Leitura Complementar + Lista de Execícios

SEMANA 10 - Relações Binárias e Suas Propriedades

2022.1

Notas de Aula de Matemática Discreta

Prof. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

Este documento traz uma lista de exercícios referentes aos tópicos da SEMANA 10. É recomendado que você faça todos os exercícios e tire suas dúvidas antes das aulas da semana seguinte.

1 Instruções Preliminares

Obs.: "prove", "demonstre" e "mostre" são sinônimos. Nos exercícios abaixo, em cada um dos casos, você deve oferecer um demonstração (uma prova!) do que estiver sendo afirmado.

Quando a resposta envolver números, todos os cálculos para chegar a estes números devem ser apresentados. Busque fornecer respostas que deixem claro seu raciocínio, exibindo e justificando todos os passos executados. Lembre-se que a sua resposta será lida por alguém no futuro e escreva suas respostas pensando no leitor. Idealmente, as suas respostas devem permitir que qualquer colega da turma possa identificar claramente quais foram os passos que você fez e porquê.

É muito importante que você suplemente esta lista com exercícios do livro conforme sua necessidade. Se tiver facilidade com os tópicos, poucos exercícios bastarão para compreendê-los; se tiver dificuldades, o caminho será reforçar a leitura do capítulo e resolver mais exercícios.

2 Leitura do Livro

Leia atentamente a Seção 8.1 do Rosen e verifique a lista de exercícios do livro por complementos a estes. Conforme a sua necessidade, revise os conteúdos da unidade de técnicas de demonstração de teoremas e os tópicos de divisibilidade.

3 Leitura Complementar: Provando Propriedades de Relações Binárias

Nesta leitura, discutiremos o formato mais comum das provas de teoremas sobre propriedades de relações binárias. Veremos que estas provas costumam ser uniformes em relação a cada propriedade que discutimos, variando-se apenas o contexto da relação binária que é discutida. Por conta disso, boa parte do trabalho se dá na interpretação de cada teorema. Para facilitar a sua compreensão dos pontos mais importantes destas discussões, trataremos da relação de divisibilidade, cujas propriedades já foram discutidas no vídeo da semana. Desta forma você poderá se concentrar nos detalhes desse tipo de prova, invés de se preocupar com a natureza da relação que será discutida. Para prosseguirmos, começaremos com o seguinte enunciado:

Teorema 1 *A divisibilidade é reflexiva nos inteiros positivos.*

Este enunciado é um dos mais simples que podemos ter, tanto pela natureza da relação proposta (a divisibilidade) quanto pela propriedade discutida (a reflexividade). O primeiro passo para provarmos essa proprosição será contextualizarmos o que significa o teorema propõe com as definições adequadas. Neste exemplo, precisaremos combinar as definições de divisibilidade, relação binária e reflexividade, uma por vez.

Em primeiro lugar, contextualizaremos o que é a *relação de divisibilidade* em um conjunto qualquer: esta será a relação R dos pares (x, y) tais que x divide y. No caso do nosso exemplo, avaliaremos se R é reflexiva no contexto dos inteiros positivos, então devemos restingir x e y a elementos deste conjunto. Poderemos representar isso de forma compacta escrevendo que

$$R \subseteq \mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^*, \text{ com } R = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\},$$

lembrando que $\mathbb{Z}_+^*$ é a notação para indicar o conjunto dos inteiros positivos[1].

Repare que todos os elementos necessários para construir a relação nesta notação estão presentes no enunciado: os pares da relação são caracterizados pelo conceito de *divisibilidade* e os parâmetros de cada par ordenado são *inteiros positivos*. De fato, os únicos elementos da expressão acima que variam de uma situação pra outra são o conjunto sobre o qual a relação é proposta e o critério que descreve os pares da relação.

Compreendendo-se bem o que a relação propõe, saberemos diferenciar exatamnete quais pares ordenadores pertencem e não pentencem a ela. Neste caso, dados dois inteiros positivos a, b saberemos que $(a, b) \in R$ se e somente se $a \mid b$. Isso significa, portanto, que se $a \nmid b$, necessariamente teremos que $(a, b) \notin R$.

Com esta descrição, recorreremos à definição de relação reflexiva (ou propriedade reflexiva ou reflexividade) para podermos contextualizar o que o teorema propõe.

