Números Primos e Máximo Divisor Comum

Matemática Discreta
Prof. Lucas Ismaily
2º Semestre de 2022

Aluno: [ ] Matrícula: [ ]

Questões:

1. Determine se cada um destes números inteiros é primo.

   (a) 21 (b) 29 (c) 71 (d) 97 (e) 111 (f) 143

2. Encontre a fatoração em primos de cada um dos números abaixo.

   (a) 88 (b) 126 (c) 729 (d) 1001 (e) 1111 (f) 909090

3. Encontre a fatoração de números primos de $10!$.

4. Mostre que $\log_2 3$ é um número irracional. Lembre-se de que um número irracional é um número real x que não pode ser escrito como a razão de dois números inteiros.

5. Demonstre ou negue a existência de três números inteiros positivos e ímpares consecutivos que são primos, ou seja, números ímpares primos na forma $p, p+2, p+4$.

6. Quais números inteiros positivos menores que 30 são relativamente primos de 30?

7. Determine se os números em cada um dos conjuntos abaixo são primos entre si (verifique dois a dois).

   (a) 11, 15, 19 (b) 14, 15, 21 (c) 12, 17, 31, 37 (d) 7, 8, 9, 11

8. Mostre que se $2^n - 1$ é primo, então n é primo.
[**Dica**: Use a identidade $2^{ab} - 1 = (2^a - 1).(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + ... + 2^a + 1)$.]

O valor da **função** ϕ **de Eule**r para o número inteiro positivo n é definido como sendo o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são relativamente primos de n (primos entre si).

9. Encontre

(a) $\phi(4)$ (b) $\phi(10)$ (c) $\phi(13)$

10. Qual é o valor de $\phi(p^k)$ quando p é primo e k é um número inteiro positivo?

11. Quais são os máximos divisores comuns de cada par de números inteiros abaixo?

(a) $3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3, \quad 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^9$
(b) $11 \cdot 13 \cdot 17, \quad 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^5 \cdot 7^3$
(c) $23^{31}, \quad 23^{17}$
(d) $41 \cdot 43 \cdot 53, \quad 41 \cdot 43 \cdot 53$
(e) $3^{13} \cdot 517, \quad 2^{12} \cdot 7^{21}$
(f) $1111, \quad 0$

12. Qual é o mínimo múltiplo comum de cada par do exercício anterior?

13. Encontre mdc(92928, 123552) e mmc(92928, 123552) e verifique se mdc$(92928, 123552) \cdot$ mmc$(92928, 123552) = 92928 \cdot 123552$. [**Dica:** Primeiro encontre as fatorações em números primos de 92928 e 123552. Faça também utilizando o algoritmo de Euclides.]

14. Demonstre que o produto de três números inteiros consecutivos quaisquer é divisivel por 6.

15. Demonstre ou negue que $n^2 - 79n + 1601$ é primo sempre que n for um número inteiro positivo.

16. Demonstre ou negue que $p_1 p_2 ... p_n + 1$ é primo para todo número inteiro positivo n, em que $p_1, p_2, ..., p_n$ são os n menores números primos.

17. Mostre que se a, b e m são números inteiros tal que $m \geq 2$ e $a \equiv b(mod\ m)$, então $mdc(a, m) = mdc(b, m)$.