LEZIONE 13

G. PARMEGGIANI, 22/3/2021

CODICE:

573569

$\boxed{\text{ESERCIZIO TIPO 3}}$: si risolva il sistema lineare dipendente dal parametro COMPLESSO α dove

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 3 & 3\alpha & 3 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1-i \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{bmatrix} \quad e \quad \underline{b}(\alpha) = \begin{bmatrix} 3\alpha \\ \alpha+1 \\ \alpha \\ \alpha^2+3 \end{bmatrix}$$

$$[A(\alpha)|\underline{b}(\alpha)] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3\alpha & 3 & 3\alpha \\ 1 & \alpha+1 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1-i & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha & \alpha^2+3 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{3})]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-i & 0 \\ 0 & 2 & 2\alpha & \alpha^2+3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[E_{42}(-2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2+1 \end{array}\right] = [B(\alpha)|\underline{c}(\alpha)]$$

<u>1º CASO</u> $\alpha - i = 0$

<u>2º CASO</u> $\alpha \neq i$

$\boxed{1^{\circ}\text{ CASO}}$ $\quad \alpha = i$

$$[B(i) \mid \underline{c}(i)] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & i \\ 0 & 1 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} D & D & L & \uparrow \end{array} \end{array}$$

è una forma ridotta di Gauss di $[A(i) \mid \underline{b}(i)]$

$\underline{c}(i)$ LIBERA $\Rightarrow$ $B(i)\underline{x} = \underline{c}(i)$ ha soluzione

e $B(i)$ ha esattamente 1 colonna libera (la 3ª) $\Rightarrow$ $B(i)\underline{x} = \underline{c}(i)$ ha ∞^1 soluzioni. Prendo come parametro la variabile corrispondente alla colonna libera: $x_3 = h$

$$\begin{cases} x_1 + i x_2 + x_3 = i \\ \qquad\;\; x_2 + i x_3 = 1 \end{cases}$$

sostituzione all'indietro

$x_3 = h$

$x_2 = 1 - i x_3 = 1 - ih$

$x_1 = -i x_2 - x_3 + i =$

$= -i(1 - ih) - h + i$

$= \cancel{-i} - h - h + \cancel{i} = -2h$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2h \\ 1-ih \\ h \end{bmatrix} \,\middle|\, h \in \mathbb{C} \right\}$$ è l'insieme delle sol. di $A(i)\underline{x} = \underline{b}(i)$

$\boxed{2° \text{ caso}}$ $\alpha \neq i$

$$[B(\alpha)\,|\,\underline{c}(\alpha)] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2+1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_3\left(\frac{1}{\alpha - i}\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2+1 \end{array}\right] = [C(\alpha)\,|\,\underline{d}(\alpha)]$$

?

1° sottocaso $\alpha^2+1=0$ 2° sottocaso $\alpha^2+1 \neq 0$

1° sottocaso $\alpha^2+1=0 \iff \boxed{\alpha = i, -i}$

MA IO STO SUPPONENDO $\alpha \neq i$

in questo sottocaso ho $\boxed{\alpha = -i}$

$$[C(-i)\,|\,\underline{d}(-i)] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} D & D & D & L \end{array} \end{array}$$

è una forma ridotta di Gauss di $[A(-i)\,|\,\underline{b}(-i)]$

$\underline{d}(-i)$ è libera $\Rightarrow C(-i)\underline{x} = \underline{d}(-i)$ ha sol.

siccome tutte le colonne di $C(-i)$ sono dominanti $\Rightarrow$ la soluzione è !

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 1 & -i \\ 0 & 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 - i x_2 + x_3 = -i \\ x_2 - i x_3 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = i x_3 + 1 = 1 \\ x_1 = i x_2 - x_3 - i = i - i = 0 \end{cases}$$

$\exists!$ sol. $\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

<u>2° caso</u> $\alpha \neq i, -i$

$$[C(\alpha) \mid \underline{d}(\alpha)] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2+1 \end{array}\right] \xrightarrow[E_4\left(\frac{1}{\alpha^2+1}\right)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [U(\alpha) \mid \underline{w}(\alpha)]$$

è una forma ridotta di Gauss di $[A(\alpha) \mid \underline{b}(\alpha)]$ e $\underline{w}(\alpha)$ è dominante

$\Longrightarrow$ $U(\alpha)\underline{x} = \underline{w}(\alpha)$ non ha soluzioni $\Longrightarrow$ $A(\alpha)\underline{x} = \underline{b}(\alpha)$ non ha soluzioni

MATRICI INVERTIBILI (O NON SINGOLARI)

<u>Def</u>: Una matrice $\boxed{\text{QUADRATA}}$ A di ordine n si dice INVERTIBILE (O NON SINGOLARE) se $\exists B$ t.c.

$$\underset{n\times n}{A}\underset{n\times n}{B} = I_n = \underset{n\times n}{B}\underset{n\times n}{A}$$

Se B esiste allora B è unica e tale B si chiama L'INVERSA DI A E SI INDICA $B = A^{-1}$

(infatti se
$$\left.\begin{array}{l} AB_1 = I = B_1A \\ AB_2 = I = B_2A \end{array}\right\} \Rightarrow B_2 = B_1)$$

