**Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,**

**Scuola di Scienze - Corso di laurea:** **Informatica**

## Svolgimento degli Esercizi per casa 9

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si trovi una base ortonormale del sottospazio

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

di $\mathbb{C}^4$.

$\boxed{I}$ Costruiamo dapprima **una base di V**: poniamo

$$\mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo una base di $C(\mathbf{A})$ dove $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} & \mathbf{w_4} \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} & \mathbf{w_3} & \mathbf{w_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ i & -1 & 1 & 2i \\ -1 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(1)E_{31}(-i)E_{21}(1)E_1(-i)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2}i)E_{42}(i)E_2(i)} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè $\mathbf{U}$ ha come colonne dominanti la $1^a$, la $3^a$ e la $4^a$, allora una base di $C(\mathbf{A}) = V$ è $\{\mathbf{w_1}; \mathbf{w_3}; \mathbf{w_4}\}$.

$\boxed{II}$ Troviamo **una base ortogonale di V** applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2} = \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_3} = \mathbf{w_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{12} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2i$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\implies \alpha_{12} = -\frac{2i}{4} = -\frac{1}{2}i$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u_2} &= \mathbf{v_2} - \alpha_{12}\mathbf{u_1} = \\ &= \mathbf{v_2} + \tfrac{1}{2}i\mathbf{u_1} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}i \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2}, \qquad \mathbf{u_1} \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{13} = \frac{(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})}$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}^H\mathbf{u_1} = 4$$

$$\implies \alpha_{13} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{u_2} \neq \mathbf{0} \implies \alpha_{23} = \frac{(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3})}{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})}$$

$$(\mathbf{u_2}|\mathbf{v_3}) = \mathbf{u_2}^H\mathbf{v_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i & 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\2i\\0\end{pmatrix} = i$$

$$(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2}) = \mathbf{u_2}^H\mathbf{u_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i & 1 & i\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\1\\-i\end{pmatrix} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_{23} = i$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u_3} &= \mathbf{v_3} - \alpha_{13}\mathbf{u_1} - \alpha_{23}\mathbf{u_2} = \\ &= \mathbf{v_3} - \tfrac{1}{2}\mathbf{u_1} - \tfrac{1}{2}i\mathbf{u_2} =\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\2i\\0\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}i\\-1\\i\\-1\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}i\begin{pmatrix}1\\-i\\1\\-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\\0\\i\\0\end{pmatrix}$$

Dunque

$$\left\{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix}i\\-1\\i\\-1\end{pmatrix}; \mathbf{u_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\1\\-i\end{pmatrix}; \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix}-i\\0\\i\\0\end{pmatrix}\right\}$$

è una base ortogonale di $V$.

$\boxed{III}$ Costruiamo **base ortonormale di V** normalizzando la base ortogonale trovata al punto $\boxed{II}$, ossia dividendo ciascun elemento della base ortogonale trovata in $\boxed{II}$ per la propria norma euclidea.

Cominciamo con il calcolare la norma euclidea di $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ ed $\mathbf{u_3}$ :

$$\|\mathbf{u_1}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_1}|\mathbf{u_1})} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{u_2}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_2}|\mathbf{u_2})} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{u_3}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u_3}|\mathbf{u_3})} = \sqrt{\begin{pmatrix}i & 0 & -i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\0\\i\\0\end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Allora

$$\mathcal{B} = \{\frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|_2}; \frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|_2}; \frac{\mathbf{u_3}}{\|\mathbf{u_3}\|_2}\} = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di $V$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 0 \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Conviene sviluppare Det($\mathbf{A}$) rispetto alla riga o alla colonna che contengono piú zeri. In questo caso conviene svilupparlo ripetto alla $1^a$ riga oppure alla $3^a$ colonna. Facciamolo in entrambi i modi, per esercizio.

