Leitura Complementar + Lista de Execícios

SEMANA 14 - Indução Matemática

2022.1

Notas de Aula de Matemática Discreta

Prof. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

Este documento traz uma lista de exercícios referentes aos tópicos da SEMANA 14. É recomendado que você faça todos os exercícios e tire suas dúvidas antes das aulas da semana seguinte.

1 Instruções Preliminares

Obs.: "prove", "demonstre" e "mostre" são sinônimos. Nos exercícios abaixo, em cada um dos casos, você deve oferecer um demonstração (uma prova!) do que estiver sendo afirmado.

Quando a resposta envolver números, todos os cálculos para chegar a estes números devem ser apresentados. Busque fornecer respostas que deixem claro seu raciocínio, exibindo e justificando todos os passos executados. Lembre-se que a sua resposta será lida por alguém no futuro e escreva suas respostas pensando no leitor. Idealmente, as suas respostas devem permitir que qualquer colega da turma possa identificar claramente quais foram os passos que você fez e porquê.

É muito importante que você suplemente esta lista com exercícios do livro conforme sua necessidade. Se tiver facilidade com os tópicos, poucos exercícios bastarão para compreendê-los; se tiver dificuldades, o caminho será reforçar a leitura do capítulo e resolver mais exercícios.

2 Leitura do Livro

Leia atentamente à Seção 4.3 do Rosen e verifique a lista de exercícios do livro por complementos a estes. Esta seção tem várias exemplos complementares de definições recursivas e demonstrações sobre eles, de forma que a leitura completa reforçará ainda mais as conclusões da nossa última aula e a compreensão destes conceitos. Conforme a sua necessidade, revise os conteúdos sobre técnicas de técnicas de demonstração, divisibilidade, algoritmo da divisão, sequências e somas.

3 Exercícios

Exercício 1. Seja S o conjunto definido por

CASO BASE	$0 \in S$
CASO RECURSIVO	$\forall x\,(x \in S \rightarrow x + 2 \in S)$

Utilize o **CASO BASE** e iterações do **CASO RECURSIVO** para observar como o conjunto é construído e responda: intuitivamente, que conjunto está sendo definido?

Exercício 2. Seja S o conjunto definido por

CASO BASE	$0 \in S$, $1 \in S$, e $2 \in S$
CASO RECURSIVO	$\forall x\,(x \in S \rightarrow x + 3 \in S)$

Utilize o **CASO BASE** e iterações do **CASO RECURSIVO** para observar como o conjunto é construído e responda: intuitivamente, que conjunto está sendo definido?

Exercício 3. Seja S o conjunto definido por

CASO BASE	$0 \in S$
CASO RECURSIVO	$\forall x\,(x \in S \rightarrow x^2 + 2x + 1 \in S)$

Utilize o **CASO BASE** e iterações do **CASO RECURSIVO** para observar como o conjunto é construído e responda: intuitivamente, que conjunto está sendo definido?

Exercício 4. Seja S o conjunto definido por

CASO BASE	$3 \in S$
CASO RECURSIVO	$\forall x\,\forall y\,(x \in S \wedge y \in S \rightarrow x + y \in S)$

Utilize o **CASO BASE** e iterações do **CASO RECURSIVO** para observar como o conjunto é construído e responda: intuitivamente, que conjunto está sendo definido?

Exercício 5. Em cada item, proponha uma definição recursiva para o conceito indicado.

(a) A Progressão Aritmética $a_n = 3 + 2n$
(b) A Progressão Geométrica $b_n = 5.4^n$
(c) A sequência $c_n = 3^n + 1$
(d) O conjunto dos naturais ímpares
(e) O conjunto dos múltiplos positivos de 5
(f) O conjunto dos naturais n tais que $n \equiv 2\ (mod\ 5)$

Exercício 6. Seja S o conjunto definido por

CASO BASE	$0 \in S$
CASO RECURSIVO	$\forall x\, (x \in S \to x + 2 \in S)$

Prove que:

(a) Todo elemento de S é múltiplo de 2.

(b) Todo natural múltiplo de 2 é elemento de S.

(c) Para todo x, se $x \in S$, então $x + 4 \in S$.

Exercício 7. Nesta questão, refira-se às definições que demos para o Conjunto de Strings de Bits e o tamanho de uma string. Abaixo, definiremos um novo alfabeto com três símbolos e uma definição correspondente para o conjunto de strings nesse alfabeto.

Seja $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ o conjunto Σ^* é definido por

CASO BASE	$\lambda \in \Sigma^*$
CASO RECURSIVO	$\forall x\, \forall a(x \in \Sigma^* \land a \in \Sigma \to xa \in \Sigma^*)$

Usando Indução Estrutural, prove que

"para todo $k \in \mathbb{N}$, existem 3^k strings $x \in \Sigma^*$ tais que $|x| = k$."

Exercício 8. O tamanho de uma string também pode ser definido recursivamente. Forneça uma definição recursiva para este conceito.