Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: Informatica

Svolgimento degli Esercizi per casa 7

$\boxed{1}$ Si provi che l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine n è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{C})$ e che l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n non lo è.

Sia $W_1 = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$ l'insieme delle matrici simmetriche (complesse) di ordine n.

(i) $\quad \mathbf{O}_{n\times n} \in W_1$: $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}$

(ii) $\quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in W_1 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \\ \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \\ \\ \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W_1$$

(iii) $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W_1 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \\ \mathbf{A} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha\mathbf{A} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \alpha\mathbf{A} \in W_1$$

Sia $W_2 = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{A}^H = -\mathbf{A}\}$ l'insieme delle matrici anti-hermitiane (complesse) di ordine n.

(i) $\quad \mathbf{O}_{n\times n} \in W_2$: $\mathbf{O}^H = \mathbf{O} = -\mathbf{O}$

(ii) $\quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in W_2 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W_2$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \\ \mathbf{B} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A}^H = -\mathbf{A} \\ \\ \mathbf{B} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{B}^H = -\mathbf{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H = -\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = -(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \quad \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W_2$

$(iii) \quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W_2 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W_2$

$$\mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\mathbf{A} \in W_2 \Longrightarrow \mathbf{A}^H = -\mathbf{A} \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^H = \overline{\alpha}\mathbf{A}^H = \overline{\alpha}(-\mathbf{A}) = -\overline{\alpha}\mathbf{A}$$

Non è vero che $\alpha\mathbf{A} \in W_2$ **per ogni scalare** α **ed ogni** $\mathbf{A} \in W_2$:

prendendo $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$si ottiene che

$$\overline{\alpha}\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{poichè } \mathbf{A} \neq \mathbf{O}}}}{\Longleftrightarrow} \quad \overline{\alpha} = \alpha \iff \alpha \in \mathbb{R}$$

Quindi se $\mathbf{O} \neq \mathbf{A} \in W_2$ e $\alpha \notin \mathbb{R}$ (ad esempio se $\mathbf{A}$ è la matrice $n \times n$ con 1 al posto $(1,n)$, -1 al posto $(n,1)$ e 0 altrove, ed $\alpha = i$) allora $\alpha\mathbf{A} \notin W_2$.

Dunque W_2 non è un sottospazio dello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ è un suo sottospazio:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big| x - 2y = 0 \right\};$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big| x^2 - 2y = 0 \right\};$$

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big| x - 2y = 1 \right\}.$$

• Per vedere se W_1 è o non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:
(i) $\mathbf{0} \in W_1$,
(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W_1$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in W_1$ per ogni $\mathbf{u} \in W_1$ ed ogni scalare α.

(i) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$ perchè $0 - 2 \cdot 0 = 0$.

(ii) Se $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W_1$, allora

$$\begin{cases} x_1 - 2y_1 = 0 \\ x_2 - 2y_2 = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza

$$(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)=(x_1-2y_1)+(x_2-2y_2)=0+0=0,$$

e quindi $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ y_1+y_2\end{pmatrix}\in W_1$.

(iii) Se $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in W_1$, allora $x-2y=0$. Ne segue che per ogni scalare $\alpha\in\mathbb{R}$ si ha

$$\alpha x-2\alpha y=\alpha(x-2y)=\alpha\cdot 0=0,$$

e quindi $\alpha\mathbf{u}=\alpha\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x\\ \alpha y\end{pmatrix}\in W_1$.

Dunque W_1 è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

• Per vedere se W_2 è o non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0}\in W_2$,
(ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in W_2$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W_2$,
(iii) $\alpha\mathbf{u}\in W_2$ per ogni $\mathbf{u}\in W_2$ ed ogni scalare α.

(i) $\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\in W_2$ perchè $0^2-2\cdot 0=0$.

