

# Lógica para Computação

Profa. Dra. Viviane Menezes

Universidade Federal do Ceará

*vivianemenezes@ufc.br*

14 de março de 2024

Na aula passada

# Na aula passada...

- ▶ Sistemas Dedutivos: Dedução Natural
  - ▶ Regras para a conjunção
  - ▶ Regras para o condicional

# Dedução Natural

## Regras para a conjunção

- *e-introdução* ( $\wedge i$ ).

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\varphi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\psi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p.	$\varphi \wedge \psi$	$\wedge i$ m,n

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\psi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\varphi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p.	$\varphi \wedge \psi$	$\wedge i$ m,n

# Dedução Natural

## Regras para a conjunção

### ► *e-eliminação* ( $\wedge e$ ).

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\varphi \wedge \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p.	$\varphi$	$\wedge e$ m

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\varphi \wedge \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p.	$\psi$	$\wedge e$ m

# Dedução Natural

## Regras para o condicional

- *condicional eliminação* ( $\rightarrow e$ ).

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\varphi \rightarrow \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\varphi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p.	$\psi$	$\rightarrow e$ m,n

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\varphi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\varphi \rightarrow \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p.	$\psi$	$\rightarrow e$ m,n

# Dedução Natural

## Regras para o condicional

- *condicional eliminação* ( $\rightarrow e$ ).

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\varphi \rightarrow \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\varphi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p.	$\psi$	$\rightarrow e$ m,n

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\varphi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\varphi \rightarrow \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p.	$\psi$	$\rightarrow e$ m,n

método (*modus*) que afirma o conseqüente (*ponens*).

# Dedução Natural

## Regras para o condicional

### ► condicional introdução ( $\rightarrow$ i)

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\varphi$	hipótese
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\psi$	
n+1.	$\varphi \rightarrow \psi$	$\rightarrow$ i m-n



# Dedução Natural

## Regras para o condicional

- condicional introdução ( $\rightarrow i$ )

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\varphi$	hipótese
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\psi$	
n+1.	$\varphi \rightarrow \psi$	$\rightarrow i$ m-n

*Raciocínio hipotético: A caixa serve para delimitar o **escopo da hipótese temporária**.*

# Dedução Natural

## Regras para o condicional

- ▶ condicional introdução ( $\rightarrow$  i)

- ▶ **Exemplo.**

Prove que:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \wedge Q) \rightarrow R$$

# Exercícios

# Exercício 1

Prove que:

$$P \rightarrow Q \vdash (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)$$

## Exercício 2

Prove que:

$$P \wedge Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

## Regras para a Disjunção

# Regras para a Disjunção

## *ou-introdução*

- ▶ Lógica é o máximo.
- ▶ Lógica é o máximo *ou* ...

# Dedução Natural

## Regras para a Disjunção

### ► *ou-introdução* ( $\vee i$ )

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\varphi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p.	$\varphi \vee \psi$	$\vee i$ m

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\psi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p.	$\varphi \vee \psi$	$\vee i$ m



# Regras para a Disjunção

*ou-eliminação*

►  $\phi \vee \psi$

# Regras para a Disjunção

## *ou-eliminação*

- ▶  $\phi \vee \psi$
- ▶ Suponha que  $\phi$  é verdade, ...

# Regras para a Disjunção

## *ou-eliminação*

- ▶  $\phi \vee \psi$
- ▶ Suponha que  $\phi$  é verdade, ...
- ▶ Suponha que  $\psi$  é verdade, ...

# Dedução Natural

## Regras para a Disjunção

### ► *ou-eliminação* ( $\vee e$ )

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\varphi \vee \psi$	
m+1.	$\varphi$	hipótese
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\chi$	
n+1.	$\psi$	hipótese
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p.	$\chi$	
p+1.	$\chi$	$\vee e$ m, (m+1)-n, (n+1)-p

# Dedução Natural

## Regras para a Disjunção

### ► *ou-eliminação* ( $\vee e$ )

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\varphi \vee \psi$	
m+1.	$\varphi$	hipótese
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\chi$	
n+1.	$\psi$	hipótese
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p.	$\chi$	
p+1.	$\chi$	$\vee e$ m, (m+1)-n, (n+1)-p

Se  $\varphi$  ou  $\psi$  é verdade (não importa se nossa hipótese é  $\varphi$  ou  $\psi$ ), podemos obter uma demonstração de  $\chi$ .

# Regras para a Disjunção

## Exemplo

Prove que:

$$P \vee Q \vdash Q \vee P$$

# Exercícios

# Exercícios

1. Prove que:

$$Q \rightarrow R \vdash (P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)$$

2. Prove que:

$$(P \vee Q) \vee R \vdash P \vee (Q \vee R)$$

3. Prove que:

$$P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

4. Prove que:

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$$