Lógica de Proposições Quantificadas

QXD0008 – Matemática Discreta

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily
ismailybf@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2022

Tópicos desta aula

- Predicados
- Quantificador universal e existencial
- Quantificadores com domínio restrito
- Quantificadores e variáveis ligadas
- Equivalência entre quantificadores
- Proposições com quantificadores aninhados

Referências para esta aula

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Seções 1.3 e 1.4** do livro: Kenneth H. Rosen. *Matemática Discreta e suas Aplicações*. (Sexta Edição).

- **Capítulo 2** do livro: Daniel J. VELLEMAN. *How to Prove it. A structured approach*. (3rd Edition). Cambridge University Press; 3rd Edition, 2019.

Introdução

Limitação da lógica proposicional

- A lógica proposicional não pode expressar adequadamente o significado das proposições em matemática e em linguagem natural.

Limitação da lógica proposicional

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- A lógica proposicional não pode expressar adequadamente o significado das proposições em matemática e em linguagem natural.

- **Exemplo:**

  > **"Todo computador conectado à rede da universidade está funcionando apropriadamente."**

Limitação da lógica proposicional

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- A lógica proposicional não pode expressar adequadamente o significado das proposições em matemática e em linguagem natural.
- **Exemplo:**

> **"Todo computador conectado à rede da universidade está funcionando apropriadamente."**

Seja $MATH3$ um dos computadores conectados à rede da universidade. Nenhuma regra da lógica proposicional nos permite decidir sobre a veracidade da afirmação:

Limitação da lógica proposicional

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- A lógica proposicional não pode expressar adequadamente o significado das proposições em matemática e em linguagem natural.

- **Exemplo:**

"Todo computador conectado à rede da universidade está funcionando apropriadamente."

Seja $MATH3$ um dos computadores conectados à rede da universidade. Nenhuma regra da lógica proposicional nos permite decidir sobre a veracidade da afirmação:

"MATH3 está funcionando apropriadamente."

Limitação da lógica proposicional

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- A lógica proposicional não pode expressar adequadamente o significado das proposições em matemática e em linguagem natural.

- **Exemplo:**

"Todo computador conectado à rede da universidade está funcionando apropriadamente."

Seja *MATH*3 um dos computadores conectados à rede da universidade. Nenhuma regra da lógica proposicional nos permite decidir sobre a veracidade da afirmação:

"MATH3 está funcionando apropriadamente."

- Por isto, introduzimos os **predicados** e a **lógica de predicados**, a fim de podermos trabalhar com declarações envolvendo variáveis e propriedades sobre estas variáveis.

Predicados

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

“x é maior que 3”

Predicados

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

"x **é maior que** 3"

x (**sujeito da declaração**)   maior que 3 (**predicado**)

- $P(x) = x$ **é maior que 3**: P indica o predicado e x é a variável.

Predicados

"x é maior que 3"

$\swarrow$ $\searrow$

x (**sujeito da declaração**) maior que 3 (**predicado**)

- $P(x) = x$ **é maior que 3**: P indica o predicado e x é a variável.
- Uma vez que um valor é dado para a variável x, a declaração $P(x)$ torna-se uma proposição e tem um valor-verdade.

Predicados

"x é maior que 3"

$\swarrow$ $\searrow$

x (**sujeito da declaração**) maior que 3 (**predicado**)

- $P(x) = x$ **é maior que 3**: P indica o predicado e x é a variável.
- Uma vez que um valor é dado para a variável x, a declaração $P(x)$ torna-se uma proposição e tem um valor-verdade.
- Qual o valor-verdade de $P(4)$ e $P(2)$?

Predicados

“x é maior que 3”

x (**sujeito da declaração**) maior que 3 (**predicado**)

- $P(x) = x$ **é maior que 3**: P indica o predicado e x é a variável.
- Uma vez que um valor é dado para a variável x, a declaração $P(x)$ torna-se uma proposição e tem um valor-verdade.
- Qual o valor-verdade de $P(4)$ e $P(2)$?
- Seja $Q(x, y) =$ “$x = y + 3$”.
  Quais os valores-verdade de $Q(1, 2)$ e $Q(3, 0)$?

Predicados

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Um **predicado** é uma sentença que contém um número finito de variáveis e se torna uma proposição quando as variáveis são substituídas por valores específicos.
- Os valores das variáveis de predicados são definidos por conjuntos chamados **domínios**. Por exemplo: $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$.

Quantificadores

$P(x)$ contendo a variável livre x é verdadeira para alguns valores de x

$$\Downarrow$$

Para quantos?

Quantificadores

$P(x)$ contendo a variável livre x é verdadeira para alguns valores de x

$$\Downarrow$$

Para quantos?

$\swarrow$ $\searrow$

Para todos? Para pelo menos um?

Quantificadores

$P(x)$ contendo a variável livre x é verdadeira para alguns valores de x

$$\Downarrow$$

Para quantos?

$\swarrow$ $\searrow$

Para todos? Para pelo menos um?

Quantificadores

Surgem para expressar estas ideias de quantidades.

Definição: Quantificadores são palavras/expressões que referem a quantidades tais como "todos" e "alguns" e indicam para quantos elementos do domínio um dado predicado é verdadeiro.

Quantificador universal: $\forall$

- Usado para expressar a ideia de que $P(x)$ vale para **todos** os valores do universo de discurso (ou domínio de discurso).

$\forall x P(x)$ **"para todo x, vale $P(x)$"**

Quantificador universal: $\forall$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Usado para expressar a ideia de que $P(x)$ vale para **todos** os valores do universo de discurso (ou domínio de discurso).

$$\forall x P(x) \qquad \text{“para todo } x\text{, vale } P(x)\text{”}$$

  - O conjunto-verdade de $P(x)$ é U.

Quantificador universal: $\forall$

- Usado para expressar a ideia de que $P(x)$ vale para **todos** os valores do universo de discurso (ou domínio de discurso).

$$\forall x P(x) \qquad \textbf{“para todo } x\textbf{, vale } P(x)\textbf{”}$$

  - O conjunto-verdade de $P(x)$ é U.
  - Um elemento para o qual $P(x)$ é falsa é chamado de **contraexemplo**.

Quantificador universal: $\forall$

- Usado para expressar a ideia de que $P(x)$ vale para **todos** os valores do universo de discurso (ou domínio de discurso).

$$\forall x P(x) \qquad\qquad \textbf{“para todo } x\textbf{, vale } P(x)\textbf{”}$$

  - O conjunto-verdade de $P(x)$ é U.
  - Um elemento para o qual $P(x)$ é falsa é chamado de **contraexemplo**.
  - x não é mais variável livre.

Quantificador universal: $\forall$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Usado para expressar a ideia de que $P(x)$ vale para **todos** os valores do universo de discurso (ou domínio de discurso).

$$\forall x P(x) \qquad \textbf{"para todo } x\textbf{, vale } P(x)\textbf{"}$$

  - O conjunto-verdade de $P(x)$ é U.
  - Um elemento para o qual $P(x)$ é falsa é chamado de **contraexemplo**.
  - x não é mais variável livre.
  - **Exemplo:**

$$U = \mathbb{R};$$

$$\forall x(x > 2 \rightarrow x^2 > 4).$$

Quantificador existencial: $\exists$

- Usado para expressar a ideia de que **existe pelo menos um** elemento do universo do discurso para o qual $P(x)$ é verdadeira.

$\exists x P(x)$ **"existe x, tal que $P(x)$"**

Quantificador existencial: $\exists$

- Usado para expressar a ideia de que **existe pelo menos um** elemento do universo do discurso para o qual $P(x)$ é verdadeira.

$\exists x P(x)$ **"existe x, tal que $P(x)$"**

  - O conjunto-verdade de $P(x)$ é não-vazio.

Quantificador existencial: $\exists$

- Usado para expressar a ideia de que **existe pelo menos um** elemento do universo do discurso para o qual $P(x)$ é verdadeira.

$\exists x P(x)$ **"existe x, tal que $P(x)$"**

  - O conjunto-verdade de $P(x)$ é não-vazio.
  - x não é mais variável livre.

Quantificador existencial: $\exists$

- Usado para expressar a ideia de que **existe pelo menos um** elemento do universo do discurso para o qual $P(x)$ é verdadeira.

$$\exists x P(x) \qquad \textbf{“existe } x\textbf{, tal que } P(x)\textbf{”}$$

  - O conjunto-verdade de $P(x)$ é não-vazio.
  - x não é mais variável livre.
  - **Exemplo:**

$$U = \mathbb{N};$$

$$\exists x(x^2 - 3x - 4 = 0).$$

Quantificador existencial: $\exists$

- Usado para expressar a ideia de que **existe pelo menos um** elemento do universo do discurso para o qual $P(x)$ é verdadeira.

$$\exists x P(x) \qquad \text{“existe } x \text{, tal que } P(x)\text{”}$$

  - O conjunto-verdade de $P(x)$ é não-vazio.
  - x não é mais variável livre.
  - **Exemplo:**

$$U = \mathbb{N};$$

$$\exists x(x^2 - 3x - 4 = 0).$$

- De fato, $x \in \{-1, 4\}$.

