Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

ESERCIZIO TIPO 16

Sia

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -2i\alpha & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ dove } \alpha \text{ è un numero reale } \textbf{non negativo}.$$

(a) Per quali α **reali non negativi** la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile ?

(b) Per quali α **reali non negativi** la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ è unitariamente diagonalizzabile ?

(c) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(1)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 1$. Si trovi una diagonalizzazione unitaria $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$ per $\mathbf{A}$.

(d) Sia $\mathbf{A} = \mathbf{A}(1)$ la matrice che si ottiene ponendo $\alpha = 1$. Si scriva $\mathbf{A}$ nella forma $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2$, con λ_1 e λ_2 autovalori di $\mathbf{A}$, e $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ matrici di proiezione su $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1)$ ed $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)$ rispettivamente.

(a) Una matrice è diagonalizzabile se e solo se ciascun suo autovalore ha le due molteplicità, algebrica e geometrica, uguali tra loro. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ e le loro molteplicità.

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(x) &= \mathrm{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_3) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & -2i\alpha & 0 \\ 2i & -x & 0 \\ 3i & 0 & -2-x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3}(-2-x)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & -2i\alpha \\ 2i & -x \end{pmatrix} = \\ &= (-2-x)[(-x)^2 - (-2i\alpha)\cdot 2i] = \\ &= (-2-x)(x^2 + 4i^2\alpha) = \\ &= (-2-x)(x^2 - 4\alpha) = \\ &= (-2-x)(-2\sqrt{\alpha} - x)(2\sqrt{\alpha} - x). \end{aligned}$$

Qundi gli autovalori di $\mathbf{A}(\alpha)$ sono:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2\sqrt{\alpha} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -2\sqrt{\alpha}.$$

Dal momento che α è un numero reale non negativo, allora

$$\lambda_1 \neq \lambda_2,$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 1,$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 0.$$

matrice	**autovalori**	**molteplicità algebriche**	**molteplicità geometriche**
$\mathbf{A}(\alpha)$ $\alpha \notin \{0,1\}$	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 2\sqrt{\alpha}$ $\lambda_3 = -2\sqrt{\alpha}$	$m_1 = 1$ $m_2 = 1$ $m_3 = 1$	$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 1$
$\mathbf{A}(0)$	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 0$	$m_1 = 1$ $m_2 = 2$	$d_1 = 1$ $1 \leq d_2 \leq 2$
$\mathbf{A}(1)$	$\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 2$	$m_1 = 2$ $m_2 = 1$	$1 \leq d_1 \leq 2$ $d_2 = 1$

Quindi se $\alpha \notin \{0,1\}$ allora $\mathbf{A}(\alpha)$ è diagonalizzabile, inoltre:

$$\mathbf{A}(0) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \Longleftrightarrow \quad d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = m_2 = 2,$$

$$\mathbf{A}(1) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \Longleftrightarrow \quad d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(-2)) = m_1 = 2.$$

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = \dim(N(\mathbf{A}(0)) = \\
&= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(0)] - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(0)) = \\
&= 3 - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(0)) \\
d_1 &= \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(-2)) = \dim(N(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3) = \\
&= [\text{numero di colonne di } \mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3] - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3) = \\
&= 3 - \mathrm{rk}(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3)
\end{aligned}
$$

Da una E.G. su $\mathbf{A}(0)$:

$$
\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{2})E_{23}E_1(-\frac{1}{2}i)E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

per cui $\mathrm{rk}(\mathbf{A}(0)) = 2$, e quindi

$$
d_2 = \dim(E_{\mathbf{A}(0)}(0)) = 3 - 2 = 1.
$$

Dunque $\mathbf{A}(0)$ non è diagonalizzabile.

Da una E.G. su $\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3$:

$$
\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2i)E_1(\frac{1}{2})}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

per cui $\mathrm{rk}(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3) = 1$, e quindi

$$
d_1 = \dim(E_{\mathbf{A}(1)}(-2)) = 3 - 1 = 2.
$$

Dunque $\mathbf{A}(1)$ è diagonalizzabile.

