Automi e Linguaggi Formali

a.a. 2016/2017

LT in Informatica
6 Marzo 2018

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

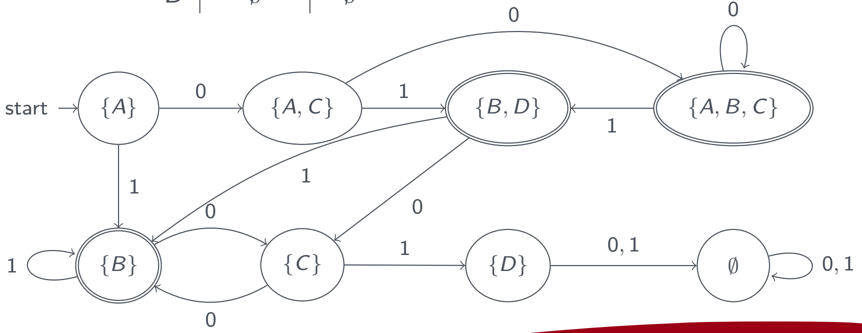
Esercizio

Convertire il seguente NFA in DFA:

	0	1
$\rightarrow A$	$\{A, C\}$	$\{B\}$
$*B$	$\{C\}$	$\{B\}$
C	$\{B\}$	$\{D\}$
D	$\emptyset$	$\emptyset$

Convertire il seguente NFA in DFA:

	0	1
$\rightarrow A$	$\{A, C\}$	$\{B\}$
$*B$	$\{C\}$	$\{B\}$
C	$\{B\}$	$\{D\}$
D	$\emptyset$	$\emptyset$



NFA con epsilon-transizioni

Università degli Studi di Padova

Esercizio: costruiamo un NFA che accetta numeri decimali:

1. Un segno $+$ o $-$, opzionale
2. Una stringa di cifre decimali $\{0, \ldots, 9\}$
3. un punto decimale .
4. un'altra stringa di cifre decimali

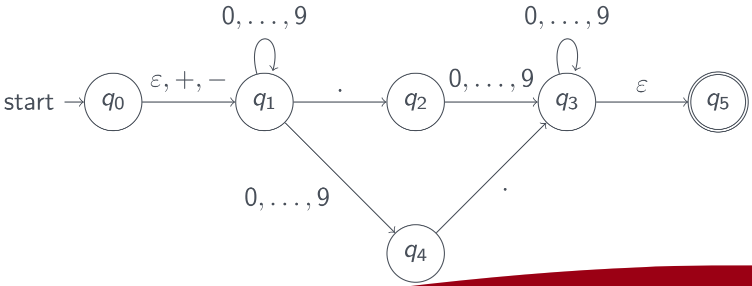
Una delle stringhe (2) e (4) può essere vuota, ma non entrambe

NFA con epsilon-transizioni

Esercizio: costruiamo un NFA che accetta numeri decimali:

1. Un segno $+$ o $-$, opzionale
2. Una stringa di cifre decimali $\{0, \ldots, 9\}$
3. un punto decimale .
4. un'altra stringa di cifre decimali

Una delle stringhe (2) e (4) può essere vuota, ma non entrambe



ε-NFA: definizione

Un Automa a Stati Finiti Non Deterministico con ε-transizioni (ε-NFA) è una quintupla

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

dove:

- Q, Σ, q_0, F sono definiti come al solito
- δ è una funzione di transizione che prende in input:
  - uno stato in Q
  - un simbolo nell'alfabeto $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$

  e restituisce un sottoinsieme di Q

Esempio di ε-NFA

L'automa che riconosce le cifre decimali è definito come

$$A = (\{q_0, q_1, \ldots, q_5\}, \{+, -, ., 0, \ldots, 9\}, \delta, q_0, \{q_5\})$$

dove δ è definita dalla tabella di transizione

Esempio di ε-NFA

L'automa che riconosce le cifre decimali è definito come

$$A = (\{q_0, q_1, \ldots, q_5\}, \{+, -, ., 0, \ldots, 9\}, \delta, q_0, \{q_5\})$$

dove δ è definita dalla tabella di transizione

	ε	$+, -$	$.$	$0, \ldots, 9$
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$*q_5$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Epsilon chiusura: definizione

L'eliminazione delle ε-transizioni procede per ε-chiusura degli stati:

