Lista 3 - Espaço Vetorial, Bases e Mudança de Base.

1) Seja $V = Z$, isto é, V é o conjunto dos números inteiros. Verificar se V é espaço vetorial.

2) Seja V = conjunto dos polinômios de grau 3, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar. Verificar se V é espaço vetorial.

3) Seja $V = M_{m\times n}$, com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de um escalar por uma matriz. Verificar que V é espaço vetorial.

4) Para os conjuntos apresentados a seguir, determinar quais são espaços vetoriais em relação às operações indicadas. Para os que não forem espaços vetoriais, relacionar pelo menos uma das condições que não se verificam.

   1. O conjunto Q dos números racionais, com as operações usuais de adição e multiplicação.
   2. O conjunto de todos os pares de números reais da forma: $(u_1, 0)$ com as operações usuais do $\Re^2$

5) Seja $V = M_{n\times n}$, isto é, V é o espaço vetorial das matrizes de ordem n, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar. Seja W = conjunto das matrizes triangulares superiores de ordem n. Verificar que W é subespaço vetorial de V.

6) Seja $V = K_n(x)$, isto é, V é o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar. Seja W = conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n que só tem termos de grau par, mais o polinômio nulo. Verificar que W é subespaço vetorial de V.

7) Sejam $V = \Re^4$ com as operações usuais e

$$W = \{(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \Re^4 / u_2 = u_1 + u_3, u_4 = 0\} \tag{1}$$

   Verifique se W é um subespaço vetorial de V.

8) Seja $V = K_3(x)$ com as operações usuais. Verifique se W é um subespaço vetorial de V, nos seguintes casos.

   1. $$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}; a_1, a_2, a_3, a_4 \in \Re / a_1 + a_4 = 0 \right\} \tag{2}$$
   2. $$W = \{A \in M_{2\times 2} / det(A) = 0\} \tag{3}$$

9) Seja $V = \Re^3$. Verificar quais dos seguintes vetores:

   1. $u = (3, 3, 3)$
   2. $v = (-2, -8, 6)$

   podem ser escritos como combinação linear dos vetores:

$$v_1 = (1, -1, 3) \text{ e } v_2 = (2, 3, 0)$$

10) Seja $V = \Re^3$. Expressar os seguintes vetores:

   1. $u = (5, 9, 5)$
   2. $v = (2, 0, 6)$

como combinação linear dos vetores:

$$v_1 = (2, 1, 4),\ v_2 = (1, -1, 3) \text{ e } v_3 = (3, 2, 5).$$

11) Seja $V = K_2(x)$. Expressar os seguintes polinômios:

1. $P_2(x) = 5x^2 + 9x + 5$
2. $L_2(x) = 6x^2 + 2$

como combinação linear dos polinômios:

$$Q_2(x) = 4x^2 + x + 2,\ R_2(x) = 3x^2 - x + 1 \text{ e } S_2(x) = 5x^2 + 2x + 3.$$

12) Em cada item, determinar se o conjunto de vetores apresentado gera o $\Re^3$.

1. $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 2, 0)$ e $w = (3, 0, 0)$
2. $u = (1, 1, 2)$, $v = (1, 0, 1)$ e $w = (2, 1, 3)$
3. $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 3, 0)$ e $w = (-2, 0, 0)$

13) Verificar se o conjunto de polinômios:

$$P_0(t) = 1,\ P_1(t) = 1 - t,\ P_0(t) = (1 - t)^2 \text{ e } P_0(t) = (1 - t)^3$$

gera $K_3(t)$

14) Quais dos seguintes conjunto constituem base para o $\Re^2$?.

a) $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (3, 0)$
b) $v_1 = (4, 1)$ e $v_2 = (-7, -8)$
c) $v_1 = (0, 0)$, $v_2 = (1, 3)$ e $v_3 = (-4, -12)$

15) Quais dos seguintes conjuntos constituem base para o $\Re^3$?.

1. $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (2, 2, 0)$ e $v_3 = (3, 3, 3)$
2. $v_1 = (3, 1, -4)$, $v_2 = (2, 5, 6)$ e $v_3 = (1, 4, 8)$
3. $v_1 = (2, 3, -1)$, $v_2 = (4, 4, 1)$ e $v_3 = (0, 7, -1)$
4. $v_1 = (1, 6, 4)$, $v_2 = (2, 4, -1)$ e $v_3 = (-1, 2, 5)$

16) Quais dos segintes conjuntos consitutem base para $M_{2\times 2}$:

1. $E_1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}$ e $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $E_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

17) Seja $V = \Re^4$. Determine:

a) se $W = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 2), (2, 5, 6, 4), (2, 6, 8, 5)\}$ gera o $\Re^4$
b) a dimensão do subespaço gerado por $[W]$ e uma base para $[W]$

18) Seja $v = (2, 3)$ na base $\{(3, 5), (1, 2)\}$. Calcular as coordenadas de v na base $\{(1, -1), (1, 4)\}$.

19) Considere $V = \Re^2$. Seja $v = (2, 4)$ na base $\{(1, 2), (2, 3)\}$. Calcular as coordenadas de v na base $\{(1, 3), (1, 4)\}$.

20) Considere $V = \Re^3$. Seja $v = (2, 3, 4)$ na base canônica do $\Re^3$. Calcular as coordenadas de v na base: $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.