Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: Informatica

Svolgimento degli Esercizi per casa 8

$\boxed{1}$ Sia $\mathbf{A_\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A_\alpha})$ e si trovi una base $\mathcal{B}_\alpha$ di $C(\mathbf{A_\alpha})$.

$$\mathbf{A_\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha-1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-4)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{24}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 4\alpha-6 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-\alpha)E_{32}(-\alpha+1)E_2(\frac{1}{2})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)(\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)\alpha & 2i \end{pmatrix} = \mathbf{B_\alpha}$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\alpha = 1$

$$\mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_1}$$

$\text{rk}(A_1) = 3$

Una base $\mathcal{B}_1$ di $C(\mathbf{A_1})$ è $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\alpha = \frac{3}{2}$

$$\mathbf{B}_{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2i})E_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\frac{3}{2}}$$

$\mathrm{rk}(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}}) = 3$

Una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\frac{3}{2}}$ di $C(\mathbf{A}_{\frac{3}{2}})$ è $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{3^0 \text{ CASO}}$ $\alpha \notin \{1, \frac{3}{2}\}$

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)(\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(2\alpha-3)\alpha & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}((2\alpha-3)\alpha)E_3(\frac{1}{-(2\alpha-3)(\alpha-1)})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2i})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2\alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$\mathrm{rk}(A_\alpha) = 4$

Una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha}$ di $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ è $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \alpha-1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4\alpha-6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 4i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

N.B.: Essendo in questo caso $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) \leq \mathbb{C}^4$ e $\dim(C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})) = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$, allora $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbb{C}^4$ e si sarebbe potuto prendere $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha} = \{\mathbf{e_1}; \mathbf{e_2}; \mathbf{e_3}; \mathbf{e_4}\}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ di $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Poichè $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = N(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}})$ per ogni forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$ di $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$, troviamo una base dello spazio nullo di una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$.

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha+6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha = 0$

$$\mathbf{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_0}$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U_0}) = \text{ (numero delle colonne di } \mathbf{U_0})_0 - \text{ rk } (\mathbf{U_0}) = 4 - 2 = 2.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U_0}) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 0 \\ \qquad x_4 & = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U_0}$, ossia la 2^a e la 3^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_2 & = & h \\ x_3 & = & k \\ x_4 & = & 0 \\ x_1 & = & -2x_2 - 3x_4 & = & -2h \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A_0}) = N(\mathbf{U_0}) = \left\{ \begin{pmatrix} -2h \\ h \\ k \\ 0 \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}$.

Siano $\mathbf{v_1}$ il vettore di $N(\mathbf{A_0})$ che si ottiene ponendo $h = 1$ e $k = 0$, e $\mathbf{v_2}$ il vettore di $N(\mathbf{A_0})$ che si ottiene ponendo $h = 0$ e $k = 1$:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allora $\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(\mathbf{A_0})$.

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\qquad \alpha \neq 0$

$$\mathbf{B_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha})E_2(\frac{1}{\alpha})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U_\alpha}$$

Per il Teorema nullità+rango,

$$\dim N(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \text{ (numero delle colonne di } \mathbf{U})_{\alpha} - \text{ rk } (\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) = 4-3 = 1.$$

Da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = 0 \\ x_2 + x_3 + \frac{\alpha-1}{\alpha} x_4 & = 0 \\ \qquad x_4 & = 0 \end{cases}$$

prendendo come parametro la variabile corrispondente all'unica colonna libera di $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$, ossia la 3^a, con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_3 & = & h & & \\ x_4 & = & 0 & & \\ x_2 & = & -x_3 - \frac{\alpha-1}{\alpha} x_4 & = & -h \\ x_1 & = & -2x_2 - 3x_4 & = & 2h \end{cases}$$

Quindi $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = N(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2h \\ -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}$.

Sia $\mathbf{v_1}$ il vettore di $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ che s ottiene ponendo $h=1$: $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Allora $\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Siano

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 2i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; \mathbf{v_4}\}.$$

Sia W il sottospazio di $\mathbb{C}^5$ generato da $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Si trovi una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} & \mathbf{v_4} \end{pmatrix}$ una matrice che ha come colonne gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Allora $W = C(\mathbf{A})$. Facendo una E.G. su $\mathbf{A}$ otteniamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ i & -1 & -1 & 2i \\ 2 & 2i & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 1 & i & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-2)E_{21}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{42}(-1)E_{2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Poichè le colonne dominanti di $\mathbf{U}$ sono la 1^a e la 3^a, $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_3}\}$ è una base di $C(\mathbf{A}) = W$ contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Costruiamo una matrice le cui colonne siano gli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha}$:

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

Il problema diventa stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\text{rk}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = 3$. Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$.

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & \alpha+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

1^0 CASO: $\quad \alpha = 0 \qquad \mathbf{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_0}$

$rk(\mathbf{A_0}) = rk(\mathbf{U_0}) = 2 \neq 3 \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}_0$ **NON E'** una base di $\mathbb{R}^3$.

