Definições: Teoria dos Conjuntos

Material Complementar, 2020.1

Notas de Aula de Matemática Discreta

Prof. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

1 Introdução

Este documento visa complementar a leitura "Introdução à Aplicação de Definições e Teoremas". Contém uma lista de definições, apresentadas de forma gradual, que são requeridas para a nossa disciplina. Os conceitos listados aqui não serão reintroduzidos na disciplina, mas servirão como referência para resolver dúvidas em conceitos dos nossos requisitos. Em qualquer momento da disciplina, se você tiver dúvida em um conceito ou notação de matemática, há uma grande chance de encontrar a definição do conceito que lhe falta neste documento. Desta forma, poderá resolver sua dúvida ou compreendê-la melhor consultando as definições aqui presentes. A lista compreende os conjuntos numéricos, propriedades da aritmética, propriedades básicas de números, conceitos e propriedades de conjuntos e conceito e propriedades de relações e funções. Espera-se que estes tópicos tenham sido todos abordados no ensino médio ou na disciplina de Matemática Básica, a única diferença sendo a forma de apresentação. Este documento não apresentará os tópicos em detalhes; apenas fornecerá as definições relevantes.

2 Conjuntos

Definição 1 *(Conjunto) Um conjunto é uma coleção de objetos*[1].

Como sendo uma coleção, a ordem em que os elementos de um conjunto são apresentados não importa. Além disso, não há repetição de elementos. Cada objeto só pode aparecer no conjunto uma única vez.

Os elementos de um conjunto podem ser indicados de três maneiras:

1. Listando-os entre chaves. Ex.: $\{1, 2, 3, 4\}$
2. Indicando textualmente. Ex.: "O conjunto dos números naturais maiores que zero e menores que cinco."
3. Indicando a estrutura dos seus elementos com variáveis e condições que devam satisfazer. Ex.: $\{x \mid x$ é natural e $x > 0$ e $x < 5\}$.

[1] Esta é, talvez, a definição mais simples da matemática. Não há uma definição formal de objeto. Invés disso, a palavra "objeto" é propositalmente abstrata, podendo se referir a qualquer tipo de conceito. Um conjunto pode ser, portanto, uma coleção de número, de letras, de palavras, de caixas, de carros, de pessoas, etc.

A terceira forma é a mais segura e costuma também ser a forma mais curta de descrever um conjunto com muitos elementos. Quando escrevemos $C = \{x \in S \mid P(x)\}$, estamos indicando que os elementos do conjunto C são precisamente (indicado por "$=$") os elementos de S (lado esquerdo do "$|$") que satisfazem à condição $P(x)$ (lado direito do "$|$"). No nosso exemplo acima, a condição era de que x é um número natural maior que zero e menor que cinco. Tendo o símbolo $\mathbb{N}$ como sendo o nome do conjunto dos números naturais, podemos reescrever a terceira definição de forma bem mais curta: $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 5\}$.

Definição 2 *(Relação de Pertinência) Para cada objeto x em um conjunto S, dizemos que x* pertence a *S (anotado como "$x \in S$") ou, de forma sinônima, que x* é elemento *de S. Caso contrário, escrevemos $x \notin S$ para indicar que x não pertence a (não é elemento de) S.*

A título de exemplo, dado $S = \{1, 2, 3\}$, é correto afirmar que $1 \in S$, $2 \in S$, $3 \in S$. Por outro lado, $4 \notin S$.

Definição 3 *(Cardinalidade de um Conjunto) Dado um conjunto S, escrevemos $|S|$ para indicar a quantidade de elementos em S.*

Ex.: se $C = \{a, b, c\}$, teremos que $|C| = 3$ ("a *cardinalidade* de C é igual a 3").

Definição 4 *(Relação de Continência) Dados dois conjuntos S, T, dizemos que S é* subconjunto *de T se e somente se todo elemento de S é também um elemento de T.*

Formalmente, $S \subseteq T \leftrightarrow \forall x(x \in S \rightarrow x \in T)$.

Naturalmente, se $S \subseteq T$, então $|S| \leq |T|$.

Os demais símbolos abaixos são todos derivados da relação de continência e conectivos lógicos.

