QXD0116 - Álgebra Linear

Transformações Lineares V

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

André Ribeiro Braga

Polinômio Característico

Definição

Dada uma matriz $n \times n$ quadrada $\mathbf{A}$, sua matriz característica é dada por

$$\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem n e λ é um parâmetro. Seu determinante é um polinômio $P(\lambda)$ de grau n em λ, chamado de polinômio característico de $\mathbf{A}$.

Polinômio Característico

Exemplo

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Determine o polinômio característico de $\mathbf{A}$.

Solução

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) &= (1-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 6 \\ &= 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6 \end{aligned}$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

Polinômio Característico

Teorema 1

Um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de $\mathbf{A}$ se, e somente se, λ é um zero (raíz) de seu polinômio característico.

Prova

Sabemos que λ é um autovalor de $\mathbf{A}$ se, e somente se, $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I})$ é singular. Esta, por sua vez, é singular se, e somente se, $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = 0$. Mas $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = P(\lambda)$, logo λ é raíz de $P(\lambda)$.

Polinômio Característico

Teorema 2

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz de ordem n, então:

(a) Existe, no mínimo, um autovetor correspondente a cada autovalor.

(b) Os autovetores correspondentes a cada autovalor forma um espaço vetorial.

Prova

(a) Seja λ um autovalor de $\mathbf{A}$. Para encontrar o autovetor correspondente, deve-se resolver o sistema

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Como $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = 0$, a matriz dos coeficientes tem posto menor que n. Portanto, a solução não-trivial existe.

Polinômio Característico

Teorema 2

Seja **A** uma matriz de ordem n, então:

(a) Existe, no mínimo, um autovetor correspondente a cada autovalor.

(b) Os autovetores correspondentes a cada autovalor forma um espaço vetorial.

Prova

(b) Sejam **u** e **v** dois autovetores correspondentes ao autovalor λ. Então temos $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u}$ e $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Assim

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v}) &= \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \\ &= \alpha \cdot \lambda \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \lambda \cdot \mathbf{v} \\ &= \lambda \cdot (\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Polinômio Característico

Teorema 3

Seja **A** uma matriz de ordem n, então:

(a) Os autovetores correspondentes a autovalores distintos são LI.

(b) Se **A** tem n autovalores distintos, então existem n autovetores, um associado a cada autovalor.

Prova

(a) Supondo $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_s$ autovetores correspondentes aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ e que os autovetores são LD. E que s é o menor inteiro para que isso seja verdade. Então

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_s \cdot \mathbf{u}_s = \mathbf{0}, \quad (*)$$

onde α_i não são todos nulos.

Polinômio Característico

Teorema 3

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz de ordem n, então:

(a) Os autovetores correspondentes a autovalores distintos são LI.

(b) Se $\mathbf{A}$ tem n autovalores distintos, então existem n autovetores, um associado a cada autovalor.

Prova

(a) Multiplicando-se por $\mathbf{A}$

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_s \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_s = \mathbf{0}$$

$$\alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \lambda_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_s \cdot \lambda_s \cdot \mathbf{u}_s = \mathbf{0}. \quad (\Delta)$$

Se $\lambda_i = 0$, a equação fornece relação de dependência entre $s - 1$ autovetores, contradizendo a definição de s.

Polinômio Característico

Teorema 3

Seja **A** uma matriz de ordem n, então:

(a) Os autovetores correspondentes a autovalores distintos são LI.

(b) Se **A** tem n autovalores distintos, então existem n autovetores, um associado a cada autovalor.

Prova

(a) Se todos $\lambda_i \neq 0$, então multiplicando a equação $(*)$ por λ_1 e subtraindo da equação (Δ), obtemos

$$\alpha_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_s \cdot (\lambda_s - \lambda_1) \cdot \mathbf{u}_s = \mathbf{0}.$$

Polinômio Característico

Teorema 3

Seja **A** uma matriz de ordem n, então:

(a) Os autovetores correspondentes a autovalores distintos são LI.

(b) Se **A** tem n autovalores distintos, então existem n autovetores, um associado a cada autovalor.

Prova

(a) Como $(\lambda_i - \lambda_1) \neq 0$ para $i = 2, 3, \ldots, s$, obtemos novamente uma relação de dependência linear entre $s - 1$ autovetores, contradizendo a definição de s. Logo, os autovetores correspondentes a autovalores distintos são LI.

Polinômio Característico

Teorema 3

Seja **A** uma matriz de ordem n, então:

(a) Os autovetores correspondentes a autovalores distintos são LI.

(b) Se **A** tem n autovalores distintos, então existem n autovetores, um associado a cada autovalor.

Prova

(b) Sabendo que existem n autovetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ correspondentes ao autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Seja $\mathbf{u}$ um outro autovetor correspondente ao autovalor λ_i. Como $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ são LI, então

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n. \quad (\square)$$

Polinômio Característico

Teorema 3

Seja **A** uma matriz de ordem n, então:

(a) Os autovetores correspondentes a autovalores distintos são LI.

(b) Se **A** tem n autovalores distintos, então existem n autovetores, um associado a cada autovalor.

Prova

(b) Multiplicando-se por **A**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \alpha_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n$$

$$\lambda_i \cdot \mathbf{u} = \alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \lambda_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \lambda_n \cdot \mathbf{u}_n$$

Subtraindo pelo produto de ($\square$) por λ_i

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_i) \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_i) \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot (\lambda_n - \lambda_i) \cdot \mathbf{u}_n$$

Polinômio Característico

Teorema 3

Seja **A** uma matriz de ordem n, então:

(a) Os autovetores correspondentes a autovalores distintos são LI.

(b) Se **A** tem n autovalores distintos, então existem n autovetores, um associado a cada autovalor.

Prova

(b) Como $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ são LI, então $\alpha_j = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ e $j \neq i$. Logo $\mathbf{u} = \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i$.

obs: Autovalores iguais podem ou não ter autovetores LI.

Polinômio Característico

Exemplo

Determine os autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \to T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 - 3u_2 + 3u_3 \\ 3u_1 - 5u_2 + 3u_3 \\ 6u_1 - 6u_2 + 4u_3 \end{bmatrix} \to \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solução

Matriz característica:

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

Polinômio Característico

Exemplo

Determine os autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \to T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 - 3u_2 + 3u_3 \\ 3u_1 - 5u_2 + 3u_3 \\ 6u_1 - 6u_2 + 4u_3 \end{bmatrix} \to \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solução

Polinômio característico:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 12\lambda - 16 = (\lambda + 2)^2 \cdot (\lambda - 4)$$

Polinômio Característico

Exemplo

Determine os autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \to T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 - 3u_2 + 3u_3 \\ 3u_1 - 5u_2 + 3u_3 \\ 6u_1 - 6u_2 + 4u_3 \end{bmatrix} \to \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solução

Fazendo $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, obtemos:

$$\begin{cases} 3v_1 - 3v_2 + 3v_3 = 0 \\ 3v_1 - 3v_2 + 3v_3 = 0 \\ 6v_1 - 6v_2 + 6v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2 - v_3$$

Polinômio Característico

Exemplo

Determine os autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \to T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 - 3u_2 + 3u_3 \\ 3u_1 - 5u_2 + 3u_3 \\ 6u_1 - 6u_2 + 4u_3 \end{bmatrix} \to \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solução

Fazendo $\lambda_3 = 4$, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{c} -3v_1 - 3v_2 + 3v_3 = 0 \\ 3v_1 - 9v_2 + 3v_3 = 0 \\ 6v_1 - 6v_2 = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow v_1 = v_2 = \frac{v_3}{2}$$