RIASSUNTI MATEMATICA DISCRETA

Sommario

1 GRAFI

1.1 Non Orientati

Grafo G(V, E) in cui
V = insieme finito di vertici
E = insieme di coppie NON ordinate di vertici, detti spigoli (coppie $(u, v)\ con\ u \neq v\ e\ u, v \in V$), con $0 \leq |E| \leq \frac{n(n-1)}{2}$

Cammino: sequenza di vertici tutti distinti $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ tali che ogni spigolo $(u_i, u_{i+1}) \in E, \forall i(1 \dots n-1)$
Circuito: cammino il cui percorso mi riporta al nodo iniziale.

Grafo Connesso: se $\forall\ u, v \in V,\ \exists$ un cammino che colleghi u con v
Grafo Completo: (detto grafo K_n) se $\forall\ u, v \in V\ con\ u \neq v, (u, v) \in E$ (ogni coppia di vertici è collegata da uno spigolo). *Oss:* il numero di vertici è massimo: $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$, ed inoltre $\forall\ v \in V\ gr(v) = n - 1$

Sotto-grafo: dato *G(V, E)* , presi $V' \subseteq V\ e\ E' \subseteq E$ allora $G'(V', E')$ è un sotto-grafo di G
Sotto-grafo indotto: se G' è un sotto-grafo di G è indotto da V' se:

- $(u, v) \in E\ ; u, v\ \in V' \Rightarrow (u, v) \in E'$

1.1.1 Grado dei Vertici

Grado dei vertici: $gr(v)$ numero degli spigoli incidenti nel vertice v

TEO: $\sum_{\forall\ v \in V} \mathrm{gr(v)} = 2 \cdot |\mathrm{E}|$

COR: in un grafo *G(V, E)* non orientato semplice i vertici di grado dispari sono pari

1.1.2 Bipartiti

Bipartito: indicato come $G(V_1, V_2; E)$ con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e $V_1 \cup V_2 = V$.
se $\forall\ spigolo\ (u, v), u \neq v, u \in V_1\ e\ v \in V_2$ (gli estremi di ogni spigolo devono stare uno in V_1 e l'altro in V_2)
TEO: *G(U, V, E)* è bipartito ⇔ tutti i suoi circuiti hanno lunghezza pari.

Massimo numero di spigoli su grafo bipartito = $max|E| = |V_1| \cdot |V_2|$

Bipartito Completo: quando ha tutti i possibili spigoli che mantengono la proprietà di bipartismo

1.1.3 Complementari

Grafi Complementari: dato *G(V, E)* allora $G^C(V^C, E^C)$ è complementare di G se
$\forall\ u, v \in V\ con\ u \neq v; (u, v) \in E\ \Leftrightarrow (u, v) \notin E^C$
Oss: $G \cup G^C$ da un grafo completo K_n

1.1.4 Isomorfi

Grafi Isomorfi: *G(V, E)* e $G'(V', E')$ sono isomorfi se esiste una corrispondenza biunivoca tra $V\ e\ V'$ tale che: $u, v\ \in V$ sono adiacenti in G ⇔ i due sono corrispondenti $u', v'\ \in V'$ sono adiacenti in G'. Due grafi isomorfi hanno:

- stesso numero di vertici
- mantengono le adiacenze $\Rightarrow$ devono avere lo stesso grado dei vertici

Condizioni sufficienti perché due grafi non siano isomorfi.

- Hanno diverso numero di: vertici o spigoli o vertici dello stesso grado
- Hanno diversi sotto-grafi indotti
- Un grafo è bipartito mentre l'altro non lo è
- Sono complementari

1.1.5 Planari

Grafi Planari: *G(V, E)* è planare se può essere disegnato con una rappresentazione piana senza intersezione tra gli spigoli.
Metodo grafico del circuito e delle corde:

- Cerco un circuito Hamiltoniano nel grafo G
- Dispongo a cerchio il circuito trovato
- Aggiungo le corde, una alla volta, partendo da quelle con posizioni vincolate e cerco di evitare gli incroci

TEO: *(Kuratowski)* G è planare ⇔ NON contiene $K_{3,3}\ o\ K_5$ configurazioni.
Numero di regioni: (formula di Eulero) G connesso e planare: $r = e - v + 2\ \ con\ e = |E|\ e\ v = |V|$

