QXD0116 - Álgebra Linear

Espaço Vetorial

André Ribeiro Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Espaço Vetorial

Definição

Seja $\mathbb{V}$ um conjunto e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Suponhamos que em $\mathbb{V}$ esteja definida uma operação de adição tal que, a todo par de elementos $x \in \mathbb{V}$ e $y \in \mathbb{V}$, associa-se um terceiro elemento $x + y \in \mathbb{V}$, isto é:

$$(x, y) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to x + y \in \mathbb{V}.$$

E também esteja definida uma operação entre os elementos de $\mathbb{R}$ e os elementos de $\mathbb{V}$ tal que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e para cada $x \in \mathbb{V}$, associa-se o elemento $\alpha \cdot x \in \mathbb{V}$, isto é:

$$(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \alpha \cdot x \in \mathbb{V}.$$

Então $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial!

Espaço Vetorial

Exemplos

$\mathbb{V} = \mathbb{R}$ (conjunto dos números reais)

- $\forall\ a, b \in \mathbb{V} \rightarrow a + b \in \mathbb{V}$
- $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ a \in \mathbb{V} \rightarrow \alpha \cdot a \in \mathbb{V}$

$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ (conjunto dos vetores no plano)

- $\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V} \rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{V}$
- $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ \mathbf{u} \in \mathbb{V} \rightarrow \alpha \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{V}$

Espaço Vetorial

Exemplos

$\mathbb{V} = \mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros)

- $\forall\ a, b \in \mathbb{V} \rightarrow a + b \in \mathbb{V}$
- $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ a \in \mathbb{V} \rightarrow \alpha \cdot a \notin \mathbb{V}$
- Não é espaço vetorial!

$\mathbb{V} = \mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais)

- $\forall\ a, b \in \mathbb{V} \rightarrow a + b \in \mathbb{V}$
- $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ a \in \mathbb{V} \rightarrow \alpha \cdot a \notin \mathbb{V}$
- Não é espaço vetorial!

Espaço Vetorial

Propriedades

Aditivas

- $\forall\ x \in \mathbb{V}\ ,\ \forall\ y \in \mathbb{V} \Rightarrow x + y = y + x$
- $\forall\ x \in \mathbb{V}\ ,\ \forall\ y \in \mathbb{V}\ ,\ \forall\ z \in \mathbb{V} \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$
- $\underbrace{\exists\ \theta \in \mathbb{V}}_{\text{elemento neutro da adição}}\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{V} \Rightarrow x + \theta = \theta + x = x$
- $\forall\ x \in \mathbb{V}\ ,\ \underbrace{\exists\ -x \in \mathbb{V}}_{\text{elemento oposto}} \Rightarrow x + (-x) = \theta$

Espaço Vetorial

Propriedades

Multiplicativas

- $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{V}\ ,\ \forall\ y \in \mathbb{V} \Rightarrow \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
- $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ \beta \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{V} \Rightarrow (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
- $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ \beta \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{V} \Rightarrow (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
- $\underbrace{\exists\ \mathbf{1} \in \mathbb{V}}_{\text{elemento neutro da multiplicação}}\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{V} \Rightarrow \mathbf{1} \cdot x = x$

Subespaço Vetorial

Definição

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e seja $\mathbb{W}$ um subconjunto de $\mathbb{V}$. Dizemos que $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial se:

(i) $\theta \in \mathbb{W}$

(ii) $\forall\, x \in \mathbb{W}\,,\ \forall\, y \in \mathbb{W} \Rightarrow x + y \in \mathbb{W}$

(iii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{W} \Rightarrow \alpha \cdot x \in \mathbb{W}$

Subespaço Vetorial

Exemplo

Seja $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{W} = \left\{ \mathbf{u} = [u_1 \ \ u_2]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^2 | u_2 = 2 \cdot u_1 \right\}$. Verificar se $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

(i) $[0 \ 0]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{W}$

(ii) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{W}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{W}$, então $\mathbf{u} = [u_1 \ 2u_1]^{\mathsf{T}}$ e $\mathbf{v} = [v_1 \ 2v_1]^{\mathsf{T}}$. Assim,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ 2u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ 2v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ 2(u_1 + v_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{W}$$

(iii) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e para $\mathbf{u} \in \mathbb{W}$, temos:

$$\alpha \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ 2\alpha u_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{W}$$

Subespaço Vetorial

Exemplo

Seja $\mathbb{V} = \mathcal{M}_{n \times n}$, isto é, o espaço vetorial das matrizes de ordem n. Seja $\mathbb{W}$ o conjunto das matrizes triangulares superiores de ordem n. Verifique se $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

Combinação Linear

Definição

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real. Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ n vetores de $\mathbb{V}$. Dizemos que o vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ é uma combinação linear desses n vetores se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{v}_3 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mathbf{v}_i$$

Os escalares são chamados de coeficientes da combinação linear. Para que um vetor seja combinação linear de outros vetores, os coeficientes da combinação linear devem ser únicos.

Combinação Linear

Exemplo

Seja $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, considere os vetores $\mathbf{e}_1 = [1\ 0\ 0]^\mathsf{T}$, $\mathbf{e}_2 = [0\ 1\ 0]^\mathsf{T}$ e $\mathbf{e}_3 = [0\ 0\ 1]^\mathsf{T}$. Verificar se todo vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ pode ser descrito como uma combinação linear de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$.

Solução

Seja $\mathbf{u} = [u_1\ \ u_2\ \ u_3]^\mathsf{T}$ um vetor genérico de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{e}_3$$

$$= \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Combinação Linear

Exemplo

Seja $\mathbb{V} = \mathcal{M}_{2\times 2}$, verificar se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ se escreve como uma combinação linear de

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \cdot \mathbf{E}_1 + \alpha_3 \cdot \mathbf{E}_2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{E}_3$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_3 \\ 0 & -\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 \end{bmatrix}$$