Grafos – Definições Básicas e Representação

Estrutura de Dados Avançada — QXD0015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

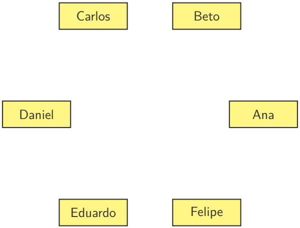
1º semestre/2023

Redes Sociais

Como representar amizades em uma rede social?

Redes Sociais

Como representar amizades em uma rede social?

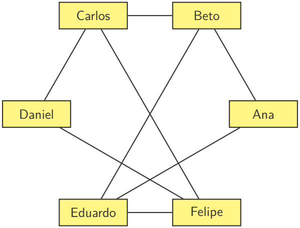


Temos um conjunto de pessoas (Ana, Beto, Carlos, etc...)

Redes Sociais

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Como representar amizades em uma rede social?



Temos um conjunto de pessoas (Ana, Beto, Carlos, etc...)

- Ligamos duas pessoas se elas se conhecem

Grafos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O Grafo como estrutura de dados é frequentemente utilizado para representar relações entre conjuntos de objetos

Grafos

O Grafo como estrutura de dados é frequentemente utilizado para representar relações entre conjuntos de objetos

- Chamamos esses objetos de vértices

Grafos

O Grafo como estrutura de dados é frequentemente utilizado para representar relações entre conjuntos de objetos

- Chamamos esses objetos de vértices
  - Ex: pessoas em uma rede social

Grafos

O Grafo como estrutura de dados é frequentemente utilizado para representar relações entre conjuntos de objetos

- Chamamos esses objetos de vértices
  - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de arestas

Grafos

O Grafo como estrutura de dados é frequentemente utilizado para representar relações entre conjuntos de objetos

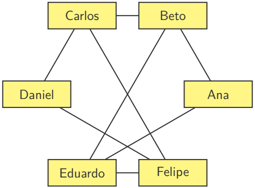
- Chamamos esses objetos de vértices
  - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de arestas
  - Ex: relação de amizade na rede social

Grafos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O Grafo como estrutura de dados é frequentemente utilizado para representar relações entre conjuntos de objetos

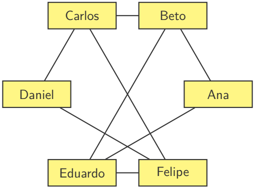
- Chamamos esses objetos de vértices
  - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de arestas
  - Ex: relação de amizade na rede social



Grafos

O Grafo como estrutura de dados é frequentemente utilizado para representar relações entre conjuntos de objetos

- Chamamos esses objetos de vértices
  - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de arestas
  - Ex: relação de amizade na rede social



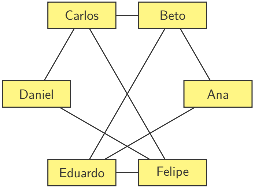
Representamos um grafo visualmente com os vértices representados por pontos e as arestas representadas por curvas ligando dois vértices.

Grafos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O Grafo como estrutura de dados é frequentemente utilizado para representar relações entre conjuntos de objetos

- Chamamos esses objetos de vértices
  - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de arestas
  - Ex: relação de amizade na rede social



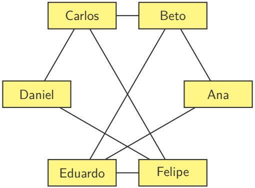
Representamos um grafo visualmente com os vértices representados por pontos e as arestas representadas por curvas ligando dois vértices.

Grafos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O Grafo como estrutura de dados é frequentemente utilizado para representar relações entre conjuntos de objetos

- Chamamos esses objetos de vértices
  - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de arestas
  - Ex: relação de amizade na rede social



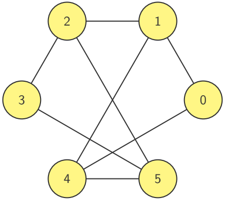
Representamos um grafo visualmente com os vértices representados por pontos e as arestas representadas por curvas ligando dois vértices.

Grafos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

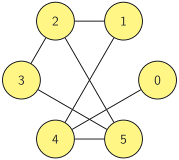
O Grafo como estrutura de dados é frequentemente utilizado para representar relações entre conjuntos de objetos

- Chamamos esses objetos de vértices
  - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de arestas
  - Ex: relação de amizade na rede social

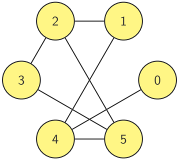


Representamos um grafo visualmente com os vértices representados por pontos e as arestas representadas por curvas ligando dois vértices.

Grafo não direcionado – Definição

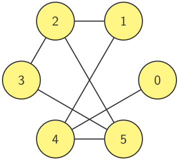


Grafo não direcionado – Definição



Um grafo não direcionado G é um par ordenado (V, E) tal que:

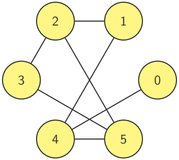
Grafo não direcionado – Definição



Um grafo não direcionado G é um par ordenado (V, E) tal que:

- V é um conjunto finito e não vazio cujos elementos são chamados vértices do grafo.

Grafo não direcionado – Definição

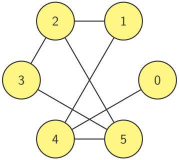


Um grafo não direcionado G é um par ordenado (V, E) tal que:

- V é um conjunto finito e não vazio cujos elementos são chamados vértices do grafo.
  - Exemplo: $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Grafo não direcionado – Definição

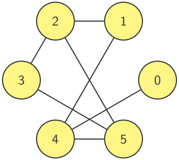
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



Um grafo não direcionado G é um par ordenado (V, E) tal que:

- V é um conjunto finito e não vazio cujos elementos são chamados vértices do grafo.
  - Exemplo: $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- E é um conjunto de pares de elementos não ordenados de V. Cada elemento em E é chamado de aresta.

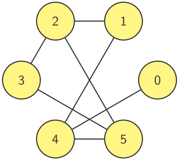
Grafo não direcionado – Definição



Um grafo não direcionado G é um par ordenado (V, E) tal que:

- V é um conjunto finito e não vazio cujos elementos são chamados vértices do grafo.
  - Exemplo: $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- E é um conjunto de pares de elementos não ordenados de V. Cada elemento em E é chamado de aresta.
  - Exemplo: $E = \Big\{\{0, 4\}, \{5, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 2\}, \{1, 4\}\Big\}$

Grafo não direcionado – Definição

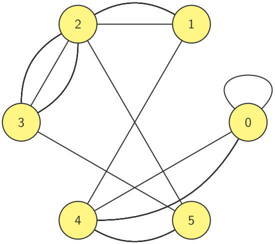


Um grafo não direcionado G é um par ordenado (V, E) tal que:

- V é um conjunto finito e não vazio cujos elementos são chamados vértices do grafo.
  - Exemplo: $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- E é um conjunto de pares de elementos não ordenados de V. Cada elemento em E é chamado de aresta.
  - Exemplo: $E = \Big\{\{0, 4\}, \{5, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 2\}, \{1, 4\}\Big\}$
- Chamamos grafos não direcionados simplesmente de grafos.

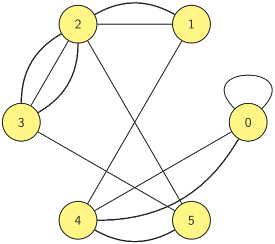
Grafo Simples – Definição

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá



- Para alguns problemas, faz sentido permitir que dois vértices sejam ligados por várias arestas (arestas múltiplas) e também permite-se arestas que possuam o mesmo vértice como extremos (laços).

