ÁREA1 – FACULDADE DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Engenharia de Produção, Engenharia Elétrica e Engenharia de Computação
Disciplina: Álgebra Linear
Professor(a): ______________________________ Data _____ / _____ / _____
Aluno(a): ____ Turma______

1ª. Lista de Exercícios

Matrizes, sistemas lineares e determinantes

O início da teoria das matrizes remonta um artigo de Arthur Cayley (1821-1895). Nesse artigo Cayley fez questão de salientar que, embora logicamente a idéia de **matriz** preceda a de **determinante**, historicamente ocorreu o contrário: de fato, os determinantes já eram usados há muito na resolução de **sistemas lineares**. *(Hygino H. Domingues)*
A teoria dos determinantes teve origem em meados do século XVIII, quando eram estudados processos para resolução de sistemas lineares. Hoje em dia, embora não sejam um instrumento prático para resolução de sistemas, os determinantes são utilizados, por exemplo, para sintetizar certas expressões matemáticas complicadas. (*Gelson Iezzi & Samuel Hazzan)*

Questão 1. Considere as matrizes $A = (a_{ij})_{2x2}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} i+j, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ e $B = (b_{ij})_{2x2}$, tal que $b_{ij} = 2i - 3j$. Determine $A + B$.

Questão 2. Determine o produto $x.y$ para que se tenha $\begin{pmatrix} 1 & x-2y \\ x+18 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y+1 \\ y-3x & 4 \end{pmatrix}$.

Questão 3. Considere as seguintes matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $E = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$.

a) Determine $5A - 2B$ e $2A + 3B$.
b) Determine $A^2 = AA$ e AC.
c) Mostre que as matrizes D e E comutam (isto é, $DE = ED$) e A e B não comutam (isto é, $AB \neq BA$).

Questão 4. Determine, se possível, $x \in \Re$ para que a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2x & 1 \\ x^2 & 0 & -4x \\ x+1 & x^3 & 0 \end{pmatrix}$ seja:

a) simétrica.
b) anti-simétrica.

Questão 5. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Ache uma matriz $B = (b_{ij})_{2x3}$, com todos os elementos distintos, tal que $AB = 0$. (observe que $AB = 0$ **não implica** $A = 0$ *ou* $B = 0$).

Questão 6. Considere $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$. Mostre que A é idempotente, isto é, que $A^2 = A$.

Questão 7. Considere $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Mostre que B é nilpotente, isto é, que $B^n = 0$ para algum inteiro $n \geq 2$.

Questão 8. Sejam $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Determine, se possível, a matriz X tal que $(A^t.X)^{-1} = (B^{-1})^{-1}$.

Questão 9. Sejam $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$. Determine, se possível, a matriz X tal que $A + B.X = C$.

Questão 10. Usando **escalonamento**, resolva os seguintes sistemas de equações lineares:

a) $\begin{cases} 2x+y-2z=10 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 5x+4y+3z=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 4x+3y+z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+2z-w=-1 \\ 2x+y-2z-2w=-2 \\ -x+2y-4z+w=1 \\ 3x-3w=-3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+5y-2z=3 \\ x+7y-7z=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+5y+6z=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+z-t=4 \\ x+y-z+t=-4 \\ x-y+z+t=2 \end{cases}$

Questão 11. Considere a matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{3x3}$, tal que $a_{ij}=\begin{cases} i+j,\ i<j \\ 2i-j,\ i=j \\ j-i,\ i>j \end{cases}$. Determine X na equação $AX=B$, onde $B=\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Questão 12. Discuta em função de k os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} -4x+3y=2 \\ 5x-4y=0 \\ 2x-y=k \end{cases}$ b) $S:\begin{cases} -x-2y-kz=1 \\ kx-y+z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-5y+2z=0 \\ x+y+z=0 \\ 2x+0y+kz=0 \end{cases}$

Questão 13. Calcule o determinante das matrizes abaixo:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & b \\ 1 & b & a & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & a & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & b & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

