Indução Matemática

Matemática Discreta

Prof. Samy Sá

Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

26 de setembro de 2020

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Prévia

Requisitos

- Técnicas de Demonstração de Teoremas
- Propriedades / Manipulação Algébrica

Esta apresentação...

- Inicia o tópico de Indução e Recursão
- Apresenta brevemente o conceito de Conjuntos Contáveis
- Discute intuições e exemplos das provas por Indução Matemática sobre conjuntos contáveis

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como Gerar os Números Naturais?

Definição

O conjunto dos Números Naturais é o menor conjunto $\mathbb{N}$ *(c/ resp. a* $\subseteq$*) tal que*

1. $0 \in \mathbb{N}$

2. $\forall x\, (x \in \mathbb{N} \rightarrow x + 1 \in \mathbb{N})$

Podemos propor um algoritmo:

1. **int** $n = 0$
2. **enquanto** $n \geq 0$ $\{$
3. **escreva** n
4. **faça** $n = n + 1$
5. $\}$

Valores de n:

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} \ldots$$

Valores escritos:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como Gerar os Números Naturais?

Definição

O conjunto dos Números Naturais é o menor conjunto $\mathbb{N}$ (c/ resp. a $\subseteq$) tal que

1. $0 \in \mathbb{N}$

2. $\forall x\ (x \in \mathbb{N} \rightarrow x + 1 \in \mathbb{N})$

Alternativamente:

int $n = 0$
enquanto $n \geq 0$ {
    escreva n
    faça $n = s(n)$
    }

função s(**int** n) { **retorne** $n + 1$ }

Valores de n:

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} \ldots$$

Valores escritos:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como Gerar os Números Naturais?

Definição

O conjunto dos Números Naturais é o menor conjunto $\mathbb{N}$ (c/ resp. a $\subseteq$) tal que

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $\forall x\ (x \in \mathbb{N} \rightarrow x + 1 \in \mathbb{N})$

Alternativamente:

```
int n = 0
enquanto n ≥ 0 {
    escreva n
    faça n = s(n)
    }

função s(int n) { retorne n + 1 }
```

Valores de n:

$$0 \xrightarrow{s(n)} 1 \xrightarrow{s(n)} 2 \xrightarrow{s(n)} 3 \xrightarrow{s(n)} 4 \xrightarrow{s(n)} \ldots$$

Valores escritos:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como Gerar os Números Inteiros?

Definição

O conjunto dos Números Inteiros é o menor conjunto $\mathbb{Z}$ *(c/ resp. a* $\subseteq$*) tal que*

1. $0 \in \mathbb{Z}$

2. $\forall x \, (x \in \mathbb{Z} \rightarrow x + 1 \in \mathbb{Z})$

3. $\forall x \, (x \in \mathbb{Z} \rightarrow x - 1 \in \mathbb{Z})$

Podemos propor um algoritmo:

1. **int** $n = 0$
2. **escreva** n
3. **enquanto** $n \geq 0$ $\{$
4. **faça** $n = n + 1$
5. **escreva** n
6. **escreva** $-n$
7. $\}$

Valores de n:

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} \ldots$$

Valores escritos:

$$0 \quad \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ -3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4 \\ -4 \end{matrix} \quad \ldots$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como Gerar os Números Inteiros?

Definição

O conjunto dos Números Inteiros é o menor conjunto $\mathbb{Z}$ (c/ resp. a $\subseteq$) tal que

1. $0 \in \mathbb{Z}$

2. $\forall x\ (x \in \mathbb{Z} \to x + 1 \in \mathbb{Z})$

3. $\forall x\ (x \in \mathbb{Z} \to x - 1 \in \mathbb{Z})$

Alternativamente:

int $n = 0$
escreva n
enquanto $n \geq 0$ $\{$
    faça $n = s(n)$
    escreva n
    escreva $-n$
    $\}$

função $s($**int** n$)$ $\{$ **retorne** $n + 1$ $\}$

Valores de n:

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} \ldots$$

Valores escritos:

$$0 \quad \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ -3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4 \\ -4 \end{matrix} \quad \ldots$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como Gerar os Números Inteiros?

