Indução Matemática

QXD0008 – Matemática Discreta

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily
ismailybf@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2022

Tópicos desta aula

Nesta apresentação:

- O que é a Indução Matemática
- Por que a Indução Matemática é um método de demonstração válido
- Como usar a Indução Matemática

Referências para esta aula

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Seção 4.1** do livro: Matemática Discreta e suas Aplicações.
  Autor: Kenneth H. Rosen. Sexta Edição.

- **Seção 5.1** do livro: Discrete Mathematics and Its Applications.
  Author: Kenneth H. Rosen. Seventh Edition. **(English version)**

Introdução

Que tipo de teoremas podemos provar usando Indução Matemática?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Indução matemática pode ser usada para provar enunciados que afirmam que uma determinada função proposicional $P(n)$ é verdadeira para todos os naturais ou inteiros positivos.

$$\forall n P(n)$$

Que tipo de teoremas podemos provar usando Indução Matemática?

- Indução matemática pode ser usada para provar enunciados que afirmam que uma determinada função proposicional $P(n)$ é verdadeira para todos os naturais ou inteiros positivos.

$$\forall n P(n)$$

- Lembre-se: em lógica, uma função proposicional $P(n)$ é uma afirmação expressa de uma forma que assumiria o valor de verdadeiro ou falso, exceto que dentro da sentença existe uma variável n que não está definida, o que deixa o valor-verdade da afirmação indeterminado.

Motivação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Queremos provar que, para todo inteiro positivo n:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Motivação

- Queremos provar que, para todo inteiro positivo n:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Seja $P(n)$ o predicado $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Motivação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Queremos provar que, para todo inteiro positivo n:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Seja $P(n)$ o predicado $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Observamos que $P(1)$, $P(2)$ e $P(3)$ valem:
    - $P(1): \; 1 = \frac{1(1+1)}{2}$
    - $P(2): \; 1 + 2 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$
    - $P(3): \; 1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$

Motivação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Queremos provar que, para todo inteiro positivo n:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Seja $P(n)$ o predicado $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Observamos que $P(1)$, $P(2)$ e $P(3)$ valem:
  - $P(1): \ 1 = \frac{1(1+1)}{2}$
  - $P(2): \ 1 + 2 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$
  - $P(3): \ 1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$
- **Conjetura:** $\forall n \in \mathbb{Z}^+, \ P(n)$.

Provando $P(4)$ usando $P(3)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

$P(n)$ é o predicado $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Queremos provar $P(4)$, ou seja, $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$

Provando $P(4)$ usando $P(3)$

$P(n)$ é o predicado $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Queremos provar $P(4)$, ou seja, $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$
- Note que o somatório $1 + 2 + 3 + 4$ contém o somatório $1 + 2 + 3$ do predicado $P(3)$.

Provando $P(4)$ usando $P(3)$

$P(n)$ é o predicado $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Queremos provar $P(4)$, ou seja, $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$
- Note que o somatório $1 + 2 + 3 + 4$ contém o somatório $1 + 2 + 3$ do predicado $P(3)$.
- Se por um momento, supormos que $P(3)$ é verdadeiro, podemos substituir $1 + 2 + 3$ pelo valor $\frac{3 \cdot 4}{2}$ no somatório $1 + 2 + 3 + 4$:

Provando $P(4)$ usando $P(3)$

Universidade Federal do Ceará

$P(n)$ é o predicado $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Queremos provar $P(4)$, ou seja, $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$
- Note que o somatório $1 + 2 + 3 + 4$ contém o somatório $1 + 2 + 3$ do predicado $P(3)$.
- Se por um momento, supormos que $P(3)$ é verdadeiro, podemos substituir $1 + 2 + 3$ pelo valor $\frac{3 \cdot 4}{2}$ no somatório $1 + 2 + 3 + 4$:

$$(1 + 2 + 3) + 4 =$$

Provando $P(4)$ usando $P(3)$

$P(n)$ é o predicado $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Queremos provar $P(4)$, ou seja, $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$
- Note que o somatório $1 + 2 + 3 + 4$ contém o somatório $1 + 2 + 3$ do predicado $P(3)$.
- Se por um momento, supormos que $P(3)$ é verdadeiro, podemos substituir $1 + 2 + 3$ pelo valor $\frac{3 \cdot 4}{2}$ no somatório $1 + 2 + 3 + 4$:

$$(1 + 2 + 3) + 4 = \frac{3 \cdot 4}{2} + 4 =$$

Provando $P(4)$ usando $P(3)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

$P(n)$ é o predicado $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Queremos provar $P(4)$, ou seja, $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$
- Note que o somatório $1 + 2 + 3 + 4$ contém o somatório $1 + 2 + 3$ do predicado $P(3)$.
- Se por um momento, supormos que $P(3)$ é verdadeiro, podemos substituir $1 + 2 + 3$ pelo valor $\frac{3 \cdot 4}{2}$ no somatório $1 + 2 + 3 + 4$:

$$(1 + 2 + 3) + 4 = \frac{3 \cdot 4}{2} + 4 = \frac{(3 \cdot 4) + (2 \cdot 4)}{2} =$$