Resumo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

TABELA 1 Quantificadores.

Sentença	*Quando é verdadeira?*	*Quando é falsa?*
$\forall x P(x)$	$P(x)$ é verdadeira para todo x.	Existe um x tal que $P(x)$ é falsa.
$\exists x P(x)$	Existe um x tal que $P(x)$ é verdadeira.	$P(x)$ é falsa para todo x.

extraído do livro do Rosen.

Exemplos

1. $\exists x(M(x) \land B(x))$ tal que:
   - $M(x) =$ “x é homem”;
   - $B(x) =$ “x tem barba”.

Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. $\exists x(M(x) \land B(x))$ tal que:
   - $M(x) =$ "x é homem";
   - $B(x) =$ "x tem barba".

2. $\forall x(M(x) \rightarrow B(x))$

Exemplos

1. $\exists x(M(x) \wedge B(x))$ tal que:
   - $M(x) =$ "x é homem";
   - $B(x) =$ "x tem barba".

2. $\forall x(M(x) \to B(x))$
   - **Atenção**: $\forall x P(x) \to Q(x)$ significa $(\forall x P(x)) \to Q(x)$

Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. $\exists x(M(x) \wedge B(x))$ tal que:
    - $M(x) =$ "x é homem";
    - $B(x) =$ "x tem barba".

2. $\forall x(M(x) \rightarrow B(x))$
    - **Atenção**: $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ significa $(\forall x P(x)) \rightarrow Q(x)$ e **não** $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

Exemplos

1. $\exists x(M(x) \wedge B(x))$ tal que:
   - $M(x) =$ "x é homem";
   - $B(x) =$ "x tem barba".

2. $\forall x(M(x) \rightarrow B(x))$
   - **Atenção**: $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ significa $(\forall x P(x)) \rightarrow Q(x)$
     e **não** $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

3. Alguém não fez a lição de casa.

Exemplos

1. $\exists x(M(x) \wedge B(x))$ tal que:
   - $M(x) =$ "x é homem";
   - $B(x) =$ "x tem barba".

2. $\forall x(M(x) \rightarrow B(x))$
   - **Atenção**: $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ significa $(\forall x P(x)) \rightarrow Q(x)$
     e **não** $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

3. Alguém não fez a lição de casa.
   - $\exists x(x$ não fez a lição de casa$)$.

Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. $\exists x(M(x) \wedge B(x))$ tal que:
   - $M(x) =$ "x é homem";
   - $B(x) =$ "x tem barba".

2. $\forall x(M(x) \rightarrow B(x))$
   - **Atenção**: $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ significa $(\forall x P(x)) \rightarrow Q(x)$ e **não** $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

3. Alguém não fez a lição de casa.
   - $\exists x(x$ não fez a lição de casa$)$.
   - $\exists x(\neg L(x))$ tal que $L(x) =$ "x fez a lição de casa".

Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. $\exists x(M(x) \wedge B(x))$ tal que:
   - $M(x) =$ "x é homem";
   - $B(x) =$ "x tem barba".

2. $\forall x(M(x) \rightarrow B(x))$
   - **Atenção**: $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ significa $(\forall x P(x)) \rightarrow Q(x)$ e **não** $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

3. Alguém não fez a lição de casa.
   - $\exists x(x$ não fez a lição de casa$)$.
   - $\exists x(\neg L(x))$ tal que $L(x) =$ "x fez a lição de casa".

4. Ninguém é perfeito.

Exemplos

1. $\exists x(M(x) \wedge B(x))$ tal que:
   - $M(x) =$ "x é homem";
   - $B(x) =$ "x tem barba".

2. $\forall x(M(x) \rightarrow B(x))$
   - **Atenção**: $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ significa $(\forall x P(x)) \rightarrow Q(x)$ e **não** $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

3. Alguém não fez a lição de casa.
   - $\exists x(x$ não fez a lição de casa$)$.
   - $\exists x(\neg L(x))$ tal que $L(x) =$ "x fez a lição de casa".

4. Ninguém é perfeito.
   - $\forall x(\neg P(x))$ ou $\neg\exists x(P(x))$, tal que $P(x) =$ "x é perfeito".

Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. Todos os produtos daquele supermercado são caros ou são de má-qualidade

Exemplos

1. Todos os produtos daquele supermercado são caros ou são de má-qualidade

   - x um produto;

Exemplos

1. Todos os produtos daquele supermercado são caros ou são de má-qualidade

    - x um produto;
    - Se x está no supermercado, então x é caro ou é de má-qualidade.

Exemplos

1. Todos os produtos daquele supermercado são caros ou são de má-qualidade

   - x um produto;
   - Se x está no supermercado, então x é caro ou é de má-qualidade.

$$S(x) = \text{“}x \text{ está no supermercado.”}$$

Exemplos

1. Todos os produtos daquele supermercado são caros ou são de má-qualidade

   - x um produto;
   - Se x está no supermercado, então x é caro ou é de má-qualidade.

$$S(x) = \text{“}x \text{ está no supermercado.”}$$
$$C(x) = \text{“}x \text{ é caro.”}$$

Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. Todos os produtos daquele supermercado são caros ou são de má-qualidade

   - x um produto;
   - Se x está no supermercado, então x é caro ou é de má-qualidade.

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \text{“}x \text{ está no supermercado.”}\\
C(x) &= \text{“}x \text{ é caro.”}\\
M(x) &= \text{“}x \text{ é de má-qualidade.”}
\end{aligned}
$$

Exemplos

1. Todos os produtos daquele supermercado são caros ou são de má-qualidade

   - x um produto;
   - Se x está no supermercado, então x é caro ou é de má-qualidade.

$$S(x) = \text{“}x \text{ está no supermercado.”}$$
$$C(x) = \text{“}x \text{ é caro.”}$$
$$M(x) = \text{“}x \text{ é de má-qualidade.”}$$

$$\forall x(S(x) \rightarrow (C(x) \vee M(x)))$$

Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $A \subseteq B$

Exemplos

- $A \subseteq B$
    - $\forall x(x \in A \to x \in B)$.

Exemplos

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

- $A \cap B \subseteq (B \setminus C)$

Exemplos

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \to x \in B)$.

- $A \cap B \subseteq (B \setminus C)$
  - $x \in A \cap B$ é equivalente a $x \in A \wedge x \in B$.

Exemplos

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \to x \in B)$.

- $A \cap B \subseteq (B \setminus C)$
  - $x \in A \cap B$ é equivalente a $x \in A \wedge x \in B$.
  - $x \in B \setminus C$ é equivalente a $x \in B \wedge x \notin C$.

Exemplos

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

- $A \cap B \subseteq (B \setminus C)$
  - $x \in A \cap B$ é equivalente a $x \in A \wedge x \in B$.
  - $x \in B \setminus C$ é equivalente a $x \in B \wedge x \notin C$.
  - Portanto, $\forall x((x \in A \wedge x \in B) \rightarrow (x \in B \wedge x \notin C))$

Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

- $A \cap B \subseteq (B \setminus C)$
  - $x \in A \cap B$ é equivalente a $x \in A \land x \in B$.
  - $x \in B \setminus C$ é equivalente a $x \in B \land x \notin C$.
  - Portanto, $\forall x((x \in A \land x \in B) \rightarrow (x \in B \land x \notin C))$

- Se $A \subseteq B$, então A e $C \setminus B$ são disjuntos.

Exemplos

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \to x \in B)$.

- $A \cap B \subseteq (B \setminus C)$
  - $x \in A \cap B$ é equivalente a $x \in A \wedge x \in B$.
  - $x \in B \setminus C$ é equivalente a $x \in B \wedge x \notin C$.
  - Portanto, $\forall x((x \in A \wedge x \in B) \to (x \in B \wedge x \notin C))$

- Se $A \subseteq B$, então A e $C \setminus B$ são disjuntos.
  - $A \cap (C \setminus B) = \emptyset$ significa que:

Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

- $A \cap B \subseteq (B \setminus C)$
  - $x \in A \cap B$ é equivalente a $x \in A \wedge x \in B$.
  - $x \in B \setminus C$ é equivalente a $x \in B \wedge x \notin C$.
  - Portanto, $\forall x((x \in A \wedge x \in B) \rightarrow (x \in B \wedge x \notin C))$

- Se $A \subseteq B$, então A e $C \setminus B$ são disjuntos.
  - $A \cap (C \setminus B) = \emptyset$ significa que:
    - $\neg \exists x(x \in A \wedge x \in C \setminus B)$;

Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \to x \in B)$.

- $A \cap B \subseteq (B \setminus C)$
  - $x \in A \cap B$ é equivalente a $x \in A \land x \in B$.
  - $x \in B \setminus C$ é equivalente a $x \in B \land x \notin C$.
  - Portanto, $\forall x((x \in A \land x \in B) \to (x \in B \land x \notin C))$

- Se $A \subseteq B$, então A e $C \setminus B$ são disjuntos.
  - $A \cap (C \setminus B) = \emptyset$ significa que:
    - $\neg \exists x(x \in A \land x \in C \setminus B)$;
    - $\neg \exists x(x \in A \land (x \in C \land x \notin B))$.

