Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

ESERCIZIO TIPO 2

Risolvere il sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nei tre seguenti casi:

$$(a) : \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(b) : \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$(c) : \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 0 \\ 1 & 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 3 & 7 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è dominante, allora $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$, e quindi anche $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, non ha soluzioni.
(Infatti: il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 0 \\ \qquad\qquad x_3 & = -1 \\ \qquad\qquad 0 & = 1 \end{cases},$$

e poichè l'ultima equazione di $(*)$ non ha soluzioni, $(*)$ non ha soluzioni).

(b) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mid & \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & \mid & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \mid & 2 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & \mid & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & \mid & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \mid & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & \mid & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{U} & \mid & \mathbf{d}\end{pmatrix}.$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 & = -1 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 & = 1 \end{cases}.$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.
Poichè $\mathbf{U}$ ha esattamente due colonne libere (la 2^a e la 4^a), $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha ∞^2 soluzioni.
Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ e con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -2x_4 + 1 = -2k + 1 \\ x_1 = -3x_2 + 2x_3 - x_4 - 1 = -3h + 2 \times (-2k+1) - k - 1 = -3h - 5k + 1 \end{cases}$$

Dunque l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3h - 5k + 1 \\ h \\ -2k + 1 \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(c) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mid & \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 2 \\ 1 & 3 & 2 & \mid & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \mid & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_1(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{U} & \mid & \mathbf{d}\end{pmatrix}$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, che è una scrittura compatta per

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 0 \\ x_2 + x_3 & = 0 \\ x_3 & = 2 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.
Poichè $\mathbf{U}$ non ha colonne libere, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ha esattamente una soluzione.
Con la sostituzione all'indietro otteniamo:

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = -x_3 = -2 \\ x_1 = -2x_2 - x_3 = -2 \times (-2) - 2 = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione di $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$, e quindi anche di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, è il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.