Definição 1 *Uma relação R no conjunto A é* reflexiva *se e somente se todo elemento de A está relacionado consigo mesmo por R.*

Note que o lado esquerdo desta definição é quase igual à afirmação que desejamos provar. No contexto do nosso exercício, a relação R é a divisibilidade e o conjunto A

[1] Na notação $\mathbb{Z}_+^*$, o asterisco (*) indica que o zero não é parte do conjunto e o $_+$ exclui os elementos negativos.

será o conjunto dos inteiros positivos. Portanto, se desejamos garantir que *a relação de reflexividade nos inteiros positivos é reflexiva*, devemos provar que *todo inteiro positivo divide a si mesmo*. Isso significará provarmos que

"para todo x inteiro positivo, x divide x."

Note que, em geral, provar que uma relação R qualquer no conjunto A é reflexiva significará provar que "para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$". No nosso caso, "$(x, x) \in R$" é o mesmo que "x divide x", pois a relação discutida é a divisibilidade.

Prova 1 (Teorema 1) *Seja c um inteiro positivo qualquer, deveremos provar que c divide c. Observe que $c = 1.c$. Como c é diferente de zero (por ser positivo) e 1 é um inteiro, podemos usar a definição de divisibilidade para concluir que $c \mid c$.*

A prova de um enunciado muito parecido com este foi proposta como exercício na lista da SEMANA 06 (Primos, MDC e MMC), mas com domínio nos inteiros diferentes de zero. Note que a prova é bastante simples, uma vez que compreendemos bem a relação proposta e como a reflexividade deve ser interpretada nessa relação.

Observe ainda que seria impossível completar a prova acima se não tivéssemos suposto que c é diferente de zero. Nós fizemos isso indiretamente ao dizermos que c é um inteiro positivo, conforme o enunciado do teorema que queremos provar. Se tentássemos provar que a divisibilidade é reflexiva no conjunto de todos os inteiros, o último passo não poderia ser feito, pois c poderia ser zero se fosse instanciado como um inteiro qualquer. De fato, a relação de divisibilidade não é reflexiva no conjunto dos inteiros, pois o par $(0, 0)$ não pertencerá à relação (teremos um contra-exemplo).

O restante da nossa discussão pode ser simplificado, pois os princípios necessários à interpretação dos teoremas já foram discutidos. Ainda assim, há peculiaridades das provas de cada propriedade que devem ser observadas para maior compreensão deste tópico. Em seguida, vamos discutir o seguinte enunciado:

Proposição 1 *A divisibilidade é simétrica nos inteiros positivos.*

A diferença principal (de texto) em relação ao teorema que provamos é a propriedade mencionada, mas desta vez a afirmação que obtemos é *falsa*. Apesar disso, convém discutirmos a interpretação desta proposição e o que precisamos para provar sua falsidade. Para continuarmos, relembremos a definição da simetria de relações binárias:

Definição 2 *Uma relação R no conjunto A é* simétrica *se e somente se para cada par $(x, y) \in R$ também temos que $(y, x) \in R$.*

Esta propriedade, quando corretamente interpretada, nos dará uma generalização de condicional: diremos que R no conjunto A é simétrica se e somente se "para todo $x, y \in A$, se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$". Isso favorece bastante o nosso trabalho, pois é o tipo de teorema que mais temos provado. No contexto da divisibilidade sobre inteiros positivos, precisaríamos provar que "para todos x e y inteiros positivos, se x divide y, então y divide x."

Infelizmente essa afirmação é falsa, então não poderemos exemplficar a prova de simetria com essa proposta de relação. Faremos isso mais à frente. Por hora, vamos apenas provar que o enunciado é falso. Como sempre, o melhor caminho para isso é oferecer um contra-exemplo do que foi proposto. Neste caso, basta escolhermos um par ordenado da relação que use números diferentes. Podemos dizer, por exemplo, que $2 \mid 4$, mas $4 \nmid 2$. Isto equivale a observar o condicional no caso em que $x = 2$ e $y = 4$, tornando o lado esquerdo do condicional verdadeiro (pois $2 \mid 4$) e o lado direito do condicional falso (pois $4 \nmid 2$). É importante reparar que também há casos em que o condicional será correto. Por exemplo, se observarmos o condicional fazendo $x = y = 3$, teremos que provar que "se $3 \mid 3$, então $3 \mid 3$", que é verdadeiro. O problema é que o condicional não é verdadeiro no caso *geral*. Este destaque serve para reforçar que *exemplos não provam generalizações* ao mesmo tempo que contra-exemplos as falsificam imediatamente.

