Introdução à Aplicação de Definições e Teoremas

Tutorial 01, 2020.1

Notas de Aula de Matemática Discreta

Prof. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

1 Introdução

O objetivo deste documento é instruir sobre a leitura e aplicação de definições e de teoremas para manipulação de expressões matemáticas.

É muito comum nos referimos a demonstrações *formais* ou à *formalização* de conceitos em matemática. O motivo é que definições e teoremas formais podem ser utilizados de forma mais simples. O termo chave aqui é *forma* ou *formato*, que é de onde vem a expressão do que seria formal. Pense, por exemplo, no que é um *traje formal*. Normalmente se refere ao uso de ternos para homens, vestidos longos para mulheres, ou alguma variação destes trajes, mas o ponto comum é que há uma certa *forma* de vestir e se apresentar que todos devem respeitar. Este também é o caso em matemática e em qualquer uso da palavra formal: nada mais é do que respeitar ou ceder a uma forma prédeterminada. É isso que fazemos ao escrever definições e enunciados de proposições, hipóteses, teoremas. O objetivo em fazê-lo é melhorar a comunicação, permitir que nos entendamos.

Ao escrever uma definição, busca-se formalidade, pois o objetivo de uma definição é capturar com precisão um certo conceito. Por exemplo, para podermos concersar sobre números primos e compostos será fundamental que cada um de nós entenda este conceito da mesma maneira. É uma questão de técnica, de reduzir espaço para erros. Você e eu poderíamos conversar informalmente sobre nossas casas dos sonhos e eu poderia lhe dizer que eu prefiro apartamentos espaçosos e que gostaria de morar em um andar alto. E em dizer isso, eu teria uma boa idéia do que me agrada, mas o que isso significaria pra você? Será que o seu conceito de apartamento espaçoso seria espaçoso o bastante pra mim? Ou talvez você imagine um apartamento muito maior do que eu desejo, um espaço para ostentar. Talvez o 5º andar de um prédio seja alto o bastante pra mim, talvez não. Note que até agora eu não disse exatamente quão grande ou quão alto eu gostaria que este apartamente de sonhos fosse. Há muito espaço para diferentes interpretações, para que você dê seu próprio significado às minhas palavras. Nesta situação não há problemas em nos entendermos apenas parcialmente, em interpretarmos os termos *grande* e *alto* de formas diferentes, mas não podemos deixar este espaço pra dúvidas quando tratamos de questões técnicas. Imagine: se você trabalhasse como corretor de imóveis e quisesse me vender meu apartamento de sonhos, precisaria entender bem o que eu quero saber. Nos pouparia tempo e dinheiro. Esse é o mesmo princípio que devemos adotar na discussão de quaisquer assuntos técnicos e será fundamental para a nossa disciplina.

2 Estrutura Textual de Definições

Compreender uma definição e saber utilizá-la é fundamentalmente uma questão de interpretação textual e análise da sua estrutura. Consideremos, pra começar, que uma definição tem dois propósitos primários:

1. Estabelecer o significado preciso de uma palavra, expressão ou conceito, e
2. Criar um atalho (como uma palavra-chave) para discutirmos conceitos complexos de forma mais simples ou resumida.

Para deixar mais claros estes propósitos, utilizaremos um exemplo:

Definição 1 *Um número primo é um inteiro positivo que tem exatamente dois divisores inteiros positivos.*

Os detalhes sobre a interpretação desta definição poderão ser discutidos mais tarde no texto, mas neste momento vamos nos ater somente à sua estrutura. Podemos tirar muitas lições sobre como definições são construídas apenas observando este exemplo.

Lição Nº 1: Palavra-Chave + Detalhamento.

