

Sequências e Somatórios

QXD0008 – Matemática Discreta



UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily
ismailybf@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2022



Tópicos desta aula

Nesta apresentação:

- Sequências: PA, PG, Relações de Recorrência
- Somatórios: Propriedades, Mudança de Índice



Referências para esta aula

Esta aula foi baseada na seguinte seção:

- **Seção 2.4** do livro: [Discrete Mathematics and Its Applications.](#)
Author: Kenneth H. Rosen. Seventh Edition. **(English version)**

Uma versão mais resumida do conteúdo pode ser encontrada também nesta seção:

- **Seção 2.4** do livro: [Matemática Discreta e suas Aplicações.](#)
Autor: Kenneth H. Rosen. Sexta Edição.

Introdução



Sequência — Definição

- **Definição:** Uma **sequência** é uma função de um subconjunto dos inteiros para um conjunto S qualquer.

Sequência — Definição

- **Definição:** Uma **sequência** é uma função de um subconjunto dos inteiros para um conjunto S qualquer.

Dada uma sequência...

- Seu **domínio** é um subconjunto dos inteiros
 - Comumente usa-se $D = \{0, 1, 2, \dots\}$ ou $D = \{1, 2, 3, \dots\}$
 - O domínio de uma sequência também é chamado de índice

Sequência — Definição

- **Definição:** Uma **sequência** é uma função de um subconjunto dos inteiros para um conjunto S qualquer.

Dada uma sequência...

- Seu **domínio** é um subconjunto dos inteiros
 - Comumente usa-se $D = \{0, 1, 2, \dots\}$ ou $D = \{1, 2, 3, \dots\}$
 - O domínio de uma sequência também é chamado de índice
- Seu contradomínio pode ser qualquer conjunto

Sequência — Definição

- **Definição:** Uma **sequência** é uma função de um subconjunto dos inteiros para um conjunto S qualquer.

Dada uma sequência...

- Seu **domínio** é um subconjunto dos inteiros
 - Comumente usa-se $D = \{0, 1, 2, \dots\}$ ou $D = \{1, 2, 3, \dots\}$
 - O domínio de uma sequência também é chamado de índice
- Seu contradomínio pode ser qualquer conjunto

Constatação: Toda função $f: D \rightarrow S$ tal que $D \subseteq \mathbb{Z}$ é uma sequência.

Sequência — Exemplo

- **Definição:** Uma **sequência** é uma função de um subconjunto dos inteiros para um conjunto S qualquer.

Exemplo:

A função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais.

Sequência — Exemplo

- **Definição:** Uma **sequência** é uma função de um subconjunto dos inteiros para um conjunto S qualquer.

Exemplo:

A função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais.

Neste caso, temos $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, com $f(n) = 2^n$.

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8, f(4) = 16, \\ f(5) &= 32, f(6) = 64, f(7) = 128, f(8) = 256, \dots \end{aligned}$$

Sequência — Exemplo

- **Definição:** Uma **sequência** é uma função de um subconjunto dos inteiros para um conjunto S qualquer.

Exemplo:

A função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais.

Neste caso, temos $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, com $f(n) = 2^n$.

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8, f(4) = 16, \\ f(5) &= 32, f(6) = 64, f(7) = 128, f(8) = 256, \dots \end{aligned}$$

Em algumas situações, falaremos simplesmente da sequência

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots$$

Sequência — Notação

Notação (Opções)

- “a função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais.”
- “a sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...”
- “a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = 2^n$ ”

Sequência — Notação

Notação (Opções)

- “a função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais.”
- “a sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...”
- “a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = 2^n$ ”

Exemplo

Considere a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = \frac{1}{n}$

Quem são os termos de $\{a_n\}$?

Sequência — Notação

Notação (Opções)

- “a função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais.”
- “a sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...”
- “a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = 2^n$ ”

Exemplo

Considere a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = \frac{1}{n}$

Quem são os termos de $\{a_n\}$?

- Ou seja, quem são $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$?

Sequência — Notação

Notação (Opções)

- “a função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais.”
- “a sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...”
- “a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = 2^n$ ”

Exemplo

Considere a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = \frac{1}{n}$

Quem são os termos de $\{a_n\}$?

- Ou seja, quem são $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$?

Resposta: $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, \dots$

Sequência — Notação

Notação (Opções)

- “a função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais.”
- “a sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...”
- “a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = 2^n$ ”

Exemplo

Considere a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = \frac{1}{n}$

Quem são os termos de $\{a_n\}$?

- Ou seja, quem são $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$?

Resposta: $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, \dots$

Alternativamente, a sequência é $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

Progressão Aritmética



Progressão Aritmética — Definição

- **Definição:** Uma **progressão aritmética** (PA) é uma sequência da forma

$$a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, \dots, a_0 + nd, \dots$$

onde a_0 e d são números reais.

Dada uma PA...

- a_0 é o seu **termo inicial**
- d é sua **razão aritmética** ou **diferença comum**

Progressão Aritmética

REPARE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$
- Os termos descritos na PA são $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 + 0d, & a_0 + 1d, & a_0 + 2d, & a_0 + 3d, & \dots, & a_0 + nd, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_n, & \dots \end{array}$$

Progressão Aritmética

REPARE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$
- Os termos descritos na PA são $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_0 + \mathbf{0}d, & a_0 + \mathbf{1}d, & a_0 + \mathbf{2}d, & a_0 + \mathbf{3}d, & \dots, & a_0 + \mathbf{n}d, & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\
 \mathbf{a_0}, & \mathbf{a_1}, & \mathbf{a_2}, & \mathbf{a_3}, & \dots, & \mathbf{a_n}, & \dots
 \end{array}$$

Constatação:

Cada PA é caracterizada por uma função da forma $f(x) = a_0 + dx$, onde a_0 e d são números reais, mas com domínio restrito a um subconjunto dos inteiros.