Grafo Simples – Definição



- Para alguns problemas, faz sentido permitir que dois vértices sejam ligados por várias arestas (arestas múltiplas) e também permite-se arestas que possuam o mesmo vértice como extremos (laços).

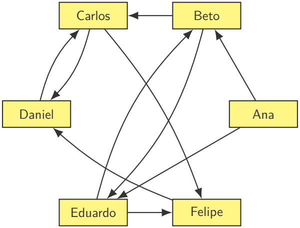
- Grafos que não possuem laços nem arestas múltiplas são chamados grafos simples.

Seguindo e sendo seguido

Em alguns problemas em grafos, as relações a serem modeladas não são simétricas. Por exemplo, como representar seguidores em redes sociais?

Seguindo e sendo seguido

Em alguns problemas em grafos, as relações a serem modeladas não são simétricas. Por exemplo, como representar seguidores em redes sociais?



- A Ana segue o Beto e o Eduardo
- Ninguém segue a Ana
- O Daniel é seguido pelo Carlos e pelo Felipe
- O Eduardo segue o Beto que o segue de volta

Grafo direcionado – Definição

Um grafo direcionado ou digrafo G é um par ordenado (V, E) tal que:

Grafo direcionado – Definição

Um grafo direcionado ou digrafo G é um par ordenado (V, E) tal que:

- V é um conjunto vértices finito e não vazio.

Grafo direcionado – Definição

Um grafo direcionado ou digrafo G é um par ordenado (V, E) tal que:

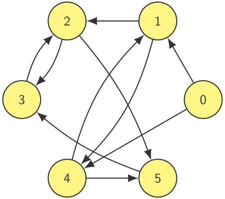
- V é um conjunto vértices finito e não vazio.
- E é um conjunto de pares ordenados de vértices. Os elementos de E são chamados de arestas. Cada aresta $(u, v) \in E$ é tal que u indica origem e v indica destino. A aresta sai de u e entra em v.

Grafo direcionado – Definição

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Um grafo direcionado ou digrafo G é um par ordenado (V, E) tal que:

- V é um conjunto vértices finito e não vazio.
- E é um conjunto de pares ordenados de vértices. Os elementos de E são chamados de arestas. Cada aresta $(u, v) \in E$ é tal que u indica origem e v indica destino. A aresta sai de u e entra em v.

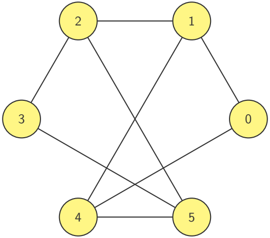


Desenhamos um grafo direcionado com os vértices representados por pontos e as arestas representadas por curvas com uma seta na ponta ligando os seus extremos.

Grafos direcionados e não direcionados

Podemos ver um grafo não direcionado como um grafo direcionado.

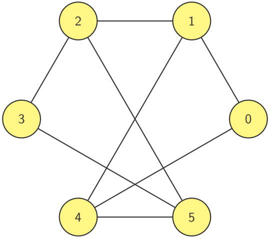
Basta considerar cada aresta como dois arcos.



Grafos direcionados e não direcionados

Podemos ver um grafo não direcionado como um grafo direcionado.

Basta considerar cada aresta como dois arcos.

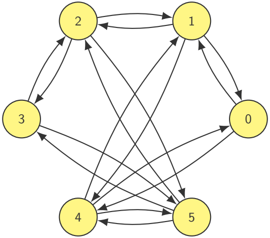


Grafos direcionados e não direcionados

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

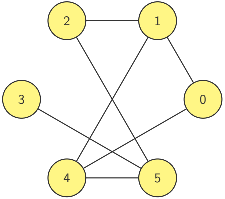
Podemos ver um grafo não direcionado como um grafo direcionado.

Basta considerar cada aresta como dois arcos.



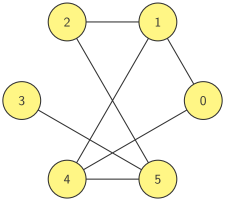
Uma série de definições

Adjacência e Incidência



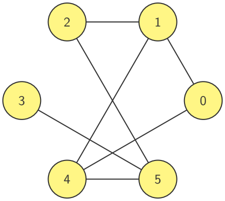
- Dado $G = (V, E)$ **não direcionado** e $\{u, v\} \in E$, dizemos que $\{u, v\}$ incide nos vértices u e v e vice-versa.

Adjacência e Incidência



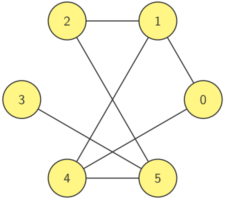
- Dado $G = (V, E)$ **não direcionado** e $\{u, v\} \in E$, dizemos que $\{u, v\}$ incide nos vértices u e v e vice-versa.
- Dizemos também que u e v são adjacentes.

Adjacência e Incidência



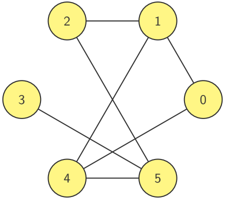
- Dado $G = (V, E)$ **não direcionado** e $\{u, v\} \in E$, dizemos que $\{u, v\}$ incide nos vértices u e v e vice-versa.
- Dizemos também que u e v são adjacentes.
- Dizemos que u e v são os extremos da aresta (u, v).

Adjacência e Incidência



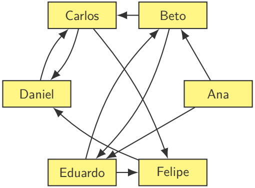
- Dado $G = (V, E)$ **não direcionado** e $\{u, v\} \in E$, dizemos que $\{u, v\}$ incide nos vértices u e v e vice-versa.
- Dizemos também que u e v são adjacentes.
- Dizemos que u e v são os extremos da aresta (u, v).
- Vértices adjacentes a um vértice u formam a vizinhança de u e são chamados vizinhos de u.

Adjacência e Incidência



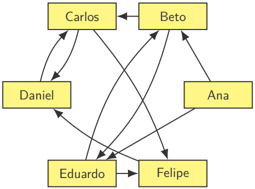
- Dado $G = (V, E)$ **não direcionado** e $\{u, v\} \in E$, dizemos que $\{u, v\}$ incide nos vértices u e v e vice-versa.
- Dizemos também que u e v são adjacentes.
- Dizemos que u e v são os extremos da aresta (u, v).
- Vértices adjacentes a um vértice u formam a vizinhança de u e são chamados vizinhos de u.
  - Exemplo: os vértices 0, 1 e 5 são vizinhos de 4.

Adjacência e Incidência



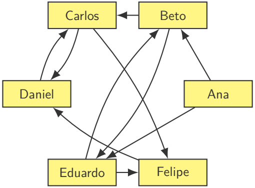
- Dado $G = (V, E)$ **direcionado** e $(u, v) \in E$, dizemos que (u, v) sai do vértice u e entra ou incide no vértice v.

Adjacência e Incidência



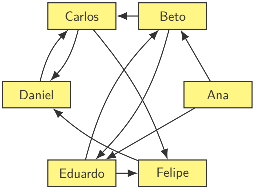
- Dado $G = (V, E)$ **direcionado** e $(u, v) \in E$, dizemos que (u, v) sai do vértice u e entra ou incide no vértice v.
- Dizemos também que v é adjacente a u.

Adjacência e Incidência



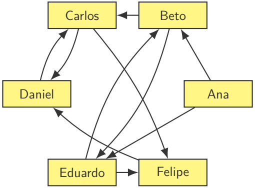
- Dado $G = (V, E)$ **direcionado** e $(u, v) \in E$, dizemos que (u, v) sai do vértice u e entra ou incide no vértice v.
- Dizemos também que v é adjacente a u.
- Dizemos que u e v são os extremos da aresta (u, v).