In conclusione (essendo α reale non negativo):

$$
\mathbf{A}(\alpha) \quad \text{è diagonalizzabile} \quad \iff \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ con } \alpha > 0.
$$

(b) Abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile} \quad &\iff \quad \mathbf{A}(\alpha) \text{ è normale}\\ &\iff \quad \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha).\end{aligned}$$

Calcoliamo $\mathbf{A}(\alpha)^H$ tenendo conto che $\overline{\alpha} = \alpha$, essendo $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} 0 & \overline{2i} & 0 \\ \overline{-2i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i\overline{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^H = \begin{pmatrix} 0 & -2i\alpha & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\alpha)^H\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2i\alpha & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

per cui, essendo α un numero reale non negativo,

$$\mathbf{A}(\alpha) \text{ è unitariamente diagonalizzabile} \quad \iff \quad \alpha^2 = 1 \quad \iff \quad \alpha = 1.$$

(c) Abbiamo visto che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ha due autovalori:

$$\lambda_1 = -2 \text{ con molteplicità } m_1 = d_1 = 2 \text{ e}$$

$$\lambda_2 = 2 \text{ con molteplicità } m_2 = d_2 = 1.$$

Cerchiamo **basi ortonormali** degli autospazi di $\mathbf{A}$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2) = E_{\mathbf{A}(1)}(-2) = N(\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I}_3),$$

e poichè abbiamo visto che $\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(1) + 2\mathbf{I_3}$, allora

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} ih \\ h \\ k \end{pmatrix} \Big| h, k \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2)$.

N.B.: In questo caso non occorre applicare l'algoritmo di G.S. a $\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}\}$: ${\mathbf{v_1}}^H \mathbf{v_2} = \mathbf{0}$, per cui

$$\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}\} \quad \textbf{è già una base ortogonale di } E_{\mathbf{A}}(-2)$$

Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(-2)$, "normalizziamo" $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$.

$$\|\mathbf{v_1}\|_2 = \sqrt{{\mathbf{v_1}}^H \mathbf{v_1}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{v_2}\|_2 = \sqrt{{\mathbf{v_2}}^H \mathbf{v_2}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

per cui

$$\Big\{ \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} ; \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2)$.

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2) = E_{\mathbf{A}(1)}(2) = N(\mathbf{A}(1) - 2\mathbf{I_3}).$$

Da una E.G. su $\quad \mathbf{A}(1) - 2\mathbf{I_3} \quad$:

$$\mathbf{A}(1) - 2\mathbf{I_3} = \begin{pmatrix} -2 & -2i & 0 \\ 2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{4})E_{23}E_{21}(-2i)E_1(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2) = N\Big(\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \Big\{ \begin{pmatrix} -ih \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \Big| h \in \mathbb{C} \Big\},$$

e quindi $\Big\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$ è una base di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$.

N.B.: Poichè ha un unico elemento, $\{\mathbf{w_1}\}$ è già una base ortogonale di $E_{\mathbf{A}}(2)$. Per ottenere una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(2)$, "normalizziamo" $\mathbf{w_1}$.

$$\|\mathbf{w_1}\|_2 = \sqrt{\mathbf{w_1}^H \mathbf{w_1}} = \sqrt{\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

per cui

$$\Big\{ \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$.

Dunque se $\alpha = 1$, una diagonalizzazione unitaria di $\mathbf{A} = \mathbf{A}(1)$ è:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H \quad \text{con}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ed}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|_2} & \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|_2} & \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} i & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Abbiamo visto che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ha due autovalori:

$$\lambda_1 = -2 \text{ con molteplicità } m_1 = d_1 = 2 \text{ e}$$

$$\lambda_2 = 2 \text{ con molteplicità } m_2 = d_2 = 1.$$

Dunque

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 = -2\mathbf{P}_1 + 2\mathbf{P}_2$$

dove $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ sono le matrici di proiezione su

$$E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(-2) \quad \text{ed} \quad E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$$

rispettivamente.

Per $i = 1, 2$ si ha:

$\mathbf{P}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i^H$ dove

$\mathbf{Q}_i =$ la matrice che ha per colonne gli elementi di una base ortonormale di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_i)$.

Dal momento che $d_2 = 1$, conviene calcolare $\mathbf{P}_2$ ($\mathbf{Q}_2$ ha un'unica colonna !) e ricavare $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}_3 - \mathbf{P}_2$ **($E_{\mathbf{A}}(\lambda_1) = E_{\mathbf{A}}(\lambda_2)^{\perp}$ perchè A è unitariamente diagonalizzabie ed ha esattamente due autovalori distinti: λ_1 e λ_2).**

Abbiamo visto che

$$\left\{ \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una **base ortonormale** di $E_{\mathbf{A}}(\lambda_2) = E_{\mathbf{A}}(2)$.

Dunque $\mathbf{Q}_2 = \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, per cui

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_2^H = \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{w_1}^H}{\|\mathbf{w_1}\|_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} i & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}_3 - \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$