Introdução às Técnicas de Demonstração — Parte II

QXD0008 – Matemática Discreta

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily
ismailybf@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2022

Tópicos desta aula

Anteriormente:

- Discutimos enunciados de generalização e de existência
- Discutimos as técnicas relacionadas a quantificadores de variáveis e as técnicas de prova de condicionais.

Nesta aula:

- Discutiremos técnicas e requisitos para provar enunciados com outros conectivos lógicos ($\land, \lor, \leftrightarrow$), e
- Técnicas complementares relacionadas a generalizações com condicionais.

Referências para esta aula

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Seção 1.8** do livro: Kenneth H. Rosen. Matemática Discreta e suas Aplicações. (Sexta Edição).

Sobre enunciados de generalização

De forma geral, expressamos um enunciado de **generalização de condicional** como $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$, mas isto admite muitas variações.

- $\forall x[(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow Q(x)]$
- $\forall x \forall y[P(x, y) \rightarrow Q(x, y)]$
- $\forall x \forall y[P(x) \wedge R(y) \rightarrow Q(x, y)]$
- $\forall x \forall y[P(x) \rightarrow Q(x, y)]$

Sobre enunciados de generalização

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

As técnicas já estudadas:

- dependem das definições e estrutura de $P(x)$ e $Q(x)$.

Então:

1. Os conectivos em $P(x)$ e $Q(x)$ também são relevantes; e
2. Algumas situações permitem provas mais simples.

Condições compostas por conjunção

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Normalmente, para provar $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$:

Prova

Seja c qualquer, precisamos provar que "$P(c) \rightarrow Q(c)$" ...

Se $P(x)$ é uma **conjunção** $A(x) \wedge B(x)$, teremos um enunciado da forma

$$\forall x[(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow Q(x)]$$

Então, similarmente, para provar o enunciado...

Prova

Seja c qualquer, precisamos provar que "$(A(c) \wedge B(c)) \rightarrow Q(c)$" ...

Condições compostas por conjunção

Normalmente, para provar $\forall x[(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow Q(x)]$:

Prova
Seja c qualquer, precisamos provar que "$(A(c) \wedge B(c)) \rightarrow Q(c)$" ...

Daí,

Por PROVA DIRETA:

1. Assumiríamos $A(c) \wedge B(c)$ e
2. Buscaríamos concluir $Q(c)$;

Este formato é favorável, pois nos permite usar $A(c)$, $B(c)$ como duas hipóteses independentes.

Condições compostas por conjunção

Normalmente, para provar $\forall x[(A(x) \land B(x)) \to Q(x)]$:

Prova
Seja c qualquer, precisamos provar que "$(A(c) \land B(c)) \to Q(c)$" ...

Daí,

Por CONTRAPOSIÇÃO:

1. Assumiríamos $\neg Q(c)$ e
2. Buscaríamos concluir $\neg(A(c) \land B(c))$;

Este formato é desfavorável, pois nos dá como objetivo uma **disjunção**:
$\neg(A(c) \land B(c)) \equiv \neg A(c) \lor \neg B(c)$ (por DeMorgan).

Alguns padrões

Em geral, num condicional:

- Conjunção à esquerda favorece a prova direta;
- Conjunção à direita favorece a contraposição (aliada à prova por casos);
- Disjunção à direita favorece a contraposição;
- Disjunção à esquerda favorece a prova direta (aliada à prova por casos);

Alguns padrões

Um condicional à direita de outro, permite trocar o primeiro condicional por uma conjunção.

$$
\begin{aligned}
A \to (B \to C) &\equiv A \to (\neg B \vee C) \\
&\equiv \neg A \vee (\neg B \vee C) \\
&\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee C \\
&\equiv \neg(A \wedge B) \vee C \\
&\equiv (A \wedge B) \to C
\end{aligned}
$$

Alguns padrões

Um condicional à esquerda de outro favorece a prova direta (aliada à prova por casos).

$$(A \to B) \to C \;\equiv\; (\neg A \lor B) \to C$$

Prova Exaustiva e Prova por casos

Prova Exaustiva e Prova por casos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prova Exaustiva e Prova por casos

- Utilizadas se há uma disjunção à esquerda do condicional;
- Divide-se a prova em duas ou mais partes, de acordo com a disjunção.

