Leitura Complementar + Lista de Execícios

SEMANA 03 - Técnicas p/ Demonstração de Teoremas (Parte 1)

2022.1

Notas de Aula de Matemática Discreta

Prof. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

Este documento traz uma lista de exercícios referentes aos tópicos da SEMANA 03. É recomendado que você faça todos os exercícios e tire suas dúvidas antes das aulas da semana seguinte.

1 Instruções Preliminares

Obs.: “prove”, “demonstre” e “mostre” são sinônimos. Nos exercícios abaixo, em cada um dos casos, você deve oferecer um demonstração (uma prova!) do que estiver sendo afirmado. Do **Exercício 9.** até **Exercício 15.**, você deve avaliar se o enunciado é verdadeiro ou falso: “Desprovar” significa “provar que é falso”.

Quando a resposta envolver números, todos os cálculos para chegar a estes números devem ser apresentados. Busque fornecer respostas que deixem claro seu raciocínio, exibindo e justificando todos os passos executados. Lembre-se que a sua resposta será lida por alguém no futuro e escreva suas respostas pensando no leitor. Idealmente, as suas respostas devem permitir que qualquer colega da turma possa identificar claramente quais foram os passos que você fez e porquê.

Este documento inclui uma leitura breve sobre enunciados de generalização que complementará as discussões de sala de aulas.

É muito importante que você suplemente esta lista com exercícios do livro conforme sua necessidade. Se tiver facilidade com os tópicos, poucos exercícios bastarão para compreendê-los; se tiver dificuldades, o caminho será reforçar a leitura do capítulo e resolver mais exercícios.

2 Leitura do Livro

Leia atentamente a Seção 1.6 (Introdução a Demonstrações) e a parte sobre Demonstrações de Existência na Seção 1.7 do livro-texto. Verifique as listas de exercícios destas seções do livro por complementos a estes.

3 Leitura Complementar: Enunciados de Generalização

Enunciados de teoremas frequentemente envolvem generalizações, ou seja, se tratam de afirmações sobre todos os elementos de algum conjunto, o qual chamaremos de *domínio de discurso*.

A declaração formal de uma generalização apresentaria ocorrÊncias do quantificador universal ($\forall$), mas é comum omití-los em função de uma leitura mais natural. Nesse caso, pode-se utilizar termos como "qualquer", "todos(as)", "para cada" ou apenas variáveis no enunciado. Alguns exemplos:

1. **Todo** número natural possui um sucessor.
2. **Qualquer** número natural cuja soma dos seus dígitos dá um número divisível por 9 será também divisível por 9.
3. O último dígito de **cada** número múltiplo de 5 é necessariamente 0 ou 5.
4. Se $x > y$, onde x e y são números rais positivos, então $x^2 > y^2$. (uso de variáveis)

Esses enunciados podem ser reescritos de forma a revelar os quantificadores:

1. **Para todo** número natural x, x possui um sucessor.
2. **Para todo** número natural x, se a soma dos dígitos de x é um número divisível por 9, então x é divisível por 9.
3. **Para todo** x múltiplo de 5, o último dígito de x será 0 ou 5.
4. **Para todo** x e para todo y reais positivos, se $x > y$, então $x^2 > y^2$.

Compreender como o enunciado seria reescrito para revelar os quantificadores é essencial para identificar a estrutura de um argumento válido. Como pode ser observado na maioria dos exemplos acima, enunciados de generalização normalmente seriam reescritos para uma sentença com o formato $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são afirmações sobre os elementos do domínio de discurso. De fato, mesmo o Item 1. dentre os exemplos acima pode ser reescrito para destacar essa estrutura.

