Relações de Ordem Parcial

Matemática Discreta

Prof. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

22 de fevereiro de 2021

Prévia

Requisitos

- Relações Binárias e suas Propriedades
- Técnicas de Demonstração de Teoremas
- Propriedades / Manipulação Algébrica

Esta apresentação...

- Discute as peculiaridades e vantagens de estabelecermos uma Relação de Ordem Parcial sobre um conjunto;
- Nos dá a base para trabalhar conceitos como Indução e Recursão na perspectiva dos computadores.

Samy Sá (samy@ufc.br)

Prévia

Concluímos a aula anterior com a definição:

Definição

Uma relação binária R no conjunto A é uma ***relação de ordem parcial*** ***se e somente se*** *R é* ***reflexiva****,* ***anti-simétrica****, e* ***transitiva****.*

Nesta aula, estudaremos algumas consequências que as relações de ordem parcial promovem sobre um conjunto e seus elementos.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução: Ordenações e Propriedades

Definição

Uma relação binária R no conjunto A é uma ***relação de ordem parcial*** ***se e somente se*** *R é* ***reflexiva****,* ***anti-simétrica****, e* ***transitiva****.*

Intuitivamente,

qualquer relação de **ordem** estabelece um critério para organizarmos objetos em termos de **antes** e **depois** (um critério de **precedência**).

Exemplos comuns:

- Ordem crescente / decrescente
- Ordem alfabética
- Por idade, altura, mês de nascimento, matrícula...

Introdução: Ordenações e Propriedades

Definição

Uma relação binária R no conjunto A é uma ***relação de ordem parcial*** ***se e somente se*** *R é* ***reflexiva****,* ***anti-simétrica****, e* ***transitiva****.*

Intuitivamente,

qualquer relação de **ordem** estabelece um critério para organizarmos objetos em termos de **antes** e **depois** (um critério de **precedência**).

Esta intuição é um pouco limitada...

- Exemplo: na relação $\leq$ sobre os inteiros, a perspectiva de "antes-depois" consegue falar apenas sobre números diferentes

Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução: Ordenações e Propriedades

Definição

Uma relação binária R no conjunto A é uma ***relação de ordem parcial*** ***se e somente se*** *R é* ***reflexiva****,* ***anti-simétrica****, e* ***transitiva****.*

Intuitivamente,

qualquer relação de **ordem** estabelece um critério para organizarmos objetos em termos de **antes** e **depois** (um critério de **precedência**).

Mesmo assim, esta idéia pode ajudar a entender a definição

- A intuição de **antes** e **depois** é necessariamente **anti-simétrica**:

  ordenando objetos *A* e *B* diferentes, é impossível colocarmos ao mesmo tempo *A* antes de *B* e *B* antes de *A*.

Introdução: Ordenações e Propriedades

Definição

*Uma relação binária R no conjunto A é uma **relação de ordem parcial** **se e somente se** R é **reflexiva**, **anti-simétrica**, e **transitiva**.*

Intuitivamente,

qualquer relação de **ordem** estabelece um critério para organizarmos objetos em termos de **antes** e **depois** (um critério de **precedência**).

Mesmo assim, esta idéia pode ajudar a entender a definição

- A intuição de **antes** e **depois** é também **transitiva**:

  ordenando objetos A, B, C diferentes, se tivermos A antes de B e B antes de C, necessariamente teremos A antes de C.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução: Ordenações e Propriedades

Definição

*Uma relação binária R no conjunto A é uma **relação de ordem parcial** **se e somente se** R é **reflexiva**, **anti-simétrica**, e **transitiva**.*

Intuitivamente,

qualquer relação de **ordem** estabelece um critério para organizarmos objetos em termos de **antes** e **depois** (um critério de **precedência**).

Por outro lado,

- A intuição de **antes** e **depois** não é reflexiva:

  quando consideremos cada objeto *A* individualmente, é impossível colocá-lo antes ou depois de si mesmo na ordem...

  Invés disso, *A* precisa estar **na mesma posição** que *A*!

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Introdução: Ordenações e Propriedades

Definição

Uma relação binária R no conjunto A é uma ***relação de ordem parcial*** ***se e somente se*** *R é* ***reflexiva****,* ***anti-simétrica****, e* ***transitiva****.*

Intuitivamente,

qualquer relação de **ordem** estabelece um critério para organizarmos objetos em termos de **antes** e **depois** (um critério de **precedência**).

Portanto, temos uma perspectiva ligeiramente melhor:

"**antes ou na mesma posição**" e "**depois ou na mesma posição**"

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Ordens PARCIAIS?

