QXD0116 - Álgebra Linear

Mudança de Base - Aplicação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

André Ribeiro Braga

Rotação de Objeto em Jogo

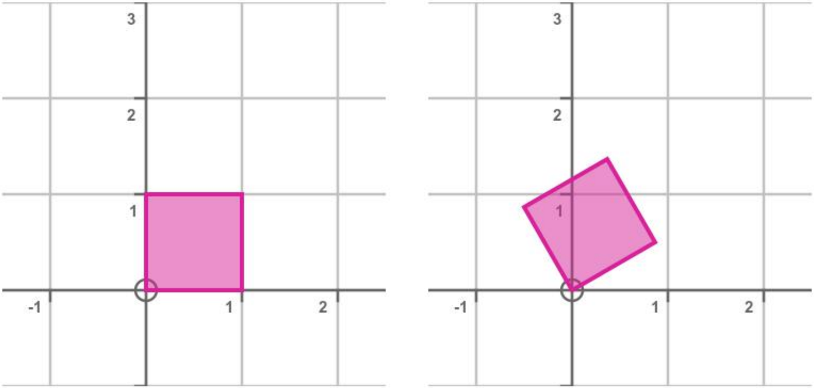
Contexto

Imagine que você está trabalhando com computação gráfica para criar um jogo ou uma animação. Objetos no mundo virtual (como um carro, uma árvore, ou um personagem) são representados por um conjunto de pontos (vértices) no espaço. A posição, orientação e escala desses objetos são definidas por suas coordenadas em um sistema de referência.

Problema

Considere um objeto 2D simples, como um quadrado, em um jogo. Seus vértices são dados pelas coordenadas (x, y) em um sistema de coordenadas global (a base canônica do seu mundo, por exemplo).

Rotação de Objeto em Jogo



Rotação de Objeto em Jogo

Definição da nova base (rotacionada)

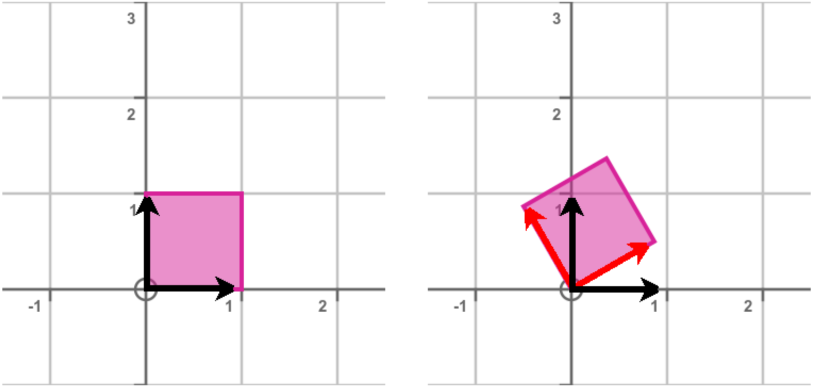
Quando você gira um objeto, o que você está fazendo, na verdade, é definir um novo sistema de coordenadas local para esse objeto, que está rotacionado em relação ao sistema global. Por exemplo, se você quer girar o quadrado por um ângulo θ no sentido anti-horário

$$\mathbb{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \; ; \; \mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right\}.$$

Coordenadas o objeto na nova base

As coordenadas dos vértices do quadrado nesse novo sistema de coordenadas local $\mathbb{B}_2$ seriam as mesmas coordenadas "originais" do quadrado antes da rotação, mas agora interpretadas na base global.

Rotação de Objeto em Jogo



Rotação de Objeto em Jogo

$$\mathbb{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \; ; \; \mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right\}.$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{21} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} a_{11} = \cos\theta \\ a_{21} = \sin\theta \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = a_{21} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{22} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} a_{21} = -\sin\theta \\ a_{22} = \cos\theta \end{array}$$

Rotação de Objeto em Jogo

$$\mathbb{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \; ; \; \mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right\}.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\mathbb{B}_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\mathbb{B}_2}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\mathbb{B}_2} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\mathbb{B}_1}$$