

Lógica para Computação

Profa. Dra. Viviane Menezes

Universidade Federal do Ceará

vivianemenezes@ufc.br

26 de julho de 2024

Semântica da Lógica Proposicional

Semântica da Lógica Proposicional

- ▶ Sintaxe versus Semântica.
- ▶ Prova sintática versus Prova Semântica.

Semântica da Lógica Proposicional

Valoração

- ▶ O conjunto de valores verdade da lógica proposicional contém dois elementos:
 - ▶ 1 (valor-verdade **verdadeiro**) e;
 - ▶ 0 (valor-verdade **falso**).

- ▶ A valoração de uma fórmula φ é uma atribuição de **cada átomo proposicional** em φ a um valor-verdade.

Semântica da Lógica Proposicional

Valoração de Átomos Proposicionais

Seja \mathcal{P} um conjunto de átomos proposicionais. Define-se a função valoração $v : \mathcal{P} \mapsto \{0, 1\}$ para mapear átomos proposicionais $P \in \mathcal{P}$ em um possível valor verdade:

- ▶ $v(P) = 0$ ou
- ▶ $v(P) = 1$.

Semântica da Lógica Proposicional

Valoração de Fórmulas

Seja φ uma fórmula da Lógica Proposicional e seja $v : \mathcal{P} \mapsto \{0, 1\}$ a função de valoração para átomos proposicionais. Define-se $\bar{v} : \varphi \mapsto \{0, 1\}$ a **função valoração para fórmulas** como segue:

1. $\bar{v}(\mathcal{P}) = v(\mathcal{P})$.
2. $\bar{v}((\neg\varphi)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{v}(\varphi) = 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
3. $\bar{v}((\varphi \wedge \psi)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{v}(\varphi) = 1 \text{ e } \bar{v}(\psi) = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
4. $\bar{v}((\varphi \vee \psi)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{v}(\varphi) = 1 \text{ ou } \bar{v}(\psi) = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
5. $\bar{v}((\varphi \rightarrow \psi)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{v}(\varphi) = 0 \text{ ou } \bar{v}(\psi) = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Semântica da Lógica Proposicional

Valoração de Fórmulas

- Compute $\bar{v}(\neg P \wedge Q)$, dado que $v(P) = 1$ e $v(Q) = 0$.

Semântica da Lógica Proposicional

Valoração de Fórmulas

- Compute $\bar{v}((\neg P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge (S \vee \neg T)))$, dado que $v(P) = 1, v(R) = 1, v(S) = 1, v(T) = 1, v(Q) = 0$.

Semântica da Lógica Proposicional

Valoração de Fórmulas

- ▶ Compute $\bar{v}((\neg P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge (S \vee \neg T)))$, dado que $v(P) = 1, v(R) = 1, v(S) = 1, v(T) = 1, v(Q) = 0$.
- ▶ É *sempre* necessário conhecer a valoração de todos os átomos para determinar a valoração da fórmula?

Semântica da Lógica Proposicional

Exemplo

Compute:

$$\bar{v}((P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge \neg Q))$$

sendo $v(P) = 1$, $v(Q) = 0$ e $v(R) = 1$.

Semântica da Lógica Proposicional

Exercício

Compute:

- ▶ $\bar{v}(P \rightarrow Q \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow (P \wedge Q \wedge R))$
- ▶ $\bar{v}((P \wedge \neg(P \rightarrow \neg Q) \vee \neg Q))$
- ▶ $\bar{v}((P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge S))$

sendo a valoração das fórmulas abaixo, sendo $v(P) = 1$,
 $v(Q) = 1$, $v(R) = 1$ e $v(S) = 1$.

Satisfibilidade

Satisfibilidade

- ▶ Uma fórmula φ é *satisfazível* se **existe uma valoração** para os átomos proposicionais na qual é possível tornar $\bar{v}(\varphi) = 1$.
- ▶ Uma fórmula φ é *insatisfazível* se **para todas as possíveis valorações** de átomos, $\bar{v}(\varphi) = 0$.

