LEZIONE 39

G. PARMEGGIANI 14/5/2021

CODICE: 683242

AUTOVALORI, AUTOVETTORI, AUTOSPAZI DI UNA MATRICE

D'ora in poi supponiamo A $n \times n$

$A \in M_n(K)$, dove $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

L'applicazione lineare indotta da A è $f_A : K^n \to K^n$

$$\underline{v} \mapsto A\underline{v}$$

SE A E' UNA MATRICE SCALARE: $A = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I_n$

ALLORA $A\underline{v} = (\lambda I_n)\underline{v} = \lambda (I_n \underline{v}) = \lambda \underline{v}$

se $A = \lambda I_n$ allora f_A è la moltiplicazione per lo scalare λ:

$$f_A(\underline{v}) = A\underline{v} = \lambda \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in K^n$$

$$\boxed{\text{PROBLEMA: se } A \text{ è una QUALUNQUE matrice } n \times n \quad \overset{?}{\exists}\ \underline{v} \neq \underline{0} \text{ per cui } A\underline{v} = \lambda \underline{v} \text{ per un opportuno } \lambda \in K\ ?}$$

N.B $\underline{v} = \underline{0}$ $\qquad A\underline{0} = \lambda \cdot \underline{0}$ qualunque sia λ

Def Uno SCALARE $\lambda \in K$ tale che esista $\underline{v} \in K^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$! per cui $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$ si dice un AUTOVALORE di A

Def L'insieme di tutti gli autovalori di A si dice LO SPETTRO di A e si indica con Spec(A)

NOTAZIONI

$K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$A \in M_n(K)$

$\mu \in K$

$$E_A(\mu) = \{\underline{v} \in K^n \mid A\underline{v} = \mu \underline{v}\}$$

QUINDI SE $E_A(\mu) = \{\underline{0}\}$ ALLORA μ NON È un autovalore di A

INVECE SE $E_A(\mu) \neq \{\underline{0}\}$ ALLORA μ È un autovalore di A

Sia λ un autovalore di A

$$E_A(\lambda) = \{\underline{v} \in K^n \mid A\underline{v} = \lambda\underline{v}\} = \{\underline{v} \in K^n \mid A\underline{v} - \lambda\underline{v} = \underline{0}\}$$

$$= \{\underline{v} \in K^n \mid A\underline{v} - \lambda I_n \underline{v} = \underline{0}\} = \{\underline{v} \in K^n \mid (A - \lambda I_n)\underline{v} = \underline{0}\}$$

$$= N(A - \lambda I_n)$$

Ne segue che

$\boxed{1}$ $E_A(\lambda)$ È UN SOTTOSPAZIO DI K^n. Si chiama L'AUTOSPAZIO DI A RELATIVO ALL'AUTOVALORE λ

2. $E_A(\lambda) \neq \{\underline{0}\}$ (sto supponendo λ sia un autovalore di A)

Ogni elemento <u>NON NULLO</u> di $E_A(\lambda)$ si chiama <u>UN AUTOVETTORE DI A RELATIVO ALL'AUTOVALORE λ</u>

3. $\dim E_A(\lambda) = d(\lambda) =$ <u>LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA</u> DELL'AUTOVALORE λ (come autovalore di A)

$$d(\lambda) = \dim E_A(\lambda) = \dim N(A - \lambda I_n) = \begin{pmatrix} \text{numero delle} \\ \text{colonne di} \\ A - \lambda I_n \end{pmatrix} - rk(A - \lambda I_n) =$$

$E_A(\lambda) = N(A - \lambda I_n)$

$$\boxed{d(\lambda) = n - rk(A - \lambda I_n)}$$

CALCOLO DEGLI AUTOVALORI

A $n \times n$

def. di autovalore

$E_A(\lambda) = N(A - \lambda I_n)$

$\boxed{\lambda \text{ è un autovalore di } A} \iff E_A(\lambda) \neq \{\underline{0}\} \iff N(A - \lambda I_n) \neq \{\underline{0}\}$

$\iff \dim N(A - \lambda I_n) \neq 0 \iff$

$\iff n - rk(A - \lambda I_n) \neq 0$

$\iff rk(\underbrace{A - \lambda I_n}_{n \times n}) \underset{\neq}{<} n$

$\iff A - \lambda I_n$ non ha inversa

$\iff \boxed{\det(A - \lambda I_n) = 0}$

V sp. vett.