Definição

O conjunto dos Números Inteiros é o menor conjunto $\mathbb{Z}$ (c/ resp. a $\subseteq$) tal que

1. $0 \in \mathbb{Z}$

2. $\forall x \, (x \in \mathbb{Z} \to x + 1 \in \mathbb{Z})$

3. $\forall x \, (x \in \mathbb{Z} \to x - 1 \in \mathbb{Z})$

Alternativamente:

```
int n = 0
escreva n
enquanto n ≥ 0 {
    faça n = s(n)
    escreva n
    escreva −n
    }

função s(int n) { retorne n + 1 }
```

Valores de n:

$$0 \xrightarrow{s(n)} 1 \xrightarrow{s(n)} 2 \xrightarrow{s(n)} 3 \xrightarrow{s(n)} 4 \xrightarrow{s(n)} \ldots$$

Valores escritos:

$$0 \quad \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ -3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4 \\ -4 \end{matrix} \quad \ldots$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outros Exemplos

Como gerar apenas os inteiros POSITIVOS?

Algoritmo (Versão 1):

1. **int** $n = 0$
2. **escreva** $\cancel{n}$ **% (não escreva nada)**
3. **enquanto** $n \geq 0$ {
4. **faça** $n = s(n)$
5. **escreva** n
6. }
7.
8. **função** s(**int** n) { **retorne** $n + 1$ }

Valores de n:

$$0 \xrightarrow{s(n)} 1 \xrightarrow{s(n)} 2 \xrightarrow{s(n)} 3 \xrightarrow{s(n)} 4 \xrightarrow{s(n)} \dots$$

Valores escritos:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outros Exemplos

Como gerar apenas os inteiros POSITIVOS?

Algoritmo (Versão 2):

1. **int** $n = 1$
2. **escreva** n
3. **enquanto** $n \geq 0$ {
4. **faça** $n = s(n)$
5. **escreva** n
6. }
7.
8. **função** s(**int** n) { **retorne** $n + 1$ }

Valores de n:

$$1 \xrightarrow{s(n)} 2 \xrightarrow{s(n)} 3 \xrightarrow{s(n)} 4 \xrightarrow{s(n)} \ldots$$

Valores escritos:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outros Exemplos

Como gerar os múltiplos de 3?

Algoritmo (Versão 1):

1. **int** $n = 0$
2. **escreva** n
3. **enquanto** $n \geq 0$ {
4. **faça** $n = s(n)$
5. **escreva** $3 * n$
6. **escreva** $-3 * n$
7. }
8.
9. **função** $s($**int** n$)$ { **retorne** $n + 1$ }

Valores de n:

$$0 \xrightarrow{s(n)} 1 \xrightarrow{s(n)} 2 \xrightarrow{s(n)} 3 \xrightarrow{s(n)} 4 \xrightarrow{s(n)} \ldots$$

Valores escritos:

$$0 \quad \begin{matrix} 3 \\ -3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 6 \\ -6 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 9 \\ -9 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 12 \\ -12 \end{matrix} \quad \ldots$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Observações

O que observamos?

- Em cada caso, estabelecemos um elemento de referência (base) e usamos alguma noção de sucessor que permitiria encontrar novos elementos.
- Produzimos novos elementos combinando $s(n)$ com ordens de escrita.
- **Estamos variando n de acordo com os naturais.**

Outros Exemplos

Como gerar os múltiplos de 3?

Algoritmo (Versão 2):

int $n = 0$
escreva n
enquanto $n \geq 0$ {
    faça $n = s(n)$
    escreva n
    escreva $-n$
    }

função s(**int** n) { **retorne** $n + 3$ }

Valores de n:

$$0 \xrightarrow{s(n)} 3 \xrightarrow{s(n)} 6 \xrightarrow{s(n)} 9 \xrightarrow{s(n)} 12 \xrightarrow{s(n)} \ldots$$

Valores escritos:

$$0 \quad \begin{matrix} 3 \\ -3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 6 \\ -6 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 9 \\ -9 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 12 \\ -12 \end{matrix} \quad \ldots$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Observações (Cont.)

