-limesz*nek nevezzük, ha

(1) $L(x) \geq 0$, ahol $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_\infty$, $\xi_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots)$,

(2) $L(x) = L(\sigma x)$, ahol $\sigma x = \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_2, \xi_3, \dots)$,

(3) $L(e) = 1$, ahol $e = (1, 1, \dots)$.

$\diamondsuit$

Nyilvánvaló, hogy a konvergens sorozatok c terén értelmezett közönséges limesz is rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, viszont l_∞-beli (tehát korlátos) sorozathoz hagyományos módon nem rendelhető határérték.

2.3.1. Tétel. *Ha L egy Banach-limesz, úgy bármely $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_\infty$ esetén*

$$\liminf_n \xi_n \leq L(x) \leq \limsup_n \xi_n, \tag{2.3.1}$$

így speciálisan $x \in c$-re $L(x) = \lim_{n\to\infty} \xi_n$.

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy

$$\inf\{\xi_1, \xi_2, \dots\} \leq L(x) \leq \sup\{\xi_1, \xi_2, \dots\}.$$

Tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0 index, hogy

$$\inf\{\xi_1, \xi_2, \dots\} \leq \xi_{n_0} < \inf\{\xi_1, \xi_2, \dots\} + \varepsilon \leq \xi_n + \varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

amiből

$$0 < \xi_n - \xi_{n_0} + \varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az L funkcionál (1) tulajdonsága miatt

$$L(x - \xi_{n_0} e + \varepsilon e) \geq 0,$$

továbbá L linearitását és (3)-at felhasználva

$$L(x) + \varepsilon \geq \xi_{n_0} \geq \inf\{\xi_1, \xi_2, \dots\},$$

amiből $\varepsilon \to 0$ határátmenettel

$$L(x) \geq \inf\{\xi_1, \xi_2, \dots\}.$$

Az $L(x) \le \sup\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ egyenlőtlenség hasonlóan bizonyítható. A bizonyított egyenlőtlenséget $\sigma^n x$-re alkalmazva $L(\sigma^n x) = L(x)$ alapján

$$\inf\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots\} \le L(x) \le \sup\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots\}.$$

A bal és jobboldalon álló sorozatok monotonok és limeszük éppen $\liminf_n \xi_n$ és $\limsup_n \xi_n$, így $n \to \infty$-nel kapjuk (2.3.1)-et. □

2.3.2. Tétel. *Létezik legalább egy Banach-limesz.*

Bizonyítás. $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c$-re legyen

$$l(x) = \lim_{n\to\infty} \xi_n,$$

úgy l lineáris funkcionál c-n. A

$$p(x) = \limsup_n \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \qquad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_\infty)$$

formulával definiált $p : l_\infty \to \mathbb{R}$ függvény a $\limsup$ operáció szubadditivitása miatt szubadditív és pozitív homogén. Továbbá $x \in c$ esetén

$$l(x) = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 \cdots + \xi_n}{n} = \limsup_n \frac{\xi_1 + \xi_2 \cdots + \xi_n}{n} = p(x).$$

A Hahn-Banach tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy létezik l-nek az l_∞ térre való olyan L lineáris kiterjesztése, melyre

$$L(x) \le p(x) \qquad (x \in l_\infty).$$

Megmutatjuk, hogy L egy Banach-limesz.

(1) teljesül, mert ha $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, $\xi_i \ge 0$ $(i = 1, 2, \dots)$, akkor

$$p(-x) = \limsup_n \frac{-\xi_1 - \xi_2 - \cdots - \xi_n}{n} \le 0,$$

így

$$L(x) = -L(-x) \ge -p(-x) \ge 0.$$

(2) igaz, mert bármely $x \in l_\infty$-re

$$-p(-x + \sigma x) \le L(x - \sigma x) \le p(x - \sigma x),$$

ahol

$$p(x - \sigma x) = \limsup_n \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n - (\xi_2 + \cdots + \xi_{n+1})}{n} = \limsup_n \frac{\xi_1 - \xi_{n+1}}{n} = 0,$$

és hasonlóan $p(-x + \sigma x) = 0$, ezért $L(x - \sigma x) = 0$. Így L linearitása miatt $L(\sigma x) = L(x)$.

(3) igazolása: $L(e) = l(e) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, mert $e \in c$.

$\square$

2. Általánosított integrál és mérték

Jelölje M az összes $\mathbb{R}$-en értelmezett valós értékű, 1 szerint periódikus, korlátos függvények halmazát. M valós lineáris tér, ha a függvények összeadását és számmal való szorzását a szokásos módon definiáljuk. Világos, hogy elegendő M függvényeit a $[0, 1)$ intervallumon definiálni, innen egyértelműen, periódikusan kiterjeszthetők az egész számegyenesre.

2.3.2. Definíció. Az M halmazon értelmezett I lineáris funkcionált *általánosított integrál*nak nevezzük, ha

(4) $I(x) \geq 0$, ha $x \in M$ és $x(t) \geq 0$ $(t \in \mathbb{R})$,

(5) $I(\sigma_{t_0} x) = I(x)$, ha $x \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}$, ahol $(\sigma_{t_0} x)(t) = x(t + t_0)$ $(t \in \mathbb{R})$,

(6) $I(\tau x) = I(x)$, ha $x \in M$, ahol $(\tau x)(t) = x(1 - t)$ $(t \in \mathbb{R})$,

(7) $I(e) = 1$, ahol $e(t) = 1$ $(t \in \mathbb{R})$.

$\diamondsuit$

Az általánosított integrál tehát olyan lineáris funkcionál M-en, mely nemnegatív függvényekre nemnegatív, a konstans 1 függvényre egy, és melynek értéke a függvény eltolása, vagy tükrözése esetén nem változik.

2.3.3. Tétel. *Ha I egy általánosított integrál, úgy bármely $x \in M$-re fennáll az*

$$\underline{\int} x(t)dt \leq I(x) \leq \overline{\int} x(t)dt, \tag{2.3.2}$$

egyenlőtlenség, ahol $\underline{\int}$ illetve $\overline{\int}$ a $[0, 1]$ intervallumon vett Darboux-féle alsó, illetve felső integrált jelöli. Így, ha x Riemann-integrálható $[0, 1]$-en, akkor

$$I(x) = \int_0^1 x(t)dt.$$

Bizonyítás. Legyen $c \in \mathbb{R}$, és

$$x_k(t) = \begin{cases} c & \text{ha } t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \\ 0 & \text{ha } t \in [0,1) \setminus \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right), \\ 1 \text{ szerint periódikusan kiterjesztve } \mathbb{R}\text{-re} \end{cases} \qquad (k = 1, \dots, n).$$

Ekkor az (5) tulajdonság miatt

$$I(x_1) = I(x_2) = \cdots = I(x_n).$$

Mivel $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = ce$, így a (7) tulajdonság és I linearitása alapján

$$c = cI(e) = I(ce) = I(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = I(x_1) + I(x_2) + \cdots + I(x_n) = nI(x_n),$$

amiből

$$I(x_k) = \frac{c}{n} \qquad (k = 1, \dots, n).$$

A (4) tulajdonság miatt I monoton, azaz $I(x) \geq I(y)$, ha $x(t) \geq y(t), (t \in [0,1))$. Legyen

$$\delta(t) = \begin{cases} c & \text{ha } t = 0, \\ 0 & \text{ha } t \in (0,1), \\ 1 \text{ szerint periódikusan kiterjesztve } \mathbb{R}\text{-re.} \end{cases}$$

Ekkor $c \geq 0$ esetén, a monotonitás miatt bármely n-re

$$0 = I(0) \leq I(\delta) \leq I(x_1) = \frac{c}{n},$$

amiből $I(\delta) = 0$, és ez I homogenitása miatt tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ mellett is igaz. Ezért egy M-beli függvényt egy (vagy véges sok) pontban (és a periódicitás miatt, egészekkel való eltoltjaikban) megváltoztatva az I funkcionál értéke nem változik. Jelölje χ_k a $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ intervallum karakterisztikus függvényének 1 szerint periódikus kiterjesztését $\mathbb{R}$-re, m_k és M_k az $x \in M$ függvény infimumát és szuprémumát ezen intervallumon, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \chi_k(t) \leq \sum_{k=1}^{n} x(t)\chi_k(t) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \chi_k(t) \qquad t \in [0,1).$$

Az $x'(t) = x(t) \sum\limits_{k=1}^{n} \chi_k(t)$ képlettel definiált x' függvény csak a $\frac{k}{n}$ osztópontokban (és egészekkel való eltoltjaikban) térhet el x-től, így $I(x) = I(x')$, és

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{1}{n} = I\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \chi_k\right) \leq I(x) \leq I\left(\sum_{k=1}^{n} M_k \chi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} M_k \frac{1}{n}.$$

$n \to \infty$ esetén a bal- és jobboldali összegek Darboux-tétele miatt x alsó és felső Darboux-féle integráljához tartanak, így (2.3.2) fennáll. $\square$

2.3.4. Tétel. *Létezik legalább egy általánosított integrál.*

Bizonyítás. Először egy szubadditív és pozitív homogén függvényt konstruálunk M-en.

Legyen $x \in M$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ valós számok, továbbá legyen

$$\Pi(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sup_t \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(t + \alpha_k),$$

és

$$p(x) = \inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}} \Pi(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Amint látható $\Pi(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ az x függvény $\alpha_1 \dots, \alpha_n$-nel való eltoltjai számtani közepeinek szuprémuma, p a $\Pi(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ számhalmaz infimuma (az α_i konstansok minden lehetséges választása mellett).

Világos, hogy $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, ha $\lambda \geq 0$. p szubadditivitásának bizonyításához legyen $\varepsilon > 0$, $x, y \in M$ és $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ olyan konstansok, hogy

$$\Pi(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n) - p(x) < \varepsilon,$$

$$\Pi(y; \beta_1, \dots, \beta_m) - p(y) < \varepsilon.$$

Ha $\gamma_{ij} = \alpha_i + \beta_j$, akkor egyrészt

$$p(x + y) \leq \Pi(x + y; \gamma_{11}, \dots, \gamma_{nm}),$$

másrészt

$$\Pi(x + y; \gamma_{11}, \dots, \gamma_{nm}) = \sup_t \tfrac{1}{n \cdot m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(x(t + \alpha_i + \beta_j) + y(t + \alpha_i + \beta_j) \right)$$

$$\leq \tfrac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \sup_t \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x(t + \beta_j + \alpha_i) + \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_t \tfrac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} y(t + \alpha_i + \beta_j)$$

$$= \tfrac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \sup_s \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x(s + \alpha_i) + \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_s \tfrac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} y(s + \beta_j)$$

$$= \tfrac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \Pi(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n) + \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Pi(y; \beta_1, \dots, \beta_m)$$

$$= \Pi(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n) + \Pi(y; \beta_1, \dots, \beta_m) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

Innen $p(x+y) \le p(x) + p(y) + 2\varepsilon$, és $\varepsilon \to 0$-val adódik, hogy p szubadditív:

$$p(x+y) \le p(x) + p(y).$$

A Hahn-Banach tétel 2.2.1. következménye szerint létezik olyan I_1 lineáris funkcionál M-en, melyre

$$-p(-x) \le I_1(x) \le p(x) \qquad (x \in M).$$

Megmutatjuk, hogy I_1-re a (4), (5), (7) tulajdonságok teljesülnek.

(4) Ha $x \in M$, $x(t) \ge 0$ $(t \in \mathbb{R})$, úgy $p(-x) \le 0$, $-p(-x) \ge 0$, így $I_1(x) \ge 0$.

(5) Legyen $x'(t) = x(t+t_0) - x(t)$, és $\alpha_i = (i-1)t_0$ $(i = 1, \dots, n+1)$, akkor

$$\begin{aligned} p(x') &\le \Pi(x'; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = \tfrac{1}{n+1} \sup_t \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} x'(t+\alpha_i) \\ &= \tfrac{1}{n+1} \sup_t \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} \Big(x\big(t + t_0 + (i-1)t_0\big) - x\big(t + (i-1)t_0\big) \Big) \\ &= \tfrac{1}{n+1} \sup_t \Big(x\big(t + (n+1)t_0\big) - x(t) \Big). \end{aligned}$$

Ebből $n \to \infty$ határátmenettel $p(x') \le 0$ adódik, mivel x korlátos. Hasonlóan kapjuk a $p(-x') \le 0$ egyenlőtlenséget, így

$$0 \le -p(-x') \le I_1(x') \le p(x') \le 0$$

alapján $I_1(x') = 0 = I_1(\sigma_{t_0} x) - I_1(x)$, ezzel (5) teljesülését igazoltuk.

(7) Az $e(t) = 1$ $(t \in \mathbb{R})$ függvényre

$$\Pi(e; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{n} \sup_t \sum_{i=1}^n e(t+\alpha_i) = 1,$$

$$p(e) = \inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}} \Pi(e, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1.$$

Hasonlóan $p(-e) = -1$, amiből $1 = -p(-e) \le I_1(e) \le p(e) = 1$ miatt $I_1(e) = 1$.

Végül legyen $I(x) = \frac{1}{2}\big(I_1(x) + I_1(\tau x)\big)$, akkor I lineáris funkcionál M-en, mely a (4), (5), (7) tulajdonságokon kívül (6)-ot is teljesíti (mert $\tau^2 x = x$). $\square$

2.3.5. Tétel. *A $[0,1)$ intervallum bármely E részhalmazához hozzárendelhető egy μE általánosított mérték, mely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

$\mu E \geq 0$, azaz μ nemnegatív,

μ végesen additív,

$\mu E_1 = \mu E_2$, ha E_1 az E_2-ből mozgással megkapható,

$\mu[0, 1) = 1$.

Bizonyítás. Legyen $\mu E = I(\chi_E)$, ahol I egy általánosított integrál, χ_E az E halmaz karakterisztikus függvényének 1 szerint periódikus kiterjesztése $\mathbb{R}$-re. □

3. fejezet

Lineáris topologikus és normált terek

3.1. Lineáris topologikus terek

3.1.1. Definíció. Az X halmazt *lineáris topologikus tér*nek, vagy topologikus vektortérnek nevezzük a $\mathbb{K}$ test felett, ha

X lineáris tér $\mathbb{K}$ felett,

X topologikus tér,

$X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$ és $\mathbb{K} \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in X$ folytonos leképezések.

$\diamondsuit$

Az utolsó feltétel azt jelenti, hogy $x + y$ bármely U környezetéhez van olyan V környezete x-nek és W környezete y-nak, hogy

$$V + W \subset U,$$

továbbá, hogy λx bármely U környezetéhez van olyan V környezete x-nek, és olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$\mu V \subset U \quad \text{ha } |\mu - \lambda| < \delta.$$

Megjegyzés. Környezet alatt itt, és a továbbiakban, mindig nyílt környezetet értünk (ld. a Függelék 8.2.1 definíciót).

3.1.1. Tétel. *Legyen X lineáris topologikus tér, $a \in X$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, akkor a*

$$\begin{aligned} T_a x &= a + x && \text{(a-val való eltolás)} \\ M_\lambda x &= \lambda x && \text{(λ-val való szorzás)} \end{aligned}$$

leképezések X-nek X-re való homeomorfizmusai.

Bizonyítás. A lineáris tér axiómáiból következik, hogy T_a és M_λ kölcsönösen egyértelmű leképezései X-nek X-re, és hogy inverzeik éppen T_{-a} és $M_{\frac{1}{\lambda}}$. A műveletek folytonosságából következik, hogy T_a, M_λ, $M_{\frac{1}{\lambda}}$, T_{-a} folytonos leképezések, így homeomorfizmusok. □

A 3.1.1 tételből következik, hogy egy lineáris topologikus tér topológiája (röviden *vektortopológia*) mindig eltolásinvariáns, azaz $G \subset X$ akkor és csakis akkor nyílt, ha $a + G\,(a \in G)$ nyílt. Ezért a topológiát teljesen meghatározza bármely pont környezetbázisa, így a 0 környezetbázisa is. Ha $\mathcal{B}$ a 0 egy környezetbázisa, úgy X nyílt halmazai éppen azok a halmazok lesznek, melyek $\mathcal{B}$-beli halmazok eltoltjainak uniójaként írhatók fel.

3.1.2. Definíció. Egy X lineáris tér M részhalmazát *szimmetrikus*nak nevezzük, ha $x \in M$, $|\alpha| \leq 1$ esetén $\alpha x \in M$.

Az M részhalmazt *elnyelő*nek nevezzük, ha bármely $x \in X$-hez van olyan $\alpha > 0$ szám, hogy $\dfrac{x}{\alpha} \in M$. ♢

A következő tétel a vektortopológiák néhány speciális tulajdonságát foglalja össze.

3.1.2. Tétel. *Egy X lineáris topologikus térben érvényesek az alábbi állítások:*

(1) *ha $A \subset X$, akkor $\overline{A} = \bigcap_V (A + V)$, ahol V befutja 0 összes környezetét,*

(2) *ha $A, B \subset X$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, akkor $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$, $\lambda\overline{A} = \overline{\lambda A}$,*

(3) *ha Y lineáris altere X-nek, úgy $\overline{Y}$ zárt lineáris altér,*

(4) *ha C konvex részhalmaza X-nek, úgy $\overline{C}$ és C° is konvex,*

(5) *ha B szimmetrikus részhalmaz X-ben, úgy $\overline{B}$ is szimmetrikus, ha még $0 \in B^\circ$ is teljesül, akkor B° is szimmetrikus.*

Bizonyítás. (1) $x \in \overline{A} \iff x$ érintkezési pontja A-nak $\iff (x+U) \cap A \neq \emptyset$, 0 bármely U környezete esetén $\iff x \in A - U \iff x \in \bigcap_V (A + V)$ ahol V befutja 0 összes környezetét ($V = -U$ is befutja 0 összes környezeteit, ha U befutja 0 összes környezetét).

(2) Legyen $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$ és U az $a + b$ egy környezete. Van olyan V környezete a-nak, és W környezete b-nek, hogy $V + W \subset U$. Mivel $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, így $A \cap V$, $B \cap W$ nem üresek: $x \in A \cap V$, $y \in B \cap W$, innen $x + y \in (A + B) \cap (V + W) \subset (A + B) \cap U$, így $(A + B) \cap U$ nem üres $a + b$ bármely U környezete esetén, amiből $a + b \in \overline{A + B}$.

Ha $\lambda \neq 0$, akkor a 3.1.1 tétel szerint $M_\lambda x = \lambda x$ homeomorfizmusa X-nek X-re, így ha V befutja 0 összes környezetét, úgy $U = \lambda V$ is befutja 0 összes környezetét. Ezért (1) alapján

$$\lambda\overline{A} = \lambda\Big[\bigcap_V (A+V)\Big] = \bigcap_V (\lambda A + \lambda V) = \bigcap_U (\lambda A + U) = \overline{\lambda A}.$$

$\lambda = 0$ esetén állításunk: $\{0\} = \overline{\{0\}}$ igaz, ha a tér T_1 (lásd a Függelék 8.6.1 Definícióját).

(3) Mivel $\lambda\overline{A} \subset \overline{\lambda A}$ igaz $\lambda = 0$ esetén is, így

$$\overline{Y} + \overline{Y} \subset \overline{Y + Y} = \overline{Y},$$

$$\lambda\overline{Y} \subset \overline{\lambda Y} = \overline{Y},\ \lambda \in \mathbb{K},$$

ami azt jelenti, hogy $\overline{Y}$ zárt lineáris altér.

(4) $\overline{C}$ konvexitása abból következik, hogy $\lambda \in [0,1]$-re

$$\lambda\overline{C} + (1-\lambda)\overline{C} \subset \overline{\lambda C + (1-\lambda)C} \subset \overline{C}.$$

Mivel $C^\circ \subset C$ és C konvex, így $\lambda \in [0,1]$ mellett

$$\lambda C^\circ + (1-\lambda)C^\circ \subset C.$$

Mivel $\lambda \in (0,1)$ esetén a baloldalon λC°, $(1-\lambda)C^\circ$ nyílt halmazok, így összegük is nyílt, ezért

$$\lambda C^\circ + (1-\lambda)C^\circ \subset C^\circ,$$

és ez $\lambda = 0, 1$-re is érvényes.

(5) Ha B szimmetrikus, úgy $\overline{B}$ is az, mert $|\alpha| \leq 1$-re

$$\alpha\overline{B} \subset \overline{\alpha B} \subset \overline{B}.$$

Legyen most $0 < |\alpha| \leq 1$, akkor αB° nyílt és $\alpha B^\circ \subset \alpha B \subset B$. Innen $\alpha B^\circ \subset B^\circ$ és ez $\alpha = 0$-ra is igaz, mert $0B^\circ = \{0\} \subset B^\circ$, így B° szimmetrikus.

$\square$

3.1.3. Tétel. *Egy lineáris topológikus térben*

(6) *nulla bármely környezete elnyelő,*

(7) *nulla bármely környezete tartalmazza nulla egy szimmetrikus környezetét,*

(8) *nulla bármely konvex környezete tartalmazza nulla egy konvex szimmetrikus környezetét.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{U}$ nulla összes környezeteinek halmazát. Mivel $(\lambda, x) \to \lambda x$ folytonos $(0, x)$-ben, ahol x a lineáris topológikus tér tetszőleges eleme, így bármely $U \in \mathcal{U}$-hoz van olyan $\delta > 0$ és olyan V környezete x-nek, hogy

$$\lambda V \subset U \qquad \text{ha } |\lambda| < \delta.$$

Speciálisan $\lambda x \in U$, ha $|\lambda| < \delta$ $(\delta = \delta(x, U))$, így $\alpha > \frac{1}{\delta}$ mellett $\frac{x}{\alpha} \in U$, tehát U elnyelő, ezzel (6)-ot beláttuk.

(7) igazolásához legyen $x = 0$ az előző gondolatmenetben, akkor $V \in \mathcal{U}$, és $\lambda V \subset U$, ha $|\lambda| < \delta$ teljesül. Legyen

$$W = \bigcup_{|\lambda|<\delta} \lambda V,$$

akkor W szimmetrikus környezete 0-nak, és $W \subset U$.

Végül (8) igazolásához legyen $U \in \mathcal{U}$ konvex. Jelölje W a (7) bizonyításánál konstruált szimmetrikus környezetet, akkor $|\beta| = 1$ mellett $\beta W \subset W$ és $\beta^{-1} W \subset W$, azaz $W = \beta W$, amiből $W = \beta W \subset \beta U$, tehát $W \subset \bigcap_{|\beta|=1} \beta U$. Jelölje A a $\bigcap_{|\beta|=1} \beta U$ halmazt. Ekkor A konvex halmazok metszete lévén maga is konvex, így a 3.1.2 tétel (4) állítása miatt A° is konvex, továbbá $W \subset A^\circ \subset A \subset U$ miatt A° egy U-ban lévő konvex környezete 0-nak. Megmutatjuk, hogy A° szimmetrikus is. Mivel $0 \in W \subset A^\circ$, a 3.1.2 tétel (5) állítása miatt elég azt belátni, hogy A szimmetrikus. Legyen $|\alpha| \leq 1$, akkor $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$, és

$$\alpha A = \alpha \bigcap_{|\beta|=1} \beta U = \bigcap_{|\beta|=1} \alpha \beta U = \bigcap_{|\beta|=1} |\alpha| e^{i\varphi} \beta U = \bigcap_{|\gamma|=1} |\alpha| \gamma U.$$

Mivel γU konvex, és $|\alpha| \leq 1$, így $|\alpha| \gamma U \subset \gamma U$, írhatjuk, hogy

$$\alpha A = \bigcap_{|\gamma|=1} |\alpha| \gamma U \subset \bigcap_{|\gamma|=1} \gamma U = A,$$

tehát A szimmetrikus. □

3.1.3. Definíció. Egy lineáris topológikus teret *lokálisan konvex*nek nevezünk, ha 0-nak van konvex halmazokból álló környezetbázisa. ♢

A 3.1.3 tétel alapján fennáll az alábbi

3.1.1. Következmény. *Bármely lineáris topológikus térben* 0*-nak van szimmetrikus elnyelő halmazokból álló környezetbázisa.*

Lokálisan konvex térben 0*-nak van konvex, szimmetrikus, elnyelő halmazokból álló környezetbázisa.*

3.2. Félnorma rendszer által indukált topológia

Egy $\mathbb{K}$ feletti X lineáris téren értelmezett $p : X \to \mathbb{R}$ valós értékű függvényt félnormának neveztünk (ld. 2.2.2 tétel), ha bármely $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

(1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (p szubadditív),

(2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ (p abszolút homogén).

Egy félnormára mindig teljesülnek a

(i) $p(x) \geq 0, \quad p(0) = 0$,

(ii) $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y) \qquad (x, y \in X)$

tulajdonságok is. Valóban, $p(x) \leq p(x-y) + p(y)$, így $p(x) - p(y) \leq p(x-y)$, amiből x, y cseréjével $-(p(x) - p(y)) \leq p(y-x) = p(x-y)$ következik, azaz (ii) teljesül. Mivel $p(0) = p(0x) = 0p(x) = 0$, így (ii)-ből $y = 0$-val adódik (i).

3.2.1. Tétel. *Legyen p egy félnorma az X lineáris téren, $\varepsilon > 0$ egy konstans, akkor az*

$$U = \{x \in X \mid p(x) < \varepsilon\}$$

halmaz konvex, szimmetrikus, elnyelő halmaz.

Bizonyítás. p tulajdonságaiból és U definíciójából könnyen következik. □

Legyen X egy lineáris tér, $\{p_\gamma\}$ $(\gamma \in \Gamma)$ félnormák egy rendszere X-en. Jelölje $\mathcal{B}(0)$ az összes

$$U = U(\gamma_1, \ldots, \gamma_n; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \{x \in X \mid p_{\gamma_i}(x) < \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n\} \tag{3.2.1}$$

alakú halmazok osztályát, miközben $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ befutja Γ összes (index) n-eseit, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ befutja az összes pozitív szám n-eseket és $n = 1, 2, \ldots$. Legyen $x \in X$ esetén

$$\mathcal{B}(x) = \{x + U \mid U \in \mathcal{B}(0)\}, \tag{3.2.2}$$

és

$$\mathcal{G} = \{G \mid G \subset X, \text{ minden } x \in G\text{-hez van olyan } U \in \mathcal{B}(x), \text{ hogy } U \subset G\}. \tag{3.2.3}$$

Megmutatjuk, hogy *$\mathcal{G}$ topológia X-en, melyben $\mathcal{B}(0)$ a nulla konvex, szimmetrikus, elnyelő halmazokból álló környezetbázisa.*

Világos, hogy $\mathcal{B}(0)$ elemei konvex, szimmetrikus elnyelő halmazok, mivel

$$U(\gamma_1, \ldots, \gamma_n; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \bigcap_{i=1}^{n} U(\gamma_i, \varepsilon_i),$$

és a 3.2.1 tétel szerint $U(\gamma_i, \varepsilon_i)$ konvex, szimmetrikus és elnyelő halmaz bármely i-re. Látható, hogy $\emptyset, X \in \mathcal{G}$. Ha $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ és $x \in G_1 \cap G_2$, úgy vannak olyan $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(x)$ halmazok, hogy $U_1 \subset G_1$, $U_2 \subset G_2$. Így léteznek $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_1', \dots, \gamma_m'$ indexek és $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_1', \dots, \varepsilon_m'$ pozitív számok, hogy

$$U_1 = x + U(\gamma_1, \dots, \gamma_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n),$$

$$U_2 = x + U(\gamma_1', \dots, \gamma_m'; \varepsilon_1', \dots, \varepsilon_m').$$

Ekkor

$$U_0 = x + U(\gamma_1 \dots, \gamma_n, \gamma_1', \dots, \gamma_m'; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_1', \dots, \varepsilon_m') \subset G_1 \cap G_2$$

így $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$.

Végül, ha $G_\alpha \in \mathcal{G}$ $(\alpha \in A)$ és $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, úgy van olyan $\alpha_0 \in A$, hogy $x \in G_{\alpha_0}$, így létezik olyan $U_{\alpha_0} \in \mathcal{B}(x)$, melyre $U_{\alpha_0} \subset G_{\alpha_0}$. De akkor $U_{\alpha_0} \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, azaz $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \mathcal{G}$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{G}$ topológia. $\mathcal{B}(0)$ halmazai nyíltak, ugyanis ha $x \in U(\gamma_1, \dots, \gamma_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, akkor $p_{\gamma_i}(x) = \eta_i < \varepsilon_i$ $(i = 1, \dots, n)$, és

$$x + U\left(\gamma_1, \dots, \gamma_n; \frac{\varepsilon_1 - \eta_1}{2}, \dots, \frac{\varepsilon_n - \eta_n}{2}\right) \subset U(\gamma_1, \dots, \gamma_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n),$$

mert tetszőleges $u \in U\left(\gamma_1, \dots, \gamma_n; \frac{\varepsilon_1 - \eta_1}{2}, \dots, \frac{\varepsilon_n - \eta_n}{2}\right)$ esetén

$$p_{\gamma_i}(x + u) \le p_{\gamma_i}(x) + p_{\gamma_i}(u) < \eta_i + \frac{\varepsilon_i - \eta_i}{2} = \frac{\varepsilon_i + \eta_i}{2} < \varepsilon_i.$$

Ha V egy tetszőleges környezete 0-nak, úgy $0 \in V$, és így (3.2.3) alapján van olyan $U \in \mathcal{B}(0)$, hogy $U \subset V$, ami azt jelenti, hogy $\mathcal{B}(0)$ környezetbázisa 0-nak.

3.2.1. Definíció. A (3.2.3) formulával definiált $\mathcal{G}$ topológiát X-en a $\{p_\gamma\}$ $(\gamma \in \Gamma)$ *félnorma rendszer által indukált topológiának nevezzük.* $\diamondsuit$

3.2.2. Tétel. *Legyen X egy lineáris tér, $\{p_\gamma\}$ $(\gamma \in \Gamma)$ félnormák egy rendszere X-en. E félnorma rendszer által indukált topológiával X lokálisan konvex lineáris topologikus tér lesz, melyben minden p_γ $(\gamma \in \Gamma)$ félnorma folytonos függvény.*

E topológiában $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ akkor és csakis akkor, ha bármely $\gamma \in \Gamma$ mellett $p_\gamma(x_n - x) \to 0$, ha $n \to \infty$.

E topológia akkor és csakis akkor Hausdorff-féle, ha bármely $x \neq 0$, $x \in X$-hez létezik olyan $\gamma \in \Gamma$, hogy $p_\gamma(x) \neq 0$.

Megjegyzés. Egy topologikus tér elemeinek $\{x_n\}$ sorozatát konvergensnek nevezzük, ha van olyan x eleme a térnek, hogy x bármely U környezetéhez található olyan $N = N(x, U)$ szám, hogy $x_n \in U$, ha $n > N$. x-et a sorozat limeszének nevezzük (jelölés $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ vagy $\lim_{n\to\infty} x_n = x$). A konvergencia néhány tulajdonságára vonatkozóan ld. a 30. feladatot.

Bizonyítás. *Először megmutatjuk, hogy az összeadás és a számmal való szorzás folytonos függvények.* Legyen U az $x + y$ egy környezete. Ekkor létezik olyan $U_1 \in \mathcal{B}(x + y)$, hogy

$$U_1 = x + y + U(\gamma_1, \dots, \gamma_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \subset U.$$

A

$$V = x + U\left(\gamma_1, \dots, \gamma_n; \frac{\varepsilon_1}{2}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{2}\right) \in \mathcal{B}(x),$$
$$W = y + U\left(\gamma_1, \dots, \gamma_n; \frac{\varepsilon_1}{2}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{2}\right) \in \mathcal{B}(y)$$

jelölésekkel $V + W \subset U_1 \subset U$, így az összeadás folytonos.

Legyen most U a $\lambda_0 x_0$ egy környezete. Ekkor létezik olyan $U_1 \in \mathcal{B}(\lambda_0 x_0)$, hogy

$$U_1 = \lambda_0 x_0 + U(\gamma_1, \dots, \gamma_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \subset U.$$

Legyenek η, δ_i $(i = 1, \dots, n)$ olyan pozitív számok, hogy

$$|\lambda_0|\delta_i + \eta p_{\gamma_i}(x_0) + \eta\delta_i < \varepsilon_i \qquad (i = 1 \dots, n).$$

Ekkor $|\lambda - \lambda_0| < \eta$ és $x \in x_0 + U(\gamma_1, \dots, \gamma_n; \delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathcal{B}(x_0)$ esetén $\lambda x \in U_1 \subset U$, mert a

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)$$

felbontás alapján $i = 1, \dots, n$-re

$$\begin{aligned} p_{\gamma_i}(\lambda x - \lambda_0 x_0) &\le |\lambda_0| p_{\gamma_i}(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0| p_{\gamma_i}(x_0) + |\lambda - \lambda_0| p_{\gamma_i}(x - x_0) \\ &< |\lambda_0|\delta_i + \eta p_{\gamma_i}(x_0) + \eta\delta_i < \varepsilon_i, \end{aligned}$$

így a számmal való szorzás folytonos. Ezért X *lokálisan konvex, lineáris topologikus tér.*

Megmutatjuk, hogy p_γ $(\gamma \in \Gamma)$ *folytonos függvény.* Legyen $x_0 \in X$ és V a $p_\gamma(x_0)$ egy környezete. Legyen $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $(p_\gamma(x_0) - \varepsilon, p_\gamma(x_0) + \varepsilon) \subset V$. Ekkor

$$U = x_0 + U(\gamma, \varepsilon) \in \mathcal{B}(x_0)$$

x_0 környezete, melyre $p_\gamma(U) \subset V$, mert ha $x \in U$, úgy $x - x_0 \in U(\gamma, \varepsilon)$ és

$$|p_\gamma(x) - p_\gamma(x_0)| \le p_\gamma(x - x_0) < \varepsilon$$

alapján $p_\gamma(x) \in V$. Így p_γ folytonos.

$x_n \to x$ $(n \to \infty)$ pontosan akkor, ha bármely $U \in \mathcal{B}(x)$-hez van olyan $N = N(U)$ index, hogy $n > N$ esetén $x_n \in U$.

Tegyük fel, hogy $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Legyen $\gamma \in \Gamma$, $\varepsilon > 0$ és $U = x + U(\gamma;\varepsilon) \in \mathcal{B}(x)$. Ekkor $x_n \in U$, $n > N$-ből következik, hogy $p_\gamma(x_n - x) < \varepsilon$, azaz $p_\gamma(x_n - x) \to 0$, ha $n \to \infty$.

Fordítva, ha $p_\gamma(x_n - x) \to 0$ $(n \to \infty)$ minden $\gamma \in \Gamma$-ra, úgy legyen

$$U = x + U(\gamma_1, \dots, \gamma_k; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$$

x egy tetszőleges $\mathcal{B}(x)$-beli környezete. $x_n \in U$ pontosan akkor teljesül, ha

$$p_{\gamma_i}(x_n - x) < \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, k).$$

Mivel $p_{\gamma_i}(x_n - x) \to 0$ ha $(n \to \infty, i = 1, \dots, k)$, így $p_{\gamma_i}(x_n - x) < \varepsilon_i$, ha $n > N_i$. Legyen $N = \max\limits_{1 \le i \le k} N_i$, akkor $x_n \in U$, ha $n > N$, azaz $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

A topológia eltolásinvarianciája miatt terünk pontosan akkor lesz Hausdorff-féle, ha bármely $0 \neq x \in X$ és $0 \in X$ nyílt környezetekkel elválaszthatók, azaz, vannak olyan G_x, G_0 diszjunkt nyílt halmazok, hogy $x \in G_x$ és $0 \in G_0$. Világos, hogy ez pontosan akkor igaz, ha van olyan $U_x \in \mathcal{B}(x)$, $U_0 \in \mathcal{B}(0)$, melyre $U_x \cap U_0 = \emptyset$. *Ha $x \in X$-hez nincs olyan $\gamma \in \Gamma$ index, melyre $p_\gamma(x) \neq 0$*, úgy $p_\gamma(x) = 0$, ha $x \in X$, $\gamma \in \Gamma$. De akkor bármely

$$U_x = x + U(\gamma_1, \dots, \gamma_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathcal{B}(x)$$

környezetét véve x-nek, $0 \in U_x$, mert

$$0 = p_{\gamma_i}(0 - x) < \varepsilon_i \qquad (i = 1, \dots, n),$$

ezért a tér nem lehet Hausdorff-féle.

Fordítva, ha minden $0 \neq x \in X$-hez van olyan $\gamma \in \Gamma$, hogy $p_\gamma(x) = \eta \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} U_0 = &\ U(\gamma; \tfrac{\eta}{2}) \\ U_x = &\ x + U(\gamma; \tfrac{\eta}{2}) = x + U_0 \end{aligned}$$

diszjunktak, mert ha $y \in U_0 \cap U_x$, akkor

$$\begin{aligned} p_\gamma(y) < &\ \tfrac{\eta}{2}, \\ p_\gamma(y - x) = &\ p_\gamma(x - y) < \tfrac{\eta}{2} \end{aligned}$$

volna, így

$$p_\gamma(x) = p_\gamma(x - y + y) \le p_\gamma(x - y) + p_\gamma(y) < \eta = p_\gamma(x),$$

ami ellentmondás. □

3.3. Minkowski funkcionál, lokálisan konvex terek jellemzése

3.3.1. Definíció. Legyen U egy elnyelő halmaz az X lineáris térben. A

$$p_U(x) = \inf\left\{ \lambda \mid \lambda > 0,\ \frac{x}{\lambda} \in U \right\} \qquad (x \in X)$$

funkcionált az U halmaz *Minkowski funkcionáljá*nak nevezzük. $\diamondsuit$

Világos, hogy $0 \le p_U(x) < \infty \quad (x \in X)$.

3.3.1. Tétel. *Minden $U \subset X$ konvex, szimmetrikus elnyelő halmaz p_U Minkowski funkcionálja félnorma az X lineáris téren, és*

$$\{ x \in X \mid p_U(x) < 1 \} \subset U \subset \{ x \in X \mid p_U(x) \le 1 \}. \tag{3.3.1}$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$, $x, y \in X$, akkor

$$\frac{x}{p_U(x)+\varepsilon}, \quad \frac{y}{p_U(y)+\varepsilon} \in U,$$

amiből U konvexitása alapján $\lambda = \dfrac{p_U(x)+\varepsilon}{p_U(x)+p_U(y)+2\varepsilon}$ jelöléssel

$$\frac{x+y}{p_U(x)+p_U(y)+2\varepsilon} = \lambda\frac{x}{p_U(x)+\varepsilon} + (1-\lambda)\frac{y}{p_U(y)+\varepsilon} \in U,$$

így

$$p_U(x+y) \le p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon,$$

amiből $\varepsilon \to 0$-val

$$p_U(x+y) \le p_U(x) + p_U(y).$$

Megmutatjuk, hogy bármely $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$ esetén

$$p_U(\lambda x) = |\lambda|\, p_U(x).$$

$\lambda = 0$-nál ez

$$p_U(0) = \inf\{ \alpha \mid \alpha > 0, \frac{0}{\alpha} \in U \} = \inf\{ \alpha \mid \alpha > 0 \} = 0$$

miatt nyilvánvaló, míg, ha $\lambda \ne 0$, akkor a következőképpen látható be. Bármely $\varepsilon > 0$-ra

$$\frac{x}{p_U(x)+\varepsilon} \in U \text{ , így } \frac{\lambda x}{|\lambda| p_U(x) + |\lambda|\varepsilon} \in \frac{\lambda}{|\lambda|} U = U$$

mert $\left|\frac{\lambda}{|\lambda|}\right| = 1$, és U szimmetrikus. Innen

$$p_U(\lambda x) \leq |\lambda|\, p_U(x) + |\lambda|\varepsilon,$$

amiből $p_U(\lambda x) \leq |\lambda|\, p_U(x)$. A fordított egyenlőtlenség ebből már következik:

$$p_U(x) = p_U\left(\frac{1}{\lambda}\lambda x\right) \leq \frac{1}{|\lambda|}\, p_U(\lambda x).$$

Ha $p_U(x) < 1$, akkor $\varepsilon = 1 - p_U(x) > 0$, és $\dfrac{x}{p_U(x) + \varepsilon} = x \in U$. Ha $x \in U$, akkor

$$p_U(x) = \inf\{\ \lambda \ \mid\ \lambda > 0, \quad \frac{x}{\lambda} \in U\ \} \leq 1,$$

ezzel (3.3.1)-et is igazoltuk.

□

Megjegyzés. Ha U konvex, és elnyelő, akkor p_U szubadditív és pozitív homogén, azaz $p_U(\alpha x) = \alpha p_U(x)$, ha $\alpha \geq 0$ (a bizonyítás változatlan, csupán a második részben a nem negatív α-kat kell figyelembevenni).

3.3.2. Tétel. *Legyen X egy tetszőleges lokálisan konvex lineáris topológikus tér, $\mathcal{B}(0)$ a nulla konvex, szimmetrikus, elnyelő halmazokból álló környezetbázisa, akkor $\mathcal{B}(0)$ környezeteinek Minkowski funkcionáljaiból álló*

$$\{\ p_U \ \mid\ U \in \mathcal{B}(0)\ \}$$

félnormarendszer által indukált (lokálisan konvex) topológia megegyezik X eredeti topológiájával.

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{G}$ az X tér eredeti topológiáját, $\mathcal{G}^*$ a $\{\ p_U \ \mid\ U \in \mathcal{B}(0)\ \}$ félnormarendszer által indukált topológiát. Utóbbiban nulla egy nyílt környezetbázisa

$$\mathcal{B}(0)^* = \{U(p_{U_1}, \ldots, p_{U_n}; \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n) \mid U_i \in \mathcal{B}(0), \varepsilon_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N}\}.$$

$\mathcal{G} = \mathcal{G}^*$ igazolásához elég azt megmutatni, hogy mindegyik $\mathcal{B}(0)$-beli környezet tartalmaz $\mathcal{B}(0)^*$-beli környezetet és fordítva.

Ha $U \in \mathcal{B}(0)$, úgy a 3.3.1 tétel szerint

$$\{\ x \in X \ \mid\ p_U(x) < 1\ \} \subset U \subset \{\ x \in X \ \mid\ p_U(x) \leq 1\ \}. \tag{3.3.2}$$

A baloldali halmaz éppen $U(p_U; 1) \in \mathcal{B}(0)^*$, mely része U-nak.

Fordítva, legyen $U(p_{U_1}, \dots, p_{U_n}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ egy tetszőleges eleme $\mathcal{B}(0)^*$-nak. (3.3.1)-ből következik, hogy tetszőleges $V \subset X$ konvex, szimmetrikus elnyelő halmaz és $\varepsilon > 0$ esetén, felhasználva azt is, hogy p_V abszolút homogén

$$\frac{\varepsilon}{2}V \subset \{\ x \in X \ \mid\ p_V(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}\ \} \subset \{\ x \in X \ \mid\ p_V(x) < \varepsilon\ \}.$$

Így metszetképzéssel

$$\bigcap_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{2} U_i \subset U(p_{U_1}, \dots, p_{U_n}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n).$$

Mivel $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{2} U_i$ nulla egy környezete a $\mathcal{G}$ topológiában, így van olyan $U \in \mathcal{B}(0)$, melyre

$$U \subset \bigcap_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{2} U_i, \qquad \text{és így} \quad U \subset U(p_{U_1}, \dots, p_{U_n}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n).$$

□

3.3.1. Következmény. *Egy lineáris téren értelmezett topológia akkor és csakis akkor lokálisan konvex vektortopológia, ha e topológiát a lineáris tér valamely félnorma rendszere indukálja.*

3.4. Lineáris normált és Banach-terek

3.4.1. Definíció. Az X halmazt *lineáris normált tér*nek (röviden normált térnek) nevezzük a $\mathbb{K}$ test felett, ha

(1) X lineáris tér $\mathbb{K}$ felett, és

(2) bármely $x \in X$ elemhez hozzá van rendelve egy $||x||$ valós szám (melyet x normájának nevezünk) úgy, hogy

  (a) $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x = 0$,

  (b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$,

  (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

  teljesül bármely $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ esetén.

♢

Legyen X lineáris normált tér, akkor azonnal látható, hogy $p(x) = \|x\|$ félnorma X-en, (melyre $p(x) \neq 0$, ha $x \neq 0$) továbbá, hogy $\varrho(x,y) = \|x-y\|$ metrika X-en. Egy lineáris normált teret mindig ezen metrikából származó topológiával látunk el (hacsak mást nem mondunk). Így nulla környezetbázisa e topológiában a

$$G(0,\varepsilon) = \{x \in X \mid \|x\| < \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0)$$

nulla körüli összes nyílt gömbök halmaza. Mivel ez azonos a $p(x) = \|x\|$ norma (mint egyetlen félnormából álló rendszer) által indukált topológia nulla körüli környezetbázisával, így a 3.2.2 tétel alapján minden lineáris normált tér lokálisan konvex lineáris topologikus tér. Ez természetesen belátható a 3.2.2 tétel felhasználása nélkül is úgy, hogy a norma (a), (b), (c) tulajdonságai segítségével igazoljuk az összeadás és a skalárral való szorzás folytonosságát.

A $\varrho(x,y) = \|x-y\|$ metrika *abszolút homogén és eltolásinvariáns*, azaz bármely $x, y, z \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

(i) $\quad \varrho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \varrho(x,y),$

(ii) $\quad \varrho(x+z, y+z) = \varrho(x,y).$

E tulajdonságok jellemzők is azon lineáris metrikus terekre, melyek normált terek.

3.4.1. Tétel. *Egy lineáris metrikus tér metrikája akkor és csakis akkor származtatható egy normából, a $\varrho(x,y) = \|x-y\|$ összefüggéssel, ha ϱ teljesíti a* (i), (ii) *feltételeket.*

Bizonyítás. A ϱ metrika nyilván kielégíti (i), (ii)-t.
Fordítva, ha (i), (ii) teljesül, úgy legyen

$$\|x\| = \varrho(x,0).$$

Ekkor

$$\|x\| \geq 0 \text{ és } \|x\| = \varrho(x,0) = 0 \iff x = 0,$$

$$\|\lambda x\| = \varrho(\lambda x, 0) = |\lambda| \varrho(x,0) = |\lambda| \|x\|,$$

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \varrho(x+y,0) = \varrho(x,-y) \leq \varrho(x,0) + \varrho(0,-y) \\ &= \varrho(x,0) + \varrho(y,0) = \|x\| + \|y\|, \end{aligned}$$

így a norma tulajdonságai teljesülnek. □

A $L_p(X, \mathcal{S}, \mu)$ (és vele együtt $l_p^{(n)}$, l_p, c, c_0) és $C(X)$ lineáris metrikus terek lineáris normált terek, mert metrikájuk abszolút homogén és eltolásinvariáns. A

metrika a következő normából származik.
$L_p(X, \mathcal{S}, \mu)$-nél:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_X |x(t)|^p d\mu_t\right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p \leq \infty), \\ \\ \inf\limits_{\substack{E \in \mathcal{S} \\ \mu E = 0}} \left(\sup\limits_{t \in X \setminus E} |x(t)|\right) & (p = \infty), \end{cases}$$

$C(X)$-nél:

$$\|x\| = \sup_{t \in X} |x(t)|.$$

A $S(X, \mathcal{S}, \mu)$ (és s) tér ezzel szemben nem tehető lineáris normált térré úgy, hogy $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ teljesüljön, ugyanis az S-beli metrika nem abszolút homogén (de eltolásinvariáns).

3.4.2. Definíció. Egy lineáris normált teret *Banach-tér*nek nevezünk, ha teljes (a $\varrho(x, y) = ||x - y||$ metrikában). $\diamondsuit$

1.5-ben bebizonyítottuk, hogy $C(X)$ teljes, így Banach-tér.

3.8-ban igazolni fogjuk, hogy $L_p(X, \mathcal{S}, \mu)$ $(l_p^{(n)}, l_p)$, c, c_0 is Banach-terek.

Egy X lineáris normált tér Y részhalmaza pontosan akkor lesz maga is lineáris normált tér (X műveleteivel és normájával), ha $x, y \in Y$, $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $x + y \in Y$ és $\lambda x \in Y$ teljesül, azaz Y az X-nek, mint lineáris térnek altere (ekkor azt mondjuk, hogy Y az X lineáris normált tér *lineáris altere*). Banach-terek lineáris alterei általában nem Banach-terek, az **1.5** szakasz 3. példájában szereplő állításból viszont következik, hogy egy *Banach-tér egy részhalmaza akkor és csakis akkor Banach-tér (az eredeti tér műveleteivel és normájával), ha zárt lineáris altér.*

3.4.3. Definíció. Egy lineáris normált tér egy részhalmazát *zárt rendszer*nek nevezzük, ha e részhalmaz lineáris burka mindenütt sűrű halmaz a térben.

Egy lineáris normált tér minimális számosságú zárt rendszerének a számosságát a tér *geometriai dimenziójá*nak nevezzük. $\diamondsuit$

3.5. Sorozatok és sorok normált terekben, Schauder-bázis

Legyen X egy lineáris normált tér, $\{x_n\}$ egy sorozat X-ben. $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ definíció szerint azt jelenti, hogy $\varrho(x_n, x) = \|x_n - x\| \to 0$, ha $n \to \infty$. A norma tulajdonságaiból egyszerűen következik, hogy ha $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\lambda_n \to \lambda$, $(n \to \infty)$ ahol $x_n, y_n, x, y \in X$, $\lambda, \lambda_n \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned} x_n + y_n &\to x + y, \\ \lambda_n x_n &\to \lambda x, \\ \|x_n\| &\to \|x\|, \qquad \text{(ha } n \to \infty). \end{aligned}$$

Ezek a relációk az összeadás, skalárral való szorzás és a norma folytonosságát fejezik ki (sorozatok segítségével megfogalmazva). Az utolsó állítás például az $|\|x_n\| - \|x\|| \le \|x_n - x\|$ egyenlőtlenségből következik.

3.5.1. Definíció. Legyen $\{x_n\}$ az X lineáris normált tér elemeinek egy sorozata. A $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ kifejezést *sor*nak nevezzük, x_i a sor *általános tag*ja. A $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ sort *konvergens*nek, az $s \in X$ elemet a *sor összegé*nek nevezzük, ha a sor *részletösszegeinek*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozata konvergens, és határértéke s. Ekkor azt írjuk, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = s$.

A $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ sort *abszolút konvergens*nek nevezzük, ha a $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ sor konvergens.

$\diamondsuit$

Banach-terekben minden abszolút konvergens sor konvergens is, sőt ez a tulajdonság jellemző is a Banach-terekre.

3.5.1. Tétel. *Egy lineáris normált tér akkor és csakis akkor Banach-tér, ha benne minden abszolút konvergens sor konvergens.*

Bizonyítás. *Szükségesség.* Legyen X Banach-tér, és $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ egy abszolút konvergens sor X-ben. Akkor az $\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ $(n \in \mathbb{N})$ számsorozat konvergens, így Cauchy-sorozat. Ezért bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N(\varepsilon)$, hogy

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad n, m > N(\varepsilon).$$

Ezért

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \le \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| = |\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon,$$

ha $n > m > N(\varepsilon)$, ami azt jelenti, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ részletösszegeinek $\{s_n\}$ sorozata Cauchy-sorozat, mely a teljesség miatt konvergens.

Elegendőség. Tegyük fel, hogy X lineáris normált tér, melyben minden abszolút konvergens sor konvergens. Legyen $\{x_n\}$ egy X-beli Cauchy-sorozat, megmutatjuk, hogy $\{x_n\}$ konvergens. Válasszuk az $n_1 < n_2 < \cdots$ indexsorozatot úgy, hogy

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Ebből következik, hogy az $x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ sor abszolút konvergens. Feltevésünk miatt ugyanez a sor konvergens is, azaz részletösszegeinek

$$s_p = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{p}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_{p+1}} \qquad (p \in \mathbb{N})$$

sorozata konvergens. Létezik tehát olyan $x \in X$, hogy $s_p = x_{n_{p+1}} \to x$, ha $p \to \infty$. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\|x_m - x\| \leq \|x_m - x_{n_p}\| + \|x_{n_p} - x\| < \varepsilon,$$

ha m elég nagy, mivel a második tag $< \frac{\varepsilon}{2}$, ha p elég nagy, az első tag $< \frac{\varepsilon}{2}$, ha m, p elég nagyok, mert $\{x_n\}$ Cauchy sorozat. $\square$

3.5.2. Definíció. Az X lineáris normált tér elemeinek egy $\{e_n\}$ sorozatát a tér *Schauder-bázisá*nak nevezzük, ha bármely $x \in X$ egyértelműen előállítható

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$$

alakban, ahol $c_i \in \mathbb{K}$ skalárok. $\diamondsuit$

Példák. 1. A c_0 térben az $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{\breve{1}}, 0, \dots)$ $(i \in \mathbb{N})$ vektorok Schauder-bázist alkotnak. Ugyanis, ha $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c_0$, úgy

$$\Big\|x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\Big\| = \big\|(0, \dots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)\big\| = \sup_{i \geq n+1} |\xi_i| \to 0$$

ha $n \to \infty$, mert $\{\xi_i\}$ nullsorozat. Így $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ az x elem kívánt előállítása. Ez az előállítás egyértelmű, mert ha $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i' e_i$ volna, úgy

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i - \xi_i')e_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \xi_i')e_i.$$

Azonban $k \le n$ mellett

$$0 \le |\xi_k - \xi_k'| \le \sup\{|\xi_1 - \xi_1'|, \dots, |\xi_n - \xi_n'|\} = \Big\| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_i')e_i \Big\|.$$

$n \to \infty$ esetén a jobboldal zérushoz tart, így $\xi_k = \xi_k'$ $(k \in \mathbb{N})$.

2. Hasonlóan bizonyítható, hogy az e_i $(i \in \mathbb{N})$ vektorok a l_p $(1 \le p < \infty)$ térben is Schauder-bázist alkotnak.