Progressão Aritmética

REPRE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$
- Os termos descritos na PA são $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_0 + 0d, & a_0 + 1d, & a_0 + 2d, & a_0 + 3d, & \dots, & a_0 + nd, & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\
 a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_n, & \dots
 \end{array}$$

Constatação:

Cada PA é caracterizada por uma função da forma $f(x) = a_0 + dx$, onde a_0 e d são números reais, mas com domínio restrito a um subconjunto dos inteiros.

Dizemos ainda que a PA $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, \dots, a_0 + nd, \dots$ é a **análoga discreta** da função linear $f(x) = a_0 + dx$.

Progressão Aritmética

Exemplo

A sequência $\{s_n\}$ com $s_n = -1 + 4n$ é uma progressão aritmética.

Perguntas

1. Qual o primeiro termo da lista?
2. Qual a razão aritmética da PA?
3. Quem são os primeiros cinco termos?

Progressão Aritmética

Exemplo

A sequência $\{s_n\}$ com $s_n = -1 + 4n$ é uma progressão aritmética.

Perguntas

1. Qual o primeiro termo da lista? $s_0 = -1 + 4 \cdot 0 = -1$
2. Qual a razão aritmética da PA? $d = 4$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $-1, 3, 7, 11, 15, \dots$

Progressão Aritmética

Exemplo

A sequência $\{s_n\}$ com $s_n = -1 + 4n$ é uma progressão aritmética.

Perguntas

1. Qual o primeiro termo da lista? $s_0 = -1 + 4 \cdot 0 = -1$
2. Qual a razão aritmética da PA? $d = 4$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $-1, 3, 7, 11, 15, \dots$

Observação: Dizemos que esta sequência é **infinita** e **crescente**.

Progressão Aritmética

Exercício para casa: Prove o seguinte teorema.

Teorema. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a, d \in \mathbb{R}$,

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n - 1)d) = \frac{n(2a + (n - 1)d)}{2}.$$

Progressão Geométrica



Progressão Geométrica — Definição

- **Definição:** Uma **progressão geométrica** (PG) é uma sequência da forma

$$a_0, a_0r, a_0r^2, a_0r^3, \dots, a_0r^n, \dots$$

onde a_0 e r são números reais.

Dada uma PG...

- a_0 é o seu **termo inicial**
- r é sua **razão geométrica** ou **razão comum**

Progressão Geométrica

REPARE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$
- Os termos descritos na PA são $a_0, a_0r, a_0r^2, a_0r^3, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_0r^0, & a_0r^1, & a_0r^2, & a_0r^3, & \dots, & a_0r^n, & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\
 a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_n, & \dots
 \end{array}$$

Progressão Geométrica

REPRE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$
- Os termos descritos na PA são $a_0, a_0r, a_0r^2, a_0r^3, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc} a_0r^0, & a_0r^1, & a_0r^2, & a_0r^3, & \dots, & a_0r^n, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_n, & \dots \end{array}$$

Constatação:

Cada PG é caracterizada por uma função da forma $f(x) = a_0r^x$, onde a_0 e r são números reais, mas com domínio restrito a um subconjunto dos inteiros.

Progressão Geométrica

REPARE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$
- Os termos descritos na PA são $a_0, a_0r, a_0r^2, a_0r^3, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_0r^0, & a_0r^1, & a_0r^2, & a_0r^3, & \dots, & a_0r^n, & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\
 a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_n, & \dots
 \end{array}$$

Constatação:

Cada PG é caracterizada por uma função da forma $f(x) = a_0r^x$, onde a_0 e r são números reais, mas com domínio restrito a um subconjunto dos inteiros.

Dizemos ainda que a PG $a_0, a_0r, a_0r^2, a_0r^3, \dots, a_0r^n, \dots$ é a **análoga discreta** da função exponencial $f(x) = a_0r^x$.

Progressão Geométrica

Exemplo

A sequência $\{c_n\}$ com $c_n = 2 \cdot 5^n$ é uma progressão geométrica.

Perguntas

1. Qual o primeiro termo da lista?
2. Qual a razão geométrica da PG?
3. Quem são os primeiros cinco termos?

Progressão Geométrica

Exemplo

A sequência $\{c_n\}$ com $c_n = 2 \cdot 5^n$ é uma progressão geométrica.

Perguntas

1. Qual o primeiro termo da lista? $c_0 = 2 \cdot 5^0 = 2 \cdot 1 = 2$
2. Qual a razão geométrica da PG? $r = 5$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $2, 10, 50, 250, 1250, \dots$

Progressão Geométrica

Exemplo

A sequência $\{c_n\}$ com $c_n = 2 \cdot 5^n$ é uma progressão geométrica.

Perguntas

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1. Qual o primeiro termo da lista? | $c_0 = 2 \cdot 5^0 = 2 \cdot 1 = 2$ |
| 2. Qual a razão geométrica da PG? | $r = 5$ |
| 3. Quem são os primeiros cinco termos? | $2, 10, 50, 250, 1250, \dots$ |

Observação: Dizemos que esta sequência é **infinita** e **crescente**.

Progressão Geométrica

Exemplo

A sequência $\{d_n\}$ com $d_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é uma progressão geométrica.

Perguntas

1. Qual o primeiro termo da lista?
2. Qual a razão geométrica da PG?
3. Quem são os primeiros cinco termos?

Progressão Geométrica

Exemplo

A sequência $\{d_n\}$ com $d_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é uma progressão geométrica.

Perguntas

1. Qual o primeiro termo da lista? $d_0 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 6 \cdot 1 = 6$
2. Qual a razão geométrica da PG? $r = \frac{1}{3}$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$

Progressão Geométrica

Exemplo

A sequência $\{d_n\}$ com $d_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é uma progressão geométrica.

Perguntas

1. Qual o primeiro termo da lista? $d_0 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 6 \cdot 1 = 6$
2. Qual a razão geométrica da PG? $r = \frac{1}{3}$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$

Observação: Dizemos que esta sequência é **infinita** e **decrecente**.

Progressão Geométrica

Exemplo

A sequência $\{e_n\}$ com $e_n = (-1)^n$ é uma progressão geométrica.

