QXD0116 - Álgebra Linear

Transformações Lineares VII

André Ribeiro Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Diagonalização

Teorema

Uma matriz $\mathbf{A}$ de ordem n tem um conjunto de n autovetores LI se, e somente se, existe uma matriz $\mathbf{P}$ de ordem n não-singular, tal que:

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}\mathbf{P}^{-1},$$

onde $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal de orden n. Ou seja, a matriz $\mathbf{A}$ tem n autovetores LI $\Leftrightarrow$ diagonalizável.

Prova

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ autovalores de $\mathbf{A}$ e sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ os autovetores correspondentes, os quais são LI. Sabendo que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, podemos construir uma matriz $\mathbf{P}$ da seguinte forma abaixo, onde $\mathbf{v}_i$ é a iésima coluna de $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}.$$

Diagonalização

Teorema

Uma matriz **A** de ordem n tem um conjunto de n autovetores LI se, e somente se, existe uma matriz **P** de ordem n não-singular, tal que:

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}\mathbf{P}^{-1},$$

onde **D** é uma matriz diagonal de orden n. Ou seja, a matriz **A** tem n autovetores LI $\Leftrightarrow$ diagonalizável.

Prova

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} &= \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_3 & \ldots & \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3 & \ldots & \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Diagonalização

Teorema

Uma matriz $\mathbf{A}$ de ordem n tem um conjunto de n autovetores LI se, e somente se, existe uma matriz $\mathbf{P}$ de ordem n não-singular, tal que:

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}\mathbf{P}^{-1},$$

onde $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal de orden n. Ou seja, a matriz $\mathbf{A}$ tem n autovetores LI $\Leftrightarrow$ diagonalizável.

Prova

Assim,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}$$

Diagonalização

Exemplo

Diagonalize a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 8 = 3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\ &= (\lambda - 5)\cdot(\lambda + 1) \Rightarrow \lambda_1 = 5 \quad , \quad \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

Diagonalização

Exemplo

Diagonalize a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução

Para $\lambda_1 = 5$:

$$\begin{bmatrix} 3-5 & 4 \\ 2 & 1-5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2v_1 + 4v_2 = 0 \\ 2v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = 2v_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $v_2 = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Diagonalização

Exemplo

Diagonalize a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução

Para $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{bmatrix} 3+1 & 4 \\ 2 & 1+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4v_1 + 4v_2 = 0 \\ 2v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = -v_2 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $v_2 = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Diagonalização

Exemplo

Diagonalize a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução

Portanto:

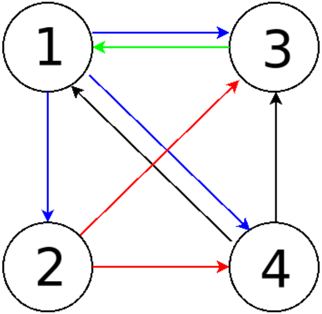
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Diagonalização

Aplicação

Page Rank



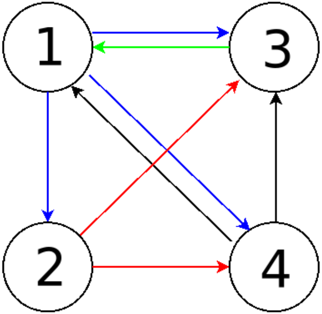
- Classificação de páginas pela estrutura de links
- Um link pode ser intepretado como um voto
- Importância definida pelo número de votos
- Probabilidade de usuário aleatório estar em uma página

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Diagonalização

Aplicação

Page Rank



- Grafo direcionado
- Matriz de Adjacência $\mathbf{A}$: $a_{ij} = 1$ se a página j tem link para a i

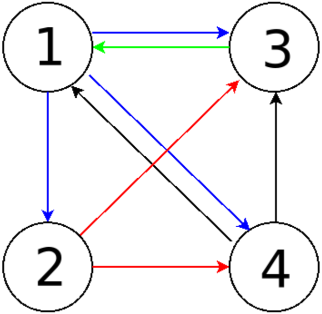
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Diagonalização

Aplicação

Page Rank



- Matriz de transição **M**: normalização de **A**

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

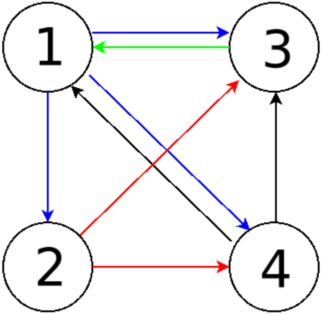
- Probabilidade de usuário aleatório ir de j para i
- **r** é o vetor de ranqueamento/importância

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Diagonalização

Aplicação

Page Rank



- Estado inicial:

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

- A cada iteração (clique):

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}_{k-1}$$

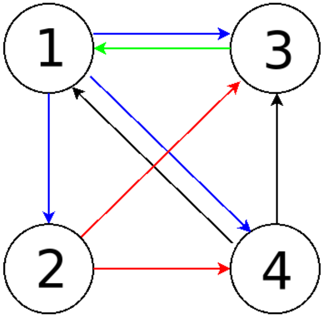
- O que acontece após infinitos cliques?

$$r_k = \mathbf{M}^k \cdot \mathbf{r}_0 \Rightarrow r_\infty = \mathbf{M}^\infty \cdot \mathbf{r}_0$$

Diagonalização

Aplicação

Page Rank



- $\mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$
- $\mathbf{M}^k = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{P}^{-1}$
- $\mathbf{M}$ tem sempre um autovalor $\lambda = 1$ (maior módulo)

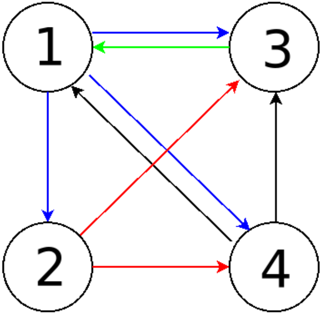
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix},$$

onde $\varepsilon < 1$, $\delta < 1$ e $\sigma < 1$.

Diagonalização

Aplicação

Page Rank



- Autovetor associado a $\lambda = 1$: resolver $(\mathbf{M} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_\infty &= \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{r}_0 \\
&= \mathbf{v}
\end{aligned}
$$