3. Az e_i vektorokhoz az $e_0 = (1, 1, \dots)$ vektort hozzávéve Schauder-bázist kapunk c-ben. Ugyanis, ha $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c$ és $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$, úgy $x - \alpha e_0 \in c_0$, és az első példánk alapján

$$x - \alpha e_0 = \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \alpha)e_i, \qquad x = \alpha e_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \alpha)e_i.$$

Az egyértelműség ugyanúgy igazolható, mint az 1. példában.

Ha egy X lineáris normált térben van $\{e_n\}$ Schauder-bázis, úgy X szeparábilis, mert a

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{n} r_i e_i \;\mid\; r_i \text{ racionális } i = 1, \dots, n,\ n = 1, 2, \dots \Big\}$$

vektorhalmaz megszámlálható sűrű halmaz X-ben. Ezek után kérdezhetjük:

Van-e minden szeparábilis lineáris normált térnek Schauder-bázisa?

Ez a klasszikus Schauder-bázis probléma, melyet 1973-ban Per Enflo (Acta Math. 130, 3-4, 309-317 (1973)) oldott meg, kimutatva, hogy a fenti kérdésre a válasz negatív.

3.6. Kompakt halmazok normált terekben

A metrikus tereknél kapott eredményekből következik, hogy egy Banach-tér egy részhalmaza akkor és csakis akkor kompakt, ha zárt és teljesen korlátos.

Az alábbiakban jellemezni fogjuk azokat a tereket, melyeknél az előbbi állításban a teljesen korlátosság helyett elegendő csak a korlátosságot megkövetelni.

3.6.1. Tétel. *Legyen X egy lineáris normált tér ($\mathbb{K}$ felett), $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ legyenek lineárisan független elemei X-nek. Az*

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} \varphi_i \qquad (\alpha_i^{(k)} \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n; k \in \mathbb{N})$$

sorozat akkor és csakis akkor konvergál $x \in X$-hez, ha

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(k)} &\to \alpha_i \quad (k \to \infty,\ i = 1, 2, \ldots, n) \text{ és} \\ x &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i. \end{aligned}$$

Szükségünk van a következő lemmára.

3.6.1. Lemma. *Ha $y_k = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(k)} \varphi_i$ ($\beta_i^{(k)} \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, n,\ k \in \mathbb{N}$) korlátos sorozat, akkor $\sigma_k = \sum_{i=1}^{n} |\beta_i^{(k)}|$ ($k \in \mathbb{N}$) is korlátos számsorozat.*

A lemma bizonyítása. Ha $\{\sigma_k\}$ nem korlátos, úgy van olyan részsorozata, mely ∞-hez tart. A jelölések egyszerűsítése miatt legyen ez a részsorozat maga $\{\sigma_k\}$. Ekkor

$$\frac{y_k}{\sigma_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i^{(k)}}{\sigma_k} \varphi_i \to 0 \quad \text{ha} \quad k \to \infty.$$

Minden $i = 1, 2, \ldots, n$ mellett $\gamma_i^{(k)} = \dfrac{\beta_i^{(k)}}{\sigma_k}$ ($k \in \mathbb{N}$) korlátos sorozat, így van olyan $\left\{\gamma_i^{(k_p)}\right\}$ részsorozata, mely $i = 1, 2, \ldots, n$ mellett konvergens:

$$\gamma_i^{(k_p)} \to \gamma_i \quad \text{ha } p \to \infty,\ i = 1, \ldots, n.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{y_{k_p}}{\sigma_{k_p}} &\to 0 \qquad \text{ha } p \to \infty, \quad \text{másrészt} \\ \frac{y_{k_p}}{\sigma_{k_p}} &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(k_p)} \varphi_i \to \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \varphi_i, \qquad \text{ha } p \to \infty, \end{aligned}$$

amiből $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \varphi_i = 0$. A $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ rendszer lineáris függetlensége miatt $\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0$, ám ez lehetetlen, mert

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\beta_i^{(k_p)}}{\sigma_{k_p}} \right| \to \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \qquad \text{ha} \qquad p \to \infty,$$

így $\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| = 1$. Ellentmondásra jutottunk, ezért $\{\sigma_k\}$ korlátos.

□

Bizonyítás. (A 3.6.1 tétel bizonyítása) *Szükségesség.* Mivel $\{x_k\}$ konvergens, így korlátos és a lemma alapján $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(k)}|$ ($k \in \mathbb{N}$) is korlátos sorozat, a

Bolzano-Weierstrass tétel alapján van olyan $k_1 < k_2 < \cdots$ indexsorozat, és $\alpha_i \in \mathbb{K}$, hogy $\alpha_i^{(k_p)} \to \alpha_i$, ha $p \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$. De akkor

$$x_{k_p} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k_p)} \varphi_i \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \qquad \text{ha } p \to \infty,$$

ugyanakkor $x_{k_p} \to x$, ha $p \to \infty$, így $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$.

Megmutatjuk még, hogy $\alpha_i^{(k)} \to \alpha_i$ ha $k \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Legyen k olyan index, hogy $x_k \neq x$, akkor az

$$y_k = \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^{(k)} - \alpha_i}{\|x_k - x\|} \varphi_i \qquad (k \in \mathbb{N})$$

sorozat korlátos, így a lemma alapján van olyan $M > 0$, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|\alpha_i^{(k)} - \alpha_i|}{\|x_k - x\|} \leq M \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

amiből

$$0 \leq |\alpha_i^{(k)} - \alpha_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(k)} - \alpha_j| \leq M\|x_k - x\|,$$

és ez $x_k = x$ esetén is igaz. Ebből viszont következik, hogy $\alpha_i^{(k)} \to \alpha_i$, ha $k \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Elegendőség. Következik a

$$0 \leq \|x_k - x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(k)} - \alpha_i| \, \|\varphi_i\|$$

egyenlőtlenségből.

$\square$

Következmények.

1. *Legyenek $x_1, \ldots, x_m$ az X lineáris normált tér elemei, akkor*

$$[x_1, \ldots, x_m] = \overline{[x_1, \ldots, x_m]}.$$

Vegyünk ugyanis egy $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ lineárisan független rendszert, mely kifeszíti $[x_1, \ldots, x_m]$-et, és legyen $x \in \overline{[x_1, \ldots, x_m]} = \overline{[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]}$. Ekkor x egy $[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$-beli sorozat határértéke, így a 3.6.1 tétel szerint x is a $[\varphi_1, \ldots, \varphi_n] = [x_1, \ldots, x_m]$ eleme.

2. *Egy lineáris normált tér algebrai dimenziója $n \in \mathbb{N}$ (véges), akkor és csakis akkor, ha a geometriai dimenziója is n.*
   Ugyanis, ha X algebrai dimenziója n és $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ az X egy Hamel-bázisa, úgy $X = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ és 1. miatt $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ zárt rendszer X-ben, sőt minimális számosságú is, mert ha $\psi_1, \dots, \psi_m$ $(m < n)$ is zárt rendszer volna, úgy 1. alapján ez n-nél kevesebb elemű Hamel-bázisa volna X-nek, ami lehetetlen.

   Fordítva, ha X geometriai dimenziója n, és $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ egy minimális számosságú zárt rendszer, úgy ez szükségképpen lineárisan független rendszer. Ellenkező esetben ugyanis volna egy $\psi_1, \dots, \psi_m$ $(m < n)$ maximális lineárisan független részrendszere, ami

   $$X = \overline{[\varphi_1, \dots, \varphi_n]} = [\varphi_1, \dots, \varphi_n] = [\psi_1, \dots, \psi_m] = \overline{[\psi_1, \dots, \psi_m]}$$

   miatt n-nél kisebb számosságú zárt rendszer, ami ellentmondás.

3. *Egy lineáris normált tér bármely véges (algebrai vagy geometriai) dimenziós lineáris altere zárt.*

4. *Véges dimenziós lineáris normált tér egy részhalmaza akkor és csakis akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*
   Ugyanis ha K kompakt részhalmaza a véges dimenziós X lineáris normált térnek, úgy a Hausdorff-tétel (1.10.1 tétel 2. következménye) miatt K zárt és teljesen korlátos, tehát korlátos is.

   Ha most $K \subset X$ zárt és korlátos halmaz és $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ olyan lineárisan független rendszer, hogy $X = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$, úgy tetszőleges K-beli $\{x_k\}$ sorozatot véve

   $$x_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} \varphi_i$$

   és $\{x_k\}$ korlátos, így a 3.6.1 lemma szerint $\sigma_k = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(k)}|$ $(k \in \mathbb{N})$ is korlátos, van tehát olyan $k_1 < k_2 < \cdots$ indexsorozat, és $\alpha_i \in \mathbb{K}$, hogy

   $$\alpha_i^{(k_p)} \to \alpha_i \qquad \text{ha } p \to \infty,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

   Ezért

   $$x_{k_p} \to x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i, \qquad \text{ha } p \to \infty, \text{ és } K \text{ zártsága miatt } x \in K,$$

   K tehát szekvenciálisan kompakt, így kompakt.

5. *Bármely véges dimenziós (valós vagy komplex) lineáris normált tér teljes.* Legyen ugyanis $\{x_k\}$ egy Cauchy-sorozat az X véges dimenziós térben. Mivel egy Cauchy-sorozat korlátos ugyanúgy, mint 4. bizonyításában láttuk, kiválasztható olyan $\{x_{k_p}\}$ részsorozat, hogy $x_{k_p} \to x \in X$ ha $p \to \infty$. Mivel $\{x_k\}$ Cauchy-sorozat, ebből következik, hogy nemcsak e részsorozat, hanem a teljes $\{x_k\}$ sorozat konvergens.

3.6.2. Lemma. (Riesz lemmája majdnem ortogonális elem létezéséről) *Legyen X egy lineáris normált tér, Y valódi zárt lineáris altere X-nek. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan x_ε eleme az egységgömb $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ felületének, melyre*

$$\varrho(x_\varepsilon, Y) > 1 - \varepsilon.$$

Megjegyzés. Ha X egy metrikus tér, úgy $x \in X$ és $A \subset X$ távolságát a

$$\varrho(x, A) = \inf_{a \in A} \varrho(x, a)$$

képlettel értelmezzük. A $\varrho(x, A)$ tulajdonságaira vonatkozóan ld. a 4-7. feladatokat.

Bizonyítás. Legyen $z \in X \setminus Y$ és $\varepsilon > 0$. Válasszuk az $y_\varepsilon \in Y$ elemet úgy, hogy

$$\|z - y_\varepsilon\| - \varrho(z, Y) < \varepsilon \varrho(z, Y).$$

Mivel Y zárt, $z \notin Y$, így $0 < \varrho(z, Y) \le \|z - y_\varepsilon\|$, képezhetjük tehát az

$$x_\varepsilon = \frac{z - y_\varepsilon}{\|z - y_\varepsilon\|} \in S$$

elemet. Megbecsülve a $\varrho(x_\varepsilon, Y)$ távolságot, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\varrho(x_\varepsilon, Y) = {} & \inf_{y \in Y} \|x_\varepsilon - y\| = \inf_{y \in Y} \left\| \frac{z - y_\varepsilon}{\|z - y_\varepsilon\|} - y \right\| = \inf_{y \in Y} \frac{\left\| z - \big(y_\varepsilon + y \|z - y_\varepsilon\|\big) \right\|}{\|z - y_\varepsilon\|} \\
= {} & \frac{\inf_{u \in Y} \|z - u\|}{\|z - y_\varepsilon\|} = \frac{\varrho(z, Y)}{\|z - y_\varepsilon\|} > \frac{\varrho(z, Y)}{\varrho(z, Y)(1 + \varepsilon)} = \frac{1}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Ha X véges dimenziós, úgy S zárt, korlátos lévén a 3.6.1 tétel 4. következménye szerint kompakt.

Egyszerűen belátható, hogy tetszőleges $Y \subset X$ esetén az

$$f(x) = \varrho(x, Y) \qquad (x \in X)$$

egyenlőséggel definiált f függvény folytonos X-en. Így, mivel kompakt halmazon folytonos függvény felveszi szélsőértékeit, f felveszi S-beli szuprémumát, van tehát olyan $x_0 \in S$ elem, melyre

$$f(x_0) = \sup_{x \in S} \varrho(x, Y).$$

Továbbá, ha Y valódi zárt lineáris altere X-nek, akkor a Riesz lemma miatt

$$\sup_{x \in S} \varrho(x, Y) \geq 1,$$

viszont $\varrho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| \leq \|x - 0\| = 1$, ha $x \in S$, és így $\sup_{x \in S} \varrho(x, Y) \leq 1$. Ezért

$$f(x_0) = \varrho(x_0, Y) = 1.$$

A háromdimenziós euklideszi térben x_0 éppen egy, az Y-ra ortogonális eleme S-nek, innen származik a lemmában szereplő x_ε elem elnevezése: *majdnem ortogonális* (Y-ra).

A Riesz-lemma segítségével bizonyítható a

3.6.2. Tétel. *Egy lineáris normált tér akkor és csakis akkor véges dimenziós, ha a tér $S(0,1) = \{\ x \in X \quad | \ \|x\| \leq 1\ \}$ zárt egységgömbje kompakt.*

Bizonyítás. *Szükségesség.* Következik a 3.6.1 tétel 4. következményéből.
Elegendőség. Indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy X nem véges dimenziós, bár $S(0,1)$ kompakt.

Legyen $x_1 \in X$, $\|x_1\| = 1$ és $X_1 = [x_1]$ az $\{x_1\}$ lineáris burka. X_1 valódi zárt altere X-nek, ezért a Riesz-lemma szerint van olyan $x_2 \in X$, $\|x_2\| = 1$, melyre $\varrho(x_2, X_1) > \frac{1}{2}$, speciálisan $\varrho(x_2, x_1) > \frac{1}{2}$. Tegyük fel, hogy $x_1, \ldots, x_n$-et megkonstruáltuk. Az $X_n = [x_1, \ldots, x_n]$ altérre a Riesz-lemmát alkalmazva kapjuk, hogy van olyan $x_{n+1} \in X$, $\|x_{n+1}\| = 1$, hogy $\varrho(x_{n+1}, X_n) > \frac{1}{2}$, speciálisan $\varrho(x_{n+1}, x_i) > \frac{1}{2}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Így olyan $S(0,1)$-beli $\{x_n\}$ sorozatot kaptunk, melynek $\varrho(x_n, x_m) > \frac{1}{2}$ $(n \neq m)$ miatt nincs konvergens részsorozata, ami ellentmondás. $\square$

3.7. A legjobb approximáció problémája

Legyen X egy lineáris normált tér, Y egy tetszőleges részhalmaza X-nek, $x \in X$. Egy $y^* \in Y$ elemet az *x-et legjobban approximáló Y-beli elem*nek nevezzük, ha

$$\varrho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \|x - y^*\|.$$

Létezik-e mindig legjobban approximáló elem? Ha igen, úgy egyértelmű-e és jellemezhetjük-e valahogyan (ez a jellemzés eljárást adhat y^* megkeresésére)?

Y-ra vonatkozó további feltételek nélkül kevés remény van arra, hogy bármilyen választ is tudjunk adni a feltett kérdésekre. Azt az esetet fogjuk ezért vizsgálni, amikor Y zárt lineáris altere X-nek. Ekkor az egzisztencia kérdése elintézhető.

3.7.1. Tétel. *Ha Y véges dimenziós (így zárt) lineáris altere az X lineáris normált térnek, úgy bármely $x \in X$ elemhez létezik őt legjobban approximáló $y^* \in Y$ elem.*

Bizonyítás. Legyen $x \in X$, és $y_0 \in Y$ rögzitett, és

$$H = \{ \ y \in Y \ \mid \ \|x - y\| \leq \|x - y_0\| \ \}.$$

Ekkor

$$\inf_{y \in Y} \|x - y\| = \inf_{y \in H} \|x - y\|.$$

H kompakt (mert korlátos zárt részhalmaza Y-nak), így az $y \to \|x - y\|$ folytonos függvény H-beli infimumát H valamely y^* pontjában felveszi. □

Megjegyzés. Az előző tételben Y dimenziójának *végessége* lényeges feltétel. Legyen ugyanis $X = C[0,1]$,

$$Y = \left\{ \ y \in C[0,1] \ \mid \ y(0) = 0, \ \int\limits_0^1 y(t)dt = 0 \ \right\}$$

és $x(t) = t, \ (t \in [0,1])$.

Világos, hogy Y zárt lineáris altere X-nek, mely nem véges dimenziós (pl. $\varphi_k(t) = \sin 2k\pi t$, $(t \in [0,1])$, $k = 1, 2, \ldots$ megszámlálható lineárisan független Y-beli rendszer.)
Megmutatjuk, hogy nincs olyan $y^* \in Y$, melyre

$$\inf_{y \in Y} \|x - y\| = \|x - y^*\|.$$

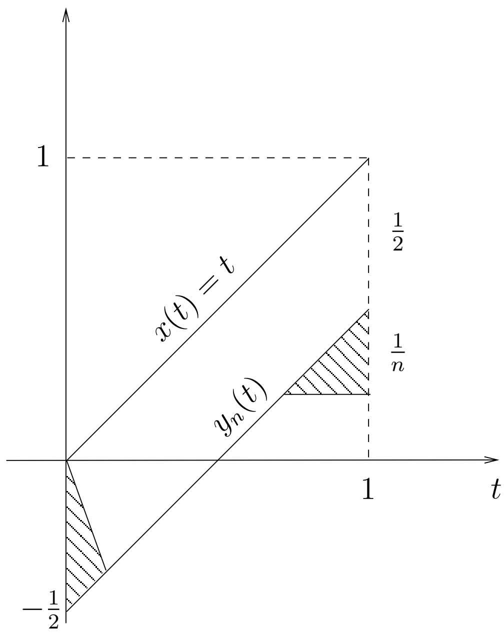
1. *Létezik olyan* $y_n \in Y$, $)n = 2, 3, \ldots$, melyre

$$\|x - y_n\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Legyen ugyanis

$$y_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{n^2}{4}\right) t & \text{ha } t \in \left[0, \dfrac{2}{n^2}\right], \\ t - \dfrac{1}{2} & \text{ha } t \in \left[\dfrac{2}{n^2}, 1 - \dfrac{1}{n}\right], \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} & \text{ha } t \in \left[1 - \dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

y_n éppen a 2. ábrán látható törtvonal, ahol a vonalkázott területek egyenlők. Az ábrából látható, hogy $y_n \in Y$ és $\|x - y_n\| = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$.



2. ábra

2. *Megmutatjuk, hogy bármely $y \in Y$-ra*

$$\|x - y\| > \frac{1}{2}.$$

Ellenkező esetben ugyanis valamely $y^* \in Y$-ra

$$|t - y^*(t)| \leq \|x - y^*\| \leq \frac{1}{2} \qquad (t \in [0, 1]),$$

amiből
$$t-\frac{1}{2}\le y^*(t)\le t+\frac{1}{2}\qquad (t\in[0,1]).$$
Mivel $y^*(0)=0$, így valamely $\delta>0$ mellett
$$t-\frac{1}{2}< y^*(t)\qquad (t\in[0,\delta]).$$
E két becslést felhasználva
$$0=\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)dt<\int_0^1 y^*(t)dt,$$
ami ellentmond $y^*\in Y$ választásának.

Az 1., 2. állításokból következik, hogy $\inf\limits_{y\in Y}\|x-y\|=\frac{1}{2}$, de bármely $y\in Y$-ra $\|x-y\|>\frac{1}{2}$.

3.7.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az X lineáris normált tér *szigorúan normált*, ha az
$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|\qquad (x,y\in X)$$
egyenlet $x\ne 0$, $y\ne 0$ esetén csak akkor teljesül, ha $y=\alpha x$, ahol $\alpha>0$. ♢

Az L_p $(1<p<\infty)$ tér szigorúan normált (lásd az 1.2.3 tételben az egyenlőség feltételét), de $C[0,1]$ nem.
Utóbbi állítás belátásához vegyünk két $C[0,1]$-beli nemnegatív lineárisan független x,y függvényt, melyek maximális értéküket ugyanott veszik fel. Ezekre nyilvánvalóan
$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|,$$
de $y\ne\alpha x$.

3.7.2. Tétel. *Legyen X szigorúan normált lineáris normált tér, Y pedig X zárt lineáris altere. Akkor bármely $x\in X$ elemet legjobban approximáló Y-beli elem (ha létezik) egyértelmű.*

Bizonyítás. Ha $\varrho=\varrho(x,Y)=\inf\limits_{y\in Y}\|x-y\|=0$, úgy $y^*=x$ az egyetlen legjobban approximáló elem. Ha $\varrho>0$ és $y^*,y^{**}\in Y$-ra
$$\varrho=\|x-y^*\|=\|x-y^{**}\|$$
teljesül, úgy $\dfrac{y^*+y^{**}}{2}\in Y$ miatt
$$\varrho\le\left\|x-\frac{y^*+y^{**}}{2}\right\|\le\frac{1}{2}\|x-y^*\|+\frac{1}{2}\|x-y^{**}\|=\varrho.$$

Így

$$\|x - y^* + x - y^{**}\| = \|x - y^*\| + \|x - y^{**}\|,$$

és $\varrho > 0$ miatt $x \neq y^*, x \neq y^{**}$.

Ezért a szigorú normáltság alapján

$$x - y^* = \alpha(x - y^{**}), \quad \text{ahol} \quad \alpha > 0.$$

Ha $\alpha \neq 1$ volna, úgy x az y^* és y^{**} lineáris kombinációja lévén Y-beli elem, ezért $\varrho = 0$ volna, ami ellentmondás. Ezért $\alpha = 1$ és $y^* = y^{**}$. □

3.8. Példák Banach-terekre

E szakaszban bebizonyítjuk a $L_p(1 \leq p \leq \infty)$, c, c_0 terek teljességét (így $l_p^{(n)}$, l_p teljességét is).

3.8.1. Tétel. *A $L_p(X, \mathcal{S}, \mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ tér teljes, így Banach-tér.*

Bizonyítás. Az $1 \leq p < \infty$ esetben a 3.5.1 tétel miatt elég azt igazolni, hogy ha $x_k \in L_p$ és

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_p = \alpha < \infty,$$

akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ sor L_p-ben konvergens. Legyen

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} |x_k(t)|, \quad (t \in X).$$

Ekkor a Minkowski egyenlőtlenség alapján

$$\|y_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_p \leq \alpha,$$

vagy

$$\int\limits_X y_n^p(t) d\mu_t \leq \alpha^p.$$

$\{y_n^p\}$ nemnegatív mérhető függvények monoton növekvő sorozata, így a Beppo Levi tétel szerint

$$\int\limits_X \lim_{n\to\infty} y_n^p(t) d\mu_t = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X y_n^p(t) d\mu_t \leq \alpha^p.$$

Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k(t)| = y(t)$, akkor

$$\int\limits_X y^p(t) d\mu_t \le \alpha^p,$$

így y majdnem mindenütt véges, azaz a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k(t)|$ sor majdnem mindenütt konvergens. Ezért a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k(t)$ sor is majdnem minden $t \in X$-re konvergens, és összege egy $x(t)$ szám. Legyen $x(t) = 0$ azon t értékekre, melyekre $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k(t)$ nem konvergens.

Megmutatjuk, hogy $x \in L_p$ és

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - x \right\|_p \longrightarrow 0, \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

A majdnem minden $t \in X$-re érvényes

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k(t) - x(t) \right|^p = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k(t) \right|^p \le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k(t)| \right)^p \le y^p(t)$$

egyenlőtlenség miatt $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - x \in L_p$, és így $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - x \right) \in L_p$. A Lebesgue-tétel alapján

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - x \right\|_p &= \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_X \left| \sum_{k=1}^{n} x_k(t) - x(t) \right|^p d\mu_t \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int\limits_X \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k(t) - x(t) \right|^p d\mu_t \right)^{\frac{1}{p}} = 0. \end{aligned}$$

Ha $p = \infty$ úgy legyen $\{x_n\}$ egy L_∞-beli Cauchy-sorozat, azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N(\varepsilon)$, hogy

$$\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon, \qquad \text{ha } n, m > N(\varepsilon).$$

Az 1.2.4 tétel szerint minden n, m indexpárhoz van olyan E_{nm} nullmértékű halmaz, hogy

$$\|x_n - x_m\|_\infty = \sup_{t \in X \setminus E_{nm}} |x_n(t) - x_m(t)|.$$

Az $E_{00} = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} E_{nm}$ halmaz is nullmértékű és

$$|x_n(t)-x_m(t)| \le \sup_{t\in X\setminus E_{00}} |x_n(t)-x_m(t)| \le \sup_{t\in X\setminus E_{nm}} |x_n(t)-x_m(t)| = \|x_n-x_m\|_\infty < \varepsilon,$$

ha $n, m > N(\varepsilon)$, $t \in X \setminus E_{00}$.

Ez mutatja, hogy fix $t \in X \setminus E_{00}$ mellett $\{x_n(t)\}$ valós vagy komplex elemű Cauchy-sorozat, mely konvergens. Legyen

$$x(t) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) & \text{ha } t \in X \setminus E_{00} \\ 0 & \text{ha } t \in E_{00}, \end{cases}$$

akkor az előző egyenlőtlenségből $m \to \infty$-nel,

$$|x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon \quad \text{ ha } n > N(\varepsilon),\ t \in X \setminus E_{00}.$$

Innen kapjuk, hogy $x_n - x \in L_\infty$, ha $n > N(\varepsilon)$, és így $x = x_n - (x_n - x) \in L_\infty$, továbbá, ha $n > N(\varepsilon)$, akkor

$$\|x_n - x\|_\infty = \inf_{\substack{E\subset X \\ \mu E=0}} \sup_{t\in X\setminus E} |x_n(t) - x(t)| \le \sup_{t\in X\setminus E_{00}} |x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon$$

azaz x_n konvergál x-hez L_∞-ben, és így L_∞ teljes. □

3.8.2. Tétel. *c, c_0 Banach-terek.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján l_∞ Banach-tér. c_0 és c lineáris alterek l_∞-ben, így elég azt belátnunk, hogy c_0 és c zárt részhalmazok l_∞-ben.

Legyen $x \in \bar{c}$ (a lezárás természetesen l_∞-ben értendő), akkor van olyan $x_n \in c$ ($n \in \mathbb{N}$), hogy $\|x_n - x\|_\infty \to 0$, ha $n \to \infty$. Legyen $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, $x_n = \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots\right)$ ($n \in \mathbb{N}$), azt kell megmutatnunk, hogy $x \in c$, azaz $\{\xi_i\}$ konvergens.

Bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N(\varepsilon)$, hogy

$$\|x_n - x\|_\infty < \varepsilon, \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon),$$

amiből

$$\left|\xi_i^{(n)} - \xi_i\right| \le \sup_i \left|\xi_i^{(n)} - \xi_i\right| = \|x_n - x\|_\infty < \varepsilon \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon),\ i \in \mathbb{N},$$

így, ha $n_0 > N(\varepsilon)$, akkor

$$|\xi_i - \xi_j| \le \left|\xi_i - \xi_i^{(n_0)}\right| + \left|\xi_i^{(n_0)} - \xi_j^{(n_0)}\right| + \left|\xi_j^{(n_0)} - \xi_j\right| < 3\varepsilon \qquad \text{ha } i, j > N_1(\varepsilon),$$

ahol $N_1(\varepsilon)$ olyan, hogy $\left|\xi_i^{(n_0)} - \xi_j^{(n_0)}\right| < \varepsilon$, ha $i, j > N_1(\varepsilon)$. Ezért $\{\xi_i\}$ Cauchy-sorozat, tehát konvergens, $x \in c$.

Hasonlóan igazolhatjuk azt, hogy ha $x \in \overline{c_0}$ és $x_n \in c_0$ olyan, hogy $\|x_n - x\|_\infty \to 0$, ha $n \to \infty$, akkor $x \in c_0$. Az x_n és x sorozatok elemeit ugyanúgy jelölve, mint előbb hasonlóan kapjuk, hogy

$$\left|\xi_i^{(n)} - \xi_i\right| \le \sup_i \left|\xi_i^{(n)} - \xi_i\right| = \|x_n - x\|_\infty < \varepsilon \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon),\ i \in \mathbb{N},$$

és rögzített $n_0 > N(\varepsilon)$-t véve $\left\{\xi_i^{(n_0)}\right\}$ nullsorozat, ezért

$$\left|\xi_i^{(n_0)}\right| < \varepsilon \qquad \text{ha } i > N_2(\varepsilon).$$

Ezt felhasználva

$$|\xi_i| < \left|\xi_i - \xi_i^{(n_0)}\right| + \left|\xi_i^{(n_0)}\right| < 2\varepsilon \qquad \text{ha } i > N_2(\varepsilon),$$

tehát $\{\xi_i\}$ nullsorozat, $x \in c_0$. □

3.9. Kompakt halmazok speciális terekben

E szakasz célja az, hogy néhány speciális térben a relatív kompakt halmazokat jellemezze.

3.9.1. Tétel. *A $l_p^{(n)}$ $(1 \le p \le \infty)$ tér egy K részhalmaza akkor és csakis akkor relatív kompakt, ha korlátos.*

Bizonyítás. Mivel $l_p^{(n)}$ n-dimenziós, így állításunk következik a 3.6.1 tétel 4. következményéből. □

3.9.2. Tétel. *Legyen X egy Banach-tér $e_1, e_2, \ldots$ Schauder-bázissal. $K \subset X$ relatív kompakt akkor és csakis akkor, ha*

(i) *K korlátos,*

(ii) *bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N(\varepsilon)$, hogy $\|R_n x\| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$, $x \in K$, ahol*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \quad \text{és} \quad R_n x = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i e_i.$$

A bizonyítást **5.6**-ban fogjuk elvégezni.

E tétel segítségével a c, c_0, l_p $(1 \le p < \infty)$ terek kompakt halmazait jellemezhetjük. Példaként a l_p $(1 \le p < \infty)$-re vonatkozó eredményt fogalmazzuk meg. Itt a **3.5** alapján az

$$e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{\smile}{1}, 0, \dots) \qquad (i \in \mathbb{N})$$

elemek Schauder-bázist alkotnak, így érvényes a

3.9.3. Tétel. *$K \subset l_p$ $(1 \le p < \infty)$ akkor és csakis akkor relatív kompakt, ha*

(j) *K korlátos,*

(jj) *bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N(\varepsilon)$, hogy*

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon^p, \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon),\ x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in K.$$

Az egyik legnevezetesebb kompaktsági kritérium a $C(X)$ részhalmazaira vonatkozó Arzela-Ascoli tétel.

3.9.4. Tétel. (Arzela-Ascoli) *Legyen X egy kompakt Hausdorff-féle topologikus tér. A $K \subset C(X)$ részhalmaz pontosan akkor relatív kompakt, ha*

(k) *K függvényei pontonként korlátosak, azaz van olyan $M : X \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $|x(t)| \le M(t)$, ha $x \in K$ és $t \in X$,*

(kk) *K függvényei egyenlő mértékben folytonosak X-en, azaz bármely $\varepsilon > 0$-hoz és bármely $t \in X$-hez van olyan $V = V(\varepsilon, t)$ környezete t-nek, hogy*

$$|x(s) - x(t)| < \varepsilon, \qquad \text{ha} \quad s \in V(\varepsilon, t),\ x \in K.$$

Bizonyítás. *Szükségesség.* Ha $K \subset C(X)$ relatív kompakt, úgy az 1.10.1. tétel 3. következménye alapján bármely $\varepsilon > 0$-hoz van véges ε-háló K számára, mely álljon az $x_1, \dots, x_n \in C(X)$ függvényekből. Ha $x \in K$, úgy van olyan x_j, $(j = 1, \dots, n)$, hogy $\|x - x_j\| < \varepsilon$, így

$$|x(t)| \le |x(t) - x_j(t)| + |x_j(t)| \le \|x - x_j\| + \|x_j\| \le \varepsilon + k,$$

ahol $k = \max_{1 \le i \le n} \|x_i\|$, azaz (k) teljesül $M(t) = \varepsilon + k$ $(t \in X)$-re. Minden $\varepsilon > 0$ és $t \in X$-hez van olyan $U(\varepsilon, t)$ környezete t-nek, hogy

$$|x_i(s) - x_i(t)| < \varepsilon, \qquad \text{ha} \quad s \in U(\varepsilon, t),\ i = 1, \dots, n.$$

Így bármely $x \in K$ esetén az előbbi x_j függvényt használva (melyre $\|x-x_j\| < \varepsilon$) kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |x(s)-x(t)| &\le |x(s)-x_j(s)| + |x_j(s)-x_j(t)| + |x_j(t)-x(t)| \\ &\le 2\|x-x_j\| + |x_j(s)-x_j(t)| < 3\varepsilon, \qquad \text{ha} \quad s \in U(\varepsilon,t), \end{aligned}$$

tehát (kk) is teljesül $V(\varepsilon,t) = U\left(\frac{\varepsilon}{3},t\right)$-vel.

Elegendőség. Legyen $\varepsilon > 0$, úgy minden $t \in X$-hez megkeresve a (kk) szerint létező $V(\varepsilon,t)$ környezetet $X = \bigcup\limits_{t\in X} V(\varepsilon,t)$. Mivel X kompakt, létezik véges sok $t_1,\dots,t_m$ pontja X-nek úgy, hogy $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} V(\varepsilon,t_i)$ és

$$|x(s)-x(t_i)| < \varepsilon, \qquad \text{ha} \quad s \in V(\varepsilon,t_i),\ x \in K,\ i = 1,\dots,m.$$

(k)-t alkalmazva kapjuk, hogy tetszőleges $s \in X$ és $x \in K$ esetén

$$|x(s)| \le |x(s)-x(t_i)| + |x(t_i)| < \varepsilon + M(t_i) \le \varepsilon + \max_{1\le j\le m} M(t_j) = M_1,$$

ahol $i \in \{1,\dots,m\}$ egy olyan index, melyre $s \in V(\varepsilon,T_i)$. Azaz

$$|x(s)| \le M_1, \qquad \text{ha} \quad s \in X,\ x \in K.$$

Tetszőleges $x \in K$ esetén legyen

$$p(x) = \big(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)\big).$$

Ekkor $P = \left\{\ p(x)\ \middle|\ x \in K\ \right\} \subset l_2^{(m)}$ korlátos halmaz $l_2^{(m)}$-ben, így a 3.9.1 tétel és a Hausdorff tétel (az 1.10.1 tétel 3. következménye) miatt teljesen korlátos. Van tehát véges $\varepsilon > 0$ háló P számára, azaz létezik véges sok $x_1, x_2, \dots, x_q \in K$ úgy, hogy bármely $x \in K$ esetén $p(x)$ valamely $p(x_j)$ ε-sugarú környezetében van, tehát

$$\big|x(t_i)-x_j(t_i)\big| \le \big\|p(x)-p(x_j)\big\|_2 < \varepsilon, \qquad \text{ha} \quad i = 1,2\dots,m.$$

Minden $t \in X$ valamely $V(\varepsilon,t_i)$-ben van, és erre az i indexre

$$\big|x(t)-x(t_i)\big| < \varepsilon \qquad \text{és} \quad \big|x_j(t)-x_j(t_i)\big| < \varepsilon,$$

így

$$\big|x(t)-x_j(t)\big| \le \big|x(t)-x(t_i)\big| + \big|x(t_i)-x_j(t_i)\big| + \big|x_j(t_i)-x_j(t)\big| < 3\varepsilon,$$

azaz

$$\|x-x_j\| < 3\varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy az $x_1, x_2, \dots, x_q \in K$ pontok (véges) 3ε-hálót alkotnak K számára, ezért K teljesen korlátos, és mivel $C(X)$ teljes, Hausdorff tétele alapján K relatív kompakt. $\square$

4. fejezet

Lineáris operátorok és funkcionálok

4.1. Lineáris operátorok

A lineáris operátor fogalmát **2.1**-ben már definiáltuk. Legyenek X, Y lineáris terek azonos skalártartománnyal. Az $A : X \to Y$ leképezést lineáris operátornak nevezzük, ha A additív és homogén, azaz, ha

$$\begin{aligned} A(x+y) &= Ax + Ay, \\ A(\lambda x) &= \lambda Ax \end{aligned} \qquad (x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$$

teljesül. $Y = \mathbb{K}$ esetén lineáris funkcionálról beszélünk.

A továbbiakban e szakaszban X, Y lineáris normált terek azonos skalártartománnyal.

4.1.1. Definíció. Az $A : X \to Y$ lineáris operátort *korlátos*nak nevezzük, ha van olyan c konstans, hogy

$$\|Ax\| \le c\|x\| \quad (x \in X) \tag{4.1.1}$$

teljesül. A (4.1.1) egyenlőtlenséget kielégítő c konstansok halmazának pontos alsó korlátját az A operátor *normájá*nak nevezzük, és $\|A\|$-val jelöljük. $\diamondsuit$

Könnyű belátni, hogy A akkor és csakis akkor korlátos, ha bármely X-beli korlátos halmazt korlátos halmazra képez le. Definíciónk szerint

$$\|A\| = \inf\left\{\ c \in \mathbb{R}\ \middle|\ \|Ax\| \le c\|x\|,\ x \in X\ \right\}. \tag{4.1.2}$$

Legyen $\{c_n\}$ olyan sorozat, hogy $c_n \to \|A\|$ és $\|Ax\| \le c_n\|x\|$ $(x \in X)$. Ekkor $n \to \infty$ határátmenettel $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$ $(x \in X)$ adódik, ami azt jelenti, hogy (4.1.2)-ben az infimum felvétetik. Így $\|A\|$-t jellemzik a következő tulajdonságok:

$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \quad (x \in X)$ és

bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $x_\varepsilon \in X$, hogy $\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon) \, \|x_\varepsilon\|$.

A (4.1.1) egyenlőtlenség $x = 0$-nál mindig teljesül, így (4.1.1) ekvivalens az

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq c \qquad (x \in X, \ x \neq 0)$$

egyenlőtlenséggel. Ezért a (4.1.1)-et kielégítő c konstansok infimuma éppen a baloldalon lévő függvény értékeinek supremuma, így

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|.$$

Akkor mondtuk, hogy $A : X \to Y$ folytonos, ha minden Y-beli nyílt halmaz inverz képe nyílt, vagy, ami ugyanaz, ha bármely $x \in X$-et és x-hez konvergáló $\{x_n\}$ sorozatot véve $Ax_n \to Ax$, ha $n \to \infty$. Lineáris operátorok esetén a folytonosság és a korlátosság között fontos kapcsolat van.

4.1.1. Tétel. *Egy (lineáris normált teret lineáris normált térbe leképező) lineáris operátor akkor és csakis akkor folytonos, ha korlátos.*

Bizonyítás. *Ha $A : X \to Y$ korlátos* és $\{x_n\}$ egy $x \in X$-hez konvergáló sorozat, úgy

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq \|A\| \, \|x_n - x\|$$

miatt A folytonos.

Ha A folytonos, de nem korlátos, úgy minden n természetes számhoz van olyan $z_n \in X$, hogy $\|Az_n\| > n\|z_n\|$. Legyen $y_n = \dfrac{z_n}{n\|z_n\|}$, akkor $y_n \to 0$ és $\|Ay_n\| > 1$, amiből $n \to \infty$ határátmenettel $0 = \|A0\| \geq 1$ adódik, ami ellentmondás.

□

4.1.2. Tétel. *Valós lineáris normált téren értelmezett additív és folytonos operátor homogén, így lineáris.*

Bizonyítás. Az additivitásból teljes indukcióval kapjuk, hogy $x_1, \ldots, x_n \in X$-re

$$A(x_1 + \cdots + x_n) = Ax_1 + \cdots + Ax_n.$$

Helyettesítsünk itt $x_1 = \cdots = x_n = x$-et, akkor

$$A(nx) = nAx \qquad (n \in \mathbb{N}, \ x \in X)$$

adódik. Mivel $Ax = A(x+0) = Ax + A0$, így $A0 = 0$ és

$$A(0x) = 0Ax \qquad (x \in X).$$

Felhasználva, hogy $0 = A0 = A(x-x) = Ax + A(-x)$ miatt $A(-x) = -Ax$, kapjuk, hogy

$$A(nx) = A\left(-n(-x)\right) = -nA(-x) = nAx$$

$n = -1, -2, \ldots,\ x \in X$ esetén. Legyen most $r = \dfrac{p}{q}$ (p, q egészek, $q \neq 0$) egy tetszőleges racionális szám,és $y = rx$. Ekkor $px = qy$ és

$$pAx = A(px) = A(qy) = qAy = qA(rx),$$

amiből

$$A(rx) = rAx,$$

tehát tetszőleges r racionális szám kiemelhető. Legyen most λ valós, és $\{r_n\}$ racionális számok λ-hoz konvergáló sorozata, akkor bármely $x \in X$ esetén

$$r_n x \to \lambda x \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

így A folytonossága miatt

$$\lambda Ax = \lim_{n\to\infty} r_n Ax = \lim_{n\to\infty} A(r_n x) = A(\lambda x),$$

azaz A homogén. □

4.2. Példák lineáris operátorokra és funkcionálokra

4.2.1. Tétel. *Tetszőleges $x \in C[0,1]$ esetén legyen*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x(t_i),$$

ahol $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq 1$ és $c_1, \ldots, c_n$ adott nem zérus valós számok. Ekkor f korlátos lineáris funkcionál $C[0,1]$-en és

$$\|f\| = \sum_{i=1}^{n} |c_i|.$$

Bizonyítás. Világos, hogy f additív és homogén. Továbbá az

$$\left|f(x)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} c_i x(t_i)\right| \le \sum_{i=1}^{n} |c_i| \cdot |x(t_i)| \le \sum_{i=1}^{n} |c_i| \cdot \|x\|$$

egyenlőtlenség miatt f korlátos, és

$$\|f\| \le \sum_{i=1}^{n} |c_i|.$$

Legyen x^* olyan folytonos függvény melynek értékei $[-1,1]$-be esnek, és melyre $x^*(t_i) = \operatorname{sgn} c_i$. Ekkor

$$|f(x^*)| = \left|\sum_{i=1}^{n} c_i x^*(t_i)\right| = \sum_{i=1}^{n} |c_i| = \sum_{i=1}^{n} |c_i| \cdot \|x^*\|$$

amiből

$$\|f\| \ge \sum_{i=1}^{n} |c_i|.$$

□

Legyen $X = l_p^{(n)}$, $Y = l_q^{(m)}$ és $A : X \to Y$ egy lineáris operátor. Bevezetve az

$$\begin{aligned} e_i &= (0, \dots, 0, \overset{\overset{i}{\smile}}{1}, 0, \dots, 0) \in l_p^{(n)}, \quad (i = 1, \dots, n), \\ f_j &= (0, \dots, 0, \overset{\overset{j}{\smile}}{1}, 0, \dots, 0) \in l_q^{(m)}, \quad (j = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

vektorokat, az $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in l_p^{(n)}$ és $y = Ax = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in l_q^{(m)}$ vektorok

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \qquad y = \sum_{j=1}^{m} \eta_j f_j$$

alakba írhatók, ezért

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A e_i = y = \sum_{j=1}^{m} \eta_j f_j.$$

Ae_i felírható

$$Ae_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j$$

alakban, s ezzel

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \xi_i \right) f_j.$$

Ugyanakkor

$$Ax = \sum_{j=1}^{m} \eta_j f_j,$$

így az $f_1, \ldots, f_m$ vektorok lineáris függetlensége miatt

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \xi_i \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{4.2.1}$$

Így *az A operátort az*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrix egyértelműen meghatározza. Az Ax vektort, mint oszlopvektort, úgy lehet megkapni, (4.2.1) szerint, hogy az $\mathcal{A}$ mátrixot az x (oszlop)vektorral megszorozzuk.

Fordítva, bármely $\mathcal{A}$ mátrix megad (4.2.1) *szerint egy $A : l_p^{(n)} \to l_q^{(m)}$ lineáris operátort. Egy ilyen operátor mindig folytonos,* mert ha $x_k = \left(\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right)$, $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $x_k \to x$ $(k \to \infty)$, úgy ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_i^{(k)} = \xi_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, de akkor (4.2.1) miatt $Ax_k = y_k = \left(\eta_1^{(k)}, \ldots, \eta_m^{(k)}\right)$-ra

$$\eta_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \xi_i^{(k)}, \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

amiből

$$\lim_{k\to\infty} \eta_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \xi_i = \eta_j \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

azaz $\lim\limits_{k\to\infty} Ax_k = (\eta_1, \ldots, \eta_m) = Ax$.

Az alábbiakban meghatározzuk A normáját, ha $p = q = 1$, $p = q = \infty$, vagy $p = q = 2$.

4.2.2. Tétel. *Ha $p = q = 1$, akkor*

$$\|A\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ji}|. \tag{4.2.2}$$

Bizonyítás. Jelölje α a jobboldali kifejezést, akkor

$$\|Ax\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |\eta_j| = \sum_{j=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\xi_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \sum_{j=1}^{m} |a_{ji}| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ji}| \cdot \|x\|_1 = \alpha \|x\|_1,$$

amiből

$$\|A\| \le \alpha.$$

Ha $\alpha = 0$, úgy $\|A\| = 0 = \alpha$ és az állításunk igazolt. Ha $\alpha > 0$, úgy legyen $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ egy olyan index, melyre

$$\sum_{j=1}^{m} |a_{ji_0}| = \alpha,$$

és legyen $x^* = e_{i_0}$. Ekkor $\|x^*\|_1 = 1$, és

$$\|Ax^*\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |a_{ji_0}| = \alpha = \alpha \|x^*\|_1,$$

amiből

$$\|A\| \ge \alpha$$

következik, s ezzel (4.2.2)-et igazoltuk. □

4.2.3. Tétel. *Ha $p = q = \infty$, akkor*

$$\|A\| = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ji}|. \tag{4.2.3}$$

Bizonyítás. Jelölje β a jobboldalon álló maximumot, akkor

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\le j\le m} |\eta_j| = \max_{1\le j\le m} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\xi_i \right| \le \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ji}| \max_{1\le i\le n} |\xi_i| = \beta \|x\|_\infty,$$

amiből

$$\|A\| \le \beta.$$

Ha $\beta = 0$, úgy $\|A\| = 0 = \beta$, és az állításunk igazolt.
$\beta > 0$ esetén jelöljön $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ egy olyan indexet, melyre

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{j_0 i}| = \beta,$$

és legyen $x^* = (\operatorname{sgn} a_{j_0 1}, \dots, \operatorname{sgn} a_{j_0 n})$. Ekkor $\|x^*\|_\infty = 1$, és

$$\|Ax^*\|_\infty = \max_{1 \le j \le m} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{j_0 i} \operatorname{sgn} a_{j_0 i} \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_{j_0 i}| = \beta \|x^*\|_\infty,$$

amiből

$$\|A\| \ge \beta,$$

így (4.2.3)-at igazoltuk. □

4.2.4. Tétel. *Ha $p = q = 2$, akkor*

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_1}, \tag{4.2.4}$$

ahol λ_1 az $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ mátrix legnagyobb sajátértéke (itt $\mathcal{A}^*$ az $\mathcal{A}$ mátrix transzponáltjának a konjugáltja).

Bizonyítás. Ha $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ két $l_2^{(n)}$-beli vektor úgy az $\langle x, z \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\zeta}_i$ számot x és z belső szorzatának, vagy skaláris szorzatának nevezzük. Azt mondjuk, hogy x és z ortogonálisak, ha $\langle x, z \rangle = 0$. Világos, hogy $\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$. Legyen most $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in l_2^{(n)}$, akkor az $Ax = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ jelöléssel

$$\begin{aligned}
\|A\|^2 = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2^2 &= \sup_{\|x\|_2 = 1} \sum_{j=1}^{m} \eta_j \overline{\eta}_j \\
&= \sup_{\|x\|_2 = 1} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \xi_i \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{jk} \overline{\xi}_k \right) \\
&= \sup_{\|x\|_2 = 1} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} \xi_i \right) \overline{\xi}_k = \sup_{\|x\|_2 = 1} \langle Bx, x \rangle,
\end{aligned}$$

ahol $b_{ki} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} \overline{a}_{jk}$ $(k, i = 1, \dots, n)$ és B a $\mathcal{B} = (b_{ki}) = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ mátrix által meghatározott lineáris operátor.

A $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ előállítás miatt $\mathcal{B}$ sajátértékei valós, nemnegatív számok. Ha $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ a $\mathcal{B}$ sajátértékei és $x_1, \dots, x_n$ a megfelelő lineárisan független sajátvektorok – melyekről feltehetjük, hogy normáltak és páronként ortogonálisak – akkor bármely $x \in l_2^{(n)}$ egyértelműen

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

alakba írható, és B linearitása miatt

$$Bx = \sum_{i=1}^{n} c_i B x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i x_i.$$

Innen az $x_1, \dots, x_n$ vektorok ortogonalitását kihasználva kapjuk, hogy

$$\|Bx\|_2^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i x_i\ ,\ \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} |c_i \lambda_i|^2 \leq \lambda_1^2 \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = \lambda_1^2 \|x\|_2^2,$$

amiből

$$\|B\| \leq \lambda_1.$$

De $x = x_1$-nél

$$\|Bx_1\|_2^2 = \lambda_1^2 \|x_1\|_2^2,$$

így $\|B\| = \lambda_1$.

Ha megmutatjuk, hogy

$$\|B\| = \sup_{\|x\|_2=1} \langle Bx, x \rangle$$

úgy készen vagyunk a bizonyítással, hiszen a baloldal $= \lambda_1$, a jobboldali kifejezésről viszont tudjuk, hogy $= \|A\|^2$.
$\|x\|_2 = 1$ mellett a Hölder-egyenlőtlenség miatt

$$\langle Bx, x \rangle = \left| \langle Bx, x \rangle \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} \xi_i \right) \overline{\xi}_k \right| \leq \|Bx\|_2 \cdot \|x\|_2 \leq \|B\|,$$

így

$$\sup_{\|x\|_2=1} \langle Bx, x \rangle \leq \|B\|.$$

Mivel $x = x_1$-nél

$$\langle Bx_1, x_1 \rangle = \langle \lambda x_1, x_1 \rangle = \lambda_1 \|x_1\|_2^2 = \lambda_1 = \|B\|,$$

ezért $\sup\limits_{\|x\|_2=1} \langle Bx, x \rangle = \|B\|$, s állításunk bizonyított. □

4.2.5. Tétel. *Legyen* $\mathcal{K} : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ *valós értékű folytonos függvény. Ekkor az*

$$(Ax)(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t, s)x(s)ds, \qquad x \in C[a, b],$$

képlettel definiált A *a* $C[a, b]$*-t önmagába képező korlátos lineáris operátor, és*

$$\|A\| = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)|ds.$$

Bizonyítás. Könnyű belátni, hogy Ax folytonos függvény $[a, b]$-n és A additív és homogén. Megmutatjuk, hogy A korlátos is, és normája éppen a

$$\gamma = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)|ds$$

szám. Minden $t \in [a, b]$ esetén

$$|(Ax)(t)| \leq \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)||x(s)|ds \leq \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)|ds \cdot \|x\|,$$

ahol $\|x\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$. Így

$$\|Ax\| = \sup_{t\in[a,b]} |(Ax)(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)|ds \cdot \|x\| = \gamma\|x\|,$$

ugyanis az $[a, b] \ni t \to \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)|ds$ függvény folytonos a kompakt $[a, b]$ intervallumon, ezért sup helyett max írható. Ez azt jelenti, hogy A korlátos és

$$\|A\| \leq \gamma.$$

Mivel kompakt halmazon folytonos függvény felveszi szélsőértékeit, van olyan $t_0 \in [a, b]$, melyre

$$\gamma = \int_a^b |\mathcal{K}(t_0, s)|ds.$$

Ha $\gamma = 0$, (azaz $\mathcal{K}(t_0, s) = 0$, ha $s \in [a, b]$), akkor $\|A\| \geq 0 = \gamma$, így $\|A\| = 0 = \gamma$.

Ha $\gamma \neq 0$, akkor legyen $k_0(s) := \operatorname{sgn}\mathcal{K}(t_0,s)$, $(s \in [a,b])$. A k_0 függvény Lebesgue-mérhető, így Luzin tétele miatt bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $E_\varepsilon \subset [a,b]$ kompakt halmaz, hogy k_0-nak az E_ε-ra való leszűkítése folytonos és

$$\mu\left([a,b] \setminus E_\varepsilon\right) < \frac{\varepsilon}{2 \max\limits_{t,s\in[a,b]} |\mathcal{K}(t,s)|},$$

($\gamma \neq 0$ miatt a nevező pozitív). Tietze kiterjesztési tétele szerint k_0-nak az E_ε-ra való előbbi leszűkítése folytonosan kiterjeszthető az egész $[a,b]$-re k_0 korlátjának megőrzésével. Legyen x_ε ez a kiterjesztett függvény. Akkor minden (elég kis $\varepsilon > 0$ esetén)

$$\begin{aligned} x_\varepsilon &: [a,b] \to [-1,1] \qquad \text{folytonos függvény } [a,b]\text{-n} \\ x_\varepsilon(s) &= k_0(s) \qquad\qquad \text{ha } s \in E_\varepsilon. \end{aligned}$$

Ekkor elég kis ε esetén $\|x_\varepsilon\| = 1$, és

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Ax_\varepsilon\| = \sup_{t\in[a,b]} \left| \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x_\varepsilon(s)ds \right| \\ &= \max_{t\in[a,b]} \left| \int_a^b \mathcal{K}(t,s)\left(x_\varepsilon(s) - k_0(s)\right)ds + \int_a^b \mathcal{K}(t,s)k_0(s)ds \right|. \end{aligned}$$

Ha β_1, β_2-vel jelöljük az abszolútérték jel között álló integrálokat, úgy

$$\begin{aligned} |\beta_1| &= \left| \int_a^b \mathcal{K}(t,s)\left(x_\varepsilon(s) - k_0(s)\right)ds \right| \leq \int_{[a,b]\setminus E_\varepsilon} |\mathcal{K}(t,s)| \cdot |x_\varepsilon(s) - k_0(s)| ds \\ &\leq 2 \max_{t,s\in[a,b]} |\mathcal{K}(t,s)| \cdot \mu\left([a,b] \setminus E_\varepsilon\right) = \varepsilon, \end{aligned}$$

és

$$|\beta_1 + \beta_2| \geq \left||\beta_1| - |\beta_2|\right| \geq |\beta_2| - |\beta_1| \geq \left| \int_a^b \mathcal{K}(t,s)k_0(s)ds \right| - \varepsilon.$$

Ezt felhasználva $\|A\|$ becslése a következőképpen folytatható.

$$\begin{aligned} \|A\| &\geq \max_{t\in[a,b]} |\beta_1 + \beta_2| \geq \max_{t\in[a,b]} \left| \int_a^b \mathcal{K}(t,s)k_0(s)ds \right| - \varepsilon \\ &\geq \left| \int_a^b \mathcal{K}(t_0,s)k_0(s)ds \right| = \left| \int_a^b \mathcal{K}(t_0,s)\operatorname{sgn}\mathcal{K}(t_0,s)ds \right| \\ &= \int_a^b |\mathcal{K}(t_0,s)|ds - \varepsilon = \gamma - \varepsilon, \end{aligned}$$

amiből $\varepsilon \to 0$ határátmenettel
$$\|A\| \geq \gamma,$$
s ezt az $\|A\|$-ra vonatkozó első becslésünkkel összevetve kapjuk, hogy $\|A\| = \gamma$.
$\square$

4.2.6. Tétel. *Legyen $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ valós értékű folytonos függvény az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor az*
$$f(x) = \int_a^b k(s)x(s)ds \quad (x \in C[a,b])$$
formula $C[a,b]$ egy korlátos lineáris f funkcionálját definiálja, melynek normája
$$\|f\| = \int_a^b |k(s)|ds.$$
A bizonyítás teljesen analóg a 4.2.5 tétel bizonyításával.

