Leitura Complementar + Lista de Execícios

SEMANA 06 - Técnicas p/ Demonstração de Teoremas (Parte 2)

2022.1

Notas de Aula de Matemática Discreta

Prof. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

Este documento traz uma lista de exercícios referentes aos tópicos da SEMANA 06. É recomendado que você faça todos os exercícios e tire suas dúvidas antes das aulas da semana seguinte.

1 Instruções Preliminares

Obs.: "prove", "demonstre" e "mostre" são sinônimos. Nos exercícios abaixo, em cada um dos casos, você deve oferecer um demonstração (uma prova!) do que estiver sendo afirmado.

Quando a resposta envolver números, todos os cálculos para chegar a estes números devem ser apresentados. Busque fornecer respostas que deixem claro seu raciocínio, exibindo e justificando todos os passos executados. Lembre-se que a sua resposta será lida por alguém no futuro e escreva suas respostas pensando no leitor. Idealmente, as suas respostas devem permitir que qualquer colega da turma possa identificar claramente quais foram os passos que você fez e porquê.

Este documento inclui uma leitura breve sobre os tópicos da SEMANA 06 que complementará as discussões da sala de aulas.

É muito importante que você suplemente esta lista com exercícios do livro conforme sua necessidade. Se tiver facilidade com os tópicos, poucos exercícios bastarão para compreendê-los; se tiver dificuldades, o caminho será reforçar a leitura do capítulo e resolver mais exercícios.

2 Leitura do Livro

Leia atentamente ao restante da Seção 1.7 do Rosen, completando a leitura da semana passada. Conforme a sua necessidade, revise a Seção 1.6.

3 Leitura Complementar: Erros em Demonstrações - Apreenda Sobre e Evite-os

3.1 Resumo de Demonstrações

Em aulas e leituras anteriores, vimos que o primeiro passo para uma demonstração é compreender o enunciado do teorema que queremos provar. Em particular, é interessante identificarmos as hipóteses e as conclusões de um teorema no formato condicional. Isso permitiria utilizar as técnicas de provar condicionais e nos daria um primeiro norte, pois destaca algumas das ferramentas disponíveis (as hipóteses) e um objetivo pra demonstração. Também é no enunciado que avaliamos se o teorema envolve generalizações e/ou existenciais. Vimos os tipos de argumentos necessários para cada tipo de prova entre estes: As generalizações caracterizam todos os elementos de um conjunto simultaneamente, enquanto os existenciais podem caracterizar apenas um elemento, o qual podemos construir em uma prova dita construtiva ao mostrar a testemunha do teorema ou argumentar pela sua existência, mesmo que não conheçamos tal testemunha.

Na hora de escolher a técnica para demosntração, deve-se ter me mente nessa parte o seguinte: Em cada técnica (prova direta, contraposição, contradição, ...), quais seriam as hipóteses e conclusões destacadas e qual dessas técnicas parece permitir um caminho mais fácil entre tais partes? Principalmente no começo, enquanto se acostuma a fazer demonstrações, vale enumerar as possibilidades de cada técnica e pensar em qual delas seria a mais adequada. Com o tempo de prática e a experiência, essa decisão se torna quase automática.

Finalmente, inclui-se um pouco de estratégia: Podemos adaptar a prova de um teorema com enunciado parecido ou aplicar um raciocínio ao contrário que segue a partir da conclusão, como que buscando as hipóteses. A vantagem de adaptar uma demonstração é que o processo se torna bem mais simples, pois a estrutura do argumento já está pronta. No caso do raciocínio ao contrário (reverso), temos a possibilidade de chegar a uma tautologia invés das hipóteses, o que também resolve a prova, mas é importante seguir seu raciocínio apenas com regras de equivalência. As premissa do raciocínio reverso são duas: (i) normalmente podemos acrescentar quaisquer tautologias (tais como teoremas) às hipóteses de uma demonstração no começo e (ii) se utilizarmos apenas equivalências no raciocínio, podemos invertê-lo para obter uma prova direta ou variação desta.

Em caso de dúvidas sobre qualquer um dos pontos acima, é recomendado recorrer às leituras anteriores e rever os conceitos. Faça os exercícios sugeridos e, se desejar mais, converse com o professor para que uma lista mais extensa seja provida.

