Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: Informatica

ESERCIZIO TIPO 15

Sia

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha-1 \end{pmatrix}, \text{ dove } \alpha \in \mathbb{R},$$

(a) Si dica per quale/quali $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile.

(b) Per quel/quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si trovi una diagonalizzazione di $\mathbf{A}(\alpha)$.

(c) Per quel/quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{123}$.

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è una triangolare, per cui i suoi autovalori sono i suoi elementi diagonali

$$\lambda_1 = \alpha \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \alpha - 1$$

con molteplicità algebriche

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 2.$$

(Infatti, il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}(\alpha)$ è: $p_{\mathbf{A}(\alpha)}(x) = (\alpha - x)(\alpha - 1 - x)^2$.)

Siano d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2. Da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad d_2 \leq 2.$$

$$E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\alpha - 1) = N(\mathbf{A}(\alpha) - (\alpha - 1)\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \end{pmatrix}\Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(\alpha) - (\alpha - 1)\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}E_{31}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha = -1 :} \quad E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{e} \quad d_2 = 2$$

$$\boxed{\text{caso } \alpha \neq -1 :} \quad E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{e} \quad d_2 = 1.$$

Riassumendo:

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \neq -1$	$\lambda_1 = \alpha$ $\lambda_2 = \alpha - 1$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$
$\mathbf{A}(-1)$	$\lambda_1 = \alpha = -1$ $\lambda_2 = \alpha - 1 = -2$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $d_2 = 2$

Dal momento che una matrice è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro, e

$$d_1 = 1 = m_1 \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$m_2 = 2 \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad &\iff \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(\alpha)}(\lambda_2)) = 2 \\ &\iff \quad \alpha = -1. \end{aligned}$$

(b) Posto $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$,

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) &= E_{\mathbf{A}}(-1) = N(\mathbf{A} - (-\mathbf{I}_3)) = N(\mathbf{A} + \mathbf{I}_3) = \\ &= N\Big(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Big) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + \mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{E_2(-1)E_1(-1)E_{13}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{R} \Big\} \text{ e}$$

$$\Big\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\} \text{ è una sua base.}$$

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) &= E_{\mathbf{A}}(-2) = N(\mathbf{A} - (-2\mathbf{I}_3)) = N(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3) = \\ &= N\Big(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) \end{aligned}$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{E_{31}(1)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ k \end{pmatrix} \Big| h, k \in \mathbb{R} \Big\} \quad \text{e}$$

$$\Big\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\} \quad \text{è una sua base.}$$

Dunque una diagonalizzazione di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{w_1} & \mathbf{w_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Posto $\mathbf{A} = \mathbf{A}(-1)$, da (b) otteniamo che

$$\mathbf{A}^{123} = (\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1})^{123} = \mathbf{S}\mathbf{D}^{123}\mathbf{S}^{-1} \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D}^{123} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{123} = \begin{pmatrix} (-1)^{123} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{123} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{123} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ 0 & 0 & -2^{123} \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo l'inversa di $\mathbf{S}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S} & | & \mathbf{I_3} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_1(-1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{I_3} & | & \mathbf{S}^{-1} \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{N.B.: } \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}).$$

Concludendo:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^{123} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ 0 & 0 & -2^{123} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ -1 & 0 & -2^{123} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{123} & 0 \\ 1 - 2^{123} & 0 & -2^{123} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$