4.3. A lineáris operátorok terének struktúrája

Legyenek X, Y lineáris terek azonos skalártartománnyal és jelölje $\mathcal{L}(X,Y)$ az összes $A : X \to Y$ lineáris operátorok halmazát.
4.3.1. Definíció. $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ esetén az $A+B$, λA operátorokat az alábbi egyenlőségekkel definiáljuk:
$$\begin{array}{rl} (A+B)x = & Ax + Bx \\ (\lambda A)x = & \lambda Ax \end{array} \quad (x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}).$$
$\diamondsuit$

4.3.1. Tétel. *$\mathcal{L}(X,Y)$ lineáris tér a fenti műveletekre nézve.*

Bizonyítás. Azonnal látható, hogy $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $A+B$, λA is lineáris operátorok, azaz $\mathcal{L}(X,Y)$ elemei, és a lineáris tér axiómái teljesülnek.
$\square$

Ha $Y = X$, akkor két $\mathcal{L}(X,X)$-beli A, B *operátor szorzatát* az
$$(AB)x = A(Bx) \quad (x \in X)$$
egyenlőséggel definiáljuk. $\diamondsuit$

4.3.2. Definíció. A Z halmazt *algebrá*nak nevezzük a $\mathbb{K}$ test felett, ha

(1) Z vektortér a $\mathbb{K}$ test felett,

(2) Z gyűrű (a műveletek Z-ben a $+$ és $\cdot$)

(3) bármely $z, w \in Z,\ \lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$\lambda(zw) = (\lambda z)w = z(\lambda w).$$

$\diamondsuit$

4.3.2. Tétel. *$\mathcal{L}(X, X)$ algebra a fenti összeadás, skalárral való szorzás és szorzás műveletére nézve.*

A bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

Legyenek most X, Y lineáris normált terek azonos skalártartománnyal, és jelölje $\mathcal{B}(X, Y)$ az X-et Y-ba képező korlátos lineáris operátorok halmazát.

4.3.3. Tétel. *$\mathcal{B}(X, Y)$ lineáris normált tér.*

Bizonyítás. A 4.3.1 tétel miatt elég azt belátni, hogy

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

teljesíti a norma tulajdonságait.

Világos, hogy $\|A\| \geq 0$ és $\|A\| = 0$ akkor és csakis akkor, ha $A = 0 =$ a zérusoperátor (mely minden $x \in X$-hez $0 \in Y$-t rendeli). Továbbá,

$$\begin{aligned}
\|\lambda A\| &= \sup_{\|x\|=1} \big\|(\lambda A)x\big\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda|\,\|A\|,\\
\|A+B\| &= \sup_{\|x\|=1} \big\|(A+B)x\big\| = \sup_{\|x\|=1} \big\|Ax+Bx\big\|\\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|.
\end{aligned}$$

$\square$

4.3.4. Tétel. *Ha Y Banach-tér, úgy $\mathcal{B}(X, Y)$ is Banach-tér.*

Bizonyítás. Csak $\mathcal{B}(X, Y)$ teljességét kell belátnunk, ha Y teljes. Legyen $A_n \in \mathcal{B}(X, Y),\ n \in \mathbb{N}$ egy Cauchy-sorozat. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N(\varepsilon)$ úgy, hogy

$$\|A_n - A_m\| < \varepsilon, \qquad \text{ha } n, m > N(\varepsilon).$$

Bármely $x \in X$ esetén

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|, \quad \text{ha } n, m > N(\varepsilon), \tag{4.3.1}$$

ezért $\{A_n x\}$ Cauchy-sorozat. Y teljessége miatt $\{A_n x\}$ konvergens, legyen

$$Ax = \lim_{n \to \infty} A_n x \qquad (x \in X).$$

Azt állítjuk, hogy $A \in \mathcal{B}(X, Y)$.

$A : X \to Y$, A *lineáris* mert

$$\begin{aligned} A(x+y) &= \lim_{n\to\infty} A_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} (A_n x + A_n y) = \lim_{n\to\infty} A_n x + \lim_{n\to\infty} A_n y \\ &= Ax + Ay, \\ A(\lambda x) &= \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda A_n x = \lambda \lim_{n\to\infty} A_n x = \lambda A x. \end{aligned}$$

A korlátosságának igazolásához vegyük figyelembe, hogy

$$\big| \|A_n\| - \|A_m\| \big| \leq \|A_n - A_m\|, \qquad (n, m \in \mathbb{N}),$$

így az $\{\|A_n\|\}$ sorozat nemnegatív számok Cauchy-sorozata, ami konvergens, ezért korlátos: $\|A_n\| \leq c$ $(n \in \mathbb{N})$. De akkor

$$\|A_n x\| \leq \|A_n\| \cdot \|x\| \leq c\|x\|,$$

amiből $n \to \infty$-nel

$$\|Ax\| \leq c\|x\|,$$

tehát A korlátos.

(4.3.1)-ből $m \to \infty$-nel kapjuk, hogy

$$\|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon \|x\|, \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon),$$

így $\|A_n - A\| \leq \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$, ezzel $\mathcal{B}(X, Y)$ teljességét beláttuk. □

Megjegyzés. Legyen $A_n \in \mathcal{B}(X, Y)$, $(n \in \mathbb{N})$ egy operátorsorozat. Ha bármely $x \in X$ esetén $\{A_n x\}$ konvergens, úgy az $\{A_n\}$ operátorsorozatot *pontonként konvergens*nek nevezzük. Az előző bizonyításban láttuk, hogy ekkor $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ egy $\mathcal{L}(X, Y)$-beli operátor (A korlátos is, ha X Banach-tér, lásd az 5.2.1 tételt).

Ha van olyan $A \in \mathcal{B}(X, Y)$, hogy $\|A_n - A\| \to 0$ ha $n \to \infty$, akkor azt mondjuk, hogy az $\{A_n\}$ operátorsorozat *operátornormában (vagy egyenletesen) konvergál* A-hoz. Hangsúlyozzuk, hogy csak ebben a speciális $\mathcal{B}(X, Y)$ *lineáris* normált térben használjuk ezt a terminológiát. Azt is mondhatjuk, hogy $\{A_n\}$ konvergál A-hoz $\mathcal{B}(X,Y)$-ban.

Mivel

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\| \cdot \|x\|,$$

ezért az operátornormában való (vagy egyenletes) konvergenciából következik a pontonkénti konvergencia. Ha az $A_n x \to Ax$ pontonkénti konvergencia az $\|x\| \leq 1$ egységgömbön egyenletes, úgy $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ és $\|A_n - A\| \to 0$, ha $n \to \infty$.

4.3.3. Definíció. A Z halmazt *normált algebrá*nak nevezzük a $\mathbb{K}$ test felett, ha Z algebra $\mathbb{K}$ felett, és bármely $z \in Z$ elemhez hozzá van rendelve egy $\|z\|$ valós szám úgy, hogy bármely $z, w \in Z,\ \lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$\begin{aligned} \|z\| &\geq 0 \ \text{ és } \ \|z\| = 0 \iff z = 0, \\ \|\lambda z\| &= |\lambda| \cdot \|z\|, \\ \|z + w\| &\leq \|z\| + \|w\|, \\ \|zw\| &\leq \|z\| \cdot \|w\|. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

4.3.5. Tétel. *$\mathcal{B}(X,X)$ normált algebra, mely teljes, ha X Banach-tér.*

Bizonyítás. Az előző tételek miatt csupán az

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

egyenlőtlenséget kell igazolni, ha $A, B \in \mathcal{B}(X,X)$. Ezt az olvasóra bízzuk. $\square$

Foglalkozzunk most azzal a speciális esettel, amikor $Y = \mathbb{K}$ az X tér skalárjainak teste (mely maga is lineáris normált, sőt Banach-tér). A 4.3.4 tétel szerint ekkor $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ Banach-tér.

4.3.4. Definíció. Legyen X egy lineáris normált tér a $\mathbb{K}$ test felett. A $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ teret X *konjugált teré*nek, vagy (normált) duális terének nevezzük és X^*-gal jelöljük. $\diamondsuit$

X^*-ot tehát az X-en értelmezett összes korlátos lineáris f funkcionálok alkotják a pontonkénti összeadással és skalárral való szorzással, valamint az

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

normával ellátva.

4.4. A Hahn-Banach tétel lineáris normált térben

4.4.1. Tétel. *Lineáris normált tér egy lineáris alterén értelmezett és ott lineáris és korlátos funkcionál kiterjeszthető az egész térre a linearitás, korlátosság és a norma megtartásával.*

Ez azt jelenti, hogy ha f az X lineáris normált tér X_0 alterén értelmezett lineáris korlátos funkcionál, úgy létezik olyan $F : X \to \mathbb{K}$ lineáris korlátos funkcionál, melyre

$$F(u) = f(u) \qquad (u \in X_0),$$

és

$$\|F\| = \|f\| \left(= \sup_{0 \neq x \in X_0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \right).$$

Bizonyítás. *Ha X valós lineáris normált* tér, akkor legyen $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ $(x \in X)$. A p függvény szubadditív és pozitív homogén X-en, melyre

$$f(x) \leq |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| = p(x)$$

bármely $x \in X_0$ mellett. Így alkalmazhatjuk a Hahn-Banach tétel lineáris terekre érvényes változatát. Van tehát olyan $F : X \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, melyre

$$\begin{aligned} F(u) &= f(u) \qquad && (u \in X_0), \\ F(x) &\leq p(x) \qquad && (x \in X). \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy $\|F\| = \|f\|$. Egyrészt

$$\|f\| = \sup_{0 \neq x \in X_0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{0 \neq x \in X} \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \|F\|,$$

másrészt a 2.2.1. Következmény szerint

$$\begin{aligned} -p(-x) \ \leq \ & F(x) \ \leq \ p(x), \\ -\|f\| \cdot \|x\| \ \leq \ & F(x) \ \leq \ \|f\| \cdot \|x\|, \\ & |F(x)| \ \leq \ \|f\| \cdot \|x\|, \end{aligned}$$

amiből

$$\|F\| \leq \|f\|,$$

ezzel $\|F\| = \|f\|$.

Komplex lineáris normált tér esetén $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ $(x \in X)$ félnorma X-en, és $|f(x)| \leq p(x)$ $(x \in X_0)$. Így alkalmazhatjuk a Bohnenblust-Sobczyk tételt, és a kapott F funkcionálról az előzőekhez hasonlóan beláthatjuk, hogy f lineáris normatartó kiterjesztése lesz. □

Következmények.

1. *Legyen X_0 az X lineáris normált tér egy lineáris altere, és $x_1 \in X$ olyan, hogy*
$$d = \varrho(x_1, X_0) = \inf_{x \in X_0} \|x_1 - x\| > 0.$$
Ekkor létezik olyan f korlátos lineáris funkcionál X-en, melyre
$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \qquad \text{ha } x \in X_0, \\ f(x_1) &= d, \\ \|f\| &= 1. \end{aligned}$$
Jelölje ugyanis X_1 az $X_0 \cup \{x_1\}$ lineáris burkát. Mivel $d > 0$, kapjuk, hogy $x_1 \neq X_0$, és így bármely $y \in X_1$ egyértelműen felírható $y = x + \lambda x_1$ alakban, ahol $x \in X_0,\ \lambda \in \mathbb{K}$ skalár. Az
$$f_1(y) = \lambda d \qquad (y = x + \lambda x_1 \in X_1)$$
képlettel definiált f_1 olyan lineáris funkcionál X_1-en, mely X_0-on zérus, és x_1-ben d-t vesz fel. Megmutatjuk, hogy $\|f_1\| = 1$, amiből a 4.4.1 tétel alkalmazásával adódik állításunk. Valóban,
$$\begin{aligned} |f_1(y)| &= |\lambda| d = |\lambda| \inf_{x \in X_0} \|x_1 - x\| = \inf_{x \in X_0} \|\lambda x_1 - \lambda x\| \\ &= \inf_{x \in X_0} \|x + \lambda x_1 - (\lambda + 1)x\| = \inf_{x \in X_0} \|y - (\lambda + 1)x\| \leq \|y\| \end{aligned}$$
így $\|f_1\| \leq 1$. Másrészt, d definíciója miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $x_\varepsilon \in X_0$ hogy
$$\|x_1 - x_\varepsilon\| - d < \varepsilon d,$$
ezért $y_\varepsilon = x_1 - x_\varepsilon$ jelöléssel
$$|f_1(y_\varepsilon)| = d > \frac{1}{1 + \varepsilon} \|y_\varepsilon\|.$$
Innen
$$\|f_1\| = \sup_{0 \neq y \in X_1} \frac{|f_1(y)|}{\|y\|} \geq \frac{|f_1(y_\varepsilon)|}{\|y_\varepsilon\|} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}$$
és $\varepsilon \to 0$-val $\|f_1\| \geq 1$, ezért $\|f_1\| = 1$.

2. *Ha $X \neq \{0\}$, akkor bármely $x_1 \in X$-hez van olyan $f \in X^*$ funkcionál, hogy*
$$\begin{aligned} f(x_1) &= \|x_1\|, \\ \|f\| &= 1 \end{aligned}$$
teljesül.

Ugyanis, ha $x_1 \neq 0$, akkor legyen $X_0 = \{0\}$, és alkalmazzuk az előző következményt. Mivel $d = \varrho(x_1, X_0) = \|x_1\| > 0$, éppen a kívánt funkcionált kapjuk. Ha $x_1 = 0$, úgy tetszőleges egységnormájú $f \in X^*$ teljesíti a követelményeket.

3. *Ha az X lineáris normált tér x_1 elemére $f(x_1) = 0$ bármely $f \in X^*$ funkcionálra, akkor $x_1 = 0$.*

   Ellenkező esetben ugyanis a 2. következmény ellentmondásra vezetne.

4. *Ha egy X lineáris normált tér x_1, x_2 elemei esetén $f(x_1) = f(x_2)$ bármely $f \in X^*$-ra, akkor $x_1 = x_2$.* (Alkalmazzuk 3.-at $x_1 - x_2$-re!)

A 4. következmény jelentősége abban áll, hogy segítségével *funkcionálok értékeinek egyenlőségéből a tér elemeinek egyenlőségére következtethetünk.*

4.5. Konjugált tér, reflexív terek

A **4.3** szakaszban beláttuk, hogy egy X lineáris normált tér X^* konjugált tere Banach-tér. Ezért képezhetjük az $X^{**} = (X^*)^*$ második, $X^{***} = (X^{**})^*$ harmadik stb. konjugált terét X-nek. Világos, hogy ezek valamennyien Banach-terek.

Az X és X^{**} között fontos kapcsolat van, az alábbiakban ezt vizsgáljuk.

4.5.1. Tétel. *Legyen X egy lineáris normált tér, $x_0 \in X$ fix elem. Ekkor az*

$$F_{x_0}(f) = f(x_0) \qquad (f \in X^*)$$

formulával definiált F_{x_0} lineáris korlátos funkcionál X^*-on (azaz $F_{x_0} \in X^{**}$) és

$$\|F_{x_0}\| = \|x_0\|.$$

Bizonyítás. F_{x_0} *additív és homogén*, mert

$$\begin{aligned} F_{x_0}(f+g) &= (f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = F_{x_0}(f) + F_{x_0}(g), \\ F_{x_0}(\lambda f) &= (\lambda f)(x_0) = \lambda f(x_0) = \lambda F_{x_0}(f). \end{aligned}$$

F_{x_0} *korlátos* is, mert

$$|F_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_0\|.$$

Innen következik, hogy $\|F_{x_0}\| \leq \|x_0\|$. Ha $x_0 = 0$, úgy $\|F_{x_0}\| = 0 = \|x_0\|$. Ha $x_0 \neq 0$, úgy a 4.4.1 tétel 2. következménye szerint van olyan $f_0 \in X^*$, melyre

$$\|f_0\| = 1, \qquad \text{és} \quad f_0(x_0) = \|x_0\|$$

teljesül, de akkor

$$\|F_{x_0}\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|F_{x_0}(f_0)|}{\|f\|} \geq \frac{|F_{x_0}(f_0)|}{\|f_0\|} = f_0(x_0) = \|x_0\|,$$

így $\|F_{x_0}\| = \|x_0\|$ ekkor is. □

4.5.1. Definíció. Legyen X egy lineáris normált tér. A

$$Jx = F_x \qquad (x \in X,\ F_x \in X^{**})$$

vagy részletesebben, a

$$(Jx)(f) = F_x(f) = f(x) \qquad (x \in X,\ f \in X^{*})$$

összefüggéssel definiált $J : X \to X^{**}$ leképezést az X lineáris normált térnek a második konjugált terébe való *természetes leképezés*nek nevezzük. ♢

4.5.2. Tétel. *A J természetes leképezés X-et izomorfan és izometrikusan képezi le $J(X)\big(\subset X^{**}\big)$-re.*

Bizonyítás. A 4.5.1 tétel miatt J izometrikus leképezése X-nek $J(X)$-re. Mivel bármely $f \in X^{*}$ mellett

$$\begin{aligned} J(x+y)(f) &= f(x+y) = f(x) + f(y) = (Jx)(f) + (Jy)(f), \\ J(\lambda x)(f) &= f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda (Jx)(f), \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned} J(x+y) &= Jx + Jy, \\ J(\lambda x) &= \lambda Jx, \end{aligned}$$

azaz J lineáris leképezés. J kölcsönösen egyértelműsége ebből már következik, mert ha $Jx = Jy$, akkor $J(x-y) = 0$, és így $0 = \|0\| = \|J(x-y)\| = \|x-y\|$ miatt $x = y$. Ezért $J : X \to J(X)$ izomorfizmus. □

4.5.2. Definíció. Az X lineáris normált teret *reflexív*nek nevezzük, ha a J természetes leképezés képtere az egész X^{**}, azaz ha $J(X) = X^{**}$. ♢

Ha X reflexív, akkor X és X^{**} izometrikusan izomorf terek a J leképezés által, így X teljes. Megjegyezzük, hogy X és X^{**} izometrikusan izomorfak lehetnek anélkül, hogy X reflexív volna. Így a reflexivitás definíciójában lényeges, hogy az izometrikusan izomorf leképezést éppen a természetes leképezés adja.

4.5.3. Tétel. *Bármely lineáris normált tér egy Banach-tér sűrű lineáris altere* (és ez a Banach-tér az eredeti normált teret fixen hagyó izometrikus és izomorf leképezéstől eltekintve egyértelmű).

Bizonyítás. A bizonyítást el lehetne végezni a teljes metrikus burok konstrukciójának mintájára is, de egyszerűbb a következő eljárás.

Legyen $\widetilde{X} = \overline{J(X)}$, ahol a lezárás természetesen X^{**}-ban értendő. $\widetilde{X}$ az X^{**} Banach-tér zárt lineáris altere, így maga is Banach-tér. Cseréljük ki $J(X)$ minden Jx elemét $x \in X$-szel. Ezáltal X-et sűrű lineáris altérként beágyaztuk az $\widetilde{X}$ Banach-térbe. Az egyértelműség bizonyítása az 1.5.2 tétel bizonyításához hasonlóan történhet. □

4.6. Gyenge és gyenge* topológia

Legyen X egy lineáris normált tér. Eddig X-et mindig a normából származó úgynevezett erős topológiával láttuk el. A folytonos (korlátos) lineáris funkcionálok segítségével azonban más topológia is megadható.

4.6.1. Definíció. Legyen X egy lineáris normált tér, X^* a konjugált tere. Az összes X^*-beli funkcionálok által indukált gyenge topológiát (lásd Függelék 8.5.2 definíció) X *gyenge topológiájá*nak nevezzük. ♢

A Függelék 8.5.1 tétele alapján X gyenge topológiájában a

$$V(x_0; f_1, \dots, f_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \{x \in X \mid |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon_i\} \qquad (4.6.1)$$

halmazok (ahol $f_i \in X^*,\ \varepsilon_i > 0,\ i = 1, \dots, n;\ n = 1, 2, \dots$) x_0 környezetbázisát alkotják, míg az

$$S(x_0; f; \varepsilon) = \{x \in X \mid |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$$

(ahol $f \in X^*,\ \varepsilon > 0$) alakú halmazok x_0 egy környezet szubbázisát adják.

Legyen most $f \in X^*$, akkor azonnal látható, hogy $p_f(x) = |f(x)|$ félnorma X-en. Összehasonlítva (4.6.1)-et a 3.2 szakasz (3.2.1) képletével, látjuk, hogy X gyenge topológiája éppen a $\{p_f \mid f \in X^*\}$ félnorma rendszer által indukált topológia, így a 3.2.2 tétel alapján kimondhatjuk az alábbi állítást.

4.6.1. Tétel. *Egy X lineáris normált tér gyenge topológiája lokálisan konvex Hausdorff-féle vektortopológia. E topológiában az $\{x_n\}$ sorozat akkor és csakis akkor konvergál x-hez, ha bármely $f \in X^*$ esetén $f(x_n) \to f(x)$, ha $n \to \infty$.*

Megjegyzés. Az, hogy a gyenge topológia Hausdorff-féle a 4.4.1 tétel 2. következményéből adódik.

A gyenge topológia a reflexív terek jellemzésében nagyon fontos.

4.6.2. Tétel. *Egy X Banach-tér akkor és csakis akkor reflexív, ha az $S(0, 1) = \{x \in X \mid \|x\| \le 1\}$ zárt egységgömbje kompakt a gyenge topológiában.*

A bizonyítás megtalálható pl. [6]-ban.

Tekintsük most egy X normált tér X^* konjugált terét. X^* *erős topológiája* a funkcionálok normájából származó topológia. X^* *gyenge topológiája* az előzőek értelemszerű alkalmazásával egy lokálisan konvex Hausdorff-féle vektortopológia, melynél minden $f_0 \in X^*$ pont környezet szubbázisát az

$$S(f_0; F; \varepsilon) = \{f \in X^* \mid |F(f) - F(f_0)| < \varepsilon\}$$

($F \in X^{**}$, $\varepsilon > 0$) alakú halmazok alkotják. E topológiában az $\{f_n\}$ sorozat akkor és csakis akkor konvergál f-hez, ha $F(f_n) \to F(f)$ $(n \to \infty)$ bármely $F \in X^{**}$ mellett.

X^*-on be lehet vezetni egy harmadik topológiát is, mely az előzőeknél talán még fontosabb.

4.6.2. Definíció. Legyen X egy lineáris normált tér, X^* a konjugált tere és J az X-nek a második konjugáltjába való természetes leképezése. Az összes $J(X)$-beli funkcionálok által indukált gyenge topológiát X^* *gyenge* topológiájá*nak nevezzük. ♢

Mivel $J(X)\big(\subset X^{**}\big)$ funkcionáljai

$$F_x(f) = f(x) \qquad (f \in X^*)$$

alakúak, ahol $x \in X$ tetszőleges rögzített elem, így a gyenge* topológiában bármely $f_0 \in X^*$ pont környezet szubbázisát az

$$S^*(f_0; x; \varepsilon) = \big\{f \in X^* \mid |F_x(f) - F_x(f_0)| < \varepsilon\big\} = \big\{f \in X^* \mid |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon\big\}$$

($x \in X$, $\varepsilon > 0$) alakú halmazok adják. Érvényes a

4.6.3. Tétel. *A gyenge* topológia is lokálisan konvex vektortopológia, melyet a $p_x(f) = |F_x(f)| = |f(x)|$ $(x \in X)$ félnormák indukálnak, és melyben az $\{f_n\}$ sorozat akkor és csakis akkor konvergál $f \in X^*$-hoz, ha $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ minden $x \in X$-re. E topológia Hausdorff-féle, mert ha $f \neq 0$, akkor van olyan $x \in X$, hogy $p_x(f) \neq 0$.*

Világos, hogy X^* előbbi topológiáinak erősségi sorrendje: erős topológia, gyenge topológia, gyenge* topológia. Vizsgáljuk meg most hogyan viselkedik az

$$S^*(0,1) = \{f \in X^* \mid \|f\| \leq 1\}$$

zárt egységgömb a fenti topológiákban kompaktság szempontjából.

A 3.6.2 tétel szerint $S^*(0,1)$ *akkor és csakis akkor kompakt az erős topológiában,* ha X^* véges dimenziós (nem nehéz belátni, hogy ez pontosan akkor igaz, *ha X véges dimenziós*).

A 4.6.2 tétel szerint $S^*(0,1)$ *akkor és csakis akkor kompakt a gyenge topológiában,* ha X^* reflexív (ha X Banach-tér, akkor nem nehéz belátni, hogy X^* reflexív $\iff$ X *reflexív*).

Fentieket azért hangsúlyoztuk, hogy rámutassunk arra, hogy a helyzet a *gyenge* topológiánál* egészen más: e topológiában $S^*(0,1)$ *mindig kompakt.*

4.6.4. Tétel. (Banach-Alaoglu) *Egy X lineáris normált tér X^* konjugált terének $S^* = S^*(0,1) = \{f \in X^* \mid \|f\| \le 1\}$ zárt egységgömbje a gyenge* topológiában kompakt halmaz.*

Bizonyítás. Ha $f \in S^*$, akkor

$$|f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\| \le \|x\| \qquad x \in X,$$

így $f(x) \in C_x$, ahol $C_x = \left\{\lambda \in \mathbb{K} \;\middle|\; |\lambda| \le \|x\|\right\}$. Mivel C_x kompakt, ezért Tyihonov tétele (Függelék 8.7.2 tétel) szerint $C = \prod_{x \in X} C_x$ is kompakt. Emlékeztetünk arra, hogy C elemei olyan $g : X \to \bigcup_{x \in X} C_x$ függvények, melyekre $g(x) \in C_x$ $(x \in X)$ teljesül, így ha $f \in S^*$, akkor $f \in C$, tehát $S^* \subset C$.

S^*-on kétféle topológia van: az X^* gyenge* topológiájából kapott altér topológia, amiben bármely $f_0 \in S^*$ környezetbázisa

$$\begin{aligned} &V^*(f_0; x_1, \dots, x_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \\ &\quad = \left\{ f \in X^* \;\middle|\; f \in S^*,\ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n) \right\} \end{aligned} \tag{4.6.2}$$

alakú, ahol $x_i \in X,\ \varepsilon_i > 0,\ i = 1, \dots, n;\ n = 1, 2, \dots$.

A másik topológia a C topológiájából származó altér topológia. C topológiája definíció szerint a $p_x(g) = g(x)$ $(x \in X,\ g \in C)$ projekciók által indukált gyenge topológia, melyben bármely $g_0 \in C$ környezetbázisa (a Függelék 8.5.1 tétele alapján)

$$\begin{aligned} &U(g_0; p_{x_1}, \dots, p_{x_n}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \\ &\quad = \left\{ g \in C \;\middle|\; |p_{x_i}(g) - p_{x_i}(g_0)| < \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n) \right\} \\ &\quad = \left\{ g \in C \;\middle|\; |g(x_i) - g_0(x_i)| < \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n) \right\} \end{aligned}$$

alakú,ahol $x_i \in X$, $\varepsilon_i > 0$, $(i = 1, 2, \dots)$. Az ebből származó altér topológia S^*-on olyan, hogy benne minden $g_0 \in S^*$ környezetbázisa

$$\begin{aligned} &U(g_0; p_{x_1}, \dots, p_{x_n}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \cap S^* \\ &\quad = \left\{ g \in C \;\middle|\; g \in S^*,\ \ |g(x_i) - g_0(x_i)| < \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n) \right\} \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

alakú. Mivel (4.6.2) és (4.6.3) azonosak, így S^* *két topológiája azonos.* Ezért S^* kompaktságának igazolásához elegendő (a Függelék 8.7.1 tétele alapján) azt megmutatni, hogy S^* *zárt halmaz* C*-ben.*

Legyen $g_0 \in \overline{S^*}$, megmutatjuk, hogy $g_0 \in S^*$. Mivel $g_0 \in C$, így $g_0(x) \in C_x$, azaz $|g_0(x)| \le \|x\|$ $(x \in X)$, és így $\|g_0\| \le 1$. Ezért, ha megmutatjuk, hogy g_0 lineáris, akkor készen vagyunk. Legyen $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$, akkor

$$U(g_0; p_x, p_y, p_{x+y}; \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$= \left\{ g \in C \;\middle|\; |g(x) - g_0(x)| < \varepsilon,\ |g(y) - g_0(y)| < \varepsilon,\ |g(x+y) - g_0(x+y)| < \varepsilon \right\}$$

g_0 egy környezete C-ben, melynek van S^*-beli pontja, hiszen $g_0 \in \overline{S^*}$. Van tehát olyan $f \in S^*$ lineáris funkcionál, melyre

$$|f(x) - g_0(x)| < \varepsilon,\ |f(y) - g_0(y)| < \varepsilon,\ |f(x+y) - g_0(x+y)| < \varepsilon,$$

amiből

$$\begin{aligned} |g_0(x+y) & - g_0(x) - g_0(y)| \\ &= \big| g_0(x+y) - g_0(x) - g_0(y) - (f(x+y) - f(x) - f(y)) \big| \\ &\le |g_0(x+y) - f(x+y)| + |g_0(x) - f(x)| + |g_0(y) - f(y)| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Mivel ε tetszőleges pozitív szám, így $g_0(x+y) - g_0(x) - g_0(y) = 0$, azaz g_0 additív. Hasonlóan igazolható, hogy g_0 homogén, és ezzel a tételt igazoltuk. □

4.6.5. Tétel. *Bármely (teljes) lineáris normált tér izometrikus és izomorf valamely kompakt Hausdorff-téren értelmezett folytonos függvények terének egy (zárt) lineáris alterével.*

Bizonyítás. Legyen X egy lineáris normált tér, X^* a konjugált tere, S^* a konjugált tér zárt egységgömbje. A 4.6.4 tétel szerint S^* kompakt Hausdorff-tér a gyenge* topológiában. Legyen $\widehat{F_x}$ az $F_x(f) = f(x)$ $(x \in X,\ f \in X^*)$ összefüggéssel definiált F_x funkcionál S^*-ra való leszűkítése, és

$$\widehat{J}x = \widehat{F_x} \qquad (x \in X).$$

$\widehat{F_x}$ az S^*-on definiált folytonos függvény (mert F_x folytonos X^*-on a gyenge* topológiában), így $\widehat{F_x} \in C(S^*)$. Világos, hogy $\widehat{J}$ X-nek $C(S^*)$-ba való *izomorf leképezése*, (lásd a 4.5.2 tétel bizonyítását), melyre

$$\|x\| = \sup_{f \in S^*} \big| \widehat{F_x}(f) \big| = \big\| \widehat{F_x} \big\|_{C(S^*)}$$

is teljesül, mert

$$\left|\widehat{F_x}(f)\right| = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq \|x\|, \qquad \text{ha } f \in S^*,$$

így $\sup\limits_{f\in S^*} \left|\widehat{F_x}(f)\right| \leq \|x\|$. Ha $x = 0$, úgy itt egyenlőség van, ha $x = x_1 \neq 0$ rögzített, úgy a 4.4.1 tétel 2. következménye szerint van olyan $f_1 \in S^*$, melyre $f_1(x_1) = \|x_1\|$, így $\widehat{F_{x_1}}(f_1) = f_1(x_1) = \|x_1\|$, amiből $\sup\limits_{f\in S^*} \left|\widehat{F_x}(f)\right| = \|x\|$. Ezzel beláttuk, hogy $\widehat{J}$ *izometria.* Így X izomorf és izometrikus $C(S^*)$-nak az $X_1 = \widehat{J}(X)$ lineáris alterével. Ha X Banach-tér, úgy X_1 is az, ezért zárt altere $C(S^*)$-nak. $\square$

4.7. Speciális terek konjugált terei

Az alábbiakban megadjuk a legfontosabb speciális terek konjugált tereit.

4.7.1. Tétel. (Riesz F.) *Legyen $(X, \mathcal{S}, \mu)$ egy tetszőleges mértéktér $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ekkor $L_p(X, \mathcal{S}, \mu)^*$ és $L_q(X, \mathcal{S}, \mu)$ izometrikusan izomorf terek, ahol a megfelelő $f \in L_p(X, \mathcal{S}, \mu)^*$ és $y \in L_q(X, \mathcal{S}, \mu)$ elemeket az*

$$f(x) = \int\limits_X x(t)y(t)d\mu_t \qquad (x \in L_p) \tag{4.7.1}$$

összefüggés kapcsolja össze.

Ha $(X, \mathcal{S}, \mu)$ σ-véges mértéktér, úgy az előbbi eredmény $p = 1$ $(q = \infty)$ esetén is érvényes.

A bizonyítás megtalálható pl. [6]-ban.

Következmények.

1. *$1 \leq p < \infty$ esetén l_p^* és l_q (ahol $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$) terek izometrikusan izomorfak, és a megfelelő $f \in l_p^*$ és $y = (y_1, y_2, \dots) \in l_q$ elemeket a következő összefüggés kapcsolja össze:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \qquad \big(x = (x_1, x_2, \dots) \in l_p\big)$$

2. *$1 \leq p < \infty, n \in \mathbb{N}$ esetén $l_p^{(n)*}$ és $l_q^{(n)}$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ izometrikusan izomorfak, és a megfelelő $f \in l_p^{(n)*}$ és $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in l_q^{(n)}$ vektorokat a*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \big(x = (x_1, \dots, x_n) \in l_p^{(n)}\big)$$

összefüggés köti össze.

Könnyű meggyőződni arról, hogy a 2. következmény $p = \infty (q = 1)$ esetén is igaz.

3. $1 < p < \infty$ *mellett* $L_p(X, \mathcal{S}, \mu)$ *(és így* l_p, $l_p^{(n)}$ *is) reflexív.*

3. bizonyítása. Legyen J a L_p-nek L_p^{**}-ba való természetes leképezése, azaz legyen
$$(Jx)(f) = f(x) \qquad (f \in L_p^*,\ x \in L_p)$$
és legyen $F \in L_p^{**}$. Megmutatjuk, hogy van olyan $z \in L_p$, melyre $Jz = F$. Jelölje Φ a L_q-nak L_p^*-ra való (4.7.1) által adott izometrikus izomorf leképezését, akkor
$$(\Phi y)(x) = \int_X x(t)y(t)d\mu_t \qquad (x \in L_p,\ y \in L_q).$$
Ha $g = F \circ \Phi$ a két leképezés kompozíciója, úgy $g \in L_q^*$, ezért a 4.7.1 tétel miatt van olyan $z \in L_p$, melyre
$$g(y) = \int_X y(t)z(t)d\mu_t \qquad (y \in L_q).$$

Azt állítjuk, hogy $Jz = F$. Legyen $f \in L_p^*$ tetszőleges rögzített funkcionál, akkor a 4.7.1 tétel miatt van olyan $\tilde{y} \in L_q$
$$f(x) = \int_X x(t)\tilde{y}(t)d\mu_t \qquad (x \in L_p),$$
így speciálisan
$$f(z) = \int_X z(t)\tilde{y}(t)d\mu_t,$$
és Φ definíciója alapján $\Phi\tilde{y} = f$. Ezért
$$(Jz)(f) = f(z) = \int_X z(t)\tilde{y}(t)d\mu_t = g(\tilde{y}) = F(\Phi\tilde{y}) = F(f),$$
tehát J az L_p^{**}-ra képez le.

□

A $C(X)$ konjugált terére vonatkozó eredményt $X = [a, b]$ esetén szintén Riesz Frigyes találta 1909-ben.

4.7.1. Definíció. Jelölje $NBV[a,b]$ az $[a,b]$ zárt intervallumon definiált valós vagy komplex értékű korlátos változású y függvények halmazát, melyek az

$$y(a)=0, \qquad y(t)=y(t+0) \qquad (a<t<b)$$

feltételekkel normálva vannak. $NBV[a,b]$-beli függvények összeadását és a számmal való szorzását a szokásos módon (pontonként) definiáljuk, míg a norma

$$\|y\|=V(y),$$

az y függvény totális variációja $[a,b]$-n. $\diamondsuit$

Nem nehéz belátni, hogy $NBV[a,b]$ *lineáris normált tér* az előbbi műveletekkel és normával.

4.7.2. Tétel. *$C[a,b]^*$ és $NBV[a,b]$ izometrikusan izomorf terek és a megfelelő $f\in C[a,b]^*$ és $y\in NBV[a,b]$ elemeket a*

$$f(x)=\int_a^b x(t)dy(t) \qquad (x\in C[a,b]) \tag{4.7.2}$$

összefüggés kapcsolja össze (a (4.7.2) jobb oldalán Stieltjes integrál áll).

Bizonyítás. Legyen $f\in C[a,b]^*$. Mivel $C[a,b]$ tekinthető $L_\infty[a,b]$ alterének, alkalmazhatjuk a Hahn-Banach tételt. Jelölje F az $L_\infty[a,b]$-re kiterjesztett funkcionált, akkor

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \qquad x\in C[a,b],\\ \|F\| &= \|f\|. \end{aligned}$$

Legyen $z(t)=F\left(\chi_{[a,t]}\right)$, $t\in[a,b]$, ahol $\chi_{[a,t]}$ az $[a,t]$ intervallum karakterisztikus függvénye. $z(a)=0$, mert $\chi_{[a,a]}$ egyetlen ponttól eltekintve megegyezik az azonosan zérus függvénnyel, és így

$$\|z(a)\|_\infty \le \|F\|\cdot\|\chi_{[a,a]}\|_\infty=\|f\|\cdot 0=0.$$

Megmutatjuk, hogy z korlátos változású,

$$f(x)=\int_a^b x(t)dz(t), \qquad x\in C[a,b],$$

és

$$\|f\|\ge V(z).$$

Legyen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ az $[a, b]$ egy felosztása, és

$$\lambda_i = \operatorname{sgn}[z(t_i) - z(t_{i-1})] \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \big|z(t_i) - z(t_{i-1})\big| &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \big(z(t_i) - z(t_{i-1})\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \big(F(\chi_{[a,t_i]}) - F(\chi_{[a,t_{i-1}]})\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \big(F(\chi_{(t_{i-1},t_i]})\big) \\
&= F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{(t_{i-1},t_i]}\right) \le \|F\| = \|f\|,
\end{aligned}$$

mert $\big\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{(t_{i-1},t_i]}\big\|_\infty = 1$, ha a λ_i számok nem mind zérusok. De egyenlőtlenségünk $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ esetén is igaz, mert ekkor a baloldalon zérus áll. Így z korlátos változású, és

$$V(z) \le \|f\|. \tag{4.7.3}$$

Legyen most $x \in C[a, b]$ és definiáljuk az x_n függvényt az

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} x(t_i) \left(\chi_{[a,t_i]}(t) - \chi_{[a,t_{i-1}]}(t)\right)$$

egyenlőséggel, akkor

$$F(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x(t_i)\big(z(t_i) - z(t_{i-1})\big). \tag{4.7.4}$$

Ha $n \to \infty$ úgy, hogy $\max\limits_{1 \le i \le n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$, akkor a jobboldal határértéke a

$$\int_a^b x(t)dz(t)$$

Stieltjes integrál. x (egyenletes) folytonossága miatt

$$\sup_t |x_n(t) - x(t)| \le \max_i \sup_{t \in (t_{i-1},t_i]} |x(t_i) - x(t)| \to 0,$$

ha $n \to \infty$, innen $\|x_n - x\|_\infty \to 0$, ha $n \to \infty$ (ahol $\| \ \|_\infty$ az $L_\infty[a, b]$-beli normát jelöli), így F folytonossága miatt $F(x_n) \to F(x)$ $(n \to \infty)$. (4.7.4)-ből határátmenettel kapjuk, hogy

$$f(x) = F(x) = \int_a^b x(t)dz(t) \qquad (x \in C[a, b]). \tag{4.7.5}$$

Legyen

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t = a \\ z(t+0) & \text{ha } t \in (a,b) \\ z(b) & \text{ha } t = b. \end{cases} \tag{4.7.6}$$

Megjegyezzük, hogy y jóldefiniált, mert z korlátos változású, és így korlátos is, ezért $z(t+0) \in \mathbb{R}$, $t \in (a,b)$. Azt állítjuk, hogy y korlátos változású, $y \in NBV[a,b]$, és

$$V(y) \leq V(z) \tag{4.7.7}$$

$$\int_a^b x(t)dy(t) = \int_a^b x(t)dz(t) \qquad (x \in C[a,b]) \tag{4.7.8}$$

teljesül. (4.7.7) bizonyításához legyen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ az $[a,b]$ egy beosztása. Bármely $\varepsilon > 0$-hoz vannak olyan $c_i > t_i$ $(i = 1,\ldots,n-1)$ számok, hogy

$$\left|z(t_i+0) - z(c_i)\right| < \frac{\varepsilon}{2n},$$

amiből

$$\left|y(t_i)-y(t_{i-1})\right| = \left|z(t_i+0)-z(t_{i-1}+0)\right| \leq \left|z(c_i)-z(c_{i-1})\right|+\frac{\varepsilon}{n} \quad (i = 1,\ldots,n-1),$$

így $c_0 = a$, $c_n = b$-vel

$$\sum_{i=1}^n \left|y(t_i) - y(t_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^n \left|z(c_i) - z(c_{i-1})\right| + \varepsilon \leq V(z) + \varepsilon.$$

Innen látható, hogy y korlátos változású, és

$$V(y) \leq V(z) + \varepsilon,$$

azaz $\varepsilon \to 0$-val (4.7.7) adódik. (4.7.8) következik az alábbi, a Stieltjes integrálok elméletéből ismert (lásd pl. [21]) állításból:

Akkor és csakis akkor lesz adott korlátos változású u függvény és bármely $x \in C[a,b]$ folytonos függvény esetén

$$\int_a^b x(t)du(t) = 0,$$

ha u-nak az a, b végpontokban, továbbá u minden (a,b)-beli folytonossági pontjában ugyanaz az értéke.

Mivel z folytonossági pontjaiban

$$y(t) - z(t) = 0,$$

továbbá $y(a) - z(a) = y(b) - z(b) = 0$, így (4.7.8) is teljesül.
Meg kell még mutatni, hogy $y \in NBV[a,b]$, azaz $y(t+0) = y(t)$, ha $t \in (a,b)$. Ha z monoton növekvő függvény, akkor y is az, és $y(t+0) = z(t+0) = y(t)\ \ t \in (a,b)$. Az általános eset erre visszavezethető azáltal, hogy z-t két monoton növekvő függvény különbségeként írjuk fel (ez lehetséges, mivel z korlátos változásu).

(4.7.3), (4.7.5), (4.7.7), (4.7.8) miatt

$$f(x) = \int_a^b x(t)dz(t) = \int_a^b x(t)dy(t) \qquad (x \in C[a,b]),$$

$$V(y) \le V(z) \le \|f\|.$$

Továbbá

$$\left|f(x)\right| = \left|\int_a^b x(t)dy(t)\right| \le \sup_t \left|x(t)\right| \cdot V(y) = V(y)\|x\|,$$

amiből $\|f\| \le V(y)$, így $\|f\| = V(y) = \|y\|_{NBV[a,b]}$.

Ezzel beláttuk, hogy minden $f \in C[a,b]^*$ felírható (4.7.2) alakban valamely $y \in NBV[a,b]$-vel. f egyértelműen meghatározza az y függvényt (4.7.2) által, mert ha $y_1 \in NBV[a,b]$ olyan, hogy

$$f(x) = \int_a^b x(t)dy(t) = \int_a^b x(t)dy_1(t) \qquad (x \in C[a,b]),$$

akkor

$$\int_a^b x(t)d(y-y_1)(t) = 0 \qquad (x \in C[a,b]),$$

így $0 = y(a) - y_1(a) = y(b) - y_1(b) = y(t) - y_1(t)$, ahol $t \in (a,b)$ folytonossági pontja $y - y_1$-nek. De akkor $y(t+0) = y_1(t+0)$ bármely $t \in (a,b)$ esetén (mert a folytonossági pontok sűrű halmazt alkotnak (a,b)-ben), így $y(t) = y_1(t)$, $t \in [a,b]$.

A (4.7.2) által definiált $f \to y$ leképezés izometria, mely $NBV[a,b]$-re képez le (mert bármely $y \in NBV[a,b]$-t véve a (4.7.2) formula a Stieltjes integrál tulajdonságai miatt $C[a,b]^*$-beli funkcionált ad, melynek képe éppen y) és izomorfizmus is, mert ha $f \to y$, $f_1 \to y_1$, úgy a Stieltjes integrál tulajdonságai miatt $f + f_1 \to y + y_1$ és $\lambda f \to \lambda y_1, \lambda \in \mathbb{K}$. $\square$

Riesz tételét a $C(X)$ tér esetére Kakutani általánosította 1941-ben. A tétel kimondásához szükségünk van néhány fogalomra.

4.7.2. Definíció. Legyen X egy kompakt Hausdorff-tér. Az X nyílt halmazai által generált $\mathcal{B}$ σ-algebrát *Borel-féle σ-algebrá*nak nevezzük, $\mathcal{B}$ halmazait pedig *Borel-halmazok*nak mondjuk. A $\mathcal{B}$-n definiált komplex értékű μ függvényt *reguláris komplex Borel-mérték*nek nevezzük X-en, ha μ *megszámlálhatóan additív*, azaz bármely páronként diszjunkt $\mathcal{B}$-beli halmazokból álló $E_1, E_2, \dots$ halmazsorozat esetén

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i,$$

és μ *reguláris*, azaz bármely $E \in \mathcal{B}$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan F kompakt és G nyílt halmaz, hogy $F \subset E \subset G$, és bármely $A \subset G \cap F'$, $A \in \mathcal{B}$ esetén $|\mu A| < \varepsilon$. $\diamondsuit$

Megjegyezzük, hogy az additivitási egyenletben a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu E_i$ sor konvergenciája is része a feltételnek, nem úgy, mint nemnegatív mértékeknél, ahol a sor ∞-hez is konvergálhat. Mivel $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ a halmazsorozat átrendezésére érzéketlen, így a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu E_i$ sor bármely átrendezése is konvergens és összege $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right)$. Ezért $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu E_i$ abszolút konvergens kell hogy legyen.

4.7.3. Definíció. *Az* $\mathrm{rca}(X)$ *teret az* X *kompakt* Hausdorff-téren értelmezett összes reguláris komplex Borel-mértékek alkotják. A műveletek és a norma definíciója

$$\begin{aligned}
(\mu + \nu)E &= \mu E + \nu E \\
(\lambda\mu)E &= \lambda\mu E \\
\|\mu\| &= |\mu| X \qquad\qquad (E \in \mathcal{B})
\end{aligned}$$

bármely $\mu, \nu \in \mathrm{rca}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén. Itt $|\mu|$ a μ *mérték totális variációja:* bármely $E \in \mathcal{B}$ esetén

$$|\mu| E = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\mu E_i| \right\}$$

ahol a szuprémum mindazon $E_1, \dots, E_n$, $(n = 1, 2, \dots)$ halmazokra veendő, melyekre $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \subset E$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{B}$, $n = 1, 2, \dots$ teljesül. $\diamondsuit$

Belátható, hogy $|\mu|$ pozitív mérték $\mathcal{B}$-n, és $|\mu| X < \infty$. Továbbá $\mathrm{rca}(X)$ lineáris normált tér a fenti műveletekkel és normával.

4.7.3. Tétel. *Legyen X egy kompakt Hausdorff-féle topológikus tér, akkor $C(X)^*$ és $\mathrm{rca}(X)$ izometrikusan izomorf terek, és a megfelelő $f \in C(X)^*$ és*

$\mu \in \operatorname{rca}(X)$ elemek között fennáll az

$$f(x) = \int_X x(t)d\mu_t \qquad (x \in C(X))$$

összefüggés.

A bizonyítás megtalálható [6]-ban.

4.7.4. Tétel. *c^* és l_1 izometrikusan izomorf terek, és a megfelelő $f \in c^*$ és $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots) \in l_1$ vektorokat a*

$$f(x) = \eta_0 \lim_{n\to\infty} \xi_n + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i \qquad \big(x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c\big) \tag{4.7.9}$$

összefüggés kapcsolja össze.

Bizonyítás. A **3.5** szakaszban láttuk, hogy az

$$e_0 = (1, 1, \dots) \quad \text{és} \quad e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots) \quad (i \in \mathbb{N})$$

vektorok Schauder-bázist alkotnak c-ben, és bármely $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c$ egyértelműen felírható

$$x = \alpha e_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \alpha) e_i \tag{4.7.10}$$

alakban, ahol $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

Legyen $f \in c^*$, akkor (4.7.10) felhasználásával

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha f(e_0) + f\left(\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \alpha) e_i\right) = \alpha f(e_0) + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \alpha) f(e_i) \\ &= \alpha f(e_i) + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \alpha) \eta_i, \end{aligned}$$

ahol $\eta_i = f(e_i)$ $(i = 1, 2, \dots)$. Megmutatjuk, hogy $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\eta_i| < \infty$. Az $x_n =$ $= (\operatorname{sgn} \eta_1, \operatorname{sgn} \eta_2, \dots, \operatorname{sgn} \eta_n, 0, 0, \dots) \in c$ helyettesítéssel

$$f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \operatorname{sgn} \eta_i = \sum_{i=1}^{n} |\eta_i| \le \|f\| \cdot \|x_n\|.$$

De $\|x_n\| = 1$, hacsak $\eta_1, \dots, \eta_n$ nem mind zérusok, így ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} |\eta_i| \le \|f\|,$$

és ez akkor is igaz, ha $\eta_1, \dots, \eta_n$ mind zérusok. Ebből következik, hogy $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\eta_i| \le \|f\| < \infty$. Ezért $f(x)$-et átírhatjuk a következőképpen:

$$f(x) = \alpha f(e_0) + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \alpha)\eta_i = \alpha \left(f(e_0) - \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i = \alpha\eta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i,$$

ahol $\eta_0 = f(e_0) - \sum\limits_{i=1}^{\infty} \eta_i = f(e_0) - \sum\limits_{i=1}^{\infty} f(e_i)$. Ezzel beláttuk, hogy $f(x)$ (4.7.9) alakú. $\|f\|$ kiszámítása céljából helyettesítsünk itt

$$\tilde{x}_n = (\operatorname{sgn} \eta_1, \dots, \operatorname{sgn} \eta_n, \operatorname{sgn} \eta_0, \operatorname{sgn} \eta_0, \dots) \quad (n \in \mathbb{N})$$

-t. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $\tilde{x}_n$ sorozat határértéke $\operatorname{sgn} \eta_0$, így

$$f(\tilde{x}_n) = \eta_0 \operatorname{sgn} \eta_0 + \sum_{i=1}^{n} \eta_i \operatorname{sgn} \eta_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} \eta_i \operatorname{sgn} \eta_0 = |\eta_0| + \sum_{i=1}^{n} |\eta_i| + \operatorname{sgn} \eta_0 \sum_{i=n+1}^{\infty} \eta_i,$$

$$\bigl|f(\tilde{x}_n)\bigr| = \left| \sum_{i=0}^{n} |\eta_i| + \operatorname{sgn} \eta_0 \sum_{i=n+1}^{\infty} \eta_i \right| \le \|f\| \cdot \|\tilde{x}_n\|.$$

Ha $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots)$ nem zérusvektor, akkor elég nagy n-re $\|\tilde{x}_n\| = 1$, és így

$$\left| \sum_{i=0}^{n} |\eta_i| + \operatorname{sgn} \eta_0 \sum_{i=n+1}^{\infty} \eta_i \right| \le \|f\|,$$

és ez akkor is igaz, ha η zérusvektor. Innen $n \to \infty$-nel, felhasználva, hogy $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \eta_i \to 0$ ha $n \to \infty$, kapjuk, hogy

$$\|\eta\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |\eta_i| \le \|f\|.$$

Másrészt bármely $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c$-re, felhasználva, hogy

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \xi_n \le \sup_k |\xi_k|,$$

kapjuk, hogy

$$\bigl|f(x)\bigr| \le \sup_k |\xi_k| \sum_{i=0}^{\infty} |\eta_i| = \|\eta\|_1 \cdot \|x\|,$$

amiből $\|f\| \le \|\eta\|_1$, így $\|f\| = \|\eta\|_1$.

