QXD0116 - Álgebra Linear

Transformações Lineares III

André Ribeiro Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Transformações Lineares

Unicidade

Teorema

Sejam $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ espaços vetoriais reais. Sejam $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_3\}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_3\}$ bases de $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$, respectivamente. Então existe uma única transformação linear $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ tal que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{v}_1 \\ T(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{v}_2 \\ &\vdots \\ T(\mathbf{u}_n) &= \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Transformações Lineares

Unicidade

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear onde

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine $T(\mathbf{u})$.

Solução

Pode-se observar que $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Assim, para qualquer vetor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = u_1 \\ \alpha + \beta = u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = u_1 \\ \beta = u_2 - u_1 \end{matrix}$$

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear onde
$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine $T(\mathbf{u})$.

Solução

Assim

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (u_2 - u_1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pelo teorema, existe uma única transformação linear tal que
$T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$

Transformações Lineares

Unicidade

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear onde

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine $T(\mathbf{u})$.

Solução

Dessa forma

$$
\begin{aligned}
T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) &= T\left(u_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (u_2 - u_1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= u_1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + (u_2 - u_1) \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

Transformações Lineares

Unicidade

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear onde

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine $T(\mathbf{u})$.

Solução

Dessa forma

$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = u_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (u_2 - u_1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2u_1 \\ 1u_1 \\ 2u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2 - u_1 \\ u_2 - u_1 \\ 2u_2 - 2u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_2 \\ 2u_2 \end{bmatrix}$$

Transformações Lineares

Imagem

Definição

Seja $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$, a imagem de T é o conjunto de vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ tais que existe um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ que satisfaz $T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$:

$$Im(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} | T(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \ , \ \forall \ \mathbf{u} \in \mathbb{U}\}.$$

$Im(T)$ é um subconjunto de $\mathbb{V}$.

Transformações Lineares

Imagem

Exemplo

Considere $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + 2u_2 \\ u_2 + 2u_3 \\ u_1 + 3u_2 + 2u_3 \end{bmatrix}.$$ Determine $Im(T)$.

Solução

Sabendo que $Im(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 | T(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \ , \ \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3\}$

$$\begin{bmatrix} u_1 + 2u_2 \\ u_2 + 2u_2 \\ u_1 + 3u_2 + 2u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 2u_2 = v_1 \\ u_2 + 2u_3 = v_2 \\ u_1 + 3u_2 + 2u_3 = v_3 \end{cases}$$

Transformações Lineares

Imagem

Exemplo

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + 2u_2 \\ u_2 + 2u_3 \\ u_1 + 3u_2 + 2u_3 \end{bmatrix}.$$ Determine $Im(T)$.

Solução

Portanto $Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| -v_1 - v_2 + v_3 = 0 \right\}.$

Transformações Lineares

Imagem

Teorema

Se $T : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ é uma transformação linear, então $Im(T)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$. Isto porque

(a) $\theta \in Im(T)$

(b) $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in Im(T) \Rightarrow \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in Im(T)$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall \mathbf{v} \in Im(T) \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{v} \in Im(T)$

Se $Im(T) = \mathbb{V}$, a função é sobrejetora.

Transformações Lineares

Núcleo

Definição

Seja $T : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$, o núcleo (ou *kernel*) de T é o conjunto dos vetores $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ que são levados ao elemento nulo através da transformação.

$$N(T) = ker(T) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{U} | T(\mathbf{u}) = \theta \in \mathbb{V}\}$$

Se $ker(T) = \{\theta\}$, a função é injetora.

Transformações Lineares

Núcleo

Exemplo

Determine $ker(T)$ pra $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + 2u_2 + u_3 \\ u_1 + 5u_2 + 4u_3 \\ -u_1 + u_2 + 2u_3 \end{bmatrix}.$$

Solução

$$\begin{bmatrix} u_1 + 2u_2 + u_3 \\ u_1 + 5u_2 + 4u_3 \\ -u_1 + u_2 + 2u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 + 5u_2 + 4u_3 = 0 \\ -u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \end{cases}$$

Exemplo

Determine $ker(T)$ pra $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + 2u_2 + u_3 \\ u_1 + 5u_2 + 4u_3 \\ -u_1 + u_2 + 2u_3 \end{bmatrix}.$$

Solução

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 0 \\ 3u_2 + 3u_3 = 0 \\ 3u_2 + 3u_3 = 0 \end{cases}$$

Transformações Lineares

Núcleo

Exemplo

Determine $ker(T)$ pra $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + 2u_2 + u_3 \\ u_1 + 5u_2 + 4u_3 \\ -u_1 + u_2 + 2u_3 \end{bmatrix}.$$

Solução

$$ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| u_1 = u_3 \ , \ u_2 = -u_3 \ , \ \forall u_3 \in \mathbb{R} \right\}$$