A relação $\leq$ no conjunto dos Inteiros é **reflexiva**, **anti-simétrica** e **transitiva**.

Além disso,

Para quaisquer dois inteiros n, m que escolhermos, podemos afirmar com certeza que $n \leq m$ ou que $m \leq n$.

Esta propriedade adicional é interessante, mas NÃO É COMUM a todas as relações que satisfazem às três propriedades.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Ordens PARCIAIS?

Exemplo

*Considere que desejamos ordenar as **pessoas** de um grupo por **idade**.*

Nome	*Idade*
Aline	*21*
Bruno	*20*
Clara	*18*
Dario	*19*
Erica	*20*

Quem devemos listar primeiro...

- *Entre **Aline** e **Bruno**?* ***Bruno***
- *Entre **Clara** e **Dario**?* ***Clara***
- *Entre **Bruno** e **Erica**?* ***...***

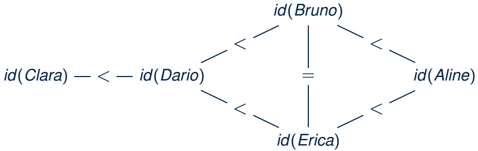
Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Ordens PARCIAIS?

Exemplo

*Considere que desejamos ordenar as **pessoas** de um grupo por **idade**.*

Nome	*Idade*
Aline	*21*
Bruno	*20*
Clara	*18*
Dario	*19*
Erica	*20*



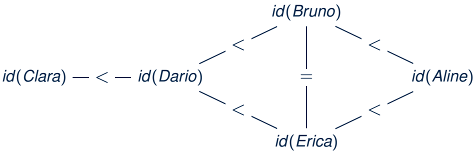
- *Como* $id(Bruno) < id(Aline)$*, temos que "*$id(Bruno) \leq id(Aline)$*"*
- *Como* $id(Clara) < id(Dario)$*, temos que "*$id(Clara) \leq id(Dario)$*"*
- *Mas como* $id(Bruno) = id(Erica)$*, temos que "*$id(Bruno) \leq id(Erica)$*" e também "*$id(Erica) \leq id(Bruno)$*"*

Ordens PARCIAIS?

Exemplo

Considere que desejamos ordenar as ***pessoas*** *de um grupo por* ***idade****.*

Nome	*Idade*
Aline	*21*
Bruno	*20*
Clara	*18*
Dario	*19*
Erica	*20*



Ordenando as ***idades*** *destas pessoas, teremos*

$$id(Clara) < id(Dario) < id(Bruno) = id(Erica) < id(Aline$$

Mas quando ordenarmos as ***pessoas****, precisamos levar em conta que, embora tenhamos $id(Bruno) = id(Erica)$,*
Bruno *e* ***Erica*** *são* ***pessoas diferentes!***

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Ordens PARCIAIS?

Para nossa conveniência, observemos $| \subseteq S \times S$ com $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

OBSERVAÇÃO: Quando definida sobre $\mathbb{N}^*$,

$| \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ terá todos os pares $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tais que $x \mid y$.

Neste caso, $|$ será

- **reflexiva**, pois para todo $x \in \mathbb{N}^*$, temos que $x \mid x$;
- **anti-simétrica**, pois para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}^*$, teremos $x \mid y$ e $y \mid x$ se e somente se $x = y$;
- **transitiva**, pois para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, se tivermos $x \mid y$ e $y \mid z$, teremos também que $x \mid z$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Ordens PARCIAIS?

Para nossa conveniência, observemos $| \subseteq S \times S$ com $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Quando definida sobre S,

$| \subseteq S \times S$ terá todos os pares $(x, y) \in S \times S$ tais que $x \mid y$.

Neste caso, podemos listar todos os pares da relação. Teremos

$$| = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

Organizando-os pelo critério de **divisibilidade**, quem devemos listar primeiro...

- Entre 1 e 4? o **1**, pois $1 \mid 4$, mas $4 \nmid 1$
- Entre 2 e 4? o **2**, pois $2 \mid 4$, mas $4 \nmid 2$
- Entre 3 e 4? **não há resposta**, pois $3 \nmid 4$ e $4 \nmid 3$
- Entre 3 e 5? **não há resposta**, pois $3 \nmid 5$ e $5 \nmid 3$
- Entre 2 e 5? **não há resposta**, pois $2 \nmid 5$ e $5 \nmid 2$ ...

Neste situação, dizemos que 3 e 4 são **incomparáveis**.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Ordens PARCIAIS?

O que aprendemos?