Adjacência e Incidência



- Dado $G = (V, E)$ **direcionado** e $(u, v) \in E$, dizemos que (u, v) sai do vértice u e entra ou incide no vértice v.
- Dizemos também que v é adjacente a u.
- Dizemos que u e v são os extremos da aresta (u, v).
- Vértices adjacentes a um vértice u formam a vizinhança de u e são chamados vizinhos de u.

Adjacência e Incidência



- Dado $G = (V, E)$ **direcionado** e $(u, v) \in E$, dizemos que (u, v) sai do vértice u e entra ou incide no vértice v.
- Dizemos também que v é adjacente a u.
- Dizemos que u e v são os extremos da aresta (u, v).
- Vértices adjacentes a um vértice u formam a vizinhança de u e são chamados vizinhos de u.
  - Exemplo: Felipe é vizinho de Eduardo e Carlos, mas Ana não.

Tamanho do grafo

Considere um grafo $G = (V, E)$

- Denotamos por $|V|$ a cardinalidade do conjunto de vértices

Tamanho do grafo

Considere um grafo $G = (V, E)$

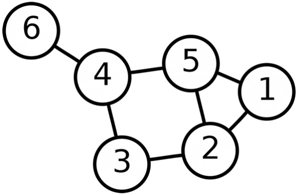
- Denotamos por $|V|$ a cardinalidade do conjunto de vértices
- e por $|E|$ a cardinalidade do conjunto de arestas

Tamanho do grafo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Considere um grafo $G = (V, E)$

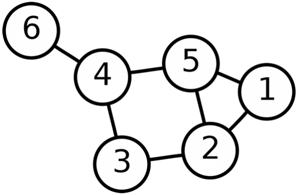
- Denotamos por $|V|$ a cardinalidade do conjunto de vértices
- e por $|E|$ a cardinalidade do conjunto de arestas
- no exemplo abaixo, temos $|V| = 6$ e $|E| = 7$



Tamanho do grafo

Considere um grafo $G = (V, E)$

- Denotamos por $|V|$ a cardinalidade do conjunto de vértices
- e por $|E|$ a cardinalidade do conjunto de arestas
- no exemplo abaixo, temos $|V| = 6$ e $|E| = 7$



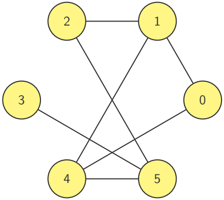
- O tamanho do grafo G é dado por $|V| + |E|$

Grau de um vértice

Quem tem mais amigos no Facebook? E seguidores no Instagram?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Dado um grafo simples e **não direcionado** $G = (V, E)$, o grau de um vértice $v \in V$, denotado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes em u.

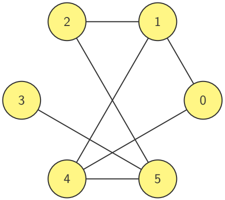


Grau de um vértice

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

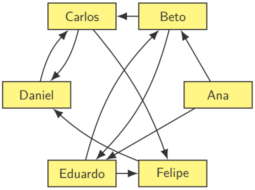
Quem tem mais amigos no Facebook? E seguidores no Instagram?

Dado um grafo simples e **não direcionado** $G = (V, E)$, o grau de um vértice $v \in V$, denotado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes em u.



Dado um grafo **direcionado** $G = (V, E)$, o grau de saída $d^+(v)$ de um vértice $v \in V$, é o número de arestas que saem de v. O grau de entrada $d^-(v)$ de v, é o número de arestas que entram em v.

O grau $d(v)$ de v é a soma $d^+(v) + d^-(v)$.

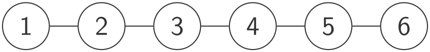


Definição - Graus mínimo e máximo

- Um vértice de grau 0 é dito vértice isolado.
- Um vértice de grau 1 é dito vértice terminal.
- Um vértice de grau $|V| - 1$ é dito vértice universal.

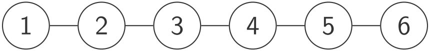
Definição - Graus mínimo e máximo

- Um vértice de grau 0 é dito vértice isolado.
- Um vértice de grau 1 é dito vértice terminal.
- Um vértice de grau $|V| - 1$ é dito vértice universal.
- O grau mínimo de G é o menor grau dentre todos os graus de vértices de G e é denotado por $\delta(G)$.
- O grau máximo de G é o maior grau dentre todos os graus de vértices de G e é denotado por $\Delta(G)$.



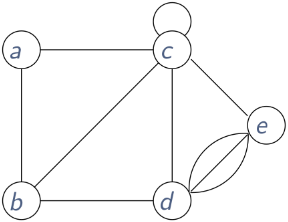
Definição - Graus mínimo e máximo

- Um vértice de grau 0 é dito vértice isolado.
- Um vértice de grau 1 é dito vértice terminal.
- Um vértice de grau $|V| - 1$ é dito vértice universal.
- O grau mínimo de G é o menor grau dentre todos os graus de vértices de G e é denotado por $\delta(G)$.
- O grau máximo de G é o maior grau dentre todos os graus de vértices de G e é denotado por $\Delta(G)$.



> Se $G = (V, E)$ é um grafo simples não direcionado e v é um vértice qualquer de G, então: $0 \leq \delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G) \leq |V| - 1$.

Contando graus dos vértices



$d(a) = 2$

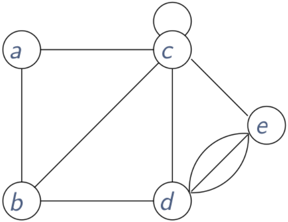
$d(b) = 3$

$d(c) = 6$

$d(d) = 5$

$d(e) = 4$

Contando graus dos vértices



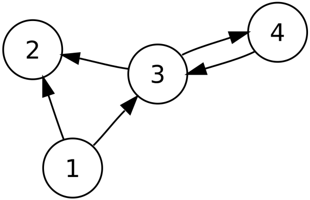
$d(a) = 2$
$d(b) = 3$
$d(c) = 6$
$d(d) = 5$
$d(e) = 4$

Teorema 1 [Euler, 1735]
Se $G = (V, E)$ é um grafo não direcionado, então

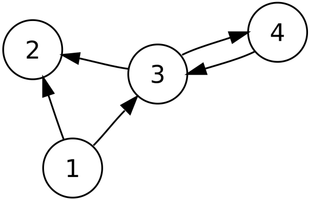
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Euler

Contando graus dos vértices



Contando graus dos vértices



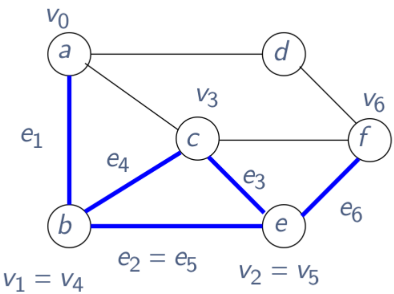
Teorema 2
Se $G = (V, E)$ é um grafo direcionado, então

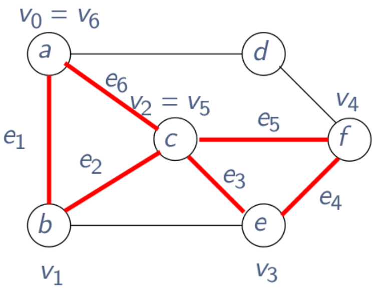
$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|.$$

Passeando pelo grafo

Passeios em grafos

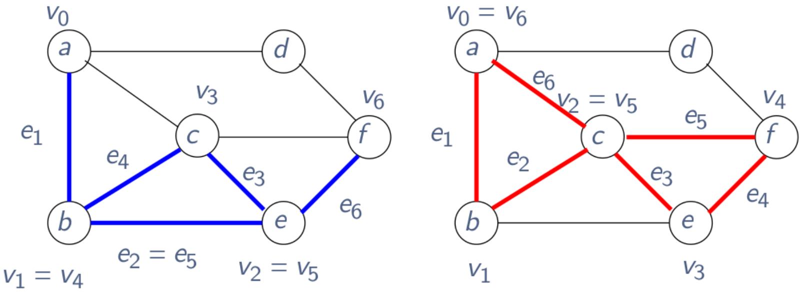
Um passeio P de um vértice v_0 a um vértice v_k em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência finita e não vazia de vértices $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ tal que $(v_{i-1}, v_i) \in E$ para $1 \leq i \leq k$.