3.2 Erros Comuns em Provas

Existe muitos erros em potencial que podem ser cometidos em uma demonstração, por isso chamaremos atenção para alguns dos erros mais comuns. Em cada nova prova, é essencial manter a consistência do argumento que estamos construindo. Um caminho para encontrar possíveis erros em sua demonstração é tentando avaliá-la após completa: Em cada passo utilizado, será que existe algum possível motivo para que ele tenha sido erroneamente aplicado? Ou talvez um dos seus passos permita falsificar o argumento que construiu? Talvez seja um tipo de passo que não deveria ser usado naquele momento, a exemplo de regras de inferência em provas com raciocínio reverso (que não podem ser usadas)?

Passos Inválidos Pra começarmos, avalie a seguinte prova. Antes de seguir em frente e ler o que há de errado com ela, tente detectar por sua conta. Será um excelente exercício buscar encontrar o erro sozinho.

Exemplo 1 *O que há de errado com essa "prova" de que 1 = 2?*[1]

"Prova:"

Usaremos este passos, onde a e b são dois inteiros positivos iguais.

Step	***Reason***
1. $a = b$	*Hipótese.*
2. $a^2 = ab$	*Multiplique os dois lados de (1) por a*
3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$	*Subtraia b^2 dos dois lados de (2)*
4. $(a - b)(a + b) = ab - b^2$	*Utilize o produto notável da diferença de dois quadrados em (3)*
5. $(a - b)(a + b) = b(a - b)$	*Fatore o segundo lado da equação em (4)*
6. $(a + b) = b$	*Divida ambos os lados por $a - b$*
7. $2b = b$	*Substitua a por b em (6) por causa da hipótese de que $a = b$*
8. $2 = 1$	*Divida ambos os lados por b.*

Pergunta*: Você sabe o que há de errado com a suposta demonstração acima?*

Solução*: Todos os passos são corretos, exceto pelo passo 6 em que dividimos ambos os lados da equação por $a - b$. O motivo do erro é que $a = b$, e por isso temos que $a - b$ vale zero; Dividindo ambos os lados só é válido enquanto o divisor for diferente de zero. Observe que o passo 8, embora parecido, não gera problemas, pois supomos que b é um inteiro positivo e, portanto, maior que zero.*

Para evitar erros desse tipo, esteja atento às condições necessárias para aplicar cada passo nas suas demonstrações.

Cuidado com os Condicionais Um outro tipo de erro comum vem da má compreensão de um enunciado ou do uso indevido de regras de equivalência de não existem. Considere a seguinte "prova":

Exemplo 2 ***"Teorema:"*** *Se n^2 é um número positivo, então n é positivo.*[2]

"Prova:" *Suponha que n^2 é um número positivo. Por que o condicional "se n é positivo, então n^2 é positivo" vale, podemos concluir que n é positivo.*

Pergunta*: Você sabe o que há de errado com a suposta demonstração acima?*

[1] Este exemplo foi livremente traduzido do livro Discrete Mathematics and Its Applications de Kenneth Rosen, 7th Edition, Page 89, Example 15.

[2] Este exemplo foi livremente traduzido do livro Discrete Mathematics and Its Applications de Kenneth Rosen, 7th Edition, Page 89, Example 16.

Solução*: Observe que o enunciado seria traduzido como $(\forall n)[n^2$ é um número positivo $\rightarrow$ n é positivo$]$. Nesse caso, temos que $P(n)$ é n^2 é um número positivo e $Q(n)$ significa que n é positivo. A prova se baseia no teorema $(\forall n)[Q(n) \rightarrow P(n)]$, que podemos demonstrar com tranquilidade. O problema na prova é que os condicionais $Q(n) \rightarrow P(n)$ e $P(n) \rightarrow Q(n)$ não são equivalentes, nem dizem nada um sobre o outro. A partir da hipótese $P(n)$ acima de que n^2 é um número positivo, não podemos concluir diretamente que n é um número positivo (o $Q(n)$), pois a regra de inferência utilizada não é válida. Veja a tabela:*

f	g	$f \rightarrow g$	$g \rightarrow f$
F	F	V	V
F	V	V	F
V	F	F	V
V	V	V	V

Compare as colunas referentes a $f \rightarrow g$ e $g \rightarrow f$. Note que as sequências de valores verdade são diferentes, portanto tratam-se de fórmulas não equivalentes.