Toda definição relaciona duas expressões diferentes. Uma é mais curta e direta, enquanto a outra é mais detalhada. Esta é a primeira chave para entender definições: cada uma destas partes é uma *descrição diferente* do *mesmo conceito*. Repito: 1. *descrição diferente*, 2. *mesmo conceito*. A primeira parte normalmente nomeia o conceito, lhe dá um nome, uma palavra-chave. Esta parte é análoga a batizarmos uma criança, darmos um CPF a um cidadão brasileiro ou darmos nome a uma nova variável ou ponteiro em programação. Trata-se simplesmente de dar um nome à criatura. A segunda parte, diz o que é realmente o conceito usando outros que já tenhamos obtido *antes*.

No nosso exemplo, teríamos estas duas partes, separadas pelo verbo *ser*, que aparece conjugado na palavra-chave "*é*":

- "um número primo"
- "um inteiro positivo que tem exatamente dois divisores inteiros positivos"

A primeira é visivelmente mais curta, não é mesmo? Se não tivéssemos esta definição, toda vez que o conceito nos importasse precisaríamos nos referir a "número inteiro positivo que tem exatamente dois divisores inteiros positivos". Então criamos um atalho: chamemos estes números de *primos*. Daí pra frente, com a definição, sempre que alguém falar em "número primo", estaremos entendendo da mesma maneira quais são suas características: são inteiros, são positivos, têm exatamente dois divisores inteiros positivos.

É comum em programação escrevermos um trecho de código e depois encapsularmos este trecho como uma função em FUP ou como um método de uma classe em POO. O que fazemos nestes casos é atribuir-lhe um nome, indicar seus parâmetros e tipo de retorno. Isso nos ajuda a escrever menos código depois: invés de repetir todas as instruções a cada vez que precisarmos delas, chamamos apenas à função que criamos. Utilizamos o seu *nome*. Definições matemáticas fazem exatamente a mesma coisa.

Lição Nº 2: Todas as palavras importam.

O texto de uma definição é feito sob medida para que ela capture um conceito. No nosso exemplo, temos *uma* definição do que seria um número primo, então o seu objetivo é capturar exatamente o significado desta expressão para que possamos nos referir ao mesmo conceito de forma mais simples. Neste sentido, *número primo* é a expressão principal da definição e as demais palavras estão ali para caracterizar o que seria um número primo.

Isso significa que para entender o que é um número primo, você precisa saber o que é um "*inteiro*", o que é um "*número positivo*", o que é um "*divisor*", mas também como interpretar palavras de menor destaque na sentença, como "*um*" e "*exatamente*". A palavra "*exatamente*", que deve ser entendida como "nem mais, nem menos" é fundamental para o significado desta definição. Note que na lição anterior destacamos um papel relevante para a palavra "*é*", corriqueira da língua portuguesa, mas indispensável ao texto da definição apresentada. Além disso, como os demais termos precisam ser conhecidos anteriormente, a definição de número primo será estudada por nós em detalhes somente após apresentarmos os conceitos de *divisão* e *divisibilidade*, quando teremos todos os termos necessários. A compreensão dos conceitos de números inteiros e positivos é assumida como requisito a esta disciplina.

Lição Nº 3: Definições e Teoremas Dependem de Outras Definições

Estudar matemática é muito parecido com estudar uma nova língua e definições matemáticas funcionam de forma análoga aos verbetes em um dicionário. Neste sentido, caso lhe falte a compreensão de alguma palavra-chave para entender uma definição, procure pela definição desta outra palavra, compreenda-lhe, e retorne. Estivesse você lendo um texto em uma língua estrangeira que não domina, o que faria? Pausaria a leitura para procurar o significado desta palavra em um dicionário, a leria, e retornaria. O mesmo conceito se aplica a matemática.

A diferença é que os conceitos no dicionário têm dependência circular e em matemática nós começamos com conceitos mais básicos, que não dependam de nada para começarmos (como os números naturais, por exemplo) e vamos construindo outros mais elaborados sobre estes (como operações aritméticas, depois equações, etc.). Isso significa que temos uma segurança fundamental: se nos faltar algo para entender um novo conceito, este algo já terá sido definido antes. Podemos pausar, buscar o conceito anterior para compreendê-lo, e então retornar ao conceito original. Observem que, novamente, há um forte paralelo com programação e a utilização de códigos antigos nossos ou códigos escritos por outras pessoas.