Passeios em grafos

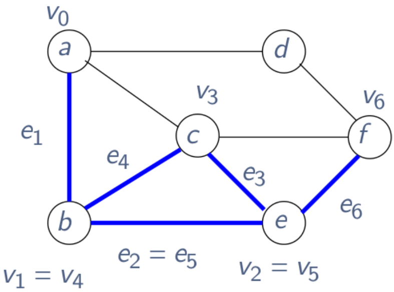
Um passeio P de um vértice v_0 a um vértice v_k em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência finita e não vazia de vértices $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ tal que $(v_{i-1}, v_i) \in E$ para $1 \leq i \leq k$.

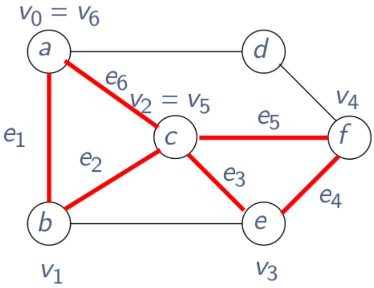


- dizemos que v_k é alcançável a partir de v_0 através de P

Passeios em grafos

Um passeio P de um vértice v_0 a um vértice v_k em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência finita e não vazia de vértices $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ tal que $(v_{i-1}, v_i) \in E$ para $1 \leq i \leq k$.

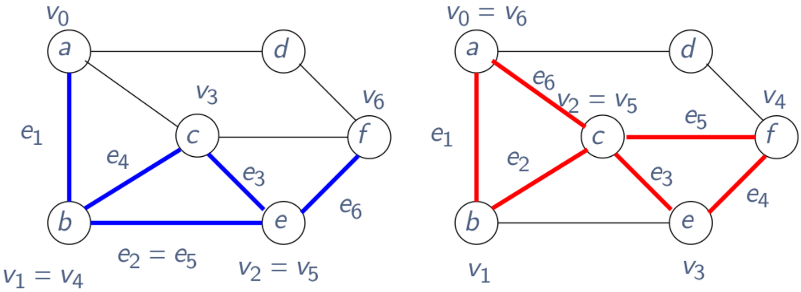




- dizemos que v_k é alcançável a partir de v_0 através de P
- se $v_0 = v_k$, então dizemos que P é um passeio fechado

Passeios em grafos

Um passeio P de um vértice v_0 a um vértice v_k em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência finita e não vazia de vértices $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ tal que $(v_{i-1}, v_i) \in E$ para $1 \leq i \leq k$.



- dizemos que v_k é alcançável a partir de v_0 através de P
- se $v_0 = v_k$, então dizemos que P é um passeio fechado
- o comprimento de P é o seu número de arestas, ou seja, k

Caminhos e ciclos

- Um caminho é um passeio cujos vértices são distintos.

Caminhos e ciclos

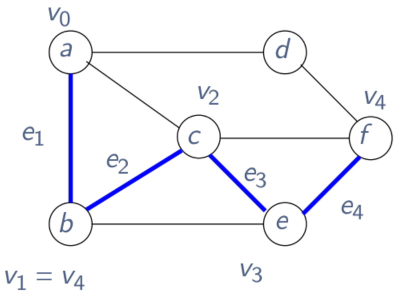
- Um caminho é um passeio cujos vértices são distintos.
- Um ciclo é um passeio fechado $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ com $k > 0$ que possui pelo menos uma aresta e tal que $v_1, \ldots, v_k$ são distintos e todas as arestas são distintas.

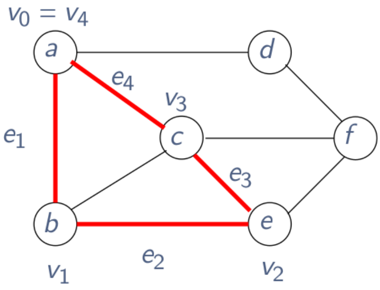
Caminhos e ciclos

- Um caminho é um passeio cujos vértices são distintos.
- Um ciclo é um passeio fechado $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ com $k > 0$ que possui pelo menos uma aresta e tal que $v_1, \ldots, v_k$ são distintos e todas as arestas são distintas.
- O comprimento do ciclo é o seu número de arestas, ou seja, k.

Caminhos e ciclos

- Um caminho é um passeio cujos vértices são distintos.
- Um ciclo é um passeio fechado $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ com $k > 0$ que possui pelo menos uma aresta e tal que $v_1, \ldots, v_k$ são distintos e todas as arestas são distintas.
- O comprimento do ciclo é o seu número de arestas, ou seja, k.





Refletindo sobre as definições

- Seja G um grafo e u, v vértices de G. Mostre que se existe um passeio de u a v em G, então existe um caminho de u a v em G.

Refletindo sobre as definições

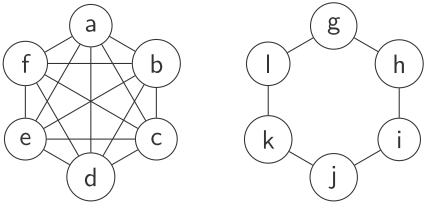
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Seja G um grafo e u, v vértices de G. Mostre que se existe um passeio de u a v em G, então existe um caminho de u a v em G.
- Seja G um grafo e u, v, w vértices de G. Mostre que se em G existem um caminho de u a v e um caminho de v a w então existe um caminho de u a w em G.

Conexidade

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

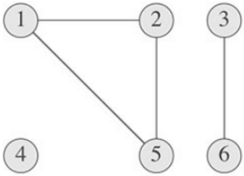
- Dizemos que dois vértices u e v de um grafo G estão conectados se existe um (u, v)-caminho em G.
  - Caso contrário, dizemos que G é desconexo.
- Um grafo G **não direcionado** é conexo quando quaisquer dois de seus vértices estão conectados.



Um grafo G com 12 vértices

Componentes conexas

- As componentes conexas de um grafo não direcionado $G = (V, E)$ são as classes de equivalência de V sob a relação "é alcançável a partir de".



Um grafo com três componentes conexas $\{4\}$, $\{3, 6\}$ e $\{1, 2, 5\}$. Note que todo vértice em $\{1, 2, 5\}$ é alcançável a partir de todo vértice em $\{1, 2, 5\}$.

Famílias de grafos especiais

Grafo completo

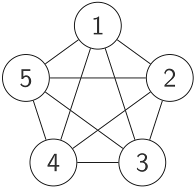
Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Um grafo completo é um grafo simples no qual quaisquer dois de seus vértices são adjacentes.

