

Lógica para Computação

Profa. Dra. Viviane Menezes

Universidade Federal do Ceará

vivianemenezes@ufc.br

19 de julho de 2024

Na aula passada...

Revisão...

- ▶ Introdução à Lógica Proposicional
- ▶ Sintaxe da Lógica Proposicional
- ▶ Especificação de Sentenças em Lógica Proposicional

Sistemas Dedutivos

Sistemas Dedutivos

Como deduzir uma conclusão?

Sistemas Dedutivos

Como deduzir uma conclusão?

Exemplo 1

- ▶ Se o trem tivesse chegado atrasado e não houvesse táxis na estação, *então* João se atrasaria para o seu compromisso.
- ▶ João *não* se atrasou para o seu compromisso.
- ▶ O trem chegou atrasado.

Sistemas Dedutivos

Como deduzir uma conclusão?

Exemplo 1

- ▶ Se o trem tivesse chegado atrasado e não houvesse táxis na estação, *então* João se atrasaria para o seu compromisso.
- ▶ João *não* se atrasou para o seu compromisso.
- ▶ O trem chegou atrasado.
- ▶ **Portanto, havia táxis na estação.**

Sistemas Dedutivos

Conjunto de regras que nos permite chegar a uma conclusão dado um determinado conjunto de premissas.

Sistemas Dedutivos

Conjunto de regras que nos permite chegar a uma conclusão dado um determinado conjunto de premissas.

- ▶ Dedução Natural

Sistemas Dedutivos

Conjunto de regras que nos permite chegar a uma conclusão dado um determinado conjunto de premissas.

- ▶ Dedução Natural
- ▶ Axiomatização

Sistemas Dedutivos

Conjunto de regras que nos permite chegar a uma conclusão dado um determinado conjunto de premissas.

- ▶ Dedução Natural
- ▶ Axiomatização
- ▶ *Tableaux Analíticos*

Sistemas Dedutivos

Conjunto de regras que nos permite chegar a uma conclusão dado um determinado conjunto de premissas.

- ▶ Dedução Natural
- ▶ Axiomatização
- ▶ *Tableaux Analíticos*

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \psi$$

Dedução Natural

Dedução Natural

- ▶ Iremos fazer uma prova linear em que o primeiro passo será listar todas as premissas da prova, uma premissa por linha.
- ▶ Prove que: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \psi$

1. φ_1 premissa

2. φ_2 premissa

...

n . φ_n premissa

Dedução Natural

- ▶ Em seguida podemos aplicar as regras de dedução natural, utilizando as fórmulas obtidas nas linhas anteriores*.
- ▶ Em geral, há uma regra para *introduzir* e outra para *eliminar* cada um dos conectivos da lógica proposicional: \wedge , \rightarrow , \vee , \neg

Dedução Natural

Regras para a conjunção

- *e-introdução* ($\wedge i$).

\vdots	\vdots	\vdots
m.	φ	
\vdots	\vdots	\vdots
n.	ψ	
\vdots	\vdots	\vdots
p.	$\varphi \wedge \psi$	$\wedge i$ m,n

\vdots	\vdots	\vdots
m.	ψ	
\vdots	\vdots	\vdots
n.	φ	
\vdots	\vdots	\vdots
p.	$\varphi \wedge \psi$	$\wedge i$ m,n

Dedução Natural

Regras para a conjunção

► *e-eliminação* ($\wedge e$).

\vdots	\vdots	\vdots
m.	$\varphi \wedge \psi$	
\vdots	\vdots	\vdots
p.	φ	$\wedge e$ m

\vdots	\vdots	\vdots
m.	$\varphi \wedge \psi$	
\vdots	\vdots	\vdots
p.	ψ	$\wedge e$ m

Dedução Natural

Regras para a conjunção

Exemplo:

- ▶ P : estudo na UFC.
- ▶ Q : vivo em Quixadá.

Prove que:

$$P, Q \vdash P \wedge Q.$$

Dedução Natural

Regras para a conjunção

Exemplo:

- ▶ P : estudo na UFC.
- ▶ Q : vivo em Quixadá.

Prove que:

$$P, Q \vdash P \wedge Q.$$

Prova

1. P *premissa*
2. Q *premissa*
- 3.

Regras para a dedução natural

Regras para a conjunção

Exemplo:

- ▶ $P \wedge Q$: *estudo na UFC e vivo em Quixadá.*

Prove que:

$$P \wedge Q \vdash Q.$$

Regras para a dedução natural

Regras para a conjunção

Exemplo:

- ▶ $P \wedge Q$: *estudo na UFC e vivo em Quixadá.*

Prove que:

$$P \wedge Q \vdash Q.$$

Prova

1. $P \wedge Q$ *premissa*

Exercícios

Exercícios

Exercício

Prove que:

$$P \wedge Q, R \vdash Q \wedge R$$

Exercícios

Exercício

Prove que:

$$(P \wedge Q) \wedge R, S \wedge T \vdash Q \wedge S$$

Dedução Natural

Regras para o condicional

- *condicional eliminação ($\rightarrow e$).*

\vdots	\vdots	\vdots
m.	$\varphi \rightarrow \psi$	
\vdots	\vdots	\vdots
n.	φ	
\vdots	\vdots	\vdots
p.	ψ	$\rightarrow e$ m,n

\vdots	\vdots	\vdots
m.	φ	
\vdots	\vdots	\vdots
n.	$\varphi \rightarrow \psi$	
\vdots	\vdots	\vdots
p.	ψ	$\rightarrow e$ m,n

Dedução Natural

Regras para o condicional

- *condicional eliminação* ($\rightarrow e$).