Definição 5 *(Relações entre Conjuntos)*

- $S = T$ *(S* é igual a *T) se e somente se $S \subseteq T$ e $T \subseteq S$.*
- $S \supseteq T$ *(S* é superconjunto de *T) se e somente se $T \subseteq S$.*
- $S \subset T$ *(S* está contido em *T) se e somente se $S \subseteq T$ e $S \neq T$.*[2]
- $S \supset T$ *(S* contém *T) se e somente se $S \supseteq T$ e $S \neq T$.*

Como comentaremos mais à frente, as relações entre conjuntos têm forte relação com os resultados de algumas operações entre eles.

Definição 6 *(Conjunto Universo) O* Universo *($\mathcal{U}$) é o conjunto que tem como elementos todos os objetos sobre os quais podemos falar em uma determinada aplicação.*

[2] Como de costume, $S \neq T$ indica que $S = T$ não é o caso, que S, T falham o teste da igualdade.

O conjunto universo também serve como referência para várias operações em conjuntos, especialmente a operação de *complemento*, e para garantir a consistência da aritmética de conjuntos. Em algumas situações é também chamado de *Domínio* ou *Domínio de Discurso*. Desta forma, todos os conjuntos que desejarmos usar serão subconjuntos do universo.

Caso não seja indicado um conjunto universo, devemos assumir que ele é a união de todos os conjuntos que estivermos discutindo. Por exemplo, se falarmos dos conjuntos $\{1,2\}, \{2,4,7\}$, podemos assumir que o universo é $\{1,2,4,7\}$ ou algum superconjunto deste. Comumente, assumiríamos que o universo é o conjunto dos números naturais nesta situação.

Definição 7 *(Conjunto das Partes) Dado $S \subseteq \mathcal{U}$, o seu* conjunto das partes *ou* conjunto potência de *S é o conjunto $\mathcal{P}(S)$ que tem como elementos todos os subconjuntos de S.*
Formalmente, $\mathcal{P}(S) = \{T \subseteq \mathcal{U} \mid T \subseteq S\}$.

Ex.: Se tivermos $S = \{a,b,c\}$, teremos

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

Também é possível anotar o conjunto das partes como 2^S. O motivo disto é que $|\mathcal{P}| = 2^{|S|}$ para todo conjunto S.

Definição 8 *(Operações Básicas sobre Conjuntos) Dados $S, T \subseteq \mathcal{U}$, temos:*

- $S \cap T = \{x \mid x \in S \wedge x \in T\}$, *a* interseção *de S e T;*
- $S \cup T = \{x \mid x \in S \vee x \in T\}$, *a* união *de S e T;*
- $S \setminus T = \{x \mid x \in S \wedge x \notin T\}$, *a* diferença *entre S e T;*
- $\overline{S} = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin S\}$, *o* complemento *de S;*
- $S \triangle T = (S \setminus T) \cup (T \setminus S)$, *a* diferença simétrica *entre S e T;.*

Alguns textos anotarão a diferença entre conjuntos como $S - T$ e o complemento de um conjunto como S'. Outros símbolos também podem ser admitidos. Em cada caso, verifique o fonte de onde você encontrar um novo símbolo pelo significado deste.

Definição 9 *(Conjunto Vazio) Um conjunto que não tenha elementos é chamado de conjunto* vazio*, indicado pelo símbolo $\emptyset$.*

Algumas observações sobre o conjunto vazio:

- $|\emptyset| = 0$.
- $\emptyset \subseteq S$, para todo conjunto S.
- se $|S| \geq 1$, então $\emptyset \subset S$.
- $S \subseteq \emptyset$ se e somente se $S = \emptyset$.

Definição 10 *(Propriedades das Operações de Conjuntos) Dados $S, T, R \subseteq \mathcal{U}$,*

1. $S \cap T = T \cap S$ *(comutatividade da $\cap$)*
2. $S \cup T = T \cup S$ *(comutatividade da $\cup$)*
3. $(S \cap T) \cap R = T \cap (S \cap R)$ *(associatividade da $\cap$)*