Exemplos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \to x \in B)$.

- $A \cap B \subseteq (B \setminus C)$
  - $x \in A \cap B$ é equivalente a $x \in A \land x \in B$.
  - $x \in B \setminus C$ é equivalente a $x \in B \land x \notin C$.
  - Portanto, $\forall x((x \in A \land x \in B) \to (x \in B \land x \notin C))$

- Se $A \subseteq B$, então A e $C \setminus B$ são disjuntos.
  - $A \cap (C \setminus B) = \emptyset$ significa que:
    - $\neg\exists x(x \in A \land x \in C \setminus B)$;
    - $\neg\exists x(x \in A \land (x \in C \land x \notin B))$.
  - $\forall x(x \in A \to x \in B) \to \neg\exists x(x \in A \land (x \in C \land x \notin B))$.

$U = \mathbb{Z}$, verdadeiro ou falso?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\forall x \exists y (x + y = 5)$

- $\exists x \forall y (x + y = 5)$

$U = \mathbb{Z}$, verdadeiro ou falso?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\forall x \exists y (x + y = 5)$
    - Para todo x, existe y tal que $x + y = 5$.

- $\exists x \forall y (x + y = 5)$

$U = \mathbb{Z}$, verdadeiro ou falso?

- $\forall x \exists y (x + y = 5)$
  - Para todo x, existe y tal que $x + y = 5$.

- $\exists x \forall y (x + y = 5)$
  - Existe x tal que para todo y, $x + y = 5$.

$U = \mathbb{Z}$, verdadeiro ou falso?

- $\forall x \exists y (x + y = 5)$
  - Para todo x, existe y tal que $x + y = 5$.
  - **Verdadeiro!**
- $\exists x \forall y (x + y = 5)$
  - Existe x tal que para todo y, $x + y = 5$.
  - **Falso!**

$U = \mathbb{N}$, decida se é verdadeiro ou falso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. $\forall x \exists y (x < y)$

$U = \mathbb{N}$, decida se é verdadeiro ou falso

1. $\forall x \exists y (x < y)$
   - Para x natural arbitrário e fixo, existe y tal que $x < y$?

$U = \mathbb{N}$, decida se é verdadeiro ou falso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. $\forall x \exists y (x < y)$
   - Para x natural arbitrário e fixo, existe y tal que $x < y$?
   - **Verdadeiro!**

$U = \mathbb{N}$, decida se é verdadeiro ou falso

1. $\forall x \exists y (x < y)$
   - Para x natural arbitrário e fixo, existe y tal que $x < y$?
   - **Verdadeiro!**

2. $\exists y \forall x (x < y)$

$U = \mathbb{N}$, decida se é verdadeiro ou falso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. $\forall x \exists y (x < y)$
   - Para x natural arbitrário e fixo, existe y tal que $x < y$?
   - **Verdadeiro!**

2. $\exists y \forall x (x < y)$
   - Existe um natural y para o qual todos os outros são menores do que ele?

$U = \mathbb{N}$, decida se é verdadeiro ou falso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. $\forall x \exists y (x < y)$
   - Para x natural arbitrário e fixo, existe y tal que $x < y$?
   - **Verdadeiro!**

2. $\exists y \forall x (x < y)$
   - Existe um natural y para o qual todos os outros são menores do que ele?
   - **Falso!**

$U = \mathbb{N}$, decida se é verdadeiro ou falso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. $\forall x \exists y (x < y)$
   - Para x natural arbitrário e fixo, existe y tal que $x < y$?
   - **Verdadeiro!**
2. $\exists y \forall x (x < y)$
   - Existe um natural y para o qual todos os outros são menores do que ele?
   - **Falso!**
3. $\exists x \forall y (x < y)$

$U = \mathbb{N}$, decida se é verdadeiro ou falso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. $\forall x \exists y (x < y)$
   - Para x natural arbitrário e fixo, existe y tal que $x < y$?
   - **Verdadeiro!**
2. $\exists y \forall x (x < y)$
   - Existe um natural y para o qual todos os outros são menores do que ele?
   - **Falso!**
3. $\exists x \forall y (x < y)$
   - Existe um natural x tal que todos os outros naturais são maiores do que ele?

$U = \mathbb{N}$, decida se é verdadeiro ou falso

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

1. $\forall x \exists y (x < y)$
   - Para x natural arbitrário e fixo, existe y tal que $x < y$?
   - **Verdadeiro!**

2. $\exists y \forall x (x < y)$
   - Existe um natural y para o qual todos os outros são menores do que ele?
   - **Falso!**

3. $\exists x \forall y (x < y)$
   - Existe um natural x tal que todos os outros naturais são maiores do que ele?
   - **Falso!**

Decida se é verdadeiro ou falso

1. Qual o valor verdade de $\forall x(x^2 \geq x)$ se o domínio consiste em todos os números reais? E qual o valor-verdade dessa proposição se o domínio são todos os números inteiros?

Decida se é verdadeiro ou falso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. Qual o valor verdade de $\forall x(x^2 \geq x)$ se o domínio consiste em todos os números reais? E qual o valor-verdade dessa proposição se o domínio são todos os números inteiros?
   - **Falso** quando $U = \mathbb{R}$ pois $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \not\geq \frac{1}{2}$.

Decida se é verdadeiro ou falso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. Qual o valor verdade de $\forall x(x^2 \geq x)$ se o domínio consiste em todos os números reais? E qual o valor-verdade dessa proposição se o domínio são todos os números inteiros?
   - **Falso** quando $U = \mathbb{R}$ pois $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \not\geq \frac{1}{2}$.
   - **Verdadeito** quando $U = \mathbb{Z}$.

Existência e unicidade

- Algumas vezes precisamos de mais precisão do que simplesmente *existe um elemento no universo do discurso*.

Existência e unicidade

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Algumas vezes precisamos de mais precisão do que simplesmente *existe um elemento no universo do discurso*.

Precisamos que ele seja único.

$$\Downarrow$$

$\exists!$ **"existe e é único"**

Existência e unicidade

- Algumas vezes precisamos de mais precisão do que simplesmente *existe um elemento no universo do discurso*.

Precisamos que ele seja único.

$$\Downarrow$$

$\exists!$ **"existe e é único"**

$$\exists! x P(x)$$

Existência e unicidade

- Algumas vezes precisamos de mais precisão do que simplesmente *existe um elemento no universo do discurso*.

Precisamos que ele seja único.

$$\Downarrow$$

$\exists!$ **"existe e é único"**

$$\exists! x P(x)$$

é uma abreviação para

$$\exists x (P(x) \wedge \neg \exists y (P(y) \wedge x \neq y))$$

A relação entre $\forall$, $\exists$, $\wedge$ e $\vee$

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Seja o predicado $Q(x)$, onde x tem domínio $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- Proposição universal é uma generalização da conjunção ($\wedge$):

$$\forall x \in U, Q(x) \;\equiv\; Q(x_1) \wedge Q(x_2) \wedge \ldots \wedge Q(x_n)$$

A relação entre $\forall$, $\exists$, $\wedge$ e $\vee$

- Seja o predicado $Q(x)$, onde x tem domínio $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- Proposição universal é uma generalização da conjunção ($\wedge$):

$$\forall x \in U, Q(x) \equiv Q(x_1) \wedge Q(x_2) \wedge \ldots \wedge Q(x_n)$$

  - **Exemplo:** $Q(x)$: x^2, $U = \{0, 1\}$
    $\forall x \in U$, tal que $Q(x) \equiv Q(0) \wedge Q(1)$

A relação entre $\forall$, $\exists$, $\wedge$ e $\vee$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja o predicado $Q(x)$, onde x tem domínio $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- Proposição universal é uma generalização da conjunção ($\wedge$):

$$\forall x \in U, Q(x) \ \equiv \ Q(x_1) \wedge Q(x_2) \wedge \ldots \wedge Q(x_n)$$

  - **Exemplo:** $Q(x)\colon x^2$, $U = \{0, 1\}$
    $\forall x \in U$, tal que $Q(x) \equiv Q(0) \wedge Q(1)$

- Proposição existencial é uma generalização da disjunção ($\vee$):

$$\exists x \in U \text{ tal que } Q(x) \equiv Q(x_1) \vee Q(x_2) \vee \ldots \vee Q(x_n)$$

A relação entre $\forall$, $\exists$, $\wedge$ e $\vee$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja o predicado $Q(x)$, onde x tem domínio $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- Proposição universal é uma generalização da conjunção ($\wedge$):

$$\forall x \in U, Q(x) \equiv Q(x_1) \wedge Q(x_2) \wedge \ldots \wedge Q(x_n)$$

  - **Exemplo:** $Q(x)\colon x^2$, $U = \{0, 1\}$
    $\forall x \in U$, tal que $Q(x) \equiv Q(0) \wedge Q(1)$

- Proposição existencial é uma generalização da disjunção ($\vee$):

$$\exists x \in U \text{ tal que } Q(x) \equiv Q(x_1) \vee Q(x_2) \vee \ldots \vee Q(x_n)$$

  - **Exemplo:** $Q(x)\colon x + x$, $U = \{0, 1\}$
    $\exists x \in U$, tal que $Q(x) \equiv Q(0) \vee Q(1)$

Quantificadores com domínio restrito

Quantificadores com domínio restrito

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Dado $U = \mathbb{R}$, o que a proposição $\forall_{x<0}(x^2 > 0)$ significa?