(ii) Se $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}\in W_2$, allora

$$(*)\qquad \begin{cases}x_1^2-2y_1=0\\ x_2^2-2y_2=0\end{cases}$$

Perchè $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ y_1+y_2\end{pmatrix}$ appartenga a W_2 occorre che sia soddisfatta la condizione:

$$(**)\qquad (x_1+x_2)^2-2(y_1+y_2)=0.$$

Da $(*)$ segue

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)^2-2(y_1+y_2)&=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2(y_1+y_2)=\\ &=(x_1^2-2y_1)+(x_2^2-2y_2)+2x_1x_2 \overset{(*)}{=} 2x_1x_2,\end{aligned}$$

per cui prendendo

$$\begin{cases}x_1\neq 0\\ x_2\neq 0\\ y_1=\frac{x_1^2}{2}\\ y_2=\frac{x_2^2}{2}\end{cases}$$

si ha che $(*)$ è soddisfatta, ma $(**)$ no, ossia $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}\in W_2$, ma $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ y_1+y_2\end{pmatrix}\notin W_2$ (ad esempio, con $\mathbf{u}=\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\in W_2$ si ha che

$2\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_2$). Quindi W_2, non soddisfacendo la condizione (ii), non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

• Per vedere se W_3 è o non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in W_3$,
(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_3$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_3$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in W_3$ per ogni $\mathbf{u} \in W_3$ ed ogni scalare α.

(i) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_3$ perchè $0 - 2 \cdot 0 = 0 \neq 1$.

Dunque W_3, non soddisfacendo la condizione (i), non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sia $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$. Si provi che i tre seguenti sottoinsiemi di $M_n(\mathbb{C})$ sono sottospazi vettoriali di $M_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\}; \\ W_2 &= \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} \text{ è una matrice scalare}\}; \\ W_3 &= \{\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) | \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T\}. \end{aligned}$$

W_1 è un sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$:

(i) $\quad \mathbf{O}_{n\times n} \in W_1$: $\mathbf{O}_{n\times n} \in M_n(\mathbb{C})$ e $\mathbf{AO} = \mathbf{O} = \mathbf{OA}$.

(ii) $\quad \mathbf{B}, \mathbf{C} \in W_1 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{B} + \mathbf{C} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \\ \mathbf{C} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{B} + \mathbf{C} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \\ \\ \mathbf{C} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{AC} = \mathbf{CA} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA} = (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \quad \mathbf{B} + \mathbf{C} \in W_1$

(iii) $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{B} \in W_1 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{B} \in W_1$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \\ \\ \mathbf{B} \in W_1 \Longrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \Longrightarrow \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB}) = \alpha(\mathbf{BA}) = (\alpha\mathbf{B})\mathbf{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\mathbf{B} \in W_1$$

W_2 è un sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$: poichè

$$\mathbf{B} \in W_2 \iff \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \text{ ed } \exists \delta_{\mathbf{B}} \in \mathbb{C} | \mathbf{AB} = \delta_{\mathbf{B}} \mathbf{I}_{\boldsymbol{n}},$$

e poichè $M_n(\mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale (per cui la somma di due matrici di ordine n ed il prodotto di una matrice di ordine n per uno scalare sono matrici di ordine n) è sufficiente verificare che

(i) $\mathbf{A}\mathbf{O}_{n\times n} = \mathbf{O} = 0\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$ per cui esiste $\delta_{\mathbf{O}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{A}\mathbf{O} = \delta_{\mathbf{O}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$ (si prenda $\delta_{\mathbf{O}} = 0$).

(ii) Se $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ sono matrici di ordine n tali che esistano $\delta_{\mathbf{B}}, \delta_{\mathbf{C}} \in \mathbb{C}$ per cui $\mathbf{A}\mathbf{B} = \delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$ e $\mathbf{A}\mathbf{C} = \delta_{\mathbf{C}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$, allora

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C} = \delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}} + \delta_{\mathbf{C}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}} = (\delta_{\mathbf{B}} + \delta_{\mathbf{C}})\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}.$$

Quindi esiste $\delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$: si prenda $\delta_{\mathbf{B}+\mathbf{C}} = \delta_{\mathbf{B}} + \delta_{\mathbf{C}}$.

