Automi e Linguaggi Formali
Esame del 19 settembre 2019 – Parte II

Tempo a disposizione: 1 h 30 min

1. Dare la definizione dei linguaggi L_e e L_{ne}. Spiegare come si dimostra che L_{ne} non è ricorsivo. Si usa una riduzione.

$$L_e = \{M|L(M) = \emptyset\}, L_{ne} = \{M|L(N) \neq \emptyset\}$$

Per dimostrare che L_{ne} è non ricorsivo, si riduce L_u ad esso. La costruzione funziona nel modo seguente: prendiamo un'istanza qualsiasi di L_u, essa è (M, w), $(M, w) \in L_u$ sse M accetta w. L'istanza di L_{ne} corrispondente a (M, w) è una TM M' tale che, per ogni input x, simula M su w e accetta x solo se M accetta w. Ovviamente $M' \in L_{ne}$ sse $(M, w) \in L_u$. Da questo segue che L_{ne} è almeno tanto indecidibile quanto L_u e quindi non ricorsivo.

2. Si consideri le seguenti proprietà dei linguaggi RE:

i) il linguaggio è accettato da una machina di Turing;
ii) il linguaggio è accettato da una macchina di Turing i cui calcoli sono sempre finiti.

Per ciascuna proprietà, date la definizione del linguaggio corrispondente e spiegate se la proprietà è decidibile o no.

La proprietà (i) è soddisfatta da tutti i linguaggi RE, visto che coincide con la definizione di RE. Per cui è una proprietà banale e quindi il Teorema di Rice non si applica ad essa. Il corrispondente linguaggio consiste di tutte le stringhe in $\{0, 1\}^*$ dato che ogni tale stringa rappresenta una TM eventualmente una TM che non accetta nulla. La proprietà (ii) coincide con i linguaggi ricorsivi che sono un sottoinsieme stretto dei linguaggi RE, quindi non è una proprietà banale per cui il Teorema di Rice ci dice che è indecidibile. Il linguaggio corrispondente a (ii) è $\{M|L(M)$ è ricorsivo $\}$.

3. Il linguaggio $L = \{a^k b^{2k} c^{3k} \mid k \geq 0\}$ è CF o non CF? Nel primo caso fornire una CFG che generi L (o un PDA che lo riconosca). Nel secondo caso dimostrare che L non è CF.

L non è CF e useremo il Pumping Lemma (PL) per dimostrarlo. Supponiamo che lo sia. Quindi il PL ci dice che c'è un $n > 0$ tale che per ogni stringa z in L e tale che $|z| \geq n$,esiste una divisione $z = uvwxy$, tale che $|vwx| \leq n$, $|vx| \neq \epsilon$ e per ogni $i \geq 0, uv^iwx^iy \in L$. Per il linguaggio L dell'esercizio, troviamo una contraddizione prendendo $z = a^n b^{2n} c^{3n}$. Ovviamente $|z| > n$, e quindi esiste una scomposizione $z = uvwxy$ tale che $|uwx| \leq n$. Per questo motivo uwx potrà al massimo contenere 2 simboli diversi, cioè a e b oppure b e c, ma è impossibile che contenga a, b e c. Per cui, pompando u e x aumenteremo il numero di 2 simboli lasciando inalterato il terzo. Per cui otterremo stringhe non in L. A maggior ragione questo succede se uwx contiene solo a o solo b o solo c.

4. Descrivere un PDA che accetta per pila vuota ed è capace di riconoscere il linguaggio $L = \{(ab)^n(ca)^n \mid n \geq 0\}$.

Il vostro è un automa deterministico o nondeterministico? Spiegare la risposta.

Il PDA deve essere nondeterministico perché deve accettare anche ϵ. La sua funzione di transizione è questa:

$$\delta(q, a, Z) = \{(q, aZ)\}, \delta(q, b, a) = \{(q, ba)\}, \delta(q, a, b) = \{(q, ab)\}, \delta(q, \epsilon, Z) = \{(q, \epsilon)\},$$

$$\delta(q, c, b) = \{(p, \epsilon)\}, \delta(p, a, a) = \{(q, \epsilon)\}, \delta(p, c, b) = \{(p, \epsilon)\}, \delta(p, \epsilon, Z) = \{(p, \epsilon)\}$$

E' non deterministico a causa di:

$$\delta(q, a, Z) = \{(q, aZ)\} \text{ e } \delta(q, \epsilon, Z) = \{(q, \epsilon)\}$$

5. Un circuito Hamiltoniano in un grafo G è un ciclo che attraversa ogni vertice di G esattamente una volta. Stabilire se un grafo contiene un circuito Hamiltoniano è un problema NP-completo.

Un *circuito 1/3-Hamiltoniano* in un grafo G è un ciclo che attraversa esattamente una volta *un terzo* dei vertici del grafo. Il *problema del circuito 1/3-Hamiltoniano* è il problema di stabilire se un grafo contiene un circuito 1/3-Hamiltoniano.

(a) Dimostrare che il problema del circuito 1/3-Hamiltoniano è in NP fornendo un certificato per il *Sì* che si può verificare in tempo polinomiale.
(b) Mostrare come si può risolvere il problema del circuito Hamiltoniano usando il problema del circuito 1/3-Hamiltoniano come sottoprocedura.

Per la parte (a) un certificato è una sequenza di n/3 nodi. E' facile (lineare) verificare se un tale sequenza di nodi forma un circuito hamiltoniano o no. Per la parte (b), mappiamo una qualsiasi istanza del problema del circuito Hamiltoniamo che è formata da un grafo G in un'istanza del 1/3-*circuito Hamiltoniano, composta da 3 copie di G completamente disgiunte tra loro. E' facile vedere che se il grafo con 3 copie di G ha un circuito Hamiltoniano su 1/3 dei nodi, lo ha su una delle 3 componenti e quindi su G. Se invece il grafo con 3 copie di G non ha un circuito Hamiltoniano su 1/3 dei nodi, allora non c'è circuito Hamiltoniano su G. Quindi abbiamo ridotto il problema del circuito Hamiltoniano a quello del 1/3 Hamiltoniano, dimostrando, assieme al punto (a), che esso è NP completo.*