Teoria de Conjuntos

QXD0008 – Matemática Discreta

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily
ismailybf@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2022

Tópicos desta aula

- Teoria básica de conjuntos
- Operações sobre conjuntos
- Identidades de conjuntos
- Conectivo condicional e conectivo bicondicional
- Técnica de demonstração de equivalências

Referências para esta aula

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Seções 1.1, 1.3, 2.1 e 2.2** do livro: Kenneth H. Rosen. *Matemática Discreta e suas Aplicações*. (Sexta Edição).

- **Capítulo 1** do livro: Daniel J. VELLEMAN. *How to Prove it. A structured approach*. (3rd Edition). Cambridge University Press; 3rd Edition, 2019.

Teoria de Conjuntos

Teoria de Conjuntos

- Um **conjunto** é uma coleção não ordenada de objetos.
  - Os objetos no conjunto são chamados de **elementos** ou **membros** do conjunto. Diz-se que os elementos **pertencem** ao conjunto.

- Um conjunto é determinado pelos seus elementos. Listar os elementos – quando possível.
  - $A = \{1, 5, 17, 23, 58\}$:
    - $5 \in A$;
    - $15 \notin A$.

- Dois conjuntos são iguais sse possuem exatamente os mesmos elementos.
  - $\{3, 4, 7\}$, $\{3, 3, 4, 7\}$, $\{7, 3, 4\}$: diferentes nomes para o mesmo conjunto.

> Nem sempre é possível listar todos os elementos de um conjunto!

Conjuntos - alternativas para descrição

- reticências $\longrightarrow \{1, 3, 4, 7, \dots\}$
  - necessita que a regra de formação seja entendida;
  - potencial para ambiguidade.

- teste de pertinência $\longrightarrow A = \{x \mid x \text{ primo}\}$
  - elementos pertencentes ao conjunto: **"passam"** no teste.
  - elementos não pertencentes ao conjunto: **"não passam"**.

- Exemplo:

1. $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
   - $E = \{n \mid n \text{ é um número inteiro positivo par}\}$
2. $Q = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$
   - $Q = \{n \mid n \text{ é um quadrado perfeito}\}$

Conjuntos e variáveis

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

$$\boxed{\{x \mid x^2 \leq 9\}}$$

- $y = 2 \quad \longrightarrow \quad y \in \{x \mid x^2 \leq 9\}$.
- $y = 5 \quad \longrightarrow \quad y \notin \{x \mid x^2 \leq 9\}$.
- Generalizando $y \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad y \in \{x \mid x^2 \leq 9\}$.
  - Afirmação sobre y.
  - A mesma coisa que afirmar $y^2 \leq 9$.
  - **Note que**: é necessário conhecer y e **não** x para responder ao teste
    - y é variável **livre**. Dar valores diferentes para uma variável livre pode afetar o valor-verdade da declaração.
    - x é variável **dependente**. Variáveis dependentes são letras usadas para ajudar a expressar uma ideia e não representam nenhum objeto específico. Uma variável dependente sempre pode ser substituída por uma nova variável sem alterar o significado da declaração.

Conjuntos e sentenças

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $y \in \{x \mid P(x)\}$ é o mesmo que $P(y)$.

- $y \notin \{x \mid P(x)\}$ é o mesmo que $\neg P(y)$.

Ambas são afirmações sobre y e não sobre x.

- Importante diferenciar expressões que são sentenças matemáticas e expressões que são nomes de objetos matemáticos:
  - $y \in \{x \mid P(x)\}$ é uma sentença matemática;
  - $\{x \mid P(x)\}$ é um nome de um conjunto.

Conjunto-verdade

- Dada $P(x)$ como analisar o seu valor-verdade?

- O **conjunto-verdade** de uma sentença $P(x)$ é o conjunto de todos os valores de x para os quais $P(x)$ é verdadeira

  isto é

  é o conjunto definido pelo uso de $P(x)$ como teste de pertinência

  $$\boxed{\textbf{Conjunto-verdade de } P(x) = \{x \mid P(x)\}}$$

- Descreva o conjunto-verdade das sentenças abaixo
  1. n é um número par
     - $\{x \mid x \text{ é um número par}\}$
  2. x satisfaz $2x^2 - x - 1 = 0$
     - $\{x \mid 2x^2 - x - 1 = 0\} = \{-\frac{1}{2}, 1\}$

Universo do discurso (Domínio)

- Dada uma propriedade $P(x)$, queremos conhecer o conjunto de elementos y para os quais $P(y)$ é verdadeira.
- Para quais elementos devemos testar $P(x)$?
  - Universo do discurso ou Domínio
- Alguns conjuntos aparecem frequentemente em matemática como universo do discurso:

  1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto dos números naturais.
  2. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto dos números inteiros.
  3. $\mathbb{Q} = \{p/q \mid \{p, q\} \subset \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$, o conjunto dos números racionais.
  4. $\mathbb{I} = \{x \mid x \neq p/q, \forall \{p, q\} \subset \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$, o conjunto dos números irracionais.
  5. $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$, o conjunto dos números reais.