- Uma relação que seja **reflexiva**, **anti-simétrica** e **transitiva** induz alguma ordenação sobre elementos de um conjunto, mas ainda é possível que alguns destes elementos sejam **incomparáveis** no critério escolhido.
- Isso não acontece quando comparamos inteiros usando $\leq$ ou $\geq$. Invés disso, todos os inteiros são comparáveis nestas relações.

Estas relações são ditas **PARCIAIS** devido à possibilidade de existirem elementos incomparáveis.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Ordens PARCIAIS e Ordens TOTAIS

O que aprendemos?

- Uma relação que seja **reflexiva**, **anti-simétrica** e **transitiva** induz alguma ordenação sobre elementos de um conjunto, mas ainda é possível que alguns destes elementos sejam **incomparáveis** no critério escolhido.
- Isso não acontece quando comparar inteiros usando $\leq$ ou $\geq$. Invés disso, todos os inteiros são comparáveis nestas relações.

Estas relações são ditas **PARCIAIS** devido à possibilidade de existirem elementos incomparáveis.

Quando não existirem elementos incomparáveis, diremos que a Relação de Ordem Parcial é **TOTAL**. Neste caso, diremos ter uma **Relação de Ordem Total**.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Conjuntos Parcialmente Ordenados

Definição (Relação de Ordem Parcial)

*Uma relação binária R no conjunto A é uma **relação de ordem parcial** **se e somente se** R é **reflexiva**, **anti-simétrica**, e **transitiva**.*

Definição (Conjunto Parcialmente Ordenado)

*Um conjunto A com uma relação de ordem parcial $R \subseteq A \times A$ é chamado de **conjunto parcialmente ordenado** ou **poset** (do inglês partially ordered set).*

Indicamos que A é um conjunto parcialmente ordenado por R através do par (A, R) e dizemos que os elementos de A são também elementos do poset.

Exemplo (1/3)

O par $(\mathbb{Z}, \leq)$ é um poset, pois $\leq$ é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{Z}$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Conjuntos Parcialmente Ordenados

Definição (Relação de Ordem Parcial)

*Uma relação binária R no conjunto A é uma **relação de ordem parcial** **se e somente se** R é **reflexiva**, **anti-simétrica**, e **transitiva**.*

Definição (Conjunto Parcialmente Ordenado)

*Um conjunto A com uma relação de ordem parcial $R \subseteq A \times A$ é chamado de **conjunto parcialmente ordenado** ou **poset** (do inglês partially ordered set).*

Indicamos que A é um conjunto parcialmente ordenado por R através do par (A, R) e dizemos que os elementos de A são também elementos do poset.

Exemplo (2/3)

O par $(\mathbb{N}^*, |)$ é um poset, pois $|$ é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{N}^*$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Conjuntos Parcialmente Ordenados

Definição (Relação de Ordem Parcial)

*Uma relação binária R no conjunto A é uma **relação de ordem parcial** **se e somente se** R é **reflexiva**, **anti-simétrica**, e **transitiva**.*

Definição (Conjunto Parcialmente Ordenado)

*Um conjunto A com uma relação de ordem parcial $R \subseteq A \times A$ é chamado de **conjunto parcialmente ordenado** ou **poset** (do inglês partially ordered set).*

Indicamos que A é um conjunto parcialmente ordenado por R através do par (A, R) e dizemos que os elementos de A são também elementos do poset.

Exemplo (3/3)

O par $(\mathbb{Z}, |)$ não é um poset, pois $|$ não é ordem parcial em $\mathbb{Z}$ (não é reflexiva nem anti-simétrica).

Samy Sá (samy@ufc.br)

Notação Comum

Usa-se o símbolo "$\preccurlyeq$" para representar relações de ordem parcial arbitrárias.

Dado um poset $(S, \preccurlyeq)$, podemos escrever:

- $a \preccurlyeq b$, se $(a, b) \in \preccurlyeq$
- $a \prec b$, se $a \neq b$ e $a \preccurlyeq b$

Como opção de leitura da notação, podemos ler:

- $a \prec b$ como "a **precede** b"
- $a \preccurlyeq b$ como "a **precede ou está na mesma posição que** b"

Obs. 1: Como $\preccurlyeq$ precisa ser anti-simétrica, teremos $a \preccurlyeq b$ e $b \preccurlyeq a$ se e somente se $a = b$.

