Leitura Complementar + Lista de Execícios

SEMANA 11 - Relações de Ordem Parcial

2022.1

Notas de Aula de Matemática Discreta

Prof. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

Este documento traz uma lista de exercícios referentes aos tópicos da SEMANA 11. É recomendado que você faça todos os exercícios e tire suas dúvidas antes das aulas da semana seguinte.

1 Instruções Preliminares

Obs.: "prove", "demonstre" e "mostre" são sinônimos. Nos exercícios abaixo, em cada um dos casos, você deve oferecer um demonstração (uma prova!) do que estiver sendo afirmado.

Quando a resposta envolver números, todos os cálculos para chegar a estes números devem ser apresentados. Busque fornecer respostas que deixem claro seu raciocínio, exibindo e justificando todos os passos executados. Lembre-se que a sua resposta será lida por alguém no futuro e escreva suas respostas pensando no leitor. Idealmente, as suas respostas devem permitir que qualquer colega da turma possa identificar claramente quais foram os passos que você fez e porquê.

É muito importante que você suplemente esta lista com exercícios do livro conforme sua necessidade. Se tiver facilidade com os tópicos, poucos exercícios bastarão para compreendê-los; se tiver dificuldades, o caminho será reforçar a leitura do capítulo e resolver mais exercícios.

2 Leitura do Livro

Leia atentamente a Seção 8.6 do Rosen e verifique a lista de exercícios do livro por complementos a estes. Conforme a sua necessidade, revise os conteúdos da unidade de técnicas de demonstração de teoremas e os tópicos de divisibilidade.

3 Leitura Complementar: Demonstrações de Enunciados com Relações de Ordem Parcial

A definição de relação de *ordem parcial* é baseada em três das quatro propriedades de relações binárias que estudamos: reflexividade, anti-simetria e transitividade. Como tal, para confirmar (ou provar) que uma relação binária $R \subseteq A \times A$ é uma ordem parcial, torna-se necessário verificar (ou provar) que a relação satisfaz às três propriedades necessárias, uma por vez. Uma prova desse tipo será necessariamente feita em três partes, pois você precisará provar cada uma destas três afirmações isoladamente:

1. R é reflexiva
2. R é anti-simétrica
3. R é transitiva

A leitura da SEMANA 10 exemplificou provas e contra-provas para as propriedades da relação de divisibilidade, que é uma relação de ordem parcial. Desta forma, recomenda-se apenas revisar esta leitura, com atenção especial às demonstrações para cada propriedade.

No contexto de relações de ordem parcial, a propriedade de simetria é irrelevante, de forma que não precisamos nos preocupar em verificar se R a satisfaz.

A seguir, discutiremos brevemente como detectar e provar a existência (ou não) de elementos maximais, minimais, máximo e mínimo. Para isso, retomemos o exemplo da relação de divisibilidade, discutido na leitura da SEMANA 10. Trataremos então da relação R (o conjunto, portanto) dos pares (x, y) em que x divide y. Nós a descrevemos de forma mais compacta para facilitar a avaliação:

$$R \subseteq \mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^*, \text{ com } R = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\},$$

onde $\mathbb{Z}_+^*$ é o conjunto dos inteiros positivos. Esse conjunto foi escolhido como domínio de R para simplificar o exemplo e garantir que ao menos três propriedades seriam satisfeitas. Alterações no domínio da relação podem comprometer isso com facilidade. Por exemplo, R deixará de ser uma ordem parcial se usarmos $\mathbb{Z}^*$, que é o conjunto dos inteiros sem o zero, como domínio. Deixo como exercício descobrir qual propriedade será perdida com essa mudança.

3.1 Encontrando Elementos Maximais e Minimais

Quando uma relação binária $R \subseteq A \times A$ for uma relação de ordem parcial, torna-se possível a existência de elementos maximais e minimais. A forma mais simples de detectar a sua existência ou quem eles são demanda compreender quem seriam os pares da relação, parecido com o tipo de interpretação que precisamos fazer antes de começar a avaliar quais propriedades ela satisfaz.

