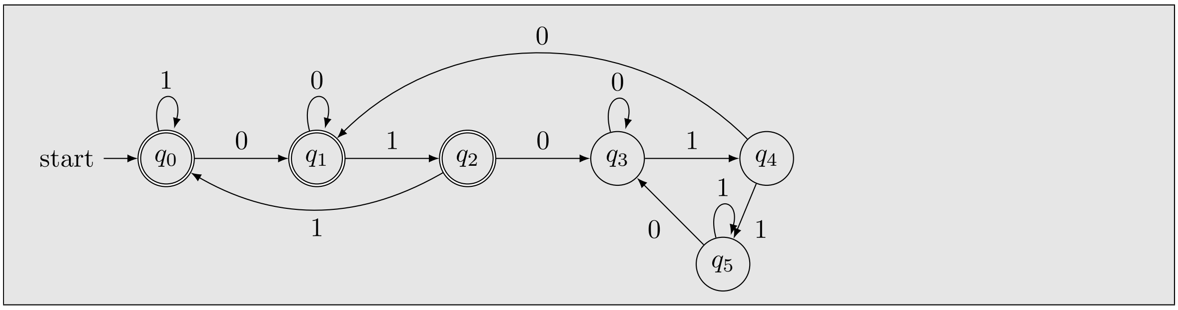
Automi e Linguaggi Formali
Esame del 19 Giugno 2019 – Parte I

Tempo a disposizione: 1 h 30 min

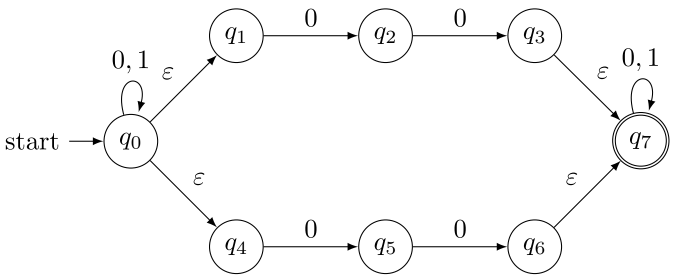
1. Definire un automa a stati finiti (di qualsiasi tipologia) che riconosca il linguaggio

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contiene un numero pari di occorrenze della sottostringa } 010\}$$

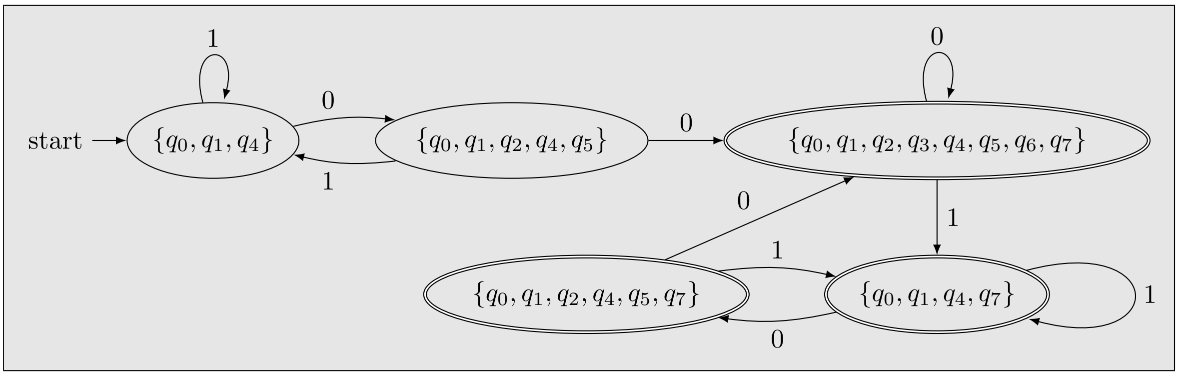
Per esempio, la parola 0100010 appartiene al linguaggio perché contiene due occorrenze di 010, la parola 01111 appartiene al linguaggio perché contiene zero occorrenze di 010, mentre la parola 0101010 non appartiene al linguaggio perché contiene tre occorrenze di 010.



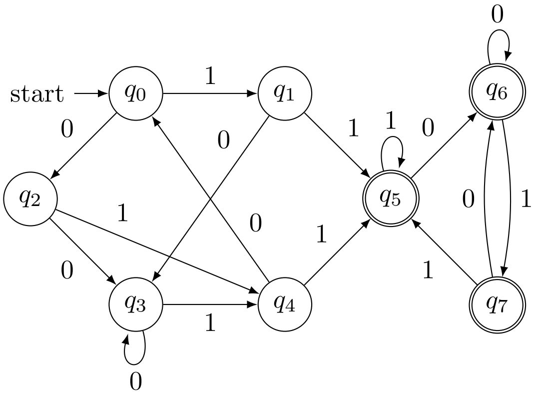
2. Dato il seguente ε-NFA



costruire un DFA equivalente. Dare solo la parte del DFA che è raggiungibile dallo stato iniziale.



