Filas de Prioridade

Estrutura de Dados Avançada — QXD0015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

1º semestre/2023

Introdução

- Temos uma lista de tarefas a serem realizadas com uma certa prioridade.

Introdução

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Temos uma lista de tarefas a serem realizadas com uma certa prioridade.
  - Deseja-se que as tarefas sejam realizadas em ordem decrescente de prioridades.

Introdução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos uma lista de tarefas a serem realizadas com uma certa prioridade.
    - Deseja-se que as tarefas sejam realizadas em ordem decrescente de prioridades.
    - As prioridades das tarefas podem variar ao longo do tempo.

Introdução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos uma lista de tarefas a serem realizadas com uma certa prioridade.
  - Deseja-se que as tarefas sejam realizadas em ordem decrescente de prioridades.
  - As prioridades das tarefas podem variar ao longo do tempo.
  - Novas tarefas podem ingressar na tabela a cada instante.

Introdução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos uma lista de tarefas a serem realizadas com uma certa prioridade.
  - Deseja-se que as tarefas sejam realizadas em ordem decrescente de prioridades.
  - As prioridades das tarefas podem variar ao longo do tempo.
  - Novas tarefas podem ingressar na tabela a cada instante.
- Para encontrar a ordem desejada de execução das tarefas, um algoritmo deve:

Introdução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Temos uma lista de tarefas a serem realizadas com uma certa prioridade.
    - Deseja-se que as tarefas sejam realizadas em ordem decrescente de prioridades.
    - As prioridades das tarefas podem variar ao longo do tempo.
    - Novas tarefas podem ingressar na tabela a cada instante.
- Para encontrar a ordem desejada de execução das tarefas, um algoritmo deve:
    - sucessivamente, escolher o dado de maior prioridade e retirá-lo da lista.

Introdução

- Temos uma lista de tarefas a serem realizadas com uma certa prioridade.
  - Deseja-se que as tarefas sejam realizadas em ordem decrescente de prioridades.
  - As prioridades das tarefas podem variar ao longo do tempo.
  - Novas tarefas podem ingressar na tabela a cada instante.
- Para encontrar a ordem desejada de execução das tarefas, um algoritmo deve:
  - sucessivamente, escolher o dado de maior prioridade e retirá-lo da lista.
  - introduzir novos dados no momento adequado.

Fila de Prioridades

Uma fila de prioridades é uma estrutura de dados na qual a cada um de seus elementos está associada uma prioridade.

Fila de Prioridades

Uma fila de prioridades é uma estrutura de dados na qual a cada um de seus elementos está associada uma prioridade.

Prioridade: um valor numérico armazenado em algum dos campos de um elemento da estrutura de dados.

Fila de Prioridades

Uma fila de prioridades é uma estrutura de dados na qual a cada um de seus elementos está associada uma prioridade.

Prioridade: um valor numérico armazenado em algum dos campos de um elemento da estrutura de dados.

As filas de prioridades possuem três operações básicas:

Fila de Prioridades

Uma fila de prioridades é uma estrutura de dados na qual a cada um de seus elementos está associada uma prioridade.

Prioridade: um valor numérico armazenado em algum dos campos de um elemento da estrutura de dados.

As filas de prioridades possuem três operações básicas:

- Selecionar elemento com maior prioridade.

Fila de Prioridades

Uma fila de prioridades é uma estrutura de dados na qual a cada um de seus elementos está associada uma prioridade.

Prioridade: um valor numérico armazenado em algum dos campos de um elemento da estrutura de dados.

As filas de prioridades possuem três operações básicas:

- Selecionar elemento com maior prioridade.
- Inserir um novo elemento.

Fila de Prioridades

Uma fila de prioridades é uma estrutura de dados na qual a cada um de seus elementos está associada uma prioridade.

Prioridade: um valor numérico armazenado em algum dos campos de um elemento da estrutura de dados.

As filas de prioridades possuem três operações básicas:

- Selecionar elemento com maior prioridade.
- Inserir um novo elemento.
- Remover o elemento com maior prioridade.

Fila de Prioridades

Uma fila de prioridades é uma estrutura de dados na qual a cada um de seus elementos está associada uma prioridade.

Prioridade: um valor numérico armazenado em algum dos campos de um elemento da estrutura de dados.

As filas de prioridades possuem três operações básicas:

- Selecionar elemento com maior prioridade.
- Inserir um novo elemento.
- Remover o elemento com maior prioridade.

Duas outras operações auxiliares podem existir:

Fila de Prioridades

Uma fila de prioridades é uma estrutura de dados na qual a cada um de seus elementos está associada uma prioridade.

Prioridade: um valor numérico armazenado em algum dos campos de um elemento da estrutura de dados.

As filas de prioridades possuem três operações básicas:

- Selecionar elemento com maior prioridade.
- Inserir um novo elemento.
- Remover o elemento com maior prioridade.

Duas outras operações auxiliares podem existir:

- Alterar a prioridade de um elemento.

Fila de Prioridades

Uma fila de prioridades é uma estrutura de dados na qual a cada um de seus elementos está associada uma prioridade.

Prioridade: um valor numérico armazenado em algum dos campos de um elemento da estrutura de dados.

As filas de prioridades possuem três operações básicas:

- Selecionar elemento com maior prioridade.
- Inserir um novo elemento.
- Remover o elemento com maior prioridade.

Duas outras operações auxiliares podem existir:

- Alterar a prioridade de um elemento.
- Construir a fila a partir de um dado grupo de elementos.

Fila de Prioridades

Uma fila de prioridades é uma estrutura de dados na qual a cada um de seus elementos está associada uma prioridade.

Prioridade: um valor numérico armazenado em algum dos campos de um elemento da estrutura de dados.

As filas de prioridades possuem três operações básicas:

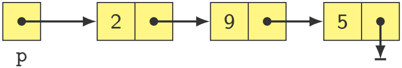
- Selecionar elemento com maior prioridade.
- Inserir um novo elemento.
- Remover o elemento com maior prioridade.

Duas outras operações auxiliares podem existir:

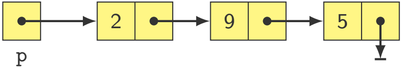
- Alterar a prioridade de um elemento.
- Construir a fila a partir de um dado grupo de elementos.

Como implementar esta estrutura de dados?

Primeira ideia — Lista não ordenada

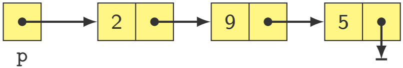


Primeira ideia — Lista não ordenada



- Inserção e construção: o novo elemento pode ser colocado em qualquer posição conveniente dependendo do tipo de alocação utilizada: sequencial ou encadeada.

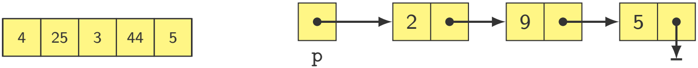
Primeira ideia — Lista não ordenada



- Inserção e construção: o novo elemento pode ser colocado em qualquer posição conveniente dependendo do tipo de alocação utilizada: sequencial ou encadeada.

- Remoção, alteração e seleção: implica percorrer a lista em busca do elemento de maior prioridade.

Primeira ideia — Lista não ordenada

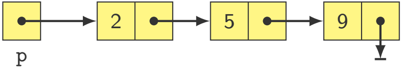


- Inserção e construção: o novo elemento pode ser colocado em qualquer posição conveniente dependendo do tipo de alocação utilizada: sequencial ou encadeada.

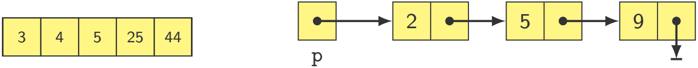
- Remoção, alteração e seleção: implica percorrer a lista em busca do elemento de maior prioridade.

- seleção: $O(n)$
- inserção $O(1)$
- remoção: $O(n)$
- alteração: $O(n)$
- construção: $O(n)$

Segunda ideia — Lista ordenada

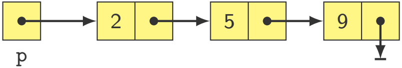


Segunda ideia — Lista ordenada



- Seleção e remoção: imediatas. Por quê?

Segunda ideia — Lista ordenada

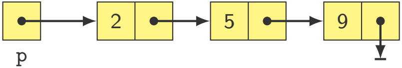


- Seleção e remoção: imediatas. Por quê?

- Inserção e alteração: percorrer a lista até encontrar posição correta do elemento. (pode ou não ocorrer deslocamento)

Segunda ideia — Lista ordenada

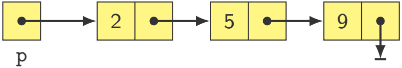
3	4	5	25	44



- Seleção e remoção: imediatas. Por quê?
- Inserção e alteração: percorrer a lista até encontrar posição correta do elemento. (pode ou não ocorrer deslocamento)
- Construção: exige ordenação prévia da lista.

Segunda ideia — Lista ordenada

3	4	5	25	44



- Seleção e remoção: imediatas. Por quê?

- Inserção e alteração: percorrer a lista até encontrar posição correta do elemento. (pode ou não ocorrer deslocamento)

- Construção: exige ordenação prévia da lista.