Lição Nº 4: Ida e Volta

Como os dois lados da definição descrevem o mesmo conceito, ela trata de sinônimos e isso significa que há sempre duas formas distintas de usá-las: podemos trocar a descrição resumida (do lado curto) pela descrição detalhada ou fazer o contrário. No contexto do nosso exemplo:

- Se em meio a uma demonstração descobrirmos que um número é primo, podemos usar a definição para concluir que ele é um número inteiro positivo e que tem exatamente dois divisores inteiros positivos. Estas informações adicionais nos permitirão falar sobre quem são seus divisores, descartar números negativos, etc, o que é útil para desenvolver argumentos e demonstrar teoremas.
- Se em meio a uma demonstração encontramos um número inteiro, positivo, e que tem exatamente dois divisores inteiros positivos, podemos usar a definição para concluir que ele é primo. Isto poderá nos permitir acesso à aplicação de outros teoremas e propriedades do número que tínhamos originalmente.

Normalmente é útil expandir os conceitos no começo de novas demonstrações e desejaremos resumí-los próximo a concluí-las. Veja, por exemplo, nossas demonstrações (veja os slides) para o teorema abaixo.

Teorema 1 *Se n é um número ímpar, então n^2 também é ímpar.*

Em todas elas, começaremos levantando uma hipótese com base na técnica utilizada. Em um dos formatos, destacaremos um inteiro quaisquer c e suporemos que c é ímpar. Isso é tudo que teremos suposto: "c é um número ímpar." Essa descrição não deixa espaço para avançarmos na demonstração do teorema, então devemos recorrer à definição de número ímpar para expandir o conceito:

Definição 2 *Um inteiro n é ímpar se e somente se existe um inteiro k tal que $n = 2k+1$.*

Esta definição nos permite trocar "c é um número ímpar" por "existe um inteiro k tal que $c = 2k+1$.", que é muito mais informativo. Agora podemos falar sobre k, temos uma multiplicação e uma soma na expressão, todos elementos que nos permitem afirmar mais coisas sobre c. É uma expressão aritmética, que pode ser manipulada usando propriedades algébricas. Na sequência da demonstração, utilizaremos isso para afirmar algo sobre c^2, mas terminaremos somente quando pudermos afirmar que c^2 é ímpar.

Ou seja, neste exemplo, estaríamos utilizando a definição para expandir o conceito no começo da demonstração e faremos o caminho oposto próximo a concluí-la. Esta é a forma mais frequente como utilizamos definições em demonstrações, então esteja atento: procure reconhecer os conceitos estudados usando ambas as descrições de cada definição. As duas transições possíveis que cada definição nos dá são úteis e reconhecer oportunidades de utilizá-las te ajudará muito a fazer demonstrações e compreender conceitos matemáticos.

Lição Nº 5: Uma definição pode ser escrita de maneiras diferentes.

Como na língua portuguesa ou qualquer outra língua falada, há muitas maneiras de comunicar um mesmo conceito. Por exemplo, poderíamos ter definido números primos com o seguinte texto:

Definição 3 *Um número primo é um inteiro positivo cujos únicos divisores positivos são 1 e ele mesmo.*

Ou ainda

Definição 4 *Um número inteiro é primo se e somente se ele é um inteiro positivo que tem exatamente quatro divisores.*

Todas estas são definições corretas e há também outras formas de definir o conceito corretamente. Esta última pode parecer um pouco estranha comparada às outras, mas a única diferença é que as definições anteriores só contavam divisores *positivos* e esta não restringe divisores. O ponto chave aqui é que estas definições são *sinônimas*. Elas descrevem o mesmo conceito, mesmo que de formas diferentes. Todos descrevem exatamente o que é um número primo e, em fazê-lo, que números não satisfazem o conceito.