Neste ponto, devemos lembrar que cada par $(x, y) \in R$ descreve a ordem em que os elementos x, y de $x\mathbb{Z}_+^*$ estariam ordenados por R. Devemos lembrar também que a expressão "$x \preccurlyeq y$" que aparece em inúmeras definições introduzidas nessa semana deve ser compreendida como sinônimo de $(x, y) \in R$, sendo R uma ordem parcial. No caso do poset $(\mathbb{Z}_+^*, R)$, um elemento $x \in \mathbb{Z}_+^*$ antecederá $y \in \mathbb{Z}_+^*$ se e somente se x divide y, pois esta é a condição para termos $(x, y) \in R$. Esta compreensão nos permite usar o conceito da relação para procurar candidatos a elementos maximais e minimais de $(\mathbb{Z}_+^*, R)$.

Começaremos buscando elementos minimais desta relação e eu vou propor um exercício mental para isso. É interessante que você siga os passos e faça realmente o exercício, mentalmente, enquanto eu descreverei os passos de forma abstrata.

– Escolha um inteiro positivo, à vontade. Nos próximos passos eu o chamarei de m, pois desconheço o número que você escolheu, então substitua m em cada passo pelo número escolhido.

– Pergunte-se: existe algum inteiro positivo $n \neq m$ tal que $n \mid m$?
  - Se a resposta é negativa, você encontrou um elemento minimal de $(\mathbb{Z}_+^*, R)$.
  - Caso contrário, mantenha o loop: conclua que m não é minimal e repita a pergunta acima procurando um inteiro positivo diferente de n que o divida.

No nosso exemplo, a resposta para a pergunta realizada só será negativa quando você chegar em 1, que é o único elemento minimal em $(\mathbb{Z}_+^*, R)$. É importante destacar que esse procedimento pode ficar preso no loop quando for usado para avaliar outras relações, o que significará a ausência de elementos minimais. Infelizmente, como ocorre nas práticas de programação, a detecção de um loop infinito demanda observação e não tem como ser feita de forma mecânica.

Destaco ainda que esse procedimento é extremamente simples em relação às possibilidades de discussão destes conceitos, servindo apenas como base para uma análise mais profunda da situação. O motivo é que ele encontrará apenas um dos elementos minimais do poset que estivermos avaliando, caso eles existam, mas um poset pode ter zero, um ou múltiplos elementos minimais. Reiniciar o procedimento com outros elementos do domínio pode nos levar a outros minimais do poset, mas pode acabar nos levando ao mesmo também. Isto não significa que não existam outros, de forma que o procedimento não serve para afirmar exatamente quantos nem quais seriam os elementos minimais de um poset. No máximo, serve para mostrar que *existe pelo menos um* um elemento minimal no poset. Com isso, o procedimento que propus pode auxiliar uma prova de existência para elementos minimais e nada mais. Ir além disso requer abstrair o que observarmos durante a execução destes passos.

O exercício acima foi proposto de forma contextualizada na relação que temos discutido e precisará ser adaptado para cada relação de ordem parcial que desejarmos avaliar. Podemos generalizá-lo de forma simples com pseudo-código:

Algoritmo: Busca por Elemento Minimal
Entrada: um poset (A, R)
Saída: um elemento minimal de (A, R), caso existam elementos minimais em (A, R)

1. Escolha x em A aleatoriamente.
2. Enquanto existir $y \neq x$ tal que (y, x) em R, faça
3. $\quad x = y$
4. Retorne x.

Algo muito similar pode ser proposto para buscar elementos maximais em um poset, caso existam:

Algoritmo: Busca por Elemento Maximal
Entrada: um poset (A, R)
Saída: um elemento maximal de (A, R), caso existam elementos minimais em (A, R)

1. Escolha x em A aleatoriamente.
2. Enquanto existir $y \neq x$ tal que (x, y) em R, faça
3. $\quad x = y$
4. Retorne x.

Observe que a única diferença entre os dois códigos é a ordem em que as variáveis x e y aparecem no par ordenado processado na **Linha 2**. De fato, o exercício para procurar elementos maximais de uma relação é idêntico, mudando-se apenas que invés de nós procurarmos $y \neq x$ em A que *antecede* x no poset, procuraremos $y \neq x$ em A (igual até aqui) que *sucede* x no poset. O motivo para tamanha semelhança é que os elementos minimais de um poset não têm antecessores, assim como os elementos maximais de um poset não têm sucessores.

Exemplo 1 *Executaremos ambos os algoritmos para procurar elementos minimais e maximais de* $(\mathbb{Z}_+^*, R)$.

