QXD0116 - Álgebra Linear

Matrizes - Introdução e propriedades

André Ribeiro Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Matrizes

Definição

Sejam m e n dois números naturais não nulos:

- $m \in \mathbb{N}^*$ e $n \in \mathbb{N}^*$
- $m \geq 1$ e $n \geq 1$

Uma matriz real $m \times n$ é um arranjo retangular com $m \cdot n$ números dispostos em m linhas e n colunas.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2.3 & 0.1 \\ 1.3 & 4 & -0.1 & 0 \\ 4.1 & -1 & 0 & 1.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Matrizes

Exemplo

Tabela com dados referentes à quantidade ideal de calorias em função da idade e peso:

		IDADE		
		25	**45**	**65**
PESO	**50**	2500	2350	1950
	60	2850	2700	2250
	70	3200	3000	2550
	80	3550	3350	2800

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2500 & 2350 & 1950 \\ 2850 & 2700 & 2250 \\ 3200 & 3000 & 2550 \\ 3550 & 3350 & 2800 \end{bmatrix}$$

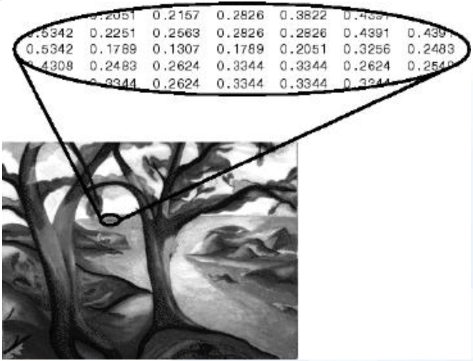
Matrizes

- tamanho dado por dimensão linha (*row*) $\times$ dimensão coluna (*column*)
- elementos também chamados entradas ou coeficientes
- dada uma matriz $\mathbf{A}$, a_{ij} é um elemento onde:
  - i é o índice da linha
  - j é o índice da coluna
  - os índices podem iniciar com valor igual a 0 ou 1
- duas matrizes são iguais se têm mesmo tamanho e as entradas correspondentes são iguais: $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \; \forall \; i, j$

Matrizes

Exemplo

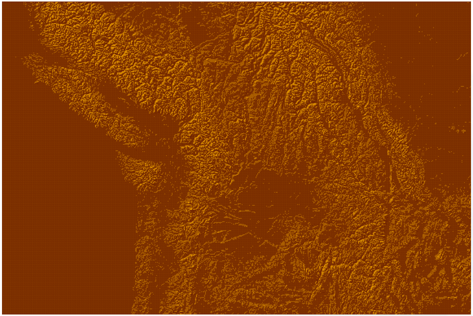
x_{ij} é o valor do pixel na posição (i, j) de uma imagem monocromática



Matrizes

Exemplo

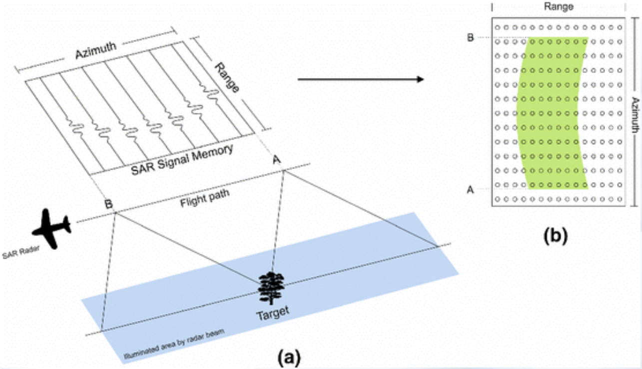
h_{ij} é o valor da altitude de um terrreno na posição (i, j)



Matrizes

Exemplo

e_{ij} é o valor do sinal de eco de um radar para o azimute i e um *range* j



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Tipos especiais de matrizes

- Matriz nula: aquela onde $a_{ij} = 0 \ \forall i, j$

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz linha: possui apenas uma linha, ou seja, $m = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5.2 & 7.1 & 9.3 \end{bmatrix}$$

- Matriz coluna: possui apenas uma coluna, ou seja, $n = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Tipos especiais de matrizes

- Matriz quadrada: número de linhas igual ao de colunas ($m = n$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz retangular: quantidade diferente de linhas e colunas ($m \neq n$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3.7 & 0.2 & 1.9 \\ 5.2 & 7.1 & 9.3 \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal: matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7.2 & 0 \\ 0 & 4.6 \end{bmatrix}$$

Tipos especiais de matrizes

- Matriz identidade: matriz diagonal onde $a_{ij} = 1 \ \forall \ i = j$

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz triangular inferior: matriz quadrada onde $a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Tipos especiais de matrizes

- Matriz triangular superior: matriz quadrada onde $a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz simétrica: matriz quadrada onde $a_{ij} = a_{ji} \ \forall \ i, j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Diagonais

- Principal: elementos a_{ij} tais que $i = j$
- Secundária: elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Igualdade

Definição

Se **A** e **B** são matrizes $m \times n$, então $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ se, e somente se, seus elementos correspondentes, ou seja:

$$a_{ij} = b_{ij} \ \forall \ 1 \leq i \leq m \quad , \ 1 \leq j \leq n$$

Exemplo

Determine os valores de x, y, z e w para que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & 2 \\ -1 & y \end{bmatrix} ; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & z \\ w & 3 \end{bmatrix}$$

Soma

Definição

Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes $m \times n$, então $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ é uma matriz $m \times n$ obtida somando-se os elementos correspondentes

Exemplo

Calcule $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ para as matrizes abaixo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Produto por escalar

Definição

Se $\mathbf{A}$ é uma matriz $m \times n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ é um valor escalar, então $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A}$ é uma matriz $m \times n$ obtida multiplicando-se os elementos de $\mathbf{A}$ por α, ou seja $b_{ij} = \alpha a_{ij} \; \forall \; i, j$.
Se $\alpha = -1$, então $(-1)\mathbf{A}$ pode ser definida como $-\mathbf{A}$, sendo chamada matriz oposta de $\mathbf{A}$.

Exemplo

Dadas as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, calcule $\alpha\mathbf{A}$ e $\beta\mathbf{B}$ onde $\alpha = -2$ e $\beta = 3$

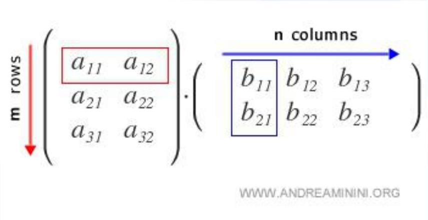
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Produto matricial

Definição

Seja **A** é uma matriz $m \times p$ e **B** uma matriz $p \times n$ então $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ é uma matriz $m \times n$ obtida multiplicando-se cada linha i de **A** por cada coluna j de **B** e somando-se as parcelas

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$



Produto matricial

Exemplo

Dadas as matrizes **A** e **B**, calcule seu produto matricial

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix};\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Propriedades

- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
- $\alpha \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \alpha \cdot \mathbf{B} + \alpha \cdot \mathbf{C}$
- $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{A}$
- $(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{A})$
- $\alpha \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\alpha \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{B})$
- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{0} - \mathbf{A} = -\mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Longrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
- $\mathbf{A} = \mathbf{B} \not\Longleftarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
- Se $\mathbf{A}_{2\times 3}$ e $\mathbf{B}_{3\times 4}$:
  - $\exists(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{2\times 4}$
  - $\nexists\,(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$