QXD0116 - Álgebra Linear

Matrizes - Inversa e Determinante

André Ribeiro Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Menores principais

Definição

Dada a matriz quadrada $\mathbf{A}$ de ordem n, os menores principais de $\mathbf{A}$, denominados $\mathbf{A}_k$, de ordem $k = 1, 2, \ldots, n$ são definidos pelas submatrizes de $\mathbf{A}$ obtidas extraidas as k primeiras linhas e colunas de $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{2k} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Dada uma matriz de ordem 3 ($n = 3$):

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Traço

Definição

Dada a matriz quadrada **A** de ordem n, chama-se traço de **A** a soma dos elementos da diagonal principal.

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Matriz estritamente diagonalmente dominante

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} n = 3 \Rightarrow &|a_{12}| + |a_{13}| < |a_{11}| \\ &|a_{21}| + |a_{23}| < |a_{22}| \\ &|a_{31}| + |a_{32}| < |a_{33}| \end{aligned}$$

Matriz transposta

Definição

Se $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times m$, chama-se a matriz transposta de $\mathbf{A}$ a matriz $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ $m \times n$ onde $a_{ij} = b_{ji}$.

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades

- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \mathbf{B}^{\mathsf{T}}$
- $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$
- $(\alpha \cdot \mathbf{A})^{\mathsf{T}} = \alpha \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$

Matriz inversa

Definição

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem n, dizemos que $\mathbf{A}$ é invertível se existe uma (única) matriz $\mathbf{B}$ de ordem n, tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n.

Teorema

Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são invertíveis, então $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{I}$ e $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

Prova

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A} \cdot \overbrace{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}}^{=\mathbf{I}} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}}_{=\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Matriz inversa

Teorema

Se $\mathbf{A}$ e é invertível, então $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ é invertível.

Prova

Seja $\mathbf{X} = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1}$, portanto $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}$

Calculando-se a transposta em ambos os lados

$$(\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{X})^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}^{\mathsf{T}}$$

$$\mathbf{X}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{X}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{-1}$$

Calculando-se novamente a transposta em ambos os lados

$$(\mathbf{X}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}}$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}}$$

Logo $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}}$

Matriz inversa

Propriedades

Definição

- $\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \ldots \mathbf{A}}_{k \text{ vezes}}$
- $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$

Teorema

Se $\mathbf{A}$ é invertível:

- $\mathbf{A}^{-1}$ é invertível e $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}^k$ é invertível e $(\mathbf{A}^k)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^k$
- Se $\alpha \neq 0$, $\alpha \cdot \mathbf{A}$ é invertível e $(\alpha \cdot \mathbf{A})^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

Determinante

Definição

É uma função definida no conjunto de todas as matrizes de ordem n, assumindo valores reais

- Se $n = 1$:

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = a_{11}$$

- Se $n = 2$:

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- Se $n = 3$:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ & - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}\end{aligned}$$

Determinante

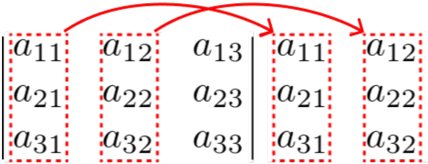
Aplicações

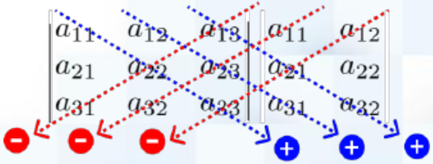
- verificar se três pontos estão alinhados no plano cartesiano
- calcular áreas de triângulos
- resolver sistemas lineares
- caracterizar matrizes invertíveis
- saber se um sistema admite ou não solução
- obter fórmulas para o volume de certos sólidos poliédricos
- definir a equação da reta que passa por dois pontos distintos

Determinante

Regra de Sarrus

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$





Determinante

Regra de Sarrus

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & \color{red}{1} & \color{red}{2} \\ 2 & -2 & 2 & \color{red}{2} & \color{red}{-2} \\ -2 & 2 & 3 & \color{red}{-2} & \color{red}{2} \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 1 \cdot (-2) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) \\ &+ 3 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) \cdot (-2) \\ &- 1 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = -30 \end{aligned}$$

Determinante

Cofator

Quando **A** é uma matriz de ordem $n \geq 3$, o cálculo do determinante requer o cálculo do cofator.

Definição

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, definimos o cofator do elemento a_{ij} como sendo o número real

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{M}_{ij}),$$

onde $\mathbf{M}_{ij}$ é a matriz que obtemos quando eliminamos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de **A**.