Podemos reescrever a sentença "Para todo número natural x, x possui um sucessor." das seguintes formas, entre outras:

- $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})[y$ é sucessor de $x]$
- $(\forall x)(\exists y)[x \in \mathbb{N} \rightarrow y \in \mathbb{N} \wedge y$ é sucessor de $x]$
- $(\forall x)[x \in \mathbb{N} \rightarrow (\exists y)(y \in \mathbb{N} \wedge y$ é sucessor de $x)]$

A segunda e a terceira formas de reescrever o enunciado destacam bem a estrutura de generalização que mencionamos, ou seja, que a sentença pode ser interpretada na forma $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$.

3.1 Demonstrando Generalizações

No caso das generalizações na forma $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$, o processo de demonstração se baseia em mostrar que $P(c) \rightarrow Q(c)$, para um elemento arbitrário c do domínio e em seguida aplicar o que chamamos de *Generalização Universal*. Esse último passo é padrão, basicamente sempre igual. Por isso, demonstrar uma generalização consiste principalmente em mostrar o condicional $P(c) \rightarrow Q(c)$. Nesse passo, diversas técnicas podem ser empregadas de acordo com a estrutura e conteúdo do condicional em questão. Alternativamente, se viável, pode-se demonstrar a generalização sem recorrer à instanciação das variáveis.

Observação 1 *Alguns enunciados envolvem múltiplas variáveis quantificadas universalmente (com o para todo). Em cada caso de demonstração, devemos eleger um elemento arbitrário do domínio para cada variável universalmente quantificada. Por exemplo, a generalização 4. "Se $x > y$, onde x e y são números rais positivos, então $x^2 > y^2$." contém duas variáveis quantificadas universalmente. Logo, devemos eleger dois elementos arbitrários c, d no primeiro passo para provar o condicional.*

Nos exemplos a seguir, para provar condicionais $p \rightarrow q$, começaremos sempre supondo p e desenvolveremos um argumento para concluir q. Outras técnicas mais elaboradas serão introduzidas ao longo do curso, bem como técnicas para provar outros tipos de teoremas.

Utilizaremos a seguinte definição para demonstrar o nosso primeiro teorema:

Definição 1 *(Paridade de Inteiros)*

- *Um inteiro n é* par *se e somente se existe um inteiro k tal que $n = 2k$.*
- *Um inteiro n é* ímpar *se e somente se existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$.*
- *Dizemos que dois inteiros m, n têm* a mesma paridade *se estes inteiros forem ambos pares ou ambos ímpares. Caso contrário, dizemos que m e n têm paridades opostas ou paridades diferentes.*

Exemplo 1 *Demonstraremos que "Se n é um inteiro ímpar, então n^2 também será um inteiro ímpar."*[1]

***Solução**: Observe que o teorema afirma $(\forall n)[P(n) \rightarrow Q(n)]$, onde $P(n)$ é "n é um inteiro ímpar" e $Q(n)$ é "n^2 é ímpar". Como dito anteriormente, seguiremos a convenção matemática de provas mostrando que $P(n)$ implica $Q(n)$.*

Suponha que $P(n)$ é verdade, ou seja, assuma que n é um inteiro ímpar. Pela definição de inteiro ímpar, existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$. Podemos elevar os dois lados da equação para achar uma expressão de n^2. Quando fazemos isso, encontramos que $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2.(2k).1 + (1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Pela definição de um inteiro ímpar, concluímos que n^2 é um inteiro ímpar (ele é o dobro de um inteiro mais um). Consequentemente, temos provado que if n é um inteiro ímpar, então n^2 é também ímpar. ■

[1] Este exemplo foi livremente traduzido do livro Discrete Mathematics and Its Applications de Kenneth Rosen, 7th Edition, Page 83, Example 1.