Universo do discurso (Domínio)

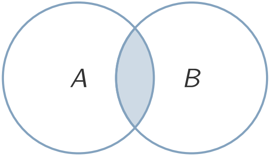
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Considere o exemplo x satisfaz $2x^2 - x - 1 = 0$.
    - $U = \mathbb{R} \longrightarrow \{-\frac{1}{2}, 1\}$
    - $U = \mathbb{Z} \longrightarrow \{1\}$
    - $U = \mathbb{Q}^- \longrightarrow \{-\frac{1}{2}\}$
    - $U = \mathbb{Z}^- \longrightarrow \{\}$ ou $\emptyset$
- $y \in \{x \in U \mid P(x)\}$ é o mesmo que $(y \in U) \land P(y)$

Dados dois conjuntos A e B

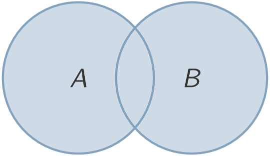
Interseção de A e B é:
$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

$A \cap B$



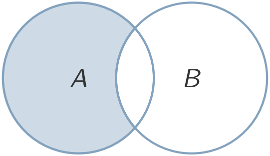
União de A e B é:
$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$

$A \cup B$



Diferença de A e B é:
$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$

$A \setminus B$



Conjuntos-verdade

- $A =$ conjunto-verdade de $P(x)$
  - $y \in A$ é o mesmo que $P(y)$.
- $B =$ conjunto-verdade de $Q(x)$
  - $y \in B$ é o mesmo que $Q(y)$.

$$\Downarrow$$

O conjunto verdade de $(P(x) \wedge Q(x))$ é

$$\{x \mid P(x) \wedge Q(x)\}$$

$$\{x \mid P(x) \wedge Q(x)\} \quad = \quad \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

$$\{x \mid P(x) \wedge Q(x)\} \quad = \quad \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \quad = \quad A \cap B.$$

O conjunto verdade de $(P(x) \wedge Q(x))$ é:

$$\{x \mid P(x) \wedge Q(x)\} \quad = \quad \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \quad = \quad A \cap B.$$

O conjunto verdade de $(P(x) \vee Q(x))$ é:

Análise da forma lógica de uma sentença

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. $x \in A \cap (B \cup C)$

$$
\begin{aligned}
&\equiv (x \in A) \land (x \in (B \cup C)) && \text{(}\textbf{D}\text{efinição de } \cap\text{)} \\
&\equiv (x \in A) \land ((x \in B) \lor (x \in C)) && \text{(}\textbf{Definição de } \cup\text{)}
\end{aligned}
$$

2. $x \in A \setminus (B \cap C)$

$$
\begin{aligned}
&\equiv (x \in A) \land \neg(x \in (B \cap C) && \text{(}\textbf{Definição de } \setminus\text{)} \\
&\equiv (x \in A) \land \neg((x \in B) \land (x \in C)) && \text{(}\textbf{Definição de } \cap\text{)} \\
&\equiv (x \in A) \land (\neg(x \in B) \lor \neg(x \in C)) && \text{(}\textbf{DeMorgan}\text{)} \\
&\equiv (x \in A) \land ((x \notin B) \lor (x \notin C)) && \text{(}\textbf{Definição de } \neg\text{)}
\end{aligned}
$$

Atenção

Operadores de conjuntos estão relacionados com conectivos lógicos, **mas** eles não são intercambiáveis

Demonstração das identidades de conjuntos

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   $x \in A \cup (B \cap C)$
   $\equiv (x \in A) \vee (x \in (B \cap C))$ (**Definição de** $\cup$)
   $\equiv (x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C))$ (**Definição de** $\cap$)
   $\equiv ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C))$
   (**Distributiva**)
   $\equiv (x \in (A \cup B)) \wedge (x \in (A \cup C))$ (**Definição de** $\cup$)
   $\equiv x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (**Definição de** $\cap$)

2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

   $x \in A \setminus (B \cap C)$
   $\equiv (x \in A) \wedge \neg(x \in (B \cap C))$ (**Definição de** $\setminus$)
   $\equiv (x \in A) \wedge \neg((x \in B) \wedge (x \in C))$ (**Definição de** $\cap$)
   $\equiv (x \in A) \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C))$ (**DeMorgan**)
   $\equiv (x \in A) \wedge ((x \notin B) \vee (x \notin C))$ (**Definição de** $\neg$)
   $\equiv ((x \in A \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \notin C))$ (**Distributiva**)
   $\equiv (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \setminus C)$ (**Definição de** $\setminus$)
   $\equiv x \in ((A \setminus B) \cup (A \setminus C))$ (**Definição de** $\cup$)

FIM