Automi e Linguaggi Formali

4. Il Pumping Lemma per i linguaggi regolari

Davide Bresolin
a.a. 2018/19

Università degli Studi di Padova

Think, Pair, Share

- Da soli: costruite un FA che riconosce il linguaggio (3 min.)

$$L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$$

Think, Pair, Share

- Da soli: costruite un FA che riconosce il linguaggio (3 min.)

$$L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$$

- A coppie: confrontatevi per arrivare a una soluzione condivisa dell'esercizio (3 min.)

Think, Pair, Share

- Da soli: costruite un FA che riconosce il linguaggio (3 min.)

$$L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$$

- A coppie: confrontatevi per arrivare a una soluzione condivisa dell'esercizio (3 min.)
- Tutti assieme: rispondete alla domanda

il linguaggio L_{01} è regolare?

Compitini

- Primo Compitino:
  venerdì 12 Aprile, ore 12:30, aule LuM250 e P200
- Secondo Compitino:
  venerdì 7 Giugno, ore 12:30, aule LuM250 e P200

Dimostriamo che L_{01} non è regolare

- Supponiamo che $L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ sia regolare

Dimostriamo che L_{01} non è regolare

- Supponiamo che $L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ sia regolare
- Allora deve essere accettato da un DFA A con un certo numero k di stati

Dimostriamo che L_{01} non è regolare

- Supponiamo che $L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ sia regolare
- Allora deve essere accettato da un DFA A con un certo numero k di stati
- Cosa succede quando A legge 0^k?

Dimostriamo che L_{01} non è regolare

- Supponiamo che $L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ sia regolare
- Allora deve essere accettato da un DFA A con un certo numero k di stati
- Cosa succede quando A legge 0^k?
- Seguirà una qualche sequenza di transizioni:

$$\text{start} \longrightarrow \underbrace{p_0 \xrightarrow{0} p_1 \xrightarrow{0} p_2 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} p_k}_{k+1 \text{ stati}}$$

Dimostriamo che L_{01} non è regolare

Università degli Studi di Padova

- Supponiamo che $L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ sia regolare
- Allora deve essere accettato da un DFA A con un certo numero k di stati
- Cosa succede quando A legge 0^k?
- Seguirà una qualche sequenza di transizioni:

$$\text{start} \longrightarrow \underbrace{p_0 \xrightarrow{0} p_1 \xrightarrow{0} p_2 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} p_k}_{k+1 \text{ stati}}$$

- Siccome ci sono $k+1$ stati nella sequenza, esiste uno stato che si ripete: esistono $i < j$ tali che $p_i = p_j$

Dimostriamo che L_{01} non è regolare

- Supponiamo che $L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ sia regolare
- Allora deve essere accettato da un DFA A con un certo numero k di stati
- Cosa succede quando A legge 0^k?
- Seguirà una qualche sequenza di transizioni:

$$\text{start} \longrightarrow \underbrace{p_0 \xrightarrow{0} p_1 \xrightarrow{0} p_2 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} p_k}_{k+1 \text{ stati}}$$

- Siccome ci sono $k+1$ stati nella sequenza, esiste uno stato che si ripete: esistono $i < j$ tali che $p_i = p_j$
- Chiamiamo q questo stato

Dimostriamo che L_{01} non è regolare

Università degli Studi di Padova

- Cosa succede quando l'automa A legge 1^i partendo da q?

Dimostriamo che L_{01} non è regolare

Università degli Studi di Padova

- Cosa succede quando l'automa A legge 1^i partendo da q?
- Se l'automa finisce la lettura in uno stato finale:
  - allora accetta, sbagliando, la parola 0^j1^i

Dimostriamo che L_{01} non è regolare

- Cosa succede quando l'automa A legge 1^i partendo da q?
- Se l'automa finisce la lettura in uno stato finale:
  - allora accetta, sbagliando, la parola 0^j1^i
- Se l'automa finisce la lettura in uno stato non finale:
  - allora rifiuta, sbagliando, la parola 0^i1^i

Dimostriamo che L_{01} non è regolare

- Cosa succede quando l'automa A legge 1^i partendo da q?
- Se l'automa finisce la lettura in uno stato finale:
  - allora accetta, sbagliando, la parola 0^j1^i
- Se l'automa finisce la lettura in uno stato non finale:
  - allora rifiuta, sbagliando, la parola 0^i1^i
- In entrambi i casi abbiamo ingannato l'automa, quindi L_{01} non può essere regolare

Il Pumping Lemma per Linguaggi Regolari

Theorem (Pumping Lemma per Linguaggi Regolari)