Por exemplo, o número 7 é um número primo e podemos verificar isto usando qualquer uma das definições fornecidas:

- Pela Definição 1, precisaríamos verficar que o 7
  - é um número inteiro[1] (correto, pois 12-5 = 7),
  - é positivo[2] (correto, pois 7 > 0), e
  - tem exatamente dois divisores[3] positivos (correto, pois os únicos divisores positivos de 7 são 1 e 7).
- Pela Definição 3, precisaríamos verficar que o 7
  - é um número inteiro (correto, como acima),
  - é positivo (correto, como acima), e
  - é divisível[4] somente por 1 por ele mesmo. (correto, pois os únicos divisores positivos de 7 são 1 e 7).
- Pela Definição 4, precisaríamos verificar que o 7
  - é um número inteiro (correto, como acima),
  - é positivo (correto, como acima), e
  - tem exatamente 4 divisores. (correto, pois os seus únicos divisores são 1,7,-1 e -7).

Compare e veja que as condições são basicamente as mesmas em todas as definições. Considere ainda o seguinte texto de definição para números primos:

Definição 5 *Um número é primo se e somente se ele é um inteiro positivo que tem exatamente dois divisores inteiros positivos.*

O texto da Definição 5 é uma mera variação do texto nan Definição 1. Na primeira, destacamos que a palavra "é" teve o papel de conectar as duas descrições dadas na definição. Aqui, este papel recai sobre "se e somente se", que corresponde exatamente ao conectivo da lógica proposicional de mesmo nome. Na primeira, a separação era análoga à de sujeito e predicado; nesta última, o sujeito "um número" está referido nas duas descrições:

[1] Def. Um número é *inteiro* se puder ser escrito como a diferença de dois números naturais.

[2] Def. Um número é *positivo* ser for maior que 0.

[3] Def. Um inteiro a é um *divisor* do inteiro b se e somente se $a \neq 0$ e existe um inteiro k tal que $b = ak$.

[4] Def. Um inteiro b é um *divisível* por um inteiro a se e somente se a é um divisor de b.

– “um número é primo”
– “ele (o número) é um inteiro positivo que tem exatamente dois divisores inteiros positivos.”

Mas, da mesma forma que antes, temos uma descrição mais concisa com a palavra-chave da definição e outra descrição mais elaborada que a detalha, que enumera as condições que precisam ser satisfeitas por um objeto para pertencer ao conceito.

Para concluirmos, há uma observação importante a ser feita. Embora tenhamos falado que tínhamos *uma* definição de números primos na Seção 2, todas as definições correstas para números primos são sinônimas. O conceito existe e estamos buscando capturá-lo em texto, caracterizá-lo com a nossa definição. Neste sentido, também seria correto dizer que aquela era *a* definição de número primo, que só existe uma definição, admitindo apenas que há várias formas de escrevê-la. Na nossa disciplina (e em textos matemáticos em geral) é comum falar das duas formas.

Lição Nº 6: Precisão para Resolver Dúvidas

O texto de uma definição deve ser escrito com precisão cirúrgica: se um objeto satisfaz as condições enumeradas, pertence ao conceito; se não as satisfaz, não pertence. No contexto dos nossos exemplos, uma definição de números primos nos diz ao mesmo tempo quais n?meros são primos e quais n?meros não o são. Por este motivo, as definições são a nossa referência principal para resolver dúvidas.

Foi isso que fizemos na seção anterior para verificar que o 7 é primo: aplicamos as definições. A estrutura deste raciocínio é a seguinte.