Könnyű belátni, hogy bármely $f \in c^*$-hoz egyetlen olyan $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots) \in l_1$ van, mellyel (4.7.9) teljesül, továbbá, hogy bármely $\eta \in l_1$ esetén (4.7.9) egy c^*-beli funkcionált definiál. Mivel $\eta = \bigl(f(e_0) - \sum\limits_{i=1}^{\infty} f(e_i), f(e_1), f(e_2), \dots\bigr)$, így az $f \to \eta$ leképezés műveletttartó is, amivel a tételt bebizonyítottuk. □

5. fejezet

A lineáris analízis három főtétele

5.1. A Hahn-Banach tétel

A lineáris analízis főtételeinek a következő tételeket szokás nevezni: A Hahn-Banach tétel, az egyenletes korlátosság tétele, a nyílt leképezések tétele. A Hahn-Banach tétel két változatával (2.2.1 és 4.4.1 tételek) már korábban megismerkedtünk. E tételek lineáris funkcionálok kiterjesztésére vonatkoztak. Most megismerkedünk a tétel úgynevezett *elválasztási alak*jával.

5.1.1. Tétel. (Hahn-Banach tétel elválasztási alakja) I. *Legyenek A, B nem üres diszjunkt konvex halmazok az X valós lineáris topológikus térben. Ha A-nak van belső pontja, akkor létezik olyan F nem zérus folytonos lineáris funkcionál X-en és $c \in \mathbb{R}$ konstans, hogy*

$$F(a) \leq c \leq F(b) \qquad (a \in A,\ b \in B). \tag{5.1.1}$$

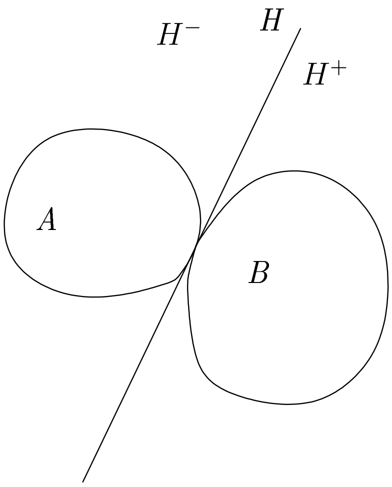
II. *Ha A, B nem üres diszjunkt konvex halmazok az X lokálisan konvex lineáris topológikus térben, A kompakt, B zárt, akkor van olyan F nem zérus folytonos lineáris funkcionál X-en és $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy*

$$F(a) \leq c_1 < c_2 \leq F(b) \qquad (a \in A,\ b \in B). \tag{5.1.2}$$

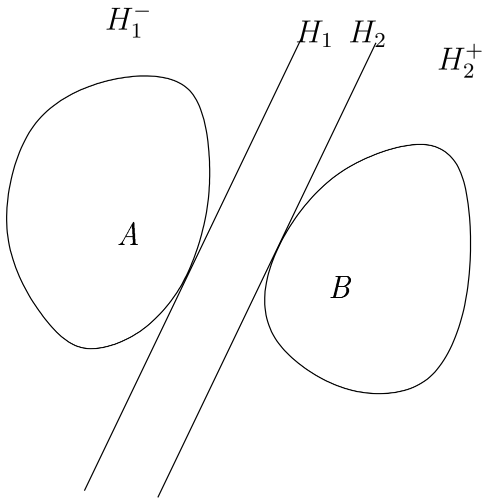
Megjegyzések:

1. Ha (5.1.1) illetve (5.1.2) teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az *F funkcionál elválasztja* illetve *erősen elválasztja az A és B halmazokat.* A tétel geometriai jelentése a következő: nevezzük a $H = \{x \in X \mid F(x) = c\}$ halmazt (az F és c által meghatározott) hipersíknak, a $H^+ = \{x \in X \mid F(x) \geq c\}$ és $H^- = \{x \in X \mid F(x) \leq c\}$ halmazokat a H sík jobb- és baloldalának. Két hipersíkot nevezzünk párhuzamosnak, ha ugyanaz az F funkcionál határozza meg őket. (5.1.1) éppen azt jelenti, hogy van olyan hipersík,

melynek B a jobboldalán, A a baloldalán fekszik (ld. 3. ábra). (5.1.2) azt fejezi ki, hogy van két különböző párhuzamos hipersík, H_1 és H_2 úgy, hogy az A halmaz H_1 baloldalán fekszik, H_2 a H_1 jobboldalán fekszik és a B halmaz H_2 jobboldalán fekszik (lásd 4. ábra).



3. ábra



4. ábra

2. Az 5.1.1 tétel komplex lineáris topológikus terek esetén is érvényes, de ekkor (5.1.1), (5.1.2)-ben F helyett $\operatorname{Re} F$-et kell írni.

Bizonyítás. (5.1.1 Tétel) I. Legyen $a_0 \in A^0$, $b_0 \in B$, $C = A - a_0 - (B - b_0) = A - B + b_0 - a_0 = A - B + x_0$, ahol $x_0 = b_0 - a_0$. C konvex halmaz, mert bármely $b \in B$ esetén $A - b + x_0$ konvex (lévén a konvex A eltoltja), és

$$C = \bigcup_{b \in B} (A - b + x_0).$$

C-nek a nulla belső pontja, mert ha U a_0-nak A-ban lévő környezete, akkor

$$U - a_0 \subset A - a_0 \subset A - B + b_0 - a_0 = C.$$

Ebből következik, a 3.1.3 tétel (6) állítása alapján, hogy C elnyelő halmaz. Legyen p a C halmaz Minkowski funkcionálja:

$$p(x) = \inf \left\{ \lambda \mid \lambda > 0,\ \frac{x}{\lambda} \in C \right\} \qquad (x \in X).$$

Mivel C konvex, így p *szubadditív és pozitív homogén* (ez a 3.3.1 tétel utáni megjegyzésből következik).
$A \cap B = \emptyset$ miatt $x_0 \notin C$, így

$$p(x_0) = \inf \left\{ \lambda \mid \lambda > 0,\ \frac{x_0}{\lambda} \in C \right\} \geq 1.$$

Legyen $X_0 = [x_0] = \{tx_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$ és

$$f(tx_0) = t \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Világos, hogy $f : X_0 \to \mathbb{R}$ nem zérus lineáris funkcionál X_0-on és

$$f(u) \le p(u) \qquad (u \in X_0),$$

mert $t \ge 0$ esetén

$$f(tx_0) = t \le tp(x_0) = p(tx_0),$$

míg $t < 0$ mellett

$$f(tx_0) = t < 0 \le p(tx_0).$$

A Hahn-Banach tétel (2.2.1 tétel) szerint van olyan $F : X \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, melyre

$$F(u) = f(u) \qquad (u \in X_0),$$

$$F(x) \le p(x) \qquad (x \in X)$$

teljesül. Innen $F(x) \le p(x) \le 1$, ha $x \in C$, ezért $F(x) \ge -1$, ha $x \in -C$, azaz

$$|F(x)| \le 1 \quad \text{ha} \quad x \in C \cap (-C).$$

A 3.1.3 tétel (7) állítása alapján C tartalmazza nullának egy V szimmetrikus környezetét is, így $V \subset C \cap (-C)$ és

$$|F(x)| \le 1 \quad \text{ha} \quad x \in V.$$

Ennek segítségével megmutatjuk, hogy F *folytonos.* Bármely $\varepsilon > 0$ mellett

$$|F(\varepsilon x)| \le \varepsilon \quad \text{ha} \quad x \in V, \qquad \text{azaz } |F(x)| \le \varepsilon, \quad \text{ha} \quad x \in \varepsilon V,$$

amiből bármely $x_0 \in X$ mellett

$$\big|F(x) - F(x_0)\big| = \big|F(x - x_0)\big| < \varepsilon \text{ ha } x \in x_0 + \varepsilon V,$$

ami éppen F x_0-beli folytonosságát jelenti.

Tetszőleges $a \in A$, $b \in B$ esetén

$$F(a)-F(b)+1 = F(a)-F(b)+F(x_0) = F(a-b+x_0) \le p(a-b+x_0) \le 1, \quad (5.1.3)$$

mert $1 = f(x_0) = F(x_0)$ és $a - b + x_0 \in C$, amiből $F(a) \le F(b)$.
Innen már következik, hogy van olyan $c \in \mathbb{R}$ mellyel (5.1.1) teljesül.

II. Először *megmutatjuk, hogy ha A kompakt, B zárt halmaz egy X topológikus vektortérben és $A \cap B = \emptyset$, akkor van nullának olyan V környezete, hogy*

$$(A + V) \cap (B + V) = \emptyset. \qquad (5.1.4)$$

Legyen W nulla egy környezete, akkor van olyan U környezete nullának, melyre $U+U\subset W$, $U=-U$ teljesül.
Ugyanis a $0+0=0$ egyenlőségből, az összeadás folytonossága miatt következik, hogy a nullának vannak olyan $V_1,\ V_2$ környezetei, melyekre $V_1+V_2\subset W$. Legyen

$$U=V_1\cap V_2\cap(-V_1)\cap(-V_2),$$

akkor U a kívánt környezete nullának. W helyett U-ra alkalmazva a fentieket kapjuk, hogy van nullának olyan U_1 környezete, melyre $U_1=-U_1$ és $U_1+U_1+U_1+U_1\subset W$, speciálisan $0\in U_1$ miatt

$$U_1+U_1+U_1\subset W \tag{5.1.5}$$

teljesül. Ha $x\in A$, úgy $B'-x$ nulla egy környezete, ezért (5.1.5) alapján van olyan V_x környezete nullának, melyre

$$V_x=-V_x \quad \text{és } V_x+V_x+V_x\subset B'-x,$$

amiből

$$(x+V_x+V_x+V_x)\cap B=\emptyset,\ \text{vagy}\ (x+V_x+V_x)\cap(B+V_x)=\emptyset. \tag{5.1.6}$$

Mivel $\bigcup\limits_{x\in A}(x+V_x)$ nyílt lefedése A-nak, így A kompaktsága miatt létezik véges sok $x_1,\dots,x_n\in A$ pont úgy, hogy

$$A\subset(x_1+V_{x_1})\cup(x_2+V_{x_2})\cup\cdots\cup(x_n+V_{x_n}).$$

Legyen $V=\bigcap\limits_{i=1}^{n}V_{x_i}$, akkor

$$A+V\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+V_{x_i}+V)\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+V_{x_i}+V_{x_i}).$$

(5.1.6) miatt $(x_i+V_{x_i}+V_{x_i})\cap(B+V)=\emptyset$, így (5.1.4) teljesül.

Térjünk most vissza a II. igazolásához. Mivel most X lokálisan konvex, így van olyan V konvex környezete nullának, melyre (5.1.4) miatt

$$(A+V)\cap B\subset(A+V)\cap(B+V)=\emptyset$$

teljesül. Mivel $A+V$ nyílt konvex halmaz, alkalmazhatjuk az I. állítást. Legyen $c_2=\inf\limits_{b\in B}F(b)$, akkor

$$F(a+v)\le c_2\le F(b) \qquad (a\in A,\ b\in B,\ v\in V).$$

Nem nehéz belátni, hogy F nyílt halmazt $\mathbb{R}$ nyílt halmazába visz át, ezért $F(A+V)\subset(-\infty,c_2)$. De $F(A)$ kompakt részhalmaza $(-\infty,c_2)$-nek (mivel kompakt halmaz folytonos képe kompakt), így van olyan $c_1<c_2$, hogy $F(a)\le c_1$, ha $a\in A$.

□

5.2. Az egyenletes korlátosság tétele

5.2.1. Tétel. (Az egyenletes korlátosság tétele) *Legyen X egy Banach-tér, Y egy lineáris normált tér, $A_\alpha \in \mathcal{B}(X,Y)$, $(\alpha \in \Lambda)$. Akkor az alábbi* (1), (2) *állítások közül pontosan egy teljesül:*

(1) *van olyan M konstans, hogy $\|A_\alpha\| \leq M$ $(\alpha \in \Lambda)$,*

(2) *van olyan $H \subset X$, X-ben sűrű G_δ halmaz, hogy*

$$\sup_{\alpha\in\Lambda} \|A_\alpha x\| = \infty \quad \textit{ha } x \in H.$$

Megjegyzés. A tétel állítása szemléletesen azt jelenti, hogy vagy van olyan Y-beli G gömb (0 középponttal és M sugárral), hogy mindegyik A_α az X egységgömbjét G-be képezi le, vagy van olyan $x \in X$ (sőt egy sűrű G_δ halmazból választhatjuk x-et), hogy egyetlen Y-beli gömb se tartalmazza $A_\alpha x$-et minden $(\alpha \in \Lambda)$ esetén.

Bizonyítás. Legyen $\varphi(x) = \sup\limits_{\alpha\in\Lambda} \|A_\alpha x\|$ $(x \in X)$, és

$$V_k = \{x \in X \mid \varphi(x) > k\} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

V_k nyílt halmaz, mert ha $x \in V_k$, akkor $\varphi(x) = \sup\limits_{\alpha\in\Lambda} \|A_\alpha x\| > k$, így van olyan α_0 index, hogy $\|A_{\alpha_0} x\| > k$. Mivel az $x \mapsto \|A_{\alpha_0} x\|$ függvény folytonos, így x egy U környezetéből vett y-okra k-nál nagyobb lesz a függvényérték: $\|A_{\alpha_0} y\| > k$, ha $y \in U$, de akkor

$$\varphi(y) = \sup_{\alpha\in\Lambda} \|A_\alpha y\| \geq \|A_{\alpha_0} y\| > k, \qquad \text{azaz } y \in V_k.$$

Így $U \subset V_k$, tehát V_k nyílt.

Ha van olyan N index, hogy V_N nem sűrű X-ben, akkor (1) teljesül. Ugyanis, ekkor van olyan x_0 és olyan x_0 körüli $\delta > 0$ sugarú zárt $S = S(x_0, \delta)$ gömb, hogy $S \cap V_N = \emptyset$, azaz $\|x' - x_0\| < \delta$ esetén $\varphi(x') \leq N$, amiből $\|A_\alpha x_0\| \leq N$, $\|A_\alpha x'\| \leq N$ $(\alpha \in \Lambda)$. Innen $y = x' - x_0$-lal

$$\|A_\alpha y\| \leq \|A_\alpha x'\| + \|A_\alpha x_0\| \leq 2N, \quad \text{ha } \|y\| \leq \delta.$$

Ha $x \neq 0$ tetszőleges eleme X-nek, úgy $\dfrac{\delta x}{\|x\|}$-ra az előző egyenlőtlenséget alkalmazhatjuk, tehát

$$\|A_\alpha x\| = \left\| \frac{\|x\|}{\delta} A_\alpha\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right)\right\| = \frac{\|x\|}{\delta}\left\|A_\alpha\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \frac{2N}{\delta}\|x\|.$$

Ez $x = 0$-ra is igaz, így az $M = \dfrac{2N}{\delta}$ jelöléssel

$$\|A_\alpha x\| \le M\|x\| \qquad (x \in X, \alpha \in \Lambda),$$

amiből

$$\|A_\alpha\| \le M \qquad (\alpha \in \Lambda).$$

Ha nincs olyan k index, melyre V_k nem sűrű, úgy (2) teljesül. Ekkor $k \in \mathbb{N}$ esetén V_k nyílt X-ben sűrű halmaz, így Baire-tétele alapján

$$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k \qquad X\text{-ben sűrű } G_\delta \text{ halmaz.}$$

Ha $x \in H$, úgy $\varphi(x) > k\,(k = 1, 2, \dots)$, így

$$\sup_{\alpha\in\Lambda} \|A_\alpha x\| = \varphi(x) = \infty.$$

Beláttuk, hogy (1) és (2) egyike mindig teljesül. Világos, hogy (1) és (2) egyszerre nem teljesülhetnek, mert (1)-ből $\sup\limits_{\alpha\in\Lambda} \|A_\alpha x\| \le M$ következne, ami ellentmond (2)-nek.

□

Következmények. *Tegyük fel, hogy az 5.2.1 tétel feltételei teljesülnek, és* $\Lambda = \mathbb{N}$.

1. Ha $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| < \infty \quad (x \in X)$, akkor $\|A_n\| \le M$, $(n \in \mathbb{N})$.

2. Ha $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| = \infty$, akkor létezik olyan $x_0 \in X$, melyre

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x_0\| = \infty,$$

   (ez a szingularitások megkeresésének elve).

3. Ha $A_n^{(k)} \in \mathcal{B}(X, Y)$ és $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n^{(k)}\| = \infty$ $(k \in \mathbb{N})$, akkor létezik olyan $x_0 \in X$, hogy

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n^{(k)} x_0\| = \infty \qquad (k \in \mathbb{N})$$

   (ez a szingularitások torlódásának az elve).

3. bizonyítása. Fix k esetén $A_n^{(k)}$-ra az egyenletes korlátosság tételét alkalmazva kapjuk, hogy van olyan H_k az X-ben sűrű G_δ halmaz, hogy

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n^{(k)}x\| = \infty \qquad \text{ha } x \in H_k.$$

Legyen $H = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H_k$, akkor H is X-ben sűrű G_δ halmaz (a Baire-tétel miatt), így H nem üres, és minden $x_0 \in H$-ra

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n^{(k)}x_0\| = \infty \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

□

Az egyenletes korlátosság tételét felhasználva szükséges és elégséges feltételt nyerhetünk operátorsorozat pontonkénti konvergenciájára.

5.2.2. Tétel. (Banach-Steinhaus I. tétele) *Legyenek X, Y Banach-terek. Ahhoz, hogy az $A_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ $(n \in \mathbb{N})$ operátorsorozat pontonként konvergáljon (azaz bármely $x \in X$ esetén $\{A_n x\}$ konvergens legyen) szükséges és elegendő, hogy a következő két feltétel teljesüljön:*

1. $\|A_n\| \le M \quad (n \in \mathbb{N})$ *valamely M konstans esetén,*

2. $\{A_n x\}$ *Cauchy-sorozat bármely $x \in S$ mellett, ahol $S \subset X$ egy zárt rendszer X-ben (azaz $\overline{[S]} = X$).*

Bizonyítás. *Szükségesség.* Ha a $\{A_n x\}$ sorozat konvergens, úgy korlátos, tehát $\sup\limits_n \|A_n x\| < \infty$. Az egyenletes korlátosság tétele miatt *1.* teljesül, míg *2.* teljesülése nyílvánvaló.
Elegendőség. $\{A_n x'\}$ Cauchy-sorozat minden $x' \in [S]$ esetén, mert ha $x' = \sum\limits_{k=1}^{s} \lambda_k x_k$ $(x_k \in S)$, akkor

$$\|A_n x' - A_m x'\| \le \sum_{k=1}^{s} |\lambda_k| \cdot \|A_n x_k - A_m x_k\|.$$

Mivel $\{A_n x_k\}$ minden fix $k = 1, \dots, s$ esetén Cauchy-sorozat, így bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N(\varepsilon, x')$, hogy a jobboldali összeg minden tagja $< \frac{\varepsilon}{s}$, ha $n, m > N(\varepsilon, x')$. De ekkor

$$\|A_n x' - A_m x'\| < \varepsilon \qquad \text{ha } n, m > N(\varepsilon, x').$$

Megmutatjuk, hogy $\{A_n x\}$ *bármely* $x \in X$ *esetén Cauchy-sorozat.* Ebből Y teljessége miatt következik $\{A_n x\}$ konvergenciája, ha $x \in X$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, $x \in X$ és válasszuk $x' \in [S]$-et úgy, hogy $\|x - x'\| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}\|A_n x - A_m x\| &= \|A_n x - A_n x'\| + \|A_n x' - A_m x'\| + \|A_m x' - A_m x\| \\ &\leq (\|A_n\| + \|A_m\|)\, \|x - x'\| + \|A_n x' - A_m x'\| \\ &\leq 2M\varepsilon + \|A_n x' - A_m x'\| < (2M+1)\varepsilon,\end{aligned}$$

ha $n, m > N(\varepsilon, x') = N_1(\varepsilon, x)$, s ez azt jelenti, hogy $\{A_n x\}$ Cauchy-sorozat. □

Megjegyzés. Ha X, Y *Banach-terek,* $A_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ $(n \in \mathbb{N})$, *és bármely* $x \in X$ *esetén* $\{A_n x\}$ *konvergens, akkor az*

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x \qquad (x \in X)$$

összefüggéssel definiált A *operátor is* $\mathcal{B}(X,Y)$*-ben van, és*

$$\|A\| \leq \liminf \|A_n\|. \tag{5.2.1}$$

Az A operátor linearitása a limesz tulajdonságai és A_n linearitása miatt világos. Az

$$\|A_n x\| \leq \|A_n\| \cdot \|x\| \qquad (x \in X,\ n \in \mathbb{N})$$

egyenlőtlenség mindkét oldalának limesz inferiorját véve

$$\|Ax\| \leq \big(\liminf \|A_n\|\big) \cdot \|x\|.$$

A Banach-Steinhaus I. tétel miatt $\|A_n\| \leq M$, így $\liminf \|A_n\| < \infty$, amiből A korlátossága és az (5.2.1) egyenlőtlenség következik.

5.2.3. Tétel. (Banach-Steinhaus II. tétele) *Legyen* X *egy Banach-tér,* Y *egy lineáris normált tér,* $A, A_n \in \mathcal{B}(X,Y)$, $(n \in \mathbb{N})$. *Ahhoz, hogy az* $\{A_n\}$ *operátorsorozat pontonként konvergáljon* A*-hoz, azaz*

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax \qquad (x \in X)$$

teljesüljön, szükséges és elegendő a következő két feltétel:

1. $\|A_n\| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ *valamely* M *konstans esetén,*

2. $A_n x \to Ax$, *ha* $n \to \infty$ *bármely* $x \in S$ *mellett, ahol* $S \subset X$ *egy zárt rendszer* X*-ben (azaz* $\overline{[S]} = X$*).*

Bizonyítás. *Szükségesség. 1.* az egyenletes korlátosság tételéből következik, *2.* nyilvánvaló.

Elegendőség. Könnyű belátni, hogy *2.*-ből következik az $A_n x' \to Ax'$ $(n \to \infty)$ konvergencia $x' \in [S]$-re is. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, $x \in X$ és válasszuk $x' \in [S]$-et úgy, hogy $\|x - x'\| < \varepsilon$, akkor

$$\begin{aligned} \|A_n x - Ax\| &\le \|A_n x - A_n x'\| + \|A_n x' - Ax\| + \|Ax' - Ax\| \\ &\le \big(\|A_n\| + \|A\|\big)\|x - x'\| + \|A_n x' - Ax'\| \\ &\le \big(M + \|A\|\big)\varepsilon + \|A_n x' - Ax'\|. \end{aligned}$$

De

$$\|A_n x' - Ax'\| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon, x'),$$

így

$$\|A_n x - Ax\| < \big(M + \|A\| + 1\big)\varepsilon \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon, x') = N_1(\varepsilon, x),$$

amiből következik, hogy $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x \quad (x \in X)$. □

5.3. Az egyenletes korlátosság tételének alkalmazásai

5.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ olyan (komplex) számsorozat, hogy bármely $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c$ esetén a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k$ sor konvergens. Ekkor $\eta \in l_1$ (azaz $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\eta_k| < \infty$), és $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c)$ lineáris korlátos funkcionál c-n, melynek normája*

$$\|f\| = \|\eta\|_1.$$

Bizonyítás. Legyen

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \xi_k \qquad \big(x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c,\ n \in \mathbb{N}\big).$$

Könnyen belátható (direkt úton, vagy a c lineáris funkcionáljainak általános alakját felhasználva, ld. 4.7.9 képletet), hogy f_n lineáris korlátos funkcionál, és

$$\|f_n\| = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|.$$

A feltétel szerint $\{f_n(x)\}$ bármely $x \in c$ esetén konvergens, így a Banach-Steinhaus I. tétel miatt van olyan M konstans, hogy

$$\|f_n\| \leq M \quad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$\sum_{k=1}^{n} |\eta_k| \leq M \quad (n \in \mathbb{N}),$$

amiből következik, hogy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\eta_k| < \infty$, azaz $\eta \in l_1$. A tétel többi állítása a 4.7.4 tételből adódik.

□

5.3.1. Definíció. Legyen $\alpha = (\alpha_{ik})$ $(i, k \in \mathbb{N})$ egy végtelen komplex elemű mátrix. Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_n\}$ *komplex számsorozat limitálható az α mátrixszal,* ha

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k$ bármely $i \in \mathbb{N}$ esetén konvergens,

2. a $\sigma_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k$ $(i \in \mathbb{N})$ sorozat $i \to \infty$ esetén konvergens.

A $\sigma = \lim\limits_{i\to\infty} \sigma_i$ számot a $\{\xi_n\}$ sorozat α-limeszének nevezzük, és $\alpha - \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$-nel jelöljük. ♢

Példa. Ha

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix},$$

akkor $\sigma_i = \frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i}{i}$. Ezen α mátrixhoz tartozó limitálási eljárást *Cesaro-féle limitálási eljárás*nak nevezzük.

5.3.2. Definíció. Az α mátrixot (illetve a hozzá tartozó limitálási eljárást) *permanens*nek nevezzük, ha bármely $x = (\xi_1, \xi_2 \dots) \in c$ konvergens sorozat esetén $\alpha - \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$ létezik és $\{\xi_n\}$ közönséges határértékével egyenlő:

$$\alpha - \lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \xi_n.$$

♢

Az alábbi tétel, mely Toeplitz-től származik, jellemzi a permanens mátrixokat.

5.3.2. Tétel. *Az $\alpha = (\alpha_{ik})$ $(i, k \in \mathbb{N})$ mátrix akkor és csakis akkor permanens, ha teljesül a következő három feltétel:*

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}| \leq M \quad (i \in \mathbb{N})$ *valamely M konstanssal,*

2. $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} = 1,$

3. $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_{ik} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$

Bizonyítás. α akkor és csakis akkor permanens, ha bármely $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c$ esetén

I. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k$ minden $i \in \mathbb{N}$-re konvergens,

II. $\sigma_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k \to \sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$, ha $i \to \infty$.

Az 5.3.1 tétel alapján I. pontosan azt jelenti, hogy bármely $i \in \mathbb{N}$ esetén $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}| < \infty$, és ekkor

$$\sigma_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k$$

lineáris korlátos funkcionál c-n $\|\sigma_i\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}|$ normával.

Legyen $\sigma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$, ha $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c$. A II. feltétel pontosan azt jelenti, hogy

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_i(x) = \sigma(x) \qquad (x \in c),$$

azaz $\{\sigma_i\}$ pontonként konvergál σ-hoz ha $i \to \infty$. A Banach-Steinhaus II. tétel szerint ennek szükséges és elegendő feltétele az, hogy

$$\|\sigma_i\| \leq M \qquad (i \in \mathbb{N}),$$

és $\sigma_i(x) \to \sigma(x)$, ha $i \to \infty$, $x \in S$ teljesüljön, ahol $\overline{[S]} = c$. Legyen $S = \{e_0, e_1, e_2, \dots\}$, ahol

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 1, 1, \dots), \\ e_1 &= (1, 0, 0, \dots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Schauder-bázisa c-nek, mely zárt rendszer (ld. a 3.5.2 definíció utáni 3. példát). A $\|\sigma_i\| \le M$ $(i \in \mathbb{N})$ feltétel éppen *1.*-et, a $\sigma_i(e_0) \to \sigma(e_0) = 1$ feltétel *2.*-t, míg a $\sigma_i(e_k) \to \sigma(e_k) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ a tétel *3.* feltételét adja.

□

5.4. További alkalmazások

Jelölje $\widetilde{C}[0,2\pi]$ a $C[0,2\pi]$ tér azon x függvényeinek halmazát, melyekre $x(0) = x(2\pi)$. $\widetilde{C}[0,2\pi]$ zárt lineáris altere $C[0,2\pi]$-nek, így maga is Banach-tér. $\widetilde{C}[0,2\pi]$ függvényeit 2π szerint periodikusan kiterjesztjük $\mathbb{R}$-re.

Egy $x \in \widetilde{C}[0,2\pi]$ függvény (trigonometrikus) Fourier-során az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \qquad t \in [0,2\pi]$$

függvénysort értjük, ahol

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \cos ks \, ds \qquad k = 0,1,2,\dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \sin ks \, ds \qquad k = 1,2,3,\dots.$$

Az egyenletes korlátosság tételének segítségével bizonyíthatjuk olyan folytonos, 2π szerint periódikus függvény létezését, melynek (trigonometrikus) Fourier-sora egy előírt pontban nem konvergens. Ilyen függvényt először du Bois Reymond szerkesztett 1876-ban.

5.4.1. Tétel. *Bármely $t_0 \in [0,2\pi]$-hez létezik olyan folytonos, 2π szerint periódikus függvény, melynek (trigonometrikus) Fourier-sora divergens t_0-ban.*

Bizonyítás. Jelölje s_n az $x \in \widetilde{C}[0,2\pi]$ függvény Fourier-sorának n-edik részletösszegét, és legyen

$$f_n(x) = s_n(t_0) \qquad (x \in \widetilde{C}[0,2\pi]).$$

A Dirichlet-formula (lásd pl. [21]) szerint

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(s) D_n(s-t) \, ds,$$

ahol

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cdots + \cos nu = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}$$

a Dirichlet-féle magfüggvény (a jobboldalon álló tört a nevező zérushelyeinél folytonosan van definiálva).

Így

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(s)D_n(s-t_0)\,ds \qquad (x \in \widetilde{C}[0,2\pi]),$$

és $D_n \in \widetilde{C}[0,2\pi]$. A 4.2.6 tétel szerint f_n lineáris korlátos funkcionál $\widetilde{C}[0,2\pi]$-n, melynek normája

$$\|f_n\| = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(s-t_0)|\,ds.$$

Becsüljük meg $\|f_n\|$-t alulról!

$$\begin{aligned}
\|f_n\| &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(s-t_0)|\,ds = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(s)|\,ds = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left|\tfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}\right| ds \\
&\geq \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)s\right| \tfrac{ds}{s} = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2(n+\frac{1}{2})\pi} |\sin t|\tfrac{dt}{t} = \tfrac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{2n+1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\tfrac{dt}{t} \\
&\geq \tfrac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{2n+1}\tfrac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\,dt = \tfrac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2n+1}\tfrac{1}{k},
\end{aligned}$$

ahol az egyes átalakításoknál rendre D_n periodicitását, a $|\sin x| \leq |x|$ egyenlőtlenséget, az $\left(n+\frac{1}{2}\right)s = t$ helyettesítést, és az $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k\pi}$, ha $t \in [(k-1)\pi, k\pi]$ egyenlőtlenséget használtuk fel.

Mivel a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ sor divergens, így $n \to \infty$ esetén $\|f_n\| \to \infty$, ezért az egyenletes korlátosság tétele miatt van olyan $H_{t_0} \subset \widetilde{C}[0,2\pi]$ sűrű G_δ halmaz, hogy $x \in H_{t_0}$ esetén

$$\sup_n |f_n(x)| = \sup_n |s_n(t_0)| = \infty,$$

de ekkor $\{s_n(t_0)\}$ nem lehet konvergens.

Látjuk tehát, hogy H_{t_0} minden eleme példát szolgáltat olyan folytonos, 2π szerint periódikus függvényre, melynek trigonometrikus Fourier sora divergens t_0-ban. □

Véve megszámlálható sok $t_i \in [0, 2\pi]$ $(i \in \mathbb{N})$ pontot, a megfelelő H_{t_i} sűrű G_δ halmazok metszete a Baire-féle kategória tétel miatt szintén sűrű G_δ halmaz, és ebből a halmazból véve az x függvényt, x Fourier-sora egyetlen t_i pontban sem konvergens. Ezzel beláttuk, hogy igaz az

5.4.2. Tétel. *Bármely $T \subset [0, 2\pi]$ megszámlálható halmaz esetén van olyan folytonos, 2π szerint periódikus függvény, melynek (trigonometrikus) Fourier-sora T pontjaiban divergens.*

A Banach-Steinhaus tétel kvadraturaformulák konvergenciájának vizsgálatánál is alkalmazható. Az $\int\limits_a^b x(t)\,dt$ határozott integrál közelítő számítására gyakran alkalmaznak

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x(t_k) \qquad (a \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le b) \tag{5.4.1}$$

típusú úgynevezett *mechanikus kvadraturaformulákat.* Ide tartozik a téglalapformula:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{b-a}{n} x\left(a + k\frac{b-a}{n}\right),$$

amely az $\int\limits_a^b x(t)\,dt$ értékét téglalapok területének összegével közelíti. Téglalapok helyett trapézokat véve kapjuk a trapézformulát:

$$\frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}x(a) + x\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \cdots + x\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right) + \frac{1}{2}x(b)\right).$$

A keresett integrál értékének minél pontosabb meghatározása érdekében tekintsük (5.4.1) típusú formulák egy

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x\big(t_k^{(n)}\big) \qquad (a \le t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \le b;\ n = 0, 1 \ldots)$$

sorozatát. Kérdezhetjük, hogy $n \to \infty$-nél milyen feltételek mellett konvergál ez a sorozat az $\int\limits_a^b x(t)\,dt$ értékhez, feltéve, hogy x folytonos függvény. Erre ad választ az alábbi, Szegő Gábortól származó

5.4.3. Tétel. *Ahhoz, hogy a*

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x\big(t_k^{(n)}\big) \qquad (a \le t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \le b;\ n = 0, 1 \ldots) \tag{5.4.2}$$

sorozat bármely $x \in C[a,b]$ esetén $\int\limits_a^b x(t)\,dt$-hez konvergáljon, ha $n \to \infty$, szükséges és elegendő, hogy az alábbi két feltétel teljesüljön:

1. *van olyan M konstans, hogy $\sum\limits_{k=0}^{n} \left|A_k^{(n)}\right| \le M$ $(n = 0, 1, \dots)$,*
2. *(5.4.2) minden (nemnegatív egész kitevős) hatványfüggvény esetén konvergál (a hatványfüggvény integráljához).*

Bizonyítás. Tekintsük $C[a,b]$-n a következő funkcionálokat

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x\left(t_k^{(n)}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ f(x) &= \int_a^b x(t)\,dt. \end{aligned}$$

Könnyű belátni, hogy f_n, f lineáris korlátos funkcionálok $C[a,b]$-n és a 4.2.1 tétel szerint

$$\|f_n\| = \sum_{k=0}^{n} \left|A_k^{(n)}\right|. \tag{5.4.3}$$

A Banach-Steinhaus II. tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(x \in C[a,b])$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\|f_n\| \le M \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{minden} \quad x \in S\text{-re},$$

ahol $S \subset C[a,b]$ egy zárt rendszer. Mivel a (nemnegatív egész kitevős) hatványfüggvények zárt rendszert alkotnak $C[a,b]$-ben és (5.4.3) teljesül, így utóbbi feltételeink *1.*, *2.*-vel azonosak.

□

Megjegyzések.

1. Ha az $A_k^{(n)}$ együtthatók minden lehetséges k, n esetén pozitívak, akkor az első feltétel következik a másodikból, ugyanis $x(t) = 1\,(t \in [a,b])$ esetén a második feltételünk azt jelenti, hogy

$$b - a = \int_a^b dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left|A_k^{(n)}\right|,$$

amiből a $\sum\limits_{k=0}^{n} \left|A_k^{(n)}\right|$ $(n \in \mathbb{N})$ összegek korlátossága következik.

2. (5.4.2) típusú formulák használhatók az általánosabb

$$\int_a^b p(t)x(t)\,dt$$

integrál közelítő kiszámítására is, ahol p egy rögzített integrálható függvény, melyet súlyfüggvénynek nevezünk. A konvergenciára vonatkozó eredmény ugyanaz, mint az előbb (de itt természetesen a második feltételben $\sum\limits_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x\left(t_k^{(n)}\right) \to \int\limits_a^b p(t)x(t)\,dt$ konvergenciát kell megkövetelni minden nemnegatív egész kitevős hatványfüggvényre).

Mechanikus kvadraturaformulák előállítására az egyik legfontosabb módszer a következő. Minden $x \in C[a,b]$ függvényhez és az $a \le t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \le b$ $(n \in \mathbb{N})$ beosztáshoz határozzuk meg az x függvény *Lagrange-féle interpolációs* polinomját. Ez az

$$L_n(x;t) = \sum_{k=0}^{n} x(t_k^{(n)}) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{t - t_i^{(n)}}{t_k^{(n)} - t_i^{(n)}}$$

legfeljebb n-edfokú polinom, mely az osztópontokban az x függvénnyel egybeesik.

Az $\int\limits_a^b p(t)x(t)\,dt$-ben x-et az interpolációs polinomjával helyettesítve kapjuk a

$$\int_a^b p(t)L_n(x;t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} x\left(t_k^{(n)}\right) A_k^{(n)} \tag{5.4.4}$$

formulát, ahol $A_k^{(n)} = \int\limits_a^b p(t) \prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \dfrac{t - t_i^{(n)}}{t_k^{(n)} - t_i^{(n)}}\,dt.$

Az így kapott formulákat *interpolációs kvadraturaformulák*nak nevezzük.

Mivel legfeljebb n-edfokú polinomok esetén $x(t) = L_n(x;t)$, így legfeljebb n-edfokú polinomokra az (5.4.4) formula éppen az $\int\limits_a^b p(t)x(t)\,dt$ értékét adja, tehát az 5.4.3 tétel 2. feltétele teljesül. Ha $A_k^{(n)} > 0$, akkor az első megjegyzésünk értelmében mindkét feltétel teljesül, így az *ilyen interpolációs kvadraturaformulák minden folytonos x függvény esetén $\int\limits_a^b p(t)x(t)\,dt$-hez konvergálnak, ha $n \to \infty$.*

5.5. A nyílt leképezések tétele

5.5.1. Tétel. (Nyílt leképezések tétele) *Legyenek X, Y Banach-terek, $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ az X-et az egész Y-ra leképező lineáris korlátos operátor, akkor A nyílt leképezés (vagyis bármely X-beli nyílt halmaz képe nyílt Y-ban).*

A bizonyításhoz szükségünk lesz néhány jelölésre és két lemmára.

Az X-beli x_0 körüli r sugarú nyílt gömböt $G(x_0,r)$-rel, az Y-beli y_0 középpontú, r sugarú nyílt gömböt $H(y_0,r)$-rel fogjuk jelölni. $x_0 = 0$ illetve $y_0 = 0$ esetén a G_r illetve H_r jelölést használjuk.

5.5.1. Lemma. *Az 5.5.1 tétel feltételei mellett van olyan $\eta > 0$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén*

$$H_{\eta\varepsilon} \subset \overline{A(G_\varepsilon)}.$$

Bizonyítás. Nyilván, a Függelék 8.4 szakaszát is használva

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} nG_1, \\ Y &= A(X) = A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nG_1\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(nG_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA(G_1). \end{aligned}$$

Y Banach-tér, így az 1.8.2 tétel alapján második kategóriájú, mely megszámlálható sok halmaz uniója. Az 1.8.2 Következmény miatt van olyan n_0 index, hogy $\overline{n_0 A(G_1)}$ tartalmaz egy nyílt gömböt, mondjuk $H(y_0,r)$-et:

$$H(y_0,r) \subset \overline{n_0 A(G_1)}.$$

Innen

$$\begin{aligned} H_r &= H(y_0,r) - y_0 \subset H(y_0,r) - H(y_0,r) \subset \overline{n_0 A(G_1)} - \overline{n_0 A(G_1)} \\ &\subset \overline{n_0 A(G_1) - n_0 A(G_1)} = \overline{n_0 A(G_1 - G_1)} \subset \overline{n_0 A(G_2)} = \overline{2n_0 A(G_1)}, \end{aligned}$$

amiből

$$H_{\frac{r}{2n_0}} \subset \overline{A(G_1)},$$

azaz $\eta = \frac{r}{2n_0}$, $\varepsilon > 0$ esetén

$$H_{\eta\varepsilon} = \varepsilon H_\eta \subset \varepsilon\overline{A(G_1)} = \overline{A(\varepsilon G_1)} = \overline{A(G_\varepsilon)}.$$

A bizonyításban felhasználtuk a 3.1.2 tétel (2) állítását, továbbá azt, hogy $G_1 - G_1 \subset G_2$, $G_\varepsilon = \varepsilon G_1$. □

5.5.2. Lemma. *Az 5.5.1 tétel feltételei mellett, bármely $\varepsilon > 0$-ra*

$$H_{\eta\frac{\varepsilon}{2}} \subset A(G_\varepsilon),$$

ahol η az 5.5.1 lemmában szereplő konstans.

Bizonyítás. Elegendő állításunkat $\varepsilon = 1$ mellett igazolni, mert

$$H_{\eta\frac{\varepsilon}{2}} = \varepsilon H_{\frac{\eta}{2}}, \qquad A(G_\varepsilon) = \varepsilon A(G_1).$$

Tegyük fel, hogy $y \in H_{\frac{\eta}{2}}$, megmutatjuk, hogy $y \in A(G_1)$. Az 5.5.1 lemma miatt $y \in H_{\frac{\eta}{2}} \subset \overline{A(G_{\frac{1}{2}})}$, így van olyan

$$x_1 \in G_{\frac{1}{2}}, \quad \text{hogy} \quad \|y - Ax_1\| < \frac{\eta}{2^2}.$$

Utóbbi egyenlőtlenség azt jelenti, hogy $y - Ax_1 \in H_{\frac{\eta}{2^2}}$. Az 5.5.1 lemma alapján $y - Ax_1 \in H_{\frac{\eta}{2^2}} \subset \overline{A(G_{\frac{1}{2^2}})}$, így van olyan

$$x_2 \in G_{\frac{1}{2^2}}, \quad \text{hogy} \quad \|y - Ax_1 - Ax_2\| < \frac{\eta}{2^3}.$$

Hasonlóan folytatva olyan $\{x_i\}$ sorozatot konstruálunk, melyre

$$x_i \in G_{\frac{1}{2^i}} \qquad (i = 1, 2, \dots), \tag{5.5.1}$$

és

$$\left\| y - A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \right\| < \frac{\eta}{2^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{5.5.2}$$

teljesül. A $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ sor konvergens, mert (5.5.1) miatt a konvergens $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ geometriai sor majorálja . Mivel X Banach-tér, a 3.5.1 tétel alapján következik a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ sor konvergenciája. Legyen

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i,$$

akkor (5.5.1) miatt

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1, \text{ azaz } x \in G_1,$$

és (5.5.2)-ből $n \to \infty$ határátmenettel $\|y - Ax\| = 0$ adódik, azaz $y = Ax \in A(G_1)$. □

Bizonyítás. (5.5.1 tétel) Legyen $V \subset X$ nyílt halmaz, megmutatjuk, hogy $A(V)$ is nyílt. Ha $y \in A(V)$, úgy $y = Ax$ valamely $x \in V$-vel. Mivel V nyílt, így egy x körüli $G(x,\varepsilon)$ gömb is V-ben van:

$$x \in G(x,\varepsilon) \subset V.$$

A 5.5.2 lemmát (az ott szereplő η konstanst is használva) A linearitása miatt

$$H_{\eta\frac{\varepsilon}{2}} \subset A(G_\varepsilon) = A\big(G(x,\varepsilon) - x\big) = A\big(G(x,\varepsilon)\big) - Ax,$$

amiből

$$H\left(y, \eta\frac{\varepsilon}{2}\right) = H_{\eta\frac{\varepsilon}{2}} + y = H_{\eta\frac{\varepsilon}{2}} + Ax \subset A\big(G(x,\varepsilon)\big) \subset A(V),$$

s ez azt jelenti, hogy $A(V)$ nyílt.

□

Megjegyzés. Elegendő Y-ról csak azt feltenni, hogy második kategóriájú lineáris normált tér, ugyanis a bizonyításban csupán ezt használtuk ki (az 5.5.1 lemmában).

5.6. A nyílt leképezések tételének alkalmazásai: Banach tétele a korlátos inverzről, ekvivalens normák

5.6.1. Tétel. (Banach tétele a korlátos inverzről) *Legyenek X, Y Banach-terek, $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ X-et kölcsönösen egyértelműen Y-ra leképező lineáris korlátos operátor. Akkor a létező A^{-1} inverz operátor is lineáris és korlátos.*

Bizonyítás. Az A^{-1} inverz operátor definíciója:

$$A^{-1}y = x \quad \text{ha } y = Ax.$$

A tétel feltételei miatt minden $y \in Y$-hoz pontosan egy olyan $x \in X$ van, melyre $y = Ax$, így $A^{-1} : Y \to X$ is definiált.

A^{-1} *lineáris*, mert $y_1, y_2 \in Y$ esetén az $A^{-1}y_1 = x_1$, $A^{-1}y_2 = x_2$ jelölésekkel $y_1 = Ax_1,\ y_2 = Ax_2$ és A linearitása miatt

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = &\ A(x_1 + x_2), \\ x_1 + x_2 = &\ A^{-1}(y_1 + y_2), \end{aligned}$$

azaz

$$A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2 = A^{-1}(y_1 + y_2),$$

és hasonlóan
$$\lambda y_1 = \lambda A x_1 = A(\lambda x_1),$$
amiből
$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= A^{-1}(\lambda y_1) \\ \lambda A^{-1} y_1 &= A^{-1}(\lambda y_1). \end{aligned}$$

A^{-1} *korlátos*, mert a nyílt leképezések tétele miatt A nyílt, így A^{-1} folytonos, tehát (a linearitás miatt) korlátos is. A^{-1} korlátossága a 5.5.2 lemma segítségével közvetlenül is bizonyítható: Ha $0 \neq x \in X$, úgy $\frac{x}{\|x\|} \notin G_1$, és mivel A kölcsönösen egyértelmű, $A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \notin A(G_1)$, és $H_{\frac{\eta}{2}} \subset A(G_1)$ miatt $A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \notin H_{\frac{\eta}{2}}$ (ahol $\eta > 0$ az 5.5.2 lemmában szereplő konstans), azaz
$$\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \geq \frac{\eta}{2}, \quad \|Ax\| \geq \frac{\eta}{2}\|x\|.$$
Ez $x = 0$-ra is igaz, és innen $Ax = y,\ x = A^{-1}y$-nal
$$\|A^{-1}y\| \leq \frac{2}{\eta}\|y\|,$$
azaz A^{-1} korlátos.

□

5.6.1. Definíció. Legyen X egy lineáris tér és tegyük fel, hogy $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák X-en. Azt mondjuk, hogy $\|\cdot\|_1$ *ekvivalens* $\|\cdot\|_2$-vel, ha vannak olyan c, C pozitív számok, hogy bármely $x \in X$ esetén
$$c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$$
teljesül. ♢

Könnyű belátni, hogy ez a reláció egy ekvivalencia reláció. Ha $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ ekvivalensek, akkor ha $\{x_n\}$ egy Cauchy-sorozat, vagy egy konvergens sorozat $(X, \|\cdot\|_1)$-ben, úgy $(X, \|\cdot\|_2)$-ben is az és fordítva. Az is világos, hogy az $(X, \|\cdot\|_1)$ és $(X, \|\cdot\|_2)$ terekben a nyílt halmazok azonosak.

5.6.2. Tétel. *Legyen X egy lineáris tér és $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ két norma X-en úgy, hogy $(X, \|\cdot\|_1)$, $(X, \|\cdot\|_2)$ mindketten Banach-terek. Ha van olyan $C > 0$ konstans, hogy*
$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \qquad (x \in X), \tag{5.6.1}$$
akkor a két norma ekvivalens.

Bizonyítás. Legyen I az identikus leképezése $(X, \|\cdot\|_2)$-nek $(X, \|\cdot\|_1)$-re, akkor (5.6.1) miatt

$$\|Ix\|_1 \le C\|x\|_2, \quad (x \in X),$$

azaz I korlátos. Világos, hogy I lineáris, és kölcsönösen egyértelműen képezi le $(X, \|\cdot\|_2)$-t $(X, \|\cdot\|_1)$-re. Így az előző tétel alapján I^{-1} is korlátos, azaz van olyan K (mely szükségképpen pozitív) hogy

$$\|x\|_2 = \|I^{-1}x\|_2 \le K\|x\|_1, \quad (x \in X),$$

amiből a két norma ekvivalenciája következik.

□

5.6.3. Tétel. *Véges dimenziós (valós vagy komplex) lineáris téren bármely két norma ekvivalens.*

Bizonyítás. Legyen X egy véges dimenziós lineáris tér, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ X egy Hamel-bázisa, és $\|\ \cdot\|_1$ egy norma X-en. Bármely $x \in X$ egyértelműen

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$$

alakba írható. Legyen

$$\|x\|_2 = \max_{1 \le i \le n} |\alpha_i|.$$

Azonnal látható, hogy $\|\cdot\|_2$ norma X-en, és

$$\|x\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \right\|_1 \le \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \|\varphi_i\|_1 \le \left(\sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|_1 \right) \|x\|_2.$$

A 3.6.1 tétel 5. következménye szerint $(X, \|\cdot\|_1)$ és $(X, \|\cdot\|_2)$ Banach-terek, ezért az előző tételt alkalmazva kapjuk, hogy $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ ekvivalensek. Így a normák ekvivalenciájának tranzitivitása miatt X bármely két normája ekvivalens. □

Legyen X egy lineáris normált tér $\{e_n\}$ Schauder-bázissal. Akkor minden $x \in X$ egyértelműen előállítható

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \tag{5.6.2}$$

alakban, ahol $c_i \in \mathbb{K}$ skalárok. Legyen ekkor

$$S_n x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i. \tag{5.6.3}$$

Az (5.6.2) előállítás egyértelműsége miatt $S_n : X \to X$ lineáris operátor. Az 5.6.2 tétel segítségével bebizonyítjuk, hogy ha X Banach-tér, akkor S_n korlátos is.

5.6.4. Tétel. *Ha X Banach-tér, $\{e_n\}$ Schauder-bázissal, akkor a (5.6.3)-mal definiált S_n operátor X-et önmagába leképező lineáris korlátos operátor, sőt $\|S_n\| \le M$ $(n = 1, 2, \dots)$ alkalmas $M > 0$ konstanssal.*

Bizonyítás. Legyen

$$\|x\|_1 = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{k} c_i e_i \right\|,$$

ahol $x \in X$ az (5.6.2) alatti elem. Nyilván $\|\cdot\|$ norma X-en, megmutatjuk, hogy $(X, \|\cdot\|_1)$ Banach-tér. Legyen $x_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i^{(n)} e_i$ $(n \in \mathbb{N})$ egy Cauchy-sorozat $(X, \|\cdot\|_1)$-ben, akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N(\varepsilon)$, hogy

$$\|x_n - x_m\|_1 = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{k} \left(c_i^{(n)} - c_i^{(m)}\right) e_i \right\| < \varepsilon \quad \text{ha } n, m > N(\varepsilon),$$

így bármely $k \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \left(c_i^{(n)} - c_i^{(m)}\right) e_i \right\| < \varepsilon \quad \text{ha } n, m > N(\varepsilon). \tag{5.6.4}$$

Innen minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|c_k^{(n)} - c_k^{(m)}\right| = \frac{1}{\|e_k\|} \left\| \sum_{i=1}^{k} \left(c_i^{(n)} - c_i^{(m)}\right) e_i - \sum_{i=1}^{k-1} \left(c_i^{(n)} - c_i^{(m)}\right) e_i \right\| < \frac{2\varepsilon}{\|e_k\|},$$

ha $n, m > N(\varepsilon)$, ami azt jelenti, hogy $\{c_k^{(n)}\}$ bármely fix k mellett valós vagy komplex elemű Cauchy-sorozat, mely konvergens:

$$\lim_{n\to\infty} c_k^{(n)} = c_k.$$

(5.6.4)-ből $m \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy $k \in \mathbb{N}$ mellett

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \left(c_i^{(n)} - c_i\right) e_i \right\| \le \varepsilon \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

Legyen $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e_i$. Az x elem jól definiált, mert minden $k \in \mathbb{N}$ mellett

$$\sum_{i=1}^{k} \|c_i e_i\| \le \sum_{i=1}^{k} \| \left(c_i^{(n)} - c_i\right) e_i\| + \sum_{i=1}^{k} \|c_i^{(n)} e_i\| \le \varepsilon + C$$

elég nagy n esetén alkalmas C konstanssal. Ezért a $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ sor abszolút konvergens így konvergens. Előző egyenlőtlenségünk átírható

$$\|x_n - x\|_1 \leq \varepsilon \quad \text{ha } n > N(\varepsilon)$$

alakba, amiből következik, hogy $(X, \| \cdot \|_1)$ Banach-tér.
Mivel

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\| \leq \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\| = \|x\|_1,$$

alkalmazhatjuk az 5.6.2 tételt $c = 1$ választással. Van tehát egy olyan $M > 0$ konstans, hogy

$$\|x\|_1 \leq M\|x\|, \quad (x \in X),$$

amiből

$$\|S_n x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{k} c_i e_i \right\| = \|x\|_1 \leq M\|x\|,$$

tehát S_n korlátos, és $\|S_n\| \leq M \ \ (n \in \mathbb{N})$.

□

Megjegyzés. Tételünkből következik, hogy az

$$R_n x = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i e_i \qquad \left(x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \right) \tag{5.6.5}$$

összefüggéssel definiált R_n operátor és az

$$f_n(x) = c_n$$

-nel definiált $f_n \ \ (n \in \mathbb{N})$ funkcionál lineáris és korlátos. A linearitás az $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ előállítás egyértelműségének a következménye, míg a korlátosság az

$$R_n = I - S_n,$$

$$|f_n(x)| = |c_n| = \frac{\|S_n x - S_{n-1} x\|}{\|e_n\|} \leq \frac{2M}{\|e_n\|}\|x\|, \quad (x \in X),$$

összefüggésekből adódik.

A következő tételt a **3.9** szakaszban már kimondtuk, de csak most állnak rendelkezésünkre a bizonyításhoz szükséges ismeretek.

