Exercícios de Álgebra Linear

1^o Semestre 2006/2007

João Ferreira Alves

Sistemas de Equações Lineares, Matrizes e Determinantes

Exercício 1 *Resolva por eliminação de Gauss os seguintes sistemas de equações lineares:*

$$a)\ \begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y=0 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=2 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 4x+5y=1 \\ 12x+15y=0 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} x+y=1 \\ 3x-y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} 2a+2b+3c=1 \\ a+2b+c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+7y+7z=3 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 4x+10y+10z=0 \\ x+3y+4z=0 \end{cases} \qquad h)\ \begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad i)\ \begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=3 \end{cases}$$

$$j)\ \begin{cases} 2x+2y+2z+3w=3 \\ x+y+z+w=1 \\ 3x+3y+3z+2w=2 \end{cases} \qquad k)\ \begin{cases} x+z+2w=0 \\ 2x+3z+3w=0 \\ y+2w=2 \\ x+2z+w=0 \end{cases} \qquad l)\ \begin{cases} y_1+y_3+2y_4=0 \\ y_1+2y_2+y_3+y_4=1 \\ y_2+2y_4=8 \\ y_1+2y_3+y_4=0 \end{cases}$$

Exercício 2 *Discuta, em função dos parâmetros α e β, os seguintes sistemas de equações lineares:*

$$a)\ \begin{cases} x+4y+3z=10 \\ 2x+7y-2z=10 \\ x+5y+\alpha z=\beta \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} 2x+y+z=-6\beta \\ \alpha x+3y+2z=2\beta \\ 2x+y+(\alpha+1)\,z=4 \end{cases}.$$

Exercício 3 *Considere o sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} x+y+3z=b_1 \\ 2x+2y-z=b_2 \\ 4x+4y+5z=b_3 \end{cases},$$

e calcule os vectores $(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$ para os quais o sistema é possível.

Exercício 4 *Determine um sistema de equações lineares cujo conjunto de soluções seja:*

a) $S = \{(1+t, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}$;
b) $S = \{(t, 1-2t, 1) : t \in \mathbb{R}\}$;
c) $S = \{(3t, 2t, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$;
d) $S = \{(3t, 2s, t-1) : s, t \in \mathbb{R}\}$;
e) $S = \{(1-t, 2s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$;

Exercício 5 *Sempre que possível calcule:*

a) $2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *i)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$ *k)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$ *l)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$

Exercício 6 *Mostre que a inversa de uma matriz $A \in R^{n\times n}$, quando existe, é única.*

Exercício 7 *Mostre que se as matrizes A e $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são invertíveis, então também AB é invertível, tendo-se ainda $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Exercício 8 *Mostre que qualquer matriz invertível se pode decompor no produto de matrizes elementares.*

Exercício 9 *Sempre que possível, calcule a inversa de cada uma das seguintes matrizes:*

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ *g)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Exercício 10 *Utilizando o exercício anterior, resolva os sistemas de equações lineares:*

$$a)\ \begin{cases} x-y=0 \\ x+y-z=1 \\ y+z=-1 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x+z=1 \\ y+w=1 \\ x+2z+w=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}.$$

Exercício 11 *Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes e indique as que são invertíveis*

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$d)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad e)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad f)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g)\ \begin{bmatrix} 1 & 12 & 22 & 31 \\ 0 & 3 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad h)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad i)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 12 *Sabendo que*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcule:

$$a)\ \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$$

$$c)\ \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \qquad d)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$$

Exercício 13 *Sabendo que os valores reais γ e δ são tais que:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & 1 & 1 \\ 1 & \gamma+\delta & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & \delta\gamma+\delta^2 & 2\delta \\ \delta\gamma & \gamma & \gamma \end{vmatrix}.$$

Exercício 14 *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule: a) $\det(3A)$*; b)* $\det(A^3B^2)$*; c)* $\det(A^{-1}B^T)$*; d)* $\det(A^4B^{-2})$.

Exercício 15 *Mostre que*

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & 3 & 3 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & 4 & 4 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & 5 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \lambda^6.$$

Exercício 16 *Calcule o determinante da matriz*

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ 1 & \lambda+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 17 *Mostre que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Exercício 18 *Recorra à regra de Laplace para calcular o determinante das seguintes matrizes:*

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 19 *Calcular a matriz dos cofactores e a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes:*

$$a)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad b)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 20 *Usar a regra de Cramer para resolver os sistemas de equações lineares:*

$$a)\begin{cases} y+2z=1 \\ 2x+4y+z=0 \\ x+2y=1 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+z=1 \\ x+2y+2z=-1 \end{cases}.$$

Soluções

1)

a) Sistema possível e determinado: $S=\{(3,-1)\}$; b) Sistema indeterminado com uma incógnita livre: $S=\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}y,y\right):y\in\mathbb{R}\right\}$; c) Sistema impossível $S=\varnothing$; d) Sistema impossível: $S=\varnothing$; e) Sistema possível e determinado: $S=\{(-1,0,1)\}$; f) Sistema impossível: $S=\varnothing$; g) Sistema indeterminado com uma incógnita livre: $S=\{(5z,-3z,z):z\in\mathbb{R}\}$; h) Sistema indeterminado com uma incógnita livre: $S=\{(-2z,z,z):z\in\mathbb{R}\}$; i) Sistema indeterminado com duas incógnitas livres:
$S=\left\{\left(1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_4,x_2,-1,x_4\right):x_2,x_4\in\mathbb{R}\right\}$; j) Sistema indeterminado com duas incógnitas livres: $S=\{(-y-z,y,z,1):y,z\in\mathbb{R}\}$; k) Sistema indeterminado com uma incógnita livre: $S=\{(-3w,2-2w,w,w):w\in\mathbb{R}\}$; l) Sistema possível e determinado $S=\{(-9,2,3,3)\}$.

2)

a) Se $\alpha\neq 11$ o sistema é possível e determinado; se $\alpha=11$ e $\beta=20$ o sistema é indeterminado; se $\alpha=11$ e $\beta\neq 20$ o sistema é impossível. b) Se $\alpha\neq 0$ e $\alpha\neq 6$ o sistema é possível e determinado; se $\alpha=0$ e $\beta=-2/3$ o sistema é indeterminado; se $\alpha=0$ e $\beta\neq -2/3$ o sistema é impossível; se $\alpha=6$ e $\beta=-2/63$ o sistema é indeterminado; se $\alpha=6$ e $\beta\neq -2/63$ o sistema é impossível.

3) $b_3-2b_1-b_2=0$.

4)

a) $x_1+x_2=2$; b) $\begin{cases} 2x_1+x_2=1 \\ x_3=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x_1-3x_3=0 \\ x_2-2x_3=0 \end{cases}$; d) $x_1+0x_2-3x_3=3$; e) $x_1+0x_2+x_3=1$

5)

a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 22 & 5 \end{bmatrix}$; b) não é possível; c) não é possível; d) $[4]$; e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

g) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; i) $\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$; j) $\begin{bmatrix} 2 & 20 \\ 2 & 10 \\ 30 & 4 \end{bmatrix}$; k) $\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 6 & 60 \end{bmatrix}$; l) $\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 62 & 28 \end{bmatrix}$.

9)

a) A matriz não é invertível; b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$;

f) A matriz não é invertível; g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10)

a) $(0, 0, -1)$; b) $(4, 0, -3, 1)$

11)

a)det $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -3$;b) det $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$;c) det $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 9$;d) det $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$;

e) det $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = 30$; f) det $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$; g) det $\begin{bmatrix} 1 & 12 & 22 & 31 \\ 0 & 3 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$;

h) det $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 0$; i) det $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 18$.

Apenas as matrizes das alíneas b), f) e h) não são invertíveis.

12)

a) 5; b) 10; c) 5; d) 10.

13) $-\delta\gamma$.

14)

a) -54. b) b) -128; c) -2; d) 1.

16) λ^n.

18)

a) -9; b) -5; c) 16; d) 6; e) 15; f) -45.

19)

a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ -7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

20)

a) $(-9, 5, -2)$; b) $(1, 0, -1)$.

Espaços Lineares

Exercício 21 *Considere em* $\mathbb{R}^2$ *o conjunto* $S = \{(1,1), (2,2)\}$.

a) Mostre que o vector $(-5, -5)$ é combinação linear dos vectores S.
b) Mostre que o vector $(1, 0)$ não é combinação linear dos vectores S.
c) O conjunto S gera R^2?
d) Determine a forma geral dos vectores $(a, b) \in L(S)$.

Exercício 22 *Considere em* $\mathbb{R}^3$ *o conjunto* $S = \{(1,1,1), (0,1,1), (1,2,2)\}$.

a) Mostre que o vector $(2, 3, 3)$ é combinação linear dos vectores S.
b) Mostre que o vector $(0, 0, 1)$ não é combinação linear dos vectores S.
c) O conjunto S gera $\mathbb{R}^3$?
d) Determine a forma geral dos vectores $(a, b, c) \in L(S)$.

