

AUTOMI E LINGUAGGI FORMALI
ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALL'ESAME DEL 4 FEBBRAIO 2021

Prima parte

1. Dati i linguaggi A e B , lo *shuffle perfetto* di A e B è il linguaggio

$$\{w \mid w = a_1b_1a_2b_2 \dots a_kb_k, \text{ dove } a_1a_2 \dots a_k \in A \text{ e } b_1b_2 \dots b_k \in B, \text{ ogni } a_i, b_i \in \Sigma\}$$

Mostrare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto allo shuffle perfetto, cioè che se A e B sono linguaggi regolari allora anche il loro shuffle perfetto è un linguaggio regolare.

2. Sia A un linguaggio, e sia $DROPOUT(A)$ come il linguaggio contenente tutte le stringhe che possono essere ottenute togliendo un simbolo da una stringa di A :

$$DROPOUT(A) = \{xz \mid xyz \in A \text{ dove } x, y \in \Sigma^* \text{ e } y \in \Sigma\}.$$

Mostrare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'operazione $DROPOUT$, cioè che se A è un linguaggio regolare allora $DROPOUT(A)$ è un linguaggio regolare.

3. Per una stringa $w = w_1w_2 \dots w_n$, l'*inversa* di w è la stringa $w^R = w_n \dots w_2w_1$. Per ogni linguaggio A , sia $A^R = \{w^R \mid w \in A\}$. Mostrare che se A è regolare allora lo è anche A^R .
4. Sia $A/b = \{w \mid wb \in A\}$. Mostrare che se A è un linguaggio regolare e $b \in \Sigma$, allora A/b è regolare.
5. Sia $A/B = \{w \mid wx \in A \text{ per qualche } x \in B\}$. Mostrare che se A è un linguaggio regolare e B un linguaggio qualsiasi, allora A/B è regolare.
6. Il pumping lemma afferma che ogni linguaggio regolare ha una lunghezza del pumping p , tale che ogni stringa del linguaggio può essere iterata se ha lunghezza maggiore o uguale a p . La *lunghezza minima del pumping* per un linguaggio A è il più piccolo p che è una lunghezza del pumping per A . Per ognuno dei seguenti linguaggi, dare la lunghezza minima del pumping e giustificare la risposta.

- | | | |
|----------------------------|---|-------------------|
| (a) 110^* | (g) $10(11^*0)^*0$ | (m) ε |
| (b) $1^*0^*1^*$ | (h) 101101 | (n) $1^*01^*01^*$ |
| (c) $0^*1^*0^*1^* + 10^*1$ | (i) $\{w \in \Sigma^* \mid w \neq 101101\}$ | (o) 1011 |
| (d) $(01)^*$ | (j) 0001^* | (p) Σ^* |
| (e) \emptyset | (k) 0^*1^* | |
| (f) $0^*01^*01^*$ | (l) $001 + 0^*1^*$ | |

7. Sia $\Sigma = \{0, 1\}$, e considerate il linguaggio

$$D = \{w \mid w \text{ contiene un ugual numero di occorrenze di } 01 \text{ e di } 10\}$$

Mostrare che D è un linguaggio regolare.

8. Sia $\Sigma = \{0, 1\}$.

- Mostrare che il linguaggio $A = \{0^k u 0^k \mid k \geq 1 \text{ e } u \in \Sigma^*\}$ è regolare.
- Mostrare che il linguaggio $B = \{0^k 1 u 0^k \mid k \geq 1 \text{ e } u \in \Sigma^*\}$ non è regolare.

9. Dimostrare che i seguenti linguaggi non sono regolari.

- (a) $\{0^n 1^m 0^m \mid m, n \geq 0\}$
- (b) $\{0^n 1^m \mid n \neq m\}$
- (c) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ non è palindroma}\}$
- (d) $\{wtw \mid w, t \in \{0, 1\}^+, \text{ dove } \{0, 1\}^+ \text{ è l'insieme di tutte le stringhe binarie di lunghezza maggiore o uguale a } 1\}$

10. Per ogni linguaggio A , sia $SUFFIX(A) = \{v \mid uv \in A \text{ per qualche stringa } u\}$. Mostrare che la classe dei linguaggi context-free è chiusa rispetto all'operazione di $SUFFIX$.