Perguntas

1. Qual o primeiro termo da lista?
2. Qual a razão geométrica da PG?
3. Quem são os primeiros cinco termos?

Progressão Geométrica

Exemplo

A sequência $\{e_n\}$ com $e_n = (-1)^n$ é uma progressão geométrica.

Perguntas

1. Qual o primeiro termo da lista? $e_0 = (-1)^0 = 1$
2. Qual a razão geométrica da PG? $r = -1$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $1, -1, 1, -1, 1, \dots$

Progressão Geométrica

Exemplo

A sequência $\{e_n\}$ com $e_n = (-1)^n$ é uma progressão geométrica.

Perguntas

1. Qual o primeiro termo da lista? $e_0 = (-1)^0 = 1$
2. Qual a razão geométrica da PG? $r = -1$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $1, -1, 1, -1, 1, \dots$

Se uma sequência é sempre crescente ou sempre decrescente, ela é chamada de **monótona**.

Observação: Dizemos que esta sequência é **infinita** e **não monótona**.

Somas de Progressões Geométricas

Teorema. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a, r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Demonstração:

Somas de Progressões Geométricas

Teorema. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a, r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Demonstração:

Seja $P(n)$ a afirmação de que a soma dos $n + 1$ primeiros termos de uma progressão geométrica é $\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$.

Somas de Progressões Geométricas

Teorema. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a, r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Demonstração:

Seja $P(n)$ a afirmação de que a soma dos $n + 1$ primeiros termos de uma progressão geométrica é $\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$.

Vamos provar por indução em n .

Somas de Progressões Geométricas

Teorema. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a, r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Demonstração:

Seja $P(n)$ a afirmação de que a soma dos $n + 1$ primeiros termos de uma progressão geométrica é $\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$.

Vamos provar por indução em n .

Base: $P(0)$ é verdadeiro, pois

$$\frac{ar^{0+1} - a}{r - 1} = \frac{ar - a}{r - 1} = \frac{a(r - 1)}{r - 1} = a.$$

Somas de Progressões Geométricas

Teorema. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

Passo Indutivo: A **Hipótese de Indução** é a afirmação de que $P(k)$ é verdadeiro para um natural k arbitrário.

Somas de Progressões Geométricas

Teorema. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

Passo Indutivo: A **Hipótese de Indução** é a afirmação de que $P(k)$ é verdadeiro para um natural k arbitrário. Ou seja, $P(k)$ é a afirmação

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^k = \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1}.$$

Somas de Progressões Geométricas

Teorema. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

Passo Indutivo: A **Hipótese de Indução** é a afirmação de que $P(k)$ é verdadeiro para um natural k arbitrário. Ou seja, $P(k)$ é a afirmação

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^k = \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1}.$$

Devemos mostrar que, se $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k + 1)$ é verdadeiro.

Somas de Progressões Geométricas

Teorema. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

Passo Indutivo: A **Hipótese de Indução** é a afirmação de que $P(k)$ é verdadeiro para um natural k arbitrário. Ou seja, $P(k)$ é a afirmação

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^k = \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1}.$$

Devemos mostrar que, se $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k + 1)$ é verdadeiro. Ou seja, devemos mostrar que:

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^k + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+2} - a}{r - 1}.$$

Somas de Progressões Geométricas

Teorema. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + \dots + ar^k}_{\text{Oportunidade de aplicar a HI}} + ar^{k+1}$$

Somas de Progressões Geométricas

Teorema. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + \dots + ar^k}_{\text{Oportunidade de aplicar a HI}} + ar^{k+1} \stackrel{HI}{=} \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + ar^{k+1}$$

Somas de Progressões Geométricas

Teorema. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

$$\begin{aligned} \underbrace{a + ar + ar^2 + \dots + ar^k}_{\text{Oportunidade de aplicar a HI}} + ar^{k+1} &\stackrel{\text{HI}}{=} \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + ar^{k+1} \\ &= \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + \frac{ar^{k+2} - ar^{k+1}}{r - 1} \end{aligned}$$



Somas de Progressões Geométricas

Teorema. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{a + ar + ar^2 + \dots + ar^k}_{\text{Oportunidade de aplicar a HI}} + ar^{k+1} &\stackrel{\text{HI}}{=} \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + ar^{k+1} \\
 &= \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + \frac{ar^{k+2} - ar^{k+1}}{r - 1} \\
 &= \frac{ar^{k+2} - a}{r - 1}.
 \end{aligned}$$

Isso mostra que se a hipótese de indução $P(k)$ for verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira. Isso completa a prova do passo indutivo. Como provamos a base e o passo indutivo, a prova por indução está completa. \square

Relações de Recorrência



Outras formas de especificar sequências

- Vimos que PAs e PGs podem ser especificadas fornecendo fórmulas explícitas para seus termos:
 - PA: $a_n = a_0 + n \cdot d$
 - PG: $c_n = c_0 \cdot r^n$

Outras formas de especificar sequências

- Vimos que PAs e PGs podem ser especificadas fornecendo fórmulas explícitas para seus termos:
 - PA: $a_n = a_0 + n \cdot d$
 - PG: $c_n = c_0 \cdot r^n$
- Porém existem outros modos de especificar uma sequência.
- Uma outra forma consiste em fornecer um ou mais termos iniciais juntamente com uma regra de formação dos termos subsequentes.

Relações de Recorrência

- **Definição:** Uma **relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada termo a_n em função de um ou mais termos que o antecedem.

Relações de Recorrência

- **Definição:** Uma **relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada termo a_n em função de um ou mais termos que o antecedem.

Dizemos que uma sequência **resolve** uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.

Relações de Recorrência

- **Definição:** Uma **relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada termo a_n em função de um ou mais termos que o antecedem.

Dizemos que uma sequência **resolve** uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.

Exemplo:

Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para todo $n \geq 1$, em que $a_0 = 2$. Também é comum especificar uma relação de recorrência utilizando a letra T , nesse caso, tem-se que $T(n) = T(n-1) + 3$, sendo $T(0) = 2$.

Relações de Recorrência

- **Definição:** Uma **relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada termo a_n em função de um ou mais termos que o antecedem.

