Metodi di conteggio - esercizi

(1) In quanti modi si possono scegliere un uomo e una donna che non sono sposati da un gruppo di n coppie sposate?

Soluzione: Scelgo prima una donna qualsiasi (n possibili modi) e poi un uomo che non sia marito della donna scelta ($n-1$ possibili modi). Dunque il numero totale di modi è $n(n-1)$.

(2) In quanti modi si possono prendere due carte distinte da un mazzo standard di 52 carte in modo tale che:
- la prima carta sia un asso e la seconda carta non sia una regina?
- la prima carta sia di picche e la seconda carta non sia una regina?

Soluzione:
- *Prima scelgo un asso (4 modi possibili) poi una carta qualsiasi tra le 51 rimaste che non sia una regina (47 di queste carte non sono una regina, quindi ho 47 possibilità per la seconda scelta). In totale ho 4×47 modi possibili.*
- *Devo distinguere due sottocasi: se la prima carta è la regina di picche oppure no. Quindi:*
  (1) *Se la prima carta è la regina di picche (1 solo modo per "sceglierla") devo poi scegliere una carta qualsiasi tra le 51 rimaste che non sia una regina (rimangono 48 carte).*
  (2) *Se la prima carta non è una regina (ho 12 scelte possibili sulle rimanenti carte di picche) poi devo scegliere la seconda carta tra le 51 rimaste che non sia una regina (47 carte).*
  Dunque il numero totale di casi è (i due sottocasi vanno sommati):

$$1 \times 48 + 12 \times 47$$

(3) Lanciando due dadi distinti a sei facce (numerate da 1 a 6), in quanti modi si può ottenere un risultato la cui somma sia divisibile per 3?

Soluzione: la somma dei due dadi è divisibile per 3 se e solo se abbiamo uno dei seguenti sottocasi:
(1) *su entrambi i dadi esce un 3 o un 6;*
(2) *sul primo dado esce un 1 o un 4 e sul secondo dado esce un 2 o un 5;*
(3) *sul primo dado esce un 2 o un 5 e sul secondo dado esceo un 1 o un 4.*
Ognuno dei precedenti sottocasi si può ottenere in $\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 2 \times 2 = 4$ *modi diversi, dunque il numero totale di modi possibili è* $4 + 4 + 4 = 12$.

Una soluzione alternativa è la seguente: lancio il primo dado (6 risultati possibili) e poi osservo che per ognuno dei possibili risultati ho 2 esiti accettabili per il secondo dado (se sul primo dado esce un 1, sul secondo dado dovrà uscire un 2 o un 5; se sul *primo dado esce un 2, sul secondo dado dovrà uscire un 1 o un 4, ecc.). Dunque ho* $6 \times 2 = 12$ *modi totali possibili.*

(4) Quanti numeri di quattro cifre si possono ottenere a partire dalle cifre 1,2,3,4,5 (con possibili ripetizioni)? Quanti di questi numeri sono divisibili per 4?

Soluzione: Per rispondere al primo quesito osserviamo che abbiamo 5 scelte possibili per ognuna delle 4 cifre che compongono il numero. Per il principio di moltiplicazione la risposta è dunque $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ *numeri.*
*Per quanto riguarda il secondo quesito, ricordiamo che un numero è divisibile per 4 se e solo se le sue ultime due cifre sono un multiplo di 4 (es. 435**12** è divisibile per 4 perchè **12** è divisibile per 4). Dunque abbiamo* 5×5 *scelte possibili per le prime due cifre (nessun vincolo), mentre le ultime due devono essere necessariamente 12, 24, 32, 44 oppure 52 (5 possibilità). Dunque i numeri divisibili per 4 sono* $(5 \times 5) \times 5$.

(5) Quante sono le terne di interi distinti compresi tra 1 e 90 (inclusi) tali che la loro somma sia:
- un numero pari?
- un numero divisibile per 3?
- un numero divisibile per 4?