Sia L un linguaggio regolare. Allora

- *esiste una lunghezza $h \geq 0$ tale che*
- *ogni parola $w \in L$ di lunghezza $|w| \geq h$*
- *può essere spezzata in $w = xyz$ tale che:*
  1. $y \neq \varepsilon$ *(il secondo pezzo è non vuoto)*
  2. $|xy| \leq h$ *(i primi due pezzi sono lunghi al max h)*
  3. $\forall k \geq 0$, $xy^k z \in L$ *(possiamo "pompare" y rimanendo in L)*

Dimostrazione:

- Supponiamo che L sia un linguaggio regolare

Pumping Lemma: dimostrazione

Dimostrazione:

- Supponiamo che L sia un linguaggio regolare
- Allora è riconosciuto da un DFA con, supponiamo, h stati

Università degli Studi di Padova

Dimostrazione:

- Supponiamo che L sia un linguaggio regolare
- Allora è riconosciuto da un DFA con, supponiamo, h stati
- Consideriamo una parola $w = a_1 a_2 \ldots a_m \in L$ di lunghezza $m \geq h$

Pumping Lemma: dimostrazione

Dimostrazione:

- Supponiamo che L sia un linguaggio regolare
- Allora è riconosciuto da un DFA con, supponiamo, h stati
- Consideriamo una parola $w = a_1 a_2 \dots a_m \in L$ di lunghezza $m \geq h$
- Consideriamo gli stati percorsi da A mentre legge w:

$$p_i = \hat{\delta}(p_0, a_1 a_2 \dots a_i)$$

Dimostrazione:

- Supponiamo che L sia un linguaggio regolare
- Allora è riconosciuto da un DFA con, supponiamo, h stati
- Consideriamo una parola $w = a_1 a_2 \dots a_m \in L$ di lunghezza $m \geq h$
- Consideriamo gli stati percorsi da A mentre legge w:

$$p_i = \hat{\delta}(p_0, a_1 a_2 \dots a_i)$$

- Siccome in $p_0, p_1, \dots, p_h$ ci sono $h + 1$ stati, ne esiste uno che si ripete:

$$\text{esistono } i < j \text{ tali che } p_i = p_j \text{ e } j \leq h$$

Pumping Lemma: dimostrazione

- Possiamo spezzare w in tre parti $w = xyz$:
  1. $x = a_1 a_2 \dots a_i$
  2. $y = a_{i+1} a_{i+1} \dots a_j$
  3. $z = a_{j+1} a_{j+1} \dots a_m$

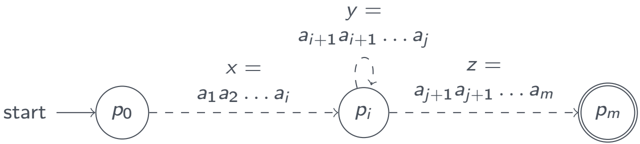
Pumping Lemma: dimostrazione

- Possiamo spezzare w in tre parti $w = xyz$:
  1. $x = a_1 a_2 \dots a_i$
  2. $y = a_{i+1} a_{i+1} \dots a_j$
  3. $z = a_{j+1} a_{j+1} \dots a_m$
- che rispettano le condizioni del Lemma:
  - $y \neq \varepsilon$ perché $i < j$
  - $|xy| \leq h$ perché $j \leq h$

Pumping Lemma: dimostrazione

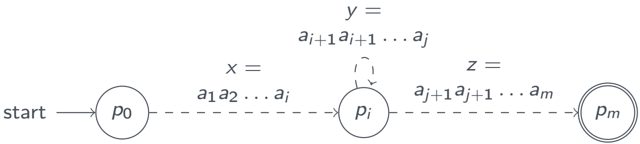
Università degli Studi di Padova

- Quindi, nel grafo delle transizioni di A:



Pumping Lemma: dimostrazione

- Quindi, nel grafo delle transizioni di A:



- E di conseguenza anche $xy^k z$ viene riconosciuta dall'automa per ogni $k \geq 0$ $\square$

- Ogni linguaggio regolare soddisfa il Pumping Lemma.
- Un linguaggio che falsifica il Pumping Lemma non può essere regolare:
  - per ogni lunghezza $h \geq 0$
  - esiste una parola $w \in L$ di lunghezza $|w| \geq h$ tale che
  - per ogni suddivisione $w = xyz$ tale che:
    1. $y \neq \varepsilon$ (il secondo pezzo è non vuoto)
    2. $|xy| \leq h$ (i primi due pezzi sono lunghi al max h)
  - esiste un $k \geq 0$ tale che $xy^kz \in L$ (possiamo "pompare" y ed uscire da L)
- Attenzione: esistono linguaggi non regolari che rispettano il Pumping Lemma!

