Sequências

Matemática Discreta

Prof. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

6 de agosto de 2020

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prévia

Requisitos

- Conceitos de Funções
  - domínio, contradomínio, imagem, composição e inversão
- Propriedades de operações aritméticas

Esta apresentação...

- discute o conceito de sequência e alguns tipos especiais
- inclui sequências comumente utilizadas para composição
- inclui exemplos com relações de recorrência

Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequências

Intuitivamente, sequências são **listas ordenadas de objetos**

- Importantíssimas em matemática discreta, estruturas de dados e na especificação de diversos algoritmos
- Nosso objetivo é verificar maneiras de especificar sequências e encontrar seus termos

IMPORTANTE:
Sequências são FUNÇÕES!
A ordem dos elementos importa!

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência - Definição

Definição (Sequência)

*Uma **sequência** é uma **função** de um subconjunto dos inteiros para um conjunto qualquer.*

Dada uma sequência...

- Seu **domínio** é um subconjunto dos inteiros
  - Comumentente usa-se $I = \{0, 1, 2, ...\}$ ou $I = \{1, 2, 3, ...\}$
  - O domínio de uma sequência também é chamado de **índice**
- Seu **contradomínio** pode ser **qualquer** conjunto

Sequência - Definição

Definição (Sequência)

*Uma **sequência** é uma **função** de um subconjunto dos inteiros para um conjunto qualquer.*

Dada uma sequência...

- Seu **domínio** é um subconjunto dos inteiros
  - Comumentente usa-se $I = \{0, 1, 2, ...\}$ ou $I = \{1, 2, 3, ...\}$
  - O domínio de uma sequência também é chamado de **índice**
- Seu **contradomínio** pode ser **qualquer** conjunto

Constatação: Todo $f : I \to S$ tal que $I \subseteq \mathbb{Z}$ é uma sequência.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência - Definição/Exemplo

Definição (Sequência)

*Uma **sequência** é uma **função** de um subconjunto dos inteiros para um conjunto qualquer.*

Exemplo

A função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais

Neste caso, temos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, com $f(n) = 2^n$.

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8, f(4) = 16,$$
$$f(5) = 32, f(6) = 64, f(7) = 128, f(8) = 256, \ldots$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência - Definição/Exemplo

Exemplo

A função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais

Neste caso, temos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, com $f(n) = 2^n$.

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8, f(4) = 16,$$
$$f(5) = 32, f(6) = 64, f(7) = 128, f(8) = 256, \ldots$$

Em algumas situações, falaremos simpleste da sequência

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência - Notação/Exemplo

Definição (Sequência)

*Uma **sequência** é uma **função** de um subconjunto dos inteiros para um conjunto qualquer.*

Exemplo

A função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais

Notação (Opções)

- *"$f(n) = 2^n$ com domínio ..."*
- *"a sequência $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots$"*
- *"$\{f_n\} = 2^n$"*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência - Notação/Exemplo

Definição (Sequência)

Uma ***sequência*** *é uma* ***função*** *de um subconjunto dos inteiros para um conjunto qualquer.*

Exemplo

A função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais

Notação (Opções)

- *"$f(n) = 2^n$ com domínio ..."*
- *"a sequência $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots$"*
- *"$\{f_n\} = 2^n$" (assume domínio em $\mathbb{N}$)*

! *usar variável de "índice" (ocorre em* ***Laços*** *e* ***Somatórios****)*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência - Notação/Exemplo

Definição (Sequência)

*Uma **sequência** é uma **função** de um subconjunto dos inteiros para um conjunto qualquer.*

Notação

"A sequência $\{a_n\}$, onde $a_n = 2^n$"

- *refere-se ao conjunto de imagens dos valores assumidos por n*
- *assume domínio nos naturais*
- *pode ser reescrita como "$a(n) = 2^n$ com domínio nos naturais"*
- *notação mais concisa para sequências com índice nos naturais*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência - Discussão

Definição (Sequência)

Uma ***sequência*** *é uma* ***função*** *de um subconjunto dos inteiros para um conjunto qualquer.*

Discussão

```
fat = 1;
for(i = 1; i <= n; i++)
{
    fat = fat*i;
    imprima("Fatorial de" i = fat);
}
```

Se executarmos com $n = 5$,

- Fatorial de 1 = 1
- Fatorial de 2 = 2
- Fatorial de 3 = 6
- Fatorial de 4 = 24
- Fatorial de 5 = 120

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência - Discussão

Definição (Sequência)

*Uma **sequência** é uma **função** de um subconjunto dos inteiros para um conjunto qualquer.*

Discussão

```
fat = 1;
for(i = 1; i <= n; i++)
{
    fat = fat*i;
    imprima("Fatorial de" i = fat);
}
```

Além disso...