(iii) Se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{B}$ è una matrice di ordine n per cui esista $\delta_{\mathbf{B}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{A}\mathbf{B} = \delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$, allora

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \alpha(\delta_{\mathbf{B}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}) = (\alpha\delta_{\mathbf{B}})\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}.$$

Quindi esiste $\delta_{\alpha\mathbf{B}} \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \delta_{\alpha\mathbf{B}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$: si prenda $\delta_{\alpha\mathbf{B}} = \alpha\delta_{\mathbf{B}}$.

W_3 è un sottospazio di $M_n(\mathbb{C})$:

(i) $\mathbf{O}_{n\times n} \in W_3$: $\mathbf{O}_{n\times n} \in M_n(\mathbb{C})$ e$\mathbf{A}\mathbf{O} = \mathbf{O} = \mathbf{O}^T$.

(ii) $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in W_3 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \mathbf{B}+\mathbf{C} \in W_3$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathbf{B}\in W_3 \Longrightarrow \mathbf{B}\in M_n(\mathbb{C}) \\[2ex] \mathbf{C}\in W_3 \Longrightarrow \mathbf{C}\in M_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{B}+\mathbf{C}\in M_n(\mathbb{C}) \\[4ex] \left.\begin{array}{l} \mathbf{B}\in W_3 \Longrightarrow \mathbf{A}\mathbf{B}=\mathbf{B}^T \\[2ex] \mathbf{C}\in W_3 \Longrightarrow \mathbf{A}\mathbf{C}=\mathbf{C}^T \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{B}^T+\mathbf{C}^T = (\mathbf{B}+\mathbf{C})^T \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \quad \mathbf{B}+\mathbf{C} \in W_3$

(iii) $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{B} \in W_3 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{B} \in W_3$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{B}\in W_3 \Longrightarrow \mathbf{B}\in M_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{B}\in M_n(\mathbb{C}) \qquad\qquad \\[2ex] \mathbf{B}\in W_3 \Longrightarrow \mathbf{A}\mathbf{B}=\mathbf{B}^T \Longrightarrow \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{B}^T = (\alpha\mathbf{B})^T \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha\mathbf{B}\in W_3$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sia $V = \mathbb{R}^2$ (sp. vett. reale). Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio vettoriale di V:

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\mathcal{S}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 \\ a+1 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}.$$

• $\mathcal{S}_1$ è un sottospazio vettoriale di V: l'unico elemento di $\mathcal{S}_1$ è il vettore $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathcal{S}_1$ e $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathcal{S}_1$ per ogni scalare α ($\mathcal{S}_1$ è il sottospazio nullo di $\mathbb{R}^2$).

• $\mathcal{S}_2$ non è un sottospazio di V: contiene $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ma non contiene $\mathbf{e_2} + \mathbf{e_2} = 2\mathbf{e_2}$ (d'altra parte nessun sottoinsieme **finito** di uno spazio vettoriale W che contenga un elemento non nullo $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ può essere un sottospazio di W: se U è un sottospazio di W che contiene $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, allora U deve contenere l'insieme **infinito** di vettori $\{\alpha\mathbf{w} | \alpha \text{ scalare }\}$, per cui U stesso deve essere infinito).

• Per vedere se $\mathcal{S}_3$ è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathcal{S}_3$,
(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{S}_3$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{S}_3$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{S}_3$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_3$ ed ogni scalare α.

(i) esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix}$: si prenda $a = 2$ e $b = 0$, quindi $\mathbf{0} \in \mathcal{S}_3$.

(ii) Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{S}_3$ esistono $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 - 2 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 - 2 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{S}_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad a_3, b_3 \in \mathbb{R} \,|\, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_3 - 2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 - 2 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 - 2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 - 4 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$, basta prendere $a_3 = a_1 + a_2 - 2$ e $b_3 = b_1 + b_2$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c, d \in \mathbb{R} \,|\, \alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c-2 \\ d \end{pmatrix}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} a-2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - 2\alpha \\ \alpha b \end{pmatrix}$, basta prendere $c = \alpha a - 2\alpha + 2$ e $d = \alpha b$.