O algoritmo Busca por Elemento Minimal*, sendo inicializado com o poset* $(\mathbb{Z}_+^*, R)$ *e* $x = 6$*, executará três iterações no laço principal:*

- *Como o par* $(2, 6) \in R$*, atualizamos a variável* x *fazendo* $x = 2$*;*
- *Como o par* $(1, 2) \in R$*, atualizamos a variável* x *fazendo* $x = 1$*;*
- *Como não há nenhum par* $(y, 1) \in R$ *com* $y \neq 1$*, saímos do laço.*

Neste ponto, o algoritmo se encerra, retornando 1 *como resultado. Isto indica que* 1 *é um dos elementos minimais de* $(\mathbb{Z}_+^*, R)$. ***Obs.:*** *Nós sabemos que* 1 *será o único elemento minimal deste poset, mas o algoritmo não é capaz de nos dizer isso.*

Observe que os números que usei acimam são exemplos. Nós também temos o par $(3, 6)$ *em* R *e o algoritmo não especifica qual par deverá ser usado em cada iteração do laço. Tudo que importa é a existência de algum par* (y, x) *em* R *com* $y \neq x$*, então podemos usar o primeiro que encontrarmos. Idependente dos pares que escolhermos em cada iteração, o algoritmo encontrará um dos elementos minimais do poset, caso algum exista.*

O algoritmo Busca por Elemento Minimal*, sendo inicializado com o poset* $(\mathbb{Z}_+^*, R)$ *e* $x = 6$*, também executará iterações no laço principal:*

- *Como o par* $(6, 12) \in R$*, atualizamos a variável* x *fazendo* $x = 12$*;*
- *Como o par* $(12, 24) \in R$*, atualizamos a variável* x *fazendo* $x = 24$*;*
- *Como o par* $(24, 48) \in R$*, atualizamos a variável* x *fazendo* $x = 48$*;*
- *Como o par* $(48, 96) \in R$*, atualizamos a variável* x *fazendo* $x = 96$*;*
- *...*

Desta vez, ficaremos presos no laço principal, sem saída. É possível observar que o valor de y, em cada iteração do loop, é sempre maior que o valor de x, já que nesse caso estaremos procurando por múltiplos de x em cada iteração. Como o conjunto dos inteiros positivos é infinito, isso garantirá que o algoritmo permanecerá em loop, o que significa que $(\mathbb{Z}_+^*, R)$ não tem elementos maximais.

Novamente, os números que usei acima são apenas exemplos. O algoritmo terá o mesmo comportamento, independente de quais pares sejam escolhidos a cada iteração. O que importará nesse caso é o cuidado ao avaliar se os valores assumidos pela variável x vão ou não convergir para algum elemento no domínio da relação discutida.

3.2 Provando a Existência de Elementos Maximais ou Minimais em um Poset

O caminho principal para este objetivo é usar um prova construtiva de existência: deve-se mostrar um exemplo de elemento maximal/minimal, de acordo com o que se está buscando. Os algoritmos fornecidos nesta leitura podem ajudar a encontrar um destes exemplos, mas logo após precisaremos *garantir* que o elemento encontrado realmente é maximal ou minimal. Lembre-se: não basta apontarmos um exemplo, é necessário justificar que ele realmente satisfaz a condição do enunciado de existência. É sobre esse tipo de prova que trataremos a seguir.

3.3 Provando que um Elemento do Poset é Maximal ou Minimal

Na vídeo-aula da semana, fornecemos quatro formas diferentes de escrever a definição para elementos maximais e minimais. A razão para isso é que alguns dos formatos nos facilitam compreender os conceitos e outros formatos nos facilitarão fazer demonstrações sobre eles. As penúltimas definições que apontei em cada caso (Alternativa 2) são as que mais se aproximam dos formatos dos teoremas que temos demonstrado semanalmente, então nos concentraremos em usar estas.

