Automi e Linguaggi Formali

a.a. 2016/2017

LT in Informatica
3 Marzo 2017

Università degli Studi di Padova

Moodle del corso

Il moodle del corso è attivo

- Vi si accede da `https://elearning.unipd.it/math`
- selezionando prima Informatica
- e poi Automi e linguaggi formali 2016/2017

Definizione formale di NFA

Un Automa a Stati Finiti Non Deterministico (NFA) è una quintupla

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- Q è un insieme finito di stati
- Σ è un alfabeto finito (= simboli in input)
- δ è una funzione di transizione che prende in input (q, a) e restituisce un sottoinsieme di Q
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- $F \subseteq Q$ è un insieme di stati finali

Esercizio

Consideriamo l'alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ e costruiamo un automa non deterministico che riconosce il linguaggio di tutte le parole tali che uno dei simboli dell'alfabeto non compare mai:

- tutte le parole che non contengono a
- $+$ tutte le parole che non contengono b
- $+$ tutte le parole che non contengono c
- $+$ tutte le parole che non contengono d

Possiamo costruire un DFA che riconosce lo stesso linguaggio?

Si risponde qui — Risultati

Equivalenza di DFA e NFA

- Sorprendentemente, NFA e DFA sono in grado di riconoscere gli stessi linugaggi
- Per ogni NFA N c'è un DFA D tale che $L(D) = L(N)$, e viceversa
- L'equivalenza di dimostra mediante una construzione a sottoinsiemi:

  Dato un NFA

  $$N = (Q_N, \Sigma, q_0, \delta_N, F_N)$$

  costruiremo un DFA

  $$D = (Q_D, \Sigma, \{q_0\}, \delta_D, F_D)$$

  tale che

  $$L(D) = L(N)$$

La costruzione a sottoinsiemi

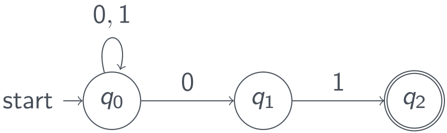
- $Q_D = \{S : S \subseteq Q_N\}$
  Ogni stato del DFA corrisponde ad un insieme di stati dell'NFA
- $F_D = \{S \subseteq Q_N : S \cap F_N \neq \emptyset\}$
  Uno stato del DFA è finale se c'è almeno uno stato finale corrispondente nell'NFA
- Per ogni $S \subseteq Q_N$ e per ogni $a \in \Sigma$

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$

  La funzione di transizione "percorre tutte le possibili strade"

Nota: $|Q_D| = 2^{|Q_N|}$, anche se spesso la maggior parte degli stati in Q_D sono "inutili", cioè non raggiungibili dallo stato iniziale.

Esempio di costruzione a sottoinsiemi

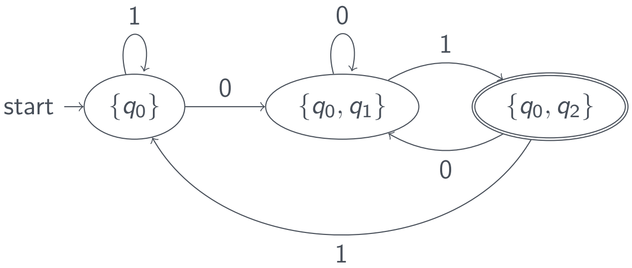


Costruiamo δ_D per l'NFA qui sopra:

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Diagramma degli stati

La tabella di transizione per D ci permette di ottenere il diagramma di transizione



Per semplificare il disegno, ho omesso gli stati non raggiungibili

Theorem

Sia D il DFA ottenuto da un NFA N con la costruzione a sottoinsiemi. Allora $L(D) = L(N)$.

Dimostrazione: Prima mostriamo per induzione su $|w|$ che

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$$

Base: $w = \varepsilon$. L'enunciato segue dalla definizione.

Induzione:

- Sia $|w| = n+1$ e supponiamo vero l'enunciato per la lunghezza n. Scomponiamo w in $w = xa$ (con $|x| = n$ e a simbolo finale)
- Per ipotesi induttiva $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \hat{\delta}_N(q_0, x) = \{p_1, \dots, p_k\}$
- Per la definizione di $\hat{\delta}$ per gli NFA

$$\hat{\delta}_N(q_0, xa) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a)$$

- Per la costruzione a sottoinsiemi

$$\delta_D(\{p_1, \dots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a)$$

Induzione (continua):

- Per la definizione di $\hat{\delta}$ per i DFA

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, xa) = \delta_D(\{p_1, \dots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a)$$

- Quindi abbiamo mostrato che $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$

Poiché sia D che N accettano se solo se $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w)$ e $\hat{\delta}_N(q_0, w)$ contengono almeno un stato in F_N, allora abbiamo dimostrato che $L(D) = L(N)$

Teorema di equivalenza tra DFA e NFA

Theorem

Un linguaggio L è accettato da un DFA se e solo se è accettato da un NFA.

Dimostrazione:

- La parte "se" è il teorema precedente
- La parte "solo se" si dimostra osservando che ogni DFA può essere trasformato in un NFA modificando δ_D in δ_N con la seguente regola:

  Se $\delta_D(q, a) = p$ allora $\delta_N(q, a) = \{p\}$