Exercício 23 *Sendo A uma matriz com m linhas, mostre que as colunas de A geram $\mathbb{R}^m$ se e só se a característica de A é igual a m.*

Exercício 24 *Mostre, com base no exercício anterior, que em $\mathbb{R}^m$ qualquer conjunto com menos de m vectores não gera $\mathbb{R}^m$.*

Exercício 25 *Decida quais dos seguintes conjuntos geram $\mathbb{R}^3$:*

a) $\{(1,3,3), (4,6,4), (-2,0,2), (3,3,1)\}$;
b) $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$;
c) $\{(1,4,2), (0,0,0), (-1,-3,-1), (0,1,1)\}$.
d) $\{(26,47,29), (123,0,498)\}$.

Exercício 26 *Decida quais dos seguintes conjuntos geram $\mathbb{R}^4$:*

a) $\{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,1,-1)\}$;
b) $\{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$;
c) $\{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,1,0,1)\}$;
d) $\{(11,-12,1,1), (45,17,1,20), (21,3,41,122)\}$.

Exercício 27 *Calcule o único valor de a que faz com que*

$$S = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,2,0), (3,2,a)\}$$

não seja um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 28 *Considere em* $\mathbb{R}^3$ *o conjunto* $S = \{(1,0,1), (0,1,a), (1,1,b), (1,1,1)\}$. *Calcule o único par* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *que faz com que* S *não gere* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 29 *Considere em* $\mathbb{R}^4$ *o conjunto* $S = \{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,1,0,0), (1,1,1,a)\}$. *Calcule o único valor de* a *que faz com que* S *não gere* $\mathbb{R}^4$.

Exercício 30 *Mostre que os seguintes conjuntos de vectores são linearmente dependentes:*

a) Em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,2)$, $\overrightarrow{v}_2 = (2,2,4)$;
b) Em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (3,3,3)$, $\overrightarrow{v}_3 = (0,1,1)$;
c) Em $\mathbb{R}^4$, $\overrightarrow{v}_1 = (0,1,0,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1,0,1,0)$, $\overrightarrow{v}_3 = (2,3,2,3)$;
d) Em $\mathbb{R}^4$, $\overrightarrow{v}_1 = (0,1,0,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1,0,1,0)$, $\overrightarrow{v}_3 = (2,0,1,3)$, $\overrightarrow{v}_4 = (0,0,0,0)$.

Exercício 31 *Decida quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes:*

a) Em $\mathbb{R}^4$, $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,0,0)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1,0,1,0)$, $\overrightarrow{v}_3 = (0,0,1,1)$, $\overrightarrow{v}_4 = (0,1,0,1)$.
b) Em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,2)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1,2,1)$, $\overrightarrow{v}_3 = (3,1,1)$.

Exercício 32 *Mostre que as colunas de uma matriz* A *são linearmente independentes se e só se a característica de* A *é igual ao número de colunas de* A.

Exercício 33 *Mostre, com base no exercício anterior, que em* $\mathbb{R}^m$ *qualquer conjunto com mais de* m *vectores é linearmente dependente.*

Exercício 34 *Decida quais dos seguintes conjuntos são linearmente independentes:*

a) Em $\mathbb{R}^3$, $\{(1,1,1), (1,2,1)\}$;
b) Em $\mathbb{R}^3$, $\{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$;
c) Em $\mathbb{R}^3$, $\{(1,1,1), (2,2,0), (0,0,1)\}$;
d) Em $\mathbb{R}^3$, $\{(2,46,6), (23,2,-123), (1,23,1), (1,10,1)\}$;
e) Em $\mathbb{R}^4$, $\{(1,0,-1,0), (4,0,-3,1), (2,0,-1,1)\}$;
f) Em $\mathbb{R}^4$, $\{(1,0,-1,0), (4,0,-3,1), (2,1,-1,1)\}$;
g) Em $\mathbb{R}^4$, $\{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$;
h) Em $\mathbb{R}^4$, $\{(1,23,1,14), (1,12,1,0), (24,-1,0,0), (11,19,17,-123), (101,119,1,1)\}$.

Exercício 35 *Calcule o único valor de* a *que faz com que os vectores de* $\mathbb{R}^4$

$$\overrightarrow{v}_1 = (1,0,0,2), \overrightarrow{v}_2 = (1,0,1,0), \overrightarrow{v}_3 = (2,0,1,a)$$

sejam linearmente dependentes.

Exercício 36 *Considere em* $\mathcal{P}_2$ *(espaço dos polinómios com grau* ≤ 2*) o conjunto* $S = \{1+t, 1-t^2\}$.

a) Mostre que o vector $t + t^2$ é combinação linear dos vectores de S.
b) Mostre que o vector t não é combinação linear dos vectores de S.
c) O conjunto S gera $\mathcal{P}_2$?
d) Determine a forma geral dos vectores $p(t) \in L(S)$.

Exercício 37 *Mostre que os polinómios*

$$p_1(t) = 1 + 2t - t^2,\ p_2(t) = 3 + t^2,\ p_3(t) = 5 + 4t - t^2,\ p_4(t) = -2 + 2t - t^2$$

geram $\mathcal{P}_2$.

Exercício 38 *Considere espaço vectorial das funções reais de variável real. Mostre que cada um dos seguintes conjuntos é linearmente dependente.*

$$\begin{array}{ll} a)\ \left\{2, \sin^2(t), \cos^2(t)\right\} & b)\ \left\{\cos(2t), \sin^2(t), \cos^2(t)\right\} \\ c)\ \left\{e^t, e^{-t}, \cosh(t)\right\} & d)\ \left\{1, t, t^2, (t+1)^2\right\}. \end{array}$$

Exercício 39 *No espaço vectorial das funções reais de variável real considere n vectores* $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,..., $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Mostre que se existirem números* t_1, t_2,..., $t_n \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \ldots & f_n(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \ldots & f_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \ldots & f_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

então os vectores f_1, f_2,..., f_n *são linearmente independentes.*

Exercício 40 *Mostre, recorrendo ao exercício anterior, que os conjuntos de vectores*

$$\left\{1, t, e^t\right\} \ \ e \ \ \{\sin(t), \cos(t), t\cos(t)\}$$

são linearmente independentes. Sugestão: no primeiro caso faça $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$, *no segundo faça* $t_1 = 0$, $t_2 = \pi/2$, $t_3 = \pi$.

Soluções

22)

c) S não gera $\mathbb{R}^3$; d) $L(S) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c - b = 0\} = \{(a, c, c) : a, c \in \mathbb{R}\}$.

25)

a) S não gera $\mathbb{R}^3$; b) S gera $\mathbb{R}^3$; c) S não gera $\mathbb{R}^3$; d) S não gera $\mathbb{R}^3$.

26)

a) S gera $\mathbb{R}^4$; b) S gera $\mathbb{R}^4$; c) S não gera $\mathbb{R}^4$; d) S não gera $\mathbb{R}^4$.

27) $a = 3$.

28) $(a, b) = (0, 1)$.

29) $a = 1$.

31)

a) Linearmente dependentes; b) Linearmente independentes

34)

a) Linearmente independentes; b) Linearmente independentes; c) Linearmente dependentes; d) Linearmente dependentes; e) Linearmente dependentes; f) Linearmente independentes; g) Linearmente independentes; h) Linearmente dependentes.

35) $a = 2$.

36)

c) S não gera $\mathcal{P}_2$; d) $L(S) = \{c - b + bt + ct^2 : b, c \in \mathbb{R}^2\}$.

Bases e dimensão

Exercício 41 *Tendo em conta os exercícios 23 e 32, mostre que as colunas de uma matriz A com m linhas constituem uma base de $\mathbb{R}^m$ se e só se A é uma matriz invertível.*

Exercício 42 *Mostre que em $\mathbb{R}^m$ quaisquer m vectores linearmente independentes constituem uma base de $\mathbb{R}^m$. Mostre que em $\mathbb{R}^m$ quaisquer m geradores constituem uma base de $\mathbb{R}^m$.*

Exercício 43 *Mostre que qualquer base de $\mathbb{R}^m$ tem m vectores.*

Exercício 44 *Determine quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^2$:*

a) $\{(1,0), (0,1)\}$;
b) $\{(1,1), (0,3)\}$;
c) $\{(1,0), (0,3), (2,5)\}$;
d) $\{(1,2)\}$;
e) $\{(1,1), (0,0)\}$.

Exercício 45 *Determine quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^3$:*

a) $\{(1,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}$;
b) $\{(1,1,1), (1,0,1), (1,2,1)\}$;
c) $\{(3,0,0), (1,1,0), (2,2,2), (1,3,5)\}$
d) $\{(1,1,1), (2,2,0)\}$.

