G. Parmeggiani

Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: Informatica

Esercizi per casa 8

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sia $\quad \mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & \alpha & 0 & 2i \\ 4 & \alpha - 1 & 0 & 4i \\ 0 & 2 & 4\alpha - 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad$ dove $\alpha \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si dica qual è $rk(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ e si trovi una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha}$ di $C(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sia $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & \alpha + 2 & \alpha & \alpha + 2 \\ 2 & 4 & 0 & \alpha + 6 \end{pmatrix}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una base dello spazio nullo $N(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}})$ di $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Siano

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 2i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; \mathbf{v_4}\}.$$

Sia W il sottospazio di $\mathbb{C}^{\mathbf{5}}$ generato da $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Si trovi una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ di W contenuta in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha + 1 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si dica quale delle due seguenti posizioni definisce un'applicazione lineare:

(a) $f_1 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$;

(b) $f_2 : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definita da $f_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ per ogni $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{6}$ Sia $f : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ definita da $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{e_1}$ per ogni $\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{C})$.

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.

(b) Si trovino il nucleo $\mathrm{N}(f)$ e l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ di f.

$\boxed{7}$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ definita da:

$$f\Big(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(a) Si provi che f è un'applicazione lineare.

(b) Si determini la matrice $\mathbf{A}$ associata ad f rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

su dominio e codominio rispettivamente.

$\boxed{8}$ Siano

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dopo aver provato che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ordinate di $\mathbb{R}^3$, si calcolino le matrici di passaggio

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \text{ (da } \mathcal{B}' \text{ a } \mathcal{B}\text{) e } \mathbf{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \text{ (da } \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{B}'\text{).}$$

$\boxed{9}$ Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Si provi che $\|\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_1$ se e solo se $\mathbf{v}$ è un multiplo di una colonna di $\mathbf{I_n}$.

$\boxed{10}$ Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matrice complessa quadrata di ordine n tale che $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^2$ e siano $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots \ldots, \mathbf{b_n} \in \mathbb{C}^n$ le colonne di $\mathbf{A}$. Si provi che $\|\mathbf{b_i}\|_2^2 = a_{ii}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

$\boxed{11}$ Sapendo che la posizione $(\cdot|\cdot) : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$

$$\Big(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \,|\, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \Big) = \sum_{i=1}^{4} \overline{a_i} b_i.$$

definisce un prodotto interno, si consideri la norma $\|\cdot\| : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ da esso indotta. Si trovino tutte le matrici complesse scalari $\mathbf{A}$ di ordine 2 tali che $\|\mathbf{A}\| = 2\sqrt{2}$.