4. $(S \cup T) \cup R = T \cup (S \cup R)$ *(associatividade da $\cap$)*
5. $S \cap (T \cup R) = (S \cap T) \cup (S \cap R)$ *(distributividade da $\cap$ sobre a $\cup$)*
6. $S \cup (T \cap R) = (S \cup T) \cap (S \cup R)$ *(distributividade da $\cup$ sobre a $\cap$)*
7. $S \cap \mathcal{U} = S$ *(elemento neutro da $\cap$)*
8. $S \cup \emptyset = S$ *(elemento neutro da $\cup$)*
9. $S \cap \emptyset = \emptyset$ *(absorção da $\cap$ pelo $\emptyset$)*
10. $S \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ *(absorção da $\cup$ pelo $\mathcal{U}$)*
11. $S \cap S = S$ *(idempotência da $\cap$)*
12. $S \cup S = S$ *(idempotência da $\cup$)*
13. $S \cap \overline{S} = \emptyset$ *(complemento da $\cap$)*
14. $S \cup \overline{S} = \mathcal{U}$ *(complemento da $\cup$)*

Várias outras propriedades podem ser confirmadas, dependendo das relações entre os conjuntos. Por exemplo, se $S \subseteq T$, teremos que $S \cap T = S$ e que $S \cup T = T$.

Definição 11 *(Conjuntos Disjuntos) Dados $S, T \subseteq \mathcal{U}$, dizemos que S e T são* disjuntos *se e somente $S \cap T = \emptyset$.*

Note que $S \cap T = \emptyset$ se e somente se $S \subseteq \overline{T}$ e $T \subseteq \overline{S}$. De fato, $S \subseteq \overline{T}$ se e somente se $T \subseteq \overline{S}$, então basta usar uma das duas condições. Além disso, S, T são disjuntos se e somente se $S \triangle T = S \cup T$.

Definição 12 *(Produto Cartesiano) Dados dois conjuntos S, T, o* produto cartesiano *de S por T é o conjunto*

$$S \times T = \{(x, y) \mid x \in S \wedge y \in T\}.$$

Dados n conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_n$, o produto cartesiano de S_1 por S_2 por, $\ldots$, por S_n é o conjunto

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in S_1 \wedge x_2 \in S_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in S_n\}.$$

No caso de um produto cartesiano envolvendo apenas dois conjuntos S, T, chamaremos os elementos de $S \times T$ (lê-se S cartesiano T) de *pares ordenados*. Pares ordenados são muito diferentes de conjuntos, pois a ordem em que seus parâmetros aparecem é relevante. No caso mais geral, os elementos de um produto cartesiano são chamados de *tuplas ordenadas*.

3 Conjuntos Numéricos

Começaremos com a notação de conjuntos que utilizaremos. Os conjuntos mais frequentes a que nos referiremos são os dos naturais e dos inteiros.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto dos números *naturais*
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, o conjunto dos números *inteiros*

Um conjunto numérico pode ser restrito com alguns símbolos especiais. Dado um conjunto numérico $\mathcal{S}$, as seguintes notações são possíveis:

- $\mathcal{S}^* = \{x \in \mathcal{S} \mid x \neq 0\}$ é o conjunto de $\mathcal{S}$, dos elementos *não nulos* de $\mathcal{S}$;
- $\mathcal{S}_+ = \{x \in \mathcal{S} \mid x \geq 0\}$ é o conjunto dos elementos *não negativos de* $\mathcal{S}$;
- $\mathcal{S}_- = \{x \in \mathcal{S} \mid x \leq 0\}$ é o conjunto dos elementos *não positivos* de $\mathcal{S}$.

Estas notações podem ser combinadas para restringir qualquer conjunto em relação ao zero. Por exemplo, $\mathbb{Z}_+^*$ retornará o conjunto dos inteiros *positivos* (não negativos e não nulos). Como exemplo, note que $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

Estas notações, em particular a dos números não nulos, nos permite definir os número racionais:

- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$, o conjunto dos números *racionais*.

Note que na definição acima o segundo parâmetro, q, é um elemento dos inteiros não nulos. Ou seja, apenas p pode ser igual a zero, nunca o q (chamado de denominador da fração $\frac{p}{q}$).

Um número é chamado de *irracional* se não pertencer aos racionais. Isso significa, fundamentalmente, que é impossível escrever tal número como a fração de dois inteiros (o segundo sendo diferente de zero). Esse é o caso de números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, entre outros. Dito isto, utilizaremos ainda os seguintes símbolos:

- $\mathbb{I} = \{x \mid \forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{Z}^*, \frac{p}{q} \neq x\}$, o conjunto dos números *irracionais*;
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, o conjunto dos números *reais*.

