AUTOMI E LINGUAGGI FORMALI
ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALL'ESAME DEL 25 AGOSTO 2020

Prima parte

1. Per una stringa $w = w_1w_2 \dots w_n$, l'*inversa* di w è la stringa $w^R = w_n \dots w_2w_1$. Per ogni linguaggio A, sia $A^R = \{w^R \mid w \in A\}$. Mostrare che se A è regolare allora lo è anche A^R.

2. Sia $A/b = \{w \mid wb \in A\}$. Mostrare che se A è un linguaggio regolare e $b \in \Sigma$, allora A/b è regolare.

3. Sia $A/B = \{w \mid wx \in A \text{ per qualche } x \in B\}$. Mostrare che se A è un linguaggio regolare e B un linguaggio qualsiasi, allora A/B è regolare.

4. Il pumping lemma afferma che ogni linguaggio regolare ha una lunghezza del pumping p, tale che ogni stringa del linguaggio può essere iterata se ha lunghezza maggiore o uguale a p. La *lunghezza minima del pumping* per un linguaggio A è il più piccolo p che è una lunghezza del pumping per A. Per ognuno dei seguenti linguaggi, dare la lunghezza minima del pumping e giustificare la risposta.

(a) 110^*
(b) $1^*0^*1^*$
(c) $0^*1^*0^*1^* + 10^*1$
(d) $(01)^*$
(e) $\emptyset$
(f) $0^*01^*01^*$
(g) $10(11^*0)^*0$
(h) 101101
(i) $\{w \in \Sigma^* \mid w \neq 101101\}$

5. Dimostrare che i seguenti linguaggi non sono regolari.

(a) $\{0^n1^m0^m \mid m, n \geq 0\}$
(b) $\{0^n1^m \mid n \neq m\}$
(c) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ non è palindroma}\}$
(d) $\{wtw \mid w, t \in \{0,1\}^+\}$, dove $\{0,1\}^+$ è l'insieme di tutte le stringhe binarie di lunghezza maggiore o uguale a 1

6. Per ogni linguaggio A, sia $SUFFIX(A) = \{v \mid uv \in A \text{ per qualche stringa } u\}$. Mostrare che la classe dei linguaggi context-free è chiusa rispetto all'operazione di $SUFFIX$.

7. Dimostrare che i seguenti linguaggi sono context-free. Salvo quando specificato diversamente, l'alfabeto è $\Sigma = \{0,1\}$.

(a) $\{w \mid w \text{ inizia e termina con lo stesso simbolo }\}$
(b) $\{w \mid \text{la lunghezza di } w \text{ è dispari e il suo simbolo centrale è } 0\}$
(c) $\{w \mid w = w^R, \text{ cioè } w \text{ è palindroma}\}$
(d) $\{w \mid w \text{ contiene un numero maggiore di 0 che di 1}\}$
(e) Il complemento di $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$
(f) Sull'alfabeto $\Sigma = \{0,1,\#\}$, $\{w\#x \mid w^R \text{ è una sottostringa di } x \text{ e } w, x \in \{0,1\}^*\}$
(g) $\{x\#y \mid x, y \in \{0,1\}^* \text{ e } x \neq y\}$
(h) $\{xy \mid x, y \in \{0,1\}^* \text{ e } |x| = |y| \text{ ma } x \neq y\}$
(i) $\{a^ib^j \mid i \neq j \text{ e } 2i \neq j\}$

8. Se A e B sono linguaggi, definiamo $A \circ B = \{xy \mid x \in A, y \in B \text{ e } |x| = |y|\}$. Mostrare che se A e B sono linguaggi regolari, allora $A \circ B$ è un linguaggio context-free.

Seconda parte

9. Sia A il linguaggio che contiene solo ed unicamente la stringa s,

$$s = \begin{cases} 0 & \text{se la vita non sarà mai trovata su Marte} \\ 1 & \text{se un giorno la vita sarà trovata su Marte} \end{cases}$$

A è un linguaggio decidibile? Giustificare la risposta. Ai fini del problema, assumere che la questione se la vita sarà trovata su Marte ammetta una risposta non ambigua Si/No.

10. Una *Macchina di Turing a sola scrittura* è una TM a nastro singolo che può modificare ogni cella del nastro al più una volta (inclusa la parte di input del nastro). Mostrare che questa variante di macchina di Turing è equivalente alla macchina di Turing standard.

11. Chiamiamo k-PDA un automa a pila dotato di k pile.

(a) Mostrare che i 2-PDA sono più potenti degli 1-PDA
(b) Mostrare che i 2-PDA riconoscono esattamente la classe dei linguaggi Turing-riconoscibili
(c) Mostrare che i 3-PDA *non* sono più potenti dei 2-PDA

12. Sia $S_{REX} = \{\langle R, S\rangle \mid R, S$ sono espressioni regolari tali che $L(R) \subseteq L(S)\}$. Mostrare che S_{REX} è decidibile.

13. Sia $X = \{\langle M, w\rangle \mid M$ è una TM a nastro singolo che non modifica la porzione di nastro che contiene l'input $w\}$. X è decidibile? Dimostrare la vostra risposta.

14. Sia $E_{TM} = \{\langle M\rangle \mid G$ è una TM tale che $L(M) = \varepsilon\}$. Mostrare che $\overline{E_{TM}}$, il complemento di E_{TM}, è Turing-riconoscibile.

15. Mostrare che se A è Turing-riconoscibile e $A \leq_m \overline{A}$, allora A è decidibile.

16. Sia A un linguaggio. Dimostrare che A è Turing-riconoscibile *se e solo se* esiste un linguaggio decidibile B tale che $A = \{x \mid$ esiste y tale che $\langle x, y\rangle \in B\}$.

17. $A \leq_m B$ e B è un linguaggio regolare implica che A è un linguaggio regolare? Perché si o perché no?

18. Un circuito Hamiltoniano in un grafo G è un ciclo che attraversa ogni vertice di G esattamente una volta. Stabilire se un grafo contiene un circuito Hamiltoniano è un problema NP-completo.

Considerate il seguente problema, che chiameremo HAM375: dato un grafo G con n vertici, trovare un ciclo che attraversa esattamente una volta $n - 375$ vertici del grafo (ossia tutti i vertici di G *tranne* 375). Dimostrare che il problema HAM375 è NP-completo.

19. Il problema SetPartitioning chiede di stabilire se un insieme di numeri interi S può essere suddiviso in due sottoinsiemi disgiunti S_1 e S_2 tali che la somma dei numeri in S_1 è uguale alla somma dei numeri in S_2. Sappiamo che questo problema è NP-completo.

Considerate la seguente variante del problema, che chiameremo QuasiPartitioning: dato un insieme di numeri interi S, stabilire se può essere suddiviso in due sottoinsiemi disgiunti S_1 e S_2 tali che la somma dei numeri in S_1 è uguale alla somma dei numeri in S_2 *meno 1*. Dimostrare che il problema QuasiPartitioning è NP-completo.

20. "Colorare" i vertici di un grafo significa assegnare etichette, tradizionalmente chiamate "colori", ai vertici del grafo in modo tale che nessuna coppia di vertici adiacenti condivida lo stesso colore. Il problema 3COLOR è il problema di trovare una colorazione di un grafo non orientato usando 3 colori diversi. Sappiamo che questo problema è NP-completo.

Considerate la seguente variante del problema, che chiameremo Almost3Color: dato un grafo non orientato G, stabilire se è possibile colorare i vertici di G con tre colori diversi, in modo che ci siano al più 8939 coppie di vertici adiacenti dello stesso colore. Dimostrare che il problema Almost3Color è NP-completo.