Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: Informatica

ESERCIZIO TIPO 5

Si consideri lo spazio vettoriale reale $V = M_2(\mathbb{R})$. Siano

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \,\Big|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \text{ ed}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Si provi che W è un sottospazio vettoriale di V.

(b) Si dica se $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è un insieme di generatori per W.

(a) Proviamo che W è un sottospazio vettoriale dello spazio di V.

(i) esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$: si prendano $a = b = c = 0$.

(ii) Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W$ esistono $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{R} \,|\, \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{pmatrix}.$$

Poichè

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -(a_1 + a_2) \end{pmatrix},$$

basta prendere $a_3 = a_1 + a_2$, $b_3 = b_1 + b_2$ e $c_3 = c_1 + c_2$.

(iii) Se $\mathbf{A} \in W$ esistono $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{A} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R} \,|\, \alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix}.$$

Poichè
$$\alpha \mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & -\alpha a_1 \end{pmatrix},$$
basta prendere $a_2 = \alpha a_1$, $b_2 = \alpha b_1$, $c_2 = \alpha c_1$.

Abbiamo provato che W è un sottospazio di $V = M_2(\mathbb{R})$.

(b) Dal momento che ogni elemento di

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

è un elemento di W, per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è o non è un insieme di generatori di W, spazio vettoriale **reale**, occorre stabilire se **per ogni** $\mathbf{A} \in W$ **esistono** α_1, α_2 ed α_3 numeri **reali** tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \alpha_1 \mathbf{A_1} + \alpha_2 \mathbf{A_2} + \alpha_3 \mathbf{A_3} = \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 & -\alpha_2 - 2\alpha_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Poichè per ogni $\mathbf{A} \in W$ esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, il problema diventa stabilire se il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_2 + 2\alpha_3 = a \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = b \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = c \\ -\alpha_2 - 2\alpha_3 = -a \end{cases}$$

nelle incognite **reali** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ abbia o meno soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Se $(*)$ avesse soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$ allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ sarebbe un insieme di generatori di W, in caso contrario (ossia se esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $(*)$ non ha soluzione), no.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & -3 & c \\ 0 & -1 & -2 & -a \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -3 & c \\ 0 & -1 & -2 & -a \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 1 & 2 & | & a \\ 0 & -2 & -4 & | & c-b \\ 0 & -1 & -2 & | & -a \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(1)E_{32}(2)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 1 & 2 & | & a \\ 0 & 0 & 0 & | & c-b+2a \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{d}$ è dominante (ad esempio si prendano $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ non è un insieme di generatori di W
(in altre parole: poichè esistono delle matrici di W che **NON** si possono esprimere come combinazione lineare degli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, ad esempio la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ **NON** è un insieme di generatori di W).