Soluzione dell'appello d'automi del 19/9/2017

Parte di Linguaggi liberi dal contesto.

4. Data la seguente grammatica libera da contesto G :

$S \rightarrow aB$

$B \rightarrow Ab \mid b$

$A \rightarrow aB \mid a$

rispondere alle seguenti domande:

a) Dare una definizione del linguaggio L(G) del tipo seguente: L(G) è l'insieme delle stringhe in {a, b}* che soddisfano la seguente proprietà....Per rispondere conviene definire i linguaggi generati dai non-terminali A e B.

b) Dimostrare induttivamente che la vostra definizione di L(G) è corretta. Conviene prima dimostrare che A e B generano linguaggi definiti per loro nel punto precedente.

c) Descrivere un automa a pila che riconosca L(G) per stato finale e spiegare perché secondo voi funziona.

Soluzioni:

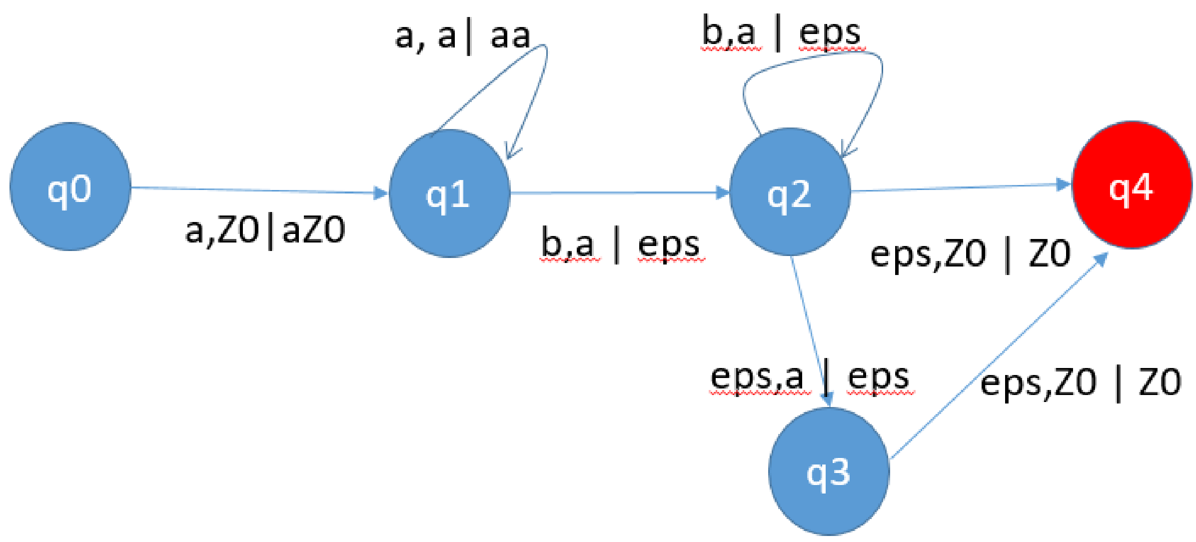
a) Ci concentriamo su A e B cercando di definire i linguaggi che questi 2 non-terminali generano. Chiameremo L(A) e L(B) i linguaggi generati da A e B, rispettivamente. Costruiamo L(A) ed L(B) "in parallelo". E' ovvio che L(A) contiene a e L(B) contiene b. Da questo sostituendo le 2 stringhe nelle produzioni ricorsive di A e di B, si capisce che L(A) contiene anche ab e lo stesso vale per L(B). Con la stessa tecnica, si vede che L(A) contiene anche aab e L(B) contiene abb. Con un passo in più, vediamo che sia L(A) che L(B) contengono aabb. Se necessario si può fare qualche passo in più. Ma già adesso possiamo derivare le seguenti definizioni:
   (i) $L(A)=\{a^n b^m \mid n>0$ e $m>=0$ e o $n=m$ oppure $n=m+1\}$
   (ii) $L(B)=\{a^n b^m \mid n>=0$ e $m>0$ e o $n=m$ oppure $m=n+1\}$

   Da questo è facile derivare la definizione di L(S) visto che semplicemente "mette un a davanti" a ciascuna stringa di L(B). Da cui segue:

   $L(S)=)=\{a^n b^m \mid n>0$ e $m>0$ e o $n=m$ oppure $n=m+1\}$

b) Procediamo per induzione per mostrare contemporaneamente (i) ed (ii). L'induzione è sulla lunghezza delle derivazioni. La base corrisponde a lunghezza 1 ed è immediato vedere che a è in L(A) e b in L(B). Assumiamo che (i) ed (ii) siano vere per tutte le derivazioni di lunghezza n>=1 e dimostriamo che allora valgono per derivazioni di lunghezza n++1. Iniziamo da L(A). Una derivazione di n+1 passi che parte da A, inizia con A => aB => aw, con w che soddisfa (ii) per ipotesi induttiva. Da questo segue che $A \Rightarrow aa^n b^m$ con $n>=0$ e $m>0$ e o $n=m$ oppure $m=n+1$. Per cui $aa^n b^m$ avrà $n+1>0$ a e $m>0$ e vale che o $n+1 >m$ oppure $n+1=m$. Per cui $aa^n b^m$ è in L(A). La prova per B è simile.
   A questo punto per dimostrare che L(S) è come specificato in (a) basta ragionare in modo simile a quanto fatto nel passo induttivo, visto che ogni stringa generata da S avrà la forma aw, con w in L(B).

c) Definiamo ora un automa a pila che riconosca L(S).



Nella figura q4 è lo stato finale e esp sta per la stringa vuota. Il fatto che questo automa accetti L(S) si basa sulle seguenti osservazioni:

1) Accetta stringhe composte da a seguite da b con almeno un ‘a’ (garantito dalla transizione da q0 a q1) e da un ‘b’ (garantito dalla transizione da q1 a q2).
2) Il numero dei ‘b’ può essere o uguale a quello degli ‘a’ (transizione da q2 a q4) oppure ci può essere 1 solo extra ‘a (transizioni da q2 a q3 e poi a q4).