3.19 Tétel. *Legyen X egy Banach-tér $\{e_n\}$ Schauder-bázissal. $K \subset X$ relatív kompakt akkor és csakis akkor, ha*

1. *K korlátos,*

2. *bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N(\varepsilon)$, hogy $\|R_n x\| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$, $x \in K$, ahol $R_n x = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i e_i$, ha $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$.*

Bizonyítás. *Szükségesség.* Ha $K \subset X$ relatív kompakt, akkor Hausdorff tétele alapján bármely $\varepsilon' > 0$ esetén van véges $x_1, \dots, x_m$ ε'-háló K számára. Innen következik, hogy K korlátos, és $x \in K$-ra

$$\|R_n x\| = \|x - S_n x\| \le \|x - x_i\| + \|x_i - S_n x\| \le \|x - x_i\| + \|S_n x_i - S_n x\| + \|R_n x_i\| \le$$

$$\le (1 + \|S_n\|)\,\|x - x_i\| + \|R_n x_i\| \le (1 + M)\|x - x_i\| + \|R_n x_i\|,$$

ahol x_i az ε'-háló azon eleme, melyre $\|x - x_i\| < \varepsilon'$ teljesül. Mivel $\lim_{n\to\infty} \|R_n x_i\| = 0$ $(i = 1, \dots, m)$, így $\|R_n x_i\| < \varepsilon'$, ha $n > N(\varepsilon')$ $(i = 1, \dots, m)$, tehát

$$\|R_n x\| < (2 + M)\varepsilon' \quad \text{ha } x \in K, n > N(\varepsilon').$$

$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2+M}$-mel, ez éppen a kívánt *2.* feltétel.

Elegendőség. Ha *1.* és *2.* teljesül, megmutatjuk, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz van véges ε-háló K számára. Válasszuk az $n = n(\varepsilon)$ indexet úgy, hogy $\|R_n x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $x \in K$. A $K_n = \{S_n x \mid x \in K\}$ halmaz korlátos részhalmaza a véges dimenziós $[e_1, \dots, e_n]$ altérnek, így relatív kompakt. Van tehát véges $\frac{\varepsilon}{2}$-háló K_n számára, és ez

$$x = S_n x + R_n x$$

miatt ε-háló K számára.

$\square$

5.7. A zárt gráf tétel

Ha A az X halmaz $\mathcal{D}(A)$ részhalmazának az Y halmazba való leképezése, akkor ezt $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$-nal jelöljük.

5.7.1. Definíció. Legyenek X, Y tetszőleges halmazok, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$ egy leképezés. A

$$\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax) \mid x \in \mathcal{D}(A)\} \subset X \times Y$$

halmazt A *gráfjának* nevezzük. $\diamondsuit$

Ha X, Y lineáris normált terek, akkor az $X \times Y$ szorzathalmaz az

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \lambda(x_1, y_1) &= (\lambda x_1, \lambda y_1) \\ \|(x_1, y_1)\| &= \|x_1\| + \|y_1\| \end{aligned}$$

műveletekre és normára nézve szintén lineáris normált tér, melyet az X és Y terek *normált szorzatá*nak nevezünk. Mivel

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \|x_n - x\| + \|y_n - y\|,$$

így az $\{(x_n, y_n)\}$ sorozat pontosan akkor konvergál (x, y)-hoz az $X \times Y$ normált szorzattérben, ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$. Ha X, Y Banach-terek, úgy $X \times Y$ is az, és fordítva.

5.7.2. Definíció. Legyenek X, Y lineáris normált terek. Az $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$ operátort *zárt operátor*nak nevezzük, ha $\mathcal{G}(A)$ gráfja zárt halmaz $X \times Y$-ban. $\diamondsuit$

Az A operátor pontosan akkor zárt, ha bármely $(x, y) \in \overline{\mathcal{G}(A)}$ esetén $(x, y) \in \mathcal{G}(A)$.

$(x, y) \in \overline{\mathcal{G}(A)}$ pontosan akkor teljesül, ha van olyan $(x_n, y_n) \in \mathcal{G}(A)$ sorozat, mely (x, y)-hoz konvergál, azaz amelyre

$$\begin{cases} x_n \in \mathcal{D}(A), & x_n \to x \\ y_n = Ax_n \to y, & \text{ha } n \to \infty. \end{cases} \tag{5.7.1}$$

$(x, y) \in \mathcal{G}(A)$ pontosan azt jelenti, hogy

$$x \in \mathcal{D}(A) \quad \text{és} \quad y = Ax. \tag{5.7.2}$$

Így beláttuk, hogy *A akkor és csakis akkort zárt operátor, ha tetszőleges $x_n \in \mathcal{D}(A)$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatot véve, melyre $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ $(n \to \infty)$ teljesül, következik, hogy $x \in \mathcal{D}(A)$ és $y = Ax$.*

Példák:

1. Ha $\mathcal{D}(A)$ zárt lineáris altér X-ben, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$ lineáris folytonos (korlátos) operátor, úgy A zárt is (X, Y lineáris normált terek).

2. Legyen $X = Y = C[0, 1]$, $\mathcal{D}(A) = \{x \in X \mid x' \in X\}$ és

$$(Ax)(t) = x'(t) \qquad (t \in [0, 1],\ x \in \mathcal{D}(A)).$$

A zárt operátor, mert ha $x_n \in \mathcal{D}(A),\ x_n \to x,\ Ax_n = x_n' \to y$, akkor ismert analízisbeli tétel szerint

$$\frac{d}{dt} \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} x_n'(t) = y(t), \quad (t \in [0,1]),$$

azaz $x' = y \in C[0,1]$, $x \in \mathcal{D}(A)$ és $y = Ax$.
A nem folytonos, mert ha $x_n(t) = t^n$, akkor $\|x_n\| = 1$, de

$$\|Ax_n\| = \sup_{t\in[0,1]} |nt^{n-1}| = n.$$

3. Legyen $\mathcal{D}(A)$ egy nem zárt lineáris altere az X Banach-térnek, $Y = X$ és $I : \mathcal{D}(A) \to Y$ az identikus leképezés. Akkor I folytonos, lineáris operátor, de nem zárt.

5.7.1. Tétel. (zárt gráf tétel) *Banach-teret Banach-térbe leképező zárt lineáris operátor folytonos (korlátos).*

Bizonyítás. Legyenek X, Y Banach-terek, $A : X \to Y$ zárt lineáris operátor, és

$$\|x\|_1 = \|x\| + \|Ax\| \qquad (x \in X).$$

Világos, hogy $\|\cdot\|_1$ norma X-en. Megmutatjuk, hogy $(X, \|\cdot\|_1)$ Banach-tér. Legyen ugyanis $\{x_n\}$ egy Cauchy-sorozat $(X, \|\cdot\|_1)$-ben, akkor

$$0 \le \|x_n - x_m\| + \|Ax_n - Ax_m\| = \|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon \quad \text{ha } n, m > N(\varepsilon),$$

így $\{x_n\}$ Cauchy-sorozat $(X, \|\cdot\|)$-ben, $\{Ax_n\}$ Cauchy-sorozat Y-ban. Ezért X és Y teljessége alapján, $x_n \to x\ \ (X, \|\cdot\|)$-ben, $Ax_n \to y$ az Y-ban. A zártsága miatt $x \in X$ (ezt már tudjuk) és $y = Ax$, így

$$\|x_n - x\|_1 = \|x_n - x\| + \|Ax_n - Ax\| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz $x_n \to x$ az $(X, \|\cdot\|_1)$ térben, és így $(X, \|\cdot\|_1)$ Banach-tér. Mivel

$$\|x\| \le \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_1, \quad (x \in X),$$

így az 5.6.2 tétel alkalmazásával kapjuk, hogy van olyan $C > 0$, hogy

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &\le C\|x\| \quad (x \in X), \\ \|x\| + \|Ax\| &\le C\|x\|, \\ \|Ax\| &\le (C-1)\|x\|, \end{aligned}$$

azaz A korlátos, így folytonos.

□

Ezt a szakaszt a zárt gráf tétel egy projekciókkal kapcsolatos alkalmazásával zárjuk.

5.7.3. Definíció. Egy X lineáris normált teret önmagába leképező P lineáris korlátos operátort *projekció operátor*nak nevezzük, ha $P^2 = P$, azaz $P(Px) = Px$ $(x \in X)$ (P idempotens). $\diamondsuit$

5.7.4. Definíció. Legyen M zárt altere az X lineáris normált térnek. Ha van olyan N zárt lineáris altere X-nek, hogy

$$X = M + N \quad \text{és} \quad M \cap N = \{0\},$$

akkor M-et *komplementeres altér*nek nevezzük X-ben. Ekkor X-et M és N *direkt összegé*nek nevezzük, és az

$$X = M \oplus N$$

jelölést használjuk. ($M \cap N = \{0\}$ miatt X minden x eleme egyértelműen írható $x = m + n$ alakba, ahol $m \in M,\ n \in N$). $\diamondsuit$

5.7.2. Tétel. *1. Legyen X egy lineáris normált tér, P az X egy projekciója, akkor*

$$X = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P),$$

ahol $\mathcal{R}(P) = \{Px \mid x \in X\}$ a P képtere, $\mathcal{N}(P) = \{x \in X \mid Px = 0\}$ a P nulltere.

2. Ha X egy Banach-tér és

$$X = M \oplus N,$$

akkor van olyan P projekciója X-nek, melyre $M = \mathcal{R}(P),\ N = \mathcal{N}(P)$.

Bizonyítás. *1.* $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P)$, mert ha $y \in \mathcal{R}(P)$, úgy alkalmas $x \in X$-szel $y = Px = P(Px)$, azaz $(I - P)Px = 0$ (I identikus operátor X-en), és így $y = Px \in \mathcal{N}(I - P)$.

Fordítva, ha $z \in \mathcal{N}(I - P)$, akkor $(I - P)z = 0$, vagyis $z = Pz \in \mathcal{R}(P)$. P folytonossága miatt $\mathcal{N}(P)$ és $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P)$ zárt lineáris alterek. Továbbá, ha $x \in \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{R}(P)$, úgy alkalmas $x_1 \in X$-szel $x = Px_1,\ Px = 0$, azaz $0 = Px = P^2x_1 = Px_1,\ x = Px_1 = 0$ következik, így $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{R}(P) = \{0\}$.

Ha $x \in X$ tetszőleges, akkor $x = (x - Px) + Px$, és itt $Px \in \mathcal{R}(P)$, $x - Px \in \mathcal{N}(P)$, mert $P(x - Px) = Px - P^2x = 0$. Így beláttuk, hogy

$$X = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P).$$

2. Definiáljuk P-t a következőképpen:

$$Px = m,$$

ahol $x = m + n$, $m \in M$, $n \in N$. Világos, hogy P lineáris operátor, és $P(Px) = Pm = m = Px$ alapján $P^2 = P$. Továbbá, $\mathcal{R}(P) = M$, és $\mathcal{N}(P) = N$. Megmutatjuk, hogy P zárt operátor. Tegyük fel, hogy $x_n \to x$, $Px_n \to y$, $(x, y \in X)$. Akkor $Px_n \in M$ és M zártsága miatt $y \in M$, így $Py = y$. Mivel $P(x_n - Px_n) = 0$, $x_n - Px_n \in N$. N zártsága miatt $x - y \in N$, így $Px = Py$. Innen $y = Px$ vagyis P zárt, és a zárt gráf tétel miatt P folytonos.

□

6. fejezet

Hilbert-terek

6.1. Hilbert-tér fogalma, példák

6.1.1. Definíció. Ha egy X lineáris tér bármely két x, y eleméhez hozzá van rendelve egy $\langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$ skalár úgy, hogy

$$\begin{aligned}\langle x_1 + x_2, y\rangle &= \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle \\ \langle \lambda x, y\rangle &= \lambda\langle x, y\rangle \\ \langle x, y\rangle &= \overline{\langle y, x\rangle} \\ \langle x, x\rangle &\geq 0\end{aligned}$$

teljesül bármely $x_1, x_2, x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár esetén, akkor azt mondjuk, hogy egy *pszeudo-skaláris szorzat* (pszeudo-belsőszorzat) van adva X-en. $\langle x, y\rangle$-t az x és y elemek pszeudo-skaláris szorzatának nevezzük.

Ha egy pszeudo-skaláris szorzat olyan, hogy $\langle x, x\rangle = 0$ csak $x = 0$-nál áll fenn, akkor *skaláris szorzat*nak (belső szorzatnak) nevezzük. ♢

6.1.1. Tétel. (Schwarz-egyenlőtlenség) *Ha $\langle \cdot, \cdot\rangle$ egy pszeudo-skaláris szorzat az X lineáris téren, úgy bármely $x, y \in X$-re fennáll az*

$$\left|\langle x, y\rangle\right|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár esetén

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \overline{\lambda}\left[\langle x, y\rangle + \lambda\langle y, y\rangle\right]. \tag{6.1.1}$$

Ha $\langle y, y\rangle \neq 0$, akkor válasszuk λ-t úgy, hogy a zárójelben lévő kifejezés zérus legyen, azaz legyen

$$\lambda = -\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}.$$

Ezzel (6.1.1)-ből $\langle x, x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \geq 0$ adódik, amiből a bizonyitandó egyenlőtlenség következik. Hasonlóan érvényes az egyenlőtlenség, ha $\langle x, x\rangle \neq 0$ (ekkor x, y szerepét megcseréljük). Végül, ha $\langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle = 0$, akkor $\lambda = -\langle x, y\rangle$ választással kapjuk (6.1.1)-ből, hogy $0 \geq |\langle x, y\rangle|^2$, $\langle x, y\rangle = 0$, azaz egyenlőtlenségünk ekkor is teljesül. □

6.1.2. Tétel. *Egy skaláris szorzattal ellátott lineáris tér bármely x elemének normáján az $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ számot értve, a tér lineáris normált tér. A norma pontosan egy skaláris szorzatból származik ily módon.*

Bizonyítás. A skaláris szorzat definíciója miatt $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$, továbbá $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x\, , \lambda x\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle x\, , x\rangle = |\lambda|^2\|x\|^2$, így $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$. A Schwarz-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y\, , x + y\rangle = \langle x\, , x\rangle + \langle x\, , y\rangle + \langle y\, , x\rangle + \langle y\, , y\rangle =$$

$$= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x\, , y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x\, , y\rangle| + \|y\|^2 \leq \big(\|x\| + \|y\|\big)^2$$

vagyis

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

így terünk lineáris normált tér.

Könnyen ellenőrizhető, hogy arra a skaláris szorzatra, melyből a norma származik, fennáll

$$\langle x\, , y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right], \tag{6.1.2}$$

ha a tér valós, és

$$\langle x\, , y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\right], \tag{6.1.3}$$

ha a tér komplex, ami mutatja, hogy a norma csak egyetlen skaláris szorzatból származhat. □

6.1.2. Definíció. Az X halmazt *pre-Hilbert-tér*nek nevezzük, ha X lineáris tér, melyen egy skaláris szorzat van értelmezve. Ha egy pre-Hilbert-tér teljes, az $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ normában, akkor azt *Hilbert-tér*nek nevezzük. ♢

E definíció szerint egy pre-Hilbert-tér olyan lineáris normált tér, melyben a norma egy skaláris szorzatból származik. Melyek azok a normák, melyek skaláris szorzatból származnak? Erre a kérdésre ad választ a

6.1.3. Tétel. *Egy lineáris normált tér normája akkor és csakis akkor származik skaláris szorzatból az* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *összefüggés szerint, ha a tér bármely két* x, y *elemére teljesül a*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{6.1.4}$$

úgynevezett parallelogramma azonosság.

Bizonyítás. Ha a norma skaláris szorzatból származik, úgy egyszerű számítás mutatja (6.1.4) helyességét.

Ha egy X lineáris normált térben (6.1.4) teljesül, akkor legyen

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right], \qquad x, y \in X.$$

(6.1.4)-et felhasználva bármely $x_1, x_2, y \in X$-re

$$\begin{aligned}
8\varphi(x_1,y) &+8\varphi(x_2,y) = 2\|x_1+y\|^2 - 2\|x_1-y\|^2 + 2\|x_2+y\|^2 - 2\|x_2-y\|^2 \\
&= 2\|x_1+y\|^2 + 2\|x_2+y\|^2 - [2\|x_1-y\|^2 + 2\|x_2-y\|^2] \\
&= \|x_1+x_2+2y\|^2 + \|x_1-x_2\|^2 - [\|x_1+x_2-2y\|^2 + \|x_1-x_2\|^2] \\
&= 4\left\|\tfrac{x_1+x_2}{2}+y\right\|^2 - 4\left\|\tfrac{x_1+x_2}{2}-y\right\|^2 = 16\varphi\left(\tfrac{x_1+x_2}{2}, y\right),
\end{aligned}$$

azaz

$$2\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}, y\right) = \varphi(x_1,y) + \varphi(x_2,y).$$

$x_2 = 0$-val kapjuk, hogy $2\varphi\left(\frac{x_1}{2}, y\right) = \varphi(x_1, y)$, így

$$\varphi(x_1+x_2, y) = \varphi(x_1,y) + \varphi(x_2,y).$$

Ezzel beláttuk, hogy φ additív az első változójában. Világos, hogy φ folytonos függvény, így a 4.1.2 tétel alapján bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ valós szám esetén

$$\varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x,y).$$

Ha X valós lineáris normált tér, akkor $\langle x\,, y\rangle = \varphi(x,y)$ skaláris szorzat X-en, melyre $\langle x\,, x\rangle = \varphi(x,x) = \frac{1}{4}\|2x\|^2 = \|x\|^2$ teljesül, ugyanis φ lineáris az első változójában és φ szimmetrikus.

Ha X komplex lineáris normált tér, akkor megmutatjuk, hogy

$$\langle x\,,y\rangle_1 = \varphi(x,y) + i\varphi(x,iy)$$

skaláris szorzat X-en. $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_1$ additív az első változóban. Ahhoz, hogy belássuk, hogy $\langle \lambda x\,,y\rangle_1 = \lambda\langle x\,,y\rangle_1$ bármely $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ esetén teljesül elég azt megmutatni, hogy $\langle ix\,,y\rangle_1 = i\langle x\,,y\rangle_1$ fennáll. Ez azonnal adódik abból, hogy

$$\varphi(ix,y) = -\varphi(x,iy) \qquad \varphi(ix,iy) = \varphi(x,y),$$

ugyanis

$$\begin{aligned}\langle ix\,,y\rangle_1 &= \varphi(ix,y) + i\varphi(ix,iy) = -\varphi(x,iy) + i\varphi(x,y)\\ &= i\big(\varphi(x,y) + i\varphi(x,iy)\big) = i\langle x\,,y\rangle_1.\end{aligned}$$

Mivel φ szimmetrikus, ismét felhasználva $\varphi(ix,y) = -\varphi(x,iy)$-t

$$\langle x\,,y\rangle_1 = \varphi(x,y)+i\varphi(x,iy) = \varphi(y,x)-i\varphi(ix,y) = \varphi(y,x)-i\varphi(y,ix) = \overline{\langle y\,,x\rangle_1}.$$

Végül $\langle x\,,x\rangle_1 = \varphi(x,x) + i\varphi(x,ix) = \varphi(x,x) = \|x\|^2$, mert

$$\varphi(x,ix) = \frac{1}{4}\left[\|x+ix\|^2 - \|x-ix\|^2\right] = \frac{1}{4}\|x\|^2\left[|1+i|^2 - |1-i|^2\right] = 0.$$

□

6.1.4. Tétel. *Bármely pre-Hilbert-térhez létezik egy őt sűrű lineáris altérként tartalmazó Hilbert-tér, mely az eredeti teret fixen hagyó izomorf és izometrikus (így a skaláris szorzatot is megőrző) leképezéstől eltekintve egyértelmű.*

Bizonyítás. Ha H egy pre-Hilbert-tér, úgy H egy lineáris normált tér a belső szorzatból származó normával, melyben a norma teljesíti a parallelogramma azonosságot. A 4.5.3 tétel szerint H-t fixen hagyó izometrikus és izomorf leképezéstől eltekintve egyértelműen létezik olyan $\widetilde{H}$ Banach-tér, mely H-t sűrű lineáris altérként tartalmazza. A norma folytonossága miatt $\widetilde{H}$ normája is teljesíti a parallelogramma azonosságot, így $\widetilde{H}$ Hilbert-tér.

□

6.1.5. Tétel. *A skaláris szorzat tényezőinek folytonos függvénye.*

Bizonyítás. Ha $\|x_n - x\| \to 0$, $\|y_n - y\| \to 0$ ha $n \to \infty$, akkor

$$\big|\langle x\,,y\rangle - \langle x_n\,,y_n\rangle\big| \le \big|\langle x\,,y-y_n\rangle\big| + \big|\langle x-x_n\,,y_n\rangle\big| \le \|x\|\|y-y_n\| + \|x-x_n\|\|y_n\|,$$

ami zérushoz tart, ha $n \to \infty$ ugyanis $\big\{\|y_n\|\big\}$ korlátos. □

Példák Hilbert-térre.

1. Legfontosabb *példánk* a $L_2(X, \mathcal{S}, \mu)$ tér. Azonnal látható, hogy

$$\langle x\,, y\rangle = \int_X x(t)\overline{y(t)}d\mu \qquad (x, y \in L_2)$$

skaláris szorzat $L_2(X, \mathcal{S}, \mu)$-n, és fennáll $\|x\|^2 = \langle x\,, x\rangle$. Innen következik, hogy $L_2(a, b)$, l_2 szintén Hilbert-terek.

2. Legyen most $\varrho : (a, b) \to \mathbb{R}$ egy integrálható pozitív függvény (a, b)-n. Ha $X = (a, b)$, $\mathcal{S} = (a, b)$ Lebesgue-mérhető részhalmazainak osztálya, úgy

$$\mu^{(\varrho)}E = \int_E \varrho(t)dt \qquad (E \in \mathcal{S})$$

mérték $\mathcal{S}$-en. A $L_2(X, \mathcal{S}, \mu^{(\varrho)})$ Hilbert-teret a ϱ *sűrűségfüggvényre nézve*, vagy az

$$r(x) = \int_a^x \varrho(t)dt \qquad x \in (a, b)$$

*súlyfüggvényre nézve négyzetesen integrálható függvények teré*nek nevezzük, és $L_2^{(\varrho)}(a, b)$-vel jelöljük. Könnyű belátni, hogy

$$\int_E x(t)d\mu^{(\varrho)} = \int_E x(t)\varrho(t)dt,$$

így $x \in L_2^{(\varrho)}(a, b)$ akkor és csakis akkor, ha x mérhető és $|x|^2\varrho$ integrálható (a, b)-n.

6.2. Ortogonális felbontás

6.2.1. Definíció. Egy H Hilbert-tér x, y elemeit *ortogonális*nak nevezzük, ha

$$\langle x, y\rangle = 0, \qquad \text{jelölése: } x \perp y.$$

Az $M, N \subset H$ halmazokat *ortogonális*nak nevezzük, ha bármely $m \in M$, $n \in N$ esetén $m \perp n$. Jelölés: $M \perp N$.

Az $M \subset H$ halmaz bármely elemére ortogonális H-beli elemek összességét M *ortogonális komplementeré*nek nevezzük. Jelölés: $M^{\perp}$. $\diamondsuit$

6.2.1. Tétel. *Egy Hilbert-tér bármely részhalmazának ortogonális komplementere zárt lineáris altér.*

Bizonyítás. Ha $x, y \in M^\perp$, úgy minden $m \in M$-re $\langle x, m\rangle = \langle y, m\rangle = 0$, így $\langle \alpha x + \beta y, m\rangle = 0$, tehát $\alpha x + \beta y \in M^\perp$.

Ha $x \in \overline{M^\perp}$, akkor van olyan $x_n \in M^\perp$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat, hogy $x_n \to x$, ha $n \to \infty$. Mivel $\langle x_n, m\rangle = 0$ $(m \in M)$ a skaláris szorzat folytonossága miatt $n \to \infty$-nel $\langle x, m\rangle = 0$, azaz $x \in M^\perp$. □

6.2.2. Tétel. (ortogonális felbontás tétele) *Legyen H' a H Hilbert-tér zárt lineáris altere, akkor bármely $x \in H$ elem egyértelműen előállítható*

$$x = x' + x''$$

alakban, ahol $x' \in H'$, $x'' \in H'^\perp$.

Figyelembevéve az 5.7.4 definíciót, tételünk azt jelenti, hogy egy *Hilbert-térben minden zárt lineáris H' altér komplementeres altér*, és a

$$H = H' \oplus H'^\perp$$

direkt összeg egyúttal ún. *ortogonális összeg* is: $H' \perp H'^\perp$.

Bizonyítás. Legyen $x \in H$ és $d = \varrho(x, H') = \inf_{h' \in H'} \|x - h'\|$ az x távolsága H'-től.

Megmutatjuk, hogy van olyan $x' \in H'$, melyre $d = \|x - x'\|$. Legyen ugyanis $h'_n \in H'$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan sorozat, hogy $\|x - h'_n\| \to d$ ha $n \to \infty$. A parallelogramma azonosságot felhasználva

$$\begin{aligned}
\|h'_n - h'_m\|^2 &= \big\|(x - h'_m) - (x - h'_n)\big\|^2 \\
&= 2\|x - h'_m\|^2 + 2\|x - h'_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{h'_m + h'_n}{2}\right\|^2 \\
&\le 2\|x - h'_m\|^2 + 2\|x - h'_n\|^2 - 4d^2 \to 0 \qquad \text{ha } n, m \to \infty,
\end{aligned}$$

így $\{h'_n\}$ Cauchy-sorozat. Ezért $\{h'_n\}$ konvergens, $h'_n \to x'$ ha $n \to \infty$, és H' zártsága miatt $x' \in H'$. Innen

$$d = \lim_{n\to\infty} \|x - h'_n\| = \|x - x'\|.$$

Megmutatjuk, hogy $x = x' + (x - x')$ az x elem keresett felbontása, azaz $x'' = x - x'$ ortogonális H'-re. Legyen $0 \ne y' \in H'$ tetszőleges, akkor

$$\begin{aligned}
d^2 = \|x - x'\|^2 &\le \|x - x' + \lambda y'\|^2 = \|x'' + \lambda y'\|^2 = \big\langle x'' + \lambda y' \,, x'' + \lambda y'\big\rangle \\
&= d^2 + \lambda\langle y' \,, x''\rangle + \overline{\lambda}\left[\langle x'' \,, y'\rangle + \lambda\|y'\|^2\right].
\end{aligned}$$

Válasszuk λ-t úgy, hogy a szögletes zárójelben lévő kifejezés eltűnjön, azaz legyen

$$\lambda = -\frac{\langle x'', y' \rangle}{\|y'\|^2},$$

akkor

$$d^2 \leq d^2 - \frac{|\langle x'', y' \rangle|^2}{\|y'\|^2},$$

ami csak úgy lehetséges, ha $\langle x'', y' \rangle = 0$. Mivel ez $y' = 0$-ra is igaz, így $x'' \perp H'$, azaz $x'' \in H'^{\perp}$.

A felbontás egyértelmű, ugyanis ha

$$x = x' + x'' = x_1 + x_2 \qquad (x', x_1 \in H',\ x'', x_2 \in H'^{\perp}),$$

akkor, mivel H' és $H'^{\perp}$ is alterek, $H' \ni x' - x_1 = x_2 - x'' \in H'^{\perp}$, de az egyenlőség két oldalán álló vektorok ortogonálisak, így

$$0 = \langle x' - x_1, x_2 - x'' \rangle = \langle x' - x_1, x' - x_1 \rangle = \|x' - x_1\|^2,$$

amiből $x' = x_1,\ x'' = x_2$.

□

x'-t az x elem H' altérre vonatkozó *(ortogonális) projekciójá*nak nevezzük.

6.3. Ortonormált rendszerek

6.3.1. Definíció. Egy Hilbert-tér elemeinek $\{\varphi_\alpha\}$ $(\alpha \in \Gamma)$ rendszerét *ortogonális rendszer*nek nevezzük, ha

$$\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \|\varphi_\alpha\|^2 \qquad (\alpha, \beta \in \Gamma),$$

*ortonormált rendszer*nek nevezzük, ha

$$\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta \in \Gamma),$$

ahol

$$\delta_{\alpha\beta} := \begin{cases} 1 & \text{ha } \alpha = \beta \\ 0 & \text{ha } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

a *Kronecker szimbólum.* Ha $\Gamma = \mathbb{N}$, akkor *ortogonális sorozat*ról, illetve *ortonormált sorozat*ról beszélünk. ♢

6.3.1. Tétel. (Schmidt-féle ortogonalizálás) *Ha $x_1, x_2, \dots$ egy Hilbert-tér lineárisan független elemeinek egy (megszámlálható) rendszere, akkor létezik olyan $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ (megszámlálható) ortonormált rendszer, hogy $n = 1, 2, \dots$-re*

$$\begin{aligned} \varphi_n &= c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n, \\ x_n &= \gamma_{n1}\varphi_1 + \gamma_{n2}\varphi_2 + \cdots + \gamma_{nn}\varphi_n \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

ahol $c_{ni},\ \gamma_{ni} \in \mathbb{K}$ skalárok, $c_{nn},\ \gamma_{nn} > 0$ $(i = 1, \dots, n;\ n = 1, 2, \dots)$.

Bizonyítás. Legyen $y_1 = x_1$ és $\varphi_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$, azaz $c_{11} = \frac{1}{\gamma_{11}} = \frac{1}{\|y_1\|} > 0$, és (6.3.1) teljesül. Mivel $x_1, x_2, \dots$ lineárisan függetlenek, $y_1 = x_1 \neq 0$. φ_2 értelmezéséhez legyen

$$y_2 = x_2 + \lambda_{21}\varphi_1,$$

és λ_{21}-et válasszuk úgy, hogy y_2 a φ_1-re ortogonális legyen:

$$0 = \langle y_2\,, \varphi_1 \rangle = \langle x_2\,, \varphi_1 \rangle + \lambda_{21}\langle \varphi_1\,, \varphi_1 \rangle = \langle x_2\,, \varphi_1 \rangle + \lambda_{21}$$

amiből

$$\lambda_{21} = -\langle x_2\,, \varphi_1 \rangle,$$

és legyen

$$\varphi_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}.$$

$y_2 \neq 0$, különben x_2 és φ_1, azaz x_2 és x_1 lineárisan függők lennének. Ekkor φ_2 az x_2 és φ_1 lineáris kombinációja, és fordítva, x_2 az y_2 és φ_1, ennélfogva φ_2 és φ_1 lineáris kombinációja. Látható az is, hogy φ_1 és φ_2 ortonormált rendszer és

$$c_{22} = \frac{1}{\gamma_{22}} = \frac{1}{\|y_2\|} > 0.$$

Tegyük fel, hogy $\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$-et már meghatároztuk úgy, hogy ezek ortonormált rendszert alkotnak és $n = 1, \dots, k-1$-re (6.3.1) teljesül. Legyen

$$y_k = x_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki}\varphi_i.$$

A λ_{ki} együtthatókat az $y_k \perp \varphi_i$ $(i = 1, \dots, k-1)$ feltételekből meghatározva $\lambda_{ki} = -\langle x_k\,, \varphi_i \rangle$ adódik, $y_k \neq 0$, mert ellenkező esetben x_k a $\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$ elemek lineáris kombinációja lenne, s így indukciós feltevésünk miatt x_k az $x_1, \dots, x_{k-1}$ elemek lineáris kombinációja volna, ami ellentmond az $x_1, \dots, x_k$ vektorrendszer lineáris függetlenségének. Legyen

$$\varphi_k = \frac{y_k}{\|y_k\|},$$

akkor $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ ortonormált rendszer, φ_k az $x_k, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$ elemek lineáris kombinációja, így mivel (6.3.1) $n = 1, \dots, k-1$-re fennáll, φ_k az $x_1, \dots, x_k$ elemek lineáris kombinációja, és hasonlóan x_k a $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ elemek lineáris kombinációja. Fennáll továbbá $c_{kk} = \frac{1}{\gamma_{kk}} = \frac{1}{\|y_k\|} > 0$ is.

□

6.4. Ortogonális sorok

6.4.1. Definíció. Legyen $\{\varphi_n\}$ egy ortonormált sorozat a H Hilbert-térben, $\{\alpha_n\}$ skalárok egy sorozata, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$ sort *ortogonális sor*nak nevezzük.

◊

6.4.1. Lemma. *Legyen H egy Hilbert-tér, $x_k \in H$ ($k \in \mathbb{N}$), és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergens sor (normában), akkor bármely $y \in H$ esetén*

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k \,, y \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k \,, y \rangle.$$

Ha $x_1, \dots, x_n \in H$ páronként ortogonális elemek, akkor

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

Bizonyítás. Az első állítás a skaláris szorzat folytonosságából (6.1.5 tétel) következik:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k \,, y \right\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \,, y \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x_k \,, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k \,, y \rangle,$$

míg a második a baloldal kiszámításával igazolható:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 &= \langle x_1 + \dots + x_n \,, x_1 + \dots + x_n \rangle \\ &= \langle x_1 \,, x_1 \rangle + \dots + \langle x_n \,, x_n \rangle = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2. \end{aligned}$$

□

6.4.1. Tétel. *A* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$ *ortogonális sor akkor és csakis akkor konvergens (normában), ha a* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ *numerikus sor konvergens.*

Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$ *ortogonális sor normában konvergens és összege* x*, akkor*

$$\alpha_k = \langle x\,, \varphi_k \rangle \quad (k \in \mathbb{N}),$$

és

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

Bizonyítás. Legyen $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor a 6.4.1. lemma alapján

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |\alpha_k|^2,$$

így a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$ sorra a Cauchy-féle konvergencia kritérium akkor és csakis akkor teljesül, ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ sorra teljesül a Cauchy-féle konvergencia kritérium, amiből állításunk első része következik.

Ismét a 6.4.1. lemmát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\langle x\,, \varphi_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i\,, \varphi_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \langle \varphi_i\,, \varphi_k \rangle = \alpha_k,$$

$$\langle x\,, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i\,, x \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \langle \varphi_i\,, x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2.$$

□

6.4.2. Definíció. Legyen $\{\varphi_k\}$ egy ortonormált sorozat a H Hilbert-térben, $x \in H$. A $c_k = \langle x\,, \varphi_k \rangle$ $(k \in \mathbb{N})$ számokat az x elem *Fourier-együtthatói*nak nevezzük a $\{\varphi_k\}$ ortonormált sorozatra nézve. Ezen együtthatókkal képzett $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ ortogonális sort pedig x *Fourier-sorá*nak nevezzük $\{\varphi_k\}$-ra nézve. ♢

6.4.2. Tétel. *Legyen* $\{\varphi_k\}$ *egy ortonormált sorozat a* H *Hilbert-térben,* $\{\alpha_k\}$ *skalárok egy sorozata,* $c_k = \langle x\,, \varphi_k \rangle$ $(k \in \mathbb{N})$ *az* $x \in H$ *elem Fourier-együtthatói, akkor*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - \alpha_k|^2, \tag{6.4.1}$$

speciálisan $\alpha_k = c_k$*-val*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2. \tag{6.4.2}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \,, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle \varphi_k \,, x \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \langle x \,, \varphi_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_k} \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \overline{c_k} + \overline{\alpha_k} c_k - \alpha_k \overline{\alpha_k}) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - \alpha_k|^2.
\end{aligned}$$

□

Következmények.

1. *Az x elemhez legközelebbi eleme a $[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ lineáris altérnek éppen x $\{\varphi_k\}$ szerinti Fourier-sorának n-edik részletösszege.*

   Ugyanis (6.4.1) jobboldala $\alpha_k = c_k$ esetén lesz minimális.

2. *Bármely x elemre fennáll a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le \|x\|^2 \qquad (c_k = \langle x \,, \varphi_k \rangle,\ k \in \mathbb{N}) \tag{6.4.3}$$

   ún. Bessel-féle egyenlőtlenség.

   Ugyanis (6.4.2)-ből

$$0 \le \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2,$$

   vagy

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \le \|x\|^2,$$

   amiből $n \to \infty$ határátmenettel kapjuk (6.4.3)-t.

3. *Bármely x elem Fourier-sora normában konvergens* (de nem feltétlenül a sorbafejtett elem az összege, ld. a 6.4.4 tételt).

   Ez a 6.4.1 tétel 1. állításának és a Bessel-egyenlőtlenségnek a következménye.

4. *Ahhoz, hogy egy $x \in H$ elem $\{\varphi_k\}$ ortonormált sorozat szerinti Fourier-sorának összege x legyen szükséges és elegendő, hogy fennálljon az*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \tag{6.4.4}$$

   ún. Parseval-egyenlet.

   Ugyanis (6.4.2) miatt $\left\| x - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 \to 0$, ha $n \to \infty$ akkor és csakis akkor, ha $\|x\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^2 \to 0$, ha $n \to \infty$.

6.4.3. Definíció. A $\{\varphi_k\}$ ortonormált sorozatot *zárt*nak nevezzük, ha bármely $x \in H$ elemre fennáll a (6.4.4) Parseval-egyenlet. ♢

Könnyű belátni, hogy egy $\{\varphi_k\}$ zárt ortonormált sorozat abban az értelemben is zárt, hogy $\overline{[\varphi_1, \varphi_2 \ldots]} = H$.
Egy ortonormált sorozat zártságát nehéz ellenőrizni, ezért bevezetünk egy vele ekvivalens, de könnyebben kezelhető fogalmat.

6.4.4. Definíció. A $\{\varphi_k\}$ ortonormált sorozatot *teljes*nek nevezzük, ha abból, hogy $\langle x , \varphi_k \rangle = 0$, $k \in \mathbb{N}$ következik, hogy $x = 0$. ♢

6.4.3. Tétel. *Egy ortonormált sorozat akkor és csakis akkor zárt, ha teljes.*

Bizonyítás. *Ha $\{\varphi_k\}$ zárt ortonormált sorozat*, úgy teljes is, mert, ha $\langle x , \varphi_k \rangle = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ úgy a Parseval-egyenletből

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle x , \varphi_k \rangle\right|^2 = 0, \qquad \text{így} \qquad x = 0.$$

Fordítva, ha $\{\varphi_k\}$ teljes, úgy zárt is. Ezt indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $\{\varphi_k\}$ teljes, de nem zárt. Akkor van olyan $y \in H$, melyre

$$\|y\|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle y , \varphi_k \rangle\right|^2.$$

Legyen $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$, ahol $c_k = \langle y\,,\varphi_k\rangle$, $(k \in \mathbb{N})$, akkor a 6.6.2 tétel utáni 3. következmény alapján x jóldefiniált. Továbbá a 6.4.1 tétel miatt $c_k = \langle x\,,\varphi_k\rangle$ és $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$. Innen $\langle x\,,\varphi_k\rangle = \langle y\,,\varphi_k\rangle$,

$$\langle x - y\,,\varphi_k\rangle = 0 \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

A teljesség miatt $x = y$, de ez lehetetlen, mert

$$\|y\|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2.$$

□

6.4.4. Tétel. *Legyen $\{\varphi_k\}$ egy tetszőleges (nem feltétlenül zárt) ortonormált sorozat a H Hilbert-térben, akkor bármely $x \in H$ elem $\{\varphi_k\}$ szerinti Fourier-sorának összege x-nek a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ vektorrendszer lineáris burkának lezártjára való ortogonális projekciója.*

Bizonyítás. Legyenek $c_k = \langle x\,,\varphi_k\rangle$ az x Fourier-együtthatói, $y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$ az x Fourier-sorának összege (utóbbi sor a 6.4.2 tétel utáni 3. következmény alapján normában konvergens).
Azt kell megmutatnunk, hogy $x = y + (x - y)$ éppen az x elem ortogonális felbontása a $H_1 = \overline{[\varphi_1, \varphi_2, \ldots]}$ altér szerint, azaz

$$y \in H_1, \quad x - y \in H_1^{\perp}.$$

Világos, hogy $y \in H_1$. Mivel a 6.4.1 tétel alapján $c_k = \langle y\,,\varphi_k\rangle$, így $\langle y\,,\varphi_k\rangle = \langle x\,,\varphi_k\rangle$, azaz

$$x - y \perp \varphi_k.$$

Ebből a skaláris szorzat linearitása miatt

$$x - y \perp [\varphi_1, \varphi_2, \ldots],$$

majd a skaláris szorzat folytonossága miatt $x - y \in H_1^{\perp}$ következik. □

6.5. Példák Fourier-sorra

1. A $L_2(-\pi, \pi)$ Hilbert-térben az $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots$ függvények ortogonális sorozatot alkotnak (amint az könnyen látható), melyet normálva az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \; \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \; \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \; \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \cdots \tag{6.5.1}$$

ortonormált sorozatot kapjuk, melyről bebizonyítható (lásd: [21]), hogy *teljes*. Az (6.5.1) ortonormált sorozat szerinti Fourier-sort *trigonometrikus sor*nak szokás nevezni. A $\sqrt{\pi}$ osztók elkerülése érdekében az együtthatókat itt nem a szokásos skaláris szorzattal, hanem annak $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$-szereseként szokás értelmezni (kivéve a "nulladik" együtthatót). Így az

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos kt\,dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin kt\,dt \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

jelölésekkel $x \in L_2(-\pi,\pi)$ trigonometrikus sora

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos kt + b_k\sin kt\big).$$

Ez ugyanaz a sor, mint amit az 5.4 szakaszban bevezettünk, 2π szerint periódikus folytonos függvények esetén. $x \in L_2(-\pi,\pi)$ trigonometrikus sora (a trigonometrikus rendszer teljessége miatt) L_2 normában konvergál x-hez, és teljesül az

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|x(t)\right|^2 dt = \pi\left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)\right)$$

Parseval-egyenlet. Így bármely $x \in L_2$ esetén a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)$ sor konvergens.

2. Tekintsük az $L_2^{(\varrho)}(a,b)$ Hilbert-teret (lásd: 6.1 szakasz 2. példa), *ahol $\varrho : (a,b) \to \mathbb{R}$ egy integrálható pozitív függvény (a,b)-n. Végtelen (a,b) intervallum esetén tegyük fel még azt is, hogy van olyan $r > 0$, hogy*

$$\int_a^b e^{r|t|}\varrho(t)\,dt < \infty.$$

Ezen feltételek mellett az $1, t, t^2, \dots$ hatványfüggvények $L_2^{(\varrho)}(a,b)$ elemei, melyek egy lineárisan független rendszert alkotnak. Ortonormálva e rendszert egy

$$p_0(t),\ p_1(t),\ p_2(t), \dots$$

polinomsorozatot kapunk, ahol a p_n polinom n-edfokú, és főegyütthatója pozitív. Igazolható, hogy e polinomsorozat teljes ortonormált sorozat $L_2^{(\varrho)}(a,b)$-ben (lásd [21]). Az (a,b) intervallumot és ϱ-t az alábbi módon választva nyerjük a *klasszikus ortogonális polinomokat:*

Név	(a,b)	$\varrho(t)$
Legendre polinomok	(-1,1)	1
Hermite polinomok	$(-\infty,\infty)$	e^{-t^2}
Laguerre polinomok	$(0,\infty)$	e^{-t}
Jacobi polinomok	$(-1,1)$	$(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ $(\alpha,\beta>-1)$
Csebisev polinomok (elsőfajú)	$(-1,1)$	$(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ $(\alpha,\beta=-\frac{1}{2})$
Csebisev polinomok (másodfajú)	$(-1,1)$	$(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ $(\alpha,\beta=\frac{1}{2})$

6.6. Szeparábilis Hilbert-terek

Mely Hilbert-terekben létezik teljes ortonormált sorozat?

6.6.1. Tétel. *Egy Hilbert-térben akkor és csakis akkor létezik teljes ortonormált sorozat, ha a tér végtelen dimenziós (minden n természetes számhoz létezik n darab lineárisan független vektor) és szeparábilis.*

Bizonyítás. *Ha* $\{\varphi_k\}$ *teljes ortonormált sorozat* a H Hilbert-térben, úgy ez lineárisan független rendszer is, tehát H végtelen dimenziós, másrészt a

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} r_k\varphi_k \;\middle|\; r_k \text{ racionális } \; k=1,\dots,n;\; n=1,2,\dots\right\}$$

halmaz (komplex tér esetén r_k valós és képzetes része racionális) megszámlálható mindenütt sűrű halmaz. Ugyanis, ha $x\in H$, $\varepsilon>0$, akkor a teljesség miatt

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k \qquad \big(c_k=\langle x\,,\varphi_k\rangle,\; k\in\mathbb{N}\big),$$

így elég nagy n-re

$$\left\| x-\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

másrészt c_k-hoz van olyan r_k racionális szám, hogy $|c_k-r_k|<\frac{\varepsilon}{2n}$, amiből

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k-\sum_{k=1}^{n} r_k\varphi_k\right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

így
$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} r_k \varphi_k \right\| < \varepsilon.$$

Fordítva, ha H végtelen dimenziós, szeparábilis és $y_1, y_2, \ldots$ egy H-ban sűrű sorozat, úgy hagyjuk el a sorozatból a nullavektort, és mindazon elemeket, melyek az előző elemek lineáris kombinációi. Így egy $x_1, x_2, \ldots$ sorozatot kapunk. Ez valóban végtelen sorozat, mert ha csak véges sok elemet, $x_1, x_2, \ldots, x_N$-et kapnánk íly módon, akkor

$$[x_1, \ldots, x_N] = \overline{[x_1, \ldots, x_N]} = \overline{[y_1, y_2, \ldots]} = H,$$

így a H tér N dimenziós volna, feltevésünkkel ellentétben.
Az $\{x_k\}$ sorozatot ortonormálva egy $\{\varphi_k\}$ ortonormált sorozatot kapunk. Azt állítjuk, hogy ez *teljes* ortonormált sorozat.

Ugyanis, ha $\langle x, \varphi_k \rangle = 0$ $(k \in \mathbb{N})$, úgy $\langle x, x_k \rangle = 0$ $(k \in \mathbb{N})$, sőt $\langle x, y_k \rangle = 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Innen következik, hogy

$$\|x - y_k\|^2 = \|x\|^2 + \|y_k\|^2 \geq \|x\|^2.$$

Mivel az $\{y_k\}$ sorozat sűrű H-ban, így minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy
$$\varepsilon > \|x - y_{k(\varepsilon)}\| \quad (\geq \|x\|), \quad \text{így} \quad \|x\| = 0, \quad x = 0.$$

□

6.6.2. Tétel. *Bármely végtelen dimenziós valós (komplex) szeparábilis Hilbert-tér izomorf és izometrikus a valós (komplex)* l_2 *térrel. Így az összes végtelen dimenziós valós (komplex) szeparábilis Hilbert-terek izometrikusak és izomorfak egymással.*

Bizonyítás. Legyen $\{\varphi_k\}$ egy teljes ortonormált sorozat H-ban, $x \in H$, és legyenek $c_k = \langle x, \varphi_k \rangle$ $(k \in \mathbb{N})$ az x Fourier-együtthatói. Ekkor $\{\varphi_k\}$ teljessége és a 6.4.2 tétel utáni 4. következmény alapján

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \qquad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

c_k értelmezése és a Parseval egyenlet miatt

$$H \ni x \longrightarrow (c_1, c_2, \ldots) \in l_2$$

H-nak izomorf és izometrikus leképezése l_2-re.

□

6.7. Nem szeparábilis Hilbert-terek

Ha H n-dimenziós Hilbert-tér, akkor n darab lineárisan független vektorát ortonormálva a kapott $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ortonormált rendszer segítségével H minden x elemére fennáll

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2, \quad \text{ahol } c_k = \langle x\,, \varphi_k \rangle, \ k = 1, \dots, n.$$

Ekkor tehát x Fourier-sora egy véges összegre redukálódik.

Ha H végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér, akkor láttuk, hogy létezik benne teljes ortonormált sorozat.

Mi a helyzet a *végtelen dimenziós nem szeparábilis Hilbert-tér* esetén?

Legyen H egy tetszőleges Hilbert-tér, és $\{\varphi_\alpha\}$ $(\alpha \in \Gamma)$ egy tetszőleges ortonormált rendszer H-ban. A 6.4.2 definíciónak megfelelően a $c_\alpha = \langle x\,, \varphi_\alpha \rangle$ számokat az $x \in H$ elem $\{\varphi_\alpha\}$ $(\alpha \in \Gamma)$ rendszerre vonatkozó *Fourier-együtthatói*nak nevezzük.
A Fourier-sor értelmezéséhez a következő tétel ad lehetőséget.

6.7.1. Tétel. *Legyen $\{\varphi_\alpha\}$ $(\alpha \in \Gamma)$ egy tetszőleges ortonormált rendszer a H Hilbert-térben, akkor bármely $x \in H$ elemnek csak megszámlálható sok zérustól különböző $c_\alpha = \langle x\,, \varphi_\alpha \rangle$ Fourier-együtthatója van.*

Bizonyítás. Legyen

$$S_0 = \ \left\{c_\alpha \;\middle|\; |c_\alpha| > 1\right\}$$

és

$$S_k = \ \left\{c_\alpha \;\middle|\; \tfrac{1}{k+1} < |c_\alpha| \leq \tfrac{1}{k}\right\} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

akkor $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} S_k$ az összes zérustól különböző c_α Fourier-együtthatók halmaza. Mivel a 6.4.2 tétel (6.4.2) formulája alapján

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |c_{\alpha_k}|^2$$

akárhogyan is választunk ki véges sok $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Gamma$ indexet, kapjuk, hogy mindegyik S_k halmazban legfeljebb véges sok együttható lehet (ellenkező esetben $\|x\| = \infty$ lenne), ebből állításunk már következik. □

Legyen most H egy nem szeparábilis végtelen dimenziós Hilbert-tér, $\{\varphi_\alpha\}$ ($\alpha \in \Gamma$) egy megszámlálhatónál nagyobb számosságú ortonormált rendszer. Legyenek c_{α_k} ($k \in \mathbb{N}$) az $x \in H$ elem $\{\varphi_\alpha\}$-ra vonatkozó zérustól különböző Fourier-együtthatói. A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{\alpha_k}\varphi_{\alpha_k}$ sort az x elem $\{\varphi_\alpha\}$-ra vonatkozó *Fourier-sor*ának nevezzük.

Az általános esetben is érvényes a Bessel-egyenlőtlenség, értelmezhető a zárt és teljes ortonormált rendszer fogalma, és ezek ekvivalensek. Igazolható, hogy minden Hilbert-térben létezik teljes ortonormált rendszer, és bármely két teljes ortonormált rendszer számossága megegyezik (ezt nevezzük a Hilbert-tér dimenziójának). Fennáll a 6.6.2 tétel általánosítása is. Legyen Γ egy tetszőleges halmaz, és jelölje $l_2(\Gamma)$ azon $x : \Gamma \to \mathbb{K}$ függvények halmazát, melyek megszámlálható sok $\alpha \in \Gamma$-tól eltekintve zérus értékűek és $\sum\limits_{\alpha} \big|x(\alpha)\big|^2 < \infty$ (a $\sum\limits_{\alpha}$ azon megszámlálható sok indexre vonatkozik, melyekre $x(\alpha) \neq 0$). $l_2(\Gamma)$ Hilbert-tér a függvények pontonkénti összeadására és a skalárral való szorzásra, valamint az $\langle x\,, y\rangle = \sum\limits_{\alpha} x(\alpha)\overline{y(\alpha)}$ skaláris szorzatra nézve.

Ha H-ban $\{\varphi_\alpha\}$ ($\alpha \in \Gamma$) teljes ortonormált rendszer, akkor H izomorf és izometrikus az $l_2(\Gamma)$ Hilbert-térrel. Így az azonos dimenziós valós (komplex) Hilbert-terek izomorfak és izometrikusak egymással.

6.8. Riesz-tétel, adjungált operátor

6.8.1. Tétel. (Riesz) *Legyen H egy Hilbert-tér, $f \in H^*$ tetszőleges lineáris korlátos funkcionál H-n, akkor létezik az f által egyértelműen meghatározott olyan $u \in H$ elem, hogy*

$$f(x) = \langle x\,, u\rangle \qquad (x \in H) \tag{6.8.1}$$

$$\|f\| = \|u\|. \tag{6.8.2}$$

Bizonyítás. Az f funkcionál $\mathcal{N} = \mathcal{N}(f) = \big\{x \in H \bigm| f(x) = 0\big\}$ nulltere zárt lineáris altér H-ban.

Ha $\mathcal{N} = H$, akkor $u = 0$-val teljesül (6.8.1).

Ha $\mathcal{N} \neq H$, akkor a $H = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$ felbontásban (lásd 6.6.2 tétel) $\mathcal{N}^\perp \neq \{0\}$. Legyen $v_0 \in \mathcal{N}^\perp$, $v_0 \neq 0$, akkor bármely $x \in H$ esetén

$$f(x)v_0 - f(v_0)x \in \mathcal{N},$$

mert

$$f\big(f(x)v_0 - f(v_0)x\big) = f(x)f(v_0) - f(v_0)f(x) = 0.$$

Így

$$\Big\langle f(x)v_0 - f(v_0)x\,,v_0\Big\rangle = \;0,$$

$$f(x)\,\|v_0\|^2 - f(v_0)\big\langle x\,,v_0\big\rangle = \;0,$$

$$f(x) = \;\left\langle x\,,\frac{\overline{f(v_0)}v_0}{\|v_0\|^2}\right\rangle = \big\langle x\,,u\big\rangle,$$

ahol $u = \dfrac{\overline{f(v_0)}\,v_0}{\|v_0\|^2}$. Ezzel (6.8.1)-et igazoltuk.
Az egértelműség igazolásához legyen

$$f(x) = \big\langle x\,,u\big\rangle = \big\langle x\,,u'\big\rangle \qquad (x \in H),$$

akkor

$$\big\langle x\,,u-u'\big\rangle = 0 \qquad (x \in H),$$

amiből $x = u - u'$-vel, $\|u-u'\|^2 = 0$, $u = u'$.

