/ /

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, 04 de Maio de 2017

- GRUPOS (CAPÍTULO 8 - COLLIER / CAPÍTULO 4 - MENASCHE) → NÃO CAI NA P2.
  ↳ CAI NA P3

Para definir um grupo, preciso de dois ingredientes:

→ Um conjunto

→ Uma operação neste conjunto

Seja G um conjunto para os nossos objetivos, definimos uma operação $*$ como

$$* : G \times G \longrightarrow G,$$

isto é, uma operação toma dois elementos do conjunto G e retorna como resultado um elemento do conjunto G. Exemplo de algo que não é uma operação de acordo com esta definição:

→ Conjunto $\mathbb{N}$ (Naturais)

→ Subtração

$2 \in \mathbb{N}, \quad 5 \in \mathbb{N}$

$2 - 5 = -3 \notin \mathbb{N}$

Ao tomar dois elementos do conjunto e operar, o resultado precisa estar dentro do conjunto também.

Nem todo par de conjunto e operação forma um grupo. Para formar um grupo é necessário que a operação satisfaça algumas propriedades extras

DEFINIÇÃO: Dizemos que o par $(G, *)$, onde G é um conjunto e

$$*: G \times G \to G$$

é uma operação neste conjunto, é um grupo se a operação $*$ satisfaz as seguintes propriedades:

(1) ASSOCIATIVIDADE

Para todo $a, b, c \in G$, $(a * b) * c = a * (b * c)$

(2) EXISTÊNCIA DE ELEMENTO NEUTRO

Existe um elemento $e \in G$ tal que, para todo $a \in G$, $a * e = e * a = e$.

Neste caso, dizemos que e é o elemento neutro.

(3) EXISTÊNCIA DE INVERSO:

Para todo $a \in G$, existe um elemento $a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$. a' é o inverso de a para a operação $*$.

OBSERVAÇÃO: Repare que não exigimos que a operação $*$ seja comutativa. (Relembrando: Comutatividade: para todo $a, b \in G$, $a * b = b * a$). Caso a propriedade de comutatividade também seja satisfeita pelo grupo $(G, *)$, dizemos que ele é um grupo comutativo ou um $\underbrace{\text{grupo abeliano}}$

→ EM HOMENAGEM A ABEL

Os criadores da teoria do grupos foram:

-> GALOIS

-> ABEL

DEFINIÇÃO: Seja $(G, *)$ um grupo. A ordem do grupo é definida como o número de elementos do conjunto G.

Se G é um conjunto finito, dizemos que o grupo tem ordem finita ou que o grupo é um grupo finito.

Seja $(G, *)$ um grupo

Seja $x, y \in G$

Seja $z = x * y$

Então $z \in G$

Como $(G, *)$ é um grupo, todo elemento de G tem inverso.

x' inverso de x

y' inverso de y

Quem é x', o inverso de z?

$$z * z' = e$$

$$\overbrace{x * y} * z' = e$$

$$\underbrace{x' * x} * y * z' = \underbrace{x' * e}$$

$$\underbrace{e * y} * z' = x'$$

$$y * z' = x'$$

$$\underbrace{y' * y} * z' = y' * x'$$

$$\underbrace{e * z'} = y' * x'$$

$$z' = y' * x'$$

Somente no caso que o grupo é comutativo, tenho:

$$z' = x' * y'$$

Exemplos: 1) $(\mathbb{N}, +)$

$+$ é operação nos naturais? SIM!

$+$ associativa? SIM!

$+$ existe elemento neutro? SIM! 0.

Todo elemento possui inverso?

$a + a' = 0$

Quem é o inverso de 2? $-2 \notin \mathbb{N}$ → NÃO!

Logo, $(\mathbb{N}, +)$ não é grupo.

2) $(\mathbb{Z}, +)$ é grupo.

3) $(\mathbb{Z}, \times)$ não é grupo.

$\times$ é operação? SIM!
$\times$ é associativo? SIM!
Existe elemento neutro? SIM!
Todo elemento tem inverso? $a \times a' = 1$ → NÃO!
Inverso de $2 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

4) $(\mathbb{Q}, \times)$ não é grupo

Todo elemento tem inverso?
Inverso de 2 é $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

Quem é o inverso de 0? Não existe!

5) $(\mathbb{Q}^*, \times)$ é grupo.
↳ Racionais não nulos

2 e 5 são grupos comutativos.

/ /

6) M_K = conjunto de todas as matrizes quadradas $K \times K$, para um k fixado

$(M_K, +)$ é grupo comutativo.

+ é operação? SIM!

+ é associativa!

Existe elemento neutro? SIM! MATRIZ NULA.

Todo elemento possui inverso? $A + A' = 0$ -> SIM!

Ex: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ $A' = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$

7) $(M_K, \times)$ NÃO É GRUPO.

$\times$ operação? SIM!

$\times$ associativo? SIM!

Existe elemento neutro? SIM, MATRIZ IDENTIDADE.

Todo elemento possui inverso? $A \times A' = I$ -> NÃO!

$$\det(A') = \frac{1}{\det(A)}.$$

Se $\det(A) = 0$, a matriz A' não existe.

8) $(M_K^*, \times)$

↳ MATRIZES $K \times K$ COM DETERMINANTE DIFERENTE DE ZERO.

8 é exemplo de grupo não comutativo.

$A \times B \neq B \times A$

9) $(\mathbb{Z}_n, +)$

10) $(\mathbb{Z}_n, \times)$

↳ INTEIROS MÓDULO N.