Relazioni di ricorrenza - esercizi

(1) Trovare una relazione di ricorrenza per il numero di modi di distribuire n oggetti distinti in 4 scatole. Qual è la condizione iniziale?

Risposta: la condizione iniziale è determinata dal numero di modi di distribuire un oggetto in 4 scatole: $a_1 = 4$. *Per trovare la relazione di ricorrenza, osserviamo che dati* n *oggetti distinti, possiamo distribuire i primi* $n-1$ *in* a_{n-1} *modi, mentre l'ennesimo potrà essere distribuito in 4 diversi modi. Dunque la relazione è* $a_n = 4a_{n-1}$, $a_1 = 4$.

(2) Trovare una relazione di ricorrenza per l'ammontare del saldo in un conto deposito bancario dopo n anni se il tasso di interesse è del 6% e vengono aggiunti al conto 50E all'inizio di ogni anno.

Risposta: si ragiona esattamente come per l'esercizio visto a lezione il 28/05/2021, con l'unica differenza che i 50E vengono aggiunti all'inizio di ogni anno, dunque maturano interessi per quello stesso anno. La relazione è $a_n = 1.06(a_{n-1} + 50)$.

(3) Trovare una relazione di ricorrenza per il numero di modi di accoppiare $2n$ persone per delle partite di tennis.

Risposta: la condizione iniziale è $a_1 = 1$ *(c'è un solo modo per accoppiare 2 persone). Osserviamo poi che date* $2n$ *persone, posso accoppiare la prima con una qualsiasi delle rimanenti* $2n-1$. *Rimangono allora* $2n-2 = 2(n-1)$ *persone (siamo allora nel caso* $n-1$*) che si possono accoppiare in* a_{n-1} *modi. La relazione di ricorrenza è quindi* $a_n = (2n-1)a_{n-1}$, $a_1 = 1$.

(4) Risolvere le seguenti relazioni di ricorrenza assumendo che n sia una potenza di 2 (trovare la soluzione generale).

- $a_n = 4a_{n/2} + 3n$;
- $a_n = a_{n/2} + 2n - 1$.

Risposta:

- *Questa relazione si risolve applicando direttamente la formula vista durante la lezione del 27/05/2021 (quarta riga della tabella sulle soluzioni generali delle relazioni divide-and-conquer):* $a_n = An^2 - 3n$.

- *Osserviamo innanzitutto che questa relazione non rientra tra i casi presenti nella tabella menzionata sopra. Facciamo dunque alcune osservazioni preliminari. Si può facilmente dimostrare per sostituzione diretta che:*

SI USA IL METODO PER d=2 (4° R. TAB) QUI

– *la soluzione generale della terza riga della tabella menzionata prima vale anche per $c = 1$. Dunque la soluzione generale della relazione di ricorrenza $a_n = a_{n/2} + dn$ è $An^{\log_2 1} + (\frac{2d}{2-1})n = A + dn$ (perché $c = 1$).*

– *se $X(n)$ è soluzione generale di $a_n = ca_{n/2} + f(n)$ e $Y(n)$ è soluzione generale di $a_n = ca_{n/2} + f'(n)$, allora $X(n) + Y(n)$ è soluzione generale della relazione $a_n = ca_{n/2} + f(n) + f'(n)$. Vediamo meglio cosa vuol dire questo applicandolo direttamente alla relazione che vogliamo risolvere.*

Consideriamo le due relazioni $a'_n = a'_{n/2} + 2n$ e $a''_n = a''_{n/2} - 1$, le cui soluzioni generali si possono trovare utilizzando la tabella e sono rispettivamente $a'_n = A + 8n$ 4 e $a''_n = A - \log_2 n$. La soluzione generale di $a_n = a_{n/2} + 2n - 1$ sarà allora la somma di queste due, cioè $a_n = A + 4n - [\log_2 n]$.

(5) Sono stati investiti 1000E in un conto deposito bancario che frutta l'8% di interessi ogni anno. Trovare una formula per il saldo sul conto dopo n anni.

Risposta: la relazione di ricorrenza è $a_n = (1.08)a_{n-1}$, con condizione iniziale $a_1 = 1000$. La soluzione generale della relazione è $a_n = A(1.08)^n$, e imponendo la condizione iniziale si ottiene $a_n = (1.08)^n \times 1000$.

(6) Risolvere le seguenti relazioni di ricorrenza:

- $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, $a_0 = a_1 = 1$;
- $a_n = a_{n-2}$, $a_0 = a_1 = 1$;
- $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$, $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 2$;

- $a_n = 3a_{n-1} - 2$, $a_0 = 0$;
- $a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$, $a_0 = 3$;

Risposta:
- $a_n = \frac{2}{5}4^n + \frac{3}{5}(-1)^n$ • $a_n = 1$ • $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$
- $a_n = -3^n + 1$ • $a_n = 15 \times 2^n - 2n^2 - 8n - 12$