LEZIONE 21

G. PARMEGGIANI 9/4/2021

CODICE: 082714

ALGORITMO DI DIJKSTRA

INPUT $G(V,E)$ connesso, lunghezze $l(e)>0$, $e\in E$, vertice di partenza r

OUTPUT distanza ed i cammini minimi tra r e gli altri vertici di V

$\boxed{d(r)=d_0(r,r)}$, $\boxed{d(v)=d_0(r,v)}$

INIZIALIZZAZIONE Poni $\boxed{d(r)}=0$ e $\boxed{d(v)}=\infty$, $v\in V\setminus\{r\}$,
$i=0$, $S_0=\{r\}$

ITERAZIONE i-esima: $v \in V \setminus S_{i-1}$

$$\boxed{\forall v \in V \quad \Delta(v) = \{x \in V \mid x \text{ adiacente a } v\}}$$

$$\underbrace{d(v)}_{\substack{d_i(r,v) \\ \text{quello che voglio} \\ \text{trovare adesso}}} \underset{def}{=} \min_{x \in \Delta(v)} \{ \underbrace{d(v)}_{d_{i-1}(r,v)} , \underbrace{d(x)}_{d_{i-1}(v,x)} + \underbrace{\ell(xv)}_{\text{lunghezza dell'arco } xv} \}$$

ho $v \in V \setminus S_{i-1}$ il vertice in cui

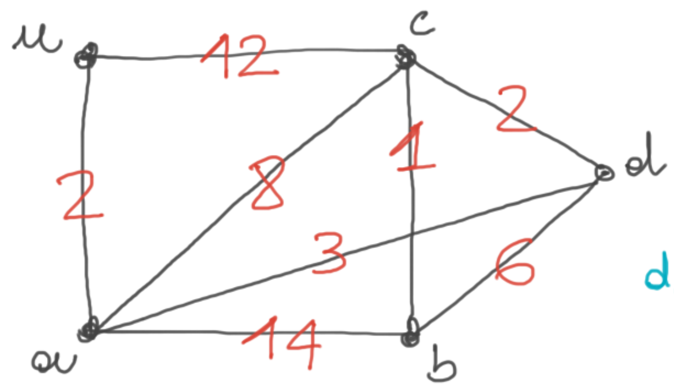
$\underbrace{d(v)}_{\text{la distanza al passaggio i-esimo}}$ è minimo

Pongo $i = i+1$

$S_i = S_{i-1} \cup \{v\}$

STOP quando $i = |V| - 1$

ESEMPIO



NODO DI PARTENZA: u

$v \in V$

$$d_i(u,v) = \min_{x \in \Delta(v)} \{d_{i-1}(u,v),\ d_{i-1}(u,x) + \ell(x,v)\}$$

	u	a	b	c	d	
						← inizializzazione $i=0$
$S_0 = \{u\}$	0	∞	∞	∞	∞	← lunghezze dei cammini minimi da u agli altri vertici con numero d'archi ≤ 0
$S_1 = S_0 \cup \{a\}$	0	$\boxed{2}$	∞	12	∞	$i=1$ ← // // // // // // // ≤ 1
$S_2 = S_1 \cup \{d\}$	0	2	13	10	$\boxed{5}$	$i=2$ ← // // // // // // // ≤ 2
$S_3 = S_2 \cup \{c\}$	0	2	11	$\boxed{7}$	5	$i=3$ ← // // // // // // // ≤ 3
$S_4 = S_3 \cup \{b\}$	0	2	$\boxed{8}$	7	5	$i=4$ ← // // // // // // // ≤ 4

CARATTERIZZAZIONE DEGLI ALBERI

Sia $T(V,E)$ un grafo. SONO EQUIVALENTI

circuiti

1. $T(V,E)$ è un albero (cioè è connesso e senza cicli)
2. $T(V,E)$ è un grafo senza cicli con $|E| = |V| - 1$
3. $T(V,E)$ è un grafo connesso con $|E| = |V| - 1$

N.B tolgo e NON i suoi estremi

È MINIMALMENTE ARCOCONNESSO

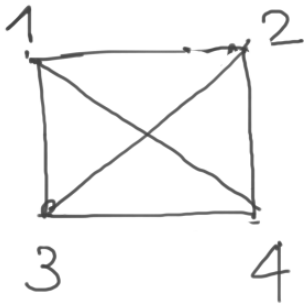
4. $T(V,E)$ è un grafo connesso tale che $\forall e \in E$ si ha $T \setminus \{e\}$ sconnesso
5. $\forall x, y \in V, x \neq y \; \exists! \; \gamma$ cammino d'estremi x e y

