Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: Informatica

Svolgimento degli Esercizi per casa 3 (2^a parte)

$\boxed{7}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$ dipendente dal parametro complesso α dove

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - i \\ \alpha^2 + 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\big(\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\big) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 1 & \alpha - i & \alpha + i & | & 2\alpha \\ -\alpha - i & -\alpha^2 - 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(\alpha+i)E_{31}(-1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} = \big(\mathbf{B}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{c}(\alpha)\big).$$

$\boxed{1^0 \text{ CASO}}$ $\alpha = -i$ $\quad \big(\mathbf{B}(-i) \quad | \quad \mathbf{c}(-i)\big) = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 & | & -2i \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

è una forma ridotta di Gauss per $\big(\mathbf{A}(-i) \quad | \quad \mathbf{b}(-i)\big)$, quindi $\mathbf{A}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{b}(-i)$ è equivalente a $\mathbf{B}(-i)\mathbf{x} = \mathbf{c}(-i)$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - 2ix_2 & = -2i \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{c}$(-i) è libera, $\mathbf{B}$(-i) $\mathbf{x} = \mathbf{c}$(-i) ammette soluzioni.

Poichè $\mathbf{B}$(-i) ha esattamente una colonna libera, $\mathbf{B}$(-i)$\mathbf{x} = \mathbf{c}$(-i) ha ∞^1 soluzioni.

Scegliamo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera di $\mathbf{B}$(-i) (la 3^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_3 = h \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 2ix_2 - 2i = -2i \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{B}$(-i)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{c}$(-i) (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{A}$(-i)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$(-i)) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ h \end{pmatrix} | h \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\boxed{2^0 \text{ CASO}}$ $\quad \alpha \neq -i$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}(\alpha) & | & \mathbf{c}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & \alpha + i & | & \alpha + i \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3(\frac{1}{\alpha+i})} \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha+i})}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha - i & 0 & | & \alpha - i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}(\alpha) | & \mathbf{d}(\alpha) \end{pmatrix}.$$

$\boxed{1^0 \text{ Sottocaso}}$ $\quad \alpha = i \quad \begin{pmatrix} \mathbf{C}(i) & | & \mathbf{d}(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $\begin{pmatrix} \mathbf{A}(i) & | & \mathbf{b}(i) \end{pmatrix}$, quindi $\mathbf{A}$(i)$\mathbf{x}$ =$\mathbf{b}$(i) è equivalente a $\mathbf{C}$(i)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{d}$(i) che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$(i) è libera, $\mathbf{C}$(i)$\mathbf{x}$ =$\mathbf{d}$(i) ammette soluzioni.

Poichè tutte le colonne di $\mathbf{C}$(i) sono dominanti, $\mathbf{C}$(i)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{d}$(i) ammette un'unica soluzione. L'unica soluzione di $\mathbf{C}$(i)$\mathbf{x}$ =$\mathbf{d}$(i) (e quindi di $\mathbf{A}$(i)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$(i)) è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2^0 \text{ Sottocaso}}$ $\quad \alpha \notin \{i, -i\}$

$$\big(\mathbf{C}(\alpha)|\quad \mathbf{d}(\alpha)\big) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha-i & 0 & | & \alpha-i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha-i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{\alpha-i})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha-i & 0 & | & \alpha-i \\ 0 & 1 & 0 & | & \alpha^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = \big(\mathbf{D}(\alpha)|\quad \mathbf{e}(\alpha)\big)$$

è una forma ridotta di Gauss per $\big(\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{b}(\alpha)\big)$.
Poichè $\mathbf{e}(\alpha)$ è dominante, $\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha)$ (e quindi di $\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\alpha)$) non ammette soluzioni.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Si trovi una forma ridotta di Gauss-Jordan per la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Facendo una E.G. "in avanti" su $\mathbf{A}$ otteniamo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-3)E_{31}(2)E_{21}(-2)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-1)E_3(\frac{1}{11})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}$$

Facendo ora una E.G. "all'indietro" su $\mathbf{U}$ otteniamo

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-3)E_{23}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{W}$$

$\mathbf{W}$ è una forma ridotta di Gauss-Jordan per $\mathbf{A}$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Sia $\quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quegli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare, si calcoli $\mathbf{A}(\alpha)^{-1}$.

$$\left(\mathbf{A}(\alpha) \quad | \quad \mathbf{I_3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha & | & 0 & 1 & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 & -\alpha & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha^2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2\alpha)E_1(\frac{1}{\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq 0 : \mathbf{A}(0) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & | & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\alpha & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{1+2\alpha}) \quad \boxed{\alpha \neq -\frac{1}{2} : \mathbf{A}(-\frac{1}{2}) \text{ non ha inversa}}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & | & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(1)} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & | & 0 & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{12}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\alpha & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{pmatrix}.$$

Se $\boxed{\alpha \notin \{0, -\frac{1}{2}\}}$ $\qquad \mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha & \frac{1}{\alpha(1+2\alpha)} & \frac{1}{1+2\alpha} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{1+2\alpha} & \frac{1}{1+2\alpha} \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6i & 1-i \\ 3 & -i \end{pmatrix}$. Si calcoli $\mathbf{A}^{-1}$.

Ricordando che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{se} \qquad ad - bc \neq 0,$$

si ha:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6i(-i) - 3(1-i)}\begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix} = \frac{1}{6-3+3i}\begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix} = \frac{1}{3+3i}\begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix}$$

Poichè

$$\frac{1}{3+3i} = \frac{1}{3+3i}\times\frac{\overline{3+3i}}{\overline{3+3i}} = \frac{3-3i}{(3+3i)(3-3i)} = \frac{3-3i}{3^2-3^2i^2} = \frac{3-3i}{9+9} = \frac{1}{6}-\frac{1}{6}i = \frac{1}{6}\cdot(1-i),$$

allora

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}\cdot(1-i)\cdot\begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -3 & 6i \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+3i & \alpha \\ \alpha+3i & \alpha-i \end{pmatrix}$ è non singolare. Per tali α, si trovi l'inversa di $\mathbf{A}(\alpha)$.

Ricordando che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è non singolare se e solo se $ad-bc \neq 0$ ed in tal caso si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$\mathbf{A}(\alpha)$ è non singolare se e solo se

$$(\alpha+3i)(\alpha-i)-\alpha(\alpha+3i) = -i(\alpha+3i) \neq 0,$$

ossia se e solo se $\alpha \neq -3i$, ed in tal caso si ha:

$$\mathbf{A}(\alpha)^{-1} = \frac{1}{-i(\alpha+3i)}\begin{pmatrix} \alpha-i & -\alpha \\ -\alpha-3i & \alpha+3i \end{pmatrix}.$$