Dunque $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è un sottospazio di V.

• Per vedere se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ è o non è un sottospazio di V occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$,
(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ per ogni $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ ed ogni scalare α.

(i) Perchè $\mathbf{0}$ appartenga a $\boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ occorre che esista $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ a+1 \end{pmatrix}$. Poichè il sistema

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \\ \\ a + 1 = 0 \end{cases}$$

nell'incognita a non ha soluzioni, allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}_4$ non è un sottospazio di V.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Si dica se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{W}}_1 &= \{i \cdot \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\} \text{ e} \\ \boldsymbol{\mathcal{W}}_2 &= \{2 \cdot \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n\} \end{aligned}$$

sono sottospazi di $\mathbb{C}^n$.

Per vedere se $\boldsymbol{\mathcal{W}}_1$ è o non è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$,
(ii) $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$ per ogni $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$ per ogni $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i) esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{0} = i \cdot \mathbf{v}$: si prenda $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Quindi $\mathbf{0} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$
(ii) Se $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$ esistono $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \mathbb{R}^n$ tali che $\mathbf{u_1} = i \cdot \mathbf{v_1}$ ed $\mathbf{u_2} = i \cdot \mathbf{v_2}$. inoltre

$$\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad \mathbf{v_3} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = i \cdot \mathbf{v_3}.$$

Poichè $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = i \cdot \mathbf{v_1} + i \cdot \mathbf{v_2} = i \cdot (\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})$, basta prendere $\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1$, esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{u} = i \cdot \mathbf{v}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \,|\, \alpha\mathbf{u} = i \cdot \mathbf{w}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \cdot (i \cdot \mathbf{v}) = i \cdot (\alpha \cdot \mathbf{v})$,

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}_1 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{W}_1, \alpha \in \mathbb{C} \qquad \Longleftrightarrow \mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Prendendo ad esempio $\mathbf{v} = \mathbf{e_1} \in \mathbb{R}^n$ ed $\alpha = i \in \mathbb{C}$, si ha che $\alpha\mathbf{v} = i \cdot \mathbf{e_1} \notin \mathbb{R}^n$ (quindi $\mathbf{u} = i \cdot \mathbf{e_1} \in \mathcal{W}_1$ mentre $\alpha\mathbf{u} = i^2 \cdot \mathbf{e_1} = -\mathbf{e_1} \notin \mathcal{W}_1$, non esistendo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ tale che $-\mathbf{e_1} = i \cdot \mathbf{z}$).

Concludendo, $\mathcal{W}_1$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^n$.

Per vedere se $\mathcal{W}_2$ è o non è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ occorre stabilire se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $\mathbf{0} \in \mathcal{W}_2$,
(ii) $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_2$ per ogni $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_2$,
(iii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i) esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ tale che $\mathbf{0} = 2 \cdot \mathbf{v}$: si prenda $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Quindi $\mathbf{0} \in \mathcal{W}_2$.

(ii) Se $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_2$ esistono $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \mathbb{C}^n$ tali che $\mathbf{u_1} = 2 \cdot \mathbf{v_1}$ ed $\mathbf{u_2} = 2 \cdot \mathbf{v_2}$. inoltre

$$\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \in \mathcal{W}_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \quad \mathbf{v_3} \in \mathbb{C}^n \,|\, \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = 2 \cdot \mathbf{v_3}.$$

Poichè $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = 2 \cdot \mathbf{v_1} + 2 \cdot \mathbf{v_2} = 2 \cdot (\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})$, basta prendere $\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$.