- tutti gli stati raggiungibili da q con una sequenza $\varepsilon\varepsilon\ldots\varepsilon$

La definizione di $\mathrm{ECLOSE}(q)$ è per induzione:

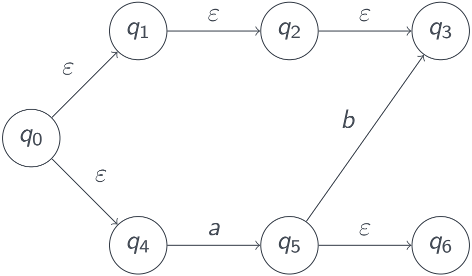
Caso base:

$$q \in \mathrm{ECLOSE}(q)$$

Caso induttivo:

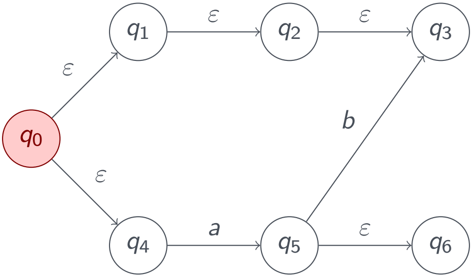
$$\text{se } p \in \mathrm{ECLOSE}(q) \text{ e } r \in \delta(p, \varepsilon) \text{ allora } r \in \mathrm{ECLOSE}(q)$$

Epsilon chiusura: esempio



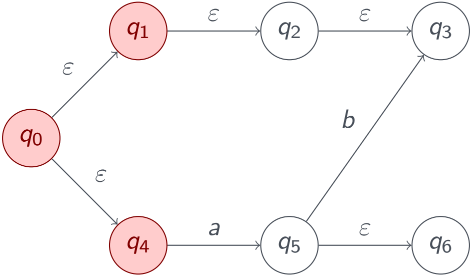
$$\mathrm{ECLOSE}(q_0) = \{$$

Epsilon chiusura: esempio



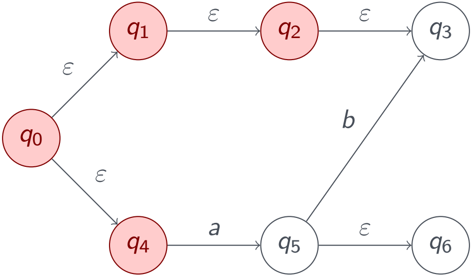
$$\mathrm{ECLOSE}(q_0) = \{q_0$$

Epsilon chiusura: esempio



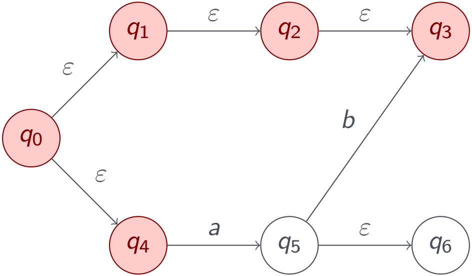
$$\mathrm{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1, q_4$$

Epsilon chiusura: esempio



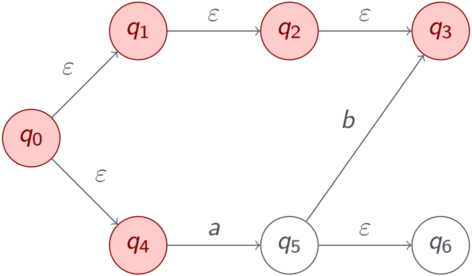
$$\mathrm{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1, q_4, q_2$$

Epsilon chiusura: esempio



$$\mathrm{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1, q_4, q_2, q_3$$

Epsilon chiusura: esempio



$$\mathrm{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1, q_4, q_2, q_3\}$$

Funzione di transizione estesa per ε-NFA

- La funzione di transizione estesa $\hat{\delta}$ per gli ε-NFA:

  Base:

$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \mathrm{ECLOSE}(q)$$

  Induzione:

$$\hat{\delta}(q, w) = \mathrm{ECLOSE}\left(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a)\right)$$

  con $w = xa$ (parola x seguita dal simbolo a)

- **Esempio:** calcoliamo $\hat{\delta}(q_0, 5.6)$ alla lavagna
- Formalmente, il linguaggio accettato da A è

$$L(A) = \{w : \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Equivalenza di DFA e ε-NFA