O que observamos?

- Em cada caso, estabelecemos um elemento de referência (base) e usamos alguma noção de sucessor que permitiria encontrar novos elementos.
- Produzimos novos elementos combinando $s(n)$ com ordens de escrita.
- ~~Estamos variando n de acordo com os naturais.~~
- **Podemos variar n em qualquer conjunto que possamos produzir com um algoritmo similar.** (CONJUNTOS CONTÁVEIS)

Por que isso é interessante?

- Podemos usar os naturais para provar propriedades sobre elementos de conjuntos contáveis.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como Fazê-lo? (Intuição)

Imagine que queremos provar o seguinte teorema

Teorema
Para todo n natural, $n^2 \geq n$.

Imagine se fosse possível fazê-lo
com o seguinte algoritmo:

1. **int** $n = 0$
2. **enquanto** $n \geq 0$ {
3. **se** $n^2 \geq n$
4. **faça** $n = s(n)$
5. **se não retorne "falso"**
6. }
7.
8. **função** s(**int** n) { **retorne** $n + 1$ }

Valores de n:

$$0 \xrightarrow{s(n)} 1 \xrightarrow{s(n)} 2 \xrightarrow{s(n)} \ldots$$

Tarefas:

Provar $0^2 \geq 0$ Provar $1^2 \geq 1$ Provar $2^2 \geq 2$ $\ldots$

Esta seria uma tentativa de fazer prova exaustiva no conjunto dos naturais... Infelizmente, há infinitos deles.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como Fazê-lo? (Estratégia...)

Imagine que queremos provar o seguinte teorema

Teorema
Para todo n natural, $n^2 \geq n$.

Estratégia...

- O algoritmo será abortado apenas se o teorema tiver um contra-exemplo.
- Então provar que o algoritmo não é abortado também prova o teorema!

OU SEJA
Bastará mostrar que

SE o teste do passo em que $n = k$ não falhar
ENTÃO o teste do passo seguinte também não falhará

para cada valor k assumido por n.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como Fazê-lo? (Estratégia...)

Imagine que queremos provar o seguinte teorema

Teorema

Para todo n natural, $n^2 \geq n$.

Estratégia...

- O algoritmo será abortado apenas se o teorema tiver um contra-exemplo.
- Então provar que o algoritmo não é abortado também prova o teorema!

É uma mudança de perspectiva:

Teorema

Dado um natural n qualquer:

1. $n^2 \geq n$ *quando* $n = 0$ *e*
2. $\forall k \in \mathbb{N}$, *Se* $n^2 \geq n$ *quando* $n = k$, *então* $n^2 \geq n$ *quando* $n = k + 1$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Compare...

Definição

O conjunto dos Números Naturais é o menor conjunto $\mathbb{N}$ (c/ resp. a $\subseteq$) tal que

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $\forall x\ (x \in \mathbb{N} \rightarrow x + 1 \in \mathbb{N})$

Teorema

Dado um natural n qualquer:

1. $n^2 \geq n$ ***quando*** $n = 0$ *e*
2. $\forall k \in \mathbb{N}$, ***se*** $n^2 \geq n$ ***quando*** $n = k$, ***então*** $n^2 \geq n$ ***quando*** $n = k + 1$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Compare...

Definição

O conjunto dos Números Naturais é o menor conjunto $\mathbb{N}$ (c/ resp. a $\subseteq$) tal que

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $\forall x\ (x \in \mathbb{N} \to x + 1 \in \mathbb{N})$

Teorema

Dado um natural n qualquer:

1. $n^2 \geq n$ ***quando*** $n = 0$ *e*
2. $\forall k \in \mathbb{N},\ \underbrace{n^2 \geq n \textbf{\textit{ quando }} n = k}_{\textbf{\textit{SE}}} \to \underbrace{n^2 \geq n \textbf{\textit{ quando }} n = k + 1}_{\textbf{\textit{ENTÃO}}}.$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Compare...