Rispetto alla $1^a$ riga:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}(\mathbf{A}) &= (2-i)(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \\
&= (2-i)(1+i-3) - (2-3i) = (2-i)(-2+i) - 2 + 3i = \\
&= -4 + 2i + 2i - i^2 - 2 + 3i = -5 + 7i
\end{aligned}$$

Rispetto alla $3^a$ colonna:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}(\mathbf{A}) &= 3(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} = \\
&= -3(2-i-i) + [(2-i)(1+i) - 2] = \\
&= -3(2-2i) + 2 - i + 2i - i^2 - 2 = \\
&= -6 + 6i + 2 - i + 2i + 1 - 2 = -5 + 7i
\end{aligned}$$

Sviluppiamo Det($\mathbf{B}$), ad esempio rispetto alla $1^a$ colonna:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} i & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \\ i & i & 1 \end{pmatrix} = i(-1)^{1+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+(-1)(-1)^{2+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & 1 \end{pmatrix} + i(-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= i(1-2i) + [1 - i(1+i)] + i[2-(1+i)] =$$

$$= i - 2i^2 + 1 - i - i^2 + 2i - i - i^2 =$$

$$= i + 2 + 1 - i + 1 + 2i - i + 1 =$$

$$= 5 + i$$

Infine sviluppiamo Det($\mathbf{C}$) ad esempio rispetto alla $3^a$ riga:

$$\mathrm{Det}\mathbf{C} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{3+1}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il primo addendo rispetto alla $2^a$ colonna, mentre il secondo ed il terzo addendo rispetto alla $1^a$ riga.

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} =$$

$$= -(1+i-1) + 2(1+i-1) = -i + 2i = i$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -[2(1+i) - 1] + (0-2) = -(2+2i-1) - 2 = -1 - 2i - 2 = -3 - 2i$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -[2(1+i) - 1] + 2 - 1 = -(2+2i-1) + 1 = -1 - 2i + 1 = -2i$$

Quindi

$$\mathrm{Det}(\mathbf{C}) = i - (-3-2i) - 2i = i + 3 + 2i - 2i = 3 + i.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare (sugg.: si calcoli il determinante $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha))$ di $\mathbf{A}(\alpha)$).

$$\begin{aligned}
(1) \qquad \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha)) &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{3+4}(3\alpha-1)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 4 & \alpha-1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= -(3\alpha-1)\Big[(-1)^{1+1}2\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha-1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 4 & \alpha-1 \end{pmatrix}\Big] = \\
&= -(3\alpha-1)\Big[2(\alpha-\alpha+1) - 4\alpha\Big] = -2(3\alpha-1)(1-2\alpha)
\end{aligned}$$

Poichè $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare se e solo se $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha)) \neq 0$, dal punto (1) otteniamo che

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è non singolare} \quad \Longleftrightarrow \quad -2(3\alpha-1)(1-2\alpha) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$.

Si calcolino:
– gli autovalori di $\mathbf{A}$,
– le loro molteplicità algebriche e
– le loro molteplicità geometriche.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_2) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & -2i \\ 2i & -x \end{pmatrix} = (-x)^2 - (-2i)\cdot 2i = x^2 + 4i^2 = \\ &= x^2 - 4. \end{aligned}$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono gli zeri del polinomio carattaristico $p_{\mathbf{A}}(x)$ di $\mathbf{A}$, ossia le soluzioni dell'equazione $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 4 = 0$$

sono $-2$ e $2$, gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono:

