Lógica para Computação

Profa. Dra. Viviane Menezes

vivianemenezes@ufc.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Linguagem Formal

Termo

- Qualquer variável é um termo;
- Uma constante é um termo;
- Um símbolo funcional é um termo.

$$t ::= x \mid c \mid f(t_1, \cdots, t_n)$$

Linguagem Formal

Fórmulas

- Um predicado é uma fórmula
- Se φ é uma fórmula $\neg\varphi$ é uma fórmula
- Se φ e ψ são fórmulas $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ é uma fórmula.
- Se φ é uma fórmula $\exists x\varphi$ e $\forall x\varphi$ também são fórmulas.

$$\varphi ::= P(t_1, \cdots, t_n) \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi \mid \exists x\varphi \mid \forall x\varphi$$

Árvores de Análise

- $\forall x$ e $\exists x$ formam nós e possuem apenas um filho;
- Predicados $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ tem P como nó e P tem n filhos.

Árvores de Análise

Construa as seguintes árvores de análise:

- $\forall x((P(x) \to Q(x)) \land S(x, y)$
- $(\forall x(P(x) \land Q(x))) \to (\neg P(x) \lor Q(y))$

Árvores de Análise

- Variáveis livres
- Variáveis presas.

Substituição

Dada uma variável x, um termo t e uma fórmula φ, definimos:

$$\varphi[t/x]$$

para a fórmula obtida de φ substituindo-se **cada ocorrência livre da variável** x em φ

Substituição

Exemplos

- $\varphi[f(x,y)/x]$, sendo
  - $\varphi : \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \land S(x,y))$

Substituição

Exemplos

- $\varphi[f(x, y)/x]$, sendo
  - $\varphi : \forall x((P(x) \to Q(x)) \land S(x, y))$
- $\varphi[f(x, y)/x]$, sendo
  - $\varphi : (\forall x(P(x) \land Q(x))) \to (\neg P(x) \lor Q(y))$

Substituição

- termo livre
- termo preso

Substituição

- termo livre
- termo preso

Definição

Dados um termo t, uma variável x e uma fórmula φ, dizemos:

t é livre para x em φ se

nenhuma folha livre de x ocorre no escopo de $\forall y$, $\exists y$ para qualquer variável y ocorrendo em t.

Exercício

Seja φ a fórmula $\exists x(P(y,z) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))))$:

- Construa a árvore de análise de φ.
- Identifique todas as variáveis livres e presas.
- Compute:
  - $\varphi[w/x]$,
  - $\varphi[f(x)/y]$.
- O termo $f(x)$ é livre para y em φ?

Dedução Natural - Lógica de Predicados

Regras para o Quantificador Universal

Eliminação do Quantificador Universal ($\forall$)

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\forall x \varphi(x)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\varphi[x0/x]$	$\forall$e m

se φ é verdade para todos os x, φ é verdade para um x_0 específico.

Regras para o Quantificador Universal

Exemplo 1:

- $P(x0), \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg Q(x0)$

Regras para o Quantificador Universal

Introdução do Quantificador Universal (∀)

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$x0$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\varphi(x0)$	
n+1.	$\forall x \varphi[x/x0]$	$\forall$i m-n

se φ é verdade para um x_0 arbitrário, φ é verdade para todo x.

Regras para o Quantificador Universal

Exemplo 2:

- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \vdash \forall x\, Q(x)$

Regras para o Quantificador Existencial

Introdução do Quantificador Existencial

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	$\varphi(x0)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p.	$\exists x \varphi[x/x0]$	$\exists$i m

se φ é verdade para um $x0$ específico, então existe um x em que φ é verdade.

Regras para o Quantificador Existencial

Exemplo 3:

- $\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$

Regras para o Quantificador Existencial

Eliminação do Quantificador Existencial

⋮	⋮	⋮
m.	$\exists x \varphi(x)$	
⋮	⋮	⋮
n.	$x0$ $\varphi[x0/x]$	hipótese
⋮	⋮	⋮
p.	χ	
$p + 1$.	χ	∃e m, n-p

se φ é verdade para pelo menos um 'valor' de x e se, a partir da suposição que φ é verdade para um x_0 genérico, pudermos demonstrar χ. Então, χ é verdade.

Regras para o Quantificador Existencial

Exemplo 4:

- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$

Exercícios

1. $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x)), \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x(P(x) \wedge R(x))$
2. $\exists x P(x), \forall x \forall y(P(x) \rightarrow Q(y)) \vdash \forall y\, Q(y)$
3. $\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall x P(x)$
4. $\neg \forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$