Provando $P(4)$ usando $P(3)$

$P(n)$ é o predicado $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Queremos provar $P(4)$, ou seja, $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$
- Note que o somatório $1 + 2 + 3 + 4$ contém o somatório $1 + 2 + 3$ do predicado $P(3)$.
- Se por um momento, supormos que $P(3)$ é verdadeiro, podemos substituir $1 + 2 + 3$ pelo valor $\frac{3 \cdot 4}{2}$ no somatório $1 + 2 + 3 + 4$:

$$(1 + 2 + 3) + 4 = \frac{3 \cdot 4}{2} + 4 = \frac{(3 \cdot 4) + (2 \cdot 4)}{2} = \frac{4 \cdot (3 + 2)}{2} =$$

Provando $P(4)$ usando $P(3)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

$P(n)$ é o predicado $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Queremos provar $P(4)$, ou seja, $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$
- Note que o somatório $1 + 2 + 3 + 4$ contém o somatório $1 + 2 + 3$ do predicado $P(3)$.
- Se por um momento, supormos que $P(3)$ é verdadeiro, podemos substituir $1 + 2 + 3$ pelo valor $\frac{3 \cdot 4}{2}$ no somatório $1 + 2 + 3 + 4$:

$$(1 + 2 + 3) + 4 = \frac{3 \cdot 4}{2} + 4 = \frac{(3 \cdot 4) + (2 \cdot 4)}{2} = \frac{4 \cdot (3 + 2)}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

Provando $P(4)$ usando $P(3)$

$P(n)$ é o predicado $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Queremos provar $P(4)$, ou seja, $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$
- Note que o somatório $1 + 2 + 3 + 4$ contém o somatório $1 + 2 + 3$ do predicado $P(3)$.
- Se por um momento, supormos que $P(3)$ é verdadeiro, podemos substituir $1 + 2 + 3$ pelo valor $\frac{3 \cdot 4}{2}$ no somatório $1 + 2 + 3 + 4$:

$$(1 + 2 + 3) + 4 = \frac{3 \cdot 4}{2} + 4 = \frac{(3 \cdot 4) + (2 \cdot 4)}{2} = \frac{4 \cdot (3 + 2)}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

- Agora, podemos construir uma prova para $P(4)$ usando o fato de que $P(3)$ é verdadeiro (slide anterior) e que $P(3) \rightarrow P(4)$ é verdadeiro.
  - **Modus Ponens:** $[P(3) \ \wedge \ (P(3) \rightarrow P(4))] \implies P(4)$.

Provando $P(n)$

- Suponha que $P(1)$ é verdadeiro
- Além disso, suponha que $\forall k \geq 1,\ P(k) \rightarrow P(k+1)$
- É possível provar $P(n)$ para outros valores de n maiores que 1?

Provando $P(n)$

- Suponha que $P(1)$ é verdadeiro
- Além disso, suponha que $\forall k \geq 1,\ P(k) \rightarrow P(k+1)$
- É possível provar $P(n)$ para outros valores de n maiores que 1?

1. $P(1)$ [premissa]

Provando $P(n)$

- Suponha que $P(1)$ é verdadeiro
- Além disso, suponha que $\forall k \geq 1,\ P(k) \rightarrow P(k+1)$
- É possível provar $P(n)$ para outros valores de n maiores que 1?

1. $P(1)$ [premissa]
2. $P(1) \rightarrow P(2)$ [premissa]

Provando $P(n)$

- Suponha que $P(1)$ é verdadeiro
- Além disso, suponha que $\forall k \geq 1,\ P(k) \rightarrow P(k+1)$
- É possível provar $P(n)$ para outros valores de n maiores que 1?

1. $P(1)$ [premissa]
2. $P(1) \rightarrow P(2)$ [premissa]
3. $P(2)$ [passos 1, 2 & modus ponens]

Provando $P(n)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Suponha que $P(1)$ é verdadeiro
- Além disso, suponha que $\forall k \geq 1, P(k) \rightarrow P(k+1)$
- É possível provar $P(n)$ para outros valores de n maiores que 1?

1. $P(1)$ [premissa]
2. $P(1) \rightarrow P(2)$ [premissa]
3. $P(2)$ [passos 1, 2 & modus ponens]
4. $P(2) \rightarrow P(3)$ [premissa]

Provando $P(n)$

- Suponha que $P(1)$ é verdadeiro
- Além disso, suponha que $\forall k \geq 1,\ P(k) \rightarrow P(k+1)$
- É possível provar $P(n)$ para outros valores de n maiores que 1?

1. $P(1)$ [premissa]
2. $P(1) \rightarrow P(2)$ [premissa]
3. $P(2)$ [passos 1, 2 & modus ponens]
4. $P(2) \rightarrow P(3)$ [premissa]
5. $P(3)$ [passos 3, 4 & modus ponens]

Provando $P(n)$

- Suponha que $P(1)$ é verdadeiro
- Além disso, suponha que $\forall k \geq 1,\ P(k) \rightarrow P(k+1)$
- É possível provar $P(n)$ para outros valores de n maiores que 1?

