G. Parmeggiani

Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: Informatica

Svolgimento degli Esercizi per casa 3 (1^a parte)

$\boxed{1}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
Si calcoli $\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C}$.

$$4\mathbf{C} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 2 + 2\times 0 & 4\times 1 + 2\times 1 \\ 1\times 2 + 0\times 0 & 1\times 1 + 0\times 1 \\ (-1)\times 2 + (-2)\times 0 & (-1)\times 1 + (-2)\times 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 8+0 & 4+2 \\ 2+0 & 1+0 \\ -2+0 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-2\mathbf{A} = -2\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -2 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{DC} - 2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -2 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2\times(-4) + 1\times 0 + 0\times(-6) & 2\times 6 + 1\times 7 + 0\times 1 \\ 4\times(-4) - 2\times 0 - 3\times(-6) & 4\times 6 - 2\times 7 - 3\times 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -8+0+0 & 12+7+0 \\ -16+0+18 & 24-14-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 19 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{DC} - 2\mathbf{A}) + 4\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -8 & 19 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 23 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Si trovino tutte le matrici reali $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tali che $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

(b) Si trovino tutte le matrici reali 2×2 $\mathbf{C}$ tali che $\mathbf{AC} = \mathbf{O}$.

(a) Poichè

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} \qquad \text{e} \\ \mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x+y \\ z+t & z+t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

la condizione $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ equivale a $\begin{cases} x+z = x+y \\ y+t = x+y \\ x+z = z+t \\ y+t = z+t \end{cases}$, ossia a $\begin{cases} z = y \\ \\ t = x \end{cases}$

Dunque le matrici reali 2×2 $\mathbf{B}$ tali che $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, \qquad \text{dove} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

(b) Siano $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Poichè

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix}$$

la condizione $\mathbf{AC} = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ equivale a $\begin{cases} x+z = 0 \\ \\ y+t = 0 \end{cases}$ ossia $\begin{cases} z = -x \\ \\ t = -y \end{cases}$

Dunque le matrici reali 2×2 $\mathbf{C}$ tali che $\mathbf{AC} = \mathbf{O}$ sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix}, \qquad \text{dove} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{3}$ Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7+i & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Di ciascuna delle precedenti matrici si calcolino la trasposta, la coniugata e la H-trasposta.

(b) Si calcoli $(\mathbf{A}^H \overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H$.

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2-3i & 0 & 1-i \\ 1+i & i & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2+3i & 1-i \\ 0 & -i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}^H = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 3+5i & 6 & 2-2i \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}^H = \begin{pmatrix} 3-5i & 6 & 2+2i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 7+i & 3-2i \\ 2+3i & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 7-i & 2-3i \\ 3+2i & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}^H = \begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^H\overline{\mathbf{C}} + i\mathbf{B}^T)\overline{\mathbf{B}} + (1+3i)\mathbf{D}^H =$$

$$= (\begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1+i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-5i \\ 6 \\ 2+2i \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + (1+3i) \begin{pmatrix} 7-i & 3+2i \\ 2-3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\begin{pmatrix} (2+3i)(3-5i) + (1+i)(2+2i) \\ (1-i)(3-5i) - 6i + 2 + 2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ i(1+i) \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1+3i)(7-i) & (1+3i)(3+2i) \\ (1+3i)(2-3i) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6+9i-10i+15+2+2i+2i-2 \\ 3-3i-5i-5-6i+2+2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7+21i-i+3 & 3+9i+2i-6 \\ 2+6i-3i+9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (\begin{pmatrix} 21+3i \\ -12i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ -1+i \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21+5i \\ -1-11i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(21+5i) & (21+5i)(1-i) \\ 2(-1-11i) & (-1-11i)(1-i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 21+5i-21i+5 \\ -2-22i & -1-11i+i-11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 42+10i & 26-16i \\ -2-22i & -12-10i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10+20i & -3+11i \\ 11+3i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52+30i & 23-5i \\ 9-19i & -12-10i \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Si trovino forme ridotte di Gauss per le seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_{21}(-3)E_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(3)E_2(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_1}$$

ed $\mathbf{U_1}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}$.
Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{B}$ si ottiene:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-4)E_{21}(2)E_1(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{20})E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U_2}$$

ed $\mathbf{U_2}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{B}$.
Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{w}^T$ si ottiene:

$$\mathbf{w}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(1/4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} = \mathbf{z}^T$$

e $\mathbf{z}^T$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{w}^T$.
Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{v}$ si ottiene:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)E_1(1/7)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}$$

ed $\mathbf{u}$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{v}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sia $\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovi una forma ridotta di Gauss $\mathbf{U}(\alpha)$ per $\mathbf{A}(\alpha)$ e si dica quali sono le colonne dominanti e quali sono le colonne libere di $\mathbf{U}(\alpha)$.