- Restringe o domínio para qualquer número real x com $x < 0$.
- Ela diz que "o quadrado de todo número real negativo é positivo".
- A proposição é o mesmo que $\forall x(x < 0 \to x^2 > 0)$.

Quantificadores com domínio restrito

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Dado $U = \mathbb{R}$, o que a proposição $\exists_{z>0}(z^2 = 2)$ significa?

- Ela diz que "existe um número real positivo tal que seu quadrado é igual a 2".
- Essa proposição é equivalente a $\exists z(z > 0 \land z^2 = 2)$.

Quantificadores restritos – Exemplos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- $\forall x \in U\ P(x)$: para todo x em U, $P(x)$.

Quantificadores restritos – Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\forall x \in U \; P(x)$: para todo x em U, $P(x)$.
  - $\forall x \in \mathbb{R}(x \geq 0)$ é **falso**.

Quantificadores restritos – Exemplos

- $\forall x \in U\ P(x)$: para todo x em U, $P(x)$.
  - $\forall x \in \mathbb{R}(x \geq 0)$ é **falso**.
  - $\forall x \in \mathbb{N}(x \geq 0)$ é **verdadeiro**.

Quantificadores restritos – Exemplos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- $\forall x \in U\ P(x)$: para todo x em U, $P(x)$.
  - $\forall x \in \mathbb{R}(x \geq 0)$ é **falso**.
  - $\forall x \in \mathbb{N}(x \geq 0)$ é **verdadeiro**.
- $\exists x \in U\ P(x)$: existe x em U, $P(x)$.

Quantificadores restritos – Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\forall x \in U\ P(x)$: para todo x em U, $P(x)$.
  - $\forall x \in \mathbb{R}(x \geq 0)$ é **falso**.
  - $\forall x \in \mathbb{N}(x \geq 0)$ é **verdadeiro**.
- $\exists x \in U\ P(x)$: existe x em U, $P(x)$.
  - $\exists x \in \mathbb{R}(x < 0)$ é **verdadeiro**.

Quantificadores restritos – Exemplos

- $\forall x \in U\ P(x)$: para todo x em U, $P(x)$.
  - $\forall x \in \mathbb{R}(x \geq 0)$ é **falso**.
  - $\forall x \in \mathbb{N}(x \geq 0)$ é **verdadeiro**.
- $\exists x \in U\ P(x)$: existe x em U, $P(x)$.
  - $\exists x \in \mathbb{R}(x < 0)$ é **verdadeiro**.
  - $\exists x \in \mathbb{N}(x < 0)$ é **falso**.

Quantificadores restritos – Resumo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

$$\boxed{\forall x \in A\ P(x)}$$

significa que para todo $x \in A$, $P(x)$ é verdadeira, **isto é,**

$$\forall x (x \in A \rightarrow P(x))$$

Quantificadores restritos – Resumo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

$$\boxed{\forall x \in A\ P(x)}$$

significa que para todo $x \in A$, $P(x)$ é verdadeira, **isto é,**

$$\forall x (x \in A \rightarrow P(x))$$

$$\boxed{\exists x \in A\ P(x)}$$

significa que existe $x \in A$ para o qual $P(x)$ é verdadeira, **isto é,**

$$\exists x (x \in A \wedge P(x))$$

Quantificadores restritos – Resumo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

$$\boxed{\forall x \in A \; P(x)}$$

significa que para todo $x \in A$, $P(x)$ é verdadeira, **isto é,**

$$\forall x (x \in A \to P(x))$$

$$\boxed{\exists x \in A \; P(x)}$$

significa que existe $x \in A$ para o qual $P(x)$ é verdadeira, **isto é,**

$$\exists x (x \in A \land P(x))$$

Quantificadores restritos podem ser pensados como abreviações das expressões acima.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Equivalências envolvendo quantificadores

Equivalências envolvendo quantificadores

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Sentenças que envolvem predicados e quantificadores são **logicamente equivalentes** se e somente se elas têm o mesmo valor verdade quaisquer que sejam os predicados substituídos nessas sentenças e qualquer que seja o domínio de discurso para as variáveis nessas funções proposicionais.

- Usamos a notação $S \equiv T$ para indicar que as duas declarações S e T que envolvem predicados e quantificadores são logicamente equivalentes.

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

$$\boxed{\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

$$\boxed{\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)}$$

Demonstração:

Note que $\neg\forall x P(x)$ é verdadeiro sse $\forall x P(x)$ é falso.

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

$$\boxed{\neg\forall x P(x) \ \equiv\ \exists x \neg P(x)}$$

Demonstração:
Note que $\neg\forall x P(x)$ é verdadeiro sse $\forall x P(x)$ é falso.

$\forall x P(x)$ é falso sse existe um elemento x no domínio para o qual $P(x)$ é falso.

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

$$\boxed{\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)}$$

Demonstração:
Note que $\neg\forall x P(x)$ é verdadeiro sse $\forall x P(x)$ é falso.

$\forall x P(x)$ é falso sse existe um elemento x no domínio para o qual $P(x)$ é falso.

Existe um elemento x no domínio para o qual $P(x)$ é falso sse existe um elemento x no domínio tal que $\neg P(x)$ é verdadeiro.

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

$$\boxed{\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)}$$

Demonstração:
Note que $\neg\forall x P(x)$ é verdadeiro sse $\forall x P(x)$ é falso.

$\forall x P(x)$ é falso sse existe um elemento x no domínio para o qual $P(x)$ é falso.

Existe um elemento x no domínio para o qual $P(x)$ é falso sse existe um elemento x no domínio tal que $\neg P(x)$ é verdadeiro.

Existe um elemento x no domínio tal que $\neg P(x)$ é verdadeiro sse $\exists x \neg P(x)$ é verdadeiro.

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

$$\boxed{\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)}$$

Demonstração:
Note que $\neg\forall x P(x)$ é verdadeiro sse $\forall x P(x)$ é falso.

$\forall x P(x)$ é falso sse existe um elemento x no domínio para o qual $P(x)$ é falso.

Existe um elemento x no domínio para o qual $P(x)$ é falso sse existe um elemento x no domínio tal que $\neg P(x)$ é verdadeiro.

Existe um elemento x no domínio tal que $\neg P(x)$ é verdadeiro sse $\exists x \neg P(x)$ é verdadeiro.

Portanto, concluímos que $\neg\forall x P(x)$ é verdadeiro sse $\exists x \neg P(x)$ é verdadeiro.

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

$$\boxed{\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)}$$

Demonstração:
Note que $\neg\forall x P(x)$ é verdadeiro sse $\forall x P(x)$ é falso.

$\forall x P(x)$ é falso sse existe um elemento x no domínio para o qual $P(x)$ é falso.

Existe um elemento x no domínio para o qual $P(x)$ é falso sse existe um elemento x no domínio tal que $\neg P(x)$ é verdadeiro.

Existe um elemento x no domínio tal que $\neg P(x)$ é verdadeiro sse $\exists x \neg P(x)$ é verdadeiro.

Portanto, concluímos que $\neg\forall x P(x)$ é verdadeiro sse $\exists x \neg P(x)$ é verdadeiro.

Logo, $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$. $\square$

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

$$\boxed{\neg\exists x P(x) \ \equiv \ \forall x \neg P(x)}$$

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

$$\boxed{\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)}$$

Demonstração:
Note que $\neg\exists x P(x)$ é verdadeiro sse $\exists x P(x)$ é falso.

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

$$\boxed{\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)}$$

Demonstração:
Note que $\neg\exists x P(x)$ é verdadeiro sse $\exists x P(x)$ é falso.

$\exists x P(x)$ é falso sse não existe x no domínio para o qual $P(x)$ é verdadeiro.

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

$$\boxed{\neg\exists x P(x) \ \equiv \ \forall x \neg P(x)}$$

Demonstração:
Note que $\neg\exists x P(x)$ é verdadeiro sse $\exists x P(x)$ é falso.

$\exists x P(x)$ é falso sse não existe x no domínio para o qual $P(x)$ é verdadeiro.

Agora, não existe x no domínio para o qual $P(x)$ é verdadeiro sse $P(x)$ é falso para todo x no domínio.

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

$$\boxed{\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)}$$

Demonstração:
Note que $\neg\exists x P(x)$ é verdadeiro sse $\exists x P(x)$ é falso.

$\exists x P(x)$ é falso sse não existe x no domínio para o qual $P(x)$ é verdadeiro.

Agora, não existe x no domínio para o qual $P(x)$ é verdadeiro sse $P(x)$ é falso para todo x no domínio.

Note que $P(x)$ é falso para todo x no domínio sse $\neg P(x)$ é verdadeiro para todo x no domínio, o que acontece sse $\forall x \neg P(x)$ é verdadeiro.