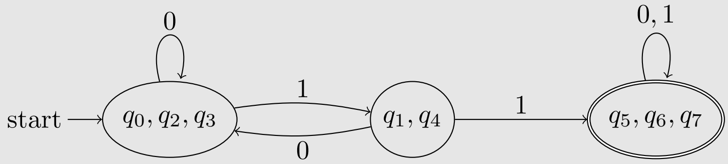
3. Minimizzare il seguente DFA usando l'algoritmo riempi-tabella.



L'esecuzione dell'algoritmo riempi-tabella porta alla seguente tabella finale:

q_1	X						
q_2		X					
q_3		X					
q_4	X		X	X			
q_5	X	X	X	X	X		
q_6	X	X	X	X	X		
q_7	X	X	X	X	X		
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6

Fondendo i tre blocchi stati equivalenti $q_0 \equiv q_2 \equiv q_3$, $q_1 \equiv q_4$ e $q_5 \equiv q_6 \equiv q_7$ otteniamo il DFA minimo con tre stati:



4. Sia $\Sigma = \{0, 1\}$ e considerate il linguaggio

$$M3N = \{0^m 1^n \mid m \leq 3n\}$$

(a) Completate il seguente schema di partita per il Gioco del Pumping Lemma in modo da far vincere il Giocatore 2:

Giocatore 1: sceglie il valore di $h = \mathbf{2}$

Giocatore 2: sceglie la parola $w \in M3N$ di lunghezza maggiore di h

$$w = \mathbf{00000011}$$

Giocatore 1: suddivide w in

- $x = \mathbf{0}$
- $y = \mathbf{0}$
- $z = \mathbf{000011}$

rispettando le condizioni che $|xy| \leq h$ e $y \neq \varepsilon$

Giocatore 2: sceglie una potenza $k = \mathbf{2}$

La parola $xy^k z = \mathbf{0000000111} \notin M3N$: vince il **Giocatore 2**

(b) Dimostrate che $M3N$ non è un linguaggio regolare usando il Pumping Lemma.

Supponiamo per assurdo che $M3N$ sia regolare. Di conseguenza, $M3N$ deve rispettare il Pumping Lemma.

- sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = 0^{3h}1^h$, che appartiene ad $M3N$ ed è di lunghezza maggiore di h;
- sia $w = xyz$ una suddivisione arbitraria di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$;
- poiché $|xy| \leq h$, allora xy è completamente contenuta nel prefisso 0^{3h} di w posto prima della sequenza di 1, e quindi sia x che y sono composte solo da 0. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, possiamo dire che $y = 0^p$ per qualche valore $p > 0$. Allora la parola xy^2z è nella forma $0^{3h+p}1^h$, e non appartiene al linguaggio perché il numero di 0 nel prefisso è maggiore del triplo del numero di 1 nel suffisso.

Abbiamo trovato un assurdo: $M3N$ non è un linguaggio regolare.

5. Si consideri la seguente grammatica CF, G: $S \to aA$, $A \to Bb \mid b$, $B \to aA \mid \epsilon$

(a) Descrivere il linguaggio $L(G)$ in termini di un linguaggio L composto da "stringhe w con certe proprietà".

(b) Dimostrare per induzione che tutte le stringhe in $L(G)$ sono in L, cioè che $L(G) \subseteq L$.

$L(S) = \{a^n b^n | n > 0\}$. Dimostriamo per induzione sulla lunghezza della derivazione che la seguente tesi è vera:

$L(A) = \{a^n b^{n+1} | n \geq 0\}$ e $L(B) = \{a^n b^n | n \geq 0\}$

Base per $L(A)$: lunghezza 1. $A \Rightarrow b$, soddisfa la tesi

Base per $L(B)$: lunghezza 1. $B \Rightarrow \epsilon$, soddisfa la tesi.

Step per $L(A)$ e per $L(B)$. Supponiamo che la tesi sia vera per derivazioni da A e da B di $n > 0$ passi. Dimostriamo che allora vale per derivazioni di n+1 passi. Consideriamo una derivazione di n+1 passi che inizia con A, allora il primo passo è $A \Rightarrow Bb$ e dopo in n passi, per ipotesi induttiva, $B \Rightarrow^n a^k b^k$ per $k \geq 0$, e quindi $A \Rightarrow^{n+1} a^k b^{k+1}$. Se prendiamo una derivazione di n+1 passi che inizia con B, il primo passo sarà $B \Rightarrow aA$ e di nuovo per ipotesi induttiva, A in n passi produce $a^k b^{k+1}$ per $k \geq 0$. Per cui l'intera derivazione diventa $B \Rightarrow^{n+1} a^{k+1} b^{k+1}$, per $k \geq 0$.

Da quanto appena dimostrato, segue che da S le derivazioni di qualsiasi lunghezza producono $S \Rightarrow aA \Rightarrow^* a^k b^k$, per $k > 0$.