\vdots	\vdots	\vdots
m.	$\varphi \rightarrow \psi$	
\vdots	\vdots	\vdots
n.	φ	
\vdots	\vdots	\vdots
p.	ψ	$\rightarrow e$ m,n

\vdots	\vdots	\vdots
m.	φ	
\vdots	\vdots	\vdots
n.	$\varphi \rightarrow \psi$	
\vdots	\vdots	\vdots
p.	ψ	$\rightarrow e$ m,n

método (*modus*) que afirma o conseqüente (*ponens*).

Dedução Natural

Regras para o condicional

Exemplo:

- ▶ $P \rightarrow Q$: se choveu, então a rua está molhada.
- ▶ P : choveu

Prove que:

$$P \rightarrow Q, P \vdash Q$$

Dedução Natural

Regras para o condicional

Exemplo:

- ▶ $P \rightarrow Q$: se choveu, então a rua está molhada.
- ▶ P : choveu

Prove que:

$$P \rightarrow Q, P \vdash Q$$

Prova

1. $P \rightarrow Q$ *premissa*
2. P *premissa*

Exercícios

Exercício

Prove que:

$$\neg P \wedge Q, (\neg P \wedge Q) \rightarrow (R \vee \neg P) \vdash R \vee \neg P.$$

Exercícios

Exercício

Prove que:

$$P, P \rightarrow Q, P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash R$$

Dedução Natural

Regras para o condicional

► condicional introdução (\rightarrow i)

\vdots	\vdots	\vdots
m.	φ	hipótese
\vdots	\vdots	\vdots
n.	ψ	
n+1.	$\varphi \rightarrow \psi$	\rightarrow i m-n

Dedução Natural

Regras para o condicional

- condicional introdução (\rightarrow i)

\vdots	\vdots	\vdots
m.	φ	hipótese
\vdots	\vdots	\vdots
n.	ψ	
n+1.	$\varphi \rightarrow \psi$	\rightarrow i m-n

*Raciocínio hipotético: A caixa serve para delimitar o **escopo da hipótese temporária**.*

Dedução Natural

Regras para o condicional

- ▶ condicional introdução (\rightarrow i)

- ▶ **Exemplo.**

Prove que:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash P \wedge Q \rightarrow R$$

Exercícios

Exercício

Prove que:

$$P \rightarrow Q \vdash P \wedge R \rightarrow Q \wedge R$$

Exercício

Prove que:

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

Regras para a Disjunção

Regras para a Disjunção

ou-introdução

- ▶ Lógica é o máximo.
- ▶ Lógica é o máximo *ou* ...

Dedução Natural

Regras para a Disjunção

► *ou-introdução* ($\vee i$)

\vdots	\vdots	\vdots
m.	φ	
\vdots	\vdots	\vdots
p.	$\varphi \vee \psi$	$\vee i$ m

\vdots	\vdots	\vdots
m.	ψ	
\vdots	\vdots	\vdots
p.	$\varphi \vee \psi$	$\vee i$ m

Regras para a Disjunção

ou-eliminação

► $\phi \vee \psi$

Regras para a Disjunção

ou-eliminação

- ▶ $\phi \vee \psi$
- ▶ Suponha que ϕ é verdade, ...

Regras para a Disjunção

ou-eliminação

- ▶ $\phi \vee \psi$
- ▶ Suponha que ϕ é verdade, ...
- ▶ Suponha que ψ é verdade, ...

Dedução Natural

Regras para a Disjunção

► *ou-eliminação* ($\vee e$)

\vdots	\vdots	\vdots
m.	$\varphi \vee \psi$	
m+1.	φ	hipótese
\vdots	\vdots	\vdots
n.	χ	
n+1.	ψ	hipótese
\vdots	\vdots	\vdots
p.	χ	
p+1.	χ	$\vee e$ m, (m+1)-n, (n+1)-p

Dedução Natural

Regras para a Disjunção

► *ou-eliminação* ($\vee e$)

\vdots	\vdots	\vdots
m.	$\varphi \vee \psi$	
m+1.	φ	hipótese
\vdots	\vdots	\vdots
n.	χ	
n+1.	ψ	hipótese
\vdots	\vdots	\vdots
p.	χ	
p+1.	χ	$\vee e$ m, (m+1)-n, (n+1)-p

Se φ ou ψ é verdade (não importa se nossa hipótese é φ ou ψ), podemos obter uma demonstração de χ .

Regras para a Disjunção

Exemplo

Prove que:

$$P \vee Q \vdash Q \vee P$$

Exercícios

Exercícios

1. Prove que:

$$Q \rightarrow R \vdash (P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)$$

2. Prove que:

$$(P \vee Q) \vee R \vdash P \vee (Q \vee R)$$

3. Prove que:

$$P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

4. Prove que:

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$$