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

$$\boxed{\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)}$$

Demonstração:
Note que $\neg\exists x P(x)$ é verdadeiro sse $\exists x P(x)$ é falso.

$\exists x P(x)$ é falso sse não existe x no domínio para o qual $P(x)$ é verdadeiro.

Agora, não existe x no domínio para o qual $P(x)$ é verdadeiro sse $P(x)$ é falso para todo x no domínio.

Note que $P(x)$ é falso para todo x no domínio sse $\neg P(x)$ é verdadeiro para todo x no domínio, o que acontece sse $\forall x \neg P(x)$ é verdadeiro.

Portanto, concluímos que $\neg\exists x P(x)$ é verdadeiro sse $\forall x \neg P(x)$ é verdadeiro.

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

$$\boxed{\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)}$$

Demonstração:
Note que $\neg\exists x P(x)$ é verdadeiro sse $\exists x P(x)$ é falso.

$\exists x P(x)$ é falso sse não existe x no domínio para o qual $P(x)$ é verdadeiro.

Agora, não existe x no domínio para o qual $P(x)$ é verdadeiro sse $P(x)$ é falso para todo x no domínio.

Note que $P(x)$ é falso para todo x no domínio sse $\neg P(x)$ é verdadeiro para todo x no domínio, o que acontece sse $\forall x \neg P(x)$ é verdadeiro.

Portanto, concluímos que $\neg\exists x P(x)$ é verdadeiro sse $\forall x \neg P(x)$ é verdadeiro.

Logo, $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$. $\square$

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

- Quando o domínio de um predicado $P(x)$ consiste em n elementos, em que n é um número inteiro, as regras de negação para proposições quantificadas são exatamente como as leis de De Morgan.

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

- Quando o domínio de um predicado $P(x)$ consiste em n elementos, em que n é um número inteiro, as regras de negação para proposições quantificadas são exatamente como as leis de De Morgan.

- Quando o domínio tem n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ segue que $\neg \forall x P(x)$ é o mesmo que $\neg(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n))$ e que é equivalente a $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \cdots \vee \neg P(x_n)$. Pela lei de De Morgan isso é o mesmo que $\exists x \neg P(x)$.

Leis da negação do quantificador

(Leis de De Morgan para quantificadores)

- Quando o domínio de um predicado $P(x)$ consiste em n elementos, em que n é um número inteiro, as regras de negação para proposições quantificadas são exatamente como as leis de De Morgan.

- Quando o domínio tem n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ segue que $\neg\forall x P(x)$ é o mesmo que $\neg(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n))$ e que é equivalente a $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \cdots \vee \neg P(x_n)$. Pela lei de De Morgan isso é o mesmo que $\exists x \neg P(x)$.

- Analogamente, $\neg\exists x P(x)$ é o mesmo que $\neg(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n))$, que pela lei de De Morgan é equivalente a $\neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \cdots \wedge \neg P(x_n)$, que é o mesmo que $\forall x \neg P(x)$.

Negue a expressão e reexpresse o resultado

- $A \subseteq B$

Negue a expressão e reexpresse o resultado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $A \subseteq B$
  - $\forall x (x \in A \to x \in B)$

Negue a expressão e reexpresse o resultado

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
  - **Negando**: $\neg\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$

Negue a expressão e reexpresse o resultado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $A \subseteq B$
    - $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
    - **Negando**: $\neg \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
        - $\equiv \exists x \neg(x \in A \rightarrow x \in B)$ **(Lei da negação do quantificador)**

Negue a expressão e reexpresse o resultado

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
  - **Negando**: $\neg\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
    - $\equiv \exists x \neg(x \in A \rightarrow x \in B)$ **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \exists x \neg(\neg x \in A \vee x \in B)$ **(Lei do condicional)**

Negue a expressão e reexpresse o resultado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
  - **Negando**: $\neg\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
    - $\equiv \exists x \neg(x \in A \rightarrow x \in B)$ **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \exists x \neg(\neg x \in A \vee x \in B)$ **(Lei do condicional)**
    - $\equiv \exists x(\neg\neg x \in A \wedge \neg x \in B)$ **(DeMorgan)**

Negue a expressão e reexpresse o resultado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
  - **Negando**: $\neg\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
    - $\equiv \exists x \neg(x \in A \rightarrow x \in B)$ **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \exists x \neg(\neg x \in A \vee x \in B)$ **(Lei do condicional)**
    - $\equiv \exists x(\neg\neg x \in A \wedge \neg x \in B)$ **(DeMorgan)**
    - $\equiv \exists x(x \in A \wedge \neg x \in B)$ **(Negação dupla)**

Negue a expressão e reexpresse o resultado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \to x \in B)$
  - **Negando**: $\neg\forall x(x \in A \to x \in B)$
    - $\equiv \exists x \neg(x \in A \to x \in B)$ **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \exists x \neg(\neg x \in A \vee x \in B)$ **(Lei do condicional)**
    - $\equiv \exists x(\neg\neg x \in A \wedge \neg x \in B)$ **(DeMorgan)**
    - $\equiv \exists x(x \in A \wedge \neg x \in B)$ **(Negação dupla)**
  - **Isto é**: $A \nsubseteq B$ é o mesmo que dizer que existe x tal que x pertence a A mas x não pertence a B.

Negue a expressão e reexpresse o resultado

- Todo mundo tem um parente de quem não gosta.

Negue a expressão e reexpresse o resultado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Todo mundo tem um parente de quem não gosta.
  - $P(x, y) =$ "x e y são parentes."

Negue a expressão e reexpresse o resultado

- Todo mundo tem um parente de quem não gosta.
  - $P(x, y) =$ "x e y são parentes."
  - $L(x, y) =$ "x gosta de y."

Negue a expressão e reexpresse o resultado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Todo mundo tem um parente de quem não gosta.
  - $P(x, y) =$ "x e y são parentes."
  - $L(x, y) =$ "x gosta de y."
  - **Então:** $\forall x \exists y (P(x, y) \land \neg L(x, y))$.

Negue a expressão e reexpresse o resultado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Todo mundo tem um parente de quem não gosta.
  - $P(x, y) =$ "x e y são parentes."
  - $L(x, y) =$ "x gosta de y."
  - **Então:** $\forall x \exists y (P(x, y) \land \neg L(x, y))$.
  - **Negando**: $\neg \forall x \exists y (P(x, y) \land \neg L(x, y))$.

Negue a expressão e reexpresse o resultado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Todo mundo tem um parente de quem não gosta.
    - $P(x, y) =$ "x e y são parentes."
    - $L(x, y) =$ "x gosta de y."
    - **Então:** $\forall x \exists y (P(x, y) \land \neg L(x, y))$.
    - **Negando**: $\neg \forall x \exists y (P(x, y) \land \neg L(x, y))$.
        - $\equiv \exists x \neg \exists y (P(x, y) \land \neg L(x, y))$. **(Lei da negação do quantificador)**

Negue a expressão e reexpresse o resultado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Todo mundo tem um parente de quem não gosta.
  - $P(x, y) =$ "x e y são parentes."
  - $L(x, y) =$ "x gosta de y."
  - **Então:** $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$.
  - **Negando**: $\neg \forall x \exists y (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$.
    - $\equiv \exists x \neg \exists y (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$. **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \exists x \forall y \neg (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$. **(Lei da negação do quantificador)**

Negue a expressão e reexpresse o resultado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Todo mundo tem um parente de quem não gosta.
  - $P(x, y) =$ "x e y são parentes."
  - $L(x, y) =$ "x gosta de y."
  - **Então:** $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$.
  - **Negando**: $\neg \forall x \exists y (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$.
    - $\equiv \exists x \neg \exists y (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$. **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \exists x \forall y \neg (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$. **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \exists x \forall y (\neg P(x, y) \vee \neg\neg L(x, y))$. **(DeMorgan)**

Negue a expressão e reexpresse o resultado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Todo mundo tem um parente de quem não gosta.
  - $P(x, y) =$ "x e y são parentes."
  - $L(x, y) =$ "x gosta de y."
  - **Então:** $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$.
  - **Negando**: $\neg \forall x \exists y (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$.
    - $\equiv \exists x \neg \exists y (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$. **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \exists x \forall y \neg (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$. **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \exists x \forall y (\neg P(x, y) \vee \neg\neg L(x, y))$. **(DeMorgan)**
    - $\equiv \exists x \forall y (\neg P(x, y) \vee L(x, y))$. **(Negação Dupla)**

Negue a expressão e reexpresse o resultado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Todo mundo tem um parente de quem não gosta.
  - $P(x, y) =$ "x e y são parentes."
  - $L(x, y) =$ "x gosta de y."
  - **Então:** $\forall x \exists y (P(x, y) \land \neg L(x, y))$.
  - **Negando**: $\neg \forall x \exists y (P(x, y) \land \neg L(x, y))$.
    - $\equiv \exists x \neg \exists y (P(x, y) \land \neg L(x, y))$. **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \exists x \forall y \neg (P(x, y) \land \neg L(x, y))$. **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \exists x \forall y (\neg P(x, y) \lor \neg\neg L(x, y))$. **(DeMorgan)**
    - $\equiv \exists x \forall y (\neg P(x, y) \lor L(x, y))$. **(Negação Dupla)**
    - $\equiv \exists x \forall y (P(x, y) \rightarrow L(x, y))$. **(Lei do condicional)**

Leis da negação do quantificador restrito

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\neg\forall x \in A\ P(x)$ é equivalente a $\exists x \in A \neg P(x)$.