Definição 1 (Elementos Minimais de um Poset (Alternativa 2))
Um elemento x do poset $(A, \preccurlyeq)$ é minimal se e somente se
***para todo elemento** $y \neq x$ **em** A**,** $y \not\prec x$.*

Definição 2 (Elementos Maximais de um Poset (Alternativa 2))
Um elemento x do poset $(A, \preccurlyeq)$ é maximal se e somente se
***para todo elemento** $y \neq x$ **em** A**,** $x \not\prec y$.*

Para utilizar estas definições, é necessário compreender bem o que significam as expressões $x \prec y$ e $x \not\prec y$ no contexto da relação que queremos avaliar. Lembre-se que no contexto de relações de ordem parcial (apenas), "$x \prec y$" é um atalho para dizermos que "$(x, y) \in R$" quando x e y tiverem valores diferentes. Da mesma forma, "$x \not\prec y$" é um atalho para dizermos que "$(x, y) \notin R$", também na condição de que x e y tenham valores diferentes. Desta forma, provar que um elemento x do poset (A, R) é minimal significa mostrar que **para todo** $y \neq x$**,** $(y, x) \notin R$. Organizando mais um pouco, podemos revelar que a estrutura dessa afirmação é uma generalização de condicional:

Seja R uma ordem parcial em A, um $x \in A$ é minimal em (A, R) se e somente se

Para todo y **em** A**, se** $y \neq x$**, então** $(y, x) \notin R$.

Proposição 1 *O* 1 *é minimal em* $(\mathbb{Z}_+^*, R)$.

Discussão: Pela definição "Alternativa 2" de elementos minimais em um poset, provar a proposição acima significa provarmos que:

para todo elemento $y \neq 1$ **em** $\mathbb{Z}_+^*$**,** $y \not\prec 1$.

Isto é o mesmo que provarmos que:

Para todo y **em** $\mathbb{Z}_+^*$**, se** $y \neq 1$**, então** $(y, 1) \notin R$.

E se usarmos a definição da relação R, obteremos o formato mais detalhado para a prova:

Para todo y **em** $\mathbb{Z}_+^*$**, se** $y \neq 1$**, então** y **não divide** 1.

Prova 1 *Para mostrar que* 1 *é minimal em* $(\mathbb{Z}_+^*, R)$*, provaremos que para todo* y *em* $\mathbb{Z}_+^*$*, se* $y \neq 1$*, então* y *não divide* 1.

1. *Seja* a *um inteiro positivo qualquer.*
2. *Por contradição, suponha que* $a \neq 1$ *e que* $a|1$.
3. *Partindo de que* $a|1$*, pela definição de divisibilidade, existe um inteiro* k *tal que* $1 = ak$*. Neste ponto, podemos isolar* k*, obtendo que* $\frac{1}{a} = k$.
4. *Partindo da primeira suposição, de que* $a \neq 1$*, obtermos que* $a > 1$*, pois* a *é um inteiro positivo. Isso nos permite concluir que* $\frac{1}{a}$ *será um número entre* 0 *e* 1*, não inteiro, pois o denominador desta fração é maior que o numerador e ambos são positivos.*
5. *Isso contradiz a afirmação de que* k *é inteiro, concluindo a prova do condicional.*
6. *Portanto, se* $a \neq 1$*,* $a \nmid 1$.

O caminho para provas de minimalidade/maximalidade de elementos de um poset vão variar bastante, mas o formato do enunciado pode sempre ser uniformizado como uma generalização de condicional, como fizemos. Vale também dizer que qualquer uma das três técnicas de prova de condicionais pode ser aplicada para escrever demonstrações corretas nesses enunciados, mas é comum que a técnica de *prova por contradição* facilite um pouco o trabalho. Isso vai depender do que significará a condição de que "$(x, y) \notin R$", que aparece no lado direito do condicional que precisamos provar. Neste exemplo, isso nos dá uma afirmação de não-divisibilidade: "$y \nmid 1$". Como discutimos algumas vezes, costuma ser difícil trabalharmos com a negativa das afirmações de divisibilidade. A técnica de prova por contradição nos permitirá contornar essa situação: ela nos pede para supor que $y \mid 1$, invés de pedir para derivarmos o contrário disso, como faria a prova direta.

A discussão para provas sobre a maximalidade de um elemento do poset é idêntica a esta, considerando que a diferença entre as definições é apenas nas posições das variáveis. Estruturalmente, as condições dos enunciados são idênticas.

3.4 Provando a Não-Existência de Elementos Maximais ou Minimais num Poset

Anteriormente comentei o seguinte nesta leitura: os elementos minimais de um poset não têm antecessores, assim como os elementos maximais de um poset não têm sucessores. Com base nessa compreensão, o que teremos em um poset que não apresente, por exemplo, elementos minimais? Exatamente o oposto: todos os elementos do poset terão antecessores. Analogamente, se um poset não tiver elementos maximais, isso significará que todos os seus elementos têm sucessores.

