Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: Informatica

ESERCIZIO TIPO 6

Si dica se l'insieme di vettori

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \left\{ \mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dello spazio vettoriale reale $V = M_2(\mathbb{R})$ è linearmente dipendente o linearmente indipendente.

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{A_1} + \alpha_2 \mathbf{A_2} + \alpha_3 \mathbf{A_3} + \alpha_4 \mathbf{A_4} =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

Allora $(*)$ equivale a (1)

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

(1) è un sistema lineare nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

(1) ha sempre la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ossia $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$).

Se essa dovesse essere l'unica soluzione di (1) (quindi se (1) avesse un'unica soluzione) allora $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ sarebbe L.I., altrimenti, se (1) ha anche una soluzione non nulla (quindi se (1) ha piú di una soluzione) allora $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ è L.D.

Vediamo allora quante soluzioni ha (1). Facendo una eliminazione di Gauss sulla sua matrice aumentata si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

L'ultima colonna di $\begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, ossia $\mathbf{0}$, è libera, per cui (1) ha, come avevamo già osservato, soluzioni.

Poichè non tutte le colonne di $\mathbf{U}$ sono dominanti (la terza è libera), il sistema (1) non ha un'unica soluzione, quindi $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ è L.D.

$\Big[$ Volendo risolvere (1), si ha che (1) è equivalente ad $(1')$ $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_4 & = 0 \end{cases}$

Scegliendo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{U}$ (la 3^a), con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} \alpha_3 = h \\ \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 = -h \\ \alpha_1 = -\alpha_2 - 2\alpha_3 = -(-h) - 2h = h - 2h = h \end{cases}$$

Il sistema $(1')$ ha ∞^1 soluzioni: tutti gli elementi dell'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} -h \\ -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \middle| h \in \mathbb{R} \right\}$.

Prendendo ad esempio $h = 1$ si ottiene $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$ ed $\alpha_4 = 0$:

$$-\mathbf{A_1} - \mathbf{A_2} + \mathbf{A_3} = \mathbf{0}$$

è una combinazione lineare nulla di $\{\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}, \mathbf{A_4}\}$ con coefficienti non tutti nulli.$\Big]$