QXD0116 - Álgebra Linear

Transformações Lineares IV

André Ribeiro Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Matriz de Transformação

Teorema

Sejam $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ então:

(i) A matriz $\mathbf{A}$ define uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$

(ii) Reciprocamente, seja $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$, então T pode ser representada por uma matriz $\mathbf{A}$ em relação às bases de $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$.

Prova

(i) Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$
$$\mathbf{A} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot T(\mathbf{u})$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Matriz de Transformação

Teorema

Prova

(ii) Sejam $\mathbb{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e $\mathbb{B}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases de $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$. Seja ainda $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$, então:

$$\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{u}_1 + x_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + x_n \cdot \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{y} = y_1 \cdot \mathbf{v}_1 + y_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + y_m \cdot \mathbf{v}_m = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \mathbf{v}_i$$

Se definirmos a matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$ como $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Matriz de Transformação

Teorema

Prova

Dessa forma, a aplicação da transformação a um vetor da base $\mathbb{B}_1$ resulta em um vetor da base $\mathbb{B}_2$, que pode ser representado como uma combinação linear de seus elementos, i.e.

$$T(\mathbf{u}_1) = a_{11} \cdot \mathbf{v}_1 + a_{21} \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m1} \cdot \mathbf{v}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \cdot \mathbf{v}_i$$

$$T(\mathbf{u}_2) = a_{12} \cdot \mathbf{v}_1 + a_{22} \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m2} \cdot \mathbf{v}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \cdot \mathbf{v}_i$$

$$\vdots$$

$$T(\mathbf{u}_n) = a_{1n} \cdot \mathbf{v}_1 + a_{2n} \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn} \cdot \mathbf{v}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{in} \cdot \mathbf{v}_i$$

Matriz de Transformação

Teorema

Prova

então

$$T(\mathbf{x}) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \mathbf{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot T(\mathbf{u}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \sum_{i=i}^{m} a_{ij} \cdot \mathbf{v}_i$$

$$= \sum_{i=i}^{m} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j}_{y_i} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{y}$$

Matriz de Transformação

Teorema

Prova

Portanto, se $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ e $\mathbf{A}$ é uma matriz $m \times n$,

então

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \cdot x_j \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

Matriz de Transformação

Exemplo

Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \\ u_1 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda

$$\mathbb{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \ \mathbb{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Determine a matriz de transformação **A**.

Matriz de Transformação

Exemplo

Solução

A matriz será $3 \times 2 \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ e também pode ser chamada de matriz de mudança de base.

Calcula-se $T(\cdot)$ para cada vetor da base $\mathbb{B}_1$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1-1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1+0 \\ -1-0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Matriz de Transformação

Exemplo

Solução

Agora, escreve-se cada vetor resultante como combinação linear dos vetores da base $\mathbb{B}_2$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{21} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{31} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = a_{12} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{22} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{32} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Transformação

Exemplo

Solução

Com isso, obtemos dois sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} a_{11} - a_{21} = 2 \\ a_{11} + a_{21} + a_{31} = 0 \\ a_{31} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11} = \frac{1}{2} \\ a_{21} = -\frac{3}{2} \\ a_{31} = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a_{12} - a_{22} = -1 \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} = -1 \\ a_{32} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_{12} = -\frac{1}{2} \\ a_{22} = \frac{1}{2} \\ a_{32} = -1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

Definição

Dada $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ e $\mathbb{U} = \mathbb{V}$, um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se existe um vetor não-nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ tal que

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}.$$

Todo vetor satisfazendo essa relação é um autovetor de T correspondente o autovalor λ.

Observações

(i) Se λ é um autovalor de T, então o operador linear pode apenas variar o módulo e o sentido do vetor. Nunca sua direção.

(ii) Outros termos: valor/vetor característico ou próprio).