Obs. 2: Repare nas similaridades entre $\preccurlyeq$ e $\leq$

Elementos Comparáveis/Incomparáveis

Definição (Elementos Comparáveis/Incomparáveis)

*Dois elementos a e b de um poset $(S, \preccurlyeq)$ são **comparáveis** se $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$. Quando $a \not\preccurlyeq b$ e $b \not\preccurlyeq a$, diremos que a e b são **incomparáveis**.*

Exemplo

No poset $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$, observamos que:

- $2 \mid 4$, *então* 2 *e* 4 *são comparáveis;*
- 2 *também é comparável a* 1, 2 *e* 6, *pois* $1 \mid 2$, $2 \mid 2$ *e* $2 \mid 6$*;*
- *mas* 2 *e* 3 *são incomparáveis, pois* $2 \nmid 3$ *e* $3 \nmid 2$*;*
- *e* 2 *e* 5 *são incomparáveis, pois* $2 \nmid 5$ *e* $5 \nmid 2$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Relações de Ordem Totais

Definição (Elementos Comparáveis/Incomparáveis)

*Dois elementos a e b de um poset $(S, \preccurlyeq)$ são **comparáveis** se $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$. Quando $a \not\preccurlyeq b$ e $b \not\preccurlyeq a$, diremos que a e b são **incomparáveis**.*

Definição (Ordem Total)

*Se $(S, \preccurlyeq)$ é um poset em que quaisquer dois elementos de S são comparáveis, S será chamado de **conjunto totalmente ordenado** e $\preccurlyeq$ será uma **ordem total**.*

*Um conjunto totalmente ordenado também pode ser chamado de **conjunto linearmente ordenado** ou **cadeia** e uma ordem total também pode ser chamada de **ordem linear**.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Elementos Maximais e Minimais

Intuição

- Quando pensamos em ordenar objetos, nossa intuição mais comum nos levará a procurar quem seria <u>o primeiro</u> elemento a ser posto na ordem.
- Com ordens parciais, conceitos como primeiro e último precisam ser generalizados e podem muito bem não existir.

Exemplo (1/2)

Quem seriam o primeiro e o último elementos em...

- $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \leq)$? — 1 *e* 6*, respectivamente*
- $(\mathbb{N}, \leq)$? — 1 *será o primeiro, mas não há último*
- $(\mathbb{Z}, \leq)$? — *não há primeiro nem último*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Elementos Maximais e Minimais

Intuição

- Quando pensamos em ordenar objetos, nossa intuição mais comum nos levará a procurar quem seria o primeiro elemento a ser posto na ordem.
- Com ordens parciais, conceitos como primeiro e último precisam ser generalizados e podem muito bem não existir.

Exemplo (2/2)

Quem seriam o primeiro e o último elementos em...

- $(\{1,2,3,4,5,6\},|)$? 1 *seria "o primeiro"*, $4,5,6$ *seriam "últimos"*
- $(\{2,3,4,5,6\},|)$? $2,3$ *seriam "primeiros"*, $4,5,6$ *seriam "últimos"*
- $(\{2,3,4\},|)$? $2,3$ *seriam "primeiros"*, $3,4$ *seriam "últimos"*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Elementos Maximais e Minimais

Formalmente, chamamos estes candidatos a iniciar e concluir listagens de ordem de elementos **minimais** e elementos **maximais**.

O objetivo real é identificar os **extremos** de cada poset.

Definição (Elementos Minimais de um Poset)

Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ *é* ***minimal*** *se e somente se não existe nenhum elemento* $b \neq a$ *em* S *tal que* $b \preccurlyeq a$.

Exemplo (1/4)

No poset $(\{1, 2, 3, 4\}, |)$*, o único elemento minimal é* 1*, pois* $2 \nmid 1$*,* $3 \nmid 1$*,* $4 \nmid 1$.

Em $| = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$*, observe como o único par onde* 1 *aparece na segunda posição é* $(1, 1)$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Elementos Maximais e Minimais

Definição (Elementos Minimais de um Poset)

Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ *é **minimal** se e somente se não existe nenhum elemento* $b \neq a$ *em* S *tal que* $b \preccurlyeq a$.

Definição (Elementos Maximais de um Poset)

Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ *é **maximal** se e somente se não existe nenhum elemento* $b \neq a$ *em* S *tal que* $a \preccurlyeq b$.

Exemplo (1/4)

No poset $(\{1, 2, 3, 4\}, |)$, *tanto* 3 *quanto* 4 *são maximais, pois* $3 \nmid 1$, $3 \nmid 2$, $3 \nmid 4$ *e também* $4 \nmid 1$, $4 \nmid 2$, $4 \nmid 3$.

Em $| = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$, *observe como o único par onde* 3 *aparece na primeira posição é* $(3,3)$. *Similarmente, o único par onde* 4 *aparece na primeira posição é* $(4,4)$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Elementos Maximais e Minimais

Definição (Elementos Minimais de um Poset)

Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ *é* ***minimal*** *se e somente se não existe nenhum elemento* $b \neq a$ *em* S *tal que* $b \preccurlyeq a$.

