QXD0116 - Álgebra Linear

Base de um Espaço Vetorial III

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

André Ribeiro Braga

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^n$

Seja $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ e sejam $\mathbb{B}_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ e $\mathbb{B}_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ bases de $\mathbb{V}$ e um vetor qualquer $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$. Então podemos escrever

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} v'_j \cdot \mathbf{u}_j .$$

Como $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ são elementos de $\mathbb{V}$, podem ser expressos em relação à base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathbf{e}_i \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \ ,$$

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^n$

então

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} v'_j \cdot \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{n} v'_j \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathbf{e}_i}_{\mathbf{u}_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot v'_j}_{v_i} \cdot \mathbf{e}_i$$

Pode-se escrever cada coordenada v_i do vetor $\mathbf{v}$ como

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot v'_j$$

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^n$

Forma matricial

$$
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{v}_{\mathbb{B}_1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_{\mathbb{B}_2} \Leftrightarrow \mathbf{v}_{\mathbb{B}_2} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{v}_{\mathbb{B}_1}
$$

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^n$

Exemplo

Considere o vetor $\mathbf{v} = [2 \ -1 \ 3]^T$ na base canônica de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base

$$\mathbb{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Solução

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{21} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{31} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 0 \\ a_{31} = 0 \end{array}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^n$

Exemplo

Considere o vetor $\mathbf{v} = [2 \ -1 \ 3]^T$ na base canônica de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base

$$\mathbb{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Solução

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{12} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{22} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{32} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_{12} &= 2 \\ a_{22} &= 2 \\ a_{32} &= 0 \end{aligned}$$

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^n$

Exemplo

Considere o vetor $\mathbf{v} = [2 \ -1 \ 3]^T$ na base canônica de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base

$$\mathbb{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Solução

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = a_{13} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{23} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{33} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{13} = 3 \\ a_{23} = 3 \\ a_{33} = 3 \end{matrix}$$

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^n$

Exemplo

Considere o vetor $\mathbf{v} = [2\ \ -1\ 3]^T$ na base canônica de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base

$$\mathbb{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Solução

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1' + 2v_2' + 3v_3' = 2 \\ 2v_2' + 3v_3' = -1 \\ 3v_3' = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} v_1' = 3 \\ v_2' = -2 \\ v_3' = 1 \end{array}$$

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^n$

Exemplo

Considere o vetor $\mathbf{v} = [1\ 0\ 2]^T$ na base $\mathbb{B}_1$. Determine as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\mathbb{B}_2$.

$$\mathbb{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} ; \ \mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Solução

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{21} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{31} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{11} = ? \\ a_{21} = ? \\ a_{31} = ? \end{array}$$

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^n$

Exemplo

Considere o vetor $\mathbf{v} = [1\ 0\ 2]^{\mathsf{T}}$ na base $\mathbb{B}_1$. Determine as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\mathbb{B}_2$.

$$\mathbb{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} ;\ \mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Solução

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a_{12} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{22} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{32} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{12} = ? \\ a_{22} = ? \\ a_{32} = ? \end{matrix}$$

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^n$

Exemplo

Considere o vetor $\mathbf{v} = [1\ 0\ 2]^\mathsf{T}$ na base $\mathbb{B}_1$. Determine as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\mathbb{B}_2$.

$$\mathbb{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} ;\ \mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Solução

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = a_{13} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{23} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{33} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{13} = ? \\ a_{23} = ? \\ a_{33} = ? \end{array}$$

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^n$

Exemplo

Considere o vetor $\mathbf{v} = [1\ 0\ 2]^{\mathsf{T}}$ na base $\mathbb{B}_1$. Determine as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\mathbb{B}_2$.

$$\mathbb{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \ ; \ \mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Solução

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathbb{B}_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{bmatrix}_{\mathbb{B}_2} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} v_1' + a_{12} v_2' + a_{13} v_3' = 1 \\ a_{21} v_2' + a_{22} v_2' + a_{23} v_3' = 0 \\ a_{31} v_2' + a_{32} v_2' + a_{33} v_3' = 2 \end{cases}$$