Az $\|f\|$-ra vonatkozó (6.8.2) állítás abból adódik, hogy (a Schwarz-egyenlőtlenség szerint fennálló)

$$|f(x)| = \big|\big\langle x\,,u\big\rangle\big| \leq \|x\| \cdot \|u\|$$

miatt $\|f\| \leq \|u\|$. Így $u = 0$ esetén $\|f\| = \|u\| = 0$, másrészt ha $u \neq 0$, akkor

$$|f(u)| = \big|\big\langle u\,,u\big\rangle\big| = \|u\| \cdot \|u\|,$$

így $\|f\| \geq \|u\|$.

□

Definiáljuk a $\sigma : H^* \to H$ leképezést $\sigma f = u$-val, ahol u f (6.8.1) előállításában szereplő elem. Világos, hogy σ kölcsönösen egyértelmű izometrikus leképezése H^*-nak H-ra, továbbá bármely $f, g \in H^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$ mellett

$$\begin{aligned} \sigma(f+g) = &\; \sigma f + \sigma g \\ \sigma(\lambda f) = &\; \overline{\lambda}\sigma f, \end{aligned}$$

azaz σ *konjugált-lineáris leképezés.* Valós H Hilbert-terek esetén így H^* izomorf és izometrikus H-val.

6.8.2. Tétel. *Egy Hilbert-tér konjugált tere is Hilbert-tér, és bármely Hilbert-tér reflexív.*

Bizonyítás. A H Hilbert-tér H^* konjugált terében

$$\langle f\,,g\rangle_1 = \langle \sigma g\,,\sigma f\rangle \qquad (f,g\in H^*)$$

skaláris szorzat, mert

$$\langle f_1+f_2\,,g\rangle_1=\langle \sigma g\,,\sigma(f_1+f_2)\rangle = \langle \sigma g\,,\sigma f_1\rangle + \langle \sigma g\,,\sigma f_2\rangle = \langle f_1\,,g\rangle_1 + \langle f_2\,,g\rangle_1,$$

$$\langle \lambda f\,,g\rangle_1=\langle \sigma g\,,\sigma(\lambda f)\rangle = \langle \sigma g\,,\overline{\lambda}\sigma f\rangle = \lambda\langle \sigma g\,,\sigma f\rangle = \lambda\langle f\,,g\rangle_1,$$

$$\langle f\,,g\rangle_1=\langle \sigma g\,,\sigma f\rangle = \overline{\langle \sigma f\,,\sigma g\rangle} = \overline{\langle g\,,f\rangle_1},$$

$$\langle f\,,f\rangle_1=\langle \sigma f\,,\sigma f\rangle \geq 0 \;\text{ és }\; = 0 \iff \sigma f = 0 \iff f=0.$$

Mivel $\|f\| = \|\sigma f\|$, így H^* normája éppen $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_1$-ből származik. Ezzel beláttuk, hogy H^* Hilbert-tér.

H reflexivitásának igazolásához legyen $\mathcal{J}$ a H-nak H^{**}-ba való természetes leképezése, azaz

$$\mathcal{J}x = F_x \qquad (x\in H),$$

ahol $F_x(f) = f(x)$ $(x\in H, f\in H^*)$. Azt kell igazolni, hogy $\mathcal{J}$ a H^{**}-ra képez le, azaz minden H^{**}-beli funkcionál F_x alakú. Legyen $F\in H^{**}$, akkor Riesz tételét alkalmazva a H^* Hilbert-térre kapjuk, hogy van pontosan egy olyan $g\in H^*$, melyre

$$F(f) = \langle f\,,g\rangle_1 \qquad (f\in H^*).$$

Innen

$$F(f) = \langle \sigma g\,,\sigma f\rangle = \langle v\,,u\rangle,$$

ahol $u=\sigma f,\ v=\sigma g$, azaz

$$f(x) = \langle x\,,u\rangle,\ \ g(x) = \langle x\,,v\rangle \qquad (x\in H)$$

Speciálisan $f(v) = \langle v\,,u\rangle$, így

$$F(f) = f(v) = F_v(f), \qquad (f\in H^*),$$

azaz $F=F_v$, amivel állításunkat igazoltuk. □

6.8.1. Definíció. Legyen $A\in\mathcal{B}(H,H)$ a H Hilbert-teret önmagába leképező lineáris korlátos operátor. Fix $y\in H$ mellett

$$f_y(x) = \langle Ax\,,y\rangle$$

lineáris korlátos funkcionál, mert

$$\begin{aligned} f_y(x_1+x_2) &= \big\langle A(x_1+x_2)\,,y\big\rangle = \big\langle Ax_1\,,y\big\rangle + \big\langle Ax_2\,,y\big\rangle = f_y(x_1)+f_y(x_2), \\ f_y(\lambda x) &= \big\langle A(\lambda x)\,,y\big\rangle = \lambda\big\langle Ax\,,y\big\rangle = \lambda f_y(x), \\ |f_y(x)| &= \big|\big\langle Ax\,,y\big\rangle\big| \le \|Ax\|\cdot\|y\| \le \|A\|\,\|x\|\,\|y\|, \text{ így } \|f_y\| \le \|A\|\,\|y\|. \end{aligned}$$

A Riesz-tétel alapján létezik olyan $y^* \in H$, hogy

$$\big\langle Ax\,,y\big\rangle = f_y(x) = \big\langle x\,,y^*\big\rangle \quad (x\in H) \qquad \text{és} \qquad \|f_y\| = \|y^*\|$$

teljesül. Az $A^*y = y^*$-gal definiált A^* operátort A *adjungáltjá*nak nevezzük. $\diamondsuit$

6.8.3. Tétel. *Ha $A \in \mathcal{B}(H,H)$, akkor $A^* \in \mathcal{B}(H,H)$ és*

$$\|A\| = \|A^*\|, \quad \|A^*A\| = \|A^*\|\cdot\|A\| = \|A\|^2.$$

Bizonyítás. Világos, hogy $A^* : H \to H$. A^* *lineáris*, mert

$$\begin{aligned} \big\langle Ax\,,y_1\big\rangle &= \big\langle x\,,A^*y_1\big\rangle \\ \big\langle Ax\,,y_2\big\rangle &= \big\langle x\,,A^*y_2\big\rangle, \end{aligned}$$

így összeadással, ill. $A^*(y_1+y_2)$ definiciója szerint

$$\begin{aligned} \big\langle Ax\,,y_1+y_2\big\rangle &= \big\langle x\,,A^*y_1+A^*y_2\big\rangle, \\ \big\langle Ax\,,y_1+y_2\big\rangle &= \big\langle x\,,A^*(y_1+y_2)\big\rangle. \end{aligned}$$

A baloldalak egyenlősége miatt a jobboldalak is egyenlők, s mivel $x \in H$ tetszőleges, innen

$$A^*(y_1+y_2) = A^*y_1 + A^*y_2.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$A^*(\lambda y) = \lambda A^*y.$$

A^* *korlátos*, mert

$$\|A^*y\| = \|y^*\| = \|f_y\| \le \|A\|\cdot\|y\|,$$

így $\|A^*\| \le \|A\|$. Megmutatjuk, hogy $(A^*)^* = A$. Ugyanis

$$\big\langle A^*x\,,y\big\rangle = \big\langle x\,,(A^*)^*y\big\rangle,$$

másrészt

$$\big\langle A^*x\,,y\big\rangle = \overline{\big\langle y\,,A^*x\big\rangle} = \overline{\big\langle Ay\,,x\big\rangle} = \big\langle x\,,Ay\big\rangle,$$

amiből $Ay = (A^*)^*y$ $(y \in H)$, azaz $(A^*)^* = A$ következik.
Ezt felhasználva

$$\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|, \quad \text{így} \quad \|A\| = \|A^*\|.$$

A normára vonatkozó másik egyenlőség igazolásához csak azt kell igazolni, hogy

$$\|A^*A\| \geq \|A^*\| \cdot \|A\|.$$

Bármely $x, y \in H$ esetén

$$\langle A^*Ax\,, y\rangle = \langle Ax\,, Ay\rangle,$$

így $x = y$ választással, a Schwarz-egyenlőtlenség miatt

$$\|Ax\|^2 = \langle A^*Ax\,, x\rangle \leq \|A^*Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A^*A\| \cdot \|x\|^2,$$

amiből

$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\|,$$

s ez $\|A^*\| = \|A\|$ miatt éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség.

□

6.8.4. Tétel. *Bármely* $A, B \in \mathcal{B}(H, H)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *mellett*

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \qquad (AB)^* = B^*A^*,$$

$$(\lambda A)^* = \overline{\lambda}A^*, \qquad (A^*)^* = A.$$

Bizonyítás. A legutolsó állítást már igazoltuk az előző tétel bizonyítása során. A maradék bizonyítása hasonló, ezt az olvasóra bízzuk.

□

6.8.5. Tétel. *Bármely* $A \in \mathcal{B}(H, H)$ *esetén*

$$H = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{N}(A^*),$$

ahol $\mathcal{R}(A)$ *az* A *operátor képtere,* $\mathcal{N}(A^*)$ *az* A^* *adjungált operátor nulltere.*

Bizonyítás. Az $\overline{\mathcal{R}(A)}$ zárt lineáris altérre az ortogonális felbontás tételét alkalmazva

$$H = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}^{\perp}.$$

Megmutatjuk, hogy $\overline{\mathcal{R}(A)}^{\perp} = \mathcal{N}(A^*)$. Ha $y \in \overline{\mathcal{R}(A)}^{\perp}$, úgy $y \perp \overline{\mathcal{R}(A)}$, $y \perp \mathcal{R}(A)$, azaz $\langle y\,, Ax\rangle = 0$ $(x \in H)$, amiből $\langle A^*y\,, x\rangle = 0$ $(x \in H)$, innen x tetszőleges volta miatt $A^*y = 0$, $y \in \mathcal{N}(A^*)$.

Fordítva, ha $y \in \mathcal{N}(A^*)$, akkor $A^*y = 0$, így bármely $x \in H$ elem esetén $0 = \langle A^*y\,, x\rangle = \langle y\,, Ax\rangle$, azaz $y \perp \mathcal{R}(A)$, innen $y \perp \overline{\mathcal{R}(A)}$, azaz $y \in \overline{\mathcal{R}(A)}^{\perp}$.

□

6.8.1. Következmény. Ha $A \in \mathcal{B}(H,H)$, $A_\lambda = A - \lambda I$, ahol I az identikus operátor, $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor

$$H = \overline{\mathcal{R}(A_\lambda)} \oplus \mathcal{N}(A_\lambda^*).$$

7. fejezet

Banach-algebrák

7.1. Banach-algebra fogalma, példák

7.1.1. Definíció. Az X halmazt *Banach-algebrá*nak nevezzük, ha X normált algebra a *komplex* számtest felett, mely teljes a normából származó metrikában.

Az X algebrának az Y algebrába való A lineáris leképezését *homomorf leképezés*nek nevezzük, ha minden $x, y \in X$ esetén $A(xy) = (Ax)(Ay)$ teljesül.

X-nek Y-ra való kölcsönösen egyértelmű homomorf leképezését *izomorf leképezés*nek mondjuk.

Azt mondjuk, hogy az X algebra *izomorf* az Y algebrával, ha X-nek van izomorf leképezése Y-ra.

Az X algebra egy X_1 részhalmazát X *részalgebrájának* nevezzük, ha X_1 maga is algebra X műveleteire nézve.

Az X Banach-algebrát *egységelemes*nek nevezzük, ha létezik benne egy e elem (melyet egységelemnek mondunk) úgy, hogy $\|e\| = 1$ és $ex = xe = x$ bármely $x \in X$-re.

Egy Banach-algebrát *kommutatív*nak nevezzük, ha benne a szorzás kommutatív. $\diamondsuit$

Ha egy Banach-algebra nem egységelemes, úgy izometrikus és izomorf módon beágyazható egy egységelemes Banach-algebrába.

Legyen ugyanis X egy Banach-algebra és jelölje X_1 az összes (x, α) párok halmazát, ahol $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$. A műveleteket és a normát az

$$\begin{aligned}
(x, \alpha) + (y, \beta) &= (x + y,\ \alpha + \beta) \\
\lambda(x, \alpha) &= (\lambda x, \lambda\alpha) \\
(x, \alpha)(y, \beta) &= (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta) \\
\big\|(x, \alpha)\big\| &= \|x\| + |\alpha|
\end{aligned}$$

összefüggésekkel definiálva X_1 Banach-algebra lesz, melynek $e = (0, 1)$ egységeleme, és az $x \to (x, 0)$ leképezés izometrikus izomorfizmusa X-nek X_1-be.

A következő tétel azt mutatja, hogy az egységelem definíciójában az $\|e\| = 1$ feltétel nem lényeges.

7.1.1. Tétel. *Ha X egy Banach-algebra és $e \neq 0$ olyan eleme, hogy bármely $x \in X$ mellett $ex = xe = x$, akkor van olyan, az eredeti normával ekvivalens norma, mellyel X-et ellátva, X egységelemes Banach-algebra.*

Bizonyítás. Bármely $x \in X$ esetén jelölje M_x az x-szel való baloldali szorzás operátorát, azaz legyen

$$M_x z = xz \quad (z \in X).$$

Világos, hogy $M_x : X \to X$ lineáris operátor, mely

$$\|M_x z\| = \|xz\| \leq \|x\| \cdot \|z\|$$

miatt korlátos is, és $\|M_x\| \leq \|x\|$. Továbbá

$$\|x\| = \|xe\| = \|M_x e\| \leq \|M_x\| \cdot \|e\|.$$

Legyen $\|x\|_1 = \|M_x\|$, $(x \in X)$, akkor $\|\cdot\|_1$ norma X-en, mert

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= \|M_x\| \geq 0 \text{ és } |x\|_1 = 0 \text{ akkor és csakis akkor, ha } x = 0,\\
\|\alpha x\|_1 &= \|M_{\alpha x}\| = \|\alpha M_x\| = |\alpha|\|M_x\| = |\alpha|\|x\|_1,\\
\|x + y\|_1 &= \|M_{x+y}\| = \|M_x + M_y\| \leq \|M_x\| + \|M_y\| = \|x\|_1 + \|y\|_1,\\
\|xy\|_1 &= \|M_{xy}\| = \|M_x M_y\| \leq \|M_x\|\|M_y\| = \|x\|_1\|y\|_1,
\end{aligned}$$

továbbá az

$$\|x\|_1 = \|M_x\| \leq \|x\| \leq \|M_x\|\|e\| = \|x\|_1\|e\|,$$

egyenlőtlenség szerint $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|$ ekvivalensek. Mivel $\|e\|_1 = \|M_e\| = \|I\| = 1$, így csak azt kell még megmutatnunk, hogy $(X, \|\cdot\|_1)$ teljes. Legyen $\{x_n\}$ egy Cauchy-sorozat $(X, \|\cdot\|_1)$-ben, akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N(\varepsilon)$, hogy

$$\|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon \quad \text{ha } n, m > N(\varepsilon),$$

vagy

$$\|M_{x_n} - M_{x_m}\| < \varepsilon \quad \text{ha } n, m > N(\varepsilon).$$

Ez azt jelenti, hogy $\{M_{x_n}\}$ Cauchy-sorozat $\mathcal{B}(X, X)$-ben, így (a 4.3.5 tétel miatt) konvergens. Létezik tehát egy $A \in \mathcal{B}(X, X)$ úgy, hogy

$$\|M_{x_n} - A\| \to 0 \quad \text{ha } n \to \infty.$$

De ekkor M_{x_n} pontonként is A-hoz konvergál, azaz $M_{x_n}z \to Az$ bármely $z \in X$-re ha $n \to \infty$, így

$$Az = \lim_{n\to\infty} M_{x_n}z = \lim_{n\to\infty} x_n z = \lim_{n\to\infty}(x_n e)z = \lim_{n\to\infty}(M_{x_n}e)z = (Ae)z$$

Legyen $x = Ae$, akkor

$$Az = xz = M_x z, \ (z \in X) \quad A = M_x$$

azaz

$$\|x_n - x\|_1 = \|M_{x_n} - M_x\| \to 0 \text{ ha } n \to \infty,$$

vagyis $(X, \|\cdot\|_1)$ teljes. □

Egy Banach-térben az összeadás, skalárral való szorzás, és a norma folytonos függvények. Banach-algebrában ezenkívül a szorzás is folytonos, mert ha $x_n \to x, \ y_n \to y$ $(n \to \infty)$, akkor az

$$\|x_n y_n - xy\| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\|$$

egyenlőtlenség miatt $x_n y_n \to xy$, ha $n \to \infty$.

Példák.

1. A (komplex) $C(X)$ Banach-tér kommutatív, egységelemes Banach-algebra, ha a szorzást a szokásos pontonkénti szorzással értelmezzük $(xy)(t) = x(t)y(t)$ $(t \in X, \ x, y \in C(X))$. Az egységelem a konstans 1 függvény.

2. Ha 1.-ben X egy véges halmaz, mely mondjuk n darab pontból áll, a diszkrét topológiával ellátva, úgy $C(X)$ éppen $\mathbb{C}^n$ a koordinátánkénti műveletekkel és a

$$\|z\| = \|(z_1, \ldots, z_n)\| = \max_{1\leq i\leq n} |z_i|$$

normával.

3. Speciálisan $n = 1$-nél kapjuk a legegyszerűbb Banach-algebrát, a komplex számok $\mathbb{C}$ Banach-algebráját. Ez egységelemes, kommutatív Banach-algebra.

4. Legyen X egy komplex Banach-tér, akkor az X-et X-be leképező lineáris, korlátos operátorok $\mathcal{B}(X, X)$ összesége egységelemes, nemkommutatív (ha $\dim X > 1$) Banach-algebra. Az előző tétel bizonyításából látható, hogy bármely egységelemes Banach-algebra izomorf és izometrikus $\mathcal{B}(X, X)$ egy részalgebrájával (olyan részhalmaz, mely maga is algebra), ugyanis ekkor $x \mapsto M_x$ izomorf és izometrikus leképezés.

5. Ha $\dim X = n < \infty$, akkor $\mathcal{B}(X, X)$ izomorf és izometrikus az $n \times n$-es komplex elemű mátrixok Banach-algebrájával. Ebben a Banach-algebrában minden elem valamely polinom zérushelye, ugyanis ha A egy $n \times n$-es mátrix, $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ a karakterisztikus polinomja, ahol E az $n \times n$-es egységmátrix, akkor a Cayley-Hamilton tétel szerint $p(A) = 0$.

6. A $L_1(-\infty, \infty)$ Banach-tér kommutatív Banach-algebra lesz, ha benne a szorzást a konvolúciószorzással definiáljuk:

$$(xy)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)y(s)ds \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

Megjegyzés. Korábbi vizsgálataink során a skalárokat a valós, vagy komplex testből vettük, és eredményeink többnyire mindkét esetben érvényesek voltak. Most csak *komplex test feletti* Banach-algebrákat vizsgálunk. Ennek egyik oka az, hogy a komplex változós függvények elméletének néhány tétele fontos szerepet játszik a Banach-algebráknál. Egy másik ok az, hogy a komplex testben van egy természetes involúció (lásd a 7.10.1 definíciót) - a konjugálás, és bizonyos Banach-algebrák tulajdonságai attól függenek, hogy van-e bennük involúció.

7.2. Reguláris elemek, spektrum, rezolvens halmaz

A továbbiakban, hacsak mást nem mondunk, mindig feltételezzük, hogy X *egy egységelemes Banach-algebra e egységelemmel.*

7.2.1. Definíció. Az $x \in X$ elemet *reguláris*-nak, vagy invertálhatónak nevezzük, ha létezik olyan $x^{-1} \in X$ elem, melyre $xx^{-1} = x^{-1}x = e$

Az $x \in X$ elemet *szinguláris*nak nevezzük, ha nem reguláris.

Azon λ komplex számok halmazát, melyekre $x - \lambda e$ reguláris x *rezolvens halmaz*ának nevezzük és $\varrho(x)$-szel jelöljük, míg az olyan λ értékek halmazát, amelyre $x - \lambda e$ szinguláris x *spektrum*ának nevezzük és $\sigma(x)$-szel jelöljük. $\diamondsuit$

Az egységelem mindig reguláris, a zéruselem mindig szinguláris. A következő tétel megmutatja, hogy az egységelemhez "közeli" elemek is regulárisak.

7.2.1. Tétel. *Ha X egy egységelemes Banach-algebra, $x \in X$, $\|x\| < 1$, akkor $e - x$ is reguláris és*

$$(e - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \textit{ahol} \quad (x^0 := e)$$

és a jobboldali sor konvergens.

Bizonyítás. A jobboldali sor abszolút konvergens, mert a $\sum_{k=0}^{\infty} \|x^k\|$ sort a $\sum_{k=0}^{\infty} \|x\|^k$ konvergens geometriai sor majorálja. Innen a 3.5.1 tétel alapján következik a $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ sor konvergenciája. Legyen s_n a sor n-edik részletösszege, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(e-x)s_n = s_n(e-x) = e - x^{n+1}.$$

Ha itt $n \to \infty$, akkor $0 \le \|x^{n+1}\| \le \|x\|^{n+1}$ miatt $x^{n+1} \to 0$, $s_n \to s = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, ha $n \to \infty$, így a szorzás folytonosságát felhasználva

$$(e-x)s = s(e-x) = e,$$

és ezt kellett bizonyítanunk. □

7.2.2. Tétel. *Ha x_0 egy egységelemes Banach-algebra reguláris eleme és*

$$\|x - x_0\| < \frac{1}{\|x_0^{-1}\|},$$

akkor x is reguláris.

Bizonyítás. $x = x_0 - (x_0 - x) = x_0\left[e - x_0^{-1}(x_0 - x)\right] = x_0(e-y)$, ahol $y = x_0^{-1}(x_0 - x)$. Mivel $\|y\| \le \|x_0^{-1}\| \cdot \|x_0 - x\| < 1$, így az előző tétel miatt $e - y$ reguláris és $(e-y)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k$. De ekkor $x = x_0(e-y)$ is reguláris és

$$x^{-1} = (e-y)^{-1}x_0^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[x_0^{-1}(x_0 - x)\right]^k x_0^{-1}.$$

□

7.2.1. Következmény. *Az összes reguláris elemek G halmaza nyílt, és a G-n definiált $x \mapsto x^{-1}$ $(x \in G)$ függvény folytonos G-n.*

Bizonyítás. A 7.2.2 tétel alapján G nyílt, így csak az inverz folytonosságát kell igazolni. Ha $x_0 \in G$, és $\|x - x_0\| < \dfrac{1}{2\|x_0^{-1}\|}$, akkor az előző tétel miatt $x \in G$ és

$$\|x^{-1} - x_0^{-1}\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left[x_0^{-1}(x_0 - x)\right]^k x_0^{-1} \right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|x_0^{-1}\|^k \|x_0 - x\|^k \|x_0^{-1}\| =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \|x_0 - x\| \cdot \|x_0^{-1}\|^2 \left[\|x_0^{-1}\| \cdot \|x_0 - x\|\right]^{k-1} < \|x_0 - x\| \cdot \|x_0^{-1}\|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} =$$
$$= 2\|x_0 - x\| \cdot \|x_0^{-1}\|^2,$$

amiből az $x \mapsto x^{-1}$ $(x \in G)$ függvény x_0-beli folytonossága következik. □

7.2.2. Következmény. *Bármely $x \in X$ esetén a $\varrho(x)$ rezolvens halmaz nyílt, így a $\sigma(x)$ spektrum zárt.*

Bizonyítás. $\varrho(x)$ nyílt, mert $\lambda_0 \in \varrho(x)$ azt jelenti, hogy $x - \lambda_0 e$ reguláris, de akkor $x - \lambda e$ is reguláris, hacsak $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|(x-\lambda_0 e)^{-1}\|}$, ugyanis $\|(x - \lambda e) - (x - \lambda_0 e)\| = |\lambda - \lambda_0|$ és alkalmazhatjuk a 7.2.2 tételt. □

7.2.2. Definíció. Legyen X egy egységelemes Banach-algebra, $x \in X$. Az

$$r_x(\lambda) = (x - \lambda e)^{-1} \qquad \big(\lambda \in \varrho(x)\big)$$

összefüggéssel definiált r_x függvényt az *x-hez tartozó rezolvens függvény*nek vagy egyszerűen *x rezolvens*ének nevezzük. ♢

r_x a komplex sík $\varrho(x)$ nyílt részhalmazán definiált X-beli értékű függvény.

7.2.3. Tétel. *Az r_x rezolvens függvény differenciálható a $\varrho(x)$ halmazon.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz felhasználjuk a *Hilbert-féle azonosságot*:

$$r_x(\lambda) - r_x(\mu) = (\lambda - \mu) r_x(\lambda) r_x(\mu) \qquad (\lambda, \mu \in \varrho(x)).$$

Lássuk be először, hogy érvényes ez az azonosság! Szorzással ellenőrizhető, hogy

$$(x - \lambda e)(x - \mu e) = (x - \mu e)(x - \lambda e).$$

$r_x(\lambda) r_x(\mu)$-vel jobbról, majd $r_x(\mu) r_x(\lambda)$-val balról szorozva kapjuk, hogy

$$r_x(\lambda) r_x(\mu) = r_x(\mu) r_x(\lambda).$$

Ezt felhasználva $r_x(\lambda) - r_x(\mu) = (x - \mu e) r_x(\mu) r_x(\lambda) - (x - \lambda e) r_x(\lambda) r_x(\mu) =$
$= [(x - \mu e) - (x - \lambda e)]\, r_x(\lambda) r_x(\mu) = (\lambda - \mu) r_x(\lambda) r_x(\mu)$.
Innen következik r_x differenciálhatósága bármely $\lambda_0 \in \varrho(x)$ pontban, mert

$$\frac{r_x(\lambda) - r_x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{(\lambda - \lambda_0) r_x(\lambda) r_x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = r_x(\lambda) r_x(\lambda_0),$$

és r_x folytonos $\varrho(x)$-en, mert a 7.2.1 következmény bizonyításában szereplő becslés alapján $\|r_x(\lambda) - r_x(\lambda_0)\| = \|(x - \lambda e)^{-1} - (x - \lambda_0 e)^{-1}\| < 2\|r_x(\lambda_0)\|^2 \cdot |\lambda - \lambda_0|$, ha $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{2\|r_x(\lambda_0)\|}$. Így

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{r_x(\lambda) - r_x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} r_x(\lambda) r_x(\lambda_0) = r_x(\lambda_0)^2.$$

□

7.3. Liouville tétel, Gelfand-Mazur tétel

7.3.1. Tétel. (Liouville tétel általánosítása) *Legyen $f : \mathbb{C} \to X$ az egész $\mathbb{C}$ komplex síkon értelmezett függvény, melynek értékei egy X komplex lineáris normált térben vannak. Ha f korlátos (azaz van olyan M konstans, hogy $\|f(\lambda)\| \leq M$ $(\lambda \in \mathbb{C})$) és $\mathbb{C}$ minden pontjában differenciálható, akkor f "konstans", azaz $f(\lambda) = f(0)$ bármely $\lambda \in \mathbb{C}$-re.*

Bizonyítás. Legyen $F \in X^*$ egy tetszőleges korlátos lineáris funkcionál X-en és tekintsük a

$$h(\lambda) = F(f(\lambda) - f(0)) \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

függvényt. $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, továbbá h korlátos, mert

$$|h(\lambda)| = |F(f(\lambda) - f(0))| \leq \|F\| \cdot \|f(\lambda) - f(0)\| \leq 2\|F\| \cdot M \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

h differenciálható bármely $\lambda_0 \in \mathbb{C}$-ben, mert F linearitása és folytonossága miatt

$$\frac{h(\lambda) - h(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = F\left(\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right) \to F(f'(\lambda_0)) \quad \text{, ha } \lambda \to \lambda_0.$$

Így h-ra alkalmazhatjuk a komplex függvénytanból ismert Liouville-tételt. Eszerint $h(\lambda) = h(0)$, ha $\lambda \in \mathbb{C}$, azaz

$$F(f(\lambda) - f(0)) = F(f(0) - f(0)) = F(0) = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{C}, F \in X^*)$$

amiből a Hahn-Banach (4.4.1) tétel 3. következménye miatt $f(\lambda) - f(0) = 0$, ha $\lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

Megjegyzés. Hasonló módszerrel a komplex változós függvények elméletének egy jelentős része (pl. Cauchy integráltétel, Cauchy formulák a deriváltakra stb.) általánosítható olyan komplex változós függvényekre, melyek értékei egy Banach-térben vannak.

7.3.2. Tétel. *Egy egységelemes Banach-algebrában bármely elem spektruma nem üres kompakt halmaz.*

Bizonyítás. A 7.2.2 következmény szerint egy tetszőleges x elem $\sigma(x)$ spektruma zárt. $\sigma(x)$ korlátossága a

$$\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|x\|\}$$

tartalmazásból következik. Ennek belátásához tegyük fel, hogy $|\lambda| > \|x\|$, úgy $x - \lambda e = -\lambda \left(e - \dfrac{x}{\lambda}\right)$ reguláris, mert $\left\|\dfrac{x}{\lambda}\right\| < 1$ (7.2.1 tétel). Ezért $\lambda \notin \sigma(x)$.

Ezzel beláttuk, hogy $\sigma(x)$ kompakt (korlátos és zárt részhalmaza $\mathbb{C}$-nek).

Megmutatjuk, hogy $\sigma(x)$ nem üres. Ha $x = 0$, úgy $\sigma(0) = \{0\}$, így nem üres. Ha $x \neq 0$, úgy indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel, állításunkkal ellentétben, hogy $\sigma(x) = \emptyset$. Akkor az $r_x(\lambda) = (x - \lambda e)^{-1}$ rezolvens az egész $\mathbb{C}$ komplex síkon értelmezve van. Megmutatjuk, hogy r_x korlátos. Mivel r_x folytonos (7.2.3 tétel), így korlátos a $2\|x\|$ sugarú zárt körlapon.
r_x a $2\|x\|$ sugarú zárt körlapon kívül is korlátos, mert $|\lambda| > 2\|x\|$ esetén $x - \lambda e = -\lambda\left(e - \dfrac{x}{\lambda}\right)$ reguláris $\left\|\dfrac{x}{\lambda}\right\| < \dfrac{1}{2}$ miatt, és

$$r_x(\lambda) = (x - \lambda e)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k,$$

amiből

$$\|r_x(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^k = \frac{1}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{1 - \left\|\dfrac{x}{\lambda}\right\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|} < \frac{1}{\|x\|}.$$

A 7.2.3 tétel szerint r_x differenciálható $\varrho(x) = \mathbb{C}$-n, így alkalmazhatjuk Liouville tételét:

$$r_x(\lambda) = r_x(0) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

A $\|r_x(\lambda)\| \leq \dfrac{1}{|\lambda| - \|x\|}$ becslés miatt $0 = \lim\limits_{|\lambda|\to\infty} r_x(\lambda) = \lim\limits_{|\lambda|\to\infty} r_x(0) = r_x(0)$, így

$$r_x(\lambda) = 0, \ (x - \lambda e)^{-1} = 0,$$

amiből $x - \lambda e$ -vel való szorzással $e = 0$ adódik, ami lehetetlen. □

7.3.3. Tétel. (Gelfand-Mazur) *Ha egy X egységelemes Banach-algebra minden zérustól különböző eleme reguláris, akkor X izomorf és izometrikus a komplex számok Banach-algebrájával. Speciálisan, ha az X Banach-algebra test, úgy teljesül a tétel állítása.*

Bizonyítás. Legyen $x \in X$, akkor az előző tétel szerint $\sigma(x) \neq \emptyset$, így van $\lambda \in \sigma(x)$, azaz $x - \lambda e$ szinguláris, ezért (felhasználva, hogy 0 az egyetlen szinguláris elem), $x - \lambda e = 0$, $x = \lambda e$. Az $x \to \lambda$ hozzárendelés izomorf és izometrikus leképezése X-nek $\mathbb{C}$-re. □

7.4. A spektrálsugár

7.4.1. Definíció. Egy egységelemes Banach-algebra x elemének *spektrálsugarán* az

$$r(x) = \sup\left\{|\lambda| \;\middle|\; \lambda \in \sigma(x)\right\}$$

mennyiséget értjük. $\diamondsuit$

Az x elem $\sigma(x)$ spektruma kompakt halmaz, melyen a $\lambda \to |\lambda|$ folytonos függvény felveszi a szuprémumát. $r(x)$ annak a minimális sugarú origó körüli zárt körlapnak a sugara, mely $\sigma(x)$-et tartalmazza. A 7.3.2 tétel bizonyításában láttuk, hogy $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|x\|\}$, így $r(x) \leq \|x\|$.

7.4.1. Tétel. (spektrálsugár formula) *Egy egységelemes Banach-algebrában bármely x elem spektrálsugarára*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} \tag{7.4.1}$$

teljesül (a limesz létezik).

Bizonyítás. Ha $\lambda \in \sigma(x)$, akkor $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. Ellenkező esetben ugyanis $x^n - \lambda^n e$ reguláris és az $x^n - \lambda^n e = (x - \lambda e)p(x)$, $p(x) = x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + ... + \lambda^{n-1}e$ egyenlőséget $(x^n - \lambda^n e)^{-1}$-gyel jobbról szorozva kapjuk, hogy

$$e = (x - \lambda e)y$$

ahol $y = p(x)(x^n - \lambda^n e)^{-1}$. Hasonlóan $x^n - \lambda^n e = p(x)(x - \lambda e)$-t balról szorozva $(x^n - \lambda^n e)^{-1}$-gyel

$$e = y'(x - \lambda e)$$

adódik, ahol $y' = (x^n - \lambda^n e)^{-1}p(x)$. Mivel $y = ey = y'(x - \lambda e)y = y'$, így $y = y'$ az $x - \lambda e$ inverze volna, ami $\lambda \in \sigma(x)$ miatt lehetetlen.
Ezért, ha $\lambda \in \sigma(x)$, akkor $|\lambda|^n = |\lambda^n| \leq r(x^n) \leq \|x^n\|$, $|\lambda| \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$.
Innen $r(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\} \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$,

$$r(x) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{7.4.2}$$

Ha $|\lambda| > \|x\|$, úgy $\left\|\dfrac{x}{\lambda}\right\| < 1$, és a 7.2.1 tétel alapján

$$r_x(\lambda) = (x - \lambda e)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\lambda^k}.$$

Legyen $f \in X^*$ egy tetszőleges lineáris korlátos funkcionál X-en, akkor

$$g(\lambda) = f(r_x(\lambda)) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(x^k)}{\lambda^k} = -\frac{f(e)}{\lambda} - \frac{f(x)}{\lambda^2} - \frac{f(x^2)}{\lambda^3} - ..., \tag{7.4.3}$$

ha $|\lambda| > \|x\|$. A 7.2.3 tétel alapján r_x differenciálható $|\lambda| > r(x)$-re, így ugyanez igaz a g függvényre is. A komplex függvénytanból ismert, hogy ekkor g-t Laurent-sorba lehet fejteni:

$$g(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\lambda^k = ... + \frac{a_{-3}}{\lambda^3} + \frac{a_{-2}}{\lambda^2} + \frac{a_{-1}}{\lambda} + a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + ..., \quad (7.4.4)$$

és e sor $|\lambda| > r(x)$-re konvergens. A Laurent-sorfejtés egyértelműsége miatt, (7.4.3) és (7.4.4) összehasonlításából adódik, hogy $0 = a_0 = a_1 = ...$, $a_{-n} = -f(x^{n-1})$ $(n \in \mathbb{N})$. Mivel a (7.4.4) Laurent-sor $|\lambda| > r(x)$-re konvergens, így ilyen λ értékekre az általános tagja korlátos (hiszen nullsorozat):

$$\left|\frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}}\right| \le K \quad (n \in \mathbb{N},\, |\lambda| > r(x)). \quad (7.4.5)$$

Legyen $y_n = \dfrac{x^n}{\lambda^{n+1}}$ és $F_y(f) = f(y)$ ha $f \in X^*$, akkor (7.4.5) miatt

$$|F_{y_n}(f)| = |f(y_n)| \le K \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Innen $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |F_{y_n}(f)| \le K$, így az egyenletes korlátosság tételének (5.2.1 tétel) 1. következménye miatt

$$\|F_{y_n}\| \le K_1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $F_{y_n} \in X^{**}$ normája megegyezik $y_n \in X$ normájával (4.5.1 tétel), így

$$\|y_n\| = \left\|\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}\right\| \le K_1 \quad (n \in \mathbb{N},\, |\lambda| > r(x)).$$

Innen

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le (K_1|\lambda|)^{\frac{1}{n}}\,|\lambda| \quad (n \in \mathbb{N},\, |\lambda| > r(x)),$$

amiből

$$\limsup_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le |\lambda| \quad (|\lambda| > r(x))$$

és végül $|\lambda| \to r(x) + 0$-val

$$\limsup_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le r(x). \quad (7.4.6)$$

(7.4.2)-ből kapjuk, hogy

$$r(x) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le \inf_{n\ge k} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \;\; (k \in \mathbb{N}).$$

$k \to \infty$ határátmenettel

$$r(x) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le \lim_{k\to\infty} \inf_{n\ge k} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \liminf_{n} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}. \qquad (7.4.7)$$

(7.4.6), (7.4.7) összekapcsolásával adódik, hogy

$$\limsup_{n} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le r(x) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le \liminf_{n} \|x^n\|^{\frac{1}{n}},$$

s ebből már következik, hogy $\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\}$ konvergens sorozat és (7.4.1) fennáll. $\square$

7.5. Hatványsorok

7.5.1. Definíció. Legyen X egy egységelemes Banach-algebra $y, a \in X$, c_k $(k = 0, 1, \dots)$ komplex számok, akkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (y-a)^k \qquad \big((y-a)^0 = e\big)$$

sort (X-beli) *hatványsor*nak nevezzük. $\diamondsuit$

Az $y - a = x$ helyettesítéssel hatványsorunk $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ alakú, a továbbiakban csak ilyen speciális alakú hatványsorokkal foglalkozunk.

7.5.1. Tétel. *Legyen R a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ $(c_k, \lambda \in \mathbb{C})$ komplex hatványsor konvergenciasugara. Ha x egy egységelemes Banach-algebra egy eleme és*

$r(x) < R$, akkor a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ sor abszolut konvergens (így konvergens), míg

$r(x) > R$ esetén a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ sor nem konvergens.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|c_k x^k\|$ sorra a Cauchy-féle gyökkritériumot! A spektrálsugár formula alapján

$$\begin{aligned}\limsup_{n} \sqrt[n]{\|c_n x^n\|} &= \limsup_{n} \sqrt[n]{|c_n|}\,\sqrt[n]{\|x^n\|} = \limsup_{n} \sqrt[n]{|c_n|} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \\ &= \frac{r(x)}{R} < 1 \qquad \text{ha } r(x) < R,\end{aligned}$$

így $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ abszolút konvergens, tehát konvergens.

Ha $r(x) > R$, akkor $\limsup\limits_{n} \sqrt[n]{\|c_n x^n\|} > 1$, ezért végtelen sok n indexre $\|c_n x^n\| > 1$, amiből következik, hogy $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ nem konvergens (ti. a konvergencia szükséges feltétele: $c_n x^n \to 0$, ha $n \to \infty$ nem teljesül). $\square$

A bizonyításban felhasználtuk a konvergenciasugárra vonatkozó

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

formulát és a spektrálsugár formulát.

A $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ geometriai sor esetén $R = 1$, így ha $r(x) < 1$, akkor a sor konvergens. Ennél több is igaz, ti. érvényes a

7.5.2. Tétel. *Legyen x egy egységelemes Banach-algebra egy eleme. A $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ geometriai sor akkor és csakis akkor konvergens, ha $r(x) < 1$.*

Bizonyítás. Csak azt kell megmutatni, hogy $r(x) < 1$, ha $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergens. De ha $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergens, akkor $x^k \to 0$, ha $k \to \infty$, így van olyan k_0, melyre $\|x^{k_0}\| < 1$, ezért a spektrálsugár formula alapján

$$r(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le \|x^{k_0}\|^{\frac{1}{k_0}} < 1.$$

$\square$

7.5.3. Tétel. *Legyen $f(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$, ha $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < R$, ahol R a jobboldalon álló hatványsor konvergenciasugara. Legyen továbbá X egy egységelemes Banach-algebra és tegyük fel, hogy van olyan*

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

($\lambda_i \ne \lambda_j$ ha $i \ne j$, $m_i \ge 1$, $\sum\limits_{i=1}^{s} m_i = n$) komplex együtthatós polinom, melyre $p(x) = 0$. Ha $|\lambda_i| < R$ ($i = 1, 2, \ldots, s$), akkor a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ sor konvergens és összege

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{m_i - 1} f^{(k)}(\lambda_i) h_{ik}(x),$$

ahol a h_{ik} függvények legfeljebb $n-1$-edfokú polinomok, amelyek csak a λ_i, m_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) értékektől függenek (f-től nem).

Bizonyítás. Ismeretes, hogy egy adott a_{ik} $(i=1,2,...,s;k=0,1,...,m_i-1)$ skalárrendszerhez létezik pontosan egy legfeljebb $n-1$-edfokú P polinom, melyre

$$P^{(k)}(\lambda_i)=a_{ik}\ (i=1,2,...,s;k=0,1,...,m_i-1)$$

teljesül. P-t az a_{ik} rendszerhez tartozó Hermite-Lagrange-féle interpolációs polinomnak nevezzük. Világos, hogy

$$P(\lambda)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=0}^{m_i-1}a_{ik}h_{ik}(\lambda)$$

ahol h_{ik}-k a $h_{ik}^{(l)}(\lambda_j)=\delta_{ij}\delta_{kl}$ $(j=1,2,...,s;l=0,1,...,m_j-1)$ feltételeket kielégítő speciális Hermite-Lagrange interpolációs polinomok.

Legyen $s_m(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{m}c_k\lambda^k$ a $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k\lambda^k$ sor m-edik részletösszege. s_m-et p-vel osztva

$$s_m(\lambda)=p(\lambda)q_m(\lambda)+r_m(\lambda)$$

adódik, ahol q_m,r_m polinomok és r_m fokszáma $<$ p fokszáma $=n$. Innen következik, hogy $(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ osztója az $s_m(\lambda)-r_m(\lambda)$-nak, így

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(s_m(\lambda)-r_m(\lambda)\right)|_{\lambda=\lambda_i}=0,$$

azaz

$$s_m^{(k)}(\lambda_i)=r_m^{(k)}(\lambda_i)\ (i=1,2,...,s;k=0,1,...,m_i-1).$$

Ez mutatja, hogy r_m éppen az $a_{ik}=s_m^{(k)}(\lambda_i)$ skalárrendszerhez tartozó Hermite-Lagrange-féle interpolációs polinom, így

$$r_m(\lambda)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=0}^{m_i-1}s_m^{(k)}(\lambda_i)h_{ik}(\lambda).$$

Ezt felhasználva, mivel $p(x)=0$,

$$s_m(x)=p(x)q_m(x)+r_m(x)=r_m(x)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=0}^{m_i-1}s_m^{(k)}(\lambda_i)h_{ik}(x),$$

amiből $s_m(x)\to\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{k=0}^{m_i-1}f^{(k)}(\lambda_i)h_{ik}(x)$, ha $m\to\infty$, hiszen $|\lambda_i|<R$ esetén $s_m^{(k)}(\lambda_i)\to f^{(k)}(\lambda_i)$, ha $m\to\infty$.

$\square$

7.6. Lineáris differenciálegyenletrendszerek

Tekintsük az

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t) \qquad t \in [a, b] \tag{7.6.1}$$

lineáris differenciálegyenletrendszert, ahol $y : [a, b] \to \mathbb{C}^n$ az ismeretlen függvény, $f : [a, b] \to \mathbb{C}^n$ adott folytonos függvény és A egy $n \times n$-es folytonos mátrixfüggvény (y, f-et oszlopvektornak tekintjük). Elegendő az

$$y'(t) = A(t)y(t) \qquad t \in [a, b] \tag{7.6.2}$$

homogén rendszer általános megoldását meghatározni, mivel az inhomogén rendszer megoldása ebből konstansvariálással megkapható.

Egy $n \times n$-es Φ mátrixot a (7.6.2) rendszer *alapmátrix*ának nevezünk, ha Φ oszlopvektorai (7.6.2) lineárisan független megoldásai.

Ismeretesek a következő tételek (ld. [4]):

7.6.1. Tétel. *Egy $\Phi = \Phi(t)$ $n \times n$-es mátrixfüggvény akkor és csakis akkor alapmátrixa a (7.6.2) rendszernek, ha*

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \qquad t \in [a, b],$$

és

$$\det \Phi(t_0) \neq 0 \quad \textit{valamely } t_0 \in [a, b]\textit{-ben.}$$

7.6.2. Tétel. *Legyen Φ a (7.6.2) rendszer alapmátrixa. A (7.6.2) rendszer általános megoldása*

$$y(t) = \Phi(t)c,$$

ahol $c \in \mathbb{C}^n$ tetszőleges konstans (oszlop)vektor.

Az $y'(t) = A(t)y(t)$, $y(t_0) = y_0$ Cauchy-probléma megoldása

$$y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0.$$

A (7.6.1) inhomogén rendszer általános megoldása

$$y(t) = \Phi(t)c + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)f(s)ds,$$

ahol $c \in \mathbb{C}^n$ tetszőleges konstans (oszlop)vektor, $t_0 \in [a, b]$.

A (7.6.1) inhomogén rendszerre vonatkozó $y(t_0) = y_0$ Cauchy-feladat megoldása

$$y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

Ebből látható, hogy (7.6.1), (7.6.2) megoldásához elegendő (7.6.2) alapmátrixát ismerni. Ha A konstans mátrix, úgy (7.6.2) egy alapmátrixa könnyen megadható.

7.6.3. Tétel. *$\Phi(t) = e^{At}$ az $y'(t) = Ay(t)$ $(t \in (-\infty, \infty))$ rendszer egy alapmátrixa (A most egy konstans mátrix).*

Bizonyítás. $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ $(A^0 = E = \text{egységmátrix})$ így $\Phi(0) = E$ és $\det(\Phi(0)) = 1 \neq 0$. Megmutatjuk, hogy $\Phi(t) = e^{At}$ teljesíti a $\Phi' = A\Phi$ egyenletet, és akkor a 7.6.1 tétel miatt Φ alapmátrixa $y' = Ay$-nak.

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{Ah}e^{At} - e^{At}}{h} \\ &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{e^{Ah} - E}{h}\right) e^{At} = Ae^{At} = A\Phi(t),\end{aligned}$$

mert

$$\begin{aligned}\left\|\frac{e^{Ah} - E}{h} - A\right\| &= \left\|\frac{A^2h}{2!} + \frac{A^3h^2}{3!} + \ldots\right\| \leq \frac{\|A\|^2|h|}{2!} + \frac{\|A\|^3|h|^2}{3!} + \ldots \\ &= \frac{e^{\|A\|\cdot|h|} - 1}{|h|} - \|A\| \to 0, \qquad \text{ha } h \to 0.\end{aligned}$$

Itt $\|A\|$ a **4.2** szakaszban vizsgált mátrixnormák bármelyike lehet, pl.

$$\|A\| = \max_i \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \qquad \text{ha } A = (a_{ij}).$$

Az $e^{A(t+h)} = e^{A(h+t)} = e^{Ah}e^{At}$ átalakításnál felhasználtuk azt a könnyen igazolható tényt, hogy ha B, C felcserélhető mátrixok, akkor $e^{B+C} = e^B e^C$. □

Ha most $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)(-1)^n$, akkor a Cayley-Hamilton tétel szerint $p(A) = 0$, így mátrixok analitikus függvényeinek kiszámítására alkalmazhatjuk a 7.5.3 tételt. Itt a h_{ik} polinomokat nem célszerű a definíciójuk alapján kiszámítani, inkább azt használjuk fel, hogy h_{ik}-k f-től nem függenek. A számítási eljárást egy példán keresztül szeretnénk bemutatni.

Példa. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Az A mátrix sajátértékeit a $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ egyenletből kiszámítva kapjuk, hogy

$$\lambda_1 = 0, \, \lambda_2 = 5.$$

Ha f a zérus körüli $R > 5$ sugarú körben analitikus, úgy a 7.5.3 tétel szerint

$$f(A) = f(\lambda_1)h_{10}(A) + f(\lambda_2)h_{20}(A).$$

Ha $f(\lambda) = \lambda - \lambda_1 = \lambda$, $(\lambda \in \mathbb{C})$ úgy

$$A = 5h_{20}(A) \quad \text{így } h_{20}(A) = \frac{1}{5}A,$$

míg $f(\lambda) = \lambda - \lambda_2 = \lambda - 5$, $(\lambda \in \mathbb{C})$ esetén

$$A - 5E = -5h_{10}(A), \quad \text{amiből } h_{10}(A) = \frac{1}{5}(5E - A).$$

Kiszámolva a h_{10}, h_{20} mátrixokat kapjuk, hogy

$$f(A) = \frac{1}{5}f(0)\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}f(5)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ha $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, $(\lambda, t \in \mathbb{C})$, akkor

$$e^{At} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{5t}}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 + e^{5t} & -2 + 2e^{5t} \\ -2 + 2e^{5t} & 1 + 4e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Felhasználva a 7.6.2 tételt, kapjuk, hogy az

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 \qquad & y_1(0) &= 5 \\ y_2' &= 2y_1 + 4y_2 \qquad & y_2(0) &= 5 \end{aligned}$$

Cauchy-probléma megoldása

$$y(t) = e^{At}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{vagyis} \quad \begin{cases} y_1(t) = 2 + 3e^{5t} \\ y_2(t) = -1 + 6e^{5t}. \end{cases}$$

7.7. Ideálok és szinguláris elemek egy kommutatív Banach-algebrában

7.7.1. Definíció. Egy X algebra I részhalmazát *ideál*nak nevezzük, ha

I lineáris altere X-nek, és

bármely $i \in I$ és $x \in X$ esetén $xi \in I$, $ix \in I$.

Ha $I \neq X$, akkor I-t *valódi ideál*nak nevezzük. Egy olyan valódi ideált, mely nem része egyetlen bővebb valódi ideálnak sem, *maximális ideál*nak nevezünk. $\diamondsuit$

7.7.1. Tétel. *Legyen X egy egységelemes kommutatív Banach-algebra. Akkor X bármely valódi ideálja részhalmaza valamely maximális ideálnak. Minden maximális ideál zárt.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{P}$ X összes I-t tartalmazó valódi ideáljainak osztályát. $\mathcal{P}$ félig rendezett halmaz a tartalmazásra nézve, mely teljesíti a Zorn-lemma feltételét: $\mathcal{P}$ minden lánca felülről korlátos. Így $\mathcal{P}$-nek van maximális eleme, mely I-t tartalmazó maximális ideál. Ha I ideál, úgy $\overline{I}$ is ideál. Ugyanis $\overline{I}$ lineáris altér a 3.1.2 tétel (3) állítása szerint, továbbá ha $i \in \overline{I}$ és $x \in X$, akkor van olyan $i_n \in I$ sorozat, mely I-hez konvergál. A szorzás folytonossága alapján $i_n x \to ix$, ha $n \to \infty$, és $i_n x \in I$ miatt $ix \in \overline{I}$.

Ha J maximális ideál, úgy $\inf\limits_{j \in J} \|e - j\| \geq 1$ (mert különben volna olyan $j \in J$ melyre $\|e - j\| < 1$ teljesülne, így j reguláris eleme volna X-nek, ami lehetetlen: mint az könnyen igazolható, valódi ideálban nem lehet reguláris elem). A norma folytonossága miatt $\inf\limits_{j \in \overline{J}} \|e - j\| \geq 1$, így $e \notin \overline{J}$, ezért $\overline{J}$ is valódi ideál, mely tartalmazza J-t. De J maximalitása miatt $\overline{J}$ nem lehet J-nél bővebb, így $\overline{J} = J$, és így J zárt.

□

Az ideálok és szinguláris elemek közötti kapcsolatot mutatja a

7.7.2. Tétel. *Egy egységelemes kommutatív Banach-algebra egy eleme akkor és csakis akkor szinguláris, ha benne van a Banach-algebra valamely valódi ideáljában.*

Bizonyítás. Ha x_0 szinguláris elem az X egységelemes kommutatív Banach-algebrában, úgy megmutatjuk, hogy $I = x_0 X$ x_0-t tartalmazó valódi ideálja X-nek. I nyilvánvalóan lineáris altér és $i \in I$, $x \in X$ esetén $i = x_0 y$ valamely $y \in X$ mellett, így $ix = x_0 yx \in I$. I valódi ideál, mert X e egységeleme nincs I-ben. Ellenkező esetben $e = x_0 x$ volna valamely $x \in X$ mellett, ami azt jelentené, hogy x_0 reguláris. $x_0 = x_0 e$ miatt $x_0 \in I$.