ESISTE ED È UNICO

GRAFI PLANARI

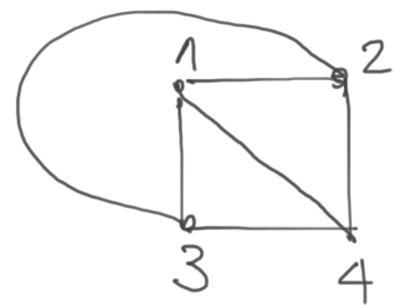
Un grafo (o un multigrafo) si dice **PLANARE** se può essere disegnato sul piano senza intersecare gli archi

K_4 :



non è una rappresentazione piana del grafo

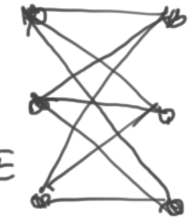
K_4 :



lo posso disegnare senza intersecare gli archi

K_4 è planare

si chiama UNA RAPPRESENTAZIONE PIANA DEL GRAFO

Tutti i grafi sono planari? **NO** vedremo che $K_{3,3}$: 

NON È PLANARE

Come si fa a stabilire se $G(V,E)$ è planare

- praticamente lo vedremo solo per grafi G che abbiano un CIRCUITO HAMILTONIANO (cioè un circuito che contiene tutti i vertici del grafo)

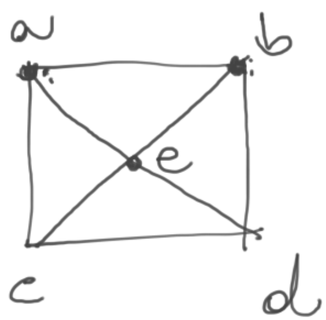
  usando il METODO DEI CERCHI E DELLE CORDE

- invece teoricamente enunceremo un teorema che caratterizza i grafi planari (KURATOWSKI)

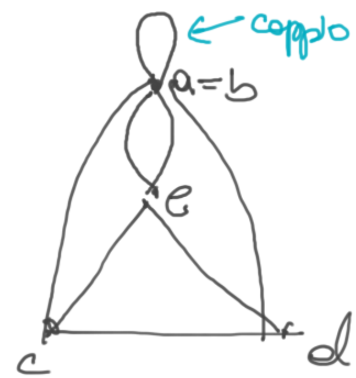
Per farlo dobbiamo dare delle definizioni.

Una **CONTRAZIONE DI UN ARCO** in un grafo consiste nell'identificare in un vertice i suoi estremi.

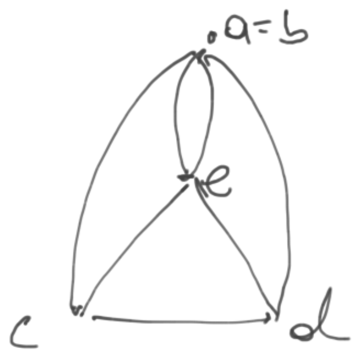
es.



