Lógica para Computação

Profa. Dra. Viviane Menezes

vivianemenezes@ufc.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Semântica da Lógica de Predicados

Valoração de Fórmulas

- Valoração na Lógica Proposicional.

Semântica da Lógica de Predicados

Valoração de Fórmulas

- Valoração na Lógica Proposicional.
- Valoração na Lógica de Predicados depende:

Semântica da Lógica de Predicados

Valoração de Fórmulas

- Valoração na Lógica Proposicional.
- Valoração na Lógica de Predicados depende:
  - dos objetos;
  - dos símbolos funcionais e;
  - dos predicados.

Semântica da Lógica de Predicados

Valoração de Fórmulas

- Valoração da fórmula $\exists x P(x)$:
  - é V se $P(x)$ for V para algum valor de x.
  - é F se $P(x)$ for F para todo valor de x.

Exemplo

- $\exists x(Simpson(x) \wedge AdoraDuff(x))$
- $\exists x(Simpson(x) \wedge \neg PeleAmarela(x))$

Semântica da Lógica de Predicados

Valoração de Fórmulas

- Valoração da fórmula $\forall x P(x)$:
  - é V se $P(x)$ for *V* para todos os valores de x.
  - é F se $P(x)$ for *F* para algum valor de x.

Exemplo

- $\forall x(Simpson(x) \rightarrow PeleAmarela(x))$
- $\forall x(Simpson(x) \rightarrow AdoraDuff(x))$

Semântica da Lógica de Predicados

Modelos

- O que é um modelo na lógica proposicional?

Semântica da Lógica de Predicados

Modelos

Sejam $\mathcal{F}$ um conjunto de símbolos funcionais e $\mathcal{P}$ um conjunto de predicados. Um **modelo** $\mathcal{M}$ do par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ consiste em:

- Um conjunto de objetos A;
- Para cada símbolo funcional $f(t_1, \cdots, t_n) \in \mathcal{F}$, uma função $f^{\mathcal{M}} : A^n \to A$.
- Para cada predicado $P(t_1, \cdots, t_n) \in \mathcal{P}$, um subconjunto $\mathcal{P}^{\mathcal{M}} \subseteq A^n$ de n-tuplas de elementos de A.

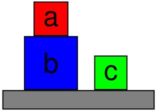
Exercício - O Domínio Familiar

Elabore um modelo $\mathcal{M}$ para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ tal que:

- o conjunto de objetos A contém valores referentes aos personagens da família Simpson;
- $\mathcal{F} = \{\}$.
- $\mathcal{P} = \{Irmaos(x, y)\}$.

Exercícios - O Domínio do Mundo dos Blocos

- Considere o modelo $\mathcal{M}$ para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ em que:
  - *A* é o conjunto de valores referentes aos objetos do *Mundo dos Blocos*;
  - $\mathcal{F} = \{cor(x)\}$ e;
  - $\mathcal{P} = \{Maior(x, y), Sobre(x, y), Bloco(x), Mesa(x)\}$.



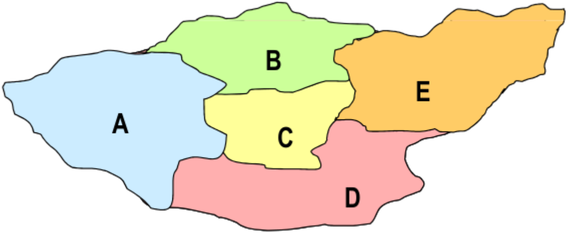
Exercícios - O Domínio da Carona

- Ana e Ray moram em Juazeiro, Bia mora em Maranguape, Edu mora no Crato, Gil mora em Caucaia e Eva mora em Pacatuba.
- Juazeiro e Crato ficam na região do Cariri e Maranguape, Caucaia e Pacatuba ficam na Região Metropolitana de Fortaleza.
- Ana e Gil têm carro.
- Uma pessoa pode dar carona a outra se ela tem carro e ambas moram em cidades que ficam na mesma região.

- Elabore um modelo $\mathcal{M}$ para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ em que:
  - A contém valores referentes às pessoas e aos lugares;
  - $\mathcal{F} = \{\}$ e;
  - $\mathcal{P} = \{Cidade(x), Pessoa(x), temCarro(x), podeDarCarona(x, y), moraEm(x, y), ficaNaRegiao(x, y)\}$.

Exercícios - O Dominio da Coloração de Mapas

Como colorir um mapa de modo que regiões adjacentes tenham cores distintas?



Exercícios - O Dominio da Coloração de Mapas

- Elabore um modelo $\mathcal{M}$ para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ em que:
  - A contém valores referentes às cores e às região do mapa;
  - $\mathcal{F}$ = {} e;
  - $\mathcal{P} = \{Região(x), Adjacente(x, y), Cor(x)\}$.

