LEZIONE 1

G. PARMEGGIANI, 1/3/2021

CODICE:

453868

AVRETE IL LINK IN MOODLE

TUTOR: MATTIA MIOLATO

incontri zoom MERCOLEDÌ POMERIGGIO ALLE 15.00

A PARTIRE DALLA PROSSIMA SETTIMANA

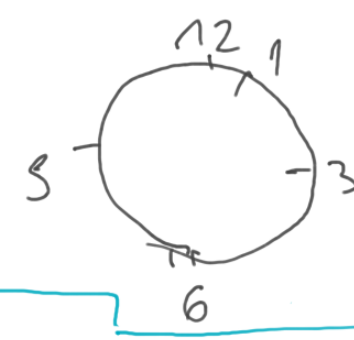
PROGRAMMA:

PARTE DI ALGEBRA

1. congruenze
   sistemi di congruenze

$ax \equiv_m b$ o $ax \equiv b \mod m$

a, b interi modulo m



$m = 12$

2. matrici, operazioni sulle matrici

3. spazi vettoriali

$\square + \square$, $44 \cdot \square$

4. DIAGONALIZZAZIONI:

$\square = \underset{S}{\square} \, \square \, \underset{S^{-1}}{\square}$

$SS^{-1} = I$

$\square$ diagonale

MATEMATICA DISCRETA

$G(V, E)$

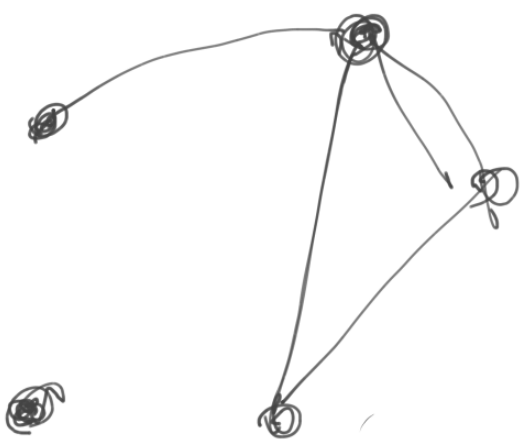
vertici, nodi

archi

$|V| < \infty$

$|E| < \infty$

① GRAFI



② METODI DI CONTEGGIO

es. contare il numero di sequenze binarie di 8 cifre con 6 "uni" e 2 "zeri"

0 PRIMO
0 DOPO

$$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

RELAZIONI DI RICORRENZA

$\mathbb{N}$ es. calcolare il prodotto di tutti i numeri naturali da 1 a n

$$n! = \underbrace{\boxed{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(n-1)}}_{a_{n-1}}\cdot n = a_n$$

n fattoriale

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}\cdot n \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

condizione iniziale

DIVISIONE NEI NUMERI NATURALI E NEI NUMERI INTERI

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

insieme dei numeri NATURALI

$$\mathbb{Z} = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

insieme dei numeri INTERI

DIVISIONE IN $\mathbb{N}$

$\forall\, a, b \in \mathbb{N},\ b \neq 0$

$$\exists!\ q, r \in \mathbb{N} \ \Big|\ \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

quoziente (q) resto (r)

tali che ($|$)

ES1 $a = 137 \quad b = 55$

$$\underbrace{137}_{a} = \underbrace{55}_{b} \cdot \underbrace{2}_{q} + \underbrace{27}_{r}$$

ES2 $a = 137 \quad b = 142$

$$\underbrace{137}_{a} = \underbrace{142}_{b} \cdot \underbrace{0}_{q} + \underbrace{137}_{r}$$

NB 1 per provare che q ed r ESISTONO si usa il principio di induzione

NB 2 q ed r "sono unici" significa:

$$\left.\begin{array}{l} a = bq_1 + r_1 \\ a = bq_2 + r_2 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} 0 \le r_1 < b \\ 0 \le r_2 < b \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} q_2 = q_1 \\ r_2 = r_1 \end{array}\right.$$

DIVISIONE IN $\mathbb{Z}$ $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\ \exists!\ q, r \in \mathbb{Z}\ |$

$$a = bq + r \quad \text{con} \quad \boxed{0 \leq r < |b|}$$

$$|r| = \begin{cases} r \text{ se } r \geq 0 \\ -r \text{ se } r < 0 \end{cases}$$

NB se non si impone la condizione $\boxed{\begin{cases} r \geq 0 \\ r < |b| \end{cases}}$ non si ha l'unicità di q ed r

ES $a = 137$
$b = -55$

O.K.