4 Relações e Funções

Definição 13 *(Relação Binária) Dados dois conjuntos S, T, uma relação de S para T é um subconjunto de $S \times T$.*

Como cada subconjunto de $S \times T$ é uma relação diferente de S para T, podemos concluir que $\mathcal{P}(S \times T)$ apresentará todas as relações binárias de S para T que possam ser definidas.

As propriedades de relações binárias serão discutidas nesta disciplina com base na definição acima.

Definição 14 *(Relação (Geral)) Dados n conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (para $n \geq 2$), uma relação de S_1 para S_2 para ... para S_n é um subconjunto de $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$.*

Uma relação $f \subseteq S \times T$ é uma *função* de S para T (anotado como $f : S \to T$) se e somente se cada elemento de S estiver relacionado a exatamente um elemento de T. Isso significa que só pode haver um único par $(x, y) \in f$ para cada $x \in S$.

Formalmente:

Definição 15 *(Função) $f \subseteq S \times T$ é uma função de S para T se e somente se*

$$1.\ \forall x \in S, \exists y \in T \text{ tal que } f(x) = y;\ e$$

$$2.\ \forall x, \forall y, \forall z, \text{ se } ((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f), \text{ então } y = z.$$

Neste caso, escrevemos $f : S \to T$ para indicar que f é uma função com domínio *em S e* contradomínio *em T; e para cada elemento x de S, escrevemos $f(x)$ para denotar o elemento de T ao qual x está relacionado, chamado também de* imagem *de x.*

Note que as duas condições na definição acima são necessárias. A primeira condição exige que exista *pelo menos um* elemento de T relacionado a cada elemento de S. Isto não basta. É necessário que seja *exatamente um*. A segunda condição exige que haja *no máximo um* elemento de T relacionado a cada elemento de S. Juntas, as duas condições capturam a condição necessária.

Dizemos que uma função f é injetora se e somente se cada elemento do seu domínio tiver um valor de imagem diferente.

Definição 16 *(Função Injetora) Seja $f : S \to T$ uma função, dizemos que f é* injetora *se e somente se*

$$\forall x, \forall y, \forall z, \text{ se } (x, y) \in f \wedge (z, y) \in f, \text{ então } x = z.$$

Repare que esta condição é muito parecida com a condição 2. da definição de função. A única diferença é que nesta nova definição, a condição é verificada com foco no contradomínio (invés de foco no domínio).

Dizemos que uma função f é sobrejetora se e somente se cada elemento do seu contradomínio for imagem de algum elemento do domínio.

Definição 17 *(Função Injetora) Seja $f : S \to T$ uma função, dizemos que f é* injetora *se e somente se*

$$\forall y \in T, \exists x \in S \text{ tal que } f(x) = y.$$

Repare que esta condição é muito parecida com a condição 1. da definição de função. A única diferença é que nesta nova definição, a condição é verificada com foco no contradomínio (invés de foco no domínio).

Definição 18 *(Função Inversível) Uma função $f : S \to T$ é* inversível *se e somente se a relação $g = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$ é função.*

Neste caso, podemos escrever f^{-1} para referir-nos à função inversa de f.

Se pensarmos numa função como um tipo de operação que modifica o seu parâmetro de entrada para produzir um novo resultado, a vantagem de uma função inversível é que ela permite recuperar o parâmetro original, caso necessário. Algumas aplicações têm especial interesse nestas funções, enquanto outras aplicações se beneficiam das funções serem inversíveis. Fortemente relacionado a este conceito, temos as chamadas funções bijetoras.

Definição 19 *(Função Bijetora) Uma função $f : S \to T$ é* bijetora *se e somente se f é injetora e sobrejetora.*

Fato: uma função f é inversível se e somente se f é bijetora. Este é um teorema importantíssimo em teoria dos conjuntos.

Outras observações importantes:

- $f : S \to T$ é injetora se e somente se $|S| \leq |T|$;
- $f : S \to T$ é sobrejetora se e somente se $|S| \geq |T|$;
- $f : S \to T$ é bijetora se e somente se $|S| = |T|$.

Esta última observação é chamada Teorema Fundamental das Bijeções, importantíssimo em teoria de conjuntos e para teoria da computação.