Definição (Elementos Maximais de um Poset)

Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ *é* ***maximal*** *se e somente se não existe nenhum elemento* $b \neq a$ *em* S *tal que* $a \preccurlyeq b$.

Exemplo (2/4)

No poset $(\mathbb{N}^*, |)$*, o único elemento minimal é o* 1*, pois não existe nenhum elemento* $n \neq 1$ *em* $\mathbb{N}^*$ *tal que* $n \mid 1$.

Em contraste, $(\mathbb{N}^*, |)$ *não tem elementos maximais, pois para todo* $x \in \mathbb{N}^*$ *existe algum* $y \neq x$ *em* $\mathbb{N}^*$ *tal que* $x \mid y$. *Ou seja, todo inteiro positivo divide algum inteiro positivo diferente de si.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Elementos Maximais e Minimais

Definição (Elementos Minimais de um Poset)

*Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é **minimal** se e somente se não existe nenhum elemento $b \neq a$ em S tal que $b \preccurlyeq a$.*

Definição (Elementos Maximais de um Poset)

*Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é **maximal** se e somente se não existe nenhum elemento $b \neq a$ em S tal que $a \preccurlyeq b$.*

Exemplo (3/4)

No poset $(\mathbb{N}, \leq)$, o único elemento minimal é o 0, pois não existe nenhum elemento $n \neq 0$ em $\mathbb{N}$ tal que $n \leq 0$.

Em contraste, $(\mathbb{N}, \leq)$ não tem elementos maximais, pois para todo número natural, existe ao menos um outro natural maior que ele.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Elementos Maximais e Minimais

Definição (Elementos Minimais de um Poset)

Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é ***minimal*** *se e somente se não existe nenhum elemento $b \neq a$ em S tal que $b \preccurlyeq a$.*

Definição (Elementos Maximais de um Poset)

Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é ***maximal*** *se e somente se não existe nenhum elemento $b \neq a$ em S tal que $a \preccurlyeq b$.*

Exemplo (4/4)

No poset $(\mathbb{N}, \geq)$, o único elemento maximal é o 0, pois não existe nenhum elemento $n \neq 0$ em $\mathbb{N}$ tal que $n \geq 0$.

Em contraste, $(\mathbb{N}, \geq)$ não tem elementos minimais, pois para todo número natural, existe ao menos um outro natural maior que ele.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Maior e Menor Elementos de um Poset

Naturalmente, há um interesse especial em posets que apresentam um único elemento minimal ou maximal.

Definição (Elemento Mínimo de um Poset)

Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é chamado de ***menor elemento*** *ou* ***elemento mínimo*** *se e somente se $a \preccurlyeq b$ para todo $b \in S$.*

Exemplo (1/3)

No poset $(\mathbb{N}, \leq)$, observamos que $0 \leq x$ para todo $x \in \mathbb{N}$.
Portanto, 0 é o elemento mínimo de $(\mathbb{N}, \leq)$.

Exemplo (2/3)

No poset $(\mathbb{N}^*, |)$, observamos que $1 \mid x$ para todo $x \in \mathbb{N}^*$.
Portanto, 1 é o elemento mínimo de $(\mathbb{N}^*, |)$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Maior e Menor Elementos de um Poset

Naturalmente, há um interesse especial em posets que apresentam um único elemento minimal ou maximal.

Definição (Elemento Mínimo de um Poset)

Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é chamado de ***menor elemento*** *ou* ***elemento mínimo*** *se e somente se $a \preccurlyeq b$ para todo $b \in S$.*

Exemplo (3/3)

O poset $(\{2, 3, 4, 5, 6\}, |)$ não tem elemento mínimo, pois não existe nenhum $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ tal que $n \mid x$ para todo $x \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Como contra-exemplos para cada candidato,
note que $2 \nmid 3$, $3 \nmid 2$, $4 \nmid 2$, $5 \nmid 2$, $6 \nmid 2$.

Maior e Menor Elementos de um Poset

Naturalmente, há um interesse especial em posets que apresentam um único elemento minimal ou maximal.

Definição (Elemento Máximo de um Poset)

Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é chamado de ***maior elemento*** *ou* ***elemento máximo*** *se e somente se $b \preccurlyeq a$ para todo $b \in S$.*

Exemplo (1/3)

O poset $(\mathbb{N}, \leq)$ não tem elemento máximo, pois não existe nenhum $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq n$ para todo $x \in \mathbb{N}$. Basta reparar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 > n$ e, portanto, $n \not\leq n + 1$.

Exemplo (2/3)

No poset $(\mathbb{N}, \geq)$, observamos que $x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{N}$. Portanto, 0 é o elemento máximo de $(\mathbb{N}, \geq)$.

