Leitura Complementar + Lista de Execícios

SEMANA 14 - Indução Matemática

2022.1

Notas de Aula de Matemática Discreta

Prof. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

Este documento traz uma lista de exercícios referentes aos tópicos da SEMANA 14. É recomendado que você faça todos os exercícios e tire suas dúvidas antes das aulas da semana seguinte.

1 Instruções Preliminares

Obs.: "prove", "demonstre" e "mostre" são sinônimos. Nos exercícios abaixo, em cada um dos casos, você deve oferecer um demonstração (uma prova!) do que estiver sendo afirmado.

Quando a resposta envolver números, todos os cálculos para chegar a estes números devem ser apresentados. Busque fornecer respostas que deixem claro seu raciocínio, exibindo e justificando todos os passos executados. Lembre-se que a sua resposta será lida por alguém no futuro e escreva suas respostas pensando no leitor. Idealmente, as suas respostas devem permitir que qualquer colega da turma possa identificar claramente quais foram os passos que você fez e porquê.

É muito importante que você suplemente esta lista com exercícios do livro conforme sua necessidade. Se tiver facilidade com os tópicos, poucos exercícios bastarão para compreendê-los; se tiver dificuldades, o caminho será reforçar a leitura do capítulo e resolver mais exercícios.

2 Leitura do Livro

Leia atentamente a Introdução do Capítulo 4 e a Seção 4.1 do Rosen e verifique a lista de exercícios do livro por complementos a estes. Conforme a sua necessidade, revise os conteúdos sobre técnicas de técnicas de demonstração, divisibilidade, algoritmo da divisão e sequências.

3 Exercícios

Exercício 1. Considere, para todo n inteiro positivo, que "$P(n)$" é a proposição afirmando que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Considere também que desejamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo n inteiro positivo usando a técnica de *Prova por Indução*. Responda:

(a) Qual é a proposição $P(1)$?
(b) Mostre que $P(1)$ é verdadeira.
(c) Como será a *Hipótese de Indução*?
(d) O que você precisará demonstrar no Passo de Indução?
(e) Resolva o Passo de Indução, ou seja, enuncie sua hipótese e desenvolva conforme necessário visando concluir o objetivo que você definiu acima.
(f) Explique por que esses passos mostram que $P(n)$ é verdadeira para todo n inteiro positivo.

Exercício 2. Prove os teoremas abaixo usando Indução Matemática:

3.1 Divisibilidade

(a) "Para todo n inteiro positivo, $2 \mid n^2 + n$."

(b) "Para todo n inteiro positivo, $3 \mid n^3 + 2n$."

(c) "Para todo n inteiro positivo, $n^3 - n$ é divisível por 3."

(d) "Para todo n inteiro positivo, $5 \mid n^5 - n$."

(e) "Para todo n inteiro positivo, $6 \mid n^3 - n$."

3.2 Inequações

(f) "Para todo n natural, $n < 2^n$."

(g) "Para todo $n > 4$ inteiro, $2^n > n^2$."

3.3 Fórmulas Fechadas de Somas

(h) "Para todo n inteiro positivo, $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n^2 + n$"

Obs.: Uma vez que a expressão $\sum_{j=1}^{n} 2j$ refere-se de forma compacta à soma $2 + 4 + \ldots + 2n$, este enunciado também poderia ter sido escrito (de forma sinônima) como: "Para todo n inteiro positivo, $\sum_{j=1}^{n} 2j = n^2 + n$". Da mesma forma, os enunciados dos próximos itens também poderiam ser escritos usando expressões de somatório.

(i) "Para todo n inteiro positivo, $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$."

Obs.: Note que $1 = (2.1. - 1)$, $3 = (2.2 - 1)$, $\ldots$, então o lado esquerdo da equação tem exatamente n termos.

(j) "Para todo n inteiro positivo, $1.2+2.3+3.4+\ldots+n.(n+1) = \frac{n.(n+1).(n+2)}{3}$"

(k) "Para todo n inteiro positivo, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$."

3.4 Somas de PGs

Os itens abaixo têm como intenção promover passos graduais para a fórmula geral da soma dos termos de uma PG. Começaremos com somas de PGs bastante específicas e avançaremos gradualmente até o caso geral.

(l) "Para todo n natural, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{(n+1)} - 1$."

(m) "Para todo n natural, $3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^n = \frac{3^{(n+1)}-1}{2}$."

(n) "Dado um inteiro positivo r com $r \neq 1$, mostre que
para todo n natural, $r^0 + r^1 + \ldots + r^n = \frac{r^{(n+1)}-r^0}{r-1}$."

(o) "Seja $f(x) = k.r^x$ uma progressão geométrica com $r \neq 1$, mostre que para todo n natural, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} k.r^i = \frac{k.r^{(n+1)} - k}{r-1}$."

Exercício 3. Para quais valores de n nos números naturais temos que $n! \geq n^2$? Explique como você chegou à sua conclusão. Em seguida, enuncie o teorema que resultaria de sua respostas e o demonstre usando indução.

Exercício 4. Para quais valores de n nos números naturais temos que $n^2-2n-15 \geq 0$? Explique como você chegou à sua conclusão. Em seguida, enuncie o teorema que resultar da sua resposta e o demonstre usando indução.