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

Siano $m_1$ ed $m_2$ le molteplicità algebriche e $d_1$ e $d_2$ le molteplicità geometriche di $\lambda_1$ e $\lambda_2$ rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 1.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad d_2 = 1.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Si calcolino:
- gli autovalori di $\mathbf{A}$,
- le loro molteplicità algebriche e
- le loro molteplicità geometriche.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}-x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 0 & 2i \\ 0 & -8-x & 0 \\ 2i & 0 & -6-x \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{2+2}(-8-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i \\ 2i & -6-x \end{pmatrix} = \\
&= (-8-x)[(-2-x)(-6-x)-4i^2] = \\
&= (-8-x)(12+6x+2x+x^2+4) = \\
&= (-8-x)(x^2+8x+16) = \\
&= (-8-x)(x+4)^2.
\end{aligned}
$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}}(x)$ di $\mathbf{A}$, ossia le soluzioni dell'equazione $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$(-8-x)(x+4)^2 = 0$$

sono $-8$ e $-4$, gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono:

$$\lambda_1 = -8 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -4.$$

Siano $m_1$ ed $m_2$ le molteplicità algebriche e $d_1$ e $d_2$ le molteplicità geometriche di $\lambda_1$ e $\lambda_2$ rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{A}}(x) = (-8-x)(-4-x)^2 = (\lambda_1 - x)^{m_1}(\lambda_2 - x)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 2.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad 1 \leq d_2 \leq 2.$$

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)) = \dim(E_{\mathbf{A}}(-4)) = \dim(N(\mathbf{A}+4\mathbf{I}_3)) = \\
&= [\text{numero delle colonne di } (\mathbf{A}+4\mathbf{I}_3)] - [\mathrm{rk}(\mathbf{A}+4\mathbf{I}_3)] = \\
&= 3 - [\mathrm{rk}(\mathbf{A}+4\mathbf{I}_3)].
\end{aligned}
$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}+4\mathbf{I}_3 \quad$ otteniamo:

$$
\mathbf{A}+4\mathbf{I}_3 \;=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow
$$

$$
\xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

per cui

$$
\operatorname{rk}(\mathbf{A}+4\mathbf{I}_3)=\operatorname{rk}\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Big)=2
$$

e quindi

$$
d_2 = 3-2 = 1.
$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Si trovino basi degli autospazi delle matrici considerate negli esercizi 4 e 5.

Le matrici considerate negli esercizi 3 e 4 sono:

$$
\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -8 & 0 \\ 2i & 0 & -6 \end{pmatrix},
$$

ed abbiamo calcolato:

| **matrice** | **autovalori** | **molteplicità geometriche** |
|---|---|---|
| **A** | $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$ | $d_1 = d_2 = 1$ |
| **B** | $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = -4$ | $d_1 = d_2 = 1$ |

In particolare, ciascuno degli autospazi $E_{\mathbf{A}}(\lambda_i)$ ed $E_{\mathbf{B}}(\lambda_i)$ per $i = 1, 2$ ha dimensione 1, per cui una sua base ha un unico elemento.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2) = N(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2) = N\Big( \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2 \quad : \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, segue

$$E_{\mathbf{A}}(-2) = N\Big( \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} ih \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2) = N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2) = N\Big( \begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2 \quad : \begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(-\frac{1}{2})} \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, segue

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N\Big( \begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & -2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -ih \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$.

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(-8) = N(\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3) = N\Big( \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3 \quad :$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{6})} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{E_2(\frac{3}{8})E_{23}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = N\Big( \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(-8)$.

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(-4) = N(\mathbf{B} + 4\mathbf{I}_3) = N\Big( \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B}+4\mathbf{I}_3 \quad$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2i)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(-4) = N\Big( \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 2i & 0 & -2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(-4)$.

$\boxed{7}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

($a$) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si calcolino gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

($b$) Siano $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ e $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ le matrici che si ottengono ponendo $\alpha = 2$ ed $\alpha = -8$ rispettivamente. Si trovino basi degli autospazi di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$.

($a$) Gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono gli zeri del suo polinomio caratteristico. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \text{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \\ &= \text{Det} \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 \\ 1 & \alpha - x & -1 \\ 7 & 0 & -5-x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{2+2}(\alpha - x)\text{Det} \begin{pmatrix} -1-x & 3 \\ 7 & -5-x \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha - x)[(-1-x)(-5-x) - 21] = \\ &= (\alpha - x)(5 + 5x + x + x^2 - 21) = \\ &= (\alpha - x)(x^2 + 6x - 16). \end{aligned}$$

L'equazione $\alpha - x = 0$ ha un'unica souzione: $\alpha$.