Fordítva, ha x_0 eleme egy J valódi ideálnak, úgy megmutatjuk, hogy x_0 szinguláris. $e \notin J$, mert különben bármely $x \in X$ esetén $x = ex \in J$ volna, ami nem lehet, mert J valódi ideál. $x_0 \in J$ szinguláris, mert ellenkező esetben volna olyan $x_0^{-1} \in X$ melyre $x_0 x_0^{-1} = x_0^{-1} x_0 = e$, így $e \in J$ volna, ami lehetetlen. □

A 7.7.1 és 7.7.2 tételeket kombinálva adódik az alábbi

7.7.1. Következmény. *Egy egységelemes kommutatív Banach-algebra egy eleme akkor és csakis akkor szinguláris, ha benne van a Banach-algebra valamely maximális ideáljában.*

7.7.2. Definíció. Legyen I az X algebra ideálja és $x \in X$ esetén jelölje x' az $x + I$ halmazt. Az $\{x'\}$ $(x \in X)$ halmazok osztálya az

$$\begin{aligned} x' + y' &= (x+y)' \\ \lambda x' &= (\lambda x)' \\ x'y' &= (xy)' \qquad (x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}) \end{aligned} \tag{7.7.1}$$

egyenlőségekkel értelmezett műveletekkel ellátva algebra lesz, melyet az X algebra *I ideál szerint vett faktoralgebrájá*nak nevezünk és X/I-vel jelölünk. A

$$\pi x = x' \qquad (x \in X) \tag{7.7.2}$$

egyenlőséggel definiált $\pi : X \to X/I$ leképezést (mely (7.7.1) miatt homomorfizmus) az X algebra X/I faktoralgebrába való *természetes homomorfizmusá*nak nevezzük. ♢

Megjegyzés. A műveletek (7.7.1) értelmezésének korrektségét itt csak a szorzásra vonatkozóan igazoljuk, a többit az olvasóra hagyjuk. Ha $x' = x_1'$, $y' = y_1'$, akkor $x - x_1 \in I$, $y - y_1 \in I$, így

$$xy - x_1y_1 = (x - x_1)y + x_1(y - y_1) \in I,$$

tehát

$$(xy)' = (x_1y_1)'.$$

7.7.3. Tétel. *Legyen X egy (egységelemes) Banach-algebra, I valódi zárt ideál X-ben, akkor az X/I faktoralgebra az*

$$\|x'\| = \inf_{i \in I} \|x + i\| = \inf_{u \in x'} \|u\| \qquad (x \in X) \tag{7.7.3}$$

normával (egységelemes) Banach-algebra, a (7.7.2)-gyel definiált π természetes homomorfizmus pedig

$$\|\pi x\| = \|x'\| \leq \|x\|$$

miatt folytonos leképezése X-nek X/I-re.

Bizonyítás. A norma tulajdonságai teljesülnek. Világos, hogy $\|x'\| \geq 0$ és $\|0'\| = \inf_{i \in I} \|i\| = 0$, hiszen $0 \in I\,(I$ altér). Ha $\|x'\| = 0$, úgy van olyan $u_n \in x'\,(n \in \mathbb{N})$, hogy $\|u_n\| \to 0$, azaz $u_n \to 0$, ha $n \to \infty$. I zártsága miatt $x' = x + I$ is zárt, így $0 \in x'$, $0' = x'$.

A norma definíciója alapján

$$\begin{aligned} \|\lambda x'\| &= \|(\lambda x)'\| = \inf_{i \in I} \|\lambda x + i\| = \inf_{j \in I} \|\lambda(x + j)\| \\ &= |\lambda| \inf_{j \in I} \|x + j\| = |\lambda| \|x'\| \qquad \text{ha } \lambda \neq 0 \\ \text{és} \quad \|0 \cdot x'\| &= \|(0x)'\| = \|0'\| = 0 = 0 \cdot \|x'\|. \end{aligned}$$

Bármely $x', y' \in X/I$ és $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $u \in x'$ és $v \in y'$ hogy

$$\|u\| - \|x'\| < \varepsilon, \ \ \|v\| - \|y'\| < \varepsilon. \tag{7.7.4}$$

Mivel $u + v \in x' + y'$, így

$$\|x' + y'\| \leq \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \leq \|x'\| + \|y'\| + 2\varepsilon,$$

amiből $\varepsilon \to 0$-val kapjuk, hogy

$$\|x' + y'\| \leq \|x'\| + \|y'\|.$$

Hasonlóan $uv \in x'y'$ miatt

$$\|x'y'\| \leq \|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\| \leq (\|x'\| + \varepsilon)(\|y'\| + \varepsilon),$$

amiből $\varepsilon \to 0$-val $\|x'y'\| \leq \|x'\| \cdot \|y'\|$.

X/I teljességének bizonyításához a 3.5.1 tétel miatt elég azt megmutatni, hogy X/I bármely abszolút konvergens sora konvergens. Legyen $x'_k \in X/I$ ($k \in \mathbb{N}$) és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x'_k\| < \infty$.

Válasszuk az $u_k \in x'_k$ ($k \in \mathbb{N}$) elemeket úgy, hogy

$$\|u_k\| - \|x'_k\| < \frac{1}{2^k} \ (k \in \mathbb{N}),$$

akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|u_k\|$ sor konvergens, mert a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\|x'_k\| + \dfrac{1}{2^k} \right)$ konvergens sor majorálja. Így, ismét a 3.5.1 tételt és X teljességét felhasználva kapjuk, hogy van olyan $u \in X$, hogy $\|u - (u_1 + ... + u_n)\| \to 0$, ha $n \to \infty$.
Mivel $u - (u_1 + ... + u_n) \in u' - (x'_1 + ... + x'_n)$, így

$$\|u' - (x'_1 + ... + x'_n)\| \leq \|u - (u_1 + ... + u_n)\|,$$

ezért a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x'_k$ sor konvergens (és összege u').

Végül megmutatjuk, hogy ha e egységelem X-ben, úgy $e' = e + I$ egységelem X/I-ben. A műveletek (7.7.1) értelmezése miatt $e'x' = x'e' = x'$, megmutatjuk, hogy $\|e'\| = 1$. Egyrészt, felhasználva, hogy $0 \in I$,

$$\|e'\| = \inf_{i \in I} \|e + i\| \leq \|e\| = 1,$$

másrészt

$$\|e'\| = \|e'e'\| \leq \|e'\|^2$$

és $\|e'\| \neq 0$ (mert különben $e' = 0'$, $e \in I$ volna, ami a 7.7.2 tétel miatt lehetetlen) alapján

$$1 \leq \|e'\|,$$

tehát $\|e'\| = 1$. $\square$

7.8. Karakterek és ideálok, Wiener tétel

7.8.1. Definíció. Egy X egységelemes kommutatív Banach-algebrának a skalárok $\mathbb{C}$ Banach-algebrájába való homomorf leképezését X *karakter*ének nevezzük. $\diamondsuit$

$\varphi : X \to \mathbb{C}$ tehát pontosan akkor karaktere X-nek, ha φ lineáris funkcionál X-en, mely multiplikatív is, azaz

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad (x, y \in X).$$

Jelölje $\widehat{X}$ az X egységelemes kommutatív Banach-algebra összes nem azonosan zérus karaktereinek halmazát.

7.8.1. Tétel. *Bármely $\varphi \in \widehat{X}$ esetén $\varphi(e) = 1$, és φ lineáris korlátos 1 normájú funkcionál (e X egységeleme).*

Bizonyítás. Mivel φ nem azonosan zérus, van olyan $x_0 \in X$, melyre $\varphi(x_0) \neq 0$. Ekkor

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_0 e) = \varphi(x_0)\varphi(e),$$

így $\varphi(e) = 1$. Legyen most $\|x\| = 1$ és $\varphi(x) = \lambda$. Ha $|\lambda| > 1$ volna, akkor $y = e - \dfrac{x}{\lambda}$, $\left\|\dfrac{x}{\lambda}\right\| = \dfrac{\|x\|}{|\lambda|} < 1$ miatt, a 7.2.1 tétel alapján reguláris, így

$$\varphi(y)\varphi(y^{-1}) = \varphi(e) = 1,\ \ \varphi(y) \neq 0.$$

Másrészt

$$\varphi(y) = \varphi\left(e - \frac{x}{\lambda}\right) = \varphi(e) - \frac{\varphi(x)}{\lambda} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda} = 0,$$

ami ellentmondás. Így $|\lambda| \leq 1$, azaz $|\varphi(x)| \leq 1$, ha $\|x\| = 1$, amiből következik, hogy φ korlátos és

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| \leq 1.$$

Azonban

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| \geq |\varphi(e)| = 1$$

tehát $\|\varphi\| = 1$. $\square$

A következő tétel a karakterek, maximális ideálok és reguláris elemek közötti kapcsolatot világítja meg.

7.8.2. Tétel. *Legyen X egy egységelemes kommutatív Banach-algebra, $\widehat{X}$ a nem azonosan zérus karaktereinek halmaza.*

1. *X minden maximális ideálja valamely $\varphi \in \widehat{X}$ karakter nulltere.*

2. *Bármely $\varphi \in \widehat{X}$ karakter nulltere maximális ideálja X-nek.*

3. *$x \in X$ akkor és csakis akkor reguláris, ha bármely $\varphi \in \widehat{X}$-ra $\varphi(x) \neq 0$.*

4. *$\lambda \in \sigma(x)$ akkor és csakis akkor, ha van olyan $\varphi \in \widehat{X}$, hogy $\varphi(x) = \lambda$.*

Bizonyítás. 1. Legyen I egy maximális ideálja X-nek, akkor I zárt (7.7.1 tétel) és X/I Banach-algebra (7.7.3 tétel). Válasszuk az $a \in X$ elemet úgy, hogy $a \notin I$ (mivel I valódi ideál ilyen a elem létezik), és legyen

$$J = aX + I.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy J ideál X-ben, mely tartalmazza a-t ($a = ae + 0 \in J$), így J bővebb I-nél. Ezért, I maximalitása miatt, $J = X$ és $ax + i = e$ valamely $x \in X$, $i \in I$-re. Ha $\pi : X \to X/I$ a természetes homomorfizmus, úgy innen

$$e' = \pi e = \pi(ax + i) = \pi(ax) + \pi i = (\pi a)(\pi x) = a'x'.$$

Ezért X/I minden $a' = \pi a$ ($\neq 0'$, mert $a \notin I$) elemének van inverze: $(a')^{-1} = x'$. A Gelfand-Mazur tétel szerint ekkor létezik egy $j : X/I \to \mathbb{C}$ izomorfizmus. Legyen

$$\varphi(x) = j(\pi x) \;\; (x \in X),$$

akkor $\varphi \in \widehat{X}$ és $\mathcal{N}(\varphi) = \{\, x \in X \mid \varphi(x) = 0 \,\} = \{\, x \in X \mid \pi x = 0' \,\} = I$.

2. Nem nehéz ellenőrizni, hogy bármely $\varphi \in \widehat{X}$ mellett $I = \mathcal{N}(\varphi) = \{\, x \in X \mid \varphi(x) = 0 \,\}$ ideál X-ben. I valódi ideál, mert $\varphi \neq 0$. I maximális ideál, mert ha J I-nél bővebb ideálja volna X-nek, úgy létezne olyan $a \in J$, hogy $a \notin I$, azaz $\varphi(a) \neq 0$. De ekkor

$$e = \frac{1}{\varphi(a)}[a - (a - \varphi(a))e]$$

és $a \in J$, $(a - \varphi(a))e \in \mathcal{N}(\varphi) = I \subset J$ miatt $e \in J$, ezért bármely $x \in X$ mellett $x = xe \in J$, azaz $J = X$ volna.

3. Ha x reguláris és x^{-1} az inverze, úgy bármely $\varphi \in \widehat{X}$-re

$$\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = 1,$$

így $\varphi(x) \neq 0$. Fordítva, megmutatjuk, hogy ha x szinguláris, úgy van olyan $\varphi \in \widehat{X}$, hogy $\varphi(x) = 0$. Legyen $I = xX$. I valódi ideál ($e \notin I$), mely része egy J maximális ideálnak (7.7.1 tétel) és az 1. állítás szerint J nulltere egy $\varphi \in \widehat{X}$-nek. Ezzel a φ-vel $\varphi(x) = 0$.

4. $\lambda \in \sigma(x)$ akkor és csakis akkor, ha $x - \lambda e$ szinguláris és ez 3. miatt pontosan akkor igaz, ha van olyan $\varphi \in \widehat{X}$ melyre $\varphi(x - \lambda e) = 0$, azaz $\varphi(x) = \lambda$ teljesül. $\square$

Az előző tétel alkalmazásaként bebizonyítjuk Wiener egy trigonometrikus sorokra vonatkozó tételét.

7.8.3. Tétel. (Wiener) *Legyenek $c_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{Z})$ konstansok, melyekre*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty,$$

és legyen az $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény az

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{7.8.1}$$

összefüggéssel definiálva. Ha $x(t) \neq 0$ minden $t \in \mathbb{R}$ mellett, akkor léteznek olyan $d_n \in \mathbb{C}$, $(n \in \mathbb{Z})$ konstansok, hogy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n| < \infty,$$

és

$$\frac{1}{x(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int} \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{7.8.2}$$

Bizonyítás. Jelölje X a (7.8.1) alakú függvények halmazát a pontonkénti műveletekkel (összeadás, skalárral való szorzás, szorzás) és az

$$\|x\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$$

normával ellátva. Könnyű belátni, hogy X kommutatív egységelemes algebra (egységelem az azonosan 1 függvény). Bármely fix $t_0 \in \mathbb{R}$ mellett

$$\varphi(x) = x(t_0) \ \ (x \in X)$$

karaktere X-nek. Megmutatjuk, hogy X bármely karaktere ilyen alakú. Legyen $\varphi \in \widehat{X}$ és $x_0(t) = e^{it}$, $(t \in \mathbb{R})$. Akkor $x_0^{-1}(t) = e^{-it}$ és ha

$$\varphi(x_0) = \alpha, \quad \text{akkor} \quad \varphi(x_0^{-1}) = \frac{1}{\alpha}.$$

Mivel $\|\varphi\| = 1$, így

$$|\alpha| = |\varphi(x_0)| \leq \|x_0\| = 1,$$

$$\left|\frac{1}{\alpha}\right| = |\varphi(x_0^{-1})| \leq \|x_0^{-1}\| = 1,$$

alapján $|\alpha| = 1$, $\alpha = e^{it_0}$, valamilyen $t_0 \in \mathbb{R}$-rel. Ezért

$$\varphi(x_0^n) = e^{int_0} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

és ha $x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n x_0^n$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$, akkor φ folytonossága miatt

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi(x_0^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int_0} = x(t_0),$$

amint állítottuk.

Ha most $x \in X$ és $x(t) \neq 0$ $(t \in \mathbb{R})$, akkor bármely $\varphi \in \widehat{X}$ mellett $\varphi(x) \neq 0$, így a 7.8.2 tétel 3. állítása alapján x reguláris. Így $x^{-1} \in X$, de $x^{-1}(t) = \dfrac{1}{x(t)}$ $(t \in \mathbb{R})$, ezért fennáll (7.8.2). □

7.9. Gelfand-reprezentáció

7.9.1. Definíció. Legyen $\widehat{X}$ az X kommutatív egységelemes Banach-algebra összes nem zérus karaktereinek halmaza. Rögzített $x \in X$ mellett a

$$\Phi_x(\varphi) = \varphi(x) \qquad (\varphi \in \widehat{X})$$

összefüggéssel definiált $\Phi_x : \widehat{X} \to \mathbb{C}$ függvényt az x elem *Gelfand-transzformált*jának nevezzük.

A $\{\Phi_x\}$ $(x \in X)$ függvényrendszer által indukált gyenge topológiát (lásd a Függelék 8.5.2 definíciót) $\widehat{X}$ *Gelfand-topológiá*jának nevezzük, és $\widehat{X}$-ot ezen topológiával ellátva X *struktúra teré*nek mondjuk. ♢

7.9.1. Tétel. *Egy X egységelemes kommutatív Banach-algebra $\widehat{X}$ struktúra tere kompakt Hausdorff-tér.*

Bizonyítás. Jelölje X^* az X-nek (mint Banach-térnek) a konjugált terét és legyen $S^* = \{f \in X^* | \|f\| \leq 1\}$ X^* zárt egységgömbje. A 7.8.1 tétel szerint $\widehat{X} \subset S^*$. A 8.5.1 tétel alapján $\widehat{X}$ Gelfand-topológiájában bármely $\varphi_0 \in \widehat{X}$ környezetbázisát a

$$\begin{aligned} V(\varphi_0; \Phi_{x_1}, ..., \Phi_{x_n}; \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) &= \{\varphi \in \widehat{X} \mid |\Phi_{x_i}(\varphi) - \Phi_{x_i}(\varphi_0)| < \varepsilon_i\} \\ &= \{\varphi \in \widehat{X} \mid |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon_i\} \end{aligned} \tag{7.9.1}$$

alakú halmazok alkotják ($x_i \in X$, $\varepsilon_i > 0, i = 1, ..., n; n = 1, 2, ...$). Emlékeztetünk arra, hogy az X^* gyenge* topológiájában bármely $f_0 \in X^*$ környezetbázisa

$$U(f_0; F_{x_1}, ..., F_{x_n}; \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = \{f \in X^* \,|\, |F_{x_i}(f) - F_{x_i}(f_0)| < \varepsilon_i\}$$

$$= \{f \in X^* \,|\, |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon_i\}$$

alakú halmazokból áll (ld. 4.6.2). $\widehat{X}$-n az X^* gyenge* topológiájából származó altértopológiában $\varphi_0 \in \widehat{X}$ környezetbázisa

$$U(\varphi_0; F_{x_1}, ..., F_{x_n}; \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \cap \widehat{X} = \{\varphi \in \widehat{X} \mid |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon_i\} \qquad (7.9.2)$$

alakú ($x_i \in X$, $\varepsilon_i > 0, i = 1, ..., n; n = 1, 2, ...$). Mivel (7.9.1) és (7.9.2) azonosak, így a Gelfand-topológia azonos az X^* gyenge* topológiájából származó altér topológiával. A 4.6.3 és 4.6.4 (Banach-Alaoglu) tételek alapján S^* kompakt Hausdorff-tér, így tételünk bizonyításához elegendő azt megmutatni, hogy $\widehat{X}$ gyenge* zárt részhalmaza X^*-nak.

Legyen f_0 az $\widehat{X}$ gyenge* lezártjában. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$f_0(xy) = f_0(x)f_0(y) \qquad (x, y \in X) \qquad (7.9.3)$$

$$f_0(e) = 1 \qquad (7.9.4)$$

teljesülnek (e az X egységeleme). (7.9.4) igazolása azért szükséges, mert $\widehat{X}$ a nemzérus karakterekből áll. Rögzített $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$ mellett azon $f \in X^*$ elemek halmaza, melyekre

$$|f(e) - f_0(e)| < \varepsilon, \quad |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon, \quad |f(y) - f_0(y)| < \varepsilon, \quad |f(xy) - f_0(xy)| < \varepsilon$$

teljesül f_0 egy gyenge* környezete, így, mivel f_0 az $\widehat{X}$ érintkezési pontja, e halmaz tartalmaz egy $\varphi \in \widehat{X}$ karaktert. Innen

$$|1 - f_0(e)| = |\varphi(e) - f_0(e)| < \varepsilon$$

tehát (7.9.4) teljesül; továbbá

$$f_0(xy) - f_0(x)f_0(y) = f_0(xy) - \varphi(xy) + \varphi(x)\varphi(y) - f_0(x)f_0(y)$$

$$= f_0(xy) - \varphi(xy) + \varphi(x)[\varphi(y) - f_0(y)] + [\varphi(x) - f_0(x)]f_0(y),$$

amiből

$$|f_0(xy) - f_0(x)f_0(y)| < (1 + |\varphi(x)| + |f_0(y)|)\varepsilon$$

így $\varepsilon \to 0$-val adódik (7.9.3). □

Jelölje $C(\widehat{X})$ az $\widehat{X}$ kompakt Hausdorff-téren értelmezett folytonos függvények Banach-algebráját. Világos, hogy $\Phi_x \in C(\widehat{X})$ bármely $x \in X$ mellett.

7.9.2. Definíció. A
$$Gx = \Phi_x \qquad (x \in X)$$
vagy
$$Gx(\varphi) = \Phi_x(\varphi) = \varphi(x) \quad (\varphi \in \widehat{X},\ x \in X)$$
összefüggéssel értelmezett $G : X \to C(\widehat{X})$ leképezést az X egységelemes kommutatív Banach-algebra *Gelfand-reprezentációjá*nak nevezzük. $\diamondsuit$

Megjegyezzük, hogy a G leképezés definíciója hasonló egy normált térnek a második konjugált terébe való természetes leképezésének definíciójához (lásd a 4.6.2 definíciót).

7.9.2. Tétel. *Egy egységelemes kommutatív Banach-algebra Gelfand-reprezentációja homomorf leképezése X-nek $C(\widehat{X})$ egy részalgebrájára, mely a normát nem növeli (így folytonos).*

Bizonyítás. Bármely $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{C}$ mellett
$$\begin{aligned} G(x+y)(\varphi) &= \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = Gx(\varphi) + Gy(\varphi), \\ G(\lambda x)(\varphi) &= \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = \lambda Gx(\varphi), \\ G(xy)(\varphi) &= \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = Gx(\varphi)Gy(\varphi), \end{aligned}$$
így G homomorfizmus.

Ha $\|\cdot\|_\infty$-nel jelöljük a sup-normát $C(\widehat{X})$-en, akkor
$$\|Gx\|_\infty = \|\Phi_x\|_\infty = \sup_{\varphi \in \widehat{X}} |\Phi_x(\varphi)| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\varphi(x)| \le \|x\|,$$
így G folytonos leképezés. $\square$

A Gelfand-reprezentáció általában nem kölcsönösen egyértelmű, nem normatartó és nem $C(\widehat{X})$-re képez le. Az alábbiakban szükséges és elegendő feltételt adunk arra, hogy G kölcsönösen egyértelmű, normatartó leképezés legyen. A tétel megfogalmazásához szükségünk van az alábbi definícióra.

7.9.3. Definíció. Egy X egységelemes kommutatív Banach-algebra összes maximális ideáljának a metszetét X *radikáljá*nak nevezzük és $\operatorname{rad} X$-szel jelöljük. X-et *félig egyszerű*nek nevezzük, ha $\operatorname{rad} X = \{0\}$. $\diamondsuit$

7.9.3. Tétel. *Egy X egységelemes kommutatív Banach-algebra Gelfand-reprezentációja* *akkor és csakis akkor kölcsönösen egyértelmű (így izomorf) leképezése X-nek $C(\widehat{X})$-ba, ha X félig egyszerű,*

akkor és csakis akkor normatartó, ha bármely $x \in X$ esetén $r(x) = \|x\|$. (itt $r(x)$ az x elem spektrálsugara).

Bizonyítás. A linearitás miatt G akkor és csakis akkor kölcsönösen egyértelmű, ha $Gx = 0$-ból következik $x = 0$, azaz ha $Gx(\varphi) = \varphi(x) = 0$ bármely $\varphi \in \widehat{X}$-re akkor $x = 0$. Mivel minden φ karakter nulltere X maximális ideálja (7.8.2 tétel 2. állítás) így $\varphi(x) = 0$ bármely $\varphi \in \widehat{X}$-re pontosan akkor teljesül, ha $x \in \operatorname{rad} X$. Ebből pontosan akkor következik az, hogy $x = 0$, ha $\operatorname{rad} X = \{0\}$, azaz ha X félig egyszerű.

A második állítás bizonyításához vegyük figyelembe, hogy bármely $x \in X$ esetén Φ_x értékkészlete azonos az x elem $\sigma(x)$ spektrumával. Ugyanis $\Phi_x(\varphi) = \varphi(x) = \lambda$ a 7.8.2 tétel 4. állítása miatt akkor és csakis akkor teljesül, ha $\lambda \in \sigma(x)$. Ezért

$$\|Gx\|_\infty = \sup_{\varphi \in \widehat{X}} |\Phi_x(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \widehat{X}} |\varphi(x)| = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| = r(x),$$

amiből következik állításunk. □

7.10. Gelfand-Naimark tétel

7.10.1. Definíció. Legyen X egy algebra a komplex test felett. X-et **-algebrának* nevezzük, ha adva van X-nek önmagába való $x \to x^*$ leképezése úgy, hogy

$$\begin{aligned} (x+y)^* &= x^* + y^*, \\ (\lambda x)^* &= \overline{\lambda} x^*, \\ (xy)^* &= y^* x^*, \\ (x^*)^* &= x, \end{aligned}$$

bármely $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén teljesül. Az $x \to x^*$ leképezést *involúció*nak, x^*-ot x *adjungált*jának nevezzük. Az x elemet

*önadjungált*nak (vagy valósnak) nevezzük, ha $x^* = x$,

*unitér*nek nevezzük, ha $xx^* = x^*x = e$,

*normális*nak nevezzük, ha $xx^* = x^*x$.

◇

Az $(x^*)^* = x$ tulajdonság miatt az involúció X-nek önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése. Megjegyezzük, hogy minden *-algebrában $x + x^*$,

$i(x - x^*)$, xx^*, x^*x önadjungált elemek (amint az könnyen látható), továbbá bármely $x \in X$ felírható

$$x = u + iv \qquad \left(u = \frac{x + x^*}{2},\ v = \frac{x - x^*}{2i}\right)$$

alakban, ahol u, v önadjungáltak. Továbbá az e egységelem (ha van) mindig önadjungált (ti. $e^* = ee^*$, $e = (ee^*)^* = ee^* = e^*$).

7.10.2. Definíció. Az X halmazt B^*-*algebrá*nak nevezzük, ha

X Banach-algebra,

X *-algebra,

és bármely $x \in X$ esetén $\|xx^*\| = \|x\|^2$ teljesül.

$\diamondsuit$

7.10.1. Tétel. (Gelfand-Naimark) *Legyen X egy kommutatív, egységelemes B^*-algebra, $\widehat{X}$ az X struktúra tere. Akkor a $G : X \to C(\widehat{X})$ Gelfand-reprezentáció X-nek a $C(\widehat{X})$ B^*-algebrára való $*$-izomorf (azaz involúciót megörző, izomorf) és izometrikus (ezért kölcsönösen egyértelmű) leképezése.*

A tétel röviden úgy is megfogalmazható, hogy bármely kommutatív egységelemes B^*-algebra $*$-izomorf és izometrikus valamely kompakt Hausdorff téren értelmezett összes folytonos komplex függvények B^*-algebrájával.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy G megőrzi az involúciót, azaz

$$Gx^* = (Gx)^* = \overline{Gx}$$

(*ti. $C(\widehat{X})$-ben az involúció a függvény komplex konjugáltjának képzése.*) Legyen először $u \in X$ önadjungált elem: $u = u^*$, és valós t mellett legyen

$$z = u + ite \qquad (e \text{ az } X \text{ egységeleme}).$$

Ha $Gu = \Phi_u = \alpha + i\beta$, ahol α, β valós értékű függvények $C(\widehat{X})$-ből, akkor felhasználva azt, hogy G homomorfizmus (7.9.2 tétel) kapjuk, hogy

$$Gz = Gu + itGe = \alpha + i\beta + it = \alpha + i(\beta + t).$$

Mivel $zz^* = (u + ite)(u - ite) = u^2 + t^2e$, és G a normát nem növeli (7.9.2 tétel)

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 \le \|Gz\|_\infty^2 \le \|z\|^2 = \|zz^*\| = \|u^2 + t^2e\| \le \|u\|^2 + t^2,$$

amiből

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|u\|^2 \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ezért $\beta = 0$, Gu valós értékű függvény. Bármely $x \in X$ $x = u + iv$ alakba írható, ahol $u = u^*$, $v = v^*$ és $x^* = u - iv$, így

$$Gx^* = Gu - iGv = \overline{Gu + iGv} = \overline{Gx}.$$

Most megmutatjuk, hogy G izometria. Bármely $x \in X$ esetén, felhasználva, hogy X kommutatív,

$$\|x^2\|^2 = \|x^2(x^2)^*\| = \|xxx^*x^*\| = \|xx^*(xx^*)^*\| = \|xx^*\|^2 = \|x\|^4$$

amiből $\|x^2\| = \|x\|^2$. Innen indukcióval kapjuk, hogy

$$\|x^{2^k}\| = \|x\|^{2^k} \qquad (k = 1, 2, ...)$$

de akkor a spketrálsugár formula alapján

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty} \|x^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|x\|,$$

ezért a 7.9.3 tétel alapján G izometria. Ebből már következik, hogy G X-nek $C(\widehat{X})$-be való *-izomorf és izometrikus leképezése.

Megmutatjuk, hogy a leképezés $C(\widehat{X})$-re történik, ezzel a bizonyítás teljes lesz. Tekintsük a $G(X)$ halmazt. Ez zárt részalgebrája $C(\widehat{X})$-nek, mely elválasztja $\widehat{X}$ pontjait. Ha ugyanis $\varphi, \psi \in \widehat{X}, \varphi \neq \psi$, akkor van olyan $x \in X$, melyre $\varphi(x) \neq \psi(x)$. Ekkor Gx elválasztja φ, ψ-t, mert

$$Gx(\varphi) = \varphi(x) \neq \psi(x) = Gx(\psi).$$

Továbbá $G(X)$ tartalmazza a $Ge(\varphi) = \varphi(e) = 1$ $(\varphi \in \widehat{X})$ azonosan 1 függvényt és az involúció megőrzése miatt bármely $G(X)$-beli függvénnyel együtt annak konjugáltját is. Ezért a Stone-Weierstrass tétel (Függelék 8.9.2 tétel) miatt $G(X) = C(\widehat{X})$. □

7.11. Rész B^*-algebrák

7.11.1. Tétel. *Legyen X egy (nem feltétlen kommutatív) egységelemes B^*-algebra és $X_0 \subset X$ kommutatív egységelemes rész B^*-algebra úgy, hogy X_0 és X egységelemei azonosak. Akkor $x \in X_0$ reguláris X_0-ban (azaz van olyan $x^{-1} \in X_0$, hogy $xx^{-1} = x^{-1}x = e$, e az egységelem) akkor és csakis akkor, ha x reguláris X-ben. Így, ha $\sigma_0(x)$ illetve $\sigma(x)$ jelöli az $x \in X_0$ elem X_0-ra illetve X-re vonatkozó spektrumát, akkor*

$$\sigma_0(x) = \sigma(x).$$

Bizonyítás. Ha $x \in X_0$ reguláris X_0-ban, úgy $x^{-1} \in X_0$, $x^{-1} \in X$, tehát x reguláris X-ben is.

Fordítva, ha $x \in X_0$ reguláris X-ben, úgy $x^{-1} \in X$. Megmutatjuk, hogy $x^{-1} \in X_0$.

Tekintsük X összes X_0-t tartalmazó kommutatív rész B^*-algebráit. Ezek halmazában a tartalmazás egy félig rendezés. E félig rendezésre a Zorn-lemma feltételei teljesülnek, mert ha $\{X_\lambda\}\,(\lambda \in \Lambda)$ egy lánc, úgy $\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda}$ ennek felső korlátja. Így van X-nek egy X_0-t tartalmazó maximális kommutatív Y rész B^*-algebrája. Nyilvánvalóan e Y-nak is egységeleme. Megmutatjuk először, hogy $x^{-1} \in Y$. Ha $y \in Y$, akkor Y kommutativitása miatt $yx = xy$, így $x^{-1}(yx)x^{-1} = x^{-1}(xy)x^{-1}$, azaz $x^{-1}y = yx^{-1}$ és hasonlóan $y^*x = xy^*$-ból $x^{-1}y^* = y^*x^{-1}$ vagy $(x^{-1})^*y = y(x^{-1})^*$ következik. Ezért Y maximalitása miatt $x^{-1} \in Y$. Ellenkező esetben ugyanis volna X-nek egy $Y \cup \{x^{-1}\}$-et tartalmazó, Y-t valódi részhalmazként tartalmazó kommutatív rész B^*-algebrája, ami lehetetlen.

Tekintsük most Y-nak $C(\widehat{Y})$-re vonatkozó G Gelfand-reprezentációját, mely a 7.10.1 tétel szerint *-izomorf és izometrikus leképezés. G X_0-t valamely $C_0(\widehat{Y})$ rész B^*-algebrába viszi át, és $x \in X_0$ miatt $Gx = \Phi_x \in C_0(\widehat{Y})$. Mivel x reguláris X-ben, így $Gx = \Phi_x$ reguláris $C(\widehat{Y})$-ben, azaz (a 7.8.2 tétel 3. állítása alapján) $\Phi_x(\varphi) \neq 0$, ha $\varphi \in \widehat{Y}$.

Megmutatjuk, hogy ekkor $\Phi_{x^{-1}} = \dfrac{1}{\Phi_x} \in C_0(\widehat{Y})$, amiből G injektív volta miatt következik, hogy $x^{-1} \in X_0$. Legyen $m = \inf\limits_{\varphi\in\widehat{Y}} |\Phi_x(\varphi)|$, $M = \sup\limits_{\varphi\in\widehat{Y}} |\Phi_x(\varphi)|$, úgy $0 < m \le M < \infty$. Mivel $C_0(\widehat{Y})$ B^*-algebra és $\Phi_x \in C_0(\widehat{Y})$, így $\overline{\Phi_x}, |\Phi_x|^2 = \overline{\Phi_x}\Phi_x$ és $1 - \dfrac{1}{M^2}|\Phi_x|^2$ is $C_0(\widehat{Y})$-beli függvények és

$$0 \le 1 - \frac{1}{M^2}|\Phi_x(\varphi)|^2 \le 1 - \left(\frac{m}{M}\right)^2 < 1 \quad \text{ha } \varphi \in \widehat{Y}.$$

Ezért

$$\frac{M^2}{|\Phi_x(\varphi)|^2} = \frac{1}{1 - \left[1 - \dfrac{1}{M^2}|\Phi_x(\varphi)|^2\right]} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[1 - \frac{1}{M^2}|\Phi_x(\varphi)|^2\right]^k \qquad (\varphi \in \widehat{Y}),$$

ahol a jobboldali sor egyenletesen konvergens. E sor részletösszegei $C_0(\widehat{Y})$-beli függvények, így felhasználva, hogy folytonos függvények egyenletesen konvergens sorának összegfüggvénye is folytonos, az összeg is $C_0(\widehat{Y})$-beli, de akkor $\dfrac{1}{|\Phi_x|^2}$ és $\Phi_{x^{-1}} = \dfrac{1}{\Phi_x} = \overline{\Phi_x} \cdot \dfrac{1}{|\Phi_x|^2}$ is $C_0(\widehat{Y})$-ben van. $\square$

Legyen most x_0 egy normális elem az X egységelemes B^*-algebrában és

$$B^*(x_0) = \overline{\{p(x_0, x_0^*) \,|\, p \text{ kétváltozós polinom }\}}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $B^*(x_0)$ x_0-t tartalmazó kommutatív egységelemes rész B^*-algebrája X-nek (az egységelem ugyanaz, mint X-ben), mely a legszűkebb az x_0-t és az egységelemet tartalmazó kommutatív rész B^*-algebrák között. $B^*(x_0)$-t az x_0 által generált kommutatív egységelemes rész B^*-algebrának nevezzük.

Ha $X_0 = B^*(x_0)$, úgy az előző tétel szerint bármely $x \in B^*(x_0)$-ra

$$\sigma_0(x) = \sigma(x).$$

7.11.2. Tétel. *Legyen G az $X_0 = B^*(x_0)$ Gelfand-reprezentációja, és $Gx = \Phi_x$ az x Gelfand-transzformáltja, akkor*

1. *Φ_{x_0} az $\widehat{X}_0$-nak $\sigma(x_0)$-ra való homeomorf leképezése.*

2. *A $\Psi_x = g$, ahol $g(\lambda) = \Phi_x\big(\Phi_{x_0}^{-1}(\lambda)\big)$ $(\lambda \in \sigma(x_0))$, leképezés $B^*(x_0)$-nak $C(\sigma(x_0))$-ra való $*$-izomorf és izometrikus leképezése, melynél x_0 képe a $g(\lambda) = \lambda$ $(\lambda \in \sigma(x_0))$ függvény. Itt $\Phi_{x_0}^{-1}$ az 1. alatti homeomorf leképezés inverze, nem pedig $\Phi_{x_0} \in C(\widehat{X_0})$ inverz eleme, mely $1/\Phi_{x_0}$!*

3. *A $B^*(x_0)$ részalgebrának egyetlen olyan $*$-izomorf és izometrikus leképezése van $C(\sigma(x_0))$-ra, melynél x_0 képe a $g(\lambda) = \lambda$ $(\lambda \in \sigma(x_0))$ függvény.*

Bizonyítás. 1. Φ_{x_0} folytonos leképezése $\widehat{X}_0$-nek, melynek értékkészlete $\sigma_0(x_0) = \sigma(x_0)$ (ld. 7.8.2 tétel (4) állítás). Megmutatjuk, hogy Φ_{x_0} kölcsönösen egyértelmű. Ugyanis, ha $\varphi_1, \varphi_2 \in \widehat{X}_0$ olyanok, hogy

$$\Phi_{x_0}(\varphi_1) = \Phi_{x_0}(\varphi_2),$$

akkor felhasználva, hogy Φ megőrzi az involúciót,

$$\Phi_{x_0^*}(\varphi_1) = \overline{\Phi_{x_0}(\varphi_1)} = \overline{\Phi_{x_0}(\varphi_2)} = \Phi_{x_0^*}(\varphi_2).$$

Így, ha $y = p(x_0, x_0^*)$ az x_0, x_0^* elemek tetszőleges polinomja, akkor

$$\Phi_y(\varphi_1) = \Phi_y(\varphi_2),$$

azaz

$$\varphi_1(y) = \varphi_2(y).$$

Az $y = p(x_0, x_0^*)$ alakú elemek sűrűn vannak $B^*(x_0)$-ban, így φ_1, φ_2 folytonossága miatt innen bármely $x \in B^*(x_0)$-ra

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x),$$

azaz $\varphi_1 = \varphi_2$ következik. Φ_{x_0} tehát az $\widehat{X}_0$ kompakt Hausdorff-teret (ld. 7.9.1 tétel) kölcsönösen egyértelműen és folytonosan képezi le a $\sigma(x_0)$ kompakt Hausdorff-térre. Ebből már következik, hogy Φ_{x_0} homeomorfizmus, ti. tetszőleges $F \subset \widehat{X}_0$ zárt halmaz esetén $\Phi_{x_0}(F)$ kompakt része $\sigma(x_0)$-nak, így zárt, ezért Φ_{x_0} bármely nyílt halmazt nyílt halmazba visz át.

2. abból következik, hogy az $x \to \Phi_x$ Gelfand-reprezentáció $*$-izomorf és izometrikus leképezés és (1) szerint $\Phi_{x_0}^{-1}$ homeomorfizmusa $\sigma(x_0)$-nak $\widehat{X}_0$-re.

3. Ha Ψ_1 $B^*(x_0)$-nak $C(\sigma(x_0))$-ra való $*$-izomorf és izometrikus leképezése, melynél x_0 képe a $g(\lambda) = \lambda$ $(\lambda \in \sigma(x_0))$ függvény, akkor

$$\Psi_1 x_0 = \Psi x_0$$

és

$$\Psi_1 x_0^* = \overline{\Psi_1 x_0} = \overline{\Psi x_0} = \Psi x_0^*,$$

amiből x_0 és x_0^* polinomjaira, majd tetszőleges $x \in B^*(x_0)$-ra kapjuk, hogy

$$\Psi_1 x = \Psi x, \qquad \text{azaz } \Psi_1 = \Psi.$$

$\square$

Ez a tétel lehetőséget nyújt arra, hogy egy B^*-algebra normális elemein folytonos függvényeket értelmezzünk. Legyen ugyanis x_0 normális elem, $f \in C(\sigma(x_0))$, akkor az

$$x_0 \to f(x_0)$$

függvényt $f(x_0) = \Psi^{-1} f$-fel értelmezzük, ahol Ψ^{-1} a 2.-ben szereplő leképezés inverze. Ha f analitikus függvény $\sigma(x_0)$-on, $f(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ $(\lambda \in \sigma(x_0))$ és $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ konvergens, úgy a 2. állítás alapján $f(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ adódik. Így a fenti értelmezés összhangban van az analitikus függvények **7.4**-ben adott értelmezésével.

8. fejezet

Függelék: Topológikus terek

8.1. Alapfogalmak

8.1.1. Definíció. Az $X \neq \emptyset$ halmazt *topológikus tér*nek nevezzük, ha adva van részhalmazainak egy $\mathcal{G}$ halmaza, mely kielégíti az alábbi feltételeket:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{G}$ (az üres halmaz és X $\mathcal{G}$-ben vannak),

(2) $G_1, G_2 \in \mathcal{G} \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$ (bármely két $\mathcal{G}$-beli halmaz metszete is $\mathcal{G}$-ben van),

(3) $G_\alpha \in \mathcal{G}$ $(\alpha \in \Gamma) \Longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha \in \mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$-beli halmazok tetszőleges rendszerének az uniója is $\mathcal{G}$-ben van).

X elemeit *pontok*nak mondjuk, $\mathcal{G}$-t *topológiá*nak nevezzük X-en. $\mathcal{G}$ elemeit *nyílt halmaz*oknak, komplementereiket *zárt halmaz*oknak nevezzük. ♢

Jelölje $\mathcal{F}$ az X topológikus tér összes zárt halmazainak osztályát, akkor a De Morgan-féle képletek alapján az üres halmaz és X zárt halmazok, bármely két $\mathcal{F}$-beli halmaz uniója is $\mathcal{F}$-beli. $\mathcal{F}$-beli halmazok tetszőleges rendszerének a metszete is $\mathcal{F}$-beli.

8.1.2. Definíció. Az X topológikus térnek az Y topológikus térbe való f leképezését *folytonos*nak nevezzük, ha Y bármely nyílt halmazának az inverz képe nyílt. Az X-nek Y-ra való olyan kölcsönösen egyértelmű folytonos leképezését, amelynek az inverze is folytonos, *homeomorf leképezés*nek mondjuk. Akkor mondjuk, hogy X *homeomorf* Y-nal, ha X-nek van homeomorf leképezése Y-ra. ♢

A homeomorf leképezések ugyanazt a szerepet játsszák a topológiában, mint az izomorf leképezések az algebrában. Homeomorf tereket a topológia szempontjából azonosoknak tekintünk.

8.1.3. Definíció. Az X topologikus tér Y részhalmazának X nyílt halmazaival való metszetei Y egy topológiáját alkotják (amint az könnyen belátható), amellyel Y-t ellátva Y-t az X egy *alterének* nevezzük. ♢

8.1.4. Definíció. Legyen az X halmazon két topológia, $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ adva. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{G}_1$ *gyengébb* (durvább) $\mathcal{G}_2$-nél (vagy ekvivalens módon $\mathcal{G}_2$ *erősebb* (finomabb) $\mathcal{G}_1$-nél), ha $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ teljesül. ♢

Példák.

1. Legyen X egy tetszőleges halmaz, $\mathcal{G} = \{\emptyset, X\}$ topológia X-en, melyet *indiszkrét topológiá*nak nevezünk.

2. Legyen most $\mathcal{G}$ X összes részhalmazainak osztálya. $\mathcal{G}$ ismét topológia X-en, melyet *diszkrét topológiá*nak nevezünk.

3. Legyen $X = \mathbb{R}$ a valós számok halmaza. A *szokásos topológia* $\mathbb{R}$-*en* $\mathbb{R}$ összes olyan részhalmazainak osztálya, melyek bármely pontjukkal együtt egy, a pontot tartalmazó nyílt intervallumot is tartalmaznak. Ha mást nem mondunk, akkor $\mathbb{R}$-et mindig ezzel a topológiával gondoljuk ellátva.

8.2. Nyílt és zárt halmazok

Legyen X egy topologikus tér a $\mathcal{G}$ topológiával.

8.2.1. Definíció. Az U halmazt az $x \in X$ *pont (nyílt) környezeté*nek nevezzük, ha U x-et tartalmazó nyílt halmaz.

Egy *halmaz (nyílt) környezetén* a halmazt tartalmazó nyílt halmazt értünk. ♢

8.2.2. Definíció. Az x pontot az $A(\subset X)$ halmaz *belső pontjá*nak nevezzük, ha A tartalmazza x valamely környezetét.

Az x pontot A *határpontjá*nak nevezzük, ha x bármely környezete tartalmaz A-beli és nem A-beli pontot is.

Az x pontot A *érintkezési pontjá*nak nevezzük, ha x bármely környezete tartalmaz A-beli pontot.

Az x pontot A *torlódási pontjá*nak nevezzük, ha x bármely környezete tartalmaz x-től különböző A-beli pontot. Az x pontot A *izolált pontjá*nak nevezzük, ha x-nek van olyan környezete, melyben nincs tőle különböző A-beli pont. ♢

8.2.1. Tétel. *Egy halmaz akkor és csakis akkor nyílt, ha minden pontja belső pont.*

Bizonyítás. Ha A nyílt, úgy minden $x \in A$ pontnak A környezete, tehát minden A-beli pont A belső pontja.

Fordítva, ha A minden pontja belső pont, akkor bármely $x \in A$ ponthoz van olyan G_x nyílt halmaz, melyre $G_x \subset A$. Ekkor $A = \bigcup_{x \in A} G_x$ miatt A nyílt. $\square$

8.2.2. Tétel. *Egy halmaz akkor és csakis akkor zárt, ha tartalmazza összes torlódási pontját.*

Bizonyítás. Legyen A zárt halmaz, és x legyen A torlódási pontja. Ha x nem volna benne A-ban, úgy x az $A' = X \setminus A$ nyílt halmazban lenne, így x egy környezete is A'-ben volna, ezért x nem lehetne torlódási pontja A-nak. Így $x \in A$.

Fordítva, tegyük fel, hogy A tartalmazza összes torlódási pontját. Megmutatjuk, hogy A' nyílt (tehát A zárt). Legyen $y \in A'$, akkor y egy környezete is A'-ben van, mert ellenkező esetben y bármely környezetében volna tőle különböző A-beli pont, így y A torlódási pontja volna, ami $y \in A'$ miatt ellentmondás, hiszen feltételünk alapján A tartalmazza az összes torlódási pontját. $\square$

8.2.3. Definíció. Az $A \subset X$ halmazban lévő összes nyílt halmazok unióját A *nyílt magjá*nak (vagy belsejének) nevezzük és A^o-rel jelöljük. $\diamondsuit$

Világos, hogy A^o nyílt halmaz, mely „maximális" a következő értelemben : ha B nyílt és $B \subset A$, akkor $B \subset A^o$. Ebből az is következik, hogy A nyílt akkor és csakis akkor, ha $A = A^o$.

8.2.3. Tétel. *A nyílt mag képzési operáció rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

$$\begin{aligned} &(1)\quad A^o \subset A, &&(3)\quad A \subset B \Longrightarrow A^o \subset B^o,\\ &(2)\quad (A^o)^o = A^o, &&(4)\quad (A \cap B)^o = A^o \cap B^o. \end{aligned}$$

Bizonyítás. (1) a definíció miatt igaz, (2) abból következik, hogy A^o nyílt.

Ha $A \subset B$, úgy $A^o \subset B$ és B^o maximumtulajdonsága miatt $A^o \subset B^o$. Ezzel (3)-at igazoltuk.

(4) bizonyításához induljunk ki az $A^o \cap B^o \subset A \cap B$ tartalmazásból. A baloldali halmaz nyílt, így (3) alapján $A^o \cap B^o \subset (A \cap B)^o$. Másrészt $A \cap B \subset A$ miatt $(A \cap B)^o \subset A^o$, hasonlóan $(A \cap B)^o \subset B^o$, amiből $(A \cap B)^o \subset A^o \cap B^o$. $\square$

8.2.4. Tétel. *Egy halmaz nyílt magja (belseje) azonos a halmaz összes belső pontjainak halmazával.*

Bizonyítás. Legyen B az A halmaz összes belső pontjainak halmaza. Ha $x \in B$, úgy van olyan x-et tartalmazó G_x nyílt halmaz, melyre $x \in G_x \subset A$, így $x \in G_x \subset A^o$, azaz $B \subset A^o$.

Fordítva, ha $y \in A^o$, úgy A^o definíciója alapján y benne van valamely A-ban lévő nyílt halmazban, így y belső pontja A-nak, azaz $y \in B$. $\square$

8.2.4. Definíció. Az $A \subset X$ halmazt tartalmazó összes zárt halmazok metszetét A *lezártjá*nak nevezzük, és $\overline{A}$-sal (vagy néha tipográfiai okokból, pl. a 8.2.7 tételben, A^--sal) jelöljük. $\diamondsuit$

Világos, hogy $\overline{A}$ zárt halmaz, mely „minimális” a következő értelemben: ha B zárt és $A \subset B$, akkor $\overline{A} \subset B$. Ebből az is következik, hogy A akkor és csakis akkor zárt, ha $\overline{A} = A$.

8.2.5. Tétel. *A lezárási operáció rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

$$(5)\quad A \subset \overline{A} \qquad\qquad (7)\quad A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset$$

$$(6)\quad \overline{(\overline{A})} = \overline{A} \qquad\qquad (8)\quad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Bizonyítás. (5) világos, (6) abból következik, hogy $\overline{A}$ zárt.

Ha $A \subset B$, úgy $A \subset \overline{B}$ és a lezárt minimumtulajdonsága miatt $\overline{A} \subset \overline{B}$. Ezzel (7)-et igazoltuk.

(8) igazolása: $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{A}$, így a jobboldali halmaz zártsága miatt $\overline{(A \cup B)} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Másrészt $A \subset A \cup B \subset \overline{(A \cup B)}$, amiből (7) miatt $\overline{A} \subset \overline{(A \cup B)}$. Hasonlóan $\overline{B} \subset \overline{(A \cup B)}$, s végül $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{(A \cup B)}$. $\square$

8.2.6. Tétel. *Egy halmaz lezártja azonos a halmaz összes érintkezési pontjainak halmazával.*

Bizonyítás. Jelölje E az A halmaz érintkezési pontjainak halmazát. Megmutatjuk, hogy E zárt halmaz. Legyen $x \in E'$, akkor x-nek van olyan U környezete, melyben nincs A-beli pont (mert x nem érintkezési pontja A-nak). De akkor U-ban E-beli pont sem lehet, mert ha $e \in U \cap E$ volna, úgy U-ban kellene lenni A-beli pontnak, ami lehetetlen. Ebből következik, hogy $U \subset E'$, azaz E zárt. Mivel $A \subset E, \overline{A} \subset \overline{E} = E$.

A fordított tartalmazás: $\overline{A} \supset E$ bizonyításához azt mutatjuk meg, hogy $\overline{A}' \subset E'$. Legyen $x \in \overline{A}'$, akkor ($\overline{A}'$ nyíltsága miatt) x-nek van olyan környezete, mely $A^{-\prime}$-ben van, de akkor e környezet nem tartalmazhat A-beli pontot sem, azaz x nem lehet érintkezési pontja A-nak. Így $x \in E'$. $\square$

8.2.7. Tétel. *Bármely A halmaz esetén*

$$A^- = A'^{o\,\prime} \quad \text{és} \quad A^o = A'^{-\,\prime}.$$

Bizonyítás.

$$A^- = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \text{ zárt}}} F = \left(\bigcup_{\substack{F' \subset A' \\ F' \text{ nyílt}}} F' \right)' = \left(A'^{o} \right)' = A'^{o\,\prime}.$$

A második egyenlőség megkapható az elsőből, ha azt A'-re alkalmazzuk, majd mindkét oldal komplementerét vesszük. □

8.2.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *sűrű* (vagy *mindenütt sűrű*) X-ben, ha $\overline{A} = X$.

A B halmazt *sehol sem sűrű*nek nevezzük X-ben, ha $\overline{B}^o = \emptyset$. ♢

Mivel egy halmaz lezártja azonos a halmaz érintkezési pontjainak halmazával, így $A \subset X$ mindenütt sűrű X-ben akkor és csakis akkor, ha X bármely nem üres nyílt halmaza tartalmaz A-beli elemet.

Egy B halmaz seholsem sűrű X-ben akkor és csakis akkor, ha X bármely nem üres nyílt halmaza tartalmaz olyan nem üres nyílt halmazt, melynek nincs B-beli pontja. Ugyanis ha $\overline{B}^o = \emptyset$, úgy $\overline{B}$-nak nincs belső pontja, ezért tetszőleges nem üres G nyílt halmaznak van $\overline{B}^o$ komplementerében levő x pontja. $G \cap \overline{B}'$ nyílt, így egy x-et tartalmazó (tehát nem üres) G_1 nyílt halmaz is része $G \cap \overline{B}'$-nek. Ez azt jelenti, hogy G_1 nyílt, nem üres részhalmaza G-nek, melynek nincs B-beli pontja (ti. $G_1 \subset \overline{B}' \subset B'$).

Fordítva, ha egy B halmaz a fenti tulajdonságú, akkor $\overline{B}^o = \emptyset$. Ugyanis ha $y \in \overline{B}^o$ volna, úgy egy y-t tartalmazó (tehát nem üres) G nyílt halmaz is $\overline{B}$-ban volna, így G bármely nem üres, nyílt G_1 részhalmaza tartalmazna B-beli elemet (mert G_1 tartalmazza B egy érintkezési pontját), ami ellentmondás.

8.3. Bázis, szubbázis, környezetbázis

8.3.1. Definíció. Egy topológikus tér nyílt halmazainak egy osztályát a tér egy *bázisá*nak nevezzük, ha bármely nyílt halmaz előállítható ezen osztályból vett halmazok uniójaként. ♢

Megjegyzés. Legyenek A_α $(\alpha \in \Gamma)$ egy X halmaz részhalmazai, akkor

$$\bigcup_{\alpha \in \emptyset} A_\alpha := \emptyset, \qquad \bigcap_{\alpha \in \emptyset} A_\alpha := X,$$

azaz az üres halmaz előáll „üres unióként”, az alaphalmaz pedig „üres metszetként”.

8.3.1. Tétel. *Egy X halmaz részhalmazainak egy $\mathcal{B}$ osztálya akkor és csakis akkor bázisa X egy topológiájának, ha teljesülnek a következő feltételek:*

I. $U, V \in \mathcal{B}, x \in U \cap V \Longrightarrow \exists W \in \mathcal{B} : x \in W \subset U \cap V,$

II. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X.$

8.3.2. Definíció. Egy topologikus tér nyílt halmazainak egy osztályát a tér *szubbázisá*nak nevezzük, ha ezen osztály halmazaival képezett összes véges tagszámú metszetek a tér egy bázisát alkotják. $\diamondsuit$

8.3.2. Tétel. *Ha $\mathcal{S}$ az X halmaz részhalmazainak egy osztálya, akkor van olyan topológiája X-nek, melynek $\mathcal{S}$ egy szubbázisa.*

Világos, hogy e topológia az $\mathcal{S}$-beli halmazok összes véges metszeteinek az unióiból áll.