- *i* assume valores inteiros
- Resultados em função de *i*
- Chamamos *i* de índice

Sequências - Exemplo (Destaque)

Exemplo

Considere a sequência $\{a_n\}$*, onde* $a_n = \frac{1}{n}$.

Quem são os termos de $\{a_n\}$***?***

- *ou seja... quem são* $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ *(*)?*

  R: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $\ldots$

Alternativamente, a sequência é $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

*** A função** $\frac{1}{n}$ **não existe para** $n = 0$
+ É nosso trabalho avaliar para quais naturais a função existe

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Definição (Progressão Aritmética)

Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência da forma

$$a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, ..., a_0 + nd, ...,$$

onde a_0 e d são números reais.

Dada uma PA...

- a_0 é o seu **termo inicial**
- d é sua **razão aritmética** ou **diferença comum**

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Definição (Progressão Aritmética)

Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência da forma

$$a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, ..., a_0 + nd, ...,$$

onde a_0 e d são números reais.

REPARE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$
- Os termos descritos na PA são $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, \ldots$

$$\begin{array}{ccccccc} a_0, & a_0 + d, & a_0 + 2d, & a_0 + 3d, & \ldots, & a_0 + nd, & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\ a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a + n, & \ldots \end{array}$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

REPARE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$
- Os termos descritos na PA são $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d \ldots$

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_0 + \mathbf{0}d, & a_0 + \mathbf{1}d, & a_0 + \mathbf{2}d, & a_0 + \mathbf{3}d, & \ldots, & a_0 + \mathbf{n}d, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\
a_{\mathbf{0}}, & a_{\mathbf{1}}, & a_{\mathbf{2}}, & a_{\mathbf{3}}, & \ldots, & a_{\mathbf{n}}, & \ldots
\end{array}
$$

Constatação:

Cada PA é caracterizada por uma função da forma $f(x) = a_0 + dx$, onde a_0 e d são números reais, mas com domínio restrito a um subconjunto dos inteiros.

Dizemos ainda que a PA $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, \ldots, a_0 + nd, \ldots$ é a ***análoga discreta*** *de $f(x) = a_0 + dx$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Exemplo

A sequência $\{s_n\}$ *com* $s_n = -1 + 4n$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?*
- *Qual a razão aritmética da PA?*
- *Quem são os primeiros cinco termos?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Exemplo

A sequência $\{s_n\}$ *com* $s_n = -1 + 4n$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $s_0 = -1 + 4.0 = -1$
- *Qual a razão aritmética da PA?* $d = 4$
- *Quem são os primeiros cinco termos?* $-1, 3, 7, 11, 15, ...$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Exemplo

A sequência $\{s_n\}$ *com* $s_n = -1 + 4n$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $s_0 = -1 + 4.0 = -1$
- *Qual a razão aritmética da PA?* $d = 4$
- *Quem são os primeiros cinco termos?* $-1, 3, 7, 11, 15, ...$

Obs.: *Dizemos que esta sequência é **infinita** e **crescente**.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Exemplo

A sequência $\{t_n\}$ *com* $t_n = -3n + 7$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?*
- *Qual a razão aritmética da PA?*
- *Quem são os primeiros cinco termos?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Exemplo

A sequência $\{t_n\}$ *com* $t_n = -3n + 7$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $t_0 = -3.0 + 7 = 7$
- *Qual a razão aritmética da PA?* $d = -3$
- *Quem são os primeiros cinco termos?* $7, 4, 1, -2, -5...$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Aritméticas

Exemplo

A sequência $\{t_n\}$ *com* $t_n = -3n + 7$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $t_0 = -3.0 + 7 = 7$
- *Qual a razão aritmética da PA?* $d = -3$
- *Quem são os primeiros cinco termos?* $7, 4, 1, -2, -5...$

Obs.: *Dizemos que esta sequência é* ***infinita*** *e* ***decrescente****.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométricas

Definição (Progressão Geométrica)

Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência da forma

$$a_0, a_0 r, a_0 r^2, a_0 r^3, ..., a_0 r^n, ...,$$

onde a_0 e r são números reais.

