Lógica para Computação

Profa. Dra. Viviane Menezes

Universidade Federal do Ceará

vivianemenezes@ufc.br

11 de abril de 2024

Semântica da Lógica Proposicional

Semântica da Lógica Proposicional

- Sintaxe versus Semântica.
- Prova sintática versus Prova Semântica.

Semântica da Lógica Proposicional

Valoração

- O conjunto de valores verdade da lógica proposicional contém dois elementos:
  - 1 (valor-verdade verdadeiro) e;
  - 0 (valor-verdade falso).

- A valoração de uma fórmula φ é uma atribuição de **cada átomo proposicional** em φ a um valor-verdade.

Semântica da Lógica Proposicional

Valoração de Átomos Proposicionais

Seja $\mathcal{P}$ um conjunto de átomos proposicionais. Define-se a função valoração $v : \mathcal{P} \mapsto \{0, 1\}$ para mapear átomos proposicionais $P \in \mathcal{P}$ em um possível valor verdade:

- $v(P) = 0$ ou
- $v(P) = 1$.

Semântica da Lógica Proposicional

Valoração de Fórmulas

Seja φ uma fórmula da Lógica Proposicional e seja $v : \mathcal{P} \mapsto \{0,1\}$ a função de valoração para átomos proposicionais. Define-se $\bar{v} : \varphi \mapsto \{0,1\}$ a **função valoração para fórmulas** como segue:

1. $\bar{v}(\mathcal{P}) = v(\mathcal{P})$.
2. $\bar{v}((\neg\varphi)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{v}(\varphi) = 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
3. $\bar{v}((\varphi \wedge \psi)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{v}(\varphi) = 1 \quad \text{e} \quad \bar{v}(\psi) = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
4. $\bar{v}((\varphi \vee \psi)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{v}(\varphi) = 1 \quad \text{ou} \quad \bar{v}(\psi) = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
5. $\bar{v}((\varphi \rightarrow \psi)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{v}(\varphi) = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{v}(\psi) = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Semântica da Lógica Proposicional

Valoração de Fórmulas

- Compute $\bar{v}(\neg P \wedge Q)$, dado que $v(P) = 1$ e $v(Q) = 0$.

Semântica da Lógica Proposicional

Valoração de Fórmulas

- Compute $\bar{v}((\neg P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge (S \vee \neg T))$, dado que $v(P) = 1, v(R) = 1, v(S) = 1,\ v(T) = 1,\ v(Q) = 0.$

Valoração de Fórmulas

- Compute $\bar{v}((\neg P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge (S \vee \neg T))$, dado que $v(P) = 1, v(R) = 1, v(S) = 1, v(T) = 1, v(Q) = 0$.

- É *sempre* necessário conhecer a valoração de todos os átomos para determinar a valoração da fórmula?

Semântica da Lógica Proposicional

Exemplo

Compute:

$$\bar{v}((P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge \neg Q))$$

sendo $v(P) = 1$, $v(Q) = 0$ e $v(R) = 1$.

Semântica da Lógica Proposicional

Exercício

Compute:

- $\bar{v}(P \to Q \to Q \to R \to (P \land Q \land R))$
- $\bar{v}((P \land \neg(P \to \neg Q) \lor \neg Q))$
- $\bar{v}((P \land \neg Q) \lor (R \land S))$

sendo a valoração das fórmulas abaixo, sendo $v(p) = 1$, $v(q) = 1$, $v(r) = 1$ e $v(s) = 1$.

Satisfibilidade

Satisfibilidade

- Uma fórmula φ é *satisfazível* se **existe uma valoração** para os átomos proposicionais na qual é possível tornar $\bar{v}(\varphi) = 1$.

- Uma fórmula φ é *insatisfazível* se **para todas as possíveis valorações** de átomos, $\bar{v}(\varphi) = 0$.

