Automi e Linguaggi Formali
Esercizi di preparazione all'esame orale

Prima parte

1. Dati i linguaggi A e B, lo *shuffle perfetto* di A e B è il linguaggio

$$\{w \mid w = a_1b_1a_2b_2 \dots a_kb_k,\ \text{dove } a_1a_2\dots a_k \in A \text{ e } b_1b_2\dots b_k \in B,\ \text{ogni } a_i, b_i \in \Sigma\}$$

Mostrare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto allo shuffle perfetto, cioè che se A e B sono linguaggi regolari allora anche il loro shuffle perfetto è un linguaggio regolare.

2. Sia A un linguaggio, e sia $DROPOUT(A)$ come il linguaggio contenente tutte le stringhe che possono essere ottenute togliendo un simbolo da una stringa di A:

$$DROPOUT(A) = \{xz \mid xyz \in A \text{ dove } x, y \in \Sigma^* \text{ e } y \in \Sigma\}.$$

Mostrare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'operazione $DROPOUT$, cioè che se A è un linguaggio regolare allora $DROPOUT(A)$ è un linguaggio regolare.

3. Il pumping lemma afferma che ogni linguaggio regolare ha una lunghezza del pumping p, tale che ogni stringa del linguaggio può essere iterata se ha lunghezza maggiore o uguale a p. La *lunghezza minima del pumping* per un linguaggio A è il più piccolo p che è una lunghezza del pumping per A. Per ognuno dei seguenti linguaggi, dare la lunghezza minima del pumping e giustificare la risposta.

(a) 0001^*
(b) 0^*1^*
(c) $001 + 0^*1^*$
(d) $(01)^*$
(e) ε
(f) $1^*01^*01^*$
(g) $10(11^*0)^*0$
(h) 1011
(i) Σ^*

4. Sia $\Sigma = \{0, 1\}$, e considerate il linguaggio

$$D = \{w \mid w \text{ contiene un ugual numero di occorrenze di 01 e di 10}\}$$

Mostrare che D è un linguaggio regolare.

5. Sia $\Sigma = \{0, 1\}$.

- Mostrare che il linguaggio $A = \{0^k u 0^k \mid k \geq 1 \text{ e } u \in \Sigma^*\}$ è regolare.
- Mostrare che il linguaggio $B = \{0^k 1 u 0^k \mid k \geq 1 \text{ e } u \in \Sigma^*\}$ non è regolare.

6. Usa i linguaggi $A = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$ e $B = \{a^n b^n c^m \mid m, n \geq 0\}$ per mostrare che la classe dei linguaggi context-free non è chiusa per intersezione.

7. Definire le grammatiche context-free che generano i seguenti linguaggi. Salvo quando specificato diversamente, l'alfabeto è $\Sigma = \{0, 1\}$.

(a) $\{w \mid w$ contiene almeno tre simboli uguali a $1\}$
(b) $\{w \mid$ la lunghezza di w è dispari$\}$
(c) $\{w \mid w = w^R$, cioè w è palindroma$\}$
(d) $\{w \mid w$ contiene un numero maggiore di 0 che di $1\}$
(e) Il complemento di $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
(f) Sull'alfabeto $\Sigma = \{0, 1, \#\}$, $\{w\#x \mid w^R$ è una sottostringa di x e $w, x \in \{0, 1\}^*\}$

8. Definire dei PDA che riconoscono i linguaggi dell'esercizio precedente.

9. Dimostrare che i seguenti linguaggi sono context-free.

- $\{x\#y \mid x, y \in \{0, 1\}^* \text{ e } x \neq y\}$
- $\{xy \mid x, y \in \{0, 1\}^* \text{ e } |x| = |y| \text{ ma } x \neq y\}$
- $\{a^i b^j \mid i \neq j \text{ e } 2i \neq j\}$

10. Dimostrare che se G è una CFG in forma normale di Chomsky, allora per ogni stringa $w \in L(G)$ di lunghezza $n \geq 1$, ogni derivazione di w richiede esattamente $2n - 1$ passi.

Seconda parte

11. Sia A il linguaggio che contiene solo ed unicamente la stringa s,

$$s = \begin{cases} 0 & \text{se la vita non sarà mai trovata su Marte} \\ 1 & \text{se un giorno la vita sarà trovata su Marte} \end{cases}$$

A è un linguaggio decidibile? Giustificare la risposta. Ai fini del problema, assumere che la questione se la vita sarà trovata su Marte ammetta una risposta non ambigua Si/No.