De volta a teoremas que poderemos provar, vamos verificar que

Teorema 2 *A divisibilidade é transitiva nos inteiros positivos.*

Esta propriedade, quando corretamente interpretada, também nos dará uma generalização de condicional para provar. Relembremos a definição necessária:

Definição 3 *Uma relação R no conjunto A é* transitiva *se e somente se sempre que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então também temos $(x, z) \in R$.*

Em geral, é mais difícil pronunciar a característica da transitividade sem recorrer diretamente ao condicional e variáveis, mas isso não tem impacto na hora de provar tais teoremas: diremos que uma relação R no conjunto A é simétrica se e somente se "para todo $x, y, z \in A$, se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$". No contexto da divisibilidade sobre inteiros positivos, precisamos provar que

"para todos x, y e z inteiros positivos, se x divide y e y divide z, então x divide z."

Esse enunciado foi discutido na video-aula da SEMANA 04 (Divisibilidade) e sua prova foi deixada como exercício nos slides. É um excelente teorema para praticar a demonstração de teoremas com a divisibilidade por conta da sua estrutura (generalização de condicional) e porque a prova direta nos dará *duas* hipóteses. Vamos à prova:

Prova 2 (Teorema 2) *Sejam a, b, c inteiros positivos quaisquer, suponha que a divide b e b divide c. Pela definição de divisibilidade, deve existir um inteiro k tal que $b = ak$ e, similarmente, um inteiro l tal que $c = bl$. A primeira equação nos permite substituir b na segunda equação para obter $c = (ak)l$. Isto é o mesmo que $c = a(bl)$ devido à propriedade associativa da multiplicação. Como a é diferente de zero (por ser positivo) e bl é um inteiro (pois ambos b e l são inteiros), podemos usar a definição de divisibilidade para concluir que a divide c.*

O começo dessa prova é sempre igual: instanciamos as três variáveis do enunciado de transitividade e criamos uma hipótese baseada na técnica de prova de condicionais que tivermos escolhido. Neste caso, segui por prova direta. É muito comum que as provas de transitividade se beneficiem mais da prova direta ou prova por contradição simplesmente porque elas nos darão uma hipótese a mais que o normal para trabalharmos. Depois disso, será necessário usar a definição da relação. Estes passos precisam ser contextualizados de acordo com a definição que estiver sendo discutida, por isso é tão importante interpretar os enunciados com calma.

Continuando, discutiremos uma prova pro teorema que nos falta:

Teorema 3 *A divisibilidade é anti-simétrica nos inteiros positivos.*

As provas de anti-simetria também seguem formatos bem uniformes se usarmos a definição fornecida, pois enunciados desse tipo também são caracterizados pela generalização de condicional. Parecido com o que vimos pra transitividade, a prova direta nos dará duas hipóteses, mas há uma outra diferença que deve influenciar a prova do condicional. Para podermos observar essa diferença, vejamos primeiro a definição que usaremos:

Definição 4 *Uma relação R no conjunto A é* anti-simétrica *se e somente se para cada par $(x, y) \in R$ com $x \neq y$, temos que $(y, x) \notin R$.*

No contexto da divisibilidade com inteiros positivos, isso significa que o que precisamos provar é que

"para todos x e y inteiros positivos, se x divide y e $x \neq y$, então y *não divide* x."

Isto é um pouco diferente dos enunciados que discutimos anteriormente porque o lado direito do condicional pede que um par ordenado desrespeite a relação. Apesar disso, eu começarei exemplificando uma prova para este teorema que segue pro prova direta.