Satisfatibilidade

Um dos grandes desafios da computação é encontrar métodos eficientes para decidir se uma fórmula é satisfatível.

Satisfatibilidade

Exercício

Encontre uma valoração para os átomos proposicionais que satisfaça as seguintes fórmulas:

- $P \to \neg P$
- $Q \to P \wedge \neg P$
- $(P \to Q) \to P$
- $\neg(P \vee Q \to Q)$

Validade

Validade

- Uma fórmula φ é *válida* se **para todas as possíveis valorações** de átomos, a função valoração $\bar{v}(\varphi) = 1$.

Validade

- Uma fórmula φ é *válida* se **para todas as possíveis valorações** de átomos, a função valoração $\bar{v}(\varphi) = 1$.

- Uma fórmula φ é *falsificável* se **existe uma** valoração para os átomos que torna $\bar{v}(\varphi) = 0$.

Validade

Exemplo

- A fórmula $P \to Q$ é válida?

Satisfatibilidade e Validade

Exercício

Explique as afirmações a seguir:

- *Toda fórmula válida é também satisfazível.*
- *Toda fórmula insatisfazível é falsificável.*
- *Uma fórmula não pode ser satisfazível e insatisfazível.*
- *Uma fórmula não pode ser válida e falsificável.*
- *Uma fórmula pode ser tanto satisfazível como falsificável.*

Satisfatibilidade e Validade

Exercício

Classifique as fórmulas de acordo com a sua *satisfatibilidade*, *validade*, *falsificabilidade* ou *insatisfatibilidade*.

- $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$
- $(P \wedge \neg P) \rightarrow Q$
- $P \rightarrow Q \rightarrow P \wedge Q$
- $P \rightarrow \neg\neg P$

Consequência Lógica

Consequência Lógica

Uma fórmula ψ é **consequência lógica** de uma teoria $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$, isto é.,

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \models \psi$$

se para todas as valorações nas quais a teoria é **verdadeira**, isto é, $\bar{v}(\varphi_1) = 1, \bar{v}(\varphi_2) = 1, \cdots$ e $\bar{v}(\varphi_n) = 1$, a fórmula ψ também é **verdadeira**, isto é, $\bar{v}(\psi) = 1$.

Consequência Lógica

Exercício

- A relação $P \wedge Q \models P$ é verdadeira?
- A relação $P \vee Q \models P$ é verdadeira?
- A relação $\neg Q, P \vee Q \models P$ é verdadeira?
- A relação $P \models Q \vee \neg Q$ é verdadeira?

Consequência Lógica

Exercício

Considere a seguinte teoria:

$$\begin{gathered} \mathit{crianca} \lor \mathit{jovem} \lor \mathit{adulto} \lor \mathit{idoso}, \\ \mathit{trabalhador} \lor \mathit{estudante} \lor \mathit{aposentado}, \\ \mathit{jovem} \rightarrow \mathit{trabalhador} \lor \mathit{estudante}, \\ \neg(\mathit{criança} \land \mathit{aposentado}), \\ \neg(\mathit{criança} \land \mathit{trabalhador}). \end{gathered}$$

Verificar quais das fórmulas são consequência lógica da teoria.

- ψ_1: $\mathit{criança} \rightarrow \neg\, \mathit{jovem}$
- ψ_2: $(\mathit{aposentado} \land \neg \mathit{jovem}) \rightarrow (\mathit{adulto} \lor \text{idoso})$

Equivalência

Equivalência

Duas fórmulas φ e ψ são ditas equivalentes se:

- $\varphi \models \psi$ e
- $\psi \models \varphi$

Equivalência

Duas fórmulas φ e ψ são ditas equivalentes se:

- $\varphi \models \psi$ e
- $\psi \models \varphi$
- escrevemos: $\varphi \equiv \psi$

Equivalência

Exercício

Mostre que:

- $P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$
- $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

Não use a tabela verdade! Use a definição de equivalência.