- seleção: $O(1)$
- inserção $O(n)$
- remoção: $O(1)$
- alteração: $O(\lg n)$ (sequencial) ou $O(n)$ (encadeada)
- construção: $O(n \lg n)$

Terceira ideia — ABB balanceada

- Seleção e remoção: elemento mais a direita na árvore.
- Inserção e alteração: descer até uma folha até encontrar posição correta do elemento.
- Construção: consiste em n inserções.
- seleção: $O(\lg n)$
- inserção $O(\lg n)$
- remoção: $O(\lg n)$
- alteração: $O(\lg n)$
- construção: $O(n \lg n)$

Terceira ideia — ABB balanceada

- Seleção e remoção: elemento mais a direita na árvore.
- Inserção e alteração: descer até uma folha até encontrar posição correta do elemento.
- Construção: consiste em n inserções.
- seleção: $O(\lg n)$
- inserção $O(\lg n)$
- remoção: $O(\lg n)$
- alteração: $O(\lg n)$
- construção: $O(n \lg n)$
- Pontos fracos: Seleção em $O(\lg n)$. Além disso, o uso de uma BST pode ser um exagero, pois suporta uma série de operações que não são necessárias neste problema. Em termos de espaço, exige mais ponteiros que uma lista encadeada.

Heap Binário

Estrutura de dados Heap Binário

- Existem dois tipos de heap: heap máximo e heap mínimo.
- Nesta aula analisamos o heap binário máximo.
- Chamaremos apenas de heap.

Estrutura de dados Heap Binário

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Existem dois tipos de heap: heap máximo e heap mínimo.
- Nesta aula analisamos o heap binário máximo.
- Chamaremos apenas de heap.
- Os heaps têm uma propriedade estrutural e uma propriedade de ordem.
    - Uma operação em um heap pode destruir uma das propriedades e não deve terminar até que todas as propriedades do heap estejam satisfeitas.

Definição de Heap — Propriedade de ordem

- Um heap é um vetor $A[1 \ldots n]$ que satisfaz a propriedade:

$$A[\lfloor i/2 \rfloor] \geq A[i], \text{ para } 2 \leq i \leq n.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
999	888	777	555	666	777	555	222	333	444	111	333	666	333

Definição de Heap — Propriedade de ordem

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um heap é um vetor $A[1 \dots n]$ que satisfaz a propriedade:

$$A[\lfloor i/2 \rfloor] \geq A[i], \text{ para } 2 \leq i \leq n.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
999	888	777	555	666	777	555	222	333	444	111	333	666	333

- Adoto a mesma convenção dos livros: suponho que os índices do vetor são $1 \dots n$ e não $0 \dots n-1$.

Definição de Heap — Propriedade de ordem

- Um heap é um vetor $A[1 \dots n]$ que satisfaz a propriedade:

$$A[\lfloor i/2 \rfloor] \geq A[i], \text{ para } 2 \leq i \leq n.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
999	888	777	555	666	777	555	222	333	444	111	333	666	333

- Adoto a mesma convenção dos livros: suponho que os índices do vetor são $1 \dots n$ e não $0 \dots n-1$.

- Observação: Segue imediatamente da definição que $A[1]$ é um elemento máximo do heap.

Definição de Heap — Propriedade de ordem

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Um heap é um vetor $A[1 \ldots n]$ que satisfaz a propriedade:

$$A[\lfloor i/2 \rfloor] \geq A[i], \text{ para } 2 \leq i \leq n.$$

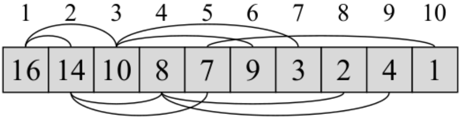
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
999	888	777	555	666	777	555	222	333	444	111	333	666	333

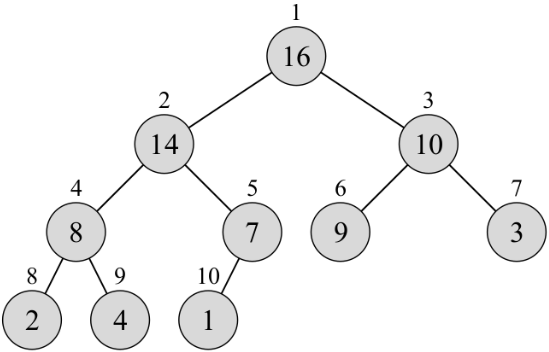
- Adoto a mesma convenção dos livros: suponho que os índices do vetor são $1 \ldots n$ e não $0 \ldots n-1$.

- Observação: Segue imediatamente da definição que $A[1]$ é um elemento máximo do heap.

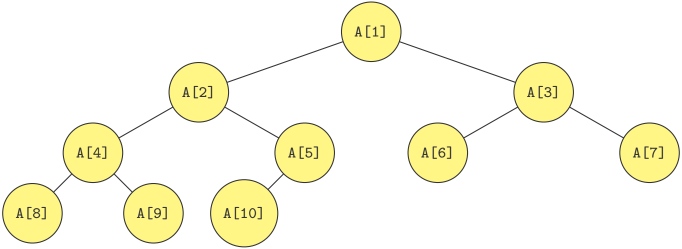
- Assim como o Cormen et al. , suponho que o array `A` que representa o heap é um objeto que possui dois atributos:
    - `A.length`: a capacidade total do array.
    - `A.heapSize`: quantos elementos do array A são elementos do heap. Note que `0` $\leq$ `A.heapSize` $\leq$ `A.length`.

Definição de Heap — Propriedade estrutural

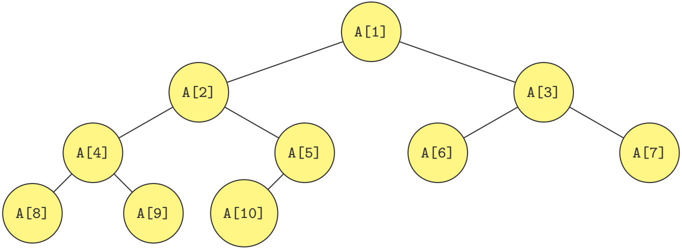




Ver heap como árvore binária completa

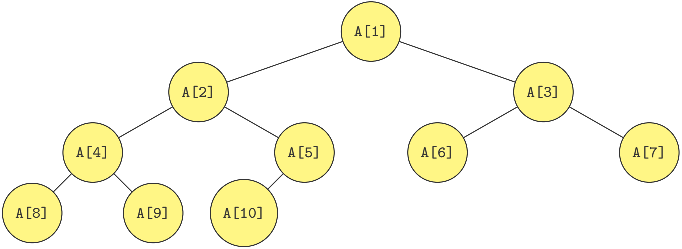


Ver heap como árvore binária completa



- O nó `A[1]` é a raiz da árvore.

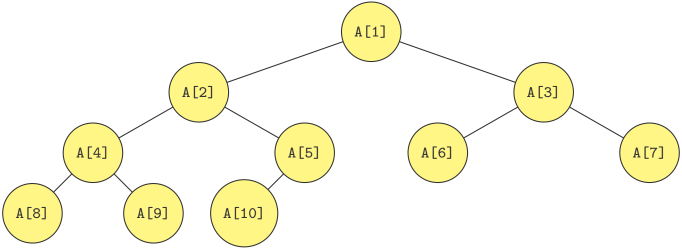
Ver heap como árvore binária completa



- O nó `A[1]` é a raiz da árvore.

Em relação a `A[i]`:

Ver heap como árvore binária completa

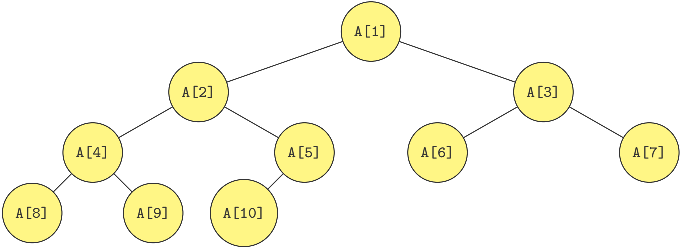


- O nó `A[1]` é a raiz da árvore.

Em relação a `A[i]`:

- o filho esquerdo é `A[2i]` e o filho direito é `A[2i+1]`

Ver heap como árvore binária completa

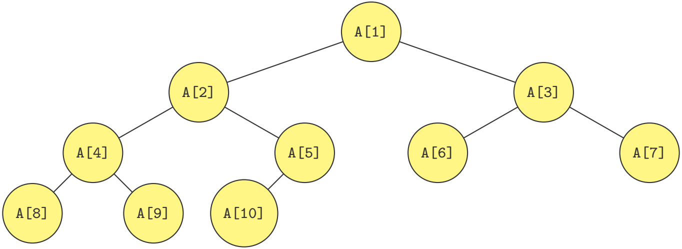


- O nó `A[1]` é a raiz da árvore.

Em relação a `A[i]`:

- o filho esquerdo é `A[2i]` e o filho direito é `A[2i+1]`
- o pai é `A[i/2]`

Ver heap como árvore binária completa



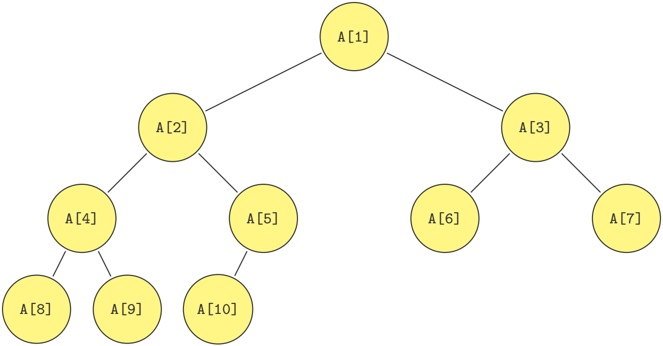
- O nó `A[1]` é a raiz da árvore.