Dizemos que uma sequência **resolve** uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.

Exemplo:

Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para todo $n \geq 1$, em que $a_0 = 2$. Também é comum especificar uma relação de recorrência utilizando a letra T , nesse caso, tem-se que $T(n) = T(n-1) + 3$, sendo $T(0) = 2$.

Pergunta: Quais são os termos $T(1)$, $T(2)$ e $T(3)$?

Relações de Recorrência

- **Definição:** Uma **relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada termo a_n em função de um ou mais termos que o antecedem.

Dizemos que uma sequência **resolve** uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.

Exemplo:

Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para todo $n \geq 1$, em que $a_0 = 2$. Também é comum especificar uma relação de recorrência utilizando a letra T , nesse caso, tem-se que $T(n) = T(n-1) + 3$, sendo $T(0) = 2$.

Pergunta: Quais são os termos $T(1)$, $T(2)$ e $T(3)$?

- $T(1) = T(0) + 3 = 2 + 3 = 5$
- $T(2) = T(1) + 3 = 5 + 3 = 8$
- $T(3) = T(2) + 3 = 8 + 3 = 11$

Relações de Recorrência

- **Definição:** Uma **relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada termo a_n em função de um ou mais termos que o antecedem.

Dizemos que uma sequência **resolve** uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.

Exemplo:

Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para todo $n \geq 1$, em que $a_0 = 2$. Também é comum especificar uma relação de recorrência utilizando a letra T , nesse caso, tem-se que $T(n) = T(n-1) + 3$, sendo $T(0) = 2$.

Pergunta: Quais são os termos $T(1)$, $T(2)$ e $T(3)$?

- $T(1) = T(0) + 3 = 2 + 3 = 5$
- $T(2) = T(1) + 3 = 5 + 3 = 8$
- $T(3) = T(2) + 3 = 8 + 3 = 11$

Veja que foi necessário calcular algum termo novo antes de cada $T(n)$.

Relações de Recorrência — Exemplo

Exemplo:

Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 0; \\ 5 & \text{se } n = 1; \\ a_{n-1} - a_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Relações de Recorrência — Exemplo

Exemplo:

Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 0; \\ 5 & \text{se } n = 1; \\ a_{n-1} - a_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Pergunta: Quais são os termos a_2, a_3, a_4 ?

Relações de Recorrência — Exemplo

Exemplo:

Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 0; \\ 5 & \text{se } n = 1; \\ a_{n-1} - a_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Pergunta: Quais são os termos a_2, a_3, a_4 ?

- $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$
- $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$
- $a_4 = a_3 - a_2 = -3 - 2 = -5$

Relações de Recorrência — Exemplo

Exemplo:

Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 0; \\ 5 & \text{se } n = 1; \\ a_{n-1} - a_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Pergunta: Quais são os termos a_2, a_3, a_4 ?

- $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$
- $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$
- $a_4 = a_3 - a_2 = -3 - 2 = -5$

$\{a_n\}$ é a sequência $3, 5, 2, -3, -5, -2, 3, 5, \dots$

Exemplo: Sequência de Fibonacci

Definição: A sequência de Fibonacci é definida pela relação de recorrência

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0; \\ 1 & \text{se } n = 1; \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$



Leonardo Fibonacci

Exemplo: Sequência de Fibonacci

Definição: A sequência de Fibonacci é definida pela relação de recorrência

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0; \\ 1 & \text{se } n = 1; \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$



Leonardo Fibonacci

Pergunta: Quais são os números f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 ?

Exemplo: Sequência de Fibonacci

Definição: A sequência de Fibonacci é definida pela relação de recorrência

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0; \\ 1 & \text{se } n = 1; \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$



Leonardo Fibonacci

Pergunta: Quais são os números f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 ?

- $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$
- $f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$
- $f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$
- $f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$
- $f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$

Exemplo: Sequência de Fibonacci

Definição: A sequência de Fibonacci é definida pela relação de recorrência

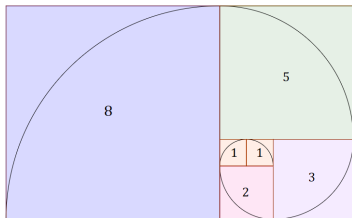
$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0; \\ 1 & \text{se } n = 1; \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$



Leonardo Fibonacci

Pergunta: Quais são os números f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 ?

- $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$
- $f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$
- $f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$
- $f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$
- $f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$



Resolvendo relações de recorrência



Resolvendo Relações de Recorrência

- **Definição:** Dizemos que **resolvemos** uma relação de recorrência quando encontramos uma fórmula explícita para os termos da sequência.
Essa fórmula explícita é chamada **fórmula fechada**.

Resolvendo Relações de Recorrência

- **Definição:** Dizemos que **resolvemos** uma relação de recorrência quando encontramos uma fórmula explícita para os termos da sequência.
Essa fórmula explícita é chamada **fórmula fechada**.

Exemplo:

Anteriormente, vimos a sequência de fibonacci $\{f_n\}$, definida recursivamente por $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e, para $n \geq 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Resolvendo Relações de Recorrência

- **Definição:** Dizemos que **resolvemos** uma relação de recorrência quando encontramos uma fórmula explícita para os termos da sequência.

Essa fórmula explícita é chamada **fórmula fechada**.

Exemplo:

Anteriormente, vimos a sequência de fibonacci $\{f_n\}$, definida recursivamente por $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e, para $n \geq 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Problema: Para n grande, o cálculo de f_n pode ser muito tedioso. Seria bom se existisse uma fórmula fechada para os termos dessa sequência.

Resolvendo Relações de Recorrência

- **Definição:** Dizemos que **resolvemos** uma relação de recorrência quando encontramos uma fórmula explícita para os termos da sequência.

Essa fórmula explícita é chamada **fórmula fechada**.

Exemplo:

Anteriormente, vimos a sequência de fibonacci $\{f_n\}$, definida recursivamente por $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e, para $n \geq 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Problema: Para n grande, o cálculo de f_n pode ser muito tedioso. Seria bom se existisse uma fórmula fechada para os termos dessa sequência.

