Lógica para Computação

Profa. Dra. Viviane Menezes

Universidade Federal do Ceará

vivianemenezes@ufc.br

7 de março de 2024

Nas aulas passadas...

Nas aulas passadas...

- Sintaxe da Lógica Proposicional
- Especificação de Sentenças em Lógica Proposicional

Sistemas Dedutivos

Sistemas Dedutivos

Como deduzir uma conclusão?

Sistemas Dedutivos

Como deduzir uma conclusão?

Exemplo 1

- *Se* o trem tivesse chegado atrasado e não houvesse táxis na estação, *então* João se atrasaria para o seu compromisso.
- João *não* se atrasou para o seu compromisso.
- O trem chegou atrasado.

Sistemas Dedutivos

Como deduzir uma conclusão?

Exemplo 1

- *Se* o trem tivesse chegado atrasado e não houvesse táxis na estação, *então* João se atrasaria para o seu compromisso.
- João *não* se atrasou para o seu compromisso.
- O trem chegou atrasado.
- Portanto, havia táxis na estação.

Sistemas Dedutivos

Conjunto de regras que nos permite chegar a uma conclusão dado um determinado conjunto de premissas.

Sistemas Dedutivos

Conjunto de regras que nos permite chegar a uma conclusão dado um determinado conjunto de premissas.

- Dedução Natural

Sistemas Dedutivos

Conjunto de regras que nos permite chegar a uma conclusão dado um determinado conjunto de premissas.

- Dedução Natural
- Axiomatização

Sistemas Dedutivos

Conjunto de regras que nos permite chegar a uma conclusão dado um determinado conjunto de premissas.

- Dedução Natural
- Axiomatização
- *Tableaux Analíticos*

Sistemas Dedutivos

Conjunto de regras que nos permite chegar a uma conclusão dado um determinado conjunto de premissas.

- Dedução Natural
- Axiomatização
- *Tableaux Analíticos*

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \vdash \psi$$

Dedução Natural

Dedução Natural

- Iremos fazer uma prova linear em que o primeiro passo será listar todas as premissas da prova, uma premissa por linha.

- Prove que: $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \vdash \psi$

1.	φ_1	premissa
2.	φ_2	premissa
	...	
n.	φ_n	premissa

Dedução Natural

- Em seguida podemos aplicar as regras de dedução natural, utilizando as fórmulas obtidas nas linhas anteriores*.

- Em geral, há uma regra para *introduzir* e outra para *eliminar* cada um dos conectivos da lógica proposicional: $\wedge, \rightarrow, \vee, \neg$

Dedução Natural

Regras para a conjunção

- *e-introdução ($\wedge i$).*

$$
\begin{array}{lll}
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{m.} & \varphi & \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{n.} & \psi & \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{p.} & \varphi \wedge \psi & \wedge i \text{ m,n}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lll}
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{m.} & \psi & \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{n.} & \varphi & \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{p.} & \varphi \wedge \psi & \wedge\text{i m,n}
\end{array}
$$

Dedução Natural

Regras para a conjunção

- *e-eliminação ($\wedge$e).*

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\varphi \wedge \psi$			m.	$\varphi \wedge \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p.	φ	$\wedge$e m		p.	ψ	$\wedge$e m

Dedução Natural

Regras para a conjunção

Exemplo:

- P: estudo na UFC.
- Q: vivo em Quixadá.

Prove que:

$$P, Q \vdash P \wedge Q.$$

Dedução Natural

Regras para a conjunção

Exemplo:

- P: estudo na UFC.
- Q: vivo em Quixadá.

Prove que:

$$P, Q \vdash P \wedge Q.$$

Prova

1. P *premissa*
2. Q *premissa*
3.

Regras para a dedução natural

Regras para a conjunção

Exemplo:

- $P \wedge Q$: *estudo na UFC e vivo em Quixadá*.

Prove que:

$$P \wedge Q \vdash Q.$$

Regras para a dedução natural

Regras para a conjunção

Exemplo:

- $P \wedge Q$: *estudo na UFC e vivo em Quixadá*.

Prove que:

$$P \wedge Q \vdash Q.$$

Prova

1. $P \wedge Q$ *premissa*

Exercícios

Exercícios

Exercício

Prove que:

$$P \wedge Q, R \vdash Q \wedge R$$

Exercícios

Exercício

Prove que:

$$(P \wedge Q) \wedge R, S \wedge T \vdash Q \wedge S$$

Dedução Natural

Regras para o condicional

- *condicional eliminação (→e).*

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m.	$\varphi \rightarrow \psi$		m.	φ	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n.	φ		n.	$\varphi \rightarrow \psi$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
p.	ψ	→e m,n	p.	ψ	→e m,n

Dedução Natural

Regras para o condicional

- *condicional eliminação (→e).*

⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
m.	$\varphi \rightarrow \psi$			m.	φ	
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
n.	φ			n.	$\varphi \rightarrow \psi$	
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
p.	ψ	→e m,n		p.	ψ	→e m,n

método (*modus*) que afirma o conseqüente (*ponens*).

Dedução Natural

Regras para o condicional

Exemplo:

- $P \rightarrow Q$: se choveu, então a rua está molhada.
- P: choveu

Prove que:

$$P \rightarrow Q, P \vdash Q$$

Dedução Natural

Regras para o condicional

Exemplo:

- $P \rightarrow Q$: se choveu, então a rua está molhada.
- P: choveu

Prove que:

$$P \rightarrow Q, P \vdash Q$$

Prova

1. $P \rightarrow Q$ *premissa*
2. P *premissa*

Exercícios

Exercício

Prove que:

$$\neg P \wedge Q, (\neg P \wedge Q) \rightarrow (R \vee \neg P) \vdash R \vee \neg P.$$

Exercícios

Exercício

Prove que:

$$P, P \rightarrow Q, P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash R$$

Dedução Natural

Regras para o condicional

- condicional introdução (→i)

⋮	⋮	⋮
m.	φ	hipótese
⋮	⋮	⋮
n.	ψ	
n+1.	$\varphi \rightarrow \psi$	→i m-n

Dedução Natural

Regras para o condicional

- condicional introdução (→i)

⋮	⋮	⋮
m.	φ	hipótese
⋮	⋮	⋮
n.	ψ	
n+1.	$\varphi \rightarrow \psi$	→i m-n

Raciocínio hipotético: A caixa serve para delimitar o escopo da hipótese temporária.

Dedução Natural

Regras para o condicional

- condicional introdução ($\rightarrow$ i)
- **Exemplo.**
  Prove que:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash P \wedge Q \rightarrow R$$

Exercícios

Exercício

Prove que:

$$P \to Q \vdash P \land R \to Q \land R$$

Exercício

Prove que:

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$