Em relação a `A[i]`:

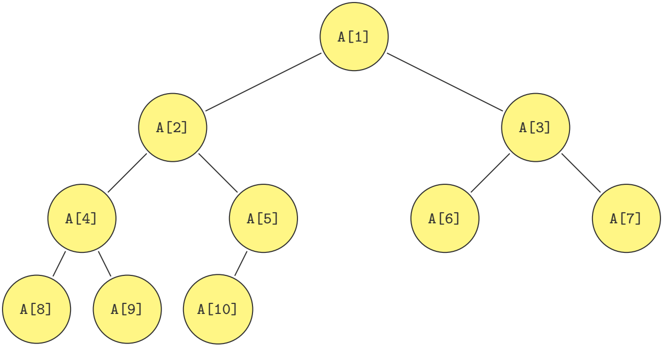
- o filho esquerdo é `A[2i]` e o filho direito é `A[2i+1]`
- o pai é `A[i/2]`

Atenção: A[1] não tem pai, o filho esquerdo de `A[i]` só existe se `2i` $\leq$ `A.length` e o filho direito de `A[i]` só existe se `2i+1` $\leq$ `A.length`.

Ver heap como árvore binária completa

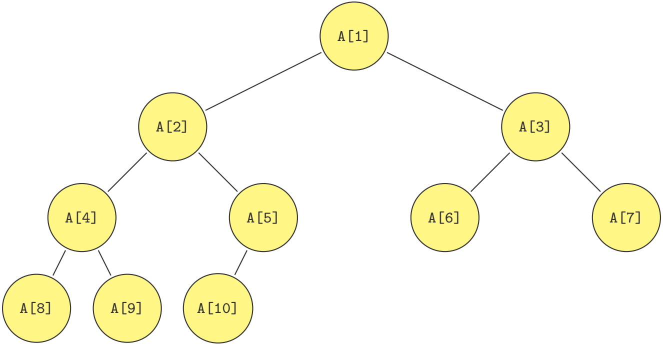


Ver heap como árvore binária completa



Da propriedade de ordem do heap, segue que:

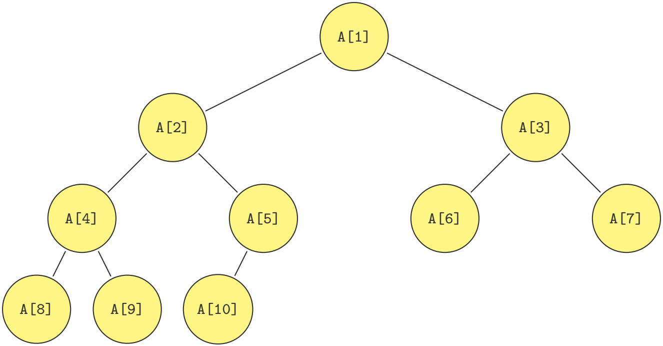
Ver heap como árvore binária completa



Da propriedade de ordem do heap, segue que:

- Os filhos são menores ou iguais ao pai.

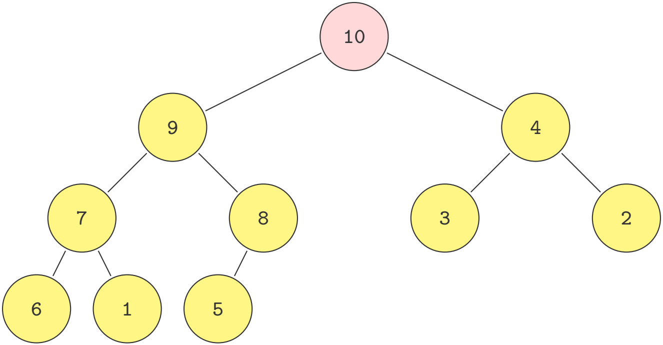
Ver heap como árvore binária completa



Da propriedade de ordem do heap, segue que:

- Os filhos são menores ou iguais ao pai.
- Ou seja, a raiz é o máximo (o elemento A[1]).

Ver heap como árvore binária completa



Da propriedade de ordem do heap, segue que:

- Os filhos são menores ou iguais ao pai.
- Ou seja, a raiz é o máximo (o elemento A[1]).

Resumo

- Todo vetor pode ser visto como uma árvore binária completa.

Resumo

- Todo vetor pode ser visto como uma árvore binária completa.
- O conjunto de índices de qualquer vetor $A[1..n]$ pode ser encarado como uma árvore binária da seguinte maneira:

Resumo

- Todo vetor pode ser visto como uma árvore binária completa.

- O conjunto de índices de qualquer vetor $A[1..n]$ pode ser encarado como uma árvore binária da seguinte maneira:
    - o índice 1 é a raiz da árvore;

Resumo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Todo vetor pode ser visto como uma árvore binária completa.
- O conjunto de índices de qualquer vetor $A[1..n]$ pode ser encarado como uma árvore binária da seguinte maneira:
  - o índice 1 é a raiz da árvore;
  - o pai de qualquer índice f é $f/2$ (1 não tem pai);

Resumo

- Todo vetor pode ser visto como uma árvore binária completa.
- O conjunto de índices de qualquer vetor $A[1..n]$ pode ser encarado como uma árvore binária da seguinte maneira:
    - o índice 1 é a raiz da árvore;
    - o pai de qualquer índice f é $f/2$ (1 não tem pai);
    - o filho esquerdo de f é $2f$ (esse filho só existe se $2f \leq n$);

Resumo

- Todo vetor pode ser visto como uma árvore binária completa.
- O conjunto de índices de qualquer vetor $A[1..n]$ pode ser encarado como uma árvore binária da seguinte maneira:
  - o índice 1 é a raiz da árvore;
  - o pai de qualquer índice f é $f/2$ (1 não tem pai);
  - o filho esquerdo de f é $2f$ (esse filho só existe se $2f \leq n$);
  - o filho direito de f é $2f + 1$ (ele só existe se $2f + 1 \leq n$).

Seleção do Máximo

Pseudocódigo – Seleção do máximo

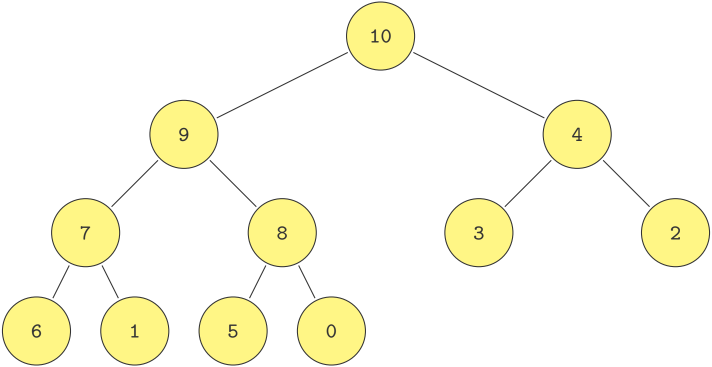
Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

```
maximum(A)
if A.heapSize > 0
    return A[1]
else
    error "underflow error"
```

Complexidade: $O(1)$

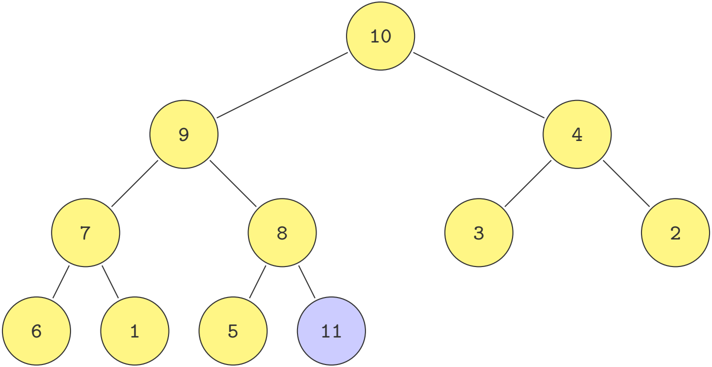
Alteração de Prioridades

Aumento da prioridade



- Aumentar a prioridade do elemento com prioridade 0 para 11.

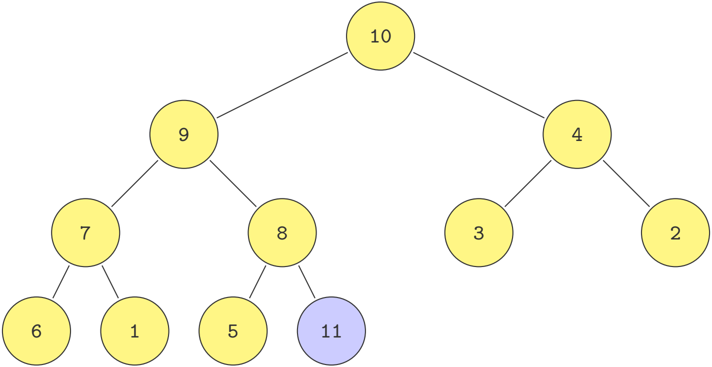
Aumento da prioridade



Note que o vetor não é mais um heap. Por quê?

- É possível consertar? Como?