Desta forma, avaliaremos o que é necessário para provar o seguinte enunciado:

Proposição 2 $(\mathbb{Z}_+^*, R)$ *não tem elementos maximais.*

Com base no que discutimos, o que precisamos provar é que todo $x \in \mathbb{Z}_+^*$ tem pelo menos um sucessor. Reorganizando a afirmação, deveremos provar que

para todo $x \in \mathbb{Z}_+^*$, existe um $y \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $(x, y) \in R$.

A prova desse tipo de enunciado pede, portanto, uma prova de generalização combinada com uma prova de existência. A parte da prova de existência com frequência será construtiva, mas isso não significa que usará exemplos concretos. Invez disso, os elementos que garantirão essa parte da prova devem ser encontrados *em função* do inteiro positivo que teremos instanciado na primeira parte, cujo valor será desconhecido ao longo da prova.

Prova 2

1. *Seja a um inteiro positivo qualquer.*
2. *O objetivo é provar que existe ao menos um $b \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $(a, b) \in R$. Pela definição de R, isso significa mostrar que* existe ao menos um $b \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $a \mid b$.
3. *Fazendo $b = 2a$, confirmaremos isso, visto que $a \mid 2a$ para todo inteiro positivo a: existe um inteiro k tal que $2a = ak$, bastando para isso fazer $k = 2$.*

Mais uma vez, reforço que uma parte significativa destas provas é completamente contextual, baseado na relação discutida e conceitos associados à característica dos seus pares ordenados. O que podemos considerar como padrão é o formato dos enunciados, que sempre serão de generalização sobre a existência de sucessores, no caso de enunciados como este do exemplo: de não-existência envolvendo maximalidade.

Os enunciados e provas de não-existência sobre elementos minimais são completamente análogos, observando-se apenas a mudança entre buscar sucessores ou antecessores na ordem parcial.

3.5 Transição: Enunciados Sobre Elemento Máximo ou Mínimo em um Poset

A discussão desta parte há de ser mais rápida, pois o elemento máximo de um poset, quando existir, será, necessariamente, o único elemento maximal nesse poset. O mesmo vale para o elemento mínimo do poset: se existir, ele será o único elemento minimal do poset. Por causa disso, se um poset tiver elemento máximo, o algoritmo *Busca por Elemento Maximal* o retornará como resultado. Reforço que o algoritmo não é capaz de detectar se o seu resultado é ou não o máximo, pois ele não exclui a possibilidade de existirem outros elementos minimais além deste que terá retornado. Em contraste, se o algoritmo não parar, poderemos dizer que não existe elemento máximo para o poset da entrada, pois não é possível ter um máximo se não houverem elementos maximais no poset. Como antes, a execução destes algoritmos pode ajudar a entender onde estariam e se existem elementos extremais e extremos num poset, mas isso não serve como prova, pois depende de observação, algo que não tem como ser fornecido mecanicamente a outras pessoas. O algoritmo não detecta a existência nem a não-existência desses extremos.

Da mesma forma que ocorre para provarmos a existência de maximais ou minimais em um poset, o melhor caminho para provarmos a existência do máximo ou mínimo é encontrarmos um candidato e provarmos que ele realmente satisfaz à definição adequada. Como fazer isso será discutido a seguir.

3.6 Provando que um Elemento do Poset é Máximo ou Mínimo

Comecemos discutindo o que é necessário para provarmos que um elemento x do poset (A, R) é mínimo. Para isso, observaremos a definição que compartilhamos para esse conceito.

Definição 3 (Elemento Mínimo de um Poset) *Um elemento a do poset $(S, \preccurlyeq)$ é chamado de* menor elemento *ou* elemento mínimo *se e somente se $a \preccurlyeq b$ para todo $b \in S$.*

Observe a condição: pede-se que $a \preccurlyeq b$ para todo $b \in S$. Novamente, temos um enunciado de generalização.