Maior e Menor Elementos de um Poset

Naturalmente, há um interesse especial em posets que apresentam um único elemento minimal ou maximal.

Definição (Elemento Máximo de um Poset)

Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é chamado de ***maior elemento*** *ou* ***elemento máximo*** *se e somente se $b \preccurlyeq a$ para todo $b \in S$.*

Exemplo (3/3)

O poset $(\{2, 3, 4, 5, 6\}, |)$ *não tem elemento máximo, pois não existe nenhum* $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ *tal que* $x \mid n$ *para todo* $x \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Como contra-exemplos para cada candidato,
note que $3 \nmid 2$, $2 \nmid 3$, $2 \nmid 4$, $2 \nmid 5$, $2 \nmid 6$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo de Algoritmo Justificado por Poset

Posets que tenham um elemento mínimo (ou um elemento máximo) são fundamentais para diversas aplicações e algoritmos.

Exemplo

Dado um conjunto S, calcular o seu conjunto das partes $\mathcal{P}(S)$.

1. *Inicialize o conjunto $\mathcal{P}(S)$ fazendo $\mathcal{P}(S) = \emptyset$;*
2. *Inclua $\emptyset$ em $\mathcal{P}(S)$;*
3. *Para cada elemento S' de $\mathcal{P}(S)$ não visitado, faça:*
4.   *Para cada $x \in S$, se $S' \cup \{x\} \notin \mathcal{P}(S)$, inclua $S' \cup \{x\}$ em $\mathcal{P}(S)$*
5.   *Marque S' como visitado*

Executaremos os primeiros passos do algoritmo para $S = \{1, 2, 3\}$.

L1. *No começo, escrevemos $\mathcal{P}(S) = \{\ \}$;*

L2. *Em seguida, atualizamos o resultado $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset\}$*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo de Algoritmo Justificado por Poset

Posets que tenham um elemento mínimo (ou um elemento máximo) são fundamentais para diversas aplicações e algoritmos.

Exemplo

Dado um conjunto S, calcular o seu conjunto das partes $\mathcal{P}(S)$.

1. *Inicialize o conjunto $\mathcal{P}(S)$ fazendo $\mathcal{P}(S) = \emptyset$;*
2. *Inclua $\emptyset$ em $\mathcal{P}(S)$;*
3. *Para cada elemento S' de $\mathcal{P}(S)$ não visitado, faça:*
4. *Para cada $x \in S$, se $S' \cup \{x\} \notin \mathcal{P}(S)$, inclua $S' \cup \{x\}$ em $\mathcal{P}(S)$*
5. *Marque S' como visitado*

Executaremos os primeiros passos do algoritmo para $S = \{1, 2, 3\}$.

L3. *Como $\emptyset$ não foi visitado, iniciaremos o laço com $S' = \emptyset$.*

L4. *Incluiremos $\emptyset \cup \{1\} = \{1\}$, $\emptyset \cup \{2\} = \{2\}$ e $\emptyset \cup \{3\} = \{3\}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{S})$.*
Ao final desse passo, teremos $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

L5. *Marcamos $\emptyset$ como* ***visitado****. Teremos $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo de Algoritmo Justificado por Poset

Posets que tenham um elemento mínimo (ou um elemento máximo) são fundamentais para diversas aplicações e algoritmos.

Exemplo

Dado um conjunto S, calcular o seu conjunto das partes $\mathcal{P}(S)$.

1. *Inicialize o conjunto $\mathcal{P}(S)$ fazendo $\mathcal{P}(S) = \emptyset$;*
2. *Inclua $\emptyset$ em $\mathcal{P}(S)$;*
3. *Para cada elemento S' de $\mathcal{P}(S)$ não visitado, faça:*
4.   *Para cada $x \in S$, se $S' \cup \{x\} \notin \mathcal{P}(S)$, inclua $S' \cup \{x\}$ em $\mathcal{P}(S)$*
5.   *Marque S' como visitado*

Executaremos os primeiros passos do algoritmo para $S = \{1, 2, 3\}$.

L3. *Como $\{1\}$ não foi visitado, iniciaremos o laço com $S' = \{1\}$.*

L4. *Incluiremos $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$ e $\{1\} \cup \{3\} = \{1, 3\}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{S})$.*
Obs.: *Note que $\{1\} \cup \{1\} = \{1\}$, mas já tínhamos $\{1\} \in \mathcal{P}(S)$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo de Algoritmo Justificado por Poset

Posets que tenham um elemento mínimo (ou um elemento máximo) são fundamentais para diversas aplicações e algoritmos.