Exemplo 2 *Demonstraremos que "Se m e n são ambos quadrados perfeitos , então mn será também um quadrado perfeito."*[2] *(Um inteiro a é um quadrado perfeito se existe um inteiro b tal que $a = b^2$.)*

Solução: Suponha que a hipótese do condicional é verdaeira, ou seja, que m e n são dois quadrados perfeitos. Pela definição de quadrado perfeito, devem existir inteiros s e t tais que $m = s^2$ e $n = t^2$. O objetivo da prova é mostrar que mn deve ser um quadrado perfeito quando e m e n o forem; observando as equações sobre m e n, podemos demonstrar isso com facilidade. Temos $mn = s^2t^2 = (ss)(tt) = (st)(st) = (st)^2$, utilizando propriedades da multiplicação (comutatividade e associatividade). Pela definição de quadrado perfeito, mn é uma quadrado perfeito, uma vez que mn é o quadrado de st, que é um inteiro. Provamos que se m e n são ambos quadrados perfeitos, mn também será. ■

3.2 Exemplos e Contra-Exemplos

Como vimos no começo deste capítulo, uma generalização se refere a todos os elementos de um domínio. Por essa razão, devemos tomar muito cuidado com o que os exemplos de uma afirmação nos dizem. Quando tratamos de uma generalização $(\forall x)P(x)$, exibir um exemplo c (um elemento do domínio) tal que $P(c)$ seja verdade não consiste em prova. Tais exemplos podem ser vistos como evidências, ou seja, eles *sugerem* que a propriedade vale para todo o domínio, mas não produzem garantias.

Exemplo 3 *Considere a afirmação: "Para todo número real x, se x^2 é um número racional, então x é um número racional."*[3]

Avalie*: Se tomarmos o exemplo $x = 3$, temos que $x^2 = 9$ é um número racional e x também é racional. De maneira similar, para $x = -1$, temos que $x^2 = 1$ é um número racional e x também é racional. Já são dois exemplo, um positivo e um negativo, mas isso não garante que a afirmação esteja correta. Se tomarmos $x = \sqrt{2}$, temos que $x^2 = \sqrt{2}^2 = 2$, que é um número racional, mas nesse caso x não é racional. Portanto, $\sqrt{2}$ é um contra-exemplo da afirmação e essa generalização é* ***FALSA***.

Aprendemos algo com o exemplo acima: É impossível provar que uma generalização é correta apenas com exemplos, mas basta um único exemplo em contrário (um contra-exemplo) para tornar a generalização falsa.

Uma situação em que podemos utilizar de exemplos como prova é nos casos de teoremas baseados no quantificador existencial. Para demonstrar um teorema do tipo $(\exists x)P(x)$, basta mostrar um valor de x que satisfaça a propriedade. Em contra-partida, para mostrar que um existencial é falso, os caminhos são similares aos que utilizamos para demonstrar generalizações. De fato, a negação de um existencial é equivale a uma generalização. Por exemplo, a sentença "Não existe um número primo maior que todos

[2] Este exemplo foi livremente traduzido do livro Discrete Mathematics and Its Applications de Kenneth Rosen, 7th Edition, Page 83, Example 2.

[3] Um número real é racional se pode ser escrito como fração de dois inteiros. Caso contrário, o número é dito irracional. A união dos conjuntos dos racionais ($\mathbb{Q}$) e irracionais ($\mathbb{I}$) resulta no conjunto dos reais ($\mathbb{R}$), ou seja, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

os outros primos." pode ser também entendida como "Para todo número primo, não é verdade que este é maior que todos os outros primos.". Mais formalmente, a lógica matemática nos diz que $\neg(\exists x)[P(x)] \equiv (\forall x)[\neg P(x)]$. Outras equivalências similares seguem na lógica, mas vamos nos ater a apresentá-las conforme necessário ao texto.

4 Exercícios

4.1 Introdução da Disciplina

Exercício 1. Suponha que a, b são números inteiros.

(a) Se descobrirmos que $a = c$, o que podemos concluir sobre c?

(b) Dado um inteiro d, se soubermos que $a = d$ e $b = d$, o que poderemos concluir sobre os números a e b?

(c) Dado um inteiro e, se soubermos que $a = e$ e $b < e$, o que poderemos concluir sobre os números a e b?