Definição

O conjunto dos Números Naturais é o menor conjunto $\mathbb{N}$ (c/ resp. a $\subseteq$) tal que

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $\forall x\ (x \in \mathbb{N} \rightarrow x + 1 \in \mathbb{N})$

Teorema

Dado um natural n qualquer:

1. $n^2 \geq n$ ***quando*** $n = 0$ *e*
2. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{k^2 \geq k}_{\textit{SE}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{(k+1)^2 \geq (k+1)}_{\textit{ENTÃO}}.$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como Fazê-lo? (Técnica!)

Imagine que queremos provar o seguinte teorema

Teorema

Para todo n natural, $n^2 \geq n$.

Prova

Por CASOS, suponha que $n = 0$. Neste caso, precisamos verificar se $0^2 \geq 0$.
Isto é verdadeiro, pois $0^2 = 0$.

Seja k um natural qualquer, suponha que $n = k$. Provaremos que

"SE $k^2 \geq k$, ENTÃO $(k+1)^2 \geq (k+1)$"

Por Prova Direta, suponha que $k^2 \geq k$.
Por Produtos Notáveis (Quadrado da Soma), temos que $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$.
Daí, como $k^2 \geq k$, temos $(k+1)^2 \geq k + 2k + 1$.
Como k é um número natural, $k + 2k + 1 \geq k + 1$.
Juntando as inequações, temos $(k+1)^2 \geq k + 1$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como Fazê-lo? (Técnica!)

Imagine que queremos provar o seguinte teorema

Teorema
Para todo n natural, $n^2 \geq n$.

Prova

Por CASOS, suponha que $n = 0$. Neste caso, precisamos verificar se $0^2 \geq 0$.
Isto é verdadeiro, pois $0^2 = 0$.

$\overbrace{\textbf{Seja } k \textbf{ um natural qualquer}}^{\textit{Instanciação de Variável}}$*, suponha que $n = k$. Provaremos que*

$$\text{“SE } k^2 \geq k, \text{ ENTÃO } (k+1)^2 \geq (k+1)\text{”}$$

Por Prova Direta, suponha que $k^2 \geq k$.
Por Produtos Notáveis (Quadrado da Soma), temos que $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$.
Daí, como $k^2 \geq k$, temos $(k+1)^2 \geq k + 2k + 1$.
Como k é um número natural, $k + 2k + 1 \geq k + 1$.
Juntando as inequações, temos $(k+1)^2 \geq k + 1$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Como Fazê-lo? (Técnica!)

Imagine que queremos provar o seguinte teorema

Teorema
Para todo n natural, $n^2 \geq n$.

Prova

BASE *Por CASOS, suponha que $n = 0$. Neste caso, precisamos verificar se $0^2 \geq 0$. Isto é verdadeiro, pois $0^2 = 0$.*

Instanciação de Variável

***Seja** k **um natural qualquer**, suponha que $n = k$. Provaremos que*

$$\text{“SE } k^2 \geq k, \text{ ENTÃO } (k+1)^2 \geq (k+1)\text{”}$$

PDI *Por Prova Direta, suponha que $k^2 \geq k$.*
Por Produtos Notáveis (Quadrado da Soma), temos que $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$.
Daí, como $k^2 \geq k$, temos $(k+1)^2 \geq k + 2k + 1$.
Como k é um número natural, $k + 2k + 1 \geq k + 1$.
Juntando as inequações, temos $(k+1)^2 \geq k + 1$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática

Anteriormente, discutimos quase todo teorema é análogo ao formato

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ expressam propriedades sobre elementos do domínio de x.