Dada uma PG...

- a_0 é o seu **termo inicial**
- r é sua **razão geomética** ou **razão comum**

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométricas

Definição (Progressão Geométrica)

Uma progressão aritmética (PG) é uma sequência da forma

$$a_0, a_0r, a_0r^2, a_0r^3, ..., a_0r^n, ...,$$

onde a_0 e r são números reais.

REPARE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$
- Os termos descritos na PG são $a_0, a_0r, a_0r^2, a_0r^3, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc} a_0, & a_0r, & a_0r^2, & a_0r^3, & \dots, & a_0r^n, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_n, & \dots \end{array}$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométricas

REPARE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$
- Os termos descritos na PG são $a_0, a_0 r, a_0 r^2, a_0 r^3, \ldots$

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 r^{\mathbf{0}}, & a_0 r^{\mathbf{1}}, & a_0 r^{\mathbf{2}}, & a_0 r^{\mathbf{3}}, & \ldots, & a_0 r^{\mathbf{n}}, & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\ a_{\mathbf{0}}, & a_{\mathbf{1}}, & a_{\mathbf{2}}, & a_{\mathbf{3}}, & \ldots, & a_{\mathbf{n}}, & \ldots \end{array}$$

Constatação:

Cada PG é caracterizada por uma função da forma $f(x) = a_0 r^x$, onde a_0 e r são números reais, mas com domínio restrito a um subconjunto dos inteiros.

*Dizemos ainda que a PG $a_0, a_0 r, a_0 r^2, a_0 r^3, \ldots, a_0 r^n, \ldots$ é a **análoga discreta** de $f(x) = a_0 r^x$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométricas

Exemplo

A sequência $\{c_n\}$ *com* $c_n = 2.5^n$ *é uma progressão geomética.*

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?*
- *Qual a razão geométrica da PG?*
- *Quem são os primeiros cinco termos?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométricas

Exemplo

A sequência $\{c_n\}$ *com* $c_n = 2.5^n$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $c_0 = 2.5^0 = 2.1 = 2$
- *Qual a razão geométrica da PG?* $d = 5$
- *Quem são os primeiros cinco termos?* $2, 10, 50, 250, 1250, \ldots$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométricas

Exemplo

A sequência $\{c_n\}$ com $c_n = 2.5^n$ é uma progressão aritmética.

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $c_0 = 2.5^0 = 2.1 = 2$
- *Qual a razão geométrica da PG?* $d = 5$
- *Quem são os primeiros cinco termos?* $2, 10, 50, 250, 1250, ...$

Obs.: *Dizemos que esta sequência é **infinita** e **crescente**.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométricas

Exemplo

A sequência $\{d_n\}$ com $d_n = 6.(\frac{1}{3})^n$ é uma progressão geomética.

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?*
- *Qual a razão geométrica da PG?*
- *Quem são os primeiros cinco termos?*

Progressões Geométricas

Exemplo

A sequência $\{d_n\}$ *com* $d_n = 6.(\frac{1}{3})^n$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $d_0 = 6.(\frac{1}{3})^0 = 6.1 = 6$
- *Qual a razão geométrica da PG?* $r = \frac{1}{3}$
- *Quem são os primeiros cinco termos?* $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, ...$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométricas

Exemplo

A sequência $\{d_n\}$ com $d_n = 6.(\frac{1}{3})^n$ é uma progressão aritmética.

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $d_0 = 6.(\frac{1}{3})^0 = 6.1 = 6$
- *Qual a razão geométrica da PG?* $r = \frac{1}{3}$
- *Quem são os primeiros cinco termos?* $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$

Obs.: *Dizemos que esta sequência é* ***infinita*** *e* ***decrescente****.*

Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométricas

Exemplo

A sequência $\{e_n\}$ com $e_n = (-1)^n$ é uma progressão geomética.

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?*
- *Qual a razão geométrica da PG?*
- *Quem são os primeiros cinco termos?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométricas

Exemplo

A sequência $\{e_n\}$ com $e_n = (-1)^n$ é uma progressão aritmética.