$$\boxed{\underbrace{137}_{a} = \underbrace{(-55)}_{b}\overset{q}{(-2)} + \overset{r}{27}}$$

$$\underbrace{137}_{a} = \underbrace{(-55)\overset{q}{(-3)}}_{165} + \overset{r}{(-28)}$$

NB1 la dimostrazione che q ed r è simile a quella che si fa in $\mathbb{N}$

$$\boxed{\text{NB2} \quad q, r \text{ sono unici perché si richiede } \quad 0 \leq r < |b|}$$

NB3 $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ in $\mathbb{Z}$: $a = bq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < |b|$

$|a|, |b| \in \mathbb{N}$, $|b| \neq 0$ in $\mathbb{N}$: $|a| = |b| \cdot q_2 + r_2$

$0 \leq r_2 < |b|$

ATTENZIONE

NON C'È UNA RELAZIONE TRA q_1 E q_2

" " " r_1 E r_2

ES $a = -137$
$b = 55$

$$\underbrace{-137}_{a} = \underbrace{55}_{b}\underbrace{(-3)}_{q_1} + \underbrace{28}_{r_1}$$

$|a| = 137$
$|b| = 55$

$$\underbrace{137}_{|a|} = \underbrace{55}_{|b|} \cdot \underbrace{2}_{q_2} + \underbrace{27}_{r_2}$$

X casa esercizio 1 del foglio 1

DIVISIBILITA' IN $\mathbb{N}$ ED IN $\mathbb{Z}$

IN $\mathbb{N}$ $\quad a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$

$b \mid a$ se $a = bq$ $\quad \exists q \in \mathbb{N}$

divide

$6 \mid 18$

$b \nmid a$ altrimenti

non divide

$\to \quad 4 \nmid 18$

$$\boxed{\begin{array}{cc} a = b & a \neq b \\ \exists & \nexists \end{array}}$$

affermare e negare in matematica

IN $\mathbb{Z}$

$a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ $\quad$ $b \mid a$ se $\exists q \in \mathbb{Z} \mid a = bq$

$b \nmid a$ altrimenti

es. $-6 \mid 18$ $\quad$ $18 = (-6)(-3)$

$6 \mid (-18)$

$4 \nmid (-18)$

$a = b$ oppure $a = -b$

$a = b, -b$ $\quad$ $a \in \{b, -b\}$

NB $\left.\begin{array}{l} a, b \in \mathbb{N} \\ a \neq 0 \neq b \\ a \mid b \\ b \mid a \end{array}\right\} \Longrightarrow a = b$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} a, b \in \mathbb{Z} \\ a \neq 0 \neq b \\ a \mid b \\ b \mid a \end{array}\right\} \Longrightarrow a \in \{b, -b\}$

MASSIMO COMUN DIVISORE IN $\mathbb{N}$ ED IN $\mathbb{Z}$

$\boxed{\text{IN } \mathbb{N}}$ $\forall a, b \in \mathbb{N}$, $(a,b) \neq (0,0)$

almeno uno dei due
è diverso da 0
(non entrambi nulli)

un $d \in \mathbb{N}$ è ~~un~~ UN $MCD(a,b)$ se

① $d \mid a$ e $d \mid b$ (è un divisore comune di a e b)

② $z \mid a$ e $z \mid b \Rightarrow z \mid d$ (~~è diviso da~~ è un multiplo ogni divisore comune di a e b)

$\boxed{\underline{NB1}\quad MCD(a,b) \text{ è } ! \text{ in } \mathbb{N}}$ è IL MCD(a,b)

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $\qquad 18 = 2 \cdot 3^2$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}$$

$$d = 2 \cdot 3 = 6$$

<u>NB2</u> $MCD(a,b) = MCD(b,a)$

<u>NB3</u> $\left.\begin{array}{l} b \mid a \\ b \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow MCD(a,b) = b$

NB4 $a,b \in \mathbb{N}$ $b \neq 0$ $\exists q,r \in \mathbb{N}$

$a = bq + r$ $0 \leq r < b$ $\longrightarrow$ $r = a - bq$

$$MCD(a,b) = MCD(b,r)$$

PER PROVARLO, PROVIAMO CHE I DUE INSIEMI $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ SONO UGUALI:

$\mathcal{A} = \{z \mid z|a \text{ e } z|b\}$ = insieme dei divisori comuni di a e b

$\mathcal{B} = \{w \mid w|b \text{ e } w|r\}$ = insieme dei divisori comuni di b ed r

$z \in \mathcal{A} \Rightarrow \begin{cases} z|a \\ \boxed{z|b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \mid a - bq = r \\ z|b \end{cases} \Rightarrow z \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$

$w \in \mathcal{B} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{w|b} \\ w|r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w|b \\ w \mid bq + r = a \end{cases} \Rightarrow w \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$