COR: Se *G(V, E)* è connesso e planare con $e > 1 \Rightarrow e \leq 3v - 6$ (NON vale il viceversa)

COR: se *G(V, E)* è connesso, planare e bipartito con $e > 1 \Rightarrow e \leq 2v - 4$ (bipartito NON può contenere circuiti dispari)

TEO: *(Appel-Haken)* posso colorare un qualsiasi grafo planare, dando colori diversi a nodi adiacenti, usando 4 colori

1.2 Orientati

Grafo *G(N, A)* in cui
N = insieme finito di nodi
A = insieme di coppie ordinate di nodi, detti archi (coppie $(u, v) \in V$ sono u estremo iniziale e v estremo finale), con $0 \leq |A| \leq n(n-1)$

Fortemente Connesso: come non orientati (difficile che si verifichi tale proprietà)
Completo: come non orientati però il numero di archi è $E = n(n-1)$ perché arco $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$
Grado dei nodi: $gr^+(v)$ numero di archi uscenti da v, $gr^-(v)$ numero di archi entranti in v

TEO: $\sum_{\forall\, v \in N} gr^+(v) = |A| = \sum_{\forall\, v \in N} gr^-(v)$

1.3 Connettività

1.3.1 Connettività sugli spigoli

Connettività sugli spigoli: λ(G) è il minimo numero di spigoli la cui rimozione trasforma G in sconnesso.

Edge cutset: insieme $S \subseteq E$ tale che :

- La rimozione di tutti gli spigoli di S trasforma G in sconnesso
- $\forall\, S' \subsetneq S$ (sottoinsieme non uguale) la rimozione di S' lascia G connesso

1.3.2 Connettività sui vertici

Connettività sui vertici: $K(G)$ minimo numero di vertici la cui rimozione trasforma G (connesso e non completo), in sconnesso.

Vertex cutset: insieme $U \subseteq V$ tale che :

- La rimozione di tutti i vertici di U trasforma G in sconnesso
- $\forall\, U' \subsetneq U$ (sottoinsieme non uguale) la rimozione di U' lascia G connesso

Grado minimo di vertici: $\delta(G)$ è il minimo grado gr(v) dei vertici $v \in V$

OSS: $\forall\, G,\ K(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \leq 2|E|/|V|$

1.3.3 Connettività ottima

Connettività ottima: ∀ G connesso $K(G) = \lambda(G) = \delta(G) = 2|E|/|V|$

Grado medio: $\forall\, v \in V \quad [\sum_{v \in V} gr(v)]\,/|V| = 2|E|/|V|$

1.4 Cicli

1.4.1 Trail

È una sequenza di nodi e spigoli $\{x_1, e_1, x_2, e_2, \dots, x_k, e_k, x_{k+1}\}$ dove gli spigoli $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ sono tutti distinti mentre i vertici $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ possono essere ripetuti.

1.4.2 Ciclo

È un Trail con $x_1,\ x_{k+1}$ adiacenti.

1.4.3 Trail Euleriano

È un Trail nel quale compaiono tutti gli spigoli e tutti i vertici di un multigrafo.

1.4.4 Ciclo Euleriano

È un ciclo in cui compaiono tutti gli spigoli del multigrafo e tutti i suoi vertici.

TEO: G multigrafo NON ORIENTATO ha un ***Ciclo Euleriano*** ⇔
1) G è connesso
2) Tutti i vertici sono di grado pari

TEO: G multigrafo ha un ***Trail Euleriano*** ma NON un Ciclo Euleriano ⇔
1) G è connesso
2) Esattamente 2 vertici hanno grado dispari

TEO: G multigrafo ORIENTATO ha un ***Ciclo Euleriano*** ⇔
1) G è fortemente connesso
2) $\forall\, v \in V$: In-degree(v) = Out-degree(v)

1.4.4.1 Procedura pratica

1. Scelgo un ciclo C1 che abbia un vertice v con gr(v) > 2 e pari su cui passi anche un ciclo C2
2. Elimino tutti gli spigoli del ciclo C1
3. Ripeto la procedura su C2 dal punto 1 fino ad ottenere tutti i vertici privi di spigoli
4. Concateno $C_1, C_2, \dots, C_n$ in modo che:
   a. Nel ciclo C_1sostituisco il vertice in comune con C_2 con l'intero ciclo C_2 ed ottengo il ciclo C
   b. Nel ciclo C sostituisco il vertice in comune con C_3 con l'intero ciclo C_3 ed ottengo il nuovo ciclo C
   c. Ripeto il punto "b" per $C_4, \dots, C_n$
   d. Il ciclo C ottenuto sarà il ciclo Euleriano di G

ES: C1 = {a, b, c, a}; C2 = {b, e, b} → C = {a, b, e, b, c, a}

1.4.5 Circuito Hamiltoniano

Circuito Hamiltoniano: circuito che visita tutti i nodi passando per ogni nodo una sola volta.