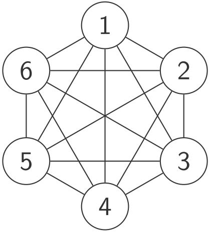
Grafo completo

- Um grafo completo é um grafo simples no qual quaisquer dois de seus vértices são adjacentes.

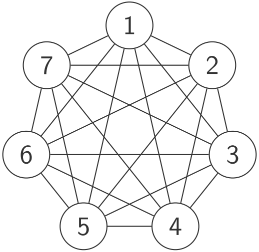
- Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n.



K_5



K_6



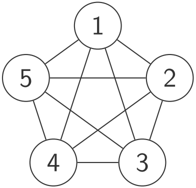
K_7

Grafo completo

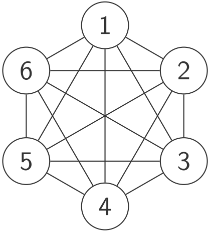
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um grafo completo é um grafo simples no qual quaisquer dois de seus vértices são adjacentes.

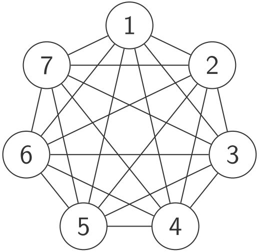
- Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n.



K_5



K_6



K_7

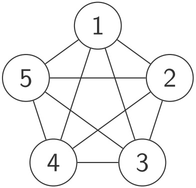
- se o número de vértices é n, então ele tem $\binom{n}{2}$ arestas

Grafo completo

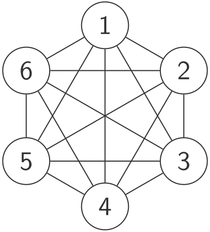
Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Um grafo completo é um grafo simples no qual quaisquer dois de seus vértices são adjacentes.

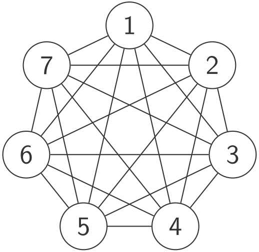
- Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n.



K_5



K_6

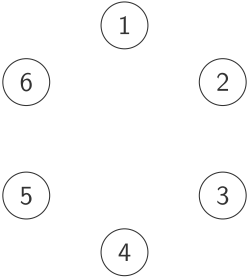


K_7

- se o número de vértices é n, então ele tem $\binom{n}{2}$ arestas
- portanto, um grafo simples tem no máximo $\binom{n}{2}$ arestas

Grafo vazio

- Grafo vazio é o grafo cujo conjunto de arestas é vazio, ou seja, $E(G) = \emptyset$.



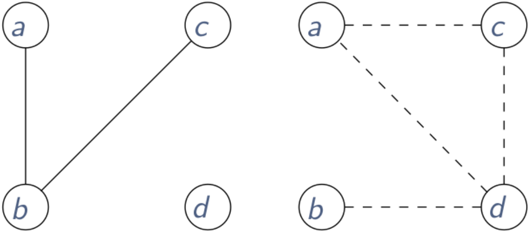
Um grafo vazio G com seis vértices.

Grafo complemento

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O complemento de um grafo simples G é o grafo simples $\overline{G}$

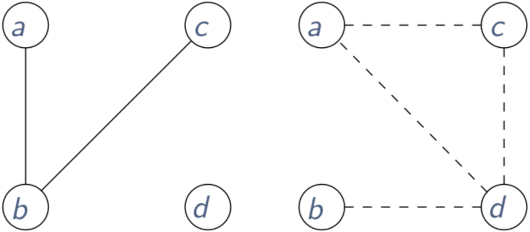
- cujo conjunto de vértices é $V(\overline{G}) = V(G)$
- e com $uv \in E(\overline{G})$ se e somente se $uv \notin E(G)$



Grafo complemento

O complemento de um grafo simples G é o grafo simples $\overline{G}$

- cujo conjunto de vértices é $V(\overline{G}) = V(G)$
- e com $uv \in E(\overline{G})$ se e somente se $uv \notin E(G)$



Note que $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = |V| - 1$

Grafo bipartido

- Um grafo é bipartido se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos X e Y de modo que toda aresta tenha um extremo em X e o outro extremo em Y.

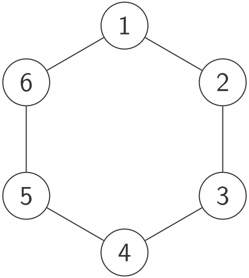
Grafo bipartido

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um grafo é bipartido se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos X e Y de modo que toda aresta tenha um extremo em X e o outro extremo em Y.
  - Tal partição (X, Y) é chamada uma bipartição do grafo, e X e Y são suas partes.

Grafo bipartido

- Um grafo é bipartido se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos X e Y de modo que toda aresta tenha um extremo em X e o outro extremo em Y.
  - Tal partição (X, Y) é chamada uma bipartição do grafo, e X e Y são suas partes.
  - Nós denotamos um grafo bipartido G com bipartição (X, Y) por $G[X, Y]$.



Grafo bipartido completo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Um grafo bipartido completo é um grafo simples bipartido $G[X, Y]$ tal que todo vértice em X é ligado a todo vértice em Y.

Grafo bipartido completo

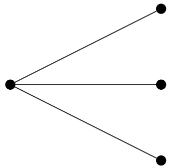
- Um grafo bipartido completo é um grafo simples bipartido $G[X, Y]$ tal que todo vértice em X é ligado a todo vértice em Y.

- Um grafo bipartido completo $G[X, Y]$ é geralmente denotado por $K_{p,q}$, tal que $|X| = p$ e $|Y| = q$.

Grafo bipartido completo

- Um grafo bipartido completo é um grafo simples bipartido $G[X, Y]$ tal que todo vértice em X é ligado a todo vértice em Y.

- Um grafo bipartido completo $G[X, Y]$ é geralmente denotado por $K_{p,q}$, tal que $|X| = p$ e $|Y| = q$.



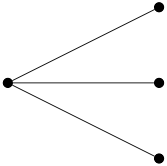
$K_{1,3}$

Grafo bipartido completo

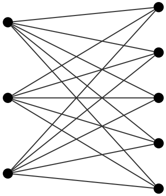
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um grafo bipartido completo é um grafo simples bipartido $G[X, Y]$ tal que todo vértice em X é ligado a todo vértice em Y.

- Um grafo bipartido completo $G[X, Y]$ é geralmente denotado por $K_{p,q}$, tal que $|X| = p$ e $|Y| = q$.



$K_{1,3}$



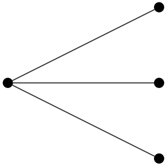
$K_{3,5}$

Grafo bipartido completo

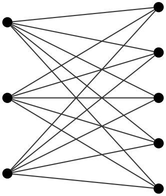
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um grafo bipartido completo é um grafo simples bipartido $G[X, Y]$ tal que todo vértice em X é ligado a todo vértice em Y.

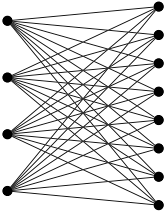
- Um grafo bipartido completo $G[X, Y]$ é geralmente denotado por $K_{p,q}$, tal que $|X| = p$ e $|Y| = q$.