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $e_0 = (-1)^0 = 1$
- *Qual a razão geométrica da PG?* $r = -1$
- *Quem são os primeiros cinco termos?* $1, -1, 1, -1, 1, ...$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Progressões Geométricas

Exemplo

A sequência $\{e_n\}$ *com* $e_n = (-1)^n$ *é uma progressão aritmética.*

PERGUNTAS:

- *Qual o primeiro termo da lista?* $e_0 = (-1)^0 = 1$
- *Qual a razão geométrica da PG?* $r = -1$
- *Quem são os primeiros cinco termos?* $1, -1, 1, -1, 1, ...$

Obs.: *Dizemos que esta sequência é* ***infinita*** *e* ***não monótona***.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outros Tipos de Sequências

Exemplo

O que dizer da sequência $\{f_n\}$ com $f_n = n^2$?

PERGUNTAS:

- *Quem é o primeiro termo?*
- *Seria $\{f_n\}$ uma PA?*
- *Seria $\{f_n\}$ uma PG?*
- *Quem são os cinco primeiros termos?*
- *$\{f_n\}$ é crescente, decrescente ou não monótona?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outros Tipos de Sequências

Exemplo

O que dizer da sequência $\{f_n\}$ com $f_n = n^2$?

PERGUNTAS:

- *Quem é o primeiro termo?* $f_0 = 0^2 = 0$
- *Seria $\{f_n\}$ uma PA?* ***não***
- *Seria $\{f_n\}$ uma PG?* ***não***
- *Quem são os cinco primeiros termos?* $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$
- *$\{f_n\}$ é crescente, decrescente ou não monótona?* ***crescente***

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outros Tipos de Sequências

Exemplo

O que dizer da sequência $\{g_n\}$ com $g_n = 1$?

PERGUNTAS:

- *Quem é o primeiro termo?*
- *Seria $\{f_n\}$ uma PA?*
- *Seria $\{f_n\}$ uma PG?*
- *Quem são os cinco primeiros termos?*
- *$\{f_n\}$ é crescente, decrescente ou não monótona?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outros Tipos de Sequências

Exemplo

O que dizer da sequência $\{g_n\}$ com $g_n = 1$?

PERGUNTAS:

- *Quem é o primeiro termo?* $g_0 = 1$
- *Seria $\{f_n\}$ uma PA?* ***SIM!***
- *Seria $\{f_n\}$ uma PG?* ***SIM!***
- *Quem são os cinco primeiros termos?* $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
- *$\{f_n\}$ é crescente, decrescente, não monótona, ...?*

é monótona, apenas

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outros Tipos de Sequências

Exemplo

Por que $\{g_n\}$ com $g_n = 1$ é uma PA?

- ***Existem** g_0, d **reais tais que** $g(n) = g_0 + dn$**?***
  - *calculamos* $g_0 = 1$
  - *calculamos* $g_1 = 1$
  - *calculamos* $d = g_1 - g_0 = 0$
- *Concluímos com isso que* $g(n) = 1 + 0.n$*, que seria uma PA;*
- *Simplificando, temos que* $g(n) = 1$*, que é a expressão original.*

OBS.: O cálculo que fizemos acima para *d* pode ser feito em qualquer sequência, mas isso não significa que ela será uma PA. É necessário que a expressão completa que calcularmos seja equivalente à original.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outros Tipos de Sequências

Exemplo

Por que $\{g_n\}$ *com* $g_n = 1$ *é uma PG?*

- ***Existem*** g_0, r ***reais tais que*** $g(n) = g_0 r^n$***?***
  - *calculamos* $g_0 = 1$
  - *calculamos* $g_1 = 1$
  - *calculamos* $r = g_1/g_0 = 1/1 = 1$
- *Concluímos com isso que* $g(n) = 1.1^n$*, que seria uma PG;*
- *Simplificando, temos que* $g(n) = 1$*, que é a expressão original.*

OBS.: O cálculo que fizemos acima para *d* pode ser feito em qualquer sequência, mas isso não significa que ela será uma PG. É necessário que a expressão completa que calcularmos seja equivalente à original.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Considere a sequência

$$3, 5, 2, -3, -5, -2, ...$$

PERGUNTAS:

