QXD0116 - Álgebra Linear

Base de um Espaço Vetorial II

André Ribeiro Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Base de um Espaço Vetorial

Exemplo

Verificar se $\mathbb{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, onde $\mathbf{e}_1 = [1\ 0\ 0]^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{e}_2 = [0\ 1\ 0]^{\mathsf{T}}$ e $\mathbf{e}_3 = [0\ 0\ 1]^{\mathsf{T}}$, é base para $\mathbb{R}^3$.

Solução

Devemos mostrar que os vetores são LI e que geram $\mathbb{R}^3$.

$$\alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \theta \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \theta$$

$\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 0$ é solução única $\Rightarrow$ vetores LI

Base de um Espaço Vetorial

Exemplo

Verificar se $\mathbb{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, onde $\mathbf{e}_1 = [1\ 0\ 0]^T$, $\mathbf{e}_2 = [0\ 1\ 0]^T$ e $\mathbf{e}_3 = [0\ 0\ 1]^T$, é base para $\mathbb{R}^3$.

Solução

Vetores geram $\mathbb{R}^3$, pois:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha_1 = u_1$, $\alpha_2 = u_2$ e $\alpha_3 = u_3$ para $\forall\ u_i \in \mathbb{R}$ e $i \in \{1, 2, 3\}$. Diz-se que $\mathbb{B}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Base de um Espaço Vetorial

Base Canônica

Definição

A base de um espaço vetorial é dita canônica se qualquer elemento desse espaço puder ser escrito de maneira natural como combinação linear dos elementos da base.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = u_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

A base canônica de $\mathcal{K}_2(x)$ é dada por $\mathbb{B} = \{1, x, x^2\}$ pois

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 = a_0 \cdot (1) + a_1 \cdot (x) + a_2 \cdot (x^2)$$

Exemplo

A base canônica de $\mathcal{M}_2(x)$ é dada por $\mathbb{B} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4\}$ onde

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pois

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & b \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dimensão um Espaço Vetorial

Definição

Um espaço vetorial tem dimensão n se:

(i) Existem n elementos LI

(ii) $k \geq n+1$ elementos são sempre LD

Portanto:

a) Base para $\mathbb{R}^2$ possui 2 vetores: $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

b) Base para $\mathbb{R}^n$ possui n vetores: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

c) Base para $\mathcal{M}_{2\times 2}$ possui 4 elementos: $\dim(\mathcal{M}_{2\times 2}) = 4$

d) Base para $\mathcal{M}_{n\times n}$ possui n^2 elementos: $\dim(\mathcal{M}_{n\times n}) = n^2$

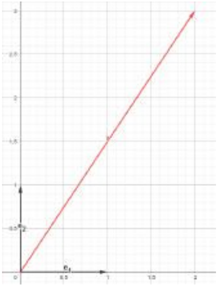
e) Base para $\mathcal{K}_2(x)$ possui 3 elementos: $\dim(\mathcal{K}_2(x)) = 3$

f) Base para $\mathcal{K}_n(x)$ possui $n+1$ elementos: $\dim(\mathcal{K}_n(x)) = n+1$

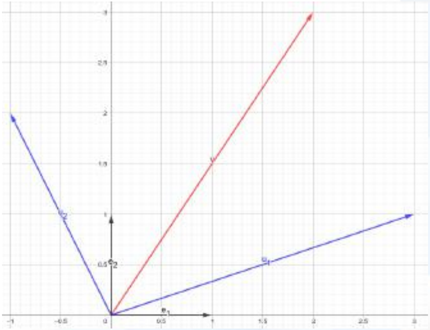
Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^2$

Seja $\mathbb{B}_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ uma base de $\mathbb{V}$



Seja $\mathbb{B}_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ uma base de $\mathbb{V}$



Desejamos saber como, dadas as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\mathbb{B}_1$, poderemos determinar as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\mathbb{B}_2$.

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^2$

Sendo $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ elementos de $\mathbb{V}$, podemos escrever cada um deles como combinação linear dos elementos da base $\mathbb{B}_1$:

$$\mathbf{u}_1 = a_{11} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{12} \cdot \mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{u}_2 = a_{21} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{22} \cdot \mathbf{e}_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} = v_1 \cdot \mathbf{e}_1 + v_2 \cdot \mathbf{e}_2 &= v_1' \cdot \mathbf{u}_1 + v_2' \cdot \mathbf{u}_2 \\
&= v_1' \cdot (a_{11} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{12} \cdot \mathbf{e}_2) + v_2' \cdot (a_{21} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{22} \cdot \mathbf{e}_2) \\
&= (v_1' \cdot a_{11} + v_2' \cdot a_{21}) \cdot \mathbf{e}_1 + (v_1' \cdot a_{12} + v_2' \cdot a_{22}) \cdot \mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^2$

Como as coordenadas são únicas, obtemos o sistema

$$\begin{cases} v_1 = v_1' \cdot a_{11} + v_2' \cdot a_{12} \\ v_2 = v_1' \cdot a_{21} + v_2' \cdot a_{22} \end{cases}$$

Ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{v}$$

O sistema linear possui sempre uma única solução pelo fato de $\mathbb{B}_1$ e $\mathbb{B}_2$ serem bases de $\mathbb{V}$.

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^2$

Exemplo

Seja $\mathbf{v} = [2\ 3]^T$ na base $\{[3\ 5]^T\ ,\ [1\ 2]^T\}$, calcular as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\{[1\ \ -1]^T\ ,\ [1\ 4]^T\}$.

Solução

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + a_{12} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{12} = 1 \\ 5 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{12} = -1 \end{cases} \Rightarrow a_{11} = 3\ ,\ \ a_{12} = -8.$$

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^2$

Exemplo

Seja $\mathbf{v} = [2\ 3]^T$ na base $\{[3\ 5]^T\ ,\ [1\ 2]^T\}$, calcular as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\{[1\ \ -1]^T\ ,\ [1\ 4]^T\}$.

Solução

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = a_{21} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + a_{22} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{22} = 1 \\ 5 \cdot a_{21} + 2 \cdot a_{22} = 4 \end{cases} \Rightarrow a_{21} = -2\ ,\ a_{22} = 7.$$

Mudança de Base

Em $\mathbb{R}^2$

Exemplo

Seja $\mathbf{v} = [2\ 3]^T$ na base $\{[3\ 5]^T\ ,\ [1\ 2]^T\}$, calcular as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\{[1\ \ -1]^T\ ,\ [1\ 4]^T\}$.

Solução

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot v_1' - 2 \cdot v_2' = 2 \\ -8 \cdot v_1' + 7 \cdot v_2' = 3 \end{cases} \Rightarrow v_1' = 4\ ,\ v_2' = 5‘.$$