Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

ESERCIZIO TIPO 14

Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si trovino:

– i loro autovalori,
– le loro molteplicità algebriche,
– le loro molteplicità geometriche,
– basi dei loro autospazi.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & 3-x & 0 \\ 3i & 0 & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{2+2}(3-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & -3i \\ 3i & -x \end{pmatrix} = \\ &= (3-x)[(-x)^2 - (-3i)\cdot 3i] = (3-x)(x^2+9i^2) = (3-x)(x^2-9) = \\ &= (-3-x)(3-x)^2. \end{aligned}$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{A}}(x)$ di $\mathbf{A}$, ossia le soluzioni dell'equazione $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$. Dal momento che le soluzioni dell'equazione

$$(-3-x)(3-x)^2 = 0$$

sono -3 e 3, gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono:

$$\lambda_1 = -3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 3.$$

Siano m_1 ed m_2 le molteplicità algebriche e d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{A}}(x) = (-3-x)(3-x)^2 = (\lambda_1 - x)^{m_1}(\lambda_2 - x)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = 2.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$d_1 = 1 \quad \text{e} \quad 1 \leq d_2 \leq 2.$$

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3) = N(\mathbf{A} - (-3)\mathbf{I}_3) = N(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 6 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 6 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3i)E_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{6})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(-3) = N\Big(\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 6 & 0 \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} ih \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-3)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3) = N(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3i)E_1(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & -3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -ih \\ k \\ h \end{pmatrix} \Big| h, k \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi

$$d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}}(3)) = \text{ [numero di colonne di } (\mathbf{A}-3\mathbf{I}_3)] - \text{rk}(\mathbf{A}-3\mathbf{I}_3) = 3-1=2$$

e $\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(3)$.

$\mathbf{B}$ è una matrice triangolare, per cui i suoi autovalori sono i suoi elementi diagonali:

$$\lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = 3.$$

$\Big($Infatti, il polinomio caratteristico di $\mathbf{B}$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{B}}(x) &= \text{Det}(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_3) = \text{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 & -3i \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3}(-x)\text{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & 3-x \end{pmatrix} = \\ &= (-x)(-x)(3-x) = x^2(3-x), \end{aligned}$$

e gli autovalori di $\mathbf{B}$ sono gli zeri del polinomio caratteristico $p_{\mathbf{B}}(x)$ di $\mathbf{B}$, ossia le soluzioni dell'equazione $x^2(3-x) = 0.\Big)$

Siano m_1 ed m_2 le molteplicità algebriche e d_1 e d_2 le molteplicità geometriche di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Da

$$p_{\mathbf{B}}(x) = x^2(3-x) = (\lambda_1 - x)^{m_1}(\lambda_2 - x)^{m_2}$$

otteniamo:

$$m_1 = 2 \quad \text{e} \quad m_2 = 1.$$

Infine, da $1 \leq d_i \leq m_i = 1$ per $i = 1, 2$, otteniamo:

$$1 \leq d_1 \leq 2 \quad \text{e} \quad d_2 = 1.$$

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(0) = N(\mathbf{B} - 0\mathbf{I}_3) = N(\mathbf{B})$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B} \quad$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad E_2(\frac{1}{3}i)E_1(\frac{1}{3})E_{12} \quad} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(0) = N(\mathbf{B}) = N\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi

$$d_1 = \dim(E_{\mathbf{B}}(\lambda_1)) = \text{ (numero di colonne di } \mathbf{B}) - \text{rk}(\mathbf{B}) = 3 - 2 = 1$$

e $\Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{B}}(0)$.

$$E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(3) = N(\mathbf{B} - 3\mathbf{I}_3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Big)$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{B} - 3\mathbf{I}_3 \quad$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad E_3(-\frac{1}{3})E_{23}E_1(-\frac{1}{3}) \quad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{B}}(3) = N\Big(\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Big) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{B}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{B}}(3)$.