Exercício 46 *Determine quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^4$:*

a) $\{(1,0,1,0), (1,1,0,0), (0,0,1,0), (2,1,-1,0)\}$;
b) $\{(1,3,0,0), (1,1,3,1), (2,2,3,2), (2,3,3,2), (2,4,1,2)\}$;
c) $\{(2,0,0,2), (1,1,0,0), (0,0,2,3), (1,2,1,2)\}$;
d) $\{(2,0,0,2), (1,1,0,0), (1,2,1,2)\}$.

Exercício 47 *Seja $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ a base de $\mathbb{R}^2$ constituída pelos vectores*

$$\overrightarrow{v}_1 = (1,0) \text{ e } \overrightarrow{v}_2 = (1,1).$$

a) Qual é o vector de $\mathbb{R}^2$ que nesta base tem coordenadas $(2,2)$?
b) Calcule as coordenadas do vector $(3,5)$ nesta base.
c) Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as coordenadas de um vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ nesta base.

Exercício 48 *Seja* $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ *a base de* $\mathbb{R}^3$ *constituída pelos vectores*

$$\overrightarrow{v}_1 = (2,0,0),\ \overrightarrow{v}_2 = (1,1,0) \text{ e } \overrightarrow{v}_3 = (1,1,1).$$

a) Qual é o vector de $\mathbb{R}^3$ que nesta base tem coordenadas $(0,3,5)$?
b) Calcule as coordenadas do vector $(2,0,1)$ nesta base.
c) Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as coordenadas de um vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ nesta base.

Exercício 49 *Seja* $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ *o subconjunto de* $\mathcal{P}_2$ *constituído pelos polinómios*

$$\overrightarrow{v}_1 = 1 + t,\ \overrightarrow{v}_2 = 1 + 2t \text{ e } \overrightarrow{v}_3 = t^2\ .$$

a) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{P}_2$.
b) Qual é o polinómio que nesta base tem coordenadas $(1,3,-2)$?
c) Calcule as coordenadas do vector $2 + 2t - t^2$ nesta base.
d) Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as coordenadas de um polinómio $a + bt + ct^2$ nesta base.

Exercício 50 *Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do plano, identificando os que são subespaços lineares de* $\mathbb{R}^2$*:*

a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$;
b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$;
c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \text{ e } x - y = 0\}$;
d) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$;
e) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercício 51 *Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do espaço, identificando os que são subespaços lineares de* $\mathbb{R}^3$*:*

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$;
b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$
c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \text{ e } x - y + 2z = 0\ \}$;
d) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1 \text{ e } x - y + 2z = 0\}$;
e) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
f) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$.

Exercício 52 *Para cada uma das seguintes matrizes, calcule bases para o espaço das colunas e para o espaço nulo. Calcule ainda a característica e a nulidade:*

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad e)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad f)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g)\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad h)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad i)\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 53 *Calcule uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços lineares:*

a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$;
b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$;
c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ e } x + y + 2z = 0\}$;
d) $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0 \text{ e } x + y + 2z = 0\}$;
e) $S = L\{(1,1), (2,1), (1,2)\}$;
f) $S = L\{(1,-1,1), (1,1,3), (0,1,1)\}$;
g) $S = L\{(1,4,-2,3), (3,6,0,3), (3,4,2,1)\}$.

Exercício 54 *Mostre que se U e V são subespaços de um espaço linear E, então também $U \cap V$ é um subespaço de E. Mostre ainda que $U \cup V$ é um subespaço de E se e só $U \subseteq V$ ou $V \subseteq U$.*

Exercício 55 *Mostre que se U e V são subespaços de um espaço linear E, então subconjunto*

$$U + V \overset{def}{=} \{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} : \overrightarrow{u} \in U \ e\ \overrightarrow{v} \in V\}$$

é o menor subespaço de E que contém $U \cup V$.

Exercício 56 *Calcule uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:*

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\}$;
b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \cap L\{(1,1,1), (0,1,1)\}$;
c) $S = L\{(1,0,0), (0,0,1)\} \cap L\{(1,1,1), (0,1,1)\}$;
d) $S = L\{(1,0,0), (0,0,1)\} + L\{(1,1,1), (0,1,1)\}$;
e) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} + L\{(1,1,1), (0,1,1)\}$;
f) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} + \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\}$.

Exercício 57 *Considere o espaço linear $\mathcal{P}_3$ (polinómios com grau menor ou igual a 3)*

a) Mostre que o conjunto $\{p(t) \in \mathcal{P}_3 : p(0) = 0\}$ é um subespaço linear de $\mathcal{P}_3$. Calcule uma base para este subespaço.
b) Mostre que o conjunto $\{p(t) \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 0\}$ é um subespaço linear de $\mathcal{P}_3$. Calcule uma base para este subespaço.
c) Mostre que o conjunto $\{p(t) \in \mathcal{P}_3 : p(1) = p\,(0)\}$ é um subespaço linear de $\mathcal{P}_3$. Calcule uma base para este subespaço.

Exercício 58 *No espaço linear V das funções reais de de variável real duas vezes diferenciáveis, considere o subconjunto*

$$S = \{f \in V : f'' - 2f' + f = 0\}\,.$$

a) Mostre que S é um subespaço linear de V
b) Mostre que o conjunto $\{e^t, te^t\}$ é uma base de S. Sugestão: mostre que se $f \in S$, então $f(t)e^{-t}$ é um polinómio com grau ≤ 1.
c) Mostre que, dados a e $b \in \mathbb{R}$, existe uma e uma só função $f \in S$ tal que $f(0) = a$ e $f'(0) = b$. Sugestão: tenha em conta que o conjunto $\{e^t, te^t\}$ é uma base de S.

Soluções

45)

a) É base de $\mathbb{R}^3$; b) Não é base de $\mathbb{R}^3$; c) Não é base de $\mathbb{R}^3$; d) Não é base de $\mathbb{R}^3$.

46)

a) Não é base de $\mathbb{R}^4$; b) Não é base de $\mathbb{R}^4$; c) É base de $\mathbb{R}^4$; d) Não é base de $\mathbb{R}^4$.

47)

a) $(4, 2)$; b) $(-2, 5)$; c) $(a - b, b)$.

48)

a) $(8, 8, 5)$; b) $(1, -1, 1)$; c) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b, b - c, c\right)$.

49)

b) $4 + 7t - 2t^2$; c) $(2, 0, -1)$; d) $(2a - b, b - a, c)$.

50)

a) É subespaço de $\mathbb{R}^2$; b) É subespaço de $\mathbb{R}^2$; c) É subespaço de $\mathbb{R}^2$; d) Não é subespaço de $\mathbb{R}^2$; e) Não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

51)

a) É subespaço de $\mathbb{R}^3$; b) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$; c) É subespaço de $\mathbb{R}^3$; d) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$; e) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$; f) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

53)

a) $\{(-1, 1)\}$ é base de S, logo $\dim(S) = 1$; b) $\{(-1, 1, 0)\,, (-2, 0, 1)\}$ é base de S, logo $\dim(S) = 2$; c) $\{(-1, 1, 0)\}$ é uma base de S, logo $\dim(S) = 1$; d) $\{(-1, 1, 0, 0)\,, (-1, -1, 1, 1)\}$

é base de S, logo $\dim(S)=2$. e) $\{(1,1),(1,2)\}$ é base de S e $\dim(S)=2$; f) $\{(1,-1,1),(1,1,3)\}$ é base de S, logo $\dim(S)=2$; g) $\{(1,4,-2,3),(3,6,0,3)\}$ é base de S, logo $\dim(S)=2$;

56)

a) $\{(-1,1,0)\}$ é base de S, logo $\dim(S)=1$; b) $\{(-2,1,1)\}$ é base de S, logo $\dim(S)=1$; d) $\{(1,0,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ é base de S, logo $\dim(S)=3$..

57)

a) $\{t,t^2\}$ é uma base de S; b) $\{t-1,t^2-1\}$ é uma base de S; c) $\{1,t^2-t\}$ é uma base de S.

Tranformações Lineares

Exercício 59 *Determine quais das seguintes transformações são lineares:*

a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(x,y)$;

b) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(x+1,y)$;

c) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(\cos(\theta)\,x-\sin(\theta)\,y,\sin(\theta)\,x+\cos(\theta)\,y)$, com $\theta\in\mathbb{R}$;

d) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(2x^2+xy,x)$;

e) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T(x,y,z)=(2x+y,x+2y,x+2y+z)$;

f) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T(x,y,z)=(x+3,x+2y+z,y-4z)$;

g) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y,z,w)=(2x+y-z+w,x+y-3z)$;

Exercício 60 *Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(2x+y,x+2y)$. Calcule a representação matricial de T na base $\mathcal{B}=\{\overrightarrow{v}_1,\overrightarrow{v}_2\}$ quando:*

a) $\overrightarrow{v}_1=(1,0)$, $\overrightarrow{v}_2=(0,1)$;

b) $\overrightarrow{v}_1=(0,2)$, $\overrightarrow{v}_2=(2,0)$;

c) $\overrightarrow{v}_1=(1,1)$, $\overrightarrow{v}_2=(1,2)$.