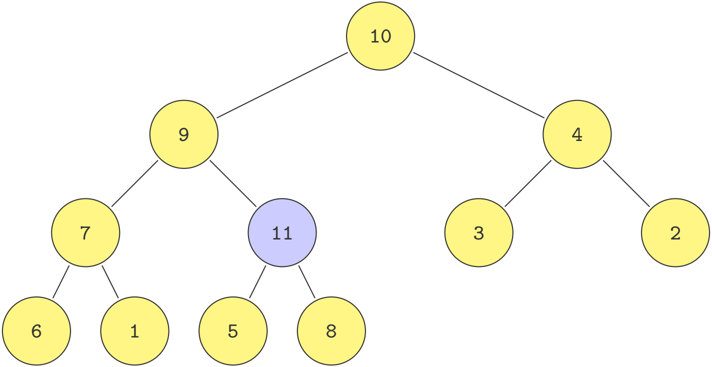
Aumento da prioridade



Basta ir subindo no heap, trocando com o pai se necessário

- O irmão já é menor que o pai, não precisamos mexer nele

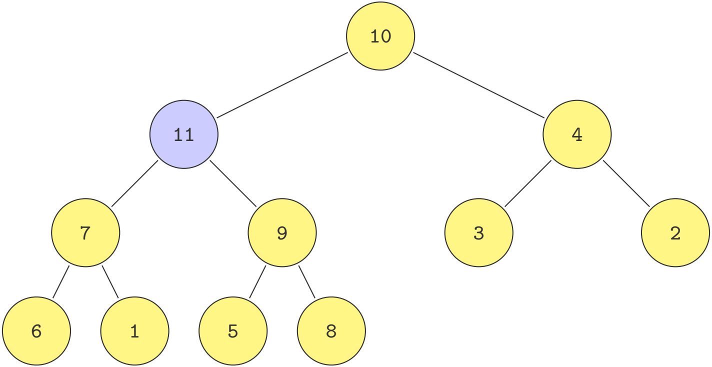
Aumento da prioridade



Basta ir subindo no heap, trocando com o pai se necessário

- O irmão já é menor que o pai, não precisamos mexer nele

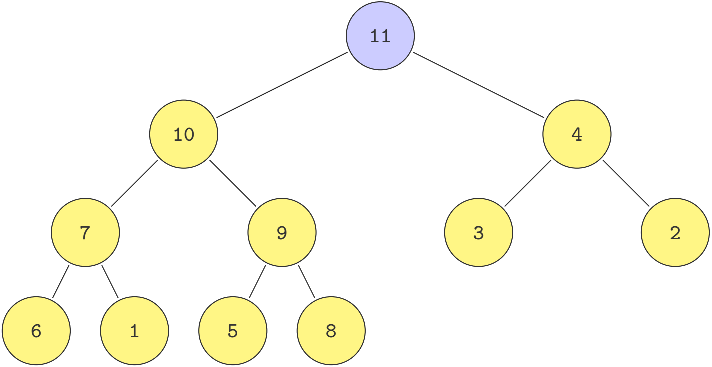
Aumento da prioridade



Basta ir subindo no heap, trocando com o pai se necessário

- O irmão já é menor que o pai, não precisamos mexer nele

Aumento da prioridade



Basta ir subindo no heap, trocando com o pai se necessário

- O irmão já é menor que o pai, não precisamos mexer nele

Pseudocódigo – Aumento da prioridade

```
increaseKey(A, i, newKey)
if newKey < A[i] then
    error "invalid key"
A[i] = newKey
moveUp(A,i)
```

Pseudocódigo – Aumento da prioridade

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

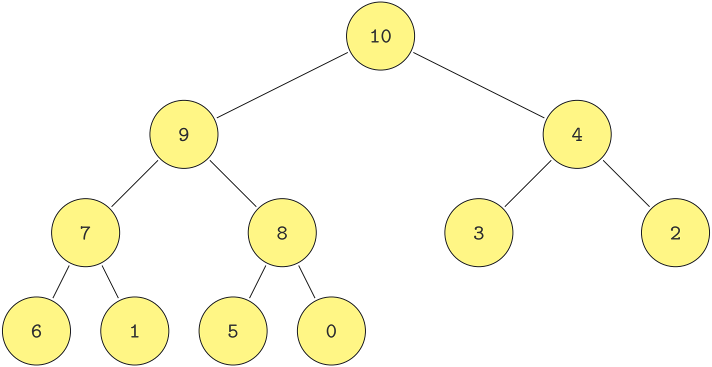
```
moveUp(A, i)
p = i/2
while p >= 1 and A[i] > A[p]
    aux = A[i]
    A[i] = A[p]
    A[p] = aux
    i = p
    p = p/2
```

Pseudocódigo – Aumento da prioridade

```
moveUp(A, i)
p = i/2
while p >= 1 and A[i] > A[p]
    aux = A[i]
    A[i] = A[p]
    A[p] = aux
    i = p
    p = p/2
```

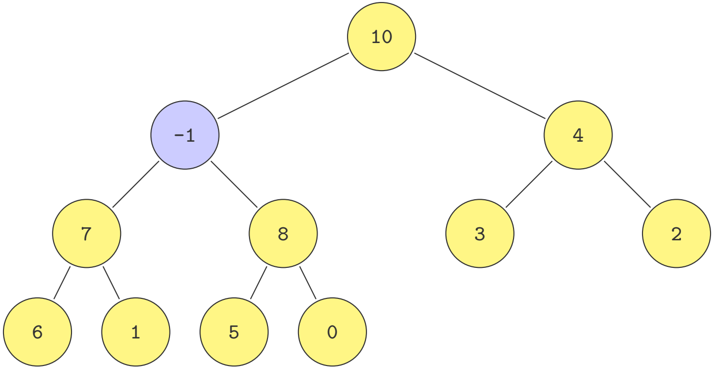
Qual a complexidade de pior caso deste algoritmo?

Redução da prioridade



- Reduzir a prioridade do elemento com prioridade 9 para -1.

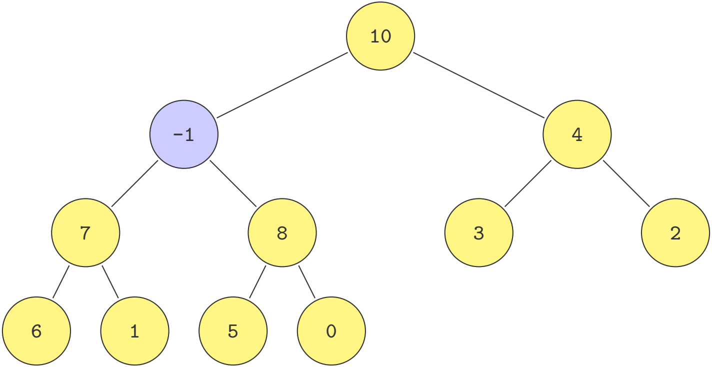
Redução da prioridade



Note que o vetor não é mais um heap. Por quê?

- É possível consertar? Como?

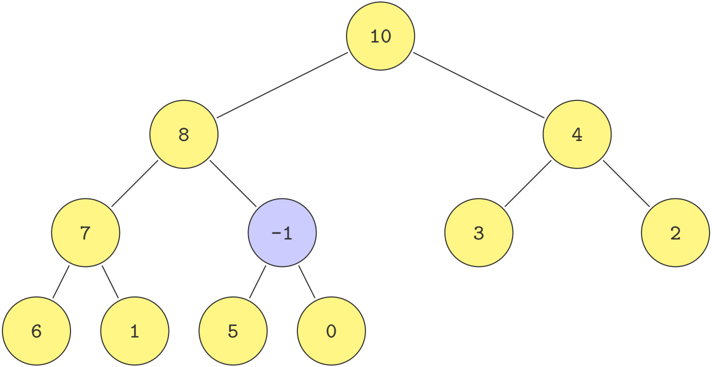
Redução da prioridade



Basta ir descendo no heap, trocando com o pai com o maior filho se necessário

- O menor filho já é menor que o irmão, não precisamos mexer nele

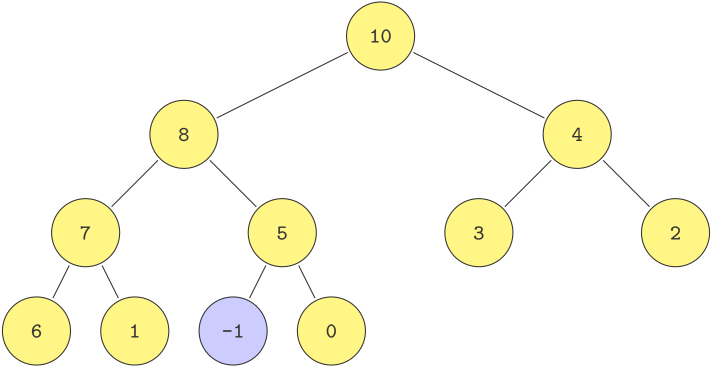
Redução da prioridade



Basta ir descendo no heap, trocando com o pai com o maior filho se necessário

- O menor filho já é menor que o irmão, não precisamos mexer nele

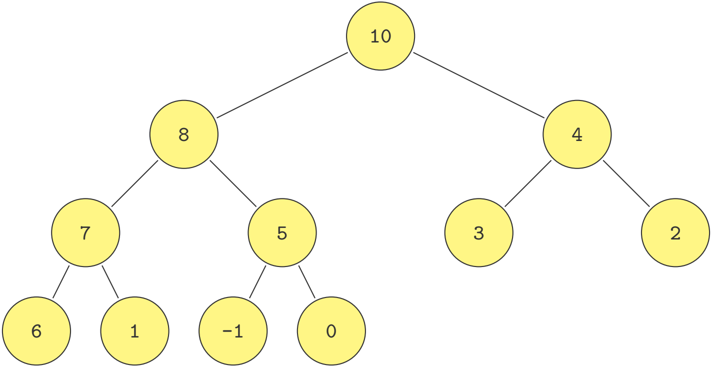
Redução da prioridade



Basta ir descendo no heap, trocando com o pai com o maior filho se necessário

- O menor filho já é menor que o irmão, não precisamos mexer nele

Redução da prioridade



Basta ir descendo no heap, trocando com o pai com o maior filho se necessário

- O menor filho já é menor que o irmão, não precisamos mexer nele

Pseudocódigo – Redução da prioridade


```
decreaseKey(A, i, newKey)
if newKey > A[i] then
    error "invalid key"
A[i] = newKey
moveDown(A,i)
```