2^0 CASO: $\quad \alpha \neq 0$

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/\alpha)E_2(-1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$rk(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}) = rk(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}}) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha} \quad \textbf{E'} \text{ una base di } \quad \mathbb{R}^3.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si dica quale delle due seguenti posizioni definisce un'applicazione lineare:

(a) $f_1 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$;

(b) $f_2 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$.

Fissato $i \in \{1, 2\}$, per vedere che $f_i : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ è un'applicazione lineare occorre verificare che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $f_i(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f_i(\mathbf{A}) + f_i(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$;

(2) $f_i(\alpha\mathbf{A}) = \alpha f_i(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

• f_1 verifica la condizione (1) ?

Poichè la trasposta della somma di matrici è la somma delle trasposte si ha:

$$f_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = f_1(\mathbf{A}) + f_1(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dunque f_1 verifica la condizione (1).

f_1 verifica la condizione (2) ?

Poichè la trasposta del prodotto di una matrice per uno scalare è il prodotto della trasposta della matrice per lo scalare, si ha:

$$f_1(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha f_1(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dunque f_1 verifica la condizione (2).

Verificando entrambe le condizioni (1) e (2), f_1 è un'applicazione lineare.

• f_2 verifica la condizione (1) ?

Essendo

$$\begin{cases} f_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{BA} + \mathbf{AB} + \mathbf{B}^2 \\ f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 \\ f_2(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2 \end{cases}$$

se fosse $f_2(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = f_2(\mathbf{A}) + f_2(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$, sarebbe

$$(*) \quad \mathbf{BA} + \mathbf{AB} = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$$

Ma $(*)$ è falsa: si prenda, ad esempio, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I_n}$.

Dunque f_2 non verifica la condizione (1) e quindi non è un'applicazione lineare.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $f : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ definita da $f(\mathbf{A}) = \mathbf{Ae_1}$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$.

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.

(b) Si trovino lo spazio nullo (il nucleo) $\mathrm{N}(f)$ e l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ di f.

(a) $M_2(\mathbb{C})$ e $\mathbb{C}^2$ sono entrambi spazi vettoriali complessi. Verificare che f è un'applicazione lineare significa verificare che sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(1) $f(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B})$ per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$;

(2) $f(\alpha\mathbf{A}) = \alpha f(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

(1): $f(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{e_1} = \mathbf{Ae_1} + \mathbf{Be_1} = f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B}) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{C})$;

Dunque f verifica la condizione (1).

(2): $f(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{e_1} = \alpha(\mathbf{Ae_1}) = \alpha f(\mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Dunque f verifica anche la condizione (2), per cui è un'applicazione lineare.

(b) Poichè $f(\mathbf{A}) = \mathbf{Ae_1}$ è la 1^a colonna di $\mathbf{A}$, allora

• $\mathrm{N}(f) = \{\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C}) | f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}\}$ è l'insieme delle matrici complesse 2×2 con la prima colonna nulla, ossia

$$\mathrm{N}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C} \right\},$$

• $\mathrm{Im}(f) = \{f(\mathbf{A}) | \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})\}$ è l'insieme dei vettori di $\mathbb{C}^2$ che siano prime colonne di matrici complesse 2×2. Poichè per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ esiste $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$ tale che $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sia la prima colonna di $\mathbf{A}$ (si prenda, ad esempio $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$), allora $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}^2$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ definita da:

$$f\Big(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

$(\bullet)$ Per provare che f è un'applicazione lineare occorre provare :

1. $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) \quad \forall a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

2. $f(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \alpha f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) \quad \forall \alpha, a, b \in \mathbb{R}$

1. $$f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) & b_1 + b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & a_2 + b_2 \\ a_2 - b_2 & b_2 \end{pmatrix} = f(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix})$$

2. $$f(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha a + \alpha b \\ \alpha a - \alpha b & \alpha b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha(a+b) \\ \alpha(a-b) & \alpha b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} = \alpha f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$$

($\bullet\bullet$) La matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ su dominio e codominio rispettivamente è la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\,(f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})) & C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\,(f(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix})) \end{pmatrix}.$$

Dalla definizione di f si ottiene:

$$f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix},$$

quindi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\,(\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}) & C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\,(\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix}) \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo le coordinate rispetto alla base ordinata $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ di un generico elemento $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\,(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\delta\\\gamma\end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \\ &= \alpha\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}2\gamma & \alpha+\beta\\\beta+\delta & \beta\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} 2\gamma &= a\\ \alpha+\beta &= b\\ \beta+\delta &= c\\ \beta &= d \end{cases}$ otteniamo $\begin{cases} \beta = d\\ \gamma = a/2\\ \alpha = b-\beta = b-d\\ \delta = c-\beta = c-d \end{cases}$,

quindi

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\,(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}b-d\\d\\c-d\\a/2\end{pmatrix}.$$

In particolare, specializzando a $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix}$, otteniamo

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\,(\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1/2\end{pmatrix}, \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\,(\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1/2\end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ su dominio e codominio rispettivamente è quindi la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Siano

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{e}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_3}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dopo aver provato che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, si calcolino le matrici di passaggio

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \text{ (da } \mathcal{B}' \text{ a } \mathcal{B} \text{) e } \mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \text{ (da } \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{B}'\text{)}.$$

Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ le matrici che hanno come colonne gli elementi di $\mathcal{B}$ e di $\mathcal{B}'$ rispettivamente. Per provare che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, occorre provare che $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{A}'$ hanno entrambe rango uguale a 3.