8.3.3. Definíció. Egy topologikus tér x pontjának környezeteiből álló $\mathcal{B}(X)$ halmazosztályt x *környezetbázisá*nak nevezzük, ha x bármely környezete tartalmaz $\mathcal{B}(X)$-beli környezetet. $\diamondsuit$

Példa. A valós számok $\mathbb{R}$ topologikus terében az összes nyílt intervallumok (sőt, az összes racionális végpontú nyílt intervallumok is) a tér egy bázisát alkotják. Az összes $(r, \infty), (-\infty, s)$ $(r, s$ racionálisak) alakú intervallumok szubbázist alkotnak. A $\mathcal{B}(x) = \{\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \mid n = 1, 2, ...\}$ osztály x környezetbázisa.

8.3.3. Tétel. *Egy X halmaz minden x eleméhez legyen hozzárendelve X bizonyos részhalmazaiból álló $\mathcal{B}(x)$ nem üres halmazrendszer. Akkor és csakis akkor van olyan topológia X-en, melynek minden $x \in X$ pontban $\mathcal{B}(x)$ a környezetbázisa, ha teljesülnek a következő feltételek bármely $x \in X$ esetén:*

I. *bármely $U \in \mathcal{B}(x)$ esetén $x \in U$,*

II. *ha $U, V \in \mathcal{B}(x)$, úgy van olyan $W \in \mathcal{B}(x) : W \subset U \cap V$,*

III. *ha $U \in \mathcal{B}(x)$ és $y \in U$, akkor van olyan $V \in \mathcal{B}(y)$, hogy $V \subset U$.*

Az a $\mathcal{G}$ topológia, melynek $\mathcal{B}(x)$ környezetbázisa minden $x \in X$-re, a következőképpen adható meg:

$$\mathcal{G} = \{G \subset X \mid \text{minden } x \in G\text{-hez van olyan } U \in \mathcal{B}(x), \text{ hogy } U \subset G\}.$$

8.3.4. Definíció. Egy topologikus tér x pontjának környezeteiből álló $\mathcal{S}(x)$ halmazosztályt x *környezet szubbázisá*nak nevezzük, ha $\mathcal{S}(x)$-beli halmazok összes véges metszetei x környezetbázisát alkotják. $\diamondsuit$

8.3.4. Tétel. *Egy X halmaz minden x eleméhez legyen hozzárendelve X bizonyos részhalmazaiból álló $\mathcal{S}(x)$ nem üres halmazrendszer. Akkor és csakis akkor van olyan topológia X-en, melynek minden $x \in X$ pontban $\mathcal{S}(x)$ a környezetszubbázisa, ha bármely $x \in X$ esetén teljesülnek az alábbi feltételek:*

I. *bármely* $U \in \mathcal{S}(x)$ *esetén* $x \in U$,

II. *ha* $U \in \mathcal{S}(x)$ *és* $y \in U$, *akkor léteznek* $V_1, ..., V_n \in \mathcal{S}(y)$ *úgy, hogy* $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset U$.

8.3.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy topológikus tér eleget tesz az *első megszámlálhatósági axiómá*nak, ha a tér bármely pontjának van megszámlálható környezetbázisa. Azt mondjuk, hogy egy topológikus tér eleget tesz a *második megszámlálhatósági axiómá*nak, ha a térnek van megszámlálható bázisa. ♢

A második megszámlálhatósági axióma teljesülése esetén teljesül az első is (de fordítva nem), mert egy adott pontot tartalmazó összes bázisbeli halmazok a pont egy környezetbázisát alkotják.

8.4. Folytonos leképezések

Legyenek X, Y tetszőleges halmazok és $f : X \to Y$ X-nek Y-ba való leképezése. Ha $A \subset X$, úgy az A halmaz f *általi képén* az

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

halmazt értjük, míg egy $B \subset Y$ halmaz f *általi inverz képe* az

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

halmaz.

Könnyű ellenőrizni az alábbi tulajdonságokat:

$$\begin{aligned} &f(\emptyset) = \emptyset, \qquad\qquad f(X) \subset Y, \\ &A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2), \\ &f\left(\bigcup A_\alpha\right) = \bigcup f(A_\alpha), \\ &f\left(\bigcap A_\alpha\right) \subset \bigcap f(A_\alpha). \end{aligned}$$

Az inverz kép képzésének tulajdonságai sokkal jobbak:

$$\begin{aligned} &f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \qquad\qquad f^{-1}(Y) = X, \\ &B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2), \\ &f^{-1}\left(\bigcup B_\alpha\right) = \bigcup f^{-1}(B_\alpha), \\ &f^{-1}\left(\bigcap B_\alpha\right) = \bigcap f^{-1}(B_\alpha), \\ &f^{-1}(B') = \left(f^{-1}(B)\right)'. \end{aligned}$$

Legyenek most X, Y topológikus terek, $f : X \to Y$.

Az f leképezést folytonosnak neveztük (ld. 8.1.2 definíciót), ha bármely Y-beli nyílt halmaz f általi inverz képe nyílt. Világos, hogy ha f folytonos, akkor bármely Y-beli zárt halmaz inverz képe is zárt. A direkt leképezésnél azonban más a helyzet.

8.4.1. Definíció. Az f leképezést *zárt*nak nevezzük, ha bármely X-beli zárt halmaz képe zárt.

Az f leképezést *nyílt*nak nevezzük, ha bármely X-beli nyílt halmaz képe nyílt. $\diamondsuit$

Belátható, hogy egy leképezés nyíltsága és zártsága különböző fogalmak.

Az analízisben a folytonosság pontbeli tulajdonság. Ennek felel meg a következő

8.4.2. Definíció. Az f leképezést az *x pontban folytonos*nak nevezzük, ha $f(x)$ bármely V környezetéhez megadható x-nek egy olyan U környezete, hogy $f(U) \subset V$. $\diamondsuit$

8.4.1. Tétel. *Egy topológikus térnek egy másikba való leképezése akkor és csakis akkor folytonos, ha minden pontban folytonos.*

8.5. Leképezések által indukált topológiák

8.5.1. Definíció. Legyen X egy halmaz és $\mathcal{E}$ legyen X részhalmazainak egy osztálya. Azt a leggyengébb topológiát, melyben $\mathcal{E}$ halmazai még nyíltak, az *$\mathcal{E}$ osztály által generált toplógiá*nak nevezzük. $\diamondsuit$

Világos, hogy ezt a generált topológiát az $\mathcal{E}$-beli halmazok véges (tagszámú) metszeteinek az uniói alkotják, azaz $\mathcal{E}$ szubbázisa a generált topológiának (az üres halmaz és X az üres unió és az üres metszet képzésével kapható meg).

8.5.2. Definíció. Legyen f_α az Y halmaznak az X_α topológikus térbe való leképezése ($\alpha \in \Gamma$). Y-nak azt a leggyengébb topológiáját, melyben minden f_α ($\alpha \in \Gamma$) folytonos, az f_α ($\alpha \in \Gamma$) *függvényrendszer által indukált gyenge topológiá*nak nevezzük. $\diamondsuit$

Világos, hogy az f_α ($\alpha \in \Gamma$) rendszer által indukált gyenge topológiát az X_α halmazok nyílt részhalmazainak inverz képei generálják. Az $\{f_\alpha^{-1}(G_\alpha) \mid G_\alpha \subset X_\alpha \text{ nyílt }\}$ ($\alpha \in \Gamma$) alakú halmazok e topológia szubbázisát alkotják, míg az

$$\Big\{ \bigcap_{i \in I} f_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i}) \;\Big|\; G_{\alpha_i} \subset X_{\alpha_i} \text{ nyílt, } \alpha_i \in \Gamma, i \in I, I \text{ véges} \Big\} \tag{8.5.1}$$

alakú halmazok bázist alkotnak.

Foglalkozzunk most azzal a fontos speciális esettel, amikor $X_\alpha = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$ $(\alpha \in \Gamma)$. Ekkor az f_α $(\alpha \in \Gamma)$ függvényrendszer által indukált gyenge topológiát egyszerűbb környezetbázissal megadni.

8.5.1. Tétel. *Az $f_\alpha : Y \to \mathbb{C}$ $(\alpha \in \Gamma)$ függvényrendszer által indukált gyenge topológiában a*

$$V\left(y_0; f_{\alpha_1}, ..., f_{\alpha_n}; \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\right) = \left\{y \in Y \;\middle|\; |f_{\alpha_i}(y) - f_{\alpha_i}(y_0)| < \varepsilon_i, i = 1, ..., n\right\}$$

alakú halmazok (ε_i pozitív, $\alpha_i \in \Gamma$, $n = 1, 2, ...$) $y_0 \in Y$ környezetbázisát alkotják.

E tételt fontossága miatt bebizonyítjuk.

Bizonyítás. Legyen U az y_0 pont egy tetszőleges környezete a gyenge topológiában, akkor U előállítható (8.5.1) alakú halmazok uniójaként. Ezért van olyan (8.5.1) alakú

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i}) \qquad (\alpha_i \in \Gamma, G_{\alpha_i} \subset \mathbb{C} \text{ nyílt}, \ i = 1, ..., n)$$

halmaz, melyre $y_0 \in B \subset U$ teljesül. Innen $f_{\alpha_i}(y_0) \subset G_{\alpha_i}$ és mivel G_{α_i} nyílt, így tartalmaz egy $f_{\alpha_i}(y_0)$ körüli $\varepsilon_i > 0$ sugarú nyílt körlapot, azaz

$$\left\{y \in Y \;\middle|\; |y - f_{\alpha_i}(y_0)| < \varepsilon_i\right\} \subset G_{\alpha_i}.$$

Ezért

$$\left\{y \in Y \;\middle|\; |f_{\alpha_i}(y) - f_{\alpha_i}(y_0)| < \varepsilon_i\right\} \subset f_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i}) \quad (i = 1, ..., n),$$

ami azt jelenti, hogy

$$V\left(y_0; f_{\alpha_1}, ..., f_{\alpha_n}; \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i}) = B \subset U.$$

Mivel $y_0 \in V\left(y_0; f_{\alpha_1}, ..., f_{\alpha_n}; \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\right)$ és $V\left(y_0; f_{\alpha_1}, ..., f_{\alpha_n}; \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\right)$ nyílt halmaz (mert nyílt halmazok inverz képeinek véges metszete), így tételünket bebizonyítottuk. $\square$

Legyenek most X_α $(\alpha \in \Gamma)$ topológikus terek, $Y = \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ az X_α halmazok szorzata. Y bármely eleme egy $x : \Gamma \to \bigcup_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ függvény, melyre $x(\alpha) = x_\alpha \in X_\alpha$ $(\alpha \in \Gamma)$. A

$$p_\alpha(x) = x_\alpha \quad (x \in Y, \alpha \in \Gamma)$$

egyenlőséggel definiált $p_\alpha : Y \to X_\alpha$ leképezést az Y szorzathalmaz X_α-ba való *projekciójá*nak nevezzük.

8.5.3. Definíció. Az X_α $(\alpha \in \Gamma)$ topológikus terek $Y = \prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ szorzathalmazát ellátva a p_α $(\alpha \in \Gamma)$ projekciók által indukált gyenge topológiával, Y-t az X_α $(\alpha \in \Gamma)$ terek *szorzatteré*nek nevezzük (és Y topológiáját az egyes topológiák *szorzattopológiájá*nak nevezzük). $\diamondsuit$

Mivel tetszőleges $G_\alpha \subset X_\alpha$ esetén

$$p_\alpha^{-1}(G_\alpha) = \prod_{\beta\in\Gamma} V_\beta \quad \text{ahol } V_\beta = \begin{cases} X_\beta \text{ ha } \beta \neq \alpha \\ G_\alpha \text{ ha } \beta = \alpha, \end{cases}$$

így a szorzattopológia bázisát a

$$\prod_{\alpha\in\Gamma} W_\alpha$$

alakú halmazok alkotják, ahol $W_\alpha = X_\alpha$ véges sok $\alpha_1, ..., \alpha_n$ index kivételével teljesül, míg $W_{\alpha_i} = G_{\alpha_i}$ tetszőleges nyílt halmaz X_{α_i}-ben $(i = 1, ..., n)$.

8.6. Szétválasztási axiómák

8.6.1. Definíció. Egy X topológikus teret

T_0 *tér*nek nevezünk, ha a tér bármely két különböző pontja közül legalább az egyiknek van olyan környezete, mely a másik pontot nem tartalmazza;

T_1 *tér*nek nevezünk, ha a tér bármely két különböző pontját véve, mindkét pontnak van olyan környezete, mely a másik pontot nem tartalmazza;

T_2 *tér*nek nevezünk, ha a tér bármely két különböző pontjának vannak diszjunkt környezetei; (a T_2 tereket Hausdorff-tereknek is szokás nevezni)

T_3 *tér*nek nevezünk, ha a tér bármely x pontja és bármely x-et nem tartalmazó F zárt részhalmaza esetén vannak olyan diszjunkt, nyílt U, V halmazok, hogy $x \in U$, $F \subset V$;

$T_{3.5}$ *tér*nek nevezünk, ha a tér bármely x pontja és bármely x-et nem tartalmazó F zárt részhalmaza esetén van olyan $f : X \to [0, 1]$ folytonos függvény, hogy $f(x) = 0$, és $f(y) = 1$, ha $y \in F$;

T_4 *tér*nek nevezünk, ha a tér bármely két zárt, diszjunkt E, F részhalmazához vannak olyan diszjunkt, nyílt U, V halmazok, hogy $E \subset U$, $F \subset V$;

*reguláris*nak nevezünk, ha T_1 és T_3 tér;

*teljesen reguláris*nak nevezünk, ha T_1 és $T_{3.5}$ tér;

*normális*nak nevezünk, ha T_1 és T_4 tér. $\diamondsuit$

A különböző szétválasztási tulajdonságokkal rendelkező terekre az alábbi jellemzési tételek érvényesek:

8.6.1. Tétel. *Egy topológikus tér akkor és csakis akkor T_0 tér, ha különböző pontok lezártjai is különbözők.*

Egy topológikus tér akkor és csakis akkor T_1 tér, ha bármely 1 pontból álló részhalmaza zárt.

Egy X topológikus tér akkor és csakis akkor T_2 tér, ha önmagával való szorzatában a $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ halmaz zárt.

A teljesen reguláris terek jellemzéséhez szükségünk van a következő definícióra.

8.6.2. Definíció. A $[0,1]$ intervallumnak, mint (a valós számok alterének topológiájával ellátott) topológikus térnek, önmagával való akárhánytényezős szorzatát *Tyihonov-tégla*nak, a tényezők számosságát a *tégla súlyá*nak nevezzük. $\diamondsuit$

8.6.2. Tétel. *Egy topológikus tér akkor és csakis akkor teljesen reguláris tér, ha homeomorf egy Tyihonov-tégla valamely alterével.*

A normális topológikus tereket az alábbi Uriszontól származó tétel segítségével lehet jellemezni.

8.6.3. Tétel. (Uriszon-lemma) *Egy X topológikus tér akkor és csakis akkor normális, ha a tér bármely két zárt, diszjunkt E, F részhalmazához található olyan $f : X \to [0,1]$ folytonos függvény, hogy $f(x) = 0$, ha $x \in E$ és $f(y) = 1$, ha $y \in F$.*

Normális topológikus terekre vonatkozik a

8.6.4. Tétel. (Tietze kiterjesztési tétele) *Ha f egy normális topológikus tér zárt A részhalmazán definiált valós értékű korlátos folytonos függvény, akkor van olyan az egész X topológikus téren definiált folytonos valós értékű F függvény, melyre*

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x), \quad \text{ha } x \in A, \quad \text{és} \\ \sup_{x\in X} |F(x)| &= \sup_{x \in A} |f(x)|. \end{aligned}$$

A tétel úgy is fogalmazható, hogy normális topológikus tér egy zárt részhalmazán definiált valós értékű folytonos korlátos függvény kiterjeszthető az egész térre a folytonosság és a korlátosság megtartása mellett. Sőt, az állítás érvényes marad a korlátosság feltételének elhagyása esetén is.

Ugyanis, ha $f : A \to \mathbb{R}$ folytonos, de nem korlátos az X normális topológikus tér A zárt részhalmazán, akkor $x \to \operatorname{arctg}(f(x))$ folytonos korlátos függvény A-n, melynek az előző tétel szerint van α folytonos korlátos kiterjesztése X-re. Mivel az A és $B = \{x \in X \mid |\alpha(x)| = \frac{\pi}{2}\}$ zárt diszjunkt halmazok, így az Uriszon lemma alapján van olyan $\beta : X \to [0,1]$ folytonos függvény, hogy $\beta(x) = 1$, ha $x \in A$ és $\beta(y) = 0$, ha $y \in B$. $F(x) = \operatorname{tg}(\beta(x)\alpha(x))$ $(x \in X)$ folytonos kiterjesztése f-nek X-re. Ezzel bebizonyítottuk a Tietze tétel alábbi következményét.

8.6.1. Következmény. *Normális topologikus tér zárt részhalmazán definiált valós értékű folytonos függvény kiterjeszthető az egész térre a folytonosság megtartása mellett.*

8.7. Kompakt terek

8.7.1. Definíció. Egy topologikus teret *kompakt*nak nevezünk, ha nyílt halmazokkal való bármely lefedéséből kiválasztható véges sok nyílt halmaz, melyek lefedik a teret.

Egy topologikus tér egy *részhalmazát* akkor nevezzük kompaktnak, ha az mint altér kompakt. ♢

Így az X topologikus tér kompaktsága azt jelenti, hogy ha $X = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$, ahol G_α nyílt, akkor vannak olyan $\alpha_1, ..., \alpha_n$ indexek, hogy $X = \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$. A definíció alapján egyszerűen bizonyítható a következő

8.7.1. Tétel. *Kompakt topologikus tér folytonos képe és zárt altere is kompakt.*

A tétel második állítása Hausdorff-terek esetén megfordítható:

Egy Hausdorff-térben bármely kompakt részhalmaz zárt.

A következő nevezetes tétel Tyihonovtól származik.

8.7.2. Tétel. *Kompakt topologikus terek bármely rendszerének a szorzata is kompakt.*

A kompakt terek szeparációs tulajdonságát fejezi ki a

8.7.3. Tétel. *Kompakt Hausdorff-tér normális.*

8.7.2. Definíció. Egy topologikus teret *lokálisan kompakt*nak nevezünk, ha bármely pontjának van olyan környezete, melynek lezártja kompakt. ♢

Példa. A valós számok $\mathbb{R}$ halmaza lokálisan kompakt topologikus tér.

8.7.3. Definíció. Legyen X egy topologikus tér, és ∞ egy X-en kívüli elem. Az $X^* = X \cup \{\infty\}$ halmazon a $\mathcal{G}$ topológiát a következőképpen definiáljuk: $A \in \mathcal{G}$, ha A nyílt részhalmaza X-nek vagy ha $X^* \setminus A$ zárt, kompakt részhalmaza X-nek. X^*-ot ezzel a $\mathcal{G}$ topológiával ellátva az X tér *egy pont kompaktifikációjá*nak nevezzük. ♢

8.7.4. Tétel. (Alexandrov) *Az X topológikus tér X^* egy pont kompaktifikációja kompakt topológikus tér, melynek X altere. X^* akkor és csakis akkor Hausdorff-tér, ha X lokálisan kompakt Hausdorff-tér.*

8.8. Összefüggő terek

8.8.1. Definíció. Egy X topológikus teret *összefüggő*nek nevezünk, ha X nem bontható fel két diszjunkt nem üres nyílt halmaz uniójára. Egy topológikus tér egy *részhalmazát* akkor nevezzük *összefüggő*nek, ha az mint altér összefüggő. $\diamondsuit$

A következő egyszerű tétel fontos szerepet játszik az összefüggő terek vizsgálatánál.

8.8.1. Tétel. *A valós számok $\mathbb{R}$ terének egy részhalmaza akkor és csakis akkor összefüggő, ha egy intervallum. Speciálisan, $\mathbb{R}$ összefüggő.*

8.8.2. Tétel. *Összefüggő tér folytonos képe is összefüggő.*

8.8.1. Következmény. *Összefüggő téren definiált folytonos valós függvény értékkészlete egy intervallum.*

8.8.3. Tétel. *Összefüggő terek szorzata is összefüggő.*

Ha egy tér nem összefüggő, úgy a leghasznosabb azt maximális összefüggő diszjunkt alterek uniójára felbontani.

8.8.2. Definíció. Egy topológikus tér maximális összefüggő alterét (vagyis olyan összefüggő alteret, mely nem valódi része egyetlen bővebb összefüggő altérnek sem) a tér *komponensé*nek nevezzük. $\diamondsuit$

8.8.4. Tétel. *Egy tetszőleges X topológikus térben*

(1) bármely pont X-nek pontosan egy komponensében van benne,

(2) X minden összefüggő altere benne van X valamely komponensében,

(3) X olyan összefüggő altere, mely nyílt és zárt is, X egy komponense,

(4) X minden komponense zárt.

8.9. Stone-Weierstrass tételek

8.9.1. Tétel. (Stone-Weierstrass tétel, valós eset) *Legyen X egy kompakt Hausdorff-tér és $C(X)$ az X-en értelmezett összes folytonos valós függvények Banach-algebrája. Legyen B egy zárt részalgebrája $C(X)$-nek, mely tartalmazza az egységelemet. Akkor $B = C(X)$ akkor és csakis akkor, ha B függvényei elválasztják X pontjait, azaz ha X bármely két különböző t_1, t_2 pontjához van olyan $x \in B$ függvény, melyre*

$$x(t_1) \neq x(t_2).$$

8.9.2. Tétel. (Stone-Weierstrass tétel, komplex eset) *Legyen X egy kompakt Hausdorff-tér és $C(X)$ az X-en értelmezett összes folytonos komplex értékű függvények B^*-algebrája. Legyen B egy zárt részalgebrája $C(X)$-nek, mely tartalmazza az egységelemet, továbbá bármely B-beli függvénnyel együtt annak komplex konjugáltját is. Akkor $B = C(X)$ akkor és csakis akkor, ha B elválasztja X pontjait.*

9. fejezet

Funkcionálanalízis feladatok

9.1. Feladatok

1. Igazolja, hogy a metrika axiómái ekvivalensek a következő két axiómával:

$$\begin{aligned} &\varrho(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y, \\ &\varrho(x,y)\le \varrho(x,z)+\varrho(y,z) \qquad \big(x,y,z\in X\big). \end{aligned}$$

2. Lehet-e egy 4 sugarú (nyílt vagy zárt) gömb valódi részhalmaza egy 3 sugarú gömbnek?

3. Igazolja, hogy ha egy 7 sugarú gömb benne van egy 3 sugarú gömbben, akkor a két gömb azonos!

4. Legyenek A, B részhalmazai az X metrikus térnek. A

$$\begin{aligned} \varrho(x,A) &= \inf_{y\in A}\varrho(x,y), \\ \varrho(A,B) &= \inf_{x\in A, y\in B}\varrho(x,y), \\ \varrho_H(A,B) &= \max\Big\{\sup_{x\in A}\varrho(x,B), \sup_{y\in B}\varrho(y,A)\Big\} \end{aligned}$$

mennyiségeket x és A távolságának, A és B távolságának, A és B Haussdorff-féle távolságának nevezzük.

Igazolja, hogy $\varrho(x,A)=0$ akkor és csakis akkor, ha x érintkezési pontja A-nak.

5. Legyen A kompakt részhalmaza az X metrikus térnek, $x\in X$. Igazolja, hogy van olyan $a\in A$, melyre $\varrho(x,A)=\varrho(x,a)$. Mutassa meg, hogy az állítás nem

igaz, ha A-ról csak zártságot tételezünk fel.

6. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges A halmaz esetén $x \to \varrho(x, A)$ folytonos.

7. Igazolja, hogy tetszőleges A halmaz esetén az
$\{x \in X | \varrho(x, A) \leq \varepsilon\}$, $\{x \in X | \varrho(x, A) \geq \varepsilon\}$
halmazok zártak, míg az
$\{x \in X | \varrho(x, A) < \varepsilon\}$, $\{x \in X | \varrho(x, A) > \varepsilon\}$
halmazok nyíltak ($\varepsilon \in \mathbb{R}$).

8. Igazolja, hogy egy metrikus tér normális topológikus tér!

9. Bizonyítsa be, hogy ha $A, B \subset X$ kompakt halmazok, akkor van olyan $a \in A$, $b \in B$, hogy

$$\varrho(A, B) = \varrho(a, b).$$

Lényeges-e mindkét halmaz kompaktsága?

10. Legyen $\mathcal{F}$ egy metrikus tér zárt részhalmazainak osztálya. Igazolja, hogy a ϱ_H Hausdorff-féle távolság metrika $\mathcal{F}$-en.

11. Bizonyítsa be, hogy egy metrikus tér eleget tesz az első megszámlálhatósági axiómának.

12. Bizonyítsa be, hogy metrikus térben a második megszámlálhatósági axióma ekvivalens a szeparábilitással.

13. Legyen ϱ metrika az X halmazon. Bizonyítsa be, hogy

$$\varrho_1(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)}, \qquad \varrho_2(x, y) = \min\{\varrho(x, y), 1\} \qquad \big(x, y \in X\big)$$

szintén metrikák X-en, továbbá hogy a $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ metrikák által meghatározott (természetes) topológiák X-en azonosak, és mindhárom metrikában azonosak a Cauchy-sorozatok is.

14. Legyen $X = \mathbb{R}$ a valós számok halmaza és

$$\varrho(x, y) = |x - y|, \qquad \varrho_1(x, y) = |\text{arctg } x - \text{arctg } y|, \ (x, y \in X).$$

Igazolja, hogy a ϱ, ϱ_1 metrikákhoz azonos topológiák tartoznak, de az (X, ϱ), (X, ϱ_1) terekben a Cauchy-sorozatok nem azonosak!

15. Legyen az X halmazon két metrika ϱ_1, ϱ_2 adott, úgy, hogy
$\varrho_1(x, y) \leq C\varrho_2(x, y)$, ahol C konstans. Hasonlítsa össze a ϱ_1, ϱ_2 metrikák által

meghatározott topológiákat!

16. Jelölje $C^{(m)}[a,b]$ az $[a,b]$-n értelmezett valós vagy komplex értékű m-szer folytonosan differenciálható függvények osztályát. Igazolja, hogy

$$\varrho(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\sup_{t\in[a,b]}|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|,\quad (x,y\in C^{(m)}[a,b])$$

metrika $C^{(m)}[a,b]$-n, ahol $x^{(k)}$ az $x\in C^{(m)}[a,b]$ k-adik deriváltját jelöli, $k=0,\dots,m$.

17. Jelölje $C^{(\infty)}[a,b]$ az $[a,b]$-n értelmezett valós vagy komplex értékű végtelen sokszor folytonosan differenciálható függvények osztályát. Igazolja, hogy

$$\varrho(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\sup\limits_{t\in[a,b]}|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|}{1+\sup\limits_{t\in[a,b]}|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|},\quad (x,y\in C^{(\infty)}[a,b])$$

metrika $C^{(\infty)}[a,b]$-n, ahol $x^{(k)}$ az $x\in C^{(\infty)}[a,b]$ k-adik deriváltját jelöli,$k=0,1,\dots$.

18. Igazolja, hogy

$$\varrho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\sup\limits_{t\in[-k,k]}|x(t)-y(t)|}{1+\sup\limits_{t\in[-k,k]}|x(t)-y(t)|}$$

metrika $C(\mathbb{R})$-en.

19. Az l_p $(1\le p\le\infty)$, s terek közül melyekben konvergensek az alábbi sorozatok és mi a határértékük (az első n koordináta nem zérus):

$$x_n=(1,2,...,n,0,0,...),$$
$$x_n=(1,1,...,1,0,0,...),$$
$$x_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n},0,0,...\right),$$
$$x_n=\left(\frac{1}{n^\alpha},\frac{1}{n^\alpha},...,\frac{1}{n^\alpha},0,0,...\right)?$$

20. Igazolja, hogy egy teljes metrikus térben egy altér teljes metrikus burka az altér lezártja.

21. Egy (valós vagy komplex számokból álló) sorozatot finitnek nevezünk, ha csak véges sok zérustól különböző eleme van. Jelölje Φ az összes finit sorozatok halmazát. Igazolja, hogy Φ a

$$\varrho(x,y) = \max_k |\xi_k - \eta_k| \qquad \big(\ x = (\xi_1, \xi_2, ...), y = (\eta_1, \eta_2, ...) \in \Phi\ \big)$$

metrikával nem teljes metrikus tér lesz. Határozza meg Φ teljes metrikus burkát!

22. Legyen $X = \mathbb{R}$ a valós számok halmaza és

$$\varrho(x,y) = |\mathrm{arctg}\ x - \mathrm{arctg}\ y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Adja meg az (X, ϱ) tér teljes metrikus burkát!

23. Legyen $X = \mathbb{Z}$ az egész számok halmaza és

$$\varrho(n,m) = |e^{in} - e^{im}| \qquad (n, m \in \mathbb{Z}, i^2 = -1).$$

Határozza meg (X, ϱ) teljes metrikus burkát!

24. Igazolja, hogy egy teljes metrikus térben zárt, egymásba skatulyázott gömbök sorozatát véve, melyek sugarai zérushoz tartanak a gömbök metszete nem üres. Mutassa meg, hogy az állítás nem igaz, ha elhagyjuk az alábbi feltételek egyikét:
(1) a tér teljessége,
(2) a gömbök zártsága,
(3) a gömbök sugarainak zérushoz tartása.

25. Bizonyítsa be a következő állítást: ha egy metrikus térben egymásba skatulyázott zárt gömbök tetszőleges olyan sorozatát véve, ahol a gömbök sugarai zérushoz tartanak a gömbök metszete nem üres, akkor a tér teljes.

26. Igaz-e az, hogy egy metrikus térben egy egy pontból álló halmaz sehol sem sűrű?

27. Adjon példát két mindenütt sűrű halmazra, melyek metszete üres!

28. Legyen $\{x_n\}$ a $[0,1]$-en folytonos valós értékű függvények sorozata, mely pontonként konvergál x_0-hoz a $[0,1]$-en. Igazolja, hogy x_0 szakadási pontjai első kategóriájú halmazt alkotnak!

29. Bizonyítsa be az 1.4.1 tételt!

30. Egy topológikus tér elemeinek $\{x_n\}$ sorozatát konvergensnek nevezzük, ha van olyan x eleme a térnek, hogy x bármely U környezetéhez található olyan

$N = N(x, U)$ szám, hogy $x_n \in U$, ha $n > N$. x-et a sorozat egy limeszének nevezzük. Jelölés: $x_n \to x$ vagy $\lim x_n = x$.

Igazolja, hogy Hausdorff-térben minden konvergens sorozatnak egyetlen limesze van.

Igazolja, hogy ha X, Y topológikus terek és $f : X \to Y$ folytonos leképezés $x \in X$-ben, akkor $x_n \to x$-ből következik, hogy $f(x_n) \to f(x)$. Bizonyítsa be, hogy a fordított állítás is igaz, ha $x \in X$-nek van megszámlálható környezetbázisa.

31. Vizsgálja meg, hogy az alábbi leképezések (mint $C[0,1]$-nek önmagára való leképezései) folytonosak-e:

$$\begin{aligned}
(Ax)(t) &= a(t)x(t), & (Ax)(t) &= x(t^2),\\
(Ax)(t) &= x(t^\alpha), & (Ax)(t) &= x^2(t),\\
(Ax)(t) &= \int_0^t x^2(s)ds, & (Ax)(t) &= \int_0^1 \sin(t-s)x(s)ds
\end{aligned}$$

ahol $x \in C[0,1]$, $a \in C[0,1]$ fix, $\alpha \geq 0$ konstans.

32. Milyen α mellett lesz az

$$(Ax)(t) = x(t^\alpha) \qquad x \in L_2[0,1]$$

leképezés $L_2[0,1]$-nek önmagába való folytonos leképezése?

33. Legyen $Ax = \dfrac{\pi}{2} + x - \text{arctg}\ x \ \ (x \in \mathbb{R})$. Igazolja, hogy van olyan $\alpha(x,y) < 1$, melyre

$$|Ax - Ay| \leq \alpha(x,y)|x-y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$

de $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem kontrakció.

34. Igazolja, hogy van olyan $C[0,1]$-beli x függvény, melyre

$$x(t) - \frac{1}{2}\sin x(t) + a(t) = 0 \qquad (t \in [0,1])$$

teljesül, ahol $a \in C[0,1]$ adott.

35. Határozza meg az alábbi integrálegyenletek folytonos megoldásait:

$$x(t) = t + \lambda \int_0^1 t^2 s x(s) ds, \qquad x(t) = 1 + \lambda \int_0^1 t s^2 x(s) ds,$$

$$x(t) = t^3 + \lambda \int_0^1 t^2 s^2 x(s) ds, \qquad x(t) = 1 + \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds,$$

$$x(t) = 1 + \lambda \int_0^1 \cos \pi (t-s) x(s) ds.$$

36. Igazolja, hogy ha $\mathcal{K} : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ mérhető és kielégíti a

$$|\lambda| \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2 dt ds < 1$$

feltételt, akkor az

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t,s) x(s) ds$$

integrálegyenletnek bármely $f \in L_2[a,b]$ esetén egyetlen $x \in L_2[a,b]$ megoldása van!

37. Igazolja, hogy ha teljesül a $\sup\limits_j \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$ feltétel, akkor az

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j + b_i \qquad (i = 1, 2, ...) \tag{9.1.1}$$

végtelen egyenletrendszernek bármely $b = (b_1, b_2, ...) \in l_1$ esetén egyetlen $x = (x_1, x_2, ...) \in l_1$ megoldása van!

38. Ha $\sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$, akkor a (9.1.1) egyenletrendszernek bármely $b \in l_\infty$ esetén egyetlen $x \in l_\infty$ megoldása van.

39. Ha $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < 1$, akkor (9.1.1)-nek bármely $b \in l_2$ esetén pontosan egy $x \in l_2$ megoldása van.

40. Igazolja, hogy bármely $p \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varrho_p(x,y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| e^{-pt}$$

metrika $C[a,b]$-n, mely ekvivalens ϱ_0-lal, azaz vannak olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok, melyekre

$$c_1\varrho_0(x,y) \le \varrho_p(x,y) \le c_2\varrho_0(x,y) \qquad (x, y \in C[a,b])$$

(ebből következik, hogy mindkét metrika szerint ugyanazok a konvergens sorozatok).

41. Igazolja, hogy ha $\mathcal{K} : \Delta \to \mathbb{R}$, $\Delta = \{(t,s) \mid a \le s \le t \le b\}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor bármely λ mellett a

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)ds \qquad (x \in C[a,b])$$

leképezés elég nagy p esetén kontrakció lesz a ϱ_p metrikával ellátott $C[a,b]$ térből önmagába.

42. Mely λ értékek esetén lesz az

$$(Ax)(t) = \lambda x(t^\beta) \qquad 0 < \beta \le 1,\ x \in L_2(0,1)$$

formulával definiált leképezés $L_2(0,1)$-ből önmagába ható kontrakció?

43. Legyen X kompakt metrikus tér, $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény X-en. Igazolja, hogy
(i) f korlátos
(ii) f felveszi értékei suprémumát és infimumát!

44. Igazolja, hogy ha egy metrikus téren minden folytonos valós értékű függvény korlátos, akkor a tér kompakt.

45. Tetszőleges nem kompakt metrikus térben megadható-e olyan valós értékű folytonos korlátos függvény, mely nem veszi fel a függvényértékek suprémumát?

46. Legyenek X, Y metrikus terek, X kompakt és legyen $f : X \to Y$ folytonos leképezés. Bizonyítsa be, hogy f egyenletesen folytonos!

47. Tetszőleges nem kompakt metrikus téren megadható-e olyan folytonos valós értékű függvény, mely nem egyenletesen folytonos?

48. Igazolja, hogy az $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$ leképezés, melyet az

$$f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} x(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)dt$$

képlet definiál, folytonos, értékeinek suprémuma az $S(0,1)$ zárt egységgömbön 1, de nincs olyan $x \in S(0,1)$, melyre $f(x) = 1$ teljesül!

49. Igazolja, hogy kompakt metrikus tér nem lehet izometrikus valódi részhalmazával!

50. Legyen T az X kompakt metrikus térnek önmagába való leképezése, melyre

$$\varrho(Tx, Ty) = \varrho(x, y) \qquad \big(x, y \in X\big).$$

Igazolja, hogy a $Tx = y$ egyenletnek bármely $y \in X$ mellett egyetlen megoldása van!

51. Legyen T az X kompakt metrikus térnek önmagába való leképezése, melyre

$$\varrho(Tx, Ty) < \varrho(x, y), \text{ ha } x \neq y.$$

Igazolja, hogy T-nek egyetlen fixpontja van! Igaz-e, hogy T kontrakció?

52. Lehet-e egy diszkrét metrikus tér kompakt?

53. Vektortér-e $\mathbb{R}$ felett
(1) a racionális számok halmaza
(2) az irracionális számok halmaza?

54. Vektortér-e $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ felett az $[a,b]$-n értelmezett valós vagy komplex értékű összes
(1) $[a,b]$-n abszolút folytonos függvények halmaza,
(2) $[a,b]$-n korlátos változású függvények halmaza,
(3) $[a,b]$-n valós értékű monoton függvények halmaza,
(4) a-ban 1 értéket felvevő függvények halmaza,
(5) $[a,b]$-n Lipschitz-feltételt kielégítő függvények halmaza?
(A műveletek pontonként veendők.)

55. Vektortér-e az összes olyan komplex elemű $\{\xi_n\}$ sorozatok halmaza, melyekre $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$ teljesül valamely fix pozitív p mellett?

56. Legyenek A, B konvex halmazok egy lineáris térben. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha A + \beta B$ is konvex!

57. Bizonyítsa be, hogy ha A konvex, $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$, akkor $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$.

58. Bizonyítsa be, hogy $A + B$ szimmetrikus, ha A, B szimmetrikusak!

59. Legyenek p_i $(i = 1, ..., n)$ félnormák egy X lineáris téren. Igazolja, hogy

$$p(x) = \max_{1\le i\le n} p_i(x),$$
$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(x) \qquad (\alpha_i \ge 0)$$

is félnormák!

60. Határozza meg $\mathbb{R}^2$-ben az U halmaz p_U Minkowski-funkcionálját, ha
(1) U az origó körüli egységsugarú körlap
(2) U olyan négyzet, melynek átlói a koordinátatengelyek
(3) U olyan origó középpontú négyzet, melynek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel
(4) $U = \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$.

61. Igazolja, hogy egy lineáris topológikus térben $A + B$ zárt halmaz, ha A kompakt és B zárt!

62. Igazolja, hogy egy lineáris topológikus térben két kompakt halmaz összege is kompakt!

63. Igazolja, hogy s lokálisan konvex lineáris topológikus tér!

64. $C(\mathbb{R})$-en a topológiát vezessük be a

$$V_r(x) = \{y \in C(\mathbb{R}) \mid \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t) - y(t)| < r\} \qquad (r > 0)$$

környezetbázis segítségével, $x \in C(\mathbb{R})$. Igazolja, hogy az összeadás folytonos, de a szorzás nem!

65. Legyen Y az X lineáris topológikus tér altere. Igazolja, hogy ha $Y^0 \ne \emptyset$, akkor $X = Y$!

66. Jelölje Lip $[a, b]$ az összes $[a, b]$-n értelmezett x valós értékű függvények osztályát, melyek eleget tesznek a Lipschitz-feltételnek:

$$|x(t) - x(s)| \le k|t - s| \qquad (t, s \in [a, b])$$

ahol k egy konstans (mely függhet x-től). Igazolja, hogy

$$\|x\| = \sup_{\substack{t,s\in[a,b]\\ t\ne s}} \left|\frac{x(t) - x(s)}{t - s}\right| + \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

norma Lip $[a,b]$-n!

67. Bizonyítsa be, hogy Lip $[a,b]$ lineáris altere $C[a,b]$-nek!

68. Bizonyítsa be, hogy Lip $[a,b]$ Banach-tér!

69. Mutassa meg, hogy $C^{(m)}[a,b]$ lineáris altere $C[a,b]$-nek, mely nem zárt! ($C^{(m)}[a,b]$ definícióját ld. a 16. feladatban.)

70. Igazolja, hogy $C[a,b]$ nem teljes az $\|x\|_1 = \int\limits_a^b |x(t)|dt$ norma szerint!

71. Mutassa meg, hogy az $\|x\|_0 = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ és $\|x\|_1 = \int\limits_a^b |x(t)|dt$ normák $C[a,b]$-n nem ekvivalensek!

72. Legyen bármely $x \in C[0,1]$-re

$$F(x) = \int_0^1 x(t)\sin t\, dt, \qquad F(x) = \max_{t\in[0,1]} x(t),$$

$$F(x) = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} x(t^2)dt, \qquad F(x) = x\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$F(x) = \int_0^1 |x(t)|dt, \qquad F(x) = \int_0^1 x^2(t)dt.$$

Állapítsa meg, hogy ezen funkcionálok közül melyek lineárisak, melyek korlátosak és határozza meg utóbbiak normáját!

73. Igazolja a paralelogramma-azonosságot egy pre-Hilbert-térben!

74. Igazolja az

$$< x,y >= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

azonosságot egy Hilbert-térben!

75. Legyen H egy Hilbert-tér, $M, N \subset H$. Igazolja, hogy

(1) $(M^\perp)^\perp = [M]^-$,
(2) $M \subset N \Rightarrow M^\perp \supset N^\perp$,
(3) $M^\perp = ((M^\perp)^\perp)^\perp$.

76. Legyenek M, N egy Hilbert-tér zárt lineáris alterei, $M \perp N$. Mutassa meg, hogy $M + N$ is zárt altér!

77. Legyen

$$M = \Big\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \frac{\xi_3}{3}, \xi_5, \frac{\xi_5}{5}, ...) \in l_2\Big\},$$

$$N = \big\{(\eta_1, 0, \eta_3, 0, \eta_5, 0, ...) \in l_2\big\}.$$

Igazolja, hogy $\overline{M+N} = l_2$, de $M + N \neq l_2$!

78. Legyen $x \in L_2(0,1)$-re

$$F(x) = \int_0^1 x(t)\sin t\, dt, \qquad G(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} tx(t^2)dt.$$

Igazolja, hogy F, G lineáris korlátos funkcionálok $L_2(0,1)$-en és határozza meg a normájukat!

79. Az alábbi funkcionálok l_2 alkalmas részhalmazain vannak definiálva. Állapítsuk meg a maximális értelmezési tartományt, döntsük el, hogy lineáris, folytonos-e a funkcionál, és ha igen, akkor határozzuk meg a normáját!

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sin k, \qquad f(x) = \sup_k |\xi_k|,$$

$$f(x) = \xi_n \quad (n \text{ fix}), \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{k^2},$$

$$f(x) = \xi_n - \xi_{n-1} \quad (n \text{ fix}), \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2,$$

ahol $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2$.

80. Legyen X egy Banach-tér, $A, A_n \in \mathcal{B}(X,X)$, $n \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy

$\|A_n x - Ax\| \to 0$, ha $n \to \infty$, $x \in X$. Igazolja, hogy $\|A_n^2 x - A^2 x\| \to 0$, ha $n \to \infty$, $x \in X$!

81. Legyen $x \in L_2(-\infty, \infty)$-re

$$\begin{aligned}(A_1x)(t) &= x(t+h),\\ (A_2x)(t) &= a(t)x(t+h),\\ (A_3x)(t) &= \frac{1}{2}[x(t)+x(-t)],\end{aligned}$$

ahol $h \in \mathbb{R}$ fix, a fix korlátos függvény. Határozza meg az A_i^* adjungált operátorokat $(i = 1, 2, 3)$!

82. Bármely $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2$-re legyen

$$\begin{aligned}S_R x &= (0, \xi_1, \xi_2, ...),\\ S_L x &= (\xi_2, \xi_3, \xi_4, ...),\\ A_n x &= (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, 0, 0, ...).\end{aligned}$$

Határozza meg a fenti operátorok adjungáltjait!

83. Mely $\{\alpha_n\}$ komplex sorozat esetén lesz az

$$Ax = (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, ...) \qquad \big(x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2\big)$$

képlettel értelmezett A l_2-ből l_2-be képező operátor? Mikor lesz A önadjungált?

84. Legyenek $x_1, ..., x_n$ egy H Hilbert-tér elemei. A

$$G(x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} <x_1, x_1> & <x_1, x_2> & \dots & <x_1, x_n> \\ <x_2, x_1> & <x_2, x_2> & \dots & <x_2, x_n> \\ \vdots & & & \\ <x_n, x_1> & <x_n, x_2> & \dots & <x_n, x_n> \end{vmatrix}$$

determinánst $x_1, ..., x_n$ Gram-féle determinánsának nevezzük. Igazolja, hogy az $x_1, ..., x_n$ elemek akkor és csakis akkor lineárisan függetlenek, ha $G(x_1, ..., x_n) \neq 0$!

85. Legyenek $x_1, ..., x_n$ egy H Hilbert-tér lineárisan független elemei, $x \in H$. Bizonyítsa be, hogy x-nek az $[x_1, ..., x_n]$ altértől való d távolságára érvényes a

$$d^2 = \frac{G(x_1, ..., x_n, x)}{G(x_1, ..., x_n)}$$

összefüggés!

86. Határozza meg az $x(t) = e^t$ függvényt $L_2(0,1)$-ben legjobban approximáló elsőfokú polinomot!

87. Legyen $M = \{(\xi_1, 2\xi_2, 0, \xi_1+\xi_2, \xi_3, \xi_4, ...) \in l_2\}$. Határozza meg M ortogonális komplementerét!

88. Tekintsük a $C[-1,1]$ teret az

$$< x, y >= \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt$$

belső szorzattal. Jelölje M $C[-1,1]$ páros függvényeinek halmazát. Határozzuk meg $C[-1,1]$ azon függvényeit, melyek ortogonálisak M-re!

89. Legyen $\{\varphi_n\}$ egy teljes ortonormált sorozat a H Hilbert-térben, $c_k =< x, \varphi_k >$, $d_k =< y, \varphi_k >$; $x, y \in H$. Igazolja, hogy

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}.$$

90. Legyen $0 < |\alpha| < 1$. Határozzuk meg az

$$M = \{(1, \alpha^k, \alpha^{2k}, ...) \mid k = 1, 2, ...\} \subset l_2$$

halmaz zárt lineáris burkát l_2-ben!

91. Legyen $\{\varphi_n\}$ teljes ortonormált sorozat a H Hilbert-térben és $\{\psi_n\}$ legyen olyan ortonormált sorozat, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k - \psi_k\|^2 < \infty.$$

Bizonyítsa be, hogy $\{\psi_n\}$ is teljes!

92. Igazolja, hogy egy egységelemes algebrában
(1) ha x és xy reguláris, akkor y is az,
(2) ha xy és yx regulárisak, akkor x és y is regulárisak,
(3) ha $xy = e$, akkor $(yx)^2 = yx$,
(4) ha $e - yx$ reguláris, akkor $e - xy$ is az.

93. Igazolja, hogy egy algebra bármely x eleme és bármely p komplex polinom esetén

$$\sigma(p(x)) = p(\sigma(x)).$$

94. Bizonyítsa be, hogy ha x reguláris, akkor

$$\sigma(xy) = \sigma(yx).$$

95. Igazolja, hogy egy X Banach-algebrában az r spektrálsugár rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:
(1) $r(x^k) = r(x)^k \quad (k \in \mathbb{N})$,
(2) $r(\alpha x) = |\alpha| r(x)$,
(3) $r(xy) = r(yx) \quad (x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{C})$.

96. Tegyük fel, hogy egy Banach-algebra x, y elemeire $xy = yx$. Mutassa meg, hogy

$$\begin{aligned} r(x+y) &\le r(x) + r(y), \\ r(xy) &\le r(x)r(y). \end{aligned}$$

97. Igazolja, hogy egy B^*-algebrában

$$r(x) = \|x\| \quad \text{ha } xx^* = x^*x.$$

98. Határozza meg $A^{1000}, e^A, \cos A, e^{Ax}$-et, ha

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \ (x \in \mathbb{C}).$$

99. e^{Ax} kiszámítása segítségével határozza meg az

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 2y_2 & y_1(0) &= -3 \\ y_2' &= -8y_1 - 3y_2 & y_2(0) &= 2 \end{aligned}$$

Cauchy-feladat megoldását!

100. Legyen A az $[a, b]$ intervallumot az $n \times n$-es valós mátrixok halmazába képező folytonos függvény. Tegyük fel, hogy bármely $x \in [a, b]$ esetén $A(x)$ és $\int_\xi^x A(t)\,dt$ felcserélhető mátrixok. Igazolja, hogy

$$\Phi(x) = e^{\int_\xi^x A(t)\,dt} \quad (\xi \in [a, b])$$

alapmátrixa az $y' = A(x)y$ differenciálegyenlet-rendszernek , melyre $\Phi(\xi) = E$, ahol E az egységmátrix!

9.2. Útmutató a nehezebb feladatokhoz

28. Ld. [23], Bevezetés, 2. Baire 2. tétele.

49. Ha T izometrikus leképezése X-nek X_0-re, $X_0 \subset X$, úgy $x_0 \in X$ mellett legyen $x_n = T^n x_0$ $(n \in \mathbb{N})$. $\{x_n\}$-nek van $\{x_{n_k}\}$ konvergens részsorozata, mely Cauchy-sorozat is. Ezért $\varepsilon > 0$-ra

$$\rho\left(T^{n_{k+1}-n_k}x_0, x_0\right) = \rho\left(T^{n_{k+1}}x_0, T^{n_k}x_0\right) = \rho\left(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}\right) < \varepsilon$$

ha k elég nagy. Így X_0 sűrű X-ben, de mivel X_0 zárt is, így $X_0 = X$.

50. Legyen $X_0 = T(X)$. Igazolja, hogy T izometrikus leképezése X-nek X_0-ra, és alkalmazza az előző feladat eredményét!

61. Lokálisan konvex tér esetén ld. [17], III. fejezet 7. lemma; az általános esetben ld. N. Bourbaki, Topológikus vektorterek (oroszul) Moszkva, 1959.

80. Használja az

$$\|A_n^2 x - A^2 x\| \leq \|A_n\| \cdot \|A_n x - Ax\| + \|A_n(Ax) - A(Ax)\|$$

egyenlőtlenséget és a Banach-Steinhaus tételt!

85. Ld. [1], I. fejezet, 7.

90. Ld. [8], 6. feladat.

91. Ld. [8], 7. feladat.

92. (4) $z = (e - yx)^{-1}$ mellett vizsgálja az $u = e + xzy$ elemet!

93. Ld. [3], 19.9 tétel.

94. Ha $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma(xy)$, úgy $\lambda \in \sigma(yx)$.

95. (3) Használja fel, hogy $(xy)^n = x(yx)^{n-1}y$!

96. Ld. [16], 1.4.1 tétel.

100. Legyen $B(x) = \int\limits_{\xi}^{x} A(t)\,dt$, akkor $\Phi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B(x)^k$. Igazolja, hogy $\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)$ és $\det \Phi(\xi) \neq 0$! Használja fel azt, hogy differenciálható $X_1, ..., X_n$ mátrixok szorzatának deriváltja az

$$(X_1(x)X_2(x)\cdots X_k(x))' = \sum_{i=1}^{k} X_1(x)\cdots X_i'(x)\cdots X_k(x)$$

alapján számolható!

Irodalomjegyzék

[1] N. I. Achieser-I. M. Glasmann, *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert Raum.* Berlin, 1954.

[2] A. B. Antonevics - P. N. Knjazev - J. V. Ragino, *Feladatok és gyakorlatok a funkcionálanalízishez* (oroszul). Minszk, 1978.

[3] G. Bachman-L. Narici, *Functional analysis.* New York, 1966.

[4] E. Coddington-N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations.* New York, 1955.

[5] M. Day, *Normed linear spaces.* Berlin, 1958.

[6] N. Dunford-J. T. Schwartz, *Linear operators I-II.* New York, 1958, 1964.

[7] C. Goffman-G. Pedrick, *First course in functional analysis.* Englewood Cliffs, 1965.

[8] P. Halmos, *A Hilbert space problem book.* New Jersey, 1955.

[9] L. W. Kantorowitsch-G. P. Akilov, *Funktional analysis in normierten Räumen.* Berlin, 1969.

[10] J. L. Kelley, *General topology.* New Jersey, 1955.

[11] A. A. Kirillov-A. D. Gvisiani, *Tételek és feladatok a funkcionálanalízisben* (oroszul). Moszkva, 1979.

[12] A. N. Kolmogorov-S. V. Fomin, *A függvénytan és funkcionálanalízis elemei* (oroszul). Moszkva, 1976.

[13] Máté L., *Funkcionálanalízis műszakiaknak.* Budapest, 1976.

[14] A. Muhherjea-K. Pothoven, *Real and functional analysis.* New York, 1978.

[15] V. V. Nyemickij-V. V. Sztyepanov, *A differenciálegyenletek kvalitatív* elmélete (oroszul). Moszkva, 1949.

[16] C. E. Rickart, *General theory of Banach-algebras.* Princeton, 1960.

[17] A. P. Robertson-W. Robertson, *Topological vector spaces.* Cambridge, 1964.

[18] W. Rudin, *Real and complex analysis.* New York, 1966.

[19] W. Rudin, *Functional analysis.* New York, 1973.

[20] G. F. Simmons, *Introduction to topology and functional analysis.* New York, 1963.

[21] Szőkefalvi Nagy B., *Valós függvények és függvénysorok.* Budapest, 1961.

[22] B. Szőkefalvi Nagy-F. Riesz, *Functional analysis.* New York, 1955.

[23] K. Yosida, *Functional analysis.* New York, 1974.

[24] A. C. Zaanen, *Linear analysis.* Amsterdam, 1953.

Tárgymutató