QXD0116 - Álgebra Linear

Sistemas de Equações Lineares II

André Ribeiro Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Solução de Sistemas

Utilizando a matriz inversa

Exemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathbf{A}^{-1}} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \bar{\mathbf{A}}^T$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Solução de Sistemas

Utilizando a matriz inversa

Exemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathbf{A}^{-1}} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \bar{\mathbf{A}}^T$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ 4 & -8 & 4 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -11 \\ -5 & -8 & 7 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução de Sistemas

Utilizando a matriz inversa

Exemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathbf{A}^{-1}} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \bar{\mathbf{A}}^T$$

$$\det(\mathbf{A}) = -20$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5/20 & -4/20 & 11/20 \\ 5/20 & 8/20 & -7/20 \\ 5/20 & -4/20 & 1/20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$= \begin{bmatrix} -5/20 & -4/20 & 11/20 \\ 5/20 & 8/20 & -7/20 \\ 5/20 & -4/20 & 1/20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solução de Sistemas

Utilizando a matriz inversa (por escalonamento)

Exemplo

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ^{5}/_{20} & -\,^{4}/_{20} & ^{1}/_{20} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ^{5}/_{20} & ^{8}/_{20} & -\,^{7}/_{20} \\ 0 & 0 & 1 & ^{5}/_{20} & -\,^{4}/_{20} & ^{1}/_{20} \end{array}\right]$$

Solução de Sistemas

Utilizando a matriz inversa (por escalonamento)

Exemplo

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5/20 & 12/20 & -3/20 \\ 0 & 1 & 0 & 5/20 & 8/20 & -7/20 \\ 0 & 0 & 1 & 5/20 & -4/20 & 1/20 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/20 & -4/20 & 11/20 \\ 0 & 1 & 0 & 5/20 & 8/20 & -7/20 \\ 0 & 0 & 1 & 5/20 & -4/20 & 1/20 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} -5/20 & -4/20 & 11/20 \\ 5/20 & 8/20 & -7/20 \\ 5/20 & -4/20 & 1/20 \end{array}\right]$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Solução de Sistemas

Método de Gauss

- Forma direta (por escalonamento)
- Deve-se montar a matriz aumentada $\mathbf{A}|\mathbf{b}$
- Efetuar operações elementares de forma a obter um sistema equivalente na forma escalonada (triangular superior)

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Zerar coeficientes abaixo da diagonal principal:

$a_{ii} \Rightarrow \ell_j =$ elementos da linha $j > i$

$$\ell_j^{(k)} = \ell_j^{(k-1)} - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} \cdot \ell_i$$

Solução de Sistemas
Método de Gauss

Exemplo

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\ell_2' = \ell_2 - \frac{2}{1} \cdot \ell_1$$

$$\ell_3' = \ell_3 - \frac{3}{1} \cdot \ell_1$$

$$\ell_3'' = \ell_3' - \frac{-4}{-1} \cdot \ell_2'$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 7x_3 = 6 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Solução de Sistemas

Fatoração LU

- $\mathbf{A}^{-1}$ pode não ser explicitamente necessária
- Não muito eficiente calcular inversa e depois multiplicar por $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ (\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{L} \cdot \underbrace{(\mathbf{U} \cdot \mathbf{x})}_{\mathbf{y}} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{y} \end{aligned}$$

Ao invés de resolvermos o sistema original, podemos resolver o sistema triangular inferior $\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$ e, então, o sistema triangular superior $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$, o qual nos fornece a solução de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solução de Sistemas

Fatoração LU

Exemplo

$$\mathbf{A}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A}^{(0)} \Rightarrow \mathbf{A}^{(0)} = \underbrace{(\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1)^{-1}}_{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{U}$$

Exemplo

$$\mathbf{L} = (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1)^{-1} = \mathbf{E}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_2^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}}$$

Solução de Sistemas

Teorema

- Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.
- Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.
- Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras incógnitas serão dadas emp função destas.

Solução de Sistemas

Exemplos

- p_c: posto da matriz de coeficientes
- p_a: posto da matriz aumentada

$m = n = 3$; $p_c = p_a = 3$

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$m = 2$; $n = 3$; $p_c = p_a = 2$

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -10 - 7x_3 \\ -6 - 5x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Solução de Sistemas

Exemplos

- p_c: posto da matriz de coeficientes
- p_a: posto da matriz aumentada

$m = n = 3\ ;\ p_c = 2\ ;\ p_a = 3$

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \nexists\ \mathbf{x}$$

$m = 3\ ;\ n = 4\ ;\ p_c = 2\ ;\ p_a = 2$

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -10 - 10x_3 + 2x_4 \\ 4 - 7x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$