1. Começamos com a pergunta a ser respondida: “o número 7 é primo?”
2. Então *assumimos* (temporariamente) que “7 é primo”, e
3. aplicamos a Definição 1 para obter: “7 é um inteiro positivo que tem exatamente dois divisores positivos” (condicionado à nossa suposição).
4. Agora usamos as definições de número inteiro, de número positivo e de divisores para verificar que o 7 realmente atende a todas estas condições.
5. Concluímos que 7 é primo.

De maneira geral não escreveremos tudo isso, mas podemos arrumir que este é o processo de raciocínio que fazemos para responder à pergunta inicial. Em contraste, o que diríamos do número 91? O mesmo processo seria feito:

1. Começamos com a pergunta a ser respondida: “o número 91 é primo?”
2. Então *assumimos* (temporariamente) que “91 é primo”, e
3. aplicamos a Definição 1 para obter: “91 é um inteiro positivo que tem exatamente dois divisores positivos” (condicionado à nossa suposição).
4. Agora usamos as definições de número inteiro, de número positivo para verificar que o 91 realmente é um inteiro positivo e usamos também a definição divisores para verificar quantos divisores positivos o 91 tem. Descobrimos, nesse caso, que ele tem mais do que dois divisores positivos, pois além do 1 e do 91, o 7 também é um divisor positivo (existe um inteiro k tal que 7.k =91, pois 7.13 = 91). Podem haver outros divisores positivos do 91, mas termos encontrado um terceiro já basta para sabermos que não são exatamente dois.

5. Concluímos que 91 *não* é primo.

O que nos traz à conclusão desta última lição, que é fortemente relacionada à Lição Nº 3: as definições podem *e* devem ser usadas para resolver dúvidas nos conceitos estudados. Faltando-lhe um conceito, busque a definição deste e pode confiar: ela dependerá apenas de outras definições mais fundamentais, que precisam de condições mais simples. Às vezes pode ser necessário voltar duas ou mais definições para entender um conceito avançado, mas a disciplina é estruturada para evitar isso. Nós encadearemos conceitos sempre na confiança de termos coberto seus requisitos na disciplina.

Considerações Finais

Estas lições apresentam algumas redundâncias, mas cada uma visa destacar um aspecto diferente da escrita e uso de definições.

3 Estrutura Textual de Teoremas

Teoremas são escritos de forma muito similar à das definições, mas podem variar um pouco mais. O ponto principal de mudança é que os teoremas podem ser embasados pelo conectivo "*se e somente se*", pelo conectivo condicional "*se-então*", ou ainda, em raríssimos casos, pela conjunção. Enquanto uma definição é escrita em torno de uma *palavra-chave* e relaciona duas *descrições* diferentes do mesmo conceito, um teorema é escrito em torno de um ou mais *objetos* e relaciona *afirmações* diferentes sobre estes objetos.

A título de exemplo, considere o Teorema 1, apresentado na Lição Nº 4 e repetido abaixo:

Teorema 1 Se n é um número ímpar, então n^2 também é ímpar.

Podemos observar claramente a estrutura de "*se-então*" no texto do teorema, pois estas palavras aparecem explicitamente em seu texto. Ao removermos estas palavras, ficamos com dois trechos de texto:

– "n é um número ímpar", e
– "n^2 também é ímpar".

Os dois trechos consistem em *afirmações* que falam, direta ou indiretamente, sobre o mesmo *objeto*: o número n. A primeira parte fala diretamente sobre n, afirmando que é ímpar; a segunda parte fala indiretamente sobre n, afirmando que o seu quadrado, n^2, é ímpar. Se este objeto é discutido diretamente ou indiretamente, não é importante. Invés disso, importa identificar quem são os objetos de que o teorema trata e quais são as afirmações feitas sobre eles. Num quadro maior, teremos os seguintes elementos em todo teorema:

1. Um conectivo lógico principal ($\rightarrow$, $\leftrightarrow$, ou $\wedge$)
2. Uma das afirmações será o lado esquerdo do conectivo principal

3. A outra afirmação será o lado direito do conectivo principal
4. Cada objeto mencionado nas afirmações será uma variável no teorema
5. Os objetos que forem mencionados em *ambas* as afirmações serão o tópico do teorema
6. Cada objeto (ou variável) tem o seu próprio domínio, que deve ser identificado
7. Cada objeto (ou variável) é quantificada de alguma forma ($\forall$ ou $\exists$).