L'equazione $x^2 + 6x - 16 = 0$ ha due soluzioni distinte: $-8$ e $2$.

Quindi otteniamo:

| **matrice** | **autovalori** | **molteplicità algebriche** | **molteplicità geometriche** |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{A}(\alpha)$<br>$\alpha \notin \{-8, 2\}$ | $\lambda_1 = -8$<br>$\lambda_2 = 2$<br>$\lambda_3 = \alpha$ | $m_1 = 1$<br>$m_2 = 1$<br>$m_3 = 1$ | $d_1 = 1$<br>$d_2 = 1$<br>$d_3 = 1$ |
| $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ | $\lambda_1 = -8$<br>$\lambda_2 = 2$ | $m_1 = 1$<br>$m_2 = 2$ | $d_1 = 1$<br>$1 \leq d_2 \leq 2$ |
| $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ | $\lambda_1 = -8$<br>$\lambda_2 = 2$ | $m_1 = 2$<br>$m_2 = 1$ | $1 \leq d_1 \leq 2$<br>$d_2 = 1$ |

Per finire di rispondere alla domanda $(a)$ resta da calcolare:

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(2)}(\lambda_2)) = \dim(E_{\mathbf{A}}(2)) \quad \text{e}$$

$$d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(\lambda_1)) = \dim(E_{\mathbf{B}}(-8)).$$

dove

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(2) \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}(-8).$$

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}\right)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3 \quad$ :

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}}(2)) = \dim(N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = \\ &= [(\text{numero di colonne di } \mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) - \operatorname{rk}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)] = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = N(\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3) = N\Big( \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3$ :

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-7)E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-10)E_2(\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned} d_1 &= \dim(E_{\mathbf{B}}(-8)) = \dim(N(\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3) = \\ &= [(\text{numero di colonne di } \mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3) - \operatorname{rk}(\mathbf{B} + 8\mathbf{I}_3)] = 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

($b$) Al Punto ($a$) abbiamo visto che la matrice $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ ha autovalori $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità geometriche $d_1 = 1$ e $d_2 = 2$.

$$E_{\mathbf{A}}(-8) = N(\mathbf{A} + 8\mathbf{I}_3) = N\Big( \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\mathbf{A} + 8\mathbf{I}_3$ :

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{7})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 10 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(-8) = N\Big( \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}h \\ \frac{1}{7}h \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(-8)$.

Al punto $(a)$ abbiamo visto che

$$E_{\mathbf{A}}(2) = N\Big( \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big),$$

per cui

$$E_{\mathbf{A}}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ h \\ k \end{pmatrix} \Big| h, k \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(2).$$

Al punto $(a)$ abbiamo anche visto che la matrice $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ ha autovalori $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità geometriche $d_1 = 1$ e $d_2 = 1$.

$$E_{\mathbf{B}}(2) = N(\mathbf{B} - 2\mathbf{I}_3) = N\Big( \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B} - 2\mathbf{I}_3 \quad$ :

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(2) = N\Big( \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -10 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \right\},$$

e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(2)$.

Al punto $(a)$ abbiamo visto che

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = N\Big( \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big),$$

per cui

$$E_{\mathbf{B}}(-8) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \middle| h \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{è una base di } E_{\mathbf{B}}(-8).$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}+1 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

($a$) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che 3 è un autovalore di $\mathbf{A}(\alpha)$ ?

($b$) Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ ha due autovaori uguali ? In questi casi dire se $\mathbf{A}(\alpha)$ è o non è diagonalizzabile.