- Anche in questo caso abbiamo definito una classe di automi che è equivalente ai DFA
- Per ogni ε-NFA E c'è un DFA D tale che $L(E) = L(D)$, e viceversa
- Lo si dimostra modificando la costruzione a sottoinsiemi:

Equivalenza di DFA e ε-NFA

- Anche in questo caso abbiamo definito una classe di automi che è equivalente ai DFA
- Per ogni ε-NFA E c'è un DFA D tale che $L(E) = L(D)$, e viceversa
- Lo si dimostra modificando la costruzione a sottoinsiemi: Dato un ε-NFA

$$E = (Q_E, \Sigma, q_0, \delta_E, F_E)$$

costruiremo un DFA

$$D = (Q_D, \Sigma, S_0, \delta_D, F_D)$$

tale che

$$L(D) = L(E)$$

La costruzione a sottoinsiemi modificata

- $Q_D = \{S \subseteq Q_E : S = \mathrm{ECLOSE}(S)\}$
  Ogni stato è un insieme di stati chiuso per ε-transizioni
- $S_0 = \mathrm{ECLOSE}(q_0)$
  Lo stato iniziale è la ε-chiusura dello stato iniziale di E
- $F_D = \{S \in Q_D : S \cap F_E \neq \emptyset\}$
  Uno stato del DFA è finale se c'è almeno uno stato finale di E
- Per ogni $S \in Q_D$ e per ogni $a \in \Sigma$:

$$\delta_D(S, a) = \mathrm{ECLOSE}\Big(\bigcup_{p \in S} \delta_E(p, a)\Big)$$

  La funzione di transizione "percorre tutte le possibili strade" (comprese quelle con ε-transizioni)

La costruzione a sottoinsiemi modificata

Università degli Studi di Padova

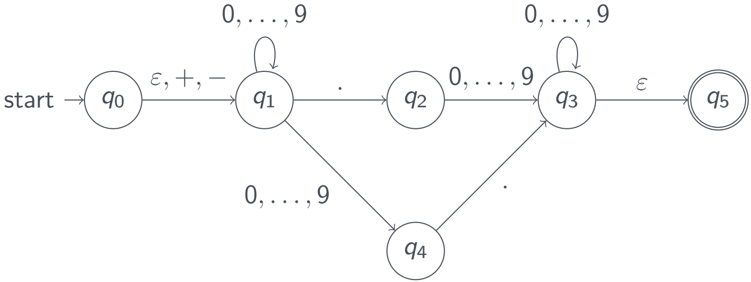
- $Q_D = \{S \subseteq Q_E : S = \mathrm{ECLOSE}(S)\}$
  Ogni stato è un insieme di stati chiuso per ε-transizioni
- $S_0 = \mathrm{ECLOSE}(q_0)$
  Lo stato iniziale è la ε-chiusura dello stato iniziale di E
- $F_D = \{S \in Q_D : S \cap F_E \neq \emptyset\}$
  Uno stato del DFA è finale se c'è almeno uno stato finale di E
- Per ogni $S \in Q_D$ e per ogni $a \in \Sigma$:

$$\delta_D(S, a) = \mathrm{ECLOSE}\Big(\bigcup_{p \in S} \delta_E(p, a)\Big)$$

La funzione di transizione "percorre tutte le possibili strade" (comprese quelle con ε-transizioni)

Nota: anche in questo caso $|Q_D| = 2^{|Q_E|}$

Costruiamo un DFA D equivalente all'ε-NFA E che riconosce i numeri decimali:



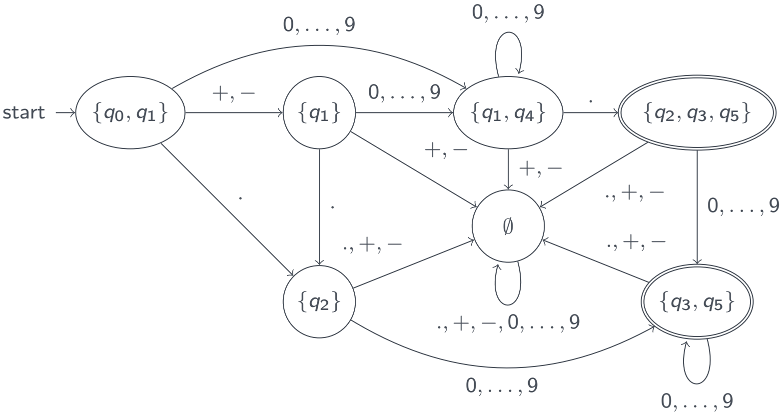
Esempio di costruzione a sottoinsiemi (2)