(iii) Se $\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2$, esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ tale che $\mathbf{u} = 2 \cdot \mathbf{v}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n \,|\, \alpha\mathbf{u} = 2 \cdot \mathbf{w}.$$

Poichè $\alpha\mathbf{u} = \alpha \cdot (2 \cdot \mathbf{v}) = 2 \cdot (\alpha \cdot \mathbf{v})$,

$$\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}_2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{W}_2, \alpha \in \mathbb{C} \qquad \Longleftrightarrow \mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dal momento che $\mathbb{C}^n$ è uno spazio vettoriale, allora $\alpha\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Concludendo, $\mathcal{W}_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^n$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} |a \in \mathbb{R} \right\}$ l'insieme delle matrici reali anti-simmetriche di ordine 2. Si provi che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$ e si dica quali dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un insieme di generatori per W:

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Proviamo prima che W è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{1^0 \text{ MODO}}$ (i) $\mathbf{O}_{2\times 2} \in W$: $\mathbf{O}_{2\times 2} \in M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbf{O}_{2\times 2}^T = \mathbf{O}_{2\times 2} = -\mathbf{O}_{2\times 2}$

(ii)

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\[2ex] \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R})\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in M_2(\mathbb{R}) \\[6ex] \left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \\[2ex] \mathbf{B} \in W \Longrightarrow \mathbf{B}^T = -\mathbf{B}\end{array}\right\} \Longrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = -\mathbf{A} - \mathbf{B} = -(\mathbf{A}+\mathbf{B})\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$.

(iii) $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in W \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \alpha\mathbf{A} \in W$

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \alpha\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) \\[2ex] \mathbf{A} \in W \Longrightarrow \mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \Longrightarrow (\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T = \alpha(-\mathbf{A}) = -\alpha\mathbf{A}\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \alpha\mathbf{A} \in W$$

$\boxed{2^0 \text{ MODO}}$ (i) esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$: si prenda $a = 0$.

(ii) Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad c \in \mathbb{R} \,|\, \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ -(a+b) & 0 \end{pmatrix},$$

basta prendere $c = a + b$.

(iii) Se $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, inoltre per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\mathbf{A} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad b \in \mathbb{R} \,|\, \alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè
$$\alpha\mathbf{A} = \alpha\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a \\ -\alpha a & 0 \end{pmatrix},$$
basta prendere $b = \alpha a$.

Dunque W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.

Vediamo ora quale tra $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$, $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ e $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è un insieme di generatori di W.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$: Dal momento che ogni elemento di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un elemento di W, per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è o non è un insieme di generatori di W, spazio vettoriale **reale**, occorre stabilire se **per ogni $\mathbf{A} \in W$ esistono** α_1 ed α_2 numeri **reali** tali che
$$\mathbf{A} = \alpha_1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$
Poichè per ogni $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, il problema diventa stabilire se per ogni $a \in \mathbb{R}$ il sistema
$$(*) \qquad \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = a \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = -a \end{cases}$$
nelle incognite **reali** α_1, α_2 ha soluzione. $(*)$ è equivalente all'unica equazione
$$\alpha_1 - 2\alpha_2 = -a$$
che ha soluzioni per ogni $a \in \mathbb{R}$ (si prendano ad esempio $\alpha_2 = 0$ ed $\alpha_1 = -a$).

Dunque $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$: Poichè $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$, allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ non è un insieme di generatori per W.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$: Dal momento che $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in W$, per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è o non è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale **reale** occorre stabilire se **per ogni $\mathbf{A} \in W$ esiste** $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che
$$\mathbf{A} = \alpha\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ -3\alpha & 0 \end{pmatrix}$$
Poichè per ogni $\mathbf{A} \in W$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, il problema diventa

stabilire se per ogni $a \in \mathbb{R}$ il sistema

$$(**) \qquad \begin{cases} 3\alpha = a \\ -3\alpha = -a \end{cases}$$

nell' incognita **reale** α ha soluzione. Poichè $(**)$ ha soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}$ $(\alpha = a/3)$, allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è un insieme di generatori per W come spazio vettoriale reale.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Si dica se