$K_{1,3}$



$K_{3,5}$



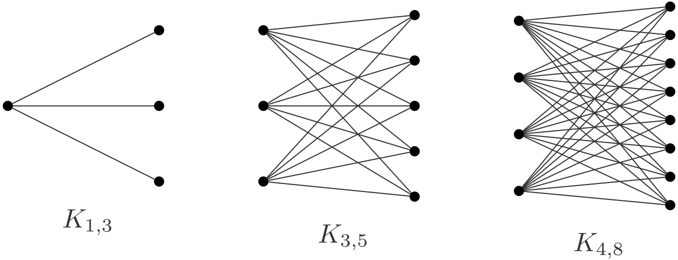
$K_{4,8}$

Grafo bipartido completo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um grafo bipartido completo é um grafo simples bipartido $G[X, Y]$ tal que todo vértice em X é ligado a todo vértice em Y.

- Um grafo bipartido completo $G[X, Y]$ é geralmente denotado por $K_{p,q}$, tal que $|X| = p$ e $|Y| = q$.

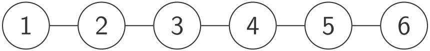


- Uma estrela é um grafo bipartido completo $G[X, Y]$ com $|X| = 1$ ou $|Y| = 1$.

Caminhos

- Um caminho é um grafo simples cujos vértices podem ser dispostos em uma sequência linear de modo que dois vértices são adjacentes se e somente se eles são consecutivos na sequência.

- Um caminho com n vértices é denotado por P_n.



Caminho P_6

Ciclos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um ciclo com três ou mais vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser dispostos em uma sequência cíclica de modo que dois vértices são adjacentes se e somente se eles são consecutivos na sequência.

Ciclos

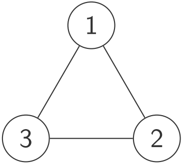
- Um ciclo com três ou mais vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser dispostos em uma sequência cíclica de modo que dois vértices são adjacentes se e somente se eles são consecutivos na sequência.

- Um ciclo com n vértices é denotado por C_n.

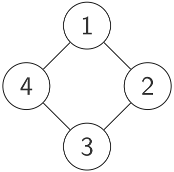
Ciclos

- Um ciclo com três ou mais vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser dispostos em uma sequência cíclica de modo que dois vértices são adjacentes se e somente se eles são consecutivos na sequência.

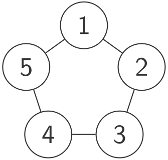
- Um ciclo com n vértices é denotado por C_n.



Ciclo C_3



Ciclo C_4



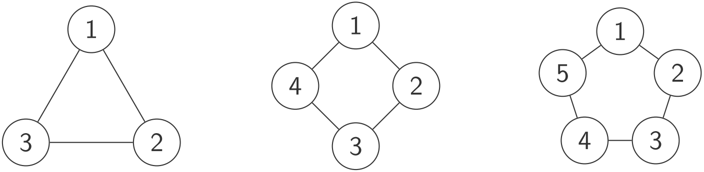
Ciclo C_5

Ciclos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um ciclo com três ou mais vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser dispostos em uma sequência cíclica de modo que dois vértices são adjacentes se e somente se eles são consecutivos na sequência.

- Um ciclo com n vértices é denotado por C_n.



Ciclo C_3 Ciclo C_4 Ciclo C_5

- O comprimento de um caminho ou ciclo é o seu número de arestas.

Árvores

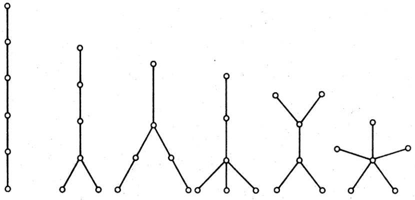
Definições

- Um grafo é acíclico se ele não contém ciclos.

Definições

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

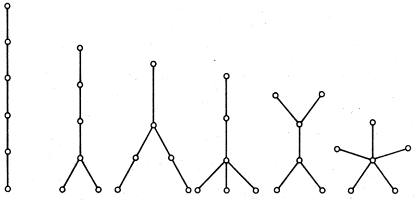
- Um grafo é acíclico se ele não contém ciclos.
- Uma árvore é um grafo conexo e acíclico.



Todas as árvores com 6 vértices

Definições

- Um grafo é acíclico se ele não contém ciclos.
- Uma árvore é um grafo conexo e acíclico.

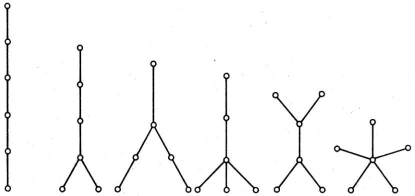


Todas as árvores com 6 vértices

- Uma floresta é um grafo acíclico.

Definições

- Um grafo é acíclico se ele não contém ciclos.
- Uma árvore é um grafo conexo e acíclico.

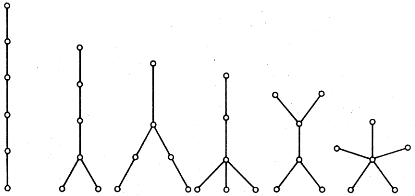


Todas as árvores com 6 vértices

- Uma floresta é um grafo acíclico.
- Uma folha é um vértice de grau 1 em uma árvore.

Definições

- Um grafo é acíclico se ele não contém ciclos.
- Uma árvore é um grafo conexo e acíclico.



Todas as árvores com 6 vértices

- Uma floresta é um grafo acíclico.
- Uma folha é um vértice de grau 1 em uma árvore.
- toda árvore com pelo menos um vértice tem folha (por quê?)

Aplicações e Exemplos

- **Aplicações:** Construção de rodovias, instalação de redes em geral. Em alguns casos, para se mostrar um resultado para grafos é interessante começar mostrando para árvores.

Aplicações e Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

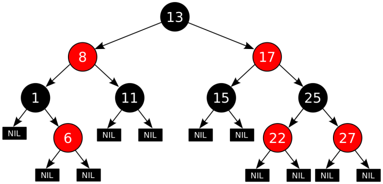
- **Aplicações:** Construção de rodovias, instalação de redes em geral. Em alguns casos, para se mostrar um resultado para grafos é interessante começar mostrando para árvores.

- Em Ciência da Computação as árvores são a base de estruturas de dados muito eficientes:

Aplicações e Exemplos

- **Aplicações:** Construção de rodovias, instalação de redes em geral. Em alguns casos, para se mostrar um resultado para grafos é interessante começar mostrando para árvores.

- Em Ciência da Computação as árvores são a base de estruturas de dados muito eficientes:
  - Árvores binárias de busca balanceadas: Árvores AVL, Árvores Rubro-Negras, Árvores B, etc.
  - Permitem busca, inserção e remoção em tempo $O(\lg n)$.



Esquema de uma árvore rubro-negra

Propriedade 1

UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 7.2: Se $G = (V, E)$ é uma árvore, então $|E| = |V| - 1$.

Demonstração:

Propriedade 1

Teorema 7.2: Se $G = (V, E)$ é uma árvore, então $|E| = |V| - 1$.

Demonstração:

- Defina $n = |V|$ e $m = |E|$.

Propriedade 1

Teorema 7.2: Se $G = (V, E)$ é uma árvore, então $|E| = |V| - 1$.

Demonstração:

- Defina $n = |V|$ e $m = |E|$.
- Vamos provar por indução no número de vértices n.

Propriedade 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 7.2: Se $G = (V, E)$ é uma árvore, então $|E| = |V| - 1$.

Demonstração:

- Defina $n = |V|$ e $m = |E|$.
- Vamos provar por indução no número de vértices n.
- Quando $n = 1$, temos que $G \cong K_1$ e $m = 0 = 1 - 1 = n - 1$. Então, o resultado vale para $n = 1$.

Propriedade 1

Teorema 7.2: Se $G = (V, E)$ é uma árvore, então $|E| = |V| - 1$.