Soluzione:
- *La somma è un numero pari se scelgo tre numeri pari (tra i 45 possibili) oppure due numeri dispari (tra i 45 possibili) e uno pari (tra i 45 possibili). Dunque le terne possibili sono:*
$$\binom{45}{3} + \binom{45}{2} \times \binom{45}{1}$$
- *La somma di tre interi è un numero divisibile per 3 se e solo se i tre interi hanno*
(1) *lo stesso valore mod 3 oppure*
(2) *distinti valori mod 3.*
Nel primo caso ho $3 \times \binom{30}{1}$ *scelte possibili (3 modi di scegliere il valore mod 3, cioè una possibile scelta tra* $\{0, 1, 2\}$*, e, fissato tale valore,* $\binom{30}{1}$ *possibili scelte) mentre nel secondo caso ho* $\binom{30}{1}^3$ *scelte possibili (cioè* $\binom{30}{3}$ *scelte per ognuno dei tre valori mod 3). Dunque il numero totale di modi è:*
$$3 \times \binom{30}{1} + \binom{30}{1}^3$$
- *Divido il problema in sottocasi in maniera analoga al punto precedente, ragionando con i valori mod 4. Il numero totale di scelte possibili è*

$$\binom{22}{3} + \left[\binom{23}{2} \times \binom{22}{1}\right] + \left[2 \times \binom{23}{2} \times \binom{45}{1}\right] + \left[\binom{23}{1} \times \binom{22}{2}\right] + 22^2 \times 23.$$

(6) In quanti modi diversi si possono disporre sei persone in fila indiana? E se Paolo deve essere il secondo della fila?

Soluzione: per rispondere al primo quesito osserviamo che si tratta di una permutazione di $n = 6$ *oggetti, dunque ci sono* $6!$ *modi distinti di disporre le sei persone. Se Paolo deve essere il secondo della fila, posso disporre le 5 persone rimanenti nelle altre 5 posizioni in* $5!$ *modi diversi.*

(7) In quanti modi si possono disporre sei persone in cerchio? E se Paolo e Chiara non devono stare vicini?

Soluzione: visto a lezione il 31/05/2021. Le risposte ai quesiti sono rispettivamente $\frac{6!}{6} = 5!$ *e* $\frac{6!}{6} - 2 \times \frac{5!}{5}$.

(8) Quanti sono gli anagrammi (anche privi di significato) della parola MATEMATICA? Quanti di questi anagrammi sono tali che:
- la E è subito dopo una M?
- la E è vicina ad una M (prima o dopo)?*
- non ci sono due M vicine?
- le due T sono vicine e non ci sono A consecutive?**

Soluzione: per risolvere questo esercizio si può ragionare come per gli esercizi visti a lezione il 28/05/2021. Le soluzioni ai quesiti sono rispettivamente:

$$\frac{10!}{3!2!2!} \; ; \quad \frac{9!}{3!2!} \; ; \quad 2 \times \frac{9!}{3!2!} - \frac{8!}{3!2!} \; ; \quad \frac{10!}{2!3!2!} - \frac{9!}{3!2!} \; ; \quad \binom{(6-2)+4-1}{6-2} \frac{6!}{2!} \; .$$

*[*Indizio per il secondo quesito: conto prima i casi in cui la E è subito dopo una M o subito prima, e osservo che sto contando due volte i casi che contengono la sequenza MEM...*
*** Indizio per il quarto quesito: non potendoci essere A consecutive, gli anagrammi dovranno essere della forma _ A _ A _ A _ dove gli spazi "_ " conterranno le rimanenti 6 "multi-lettere" TT, M, M, E, I, C (TT "conta" come una sola lettera) e, in particolare, i due spazi centrali dovranno contenere almeno una lettera.]*

(9) Quanti sono gli anagrammi (anche privi di significato) della parola MATRICE in cui le vocali compaiono in ordine alfabetico? Di questi anagrammi, in quanti anche le consonanti appaiono in ordine alfabetico?

Soluzione: per risolvere questo esercizio si può ragionare come per gli esercizi visti a lezione il 28/05/2021. Le soluzioni ai quesiti sono rispettivamente:

$$\binom{7}{3} \times 4! \; ; \quad \binom{7}{3} \; .$$

(10) Quanti numeri di 7 cifre si possono formare con le cifre 3,5,7? Di questi numeri, quanti hanno esattamente tre 3, due 5 e due 7?

Soluzione:

$$3^7 \ ; \quad \frac{7!}{3!2!2!} \ .$$

(11) In quanti modi si possono distribuire 8 palline in 6 scatole se:
- le palline sono tutte uguali?
- le palline sono tutte distinte?

Rispondere alle precedenti due domande nel caso in cui nelle prime due scatole ci siano al più 4 palline complessivamente.