Pseudocódigo – Redução da prioridade

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

moveDown(A, i)

```
while 2i ≤ A.heapSize
    l = 2i
    r = 2i+1
    largest = i
    if l ≤ A.heapSize and A[l] > A[largest] then
        largest = l
    if r ≤ A.heapSize and A[r] > A[largest] then
        largest = r
    if largest ≠ i then
        aux = A[i]
        A[i] = A[largest]
        A[largest] = aux
        i = largest
    else
        break
```

Pseudocódigo – Redução da prioridade

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

moveDown(A, i)

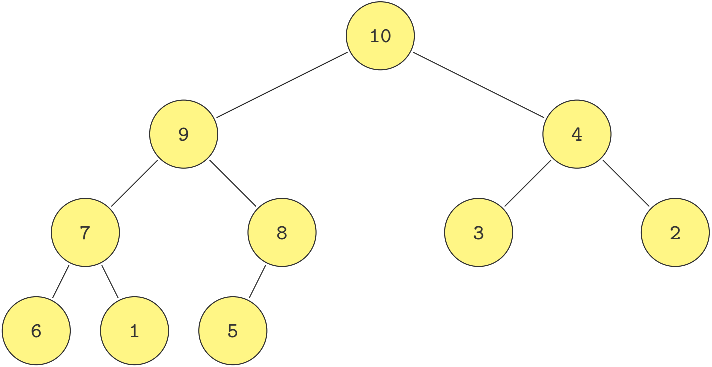
```
while 2i ≤ A.heapSize
    l = 2i
    r = 2i+1
    largest = i
    if l ≤ A.heapSize and A[l] > A[largest] then
        largest = l
    if r ≤ A.heapSize and A[r] > A[largest] then
        largest = r
    if largest ≠ i then
        aux = A[i]
        A[i] = A[largest]
        A[largest] = aux
        i = largest
    else
        break
```

Qual a complexidade de pior caso deste algoritmo?

Inserção

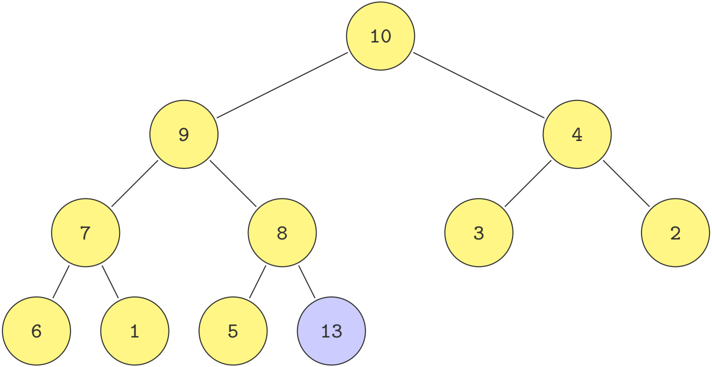
Inserção de novo elemento

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



- Inserir um elemento com chave 13.

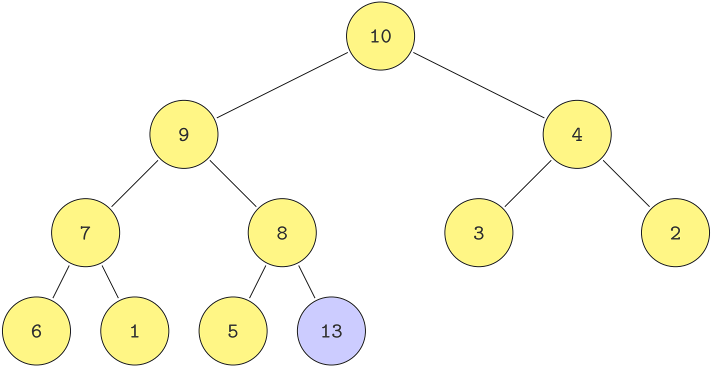
Inserção de novo elemento



Note que o vetor não é mais um heap. Por quê?

- É possível consertar? Como?

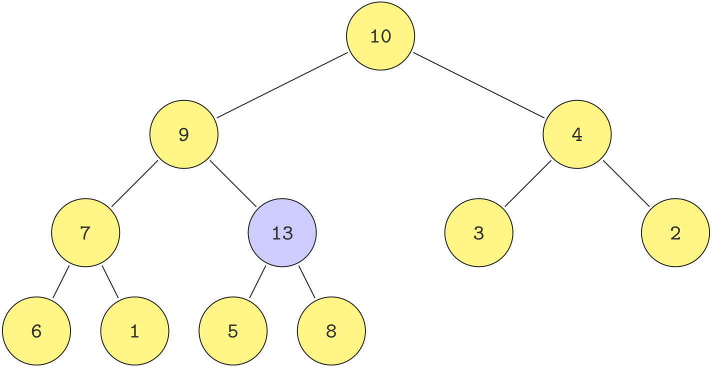
Inserção de novo elemento



Basta ir subindo no heap, trocando com o pai se necessário

- O irmão já é menor que o pai, não precisamos mexer nele

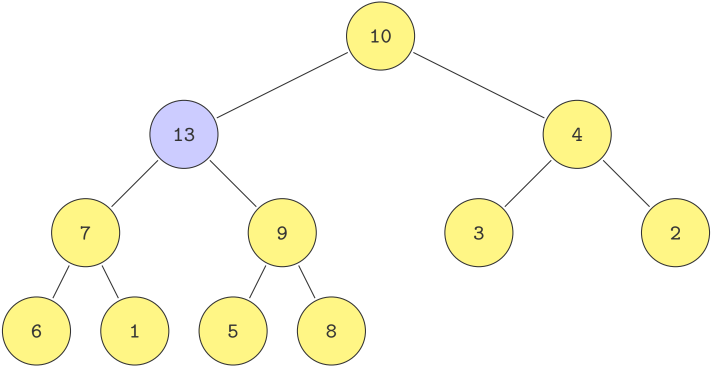
Inserção de novo elemento



Basta ir subindo no heap, trocando com o pai se necessário

- O irmão já é menor que o pai, não precisamos mexer nele

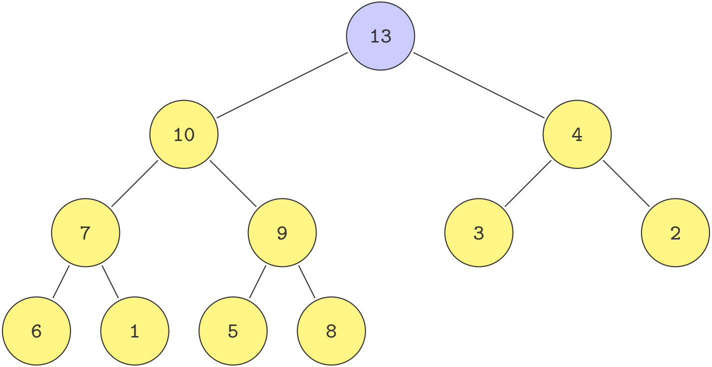
Inserção de novo elemento



Basta ir subindo no heap, trocando com o pai se necessário

- O irmão já é menor que o pai, não precisamos mexer nele

Inserção de novo elemento



Basta ir subindo no heap, trocando com o pai se necessário

- O irmão já é menor que o pai, não precisamos mexer nele

Pseudocódigo – Inserção

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

```
maxHeapInsert(A, newKey)
if A.heapSize >= A.length then
    error "heap overflow"
A.heapSize = A.heapSize + 1
A[A.heapSize] = newKey
MOVEUP(A, A.heapSize)
```

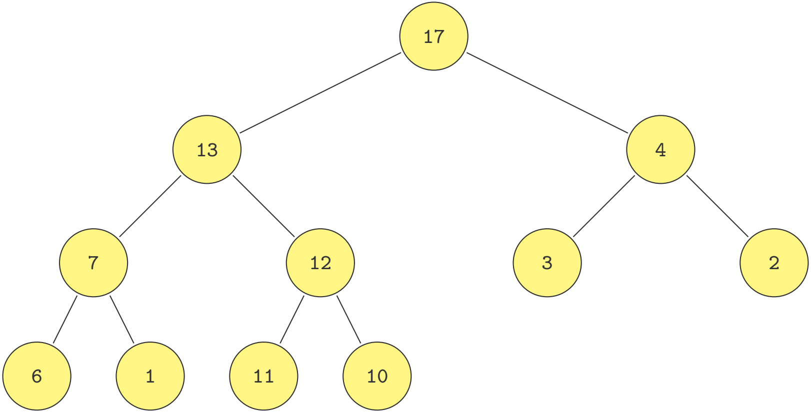
Pseudocódigo – Inserção


```
maxHeapInsert(A, newKey)
if A.heapSize >= A.length then
    error "heap overflow"
A.heapSize = A.heapSize + 1
A[A.heapSize] = newKey
moveUp(A, A.heapSize)
```

Qual a complexidade de pior caso deste algoritmo?

