

G. Parmeggiani

Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,

Scuola di Scienze - Corso di laurea:

Informatica

**Svolgimento degli esercizi di integrazione agli Esercizi per casa 1**

**1** Per ciascuno dei seguenti numeri complessi

$$z_1 = i, \quad z_2 = -3i, \quad z_3 = 1 - 2i \quad \text{e} \quad z_4 = 5 + 3i$$

- (a) si calcoli il modulo;
- (b) si calcoli il coniugato;
- (c) si scriva l'inverso in forma algebrica.

(a) Il modulo:

$$\begin{aligned} |z_1| &= |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1, \\ |z_2| &= |-3i| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3, \\ |z_3| &= |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}, \\ |z_4| &= |5 + 3i| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}. \end{aligned}$$

(b) Il coniugato:

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= -i, \\ \bar{z}_2 &= 3i, \\ \bar{z}_3 &= 1 + 2i, \\ \bar{z}_4 &= 5 - 3i. \end{aligned}$$

(c) L'inverso in forma algebrica:

Siano  $w_1 = z_1^{-1}$ ,  $w_2 = z_2^{-1}$ ,  $w_3 = z_3^{-1}$  e  $w_4 = z_4^{-1}$ . Allora

$$w_1 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\bar{i}}{\bar{i}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

è la forma algebrica di  $w_1$ :  $a_1 = 0$  e  $b_1 = -1$  sono la parte reale e la parte immaginaria di  $w_1$ ;

$$w_2 = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{-3i} = \frac{1}{-3i} \cdot \frac{\overline{-3i}}{\overline{-3i}} = \frac{1}{-3i} \cdot \frac{3i}{3i} = \frac{3i}{-9i^2} = \frac{3i}{9} = \frac{1}{3}i$$

è la forma algebrica di  $w_2$ :  $a_2 = 0$  e  $b_2 = 1/3$  sono la parte reale e la parte immaginaria di  $w_2$ ;

$$w_3 = \frac{1}{z_3} = \frac{1}{1-2i} = \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{\overline{1-2i}}{\overline{1-2i}} = \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1+2i}{1^2-(2i)^2} = \frac{1+2i}{1^2-4i^2} = \frac{1+2i}{1+4} = \frac{1+2i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

è la forma algebrica di  $w_3$ :  $a_3 = 1/5$  e  $b_3 = 2/5$  sono la parte reale e la parte immaginaria di  $w_3$ ;

$$w_4 = \frac{1}{z_4} = \frac{1}{5+3i} = \frac{1}{5+3i} \cdot \frac{\overline{5+3i}}{\overline{5+3i}} = \frac{1}{5+3i} \cdot \frac{5-3i}{5-3i} = \frac{5-3i}{5^2-(3i)^2} = \frac{5-3i}{5^2-9i^2} = \frac{5-3i}{25+9} = \frac{5-3i}{34} = \frac{5}{34} - \frac{3}{34}i$$

è la forma algebrica di  $w_4$ :  $a_4 = 5/34$  e  $b_4 = -3/34$  sono la parte reale e la parte immaginaria di  $w_4$ .

**2** Quali sono i numeri complessi  $z$  tali che  $z = -\bar{z}$  ?

Scrivendo  $z \in \mathbb{C}$  in forma algebrica, si ha  $z = a+ib$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Il coniugato  $\bar{z}$  di  $z$  è  $\bar{z} = a-ib$ , e  $-\bar{z} = -a+ib$ . Poichè

$$a+ib = -a+ib \iff a = -a \iff a = 0,$$

si ottiene che

$$z = -\bar{z} \iff z = ib, \text{ con } b \in \mathbb{R},$$

ossia  $z$  è l'opposto del suo coniugato se e solo se  $z$  è un numero immaginario puro.