QXD0116 - Álgebra Linear

Transformações Lineares

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

André Ribeiro Braga

Transformações Lineares
Definição

Sejam $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ espaços vetoriais. Uma transformação linear é uma função de $\mathbb{U}$ em $\mathbb{V}$

$$T : \mathbb{U} \to \mathbb{V},$$

que satisfaz as seguintes condições

(i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{U}$

(ii) $T(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot T(\mathbf{u})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{U}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Transformações Lineares

Exemplo

Verificar se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^\mathsf{T} \to T(\mathbf{u}) = 3 \cdot u_1 - 3 \cdot u_2 + 4 \cdot u_3$$

é uma transformação linear.

Solução

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= 3 \cdot (u_1 + v_1) - 3 \cdot (u_2 + v_2) + 4 \cdot (u_3 + v_3) \\ &= 3 \cdot u_1 - 3 \cdot u_2 + 4 \cdot u_3 + 3 \cdot v_1 - 3 \cdot v_2 + 4 v_3 = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Transformações Lineares

Exemplo

Verificar se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^{\mathsf{T}} \to T(\mathbf{u}) = 3 \cdot u_1 - 3 \cdot u_2 + 4 \cdot u_3$$

é uma transformação linear.

Solução

$$\begin{aligned} T(\alpha \cdot \mathbf{u}) = T\left(\alpha \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} \alpha \cdot u_1 \\ \alpha \cdot u_2 \\ \alpha \cdot u_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= 3 \cdot (\alpha \cdot u_1) - 3 \cdot (\alpha \cdot u_2) + 4 \cdot (\alpha \cdot u_3) \\ &= \alpha \cdot (3 \cdot u_1 - 3 \cdot u_2 + 4 \cdot u_3) = \alpha \cdot T(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Transformações Lineares

Exemplo

Verificar se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{u} = [u_1 \;\; u_2]^{\mathsf{T}} \to T(\mathbf{u}) = [2 \cdot u_1 - u_2 \;\; u_1 + u_2 \;\; u_1 - 2 \cdot u_2]^{\mathsf{T}}$$

é uma transformação linear.

Solução

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \\ (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \\ (u_1 + v_1) - 2 \cdot (u_2 + v_2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \cdot u_1 - u_2 \\ u_1 + u_2 \\ u_1 - 2 \cdot u_2 \end{bmatrix}}_{T(\mathbf{u})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \cdot v_1 - v_2 \\ v_1 + v_2 \\ v_1 - 2 \cdot v_2 \end{bmatrix}}_{T(\mathbf{v})}$$

Transformações Lineares

Exemplo

Verificar se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{u} = [u_1 \;\; u_2]^\mathsf{T} \rightarrow T(\mathbf{u}) = [2 \cdot u_1 - u_2 \;\;\; u_1 + u_2 \;\;\; u_1 - 2 \cdot u_2]^\mathsf{T}$$

é uma transformação linear.

Solução

$$\begin{aligned} T(\alpha \cdot \mathbf{u}) &= T\left(\alpha \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha \cdot u_1 \\ \alpha \cdot u_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot (\alpha \cdot u_1) - \alpha \cdot u_2 \\ \alpha \cdot u_1 + \alpha \cdot u_2 \\ \alpha \cdot u_1 - 2 \cdot \alpha \cdot u_2 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \cdot u_1 - u_2 \\ u_1 + u_2 \\ u_1 - 2 \cdot u_2 \end{bmatrix}}_{T(\mathbf{u})} \end{aligned}$$

Transformações Lineares

Exemplo

Verificar se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{u} = [u_1 \;\; u_2 \;\; u_3]^\mathsf{T} \to T(\mathbf{u}) = [u_1 - u_2 + u_3 \quad u_2 + 1]^\mathsf{T}$$

é uma transformação linear.

Solução

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} (u_1+v_1)-(u_2+v_2)+(u_3+v_3) \\ (u_2+v_2)+1 \end{bmatrix} \neq T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

Transformações Lineares

Exemplo

Verificar se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{u} = [u_1 \;\; u_2 \;\; u_3]^\mathsf{T} \to T(\mathbf{u}) = [u_1 - u_2 + u_3 \;\;\; u_2 + 1]^\mathsf{T}$$

é uma transformação linear.

Solução

$$T(\alpha \cdot \mathbf{u}) = T\left(\alpha \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha \cdot u_1 \\ \alpha \cdot u_2 \\ \alpha \cdot u_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha \cdot u_1 - \alpha \cdot u_2 + \alpha \cdot u_3 \\ \alpha \cdot u_2 + 1 \end{bmatrix} \neq \alpha \cdot T(\mathbf{u})$$