($a$) Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \\
&= \mathrm{Det} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}+1-x & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1-x & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - x \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{3+3}(\alpha - x)\mathrm{Det} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}+1-x & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2}+1-x \end{pmatrix} = \\
&= (\alpha - x)\left[\left(\frac{\alpha}{2}+1-x\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right] = \\
&= (\alpha - x)\left(\frac{\alpha}{2}+1-x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2}+1-x+\frac{\alpha}{2}\right) = \\
&= (\alpha - x)(1-x)(\alpha+1-x).
\end{aligned}$$

Gi autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x)$, ossia le soluzioni dell'equazione:

$$(\alpha - x)(1-x)(\alpha+1-x) = 0,$$

cioè 1, $\alpha$ ed $\alpha + 1$.

Dunque

$$\begin{aligned}
3 \text{ è autovalore di } \mathbf{A}(\alpha) \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha = 3 \quad \text{oppure} \quad \alpha + 1 = 3 \\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha = 3 \quad \text{oppure} \quad \alpha = 2.
\end{aligned}$$

$(b)$ Dai conti svolti in $(a)$, otteniamo che

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha) \quad \text{ha due autovalori uguali} \quad &\iff \quad \alpha = 1 \quad \text{oppure} \quad \alpha + 1 = 1 \\ &\iff \quad \alpha = 1 \quad \text{oppure} \quad \alpha = 0. \end{aligned}$$

Studiamo i casi $\alpha = 1$ ed $\alpha = 0$. Abbiamo:

| **matrice** | **autovalori** | **molteplicità algebriche** | **molteplicità geometriche** |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{A}(1)$ | $\lambda_1 = 1$<br>$\lambda_2 = 2$ | $m_1 = 2$<br>$m_2 = 1$ | $1 \leq d_1 \leq 2$<br>$d_2 = 1$ |
| $\mathbf{A}(0)$ | $\lambda_1 = 0$<br>$\lambda_2 = 1$ | $m_1 = 1$<br>$m_2 = 2$ | $d_1 = 1$<br>$1 \leq d_2 \leq 2$ |

Dal momento che una matrice è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro, abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(1) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad &\iff \quad d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1)) = m_1 = 2 \\ \mathbf{A}(0) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad &\iff \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1)) = m_2 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 \quad &= \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1)) = \dim(N(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3] - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) = \\ &= 3 - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3) \\ d_2 \quad &= \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1)) = \dim(N(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3] - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3) = \\ &= 3 - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(0) - \mathbf{I}_3) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(1) - \mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(1)-\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{21}(-\frac{1}{2})E_1(2)}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

per cui $\mathrm{rk}(\mathbf{A}(1)-\mathbf{I}_3)=1$, e quindi

$$d_1=\dim(E_{\mathbf{A}(1)}(1))=3-1=2.$$

In conclusione, $\mathbf{A}(1)$ è diagonalizzabile.

Da una E.G. su $\mathbf{A}(0)-\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(0)-\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_1(-1)E_{13}}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

per cui $\mathrm{rk}(\mathbf{A}(0)-\mathbf{I}_3)=1$, e quindi

$$d_2=\dim(E_{\mathbf{A}(0)}(1))=3-1=2.$$

In conclusione, anche $\mathbf{A}(0)$ è diagonalizzabile.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Si dica se le matrici considerate negli esercizi 4 e 5 sono diagonalizzabili oppure no.

Le matrici considerate negli esercizi 3 e 4 sono:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&-2i\\2i&0\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2&0&2i\\0&-8&0\\2i&0&-6\end{pmatrix},$$

ed abbiamo calcolato:

Ogni autovalore di $\mathbf{A}$ ha molteplicità algebrica e geometrica uguali ($\mathbf{A}$ ha autovalori distinti, per cui ogni suo autovalore ha molteplicità algebrica uguale ad 1 e conseguentemente, essendo

$$1\leq\ \text{molteplicità geometrica}\ \leq\ \text{molteplicità algebrica}\ (=1)$$

anche molteplicità geometrica uguale ad 1).

Dunque $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile.