Semântica da Lógica de Predicados

Verifique se as fórmulas são verdadeiras no modelo

- $\exists y$ *Irmaos*(*homer*,*y*);
- $\neg$*Irmaos(marge,lisa)*;
- $\forall x \forall y$ *Irmaos*$(x, y) \rightarrow$ *Irmaos*(y, x);
- $\forall x \exists y$ *Irmaos*(y, x).

Semântica da Lógica de Predicados

Dado um modelo $\mathcal{M}$ para um par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, a relação $\mathcal{M} \models \varphi$ é dada como a seguir:

Semântica da Lógica de Predicados

Dado um modelo $\mathcal{M}$ para um par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, a relação $\mathcal{M} \models \varphi$ é dada como a seguir:

- 1. P: Se φ é da forma $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ substituímos os termos no conjunto A. Então, $\mathcal{M} \models P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ é verdade sss $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in P^{\mathcal{M}}$;

Semântica da Lógica de Predicados

Dado um modelo $\mathcal{M}$ para um par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, a relação $\mathcal{M} \models \varphi$ é dada como a seguir:

- 1. P: Se φ é da forma $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ substituímos os termos no conjunto A. Então, $\mathcal{M} \models P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ é verdade sss $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in P^{\mathcal{M}}$;
- 2. $\forall x \varphi$: $\mathcal{M} \models \varphi$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \varphi$ for verdade **para todo** $a \in A$

Semântica da Lógica de Predicados

Dado um modelo $\mathcal{M}$ para um par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, a relação $\mathcal{M} \models \varphi$ é dada como a seguir:

- 1. P: Se φ é da forma $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ substituímos os termos no conjunto A. Então, $\mathcal{M} \models P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ é verdade sss $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in P^{\mathcal{M}}$;
- 2. $\forall x \varphi$: $\mathcal{M} \models \varphi$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \varphi$ for verdade **para todo** $a \in A$
- 3. $\exists x \varphi$: $\mathcal{M} \models \varphi$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \varphi$ é verdade **para algum** $a \in A$

Semântica da Lógica de Predicados

Dado um modelo $\mathcal{M}$ para um par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, a relação $\mathcal{M} \models \varphi$ é dada como a seguir:

- 1. P: Se φ é da forma $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ substituímos os termos no conjunto A. Então, $\mathcal{M} \models P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ é verdade sss $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in P^{\mathcal{M}}$;
- 2. $\forall x \varphi$: $\mathcal{M} \models \varphi$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \varphi$ for verdade **para todo** $a \in A$
- 3. $\exists x \varphi$: $\mathcal{M} \models \varphi$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \varphi$ é verdade **para algum** $a \in A$

continua...

Dado um modelo $\mathcal{M}$ para um par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, a relação de satisfação $\mathcal{M} \models \varphi$ é dada como a seguir:

Dado um modelo $\mathcal{M}$ para um par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, a relação de satisfação $\mathcal{M} \models \varphi$ é dada como a seguir:

- 4. $\neg\varphi$: $\mathcal{M} \models \neg\psi$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \psi$ *não é verdade*.

Dado um modelo $\mathcal{M}$ para um par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, a relação de satisfação $\mathcal{M} \models \varphi$ é dada como a seguir:

- 4. $\neg\varphi$: $\mathcal{M} \models \neg\psi$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \psi$ *não é verdade*.
- 5. $\varphi_1 \vee \varphi_2$: $\mathcal{M} \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \varphi_1$ ou $\mathcal{M} \models \varphi_2$ é verdade.

Dado um modelo $\mathcal{M}$ para um par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, a relação de satisfação $\mathcal{M} \models \varphi$ é dada como a seguir:

- 4. $\neg\varphi$: $\mathcal{M} \models \neg\psi$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \psi$ *não é verdade*.
- 5. $\varphi_1 \vee \varphi_2$: $\mathcal{M} \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \varphi_1$ ou $\mathcal{M} \models \varphi_2$ é verdade.
- 6. $\varphi_1 \wedge \varphi_2$: $\mathcal{M} \models \psi_1 \wedge \varphi_2$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \varphi_1$ e $\mathcal{M} \models \varphi_2$ são ambas verdadeiras.

Dado um modelo $\mathcal{M}$ para um par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, a relação de satisfação $\mathcal{M} \models \varphi$ é dada como a seguir:

- 4. $\neg\varphi$: $\mathcal{M} \models \neg\psi$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \psi$ *não é verdade*.
- 5. $\varphi_1 \vee \varphi_2$: $\mathcal{M} \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \varphi_1$ ou $\mathcal{M} \models \varphi_2$ é verdade.
- 6. $\varphi_1 \wedge \varphi_2$: $\mathcal{M} \models \psi_1 \wedge \varphi_2$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \varphi_1$ e $\mathcal{M} \models \varphi_2$ são ambas verdadeiras.
- 7. $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$: $\mathcal{M} \models \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ é verdade sss $\mathcal{M} \models \varphi_2$ é verdade sempre que $\mathcal{M} \models \varphi_1$ for verdade.

