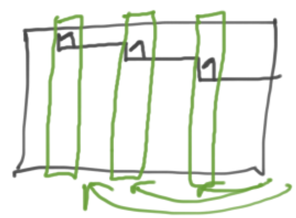
LEZIONE 11

G. PARMEGGIANI, 18/3/2021

CODICE: 913641

$A_{m\times n} \underset{EG}{\rightsquigarrow} U_{m\times n} =$  colonne dominanti

LE OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE DI UNA MATRICE A

sono :

$\boxed{1}$ Sommare alla i-esima riga di A la j-esima riga di A moltiplicata per uno scalare c

$\boxed{\text{N.B. } i \neq j}$

ES $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ se sommo alla 2^a $(i=2)$ riga di A (ossia $[2\ 6\ 2]$) la 1^a $(j=1)$ riga di A (ossia $[1\ 3\ 4]$) moltiplicata per -2 $(c=-2)$ ottengo

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad -6} \end{bmatrix}$$

$[2\ 6\ 2] + [1\ 3\ 4](-2) =$
$= [2\ 6\ 2] + [-2\ -6\ 8] = [0\ 0\ -6]$

scriverò: $A \xrightarrow[E_{ij}(c)]{} B$ per dire che B è il risultato di questa operazione su A

nell'esempio: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = B$

$\boxed{2}$ moltiplicare la i-esima riga di A per uno scalare $\boxed{c \neq 0}$

Es $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ se "divido" la 2ª ($i=2$) riga di A per 2: OSSIA SE MOLTIPLICO la 2ª riga di A per $c = \frac{1}{2}$

ottengo $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \boxed{1 \quad 3 \quad 1} \end{bmatrix} \leftarrow [2 \;\; 6 \;\; 2] \cdot \frac{1}{2}$

Scriverò $A \xrightarrow[E_i(c)]{} B$ per dire che B è il risultato di questa operazione su A

nell'esempio: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_2(\frac{1}{2})]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{3}$ scambiare la i-esima riga di A con la j-esima riga di A

ES $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ scambio la 2^a riga con la 1^a riga: $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

scriverò: $A \xrightarrow[E_{ij}]{} B$ per dire che B è il risultato di questa operazione su A

nell'esempio: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{12}]{} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

altro esempio: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{13}]{} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\text{N.B.} \quad E_{ij} = E_{ji}}$$

ELIMINAZIONE DI GAUSS

ESEMPIO Trovare una forma ridotta di Gauss per $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 14 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -4 & 14 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_1(\frac{1}{2})]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ \boxed{1} & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

trasformo questa colonna in $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ partendo dalla 1ª riga

" faccio diventare 0" questo 1 GUARDANDO ALLA 1ª RIGA

$$\xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & -5 \\ \boxed{-1} & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(1)]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & \boxed{5} & -5 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

"faccio diventare 0" questo -1 GUARDANDO ALLA 1ª RIGA

trasformo questa colonna in $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

faccio diventare 1 questo 5

① se invece avessi avuto $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 14 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ avrei dovuto fare uno scambio di righe

② se invece avessi avuto $\begin{bmatrix} 0 & \boxed{-4} & 14 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ sarei partito da moltiplicando la 1ª riga per $-\frac{1}{4}$

① se invece avessi avuto $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ALLORA SCAMBIO!

② se invece .... $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ....

$$\xrightarrow[E_2\left(\frac{1}{5}\right)]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-2} & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{32}(2)]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

è una forma ridotta di Gauss per A

"faccio diventare 0" questo -2
GUARDANDO ALLA 2ª RIGA

colonne dominanti

colonne libere

"Riassumendo" raggruppo le operazioni necessarie "a sistemare ogni colonna dominante":

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 14 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(1)E_{21}(-1)E_1\left(\frac{1}{2}\right)]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{32}(2)E_2\left(\frac{1}{5}\right)]{}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

ATTENZIONE ALL'ORDINE
(le scrivo da destra a sinistra)

NB Possono esserci diverse forme ridotte di Gauss per una stessa matrice A. QUESTO PUÒ ACCADERE SOLO SE:

$\boxed{1}$ NELLA EG SU A E' <u>NECESSARIO</u> FARE SCAMBI DI RIGHE

$\boxed{2}$ C'E' UNA <u>POSSIBILITA' DI SCELTA</u> NEGLI SCAMBI DA FARE

<u>ES</u> Trovare una forma ridotta di Gauss per $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Per "trasformare" la 1° colonna $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ <u>DEVO</u> fare uno scambio di righe e <u>POSSO SCEGLIERE</u> tra E_{12} ed E_{13}

SE SCELGO E_{12}:

$$C=\begin{pmatrix}0&0&2\\3&3&3\\2&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow[E_{12}]{}\begin{pmatrix}3&3&3\\0&0&2\\2&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow[E_{31}(-2)E_1(\frac{1}{3})]{}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[E_{23}]{}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[E_2(\frac{1}{2})]{}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[E_3(\frac{1}{2})]{}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=U_1$$ è una forma ridotta di Gauss per C

SE INVECE ALL'INIZIO AVESSI SCELTO E_{13}:

$$C=\begin{pmatrix}0&0&2\\3&3&3\\2&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow[E_{13}]{}\begin{pmatrix}2&4&2\\3&3&3\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[E_{21}(-3)E_1(\frac{1}{2})]{}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[E_2(-\frac{1}{3})]{}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[E_3(\frac{1}{2})]{}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=U_2$$

U_2 è una forma ridotta di Gauss per C

N.B.

$$U_1=\begin{pmatrix}1&\boxed{1}&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&\boxed{2}&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=U_2$$