Exercício 2. Considere a definição: "Seja n um inteiro, dizemos que n é par se e somente se existe um inteiro k tal que $n = 2k$". Agora avalie as situações abaixo e responda:

(a) Suponha que j é um número par. O que podemos concluir sobre j usando a definição fornecida?

(b) Suponha que l, m são números pares. O que podemos concluir sobre esses números usando a definição fornecida?

(c) Suponha que a, b são números inteiros. Se descobrirmos que $a = 2b$, o que poderemos concluir sobre a?

Exercício 3. Um dos produtos notáveis mais importantes trata do quadrado da soma de dois números: "Para quaisquer números reais a e b, vale que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$".

(a) Calcule o resultado de $(3+2)^2$ utilizando o quadrado da soma de dois números.

(b) Suponha que k é um número real. Utilize o quadrado da soma de dois números para completar a igualdade: $(k + 1)^2 =$ ________________.

(c) Suponha que k é um número real. Utilize o quadrado da soma de dois números para completar a igualdade: $(2k + 3)^2 =$ ________________.

(d) Suponha que a,b, e c são números reais. Utilize o quadrado da soma de dois números para completar as igualdades:
$((a+b)+c)^2 = \underline{(a + b)^2 +} \qquad\qquad = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} = \ldots$
Neste item, desenvolva a expressão um passo por vez até que não seja mais necessário usar parênteses. Use mais que dois passos se for necessário.

Exercício 4. Outro produto notável muito importante trata da diferença entre dois quadrados:

"Para quaisquer números reais a e b, temos $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$".

Utilize este fato para mostrar que podemos obter o número 24 como a diferença de dois quadrados de inteiros. Explique passo a passo como chegou à sua conclusão.

4.2 Prova de Generalizações e de Existenciais

Exercício 5. Considere o seguinte enunciado de teorema: "Para todo inteiro n, se n é par, então $n+1$ é ímpar." Agora responda:

(a) O que devemos escrever no primeiro passo em uma *Prova de Generalização*?

(b) Após realizar o primeiro passo da *Prova de Generalização* (*Instanciação de Variáveis* para a prova deste teorema, nos restará provar um condicional. Com base na sua resposta para o **Item (a)**, qual será esse condiconal?

Exercício 6. Seja $P(n)$ a proposição "Se a e b são reais positivos, então $(a+b)^n \geq (a^n + b^n)$." Prove que $P(1)$ é verdade.

Exercício 7. Mostre que existem dois números m e n primos tais que $m + n = 18$.

Exercício 8. Mostre que existem números reais a e b tais que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

4.3 Falso ou Verdadeiro?

Os exercícios a seguir (**Exercício 9.** ao **Exercício 15.**) apresentam enunciados que podem ser verdadeiros ou falsos. Para cada um destes, indique se o enunciado é verdadeiro ou falso, provando a sua conclusão sempre que puder.

OBS.: Caso você encontre uma generalização *falsa*, deverá fornecer uma prova por contra-exemplo. Caso encontre um existencial verdadeiro, utilize uma das técnicas de provas de condicionais. Nos demais casos, você provavelmente precisará das técnicas de prova de condicionais que serão apresentadas apenas na próxima semana. Nestas situações (generalizações verdadeiras ou existenciais falsos), indique os passos iniciais da prova até poder identificar o condicional que precisará provar. Se possível, complete as demonstrações.

Exercício 9. A diferença de quaisquer dois inteiros ímpares é um número par.

Exercício 10. Um inteiro positivo x é par se e somente se $x + 5$ é um número ímpar.

Exercício 11. Todo inteiro positivo pode ser escrito como a soma de três quadrados perfeitos.

Exercício 12. Para todo número n real, $\dfrac{n.(n+1)}{2} + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Exercício 13. Dados x e y inteiros positivos, se $x^2 + y^2$ é par, então x e y têm a mesma paridade.

Exercício 14. A diferença de quaisquer dois números naturais é sempre um número natural.

Exercício 15. Se $n > m$, então a média aritmética de n e m é maior que m.