No contexto do nosso exemplo com a relação de divisibilidade, podemos usar essa definição para entender melhor o que precisa ser feito para provarmos que

Proposição 3 1 *é o elemento mínimo de $(\mathbb{Z}_+^*, R)$.*

No contexto de R, a expressão "$a \preccurlyeq b$" nos diz que "$a \mid b$". Combinando com a definição de elemento mínimo de um poset, precisaremos provar que

Para todo a inteiro positivo, 1 divide a.

Este enunciado já apareceu anteriormente nas nossas listas de exercícios, mesmo sem mencionar os conceitos de relações de ordem parcial. Isso serve para mostrar que nós temos provado enunciados como esse desde cedo na disciplina, cabendo apenas um pouco de interpretação dos conceitos para sabermos o que deve ser provado antes de iniciar a escrita da prova. Considerando a simplicidade do enunciado após reorganizarmos sua escrita, a prova deste é deixada como exercício.

Prova 3 *Deixada como exercício.*

No caso geral, para provarmos que a é o elemento mínimo em um poset (A, R), precisaremos mostrar que para todo $b \in A$, $(a, b) \in R$. Este é o padrão que observamos nesse tipo de enunciados. Analogamente, para provarmos que a é o elemento *máximo* no poset (A, R), precisaremos mostrar que para todo $b \in A$, $(b, a) \in R$. Repare como a única diferença, mais uma vez, é na posição das variáveis quanto aos pares da relação.

Alternativamente, podemos mostrar que x é o mínimo de (A, R) provando que:

1. x é minimal em (A, R), e
2. não existem outros minimais além de x em (A, R).

Este caminho é derivado de um teorema que apresentamos na vídeo-aula da semana e será mais útil quando já tivermos uma prova de que x é minimal em (A, R), restando provar apenas a segunda parte. Esse é o caso para o nosso exemplo, pois provamos anteriormente que 1 é minimal em $(\mathbb{Z}_+^*, R)$. Desta forma, provaremos agora que

Proposição 4 *Para todo $x \in \mathbb{Z}_+^*$, se $x \neq 1$, então x não é minimal em $(\mathbb{Z}_+^*, R)$.*

Prova 4 *Dizermos que um elemento x de $\mathbb{Z}_+^*$* não é minimal *em $(\mathbb{Z}_+^*, R)$ indica que x deve ter um antecessor. Portanto, mostraremos, para todo $x \in \mathbb{Z}_+^*$, que se $x \neq 1$, então x tem um antecessor em $(\mathbb{Z}_+^*, R)$.*

1. *Seja a um inteiro positivo qualquer.*
2. *Por prova direta, suponha que $a \neq 1$.*
3. *Pela propriedade de elemento neutro da multiplicação, obtemos que $1.a = a$.*
4. *Pela definição de divisibilidade, como $1 \neq 0$ e a é inteiro, concluímos que $1 \mid a$.*
5. *Isso significa que a tem ao menos um antecessor em $(\mathbb{Z}_+^*, R)$.*
6. *Portanto, a não é minimal em $(\mathbb{Z}_+^*, R)$.*

Por acaso, o próprio número 1 apareceu nesta prova, mas nem sempre poderemos usar diretamente o elemento que tivermos como candidato a mínimo do poset nestes passos.

As situações em que mostraríamos que um elemento x do poset (A, R) é máximo são novamente análogas ao que discutimos para a prova de um mínimo e vice-versa.

3.7 Provando a Não-Existência do Máximo ou Mínimo em um Poset

Enunciados de não-existência podem sempre ser convertidos em uma generalização. Intuitivamente, provar que não existe elemento máximo em um poset significa provar que "todo elemento do poset *não é* máximo", mas essa transição, apenas, não ajuda em muita coisa. O motivo é que há mais de um motivo possível para isso acontecer. No caso mais simples, esse elemento não é maximal no poset, mas isso não exclui a possibilidade de existirem maximais e nem mesmo de outro elemento ser máximo. Alternativamente, esse elemento é maximal no poset, mas não é o único. É possível trabalhar esses cenários usando prova por casos, mas não há garantia de que cada um será simples de confirmar.

Ao invés de reescrevermos o enunciado como uma generalização, torna-se melhor entendermos quais são as situações em que um poset não terá elemento máximo ou mínimo. Esta compreensão é derivada de teoremas que mencionamos um pouco mais cedo nessa leitura: o elemento máximo (respectivamente o elemento mínimo) de um poset, quando existir, será, necessariamente, o único elemento maximal (respectivamente elemento minimal) desse poset. Como consequência do teorema, há apenas duas situações em que um poset (A, R) não terá elemento máximo:

1. (A, R) não tem elementos maximais, ou
2. (A, R) tem dois ou mais elementos maximais.