Soluzione: per risolvere questo esercizio si può ragionare come per gli esercizi visti a lezione il 28/05/2021. Le soluzioni ai quesiti sono:

$$\binom{8+6-1}{8} \ ; \quad 6^8 \ ; \quad \sum_{k=0}^{4} \binom{k+2-1}{k} \times \binom{8-k+4-1}{8-k} \ ; \quad \sum_{k=0}^{4} \binom{8}{k} \times 2^k \times 4^{8-k}$$

NB: le ultime due risposte si possono trovare considerando uno ad uno (e poi sommando) i cinque sottocasi in cui le prime 2 scatole contengono $k = 0, 1, 2, 3, 4$ *palline.*

(12) In quanti modi si possono distribuire 36 caramelle (tutte uguali) tra quattro bambini:
- senza restrizioni?
- ogni bambino riceve lo stesso numero di caramelle?
- ogni bambino riceve almeno una caramella?

Soluzione: per risolvere questo esercizio si può ragionare come per gli esercizi visti a lezione il 28/05/2021. Le soluzioni ai quesiti sono:

$$\binom{36+4-1}{36} \ ; \quad 1 \ ; \quad \binom{32+4-1}{32} \ .$$

(13) In quanti modi si possono distribuire 36 caramelle, di cui 10 alla menta, 10 al limone e 16 alla fragola tra quattro bambini:
- senza restrizioni?
- se ogni bambino riceve lo stesso numero di caramelle?
- se ogni bambino riceve almeno una caramella alla menta?
- se ogni bambino riceve almeno una caramella per tipo?

Soluzione: per risolvere questo esercizio si può ragionare come per gli esercizi visti a lezione il 28/05/2021. Le soluzioni ai quesiti sono:

$$\binom{10+4-1}{10} \times \binom{10+4-1}{10} \times \binom{16+4-1}{16} \;; \qquad \frac{36!}{10!\ 10!\ 16!} \;;$$

$$\binom{6+4-1}{6} \times \binom{10+4-1}{10} \times \binom{16+4-1}{16} \;; \quad \binom{6+4-1}{6} \times \binom{6+4-1}{6} \times \binom{12+4-1}{12} .$$

(14) Quanti numeri tra 0 e 10000 (compresi) hanno la somma delle cifre:
- uguale a 7?
- minore o uguale a 7?
- uguale a 13?

Soluzione:

- *Osserviamo che per rispondere al primo quesito possiamo considerare solo i numeri tra 0 e 9999 compresi, cioè i numeri con al più quattro cifre. Chiamiamo x_1, x_2, x_3, x_4 tali cifre. Il problema può essere riformulato in questo modo: in quanti modi posso scegliere quattro interi $0 \leq x_i \leq 9$ (per $i = 1, 2, 3, 4$) tali che $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$? A sua volta, questo problema è equivalente al seguente: in quanti modi posso disporre 7 palline in 4 scatole x_1, x_2, x_3, x_4 se ognuna delle scatole x_i può contenere al massimo 9 palline (questa ultima condizione risulta superflua in questo caso, dato che il numero totale di palline è 7, ma sarà necessario imporre tale vincolo per rispondere al terzo quesito)? Una volta formulato il problma in questi termini, possiamo allora concludere facilmente che la risposta è*

$$\binom{7+4-1}{7}$$

- *Ragioniamo come sopra, osservando che alla soluzione trovata dovremo aggiungere un "+1" che corrisponde al numero 10000. Riformuliamo il problema considerando 5 scatole x_1, x_2, x_3, x_4, y, dove x_1, x_2, x_3, x_4 corrispondono alle cifre del numero, mentre y conterrà le palline "non messe nelle altre scatole" (la somma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ sarà minore o uguale a 7). La risposta al secondo quesito è dunque:*

$$\binom{7+5-1}{7} + 1$$

- *Ragioniamo ancora come sopra, ma questa volta dobbiamo porre attenzione al vincolo $0 \leq x_i \leq 9$. In situazioni di questo tipo conviene ragionare sul caso complementare. Andiamo quindi a calcolare in quanti modi possiamo mettere 13 palline in 4 scatole e a questi sottraiamo il numero di modi in cui possiamo mettere 13 palline in 4 scatole se almeno una scatola contiene 10 o più palline. La soluzione è:*

$$\binom{13+4-1}{13} - 4 \times \binom{3+4-1}{3}$$

dove il secondo addendo si può ricavare nel seguente modo. Scelgo una scatola in cui mettere 10 palline (ho 4 modi) e poi distribuisco le rimanenti 3 palline nelle 4 scatole.