1. $P(1)$ [premissa]
2. $P(1) \rightarrow P(2)$ [premissa]
3. $P(2)$ [passos 1, 2 & modus ponens]
4. $P(2) \rightarrow P(3)$ [premissa]
5. $P(3)$ [passos 3, 4 & modus ponens]

$\vdots$

Podemos construir uma prova de $P(n)$ para todo valor de $n \geq 1$.

Isso nos leva ao Princípio da Indução Matemática...

Princípio da Indução Matemática

Princípio da Indução Matemática (PIM)

Técnica de demonstração usada para provar teoremas de generalização da forma

$$\forall x P(x)$$

onde $P(x)$ expressa uma propriedade dos elementos $x \in \mathbb{N}$.

Princípio da Indução Matemática (PIM)

Técnica de demonstração usada para provar teoremas de generalização da forma

$$\forall x P(x)$$

onde $P(x)$ expressa uma propriedade dos elementos $x \in \mathbb{N}$.

Princípio da indução matemática. Para todo número natural n, seja $P(n)$ uma proposição. Se

(1) $P(0)$ é verdadeiro e

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é verdadeiro,

então $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeiro.

Princípio da Indução Matemática (PIM)

Técnica de demonstração usada para provar teoremas de generalização da forma

$$\forall x P(x)$$

onde $P(x)$ expressa uma propriedade dos elementos $x \in \mathbb{N}$.

Princípio da indução matemática. Para todo número natural n, seja $P(n)$ uma proposição. Se

(1) $P(0)$ é verdadeiro e

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é verdadeiro,

então $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeiro.

Escrito como regra de inferência:

$$[P(0) \land \forall k(P(k) \to P(k+1))] \to \forall n P(n)$$

Princípio da Indução Matemática (PIM)

Princípio da indução matemática. Para todo número natural n, seja $P(n)$ uma proposição. Se

(1) $P(0)$ é verdadeiro e

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é verdadeiro,

então $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeiro.

- Uma demonstração usando o Príncípio da Indução Matemática é chamada de prova indutiva ou prova por indução.
- A verificação da verdade de $P(0)$ em uma prova indutiva é chamado de caso base ou base da indução.
- A prova de que $\forall k \in \mathbb{N}\ [P(k) \Rightarrow P(k+1)]$ é verdadeiro é chamada de passo indutivo ou passo da indução.
  - a proposição $P(k)$ é chamada Hipótese de indução

Princípio da Indução Matemática (PIM)

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Então, para demonstrar uma afirmação $\forall n P(n)$ usando o PIM, você pode seguir este roteiro:

- **Base da Indução:** Suponha que $n = 0$. Prove que $P(0)$ é verdade.
- **Passo da Indução:** Para k natural qualquer (**Instanciação**), prove que

$$P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

Princípio da Indução Matemática (PIM)

Então, para demonstrar uma afirmação $\forall n P(n)$ usando o PIM, você pode seguir este roteiro:

- **Base da Indução:** Suponha que $n = 0$. Prove que $P(0)$ é verdade.
- **Passo da Indução:** Para k natural qualquer (**Instanciação**), prove que

$$P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

1. Suponha $P(k)$ verdadeira (**Hipótese de Indução**).
2. Comece a analisar o cenário em que $n = k + 1$ de acordo com a natureza de $P(n)$, buscando uma oportunidade de aplicar a hipótese.
3. Aplique a hipótese e organize sua conclusão.
4. Conclua $P(k+1)$.

Princípio da Indução Matemática (PIM)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Observação:

- No passo da indução **não assumimos** que $P(k)$ é verdadeiro para todo inteiro k (ou seja, não supomos o que deveríamos provar.)
  - No passo da indução é mostrado que **se for assumido** que $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k+1)$ também é verdadeiro.

Princípio da Indução Matemática (PIM)

Observação:

- No passo da indução **não assumimos** que $P(k)$ é verdadeiro para todo inteiro k (ou seja, não supomos o que deveríamos provar.)
    - No passo da indução é mostrado que **se for assumido** que $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k+1)$ também é verdadeiro.

- Assim, na prova do condicional $P(k) \to P(k+1)$ devemos usar obrigatoriamente a função proposicional $P(k)$ (hipótese que estamos supondo ser verdadeira).

Princípio da Indução Matemática (PIM)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Observação:

- No passo da indução **não assumimos** que $P(k)$ é verdadeiro para todo inteiro k (ou seja, não supomos o que deveríamos provar.)
  - No passo da indução é mostrado que **se for assumido** que $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k+1)$ também é verdadeiro.

- Assim, na prova do condicional $P(k) \to P(k+1)$ devemos usar obrigatoriamente a função proposicional $P(k)$ (hipótese que estamos supondo ser verdadeira).

- Sabendo que $P(0)$ é verdadeiro e que $P(0) \to P(1)$ é verdadeiro, podemos agora aplicar **modus ponens** para obter $P(1)$.

Efeito dominó

Imagine uma fila infinita de dominós numerados $1, 2, 3, \ldots$
Suponha que são válidas as seguintes proposições para esta fila:

Efeito dominó

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Imagine uma fila infinita de dominós numerados $1, 2, 3, \ldots$
Suponha que são válidas as seguintes proposições para esta fila:

(1) a primeira peça é derrubada na direção das demais.