Leis da negação do quantificador restrito

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\neg\forall x \in A\ P(x)$ é equivalente a $\exists x \in A \neg P(x)$.
  - $\neg\forall x \in A\ P(x)$

Leis da negação do quantificador restrito

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\neg\forall x \in A\ P(x)$ é equivalente a $\exists x \in A \neg P(x)$.
    - $\neg\forall x \in A\ P(x)$
        - $\equiv \neg\forall x(x \in A \rightarrow P(x))$ **(Expansão da abreviação)**

Leis da negação do quantificador restrito

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\neg\forall x \in A\ P(x)$ é equivalente a $\exists x \in A \neg P(x)$.
  - $\neg\forall x \in A\ P(x)$
    - $\equiv \neg\forall x(x \in A \to P(x))$ **(Expansão da abreviação)**
    - $\equiv \exists x \neg(x \in A \to P(x))$ **(Lei da negação do quantificadores)**

Leis da negação do quantificador restrito

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\neg\forall x \in A\ P(x)$ é equivalente a $\exists x \in A \neg P(x)$.
  - $\neg\forall x \in A\ P(x)$
    - $\equiv \neg\forall x(x \in A \to P(x))$ **(Expansão da abreviação)**
    - $\equiv \exists x \neg(x \in A \to P(x))$ **(Lei da negação do quantificadores)**
    - $\equiv \exists x \neg(\neg x \in A \vee P(x))$ **(Lei do condicional)**

Leis da negação do quantificador restrito

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\neg\forall x \in A\ P(x)$ é equivalente a $\exists x \in A \neg P(x)$.
  - $\neg\forall x \in A\ P(x)$
    - $\equiv \neg\forall x(x \in A \to P(x))$ **(Expansão da abreviação)**
    - $\equiv \exists x \neg(x \in A \to P(x))$ **(Lei da negação do quantificadores)**
    - $\equiv \exists x \neg(\neg x \in A \lor P(x))$ **(Lei do condicional)**
    - $\equiv \exists x(\neg\neg x \in A \land \neg P(x))$ **(DeMorgan)**
    - $\equiv \exists x(x \in A \land \neg P(x))$ **(Negação dupla)**

Leis da negação do quantificador restrito

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\neg\forall x \in A\ P(x)$ é equivalente a $\exists x \in A \neg P(x)$.
  - $\neg\forall x \in A\ P(x)$
    - $\equiv \neg\forall x(x \in A \to P(x))$ **(Expansão da abreviação)**
    - $\equiv \exists x \neg(x \in A \to P(x))$ **(Lei da negação do quantificadores)**
    - $\equiv \exists x \neg(\neg x \in A \lor P(x))$ **(Lei do condicional)**
    - $\equiv \exists x(\neg\neg x \in A \land \neg P(x))$ **(DeMorgan)**
    - $\equiv \exists x(x \in A \land \neg P(x))$ **(Negação dupla)**
    - $\equiv \exists x \in A\ \neg P(x)$ **(Abreviação)**

Leis da negação do quantificador restrito

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\neg\exists x \in A\ P(x)$ é equivalente a $\forall x \in A \neg P(x)$.

Leis da negação do quantificador restrito

- $\neg\exists x \in A\ P(x)$ é equivalente a $\forall x \in A \neg P(x)$.
  - $\neg\exists x \in A\ P(x)$

Leis da negação do quantificador restrito

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\neg \exists x \in A\ P(x)$ é equivalente a $\forall x \in A \neg P(x)$.
  - $\neg \exists x \in A\ P(x)$
    - $\equiv \neg \exists x (x \in A \land P(x))$ **(Expansão da abreviação)**

Leis da negação do quantificador restrito

- $\neg\exists x \in A\ P(x)$ é equivalente a $\forall x \in A \neg P(x)$.
    - $\neg\exists x \in A\ P(x)$
        - $\equiv \neg\exists x(x \in A \wedge P(x))$ **(Expansão da abreviação)**
        - $\equiv \forall x \neg(x \in A \wedge P(x))$ **(Lei da negação do quantificador)**

Leis da negação do quantificador restrito

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\neg\exists x \in A\ P(x)$ é equivalente a $\forall x \in A \neg P(x)$.
  - $\neg\exists x \in A\ P(x)$
    - $\equiv \neg\exists x(x \in A \wedge P(x))$ **(Expansão da abreviação)**
    - $\equiv \forall x \neg(x \in A \wedge P(x))$ **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \forall x(\neg x \in A \vee \neg P(x))$ **(DeMorgan)**

Leis da negação do quantificador restrito

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\neg\exists x \in A\ P(x)$ é equivalente a $\forall x \in A \neg P(x)$.
  - $\neg\exists x \in A\ P(x)$
    - $\equiv \neg\exists x(x \in A \wedge P(x))$ **(Expansão da abreviação)**
    - $\equiv \forall x \neg(x \in A \wedge P(x))$ **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \forall x(\neg x \in A \vee \neg P(x))$ **(DeMorgan)**
    - $\equiv \forall x(x \in A \rightarrow \neg P(x))$ **(Lei do condicional)**

Leis da negação do quantificador restrito

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\neg\exists x \in A\ P(x)$ é equivalente a $\forall x \in A \neg P(x)$.
  - $\neg\exists x \in A\ P(x)$
    - $\equiv \neg\exists x(x \in A \wedge P(x))$ **(Expansão da abreviação)**
    - $\equiv \forall x \neg(x \in A \wedge P(x))$ **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \forall x(\neg x \in A \vee \neg P(x))$ **(DeMorgan)**
    - $\equiv \forall x(x \in A \rightarrow \neg P(x))$ **(Lei do condicional)**
    - $\equiv \forall x \in A\ \neg P(x)$ **(Abreviação)**

Sentenças Quantificadas e Domínio Vazio

Considere o domínio $U = \emptyset$

- $\exists x \in U \; P(x)$

Considere o domínio $U = \emptyset$

- $\exists x \in U \; P(x)$ **Sempre falso!**

Considere o domínio $U = \emptyset$

- $\exists x \in U\ P(x)$ **Sempre falso!**
- $\forall x \in U\ P(x)$

Considere o domínio $U = \emptyset$

- $\exists x \in U \; P(x)$ **Sempre falso!**
- $\forall x \in U \; P(x)$ **Sempre verdadeiro, vacuosamente verdadeiro!**

Considere o domínio $U = \emptyset$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $\exists x \in U \; P(x)$ **Sempre falso!**
- $\forall x \in U \; P(x)$ **Sempre verdadeiro, vacuosamente verdadeiro!**

- **Prova 1**: $\forall x \in U \; P(x)$ é equivalente a $\neg\neg\forall x \in U \; P(x)$,

Considere o domínio $U = \emptyset$

- $\exists x \in U\ P(x)$ **Sempre falso!**
- $\forall x \in U\ P(x)$ **Sempre verdadeiro, vacuosamente verdadeiro!**

- **Prova 1**: $\forall x \in U\ P(x)$ é equivalente a $\neg\neg\forall x \in U\ P(x)$,
  - que é equivalente a $\neg\exists x \in U \neg P(x)$.

Considere o domínio $U = \emptyset$

- $\exists x \in U\ P(x)$ **Sempre falso!**
- $\forall x \in U\ P(x)$ **Sempre verdadeiro, vacuosamente verdadeiro!**

- **Prova 1**: $\forall x \in U\ P(x)$ é equivalente a $\neg\neg\forall x \in U\ P(x)$,
  - que é equivalente a $\neg\exists x \in U \neg P(x)$.
  - Como $\exists x \in U \neg P(x)$ é falso (veja acima),

Considere o domínio $U = \emptyset$

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- $\exists x \in U \ P(x)$ **Sempre falso!**
- $\forall x \in U \ P(x)$ **Sempre verdadeiro, vacuosamente verdadeiro!**

- **Prova 1**: $\forall x \in U \ P(x)$ é equivalente a $\neg\neg\forall x \in U \ P(x)$,
  - que é equivalente a $\neg\exists x \in U \neg P(x)$.
  - Como $\exists x \in U \neg P(x)$ é falso (veja acima),
  - então $\neg\exists x \in U \neg P(x)$ é verdadeiro.

Considere o domínio $U = \emptyset$

- $\exists x \in U\ P(x)$ **Sempre falso!**
- $\forall x \in U\ P(x)$ **Sempre verdadeiro, vacuosamente verdadeiro!**

- **Prova 1**: $\forall x \in U\ P(x)$ é equivalente a $\neg\neg\forall x \in U\ P(x)$,
  - que é equivalente a $\neg\exists x \in U \neg P(x)$.
  - Como $\exists x \in U \neg P(x)$ é falso (veja acima),
  - então $\neg\exists x \in U \neg P(x)$ é verdadeiro.