Facciamo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{a}(\alpha)$:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i & 2i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 2 & 2\alpha^2+8 & 0 & 4\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2i})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2+8 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\alpha)$$

$\boxed{1^o CASO}$ $\alpha^2+4 \neq 0$ ossia $\alpha \neq 2i$ ed $\alpha \neq -2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2+8 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2\alpha^2-8)E_2(\frac{1}{\alpha^2+4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{C}(\alpha)$$

$\boxed{1^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\quad \alpha \neq 2i, \quad \alpha \neq -2i, \quad \alpha \neq 0$

$$\mathbf{C}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(1/2\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1/(\alpha^2+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 2^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 3^a.

$\boxed{2^o \quad \text{sottocaso del} \quad 1^0 \quad \text{caso}}$ $\quad \alpha = 0 \qquad \mathbf{C}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$\mathbf{U}(0)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(0)$, le colonne dominanti sono la 1^a e la 2^a, quelle libere la 3^a e la 4^a.

$\boxed{2^o CASO}$ $\quad \alpha^2 + 4 = 0$ ossia $\alpha = 2i$ oppure $\alpha = -2i$.

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3(1/2\alpha) \quad (\alpha \neq 0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}(\alpha)$$

$\mathbf{U}(\alpha)$ è una forma ridotta di Gauss per $\mathbf{A}(\alpha)$, le colonne dominanti sono la 1^a, la 3^a e la 4^a, l'unica colonna libera è la 2^a.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Si risolva il sistema lineare $\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nei seguenti casi:

$$(a) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$(b) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$(c) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mid & \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 & \mid & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & \mid & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & \mid & 2 \\ -2 & 2 & -6 & -4 & \mid & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(2)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \mid & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{U} & \mid & \mathbf{d}\end{pmatrix}.$$

Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad\qquad x_3 + \frac{1}{2}x_4 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.
Poichè $\mathbf{U}$ ha esattamente due colonne libere, $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ ha ∞^2 soluzioni.
Scegliamo come parametri le variabili corrispondenti alle colonne libere di $\mathbf{U}$ (la 2^a e la 4^a) e con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = h \\ x_4 = k \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = h - 3(-\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}) - 2k + 2 = h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{d}$ (e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$) è

$$\left\{ \begin{pmatrix} h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ h \\ -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} | h, k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(b) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mid & \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 & \mid & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 4 & \mid & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & \mid & 3 \\ -2 & 2 & -6 & -4 & \mid & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(2)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \mid & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{U} & \mid & \mathbf{d}\end{pmatrix}.$$

Il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$.
Poichè $\mathbf{d}$ è dominante, allora $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ e quindi $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, non ha soluzioni.

(c) Troviamo una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata del sistema.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mid & \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 & 6 & \mid & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 4 & \mid & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 & \mid & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & \mid & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & \mid & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \mid & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(2)E_3(\frac{1}{2})}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \mid & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & \mid & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mid & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{U} & \mid & \mathbf{d}\end{pmatrix}.$$

Il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è equivalente al sistema $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ che è una forma compatta per

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \quad x_2 + 4x_3 + 2x_4 & = 2 \\ \qquad x_3 & = 1 \\ \qquad\quad x_4 & = 3 \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera, $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ ammette soluzioni.
Poichè $\mathbf{U}$ non ha colonne libere, $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$ ha esattamente una soluzione.
Con la sostituzione all'indietro da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} x_4 = 3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = -4x_3 - 2x_4 + 2 = -8 \\ x_1 = x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2 = -15 \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione di $\mathbf{U}\ \mathbf{x} = \mathbf{d}$, e quindi anche di $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, è il vettore $\begin{pmatrix} -15 \\ -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.