QXD0116 - Álgebra Linear

Matrizes - Escalonamento e Vetores

André Ribeiro Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Forma escalonada

Definição

Uma matriz está na forma escalonada por linhas se:

a) Cada elemento principal, não-nulo, de uma linha está à direita do elemento principal, não-nulo, de linha precedente.

b) Todas as linhas nulas, se existirem, estão na base da matriz (últimas linhas).

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Operações elementares

a) Multiplicar a i-ésima linha por uma constante $\alpha \neq 0$.

b) Permutar a i-ésima linha com a j-ésima linha.

c) Substituir a i-ésima linha por α vezes a j-ésima linha somada à i-ésima linha, onde $\alpha \neq 0$.

Definição

Se uma matriz **B** pode ser obtida de uma matriz **A** através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de **A**, dizemos que **A** é equivalente a **B**, ou seja: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.
O processo de **escalonameto** de uma matriz é a obtenção de uma matriz equivalente na forma escalonada.

Operações elementares

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \otimes 1/3 \\ \\ \\ \end{matrix}
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 2/3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \otimes -4 \\ \leftarrow \oplus \hookleftarrow \\ \\ \end{matrix} \\
\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -7/3 & 1/3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \otimes -5 \\ \\ \leftarrow \oplus \hookleftarrow \end{matrix}
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -7/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -7/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \otimes -3/7 \\ \\ \end{matrix} \\
\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/7 \\ 0 & 1/3 & -7/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \otimes -1/3 \\ \leftarrow \oplus \hookleftarrow \end{matrix}
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/7 \\ 0 & 0 & -48/21 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Escalonamento

Inversão de matrizes

Procedimento

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz de ordem n:

- 1^o passo: Formar uma matriz aumentada, isto é, formar a matriz $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem n.
- 2^o passo: Reduzir a matriz aumentada à forma escalonada. Se o processo gerar uma linha nula na parte correspondente à $\mathbf{A}$, não haverá inversa.
- 3^o passo: Continuar o processo até que a matriz aumentada fique na forma $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$. A matriz $\mathbf{B}$ obtida será a inversa de $\mathbf{A}$.

Escalonamento

Inversão de matrizes

Exemplo

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/15 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/15 & -1/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

Escalonamento

Posto (*rank*) de uma matriz

Definição

Seja **B** a matriz obtida de **A** por escalonamento. O posto de **A** é o número de linhas não nulas de **B**.

Teorema

O posto (característica) de uma matriz **A** (quadrada ou não) é dado pela maior ordem possível das submatrizes quadradas de **A**, com determinantes diferentes de zero.

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & 11 & -15 & 19 & 14 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & 25 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Vetores

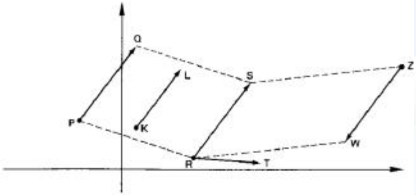
Definição

Representação de quantidades com grandeza e direção (quantidades vetoriais).

Representação geométrica

Segmento de reta de um ponto P a um ponto Q: $\overrightarrow{PQ}$, também chamado vetor de P a Q.

- $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ se tiverem mesmo comprimeto e direção
- permanece inalterado quando move-se no plano sem alterar características



Vetores no plano

Definição

Segmentos orientados com ponto inicial na origem (determinados apenas pelo ponto final).

Para cada ponto $P(a, b)$ está associado um único vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ e, para cada vetor, associamos a um único ponto no plano: **correspondência biunívoca**.

Representação analítica

Vetor no plano é um par ordenado de números reais, também representado por uma matriz coluna de dimensões 2×1.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Operações com vetores no plano

Se $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$:

- Soma de vetores:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

- Produto por escalar:

$$\mathbf{q} = \alpha \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot u_1 \\ \alpha \cdot u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

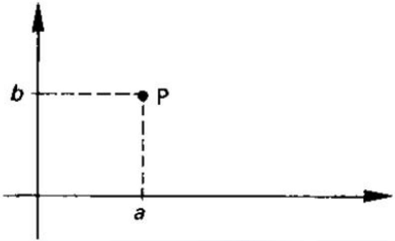
Operações com vetores no plano

Combinação linear

$$\mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot u_1 \\ \alpha \cdot u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \cdot v_1 \\ \beta \cdot v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot v_1 \\ \alpha \cdot u_2 + \beta \cdot v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Projeção ortogonal

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \\ &= a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



a pode ser interpretado como projeção ortogonal do vetor $\mathbf{v}$ sobre o eixo x e b a projeção ortogonal do vetor $\mathbf{v}$ sobre o eixo y.

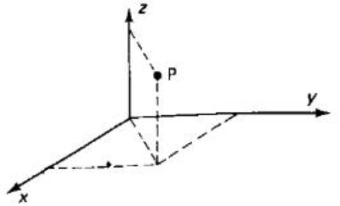
Vetores no espaço

Definição

Vetor no espaço é uma tripla ordenada de números reais, também representado por uma matriz coluna de dimensão 3×1.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{bmatrix}$$



Vetores em $\mathbb{R}^n$

Definição

Vetor no espaço de n dimensões é uma n-upla ordenada de números reais, também representada por uma matriz coluna de dimensão $n \times 1$.

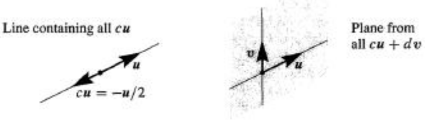
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Combinação Linear

Questões importantes

Dados os vetores $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, quando consideramos

- um único vetor $\mathbf{u}$, as combinações lineares são as múltiplas $c \cdot \mathbf{u}$
- dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, as combinações são $c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v}$
- três vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, as combinações são $c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v} + e \cdot \mathbf{w}$



Se os vetores são não-nulos, as combinações

- $c \cdot \mathbf{u}$ formam uma linha
- $c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v}$ formam um plano
- $c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v} + e \cdot \mathbf{w}$ formam um espaço 3D