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è o non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ occorre stabilire se per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 == \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 \end{pmatrix}$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ -\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4\alpha_3 = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & a \\ -1 & -4 & 2 & | & b \\ 2 & 8 & -4 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & a \\ 0 & -1 & 3 & | & a+b \\ 0 & 2 & -6 & | & c-2a \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & -3 & | & -a-b \\ 0 & 0 & 0 & | & 2b+c \end{pmatrix}.$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $2b + c \neq 0$ (si prendano ad esempio $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $(*)$ non ha soluzione qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, per cui $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{8}$ Siano $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{e_3} \in \mathbb{R}^3$. Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ l'insieme di vettori $\boldsymbol{\mathcal{S}}\ (x) = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; x \cdot \mathbf{e_3}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}\ (x) = \{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}; x \cdot \mathbf{e_3}\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ se e solo se per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \alpha_3 \mathbf{v_3} + \alpha_4 \cdot x \cdot \mathbf{e_3} = \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 4\alpha_3 + \alpha_4 x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ossia se e solo se il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 = b \\ 4\alpha_3 + \alpha_4 x = c \end{cases}$$

nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ha soluzione **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 2 & 6 & 3 & 0 & | & b \\ 0 & 0 & 4 & x & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 4 & x & | & c \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & x & | & c-4b+8a \end{pmatrix} = \big(\mathbf{B}(\boldsymbol{x}) \quad | \quad \mathbf{c}(\boldsymbol{x})\big)$$

Se $x \neq 0$

$$\big(\mathbf{B}(\boldsymbol{x}) \quad | \quad \mathbf{c}(\boldsymbol{x})\big) \xrightarrow{E_3(\frac{1}{x})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{c-4b+8a}{x} \end{pmatrix} = \big(\mathbf{U}(\boldsymbol{x}) \quad | \quad \mathbf{d}(\boldsymbol{x})\big)$$

Poichè $\mathbf{d}(\boldsymbol{x})$ è libera **per ogni** $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}\ (x)$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Se $x = 0$

$$\big(\mathbf{B}(\mathbf{0}) \quad | \quad \mathbf{c}(\mathbf{0})\big) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & c-4b+8a \end{pmatrix} = \big(\mathbf{U}(\mathbf{0}) \quad | \quad \mathbf{d}(\mathbf{0})\big)$$

Poichè esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{d(0)}$ è dominante (ad esempio si prendano $a = b = 0$ e $c = 1$), allora $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ (0) non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Concludendo, $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ (x) è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ se e solo se $x \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

$$\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \mathbf{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathbf{w_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \right\}.$$

(1) Per stabilire se $\{\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}\}$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente, occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1, α_2, α_3 per cui $\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$ siano $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix},$$

allora $\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se

$$(*) \qquad \begin{cases} 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Il problema diventa quindi stabilire se il sistema $(*)$ (nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) abbia un'unica soluzione (e quindi la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$), oppure no. La matrice aumentata di $(*)$ è: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & | & 0 \\ 4 & 6 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & | & 0 \\ 4 & 6 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Poichè **non tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(*)$ ha ∞ soluzioni. In particolare $(*)$ ha una soluzione non nulla, e quindi $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è **linearmente dipendente** (ad esempio, poichè $(*)$ è equivalente a

$$\begin{cases} \alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = 0 \\ \qquad \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

prendendo $\alpha_3 = 1$ con la sostituzione all'indietro si ottiene

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_1 = -\frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

ossia $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla di $(*)$ e $\mathbf{v_1} - \frac{1}{2}\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla di $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ con coefficienti non tutti nulli).

Abbreviando ...

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)E_2(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{U}.$$

Poichè **non tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è **linearmente dipendente** .