Demonstração:

- Defina $n = |V|$ e $m = |E|$.
- Vamos provar por indução no número de vértices n.
- Quando $n = 1$, temos que $G \cong K_1$ e $m = 0 = 1 - 1 = n - 1$. Então, o resultado vale para $n = 1$.
- Suponha que o teorema é verdadeiro para toda árvore com menos do que n vértices. Seja G uma árvore com n vértices, $n > 1$.

Propriedade 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 7.2: Se $G = (V, E)$ é uma árvore, então $|E| = |V| - 1$.

Demonstração:

- Defina $n = |V|$ e $m = |E|$.
- Vamos provar por indução no número de vértices n.
- Quando $n = 1$, temos que $G \cong K_1$ e $m = 0 = 1 - 1 = n - 1$. Então, o resultado vale para $n = 1$.
- Suponha que o teorema é verdadeiro para toda árvore com menos do que n vértices. Seja G uma árvore com n vértices, $n > 1$.
- Seja P um caminho mais longo em G e sejam x e y os extremos do caminho P.

Continuação da demonstração

- Note que o vértice x deve ter grau 1 pois, caso contrário, o caminho P poderia ser aumentado ou poderia existir um ciclo em G, ambas as possibilidades levam a uma contradição.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Note que o vértice x deve ter grau 1 pois, caso contrário, o caminho P poderia ser aumentado ou poderia existir um ciclo em G, ambas as possibilidades levam a uma contradição.

- Então, nós removemos o vértice x de G. Com isso, a aresta incidente em x também é removida.

Continuação da demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Note que o vértice x deve ter grau 1 pois, caso contrário, o caminho P poderia ser aumentado ou poderia existir um ciclo em G, ambas as possibilidades levam a uma contradição.

- Então, nós removemos o vértice x de G. Com isso, a aresta incidente em x também é removida.

- Assim, nós obtemos uma nova árvore H com $n - 1$ vértices e $m - 1$ arestas.

- Pela hipótese de indução, temos que $m - 1 = (n - 1) - 1$. Daqui segue que $m = n - 1$. Então, o teorema também é verdadeiro para G. ■

Representação de grafos

Representação interna de grafos

Representamos grafos de duas maneiras principais

Representação interna de grafos

Representamos grafos de duas maneiras principais

1. matriz de adjacência

Representação interna de grafos

Representamos grafos de duas maneiras principais

1. matriz de adjacência
2. listas de adjacência

Representação interna de grafos

Representamos grafos de duas maneiras principais

1. matriz de adjacência
2. listas de adjacência

Qual estrutura de dados escolher?

Representação interna de grafos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Representamos grafos de duas maneiras principais

1. matriz de adjacência
2. listas de adjacência

Qual estrutura de dados escolher?

- depende do problema sendo tratado

Representação interna de grafos

Representamos grafos de duas maneiras principais

1. matriz de adjacência
2. listas de adjacência

Qual estrutura de dados escolher?

- depende do problema sendo tratado
- e das operações realizadas pelo algoritmo

Representação interna de grafos

Representamos grafos de duas maneiras principais

1. matriz de adjacência
2. listas de adjacência

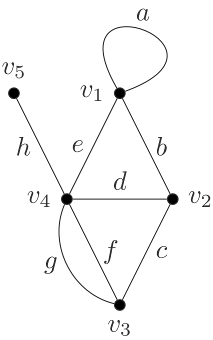
Qual estrutura de dados escolher?

- depende do problema sendo tratado
- e das operações realizadas pelo algoritmo
- a estrutura escolhida afeta a complexidade do algoritmo

Matriz de adjacência

grafo não direcionado

- Seja G um grafo com n vértices. A matriz de adjacência de G é a matriz $A(G) = (a_{uv})$ de dimensão $n \times n$, tal que a_{uv} é o número de arestas ligando os vértices u e v, cada laço contando como duas arestas.

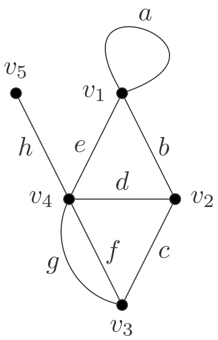


$$A(G) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matriz de adjacência

grafo não direcionado

- Seja G um grafo com n vértices. A matriz de adjacência de G é a matriz $A(G) = (a_{uv})$ de dimensão $n \times n$, tal que a_{uv} é o número de arestas ligando os vértices u e v, cada laço contando como duas arestas.

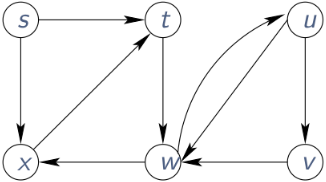


$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- se G for não direcionado, então a matriz A é simétrica

Matriz de adjacência

Grafo direcionado



$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & s & t & u & x & w & v \\
\hline
s & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
u & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
w & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
v & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

- se G for direcionado, então a matriz A não é simétrica

Listas de adjacência

Para representar um grafo $G = (V, E)$ por listas de adjacências:

Listas de adjacência

Para representar um grafo $G = (V, E)$ por listas de adjacências:

- criamos uma lista encadeada $Adj[v]$ para cada vértice v

Listas de adjacência

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Para representar um grafo $G = (V, E)$ por listas de adjacências:

- criamos uma lista encadeada $Adj[v]$ para cada vértice v
- adicionamos a $Adj[v]$ todos os vértices adjacentes a v

Listas de adjacência

Para representar um grafo $G = (V, E)$ por listas de adjacências:

- criamos uma lista encadeada $Adj[v]$ para cada vértice v
- adicionamos a $Adj[v]$ todos os vértices adjacentes a v

Como representamos uma aresta (u, v)?

Listas de adjacência

Para representar um grafo $G = (V, E)$ por listas de adjacências:

- criamos uma lista encadeada $Adj[v]$ para cada vértice v
- adicionamos a $Adj[v]$ todos os vértices adjacentes a v

Como representamos uma aresta (u, v)?

- se a aresta for direcionada, então v está em $Adj[u]$

Listas de adjacência

Para representar um grafo $G = (V, E)$ por listas de adjacências:

- criamos uma lista encadeada $Adj[v]$ para cada vértice v
- adicionamos a $Adj[v]$ todos os vértices adjacentes a v

Como representamos uma aresta (u, v)?

- se a aresta for direcionada, então v está em $Adj[u]$
- se a aresta for não direcionada,

Listas de adjacência

Para representar um grafo $G = (V, E)$ por listas de adjacências:

- criamos uma lista encadeada $Adj[v]$ para cada vértice v
- adicionamos a $Adj[v]$ todos os vértices adjacentes a v

Como representamos uma aresta (u, v)?

- se a aresta for direcionada, então v está em $Adj[u]$
- se a aresta for não direcionada,
  1. então v está em $Adj[u]$

Listas de adjacência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

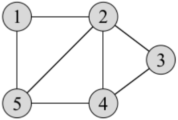
Para representar um grafo $G = (V, E)$ por listas de adjacências:

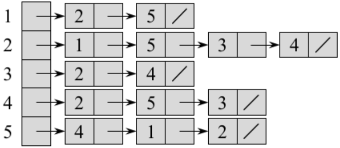
- criamos uma lista encadeada $Adj[v]$ para cada vértice v
- adicionamos a $Adj[v]$ todos os vértices adjacentes a v

Como representamos uma aresta (u, v)?