Para evitar erros desse tipo, conheça bem suas regras de equivalência e inferência. Caso precise, revisite o material do livro que utilizou em matemática básica ou o próprio Rosen.

Negação da Hipótese

Exemplo 3 ***"Teorema:"*** *Se n não é um número positivo, então n^2 não é positivo. (Esse "teorema" é a contrapositiva do "teorema" no Exemplo 2.)* [3]

"Prova:" *Suponha que n não é um número positivo. Por que o condicional "se n é positivo, então n^2 é positivo" vale, podemos concluir que n^2 não é positivo.*

Pergunta*: Você sabe o que há de errado com a suposta demonstração acima?*

Solução*: Além de utilizar um teorema falso como base, há um problema muito mais profundo com esta suposta demonstração: Ela começa negando a hipótese de um condicional que seria utilizado em seguida. Como um passo intermediário, cita-se o "teorema" que afirma "se n é positivo, então n^2 é positivo". Veja esse teorema traduzido como $(\forall n)[Q(n) \rightarrow P(n)]$, onde $P(n)$ afirma que n^2 é um número positivo e $Q(n)$ significa que n é positivo (similar ao exemplo anterior). Observe que a "prova" dada acima começa afirmando $\neg Q(n)$ e conclui $\neg P(n)$, ou seja, opera como se os condicionais $Q(n) \rightarrow P(n)$ e $\neg Q(n) \rightarrow \neg P(n)$ fossem equivalentes, mas eles não são! Veja a tabela:*

f	g	$\neg f$	$\neg g$	$f \rightarrow g$	$\neg f \rightarrow \neg g$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V
V	V	F	F	V	V

[3] Este exemplo foi livremente traduzido do livro Discrete Mathematics and Its Applications de Kenneth Rosen, 7th Edition, Page 89, Example 17.

Compare as colunas referentes a $f \to g$ e $\neg f \to \neg g$. Note que as sequências de valores verdade são diferentes, portanto tratam-se de fórmulas não equivalentes.

Para evitar erros desse tipo, conheça bem suas regras de equivalência e inferência. Caso precise, revisite o material do livro que utilizou em matemática básica ou o próprio Rosen.

Apelar para o Enunciado Este tipo de erro é particularmente grave. Muitos argumentos incorretos se baseiam em insistir no enunciado, utilizando o fato que se quer provar como parte da prova em si. Essa falácia é chamada de "apelar para a questão" e ocorre quando um ou mais dos passos utilizados na prova são baseados na verdade prévia da sentença que queremos provar. Porque isso consiste quando usamos uma senteça para provar ela mesma, esse tipo de erro também é conhecido como raciocínio circular.

Exemplo 4 *Será que o argumento a seguir é correto? Ele supostamente mostra que se n é par sempre que n^2 for par.*[4]

Suponha que n^2 é par. Então $n^2 = 2k$, para algum inteiro k. Seja $n = 2l$ para algum inteiro l. Isso mostra que n é par.

***Solução**: O argumento é incorreto. Observe que a forma traduzida do teorema seria $(\forall n \in \mathbb{Z})[n^2 \text{ é par} \to n \text{ é par}]$. O argumento começa corretamente com a hipótese de que n^2 é par, utilizando a estrutura de prova direta. O problema vem quando, invés de seguir concluindo consequências da hipótese, o autor simplesmente pula para concluir que n também seria par, mas nenhum indício disso havia sido dado ainda. Isso consiste em afirmar o próprio enunciado original e portanto não consiste em uma demonstração. Observe que nesse caso temos um teorema válido para provar, mas o método é que foi inadequado.*

3.3 Conclusões

Uma parte importante do processo de aprender a fazer demonstrações envolve compreender possíveis erros para poder evitá-los. Seja crítico com suas próprias demonstrações (e as de outros). Releia e procure por possíveis erros para que possa corrigí-los. Detectar qualquer erro em uma prova quase garantirá que você mesmo não cometerá de novo tal erro no futuro. Às vezes até matemáticos famosos cometem alguns erros difíceis de notar e demonstrações erradas de resultados importantes circulam a comunidade despercebidas por anos até que essas sutilezas sejam propriamente percebidas. O melhor caminho para desenvolver essa habilidade é exercitar bastante, sem medo de errar, mas aprendendo com esses erros quando acontecerem.