La matrice $\mathbf{B}$ ha un autovalore (l'autovalore $\lambda_2=-4$) in cui la molteplicità algebrica ($m_2=2$) è diversa dalla molteplicità geometrica ($d_2=1$).

| **matrice** | **autovalori** | **molteplicità algebriche** | **molteplicità geometriche** |
|---|---|---|---|
| **A** | $\lambda_1 = -2$<br>$\lambda_2 = 2$ | $m_1 = 1$<br>$m_2 = 1$ | $d_1 = 1$<br>$d_2 = 1$ |
| **B** | $\lambda_1 = -8$<br>$\lambda_2 = -4$ | $m_1 = 1$<br>$m_2 = 2$ | $d_1 = 1$<br>$d_2 = 1$ |

Dunque **B** non è diagonalizzabile.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha)$ la matrice considerata nell'esercizio 7. Per quegli $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

La matrice considerata nell'esercizio 6 è

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

dove $\alpha \in \mathbb{C}$, ed abbiamo calcolato:

| **matrice** | **autovalori** | **molteplicità algebriche** | **molteplicità geometriche** |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{A}(\alpha)$<br>$\alpha \notin \{-8, 2\}$ | $\lambda_1 = -8$<br>$\lambda_2 = 2$<br>$\lambda_3 = \alpha$ | $m_1 = 1$<br>$m_2 = 1$<br>$m_3 = 1$ | $d_1 = 1$<br>$d_2 = 1$<br>$d_3 = 1$ |
| $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ | $\lambda_1 = -8$<br>$\lambda_2 = 2$ | $m_1 = 1$<br>$m_2 = 2$ | $d_1 = 1$<br>$d_2 = 2$ |
| $\mathbf{B} = \mathbf{A}(-8)$ | $\lambda_1 = -8$<br>$\lambda_2 = 2$ | $m_1 = 2$<br>$m_2 = 1$ | $d_1 = 1$<br>$d_2 = 1$ |

Solo per $\alpha = -8$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{A}(-8) = \mathbf{B}$ ha un autovalore ($\lambda_1 = -8$) con molteplicità algebrica ($m_1 = 2$) diversa dalla molteplicità geometrica ($d_1 = 1$). Quindi

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è diagonalizzabile} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \neq -8.$$

Troviamo una diagonalizzazione per $\mathbf{A}(\alpha)$ per ogni $\alpha \neq -8$.

$\boxed{\text{caso} \quad \alpha \notin \{-\mathbf{8}, \mathbf{2}\} :}$

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8) = N(\mathbf{A}(\alpha) + 8\mathbf{I}_3) = N\Big( \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) + 8\mathbf{I}_3 \quad :$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{7})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & \alpha+8 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\alpha\neq-8: \quad E_2(\frac{1}{\alpha+8})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8) &= N\Big( \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+8 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \\ &= \Big\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}h \\ \frac{10}{7(\alpha+8)}h \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\}, \end{aligned}$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{10}{7(\alpha+8)} \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(-8)$.

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2) = N(\mathbf{A}(\alpha) - 2\mathbf{I}_3) = N\Big( \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) - 2\mathbf{I}_3 \quad :$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(-1)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{\alpha\neq 2:\quad E_2(\frac{1}{\alpha-2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2) = N\Big( \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha-2 & -1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Big) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(2)$.

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha) = N(\mathbf{A}(\alpha) - \alpha\mathbf{I}_3) = N\Big( \begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) - \alpha\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1-\alpha & 0 & 3 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-7)E_{21}(1+\alpha)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha\neq 2:\quad E_{32}(-2+\alpha)E_2(\frac{1}{\alpha-2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha) \quad &= N\Big( \begin{pmatrix} -1-\alpha & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -5-\alpha \end{pmatrix} \Big) = N\Big( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \\ &= \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\}, \end{aligned}$$

e quindi $\left\{ \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_3) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha)$.

