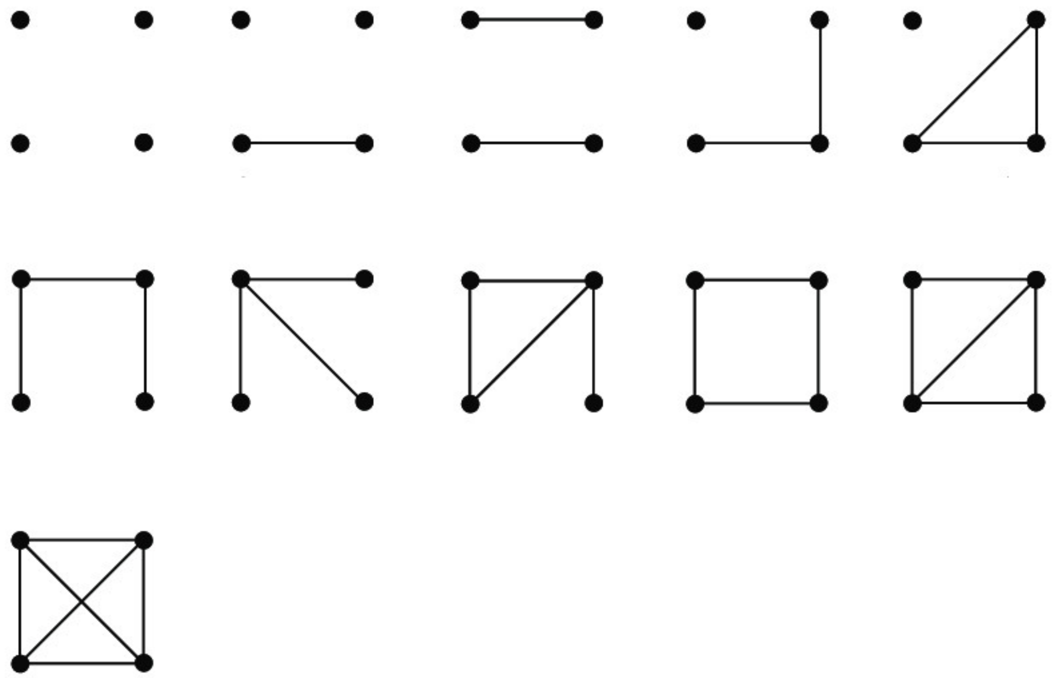
## Alcuni esercizi sui grafi con soluzione

Parte delle lezioni del 26 e 30 Marzo.

(1) Elencare tutti i grafi a due a due non isomorfi con 4 vertici. Discuterne le sequenze di gradi e le componenti connesse.

*Questi sono tutti i grafi con 4 vertici a due a due non isomorfi:*



(2) Stabilire se esite un grafo con esattamente 100 vertici $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$ tale che $d(v_i) = i$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, 100$.

*Risposta: Per rispondere al quesito è sufficiente ricordare che se $G$ è un grafo con $n$ vertici, il grado massimo di un vertice è $n - 1$. Dunque un grafo con 100 vertici non può avere un vertice di grado 100.*

(3) Stabilire se esite un grafo con esattamente 98 vertici $v_1, v_2, \ldots, v_{98}$ tale che $d(v_i) = 1$ per ogni $i$ dispari e $d(v_i) = 2$ per ogni $i$ pari.

*Risposta: Per rispondere al quesito è sufficiente ricordare che un grafo ha sempre un numero pari di vertici di grado dispari. Il grafo descritto nella domanda dovrebbe* *avere 49 vertici di grado 1, dunque non può esistere.*

(4) Stabilire se esiste un grafo $G = (V, E)$ con sequenza di gradi 5,5,4,4,3,3,2,1.

*Risposta: Non esite, per lo stesso motivo descritto sopra.*

(5) Stabilire se esiste un grafo $G = (V, E)$ tale che $d(v) \neq d(w)$ per ogni $v \neq w$.

*Risposta: Supponiamo che un grafo siffatto esista e sia $n$ il numero di vertici di $G$. Come già osservato in precedenza, un vertice può avere grado al più $n-1$. Dunque, l'unico modo per avere che $d(v) \neq d(w)$ per ogni $v \neq w$ è che la sequenza di gradi di $G$ sia $n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0$ (è l'unico modo di avere $n$ numeri tutti diversi minori o uguali ad $n-1$). In particolare il vertice di grado $n-1$ sarà collegato a <u>tutti</u> gli altri vertici, compreso quello di grado 0. Questo è assurdo, dunque un tale grafo non esiste.*

(6) Sia $G = (V, E)$ un grafo e $\bar{G} = (V, \bar{E})$ il suo grafo complementare. Dato un vertice $v \in V$ siano $d(v)$ e $\bar{d}(v)$ i gradi di $v$ in $G$ e $\bar{G}$ rispettivamente. Mostrare che $d(v) + \bar{d}(v) + 1 = |V|$.

