QXD0116 - Álgebra Linear

Transformações Lineares II

André Ribeiro Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Transformações Lineares

Propriedades

Sejam $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$, então:

(i) $T(\theta) = \theta$

(ii) $T(\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot T(\mathbf{u}) + \beta \cdot T(\mathbf{v})\ ,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ ,\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{U}$

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear e $\mathbb{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$. Determinar $T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ sabendo que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Transformações Lineares

Exemplo

Solução

Sabemos que o vetor em $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de $\mathbb{B}$:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + 3 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}^T$$

Operações com Transformações Lineares

Adição

Definição

Sejam T_1 e T_2 transformações de $\mathbb{U}$ em $\mathbb{V}$. A adição é a transformação linear $T_1 + T_2 : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$, dada por

$$(T_1 + T_2)(\mathbf{u}) = T_1(\mathbf{u}) + T_2(\mathbf{u}).$$

Observe que ambas transformações devem levar de $\mathbb{U}$ a $\mathbb{V}$.

Operações com Transformações Lineares

Adição

Exemplo

Sejam $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \Rightarrow T_1(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ 2 \cdot u_1 - u_2 + u_3 \end{bmatrix} \; ; \; T_2(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 - 2 \cdot u_2 + u_3 \\ 2 \cdot u_1 - u_3 \end{bmatrix}$$

Determine $T_1 + T_2$.

Solução

$$(T_1 + T_2)(\mathbf{u}) = T_1(\mathbf{u}) + T_2(\mathbf{u})$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ 2 \cdot u_1 - u_2 + u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 - 2 \cdot u_2 + u_3 \\ 2 \cdot u_1 - u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot u_1 - u_2 + u_3 \\ 3 \cdot u_1 - u_2 \end{bmatrix}$$

Operações com Transformações Lineares

Produto por escalar

Definição

Sejam $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ e α um escalar. O produto de T pelo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ é a transformação $\alpha \cdot T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ dada por

$$(\alpha \cdot T)(\mathbf{u}) = T(\alpha \cdot \mathbf{u}).$$

Usando a operação acima, é fácil verificar que:

(i) $T(-\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u})$

(ii) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$

Operações com Transformações Lineares

Aplicação Composta

Definição

Sejam $T_1 : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ e $T_2 : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, a aplicação composta das transformações lineares T_1 e T_2, indicada por $T_2 \circ T_1$, é a transformação que leva de $\mathbb{U}$ a $\mathbb{W}$, dada por

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_2(T_1(\mathbf{u})) \ , \ \forall \mathbf{u} \in \mathbb{U}.$$

Propriedades

Sejam T_1 e T_2 transformações lineares de $\mathbb{U}$ em $\mathbb{V}$ e S_1 e S_2 transformações lineares de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{W}$.

(i) $S_1 \circ (T_1 + T_2) = S_1 \circ T_1 + S_1 \circ T_2$

(ii) $(S_1 + S_2) \circ T_1 = S_1 \circ T_1 + S_2 \circ T_1$

(iii) $\alpha \cdot (S_1 \circ T_1) = (\alpha \cdot S_1) \circ T_1 = S_1 \circ (\alpha \cdot T_1)$

(iv) $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1 \Rightarrow$ apenas para $\mathbb{U} = \mathbb{V}$

(v) $T_1 \circ T_1$ é representado por $T_1^2 \Rightarrow$ apenas para $\mathbb{U} = \mathbb{V}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Operações com Transformações Lineares

Aplicação Composta

Exemplo

Sejam T_1 e T_2 transformações lineares do $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, definidas por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow T_1(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \; ; \; T_2(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ 2 \cdot u_2 \end{bmatrix}$$

Calcule:

(a) $(T_1 \circ T_2)(\mathbf{u})$

(b) $(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u})$

(c) $(T_1^2)(\mathbf{u}) = (T_1 \circ T_1)(\mathbf{u})$

(d) $(T_2^2)(\mathbf{u}) = (T_2 \circ T_2)(\mathbf{u})$

(e) $(T_1 \circ 3 \cdot T_2)(\mathbf{u})$

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

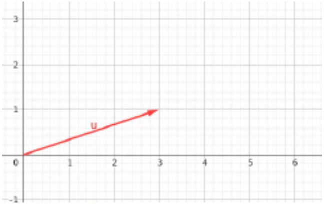
Transformações no Plano

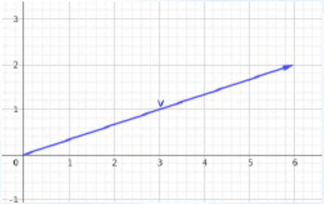
Interpretação Geométrica

Expansão

Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 2 \cdot u_1 \\ 2 \cdot u_2 \end{bmatrix}$$





UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

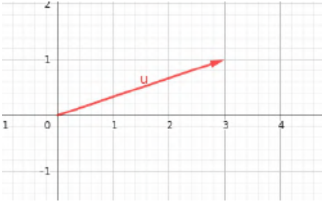
Transformações no Plano

Interpretação Geométrica

Reflexão em torno do eixo-x

Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix}$$



Reflexão na origem

Sejam $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix}$$