Automi e Linguaggi Formali

Parte 14 – Linguaggi Decidibili

Davide Bresolin
Ultimo aggiornamento: 28 aprile 2021

Università degli Studi di Padova

Obiettivi

- Studiare il potere degli algoritmi
- Capire quali problemi sono risolvibili da un algoritmo e quali no
- In questa lezione iniziamo considerando problemi decidibili

Sommario

Il problema dell'accettazione

- Problema dell'accettazione: testare se un DFA accetta una stringa

$$A_{DFA} = \{\langle B, w\rangle \mid B \text{ è un DFA che accetta la stringa } w\}$$

- B accetta w se e solo se $\langle B, w\rangle$ appartiene ad A_{DFA}
- Mostrare che il linguaggio è decidibile equivale a mostrare che il problema computazionale è decidibile

Teorema: A_{DFA} è decidibile

Idea: definire una TM che decide A_{DFA}

Teorema: A_{DFA} è decidibile

Idea: definire una TM che decide A_{DFA}

$M =$ "Su input $\langle B, w \rangle$, dove B è un DFA e w una stringa:

1. Simula B su input w
2. Se la simulazione termina in uno stato finale, accetta. Se termina in uno stato non finale, rifiuta."

Teorema: A_{DFA} è decidibile

Idea: definire una TM che decide A_{DFA}

$M =$ "Su input $\langle B, w \rangle$, dove B è un DFA e w una stringa:

1. Simula B su input w
2. Se la simulazione termina in uno stato finale, accetta. Se termina in uno stato non finale, rifiuta."

Dimostrazione:

- la codifica di B è una lista dell componenti Q, Σ, δ, q_0 e F
- fare la simulazione è facile: vedi primo laboratorio!

Teorema: A_{NFA} è decidibile

$$A_{NFA} = \{\langle B, w \rangle \mid B \text{ è un } \varepsilon\text{-NFA che accetta la stringa } w\}$$

Idea: usiamo la TM M che decide A_{DFA} come subroutine

Teorema: A_{NFA} è decidibile

$$A_{NFA} = \{\langle B, w\rangle \mid B \text{ è un } \varepsilon\text{-NFA che accetta la stringa } w\}$$

Idea: usiamo la TM M che decide A_{DFA} come subroutine

Dimostrazione:

$N =$ "Su input $\langle B, w\rangle$, dove B è un ε-NFA e w una stringa:

1. Trasforma B in un DFA equivalente C usando la costruzione per sottoinsiemi
2. Esegui M con input $\langle C, w\rangle$
3. Se M accetta, accetta; altrimenti, rifiuta."

N è un decisore per A_{NFA}, quindi A_{NFA} è decidibile

Teorema: A_{REX} è decidibile

$A_{REX} = \{\langle R, w\rangle \mid R$ è una espressione regolare che genera la stringa $w\}$

Idea: usiamo la TM N che decide A_{NFA} come subroutine

Teorema: A_{REX} è decidibile

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

$A_{REX} = \{\langle R, w\rangle \mid R$ è una espressione regolare che genera la stringa $w\}$

Idea: usiamo la TM N che decide A_{NFA} come subroutine

Dimostrazione:
$P =$ "Su input $\langle R, w\rangle$, dove R è una espressione regolare e w una stringa:

1. Trasforma R in un ε-NFA equivalente C usando la procedura di conversione
2. Esegui N con input $\langle C, w\rangle$
3. Se N accetta, accetta; altrimenti, rifiuta."

P è un decisore per A_{REX}, quindi A_{REX} è decidibile

Riassumendo. . .

- ai fini della decidibilità, è equivalente dare in input alla TM un DFA, un ε-NFA o una espressione regolare
- la TM è in grado di convertire una codifica nell'altra
- Ricorda: mostrare che il linguaggio è decidibile equivale a mostrare che il problema computazionale è decidibile

Test del vuoto

- Negli esempi precedenti dovevamo decidere se una stringa appartenesse o no ad un linguaggio
- Ora vogliamo determinare se un automa finito accetta una qualche stringa

$$E_{DFA} = \{\langle A \rangle \mid A \text{ è un DFA e } L(A) = \emptyset\}$$

- Puoi descrivere un algoritmo per eseguire questo test?

E_{DFA} è decidibile

Dimostrazione: verifica se c'è uno stato finale che può essere raggiunto a partire dallo stato iniziale.

T = "Su input $\langle A \rangle$, la codifica di un DFA A:

1. Marca lo stato iniziale di A.
2. Ripeti la fase seguente fino a quando non vengono marcati nuovi stati:
3. marca ogni stato di A che ha una transizione proveniente da uno stato già marcato.
4. Se nessuno degli stati finali è marcato, accetta; altrimenti rifiuta."

Test di equivalenza

$$EQ_{DFA} = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ e } B \text{ sono DFA e } L(A) = L(B)\}$$

Idea:

- costruiamo un DFA C che accetta solo le stringhe che sono accettate da A o da B, ma non da entrambi
- se $L(A) = L(B)$ allora C non accetterà nulla
- il linguaggio di C è la differenza simmetrica di A e B

EQ_{DFA} è decidibile

Dimostrazione:

- la differenza simmetrica di A e B è:

$$L(C) = \left(L(A) \cap \overline{L(B)}\right) \cup \left(\overline{L(A)} \cap L(B)\right)$$

- i linguaggi regolari sono chiusi per unione, intersezione e complementazione
- F = "Su input $\langle A, B\rangle$, dove A e B sono DFA:
  1. Costruisci il DFA C per differenza simmetrica
  2. Esegui T, la TM che decide E_{DFA} con input $\langle C\rangle$
  3. Se T accetta, accetta; altrimenti, rifiuta."