Para provar um condicional da forma

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \to q$$

a seguinte tautologia pode ser usada como regra de inferência:

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \to q] \;\leftrightarrow\; [(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \cdots \wedge (p_n \to q)]$$

Demonstração por exaustão

Demonstração por exaustão

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prova EXAUSTIVA

- **Prova exaustiva** ou **demonstração por exaustão** é uma técnica complementar para provar afirmações do tipo $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
- Possível apenas para domínio **finito**.
- Demonstra-se a propriedade para cada elemento do domínio, um por vez.
- É um tipo especial de prova por casos em que cada caso envolve checar um único exemplo.

Demonstração por exaustão — Exemplo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema. Se n é um inteiro positivo menor que 5, então $(n+1)^3 \geq 3^n$.

Demonstração:

Demonstração por exaustão — Exemplo

Teorema. Se n é um inteiro positivo menor que 5, então $(n+1)^3 \geq 3^n$.

Demonstração:

Como o domínio é finito, provamos por exaustão. Ou seja, verificamos a propriedade $(n+1)^3 \geq 3^n$ para $n = 1$, 2, 3 e 4.

- Para $n = 1$, temos $(1+1)^3 \geq 3^1$, o que resulta em $8 \geq 3$;
- Para $n = 2$, temos $(2+1)^3 \geq 3^2$, o que resulta em $27 \geq 9$;
- Para $n = 3$, temos $(3+1)^3 \geq 3^3$, o que resulta em $64 \geq 27$;
- Para $n = 4$, temos $(4+1)^3 \geq 3^4$, o que resulta em $125 \geq 81$;

Portanto, $(n+1)^3 \geq 3^n$ para todo inteiro n positivo menor que 5. ■

Demonstração por exaustão

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Demonstração por exaustão

- Possível apenas para domínio **finito**.
- Demonstra-se a propriedade para cada elemento do domínio, um por vez.

Observações

- Pode ser útil, mas só se o domínio for pequeno.
- Pode ser usada mesmo que não haja condicional.
- É um caso particular extremo da prova por casos.

Prova por casos

Prova por casos

Exemplo:

Teorema. Se n é um inteiro, então $n^2 \geq n$.

Prova por casos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Exemplo:

> **Teorema.** Se n é um inteiro, então $n^2 \geq n$.

Demonstração:
Seja c um inteiro qualquer, precisamos provar que "c é inteiro $\rightarrow c^2 \geq c$".
Por prova direta, suponha que c é inteiro. (...**como continuar?**)

Prova por casos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo:

Teorema. Se n é um inteiro, então $n^2 \geq n$.

Demonstração:
Seja c um inteiro qualquer, precisamos provar que "c é inteiro $\rightarrow c^2 \geq c$".
Por prova direta, suponha que c é inteiro. (...**como continuar?**)

Há uma complicação, pois $\geq$ é uma inequação e uma das operações envolvidas é a exponenciação. Precisaremos saber se c é negativo, mas só sabemos que c é inteiro. **Como resolver este impasse?**

Prova por casos

Teorema. Se n é um inteiro, então $n^2 \geq n$.

Demonstração:
Seja c um inteiro qualquer, precisamos provar que "c é inteiro $\rightarrow c^2 \geq c$".
Por prova direta, suponha que c é inteiro. (...**como continuar?**)

Como resolver este impasse? Trocaremos a condição "c é inteiro" da suposição por outro **equivalente** que use **disjunção**:

"c é inteiro negativo **ou** c é inteiro não-negativo".