Analogamente, o poset (A, R) não terá elemento mínimo se ele não tiver elementos minimais ou se tiver dois ou mais elementos minimais.

Com base nisso, provar a não-existência do elemento máximo/mínimo de um poset dependerá de qual destas duas situações teremos. Discutimos anteriormente sobre como provar que um poset não tem elementos maximais/minimais quando esse for o caso. Na ocasião, provamos que $(\mathbb{Z}_+^*, R)$ não tem elementos maximais (Proposição 2). No segundo caso, estaremos trocando um enunciado de não-existência por outro de existência: precisaremos mostrar que existem dois elementos do poset que são maximais/minimais. O procedimento será idêntico ao que discutimos sobre a prova de existência de elementos maximais e minimais, com a única diferença de que precisaremos provar isso de forma independente para dois elementos distintos do poset.

4 Exercícios

Exercício 1. Quais destas relações em $\{0, 1, 2, 3\}$ são ordens parciais? Em cada caso, se a relação não for uma ordem parcial, indique quais são as propriedades que lhe faltam e justifique.

(a) $R_1 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
(b) $R_2 = \{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
(c) $R_3 = \{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
(d) $R_4 = \{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$
(e) $R_5 = \{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
(f) $R_6 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$

Exercício 2. Para cada item do **Exercício 1** que seja uma Ordem Parcial, responda:

(a) Quantos elementos minimais a relação tem e quem são eles?
(b) Quantos elementos maximais a relação tem e quem são eles?
(c) A relação tem um elemento mínimo? Qual seria?
(d) A relação tem um elemento máximo? Qual seria?

Exercício 3. Prove que $(\mathbb{N}^*, |)$ é um poset. Para este propósito, você deve provar, portanto, que a relação de divisibilidade é reflexiva, anti-simétrica e transitiva no conjunto dos inteiros positivos. Os enunciados dos itens abaixo vão facilitar-lhe a fase de interpretação dos enunciados:

(a) Prove que "Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $n \mid n$."
(b) Prove que "Para todo $n, m \in \mathbb{N}^*$, se $n \mid m$ e $m \mid n$, então $n = m$."
(c) Prove que "Para todo $n, m, p \in \mathbb{N}^*$, se $n \mid m$ e $m \mid p$, então $n \mid p$."

Exercício 4. Conforme exploramos anteriormente, o conceito de congruência modular (uma vez fixado seu módulo) é uma relação binária sobre os inteiros. Por exemplo, escrevemos $x \equiv y \ (mod\ 2)$ para afirmar que os inteiros x e y são congruentes no módulo 2. Prove que a relação de *congruência no módulo 2* não é uma ordem parcial.

Dica: Por definição, uma relação será uma ordem parcial precisa ser reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Mostrar que uma dada relação não é ordem parcial significa mostrar que ao menos uma destas três propriedades não é satisfeita pela relação.

Exercício 5. Abaixo, você encontrará várias relações de ordem parcial.

$R_1 \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}^2$, tal que $R_1 = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\}$

$R_2 \subseteq \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}^2$, tal que $R_2 = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\}$

$R_3 \subseteq \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}^2$, tal que $R_3 = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\}$

$R_4 \subseteq \mathbb{N}^2$, tal que $R_4 = \{(x, y) \mid x - y \in \mathbb{N}\}$

$R_5 \subseteq \mathbb{N}^2$, tal que $R_5 = \{(x, y) \mid y = x^z \text{ para algum } z \in \mathbb{N}^*\}$

Para cada uma destas relações responda:

(a) A relação é *total*?
(b) A relação apresenta elementos minimais? Em caso positivo, quem são eles?
(c) A relação apresenta elementos maximais? Em caso positivo, quem são eles?
(d) A relação apresenta um elemento mínimo? Em caso positivo, quem é ele?
(e) A relação apresenta um elemento máximo? Em caso positivo, quem é ele?

Exercício 6. Prove que a relação R_5 definida no **Exercício 5** é uma ordem parcial.

Dica: Procure semelhanças entre R_5 e a relação de divisibilidade sobre $\mathbb{N}^*$.