OSS:
1) Se G non connesso $\Rightarrow\ \nexists$ circuito Hamilt.
2) Se $\exists\, v \in V$ con $gr(v) = 1 \;\Rightarrow\; \nexists$ circuito Hamilt.
3) Se vertice v ha grado 2 $\Rightarrow$ circuito Hamilt. , se esiste, contiene i due spigoli incidenti in v
4) Se $\exists$ dei sottocircuiti $\Rightarrow\ \nexists$ circuito Hamilt.
5) Se 2 spigoli incidenti in v $\in$ circuito Hamilt. $\Rightarrow$ tutti gli altri spigoli incidenti in v $\notin$ al circuito Hamilt.
6) $G(V_1, V_2;\ E)$ connesso e bipartito ha un circuito Hamiltoniano ⇔ $|V_1| = |V_2|$. (da esercizi)

TEO: *(Dirac)* [sufficiente ma non necessario] $G(V, E)$ grafo, $n = |V| > 2\ se\ gr(v) \geq n\,/2\ \ \forall\, v \in V \Rightarrow$ G è Hamilt.

TEO: (Chavatal) [sufficiente ma non necessario] $G(V, E)$ grafo, $n = |V|\ se\ gr(x_1) \leq gr(x_2) \leq \cdots \leq gr(x_n)$ e $\forall\, k \leq n/2\ \ gr(x_k) > k \Rightarrow$ G è Hamilt.

1.4.5.1 Procedura pratica

1) Se esistono, trovare 1 o + assi di simmetria del grafo
2) Partendo dai vertici di grado 2 includere gli spigoli incidenti
3) Eliminare gli spigoli che formano sottocircuiti e considerare la simmetria

2 ALBERI

2.1 Non orientato

T(V,E) grafo non orientato connesso è un albero se vale una di queste proprietà (asserti equivalenti)
- T non ha circuiti
- $\forall\, x, y \in V\ \exists$ un unico cammino x--y
- T è minimamente sconnesso, cioè la rimozione di un qualsiasi spigolo rompe la connessione

Teo: T(V,E) con $|V| = n$, ha $|E| = |V \backslash radice| = n - 1$

Un grafo G(V,E) non orientato è un albero se valgono almeno due di queste proprietà: (da esercizi)
- G(V,E) è connesso
- G(V,E) è senza circuiti
- $|E| = |V| - 1\ \equiv\ |V| = |E| - 1$

2.2 Orientato

G(V,E) è un albero orientato se è un grafo orientato con vertice $\bar{v}$ detto radice, tale che $\forall\, u \in \{V \backslash \bar{v}\}$ $\exists$ un unico cammino da $\bar{v}$ ad u. in-degree(v) = [1 se $v \neq \bar{v}$, 0 se $v = \bar{v}$]; se out-degree(v) = [0 ➔ v *foglia*, >0 ➔ v *nodo interno*]
G(V,E) albero orientato con: $n = |V|$, $l = \#\, foglie$, $i = \#\, nodi\ interni$ ➔ $n = l + i$

2.2.1 Albero m-ario

G(V,E) è albero m-ario se tutti i nodi interni hanno m figli. Se G(V,E) è m-ario ➔ $n = 1 + m \cdot i$

3 CALCOLO COMBINATORIO

3.1 Principio di Addizione

Ho n **insiemi disgiunti** a due a due, con: r_i = numero di oggetti distinti nell'insieme $i \in [1 \cdots n]$.
Il *numero di modi in cui posso scegliere un oggetto* è: $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$.

3.2 Principio di Moltiplicazione

Data una **procedura** composta da n **fasi ordinate**, con: r_i = numero di esiti distinti della fase $i \in [1 \cdots n]$. Se:

- il *numero di esiti* di una qualsiasi fase non dipende dagli esiti delle precedenti fasi
- gli esiti di tutta la procedura sono distinti

Il *numero di esiti distinti della procedura* è: $r_1 \cdot r_2 \cdots r_n$.

