Matemática Básica
Lista de Exercícios 05 e 06

Conjuntos e Operações com Conjuntos

1. Liste todos os elementos dos conjuntos abaixo.
   (a) $\{x \mid x$ é um número real, tal que $x^2 = 1\}$
   (b) $\{x \mid x$ é um número inteiro positivo menor que $12\}$
   (c) $\{x \mid x$ é quadrado de um número inteiro e $x < 100\}$
   (d) $\{x \mid x$ é um número inteiro, tal que $x^2 = 2\}$
2. Determine se cada um dos pares de conjuntos a seguir são iguais.
   (a) $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}, \quad \{5, 3, 1\}$
   (b) $\{\{1\}\}, \quad \{1, \{1\}\}$ (c) $\emptyset, \quad \{\emptyset\}$
3. Para cada um dos conjuntos abaixo, determine se 2 é um elemento do conjunto.
   (a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x$ é um número inteiro maior que 1 $\}$
   (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x$ é o quadrado de um número inteiro $\}$
   (c) $\{2, \{2\}\}$ (e) $\{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$
   (d) $\{\{2\}, \{\{2\}\}\}$ (f) $\{\{\{2\}\}\}$
4. Determine se cada uma das proposições abaixo é verdadeira ou falsa.
   (a) $0 \in \emptyset$ (d) $\emptyset \subset \{0\}$ (g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
   (b) $\emptyset \in \{0\}$ (e) $\{0\} \in \{0\}$
   (c) $\{0\} \subset \emptyset$ (f) $\{0\} \subset \{0\}$
5. Determine se cada uma das proposições abaixo é verdadeira ou falsa.
   (a) $x \in \{x\}$ (c) $\{x\} \in \{x\}$ (e) $\emptyset \subseteq \{x\}$
   (b) $\{x\} \subseteq \{x\}$ (d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$ (f) $\emptyset \in \{x\}$
6. Use um diagrama de Venn para ilustrar o conjunto de todos os meses do ano cujos nomes não contêm a letra *R*. Conjunto universo: todos os meses do ano.
7. Use um diagrama de Venn para ilustrar as relações $A \subset B$ e $B \subset C$.
8. Suponha que *A*, *B* e *C* sejam conjuntos tal que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Mostre que $A \subseteq C$.
9. Qual é a cardinalidade de cada um dos conjuntos abaixo?
   (a) $\{a\}$ (c) $\{a, \{a\}\}$
   (b) $\{\{a\}\}$ (d) $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$
10. Encontre o conjunto das partes para cada um dos conjuntos abaixo, em que a e b são elementos distintos.
    (a) $\{a\}$ (b) $\{a, b\}$ (c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
11. Quantos elementos cada um dos conjuntos abaixo tem, se a e b são elementos distintos?
    (a) $P(\{a, b, \{a, b\}\})$ (c) $P(P(\emptyset))$
    (b) $P(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$
12. Considere $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{y, z\}$. Encontre.
    (a) $A \times B$ (b) $B \times A$
13. Qual é o produto cartesiano $A \times B \times C$, em que A é o conjunto de todas empresas aéreas, B é o conjunto de todas as cidades do Brasil, e o conjunto C é igual ao conjunto B?
14. Considere A como um conjunto. Mostre que $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.
15. Quantos elementos distintos tem $A \times B$, se A tem m elementos e B tem n elementos?
16. Explique por que $A \times B \times C$ e $(A \times B) \times C$ não são iguais.
17. Transcreva cada uma das quantificações abaixo em português, e determine seu valor-verdade.
    (a) $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \neq -1)$ (c) $\forall x \in \mathbb{Z}\ (x^2 > 0)$
    (b) $\exists x \in \mathbb{Z}\ (x^2 = 2)$ (d) $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 = x)$
18. Encontre o conjunto-verdade de cada um dos predicados abaixo, em que o domínio é o conjunto dos números inteiros.
    (a) $P(x)$: "$x^2 < 3$" (c) $R(x)$: "$2x + 1 = 0$"
    (b) $Q(x)$: "$x^2 > x$"
19. Seja A o conjunto de estudantes que moram a mais de um quilômetro de distância da faculdade, e B o conjunto dos estudantes que vão a pé para as aulas. Descreva quais são os estudantes em cada um dos conjuntos abaixo.
    (a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$ (c) $A - B$ (d) $B - A$
20. Considere $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{0, 3, 6\}$. Encontre
    (a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$ (c) $A - B$ (d) $B - A$

Nos 3 exercícios a seguir, A é um subconjunto de algum conjunto universo U.

21. Demonstre a propriedade da dupla complementação, ou seja, mostre que $\overline{\overline{A}} = A$.
22. Demonstre as propriedades de dominação abaixo:
    (a) $A \cup U = U$ (b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
23. Demonstre as propriedades dos complementares abaixo:
    (a) $A \cup \overline{A} = U$ (b) $A \cap \overline{A} = \emptyset$
24. Sejam A e B conjuntos. Demonstre as propriedades comutativas mostrando que
    (a) $A \cup B = B \cup A$ (b) $A \cap B = B \cap A$
25. Demonstre a segunda propriedade de absorção, mostrando que se A e B forem conjuntos, então $A \cap (A \cup B) = A$.
26. Demonstre a primeira lei de De Morgan, mostrando que se *A* e *B* forem conjuntos, então $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
    (a) usando a definição dos operadores e equivalências lógicas.
    (b) usando uma tabela de pertinência.
27. Mostre que se *A*, *B* e *C* são conjuntos, então $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.
    (a) usando a definição dos operadores e equivalências lógicas.
    (b) usando uma tabela de pertinência.
28. Mostre que se *A* e *B* são conjuntos, então $A - B = A \cap \overline{B}$.
29. Demonstre a primeira propriedade associativa, mostrando que se *A*, *B* e *C* são conjuntos, então $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
30. Demonstre a segunda propriedade distributiva, mostrando que se *A*, *B* e *C* são conjuntos, então $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
31. Considere $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Encontre
    (a) $A \cap B \cap C$. (b) $A \cup B \cup C$. (c) $(A \cup B) \cap C$. (d) $(A \cap B) \cup C$.
32. Desenhe o diagrama de Venn para cada uma das combinações abaixo dos conjuntos *A*, *B* e *C*.
    (a) $A \cap (B - C)$ (b) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (c) $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})$
33. O que você pode dizer sobre os conjuntos *A* e *B*, se sabemos que
    (a) $A \cup B = A$? (c) $A - B = A$? (e) $A - B = B - A$?
    (b) $A \cap B = A$? (d) $A \cap B = B \cap A$?
34. Considere A e B como subconjuntos de um conjunto universo U. Mostre que $A \subseteq B$ se e somente se $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

A **diferença simétrica** de *A* e *B*, denotada por $A \oplus B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em *A* ou *B*, mas não em ambos.

35. Encontre a diferença simétrica do conjunto de estudantes de ciência da computação e do conjunto de estudantes de matemática em sua faculdade.
36. Mostre que $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
37. Mostre que se *A* é um subconjunto de um conjunto universo *U*, então
    (a) $A \oplus A = \emptyset$. (c) $A \oplus U = \overline{A}$.
    (b) $A \oplus \emptyset = A$. (d) $A \oplus \overline{A} = U$.
38. O que você pode dizer sobre os conjuntos *A* e *B*, se $A \oplus B = A$?
39. Suponha que A, B, C sejam conjuntos, tal que $A \oplus C = B \oplus C$. É o caso de $A = B$?
40. Se A, B, C, e D são conjuntos, temos que $(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = (A \oplus D) \oplus (B \oplus C)$?