*Risposta: Sia $v \in V$ un vertice di $G$ (e dunque di $\bar{G}$). Ricordiamo che i vertici diversi da $v$ a cui è collegato $v$ in $G$ sono <u>esattamente</u> quelli a cui $v$ <u>non</u> è collegato in $\bar{G}$ (che è equivalente a dire che tutti i vertici a cui non è collegato $v$ in $G$ sono esattamente quelli a cui $v$ è collegato in $\bar{G}$. Il numero di vertici collegati a $v$ in $G$ è $d(v)$ mentre, per quanto appena detto, il numero di vertici non collegati a $v$ in $G$ è pari al numero di vertici collegati a $v$ in $\bar{G}$, cioé $\bar{d}(v)$. Ne segue che $d(v) + \bar{d}(v)$ è pari al numero di tutti i possibili vertici con cui $v$ può essere collegato, ovvero $n-1$. Dunque $d(v) + \bar{d}(v) = |V| - 1$.*

(7) Sia $G = (V; E)$ un grafo con sequenza di gradi 4,4,3,3,2. Quale è la sequenza di gradi di $\bar{G}$?

*Risposta: È sufficiente applicare la formula trovata nell'esercizio precedente. La sequenza di gradi di $\bar{G}$ è dunque* $2, 1, 1, 0, 0$.

(8) Sia $G$ un grafo con $n$ vertici tale che $G$ e $\bar{G}$ siano isomorfi. Quanti archi ha $G$? Si trovi un grafo $G$ con 4 vertici tale che $G$ e $\bar{G}$ siano isomorfi. Si stabilisca se esiste un grafo $G$ con 6 vertici tale che $G$ e $\bar{G}$ siano isomorfi.

*Risposta: Se $G$ e $\bar{G}$ sono grafi isomorfi allora devono avere lo stesso numero di archi. Dal momento che "sovrapponendo" un grafo con il suo complementare si ottiene un grafo completo (perché gli archi che sono in $\bar{G}$ sono esattamente quelli che <u>non</u> sono in $G$), si ha che il numero di archi di $G$ più il numero di archi di $\bar{G}$ è pari al numero* *di archi del grafo completo $K_n$, cioè $n(n-1)/2$. Essendo il numero di archi di G uguale al numero di archi di $\bar{G}$ si ha necessariamente che il numero di archi di G è $n(n-1)/4$. In particolare, se G e $\bar{G}$ sono isomorfi, allora 4 deve dividere $n(n-1)$, dunque non può esistere un grafo con 6 vertici isomorfo al suo complementare (dal momento che $6 \times (6-1) = 30$ non è divisibile per 4). Un grafo con 4 vertici isomorfo al suo complementare è, ad esempio, il grafo che si ottiene disegnando una "zeta" Z. Il suo complementare è il grafo che si ottiene disegnando una "enne" N. É immediato verificare che i due grafi sono isomorfi.*

(9) Se un grafo $G$ ha $n$ vertici, tutti di grado dispari eccetto uno, quanti vertici di grado dispari ha $\bar{G}$, il grafo complementare di $G$?

*Risposta: Notiamo innanzitutto che $n$ deve essere un numero dispari (perchè G ha $n-1$ vertici di grado dispari ed un grafo ha sempre un numero pari di vertici di grado dispari). Utilizzando la formula dell'esercizio (6) è immediato vedere che se $d(v)$ è dispari, allora anche $\bar{d}(v)$ lo è (essendo $n-1$ un numero pari). Sempre utilizzando la stessa formula, se $w$ é l'unico vertice di grado pari (cioè $d(w)$ è pari), allora anche $\bar{d}(w)$ è pari. Dunque $\bar{G}$ ha lo stesso numero di vertici di grado dispari di G, cioè $n-1$.*

(10) Si supponga che ogni vertice di un grafo abbia grado $p$, dove $p$ è un numero primo dispari. Si mostri che il numero degli archi di $G$ à un multiplo di $p$. Se $p = 2$ cosa succede?

*Risposta: Dalla formula $|E| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(v_i)$ ricaviamo $|E| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p = np$. Essendo n pari (perché ogni grafo ha un numero pari di vertici dispari) si ha che $\frac{1}{2}n$ è un numero intero, chiamiamolo m. Dunque $|E| = mp$, cioè $|E|$ è un multiplo di p.*

(11) Siano $G$ e $G'$ due grafi con sequenza di vertici 2,2,1,1. $G$ e $G'$ sono isomorfi? In caso affermativo, quanti isomorfismi ci sono tra $G$ e $G'$? Cosa succede a $\bar{G}$?

*Risposta: i grafi G e $G'$ hanno quattro vertici, pertanto saranno isomorfi ad uno dei grafi dell'esercizio (1). L'unico grafo con sequenza di gradi $2, 2, 1, 1$ è il primo grafo della seconda riga. Dunque G e $G'$ saranno necessariamente isomorfi a quel grafo e dunque tra di loro. Abbiamo già osservato che in questo caso il complementare di G è isomorfo a G stesso. Gli isomorfismi possibili tra G e $G'$ sono 2.*