(2) qualquer peça k está suficientemente próxima da seguinte na fila (a peça $k+1$), de modo que, ao ser derrubada, faz com que a sua vizinha também seja derrubada.

Efeito dominó

Imagine uma fila infinita de dominós numerados $1, 2, 3, \ldots$
Suponha que são válidas as seguintes proposições para esta fila:

(1) a primeira peça é derrubada na direção das demais.

(2) qualquer peça k está suficientemente próxima da seguinte na fila (a peça $k + 1$), de modo que, ao ser derrubada, faz com que a sua vizinha também seja derrubada.

Como estas duas proposições são verdadeiras, concluímos que todos os dominós na fila são derrubados.

Indução Matemática — Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Teorema. Para todo n natural, $n^2 - n$ é par.

Demonstração:

Indução Matemática — Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Teorema. Para todo n natural, $n^2 - n$ é par.

Demonstração:

Seja n um natural e $P(n) =$ "$n^2 - n$ é par" uma propriedade. Vamos provar por indução em n que $P(n)$ é verdadeira para todo natural n.

Indução Matemática — Exemplo

Teorema. Para todo n natural, $n^2 - n$ é par.

Demonstração:

Seja n um natural e $P(n) =$ "$n^2 - n$ é par" uma propriedade. Vamos provar por indução em n que $P(n)$ é verdadeira para todo natural n.

Base: Suponha que $n = 0$. Neste caso, devemos verificar se $0^2 - 0$ é par.
Temos que $0^2 - 0 = 0 - 0 = 0$, que é par.
Portanto, a propriedade realmente vale quando $n = 0$.

Indução Matemática — Exemplo

Teorema. Para todo n natural, $n^2 - n$ é par.

Demonstração:
Seja n um natural e $P(n) =$ "$n^2 - n$ é par" uma propriedade. Vamos provar por indução em n que $P(n)$ é verdadeira para todo natural n.

Base: Suponha que $n = 0$. Neste caso, devemos verificar se $0^2 - 0$ é par.
Temos que $0^2 - 0 = 0 - 0 = 0$, que é par.
Portanto, a propriedade realmente vale quando $n = 0$.

Passo da Indução: Seja k um natural qualquer, devemos mostrar que

$$\text{se } k^2 - k \text{ é par, então } (k+1)^2 - (k+1) \text{ é par.}$$

Indução Matemática — Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Teorema. Para todo n natural, $n^2 - n$ é par.

Demonstração:
Seja n um natural e $P(n) =$ "$n^2 - n$ é par" uma propriedade. Vamos provar por indução em n que $P(n)$ é verdadeira para todo natural n.

Base: Suponha que $n = 0$. Neste caso, devemos verificar se $0^2 - 0$ é par.
Temos que $0^2 - 0 = 0 - 0 = 0$, que é par.
Portanto, a propriedade realmente vale quando $n = 0$.

Passo da Indução: Seja k um natural qualquer, devemos mostrar que

$$\text{se } k^2 - k \text{ é par, então } (k+1)^2 - (k+1) \text{ é par.}$$

Por prova direta, suponha que $k^2 - k$ é par (**HI**).

Indução Matemática — Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Teorema. Para todo n natural, $n^2 - n$ é par.

Demonstração:

Seja n um natural e $P(n) =$ "$n^2 - n$ é par" uma propriedade. Vamos provar por indução em n que $P(n)$ é verdadeira para todo natural n.

Base: Suponha que $n = 0$. Neste caso, devemos verificar se $0^2 - 0$ é par.
Temos que $0^2 - 0 = 0 - 0 = 0$, que é par.
Portanto, a propriedade realmente vale quando $n = 0$.

Passo da Indução: Seja k um natural qualquer, devemos mostrar que

$$\text{se } k^2 - k \text{ é par, então } (k+1)^2 - (k+1) \text{ é par.}$$

Por prova direta, suponha que $k^2 - k$ é par (**HI**).
Analisando o caso em que $n = k + 1$, temos que
$(k+1)^2 - (k+1) = k^2 + 2k + 1 - k - 1 = k^2 - k + 2k$

Indução Matemática — Exemplo

Teorema. Para todo n natural, $n^2 - n$ é par.

Demonstração:
Seja n um natural e $P(n) =$ "$n^2 - n$ é par" uma propriedade. Vamos provar por indução em n que $P(n)$ é verdadeira para todo natural n.

Base: Suponha que $n = 0$. Neste caso, devemos verificar se $0^2 - 0$ é par.
Temos que $0^2 - 0 = 0 - 0 = 0$, que é par.
Portanto, a propriedade realmente vale quando $n = 0$.

Passo da Indução: Seja k um natural qualquer, devemos mostrar que

$$\text{se } k^2 - k \text{ é par, então } (k+1)^2 - (k+1) \text{ é par.}$$

Por prova direta, suponha que $k^2 - k$ é par (**HI**).
Analisando o caso em que $n = k + 1$, temos que
$(k+1)^2 - (k+1) = k^2 + 2k + 1 - k - 1 = k^2 - k + 2k$
Pela HI, $k^2 - k$ é par. Logo, existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $k^2 - k = 2j$.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Indução Matemática — Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Teorema. Para todo n natural, $n^2 - n$ é par.