- Come prima cosa costruiamo la ε-chiusura di ogni stato:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1\} & \mathrm{ECLOSE}(q_1) = \{q_1\} \\ \mathrm{ECLOSE}(q_2) = \{q_2\} & \mathrm{ECLOSE}(q_3) = \{q_3, q_5\} \\ \mathrm{ECLOSE}(q_4) = \{q_4\} & \mathrm{ECLOSE}(q_5) = \{q_5\} \end{array}$$

- Lo stato iniziale di D è $\{q_0, q_1\}$

- Applicando le regole otteniamo il diagramma di transizione:



Theorem

Sia $D = (Q_D, \Sigma, S_0, F_D)$ il DFA ottenuto da un ε-NFA E con la costruzione a sottoinsiemi modificata. Allora $L(D) = L(E)$.

Dimostrazione:

Theorem

Sia $D = (Q_D, \Sigma, S_0, F_D)$ il DFA ottenuto da un ε-NFA E con la costruzione a sottoinsiemi modificata. Allora $L(D) = L(E)$.

Dimostrazione: Prima mostriamo per induzione su $|w|$ che

$$\hat{\delta}_D(S_0, w) = \hat{\delta}_E(q_0, w)$$

Theorem

Sia $D = (Q_D, \Sigma, S_0, F_D)$ il DFA ottenuto da un ε-NFA E con la costruzione a sottoinsiemi modificata. Allora $L(D) = L(E)$.

Dimostrazione: Prima mostriamo per induzione su $|w|$ che

$$\hat{\delta}_D(S_0, w) = \hat{\delta}_E(q_0, w)$$

Base: $w = \varepsilon$. L'enunciato segue dalla definizione:

- Lo stato iniziale di D è $S_0 = \mathrm{ECLOSE}(q_0)$;
- $\hat{\delta}_D(S_0, \varepsilon) = S_0 = \mathrm{ECLOSE}(q_0)$;
- $\hat{\delta}_E(q_0, \varepsilon) = \mathrm{ECLOSE}(q_0)$.

Correttezza della costruzione a sottoinsiemi

Induzione:

- Sia $|w| = n+1$ e supponiamo vero l'enunciato per la lunghezza n. Scomponiamo w in $w = xa$ (con $|x| = n$ e a simbolo finale)
- Per ipotesi induttiva $\hat{\delta}_D(S_0, x) = \hat{\delta}_E(q_0, x) = \{p_1, \dots, p_k\}$
- Per la definizione di $\hat{\delta}$ per gli ε-NFA

$$\hat{\delta}_E(q_0, xa) = \mathrm{ECLOSE}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a)\right)$$

- Per la costruzione a sottoinsiemi

$$\delta_D(\{p_1, \dots, p_k\}, a) = \mathrm{ECLOSE}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a)\right)$$

Induzione (continua):

- Per la definizione di $\hat{\delta}$ per i DFA

$$\hat{\delta}_D(S_0, xa) = \delta_D(\{p_1, \dots, p_k\}, a) = \mathrm{ECLOSE}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a)\right)$$

- Quindi abbiamo mostrato che $\hat{\delta}_D(S_0, w) = \hat{\delta}_E(q_0, w)$

Poiché sia D che E accettano se solo se $\hat{\delta}_D(S_0, w)$ e $\hat{\delta}_E(q_0, w)$ contengono almeno un stato in F_E, allora abbiamo dimostrato che $L(D) = L(N)$.

Theorem

Un linguaggio L è accettato da un DFA se e solo se è accettato da un ε-NFA.

Dimostrazione:

- La parte "se" è il teorema precedente
- La parte "solo se" si dimostra osservando che ogni DFA può essere trasformato in un ε-NFA modificando δ_D in δ_E con la seguente regola:

  Se $\delta_D(q, a) = p$ allora $\delta_E(q, a) = \{p\}$

Esercizio

1. Costruiamo un ε-NFA che riconosce le parole costituite da
   - zero o più *a*
   - seguite da zero o più *b*
   - seguite da zero o più *c*
2. Calcolare ECLOSE di ogni stato dell'automa
3. Convertire l'ε-NFA in DFA