Exemplo

Dado um conjunto S, calcular o seu conjunto das partes $\mathcal{P}(S)$.

1. *Inicialize o conjunto $\mathcal{P}(S)$ fazendo $\mathcal{P}(S) = \emptyset$;*

2. *Inclua $\emptyset$ em $\mathcal{P}(S)$;*

3. *Para cada elemento S' de $\mathcal{P}(S)$ não visitado, faça:*

4. *Para cada $x \in S$, se $S' \cup \{x\} \notin \mathcal{P}(S)$, inclua $S' \cup \{x\}$ em $\mathcal{P}(S)$*

5. *Marque S' como visitado*

Executaremos os primeiros passos do algoritmo para $S = \{1, 2, 3\}$.

L3. *Como $\{1\}$ não foi visitado, iniciaremos o laço com $S' = \{1\}$.*

L4. *Incluiremos $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$ e $\{1\} \cup \{3\} = \{1, 3\}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{S})$.*
Após isto, teremos $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.

L5. *Marcamos $\{1\}$ como **visitado**: $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Exemplo de Algoritmo Justificado por Poset

Posets que tenham um elemento mínimo (ou um elemento máximo) são fundamentais para diversas aplicações e algoritmos.

Exemplo

Dado um conjunto S, calcular o seu conjunto das partes $\mathcal{P}(S)$.

1. *Inicialize o conjunto $\mathcal{P}(S)$ fazendo $\mathcal{P}(S) = \emptyset$;*

2. *Inclua $\emptyset$ em $\mathcal{P}(S)$;*

3. *Para cada elemento S' de $\mathcal{P}(S)$ não visitado, faça:*

4. *Para cada $x \in S$, se $S' \cup \{x\} \notin \mathcal{P}(S)$, inclua $S' \cup \{x\}$ em $\mathcal{P}(S)$*

5. *Marque S' como visitado*

Executaremos os primeiros passos do algoritmo para $S = \{1, 2, 3\}$.

L3. *Como $\{2\}$ não foi visitado, iniciaremos o laço com $S' = \{2\}$.*

L4. *Incluiremos $\{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$.*
Após isto, teremos $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.

L5. *Teremos $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$*

Exemplo de Algoritmo Justificado por Poset

Posets que tenham um elemento mínimo (ou um elemento máximo) são fundamentais para diversas aplicações e algoritmos.

Exemplo

Dado um conjunto S, calcular o seu conjunto das partes $\mathcal{P}(S)$.

1. *Inicialize o conjunto $\mathcal{P}(S)$ fazendo $\mathcal{P}(S) = \emptyset$;*

2. *Inclua $\emptyset$ em $\mathcal{P}(S)$;*

3. *Para cada elemento S' de $\mathcal{P}(S)$ não visitado, faça:*

4. *Para cada $x \in S$, se $S' \cup \{x\} \notin \mathcal{P}(S)$, inclua $S' \cup \{x\}$ em $\mathcal{P}(S)$*

5. *Marque S' como visitado*

Executaremos os primeiros passos do algoritmo para $S = \{1, 2, 3\}$.

...

L5. *Teremos $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$*

L3. *Como não há elementos não-visitados em $\mathcal{P}(S)$, terminamos.*

Exemplo de Algoritmo Justificado por Poset

Posets que tenham um elemento mínimo (ou um elemento máximo) são fundamentais para diversas aplicações e algoritmos.

Exemplo

Dado um conjunto S, calcular o seu conjunto das partes $\mathcal{P}(S)$.

1. *Inicialize o conjunto $\mathcal{P}(S)$ fazendo $\mathcal{P}(S) = \emptyset$;*
2. *Inclua $\emptyset$ em $\mathcal{P}(S)$;*
3. *Para cada elemento S' de $\mathcal{P}(S)$ não visitado, faça:*
4. *Para cada $x \in S$, se $S' \cup \{x\} \notin \mathcal{P}(S)$, inclua $S' \cup \{x\}$ em $\mathcal{P}(S)$*
5. *Marque S' como visitado*

Esse algoritmo funciona porque $(\mathcal{P}(\mathcal{S}), \subseteq)$ é um poset com $\emptyset$ como elemento mínimo, qualquer que seja o conjunto S.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Definições Alternativas p/ Elementos Minimais

Definição (Elementos Minimais de um Poset)

*Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é **minimal** se e somente se não existe nenhum elemento $b \neq a$ em S tal que $b \preccurlyeq a$.*

Definição (Elementos Minimais de um Poset (Alternativa 1))

*Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é **minimal** se e somente se não existe nenhum elemento b em S tal que $b \prec a$.*