Felizmente, existe uma fórmula fechada para esta sequência!

Para $n \geq 1$, temos que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Método da substituição iterativo

- Existem diversos métodos para resolver relações de recorrência.
- Um método simples é o **método da substituição iterativo**.
 - Nesta técnica, usamos repetidamente a relação de recorrência para expandir a expressão para o n -ésimo termo até poder ter uma “ideia” da forma geral (uma conjectura).
 - Logo após, esta conjectura é verificada por indução matemática.

Método da substituição iterativo

Problema

Resolva a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, onde $a_0 = 2$.

Método da substituição iterativo

Problema

Resolva a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, onde $a_0 = 2$.

Solução

Começamos com a condição inicial $a_0 = 2$ e vamos aplicando sucessivamente a relação de recorrência até que seja possível deduzir uma fórmula fechada para o termo geral a_n .

Método da substituição iterativo

Problema

Resolva a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, onde $a_0 = 2$.

Solução

Começamos com a condição inicial $a_0 = 2$ e vamos aplicando sucessivamente a relação de recorrência até que seja possível deduzir uma fórmula fechada para o termo geral a_n .

$$a_1 = a_0 + 3 = 2 + 3 = 2 + 3 \cdot 1$$

$$a_2 = a_1 + 3 = (2 + 3 \cdot 1) + 3 = 2 + 3 \cdot 2$$

$$a_3 = a_2 + 3 = (2 + 3 \cdot 2) + 3 = 2 + 3 \cdot 3$$

$$a_4 = a_3 + 3 = (2 + 3 \cdot 3) + 3 = 2 + 3 \cdot 4$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + 3 = (2 + 3 \cdot (n - 1)) + 3 = 2 + 3n.$$

Método da substituição iterativo

Problema

Resolva a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, onde $a_0 = 2$.

Solução

Começamos com a condição inicial $a_0 = 2$ e vamos aplicando sucessivamente a relação de recorrência até que seja possível deduzir uma fórmula fechada para o termo geral a_n .

$$a_1 = a_0 + 3 = 2 + 3 = 2 + 3 \cdot 1$$

$$a_2 = a_1 + 3 = (2 + 3 \cdot 1) + 3 = 2 + 3 \cdot 2$$

$$a_3 = a_2 + 3 = (2 + 3 \cdot 2) + 3 = 2 + 3 \cdot 3$$

$$a_4 = a_3 + 3 = (2 + 3 \cdot 3) + 3 = 2 + 3 \cdot 4$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + 3 = (2 + 3 \cdot (n - 1)) + 3 = 2 + 3n.$$

Portanto, **conjecturamos** que $a_n = 2 + 3n$ é uma fórmula fechada para a recorrência acima. **Temos que provar essa conjectura.**

Método da substituição iterativo

Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em n que $a_n = 2 + 3n$.

Método da substituição iterativo

Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em n que $a_n = 2 + 3n$.

Base: Suponha $n = 0$. Neste caso, temos que $a_0 = 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$, o que é verdade pela condição inicial ($a_0 = 2$).

Método da substituição iterativo

Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em n que $a_n = 2 + 3n$.

Base: Suponha $n = 0$. Neste caso, temos que $a_0 = 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$, o que é verdade pela condição inicial ($a_0 = 2$).

Hipótese de Indução: Suponha que $a_k = 2 + 3k$ seja verdade para um k arbitrário, onde $k \geq 0$.

Método da substituição iterativo

Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em n que $a_n = 2 + 3n$.

Base: Suponha $n = 0$. Neste caso, temos que $a_0 = 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$, o que é verdade pela condição inicial ($a_0 = 2$).

Hipótese de Indução: Suponha que $a_k = 2 + 3k$ seja verdade para um k arbitrário, onde $k \geq 0$.

Passo Indutivo: Prova-se, a seguir, que $a_{k+1} = 2 + 3(k + 1)$.

Método da substituição iterativo

Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em n que $a_n = 2 + 3n$.

Base: Suponha $n = 0$. Neste caso, temos que $a_0 = 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$, o que é verdade pela condição inicial ($a_0 = 2$).

Hipótese de Indução: Suponha que $a_k = 2 + 3k$ seja verdade para um k arbitrário, onde $k \geq 0$.

Passo Indutivo: Prova-se, a seguir, que $a_{k+1} = 2 + 3(k + 1)$.

Pela **definição da relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$, temos que

$$a_{k+1} = a_k + 3$$

Método da substituição iterativo

Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em n que $a_n = 2 + 3n$.

Base: Suponha $n = 0$. Neste caso, temos que $a_0 = 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$, o que é verdade pela condição inicial ($a_0 = 2$).

Hipótese de Indução: Suponha que $a_k = 2 + 3k$ seja verdade para um k arbitrário, onde $k \geq 0$.

Passo Indutivo: Prova-se, a seguir, que $a_{k+1} = 2 + 3(k + 1)$.

Pela **definição da relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$, temos que

$$a_{k+1} = a_k + 3 \stackrel{HI}{=}$$

Método da substituição iterativo

Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em n que $a_n = 2 + 3n$.

Base: Suponha $n = 0$. Neste caso, temos que $a_0 = 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$, o que é verdade pela condição inicial ($a_0 = 2$).

Hipótese de Indução: Suponha que $a_k = 2 + 3k$ seja verdade para um k arbitrário, onde $k \geq 0$.

Passo Indutivo: Prova-se, a seguir, que $a_{k+1} = 2 + 3(k + 1)$.

Pela **definição da relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$, temos que

$$a_{k+1} = a_k + 3 \stackrel{HI}{=} (2 + 3k) + 3 =$$

Método da substituição iterativo

Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em n que $a_n = 2 + 3n$.

Base: Suponha $n = 0$. Neste caso, temos que $a_0 = 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$, o que é verdade pela condição inicial ($a_0 = 2$).

Hipótese de Indução: Suponha que $a_k = 2 + 3k$ seja verdade para um k arbitrário, onde $k \geq 0$.