Prova por casos

Teorema. Se n é um inteiro, então $n^2 \geq n$.

Demonstração:
Seja c um inteiro qualquer, precisamos provar que

$$(c \text{ é inteiro negativo} \vee c \text{ é inteiro não-negativo}) \rightarrow c^2 \geq c$$

Por prova direta, suponha que "c é inteiro negativo $\vee$ c é inteiro não-negativo".

Deste ponto em diante, procedemos POR CASOS.

Prova por casos

Teorema. Se n é um inteiro, então $n^2 \geq n$.

Demonstração:
Seja c um inteiro qualquer.
Caso 1: Suponha que c é um inteiro negativo. (...)
Caso 2: Suponha que c é um inteiro não-negativo. (...)

A prova fica dividida em duas, mas com hipóteses melhores.

Prova por casos

Teorema. Se n é um inteiro, então $n^2 \geq n$.

Demonstração:
Seja c um inteiro qualquer.
Caso 1: Suponha que c é um inteiro **negativo**. (...)
~~**Caso 2**: Suponha que c é um inteiro **não-negativo**. (...)~~

- **Caso 2.1**: Suponha que c é um inteiro **positivo**. (...)
- **Caso 2.2**: Suponha que c é um inteiro **igual a zero**. (...)

A prova fica dividida em três, mas com hipóteses melhores.

Prova por casos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Se n é um inteiro, então $n^2 \geq n$.

Demonstração:
Seja n um inteiro qualquer.

1. Suponha que c é negativo, ou seja, $c < 0$. Neste caso, $c \cdot c > 0 \cdot c$ *, ou seja, $c^2 > 0$. Como $c^2 > 0$ e $c < 0$, temos $c^2 > c$. Portanto, $c^2 \geq c$ **.

2. Suponha que c é não-negativo, ou seja, $c \geq 0$.
   2.1 Suponha que $c \geq 1$. Neste caso, $c \cdot c \geq 1 \cdot c$, ou seja, $c^2 \geq c$.
   2.2 Suponha que $c = 0$. Neste caso, $c \cdot c = 0 \cdot c$, ou seja, $c^2 = 0$.
      Isso siginifica $c^2 = c$. Portanto, $c^2 \geq c$.

Como concluímos $c^2 \geq c$ em todos os casos, vale para todo c inteiro. ■

---

*Se multiplicarmos cada lado de $x < y$ por $z < 0$, obteremos $xz > yz$: a multiplicação por um número negativo inverte a inequação.

**Para todo x, temos $x \geq y$ se e somente se $x > y$ ou $x = y$

Demonstração por casos

Quando usar uma demonstração por casos?

- Quando não é possível tratar todos os casos ao mesmo tempo, uma demonstração por casos deve ser considerada.
- Geralmente, é uma boa estratégia tentar uma demostração por casos quando não existe um meio óbvio de começar a demonstração, mas também quando informações extras de cada passo podem ser usadas para seguir a demonstração.

Definição — Valor absoluto

- O **valor absoluto** ou **módulo** de um número real a é representado pelo símbolo $|a|$ e definido como:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0; \\ -a & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

- Pode ser lido da seguinte forma:
  "se $a \geq 0$, então $|a| = a$; se não, $|a| = -a$."

Prova por casos — Exemplo

Teorema. Se x e y são números reais, então $|xy| = |x||y|$.

Demonstração:

Prova por casos — Exemplo

Teorema. Se x e y são números reais, então $|xy| = |x||y|$.

Demonstração:

Vamos remover os valores absolutos usando o fato de que $|a| = a$ quando $a \geq 0$ e $|a| = -a$ quando $a < 0$.

Como ambos $|x|$ e $|y|$ ocorrem na fórmula, precisamos dividir a prova em quatro casos: (i) x e y ambos não negativos, (ii) x não negativo e y negativo. (iii) x negativo e y não negativo e (iv) x e y negativos.

