Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: Statistica per l'economia e l'impresa

ESERCIZIO TIPO 13

Sia $\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} z & \overline{z} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dove $z \in \mathbb{C}$.
Si dica per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\mathbf{A}(z)$ è non singolare.

$\mathbf{A}(z)$ è non singolare se e solo se $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) \neq 0$. Calcoliamo dunque $\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z))$.

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) \overset{\text{sviluppato rispetto alla } 2^a \text{ riga}}{=} (-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & \overline{z} & 0 \\ 1 & 1 & z-i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\text{sviluppato rispetto alla } 3^a \text{ colonna}}{=} -(z-i)(-1)^{2+3}\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & \overline{z} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (z-i)(z-\overline{z})$$

Quindi $\mathbf{A}(z)$ è non singolare se e solo se $(z-i)(z-\overline{z}) \neq 0$.

Si osservi che $(z-i)(z-\overline{z}) = 0$ se e solo se o $z-i=0$, e quindi $z=i$, oppure $z-\overline{z}=0$, e quindi $z=\overline{z}$. Poichè

$$z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R},$$

allora

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) = 0 \iff z \in \mathbb{R} \cup \{i\}$$

e quindi

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}(z)) \neq 0 \iff z \notin \mathbb{R} \cup \{i\}.$$

Concludendo

$$\mathbf{A}(z) \text{ è non singolare} \iff z \notin \mathbb{R} \cup \{i\}.$$