Dunque se $\alpha \notin \{-8, 2\}$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{S}(\alpha)\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{S}(\alpha)^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{10}{7(\alpha+8)} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{caso} \quad \alpha = \mathbf{2} :}$ Posto $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$, nell'Esercizio 8 degli "Esercizi per casa 10" abbiamo visto che

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-8) \text{ e}$$

$$\left\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{è una base di } E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2).$$

Dunque se $\alpha = 2$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(2)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**N.B.:** Per ogni $\alpha \neq -8$, una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{S}(\alpha)\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{S}(\alpha)^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{S}(\alpha) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{10}{7(\alpha+8)} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

Poichè $\mathbf{A}(\alpha)$ **è una matrice** $2 \times 2$ **non scalare**, allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ha i (due) autovalori distinti (perchè solo in tal caso ciascun suo autovalore ha molteplicità algebrica e geometrica uguali).

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_2) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2-x & i \\ i & \alpha - x \end{pmatrix} = \\ &= (2-x)(\alpha - x) - i^2 = \\ &= 2\alpha - \alpha x - 2x + x^2 + 1 = \\ &= x^2 - (\alpha+2)x + (2\alpha+1). \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha+2+\sqrt{(\alpha+2)^2-4(2\alpha+1)}}{2} = \frac{\alpha+2+\sqrt{\alpha^2+4+4\alpha-8\alpha-4}}{2} = \frac{\alpha+2+\sqrt{\alpha^2-4\alpha}}{2} \quad \text{e}$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha+2-\sqrt{(\alpha+2)^2-4(2\alpha+1)}}{2} = \frac{\alpha+2-\sqrt{\alpha^2+4+4\alpha-8\alpha-4}}{2} = \frac{\alpha+2-\sqrt{\alpha^2-4\alpha}}{2}.$$

Quindi

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \iff \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} \neq 0 \iff \alpha^2 - 4\alpha \neq 0 \iff \alpha \notin \{0, 4\},$$

e concludiamo che

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad \alpha \notin \{0, 4\},$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

$\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) \quad &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i & 0 \\ 2i & 2+\alpha-x & 0 \\ 3i & 0 & \alpha - x \end{pmatrix} = \\
&= (-1)^{3+3}(\alpha - x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -2-x & 2i \\ 2i & 2+\alpha-x \end{pmatrix} = \\
&= (\alpha - x)[(-2-x)(2+\alpha-x) - 4i^2] = \\
&= (\alpha - x)(-4 - 2x - 2\alpha - \alpha x + 2x + x^2 + 4) = \\
&= (\alpha - x)(x^2 - \alpha x - 2\alpha).
\end{aligned}
$$

Qundi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}}{2}.$$

Dal momento che

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 = \lambda_2 \iff 2\alpha = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = 0, \\
&\lambda_1 = \lambda_3 \iff 2\alpha = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = -\sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} \iff \alpha = 0, \\
&\lambda_2 = \lambda_3 \iff \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha} = 0 \iff \alpha \in \{0, -8\},
\end{aligned}
$$

abbiamo:

Dunque:

- $\bullet$ se $\alpha \notin \{0, -8\}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.
- $\bullet\bullet$ $\mathbf{A}(0)$ sarebbe diagonalizzabile solo se fosse $d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_3 = 3$.

| matrice | autovalori | molteplicità algebriche | molteplicità geometriche |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{A}(\alpha)$<br>$\alpha \notin \{0,-8\}$ | $\lambda_1 = \alpha$<br>$\lambda_2 = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}$<br>$\lambda_3 = \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+8\alpha}}{2}$ | $m_1 = 1$<br>$m_2 = 1$<br>$m_3 = 1$ | $d_1 = 1$<br>$d_2 = 1$<br>$d_3 = 1$ |
| $\mathbf{A}(0)$ | $\lambda_1 = 0$ | $m_1 = 3$ | $1 \leq d_1 \leq 3$ |
| $\mathbf{A}(-8)$ | $\lambda_1 = -8$<br>$\lambda_2 = -4$ | $m_1 = 1$<br>$m_2 = 2$ | $d_1 = 1$<br>$1 \leq d_2 \leq 2$ |

**N.B.:** Se fosse $\dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3$ sarebbe $E_{\mathbf{A}(0)}(0) = \mathbb{C}^3$, e quindi $\mathbf{A}(0) = \mathbf{O}$.