Lembrando que

- podem haver múltiplas variáveis, cada qual com seu quantificador
- $P(x)$ e $Q(x)$ podem ser compostas com funções, ou seja, podemos entender uma propriedade de $x + 1$ (exemplo) como sendo uma propriedade de x

Similarmente, podemos dizer que generalizões têm simplesmente a forma

$$\forall x\ P(x)$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática

Consideremos um teorema de generalização

$$\forall x \; P(x)$$

onde $P(x)$ expressa uma possível propriedade dos elementos do domínio de x.

Se o domínio de x é nos números naturais, podemos provar o teorema em duas partes...

- (BASE) Suponha que $x = 0$. Mostre que $P(0)$ vale.
- (PDI) Para k natural qualquer (**Instanciação**), mostre que

$$P(k) \rightarrow P(k+1)$$

Isso é mais simples do que parece!

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática

Se o domínio de x é nos números naturais, podemos provar o teorema em duas partes...

- (BASE) Suponha que $x = 0$. Mostre que $P(0)$ vale.
- (PDI) Para k natural qualquer (**Instanciação**), mostre que

$$P(k) \rightarrow P(k+1)$$

Isso é mais simples do que parece!

1. Suponha que $P(k)$ (**Hipótese de Indução**).
2. Comece a analisar o cenário em que $x = k + 1$ de acordo com a natureza de $P(x)$, buscando uma oportunidade de aplicar a hipótese.
3. Aplique a hipótese e organize sua conclusão

---

4. Conclua $P(k+1)$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática

Teorema

Para todo n natural, $\underbrace{n^2 - n \text{ é par}}$.

Pense nisto como uma propriedade de n

Prova

(BASE) Suponha que $n = 0$. *Neste caso, devemos verificar se* $0^2 - 0$ *é par.*
Teremos que $0^2 - 0 = 0 - 0 = 0$, *que é par.*
Portanto, a propriedade realmente vale quando $n = 0$.

(PDI) Seja k *um natural qualquer, devemos mostrar que*

se $k^2 - k$ *é par, então* $(k+1)^2 - (k+1)$ *é par.*

Por Prova Direta, suponha que $k^2 - k$ *é par (**HI**).*
Analisando o caso em que $n = k + 1$, *teremos que*

$$(k+1)^2 - (k+1) = k^2 + 2k + 1 - k - 1$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática

Teorema

Para todo n natural, $\underbrace{n^2 - n \text{ **é par**}}_{\text{Pense nisto como uma propriedade de } n}$.

Prova

(BASE) Suponha que $n = 0$. *Neste caso, devemos verificar se* $0^2 - 0$ *é par.*
Teremos que $0^2 - 0 = 0 - 0 = 0$, *que é par.*
Portanto, a propriedade realmente vale quando $n = 0$.

(PDI) Seja k *um natural qualquer, devemos mostrar que*

se $k^2 - k$ *é par, então* $(k+1)^2 - (k+1)$ *é par.*

Por Prova Direta, suponha que $k^2 - k$ *é par (**HI**).*
Analisando o caso em que $n = k + 1$, *teremos que*

$$(k+1)^2 - (k+1) = k^2 + 2k \cancel{+1} - k \cancel{-1}$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática

Teorema

Para todo n natural, $\underbrace{n^2 - n \text{ é par}}_{\text{Pense nisto como uma propriedade de } n}$.

Prova

(BASE) Suponha que $n = 0$. *Neste caso, devemos verificar se* $0^2 - 0$ *é par.*
Teremos que $0^2 - 0 = 0 - 0 = 0$, *que é par.*
Portanto, a propriedade realmente vale quando $n = 0$.

(PDI) Seja k *um natural qualquer, devemos mostrar que*

se $k^2 - k$ *é par, então* $(k+1)^2 - (k+1)$ *é par.*

Por Prova Direta, suponha que $k^2 - k$ *é par (**HI**).*
Analisando o caso em que $n = k + 1$, *teremos que*

$$(k+1)^2 - (k+1) = k^2 + 2k \cancel{+1} - k \cancel{-1} = \underbrace{k^2 - k}_{\text{Oportunidade de usar HI}} + 2k$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática

Teorema

Para todo n natural, $\underbrace{n^2 - n \textbf{ é par}}_{\text{Pense nisto como uma propriedade de } n}$.

