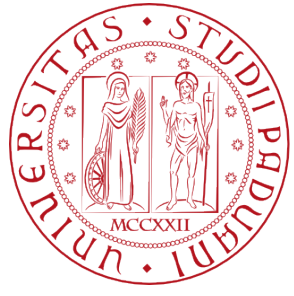
Automi e Linguaggi Formali

Parte 17 – Complessità di tempo



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Davide Bresolin
Ultimo aggiornamento: 16 maggio 2021

Sommario

Misure di Complessità

Consideriamo il linguaggio $A = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$

- Che tipo di linguaggio è?
- È decidibile?
- Quanto tempo serve ad una TM a nastro singolo per decidere questo linguaggio?

Complessità di tempo: definizione

- Sia M una TM deterministica che si ferma su tutti gli input.
- Il tempo di esecuzione (o complessità di tempo) di M è la funzione $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ tale che $f(n)$ è il numero massimo di passi che M utilizza su un input di lunghezza n.
- Se $f(n)$ è il tempo di esecuzione di M, diciamo che M è una TM di tempo $f(n)$.
- Useremo n per rappresentare la lunghezza dell'input.
- Ci interesseremo dell'analisi del caso pessimo.

Notazione O-grande

- Analisi asintotica: valuta il tempo di esecuzione su input grandi
- Considera solo il termine di ordine maggiore e ignora i coefficenti

Definition

Date due funzioni f, g, diciamo che $f(n) = O(g(n))$ se esistono interi positivi c, n_0 tali che per ogni $n \geq n_0$:

$$f(n) \leq c\, g(n).$$

$g(n)$ è un limite superiore asintotico per $f(n)$

Analisi di complessità

Analizziamo questa TM per $A = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$:

M_1 = "Su input w:

1. Scorre il nastro e rifiuta se trova uno 0 a destra di un 1
2. Ripete finché il nastro contiene almeno uno 0 ed un 1:
3. Scorre il nastro cancellando uno 0 ed un 1
4. Se rimane almeno uno 0 dopo che ogni 1 è stato cancellato, o se rimane almeno un 1 dopo che ogni 0 è stato cancellato, rifiuta. Altrimenti, se non rimangono né 0 né 1 sul nastro, accetta"

Classi di complessità di tempo

Definition

Sia $t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ una funzione.

La classe di complessità di tempo $\mathrm{TIME}(t(n))$ è l'insieme di tutti i linguaggi che sono decisi da una TM in tempo $O(t(n))$.

- Questo è diverso dalle classi di linguaggi discusse in precedenza, che si concentravano sulla computabilità.
- Questa classificazione si concentra sul tempo necessario per decidere il linguaggio.

Possiamo fare di meglio?

- Dall'analisi che abbiamo fatto, sappiamo che

$$A = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$$

appartiene alla classe di complessità di tempo $\mathrm{TIME}(n^2)$, perché M_1 decide A in tempo $O(n^2)$

MA

- Esiste una macchina che decide A in modo asintoticamente più veloce?

Miglioriamo M_1

Idea: cancelliamo metà degli 0 e metà degli 1 ad ogni scansione

M_2 = "Su input w:

1. Scorre il nastro e rifiuta se trova uno 0 a destra di un 1
2. Ripete finché il nastro contiene almeno uno 0 ed un 1:
   3. Scorre il nastro e controlla se il numero totale di 0 e 1 rimasti è pari o dispari. Se è dispari, rifiuta.
   4. Scorre il nastro, cancellando prima ogni secondo 0 a partire dal primo 0, poi cancellando ogni secondo 1 a partire dal primo 1.
5. Se nessuno 0 e nessun 1 rimangono sul nastro, accetta. Altrimenti rifiuta."

Possiamo fare ancora meglio?

- Possiamo trovare una TM che decide A in O(n)?
- Problema: non esiste una TM a nastro singolo che è in grado di decidere A in tempo $O(n)$.
- Possiamo farlo se la TM ha un secondo nastro
- Importante: la complessità di tempo dipende dal modello di calcolo.
- La tesi di Church-Turing implica che tutti i modelli di calcolo "ragionevoli" siano equivalenti.
- In pratica: discuteremo quanto questa differenza sia importante (o meno) per il nostro sistema di classificazione nelle prossime lezioni.

Miglioriamo M_1 (cont.)

Idea: usiamo il secondo nastro per contare 0 e 1

M_2 = "Su input w:

1. Scorre il nastro 1 e rifiuta se trova uno 0 a destra di un 1
2. Scorre i simboli 0 sul nastro 1 fino al primo 1. Contemporaneamente, copia ogni 0 sul nastro 2.
3. Scorre i simboli 1 sul nastro 1 fino alla fine dell'input. Per ogni 1 letto sul nastro 1, cancella uno 0 sul nastro 2. Se ogni 0 è stato cancellato prima di aver letto tutti gli 1, rifiuta.
4. Se tutti gli 0 sono stati cancellati, accetta. Se rimane qualche 0, rifiuta."

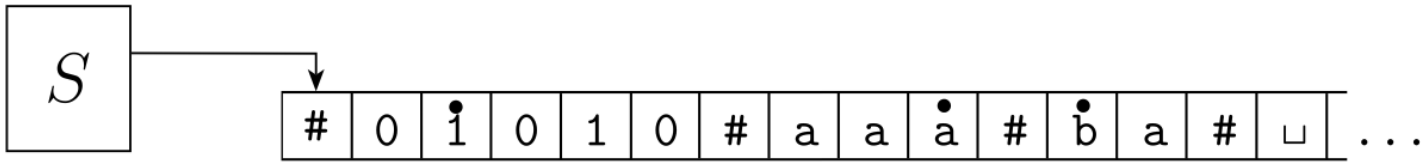
Sommario

Singolo nastro vs. Multinastro

Theorem

Sia $t(n)$ una funzione tale che $t(n) \leq n$. Ogni TM multinastro di tempo $t(n)$ ammette una TM equivalente a nastro singolo di tempo $O(t^2(n))$.

