Somatórios

Matemática Discreta

Prof. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

14 de agosto de 2020

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Prévia

Requisitos

- Conceitos de Funções
    - domínio, contradomínio, imagem, composição e inversão
- Propriedades de operações aritméticas
- Compreensão de Sequências (SEMANA 03)

Esta apresentação...

- discute o conceito de somatório
- permite resolver somas longas de forma eficiente
- inclui exemplos de resolução de somatórios

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Intuitivamente, são **somas dos termos de alguma sequência ***

- A estrutura das sequências (domínio nos inteiros) favorece a resolução de somas longas dos seus termos em menos passos
- Nosso objetivo é utilizar as propriedades de somatórios para simplificar somas longas

* Lembre-se que **Sequências são FUNÇÕES!**

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Intuitivamente, são **somas dos termos de alguma sequência** $\{a_j\}$

- Pode ser qualquer parte da sequência e saltar elementos
- Utiliza o **índice** da sequência para navegar os termos a serem somados

Exemplo

A soma dos termos $a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^{n} a_j, \quad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j, \quad or \quad \textstyle\sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Intuitivamente, são **somas dos termos de alguma sequência** $\{a_j\}$

- Pode ser qualquer parte da sequência e saltar elementos
- Utiliza uma variável de **índice** para navegar os termos a serem somados

Exemplo

A soma dos termos $a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^{n} a_j, \quad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j, \quad or \quad \sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

Cada notação envolve quatro elementos: j, m, n, a_j

- j é a **variável de índice**

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Intuitivamente, são **somas dos termos de alguma sequência** $\{a_j\}$

- Pode ser qualquer parte da sequência e saltar elementos
- Utiliza uma variável de **índice** para navegar os termos a serem somados

Exemplo

A soma dos termos $a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^{n} a_j, \quad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j, \quad or \quad \sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

Cada notação envolve quatro elementos: j, m, n, a_j

- m é o **valor inicial** que j assume

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Intuitivamente, são **somas dos termos de alguma sequência** $\{a_j\}$

- Pode ser qualquer parte da sequência e saltar elementos
- Utiliza uma variável de **índice** para navegar os termos a serem somados

Exemplo

A soma dos termos $a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^{n} a_j, \quad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j, \quad or \quad \textstyle\sum_{m \le j \le n} a_j$$

Cada notação envolve quatro elementos: j, m, n, a_j

- n é o **valor final** que j assume

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Intuitivamente, são **somas dos termos de alguma sequência** $\{a_j\}$

- Pode ser qualquer parte da sequência e saltar elementos
- Utiliza uma variável de **índice** para navegar os termos a serem somados

Exemplo

A soma dos termos $a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^{n} a_j, \quad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j, \quad or \quad \sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

Cada notação envolve quatro elementos: j, m, n, a_j

- a_j é a sequência utilizada

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Intuitivamente, são **somas dos termos de alguma sequência** $\{a_n\}$

- Pode ser qualquer parte da sequência e saltar elementos
- Utiliza uma variável de **índice** para navegar os termos a serem somados

Exemplo

A expressão $\sum_{j=1}^{10} a_j$ *codifica*

*"a **soma dos termos** de a_j indo **de** a_1 **até** a_{10}".*

Ou seja,

$$\sum_{j=1}^{10} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Intuitivamente, são **somas dos termos de alguma sequência** $\{a_j\}$

- Pode ser qualquer parte da sequência e saltar elementos
- Utiliza uma variável de **índice** para navegar os termos a serem somados

Exemplo

Dada a sequência $a_j = 2j$, a expressão $\sum_{j=1}^{10} a_j$ codifica

$$\sum_{j=1}^{10} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

$$= 2.1 + 2.2 + 2.3 + 2.4 + 2.5 + 2.6 + 2.7 + 2.8 + 2.9 + 2.10$$

$$= 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 110$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Intuitivamente, são **somas dos termos de alguma sequência** $\{a_n\}$