11. Usa i linguaggi $A = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$ e $B = \{a^n b^n c^m \mid m, n \geq 0\}$ per mostrare che la classe dei linguaggi context-free non è chiusa per intersezione.
12. Dimostrare che i seguenti linguaggi sono context-free. Salvo quando specificato diversamente, l'alfabeto è $\Sigma = \{0, 1\}$.
- $\{w \mid w \text{ inizia e termina con lo stesso simbolo}\}$
 - $\{w \mid \text{la lunghezza di } w \text{ è dispari e il suo simbolo centrale è } 0\}$
 - $\{w \mid w = w^R, \text{ cioè } w \text{ è palindroma}\}$
 - $\{w \mid w \text{ contiene un numero maggiore di } 0 \text{ che di } 1\}$
 - Il complemento di $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
 - Sull'alfabeto $\Sigma = \{0, 1, \#\}$, $\{w\#x \mid w^R \text{ è una sottostringa di } x \text{ e } w, x \in \{0, 1\}^*\}$
 - $\{x\#y \mid x, y \in \{0, 1\}^* \text{ e } x \neq y\}$
 - $\{xy \mid x, y \in \{0, 1\}^* \text{ e } |x| = |y| \text{ ma } x \neq y\}$
 - $\{a^i b^j \mid i \neq j \text{ e } 2i \neq j\}$
13. Se A e B sono linguaggi, definiamo $A \circ B = \{xy \mid x \in A, y \in B \text{ e } |x| = |y|\}$. Mostrare che se A e B sono linguaggi regolari, allora $A \circ B$ è un linguaggio context-free.
14. Dimostrare che se G è una CFG in forma normale di Chomsky, allora per ogni stringa $w \in L(G)$ di lunghezza $n \geq 1$, ogni derivazione di w richiede esattamente $2n - 1$ passi.

Seconda parte

15. Un *automa a coda* è simile ad un automa a pila con la differenza che la pila viene sostituita da una coda. Una *coda* è un nastro che permette di scrivere solo all'estremità sinistra del nastro e di leggere solo all'estremità destra. Ogni operazione di scrittura (*push*) aggiunge un simbolo all'estremità sinistra della coda e ogni operazione di lettura (*pull*) legge e rimuove un simbolo all'estremità destra. Come per un PDA, l'input è posizionato su un nastro a sola lettura separato, e la testina sul nastro di lettura può muoversi solo da sinistra a destra. Il nastro di input contiene una cella con un blank che segue l'input, in modo da poter rilevare la fine dell'input. Un automa a coda accetta l'input entrando in un particolare stato di accettazione in qualsiasi momento. Mostra che un linguaggio può essere riconosciuto da un automa deterministico a coda se e solo se è Turing-riconoscibile.
16. Una *Macchina di Turing a sola scrittura* è una TM a nastro singolo che può modificare ogni cella del nastro al più una volta (inclusa la parte di input del nastro). Mostrare che questa variante di macchina di Turing è equivalente alla macchina di Turing standard.
17. Chiamiamo k -PDA un automa a pila dotato di k pile.
- Mostrare che i 2-PDA sono più potenti degli 1-PDA
 - Mostrare che i 2-PDA riconoscono esattamente la classe dei linguaggi Turing-riconoscibili
 - Mostrare che i 3-PDA *non* sono più potenti dei 2-PDA
18. Sia $ALL_{DFA} = \{\langle A \rangle \mid A \text{ è un DFA e } L(A) = \Sigma^*\}$. Mostrare che ALL_{DFA} è decidibile.
19. Sia $A_{\varepsilon CFG} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ è una CFG che genera } \varepsilon\}$. Mostrare che $A_{\varepsilon CFG}$ è decidibile.
20. Sia $S_{REX} = \{\langle R, S \rangle \mid R, S \text{ sono espressioni regolari tali che } L(R) \subseteq L(S)\}$. Mostrare che S_{REX} è decidibile.
21. Sia $X = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ è una TM a nastro singolo che non modifica la porzione di nastro che contiene l'input } w\}$. X è decidibile? Dimostrare la vostra risposta.
22. Sia $E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una TM tale che } L(M) = \varepsilon\}$. Mostrare che $\overline{E_{TM}}$, il complemento di E_{TM} , è Turing-riconoscibile.
23. Mostrare che se A è Turing-riconoscibile e $A \leq_m \bar{A}$, allora A è decidibile.
24. Sia A un linguaggio. Dimostrare che A è Turing-riconoscibile *se e solo se* esiste un linguaggio decidibile B tale che $A = \{x \mid \text{esiste } y \text{ tale che } \langle x, y \rangle \in B\}$.
25. $A \leq_m B$ e B è un linguaggio regolare implica che A è un linguaggio regolare? Perché sì o perché no?

