Lista 4 - Transformações Lineares.

1) Seja $T : R^3 \to R^2$ uma transformação linear definida por $T(1,1,1) = (1,2)$, $T(1,1,0) = (2,3)$ e $T(1,0,0) = (3,4)$.

   1. Determinar $T(x,y,z)$
   2. Determinar $v \in R$ tal que $T(v) = (-3,-2)$
   3. Determinar $v \in R$ tal que $T(v) = (0,0)$

2) Seja T o operador linear no R^3 tal que $T(1,0,0) = (0,2,0)$, $T(0,1,0) = (0,0,-2)$ e $T(0,0,1) = (-1,0,3)$. Determinar $T(x,y,z)$ e o vetor $v \in R^3$ tal que $T(v) = (5,4,-9)$.

3) Determinar a transformação linear $T : P_2 \to P_2$ tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = x + 2x^2$.

   No problemas 4 à 7 são apresentadas transformações lineares. Para cada uma delas:

   1. Determinar o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é injetora? Justificar.
   2. Determinar a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é sobrejetora? Justificar.

4) $T : R^3 \to R^3$, $T(x,y,z) = (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)$.

5) $T : R^3 \to R^3$, $T(x,y,z) = (x - 3y, x - z, z - x)$.

6) $T : P_1 \to R^3$, $T(at + b) = (a, 2a, a - b)$

7) $T : M(2,2) \to R^2$, $T\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (a - b, a + b)$.

8) Seja a transformação linear $T : R^2 \to R^3$ tal que $T(-2,3) = (-1,0,1)$ e $T(1,-2) = (0,-1,0)$.

   1. Determinar T(x,y).
   2. Determinar N(T) e Im(T).
   3. T é injetora ? É sobrejetora ?

9) Consideremos a transforamação linear $T : R^3 \to R^2$ definida por $T(x,y,z) = (2x + y - z, x + 2y)$ e as bases $A = (1,0,0), (2,-1,0), (0,1,1)$ do R^3 e $B = (-1,1), (0,1)$ do R^2, determinar a matriz $[T]_B^A$.

10) Seja

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   a matriz canônica de uma transformação linear $T : R^2 \to R^3$. Se $T(v) = (2,4,-2)$, calcular v.

11) Seja o espaço vetorial $M(2,2)$, e a transformação linear $T : V \to R^3$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + b, c - d, 2a) \tag{2}$$

   1. mostrar que T é linear.
   2. Determinar $[T]_B^A$. sendo A e B as bases canônicas de $M(2,2)$ e R^3, respectivamente.
   3. Calcular $v \in V$ tal que $T(v) = (3,-2,4)$.
   4. Determinar $N(T)$.

12) Consideremos o operador linear

$$T : R^2 \to R^2 \tag{3}$$

$$(x, y) \to (x + 2y, x - y) \tag{4}$$

e as bases A = (-1,1),(1,0) e B = (2,-1),(-1,1) e C canônica. Determinar $[T]_A$, $[T]_B$ e $[T]_C$.

13) Verificar se a transformação $T : R^2 \to R^3$, definida por:

1. $u = (u_1, u_2) \to T(u) = (3u_1, 2u_2, 3u_1 - u_2)$,
2. $u = (u_1, u_2) \to T(u) = (u_1 + 2u_2, u_2, u_1 - u_2)$

é linear.

14) Verificar se a transformação $T : R^3 \to R^3$, definida por:

1. $u = (u_1, u_2, u_3) \to T(u) = (u_1 + 2u_2, 0, u_1 - 2u_2 + u_3)$,
2.
3. $u = (u_1, u_2, u_3) \to T(u) = (u_1, \cos u_2, \sin u_3)$

é linear.

15) Sejam $V = M_{2\times 2}$ e a transformação linear $T : V \to R$, definida por:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to T(A) = a + b + c + d. \tag{5}$$

Mostre que T é linear.

16) Verificar se $T : K_n \to R$ (onde $K_n(x)$ é o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq n$), definida por:

$$T(P_n(x)) = \int_a^b P_n dx \tag{6}$$

a e $b \in R$, isto é, se a aplicação T, que a cada polinômio $P_n(x) \in K_n(x)$ associa o valor da integral, é uma transformação linear.

17) Verificar se $T : K_n \to R$ (onde $K_n(x)$ é o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq n$), definida por:

$$T(P_n(x)) = \frac{dP_n}{dx} \tag{7}$$

isto é, se a aplicação T, que a cada polinômio $P_n(x) \in K_n(x)$ associa o valor da derivada, é uma transformação linear.

18) Considere a transformação linear $T : R^3 \to R^2$, que satisfaz:
$T(-1, 2, 1) = (-1, -4)$, $T(1, 0, 2) = (-3, 3)$ e $T(-2, -1, 0) = (-3, 0)$.
Determinar $T(u)$.

19) Considere a transformação linear $T : R^2 \to R^3$, que satisfaz:
$T(1, 2) = (4, 2, -5)$ e $T(3, 0) = (6, 0, 3)$.
Determinar $T(u)$.

20) Considere a transformação linear $T : R^2 \to R^2$, que satisfaz:
$T(2, 1) = (7, 4)$ e $T(1, 0) = (1, 3)$
Determinar $T(u)$.