- Pode ser qualquer parte da sequência e saltar elementos
- Utiliza uma variável de **índice** para navegar os termos a serem somados

Exemplo

$$\sum_{j=1}^{10} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

Isso significa que os somatórios são implementados por laços *for*.

```
int j;
int sum = 0;
for (j = 1; i ≤ 10; i++)
{
    sum += a(j);
}
return sum;
```

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Intuitivamente, são **somas dos termos de alguma sequência** $\{a_j\}$

- Pode ser qualquer parte da sequência e saltar elementos
- Utiliza uma variável de **índice** para navegar os termos a serem somados

Exemplo (2)

Dada a sequência $a_j = 2j$, a expressão $\sum_{j=1}^{1000} a_j$ codifica

*"a **soma dos termos** de $a_j = 2j$ **de** a_1 **até** a_{1000}".*

Ou seja,

$$\sum_{j=1}^{10} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_{999} + a_{1000}$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Intuitivamente, são **somas dos termos de alguma sequência** $\{a_j\}$

- Pode ser qualquer parte da sequência e saltar elementos
- Utiliza uma variável de **índice** para navegar os termos a serem somados

Exemplo (3)

Dada a sequência $a_j = 2j$, a expressão $\sum_{j=30}^{60} a_j$ codifica

*"a **soma dos termos** de $a_j = 2j$ **de** a_{30} **até** a_{60}".*

Ou seja,

$$\sum_{j=30}^{60} a_j = a_{30} + a_{31} + \ldots + a_{59} + a_{60} = 60 + 62 + \ldots + 118 + 120 = 2790$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Intuitivamente, são **somas dos termos de alguma sequência** $\{a_n\}$

- Pode ser qualquer parte da sequência e saltar elementos
- Utiliza uma variável de **índice** para navegar os termos a serem somados

Exemplo (4)

Dada a sequência $a_j = j + 5$, a expressão $\sum_{j=30}^{60} a_j$ codifica

*"a **soma dos termos** de $a_j = j + 5$ **de** a_{30} **até** a_{60}".*

Ou seja,

$$\sum_{j=30}^{60} a_j = a_{30} + a_{31} + \ldots + a_{59} + a_{60} = 35 + 36 + \ldots + 64 + 65 = 1550$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios - Outros Exemplos

Exemplo

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

Constatação:

É a soma dos termos $a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}$ *da sequência* $\{a_j\}$ *com* $a_j = \frac{1}{j}$

Constatação:

Teremos $\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{100}$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios

Exemplo

$$\sum_{j=1}^{5} j^2$$

Constatação:
É a soma dos termos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 *da sequência* $\{a_j\}$ *com* $a_j = j^2$.

Constatação:
Teremos $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Somatórios - Outros Exemplos

Exemplo

$$\sum_{k=4}^{8}(-1)^k$$

Constatação:
É a soma dos termos $a_4, a_5, ..., a_8$ *da sequência* $\{a_k\}$ *com* $a_k = (-1)^k$.

Constatação:
Teremos $(-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 = 1 + -1 + 1 + -1 + 1 = 1$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Nosso objetivo

- Somar números de uma sequência dois a dois é ineficiente;
- Podemos economizar trabalho e tempo usando propriedades das operações aritméticas adaptadas aos somatórios.

Da Aritmética, para x, y, x números quaisquer,

$x + y = y + x$	Comutatividade
$(x + y) + z = x + (y + z)$	Assoaciatividade
$x.(y + z) = x.y + x.z$	Distributividade

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Propriedades do Somatório

Em somatórios, teremos

Comutatividade

$$\sum_{j=m}^{n} a_j + b_j = \sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j$$

Associatividade

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{l} a_j + \sum_{j=l+1}^{n} a_j$$

Distributividade

$$\sum_{j=m}^{n} k.a_j = k.\sum_{j=m}^{n} a_j$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Comutatividade

Vamos analisar a igualdade...