Prova 3 (Teorema 3) *Sejam a e b inteiros positivos quaisquer, suponha que a divide b e $a \neq b$. Pela definição de divisibilidade, existe um inteiro c tal que $b = ac$. Como a e b são positivos, podemos garantir que c é positivo e, uma vez que $a \neq b$, podemos garantir que $c \neq 1$. Isso significa que $c > 1$ e, portanto, que $b > a$. Desta forma, se tentarmos dividir a por b, o algoritmo da divisão nos dirá que a **div** $b = 0$ e a **mod** $b = a$. Como a **mod** $b \neq 0$ (pois a é positivo), $b \nmid a$.*

Dependendo da sua facilidade para trabalhar com a divisibilidade e o algoritmo da divisão, esta pode ter parecido uma prova muito interessante ou um pouco indigesta, pois alguns passos dependem de propriedades de inequações e propriedades das funções **div** e **mod** . Boa parte do motivo é que estávamos tentando garantir *a negação* de uma expressão de divisibilidade. Pela definição que temos, provar que $n \mid m$ é relativamente fácil, pois trata-se de uma prova de existência: devemos garantir que existe um inteiro k tal que $m = nk$. O contrário, é naturalmente mais difícil, pois precisamos mostrar que tal inteiro *não existe*. Por causa disso, só poderemos concluir que $n \nmid m$ se pudermos garantir que $m \neq nj$ para todo inteiro j. Isto passa a ser uma prova de generalização sobre j que necessariamente envolverá alguma forma de inequação, já que o objetivo envolve garantir que dois números são diferentes. Estas observações acima devem ser entendidas especificamente no contexto da divisibilidade, pois tratam especificamente da sua definição.

Em alguns casos, pode convir evitar a expressão negativa que aparecerá no lado direito do condicional. O caminho para isso é usar a técnica de prova *por contradição*, que também nos dará uma hipótese a mais em relação à prova direta. O custo disso é que precisaremos produzir contradições a partir das hipóteses estabelecidas. Abaixo, um exemplo de prova por contradição pro nosso teorema.

Prova 4 (Teorema 3 (Alternativa)) *Sejam a e b inteiros positivos quaisquer. Por contradição, suponha que a divide b e $a \neq b$, mas b divide a. Pela definição de divisibilidade, existe um inteiro c tal que $b = ac$ e, similarmente, existe um inteiro d tal que $a = bd$. A primeira equação nos permite substituir b na segunda equação para obtermos $a = (ac)d$. Isolando a no lado direito, obtemos $a = a.(cd)$, o que significa, necessariamente que $cd = 1$. Como c e d são inteiros, isso nos dá duas possibilidades:*

Caso 1: $c = d = 1$. *Neste caso, quando substituirmos c em $b = ac$, obteremos que $b = a$, contradizendo a hipótese de que $a \neq b$.*

Caso 2: $c = d = -1$. *Neste caso, quando substiruirmos c em $b = ac$, obteremos que $b = -a$, mas isso contradiz a hipótese de que a e b são ambos positivos.*

Em ambos os casos encontramos um contradição, garantindo que a contradição vem das nossas hipóteses. Isso conclui a prova por contradição, garantindo que o condicional que desejávamos provar é correto, ou seja: se $a \mid b$ e $a \neq b$, então $b \nmid a$.

Estas provas que estamos discutindo são como as de qualquer outra situação com generalização de condicionais: dependendo do que tivermos como condições e conclusão do condicional, a técnica que facilitará mais o trabalho pode mudar.

Para finalizarmos as discussões, veremos um exemplo de prova para a simetria de uma relação. Para isso, revisitaremos um exemplo dos slides para a qual a simetria não foi discutida mostrando o mesmo nível de detalhe das provas anteriores. Seja

$$R_{11} \subseteq \mathbb{Z}^2, \text{ com } R_{11} = \{(a, b) \mid a + b \text{ é ímpar}\},$$

provaremos que

Teorema 4 *R_{11} é simétrica.*

Contextualizando o critério da definição de simetria em R_6, o que precisamos provar é que

“para todos x e y inteiros, se $x + y$ é ímpar, então $y + x$ é ímpar.”

As provas de simetria, quando aplicáveis, tendem a ser bastante simples, pois se resumem a mostrar que a característica da relação binária será preservada se invertermos as posições das ordenadas de cada par. Com a prova de generalização, estaremos falando de dois elementos quaisquer do domínio da relação nas posições destas ordenadas, então esperamos mostrar na parte do condicional que a característica dos pares da relação será preservada se as posições destas variáveis forem invertidas a partir da hipótese.