12. Un *automa a coda* è simile ad un automa a pila con la differenza che la pila viene sostituita da una coda. Una *coda* è un nastro che permette di scrivere solo all'estremità sinistra del nastro e di leggere solo all'estremità destra. Ogni operazione di scrittura (*push*) aggiunge un simbolo all'estremità sinistra della coda e ogni operazione di lettura (*pull*) legge e rimuove un simbolo all'estremità destra. Come per un PDA, l'input è posizionato su un nastro a sola lettura separato, e la testina sul nastro di lettura può muoversi solo da sinistra a destra. Il nastro di input contiene una cella con un blank che segue l'input, in modo da poter rilevare la fine dell'input. Un automa a coda accetta l'input entrando in un particolare stato di accettazione in qualsiasi momento. Mostra che un linguaggio può essere riconosciuto da un automa deterministico a coda se e solo se è Turing-riconoscibile.

13. Chiamiamo 2-PDA un automa a pila dotato di 2 pile. Mostrare che i 2-PDA riconoscono esattamente la classe dei linguaggi Turing-riconoscibili.

14. Sia $ALL_{DFA} = \{\langle A \rangle \mid A \text{ è un DFA e } L(A) = \Sigma^*\}$. Mostrare che ALL_{DFA} è decidibile.

15. Sia $A_{\varepsilon CFG} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ è una CFG che genera } \varepsilon\}$. Mostrare che $A_{\varepsilon CFG}$ è decidibile.

16. Sia $E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid G \text{ è una TM tale che } L(M) = \varepsilon\}$. Mostrare che $\overline{E_{TM}}$, il complemento di E_{TM}, è Turing-riconoscibile.

17. Sia A un linguaggio. Dimostrare che A è Turing-riconoscibile *se e solo se* esiste un linguaggio decidibile B tale che $A = \{x \mid \text{esiste } y \text{ tale che } \langle x, y \rangle \in B\}$.

18. Mostrare che se A è Turing-riconoscibile e $A \leq_m \overline{A}$, allora A è decidibile.

19. Sia $J = \{w \mid w = 0x \text{ per qualche } x \in A_{TM} \text{ oppure } w = 1y \text{ per qualche } y \in \overline{A_{TM}}\}$. Mostrare che sia J che $\overline{J}$ non sono Turing-riconoscibili.

20. Un *circuito quasi Hamiltoniano* in un grafo G è un ciclo che attraversa esattamente una volta tutti i vertici del grafo *tranne uno*. Il *problema del circuito quasi Hamiltoniano* è il problema di stabilire se un grafo contiene un circuito quasi Hamiltoniano. Dimostrare che il problema del circuito quasi Hamiltoniano è NP-completo.

21. Considera i seguenti problemi:

$$\begin{aligned} \textsc{SetPartitioning} = \{\langle S \rangle \mid\ & S \text{ è un insieme di numeri interi che può essere suddiviso} \\ & \text{in due sottoinsiemi disgiunti } S_1, S_2 \text{ tali che la somma dei numeri in } S_1 \\ & \text{è uguale alla somma dei numeri in } S_2\} \\ \textsc{SubsetSum} = \{\langle S, t \rangle \mid\ & S \text{ è un insieme di numeri interi, ed esiste } S' \subseteq S \\ & \text{tale che la somma dei numeri in } S' \text{ è uguale a } t\} \end{aligned}$$

(a) Mostra che entrambi i problemi sono in NP.
(b) Mostra che SetPartitioning è NP-Hard usando SubsetSum come problema di riferimento.
(c) Mostra che SubsetSum è NP-Hard usando SetPartitioning come problema di riferimento.

22. "Colorare" i vertici di un grafo significa assegnare etichette, tradizionalmente chiamate "colori", ai vertici del grafo in modo tale che nessuna coppia di vertici adiacenti condivida lo stesso colore. Il problema k-COLOR è il problema di trovare una colorazione di un grafo non orientato usando k colori diversi.

(a) Mostrare che il problema k-COLOR è in NP per ogni valore di k
(b) Mostrare che 2-COLOR è in P
(c) Mostrare che 3-COLOR $\leq_P$ k-COLOR per ogni $k > 3$