Demonstração:

Seja n um natural e $P(n) =$ "$n^2 - n$ é par" uma propriedade. Vamos provar por indução em n que $P(n)$ é verdadeira para todo natural n.

Base: Suponha que $n = 0$. Neste caso, devemos verificar se $0^2 - 0$ é par.
Temos que $0^2 - 0 = 0 - 0 = 0$, que é par.
Portanto, a propriedade realmente vale quando $n = 0$.

Passo da Indução: Seja k um natural qualquer, devemos mostrar que

$$\text{se } k^2 - k \text{ é par, então } (k+1)^2 - (k+1) \text{ é par.}$$

Por prova direta, suponha que $k^2 - k$ é par (**HI**).
Analisando o caso em que $n = k + 1$, temos que
$(k+1)^2 - (k+1) = k^2 + 2k + 1 - k - 1 = k^2 - k + 2k$
Pela HI, $k^2 - k$ é par. Logo, existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $k^2 - k = 2j$.
Ou seja, $(k+1)^2 - (k+1) = 2j + 2k = 2(j + k)$.
Como j, k são inteiros, $(k+1)^2 - (k+1)$ é par. $\square$

Por que o Princípio da Indução Matemática é válido?

Axioma: Princípio da Boa Ordenação

Princípio da Boa Ordenação: Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ contém um elemento mínimo.

Axioma: Princípio da Boa Ordenação

Princípio da Boa Ordenação: Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ contém um elemento mínimo.

Exemplos:

- $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
- $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$
- $\{0, 4\}$
- $\{4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

Axioma: Princípio da Boa Ordenação

Princípio da Boa Ordenação: Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ contém um elemento mínimo.

Exemplos:

- $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
- $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$
- $\{0, 4\}$
- $\{4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

Vamos usar esse axioma para provar que o Princípio da Indução Matemática (PIM) é verdadeiro.

Demonstração do PIM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Para cada natural n, seja $P(n)$ uma proposição. Se

(1) $P(0)$ é verdadeiro e

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é verdadeiro,

então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeiro.

Demonstração do PIM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Para cada natural n, seja $P(n)$ uma proposição. Se

(1) $P(0)$ é verdadeiro e

(2) $\forall k \in \mathbb{N},\ P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é verdadeiro,

então, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ é verdadeiro.

Escrevendo mais simbolicamente:

$$\underbrace{[P(0)\ \wedge\ \forall k(P(k) \to P(k+1))]}_{A} \Rightarrow \underbrace{\forall n P(n)}_{B}$$

Estratégia: Vamos provar por **contradição**. Logo, supomos que A é verdadeiro e que B é falso e, então, tentamos alcançar uma contradição.

Demonstração do PIM

Teorema. Para cada natural n, seja $P(n)$ uma proposição. Se

(1) $P(0)$ é verdadeiro e

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é verdadeiro,

então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeiro.

Demonstração:

Demonstração do PIM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Para cada natural n, seja $P(n)$ uma proposição. Se

(1) $P(0)$ é verdadeiro e

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é verdadeiro,

então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeiro.

Demonstração:
Suponha, por absurdo, que as condições (1) e (2) são satisfeitas, mas existe algum natural n para o qual $P(n)$ é falsa.

Demonstração do PIM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Para cada natural n, seja $P(n)$ uma proposição. Se

(1) $P(0)$ é verdadeiro e

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é verdadeiro,

então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeiro.

Demonstração:

Suponha, por absurdo, que as condições (1) e (2) são satisfeitas, mas existe algum natural n para o qual $P(n)$ é falsa.

Seja $S = \{n \in \mathbb{N} \colon P(n) \text{ é falsa}\}$

Demonstração do PIM

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema. Para cada natural n, seja $P(n)$ uma proposição. Se

(1) $P(0)$ é verdadeiro e

(2) $\forall k \in \mathbb{N},\ P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é verdadeiro,

então, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ é verdadeiro.

Demonstração:
Suponha, por absurdo, que as condições (1) e (2) são satisfeitas, mas existe algum natural n para o qual $P(n)$ é falsa.

Seja $S = \{n \in \mathbb{N} \colon P(n) \text{ é falsa}\}$

Como S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que S contém um menor elemento s.

Demonstração do PIM

Teorema. Para cada natural n, seja $P(n)$ uma proposição. Se

(1) $P(0)$ é verdadeiro e

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é verdadeiro,

então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeiro.

Demonstração:

Suponha, por absurdo, que as condições (1) e (2) são satisfeitas, mas existe algum natural n para o qual $P(n)$ é falsa.

Seja $S = \{n \in \mathbb{N} \colon P(n) \text{ é falsa}\}$

Como S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que S contém um menor elemento s.

Como $P(0)$ é verdadeiro, $0 \notin S$. Então, $s \geq 1$ e $s - 1 \in \mathbb{N}$. Portanto, $s - 1 \notin S$ e, então, $P(s-1)$ é verdadeira.

Demonstração do PIM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Para cada natural n, seja $P(n)$ uma proposição. Se

(1) $P(0)$ é verdadeiro e

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é verdadeiro,

então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeiro.