- **Prova 2**: $\forall x \in U\ P(x)$ é equivalente a $\forall x(x \in U \rightarrow P(x))$

Considere o domínio $U = \emptyset$

- $\exists x \in U \; P(x)$ **Sempre falso!**
- $\forall x \in U \; P(x)$ **Sempre verdadeiro, vacuosamente verdadeiro!**

- **Prova 1**: $\forall x \in U \; P(x)$ é equivalente a $\neg\neg\forall x \in U \; P(x)$,
  - que é equivalente a $\neg\exists x \in U \neg P(x)$.
  - Como $\exists x \in U \neg P(x)$ é falso (veja acima),
  - então $\neg\exists x \in U \neg P(x)$ é verdadeiro.

- **Prova 2**: $\forall x \in U \; P(x)$ é equivalente a $\forall x (x \in U \rightarrow P(x))$
  - O condicional é falso apenas quando o antecedente é verdadeiro e o consequente falso.

Considere o domínio $U = \emptyset$

- $\exists x \in U\ P(x)$ **Sempre falso!**
- $\forall x \in U\ P(x)$ **Sempre verdadeiro, vacuosamente verdadeiro!**

- **Prova 1**: $\forall x \in U\ P(x)$ é equivalente a $\neg\neg\forall x \in U\ P(x)$,
  - que é equivalente a $\neg\exists x \in U \neg P(x)$.
  - Como $\exists x \in U \neg P(x)$ é falso (veja acima),
  - então $\neg\exists x \in U \neg P(x)$ é verdadeiro.

- **Prova 2**: $\forall x \in U\ P(x)$ é equivalente a $\forall x(x \in U \rightarrow P(x))$
  - O condicional é falso apenas quando o antecedente é verdadeiro e o consequente falso.
  - O antecedente $x \in U$ nunca é verdadeiro.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Considere o domínio $U = \emptyset$

- $\exists x \in U \; P(x)$ **Sempre falso!**
- $\forall x \in U \; P(x)$ **Sempre verdadeiro, vacuosamente verdadeiro!**

- **Prova 1**: $\forall x \in U \; P(x)$ é equivalente a $\neg\neg\forall x \in U \; P(x)$,
  - que é equivalente a $\neg\exists x \in U \neg P(x)$.
  - Como $\exists x \in U \neg P(x)$ é falso (veja acima),
  - então $\neg\exists x \in U \neg P(x)$ é verdadeiro.

- **Prova 2**: $\forall x \in U \; P(x)$ é equivalente a $\forall x (x \in U \rightarrow P(x))$
  - O condicional é falso apenas quando o antecedente é verdadeiro e o consequente falso.
  - O antecedente $x \in U$ nunca é verdadeiro.
  - Logo, o condicional $x \in U \rightarrow P(x)$ é sempre verdadeiro.

Quantificadores aninhados

Quantificadores aninhados

- **Definição:** Dois quantificadores estão **aninhados** se um está dentro no escopo do outro.

Quantificadores aninhados

- **Definição:** Dois quantificadores estão **aninhados** se um está dentro no escopo do outro.

$$\boxed{\text{Exemplo: } \forall x \exists y (x + y = 0)}$$

Quantificadores aninhados

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Dois quantificadores estão **aninhados** se um está dentro no escopo do outro.

$$\boxed{\text{Exemplo: } \forall x \exists y(x + y = 0)}$$

  - A sentença $\forall x \exists y(x + y = 0)$ diz que, para cada número real x existe um número real y, tal que $x + y = 0$;
  - Isto é, todo número real tem um inverso aditivo (oposto).

Quantificadores aninhados – Exemplo

- Dado como domínio o conjunto $\mathbb{R}$, traduza para o português a sentença:

$$\forall x \forall y ((x > 0) \land (y < 0) \rightarrow (xy < 0))$$

Quantificadores aninhados – Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Dado como domínio o conjunto $\mathbb{R}$, traduza para o português a sentença:

$$\forall x \forall y((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy < 0))$$

Solução:

  - "**Para quaisquer dois números reais x e y, se x é positivo e y é negativo, então xy é negativo.**"

Quantificadores aninhados – Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Dado como domínio o conjunto $\mathbb{R}$, traduza para o português a sentença:

$$\forall x \forall y ((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy < 0))$$

Solução:

- "**Para quaisquer dois números reais x e y, se x é positivo e y é negativo, então xy é negativo.**"
- "**O produto de um número real positivo e um número real negativo é sempre um número real negativo.**"

Quantificadores aninhados – Exemplo

- Dado como domínio o conjunto $\mathbb{R}$, traduza para o português a sentença:

$$\forall x \forall y (x + y = y + x)$$

Quantificadores aninhados – Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Dado como domínio o conjunto $\mathbb{R}$, traduza para o português a sentença:

$$\forall x \forall y (x + y = y + x)$$

Solução:

- "**Para qualquer número real** x**, para qualquer número real** y**,** $x + y = y + x$" (lei comutativa da adição)
- "**Para qualquer par de números reais** x **e** y**,** $x + y = y + x$"

Quantificadores aninhados – Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Dado como domínio o conjunto $\mathbb{R}$, traduza para o português a sentença:

$$\forall x \forall y (x + y = y + x)$$

Solução:

- "**Para qualquer número real x, para qualquer número real y,** $x + y = y + x$" (lei comutativa da adição)
- "**Para qualquer par de números reais x e y,** $x + y = y + x$"

- Esta última sentença determina que

$$\forall x \forall y (x + y = y + x) \equiv \forall y \forall x (x + y = y + x)$$

A ordem dos quantificadores

A ordem dos quantificadores **universais** aninhados em uma declaração sem outros quantificadores pode ser alterada sem modificar o significado da declaração quantificada.

Quantificadores aninhados – Exemplo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Dado como domínio o conjunto $\mathbb{N}$, traduza para o português a sentença:

$$\exists x \exists y (xy = 6)$$

Quantificadores aninhados – Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Dado como domínio o conjunto $\mathbb{N}$, traduza para o português a sentença:

$$\exists x \exists y (xy = 6)$$

Solução:

- "**Existe um inteiro** x **para o qual existe um inteiro** y **tal que** $xy = 6$"
- "**Existe um par de inteiros** x, y **para o qual** $xy = 6$"

Quantificadores aninhados – Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Dado como domínio o conjunto $\mathbb{N}$, traduza para o português a sentença:

$$\exists x \exists y (xy = 6)$$

Solução:

  - "**Existe um inteiro** x **para o qual existe um inteiro** y **tal que** $xy = 6$"
  - "**Existe um par de inteiros** x, y **para o qual** $xy = 6$"

- Esta última sentença determina que

$$\exists x \exists y (xy = 6) \equiv \exists y \exists x (xy = 6)$$

A ordem dos quantificadores

A ordem dos quantificadores **existenciais** aninhados em uma declaração sem outros quantificadores pode ser alterada sem modificar o significado da declaração quantificada.

A ordem dos quantificadores

A ordem dos quantificadores aninhados **precisa ser considerada** se os quantificadores são de tipos diferentes.

- $\forall x \exists y P(x, y)$ **não é o mesmo que** $\exists y \forall x P(x, y)$

A ordem dos quantificadores

A ordem dos quantificadores aninhados **precisa ser considerada** se os quantificadores são de tipos diferentes.

- $\forall x \exists y P(x, y)$ **não é o mesmo que** $\exists y \forall x P(x, y)$

Exemplo:

- Suponha $P(x, y) =$ "x ama y"

A ordem dos quantificadores

A ordem dos quantificadores aninhados **precisa ser considerada** se os quantificadores são de tipos diferentes.

- $\forall x \exists y P(x, y)$ **não é o mesmo que** $\exists y \forall x P(x, y)$

Exemplo:

- Suponha $P(x, y) =$ "x ama y"
- Então: $\forall x \exists y P(x, y)$ traduz para
  Todo mundo ama alguém.

A ordem dos quantificadores

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

A ordem dos quantificadores aninhados **precisa ser considerada** se os quantificadores são de tipos diferentes.

- $\forall x \exists y P(x, y)$ **não é o mesmo que** $\exists y \forall x P(x, y)$

Exemplo:

- Suponha $P(x, y) =$ "x ama y"
- Então: $\forall x \exists y P(x, y)$ traduz para
  Todo mundo ama alguém.
- Por outro lado, $\exists y \forall x P(x, y)$ traduz para:
  Existe alguém que é amado por todo mundo.

O significado dos dois é diferente.

A ordem dos quantificadores

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Exemplo:** Seja $Q(x, y)$ a sentença "$x + y = 0$". Quais os valores-verdade das quantificações $\exists y \forall x Q(x, y)$ e $\forall x \exists y Q(x, y)$, em que $x, y \in \mathbb{R}$?

A ordem dos quantificadores

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Exemplo:** Seja $Q(x, y)$ a sentença "$x + y = 0$". Quais os valores-verdade das quantificações $\exists y \forall x Q(x, y)$ e $\forall x \exists y Q(x, y)$, em que $x, y \in \mathbb{R}$?