Exercício 61 *Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por*

$$T(x,y,z)=(x+y,x+z,z+y)\,.$$

Calcule a representação matricial de T na base $\mathcal{B}=\{\overrightarrow{v}_1,\overrightarrow{v}_2,\overrightarrow{v}_3\}$ quando:

a) $\overrightarrow{v}_1=(1,0,0)$, $\overrightarrow{v}_2=(0,1,0)$, $\overrightarrow{v}_3=(0,0,1)$;

b) $\overrightarrow{v}_1=(0,2,0)$, $\overrightarrow{v}_2=(0,0,2)$, $\overrightarrow{v}_3=(2,0,0)$;

c) $\overrightarrow{v}_1=(1,0,0)$, $\overrightarrow{v}_2=(1,1,0)$, $\overrightarrow{v}_3=(1,1,1)$.

Exercício 62 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$T(x, y, z) = (2x + y, z + 3y) .$$

Calcule a representação matricial de T *nas bases* $\mathcal{B}_1 = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$ *e* $\mathcal{B}_2 = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ *quando:*

a) $\overrightarrow{u}_1 = (1, 0, 0),\ \overrightarrow{u}_2 = (0, 1, 0),\ \overrightarrow{u}_3 = (0, 0, 1),\ \overrightarrow{v}_1 = (1, 0),\ \overrightarrow{v}_2 = (0, 1);$

b) $\overrightarrow{u}_1 = (0, 2, 0),\ \overrightarrow{u}_2 = (0, 0, 2),\ \overrightarrow{u}_3 = (2, 0, 0),\ \overrightarrow{v}_1 = (1, 0),\ \overrightarrow{v}_2 = (0, 1);$

c) $\overrightarrow{u}_1 = (1, 0, 0),\ \overrightarrow{u}_2 = (1, 1, 0),\ \overrightarrow{u}_3 = (1, 1, 1),\ \overrightarrow{v}_1 = (1, 1),\ \overrightarrow{v}_2 = (1, 2);$

d) $\overrightarrow{u}_1 = (1, 0, 0),\ \overrightarrow{u}_2 = (0, 1, 0),\ \overrightarrow{u}_3 = (0, 0, 1),\ \overrightarrow{v}_1 = (1, 1),\ \overrightarrow{v}_2 = (1, 2).$

Exercício 63 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear que na base canónica de* $\mathbb{R}^2$ *é representada por*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule mediante uma matriz de mudança de base apropriada:

a) a representação matricial de T na base $\overrightarrow{v}_1 = (0, 2),\ \overrightarrow{v}_2 = (2, 0);$

b) a representação matricial de T na base $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1),\ \overrightarrow{v}_2 = (1, 2).$

Exercício 64 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear que na base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *é representada por*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

calcule mediante uma matriz de mudança de base apropriada:

a) a representação matricial de T na base $\overrightarrow{v}_1 = (0, 2, 0),\ \overrightarrow{v}_2 = (0, 0, 2),\ \overrightarrow{v}_3 = (2, 0, 0);$

b) a representação matricial de T na base $\overrightarrow{v}_1 = (1, 0, 0),\ \overrightarrow{v}_2 = (1, 1, 0),\ \overrightarrow{v}_3 = (1, 1, 1).$

Exercício 65 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear que na base canónica de* $\mathbb{R}^2$ *é representada por*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $T\,(x, y)$*.*

Exercício 66 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear que na base* $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1),\ \overrightarrow{v}_2 = (1, 2)$ *é representada por*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $T\,(x, y)$*.*

Exercício 67 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear que na base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *é representada por*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $T(x, y, z)$.

Exercício 68 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear que, na base* $\overrightarrow{v}_1 = (1,0,0)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1,1,0)$, $\overrightarrow{v}_3 = (1,1,1)$ *é representada por*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $T(x, y, z)$.

Exercício 69 *Calcule bases para o espaço nulo e para a imagem de cada uma das seguintes transformações lineares.*

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (2x + y, 2x + y)$;
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x + y, x - y)$;
c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z, y - z)$;
d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z, -x - 2y + z)$;
e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x - z, x + 2z, y + 3z)$;
f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x - z, y + z)$;
g) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (2x + y - 3z, -6x - 3y + 9z)$;
h) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x + y, x - y, x)$;
i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (2x + y, 4x + 2y, 0)$;

Exercício 70 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear que na base* $\overrightarrow{v}_1 = (1,1), \overrightarrow{v}_2 = (1,-1)$ *é representada pela matriz*

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule bases para o espaço nulo e para a imagem de T.

Exercício 71 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear que na base*

$$\overrightarrow{v}_1 = (-1,1,1), \overrightarrow{v}_2 = (1,-1,1), \overrightarrow{v}_3 = (1,1,-1)$$

é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule bases para o espaço nulo e para a imagem de T.

Exercício 72 *Seja* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *uma transformação linear e* A *a matriz que representa* T *nas bases canónicas de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$*. Comente as seguintes afirmações:*

a) A dimensão do núcleo de T coincide com a nulidade de A;
b) T é injectiva se e só se a nulidade de A é igual a zero;
c) T é injectiva se e só se a característica de A coincide com o número de colunas de A;
d) A dimensão da imagem de T coincide com a característica de A;
e) T é sobrejectiva se e só a característica de A coincide com o número de linhas de A.

Exercício 73 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por*

$$T(x, y, z) = (x + y, x + y - z) .$$

a) Calcule a matriz que representa T na base canónica.
b) Calcule uma base para o núcleo de T. A transformação T é injectiva?
c) Calcule uma base para a imagem de T. T é sobrejectiva?
d) Resolva a equação $T(x, y, z) = (1, 1)$
e) Existe algum vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual a equação $T(x, y, z) = (a, b)$ é impossível?
f) Existe algum vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual a equação $T(x, y, z) = (a, b)$ é possível e determinada?

Exercício 74 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear que na base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *é representada pela matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcule uma base para o núcleo de T. T é injectiva?
b) Calcule uma base para a imagem de T. T é sobrejectiva?
c) Resolva a equação $T(x, y, z) = (3, 3, 0)$
d) Existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual a equação $T(x, y, z) = (a, b, c)$ é impossível?
e) Existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual a equação $T(x, y, z) = (a, b, c)$ é indeterminada?

Exercício 75 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear que na base* $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1, 0)$ *é representada por*

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule uma base para o núcleo de T. T é injectiva?
b) Calcule uma base para a imagem de T. T é sobrejectiva?
c) Resolva a equação $T(x, y) = (3, 2)$
d) Existe algum vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual a equação $T(x, y) = (a, b)$ é impossível?
e) Existe algum vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual a equação $T(x, y) = (a, b)$ é possível e determinada?

Exercício 76 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear que na base* $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{v}_3 = (1, 0, 0)$ *é representada por*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule uma base para o núcleo de T. T é injectiva?
b) Calcule uma base para a imagem de T. T é sobrejectiva?
c) Mostre que equação $T(x, y, z) = (2, 4, 0)$ não tem soluções.
e) Existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual a equação $T(x, y, z) = (a, b, c)$ é indeterminada;

Exercício 77 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por*

$$T(x, y) = (x + y, x + 2y).$$

a) Calcule a matriz que representa T na base canónica.
b) Mostre que T é bijectiva e calcule $T^{-1}(x, y)$.
c) Resolva a equação linear $T(x, y) = (1, 1)$.

Exercício 78 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear definida por*

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - 4z, z).$$

a) Calcule a matriz que representa T na base canónica.
b) Mostre que T é bijectiva e calcule $T^{-1}(x, y, z)$.
c) Resolva a equação linear $T(x, y, z) = (1, 1, 2)$.

Exercício 79 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear que na base* $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{v}_3 = (1, 0, 0)$ *é representada por*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que T é bijectiva e calcule $T^{-1}(x, y, z)$.
b) Resolva a equação linear $T(x, y, z) = (1, 2, 1)$.

Exercício 80 *Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear definida por*

$$T(p(t)) = p'(t) - 2p(t).$$

a) Calcule a matriz que representa T na base $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ com

$$p_1(t) = 1,\ p_2(t) = t \text{ e } p_3(t) = t^2.$$

b) Mostre que T é bijectiva, e calcule a matriz que representa T^{-1} na mesma base. Conclua que $T^{-1}(q(t)) = -\frac{1}{2}q(t) - \frac{1}{4}q'(t) - \frac{1}{8}q''(t)$, para qualquer $q(t) \in \mathcal{P}_2$.
c) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação linear $p'(t) - 2p(t) = 1 + t + t^2$.

Exercício 81 *Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear definida por*

$$T(p(t)) = t^2 p''(t) - 2p(t).$$

a) Calcule a matriz que representa T na base $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ com

$$p_1(t) = 1,\ p_2(t) = t,\ p_3(t) = t^2.$$

b) Calcule uma base para $\mathcal{N}(T)$ e conclua que T não é injectiva nem sobrejectiva.
c) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação linear $t^2 p''(t) - 2p(t) = 1$.