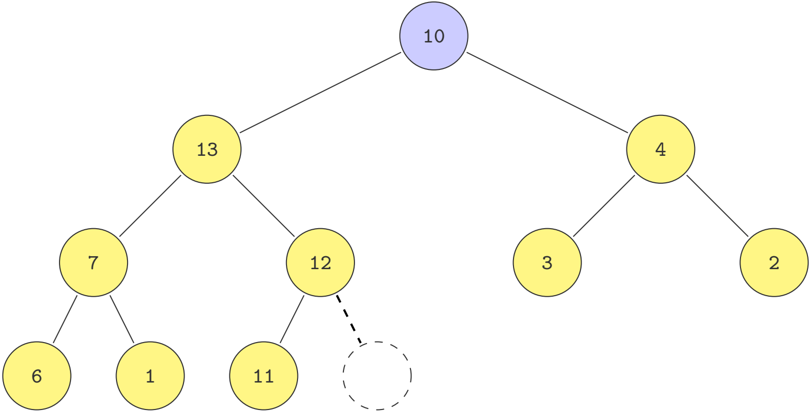
Remoção

Extrair o elemento de máxima prioridade



- Extrair o elemento de maior prioridade.
- O que fazer inicialmente?

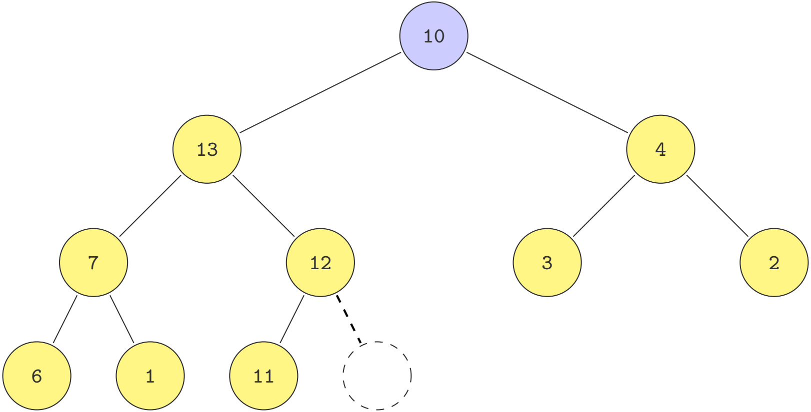
Extrair o elemento de máxima prioridade



Note que o vetor não é mais um heap. Por quê?

- É possível consertar? Como?

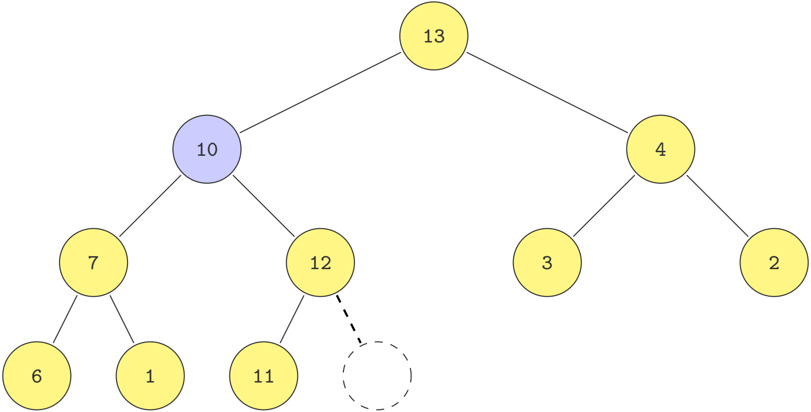
Extrair o elemento de máxima prioridade



Basta descer no heap, trocando com o pai com o maior filho se necessário.

- O menor filho já é menor que o irmão, não precisamos mexer nele.

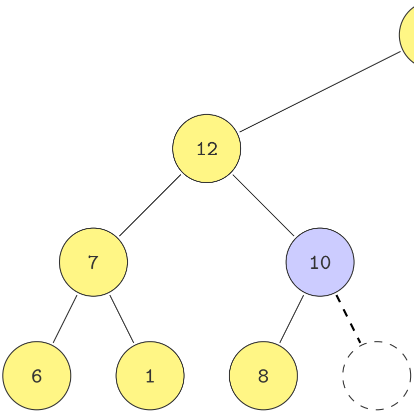
Extrair o elemento de máxima prioridade



Basta descer no heap, trocando com o pai com o maior filho se necessário.

- O menor filho já é menor que o irmão, não precisamos mexer nele.

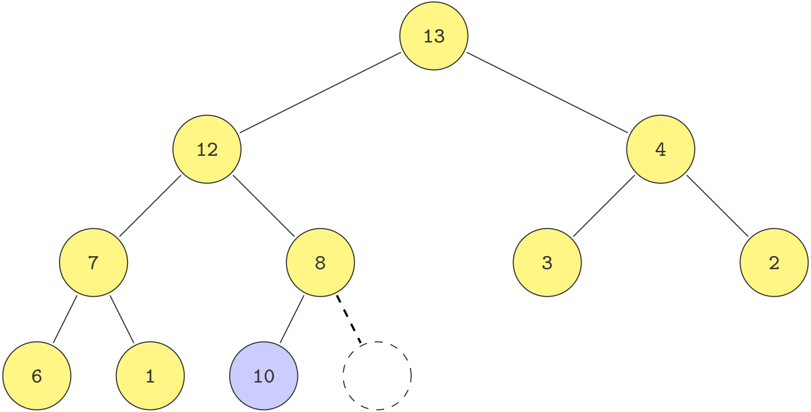
Extrair o elemento de máxima prioridade



Basta descer no heap, trocando com o pai com o maior filho se necessário.

- O menor filho já é menor que o irmão, não precisamos mexer nele.

Extrair o elemento de máxima prioridade



Basta descer no heap, trocando com o pai com o maior filho se necessário.

- O menor filho já é menor que o irmão, não precisamos mexer nele.

Pseudocódigo – Extrair o máximo


```
extractMaximum(A)
if A.heapSize < 1 then
    error "heap underflow"
dados = A[1]
A[1] = A[A.heapSize]    ▷ copia elemento
A.heapSize = A.heapSize - 1
MOVEDOWN(A, 1)
return dados
```

Pseudocódigo – Extrair o máximo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

```
extractMaximum(A)
if A.heapSize < 1 then
    error "heap underflow"
dados = A[1]
A[1] = A[A.heapSize]    ▷ copia elemento
A.heapSize = A.heapSize - 1
MoveDown(A, 1)
return dados
```

Qual a complexidade de pior caso deste algoritmo?

Comparações

Diferentes Implementações de Fila de Prioridades

	lista não ordenada	lista ordenada	árvore binária	heap
seleção	$O(n)$	$O(1)$	$O(\lg n)$	$O(1)$
inserção	$O(1)$	$O(n)$	$O(\lg n)$	$O(\lg n)$
remoção	$O(n)$	$O(1)$	$O(\lg n)$	$O(\lg n)$
alteração	$O(n)$	$O(n)$	$O(\lg n)$	$O(\lg n)$
construção	$O(n)$	$O(n \lg n)$	$O(n \lg n)$	$O(n)$

Construção de um heap máximo

Transformando um vetor em um heap

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Suponha que nos seja dado de início um vetor com $n > 0$ elementos.
- Como transformar este vetor em um heap máximo?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10

Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10

Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10

Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10

Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10

Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10

Transformando um vetor em um heap

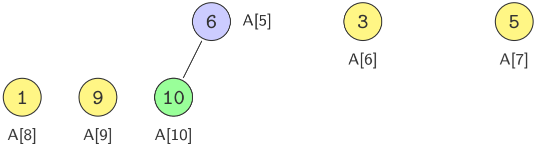
- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10

Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

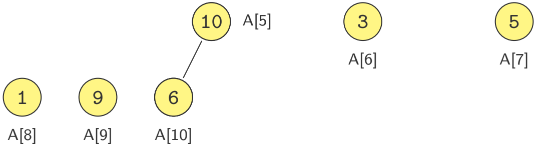
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10



Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

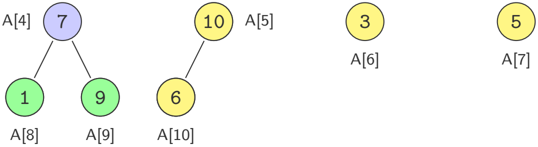
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10



Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

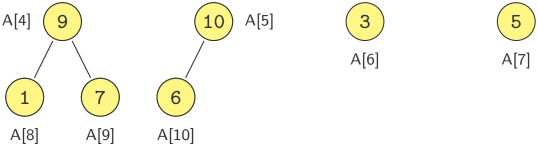
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10



Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

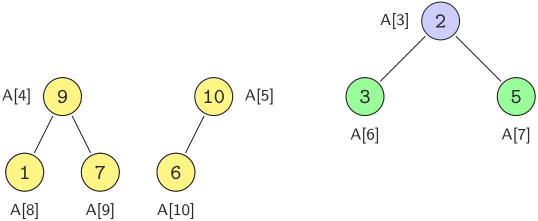
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10



Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

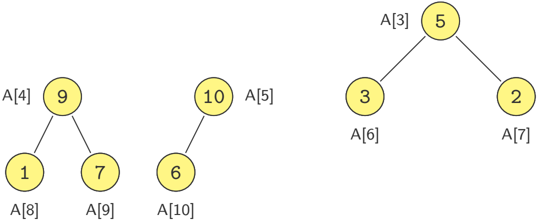
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10



Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

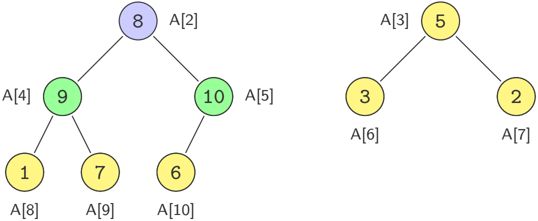
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10



Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

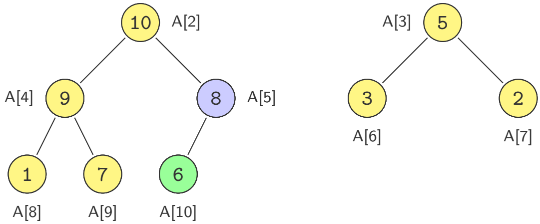
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10



Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

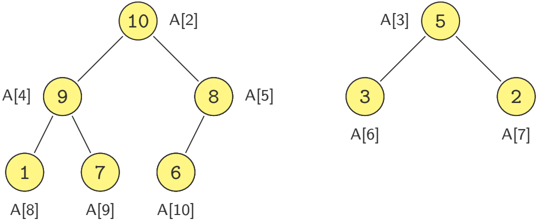
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10



Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

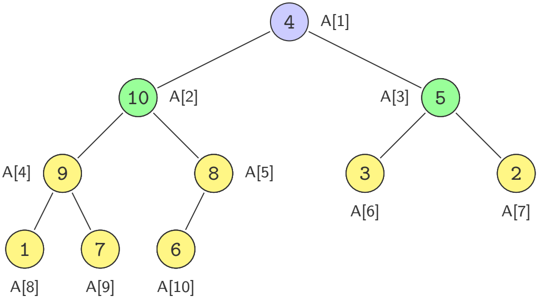
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10



Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10

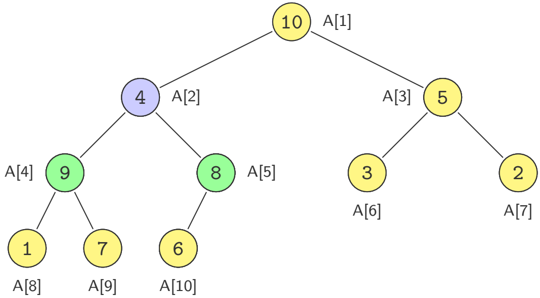


Transformando um vetor em um heap

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

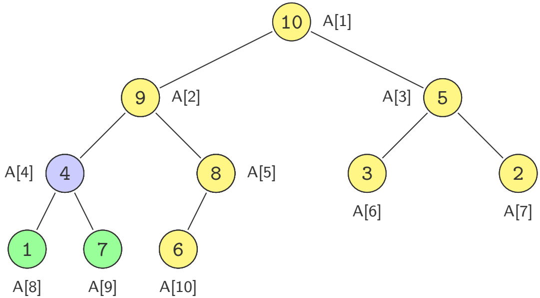
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10



Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

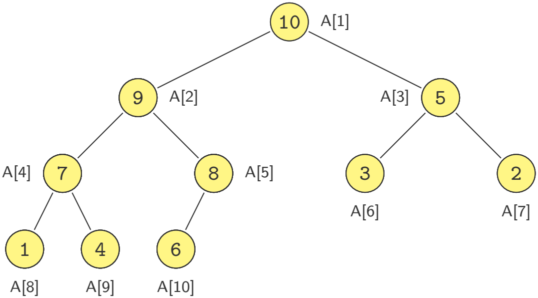
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10



Transformando um vetor em um heap

- Exercício 6.1-7 [Cormen]: As folhas de um heap com n elementos são os elementos com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	7	6	3	5	1	9	10



Pseudocódigo – Construir heap máximo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

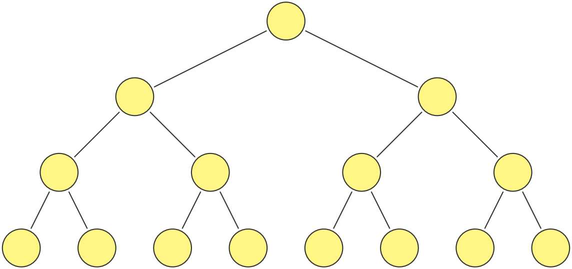
```
buildMaxHeap(A)
A.heapSize = A.length
for i = ⌊ A.length/2 ⌋ downto 1 then
    moveDown(A, i)
```

Pseudocódigo – Construir heap máximo

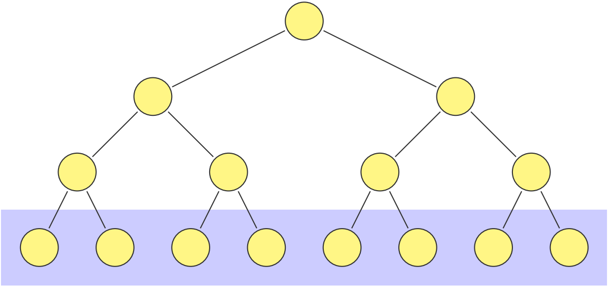
```
buildMaxHeap(A)
A.heapSize = A.length
for i = ⌊ A.length/2 ⌋ downto 1 then
    moveDown(A, i)
```

Quanto tempo demora?

Tempo da construção para $n = 2^h - 1$

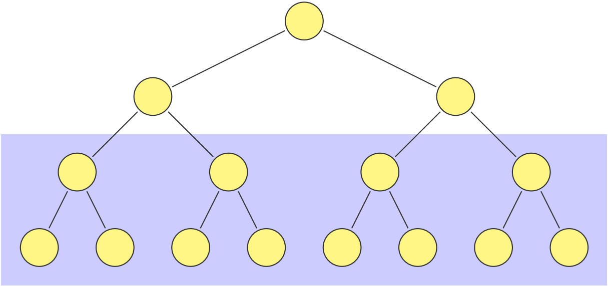


Tempo da construção para $n = 2^h - 1$



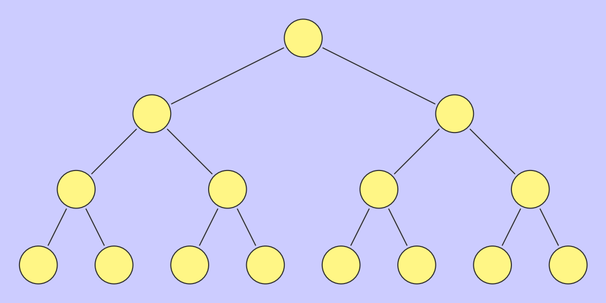
- Temos 2^{h-1} heaps de altura 1

Tempo da construção para $n = 2^h - 1$



- Temos 2^{h-1} heaps de altura 1
- Temos 2^{h-2} heaps de altura 2

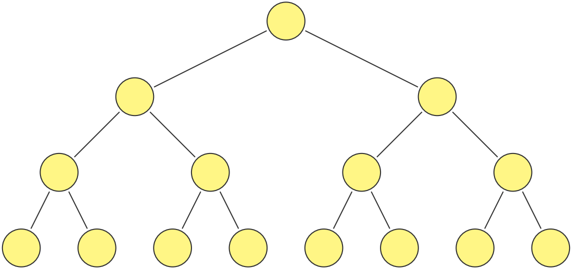
Tempo da construção para $n = 2^h - 1$



- Temos 2^{h-1} heaps de altura 1
- Temos 2^{h-2} heaps de altura 2
- Temos 2^{h-h} heaps de altura h

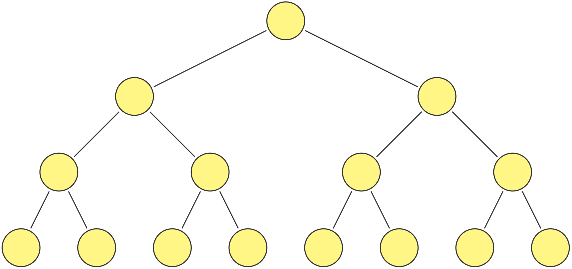
Tempo da construção para $n = 2^h - 1$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



- Temos 2^{h-1} heaps de altura 1
- Temos 2^{h-2} heaps de altura 2
- Temos 2^{h-h} heaps de altura h
- Cada heap de altura k consome tempo $c \cdot k$

