QXD0116 - Álgebra Linear

Sistemas de Equações Lineares I

André Ribeiro Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Sistemas de equações

Introdução

Problema central da álgebra linear é a solução de um sistema de n equações lineares.
Tais equações são lineares, o que significa que as variáveis são multiplicadas por números (coeficientes).

Exemplo ($n = 2$)

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

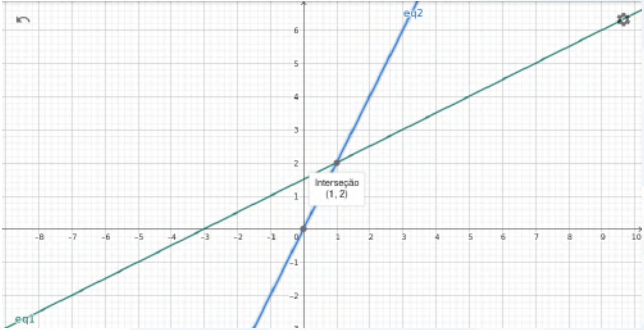
Geometria dos sistemas lineares

Perspectiva por linhas (equações)

Exemplo ($n = 2$)

A perspectiva por linhas mostra, como solução, o ponto de encontro entre duas retas.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

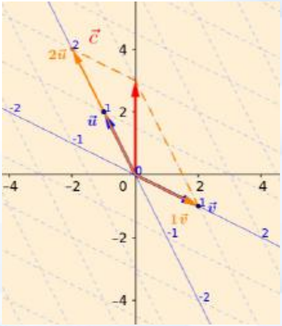


Geometria dos sistemas lineares

Perspectiva por colunas (vetores)

Exemplo ($n = 2$)

A perspectiva por vetores mostra que **b** é uma combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ cuja solução é dada por **x**.



$$x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Geometria dos sistemas lineares

Perspectiva por linhas (equações)

Exemplo ($n = 3$)

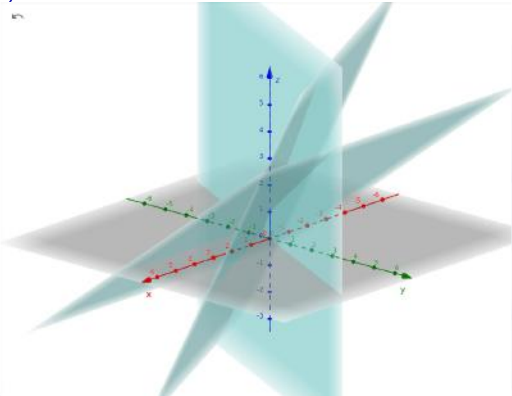
$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ \quad 2x - z = 7 \\ \quad 3y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- cada linha (equação) representa um plano em $\mathbb{R}^3$
- como solução, temos um ponto de encontro dos três planos

Geometria dos sistemas lineares

Perspectiva por linhas (equações)

Exemplo ($n = 3$)



Geometria dos sistemas lineares

Perspectiva por colunas (vetores)

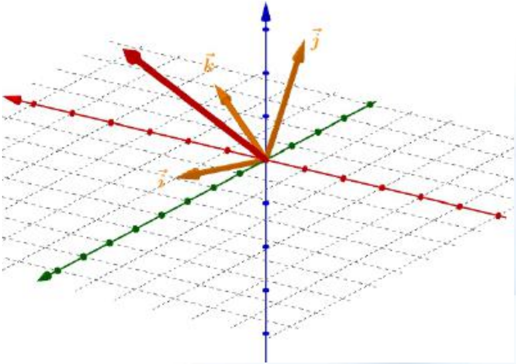
Exemplo ($n = 3$)

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Geometria dos sistemas lineares

Perspectiva por colunas (vetores)

Exemplo ($n = 3$)



Solução de Sistemas

- Posso resolver $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ para todo $\mathbf{b}$?
- As combinações lineares das colunas preenchem todo o espaço 3D?
- Para $\mathbf{A}$ dos exemplos anteriores, a resposta é sim pois temos matrizes não-singulares (invertíveis).
- E se os vetores que formam $\mathbf{A}$ situarem-se na mesma reta (caso $n = 2$) ou no mesmo plano (caso $n = 3$)?

Solução de Sistemas

Classificação

Possível e consistente

Admite pelo menos uma solução:

a) Determinado: admite uma única solução

b) Indeterminado: admite mais de uma solução.

Dois sistemas são equivalentes quando admitem a mesma solução.

Impossível ou incosistente

Não admite solução

Exemplos

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Solução de Sistemas

Definição

Um conjunto de m equações lineares com n variáveis tem a forma abaixo e uma solução será uma n-upla ou vetor que satisfaz todas as equações simultaneamente.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \dots a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \dots a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 \dots a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- **A** $\Rightarrow$ matriz de coeficientes
- **b** $\Rightarrow$ vetor do termo independente
- **x** $\Rightarrow$ vetor solução

Definição

Considere o sistema linear $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ de ordem n. Seja a matriz $\mathbf{A}_i$ a matriz obtida de $\mathbf{A}$ substituindo-se a i-ésima coluna por $\mathbf{b}$.
Sejam $d = \det(\mathbf{A})$ e $d_i = \det(\mathbf{A}_i)$.
O sistema tem solução única se e somente se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ e, neste caso, a solução será

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow x_i = \frac{d_i}{d} \ \forall \ i = 1, 2, \ldots n$$

Solução de Sistemas

Regra de Cramer

Prova

Seja $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ a solução única.
Sabendo que $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \bar{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}$ onde $\bar{\mathbf{A}}$ é a matriz de cofatores de $\mathbf{A}$.
Logo,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{d} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$x_i = \frac{1}{d} \cdot [A_{1i} b_1 + A_{2i} b_2 + \cdots + A_{ni} b_n] = \frac{1}{d} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k}_{=\det(\mathbf{A}_i)}$$

Solução de Sistemas

Regra de Cramer

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$d = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) = -20$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20 \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 20 \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -20$$

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = 1 \qquad x_2 = \frac{d_2}{d} = -1 \qquad x_3 = \frac{d_3}{d} = 1$$