Prova

(BASE) Suponha que $n = 0$. *Neste caso, devemos verificar se* $0^2 - 0$ *é par.*
Teremos que $0^2 - 0 = 0 - 0 = 0$, *que é par.*
Portanto, a propriedade realmente vale quando $n = 0$.

(PDI) Seja k *um natural qualquer, devemos mostrar que*

se $k^2 - k$ *é par, então* $(k+1)^2 - (k+1)$ *é par.*

Por Prova Direta, suponha que $k^2 - k$ *é par (**HI**).*
Analisando o caso em que $n = k + 1$, *teremos que*

$$(k+1)^2 - (k+1) = k^2 + 2k \cancel{+1} - k \cancel{-1} = \underbrace{k^2 - k}_{\text{Oportunidade de usar HI}} + 2k$$

Pela HI, $k^2 - k$ *é par. Logo, existe* $j \in \mathbb{Z}$ *tal que* $k^2 - k = 2j$.
Ou seja, $(k+1)^2 - (k+1) = 2j + 2k = 2(j + k)$.
Como j, k *são inteiros,* $(k+1)^2 - (k+1)$ *é par.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Sobre Outros Conjuntos

Falamos no começo sobre **conjuntos contáveis** e os números naturais.

Em cada caso, estabelecemos:

1. um elemento inicial, mapeado pro 0 dos naturais;
2. uma função sucessor, que produziria novos elementos.

Pelo mesmo motivo, Indução permite provar propriedades sobre elementos de qualquer conjunto contável

Exemplos

- *Para os inteiros positivos (Versão 2), iniciamos a variável com* $n = 1$ *e usamos* $s(n) = n + 1$*, imprimindo o valor de* n *a cada passo.*
- *Para os múltiplos de* 3 *(Versão 1), iniciamos com* $n = 0$ *e usamos* $s(n) = n + 1$*, imprimindo os valores de* $3n$ *e* $-3n$ *a cada passo.*
- *Para os múltiplos de* 3 *(Versão 2), iniciamos com* $n = 0$ *e usamos* $s(n) = n + 3$*, imprimindo os valores de* n *e* $-n$ *a cada passo.*

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática

Exemplo

Teorema

Para todo n inteiro positivo, $\underbrace{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}}_{\textit{Pense nisto como uma propriedade de } n}$.

Prova

(BASE) ***Suponha que*** $n = 1$*. Neste caso, devemos verificar se* $1 = \frac{1.(1+1)}{2}$.

Teremos que $\frac{1.(1+1)}{2} = \frac{1.2}{2} = \frac{2}{2} = 1$.
Portanto, a propriedade vale quando $n = 1$.

(PDI) *Seja k um natural qualquer, vamos mostrar que*

se $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k.(k+1)}{2}$*, então* $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1).((k+1)+1)}{2}$.

Por PD, suponha que $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k.(k+1)}{2}$. *(**HI**)*
Devemos mostrar que $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1).((k+1)+1)}{2}$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática

Exemplo

Teorema

Para todo n inteiro positivo, $\underbrace{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}}_{\textbf{Pense nisto como uma propriedade de } n}$.

Prova

(BASE) ***Suponha que*** $n = 1$. *Neste caso, devemos verificar se* $1 = \frac{1.(1+1)}{2}$.

Teremos que $\frac{1.(1+1)}{2} = \frac{1.2}{2} = \frac{2}{2} = 1$.
Portanto, a propriedade vale quando $n = 1$.

(PDI) *Seja k um natural qualquer, vamos mostrar que*

se $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k.(k+1)}{2}$, *então* $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1).((k+1)+1)}{2}$.