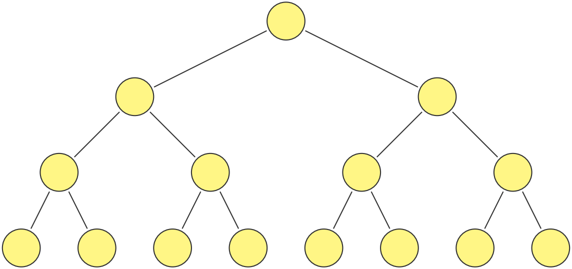
Tempo da construção para $n = 2^h - 1$



- Temos 2^{h-1} heaps de altura 1
- Temos 2^{h-2} heaps de altura 2
- Temos 2^{h-h} heaps de altura h
- Cada heap de altura k consome tempo $c \cdot k$

$$\sum_{k=1}^{h} c \cdot k \cdot 2^{h-k}$$

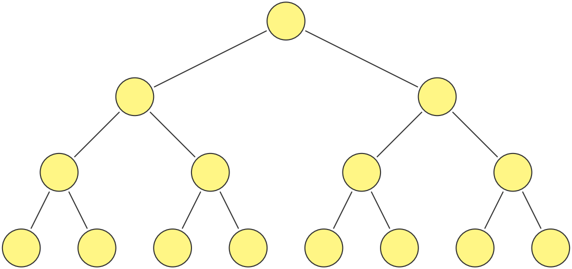
Tempo da construção para $n = 2^h - 1$



- Temos 2^{h-1} heaps de altura 1
- Temos 2^{h-2} heaps de altura 2
- Temos 2^{h-h} heaps de altura h
- Cada heap de altura k consome tempo $c \cdot k$

$$\sum_{k=1}^{h} c \cdot k \cdot 2^{h-k} = \sum_{k=1}^{h} c \cdot k \cdot \frac{2^h}{2^k}$$

Tempo da construção para $n = 2^h - 1$



- Temos 2^{h-1} heaps de altura 1
- Temos 2^{h-2} heaps de altura 2
- Temos 2^{h-h} heaps de altura h
- Cada heap de altura k consome tempo $c \cdot k$

$$\sum_{k=1}^{h} c \cdot k \cdot 2^{h-k} = \sum_{k=1}^{h} c \cdot k \cdot \frac{2^h}{2^k} = c \cdot 2^h \sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k}$$

Cálculo de somatório auxiliar

Note que $\displaystyle\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{h}{2^h}$

Cálculo de somatório auxiliar

Note que $\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{h}{2^h}$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} =$$

Cálculo de somatório auxiliar

Note que $\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{h}{2^h}$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \; & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} \\
& \quad + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} \\
& \qquad\quad + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} \\
& \qquad\qquad\qquad \cdots \\
& \qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2^h}
\end{aligned}$$

Soma de PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Cálculo de somatório auxiliar

Note que $\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{h}{2^h}$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \; & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} = 1 - \frac{1}{2^h} < 1 \\
& \quad\; + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} \\
& \qquad\qquad + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\quad + \frac{1}{2^h}
\end{aligned}$$

Soma de PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Cálculo de somatório auxiliar

Note que $\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{h}{2^h}$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} &= 1 - \frac{1}{2^h} < 1 \\
+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^h} < \frac{1}{2} \\
+ \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} & \\
\cdots & \\
+ \frac{1}{2^h} &
\end{aligned}
$$

Soma de PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Cálculo de somatório auxiliar

Note que $\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{h}{2^h}$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \; & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} = 1 - \frac{1}{2^h} < 1 \\
& \quad\;\; + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^h} < \frac{1}{2} \\
& \qquad\qquad\;\; + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^h} < \frac{1}{4} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2^h}
\end{aligned}
$$

Soma de PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Cálculo de somatório auxiliar

Note que $\displaystyle\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{h}{2^h}$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \; & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} = 1 - \frac{1}{2^h} < 1 \\
& \phantom{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^h} < \frac{1}{2} \\
& \phantom{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^h} < \frac{1}{4} \\
& \phantom{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + } \cdots \quad = \quad \cdots \\
& \phantom{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots} + \frac{1}{2^h}
\end{aligned}$$

Soma de PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Cálculo de somatório auxiliar

Note que $\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{h}{2^h}$

Assim,

$$
\begin{array}{rcl}
\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} & = 1 - \frac{1}{2^h} & < 1 \\
+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} & = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^h} & < \frac{1}{2} \\
+ \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} & = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^h} & < \frac{1}{4} \\
\cdots & = \cdots & \\
+ \frac{1}{2^h} & = \frac{1}{2^h} & \leq \frac{1}{2^h}
\end{array}
$$

Ou seja, $\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k}$

Cálculo de somatório auxiliar

Note que $\displaystyle\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{h}{2^h}$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} &= 1 - \frac{1}{2^h} < 1 \\
+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^h} < \frac{1}{2} \\
+ \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2^h} < \frac{1}{4} \\
\cdots &= \cdots \\
+ \frac{1}{2^h} &= \frac{1}{2^h} \leq \frac{1}{2^h}
\end{aligned}$$

Ou seja, $\displaystyle\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^h}$

Cálculo de somatório auxiliar

Note que $\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{h}{2^h}$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \; & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} = 1 - \frac{1}{2^h} < 1 \\
& + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^h} < \frac{1}{2} \\
& + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^h} < \frac{1}{4} \\
& \cdots = \cdots \\
& + \frac{1}{2^h} = \frac{1}{2^h} \leq \frac{1}{2^h}
\end{aligned}
$$

Ou seja, $\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^h} < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

Cálculo de somatório auxiliar

Note que $\displaystyle\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{h}{2^h}$

Assim,

$$
\begin{array}{rcccl}
\displaystyle\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + & \dfrac{1}{2^h} & = & 1 - \dfrac{1}{2^h} & < 1 \\
+ \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + & \dfrac{1}{2^h} & = & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^h} & < \dfrac{1}{2} \\
+ \dfrac{1}{2^3} + \cdots + & \dfrac{1}{2^h} & = & \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2^h} & < \dfrac{1}{4} \\
\cdots & & = & \cdots & \\
+ & \dfrac{1}{2^h} & = & \dfrac{1}{2^h} & \leq \dfrac{1}{2^h}
\end{array}
$$

Ou seja, $\displaystyle\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^h} < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$

Cálculo de somatório auxiliar

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Note que $\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{h}{2^h}$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} &= 1 - \frac{1}{2^h} < 1 \\
+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^h} < \frac{1}{2} \\
+ \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^h} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2^h} < \frac{1}{4} \\
\cdots &= \cdots \\
+ \frac{1}{2^h} &= \frac{1}{2^h} \leq \frac{1}{2^h}
\end{aligned}
$$

Ou seja, $\displaystyle \sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^h} < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$

Tempo da construção para $n = 2^h - 1$

Ou seja, $c \cdot 2^h \sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k}$

Portanto, construir um heap com n vértices leva tempo $O(n)$

Tempo da construção para $n = 2^h - 1$

Ou seja, $$c \cdot 2^h \sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} \leq c \cdot 2^h \cdot 2$$

Portanto, construir um heap com n vértices leva tempo $O(n)$

Tempo da construção para $n = 2^h - 1$

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Ou seja, $$c \cdot 2^h \sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} \leq c \cdot 2^h \cdot 2 = O(2^h)$$

Portanto, construir um heap com n vértices leva tempo $O(n)$

Tempo da construção para $n = 2^h - 1$

Ou seja, $$c \cdot 2^h \sum_{k=1}^{h} \frac{k}{2^k} \leq c \cdot 2^h \cdot 2 = O(2^h) = O(n).$$

Portanto, construir um heap com n vértices leva tempo $O(n)$

Aplicação: Ordenação

Ordenação: Heapsort

Problema: ordenar um vetor de inteiros em ordem crescente.

Ordenação: Heapsort

Problema: ordenar um vetor de inteiros em ordem crescente.

```
Heapsort(A)
A.heapSize = A.length
BuildMaxHeap(A)
while A.heapSize > 1 do
     aux = A[1]
     A[1] = A[A.heapSize]
     A[A.heapSize] = aux
     A.heapSize = A.heapSize - 1
     moveDown(A, 1)
```

Ordenação: Heapsort

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Problema: ordenar um vetor de inteiros em ordem crescente.

```
Heapsort(A)
A.heapSize = A.length
BuildMaxHeap(A)
while A.heapSize > 1 do
    aux = A[1]
    A[1] = A[A.heapSize]
    A[A.heapSize] = aux
    A.heapSize = A.heapSize - 1
    moveDown(A, 1)
```

Complexidade: $O(n \log n)$

Exercícios

Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Implementar uma fila de prioridades em C++.
  - Implemente a fila de prioridades como uma classe chamada `PriorityQueue` usando template de classe.
  - **Dica:** Ao invés de implementar o heap usando um array clássico, use a classe `std::vector` nativa do C++. Esta classe pertence à biblioteca de templates STL do C++ e pode ser incluída através do cabeçalho #include<vector>
  - A vantagem de usar `std::vector` é que ele é um array "redimensionável".
  - Um exemplo de template inicial que você pode usar para começar a implementação é dado no próximo slide. Lembre-se de implementar tudo no arquivo de cabeçalho .h

priority_queue.h

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

```cpp
template <typename T>
class priority_queue {
private:
    std::vector<T> m_queue; // array
    size_t m_size;          // numero de elementos

    void move_up(size_t i);
    void move_down(size_t i);
    void build_max_heap();

public:
    priority_queue(const priority_queue&) = delete;
    priority_queue& operator=(const priority_queue&) = delete;
    priority_queue();
    priority_queue(const std::vector<T>& v);
    bool empty() const { return m_size == 0; }
    size_t size() const { return m_size; }
    const T& top() const;
    void push(const T& val);
    void pop();
};
```

FIM