$$\textit{Comutatividade} \qquad \sum_{j=m}^{n} a_j + b_j = \sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j$$

Começando do lado esquerdo, teremos

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^{n} a_j + b_j &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + ... + (a_n + b_n) \\ &= (a_m + a_{m+1} + ... + a_n) + (b_m + b_{m+1} + ... + b_n) \\ &= \sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j\end{aligned}$$

Associatividade

Vamos analisar a igualdade...

$$\textit{Associatividade} \qquad \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{l} a_j + \sum_{j=l+1}^{n} a_j$$

Começando do lado esquerdo, teremos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m}^{n} a_j &= a_m + a_{m+1} + ... + a_n \\
&= a_m + a_{m+1} + ... + a_l + a_{l+1} + ... + a_n \\
&= (a_m + a_{m+1} + ... + a_l) + (a_{l+1} + ... + a_n) \\
&= \sum_{j=m}^{l} a_j + \sum_{j=l+1}^{n} a_j
\end{aligned}$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Distributividade

Vamos analisar a igualdade...

Distributividade $$\sum_{j=m}^{n} k.a_j = k.\sum_{j=m}^{n} a_j$$

Começando do lado esquerdo, teremos

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^{n} k.a_j &= k.a_m + k.a_{m+1} + ... + k.a_n \\ &= k.(a_m + a_{m+1} + ... + a_n) \\ &= k.\sum_{j=m}^{n} a_j\end{aligned}$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como resolver Somatórios?

Nosso **primeiro** interesse é simplificar as expressões.

Exemplo (1)

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{10} 2j$.

Pela distributividade, podemos simplificar a expressão para obter

$$\sum_{j=1}^{10} 2j = 2.\sum_{j=1}^{10} j$$

* *Houve uma troca: invés de calcularmos* $\sum_{j=1}^{10} 2j$, *nos bastará calcular* $\sum_{j=1}^{10} j$ *para multiplicar o resultado por dois.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como resolver Somatórios?

Nosso **primeiro** interesse é simplificar as expressões.

Exemplo (2)

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{10} 2j + 3$.

Por comutatividade, podemos simplificar a expressão para obter

$$\sum_{j=1}^{10} 2j + 3 = \sum_{j=1}^{10} 2j + \sum_{j=1}^{10} 3$$

* *Houve uma troca: invés de calcularmos* $\sum_{j=1}^{10} 2j + 3$, *nos bastará calcular* $\sum_{j=1}^{10} 2j$ *e* $\sum_{j=1}^{10} 3$ *para somá-las. Note* $\sum_{j=1}^{10} 2j$ *é a expressão do exemplo anterior.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como resolver Somatórios?

Nosso primeiro interesse é simplificar as expressões.

Nosso **segundo** interesse é encontrar somas conhecidas no processo.

Por exemplo, nos será muito útil saber que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n.(n+1)}{2}$$

Exemplo (1 - Continuação)

Pela fórmula, $\sum_{j=1}^{10} j = \frac{10.(10+1)}{2} = 110/2 = 55.$

Agora podemos completar o primeiro exemplo, obtendo $\sum_{j=1}^{10} 2j = 2.\sum_{j=1}^{10} j = 2.55 = 110$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como resolver Somatórios?

Nosso primeiro interesse é simplificar as expressões.

Nosso **segundo** interesse é encontrar somas conhecidas no processo.

Por exemplo, nos será muito útil saber que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n.(n+1)}{2}$$

Exemplo (3)

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{10} -3j$.

Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, obteremos

$$\sum_{j=1}^{10} -3j = (-3).\sum_{j=1}^{10} j = (-3).\frac{10.(10+1)}{2} = (-3).55 = -165.$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como resolver Somatórios?

Nosso primeiro interesse é simplificar as expressões.

Nosso **segundo** interesse é encontrar somas conhecidas no processo.

Por exemplo, nos será muito útil saber que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n.(n+1)}{2}$$

Exemplo (4)

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{100} -3j$.

Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, obteremos

$$\sum_{j=1}^{100} -3j = (-3).\sum_{j=1}^{100} j = (-3).\frac{100.(100+1)}{2} = (-3).5050 = -15150.$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como resolver Somatórios?

Nosso primeiro interesse é simplificar as expressões.

Nosso **segundo** interesse é encontrar somas conhecidas no processo.

Também será muito útil saber que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\sum_{j=1}^{n} 1 = n$

Exemplo (2 - Continuação)

Obteremos $\sum_{j=1}^{10} 2j + 3 = \sum_{j=1}^{10} 2j + \sum_{j=1}^{10} 3 = 2.\sum_{j=1}^{10} j + 3.\sum_{j=1}^{10} 1$

$$= 2.\frac{10.(10+1)}{2} + 3.10 = 2.55 + 30 = 140.$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Algumas Somas Importantes

Soma	Fórmula fechada
$\sum_{j=0}^{n} kr^j \quad (r \neq 1)$	$\frac{kr^{n+1}-k}{r-1}, r \neq 1$
$\sum_{j=0}^{n} k + dj$	$\frac{(k+(k+dn))(n+1)}{2}$
$\sum_{j=1}^{n} j$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{j=1}^{n} j^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{j=1}^{n} j^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Tabela: Algumas somas importantes.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Algumas Somas Importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

Exemplo

Considere que desejamos calcular $\sum_{i=30}^{60} i$

Observe que $\sum_{i=30}^{60} i = \sum_{i=1}^{60} i - \sum_{i=1}^{29} i$ *e utilize a fórmula geral* $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{(1+n).(n)}{2}$ *para calcular os termos da subtração.*

Teremos $\sum_{i=1}^{60} i = \frac{(1+60).60}{2} = 61.30 = 1830$ *e* $\sum_{i=1}^{29} i = \frac{(1+29).29}{2} = 15.29 = 435$*.*

Daí, $\sum_{i=30}^{60} i = \sum_{i=1}^{60} i - \sum_{i=1}^{29} i = 1830 - 435 = 1395$*.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Algumas Somas Importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

No caso geral, para $\sum_{i=m}^{l} i$,

Observaremos que $\sum_{i=m}^{l} i = \sum_{i=1}^{l} i - \sum_{i=1}^{m-1} i$ e utilizaremos a fórmula geral $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{(1+n).(n)}{2}$ para calcular os termos da subtração.

Teremos $\sum_{i=1}^{l} i = \frac{(1+l).l}{2}$ e $\sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{(1+m-1).(m-1)}{2} = \frac{m.(m-1)}{2}$.

Daí, $\sum_{i=m}^{l} i = \sum_{i=1}^{l} i - \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{(1+l).l}{2} - \frac{m.(m-1)}{2} = \ldots = \frac{(m+l).(l-m+1)}{2}$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

Exemplo

Considere a soma $\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12} (1-k)$

Podemos reescrever a soma mudando o índice de uma delas:

$$\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12} (1-k) = \sum_{j=1}^{10} j + \sum_{i=1}^{10} (1-i-2) = \sum_{j=1}^{10} j + (1-j-2)$$
$$= \sum_{j=1}^{10} -1 = -1 + -1 + ... + -1 = -10.$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

Exemplo

Considere a soma $\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12}(1-k)$

Podemos reescrever a soma mudando o índice de uma delas:

$$\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12}(1-k) = \sum_{j=1}^{10} j + \sum_{i=1}^{10}(1-i-2)$$

A chave deste passo é o cálculo de que $\sum_{k=3}^{12}(1-k) = \sum_{i=1}^{10}(1-i-2)$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Mudanças de Índice

Observe...

$$\sum_{k=3}^{12}(1-k) = (1-3)+(1-4)+\ldots+(1-12)$$

$$= -2+-3+\ldots+-11$$

$$\sum_{i=1}^{10}(1-i-2) = (1-1-2)+(1-2-2)+\ldots+(1-10-2)$$

$$= -2+-3+\ldots+-11$$

Ou seja, $\sum_{k=3}^{12}(1-k) = \sum_{i=1}^{10}(1-i-2)$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Mudanças de Índice (Cálculo)

Para realizar uma mudança do índice j para um novo índice k:

1. Encontramos uma função tal que $f(j) = k$,
2. Isolamos j na equação cima e obtemos uma função sobre k,
3. Substituimos j pela expressão obtida na soma original.