Prova 5 *Sejam a e b inteiros quaisquer. Por prova direta, suponha que $x + y$ é ímpar. Como $x + y = y + x$, podemos garantir que $y + x$ também é ímpar.*

Repare que em cada prova nós utilizamos de alguma forma o conceito da relação que estamos discutindo. A propriedade destacada em cada caso nos dá a estrutura geral dos argumentos que poderemos escrever como prova, mas há passos que dependerão, necessariamente, do conceito da relação. Por conta disso, há muitas variações possíveis em provas destas propriedades, mas todas tendem a ser bastante simples e uniformes, especialmente porque todas as propriedades consistem de generalizações.

4 Exercícios

Exercício 1. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$, crie uma relação que:

(a) seja reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva
(b) seja simétrica, anti-simétrica e transitiva, mas não seja reflexiva
(c) seja reflexiva, anti-simétrica e transitiva, mas não seja simétrica
(d) seja reflexiva, simétrica e transitiva, mas não seja anti-simétrica
(e) seja anti-simétrica e transitiva, mas não seja reflexiva nem simétrica
(f) seja simétrica e transitiva, mas não seja reflexiva nem anti-simétrica
(g) seja reflexiva e transitiva, mas não seja simétrica nem anti-simétrica
(h) seja reflexiva e anti-simétrica, mas não seja simétrica nem transitiva
(i) seja reflexiva e simétrica, mas não seja anti-simétrica nem transitiva
(j) seja reflexiva, mas não seja simétrica, anti-simétrica, nem transitiva
(k) seja simétrica, mas não seja reflexiva, anti-simétrica, nem transitiva
(l) seja anti-simétrica, mas não seja reflexiva, simétrica, nem transitiva
(m) seja transitiva, mas não seja reflexiva, simétrica, nem anti-simétrica
(n) não seja reflexiva, simétrica, anti-simétrica, nem transitiva

Exercício 2. Prove que relação de divisibilidade é transitiva. Em outras palavras, prova que: “Sejam a, b, c inteiros quaisquer, prove que se $a \mid b$ e $b \mid c$, entao $a \mid c$”.

Exercício 3. Seja m um inteiro positivo, prove que:

(a) "a relação de congruência no módulo m é reflexiva."
(b) "a relação de congruência no módulo m é simétrica."
(c) "a relação de congruência no módulo m não é anti-simétrica."
(d) "a relação de congruência no módulo m é transitiva."

Exercício 4. Para cada relação binária definida abaixo, verifique quais propriedades (entre reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade) ela satisfaz. Em cada caso, ao avalair se a relação R satisfaz a propriedade P, forneça uma demonstração pro que você estiver afirmando: uma prova de generalização caso R satisfaça P ou um contra-exemplo em caso contrário.

(a) $R_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $R_1 = \{(x, y) \mid x + y \leq 3\}$
(b) $R_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $R_2 = \{(x, y) \mid x > y\}$
(c) $R_3 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $R_3 = \{(x, y) \mid x \leq y\}$
(d) $R_4 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $R_4 = \{(x, y) \mid x = y\}$
(e) $R_5 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $R_5 = \{(x, y) \mid x \neq y\}$
(f) $R_6 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $R_6 = \{(x, y) \mid y = 2x\}$
(g) $R_7 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $R_7 = \{(x, y) \mid y = x^2\}$
(h) $R_8 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $R_8 = \{(x, y) \mid y = 2^x\}$
(i) $R_9 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $R_9 = \{(x, y) \mid x^2 > y\}$
(j) $R_{10} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, tal que $R_{10} = \{(x, y) \mid x^2 > y\}$
(k) $R_{11} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $R_{11} = \{(x, y) \mid x^2 = y^2\}$
(l) $R_{12} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, tal que $R_{12} = \{(x, y) \mid x^2 = y^2\}$
(m) $R_{13} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $R_{13} = \{(x, y) \mid x \textbf{ mod } 2 = y \textbf{ mod } 2\}$
(n) $R_{14} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $R_{14} = \{(x, y) \mid x - y \in \mathbb{N}\}$
(o) $R_{15} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, tal que $R_{15} = \{(x, y) \mid x + y \text{ é ímpar}\}$
(p) $R_{16} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que $R_{16} = \{(x, y) \mid x = 1\}$

Exercício 5. No **Exercício 1.**, apenas duas combinações de propriedades não foram exploradas. Em ambos os casos, a relação precisaria ser simétrica e anti-simétrica, mas não poderia ser transitiva. Seja A um conjunto e $R \subseteq A^2$ uma relação binária em A, prove que se R é simétrica e anti-simétrica, então R é transitiva.