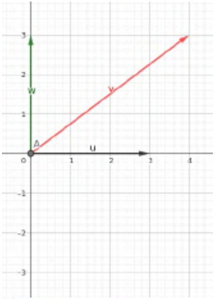
Autovalores e Autovetores

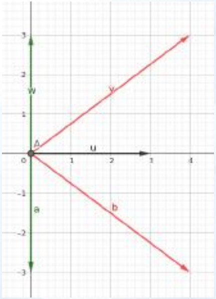
Exemplo

Reflexão no eixo-x

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ onde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \to T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$





Reflexão no eixo-x

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ onde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \to T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Todo vetor $\begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}$ com $u_2 \neq 0$ é autovetor com autovalor $\lambda = -1$.
- Todo vetor $\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ com $u_1 \neq 0$ é autovetor com autovalor $\lambda = 1$.

Autovalores e Autovetores

Teorema

Se $\mathbf{v}$ é um autovetor associado a λ, então qualquer vetor $\mathbf{w}$ paralelo a $\mathbf{v}$ também é autovetor associado a λ.

Prova

Se $\mathbf{v}$ é um autovetor de T associado a λ, então $T(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Agora, se $\mathbf{w}$ é paralelo a $\mathbf{v}$, então $\mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{v}$ com $\alpha \neq 0$.
Devemos mostrar que $T(\mathbf{w}) = \lambda \cdot \mathbf{w}$. De fato

$$T(\mathbf{w}) = T(\alpha \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot T(\mathbf{v}) = \alpha \cdot \lambda \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{w}$$

Autovalores e Autovetores

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que gira, no sentido horário, cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ de um ângulo θ.

$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 \cdot \cos\theta + u_2 \cdot \sin\theta \\ -u_1 \cdot \sin\theta + u_2 \cdot \cos\theta \end{bmatrix}$$

Determinar os autovalores e correspondentes autovetores nos seguintes casos: $\theta = 0$, $\theta = \pi$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Solução

(a) $\theta = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \\ \lambda = 1 \end{matrix}$$

Autovalores e Autovetores

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que gira, no sentido horário, cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ de um ângulo θ.

$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 \cdot \cos\theta + u_2 \cdot \sin\theta \\ -u_1 \cdot \sin\theta + u_2 \cdot \cos\theta \end{bmatrix}$$

Determinar os autovalores e correspondentes autovetores nos seguintes casos: $\theta = 0$, $\theta = \pi$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Solução

(b) $\theta = \pi$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \\ \lambda = -1 \end{array}$$

Autovalores e Autovetores

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que gira, no sentido horário, cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ de um ângulo θ.

$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 \cdot \cos\theta + u_2 \cdot \sin\theta \\ -u_1 \cdot \sin\theta + u_2 \cdot \cos\theta \end{bmatrix}$$

Determinar os autovalores e correspondentes autovetores nos seguintes casos: $\theta = 0$, $\theta = \pi$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Solução

(c) $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nexists$$

Autovalores e Autovetores

Cálculo

Devemos encontrar um escalar λ e um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \lambda \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Portanto, temos um sistema linear homogêneo de ordem n. Para que o sistema admita soluções não-triviais, devemos impor qe o determinante da matriz de coeficientes seja igual a zero, ou seja, $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I})$ não possui inversa.

O resultado do determinante será um polinômio de grau n em λ e cujas raízes são os valores que procuramos.

Autovalores e Autovetores

Cálculo

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \rightarrow T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 3u_1 + 4u_2 \\ 2u_1 + u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule os autovalores e autovetores.

Solução

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

Cálculo

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \to T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 3u_1 + 4u_2 \\ 2u_1 + u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule os autovalores e autovetores.

Solução

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (3-\lambda)\cdot(1-\lambda) + 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\text{raízes} \to \{-1, 5\}$$

Autovalores e Autovetores

Cálculo

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \to T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 3u_1 + 4u_2 \\ 2u_1 + u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule os autovalores e autovetores.

Solução

Para $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 = -u_2 \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_2 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Autovalores e Autovetores

Cálculo

Exemplo

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \to T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 3u_1 + 4u_2 \\ 2u_1 + u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule os autovalores e autovetores.

Solução

Para $\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 = 2u_2 \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2u_2 \\ u_2 \end{bmatrix}$$