Trabalho

Matemática Discreta
Prof. Lucas Ismaily
1º Semestre de 2022

Aluno: [ ] Matrícula: [ ]

Informações importantes:

- O trabalho vale 10 pontos;
- Caso não saiba responder uma questão, se você escrever "não sei" ganhará 10% da questão. Por exemplo, se uma questão vale 2 pontos, você receberá $0,2$ décimos;
- **Trabalho individual**. Sejam honestos com vocês e comigo, por favor. Se for detectado qualquer tipo de fraude, os envolvidos receberão nota zero. Note: os envolvidos receberão zero, não importa se você foi a origem ou o destino, ambos receberão nota zero.
- **O prazo de entrega é 07/12/2022**. O trabalho poderá ser entregue em versão digital pelo SIPPA ou manuscrito.

Questões:

1. (1,0 ponto) Suponha que a e b sejam números inteiros ímpares, com $a \neq b$. Mostre que há um único número inteiro c, tal que $|a - c| = |b - c|$.
2. (2,0 pontos) Faça o que se pede.
   (a) Encontre uma fórmula para $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}$ examinando os valores dessa expressão para pequenos valores de n.
   (b) Demonstre a fórmula que você conjecturou no item (a).
3. (1,0 ponto) Mostre que se a, b, k e m são números inteiros, tal que $k \geq 1$, $m \geq 2$ e $a \equiv b(\text{mod } m)$, então $a^k \equiv b^k(\text{mod } m)$ sempre que k for um número inteiro positivo.
4. (1,0 ponto) Mostre que se $2^n - 1$ é primo, então n é primo. **Dica**: Use a identidade $2^{ab} - 1 = (2^a - 1).(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + ... + 2^a + 1)$.

5. (1,0 ponto) A sequência de Fibonacci pode ser definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \geq 3 \end{aligned}$$

   Mostre que a sequência de Fibonacci satisfaz à seguinte identidade: $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$. Dica: Substitua cada termo f_i por $f_{i+2} - f_{i+1}$.

6. (2,0 pontos) Suponha que $P(n)$ seja uma função proposicional. Determine se para cada número inteiro positivo n, a proposição $P(n)$ deve ser verdadeira, e justifique sua resposta, se

   (a) $P(1)$ for verdadeira; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+2)$ é verdadeira.

   (b) $P(1)$ e $P(2)$ forem verdadeiros; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ e $P(n+1)$ forem verdadeiras, então $P(n+2)$ é verdadeira.

   (c) $P(1)$ for verdadeira; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(2n)$ é verdadeira.

   (d) $P(1)$ for verdadeira; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.

7. (1,0 ponto) Defina três relações de equivalência no conjunto de prédios de um *campus* universitário. Determine as classes de equivalência para cada uma dessas relações de equivalência.

8. (1,0 ponto) Suponha que uma relação R em A seja irreflexiva. A relação R^2 é necessariamente irreflexiva? Dê uma razão para sua resposta. Uma relação R em A é *irreflexiva* se não contém pares da forma (a, a), onde $a \in A$.