Exercício 82 *No espaço linear V das funções reais de de variável real duas vezes diferenciáveis, considere a transformação linear $T : V \to V$ definida por $T(f) = f'' - 2f' + f$.*

a) Recorra ao Exercício 58, para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$.
b) Sabendo que $f(t) \equiv 1$ é uma solução da equação linear $T(f) = 1$, calcule a única solução da mesma equação que verifica $f(0) = f'(0) = 0$.

Soluções

60)

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

62)

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

63)

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

64)

a) $B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$; b) $B=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&2\end{bmatrix}$.

65) $T(x,y)=(3x+2y,x+2y)$.

66) $T(x,y)=(4x,4x+y)$.

67) $T(x,y,z)=(x+2y+z,x,y+2z)$.

68) $T(x,y,z)=(2x+y,x+z,y+z)$.

69)

a) $\{(1,-2)\}$ é base de $\mathrm{N}(T)$ e $\{(1,1)\}$ é base de $\mathcal{I}(T)$;

b) Tem-se $\mathcal{N}(T)=\{0\}$, logo $\varnothing$ é base de $\mathcal{N}(T)$. Uma base para $\mathcal{I}(T)$ pode ser $\{(1,1)\,,(1,-1)\}$;

c) Tem-se $\mathcal{N}(T)=\{(-2z,z,z):z\in\mathbb{R}\}$, logo $\{(-2,1,1)\}$ é base de $\mathcal{N}(T)$. Uma base para $\mathcal{I}(T)$ pode ser $\{(1,2,0)\,,(1,2,1)\}$;

d) Tem-se $\mathcal{N}(T)=\{(-2y,y,0):z\in\mathbb{R}\}$, logo $\{(-2,1,0)\}$ é base de $\mathcal{N}(T)$. Uma base para $\mathcal{I}(T)$ pode ser $\{(1,2,-1)\,,(-1,-2,-1)\}$;

e) Tem-se $\mathcal{N}(T)=\{0\}$, logo $\varnothing$ é base de $\mathcal{N}(T)$. Uma base para $\mathcal{I}(T)$ pode ser $\{(1,1,0)\,,(0,0,1)\,,(-1,2,3)\}$;

f) Tem-se $\mathcal{N}(T)=\{(z,-z,z):z\in\mathbb{R}\}$, logo $\{(1,-1,1)\}$ é base de $\mathcal{N}(T)$. Uma base para $\mathcal{I}(T)$ pode ser $\{(1,0)\,,(0,1)\}$;

g) Tem-se $\mathcal{N}(T)=\left\{(\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}y,y,z):y,z\in\mathbb{R}\right\}$, logo $\left\{(-\frac{1}{2},1,0),(\frac{3}{2},0,1)\right\}$ é base de $\mathcal{N}(T)$. Uma base para $\mathcal{I}(T)$ pode ser $\{(2,-6)\}$;

h) Tem-se $\mathcal{N}(T)=\{0\}$, logo $\varnothing$ é base de $\mathcal{N}(T)$. Uma base para $\mathcal{I}(T)$ pode ser $\{(1,1,1)\,,(1,-1,0)\}$;

i) Tem-se $\mathcal{N}(T)=\left\{(-\frac{1}{2}y,y):y\in\mathbb{R}\right\}$, logo $\left\{(-\frac{1}{2},1)\right\}$ é base de $\mathcal{N}(T)$. Uma base para $\mathcal{I}(T)$ pode ser $\{(2,4,0)\}$.

70) $\{(0,1)\}$ é base de $\mathcal{N}(T)$, e $\{(5,1)\}$ é base de $\mathcal{I}(T)$.

71) $\{(-1,0,1)\}$ é base de $\mathcal{N}(T)$, $\{(1,2,1)\,,(0,2,0)\}$ é base de $\mathcal{I}(T)$.

73)

a) $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&-1\end{bmatrix}$.

b) $\{(-1,1,0)\}$ é base de $\mathcal{N}(T)$. A transformação T não é injectiva pois $\dim\mathcal{N}(T)\neq 0$.

c) $\{(1,1)\,,(0,-1)\}$é base de $\mathcal{I}(T)$. A transformação T é sobrejectiva pois $\dim\mathcal{I}(T)=2=\dim\mathbb{R}^2$

d) O conjunto das soluções é $\mathcal{N}(T)+(1,0,0)=\{(1-y,y,0):y\in\mathbb{R}\}$

e) Não existe porque T é sobrejectiva.

f) Como T é sobrejectiva e não injectiva, a equação $T(x, y, z) = (a, b)$ é possível e indeterminada, para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

74)

a) Tem-se $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0, 0)\}$, logo T é injectiva.

b) Uma base para $\mathcal{I}(T)$ é $\{(1, 2, 0), (2, 1, 0), (2, 4, 2)\}$, logo $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^3$ pelo que T é sobrejectiva.

c) A única solução da equação é $(-2, 1, 3/2)$.

d) e e) Como T é bijectiva a equação $T(x, y, z) = (a, b, c)$ é possível e determinada para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

75)

a) $\{(1, 2)\}$ é base de $\mathcal{N}(T)$, logo T não é injectiva.

b) Uma base para $\mathcal{I}(T)$ é $\{(6, 4)\}$, pelo que T não é sobrejectiva.

c) O conjunto das soluções é $\{(0, -1)\} + \mathcal{N}(T)$.

d) e e) Como T é não injectiva nem sobrejectiva, a equação $T(x, y) = (a, b)$ é impossível ou indeterminada para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

76)

a) $\{(1, 1, 2)\}$ é base de $\mathcal{N}(T)$, logo T não é injectiva.

b) Uma base para $\mathcal{I}(T)$ é $\{(8, 6, 2), (-2, 0, 0)\}$, pelo que T não é sobrejectiva.

d) e e) Como T é não injectiva nem sobrejectiva, a equação $T(x, y, z) = (a, b, c)$ é impossível ou indeterminada, para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$.

77)

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $T^{-1}(x, y) = (2x - y, -x + y)$; c) Como T é bijectiva, a única solução da equação é o vector $(x, y) = T^{-1}(1, 1) = (1, 0)$.

78)

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $T^{-1}(x, y, z) = (2x - y - 6z, -x + y + 5z, z)$; c) Como T é bijectiva, a única solução da equação é o vector $(x, y, z) = T^{-1}(1, 1, 2) = (-11, 10, 2)$.

79)

a) $T^{-1}(x, y, z) = (-x + 2y, y, z)$; b) A única solução da equação é $(3, 2, 1)$.

80)

a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; c) $-1 - t - \frac{1}{2}t^2$.

81)

a) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; c) O conjunto das soluções é $\left\{-\frac{1}{2} + a_3 t^2 : a_3 \in \mathbb{R}\right\}$.

Valores e vectores próprios

Exercício 83 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por* $T(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$. *Considere os vectores* $\overrightarrow{v}_1 = (2, 1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (-1, 1)$, $\overrightarrow{v}_3 = (2, 3)$ *e* $\overrightarrow{v}_4 = (4, 4)$, *e identifique os que são vectores próprios de* T. *Diga ainda quais são os valores próprios de* T.

Exercício 84 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear definida por*

$$T(x, y, z) = (0, y + 3z, 3y + z) .$$

Considere ainda os vectores $\overrightarrow{v}_1 = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (0, -1, 1)$, $\overrightarrow{v}_3 = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v}_4 = (-1, 1, 3)$ *e* $\overrightarrow{v}_5 = (0, 3, 3)$, *e identifique os que são vectores próprios de* T. *Diga quais são os valores próprios de* T.

Exercício 85 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear definida por*

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 2z, 2x + y + 2z, 2x + 2y + z) .$$

Considere os vectores $\overrightarrow{v}_1 = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v}_3 = (-2, 0, 2)$, $\overrightarrow{v}_4 = (-1, 1, 3)$ *e* $\overrightarrow{v}_5 = (-1, 1, 0)$, *e identifique os que são vectores próprios de* T. *Quais são os valores próprios de* T *?*

Exercício 86 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por* $T(x, y) = (x + y, x + y)$. *Mostre que os vectores* $\overrightarrow{v}_1 = (1, -1)$ *e* $\overrightarrow{v}_2 = (1, 1)$ *determinam uma base de* $\mathbb{R}^2$ *constituída por vectores próprios de* T. *Calcule a representação matricial de* T *nesta base.*

Exercício 87 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear definida por*

$$T(x, y, z) = (y, y, y) .$$

Mostre que os vectores $\overrightarrow{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1, 1, 1)$ *e* $\overrightarrow{v}_3 = (0, 0, 1)$ *determinam uma base de* $\mathbb{R}^3$ *constituída por vectores próprios de* T. *Calcule a representação matricial de* T *nesta base.*

Exercício 88 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por* $T(x, y) = (x + 2y, 3y)$.

a) Calcule o polinómio característico de T;
b) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de T;
c) Determine uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída por vectores próprios de T. Qual é a representação matricial de T nesta base?

