QXD0116 - Álgebra Linear

Geração de Subespaço Vetorial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

André Ribeiro Braga

Combinação Linear

Exemplo

Seja $\mathbb{V} = \mathcal{K}_2(x)$, o conjunto dos polinômimos de grau menor ou igual a 2, verificar se o polinômio $Q_2(x) = x + 4x + 7$ se escreve como uma combinação linear de $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x + 2$ e $P_2(x) = x^2 + 2x + 1$.

Solução

$$Q(x) = \alpha_0 \cdot P_0(x) + \alpha_1 \cdot P_1(x) + \alpha_2 \cdot P_2(x)$$

$$x^2 + 4x + 7 = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_2 \cdot 2x + \alpha_2$$

$$x^2 + 4x + 7 = \alpha_2 \cdot x^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) \cdot x + (\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 4 \\ \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 7 \end{cases}$$

Combinação Linear

Exemplo

Seja $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, considere os vetores $\mathbf{v}_1 = [1\ -2\ 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [3\ 2\ 2]^T$. Verificar o vetor $\mathbf{v} = [3\ 6\ 4]^T$ pode ser descrito como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

Solução

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ -2\alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 3 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 6 \\ 2\alpha_2 = 4 \end{cases}$$

Subespaço Vetorial

Definição

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e $\mathbb{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ um subconjunto de $\mathbb{V}$. Denota-se $[\mathbb{S}]$ ou $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n]$ o subconjunto de $\mathbb{V}$ formado por todas as combinações lineares dos elementos de $\mathbb{S}$, isto é:

$$[\mathbb{S}] = \{\alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n \mid \forall\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

$[\mathbb{S}]$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$ se:

(i) $\theta \in [\mathbb{S}]$

(ii) $\forall\ \mathbf{v} \in [\mathbb{S}]\ ,\ \forall\ \mathbf{w} \in [\mathbb{S}] \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in [\mathbb{S}]$

(iii) $\forall\ \gamma \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ \mathbf{v} \in [\mathbb{S}] \Rightarrow \gamma \cdot \mathbf{v} \in [\mathbb{S}]$

Subespaço Vetorial

Definição

(i) $\theta \in [\mathbb{S}]$ pois $\theta = 0 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{u}_n$

(ii) $\forall\ \mathbf{v} \in [\mathbb{S}]\ ,\ \forall\ \mathbf{w} \in [\mathbb{S}]$:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n \in [\mathbb{S}]$$
$$\mathbf{w} = \beta_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \beta_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \beta_n \cdot \mathbf{u}_n \in [\mathbb{S}]$$
$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot \mathbf{u}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot \mathbf{u}_n \in [\mathbb{S}]$$

(iii) $\forall\ \gamma \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ \mathbf{v} \in [\mathbb{S}]$

$$\gamma \cdot \mathbf{v} = \gamma \cdot \alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \gamma \cdot \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \gamma \cdot \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n \in [\mathbb{S}]$$

O subespaço vetorial $[\mathbb{S}]$ é chamado subespaço gerado por $\mathbb{S}$.

Subespaço Vetorial

Definição

Os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ geram ou formam um conjunto gerador de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ se este coincide com o subespaço $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n] \Rightarrow [\mathbb{S}] \subset \mathbb{V}$ e $\mathbb{V} \subset [\mathbb{S}]$.

Exemplo

Verificar se os vetores $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ geram $\mathbb{R}^3$.

Devemos mostrar que $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^3 \subset [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$.

Subespaço Vetorial

Exemplo

Solução

(a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \subset \mathbb{R}^3$, pois são ternas de números reais.

(b) Para demonstrar $\mathbb{R}^3 \subset [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, devemos mostras que qualquer vetor em $\mathbb{R}^3$ se escreve como uma combinação linear de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{basta que } \begin{array}{l} u_1 = \alpha_1 \\ u_2 = \alpha_2 \\ u_3 = \alpha_3 \end{array}$$

Portanto $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ geram $\mathbb{R}^3$.

Subespaço Vetorial

Exemplo

Verificar se $\mathbb{W} = \{[x_1 \ x_2 \ x_3]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$ é gerado pelos vetores $\mathbf{u}_1 = [-2 \ 0 \ 3]^{\mathsf{T}}$ e $\mathbf{u}_2 = [1 \ 0 \ -1]^{\mathsf{T}}$.

Solução

(a) $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \subset \mathbb{W}$ pois pertence a $\mathbb{R}^3$ e a segunda coordenada é igual a zero.

(b) Para mostrar se $\mathbb{W} \subset [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, tomamos um vetor qualquer $\mathbf{v} = [v_1 \ 0 \ v_3]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{W}$:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ v_2 = 3\alpha_1 - \alpha_2 \end{cases}$$