Questão 14. Resolva os seguintes sistemas pela regra de **Cramer**.

a) $\begin{cases} 2x+y+2z=4 \\ x+2y+z=-1 \\ 3x+5y+2z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$ d) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -32 \\ 14 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix}$

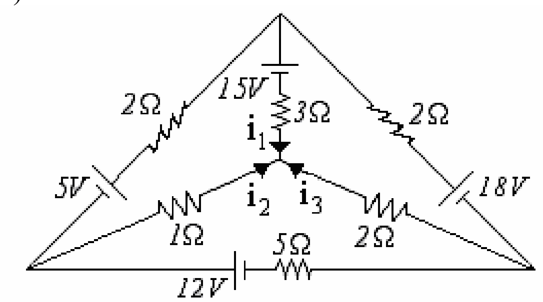
Questão 15. Usando **operações elementares** sobre linhas, determine se as matrizes abaixo são inversíveis e, em caso afirmativo, determine a sua inversa.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

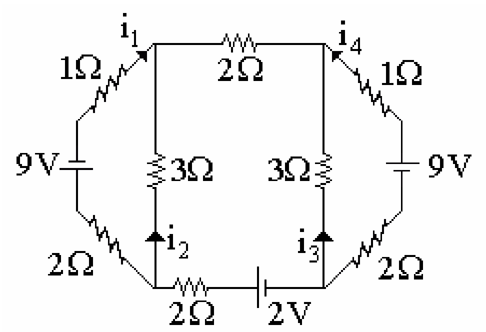
Questão 16. Resolva o sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 5y + 3z = 3 \\ x + 8z = 17 \end{cases}$, usando inversão de matrizes.

Questão 17. Determine a corrente elétrica em cada um dos trechos indicados nos circuitos ilustrados a seguir:

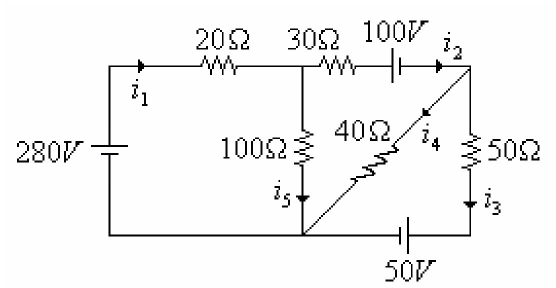
a)



b)



Questão 18. Deseja-se construir um circuito como o mostrado na figura:



Dispõe-se de uma tabela de preços de vários tipos de resistências; assim como as correntes máximas que elas suportam sem queimar.

		Resistências				
		$R_1 = 20\Omega$	$R_2 = 30\Omega$	$R_3 = 50\Omega$	$R_4 = 40\Omega$	$R_5 = 100\Omega$
Corrente máxima	0,5 A	\$10,00	\$10,00	\$15,00	\$15,00	\$20,00
	1,0 A	\$15,00	\$20,00	\$15,00	\$15,00	\$25,00
	3,0 A	\$20,00	\$22,00	\$20,00	\$20,00	\$28,00
	5,0 A	\$30,00	\$30,00	\$34,00	\$34,00	\$37,00

Que tipo devemos escolher as resistências para que o circuito funcione com segurança e a sua fabricação seja a de **menor custo possível**? Qual é esse custo mínimo?

Questão 19. Numa ***equação química balanceada*** o número de cada átomo nos reagentes deve ser igual nos produtos. Por exemplo, $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$. Um dos métodos para encontrar uma reação balanceada é por tentativa e erro. Usando os métodos de resolução de sistemas lineares podemos resolver essa questão facilmente. Assim em cada caso a seguir, ***encontre*** a equação química balanceada (***mínima***).

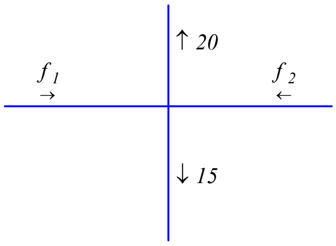
(a) $NH_3 + O_2 \rightarrow N_2 + H_2O$.