Il Pumping Lemma come Gioco

- L'avversario sceglie la lunghezza h
- Noi scegliamo una parola w
- L'avversario spezza w in xyz
- Noi scegliamo k tale che $xy^kz \notin L$
- allora abbiamo vinto

Il Gioco del Pumping Lemma

Giocate al Pumping Lemma con il vostro vicino di banco:

- Prendete un foglio ogni due persone
- Scegliete chi muove per primo e chi per secondo
- Il primo giocatore ha l'obiettivo di mostrare che il linguaggio rispetta il Pumping Lemma
- Il secondo giocatore che non lo rispetta
- Giocate riempiendo gli spazi nel testo sottostante
- Girate il foglio e giocate la seconda partita scambiandovi i ruoli (chi ha mosso per primo ora muove per secondo)

1. Sia L_{ab} il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ dove il numero di a è uguale al numero di b. L_{ab} è regolare?

1 Sia L_{ab} il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ dove il numero di a è uguale al numero di b. L_{ab} è regolare?

No, L_{ab} non è regolare:

- supponiamo per assurdo che lo sia
- sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma
- consideriamo la parola $w = a^h b^h$
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$:
  $$w = \underbrace{aaa\dots a}_{x}\underbrace{a\dots a}_{y}\underbrace{a\dots ab\dots bb}_{z}$$
- poiché $|xy| \leq h$, le stringhe x e y sono fatte solo di a
- per il Pumping lemma, anche $xy^2z \in L_{ab}$, ma contiene più a che b $\Rightarrow$ assurdo

2. Il linguaggio $L_{rev} = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$ è regolare?

2 Il linguaggio $L_{rev} = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$ è regolare?

No, L_{rev} non è regolare:

- supponiamo per assurdo che lo sia
- sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma
- consideriamo la parola $w = a^h bba^h$
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$:
  $w = \underbrace{aaa\ldots}_{x}\underbrace{\ldots a}_{y}\underbrace{abbaaa\ldots aaa}_{z}$
- poiché $|xy| \leq h$, le stringhe x e y sono fatte solo di a
- per il Pumping lemma, anche $xy^0z = xz \in L_{rev}$, ma non la posso spezzare in $ww^R \Rightarrow$ assurdo

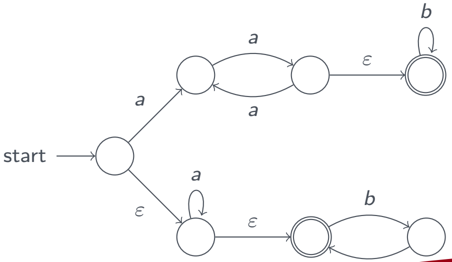
Università degli Studi di Padova

3. Il linguaggio $L_{nk} = \{a^n b^k : n$ è dispari oppure k è pari$\}$ è regolare?

3. Il linguaggio $L_{nk} = \{a^n b^k : n \text{ è dispari oppure } k \text{ è pari}\}$ è regolare?

Si, L_{nk} è regolare:

- è rappresentato dall'espressione regolare $\mathbf{a(aa)^*b^*} + \mathbf{a^*(bb)^*}$
- e riconosciuto dall'automa



Pumping Lemma: esercizi

4. Il linguaggio $L_p = \{1^p : p \text{ è primo}\}$ è regolare?

4 Il linguaggio $L_p = \{1^p : p \text{ è primo}\}$ è regolare?

No, L_p non è regolare:

- supponiamo per assurdo che lo sia
- sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma
- consideriamo una parola $w = 1^p$ con p primo e $p > h + 2$
- sia $w = xyz$ una suddivsione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$:

$$w = \underbrace{11\dots11}_{x}\underbrace{11\dots1}_{y}\underbrace{111\dots11}_{z}$$

- ...

- ...
- sia $|y| = m$: allora $|xz| = p - m$
- per il Pumping lemma, anche $v = xy^{p-m}z \in L_p$
- allora $|v| = m(p - m) + p - m = (p - m)(m + 1)$ si può scomporre in due fattori
- poiché $y \neq \varepsilon$, allora $|y| = m > 0$ e $m + 1 > 1$
- anche $p - m > 1$ perché abbiamo scelto $p > h + 2$ e $m \leq h$ perché $|xy| \leq h$
- i due fattori sono entrambi maggiori di 1 e quindi $|v|$ non è un numero primo
- $v \notin L_{rev}$, assurdo

Pumping Lemma: esercizi

5. Il linguaggio $L_{3n} = \{1^{3n+2} : n \geq 0\}$ è regolare?
6. Il linguaggio $L_{mn} = \{0^n 1^m 0^n : m + n > 0\}$ è regolare?
7. Il linguaggio $L_{mnp} = \{0^n 1^m 0^p : m + n + p > 0\}$ è regolare?
8. Il linguaggio

   $$L_{2ab} = \left\{w \in \{a, b\}^* : \text{ numero di } a \text{ è due volte il numero di } b\right\}$$

   è regolare?