# Divisibilidade

Matemática Discreta
Prof. Lucas Ismaily
2º Semestre de 2022

Aluno: [ ] Matrícula: [ ]

**Questões:**

1. O número 17 divide cada um dos números abaixo?

   (a) 68 (b) 84 (c) 357 (d) 1001

2. Mostre que se $a|b$ e $b|a$, em que $a$ e $b$ são inteiros não nulos, então $a = b$ ou $a = -b$.

3. Mostre que se $a, b$ e $c$ são números inteiros com $c \neq 0$, tal que $ac|bc$, então $a|b$.

4. Qual o quociente e o resto quando

   (a) 19 é dividido por 7?
   (b) -111 é dividido por 11?
   (c) 789 é dividido por 23?
   (d) 1001 é dividido por 13?
   (e) 0 é dividido por 19?
   (f) 3 é dividido por 5?
   (g) -1 é dividido por 3?
   (h) 4 é dividido por 1?

5. Mostre que se $n$ e $k$ são números inteiros positivos, então $\lceil n/k \rceil = \lfloor (n-1)/k \rfloor + 1$.

6. Encontre uma fórmula para o número inteiro com menor valor absoluto (mais próximo de zero) que é congruente módulo $m$ ao número inteiro $a$, em que $m$ é um número inteiro positivo.

7. Avalie as quantidades abaixo.

   (a) 13 **mod** 3
   (b) -97 **mod** 11
   (c) 155 **mod** 19
   (d) -221 **mod** 23

8. Decida se cada um dos inteiros abaixo é congruente a 5 módulo 17.

(a) 80 (b) 103 (c) -29 (d) -122

9. Mostre que se $n \mid m$, em que $n$ e $m$ são números inteiros positivos maiores que 1, e se $a \equiv b \pmod{m}$, em que $a$ e $b$ são números inteiros, então $a \equiv b(\text{mod } n)$.

10. Encontre contra-exemplos para cada uma das proposições abaixo sobre congruências.

    (a) Se $ac \equiv bc(\text{mod } m)$, em que $a$, $b$, $c$ e $m$ são números inteiros com $m \geq 2$, então $a \equiv b(\text{mod } m)$.

    (b) Se $a \equiv b(\text{mod } m)$ e $c \equiv d(\text{mod } m)$, em que $a$, $b$, $c$, $d$ e $m$ são números inteiros com $c$ e $d$ positivos e $m \geq 2$, então $a^c \equiv b^d(\text{mod } m)$.

11. Mostre que se $a$, $b$, $k$ e $m$ são números inteiros, tal que $k \geq 1$, $m \geq 2$ e $a \equiv b(\text{mod } m)$, então $a^k \equiv b^k(\text{mod } m)$ sempre que $k$ for um número inteiro positivo.

12. Um estacionamento tem 31 vagas para visitantes, numeradas de 0 a 30. Os visitantes são determinados a parar nas vagas usando-se a função de hashing $h(k) = k$ **mod** 31, em que $k$ é o número formado pelos três primeiros dígitos da placa do carro do visitante.

    (a) Quais vagas são determinadas pela função de hashing para os carros que têm os seguintes três primeiros dígitos da placa do carro?

    $$317, 918, 007, 100, 111, 310$$

    (b) Descreva um procedimento que os visitantes deverão seguir a fim de encontrar um vaga livre para estacionar, quando o espaço designado a eles está ocupado.

13. Qual a sequência de números pseudo-aleatórios gerada usando-se o gerador multiplicativo puro $x_{n+1} = 3x_n$ **mod** $11$ com semente $x_0 = 2$?

14. Codifique a mensagem "DO NOT PASS GO" substituindo as letras por números, aplicando a função de codificação dada e, então, transcrevendo os números em letras.

    (a) $f(p) = (p + 3)$ **mod** $26$ (o código de César)

    (b) $f(p) = (p + 13)$ **mod** $26$

    (c) $f(p) = (3p + 7)$ **mod** $26$

15. Todos os livros são identificados por um **número de registro denominado ISBN**, um código com 13 dígitos $x_1, x_2 ... x_{10}$, determinado pela editora. Esses 13 dígitos consistem de blocos que identificam a linguagem, a editora, o número determinado para o livro pela a editora e, por fim, um número com 1 dígito que é ou um dígito ou

uma letra X (usada para representar 10). Este último dígito é selecionado para que $\sum_{i=1}^{10} ix \equiv 0 \pmod{11}$ e é usado para detectar erros em dígitos individuais e transpor os dígitos.

(a) Os primeiros nove dígitos de ISBN da versão européia da quinta edição deste livro são 0-07-119881. Qual é o último dígito para esse livro?

(b) Determine se o último dígito de ISBN para este livro foi corretamente computado pela editora.