(b) $C_5H_{11}OH + O_2 \rightarrow H_2O + CO_2$

(c) $C_4H_{10} + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$.

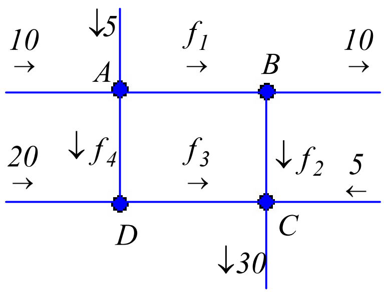
Observação. $NH_3 = amônia$, $O_2 = oxigênio$, $N_2 = nitrogênio$, $H_2O = água$, $CO_2 = dióxido\ de\ carbono$, $C_6H_{12}O_6 = glicose$ e $C_4H_{10} = gás\ butano$.

Questão 20. **Análise de redes.** Uma rede é constituída por um número finito de nós, em que fluem os fluxos, entrando e/ou saindo. E em cada nó, o fluxo de entrada é igual ao de saída. Exemplo:



$f_1 + f_2 = 15 + 20$

Com estas considerações, determine os possíveis fluxos da rede de encanamento de água mostrado na figura a seguir, onde o fluxo é medido em litros por minuto.



Respostas

Q1.. $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Q2.. 10

Q3. **a)** $\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 27 & -34 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 17 & 4 \\ -12 & 13 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 & 9 & -6 \\ -5 & -33 & 32 \end{pmatrix}$

Q4.. **a)** $x = 0$ **b)** $x = -2$

Q5. $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Existem outras.

Q8. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$

Q9. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}_{1x2}$

Q10. **a)** $(x,y,z) = (1,2,-3)$ **b)** $(-\alpha,\alpha,\alpha); \alpha \in R$ **c)** $(\alpha - 1, 2\beta, \beta, \alpha); \alpha, \beta \in R$

d) não existe solução. **e)** $(-3\alpha, 0, \alpha); \alpha \in R$ **f)** $(x,y,z,t) = (1,-1,2,-2)$

Q11. $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Q12. **a)** Se $k \neq -6$ o sistema é impossível;
Se $k = -6$ o sistema é possível determinado.

b) Se $k = 0$ o sistema é impossível;
Se $k \neq 0$ e $k \neq 1$ o sistema é possível determinado;
Se $k = 1$ o sistema é possível indeterminado.

c) Se $k = 2$ o sistema é possível indeterminado;
Se $k \neq 2$ o sistema é possível determinado.

Q13. **a)** 10 **b)** 49 **c)** -6 **d)** 48 **e)** $a^2 + b^2$ **f)** $abcd$

Q14. **a)** $(x,y,z) = (5,-2,-2)$ **b)** $(x,y,z) = (0,0,0)$ **c)** $(x,y,z) = (1/4, 1/8, 3/8)$ **d)** $(a,b,c,d) = (5,8,3,-1)$

Q15. **a)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/6 \\ 2/27 & -1/27 & 4/27 \\ -8/27 & 4/27 & 11/27 \end{pmatrix}$ **c)** C não é inversível.

Q16.. $(x,y,z) = (1,-1,2)$

Q17. **a)** $(i_1, i_2, i_3) = (-1,3,-2)$ **b)** $(i_1, i_2, i_3, i_4) = (-2,1,-1,2)$

Q18. $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = (3{,}68;\ 1{,}61;\ 0{,}16;\ 1{,}45;\ 2{,}07)$. O custo mínimo é $ 115,00.

Q19. **a)** $(4,3,2,6)$ **b)** $(2,15,12,10)$ **c)** $(2,13,8,10)$

Q20. $(15 - f_4, 5 - f_4, 20 + f_4, f_4)$, onde $0 \leq f_4 \leq 5$.