Facendo una E.G. su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

per cui rk($\mathbf{A}$)=rk($\mathbf{U}$) $= 3$, ed, analogamente, facendo una E.G. su $\mathbf{A}'$ si ottiene:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}'$$

per cui rk($\mathbf{A}'$)=rk($\mathbf{U}'$) $= 3$.

La matrice di passaggio $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}'}$ da $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ a $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\boldsymbol{\mathcal{B}} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}'} &= \left(C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\mathbf{v_1'}) \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\mathbf{v_2'}) \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\mathbf{v_3'}) \right) = \\ &= \left(C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right). \end{aligned}$$

Per calcolarla, piuttosto che calcolare separatamente $C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ e $C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, calcoliamo $C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$ per un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, e specializziamo la formula ottenuta ai tre diversi vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Poichè

$$C_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \delta \\ \alpha + \beta + \delta \\ \beta + \delta \end{pmatrix},$$

α, β e δ sono soluzioni del sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = a \\ \alpha + \beta + \delta = b \\ \beta + \delta = c \end{cases}$$

Facendo una E.G. sulla matrice aumentata di $(*)$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & c-a+b \end{array}\right)$$

da cui, con la sostituzione all'indietro,

$$\begin{cases} \delta = c - a + b \\ \beta = a - b \\ \alpha = -2\beta - \delta + a = -2a + 2b - c + a - b + a = b - c \end{cases}$$

Dunque $C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b-c \\ a-b \\ c-a+b \end{pmatrix}$, per cui

$$C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente si ha:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) & C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) & C_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{pmatrix},$$

ma dal momento che $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$, calcoliamo $\mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ usando l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} & | & \mathbf{I}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)E_1(-1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(-1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/2)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(1)} .$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\quad \mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Si provi che $\|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1$ se e solo se $\mathbf{v}$ è un multiplo di una colonna di $\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$.

Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Allora

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \quad \text{e}$$

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = |v_i| \text{ dove } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ è tale che } |v_i| \geq |v_j| \quad \forall j \neq i.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1 \quad &\Longleftrightarrow |v_i| = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \\ &\Longleftrightarrow |v_j| = 0 \quad \forall j \neq i \\ &\Longleftrightarrow v_j = 0 \quad \forall j \neq i \\ &\Longleftrightarrow \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matrice complessa quadrata di ordine n tale che $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^2$ e siano $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\ldots$ $\ldots, \mathbf{b}_{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{C}^n$ le colonne di $\mathbf{A}$. Si provi che $\|\mathbf{b}_{\boldsymbol{i}}\|_2^2 = a_{ii}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Poiché $\mathbf{b}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}$, allora

$$\|\mathbf{b}_{\boldsymbol{i}}\|_2^2 = \|\mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}\|_2^2 = (\mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}})^H \mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}{}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}.$$

Da $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^2$ segue che

$$\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}{}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}{}^H \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}{}^H \mathbf{A}\mathbf{e}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}{}^H \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = a_{ii},$$

quindi in conclusione abbiamo:

$$\|\mathbf{b}_{\boldsymbol{i}}\|_2^2 = a_{ii}.$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Sapendo che la posizione $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i.$$

definisce un prodotto scalare, si consideri la norma $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ da esso indotta. Si trovino tutte le matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.

La norma $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ indotta dal prodotto scalare è definita da:

$$\begin{aligned}\left\| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^4 \overline{a}_i \cdot a_i} = \\ &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^4 |a_i|^2} \qquad \forall \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).\end{aligned}$$

Una matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ è scalare se e solo se $a_2 = a_3 = 0$ ed

$a_1 = a_3 = \alpha$ per un opportuno $\alpha \in \mathbb{C}$, ossia se e solo se

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} \,|\, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Dal momento che

$$\begin{aligned}\left\| \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{2} \qquad &\iff \qquad \sqrt{|\alpha|^2 + |0|^2 + |0|^2 + |\alpha|^2} = 2\sqrt{2} \\ &\iff \qquad |\alpha|\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \\ &\iff \qquad |\alpha| = 2,\end{aligned}$$

le matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$ sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{C} \text{ tale che } |\alpha| = 2.$$

N.B. I numeri complessi α tali che $|\alpha| = 2$ sono tutti e soli quei numeri complessi che corrispondono ai punti nel piano di Gauss che stanno sulla circonferenza di centro 0 e raggio 2. In particolare, ci sono infiniti numeri complessi α tali che $|\alpha| = 2$, per cui ci sono infinite matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.