Satisfatibilidade

*Um dos grandes desafios da computação é encontrar **métodos eficientes** para decidir se uma fórmula é satisfatível.*

Satisfatibilidade

Exercício

Encontre uma valoração para os átomos proposicionais que satisfaça as seguintes fórmulas:

- ▶ $P \rightarrow \neg P$
- ▶ $Q \rightarrow P \wedge \neg P$
- ▶ $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$
- ▶ $\neg(P \vee Q \rightarrow Q)$

Validade

Validade

- ▶ Uma fórmula φ é *válida* se **para todas as possíveis valorações** de átomos, a função valoração $\bar{v}(\varphi) = 1$.

Validade

- ▶ Uma fórmula φ é *válida* se **para todas as possíveis valorações** de átomos, a função valoração $\bar{v}(\varphi) = 1$.
- ▶ Uma fórmula φ é *falsificável* se **existe uma** valoração para os átomos que torna $\bar{v}(\varphi) = 0$.

Validade

Exemplo

- ▶ A fórmula $P \rightarrow Q$ é **válida**?

Satisfatibilidade e Validade

Exercício

Explique as afirmações a seguir:

- ▶ *Toda fórmula válida é também satisfazível.*
- ▶ *Toda fórmula insatisfazível é falsificável.*
- ▶ *Uma fórmula não pode ser satisfazível e insatisfazível.*
- ▶ *Uma fórmula não pode ser válida e falsificável.*
- ▶ *Uma fórmula pode ser tanto satisfazível como falsificável.*

Satisfatibilidade e Validade

Exercício

Classifique as fórmulas de acordo com a sua *satisfatibilidade*, *validade*, *falsificabilidade* ou *insatisfatibilidade*.

- ▶ $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$
- ▶ $(P \wedge \neg P) \rightarrow Q$
- ▶ $P \rightarrow Q \rightarrow P \wedge Q$
- ▶ $P \rightarrow \neg\neg P$

Consequência Lógica

Consequência Lógica

Uma fórmula ψ é **consequência lógica** de uma teoria $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, isto é.,

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \models \psi$$

se para todas as valorações nas quais a teoria é **verdadeira**, isto é, $\bar{v}(\varphi_1) = 1, \bar{v}(\varphi_2) = 1, \dots$ e $\bar{v}(\varphi_n) = 1$, a fórmula ψ também é **verdadeira**, isto é, $\bar{v}(\psi) = 1$.

Consequência Lógica

Exercício

- ▶ A relação $P \wedge Q \models P$ é verdadeira?
- ▶ A relação $P \vee Q \models P$ é verdadeira?
- ▶ A relação $\neg Q, P \vee Q \models P$ é verdadeira?
- ▶ A relação $P \models Q \vee \neg Q$ é verdadeira?

Consequência Lógica

Exercício

Considere a seguinte teoria:

$$\begin{aligned} &crianca \vee jovem \vee adulto \vee idoso, \\ &trabalhador \vee estudante \vee aposentado, \\ &jovem \rightarrow trabalhador \vee estudante, \\ &\neg(criança \wedge aposentado), \\ &\neg(criança \wedge trabalhador). \end{aligned}$$

Verificar quais das fórmulas são **consequência lógica** da teoria.

- ▶ $\psi_1: crian\c{c}a \rightarrow \neg jovem$
- ▶ $\psi_2: (aposentado \wedge \neg jovem) \rightarrow (adulto \vee idoso)$

Equivalência

Equivalência

Duas fórmulas φ e ψ são ditas equivalentes se:

- ▶ $\varphi \models \psi$ e
- ▶ $\psi \models \varphi$

Equivalência

Duas fórmulas φ e ψ são ditas equivalentes se:

- ▶ $\varphi \models \psi$ e
- ▶ $\psi \models \varphi$
- ▶ escrevemos: $\varphi \equiv \psi$

Equivalência

Exercício

Mostre que:

- ▶ $P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$
- ▶ $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

Não use a tabela verdade! Use a definição de equivalência.