Non è sufficiente che A sia $\neq \mathbb{O}$ perchè abbia inversa

<u>es.</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}$ $\quad \nexists A^{-1}$

p.a. $\exists A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

allora $A^{-1}A = I$ cioè $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ma $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

qualunque siano $x, y, z, t \in \mathbb{C}$

quindi $\nexists A^{-1}$

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHE' $\exists A^{-1}$:

Se A $n \times n$. $\exists A^{-1} \iff U$ è $\boxed{\text{unitriangolare superiore}}$

$A =$ 

$= U$ ← Tutte le colonne di U sono dominanti o, equivalentemente, tutte le righe di U sono non nulle

Le matrici  (ossia le matrici quadrate $A=(a_{ij})$ con $a_{ij}=0$ per $i>j$) si chiamano TRIANGOLARI SUPERIORI

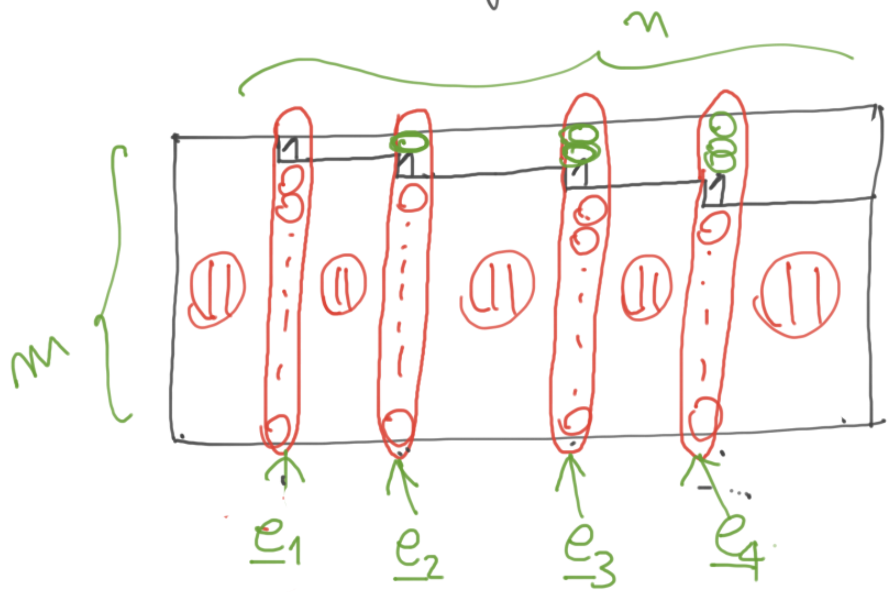
se in più $a_{ii}=1$ $\forall i$  si chiamano $\boxed{\text{UNITRIANGOLARI SUPERIORI}}$

Le matrici  (ossia le matrici quadrate $A=(a_{ij})$ con $a_{ij}=0$ per $i<j$) si chiamano TRIANGOLARI INFERIORI

se in più $a_{ii}=1$ $\forall i$  si chiamano UNITRIANGOLARI INFERIORI

FORME RIDOTTE DI GAUSS-JORDAN

Una matrice del tipo



cioè in forma ridotta di Gauss in cui le k colonne dominanti sono $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_k$ (le prime k colonne di I_m)

si dice in FORMA RIDOTTA DI GAUSS-JORDAN

ELIMINAZIONE DI GAUSS-JORDAN

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & -9 & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(1)E_{21}(-1)E_1(\frac{1}{2})]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-5)]{}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \boxed{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{23}(-5)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{13}(-1)]{}$$

Voglio "trasformare" in e_1, e_2, e_3 ....

ATTENZIONE ALL'ORDINE
IN CUI FACCIO LE OPERAZIONI

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{12}(-2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CALCOLO DELL'INVERSA

A $n \times n$ $\Rightarrow$ $n\{\underbrace{[A \mid I_n]}_{2n}$ $\quad n \times (2n)$

$[A \mid I_n] \underset{EG}{\rightsquigarrow} [U \mid B]$ forma ridotta di Gauss di $[A \mid I_n]$

$A \underset{EG}{\rightsquigarrow} U$ (U è una forma ridotta di Gauss di A)

- se l'ultima riga di U è nulla $\Rightarrow \nexists A^{-1}$
- se l'ultima riga di U è $\neq \underline{0}^T$ allora $U = \begin{bmatrix} \ddots & * \\ O & \ddots \end{bmatrix} \Rightarrow \exists A^{-1}$

continuando l'EG per trovare una forma ridotta di Gauss-Jordan di $[A|I_n]$ devo trasformare tutte le colonne dominanti di U in colonne della matrice identica (in questo caso "alte" quanto è alta U, quindi n)

Siccome tutte le n colonne di U sono dominanti, trasformo le n colonne di U in: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$

quindi "trasformo U" in I_n:

$$[A|I_n] \rightsquigarrow [U|B] \underset{\text{Gauss-Jordan}}{\rightsquigarrow} [I_n| \quad]$$

la matrice $n \times n$ costituita dalle ultime n colonne di una forma ridotta di Gauss-Jordan di $[A|I_n]$ è proprio A^{-1}

$$[A|I_n] \underset{\text{Gauss-Jordan}}{\rightsquigarrow} [I_n|A^{-1}]$$