Leitura Complementar + Lista de Execícios

SEMANA 08 - Aritmética Modular

2022.1

Notas de Aula de Matemática Discreta

Prof. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

Este documento traz uma lista de exercícios referentes aos tópicos da SEMANA 08. É recomendado que você faça todos os exercícios e tire suas dúvidas antes das aulas da semana seguinte.

1 Instruções Preliminares

Obs.: "prove", "demonstre" e "mostre" são sinônimos. Nos exercícios abaixo, em cada um dos casos, você deve oferecer um demonstração (uma prova!) do que estiver sendo afirmado.

Quando a resposta envolver números, todos os cálculos para chegar a estes números devem ser apresentados. Busque fornecer respostas que deixem claro seu raciocínio, exibindo e justificando todos os passos executados. Lembre-se que a sua resposta será lida por alguém no futuro e escreva suas respostas pensando no leitor. Idealmente, as suas respostas devem permitir que qualquer colega da turma possa identificar claramente quais foram os passos que você fez e porquê.

É muito importante que você suplemente esta lista com exercícios do livro conforme sua necessidade. Se tiver facilidade com os tópicos, poucos exercícios bastarão para compreendê-los; se tiver dificuldades, o caminho será reforçar a leitura do capítulo e resolver mais exercícios.

2 Exercícios

Exercício 1. Verifique se a congruência apresentada em cada item é verdadeira ou falsa. Justifique suas respostas de acordo com a definição de congruência modular.

(a) $12 \equiv 16\ (mod\ 3)$	(e) $10 \equiv 25\ (mod\ 6)$	(i) $24 \equiv 84\ (mod\ 13)$
(b) $12 \equiv 16\ (mod\ 4)$	(f) $10 \equiv 25\ (mod\ 11)$	(j) $24 \equiv 84\ (mod\ 15)$
(c) $10 \equiv 22\ (mod\ 4)$	(g) $10 \equiv 82\ (mod\ 12)$	(k) $10 \equiv 84\ (mod\ 15)$
(d) $10 \equiv 25\ (mod\ 5)$	(h) $24 \equiv 84\ (mod\ 12)$	(l) $24 \equiv 84\ (mod\ 20)$

Exercício 2. Explique a diferença entre afirmar que "$j \equiv k\ (mod\ m)$" ou que "j **mod** $m = k$".

Exercício 3. Prove os teoremas abaixo usando as técnicas de sua preferência:

(a) "Para todo j, k inteiros e m inteiro positivo,
$j \equiv k \ (mod \ m)$ se e somente se j **mod** $m = k$ **mod** m."

(b) "Para todo m inteiro positivo e a, b inteiros,
$a \equiv b \ (mod \ m)$ se e somente se existe um inteiro k tal que $a = b + km$."

(c) "Para todo m inteiro positivo e j, k inteiros,
$j \equiv k \ (mod \ m)$ se e somente se $k \equiv j \ (mod \ m)$"

(d) "Para todo m inteiro positivo e j, k, l inteiros,
se $j \equiv k \ (mod \ m)$ e $k \equiv l \ (mod \ m)$, então $j \equiv l \ (mod \ m)$."

(e) "Para todo m inteiro positivo e a, b inteiros,
se $a \equiv b \ (mod \ m)$, então $a + c \equiv b + c \ (mod \ m)$ para todo c inteiro."

(f) "Para todo m inteiro positivo e a, b inteiros,
se $a \equiv b \ (mod \ m)$, então $a.c \equiv b.c \ (mod \ m)$ para todo c inteiro."

(g) "Para todo m inteiro positivo e a, b, c, d inteiros,
se $a \equiv b \ (mod \ m)$ e $c \equiv d \ (mod \ m)$, então $a + c \equiv b + d \ (mod \ m)$."

(h) "Para todo n inteiro, se n **mod** $10 = 2$, então n^2 **mod** $10 = 4$.

(i) "Para todo n inteiro, se n **mod** $10 = 3$, então n^2 **mod** $10 = 9$.

(j) "Para todo n inteiro, se n **mod** $10 = 4$, então n^2 **mod** $10 = 6$.

(k) "Para todo n inteiro, n^2 **mod** $10 \neq 3$."
Dica: use prova por casos, avaliando os possíveis valores de n **mod** 10.

(l) "Para todo m inteiro positivo e a, b inteiros,
$(a + b)$ **mod** $m = ((a$ **mod** $m) + (b$ **mod** $m))$ **mod** m."

(m) "Para todo m inteiro positivo e a, b inteiros,
$(a \ . \ b)$ **mod** $m = ((a$ **mod** $m) \ . \ (b$ **mod** $m))$ **mod** m."