CONTRAGGO
a b



tolgo il cappio

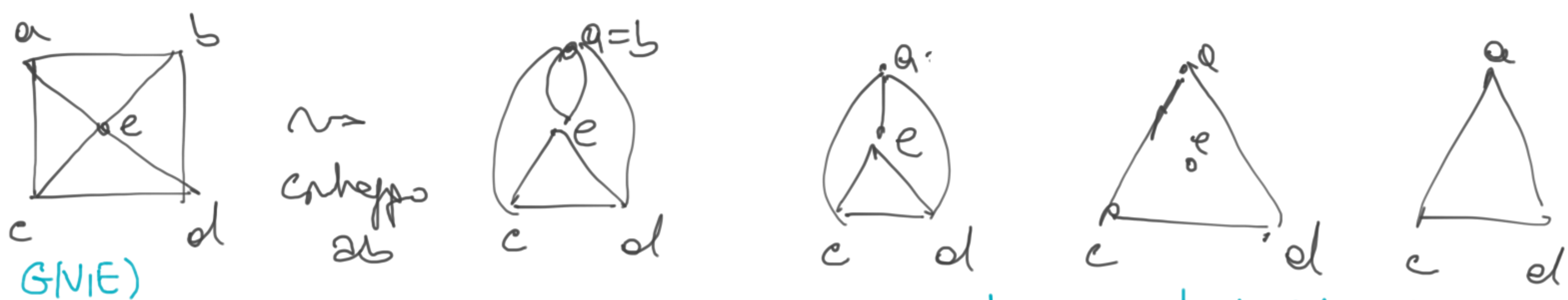


NB: si possono anche creare degli archi paralleli

Il grafo $G'(V', E')$ è un MINORE del grafo $G(V, E)$ se G' si ottiene da G con le seguenti operazioni:

- contrazione di archi
- rimozione di archi
- rimozione di vertici ISOLATI

cioè che sono estremi di alcun arco



SONO TUTTI MINORI di G(V,E)

Queste 3 operazioni non creano incroci di archi

NB

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ planare} \\ G' \text{ minore} \end{array}\right\} \Rightarrow G' \text{ planare}$$

Equivalentemente

$$\left.\begin{array}{l} G' \text{ minore di } G \\ G' \text{ NON E' PLANARE} \end{array}\right\} \Rightarrow G \text{ NON E' PLANARE}$$

TEOREMA DI KURATOWSKI:

$G(V,E)$ E' PLANARE $\iff$ NE' $K_{3,3}$, NE' K_5 SONO SUOI MINORI

(noi dimostreremo solo "$\Rightarrow$")

IL METODO DEI CERCHI E DELLE CORDE

Stabilisce se $G(V,E)$ è planare

· SOLO SE $G(V,E)$ ha un CIRCUITO HAMILTONIANO

$\boxed{1}$ trovare (se esiste) un circuito hamiltoniano

$\boxed{2}$ disegnarlo come un cerchio

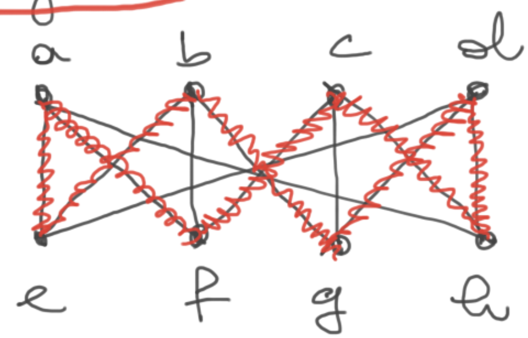
$\boxed{3}$ scrivere l'elenco degli archi che non sono nel circuito (chiamiamoli CORDE)

$\boxed{4}$ inserirli dentro o fuori dal cerchio cercando di evitare gli incroci scegliendo ad ogni passaggio archi (se esistono) che siano FORZATI DALLE SCELTE PRECEDENTI

Se si riesce ad inserirli tutti, UNO AD UNO, senza incroci il grafo è planare. Altrimenti no.

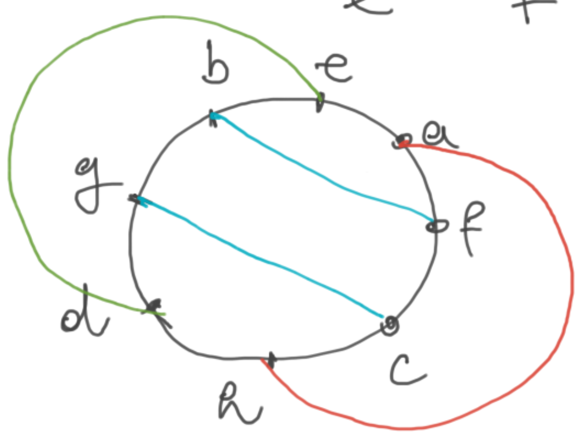
NB Si può scegliere se mettere la 1^a corda dentro o fuori dal cerchio. Questa 1^a scelta condiziona la posizione delle corde seguenti (nel tentativo di evitare gli incroci di archi)

ESEMPIO



ha 8 vertici
12 archi

afchdgbea
è un circuito hamiltoniano



~~1° ah~~ FUORI (ho scelto)

~~2° bf~~ DENTRO (forzato): per non incrociare ah

~~3° cg~~ DENTRO " " " " "

4° de FUORI (forzato): " " " bf e cg

$\boxed{\text{È PLANARE}}$