Exercício 89 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que na base canónica de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule o polinómio característico de T;.
b) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de T;
c) Determine uma matriz de mudança de base S e uma matriz diagonal D tais que $D = S^{-1}AS$.

Exercício 90 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que na base canónica de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule o polinómio característico de T;.
b) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de T;
c) Mostre que não existe uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída por vectores próprios de T.

Exercício 91 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por*

$$T(x, y, z) = (y + z, 2y + z, y + 2z).$$

a) Calcule o polinómio característico de T;.
b) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de T;
c) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de T. Qual é a representação matricial de T nesta base?
d) Designando por A a matriz que representa T na base canónica de $\mathbb{R}^3$, determine uma matriz de mudança de base S e uma matriz diagonal D tais que $D = S^{-1}AS$.

Exercício 92 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por*

$$T(x, y, z) = (3x, 2y + z, 2z).$$

a) Calcule o polinómio característico de T;
b) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de T;
c) Mostre que não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de T.

Exercício 93 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que na base canónica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule o polinómio característico de T;.
b) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de T;
c) Determine uma matriz de mudança de base S e uma matriz diagonal D tais que $D = S^{-1}AS$.

Exercício 94 *Considere as matrizes:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \; e \; C = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 24 & -10 \end{bmatrix}.$$

Mostre que todas são diagonalizáveis e calcule A^n, B^n e C^n, para $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 95 *Considere as matrizes:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} e \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mostre que as matrizes A e B (não sendo diagonalizáveis enquanto matrizes reais) são diagonalizáveis enquanto matrizes complexas. Calcule A^n e B^n, para $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 96 *Mostre que se uma matriz $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ não é diagonalizável, então existe uma matriz de mudança de base $S \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tal que*

$$A = S \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} S^{-1} e \text{ mais geralmente } A^n = S \begin{bmatrix} \lambda^n & \lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} S^{-1},$$

onde λ designa o único valor próprio de A.

Exercício 97 *Com base no exercício anterior calcule A^n e B^n com*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercício 98 *Considere o sistema de equações diferenciais lineares*

$$A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} \; com \; A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Decida quais dos seguintes pares de funções são soluções deste sistema: $(-e^t, e^t)$, (e^{3t}, e^{3t}), (e^t, e^{3t}).

Exercício 99 *Considere uma matriz* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *e designe por* $\mathcal{S}_A$ *o conjunto das soluções do sistema*

$$A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que $\mathcal{S}_A$ *com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar tem estrutura de espaço linear.*

b) Mostre que se $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, *então os pares de funções* $(e^{\lambda_1 t}, 0)$ *e* $(0, e^{\lambda_2 t})$ *constituem uma base para* $\mathcal{S}_D$, *e portanto*

$$\mathcal{S}_D = \left\{ \left(c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}\right) : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sugestão: mostre que se $(x_1(t), x_2(t)) \in \mathcal{S}_D$ *então* $x_1(t)e^{-\lambda_1 t}$ *e* $x_2(t)e^{-\lambda_2 t}$ *são funções constantes.*

c) Mostre que se $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, *então os pares de funções* $(e^{\lambda t}, 0)$ *e* $(te^{\lambda t}, e^{\lambda t})$ *constituem uma base para* $\mathcal{S}_J$, *e portanto*

$$\mathcal{S}_J = \left\{ \left(c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, c_2 e^{\lambda t}\right) : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sugestão: mostre que se $(x_1(t), x_2(t)) \in \mathcal{S}_J$ *então* $x_2(t)e^{-\lambda t}$ *é uma função constante e* $x_1(t)e^{-\lambda t}$ *é um polinómio com grau* ≤ 1.

d) Mostre que se S *é uma matriz de mudança de base e* $B = S^{-1}AS$, *então tem-se:*

$$\mathcal{S}_A = \left\{ S \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} : (y_1(t), y_2(t)) \in \mathcal{S}_B \right\}.$$

Exercício 100 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que A é diagonalizável, identificando uma matriz diagonal D e uma matriz de mudança de base S tais que $A = SDS^{-1}$.
b) Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} 2x_1(t) + x_2(t) = x_1'(t) \\ x_1(t) + 2x_2(t) = x_2'(t) \end{cases}$$

Exercício 101 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que A é diagonalizável, identificando uma matriz diagonal D e uma matriz de mudança de base S tais que $A = SDS^{-1}$.
b) Calcule a única solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} 2x_1(t) + x_2(t) = x_1'(t) \\ -2x_1(t) + 5x_2(t) = x_2'(t) \end{cases}, \; x_1(0) = 1, \; x_2(0) = -1.$$

Exercício 102 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que A não é diagonalizável, identificando um bloco de Jordan J e uma matriz de mudança de base S tais que $A = SJS^{-1}$.
b) Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} 3x_1(t) + x_2(t) = x_1'(t) \\ -x_1(t) + 5x_2(t) = x_2'(t) \end{cases}$$

Exercício 103 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que A não é diagonalizável, identificando um bloco de Jordan J e uma matriz de mudança de base S tais que $A = SJS^{-1}$.
b) Calcule a única solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} -x_1(t) + 9x_2(t) = x_1'(t) \\ -x_1(t) + 5x_2(t) = x_2'(t) \end{cases}, \; x_1(0) = 5, \; x_2(0) = 2.$$

Exercício 104 *Classificar as seguintes matrizes simétricas, em definidas positivas, definidas negativas, semidefinidas positivas, semidefinidas negativas ou indefinidas:*

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 105 *Classificar as seguintes formas quadráticas, em definidas positivas, definidas negativas, semidefinidas positivas, semidefinidas negativas ou indefinidas:*

a) $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$;
b) $Q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$;
c) $Q(x, y) = -3x^2 + 2yx - 2y^2$;
d) $Q(x, y) = 3x^2 + 4yx$;
e) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4yx$;
f) $Q(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 2zx$.

Soluções

83) Temos $T(2,1) = (4,5) \neq \lambda(2,1)$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, logo $\overrightarrow{v}_1$ não é vector próprio de T. Temos $T(-1,1) = (1,-1) = -1(-1,1)$, logo $\overrightarrow{v}_2$ é vector próprio de T associado ao valor próprio -1. Temos $T(2,3) = (8,7) \neq \lambda(2,3)$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, logo $\overrightarrow{v}_3$ não é vector próprio de T. Temos $T(4,4) = (12,12) = 3(4,4)$, logo $\overrightarrow{v}_4$ é vector próprio de T associado ao valor próprio 3. Os escalares -1 e 3 são os únicos valores próprios de T.

84) Os vectores $\overrightarrow{v}_2$, $\overrightarrow{v}_3$ e $\overrightarrow{v}_5$ são vectores próprios de T. Os escalares -2, 0 e 4 são os únicos valores próprios de T.

85) Os vectores $\overrightarrow{v}_2$, $\overrightarrow{v}_3$ e $\overrightarrow{v}_5$ são vectores próprios de T. Os escalares -1 e 5 são os únicos valores próprios de T.

86) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

87) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

88)

a) $P(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)$; b) Os escalares 1 e 3 são os únicos valores próprios de T. Os subespaços próprios de T são: $E(1) = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $E(3) = \{(y,y) : y \in \mathbb{R}\}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

89)

a) $P(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 9$; b) Os escalares -1 e 5 são os únicos valores próprios de T. Os subespaços próprios de T são : $E(-1) = \{(-y,y) : y \in \mathbb{R}\}$ e $E(5) = \{(y,y) : y \in \mathbb{R}\}$; c) $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

90)

a) $P(\lambda) = (2-\lambda)^2$; b) O escalar 2 é o único valor próprio de T, e $E(2) = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ .c) Se existisse uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída por vectores próprios de T, teríamos $\dim E(2) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$, já que 2 é o único valor próprio de T. Mas isto não pode acontecer, porque pela alínea anterior temos $\dim E(2) = 1$.

91)

a) $P(\lambda) = -\lambda\left[(2-\lambda)^2 - 1\right]$; b) Os escalares 0, 1 e 3 são os únicos valores próprios de T. Tem-se $E(0) = \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}$, $E(1) = \{(0,-z,z) : z \in \mathbb{R}\}$ e $E(3) = \{(2z,3z,3z) : z \in \mathbb{R}\}$;
c) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

92)

a) $P(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)^2$; b) Os escalares 2 e 3 são os únicos valores próprios de T. Tem-se $E(2) = \{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\}$, $E(3) = \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}$; c) Não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de T porque $\dim E(2) + \dim E(3) = 2 < \dim\ \mathbb{R}^3$.