Por PD, suponha que $\underbrace{1 + 2 + \ldots + k} = \frac{k.(k+1)}{2}$. ***(HI)***

Devemos mostrar que $\underbrace{1 + 2 + \ldots + k}_{\textbf{Oportunidade de usar a HI}} + (k+1) = \frac{(k+1).((k+1)+1)}{2}$.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática

Teorema

Para todo n inteiro positivo, $\underbrace{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}}$.

Prova

(BASE) CONCLUÍDA

(PDI) *Seja k um natural qualquer, vamos mostrar que*

se $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k.(k+1)}{2}$, *então* $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1).((k+1)+1)}{2}$.

Por PD, suponha que $\underbrace{1 + 2 + \ldots + k} = \frac{k.(k+1)}{2}$. *(**HI**)*

Nosso objetivo agora é mostrar que $\underbrace{1 + 2 + \ldots + k}_{\text{Oportunidade de usar a HI}} + (k+1) = \frac{(k+1).((k+1)+1)}{2}$.

Usando a HI, podemos substituir a expressão destacada.
Devemos agora verificar que

$$\frac{k.(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1).((k+1)+1)}{2}$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática

Teorema

Para todo n inteiro positivo, $\underbrace{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}}$.

Prova

(BASE) CONCLUÍDA

(PDI) ...

Usando a HI, podemos substituir a expressão destacada.
Devemos agora verificar que

$$\frac{k.(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1).((k+1)+1)}{2}$$

Manipulando a expressão da esquerda, teremos

$$\frac{k.(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k.(k+1)}{2} + \frac{2.(k+1)}{2} = \frac{k.(k+1)+2.(k+1)}{2} = \frac{(k+1).(k+2)}{2}$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Indução Matemática

Teorema

Para todo n inteiro positivo, $\underbrace{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}}$.

Prova

(BASE) CONCLUÍDA

(PDI) ...

Usando a HI, podemos substituir a expressão destacada.
Devemos agora verificar que

$$\frac{k.(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1).((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1).(k+2)}{2}$$

Manipulando a expressão da esquerda, teremos

$$\frac{k.(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k.(k+1)}{2} + \frac{2.(k+1)}{2} = \frac{k.(k+1)+2.(k+1)}{2} = \frac{(k+1).(k+2)}{2}$$

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Roteiro

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Orientações Gerais para o Uso de Indução

Busque sempre seguir estes passos:

1. Identifique o que são a base b e a propriedade $P(n)$ de que o teorema trata e uma função $s(n)$ que sirva para gerar os elementos do domínio.
2. Tome nota dos enunciados das substituições b, $P(k)$ e $P(s(k))$.
3. Escreva "**BASE**" e mostre que $P(b)$ é verdadeiro.
4. Escreva "**PASSO INDUTIVO**".
5. Enuncie e identifique claramente a hipótese de indução na forma "Seja k um elemento qualquer do domínio com $k \geq b$, suponha que $P(k)$ vale".
6. Reforce o que precisa ser provado a partir da hipótese, ou seja, diga que precisa provar $P(s(k))$ no contexto do teorema.
7. Mostre que $P(s(k))$ vale **utilizando a hipótese de indução**.
8. Identifique claramente a conclusão do passo de indução.
9. Enuncie que $P(n)$ vale p/ todo $n \geq b$ do domínio.

Universidade Federal do Ceará
Computer Science Department
Samy Sá (samy@ufc.br)

Outras Observações

- A técnica de **Indução Matemática** é também chamada de **Primeiro Princípio de Indução** e **Indução Fraca** em outras fontes.
- Além da técnica que estudamos, há também a **Indução Completa**, também chamada de **Segundo Princípio de Indução** e **Indução Forte** em outras fontes. Esta técnica é equivalente à de Indução Matemática, mas permite manipulações mais convenientes em algumas situações.
- O livro tem muitos exemplos de provas por indução. A leitura destes exemplos favorecerá a compreensão dos conceitos.