- **Solução:** A quantificação $\exists y \forall x Q(x, y)$ indica a proposição "Existe um número real y tal que para todo número real x, $Q(x, y)$."

A ordem dos quantificadores

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Exemplo:** Seja $Q(x, y)$ a sentença "$x + y = 0$". Quais os valores-verdade das quantificações $\exists y \forall x Q(x, y)$ e $\forall x \exists y Q(x, y)$, em que $x, y \in \mathbb{R}$?

- **Solução:** A quantificação $\exists y \forall x Q(x, y)$ indica a proposição "Existe um número real y tal que para todo número real x, $Q(x, y)$."

  Sabemos que, qualquer que seja o valor de y escolhido, existe um único valor x para o qual $x + y = 0$. Como não existe número real y tal que $x + y = 0$ para todo número real x, a sentença $\exists y \forall x Q(x, y)$ é **falsa**.

A ordem dos quantificadores

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- **Exemplo:** Seja $Q(x, y)$ a sentença "$x + y = 0$". Quais os valores-verdade das quantificações $\exists y \forall x Q(x, y)$ e $\forall x \exists y Q(x, y)$, em que $x, y \in \mathbb{R}$?

- **Solução:** A quantificação $\exists y \forall x Q(x, y)$ indica a proposição "Existe um número real y tal que para todo número real x, $Q(x, y)$."

  Sabemos que, qualquer que seja o valor de y escolhido, existe um único valor x para o qual $x + y = 0$. Como não existe número real y tal que $x + y = 0$ para todo número real x, a sentença $\exists y \forall x Q(x, y)$ é **falsa**.

  A quantificação $\forall x \exists y Q(x, y)$ indica a proposição "Para todo número real x existe um número real y tal que $Q(x, y)$."

A ordem dos quantificadores

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Exemplo:** Seja $Q(x, y)$ a sentença "$x + y = 0$". Quais os valores-verdade das quantificações $\exists y \forall x Q(x, y)$ e $\forall x \exists y Q(x, y)$, em que $x, y \in \mathbb{R}$?

- **Solução:** A quantificação $\exists y \forall x Q(x, y)$ indica a proposição "Existe um número real y tal que para todo número real x, $Q(x, y)$."

  Sabemos que, qualquer que seja o valor de y escolhido, existe um único valor x para o qual $x + y = 0$. Como não existe número real y tal que $x + y = 0$ para todo número real x, a sentença $\exists y \forall x Q(x, y)$ é **falsa**.

  A quantificação $\forall x \exists y Q(x, y)$ indica a proposição "Para todo número real x existe um número real y tal que $Q(x, y)$."

  Dado um número real x arbitrário, existe um número real y tal que $x + y = 0$; a saber, $y = -x$. Portanto, $\forall x \exists y Q(x, y)$ é **verdadeira**. $\square$

Quantificações de duas variáveis – Resumo

TABELA 1 Quantificações de Duas Variáveis.		
Sentença	***Quando é verdadeira?***	***Quando é falsa?***
$\forall x \forall y P(x, y)$ $\forall y \forall x P(x, y)$	$P(x, y)$ é verdadeira para todo par x, y.	Existe um par x, y para o qual $P(x, y)$ é falsa.
$\forall x \exists y P(x, y)$	Para todo x existe um y para o qual $P(x, y)$ é verdadeira.	Existe um x tal que $P(x, y)$ é falsa para todo y.
$\exists x \forall y P(x, y)$	Existe um x tal que $P(x, y)$ é verdadeira para todo y.	Para todo x existe um y para o qual $P(x, y)$ é falsa.
$\exists x \exists y P(x, y)$ $\exists y \exists x P(x, y)$	Existe um par x, y para o qual $P(x, y)$ é verdadeira.	$P(x, y)$ é falsa para todo par x, y.

Retirado do livro do Rosen

Negação de proposições com quantificadores aninhados

Exemplo: Qual a negação da seguinte afirmação:

P: $\forall$ pessoas x, $\exists$ uma pessoa y tal que x ama y.

- O que significa a sentença ser falsa?
  A propriedade não ser válida para todas as pessoas.

Negação de proposições com quantificadores aninhados

Exemplo: Qual a negação da seguinte afirmação:

P: $\forall$ pessoas x, $\exists$ uma pessoa y tal que x ama y.

- O que significa a sentença ser falsa?
  A propriedade não ser válida para todas as pessoas.

$\neg P$: $\exists$ uma pessoa x tal que

$\neg(\exists$ uma pessoa y tal que x ama $y) \equiv$

Negação de proposições com quantificadores aninhados

Exemplo: Qual a negação da seguinte afirmação:

P: $\forall$ pessoas x, $\exists$ uma pessoa y tal que x ama y.

- O que significa a sentença ser falsa?
  A propriedade não ser válida para todas as pessoas.

$\neg P$: $\exists$ uma pessoa x tal que
$\neg(\exists$ uma pessoa y tal que x ama $y) \equiv$

$\exists$ uma pessoa x tal que
$\forall$ pessoas y, x não ama y

Negação de proposições com quantificadores aninhados

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo: Qual a negação da seguinte afirmação:

P: $\forall$ pessoas x, $\exists$ uma pessoa y tal que x ama y.

- O que significa a sentença ser falsa?
  A propriedade não ser válida para todas as pessoas.

$\neg P$: $\exists$ uma pessoa x tal que
$\neg(\exists$ uma pessoa y tal que x ama $y) \equiv$

$\exists$ uma pessoa x tal que
$\forall$ pessoas y, x não ama y

Regra geral: $\boxed{\neg\forall x \exists y Q(x,y) \equiv \exists x \forall y \neg Q(x,y)}$

Negação de proposições com quantificadores aninhados

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Regra geral 1:

$$\boxed{\neg\forall x \exists y Q(x, y) \equiv \exists x \forall y \neg Q(x, y)}$$

- **Exemplo:**
  - P: $\forall$ inteiros n, $\exists$ um inteiro k tal que $n = 2k$.

Negação de proposições com quantificadores aninhados

- Regra geral 1:

$$\boxed{\neg\forall x\exists y Q(x,y) \equiv \exists x\forall y\neg Q(x,y)}$$

- **Exemplo:**
  - P: $\forall$ inteiros n, $\exists$ um inteiro k tal que $n = 2k$.
  - $\neg P$: $\exists$ um inteiro n tal que $\forall$ inteiro k, $n \neq 2k$.

Negação de proposições com quantificadores aninhados

- Regra geral 2:

$$\boxed{\neg\exists x \forall y Q(x,y) \equiv \forall x \exists y \neg Q(x,y)}$$

- **Exemplo:**
  - P: $\exists$ uma pessoa x tal que $\forall$ pessoas y, x ama y.

Negação de proposições com quantificadores aninhados

- Regra geral 2:

$$\boxed{\neg\exists x \forall y Q(x,y) \equiv \forall x \exists y \neg Q(x,y)}$$

- **Exemplo:**
  - P: $\exists$ uma pessoa x tal que $\forall$ pessoas y, x ama y.
  - $\neg P$: $\forall$ pessoas x, $\exists$ uma pessoa y tal que x não ama y.

- Sumário: Análogo a "De Morgan"

Quantificador	Negação
$\forall$	$\exists$
$\exists$	$\forall$

Negação de proposições com quantificadores aninhados

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo: Expresse a negação da sentença $\forall x \exists y(xy = 1)$ de tal forma que a negação não preceda algum quantificador.

Negação de proposições com quantificadores aninhados

Exemplo: Expresse a negação da sentença $\forall x \exists y (xy = 1)$ de tal forma que a negação não preceda algum quantificador.

- $\neg \forall x \exists y (xy = 1)$

Negação de proposições com quantificadores aninhados

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo: Expresse a negação da sentença $\forall x \exists y (xy = 1)$ de tal forma que a negação não preceda algum quantificador.

- $\neg \forall x \exists y (xy = 1)$
  - $\exists x \neg \exists y (xy = 1)$ **(Lei de De Morgan para quantificadores)**

Negação de proposições com quantificadores aninhados

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo: Expresse a negação da sentença $\forall x \exists y (xy = 1)$ de tal forma que a negação não preceda algum quantificador.

- $\neg \forall x \exists y (xy = 1)$
  - $\exists x \neg \exists y (xy = 1)$ **(Lei de De Morgan para quantificadores)**
  - $\exists x \forall y \neg (xy = 1)$ **(Lei de De Morgan para quantificadores)**

Negação de proposições com quantificadores aninhados

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo: Expresse a negação da sentença $\forall x \exists y(xy = 1)$ de tal forma que a negação não preceda algum quantificador.

- $\neg\forall x \exists y(xy = 1)$
  - $\exists x \neg \exists y(xy = 1)$ **(Lei de De Morgan para quantificadores)**
  - $\exists x \forall y \neg(xy = 1)$ **(Lei de De Morgan para quantificadores)**
  - $\exists x \forall y(xy \neq 1)$ **(Negação da igualdade)**

FIM