- **Caso (i).** x e y ambos não negativos.

  Quando $x \geq 0$ e $y \geq 0$, temos que $xy \geq 0$. Logo, $|xy| = xy = |x||y|$, onde as duas igualdades seguem pela definição de módulo.

Prova por casos — Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Continuação da Demonstração:

- **Caso (ii).** x não negativo e y negativo.

  Quando $x \geq 0$ e $y < 0$, temos que $xy \leq 0$. Logo,
  $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$.

- **Caso (iii).** x negativo e y não negativo.

  A demonstração deste caso segue o mesmo raciocínio do caso anterior, com os papéis de x e y invertidos.

- **Caso (iv).** x e y negativos.

  Quando $x < 0$ e $y < 0$, temos que $xy > 0$. Logo,
  $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

Como completamos os quatro casos e esses casos são todas as possibilidades, podemos concluir que $|xy| = |x||y|$, sempre que x e y são números reais. ■

Sem perda de generalidade

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Na demonstração do exemplo anterior, dispensamos o caso (iii), em que $x < 0$ e $y \geq 0$, pois é o mesmo que o caso (ii), em que $x \geq 0$ e $y < 0$, com os papéis de x e y invertidos.
- Para encurtar a demonstração, poderíamos ter demonstrado os casos (ii) e (iii) juntos, assumindo, **sem perda de generalidade**, que $x \geq 0$ e $y < 0$.

> Em geral, quando a frase "**sem perda de generalidade**" é usada em uma demonstração, queremos dizer que, demonstrando um caso do teorema, nenhum argumento adicional é necessário para demonstrar o outro caso especificado. Ou seja, o outro caso segue o mesmo argumento, com as mudanças necessárias.

Prova por casos — Exemplo

Teorema. Sejam x e y dois inteiros. Se ambos xy e $x + y$ são pares, então ambos x e y são pares.

Demonstração:

Prova por casos — Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Sejam x e y dois inteiros. Se ambos xy e $x + y$ são pares, então ambos x e y são pares.

Demonstração:

Vamos usar prova por contraposição.

Assim, suponha que x e y não são ambos pares. Isso equivale a dizer que x é ímpar ou y é ímpar (ou ambos).

Sem perda de generalidade, suponha que x é ímpar. Ou seja, $x = 2m + 1$, para algum inteiro m.

Para completar a prova, precisamos mostrar que xy é ímpar ou $x + y$ é ímpar. A fim de provar isso, precisamos considerar a paridade de y. Existem dois casos a considerar: (i) y é par; e (ii) y é ímpar.

Prova por casos — Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Continuação da Demonstração:

- **Caso (i):** y é par.

  Neste caso, $y = 2n$ para algum inteiro n, tal que $x + y = (2m + 1) + 2n = 2(m + n) + 1$ é ímpar.

- **Caso (ii):** y é ímpar.

  Neste caso, $y = 2n + 1$ para algum inteiro n, tal que $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1 = 2(2mn + m + n) + 1$ é ímpar.

Isto completa a prova por contraposição. ■

Demonstração de unicidade

Demonstração de unicidade

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Utilizada para enunciados do tipo "**existe um único elemento x que satisfaz $P(x)$**"

- $\exists! x P(x)$

$$\begin{array}{ll} \equiv \exists x[P(x) \land \neg\exists y(P(y) \land x \neq y)] & (\textbf{Definição de } \exists!) \\ \equiv \exists x[P(x) \land \forall y \neg(P(y) \land x \neq y)] & (\textbf{DeMorgan para quantif.}) \\ \equiv \exists x[P(x) \land \forall y(\neg P(y) \lor \neg(x \neq y))] & (\textbf{DeMorgan}) \\ \equiv \exists x[P(x) \land \forall y(\neg P(y) \lor x = y)] & (\textbf{Lei da Negação}) \\ \equiv \exists x[P(x) \land \forall y(P(y) \rightarrow x = y)] & (\textbf{Lei do condicional}) \end{array}$$

- Demonstrações de unicidade possuem duas partes:
  - **Existência**: $\exists x P(x)$
    Mostramos que um elemento x com certa propriedade existe.
  - **Unicidade**: $\forall y[P(y) \rightarrow (y = x)]$
    Mostramos que se $P(y)$ é verdadeira, então $y = x$.