93)

a) $P(\lambda) = (9-\lambda)\left(\lambda^2 - 15\lambda + 54\right)$; b) Valores próprios: 6 e 9. Subespaços próprios: $E(6) = \{(0,z,z) : z \in \mathbb{R}\}$ e $E(9) = \{(2y+3z, 3y, 3z) : y, z \in \mathbb{R}\}$; c) $S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e

$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

94)

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}, B^n = \begin{bmatrix} 2-3^n & 3^n - 1 \\ 2 - 2(3^n) & 2(3^n) - 1 \end{bmatrix}, C^n = \begin{bmatrix} 3(2^n) - 2(-2)^n & (-2)^n - (2^n) \\ 6(2^n) - 6(-2)^n & 3(-2)^n - 2(2^n) \end{bmatrix}.$$

95)

$$A^n = \sqrt{2^n}\begin{bmatrix} \cos(n\pi/4) & \sin(n\pi/4) \\ -\sin(n\pi/4) & \cos(n\pi/4) \end{bmatrix}; B^n = \sqrt{8^n}\begin{bmatrix} \cos(\pi n/4) & \frac{1}{2}\sin(\pi n/4) \\ -2\sin(\pi n/4) & \cos(\pi n/4) \end{bmatrix}.$$

97)

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n - 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^n + 2^{n-1} \end{bmatrix} \text{ e } B^n = \begin{bmatrix} 3^n - 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ -3^{n-1} & 3^n + 3^{n-1} \end{bmatrix}.$$

100)

a) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $\mathcal{S}_A = \{(-c_1 e^t + c_2 e^{3t}, c_1 e^t + c_2 e^{3t}) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

101)

a) $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$; b) $(3e^{3t} - 2e^{4t}, 3e^{3t} - 4e^{4t})$

102)

a) $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$;

b) $\mathcal{S}_A = \{(c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t} + 2c_2 e^{4t}, c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t} + 3c_2 e^{4t}) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

103)

a) $S = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; b) $(5e^{2t} + 3te^{2t}, 2e^{2t} + te^{2t})$.

104)

a) Os valores próprios da matriz são 0 e 2, logo é semi-definida positiva; b) Os valores próprios da matriz são 1 e 3, logo é definida positiva; c) Os valores próprios da matriz são $-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{2}$ e $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{2}$ (ambos negativos), logo é definida negativa; d) Os valores próprios da matriz são -1 e 4, logo é indefinida; e) Os valores próprios da matriz são -1 e 3, logo é indefinida; f) Os valores próprios da matriz são -2, 1 e 3, logo é indefinida.

105)

a) Semi-definida positiva; b) Definida positiva; c) Definida negativa; d) Indefinida; e) Indefinida; f) Indefinida.

Projecções, comprimento e ortogonalidade

Exercício 106 *Identifique as aplicações* $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *que definem em* $\mathbb{R}^2$ *um produto interno:*

a) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$;
b) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_2$;
c) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = -2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$;
d) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_1 + 2x_1 y_2 + 3x_2 y_2$;
e) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_2$;
f) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_2 y_1 + x_1 y_2$;
g) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_2 y_1 y_2 + x_1 y_2$.

Exercício 107 *Identifique as aplicações* $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *que definem um produto interno em* $\mathbb{R}^3$*:*

a) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$;
b) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_2 + 3x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_3 y_3$;
c) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2 + 2x_3 y_3$;
d) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1 y_1 + 2x_2 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$;
e) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_3 x_1 y_1 + x_2 y_1$.

Exercício 108 *Considere em* $\mathbb{R}^2$ *o produto interno definido por*

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = 4x_1y_1 + 9x_2y_2.$$

a) Calcule $\|\overrightarrow{x}\|$, para um qualquer vector $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
b) Calcule o ângulo determinado pelos vectores $(1/2, 0)$ e $(0, 1/3)$;
c) Conclua pelas alíneas anteriores que os vectores $\overrightarrow{v}_1 = (1/2, 0)$ e $\overrightarrow{v}_2 = (0, 1/3)$ constituem uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$. Calcule as coordenadas de um vector $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ em relação a esta base.

Exercício 109 *Considere em* $\mathbb{R}^2$ *o produto interno definido por*

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2.$$

a) Calcule $\|\overrightarrow{x}\|$, para um qualquer vector $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
b) Calcule o ângulo determinado pelos vectores $(1, 0)$ e $(1, 1)$;
c) Conclua pelas alíneas anteriores que os vectores $\overrightarrow{v}_1 = (1, 0)$ e $\overrightarrow{v}_2 = (1, 1)$ constituem uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$. Calcule as coordenadas de um vector $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ em relação a esta base.

Exercício 110 *Considere em* $\mathbb{R}^3$ *o produto interno definido por*

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $\|\overrightarrow{x}\|$, para um qualquer vector $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;
b) Considere os vectores $\overrightarrow{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v}_2 = (-1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{v}_3 = (0, 0, 1)$.
Calcule os ângulos determinados pelos vectores: $\overrightarrow{v}_1$e $\overrightarrow{v}_2$; $\overrightarrow{v}_1$e $\overrightarrow{v}_3$; $\overrightarrow{v}_2$e $\overrightarrow{v}_3$.
c) Conclua pelas alíneas anteriores que $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Calcule as coordenadas de um vector $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ em relação a esta base.

Exercício 111 *Considere em* $\mathbb{R}^3$ *o produto interno definido por*

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_2 + 2x_2y_3 + 5x_3y_3.$$

a) Calcule $\|\overrightarrow{x}\|$, para um qualquer vector $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;
b) Considere os vectores $\overrightarrow{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v}_2 = (0, 1/2, 0)$ e $\overrightarrow{v}_3 = (0, -1/4, 1/2)$.
Calcule os ângulos determinados pelos vectores: $\overrightarrow{v}_1$e $\overrightarrow{v}_2$; $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_3$; $\overrightarrow{v}_2$ e $\overrightarrow{v}_3$.
c) Conclua pelas alíneas anteriores que $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Calcule as coordenadas de um vector $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ em relação a esta base.

Exercício 112 *Considere a base de* $\mathbb{R}^2$ *constituída pelos vectores* $\overrightarrow{v}_1 = (1, 0)$ *e* $\overrightarrow{v}_2 = (1, 1)$*. Mostre que existe um e um só produto interno em* $\mathbb{R}^2$ *para o qual a base* $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ *é ortonormada. Calcule* $\|\overrightarrow{x}\|$*, para um qualquer vector* $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 113 *Mais geralmente, demonstre que se* $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$ *é uma base de* $\mathbb{R}^n$, *então existe um único produto interno em* $\mathbb{R}^n$ *para o qual esta base é ortonormada.*

Exercício 114 *Considere em* $\mathcal{P}_2$ *o produto interno definido por*

$$\langle p(t), q(t)\rangle = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

com $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ *e* $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$.

a) Calcule $\|p(t)\|$ para um qualquer polinómio $p(t) \in \mathcal{P}_2$;

b) Considere os vectores $p_1(t) = 1+t$, $p_2(t) = t$ e $p_3(t) = t+t^2$. Mostre que os vectores $p_1(t)$, $p_2(t)$ e $p_3(t)$ constituem uma base ortonormada de $\mathcal{P}_2$. Calcule as coordenadadas de um polinómio $p(t) \in \mathcal{P}_2$ em relação a esta base.

Exercício 115 *Considere em* $\mathcal{P}_2$ *o produto interno definido por:*

$$\langle p(t), q(t)\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

a) Calcule $\|p(t)\|$ para um qualquer polinómio $p(t) \in \mathcal{P}_2$;

b) Mostre que os polinómios

$$p_1(t) = 1 - t^2,\ p_2(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 \text{ e } p_3(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2$$

constituem uma base ortonormada de $\mathcal{P}_2$. Calcule as coordenadadas do polinómio $p(t) = 1$ nesta base.

Exercício 116 *Considere em* $\mathcal{P}_2$ *o produto interno definido por:*

$$\langle p(t), q(t)\rangle = p(0)\,q(0) + p'(0)\,q'(0) + p'(1)\,q'(1).$$

a) Calcule $\|p(t)\|$ para um qualquer polinómio $p(t) \in \mathcal{P}_2$;

b) Calcule o ângulo determinado pelos polinómios $p(t) = 1$ e $q(t) = 2 + t^2$.

Exercício 117 *Seja* V *um espaço euclideano com dimensão finita, e* U *um subespaço de* V

a) Mostre que se $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_n\}$ é uma base de U então tem-se: $\overrightarrow{x} \in U^\perp$ se e só se $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}_1\rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}_2\rangle = \cdots = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}_n\rangle = 0$.

b) Mostre $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$

c) Mostre $\left(U^\perp\right)^\perp = U$.

Exercício 118 *Considerando o produto interno usual em* $\mathbb{R}^3$, *calcule bases para o complemento ortogonal de* U *quando:*

a) $U = L\{(1,1,1),(1,0,1)\}$;
b) $U = L\{(1,0,2)\}$;
c) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$;
d) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = y + z = 0\}$.