Dunque, essendo $\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}$, $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.

••• $\mathbf{A}(-8)$ è diagonalizzabile $\iff$ $d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = m_2 = 2$

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = \dim(N(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3] - \operatorname{rk}(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3) = \\ &= 3 - \operatorname{rk}(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 \\ 2i & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} + 4\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\operatorname{rk}(\mathbf{A}(-8) + 4\mathbf{I}_3) = 2$, e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(-8)}(-4)) = 3 - 2 = 1.$$

Dunque $\mathbf{A}(-8)$ non è diagonalizzabile.

In conclusione abbiamo:

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad \alpha \notin \{0, -8\}.$$

$\boxed{\mathbf{13}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha$ è **un numero reale non positivo**.

Per quali $\alpha$ numeri reali non positivi si ha che di $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

$\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) \quad &= \mathrm{Det}(\mathbf{A}(\alpha) - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & -3-x & 0 \\ -3i\alpha & 0 & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{2+2}(-3-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & -3i \\ -3i\alpha & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-3-x)(x^2 - 9i^2\alpha) = \\ &= (-3-x)(x^2 + 9\alpha). \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono ($\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \leq 0$):

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \sqrt{-9\alpha} = 3\sqrt{-\alpha} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -\sqrt{-9\alpha} = -3\sqrt{-\alpha}.$$

Dal momento che $\alpha$ è un numero reale non positivo, allora

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \neq \lambda_2, \\ &\lambda_1 = \lambda_3 \quad \iff \quad \alpha = -1, \\ &\lambda_2 = \lambda_3 \quad \iff \quad \alpha = 0. \end{aligned}$$

| matrice | autovalori | molteplicità algebriche | molteplicità geometriche |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{A}(\alpha)$<br>$\alpha \notin \{0,-1\}$ | $\lambda_1 = -3$<br>$\lambda_2 = 3\sqrt{-\alpha}$<br>$\lambda_3 = -3\sqrt{-\alpha}$ | $m_1 = 1$<br>$m_2 = 1$<br>$m_3 = 1$ | $d_1 = 1$<br>$d_2 = 1$<br>$d_3 = 1$ |
| $\mathbf{A}(0)$ | $\lambda_1 = -3$<br>$\lambda_2 = 0$ | $m_1 = 1$<br>$m_2 = 2$ | $d_1 = 1$<br>$1 \leq d_2 \leq 2$ |
| $\mathbf{A}(-1)$ | $\lambda_1 = -3$<br>$\lambda_2 = 3$ | $m_1 = 2$<br>$m_2 = 1$ | $1 \leq d_1 \leq 2$<br>$d_2 = 1$ |

Quindi se $\alpha \notin \{0,-1\}$ allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.
Anche $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ è diagonalizzabile: abbiamo visto in $(a)$ che è addirittura unitariamente diagonalizzabile (quindi è vero, e non occorre verificarlo, che $d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(-1)}(-3)) = m_1 = 2$).
Inoltre:

$$\mathbf{A}(0) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \Longleftrightarrow \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_2 = 2.$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = \dim(N(\mathbf{A}(0)) = \\ &= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(0)] - \operatorname{rk}(\mathbf{A}(0)) = \\ &= 3 - \operatorname{rk}(\mathbf{A}(0)) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(0)$:

$$\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{3}i)E_1(-\frac{1}{3})E_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\operatorname{rk}(\mathbf{A}(0)) = 2$, e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3 - 2 = 1.$$

Dunque $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.
In conclusione (essendo $\alpha$ reale non positivo):

$$\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ con } \alpha < 0.$$