QXD0116 - Álgebra Linear

Transformações Lineares VI

André Ribeiro Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Autovalores e Autovetores

Exemplo

Determine os autovalores e autovetores correspondentes da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução

Matriz característica:

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

Exemplo

Determine os autovalores e autovetores correspondentes da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução

Polinômio característico:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = (\lambda + 2)^2 \cdot (\lambda - 4)$$

Autovalores e Autovetores

Exemplo

Determine os autovalores e autovetores correspondentes da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução

Autovalores:

$$\lambda = -2 \text{ (multiplicidade 2)}$$
$$\lambda = 4$$

Autovalores e Autovetores

Exemplo

Determine os autovalores e autovetores correspondentes da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução

Fazendo $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{c} -v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ -7v_1 - 7v_2 - v_3 = 0 \\ -6v_1 - 6v_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow v_1 = v_2 \quad , \quad v_3 = 0$$

Autovalores e Autovetores

Exemplo

Determine os autovalores e autovetores correspondentes da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução

Fazendo $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, obtemos:
Apenas uma variável livre, portanto o autovetor correspondente a $\lambda = 2$ é $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Assim, todos os autovetores correspondentes a $\lambda = -2$ são LD.

Autovalores e Autovetores

Exemplo

Determine os autovalores e autovetores correspondentes da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução

Fazendo $\lambda_3 = 4$, obtemos:

$$\begin{cases} -7v_1 + 1v_2 - v_3 = 0 \\ -7v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ -6v_1 + 6v_2 - 6v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = 0 \quad , \quad v_2 = v_3$$

Autovalores e Autovetores

Exemplo

Determine os autovalores e autovetores correspondentes da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução

Fazendo $\lambda_3 = 4$, obtemos:

Apenas uma variável livre, portanto o autovetor correspondente a $\lambda = 2$ é $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Assim, todos os autovetores correspondentes a $\lambda = 4$ são LD.

Autovalores e Autovetores

Teorema 1

Se **A** é uma matriz de ordem n triangular superior (ou inferior), então os autovalores de **A** são os elementos da diagonal principal.

Prova

Se **A** é uma matriz triangular a matriz característica também será triangular. De acordo com a propriedade da matriz triangular, seu determinante é dado pelo produto dos elementos da sua diagonal pricipal. Portanto

$$P(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot \dots \cdot (a_{nn} - \lambda)$$

Autovalores e Autovetores

Propriedades

- Se λ é autovalor de $\mathbf{A}$, então:
  - λ é autovalor de $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.
  - $k \cdot \lambda$ é autovalor de $k \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.
  - λ^k é autovalor de $\mathbf{A}^k$.
  - se $\mathbf{A}$ é não singular (possui inversa), então λ^{-1} é autovalor de $\mathbf{A}^{-1}$
  - $\lambda + k$ é autovalor de $\mathbf{A} + k \cdot \mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade.

Autovalores e Autovetores

Teorema 2

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes similares (existe $\mathbf{C}$ não singular tal que $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$), então:

(a) $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ possuem mesmos autovalores.

(b) Se $\mathbf{v}$ o autovetor de $\mathbf{A}$ associado a λ, então $\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{v}$ é autovetor de $\mathbf{B}$ associado a λ.

Prova

(a)

$$
\begin{aligned}
&\det(\mathbf{B} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = \det(\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \\
&= \det(\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{C}^{-1} \cdot \lambda \cdot \mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^{-1} \cdot (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{C}) \\
&= \det(\mathbf{C}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I})
\end{aligned}
$$

Autovalores e Autovetores

Teorema 2

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes similares (existe $\mathbf{C}$ não singular tal que $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$), então:

(a) $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ possuem mesmos autovalores.

(b) Se $\mathbf{v}$ o autovetor de $\mathbf{A}$ associado a λ, então $\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{v}$ é autovetor de $\mathbf{B}$ associado a λ.

Prova

(b)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1}$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{v}) = \lambda \cdot (\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{v})$$