G. Parmeggiani

Algebra e matematica discreta, a.a. 2020/2021,

Scuola di Scienze - Corso di laurea: **Informatica**

Svolgimento degli Esercizi per casa 1 (1^a parte)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Si trovino il quoziente q ed il resto r della divisione di a con b nei seguenti casi (N.B.: si richiede $r \geq 0$):

1) $a = 46$ e $b = 10$: $\quad 46 = 10 \cdot 4 + 6 \quad \Longrightarrow \quad q = 4$ ed $r = 6$;

2) $a = 49$ e $b = 52$: $\quad 49 = 52 \cdot 0 + 49 \quad \Longrightarrow \quad q = 0$ ed $r = 49$;

3) $a = -12$ e $b = 17$: $\quad -12 = 17 \cdot (-1) + 5 \quad \Longrightarrow \quad q = -1$ ed $r = 5$;

4) $a = 76$ e $b = -13$: $\quad 76 = (-13) \cdot (-5) + 11 \quad \Longrightarrow \quad q = -5$ ed $r = 11$;

5) $a = -21$ e $b = 12$: $\quad -21 = 12 \cdot (-2) + 3 \quad \Longrightarrow \quad q = -2$ ed $r = 3$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Si calcoli $MCD(a, b)$ con l'algoritmo di Euclide nei seguenti casi:

1) $a = 126$ e $b = 56$,
2) $a = 234$ e $b = 273$,
3) $a = -168$ e $b = 180$,
4) $a = 231$ e $b = 165$,
5) $a = -136$ e $b = 48$,
6) $a = -208$ e $b = 286$,
7) $a = 132$ e $b = 180$.

Osserviamo che:

1. Se d è il massimo comun divisore positivo di a e b, allora d e $-d$ sono i massimi comun divisori di a e b;

2. $MCD(a, b) = MCD(b, a)$;

3. $MCD(a, b) = MCD(|a|, |b|)$.

Quindi in ogni caso calcoliamo con l'algoritmo di Euclide in $\mathbb{N}$

$$d = MCD(|a|, |b|)$$

scegliendo le notazioni in modo tale che $|a| \geq |b|$, ed avremo che d e $-d$ sono i massimi comun divisori di a e b.

$$\begin{array}{ll}
1) & 126 = 56 \cdot 2 + 14 \\
 & \ \ 56 = 14 \cdot 4 + 0 \\
\Longrightarrow & MCD(126, 56) = 14.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
2) & 273 = 234 \cdot 1 + 39 \\
 & 234 = 39 \cdot 6 + 0 \\
\Longrightarrow & MCD(234, 273) = MCD(273, 234) = 39.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
3) & 180 = 168 \cdot 1 + 12 \\
 & 168 = 12 \cdot 14 + 0 \\
\Longrightarrow & MCD(-168, 180) = MCD(168, 180) = MCD(180, 168) = 12.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
4) & 231 = 165 \cdot 1 + 66 \\
 & 165 = 66 \cdot 2 + 33 \\
 & \ \ 66 = 33 \cdot 2 + 0 \\
\Longrightarrow & MCD(231, 165) = 33.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
5) & 136 = 48 \cdot 2 + 40 \\
 & \ \ 48 = 40 \cdot 1 + 8 \\
 & \ \ 40 = 8 \cdot 5 + 0 \\
\Longrightarrow & MCD(-136, 48) = MCD(136, 48) = 8.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
6) & 286 = 208 \cdot 1 + 78 \\
 & 208 = 78 \cdot 2 + 52 \\
 & \ \ 78 = 52 \cdot 1 + 26 \\
 & \ \ 52 = 26 \cdot 2 + 0 \\
\Longrightarrow & MCD(-208, 286) = MCD(208, 286) = MCD(286, 208) = 26.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
7) & 180 = 132 \cdot 1 + 48 \\
 & 132 = 48 \cdot 2 + 36 \\
 & \ \ 48 = 36 \cdot 1 + 12 \\
 & \ \ 36 = 12 \cdot 3 + 0 \\
\Longrightarrow & MCD(132, 180) = MCD(180, 132) = 12.
\end{array}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Si calcolino il quoziente $q(x)$ ed il resto $r(x)$ della divisione di $f(x)$ per $g(x)$ in $\mathbb{R}[x]$ nei seguenti casi:

$$\begin{array}{ll}
1) & f(x) = 12x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 2x - 3 \quad \text{e} \quad g(x) = 3x^3 + x - 3, \\
2) & f(x) = 12x^6 + 20x^4 + x^2 - 7 \quad \text{e} \quad g(x) = 2x^4 + x^2 + 3x - 1.
\end{array}$$

1) Dividendo $f(x) = 12x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 2x - 3$ per $g(x) = 3x^3 + x - 3$ si ottengono $q(x) = 4x^2 + x + 1$ ed $r(x) = 0$. Infatti:

$$
\begin{array}{llllll|l}
12x^5 & +\,3x^4 & +\,7x^3 & -\,11x^2 & -\,2x & -\,3 & 3x^3 + x - 3 \\
12x^5 & & +\,4x^3 & -\,12x^2 & & & \\
\hline
& 3x^4 & +\,3x^3 & +\,x^2 & -\,2x & -\,3 & 4x^2 + x + 1 \\
& 3x^4 & & +\,x^2 & -\,3x & & \\
& & & & & & \\
& & 3x^3 & & +\,x & -\,3 & \\
& & 3x^3 & & +\,x & -\,3 & \\
& & & & & & \\
& & & & & 0 &
\end{array}
$$

2) Dividendo $f(x) = 12x^6 + 20x^4 + x^2 - 7$ per $g(x) = 2x^4 + x^2 + 3x - 1$ si ottengono $q(x) = 6x^2 + 7$ ed $r(x) = -18x^3 - 21x$. Infatti:

$$
\begin{array}{llllll|l}
12x^6 & +\,20x^4 & & +\,x^2 & & -\,7 & 2x^4 + x^2 + 3x - 1 \\
12x^6 & +\,6x^4 & +\,18x^3 & -\,6x^2 & & & \\
\hline
& 14x^4 & -\,18x^3 & +\,7x^2 & & -\,7 & 6x^2 + 7 \\
& 14x^4 & & +\,7x^2 & +\,21x & -\,7 & \\
& & & & & & \\
& & -\,18x^3 & & -\,21x & &
\end{array}
$$