Demonstração de unicidade (1)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Se a e b são números reais e $a \neq 0$, então existe um único número real r tal que $ar + b = 0$.

Demonstração:

Demonstração de unicidade (1)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Se a e b são números reais e $a \neq 0$, então existe um único número real r tal que $ar + b = 0$.

Demonstração:

Primeiro, note que o número $r = -b/a$ é uma solução para $ar + b = 0$ porque $a(-b/a) + b = -b + b = 0$.

Consequentemente, um número real r existe para o qual $ar + b = 0$. **Assim, concluímos a parte existencial da prova**.

Agora, suponha que s é um número real tal que $as + b = 0$. Então, $ar + b = as + b$.

Subtraindo b de ambos os lados, obtemos $ar = as$. Dividindo ambos os lados desta última equação por a, obtemos $r = s$.

Isso estabelece a parte da unicidade da demonstração. ■

Alternativas de demonstração de unicidade

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Os seguintes enunciados são equivalentes:

1. $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y = x))$
2. $\exists x \forall y(P(y) \leftrightarrow y = x)$
3. $\exists x P(x) \wedge \forall y \forall z((P(y) \wedge P(z)) \rightarrow y = z)$

Demonstração:

Alternativas de demonstração de unicidade

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Os seguintes enunciados são equivalentes:

1. $\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \rightarrow y = x))$
2. $\exists x \forall y(P(y) \leftrightarrow y = x)$
3. $\exists x P(x) \land \forall y \forall z((P(y) \land P(z)) \rightarrow y = z)$

Demonstração:
A fim de provar que os três enunciados são equivalentes, vamos provar os três condicionais $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$ e $3 \rightarrow 1$.

Prova do condicional $1 \rightarrow 2$. Pelo enunciado 1, existe um elemento x_0 tal que $P(x_0)$ e $\forall y(P(y) \rightarrow y = x_0)$.

Alternativas de demonstração de unicidade

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Os seguintes enunciados são equivalentes:

1. $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y = x))$
2. $\exists x \forall y(P(y) \leftrightarrow y = x)$
3. $\exists x P(x) \wedge \forall y \forall z((P(y) \wedge P(z)) \rightarrow y = z)$

Demonstração:
A fim de provar que os três enunciados são equivalentes, vamos provar os três condicionais $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$ e $3 \rightarrow 1$.

Prova do condicional $1 \rightarrow 2$. Pelo enunciado 1, existe um elemento x_0 tal que $P(x_0)$ e $\forall y(P(y) \rightarrow y = x_0)$.
Para provar o enunciado 2, vamos mostrar que $\forall y(P(y) \leftrightarrow y = x_0)$.
Seja y arbitrário. Nós já sabemos que a direção $\rightarrow$ do bicondicional é verdadeira. Para provar a direção $\leftarrow$, suponha $y = x_0$.
Como $P(x_0)$ é verdadeiro por hipótese, nós concluímos $P(y)$.

Continuação da Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Os seguintes enunciados são equivalentes:

1. $\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \rightarrow y = x))$
2. $\exists x \forall y(P(y) \leftrightarrow y = x)$
3. $\exists x P(x) \land \forall y \forall z((P(y) \land P(z)) \rightarrow y = z)$

Prova do condicional $2 \rightarrow 3$. Suponha que o enunciado 2 é verdadeiro. Pelo enunciado 2, escolha x_0 tal que $\forall y(P(y) \leftrightarrow y = x_0)$.