$U = \{\underline{0}\} \iff \dim U = 0$

$U \neq \{\underline{0}\} \iff \dim U \neq 0$

$V \rightsquigarrow K^n$

$U \rightsquigarrow N(A - \lambda I_n)$

$\dim N(A - \lambda I_n) = n - rk(A - \lambda I_n)$

Dunque gli AUTOVALORI DI A SONO LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE:

$$\det(A - x I_n) = 0$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA DI A

Ora tutte le radici (gli zeri) del polinomio

$$P_A(x) = \det(A - x I_n)$$

IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI A

(x è una indeterminata)
INDETERMINATA

ESEMPIO $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{Spec} A = ?$

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(x) = \det(A - xI_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} \right) =$$

$$= (-x)(-x) - (-1) \cdot 1 = x^2 + 1$$

Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 + 1 = 0$$

$\lambda_1 = i \quad e \quad \lambda_2 = -i \quad$ per cui $\quad \operatorname{Spec} A = \{i, -i\}$

A è un esempio di una matrice reale i cui autovalori non sono numeri reali

PROPRIETÀ DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

Siano $A = [a_{ij}]$, $n \times n$, $n \geq 2$ e

$p_A(x) = \det(A - x I_n)$ il polinomio caratteristico di A.

Allora

$\boxed{1}$ $\deg p_A(x) = n$

$\boxed{2}$ il coefficiente di x^n è $(-1)^n$

$\boxed{3}$ il coefficiente di x^{n-1} è

$$(-1)^{n-1}\left(\underbrace{a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}}_{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}\right)$$

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ = LA TRACCIA DI A $= Tr(A)$

quindi il coefficiente di x^{n-1} di $p_A(x)$ è $(-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A)$

$\boxed{4}$ il termine noto di $p_A(x)$ è $\det A$

Tornando al nostro esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad p_A(x) = x^2+1 = x^2 + 0\cdot x + 1 = (x-i)(x+i)$$

$1 = \det A$

$x^{n-1} = x^{2-1} = x$

$0 = (-1)^1\,\mathrm{Tr}\,A$

> **NB.** Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra ogni polinomio a coefficienti complessi si fattorizza in fattori lineari.

Quindi se $\mathrm{Spec}\,A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$

(quindi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ SONO AUTOVALORI DISTINTI)

$$p_A(x) = c\,(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots\cdots(x-\lambda_k)^{m_k} =$$

costante

$c = (-1)^n$

$$= \boxed{(-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots\cdots(x-\lambda_k)^{m_k} = p_A(x)}$$

$\boxed{\mathrm{I}}$ $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$

$\boxed{\mathrm{II}}$ m_i = LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DELL'AUTOVALORE λ_i

Nel nostro esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad p_A(x) = x^2+1 = (-1)^2 (\underbrace{x-i}_{m_1=1})(\underbrace{x+i}_{m_2=1})$$

$\lambda_1 = i$ $\quad k=2=n \quad$ $m_1 = 1$

$\lambda_2 = -i$ $\quad\quad\quad\quad$ $m_2 = 1$

$d_1 = \dim E_A(i) = \dim N(A - iI_2) \dots$

$d_2 = \dim E_A(-i) = \dim N(A + iI_2) \dots$

TEOREMA Siano A $n\times n$ e λ un autovalore di A

se $d(\lambda)$ = la molteplicità geometrica di λ

e $m(\lambda)$ = la molteplicità algebrica di λ

si ha $\boxed{1 \leq d(\lambda) \leq m(\lambda)}$

AUTOVALORI DI MATRICI TRIANGOLARI

Sia T una matrice triangolare superiore (oppure triangolare inferiore)

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t_{nn} \end{bmatrix} \qquad \operatorname{Spec} T = ?$$

$$P_T(x) = \det(T - x I_n) = \det\left(\begin{bmatrix} t_{11}-x & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22}-x & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t_{nn}-x \end{bmatrix}\right)$$

$$= (t_{11}-x)(t_{22}-x)\cdots(t_{nn}-x)$$

Gli autovalori di T sono le soluzioni dell'equazione $P_T(x)=0$

$(t_{11}-x)(t_{22}-x)\cdots(t_{nn}-x)=0$ cioè: $t_{11}, t_{22}, \ldots, t_{nn}$

In particolare:

$$\boxed{\text{GLI AUTOVALORI DI UNA MATRICE DIAGONALE } D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \; d_n \end{bmatrix} \text{ sono: } d_1, d_2, \ldots, d_n}$$

INIZIO L'ESERCIZIO TIPO 14: Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3i \\ 0 & 3 & 0 \\ 3i & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Spec $A = ?$

$$P_A(x) = \det\left(\begin{bmatrix} -x & 0 & -3i \\ \boxed{0 \quad 3-x \quad 0} \\ 3i & 0 & -x \end{bmatrix}\right) = \cancel{(-1)^{2+2}}(3-x) \det\begin{pmatrix} -x & -3i \\ 3i & -x \end{pmatrix} =$$

$$= (3-x)\left[(-x)^2 - (-3i)3i\right] = (3-x)\left[x^2 + 9i^2\right] = (3-x)(x^2-9)$$

$$= (3-x)(x+3)(x-3) = -(x+3)(x-3)^2$$

$\lambda_1 = -3 \quad m_1 = 1$

$\lambda_2 = 3 \quad m_2 = 2$