Passo Indutivo: Prova-se, a seguir, que $a_{k+1} = 2 + 3(k + 1)$.

Pela **definição da relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$, temos que

$$a_{k+1} = a_k + 3 \stackrel{HI}{=} (2 + 3k) + 3 = 2 + 3(k + 1).$$

Isso conclui o passo indutivo.

Portanto, como a base e o passo indutivo foram provados, concluímos que $a_n = 2 + 3n$.



Resolvendo Relações de Recorrência

Exercício para Casa: Resolva a relação de recorrência $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ para $n = 2, 3, 4, \dots$, onde $a_1 = 2$.

Somatórios



Somatórios

Intuitivamente, são somas dos termos de alguma sequência $\{a_n\}$

- A estrutura das sequências (domínio nos inteiros) favorece a resolução de somas longas dos seus termos em menos passos
- Nosso objetivo é utilizar as propriedades de somatórios para simplificar somas longas

Somatórios – Notação

A soma dos termos a_m, a_{m+1}, \dots, a_n pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^n a_j, \quad \sum_{j=m}^n a_j, \quad \text{ou} \quad \sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

Somatórios – Notação

A soma dos termos a_m, a_{m+1}, \dots, a_n pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^n a_j, \quad \sum_{j=m}^n a_j, \quad \text{ou} \quad \sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

Cada notação envolve quatro elementos: j, m, n, a_j

- j é a **variável de índice**
 - a escolha da variável j como índice é arbitrária.

Somatórios – Notação

A soma dos termos a_m, a_{m+1}, \dots, a_n pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^n a_j, \quad \sum_{j=m}^n a_j, \quad \text{ou} \quad \sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

Cada notação envolve quatro elementos: j, m, n, a_j

- j é a **variável de índice**
 - a escolha da variável j como índice é arbitrária.
- m é o **valor inicial (limite inferior)** que j assume

Somatórios – Notação

A soma dos termos a_m, a_{m+1}, \dots, a_n pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^n a_j, \quad \sum_{j=m}^n a_j, \quad \text{ou} \quad \sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

Cada notação envolve quatro elementos: j, m, n, a_j

- j é a **variável de índice**
 - a escolha da variável j como índice é arbitrária.
- m é o **valor inicial (limite inferior)** que j assume
- n é o **valor final (limite superior)** que j assume

Somatórios – Notação

A soma dos termos a_m, a_{m+1}, \dots, a_n pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^n a_j, \quad \sum_{j=m}^n a_j, \quad \text{ou} \quad \sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

Cada notação envolve quatro elementos: j, m, n, a_j

- j é a **variável de índice**
 - a escolha da variável j como índice é arbitrária.
- m é o **valor inicial (limite inferior)** que j assume
- n é o **valor final (limite superior)** que j assume
- a_j é a **sequência** utilizada

Somatórios – Exemplo 1

A expressão $\sum_{j=1}^{10} a_j$ codifica a soma dos termos de a_j indo de a_1 até a_{10}

Ou seja,

$$\sum_{j=1}^{10} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

Somatórios – Exemplo 1

A expressão $\sum_{j=1}^{10} a_j$ codifica a soma dos termos de a_j indo de a_1 até a_{10}

Ou seja,

$$\sum_{j=1}^{10} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

Se fizermos $a_j = 2j$, então a expressão $\sum_{j=1}^{10} a_j$ codifica:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{10} a_j &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \\ &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 10 \\ &= 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 \\ &= 110\end{aligned}$$

Somatórios – Exemplo 2

Exemplo

O que significa:

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

Somatórios – Exemplo 2

Exemplo

O que significa:

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

É a soma dos termos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ da sequência $\{a_j\}$ com $a_j = \frac{1}{j}$

Somatórios – Exemplo 2

Exemplo

O que significa:

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

É a soma dos termos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ da sequência $\{a_j\}$ com $a_j = \frac{1}{j}$

Constatação:

Teremos
$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}.$$

Somatórios – Exemplo 3

Exemplo

O que significa:

$$\sum_{k=4}^8 (-1)^k$$

Somatórios – Exemplo 3

Exemplo

O que significa:

$$\sum_{k=4}^8 (-1)^k$$

É a soma dos termos a_4, a_5, \dots, a_8 da sequência $\{a_k\}$ com $a_k = (-1)^k$

Constatação:

Teremos

$$(-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 = 1 + -1 + 1 + -1 + 1 = 1.$$

Propriedades do Somatório



Propriedades do Somatório

Nosso objetivo

- Somar números de uma sequência dois a dois é ineficiente.
- Podemos economizar trabalho e tempo usando propriedades das operações aritméticas adaptadas aos somatórios.

Da aritmética, para x, y, z números quaisquer, temos

- **Comutatividade:** $x + y = y + x$
- **Associatividade:** $(x + y) + z = x + (y + z)$
- **Distributividade:** $x(y + z) = xy + xz$

Propriedades do Somatório

Em somatórios, temos:

- **Comutatividade:**
$$\sum_{j=m}^n (a_j + b_j) = \sum_{j=m}^n a_j + \sum_{j=m}^n b_j$$

- **Associatividade:**
$$\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{j=m}^{\ell} a_j + \sum_{j=\ell+1}^n a_j$$

- **Distributividade:**
$$\sum_{j=m}^n k \cdot a_j = k \cdot \sum_{j=m}^n a_j$$

Comutatividade

Vamos analisar a igualdade:

- **Comutatividade:** $\sum_{j=m}^n (a_j + b_j) = \sum_{j=m}^n a_j + \sum_{j=m}^n b_j$

Comutatividade

Vamos analisar a igualdade:

- **Comutatividade:** $\sum_{j=m}^n (a_j + b_j) = \sum_{j=m}^n a_j + \sum_{j=m}^n b_j$

Começando do lado esquerdo, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^n (a_j + b_j) &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \dots + (a_n + b_n) \\ &= (a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \dots + b_n) \\ &= \sum_{j=m}^n a_j + \sum_{j=m}^n b_j\end{aligned}$$