Exercício 119 *Resolva as alíneas b) e c) do problema anterior, quando em $\mathbb{R}^3$ se considera o seguinte produto interno:*

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 120 *Considerando o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$, calcule bases para o complemento ortogonal de U quando:*

a) $U = L\{(1,0,1,1)\}$;
b) $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z + 2w = x + 2y - z = 0\}$;

Exercício 121 *Resolva o problema anterior, quando em $\mathbb{R}^4$ se considera o seguinte produto interno:*

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Exercício 122 *Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, considere o subespaço*

$$U = L\{(1,1,1),(1,0,0)\}.$$

a) Calcule a projecção ortogonal de $(1,0,1)$ sobre U ;
b) Qual é a distância de $(1,0,1)$ a U?

Exercício 123 *Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, considere o subespaço*

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\right\}.$$

a) Calcule a projecção ortogonal de $(1,0,0)$ sobre U;
b) Qual é a distância de $(1,0,0)$ a U?

Exercício 124 *Resolva o Exercício 122, quando se considera em $\mathbb{R}^3$o seguinte produto interno*

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 125 *Em $\mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, considere o subespaço*

$$U = L\{(1,1,1,1),(1,0,1,0)\}.$$

a) Calcule uma base ortonormada para U;
b) Calcule a projecção ortogonal de $(0,1,0,2)$ sobre U ;
c) Qual é a distância de $(0,1,0,2)$ a U?

Exercício 126 *Em $\mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, considere o subespaço*

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0 \right\}.$$

a) Calcule uma base ortonormada para $U^\perp$;
b) Calcule a projecção ortogonal de $(1,0,1,0)$ sobre U;
c) Qual é a distância de $(1,0,1,0)$ a U?

Exercício 127 *Em $\mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, considere o subespaço*

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = y - z + w = 0 \right\}.$$

a) Calcule uma base ortonormada para U;
b) Calcule a projecção ortogonal de $(0,0,1,0)$ sobre U;
c) Qual é a distância de $(0,0,1,0)$ a U?

Exercício 128 *Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ com o seguinte produto interno:*

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Considere ainda o subespaço de $\mathcal{P}_2$

$$U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : p(0) = 0 \}.$$

a) Calcule a projecção ortogonal do polinómio $1+t$ sobre U;
b) Qual é a distância de $1+t$ a U?

Exercício 129 *Para cada uma das rectas de $\mathbb{R}^3$, calcule um ponto P e um subespaço S tais que $r = \{P\} + S$:*

a) r é a recta de $\mathbb{R}^3$ que passa pelos pontos $(1,1,1)$ e $(1,0,1)$;
b) r é a recta de $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $(1,0,2)$ e tem a direcção do vector $(1,1,0)$;
c) r é a recta de $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $(1,3,-1)$ e é ortogonal aos vectores $(1,2,1)$ e $(1,0,1)$.

Exercício 130 *Determine uma equação cartesiana para cada uma das rectas do exercício anterior.*

Exercício 131 *Para cada um dos planos de* $\mathbb{R}^3$*, calcule um ponto* P *e um subespaço* S *tais que* $\alpha = \{P\} + S$:

a) α é o plano de $\mathbb{R}^3$ que passa pelos pontos $(1,1,1)$, $(1,0,1)$ e $(1,0,0)$;
b) α é o plano de $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $(1,0,2)$ e é paralelo ao plano que passa pelos pontos $(0,0,0)$, $(1,1,0)$ e $(1,-1,0)$;
c) α é o plano de $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $(1,3,-1)$ e é ortogonal ao vector $(1,0,-2)$.

Exercício 132 *Determine uma equação cartesiana para cada um dos planos do exercício anterior.*

Exercício 133 *Seja* r_1 *a recta de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelos pontos* $(1,1,1)$ *e* $(1,0,1)$*, e* r_2 *a recta de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelos pontos* $(2,5,1)$ *e* $(0,5,1)$*. Determine a intersecção destas rectas.*

Exercício 134 *Seja* r *a recta de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelos pontos* $(2,-1,3)$ *e* $(4,-5,5)$*, e* α *o plano de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelos pontos* $(1,0,0)$*,* $(2,1,1)$ *e* $(1,1,2)$ *. Determine a intersecção da recta* r *com o plano* α*.*

Exercício 135 *Seja* β *o plano* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelo ponto* $(0,1,0)$ *e é ortogonal ao vector* $(1,1,1)$*. Determine uma equação cartesiana para a intersecção do plano* β *com o plano* α *do exercício anterior.*

Exercício 136 *Mostre que três planos de* $\mathbb{R}^3$ *com normais linearmente independentes se intersectam num ponto.*

Exercício 137 *Mostre que se* r_1 *e* r_2 *são rectas não paralelas de* $\mathbb{R}^3$*, então existe um único par de planos paralelos* α_1 *e* α_2 *tais que* $r_1 \subset \alpha_1$ *e* $r_2 \subset \alpha_2$*.*

Exercício 138 *Mostre que a distância de um ponto* (x_0, y_0, z_0) *a um plano de* $\mathbb{R}^3$ *com equação cartesiana* $ax + by + cz = d$ *é*

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exercício 139 *Mostre que se* α_1 *e* α_2 *são planos paralelos de* $\mathbb{R}^3$ *com equações cartesianas* $ax + by + cz = d_1$ *e* $ax + by + cz = d_2$*, então a distância de* α_1 *a* α_2 *é dada por*

$$\frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exercício 140 *Sejam* r_1 *e* r_2 *duas rectas não paralelas de* $\mathbb{R}^3$*, e* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *um vector ortogonal a* r_1 *e* r_2*. Mostre que se* (x_1, y_1, z_1) *é um ponto de* r_1 *e* (x_2, y_2, z_2) *é um ponto de* r_2*, então a distância de* r_1 *a* r_2 *é dada por*

$$\frac{|a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Soluções

106)

a) Define um produto interno; b) Não define um produto interno; c) Não define um produto interno; d) Define um produto interno; e) Não define um produto interno; f) Não define um produto interno; g) Não define um produto interno.

107)

a) Define um produto interno; b) Não define um produto interno; c) Define um produto interno; d) Não define um produto interno; e) Não define um produto interno.

108)

a) $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{4x_1^2 + 9x_2^2}$; b) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; c) $(2x_1, 3x_2)$.

109)

a) $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2}$; b) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; c) $(x_1 - x_2, x_2)$.

110)

a) $\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + x_3^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2}$; b) $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$; c) $(x_1 + x_2, x_2, x_3)$.

111)

a) $\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3}$; b) $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$; c) $(x_1, 2x_2 + x_3, 2x_3)$.

114)

a) $\|a_0 + a_1t + a_2t^2\| = \sqrt{2a_0^2 + a_1^2 + 2a_2^2 - 2a_0a_1 + 2a_0a_2 - 2a_1a_2}$; c) As coordenadas de $a_0 + a_1t + a_2t^2$ nesta base são $(a_0, a_1 - a_0 - a_2, a_2)$.

115)

a) $\|p(t)\| = \sqrt{p(-1)^2 + p(0)^2 + p(1)^2}$; c) $(1, 1, 1)$.

116)

a) $\|p(t)\| = \sqrt{p(0)^2 + p'(0)^2 + p'(1)^2}$; b) $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

118)

a) $\{(-1, 0, 1)\}$; b) $\{(-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$; c) $\{(1, 1, -1)\}$ d) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

119)

b) $\{(-5, 0, 3), (0, 1, 0)\}$; c)$\{(-3, -1, 2)\}$.

120)

a) $\{(0, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$; b) $\{(1, 2, 1, 2), (1, 2, -1, 0)\}$

121)

a) $\{(-1, 2, 0, 0), (-1, 0, 2, 0), (-1, 0, 0, 2)\}$; b) $\{(-1, 2, 0, 0), (1, 0, 0, 2)\}$.

122)

a) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

123)

a) $(1/2, 1/2, 0)$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

124)

a) $(0, 1, 1)$; b) 1.

125)

a) $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$; b) $(0, \frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2})$; c) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

126)

a) $\left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$;b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; c) 1.

127)

a) $\left\{\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \frac{\sqrt{10}}{5}\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right\}$; b) $\frac{1}{5}(-1, 2, 3, 1)$; c) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

128)

a) $t + t^2$; b) 1.

129)

a) $P = (1, 1, 1)$ e $S = L\{(0, 1, 0)\}$; b) $P = (1, 0, 2)$ e $S = L\{(1, 1, 0)\}$; c) $P = (1, 3, -1)$ e $S = L\{(1, 0, -1)\}$;

130)

a) $\begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -x + y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} y = 3 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

131)

a) $P = (1, 1, 1)$ e $S = L\{(0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$; b) $P = (1, 0, 2)$ e $S = L\{(1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$; c) $P = (1, 3, -1)$ e $S = L\{(2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$;

132)

a) $x = 1$; b) $z = 2$; c) $-x + 2z = -3$.

133) $r_1 \cap r_2 = \{(1, 5, 1)\}$.

134) $r \cap \alpha = \{(1, 1, 2)\}$

135) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$.