3.3 r-Sequenze

Una r-**sequenza** è una sequenza di caratteri di lunghezza r.
Una r-**sequenza binaria** è una sequenza di due soli caratteri di lunghezza r.

3.4 Disposizioni = Permutazioni = Ordinamenti = Anagrammi

Ho n oggetti distinti e devo calcolare il numero di disposizioni possibili, cioè il numero di modi in cui possono essere messi in un particolare ordine. N.B.: l'ordine degli oggetti è fondamentale!

3.4.1 Permutazioni

Il *numero di disposizioni possibili* è: $n \cdot (n-1) \cdots (1) = n!$

3.4.2 r-Permutazioni (Disposizioni Semplici)

Dati n oggetti distinti devo calcolare in quanti modi posso ordinare r degli n oggetti disponibili, con $r \leq n$. Devo quindi calcolare il numero dei gruppi distinti che si possono formare composti da r degli n oggetti distinti disponibili.
Il *numero di r-disposizioni possibili* è: $P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

3.5 r-Combinazioni

Una **r-combinazione** quantifica il numero di modi in cui è possibile scegliere un sottoinsieme di r oggetti distinti da un insieme di n oggetti distinti, con $r, n \in \mathbb{N}$ $\;n > r$. N.B.: l'ordine in cui vengono presi non è importate.
Il *numero di r-combinazioni su n oggetti* è: $C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$

3.6 Disposizioni con Ripetizione

Ho n oggetti di m tipi diversi, con: r_i = numero di oggetti di tipo $i \in [1 \cdots m]$ ed $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$.
Il *numero di disposizioni con ripetizioni* è: $\frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_m!}$

3.7 Selezioni (Combinazioni con Ripetizione)

Una **selezione** quantifica il numero di modi in cui è possibile scegliere r oggetti (anche *identici* tra loro) tra n diverse tipologie di oggetti, con $r \leq n$

$\equiv$

numero di soluzioni dell'equazione $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ con $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \in \mathbb{N}$, ove x_i = numero di oggetti identici di tipo $i \in [1 \cdots n]$

$\equiv$

numero di $(r+n-1)$-sequenze binarie con r simboli "x" ed $n-1$ simboli "y".
Il *numero di selezioni* è: $\binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{n-1}$

3.8 Distribuzioni

Ho r oggetti da disporre in n scatole diverse, con $r \geq n$.

3.8.1 r-Sequenze con ripetizione

numero di diverse distribuzioni di r oggetti distinti in n scatole diverse

$\equiv$

numero di r-sequenze con elementi $\in [1, \cdots, n]$ con elementi ripetuti

➔ n^r

3.8.2 Disposizioni con ripetizione

numero di diverse distribuzioni di r oggetti distinti in n scatole diverse sapendo che nella scatola i ci sono r_i oggetti, con $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r$

$\equiv$

numero di r-sequenze con elementi $\in [1, \cdots, n]$ che contengono: r_1 elementi = "1" ⋯ r_n elementi = "n"

$\equiv$

disposizione con ripetizione di r oggetti di n tipi diversi, con: r_i = numero di oggetti di tipo $i \in [1 \cdots n]$ ed $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r$

➔ $\frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_m!}$

3.8.3 Oggetti Identici

3.8.3.1 Selezioni

numero di diverse distribuzioni di r oggetti identici in n scatole diverse

$\equiv$

numero di selezioni di r oggetti tra n varietà

➔ $\binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{n-1}$

3.8.3.2 Selezioni con limitazioni

numero di diverse distribuzioni di r oggetti identici in n scatole diverse in modo che ogni scatola contenga almeno k oggetti con $r \geq k \cdot n$

$\equiv$

numero di selezioni di r oggetti tra n varietà con almeno k oggetti per ogni varietà (cioè una selezione di $r - k \cdot n$ oggetti)

$\equiv$

numero di soluzioni dell'equazione $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ con $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq k \in \mathbb{N}$, ove r_i = numero di oggetti nella scatola $i \in [1 \cdots n]$

➔ $\binom{r-k \cdot n+n-1}{r-k \cdot n}$

3.9 Lavorare per differenza

Quando viene richiesto di calcolare un numero di eventi difficile da modellizzare, in generale escludere eventi, è comodo lavorare per differenza:
numero di volte che si verifica A ma non si verifica B = numero di volte in cui si verifica A – numero di volte in cui si verifica B
Se viene richiesto di calcolare il numero di eventi in cui è presenta "almeno" un oggetto per differenza:
numero di estrazioni con almeno un A = numero di possibili estrazioni – numero di estrazioni con zero A