O texto de um teorema deve informar todos os pontos acima e, portanto, devemos ser capazes de identificar todos eles ao fazer sua leitura. É realmente uma tarefa de interepretação de textos, que pode ser aprendida com um pouco de prática.

Exercício 1 *Identifique os elementos listados no roteiro acima no texto do Teorema 1.*

Recomenda-se pausar a leitura e anotar suas respostas em um papel. Respostas adequadas a este exercício encontram-se discutidas ao fim do documento.

As lições que podemos tirar desta estrutura textual de teoremas são basicamente as mesmas que tiramos sobre o texto das definições. Em particular, a Lição 2, Lição 3, Lição 5 e Lição 6 também valem para teoremas. Já a Lição 4 vale apenas para teoremas cujo conectivo principal seja o "se e somente se" ($\leftrightarrow$).

Complementos:

- Exemplos: Número par/ímpar, números naturais (recursiva)
- Leitura: Formalização de Naturais e Aritmética
- Leitura: Regras da Aritmética e Manipulação Algébrica / Regras da Lógica Proposicional e Manipulação de Fórmulas.

Resposta e Discussão do Exercício 1

1. Conectivo: $\rightarrow$
2. Afirmação do lado esquerdo de $\rightarrow$: "n é ímpar"
3. Afirmação do lado direito de $\rightarrow$: "n^2 é ímpar"
4. Objetos mencionados: um objeto, apenas, chamado n (ver discussão detalhada abaixo)
5. Objetos mencionados em *ambas* as afirmações: n
6. Domínios: n é um número inteiro (ver discussão detalhada abaixo)
7. Quantificadores: n é quantificado com $\forall$ (universal).

Para algumas destas perguntas, há mais de uma resposta possível:

Quanto aos objetos mencionados, poderíamos interpretar como havendo menção a um único objeto (n) ou como havendo dois objetos (n e seu quadrado). No segundo caso, deveremos atribuir um novo nome de variável (m, por exemplo) ao quadrado de n, tendo então duas variáveis n e m, mas então precisaremos deixar claro que $m = n^2$. No primeiro formato, as afirmações serão as que listamos na resposta acima. No segundo formato, teríamos as afirmações "n é ímpar" à esquerda de "$\rightarrow$" e "$m = n^2$ também é ímpar". A diferença é pequena, mas só ficará correta com a informação de que $m = n^2$. Do contrário, item seguinte não terá resposta. Neste sentido, a primeira interpretação (de que há somente um objeto) simplifica o nosso trabalho.

Mais à frente, propusemos que n seria um número *inteiro*. Como chegamos a esta conclusão? A chave é a leitura das duas afirmações que compõem o teorema. Em cada uma, fala-se sobre algum objeto discutido ser *ímpar*. Isto é suficiente para nos guiar, pois a definição de número ímpar requer que o número seja inteiro. Há mais respostas que cabem aqui. Qualquer conjunto mais abrangente que o dos números inteiros funciona, pois o conceito de número ímpar restringirá o domínio de volta aos inteiros. Seria correto, portanto, interpretar que n é simplesmente um número (de qualquer tipo, irrestrito), ou que ele é racional, ou real. Da mesma forma, seria errado interpretarmos que n fosse positivo, pois existem ímpares negativos, ou ainda que n pudesse ser irracional, pois um número irracional não pode ser ímpar. O melhor que fazemos é tentar identificar o conjunto mais *restrito* que permite situar as afirmações feitas. Já que ambas falam em números ímpares, os objetos tratados devem ser números inteiros.