Demonstração:
Suponha, por absurdo, que as condições (1) e (2) são satisfeitas, mas existe algum natural n para o qual $P(n)$ é falsa.

Seja $S = \{n \in \mathbb{N} \colon P(n) \text{ é falsa}\}$

Como S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que S contém um menor elemento s.

Como $P(0)$ é verdadeiro, $0 \notin S$. Então, $s \geq 1$ e $s - 1 \in \mathbb{N}$. Portanto, $s - 1 \notin S$ e, então, $P(s-1)$ é verdadeira.

Pela condição (2), $P(s)$ também é verdadeira e, assim, $s \notin S$.
Isso, contudo, contradiz nossa suposição de que $s \in S$. $\square$

Mais exemplos de demonstrações usando Indução Matemática

Indução Matemática — Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo natural n.

Demonstração:

Indução Matemática — Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo natural n.

Demonstração:

Seja $P(n) =$ "$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$" para um inteiro n.

Indução Matemática — Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo natural n.

Demonstração:

Seja $P(n) =$ "$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$" para um inteiro n.

Vamos provar por indução em n que $P(n)$ é verdadeira para todo natural n.

Indução Matemática — Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo natural n.

Demonstração:

Seja $P(n) =$ "$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$" para um inteiro n.

Vamos provar por indução em n que $P(n)$ é verdadeira para todo natural n.

Base: Suponha que $n = 0$.

Note que $P(0)$ é verdadeira pois $2^0 = 1 = 2^1 - 1 = 2^{0+1} - 1$.

Isso completa o caso base da indução.

Indução Matemática — Exemplos

Teorema. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo natural n.

Continuação da Demonstração:

Passo da Indução: Seja k um número natural qualquer, vamos mostrar que

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

Indução Matemática — Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo natural n.

Continuação da Demonstração:

Passo da Indução: Seja k um número natural qualquer, vamos mostrar que

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

SE $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{\mathbf{k}} = 2^{\mathbf{k}+1} - 1$

ENTÃO $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k + 2^{\mathbf{k+1}} = 2^{\mathbf{(k+1)}+1} - 1$

Indução Matemática — Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo natural n.

Continuação da Demonstração:

Passo da Indução: Seja k um número natural qualquer, vamos mostrar que

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

SE $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{\mathbf{k}} = 2^{\mathbf{k}+1} - 1$

ENTÃO $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k + 2^{\mathbf{k+1}} = 2^{\mathbf{(k+1)}+1} - 1$

Por prova direta, suponha que $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{\mathbf{k}} = 2^{\mathbf{k}+1} - 1$. (HI)

Devemos mostrar que $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k + 2^{\mathbf{k+1}} = 2^{\mathbf{(k+1)}+1} - 1$

Indução Matemática — Exemplos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo natural n.

Continuação da Demonstração:

Passo da Indução: Seja k um número natural qualquer, vamos mostrar que

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

SE $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{\mathbf{k}} = 2^{\mathbf{k}+1} - 1$
ENTÃO $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k + 2^{\mathbf{k+1}} = 2^{\mathbf{(k+1)}+1} - 1$

Por prova direta, suponha que $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{\mathbf{k}} = 2^{\mathbf{k}+1} - 1$. (HI)

Devemos mostrar que $\underbrace{2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k}_{\text{Oportunidade de usar a HI}} + 2^{\mathbf{k+1}} = 2^{\mathbf{(k+1)}+1} - 1$

Usando a HI, podemos substituir a expressão destacada. Assim, temos que

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$$

Indução Matemática — Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo natural n.

Continuação da Demonstração:

$$
\begin{aligned}
2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\
&= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\
&= 2^{k+1+1} - 1 \\
&= 2^{(k+1)+1} - 1.
\end{aligned}
$$

Indução Matemática — Exemplos

Teorema. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo natural n.

Continuação da Demonstração:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+1+1} - 1 \\ &= 2^{(k+1)+1} - 1. \end{aligned}$$

A última equação mostra que $P(k+1)$ é verdadeira sob a hipótese de que $P(k)$ é verdadeira. Isso completa a prova por indução.

Portanto, para todo número natural n, temos que
$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$. $\square$

Observações sobre Indução

- Problema: Muitas vezes queremos mostrar que uma propriedade $P(n)$ vale para inteiros $n = b, b+1, b+2, \ldots$, tal que b é um inteiro diferente de zero.
  - Indução também permite provar propriedades sobre elementos do conjunto $\{b, b+1, b+2, \ldots\}$ pois este conjunto respeita o princípio da boa ordenação.

Observações sobre Indução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Problema: Muitas vezes queremos mostrar que uma propriedade $P(n)$ vale para inteiros $n = b, b+1, b+2, \ldots$, tal que b é um inteiro diferente de zero.
  - Indução também permite provar propriedades sobre elementos do conjunto $\{b, b+1, b+2, \ldots\}$ pois este conjunto respeita o princípio da boa ordenação.

- A fim de usar indução matemática para provar que $P(n)$ é verdadeira para $n = b, b+1, b+2, \ldots$, onde b é um inteiro diferente de 1:
  - Mostramos que $P(b)$ é verdadeira na Base, e
  - No passo indutivo, mostramos que o condicional $P(k) \to P(k+1)$ é verdadeiro para $k = b, b+1, b+2, \ldots$
  - Note que b pode ser negativo, zero ou positivo.

