4. Il Teorema di Rice tratta dell'indecidibilità delle proprietà dei linguaggi RE (cioè riconosciuti dalle Macchine di Turing). Considerate la seguente proprietà P_{REG}: il linguaggio è Regolare. Date la definizione del corrispondente linguaggio $L_{P_{REG}}$. Successivamente, spiegate se questo linguaggio è indecidibile o no. Probabilmente vi servirà il Teorema di Rice.

Assumiamo per contraddizione che P sia un linguaggio decidibile che soddisfa le proprietà e che R_P sia una TM che decide P. Mostriamo come decidere A_{TM} usando R_P costruendo una TM S.
Per prima cosa, si deve dire che P è un linguaggio non triviale; dunque, deve avere una possibile descrizione del linguaggio. Essendo regolare possiamo simularlo con un DFA tale che accetti avanzando regolarmente tutte le sue stringhe. P poi deve essere proprietà del linguaggio, dunque M_2 deve decidere le stringhe di M_1.
Essendo non triviale, si crea S che su input w:

- Usa m per costruire M_w
- M_w avanza su w. Se si ferma, significa che il linguaggio non è regolare e dunque trivialmente segnala NO come output.
- Altrimenti sfrutta R_P che in maniera non triviale cerca di decidere il linguaggio. Se accetta, regolarmente, accetta.

M_w accetta se e solo se P accetta, come proprietà del suo linguaggio.

5. "Colorare" i vertici di un grafo significa assegnare etichette, tradizionalmente chiamate "colori", ai vertici del grafo in modo tale che nessuna coppia di vertici adiacenti condivida lo stesso colore. Il problema kCOLOR è il problema di trovare una colorazione di un grafo non orientato usando k colori diversi.

(a) Dimostrare che il problema 5COLOR (colorare un grafo con 5 colori) è in NP fornendo un certificato per il *Sì* che si può verificare in tempo polinomiale.
(b) Mostrare come si può risolvere il problema 3COLOR (colorare un grafo con 3 colori) usando 5COLOR come sottoprocedura.

a) 5COLOR è in NP in quanto esiste un certificato in tempo polinomiale. In pratica:
- per ogni vertice controllo di avere una coppia adiacente
- per ogni coppia di vertici controlla se hanno lo stesso colore

Se accetta entrambe le condizioni, esiste un certificato in tempo polinomiale.

b) Usiamo il problema 3COLOR usando 5COLOR:
Questo è un problema risolvibile in tempo polinomiale, tale che:

- sia S un'istanza buona di 5C. Se abbiamo almeno, per il verificatore, ogni coppia di vertici conterrà un colore tra i possibili 5 esistenti, allora usando 5Color riusciamo a dire che esistono almeno 3 colori contenuti nell'insieme dei 5 possibili. Banalmente, mentre si assegnano i vertici p possibile verificare in tempo lineare che ciascuna coppia si a diversa e conterrà almeno 3 colori diversi
- sia S' un'istanza buon di 3C. Allora questi 3 colori per ciascuna coppia di vertici sono almeno contenuti in un'istanza buona di 5C. Certificando che le coppie sono tutte diverse tra di loro, risolviamo correttamente il problema.