Então, em particular, $P(x_0) \leftrightarrow x_0 = x_0$. Como $x_0 = x_0$, claramente segue que $P(x_0)$ é verdadeiro. Assim, $\exists x P(x)$.

Para provar a segunda metade do enunciado 3, sejam y e z arbitrários e suponha $P(y)$ e $P(z)$.

Então, pela nossa escolha de x_0, como alguma coisa para a qual $\forall y(P(y) \leftrightarrow y = x_0)$ é verdadeiro,segue que $y = x_0$ e $z = x_0$. Portanto, $y = z$.

Continuação da Demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Os seguintes enunciados são equivalentes:

1. $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y = x))$
2. $\exists x \forall y(P(y) \leftrightarrow y = x)$
3. $\exists x P(x) \wedge \forall y \forall z((P(y) \wedge P(z)) \rightarrow y = z)$

Prova do condicional $3 \rightarrow 1$. Suponha que o enunciado 3 é verdadeiro.

Pela primeira metado do enunciado 3, seja x_0 algum elemento tal que $P(x_0)$ é verdadeiro. O enunciado 1 seguirá se conseguirmos provar que $\forall y(P(y) \rightarrow y = x_0)$.

Então, suponha $P(y)$ para y arbitrário. Como agora temos ambos $P(y)$ e $P(x_0)$, pela segunda metade do enunciado 3, podemos concluir que $y = x_0$, como queríamos demonstrar. $\square$

Demonstração de unicidade(2)

Teorema. Existe um único conjunto A tal que, para todo conjunto B, $A \cup B = B$.

Demonstração:

Demonstração de unicidade(2)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Existe um único conjunto A tal que, para todo conjunto B, $A \cup B = B$.

Demonstração:

Seja $P(A) =$ "$\forall B(A \cup B = B)$". A fim de provar o teorema, usamos o enunciado 3 do teorema anterior, que é equivalente:

$$\exists A P(A) \wedge \forall C \forall D((P(C) \wedge P(D)) \rightarrow C = D)$$

Prova de Existência: Devemos provar que $\exists A P(A)$. Claramente, $\forall B(\varnothing \cup B = B)$. Então, o conjunto vazio, $\varnothing$, satisfaz a propriedade P.

Prova de Unicidade: Sejam C e D dois conjuntos arbitrários. Suponha $P(C)$ e $P(D)$, ou seja, $\forall B(C \cup B = B)$ e $\forall B(D \cup B = B)$. Precisamos provar que $C = D$.
Fazendo $B = D$ na primeira hipótese, temos que $C \cup D = D$; e fazendo $B = C$ na segunda hipótese, temos que $D \cup C = C$. Como $D \cup C = C \cup D$, então $C = D$. $\square$

Demonstração de unicidade (3)

Teorema. Sejam A, B, C conjuntos tais que A e B não são disjuntos, A e C não são disjuntos e A tem um único elemento. Prove que B e C não são disjuntos.

Listando premissas e conclusão:

Demonstração de unicidade (3)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Sejam A, B, C conjuntos tais que A e B não são disjuntos, A e C não são disjuntos e A tem um único elemento. Prove que B e C não são disjuntos.

Listando premissas e conclusão:

Premissas

$A \cap B \neq \varnothing$

$A \cap C \neq \varnothing$

$\exists! x(x \in A)$

Conclusão

$B \cap C \neq \varnothing$

Podemos usar as definições de $\cap$, $\exists!$, $\neq$ para escrever as premissas e a conclusão usando conectivos lógicos:

Premissas

$\exists x(x \in A \land x \in B)$

$\exists x(x \in A \land x \in C)$

$\exists x(x \in A)$

$\forall y \forall z((y \in A \land z \in A) \to y = z)$

Conclusão

$\exists x(x \in B \land x \in C)$

Demonstração de unicidade (3)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Sejam A, B, C conjuntos tais que A e B não são disjuntos, A e C não são disjuntos e A tem um único elemento. Prove que B e C não são disjuntos.