(2) Per stabilire se $\{\mathbf{w_1}; \mathbf{w_2}; \mathbf{w_3}\}$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente, occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1, α_2, α_3 per cui $\alpha_1\mathbf{w_1} + \alpha_2\mathbf{w_2} + \alpha_3\mathbf{w_3} = \mathbf{0}$ siano $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1\mathbf{w_1} + \alpha_2\mathbf{w_2} + \alpha_3\mathbf{w_3} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 \\ 4\alpha_1 - \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

allora $\alpha_1 \mathbf{w_1} + \alpha_2 \mathbf{w_2} + \alpha_3 \mathbf{w_3} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se

$$(**) \qquad \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Facendo un'eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata di $(**)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 4 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $(**)$ ha come unica soluzione la soluzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ossia

$$\alpha_1 \mathbf{w_1} + \alpha_2 \mathbf{w_2} + \alpha_3 \mathbf{w_3} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Quindi $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$ è **linearmente indipendente**.

Abbreviando ...

Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \end{pmatrix}$.

Facendo un'eliminazione di Gauss su $\mathbf{A}$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{4})E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}.$$

Poichè **tutte** le colonne di $\mathbf{U}$ sono **dominanti**, allora $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$ è **linearmente indipendente** .

$\boxed{\mathbf{10}}$ Sia W l'insieme delle matrici anti-simmetriche reali di ordine 2. W è uno spazio vettoriale reale, essendo un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$. Si considerino i suoi sottoinsiemi $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$, $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ e $\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ definiti nell'esercizio 6. Per ciascuno di essi si dica se è linearmente indipendente oppure linearmente dipendente.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$: Per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente, occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1 ed α_2 per cui

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siano $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se

$$(*) \qquad \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Poichè $(*)$ è equivalente all'unica equazione

$$-\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$

che ha una soluzione non nulla (si prenda ad esempio $\alpha_2 = 1$ e con la sostituzione all'indietro si ottiene $\alpha_1 = 2$, per cui $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla di $(*)$ e

$$2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una combinazione lineare nulla degli elementi di $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ con coefficienti non tutti nulli).

Quindi $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1$ è **linearmente dipendente**.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$: $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ **non è un sottoinsieme di** W**.**

La domanda se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ sia o non sia linearmente indipendente ha senso non nello spazio vettoriale W, ma in tutto $M_2(\mathbb{R})$.

Per stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ sia linearmente indipendente o linearmente dipendente (in $M_2(\mathbb{R})$), occorre stabilire se gli unici numeri reali α_1 ed α_2 per cui

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siano $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, oppure no. Poichè, dati α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

Quindi $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2$ è **linearmente indipendente in** $M_2(\mathbb{R})$.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$: Essendo $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, l'unico $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui si abbia

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

è $\alpha = 0$, per cui

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_3$ è **linearmente indipendente**.

$\boxed{\textbf{11}}$ Sia $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$ lo spazio dei polinomi a coefficienti complessi di grado minore od uguale a 2. Si provi che $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{2+x^2; x-x^2; 1+x\}$ è una base di V.

Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è una base di V occorre provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è un insieme di generatori di V e che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è linearmente indipendente (L.I.).
Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}} \subseteq V$ è un insieme di generatori di V occorre provare che per ogni $a + bx + cx^2 \in V$ esistono scalari $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$ tali che

$$a + bx + cx^2 = \alpha(2 + x^2) + \beta(x - x^2) + \delta(1 + x),$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} 2\alpha + \delta = a \\ \beta + \delta = b \\ \alpha - \beta = c \end{cases}$$

nelle incognite α, β e δ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{C}$. Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 1 & -1 & 0 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & | & c - \frac{a}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(1)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & c - \frac{a}{2} + b \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 0 & 1 & | & 2c - a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{C}$, allora $(*)$ ha soluzione per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$, e quindi $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è un insieme di generatori di V.

Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è L.I. occorre provare che l'unica combinazione lineare nulla di suoi elementi ha tutti i coefficienti nulli, ossia che

$$\alpha(2 + x^2) + \beta(x - x^2) + \delta(1 + x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \delta = 0.$$

Da

$$0 = \alpha(2 + x^2) + \beta(x - x^2) + \delta(1 + x) = (2\alpha + \delta) + (\beta + \delta)x + (\alpha - \beta)x^2$$

si ottiene il sistema lineare nelle incognite α, β e δ

$$(**) \qquad \begin{cases} 2\alpha + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

Dal momento che $(**)$ si ottiene da $(*)$ ponendo $a = b = c = 0$, una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata di $(**)$ si ottiene da quella trovata per $(*)$ ponendo $a = b = c = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 0 & 1 & | & 2c - a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Poichè l'ultima colonna di $\begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ è libera, $(**)$ ha soluzioni, e poichè l'ultima colonna di $\begin{pmatrix} \mathbf{U} & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ è nulla, tra le soluzioni di $(**)$ c'è quella nulla (ossia $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$). Inoltre, dal momento che tutte le colonne di $\mathbf{U}$ sono dominanti, $(**)$ ha un'unica soluzione.

Dunque l'unica soluzione di $(**)$ è quella nulla, per cui $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è L.I.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Si provi che

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{ \mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base dello spazio vettoriale V delle matrici complesse triangolari inferiori 2×2.

Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è una base di V occorre provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è un insieme di generatori di V e che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è linearmente indipendente (L.I.).

Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}} \subseteq V$ è un insieme di generatori di V occorre provare che per ogni $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in V$ esistono scalari $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{B_1} + \beta\mathbf{B_2} + \delta\mathbf{B_3} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 0 \\ \alpha + \beta + \delta & \alpha + \beta \end{pmatrix},$$

ossia che il sistema lineare

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta = a \\ \alpha + \beta + \delta = b \\ \alpha + \beta = c \end{cases}$$

nelle incognite α, β e δ ha soluzione **qualunque** siano $a, b, c \in \mathbb{C}$. Facendo una eliminazione di Gauss sulla matrice aumentata del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b-a \\ 0 & -1 & 0 & c-a \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(1)E_{2}(-1)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & a-b \\ 0 & 0 & -1 & c-b \end{array}\right) \xrightarrow{E_{3}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & b-c \end{array}\right) = \left(\mathbf{U} \quad | \quad \mathbf{d}\right).$$

Poichè $\mathbf{d}$ è libera qualunque siano $a, b, c \in \mathbb{C}$, allora $(*)$ ha soluzione per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$, e quindi $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è un insieme di generatori di V.

Per provare che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è L.I. occorre provare che l'unica combinazione lineare nulla di suoi elementi ha tutti i coefficienti nulli, ossia che

$$\alpha\mathbf{B_1} + \beta\mathbf{B_2} + \delta\mathbf{B_3} = \mathbf{O} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \delta = 0.$$

Da

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \alpha\mathbf{B_1} + \beta\mathbf{B_2} + \delta\mathbf{B_3} = \alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha + 2\beta & 0\\ \alpha+\beta+\delta & \alpha+\beta\end{pmatrix},$$

si ottiene il sistema lineare nelle incognite α, β e δ

$$(**) \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0\\ \alpha+\beta+\delta = 0\\ \alpha+\beta = 0\end{cases}$$

Dal momento che $(**)$ si ottiene da $(*)$ ponendo $a = b = c = 0$, una forma ridotta di Gauss della matrice aumentata di $(**)$ si ottiene da quella trovata per $(*)$ ponendo $a = b = c = 0$:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & | & a\\ 0 & 1 & -1 & | & a-b\\ 0 & 0 & 1 & | & b-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & | & 0\\ 0 & 1 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{U} & | & \mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

Poichè l'ultima colonna di $\begin{pmatrix}\mathbf{U} & | & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ è libera, $(**)$ ha soluzioni, e poichè l'ultima colonna di $\begin{pmatrix}\mathbf{U} & | & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ è nulla, tra le soluzioni di $(**)$ c'è quella nulla (ossia $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$). Inoltre, dal momento che tutte le colonne di $\mathbf{U}$ sono dominanti, $(**)$ ha un'unica soluzione.

Dunque l'unica soluzione di $(**)$ è quella nulla, per cui $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ è L.I.