Sommario

Problema dell'accettazione

$$A_{CFG} = \{\langle G, w\rangle \mid G \text{ è una CFG che genera la stringa } w\}$$

Idea: costruiamo una TM che provi tutte le derivazioni di G per trovarne una che genera w

Problema dell'accettazione

$$A_{CFG} = \{\langle G, w\rangle \mid G \text{ è una CFG che genera la stringa } w\}$$

Idea: costruiamo una TM che provi tutte le derivazioni di G per trovarne una che genera w

Perché questa strategia non funziona?

A_{CFG} è decidibile

- Se la CFG è in forma normale di Chomsky, allora ogni derivazione di w è lunga esattamente $(2|w| - 1)$ passi
- Le TM possono convertire le grammatiche nella forma normale di Chomsky!

A_{CFG} è decidibile

- Se la CFG è in forma normale di Chomsky, allora ogni derivazione di w è lunga esattamente $(2|w| - 1)$ passi
- Le TM possono convertire le grammatiche nella forma normale di Chomsky!

Dimostrazione:

$S =$ "Su input $\langle G, w \rangle$, dove G è una CFG e w una stringa:

1. Converti G in forma normale di Chomsky
2. Elenca tutte le derivazioni di $2|w| - 1$ passi. Se $|w| = 0$, elenca tutte le derivazioni di lunghezza 1
3. Se una delle derivazioni genera w, accetta; altrimenti rifiuta."

Test del vuoto

$$E_{CFG} = \{\langle G \rangle \mid A \text{ è una CFG ed } L(G) = \emptyset\}$$

- Problema: non possiamo usare S del teorema precedente. *Perché no?*
- Bisogna procedere in modo diverso!

Teorema: E_{CFG} è decidibile

Idea: stabilisci per ogni variabile se è in grado di generare una stringa di terminali

R = "Su input $\langle G \rangle$, la codifica di una CFG G:

1. Marca tutti i simboli terminali di G.
2. Ripeti la fase seguente fino a quando non vengono marcate nuove variabili:
3. marca ogni variabile A tale che esiste una regola $A \to U_1 \dots U_k$ dove ogni simbolo $U_1 \dots U_k$ è già stato marcato.
4. Se la variabile iniziale non è marcata, accetta; altrimenti rifiuta."

Teorema: EQ_{CFG} è decidibile

$$EQ_{CFG} = \{\langle G, H\rangle \mid G \text{ e } H \text{ sono CFG e } L(G) = L(H)\}$$

Idea:

- Usiamo la stessa tecnica di EQ_{DFA}
- Calcoliamo la differenza simmetrica di G e H per provare l'equivalenza

~~Teorema~~: EQ_{CFG} è decidibile

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

$$EQ_{CFG} = \{\langle G, H\rangle \mid G \text{ e } H \text{ sono CFG e } L(G) = L(H)\}$$

Idea:

- Usiamo la stessa tecnica di EQ_{DFA}
- Calcoliamo la differenza simmetrica di G e H per provare l'equivalenza

STOP!!!

- Le CFG non sono chiuse per complementazione ed intersezione!
- EQ_{CFG} non è decidibile!

Sommario

Teorema: ogni CFL è decidibile

Domanda:

- è facile simulare la pila con una TM
- sappiamo che le TM nondeterministiche possono essere simulate da una TM deterministica

Non basta semplicemente simulare un PDA con una TM?

- Quali altre opzioni abbiamo?

Dimostrazione: ogni CFL è decidibile

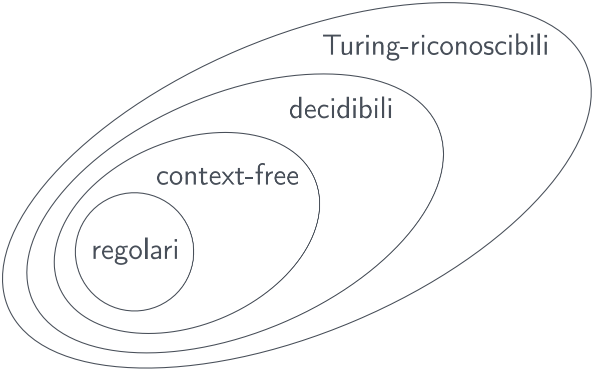
- Dato un CFL L, sia G la grammatica per L
- Costruiamo la TM S che decide A_{CFG}
- La TM che decide L è:
  $M_G =$ "Su input w:
  1. Esegui la TM S con input $\langle G, w \rangle$
  2. Se S accetta, accetta; altrimenti, rifiuta

Dimostrazione: ogni CFL è decidibile

- Dato un CFL L, sia G la grammatica per L
- Costruiamo la TM S che decide A_{CFG}
- La TM che decide L è:
  $M_G =$ "Su input w:
  1. Esegui la TM S con input $\langle G, w \rangle$
  2. Se S accetta, accetta; altrimenti, rifiuta

- In che modo questa soluzione evita il problema di simulare il PDA?

Relazioni tra classi di linguaggi



- Queste non sono solo classi di linguaggi, ma anche classi di capacità computazionale