Demonstração:

Demonstração de unicidade (3)

Teorema. Sejam A, B, C conjuntos tais que A e B não são disjuntos, A e C não são disjuntos e A tem um único elemento. Prove que B e C não são disjuntos.

Demonstração:

Como A e B não são disjuntos, existe um elemento b tal que $b \in A$ e $b \in B$.

Similarmente, como A e C não são disjuntos, existe um elemento c tal que $c \in A$ e $c \in C$.

Como A tem um único elemento, devemos ter $b = c$.

Como $b \in B$ e $b = c \in C$, encontramos um elemento que pertence tanta a B quanto a C. Assim, $b = c \in B \cap C$ e, portanto, B e C não são disjuntos. $\square$

Estratégias de prova

Estratégias de demonstração

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Raciocínio direto**
  - Comece com as premissas, juntamente com os axiomas e teoremas existentes, construa uma demonstração usando uma sequência de passos que te leve à conclusão.
    - **Prova direta**.
  - Comece com a negação da conclusão, juntamente com os axiomas e teoremas existentes, construa uma demonstração usando uma sequência de passos que te leve à negação das premissas.
    - **Prova indireta**.

- **Raciocínio reverso**
  - Trabalhe de trás para frente a partir da conclusão até encontrar os passos corretos para uma prova direta.

Raciocínio reverso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Prove:** se x, y são reais positivos distintos, então $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Raciocínio reverso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Prove:** se x, y são reais positivos distintos, então $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy} \\
&\equiv \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \\
&\equiv (x+y)^2 \geq 4xy \\
&\equiv x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \\
&\equiv x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\
&\equiv (x-y)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Raciocínio reverso

- **Prove:** se x, y são reais positivos distintos, então $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy} \\
&\equiv \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \\
&\equiv (x+y)^2 \geq 4xy \\
&\equiv x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \\
&\equiv x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\
&\equiv (x-y)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Como $(x-y)^2 \geq 0$ quando $x \neq y$, segue que a última desigualdade é verdadeira. Portanto, $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Raciocínio reverso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Prove:** se x, y são reais positivos distintos, então $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy} \\
&\equiv \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \\
&\equiv (x+y)^2 \geq 4xy \\
&\equiv x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \\
&\equiv x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\
&\equiv (x-y)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Como $(x-y)^2 \geq 0$ quando $x \neq y$, segue que a última desigualdade é verdadeira. Portanto, $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Com isso, podemos construir uma prova direta seguindo os passos reversamente.

Raciocínio reverso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Prove:** se x, y são reais positivos distintos, então $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy} \\
&\equiv \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \\
&\equiv (x+y)^2 \geq 4xy \\
&\equiv x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \\
&\equiv x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\
&\equiv (x-y)^2 \geq 0 \qquad\qquad (\textbf{tautologia})
\end{aligned}
$$

Como $(x-y)^2 \geq 0$ quando $x \neq y$, segue que a última desigualdade é verdadeira. Portanto, $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Com isso, podemos construir uma prova direta seguindo os passos reversamente.

Raciocínio reverso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Prove:** se x, y são reais positivos distintos, então $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

$$
\begin{aligned}
& \frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy} \\
& \equiv \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \\
& \equiv (x+y)^2 \geq 4xy \\
& \equiv x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \\
& \equiv x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \qquad (\textbf{expanda lado esquerdo}) \\
& \equiv (x-y)^2 \geq 0 \qquad (\textbf{tautologia})
\end{aligned}
$$

Como $(x-y)^2 \geq 0$ quando $x \neq y$, segue que a última desigualdade é verdadeira. Portanto, $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Com isso, podemos construir uma prova direta seguindo os passos reversamente.

