QXD0116 - Álgebra Linear

Base de um Espaço Vetorial

André Ribeiro Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Dependência Linear

Definição

Seja $\mathbb{V}$, um espaço vetorial real. Dizemos que os elementos $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{V}$, $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{V}$, ... , $\mathbf{v}_k \in \mathbb{V}$ são linearmente dependentes (LD) se existirem escalares $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, tais que

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \cdot \mathbf{v}_k = \theta,$$

onde θ é o elemento nulo.
Caso a equação seja satisfeita apenas quando todos os escalares forem iguais a zero, dizemos que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... , $\mathbf{v}_k$ são linearmente independentes (LI).

Dependência Linear

Exemplo

Verificar se os vetores $\mathbf{v}_1 = [1\ 1\ 2]^T$, $\mathbf{v}_2 = [0\ 1\ 3]^T$ e $\mathbf{v}_3 = [0\ 0\ 1]^T$ são linearmente independentes.

Solução

Devemos mostrar que

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \theta$$

$$\alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dependência Linear

Exemplo

Verificar se os polinômios $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = 1 + t$, $P_2(t) = (1 + t)^2$ e $P_3(t) = (1 - t)^3$ são LI.

Solução

Devemos mostrar que

$$\alpha_0 \cdot P_0(t) + \alpha_1 \cdot P_1(t) + \alpha_2 \cdot P_2(t) + \alpha_3 \cdot P_3(t) = \theta$$

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Dependência Linear

Exemplo

Verificar se as matrizes $\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes.

Solução

Devemos mostrar que

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{E}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{E}_2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{E}_3 + \alpha_4 \cdot \mathbf{E}_4 = \theta$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 & -\alpha_1 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_4 & 3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 3\alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dependência Linear

Teorema 1

Um conjunto de vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ... , $\mathbf{u}_n$ é LD se, e somente se, existe um $\mathbf{u}_i$ que é uma combinação linear dos demais.

Prova

Se os vetores são LD, existem escalares não todos nulos tais que

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n = \theta.$$

Supondo que $\alpha_i \neq 0$:

$$\alpha_i \cdot \mathbf{u}_i = -\alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 - \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 - \cdots - \alpha_{i-1} \cdot \mathbf{u}_{i-1} - \alpha_{i+1} \cdot \mathbf{u}_{i+1} - \cdots - \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\alpha_i}\left[-\alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 - \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 - \cdots - \alpha_{i-1} \cdot \mathbf{u}_{i-1} - \alpha_{i+1} \cdot \mathbf{u}_{i+1} - \cdots - \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n\right]$$

Portanto, $\mathbf{u}_i$ é combinação linear dos demais.

Dependência Linear

Teorema 1

Um conjunto de vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ... , $\mathbf{u}_n$ é LD se, e somente se, existe um $\mathbf{u}_i$ que é uma combinação linear dos demais.

Prova

Supondo que $\mathbf{u}_j$ é combinação linear dos demais:

$$\cdot \mathbf{u}_j = \beta_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \beta_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \beta_{j-1} \cdot \mathbf{u}_{j-1} + \beta_{j+1} \cdot \mathbf{u}_{j+1} + \cdots + \beta_n \cdot \mathbf{u}_n$$

Subtraindo-se $\mathbf{u}_j$ em ambos os lados

$$\beta_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \beta_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \beta_{j-1} \cdot \mathbf{u}_{j-1} + \mathbf{u}_j + \beta_{j+1} \cdot \mathbf{u}_{j+1} + \cdots + \beta_n \cdot \mathbf{u}_n = \theta$$

Portanto, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ... , $\mathbf{u}_n$ é LD

Dependência Linear

Teorema 2

Seja $\mathbb{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$. Se $r > n$, então os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ são LD.

Prova

Escrevendo os vetores como

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{n2} \end{bmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} u_{1r} \\ u_{2r} \\ \vdots \\ u_{nr} \end{bmatrix}$$

Agora, consideramos a equação

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_r \cdot \mathbf{u}_r = \theta.$$

Dependência Linear

Teorema 2

Seja $\mathbb{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$. Se $r > n$, então os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ são LD.

Prova

Obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} u_{11}\alpha_1 + u_{12}\alpha_2 + \cdots + u_{1r}\alpha_r = 0 \\ \vdots \\ u_{n1}\alpha_1 + u_{n2}\alpha_2 + \cdots + u_{nr}\alpha_r = 0 \end{cases}$$

O sistema linear é homogêneo com n equações e r variáveis. Temos que, se $r > n$, o sistema linear admite infinitas soluções. Podemos afirmar, portanto, que qualquer conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$ com mais de n vetores é sempre LD.

Base de um Espaço Vetorial

Definição

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e $\mathbb{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ um subconjunto de $\mathbb{V}$. Dizemos que $\mathbb{B}$ é uma base se:

(i) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ são LI

(ii) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ geram $\mathbb{V}$

Teorema 3

Se $\mathbb{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é uma base do espaço vetorial $\mathbb{V}$, então todo e qualquer vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ pode ser escrito de maneira única como combinação linear dos elementos de $\mathbb{B}$.

Base de um Espaço Vetorial

Teorema 3

Prova

Como $\mathbb{B}$ é base de $\mathbb{V}$, então para $\forall$ $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, podemos escrever

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n.$$

Supondo que o mesmo vetor possa ser escrito na forma

$$\mathbf{v} = \beta_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \beta_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \beta_n \cdot \mathbf{u}_n.$$

Subtraindo-se ambas as equações:

$$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot \mathbf{u}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot \mathbf{u}_n = \theta.$$

Base de um Espaço Vetorial

Teorema 3

Prova

Como os vetores são LI, o sistema formado admite apenas a solução $(\alpha_i - \beta_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Assim, $\alpha_i = \beta_i$. Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ são chamados de coordenadas do vetor $\mathbf{v}$ em relação à base $\mathbb{B}$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$