Exemplo

Seja a soma $\sum_{j=1}^{5} j^2$*, desejamos indexá-la com inteiros de* 0 *a* 4*.*

Ou seja, queremos reescrevê-la como $\sum_{k=0}^{4} \ldots$ *de forma que*

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = \sum_{k=0}^{4} \ldots$$

Que expressão usaremos?

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Mudanças de Índice (Cálculo)

Para realizar uma mudança do índice j para um novo índice k:

1. Encontramos uma função tal que $f(j) = k$.
2. Isolamos j na equação cima e obtemos uma função sobre k.
3. Substituimos j pela expressão obtida na soma original.

Exemplo

Seja a soma $\sum_{j=1}^{5} j^2$*, desejamos indexá-la com inteiros de* 0 *a* 4*.*

1. *Encontramos uma função para mapear* j*: de* 1 *até* 5 *para* k*: de* 0 *até* 4*;*
   - $f(j) = j - 1$
2. *Agora fazemos* $j - 1 = k$ *e isolamos* j*;*
   - $j - 1 = k \Rightarrow j = k + 1$
3. *Para completar, substituimos* j *por* $k + 1$ *na soma, obtendo* $\sum_{j=1}^{5} j^2 = \sum_{k=0}^{4} (k + 1)^2$*.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Algumas Somas Importantes (Complemento)

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

No caso geral, para $\sum_{i=m}^{l} i$,

Observaremos que $\sum_{i=m}^{l} i = \sum_{i=1}^{l} i - \sum_{i=1}^{m-1} i$ e utilizaremos a fórmula geral $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{(1+n).(n)}{2}$ para calcular os termos da subtração.

Teremos $\sum_{i=1}^{l} i = \frac{(1+l).l}{2}$ e $\sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{(1+m-1).(m-1)}{2} = \frac{m.(m-1)}{2}$.

Daí, $\sum_{i=m}^{l} i = \sum_{i=1}^{l} i - \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{(1+l).l}{2} - \frac{m.(m-1)}{2} = \ldots = \frac{(m+l).(l-m+1)}{2}$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Algumas Somas Importantes (Complemento)

...

Paramos em $\sum_{i=m}^{l} i = \sum_{i=1}^{l} i - \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{(1+l).l}{2} - \frac{m.(m-1)}{2} = \ldots$

Usaremos um truque: $l = l - (m-1) + (m-1) = (l - m + 1) + (m-1)$.

Daí, $\sum_{i=m}^{l} i = \sum_{i=1}^{l} i - \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{(1+l).l}{2} - \frac{m.(m-1)}{2}$

$$= \frac{(1+l).((l-m+1)+(m-1))}{2} - \frac{m.(m-1)}{2}$$

$$= \frac{(1+l).(l-m+1)+(1+l).(m-1)}{2} - \frac{m.(m-1)}{2}$$

$$= \frac{(1+l).(l-m+1)+(1+l).(m-1)-m.(m-1)}{2}$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Algumas Somas Importantes (Complemento)

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{l} i = \quad \dots \quad &= \frac{(1+l).(l-m+1)+(1+l).(m-1)-m.(m-1)}{2} \\
&= \frac{(1+l).(l-m+1)+(1+l-m).(m-1)}{2} \\
&= \frac{(1+l).(l-m+1)+(l-m+1).(m-1)}{2} \\
&= \frac{((1+l)+(m-1)).(l-m+1)}{2} \\
&= \frac{(m+l).(l-m+1)}{2}
\end{aligned}
$$