Indução Matemática — Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Para todo inteiro positivo, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Demonstração:

Indução Matemática — Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Para todo inteiro positivo, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Demonstração:

Seja $P(n)$ a propriedade "$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$".

Indução Matemática — Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Para todo inteiro positivo, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Demonstração:

Seja $P(n)$ a propriedade "$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$".

Vamos provar por indução no inteiro positivo n que $P(n)$ é verdadeira para todo n.

Indução Matemática — Exemplos

Teorema. Para todo inteiro positivo, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Demonstração:

Seja $P(n)$ a propriedade "$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$".

Vamos provar por indução no inteiro positivo n que $P(n)$ é verdadeira para todo n.

Base: Suponha que $n = 1$. Neste caso, devemos verificar se $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Temos que $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Portanto, a propriedade $P(n)$ vale quando $n = 1$.

Indução Matemática — Exemplos

Teorema. Para todo inteiro positivo, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Continuação da Demonstração:

Passo Indutivo: Seja $k \in \mathbb{Z}^+$. Vamos mostrar que

SE $1 + 2 + \ldots + \mathbf{k} = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}+1)}{2}$,

ENTÃO $1 + 2 + \ldots, +k + \mathbf{(k+1)} = \frac{\mathbf{(k+1)}(\mathbf{(k+1)}+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Por prova direta, suponha que $P(k) = 1 + 2 + \ldots + \mathbf{k} = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}+1)}{2}$. (HI)

Devemos mostrar que $P(k+1) = 1 + 2 + \ldots, +k + \mathbf{(k+1)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Indução Matemática — Exemplos

Teorema. Para todo inteiro positivo, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Continuação da Demonstração:

Passo Indutivo: Seja $k \in \mathbb{Z}^+$. Vamos mostrar que

SE $1 + 2 + \ldots + \mathbf{k} = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}+1)}{2}$,

ENTÃO $1 + 2 + \ldots, +k + \mathbf{(k+1)} = \frac{\mathbf{(k+1)}(\mathbf{(k+1)}+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Por prova direta, suponha que $P(k) = 1 + 2 + \ldots + \mathbf{k} = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}+1)}{2}$. (HI)

Devemos mostrar que $P(k+1) = \underbrace{1 + 2 + \ldots, +k}_{\text{Oportunidade de usar a HI}} + \mathbf{(k+1)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Usando a HI, podemos substituir a expressão destacada. Assim, temos que

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Indução Matemática — Exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. Para todo inteiro positivo, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Continuação da Demonstração:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

A última equação mostra que $P(k+1)$ é verdadeira sob a hipótese de que $P(k)$ é verdadeira. Isso completa a prova por indução. $\square$

Somando os primeiros n inteiros ímpares positivos

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
1 + 3 &= 4 \\
1 + 3 + 5 &= 9 \\
1 + 3 + 5 + 7 &= 16 \\
1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Somando os primeiros n inteiros ímpares positivos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
1 + 3 &= 4 \\
1 + 3 + 5 &= 9 \\
1 + 3 + 5 + 7 &= 16 \\
1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- Conjetura: A soma dos n primeiros inteiros ímpares positivos é n^2.

Somando os primeiros n inteiros ímpares positivos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Conjetura: A soma dos n primeiros inteiros ímpares positivos é n^2.

O que é equivalente a dizer:

- Conjetura: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Somando os primeiros n inteiros ímpares positivos

Teorema. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

Somando os primeiros n inteiros ímpares positivos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

Seja $P(n) =$ "$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$". Vamos provar por indução em n que $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$.

Somando os primeiros n inteiros ímpares positivos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

Seja $P(n) =$ "$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$". Vamos provar por indução em n que $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$.

Base: Suponha que $n = 1$. Neste caso devemos verificar que $1 = 1^2$.

Temos que $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$. Portanto, $P(1)$ é verdadeira.

Somando os primeiros n inteiros ímpares positivos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:

Passo da Indução: Seja k um inteiro positivo qualquer. Vamos mostrar que

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

SE $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$
ENTÃO $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$

Por prova direta, suponha que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$. (**HI**)

Somando os primeiros n inteiros ímpares positivos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:

Passo da Indução: Seja k um inteiro positivo qualquer. Vamos mostrar que

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

SE $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$
ENTÃO $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$

Por prova direta, suponha que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$. (**HI**)

Devemos mostrar que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Somando os primeiros n inteiros ímpares positivos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:

Passo da Indução: Seja k um inteiro positivo qualquer. Vamos mostrar que

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

SE $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$
ENTÃO $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$

Por prova direta, suponha que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$. (**HI**)

Devemos mostrar que $\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{\text{Oportunidade de usar a HI}} + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Somando os primeiros n inteiros ímpares positivos

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Teorema. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:

Devemos mostrar que $\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1)}_{\text{Oportunidade de usar a HI}} + (2k+1) = (k+1)^2$.