Semântica da Lógica de Predicados

Exercício 1

Verifique se $\mathcal{M} \models \varphi$ em que $\mathcal{M}$ é o modelo da família *Simpsons* e φ é cada uma das fórmulas:

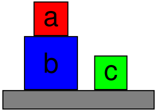
- $\exists y$ *Irmaos*(homer,y);
- $\neg$*Irmaos(marge,lisa)*;
- $\forall x \forall y\ Irmaos(x, y) \rightarrow Irmaos(y, x)$;
- $\forall x \exists y\ Irmaos(y, x)$.

Justifique utilizando a semântica da lógica de predicados.

Semântica da Lógica de Predicados

Exercício 2

- Considere o modelo $\mathcal{M}$ para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ em que:
  - A é o conjunto de valores referentes aos objetos do *Mundo dos Blocos*;
  - $\mathcal{F} = \{cor(x)\}$ e;
  - $\mathcal{P} = \{Maior(x), Sobre(x, y), Bloco(x), Mesa(x)\}$.



Semântica da Lógica de Predicados

Satisfação - Exercício 2

Verifique se $\mathcal{M} \models \varphi$ em que $\mathcal{M}$ é o modelo do domínio do *Mundo dos Blocos* e φ é cada uma das fórmulas:

- $\exists y\ Mesa(y)$;
- $\forall x\ Bloco(cor(x))$;
- $\forall x\ Maior(x,y) \rightarrow \neg Maior(y,x)$;
- $\forall x \exists y\ Sobre(y,x)$.

Justifique utilizando a semântica da lógica de predicados.

Semântica da Lógica de Predicados

Satisfação - Exercício 3

Seja φ a fórmula $\forall x \forall y \exists z (R(x, y) \rightarrow R(y, z))$, onde R é um predicado binário.

1. Seja $A = \{a, b, c, d\}$ e $R^{\mathcal{M}} = \{(b, c), (b, b), (b, a)\}$. Verifique se $\mathcal{M} \models \varphi$. Justifique sua resposta de acordo com a semântica da Lógica de Predicados.

Semântica da Lógica de Predicados

Consequência Lógica

Seja Γ uma teoria e ψ uma fórmula da lógica de predicados.

- A **consequência lógica** $\Gamma \models \psi$ ocorre **se para todos os modelos** $\mathcal{M}$ sempre que

  $$\mathcal{M} \models \phi$$

  para toda fórmula $\phi \in \Gamma$, então

  $$\mathcal{M} \models \psi.$$

Semântica da Lógica de Predicados

Satisfazibilidade

Seja ψ uma fórmula na lógica de predicados.

- ψ pode ser **satisfeita** sss existe algum modelo $\mathcal{M}$ tal que:

$$\mathcal{M} \models \psi$$

  é verdade.

Semântica da Lógica de Predicados

Validade

Seja ψ uma fórmula da lógica de predicados.

- ψ é **válida** sss

$$\mathcal{M} \models \psi$$

  é verdade para **todos os modelos** $\mathcal{M}$.

Semântica da Lógica de Predicados

Limitações Computacionais

Semântica da Lógica de Predicados

Limitações Computacionais

- $\mathcal{M} \models \phi$: impossível de executar em um conputador quando A for infinito.

Semântica da Lógica de Predicados

Limitações Computacionais

- $\mathcal{M} \models \phi$: impossível de executar em um conputador quando A for infinito.
- $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n \models \psi$: verificar a consequência lógica *para todos os modelos possíveis*.

Indecidibilidade

Problema de Decisão - Validade em lógica de predicados

Dada uma fórmula φ da lógica de predicados, $\models \varphi$ é verdade, *sim* ou *não*?

Indecidibilidade

Problema de Decisão - Validade em lógica de predicados

Dada uma fórmula φ da lógica de predicados, $\models \varphi$ é verdade, *sim* ou *não*?

- Este é um problema INDECIDÍVEL.

Indecidibilidade

Problema de Decisão - Validade em lógica de predicados

Dada uma fórmula φ da lógica de predicados, $\models \varphi$ é verdade, *sim* ou *não*?

- Este é um problema INDECIDÍVEL.
- Não existe **nenhum algoritmo** que **receba** uma fórmula φ da lógica de predicados como entrada e **decida** se $\models \varphi$.

“They’re still findin’ out what logics can do.”

A logic named Joe, Murray Leinster, 1946