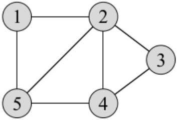
- se a aresta for direcionada, então v está em $Adj[u]$
- se a aresta for não direcionada,
  1. então v está em $Adj[u]$
  2. também u está em $Adj[v]$

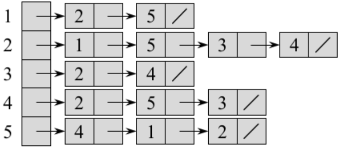
Listas de adjacências

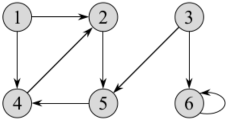


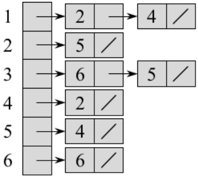


Listas de adjacências

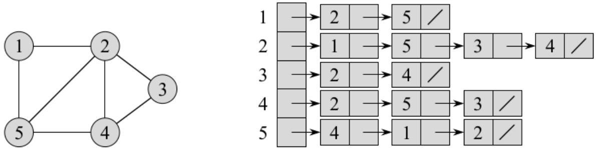


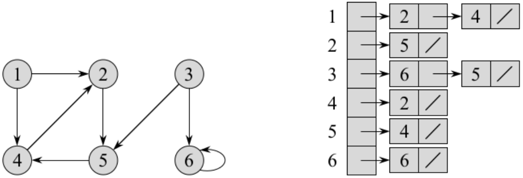






Listas de adjacências





- A representação por listas de adjacências geralmente é a mais usada por serem mais eficientes em grafos esparsos.

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$
- Listas: $O(|V| + |E|)$

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$
- Listas: $O(|V| + |E|)$

Tempo:

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$
- Listas: $O(|V| + |E|)$

Tempo:

Operação	Matriz	Listas
Inserir	$O(1)$	$O(1)$
Remover	$O(1)$	$O(d(v))$
Aresta existe?	$O(1)$	$O(d(v))$
Percorrer vizinhança	$O(\|V\|)$	$O(d(v))$
Espaço utilizado	$O(\|V\|^2)$	$O(\|V\| + \|E\|)$

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$
- Listas: $O(|V| + |E|)$

Tempo:

Operação	Matriz	Listas
Inserir	$O(1)$	$O(1)$
Remover	$O(1)$	$O(d(v))$
Aresta existe?	$O(1)$	$O(d(v))$
Percorrer vizinhança	$O(\|V\|)$	$O(d(v))$
Espaço utilizado	$O(\|V\|^2)$	$O(\|V\| + \|E\|)$

As duas permitem representar grafos e digrafos

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$
- Listas: $O(|V| + |E|)$

Tempo:

Operação	Matriz	Listas
Inserir	$O(1)$	$O(1)$
Remover	$O(1)$	$O(d(v))$
Aresta existe?	$O(1)$	$O(d(v))$
Percorrer vizinhança	$O(\|V\|)$	$O(d(v))$
Espaço utilizado	$O(\|V\|^2)$	$O(\|V\| + \|E\|)$

As duas permitem representar grafos e digrafos

Qual usar?

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$
- Listas: $O(|V| + |E|)$

Tempo:

Operação	Matriz	Listas
Inserir	$O(1)$	$O(1)$
Remover	$O(1)$	$O(d(v))$
Aresta existe?	$O(1)$	$O(d(v))$
Percorrer vizinhança	$O(\|V\|)$	$O(d(v))$
Espaço utilizado	$O(\|V\|^2)$	$O(\|V\| + \|E\|)$

As duas permitem representar grafos e digrafos

Qual usar?

- Depende das operações usadas e se o grafo é esparso

Extensões

- Há alternativas para representar grafos, mas matrizes e listas de adjacência são as mais usadas.

Extensões

- Há alternativas para representar grafos, mas matrizes e listas de adjacência são as mais usadas.
- Essas representações podem ser usadas para grafos ponderados, grafos com laços e arestas múltiplas, grafos com pesos nos vértices etc.

Extensões

- Há alternativas para representar grafos, mas matrizes e listas de adjacência são as mais usadas.
- Essas representações podem ser usadas para grafos ponderados, grafos com laços e arestas múltiplas, grafos com pesos nos vértices etc.
- Para determinados algoritmos é importante manter estruturas de dados adicionais.

Exercícios

Exercício

- O **grau** de um vértice em um grafo não-direcionado é o número de arestas que nele incidem. Em um grafo direcionado, o **grau de saída** de um vértice é o número de arestas que saem dele, e o **grau de entrada** de um vértice é o número de arestas que entram nele. O **grau** de um vértice em um grafo direcionado é seu grau de entrada mais seu grau de saída.

  Dada uma representação por lista de adjacências de um grafo direcionado:

(a) Qual o tempo necessário para calcular os graus de saída de todos os vértices?
(b) Qual o tempo necessário para calcular os graus de entrada?

Exercício

- O **grau** de um vértice em um grafo não-direcionado é o número de arestas que nele incidem. Em um grafo direcionado, o **grau de saída** de um vértice é o número de arestas que saem dele, e o **grau de entrada** de um vértice é o número de arestas que entram nele. O **grau** de um vértice em um grafo direcionado é seu grau de entrada mais seu grau de saída.

  Dada uma representação por lista de adjacências de um grafo direcionado:

(a) Qual o tempo necessário para calcular os graus de saída de todos os vértices?
(b) Qual o tempo necessário para calcular os graus de entrada?

Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- O **transposto** de um grafo direcionado $G = (V, E)$ é o grafo $G_T = (V, E_T)$, onde $E_T = \{(v, u) \in V \times V : (u, v) \in E\}$. Assim, G_T é G com todas as suas arestas invertidas. Descreva algoritmos eficientes para calcular G_T a partir de G, para a representação por lista de adjacências e também para a representação por matriz de adjacências de G. Analise os tempos de execução de seus algoritmos.

- O **quadrado** de um grafo direcionado $G = (V, E)$ é o grafo $G_2 = (V, E_2)$ em que $(u, v) \in E_2$ se e somente se G contiver um caminho que tenha no máximo duas arestas entre u e v. Descreva algoritmos eficientes para calcular G_2 a partir de G para uma representação por lista de adjacências e para uma representação por matriz de adjacências de G. Analise os tempos de execução de seus algoritmos.

Exercícios

- A maioria dos algoritmos em grafos que adota uma representação por matriz de adjacências como entrada exige o tempo $\Omega(V^2)$, mas há algumas exceções. Mostre como determinar se um grafo direcionado G contém um **sumidouro** (isto é, um vértice com grau de entrada $|V|-1$ e grau de saída 0) no tempo $O(V)$, dada uma matriz de adjacências para G.

Exercícios

- A **matriz de incidência** de um grafo direcionado $G = (V, E)$ sem nenhum laço é uma matriz $B = (b_{ij})$ de dimensão $|V| \times |E|$ tal que:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{se a aresta } j \text{ sai do vértice } i; \\ 1, & \text{se a aresta } j \text{ entra no vértice } i; \\ 0, & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

  Descreva o que representam as entradas do produto de matrizes BB_T, onde B_T é a transposta de B.

- Dada a matriz de adjacências de uma grafo com N vértices, faça um algoritmo que determine se esse grafo é direcionado ou não-direcionado.

Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um **multigrafo** é um grafo que possui arestas paralelas e/ou laços. Dada uma representação por lista de adjacências de um multigrafo $G = (V, E)$, descreva um algoritmo de tempo $O(V + E)$ para calcular a representação por lista de adjacências do grafo não direcionado "equivalente" $G' = (V, E')$, onde E' consiste nas arestas em E onde todas as arestas múltiplas entre dois vértices foram substituídas por uma aresta única e onde todos os laços foram removidos.

FIM