Definição (Elementos Minimais de um Poset (Alternativa 2))

*Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é **minimal** se e somente se para todo elemento $b \neq a$ em S, $b \not\preccurlyeq a$.*

Definição (Elementos Minimais de um Poset (Alternativa 3))

*Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é **minimal** se e somente se para todo $b \in S$, se a e b são comparáveis, então $a \preccurlyeq b$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Definições Alternativas p/ Elementos Maximais

Definição (Elementos Maximais de um Poset)

*Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é **maximal** se e somente se não existe nenhum elemento $b \neq a$ em S tal que $a \preccurlyeq b$.*

Definição (Elementos Maximais de um Poset (Alternativa 1))

*Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é **maximal** se e somente se não existe nenhum elemento b em S tal que $a \prec b$.*

Definição (Elementos Maximais de um Poset (Alternativa 2))

*Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é **maximal** se e somente se para todo elemento $b \neq a$ em S, $a \not\preccurlyeq b$.*

Definição (Elementos Maximais de um Poset (Alternativa 3))

*Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é **maximal** se e somente se para todo $b \in S$, se a e b são comparáveis, então $b \preccurlyeq a$.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Definições Alternativas e Resultados

Teorema (Unicidade do Elemento Mínimo)

O elemento mínimo de $(S, \preccurlyeq)$, caso exista, é único.

Prova

1. *Seja $(S, \preccurlyeq)$ um poset qualquer. (Instanciação)*
2. *Por contradição, suponha que $(S, \preccurlyeq)$ tem ao menos dois elementos mínimos (distintos, portanto). Vamos chamá-los de a e b.*
3. *Por definição, se a é um elemento mínimo de $(S, \preccurlyeq)$, então $a \preccurlyeq x$ para todo $x \in S$. Isso nos permite concluir, em particular, que $a \preccurlyeq b$.*
4. *Similarmente, se b é um elemento mínimo de $(S, \preccurlyeq)$, então $b \preccurlyeq x$ para todo $x \in S$. Isso nos permite concluir, em particular, que $b \preccurlyeq a$.*
5. *Juntando as conclusões acima, concluimos que $a \preccurlyeq b$ e $b \preccurlyeq a$.*
6. *Isso significa que $a = b$, pois $\preccurlyeq$ é anti-simétrica.*
7. *Mas isso contradiz a hipótese de que a e b seriam distintos.*
8. *Portanto, o elemento mínimo de $(S, \preccurlyeq)$, se existir, deve ser único.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Teoremas sobre o Elemento Mínimo

Teorema (Unicidade do Elemento Mínimo)
O elemento mínimo de $(S, \preccurlyeq)$*, caso exista, é único.*

Teorema (Minimalidade do Elemento Mínimo)
O elemento mínimo de $(S, \preccurlyeq)$*, caso exista, é minimal.*

Teorema
Se o poset $(S, \preccurlyeq)$ *tiver <u>um e somente um</u> elemento minimal a, então a é também o elemento mínimo de* $(S, \preccurlyeq)$*.*

Na prática, procuraremos por elementos minimais de posets. Quando houver um único elemento minimal, chamaremos-lhe de mínimo.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Teoremas sobre o Elemento Máximo

Teorema (Unicidade do Elemento Máximo)
O elemento máximo de $(S, \preccurlyeq)$*, caso exista, é único.*

Teorema (Maximalidade do Elemento Máximo)
O elemento máximo de $(S, \preccurlyeq)$*, caso exista, é maximal.*

Teorema
Se o poset $(S, \preccurlyeq)$ *tiver <u>um e somente um</u> elemento maximal a, então a é também o elemento máximo de* $(S, \preccurlyeq)$*.*

Na prática, procuraremos por elementos maximais de posets. Quando houver um único elemento maximal, chamaremos-lhe de máximo.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Considerações Finais

Nesta aula, nós discutimos:

- Intuições sobre como as propriedades de **reflexividade**, **anti-simetria** e **transitividade**, quando juntas, promovem uma ordenação (ao menos parcial) dos elementos de um conjunto
- Elementos **comparáveis** e elementos **incomparáveis** em um poset
- **Ordens Totais** e **Conjuntos Totalmente Ordenados**
- Casos de extremos: elementos **minimais** e **maximais**, **mínimo** e **máximo**

Há muitos conceitos derivados destes que não foram cobertos:

- Conjuntos Bem-Ordenados e Princípio da Boa-Ordenação (Indução)
- Ordem Lexicográfica
- Menor e Maior Limitantes Comuns
- Reticulados e Aritmética de Ponto-Fixo
- Ordenação Topológica e Diagramas de Hasse