EP33D – Matemática Discreta – 2013/2S

Lista 02 – Demonstrações

Problema 1. Utilize a demonstração direta para verificar as seguintes proposições:

a) A soma de dois números ímpares é par.

b) A soma de dois pares é par.

c) O quadrado de um número par é par.

d) O inverso aditivo de um número par é par.

e) O produto de dois números ímpares é ímpar.

f) Todo número inteiro ímpar é a diferença de dois quadrados.

Problema 2. Utilize a demonstração por contraposição para verificar as seguintes proposições:

a) Se $x + y \geqslant 2$, então $x \geqslant 1$ ou $y \geqslant 1$.

b) Se $n^3 + 5$ é ímpar, então n é par.

c) Se $3n + 2$ é par, então n é par.

Problema 3. Utilize a demonstração por contradição para verificar as seguintes proposições:

a) A soma de um irracional e um racional é irracional.

b) Se $n^3 + 5$ é ímpar, então n é par.

c) Se $3n + 2$ é par, então n é par.

Problema 4. Escolha um método de demonstração (indique-o explicitamente) e verifique as seguintes proposições:

a) Se $m + n$ e $n + p$ são números inteiros pares, em que m, n e p são números inteiros, então $m + p$ é par.

b) Se n é um quadrado perfeito, então $n + 2$ não é um quadrado perfeito.

c) O produto de dois racionais é racional.

d) Se x é irracional, então $1/x$ é irracional.

e) Se $x \neq 0$ é racional, então $1/x$ é racional.

f) Seja $P(n)$: "Se n é um inteiro positivo, então $n^2 \geqslant n$." Demonstre $P(1)$.

g) Se n é um inteiro positivo, então n é par se e somente se $7n + 4$ for par.

h) Se $m^2 = n^2$ se e somente se $m = n$ ou $m = -n$.

i) Pelo menos um dos números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ é maior ou igual a média desses números.

Problema 5. Mostre que se você pegar três meias de uma gaveta, com apenas meias azuis e pretas, você deve pegar ao menos um par de meias de mesma cor.

Problema 6. Mostre que as sentenças em cada item abaixo são equivalentes:

a) Sejam a e b números reais. P_1: a é menor que b; P_2: a média de a e b é maior que a; P_3: a média de a e b é menor que b.

b) Seja x um inteiro. P_1: $3x+2$ é par; P_2: $x+5$ é ímpar; P_3: x^2 é par.

c) Seja x um número real. P_1: x é racional; P_2: $x/2$ é racional; P_3: $3x-1$ é racional.

d) Seja x um número real. P_1: x é irracional; P_2: $3x+2$ é irracional; P_3: $x/2$ é irracional.

e) Seja n um inteiro. P_1: n^2 é ímpar; P_2: $1-n$ é par; P_3: n^3 é ímpar; P_4: n^2+1 é par.

Problema 7. Comprove que as proposições P_1, P_2, P_3 e P_4 são equivalentes mostrando que $P_1 \leftrightarrow P_4$, $P_2 \leftrightarrow P_3$ e $P_1 \leftrightarrow P_3$.

Problema 8. Demonstre as seguintes proposições:

a) $n^2+1 \geqslant 2^n$ quando n é um inteiro positivo menor que 5.

b) Não há cubos perfeitos positivos menores que 1000 que são a soma dos cubos de dois inteiros positivos.

c) Se x e y são números reais, então $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.

d) Existem 100 números inteiros positivos consecutivos que não são raízes quadradas perfeitas.

e) Existe um par de números inteiros consecutivos, tal que um desses números é um quadrado perfeito e o outro, um cubo perfeito.

f) Se x é um número real, então existe um único inteiro n e um único real ε com e $0 \leqslant \varepsilon < 1$ tal que $x = n - \varepsilon$.

Problema 9. Utilize a indução matemática para demonstrar:

a) $P(n)$: $1^2+2^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para todo inteiro positivo n.

b) $P(n)$: $1^3+2^3+\cdots+n^3 = [n(n+1)/2]^2$ para todo inteiro positivo n.

c) $P(n)$: $1.1!+2.2!+\cdots+n.n! = (n+1)!-1$ sempre que n for um inteiro positivo.

d) $P(n)$: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^j = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3.2^n}$ para todo inteiro não negativo n.

Problema 10. Conjecture uma fórmula e a demonstre utilizando a indução matemática para

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

e para

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

em que n é um inteiro positivo.

Problema 11. Encontre o domínio (subconjunto dos inteiros não-negativos) para as seguintes proposições:

a) $P(n)$: $n! < n^n$.

b) $P(n)$: $3^n < n!$

c) $P(n)$: $2^n > n^2$

d) $P(n)$: $2n+3 \leqslant 2^n$