Somando os primeiros n inteiros ímpares positivos

Teorema. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:

Devemos mostrar que $\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{\text{Oportunidade de usar a HI}} + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Usando a HI, podemos substituir a expressão destacada.

$$
\begin{aligned}
1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) &= [1 + 3 + \ldots + (2k - 1)] + (2k + 1) \\
&\overset{HI}{=} k^2 + (2k + 1) \\
&= k^2 + 2k + 1 \\
&= (k + 1)^2
\end{aligned}
$$

Somando os primeiros n inteiros ímpares positivos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:

Devemos mostrar que $\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{\text{Oportunidade de usar a HI}} + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Usando a HI, podemos substituir a expressão destacada.

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) &= [1 + 3 + \ldots + (2k - 1)] + (2k + 1) \\ &\overset{HI}{=} k^2 + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Isso mostra que $P(k + 1)$ segue de $P(k)$.
Isso completa a prova por indução. $\square$

Diretrizes para prova por indução

Direrizes para o uso de Indução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Busque sempre seguir estes passos:

- Expresse o enunciado a ser provado no formato "**para todo** $n \geq b$**,** $P(n)$"
- Escreva "**Base**" e mostre que $P(b)$ é verdadeiro.
- Escreva "**Passo indutivo**".

Direrizes para o uso de Indução

Busque sempre seguir estes passos:

- Expresse o enunciado a ser provado no formato "**para todo** $n \geq b$**,** $P(n)$"
- Escreva "**Base**" e mostre que $P(b)$ é verdadeiro.
- Escreva "**Passo indutivo**".
- Enuncie e identifique claramente a hipótese de indução na forma "Seja k um elemento qualquer do domínio com $k \geq b$, suponha que $P(k)$ vale".

Direrizes para o uso de Indução

Busque sempre seguir estes passos:

- Expresse o enunciado a ser provado no formato "**para todo** $n \geq b$, $P(n)$"
- Escreva "**Base**" e mostre que $P(b)$ é verdadeiro.
- Escreva "**Passo indutivo**".
- Enuncie e identifique claramente a hipótese de indução na forma "Seja k um elemento qualquer do domínio com $k \geq b$, suponha que $P(k)$ vale".
- Reforce o que precisa ser provado a partir da hipótese, ou seja, diga que precisa provar $P(k+1)$ no contexto do teorema.

Direrizes para o uso de Indução

Busque sempre seguir estes passos:

- Expresse o enunciado a ser provado no formato "**para todo $n \geq b$, $P(n)$**"
- Escreva "**Base**" e mostre que $P(b)$ é verdadeiro.
- Escreva "**Passo indutivo**".
- Enuncie e identifique claramente a hipótese de indução na forma "Seja k um elemento qualquer do domínio com $k \geq b$, suponha que $P(k)$ vale".
- Reforce o que precisa ser provado a partir da hipótese, ou seja, diga que precisa provar $P(k+1)$ no contexto do teorema.
- Prove que $P(k+1)$ é verdadeira utilizando a hipótese de indução.
  - Certifique-se de que sua prova vale para todo valor $n \geq b$, inclusive para valores pequenos de n, como $n = b$.

Direrizes para o uso de Indução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Busque sempre seguir estes passos:

- Expresse o enunciado a ser provado no formato "**para todo** $n \geq b$**,** $P(n)$"
- Escreva "**Base**" e mostre que $P(b)$ é verdadeiro.
- Escreva "**Passo indutivo**".
- Enuncie e identifique claramente a hipótese de indução na forma "Seja k um elemento qualquer do domínio com $k \geq b$, suponha que $P(k)$ vale".
- Reforce o que precisa ser provado a partir da hipótese, ou seja, diga que precisa provar $P(k+1)$ no contexto do teorema.
- Prove que $P(k+1)$ é verdadeira utilizando a hipótese de indução.
  - Certifique-se de que sua prova vale para todo valor $n \geq b$, inclusive para valores pequenos de n, como $n = b$.
- Identifique claramente a conclusão do passo de indução, dizendo por exemplo: "Isso completa o passo indutivo."

Direrizes para o uso de Indução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Busque sempre seguir estes passos:

- Expresse o enunciado a ser provado no formato "**para todo** $n \geq b$**,** $P(n)$"
- Escreva "**Base**" e mostre que $P(b)$ é verdadeiro.
- Escreva "**Passo indutivo**".
- Enuncie e identifique claramente a hipótese de indução na forma "Seja k um elemento qualquer do domínio com $k \geq b$, suponha que $P(k)$ vale".
- Reforce o que precisa ser provado a partir da hipótese, ou seja, diga que precisa provar $P(k+1)$ no contexto do teorema.
- Prove que $P(k+1)$ é verdadeira utilizando a hipótese de indução.
  - Certifique-se de que sua prova vale para todo valor $n \geq b$, inclusive para valores pequenos de n, como $n = b$.
- Identifique claramente a conclusão do passo de indução, dizendo por exemplo: "Isso completa o passo indutivo."
- Por fim, enuncie que "$P(n)$ vale para todo inteiro n, com $n \geq b$".

Observações

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- A técnica de Indução Matemática é também chamada de **Primeiro Princípio de Indução** e **Indução Fraca** em outras fontes.
- O livro tem muitos exemplos de provas por indução. A leitura destes exemplos favorecerá a compreensão dos conceitos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

FIM