Determinante

Desenvolvimento de Laplace

Teorema

O determinante de uma matriz **A** de ordem n é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha pelos seus respectivos cofatores. Fixando-se a i-ésima linha:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \cdots + a_{in}\cdot A_{in}\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}\end{aligned}$$

Determinante

Desenvolvimento de Laplace

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Elementos da primeira linha:

$$a_{11} = 1 \; ; \; a_{12} = 2 \; ; \; a_{13} = 3$$

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{M}_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{13} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{11} = (-1)^{1+1} \det(\mathbf{M}_{11}) = -10$$

$$\mathbf{A}_{12} = (-1)^{1+2} \det(\mathbf{M}_{12}) = -10$$

$$\mathbf{A}_{13} = (-1)^{1+3} \det(\mathbf{M}_{13}) = 0$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot \mathbf{A}_{11} + a_{12} \cdot \mathbf{A}_{12} + a_{13} \cdot \mathbf{A}_{13}$$

$$= 1 \cdot (-10) + 2 \cdot (-10) + 3 \cdot 0 = -30$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Determinante

Singularidade e positiva definida

Definição

Seja **A** uma matriz de ordem n, dizemos que **A** é não singular se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ e singular se $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Definição

Uma matriz real simétrica **A** de ordem n é positiva definida se, para todos os menores principais $\mathbf{A}_k$, $\det(\mathbf{A}_k) > 0$; $k = 1, 2, \ldots, n$.

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} ; \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} ; \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Definição

Uma matriz $\mathbf{B}$ é similar (ou semelhante) a uma matriz $\mathbf{A}$ se existe uma matriz $\mathbf{C}$ não-singular tal que

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

Dizemos também que $\mathbf{B}$ foi obtida de $\mathbf{A}$ por transformação de semelhança (ou similaridade).

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \;;\; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \;;\; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;;\; \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinante

Propriedades

- Se $\mathbf{A}$ tem uma linha ou coluna de zeros $\Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$.
- Permutando-se duas linhas ou colunas de $\mathbf{A}$, obtemos $\mathbf{B}$ e $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.
- Se $\mathbf{A}$ tem duas linhas ou colunas iguais $\Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$.
- Multiplicando-se uma linha ou coluna de $\mathbf{A}$ por um constante escalar $\alpha \neq 0$, obtemos $\mathbf{B}$ e $\det(\mathbf{B}) = \alpha \cdot \det(\mathbf{A})$.
- Se $\mathbf{A}$ tem duas linhas ou colunas proporcionais, $\det(\mathbf{A}) = 0$.
- Se $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular $\Rightarrow \det(\mathbf{A})$ é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Determinante

Propriedades

- Se $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{B} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$.
- Somando-se aos elementos de uma linha (ou coluna) de $\mathbf{A}$ os elementos de outra linha (ou coluna) de $\mathbf{A}$ previamente multiplicados por uma constante $\alpha \neq 0$, obtemos $\mathbf{B} \Rightarrow \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.
- $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$.
- Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes ordem $n \Rightarrow \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$.
- Se $\mathbf{A}$ é não-singular $\Rightarrow \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$.
- Matrizes similares possuem o mesmo determinante.

Matriz Inversa

Cálculo

Definição

Dada uma matriz quadrada $\mathbf{A}$, denominamos a matriz adjunta de $\mathbf{A}$, representada como $adj(\mathbf{A})$, a transposta da matriz dos cofatores de $\mathbf{A}$ $\Rightarrow adj(\mathbf{A}) = \bar{\mathbf{A}}^T$

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \; ; \; \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix} \; ; \; adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

Cálculo

Teorema

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A} \cdot adj(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}$$

Prova

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \;;\; adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

Cálculo

Teorema

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A} \cdot adj(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}$$

Prova

$$c_{11} = a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot \Delta_{12} + a_{13} \cdot \Delta_{13} = \det(\mathbf{A})$$
$$c_{22} = a_{21} \cdot \Delta_{21} + a_{22} \cdot \Delta_{22} + a_{23} \cdot \Delta_{23} = \det(\mathbf{A})$$
$$c_{33} = a_{31} \cdot \Delta_{31} + a_{32} \cdot \Delta_{32} + a_{33} \cdot \Delta_{33} = \det(\mathbf{A})$$

$$c_{21} = a_{11} \cdot \Delta_{21} + a_{12} \cdot \Delta_{22} + a_{13} \cdot \Delta_{23} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 0$$

$$c_{ii} = \det(\mathbf{A})$$
$$c_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j$$

Matriz Inversa

Cálculo

Supondo que uma matriz $\mathbf{A}$ seja invertível, portanto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Calculando-se o determinante em ambos os lados

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{I})$$

$$\det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1$$

Portanto, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ e $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$

Sabendo que $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}^T = \det(\mathbf{A})\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \underbrace{\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\bar{\mathbf{A}}^T}_{\mathbf{A}^{-1}} = \mathbf{I}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \bar{\mathbf{A}}^T = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot adj(\mathbf{A})$$

Matriz Inversa

Cálculo

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{A}) = -9 \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det(-3) = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det(3) = -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det(3) = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det(1) = 1$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot adj(\mathbf{A}) = \frac{1}{-9} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/9 & -1/9 \end{bmatrix}$$