Raciocínio reverso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Prove:** se x, y são reais positivos distintos, então $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

$$\begin{aligned}
&\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy} \\
&\equiv \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \\
&\equiv (x+y)^2 \geq 4xy \\
&\equiv x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \quad && (\textbf{adicione 4xy em ambos os lados}) \\
&\equiv x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \quad && (\textbf{expanda lado esquerdo}) \\
&\equiv (x-y)^2 \geq 0 \quad && (\textbf{tautologia})
\end{aligned}$$

Como $(x-y)^2 \geq 0$ quando $x \neq y$, segue que a última desigualdade é verdadeira. Portanto, $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Com isso, podemos construir uma prova direta seguindo os passos reversamente.

Raciocínio reverso

- **Prove:** se x, y são reais positivos distintos, então $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy} \\
&\equiv \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \\
&\equiv (x+y)^2 \geq 4xy && \text{(fatore lado esquerdo)} \\
&\equiv x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy && \text{(adicione 4xy em ambos os lados)} \\
&\equiv x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 && \text{(expanda lado esquerdo)} \\
&\equiv (x-y)^2 \geq 0 && \text{(tautologia)}
\end{aligned}
$$

Como $(x-y)^2 \geq 0$ quando $x \neq y$, segue que a última desigualdade é verdadeira. Portanto, $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Com isso, podemos construir uma prova direta seguindo os passos reversamente.

Raciocínio reverso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Prove:** se x, y são reais positivos distintos, então $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

$$
\begin{aligned}
& \frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy} \\
& \equiv \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy && (\textbf{divida por 4}) \\
& \equiv (x+y)^2 \geq 4xy && (\textbf{fatore lado esquerdo}) \\
& \equiv x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy && (\textbf{adicione 4xy em ambos os lados}) \\
& \equiv x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 && (\textbf{expanda lado esquerdo}) \\
& \equiv (x-y)^2 \geq 0 && (\textbf{tautologia})
\end{aligned}
$$

Como $(x-y)^2 \geq 0$ quando $x \neq y$, segue que a última desigualdade é verdadeira. Portanto, $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Com isso, podemos construir uma prova direta seguindo os passos reversamente.

Raciocínio reverso

- **Prove:** se x, y são reais positivos distintos, então $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

$$
\begin{aligned}
& \frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy} && (\textbf{raiz quadrada em ambos os lados}) \\
\equiv\ & \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy && (\textbf{divida por 4}) \\
\equiv\ & (x+y)^2 \geq 4xy && (\textbf{fatore lado esquerdo}) \\
\equiv\ & x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy && (\textbf{adicione 4xy em ambos os lados}) \\
\equiv\ & x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 && (\textbf{expanda lado esquerdo}) \\
\equiv\ & (x-y)^2 \geq 0 && (\textbf{tautologia})
\end{aligned}
$$

Como $(x-y)^2 \geq 0$ quando $x \neq y$, segue que a última desigualdade é verdadeira. Portanto, $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Com isso, podemos construir uma prova direta seguindo os passos reversamente.

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Se x, y são reais positivos distintos, então $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Demonstração:

Teorema

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema: Se x, y são reais positivos distintos, então $\frac{(x+y)}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Demonstração:
Suponha que x e y são reais distintos. Então $(x-y)^2 > 0$, pois o quadrado de um número diferente de zero é positivo.

Como $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, isso implica que $x^2 - 2xy + y^2 > 0$.

Adicionando $4xy$ em ambos os lados, obtemos $x^2 + 2xy + y^2 > 4xy$.

Como $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$, isso significa que $(x+y)^2 \geq 4xy$.

Dividindo ambos os membros dessa inequação por 4, vemos que $(x-y)^2/4 > xy$.

Finalmente, tomando raízes quadradas dos dois lados (o que preserva a inequação, pois ambos os lados são positivos), temos $(x+y)/2 > \sqrt{xy}$. $\square$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

FIM