Associatividade

Vamos analisar a igualdade:

- **Associatividade:**
$$\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{j=m}^{\ell} a_j + \sum_{j=\ell+1}^n a_j$$

Associatividade

Vamos analisar a igualdade:

- **Associatividade:**
$$\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{j=m}^{\ell} a_j + \sum_{j=\ell+1}^n a_j$$

Começando do lado esquerdo, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^n a_j &= a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \\ &= a_m + a_{m+1} + \dots + a_{\ell} + a_{\ell+1} + \dots + a_n \\ &= (a_m + a_{m+1} + \dots + a_{\ell}) + (a_{\ell+1} + \dots + a_n) \\ &= \sum_{j=m}^{\ell} a_j + \sum_{j=\ell+1}^n a_j\end{aligned}$$

Distributividade

Vamos analisar a igualdade:

- **Distributividade:** $\sum_{j=m}^n k \cdot a_j = k \cdot \sum_{j=m}^n a_j$

Distributividade

Vamos analisar a igualdade:

- **Distributividade:** $\sum_{j=m}^n k \cdot a_j = k \cdot \sum_{j=m}^n a_j$

Começando do lado esquerdo, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^n k \cdot a_j &= ka_m + ka_{m+1} + \dots + ka_n \\ &= k \cdot (a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) \\ &= k \cdot \sum_{j=m}^n a_j\end{aligned}$$

Como resolver somatórios?



Como resolver Somatórios?

Ao encontrar somatórios complicados, nosso **primeiro** interesse é simplificar essas expressões.

Exemplo 1

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{10} 2j$.

Como resolver Somatórios?

Ao encontrar somatórios complicados, nosso **primeiro** interesse é simplificar essas expressões.

Exemplo 1

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{10} 2j$.

Pela distributividade, podemos simplificar a expressão para obter

$$\sum_{j=1}^{10} 2j = 2 \cdot \sum_{j=1}^{10} j$$

Como resolver Somatórios?

Ao encontrar somatórios complicados, nosso **primeiro** interesse é simplificar essas expressões.

Exemplo 1

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{10} 2j$.

Pela distributividade, podemos simplificar a expressão para obter

$$\sum_{j=1}^{10} 2j = 2 \cdot \sum_{j=1}^{10} j$$

Observação: Note que houve uma troca. Ao invés de calcularmos $\sum_{j=1}^{10} 2j$,

basta calcular $\sum_{j=1}^{10} j$ para multiplicar o resultado por dois.

Como resolver Somatórios?

Exemplo 2

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{10} (2j + 3)$.

Como resolver Somatórios?

Exemplo 2

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{10} (2j + 3)$.

Pela comutatividade, podemos simplificar a expressão para obter

$$\sum_{j=1}^{10} (2j + 3) = 2 \cdot \sum_{j=1}^{10} j + \sum_{j=1}^{10} 3$$

Como resolver Somatórios?

Exemplo 2

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{10} (2j + 3)$.

Pela comutatividade, podemos simplificar a expressão para obter

$$\sum_{j=1}^{10} (2j + 3) = 2 \cdot \sum_{j=1}^{10} j + \sum_{j=1}^{10} 3$$

Observação: Houve uma troca. Ao invés de calcularmos $\sum_{j=1}^{10} (2j + 3j)$,

basta calcular $\sum_{j=1}^{10} 2j$ e $\sum_{j=1}^{10} 3$ para então somá-las. Note que $\sum_{j=1}^{10} 2j$ é a expressão do exemplo anterior.

Como resolver Somatórios?

Nosso **segundo** interesse é encontrar somas conhecidas no processo.

Por exemplo, é muito útil saber que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$$

Como resolver Somatórios?

Nosso **segundo** interesse é encontrar somas conhecidas no processo.

Por exemplo, é muito útil saber que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$$

Como resolver Somatórios?

Nosso **segundo** interesse é encontrar somas conhecidas no processo.

Por exemplo, é muito útil saber que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemplo 1 (Continuação)

Pela fórmula, $\sum_{j=1}^{10} j = \frac{10(10+1)}{2} = 110/2 = 55$.

Agora, podemos completar o primeiro exemplo, obtendo

$$\sum_{j=1}^{10} 2j = 2 \cdot \sum_{j=1}^{10} j = 2 \cdot 55 = 110.$$

Como resolver Somatórios?

Também é muito útil saber que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^n 1 = n$$

Como resolver Somatórios?

Também é muito útil saber que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^n 1 = n$$

Exemplo 2 (Continuação)

Temos $\sum_{j=1}^{10} 2j + 3$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{10} 2j + 3 &= \sum_{j=1}^{10} 2j + \sum_{j=1}^{10} 3 = 2 \cdot \sum_{j=1}^{10} j + 3 \cdot \sum_{j=1}^{10} 1 \\ &= 2 \cdot \frac{10(10+1)}{2} + 3 \cdot 10 = 2 \cdot 55 + 30 = 140.\end{aligned}$$

Algumas somas importantes

Exercício: Usando indução matemática, prove as seguintes fórmulas:

Soma	Fórmula Fechada
$\sum_{k=0}^n ar^k (r \neq 1)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, r \neq 1$
$\sum_{k=1}^n k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^n k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^n k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^n k + dj$	$\frac{(2k+dn)(n+1)}{2}$

Tabela: Algumas somas importantes

Algumas somas importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

Exemplo

Considere que desejamos calcular $\sum_{i=30}^{60} i$

Algumas somas importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

Exemplo

Considere que desejamos calcular $\sum_{i=30}^{60} i$

Observe que $\sum_{i=30}^{60} i = \sum_{i=1}^{60} i - \sum_{i=1}^{29} i$ e utilize a fórmula geral $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$ para calcular os termos da subtração.

