

ESERCIZIO TIPO 7

Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Si dica se $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \subset \mathbb{C}^3$ è linearmente dipendente o linearmente indipendente.

Facendo tutti i passaggi, dalla definizione si ottiene ...

Siano $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$ tali che

$$(*) \quad \mathbf{0} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \delta \mathbf{v}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \beta + \delta \\ 3\alpha + 4\beta + 2\delta \end{pmatrix}.$$

Allora (*) equivale a (1) $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + 2\delta = 0 \end{cases}$.

(1) è un sistema lineare nelle incognite α, β, δ .

(1) ha sempre la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ossia $\alpha = \beta = \delta = 0$).

Se essa dovesse essere l'unica soluzione di (1) (quindi se (1) avesse un'unica soluzione) allora \mathcal{S} sarebbe L.I., altrimenti, se (1) ha anche una soluzione non nulla (quindi se (1) ha più di una soluzione) allora \mathcal{S} è L.D.

Vediamo allora quante soluzioni ha (1). Facendo una eliminazione di Gauss sulla sua matrice aumentata si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{31}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{32}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = (\mathbf{U} | \mathbf{0})$$

L'ultima colonna di $(\mathbf{U} | \mathbf{0})$, ossia $\mathbf{0}$, è libera, per cui (1) ha, come avevamo già osservato, soluzioni.

Poichè tutte le colonne di \mathbf{U} sono dominanti, il sistema (1) ha un'unica soluzione, quindi \mathcal{S} è L.I.

[Volendo risolvere (1), si ha che (1) è equivalente ad (1') $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$
 e con la sostituzione all'indietro si ottiene $\begin{cases} \delta = 0 \\ \beta = -\delta = 0 \\ \alpha = -2\beta - \delta = 0 \end{cases}]$

Possiamo abbreviare il procedimento

(ATTENZIONE: solo perchè \mathcal{S} è un insieme di vettori colonna !)

nel seguente modo:

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Facendo una EG su \mathbf{A} si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè tutte le colonne di \mathbf{U} sono dominanti, \mathcal{S} è L.I.

Questo perchè, siccome \mathcal{S} è un insieme di vettori colonna, la matrice \mathbf{A} dei coefficienti del sistema (1) è proprio la matrice

$$\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3)$$

le cui colonne sono gli elementi di \mathcal{S} .