4 BINOMAILI

4.1 Coefficiente Binomiale

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

4.2 Sviluppo di polinomi

$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot x^k\right]$

4.3 Identità Binomiali

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ $\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \cdot \binom{n-m}{k-m}$

5 RELAZIONI DI RICORRENZA

La relazione di ricorrenza è una equazione che coinvolge un paramento a che dipende da n oggetti:

- a_n = numero di soluzioni di un problema con n oggetti
- a_n = numero di modi di eseguire una procedura con n oggetti

5.1 Relazione di Ricorrenza Lineare Omogenea

$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_1 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_r \cdot a_{n-r}$
Per risolverla:

- pongo: $a_n = \alpha^n$ ed ottengo: $\alpha^n = c_1 \cdot \alpha^{n-1} + c_1 \cdot \alpha^{n-2} + \cdots + c_r \cdot \alpha^{n-r}$
- divido per α^{n-r} ed ottengo: $\alpha^r = c_1 \cdot \alpha^{r-1} + c_1 \cdot \alpha^{r-2} + \cdots + c_r$ ➔ equazione caratteristica (*)
- risolvo l'equazione (un polinomio) ed ottengo r soluzioni del polinomio:
  - se $\overline{\alpha}$ è una soluzione di (*) ➔ $a_n = \overline{\alpha}^n$ è una soluzione della relazione
  - se $\overline{\alpha}$ è una soluzione di (*) con molteplicità m ➔ottengo m soluzioni della relazione: $a_n = \overline{\alpha}^n$; $a_n = n^1 \cdot \overline{\alpha}^n$; $\cdots$; $a_n = n^{m-1} \cdot \overline{\alpha}^n$
- la **soluzione generale** della relazione è data dalla composizione lineare della r soluzioni ottenute: $a_n = A_1 \cdot \overline{\alpha_1}^n + A_2 \cdot \overline{\alpha_2}^n + \cdots$ (in questo caso non ho indicato sol. Con molteplicità > 1)
- mediante le condizioni iniziali, ricavo la **soluzione particolare**
  (es: ho $a_n = A \cdot \overline{\alpha}^n$ conosco a_0, sostituisco 0 al posto di n ed ottengo $a_0 = A \cdot \overline{\alpha}^0$ da cui ricavo il valore di A).

5.2 Relazione di Ricorrenza Lineare Non Omogenea

$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_1 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_r \cdot a_{n-r} + f(n)$
Relazione omogena associata : $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_1 \cdot a_{n-2} + \cdots + c_r \cdot a_{n-r}$ (ricavata sol. generale come sopra)

Soluzione particolare del caso: $r = 1 \rightarrow a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + f(n)$

- $c = 1 \rightarrow a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} f(k)$
- $c \neq 1$
  - Studio $f(n)$:
    - $f(n) = d \rightarrow a_n = B$
    - $f(n) = d \cdot n \rightarrow a_n = B_1 \cdot n + B_0$
    - $f(n) = d \cdot n^2 \rightarrow a_n = B_2 \cdot n^2 + B_1 \cdot n + B_0$
  - Sostituisco l'a_n ricavato nella relazione di ricorrenza $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + f(n)$ e ricavo i B facendo in modo di ottenere una verità del tipo 0=0
    Es: $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + d \cdot n \rightarrow a_n = B_1 \cdot n + B_0 \rightarrow B_1 \cdot n + B_0 = c_1 \cdot [B_1 \cdot (n-1) + B_0] + d \cdot n \rightarrow$ ricavo B_0, B_1

$\boldsymbol{Soluzione\ Generale} = soluzione\ generale\ della\ relazione\ omogenea\ associata + soluzione\ particolare$

Ricavo la **Soluzione Particolare** applicando le condizioni iniziali.

5.2.1 Dipendenza di a_n da $n/2$

Unico caso studiato: $a_n = c \cdot a_{\frac{n}{2}} + f(n)$

- $c = 1\,,\ f(n) = d \rightarrow a_n = d \cdot \lceil \log_2 n \rceil + A$
- $c = 2\,,\ f(n) = d \rightarrow a_n = A_n - d$