Algumas somas importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

Exemplo

Considere que desejamos calcular $\sum_{i=30}^{60} i$

Observe que $\sum_{i=30}^{60} i = \sum_{i=1}^{60} i - \sum_{i=1}^{29} i$ e utilize a fórmula geral $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$ para calcular os termos da subtração.

$$\text{Temos } \sum_{i=1}^{60} i = \frac{60(60+1)}{2} = 30 \cdot 61 = 1830 \text{ e}$$

$$\sum_{i=1}^{29} i = \frac{29(29+1)}{2} = 29 \cdot 15 = 435.$$

Algumas somas importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

Exemplo

Considere que desejamos calcular $\sum_{i=30}^{60} i$

Observe que $\sum_{i=30}^{60} i = \sum_{i=1}^{60} i - \sum_{i=1}^{29} i$ e utilize a fórmula geral $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$ para calcular os termos da subtração.

$$\text{Temos } \sum_{i=1}^{60} i = \frac{60(60+1)}{2} = 30 \cdot 61 = 1830 \text{ e}$$

$$\sum_{i=1}^{29} i = \frac{29(29+1)}{2} = 29 \cdot 15 = 435.$$

$$\text{Daí, } \sum_{i=30}^{60} i = \sum_{i=1}^{60} i - \sum_{i=1}^{29} i = 1830 - 435 = 1395.$$

Algumas somas importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

No **caso geral**, para $\sum_{i=m}^{\ell} i$,

Algumas somas importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

No **caso geral**, para $\sum_{i=m}^{\ell} i$,

Observe que $\sum_{i=m}^{\ell} i = \sum_{i=1}^{\ell} i - \sum_{i=1}^{m-1} i$ e utilize a fórmula geral $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$ para calcular os termos da subtração.

Algumas somas importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

No **caso geral**, para $\sum_{i=m}^{\ell} i$,

Observe que $\sum_{i=m}^{\ell} i = \sum_{i=1}^{\ell} i - \sum_{i=1}^{m-1} i$ e utilize a fórmula geral $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$ para calcular os termos da subtração.

Temos $\sum_{i=1}^{\ell} i = \frac{\ell(\ell+1)}{2}$ e $\sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{(m-1)(m-1+1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$.

Algumas somas importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

No **caso geral**, para $\sum_{i=m}^{\ell} i$,

Observe que $\sum_{i=m}^{\ell} i = \sum_{i=1}^{\ell} i - \sum_{i=1}^{m-1} i$ e utilize a fórmula geral $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$ para calcular os termos da subtração.

$$\text{Temos } \sum_{i=1}^{\ell} i = \frac{\ell(\ell+1)}{2} \text{ e } \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{(m-1)(m-1+1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Daí,

$$\sum_{i=m}^{\ell} i = \sum_{i=1}^{\ell} i - \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{\ell(\ell+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = \dots = \frac{(m+\ell)(\ell-m+1)}{2}.$$

Mudanças de Índice



Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

Exemplo

Considere a soma $\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12} (1 - k)$

Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

Exemplo

Considere a soma $\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12} (1 - k)$

Podemos reescrever a soma mudando o índice de uma delas:

Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

Exemplo

Considere a soma $\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12} (1 - k)$

Podemos reescrever a soma mudando o índice de uma delas:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12} (1 - k) &= \sum_{j=1}^{10} j + \sum_{j=1}^{10} (1 - j - 2) = \sum_{j=1}^{10} j + (1 - j - 2) \\ &= \sum_{j=1}^{10} -1 = (-1) \sum_{j=1}^{10} 1 = -10.\end{aligned}$$

Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

Exemplo

Considere a soma $\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12} (1 - k)$

Podemos reescrever a soma mudando o índice de uma delas:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12} (1 - k) &= \sum_{j=1}^{10} j + \sum_{j=1}^{10} (1 - j - 2) = \sum_{j=1}^{10} j + (1 - j - 2) \\ &= \sum_{j=1}^{10} -1 = (-1) \sum_{j=1}^{10} 1 = -10.\end{aligned}$$

A chave deste passo é o cálculo de que $\sum_{k=3}^{12} (1 - k) = \sum_{j=1}^{10} (1 - j - 2)$.

Como calcular a mudança de índice

Para realizar uma mudança do índice k para um novo índice j :

1. Encontramos uma função $f(k) = j$
2. Isolamos k na equação acima e obtemos uma função sobre j
3. Substituímos k pela expressão obtida na soma original

Como calcular a mudança de índice

Para realizar uma mudança do índice k para um novo índice j :

1. Encontramos uma função $f(k) = j$
2. Isolamos k na equação acima e obtemos uma função sobre j
3. Substituímos k pela expressão obtida na soma original

Exemplo 1

Seja a soma $\sum_{k=1}^5 k^2$. Desejamos indexá-la com inteiros de 0 a 4.

Que expressão usaremos?

Como calcular a mudança de índice

Para realizar uma mudança do índice k para um novo índice j :

1. Encontramos uma função $f(k) = j$
2. Isolamos k na equação acima e obtemos uma função sobre j
3. Substituímos k pela expressão obtida na soma original

Exemplo 1

Seja a soma $\sum_{k=1}^5 k^2$. Desejamos indexá-la com inteiros de 0 a 4.

Que expressão usaremos?

1. Encontramos uma função para mapear k (de 1 até 5) para j (de 0 até 4)
 - $f(k) = k - 1$
2. Agora, fazemos $k - 1 = j$ e isolamos k : $(k - 1 = j \implies k = j + 1)$
3. Para completar, substituímos k por $j + 1$ na soma, obtendo

$$\sum_{k=1}^5 k^2 = \sum_{j=0}^4 (j + 1)^2.$$

Como calcular a mudança de índice

Exemplo 2

Seja a soma $\sum_{k=3}^{12} (1 - k)$. Desejamos indexá-la com inteiros de 1 a 10.

1. Encontramos uma função para mapear k (de 3 até 12) para j (de 1 até 10):
 - $f(k) = k - 2$
2. Agora, fazemos $k - 2 = j$ e isolamos k : $(k - 2 = j \implies k = j + 2)$
3. Para completar, substituímos k por $j + 2$ na soma, obtendo

$$\sum_{k=3}^{12} (1 - k) = \sum_{j=1}^{10} (1 - (j + 2)) = \sum_{j=1}^{10} (1 - j - 2).$$

FIM