- *Qual será o próximo termo da sequência?*
- *E o termo depois deste?*
- *Qual seria sua fórmula fechada?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Considere a sequência

$$3, 5, 2, -3, -5, -2, ...$$

PERGUNTAS:

- *Qual seria o próximo termo da sequência?* $-2 - -5 = 3$
- *Qual seria o termo seguinte?* $3 - -2 = 5$
- *Qual seria sua fórmula fechada?*

Constatação:

Parece difícil definir a sequência com uma fórmula fechada.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Definição (Relação de Recorrência)

Uma ***relação de recorrência*** *para a sequência* $\{a_n\}$ *é uma equação que expressa cada* a_n *em função de um ou mais termos que o antecedem.*

Uma relação de recorrência para $\{a_n\}$...

- tem (um ou mais) casos de base e (um ou mais) casos gerais
- define a_n em termos de $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ (pelo menos um destes)
- Dizemos que uma sequência **resolve** uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Seja $\{a_n\}$ *a sequência que satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} + 3$ *para* $n = 1, 2, 3, ...,$ *e suponha que* $a_0 = 2$.

PERGUNTAS:

- *Quais são os termos* a_1, a_2, a_3*?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Seja $\{a_n\}$ *a sequência que satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} + 3$ *para* $n = 1, 2, 3, ...,$ *e suponha que* $a_0 = 2$.

PERGUNTAS:

- *Quais são os termos* a_1, a_2, a_3*?*
  - $a_1 = a_0 + 3 = 2 + 3 = 5$
  - $a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$
  - $a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Seja $\{a_n\}$ *a sequência que satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} + 3$ *para* $n = 1, 2, 3, ...,$ *e suponha que* $a_0 = 2$.

PERGUNTAS:

- *Quais são os termos* a_1, a_2, a_3*?*
  - $a_1 = a_0 + 3 = 2 + 3 = 5$
  - $a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$
  - $a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

Constatação:

Foi necessário calcular algum termo novo antes de cada a_n.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Suponha que $\{a_n\}$ *satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ *para* $n = 2, 3, 4, ...,$ *em que* $a_0 = 3$ *e* $a_1 = 5$*.*

PERGUNTAS:

- *Quais são os termos* a_2, a_3, a_4*?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Suponha que $\{a_n\}$ *satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ *para* $n = 2, 3, 4, ...,$ *em que* $a_0 = 3$ *e* $a_1 = 5$.

PERGUNTAS:

- *Quais são os termos* a_2, a_3, a_4*?*
  - $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$
  - $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$
  - $a_4 = a_3 - a_2 = -3 - 2 = -5$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Recorrência

Exemplo

Suponha que $\{a_n\}$ *satisfaz a relação de recorrência* $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ *para* $n = 2, 3, 4, ...,$ *em que* $a_0 = 3$ *e* $a_1 = 5$.

PERGUNTAS:

- *Quais são os termos* a_2, a_3, a_4*?*
  - $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$
  - $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$
  - $a_4 = a_3 - a_2 = -3 - 2 = -5$

Constatação:

É a sequência $3, 5, 2, -3, -5, -2, 3, 5, ...$ *(exemplo inicial).*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência de Fibonacci

Definição (Sequência de Fibonacci)

A ***sequência de Fibonacci*** $f_0, f_1, f_2, ...$ *é definida pela relação de recorrência com condições iniciais* $f_0 = 0$*,* $f_1 = 1$ *e caso geral* $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ *para* $n = 2, 3, 4, ...$

PERGUNTAS:

- *Quais são os números* f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 *de Fibonacci?*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequência de Fibonacci

Definição (Sequência de Fibonacci)

A ***sequência de Fibonacci*** $f_0, f_1, f_2, \ldots$ *é definida pela relação de recorrência com condições iniciais* $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ *e caso geral* $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ *para* $n = 2, 3, 4, \ldots$

PERGUNTAS:

- *Quais são os números* f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 *de Fibonacci?*
    - $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$
    - $f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$
    - $f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$
    - $f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$
    - $f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Sequências Importantes

n^o termo	primeiros 10 termos
n^2	$1, 4, 9, 16, 35, 36, 49, 64, 81, 100, ...$
n^3	$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000...$
n^4	$1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000, ...$
2^n	$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...$
3^n	$3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, ...$
$n!$	$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, ...$
f_n	$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...$

Tabela: Algumas sequências importantes.