- Ricordiamo la dimostrazione di come convertire una TM da multinastro a nastro singolo.



- Dobbiamo determinare quanto tempo ci vuole per simulare ogni passo della macchina multinastro sulla TM a nastro singolo.

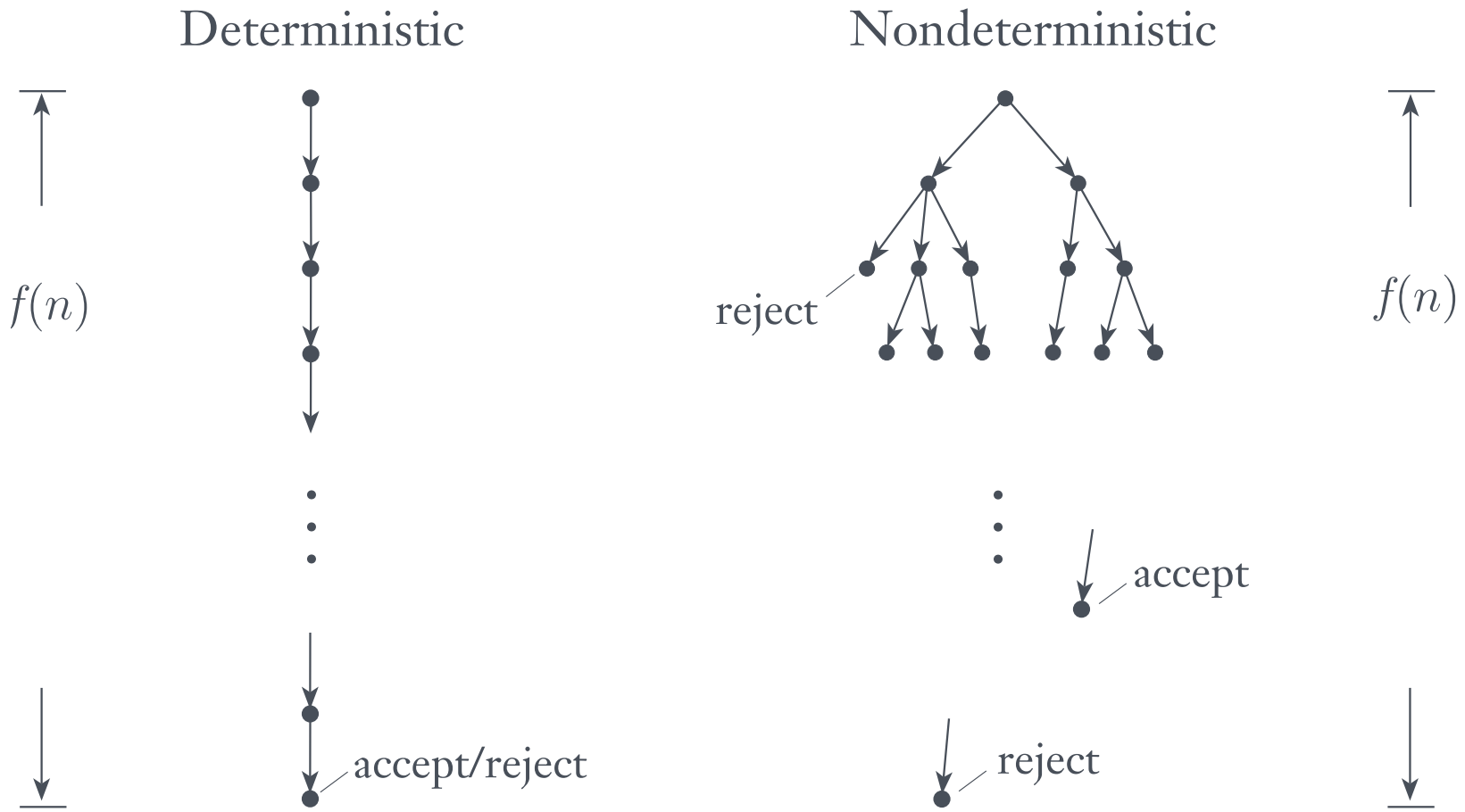
TM non deterministiche

Definition

Sia N una TM non deterministica che è anche un decisore. Il tempo di esecuzione di N è la funzione $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ tale che $f(n)$ è il massimo numero di passi che N usa per ognuno dei rami di computazione, su input di lunghezza n.

- N.B.: la definizione di tempo di esecuzione per le TM non deterministiche non è destinato a corrispondere ad un qualche dispositivo di calcolo reale. È uno strumento teorico che utilizziamo per comprendere i problemi computazionali.

TM non deterministiche



Determinismo vs. Non determinismo

Theorem

Sia $t(n)$ una funzione tale che $t(n) \leq n$. Ogni TM non deterministica di tempo $t(n)$ ammette una TM equivalente a nastro singolo di tempo $2^{O}(t(n))$.

Dimostrazione

- Sia N una TM non deterministica in tempo $t(n)$.
- Costruiamo una TM deterministica D che simula N.
- D è una TM multinastro. Qual è la complessità quando viene convertita in una TM a nastro singolo?