[4] Este exemplo foi livremente traduzido do livro Discrete Mathematics and Its Applications de Kenneth Rosen, 7th Edition, Page 90, Example 18.

4 Exercícios

4.1 Adaptação de Provas e Resultados Conhecidos

Exercício 1. Prove que "se n^2 é um número par, então n também é par".

Exercício 2. Observe o processo de prova de que "$\sqrt{2}$ é um número irracional". Utilizeremos o resultado provado no Exercício 1 como lema para a demosntração.

Lema 1 *"se n^2 é um número par, então n também é par".*

Prova 1 *Deixada como exercício (ver* **Exercício 1***).*

Teorema 1 *"$\sqrt{2}$ é um número irracional"*

Prova 2 *Por contradição, suponha que $\sqrt{2}$ é um número racional. Logo, existem inteiros a e b tais que $\sqrt{2} = a/b$, enquanto a e b não possuem fatores comuns e $b \neq 0$. A suposição é válida, pois podemos assumir a forma racional minimizada de qualquer número. Elevando os dois lados da equação ao quadrado, temos $2 = (a/b)^2 = a^2/b^2$. Logo, $2b^2 = a^2$. Como b é um número inteiro, b^2 também é. Isso significa que a^2 é par. Pelo Lema 1, concluímos que a é par. Portanto, existe um inteiro c tal que $a = 2c$. Substituindo em $2b^2 = a^2$, teremos $2b^2 = (2c)^2 = 4c^2$. Dividindo os dois lados por 2, temos que $b^2 = 2c^2$. Como c é inteiro, c^2 também é. Isso significa que b^2 é par. O Lema 1 nos permite concluir que b é par. Uma vez que a e b são pares, esses números têm o 2 como fator comum, mas isso é um absurdo, pois assumimos que a e b não possuiam fatores comuns. Logo, $\sqrt{2}$ deve ser um número irracional.*

Estude a prova acima e depois a adapte para mostrar que "$\sqrt{3}$ é um número irracional". Recomenda-se tentar montar a nova prova de forma independente, replicando os passos sem refazer a leitura do texto original.

Exercício 3. Prove que existem 100 inteiros positivos consecutivos que não são quadrados perfeitos. Sua prova foi construtiva ou não construtiva? **Dica:** Considere a diferença entre quadrados perfeitos vizinhos.

4.2 Novas Técnicas de Prova

Estes exercícios são o foco da SEMANA 06.

Exercício 4. Demonstre que $n^2 \geq 2^n - 1$ quando n é um número inteiro com $1 \leq n \leq 4$.

ATENÇÃO Do exercício **Exercício 5** até o **Exercício 7**, utilizaremos o conceito de **módulo** de um número real para praticar a *Prova por Casos*. A própria definição da função módulo é dada *por casos*, sendo lida no formato "if-else". Quando temos um conceito definido nesse formato, isso já nos sugere que a prova por casos será útil para demonstrar propriedades que o utilizem. A definição segue:

Dado um número real x, o **módulo** de x, denotado $|x|$ é dado por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Você pode ler também desta forma:

> "Dado um número real x, se $x \geq 0$, então $|x| = x$; se não, $|x| = -x$."

As demonstrações usando prova por casos são muito parecidas com a resolução de problemas em programação utilizando IFs aninhados ou a estrutura CASE.

Exercício 5. Utilize a definição fornecida para provar que $|n| \geq 0$ para todo número inteiro n.

Exercício 6. Demonstre que $|n+2| \geq 2$ para todo número natural n. Em seguida, responda: o teorema continuaria válido se fosse enunciado para todo n *inteiro*? Justifique.

Exercício 7. Demonstre que para todo x, y inteiros, $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Exercício 8. Utilizando *Prova por Casos*, demonstre que se a, b, c são números reais, então $min(a, min(b, c)) = min(min(a, b), c)$, onde

$$min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq y \\ y, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercício 9. Demonstre que se a, b, c são números reais com $a \neq 0$, então existe uma única solução para a equação $ax + b = c$.

Exercício 10. Suponha que a e b sejam inteiros ímpares, com $a \neq b$. Demonstre que existe um único inteiro c tal que $|a - c| = |b - c|$.