Esercizio 5.1.1 (d). Vogliamo definire una CFG che genera il linguaggio L composto da tutte le stringhe in {a,b}* tali che hanno un numero di b doppio rispetto agli a.

Soluzione: la grammatica G che consiste delle seguenti produzioni,

S-> S a S b S b S | S b S b S a S | S b S a S b S | ε,

genera L.

Dimostrazione.

Parte 1 : L(G) è contenuta in L

Usiamo un'induzione sulla lunghezza della derivazione.

Base: lunghezza 1. La sola derivazione di lunghezza 1 che derivi una stringa di terminali è S => ε. Dato che ε è in L, la base è vera.

Passo induttivo. Assumiamo che la tesi sia vera per le stinghe derivate da S in n >=0 passi e mostriamo che allora la tesi è vera anche per le stringhe derivate da S in n+1 passi. Esaminiamo una derivazione di n+1 passi. Essa ha la seguente forma, S => S a S b S b S = w' a w'' b w''' b w''''=w. Visto che S =>* w' è una derivazione di meno di n+1 passi, l'ipotesi induttiva garantisce che w' è in L. Lo stesso vale per w'', w''' e w''''. Visto che in w a 4 stringhe che hanno il doppio di b rispetto agli a, sono presenti 2 b e 1 a, ovviamente, anche w avrà il doppio di b rispetto agli a. Per le altre produzioni di G si ragiona in modo analogo.

Parte 2: L(G) contiene L

Per questa parte ci serve prima un Lemma.

Lemma 1. L è composto da stringhe che hanno lunghezza che è multiplo di 3 (questo vale anche per ε). Quindi ogni w in L è composta da t1....tk, dove ciascuna ti è una stringa di 3 simboli. Vogliamo dimostrare che ogni w in L, diverso da ε, contiene una sottostringa con 2 b ed 1 a, cioè abb, o bab o bba.

Prova. Ragioniamo come segue. Se tra t1...tk c'è ti che consiste di 2 b ed 1 a, siamo a posto. Ma se non c'è, allora ogni ti deve avere o 3 a, oppure 2 a e 1 b e certamente deve esserci anche qualche tripla con 3 b, altrimenti w non sarebbe in L perché altrimenti conterrebbe più a di b. Quindi una tripla con 3 a o con 2 a deve essere per forza contigua ad una tripla con 3 b. E' facile osservare che da 3 b attaccate ad una tripla con 3 a o 2 a, nasce necessariamente una tripla con 2 b e 1 a. Facciamo 1 esempio: consideriamo aab. Se le incolliamo davanti bbb, otteniamo bbbaab che contiene bba, come desiderato. Lo stesso succede se incolliamo bbb alla fine di aab, aabbbb. Lo stesso succede con aba e con aaa. Quindi, è vero che ogni w in L contiene una sottostringa con 2 b e 1 a. Quindi w = w1 m w2 con m=bba/bab/abb. Ovviamente w1w2 deve essere in L.

A questo punto dimostriamo la Parte 2 per induzione sulla lunghezza di w di L

Base: se w = ε allora S=> ε, usando la produzione S -> ε. E' facile vedere che il risultato è vero anche se |w|=3.

Induzione: assumiamo che la tesi sia vera per tutte le stringhe in L di lunghezza 3*n. Vogliamo dimostrare che è vero anche per stringhe di lunghezza 3*(n+1). Sia w in L di lunghezza 3*(n+1). Per il Lemma 1: w=w1 m w2, con m=bba/bab/abb. Essendo w1 w2 di lunghezza 3*n, per ipotesi induttiva, vale che S =>* w1 w2.

In realtà è anche vero (vedi Lemma 2 che segue) che: S =>* w1 S w2, visto che la grammatica inserisce un S tra ogni coppia di terminali che genera e anche agli estremi delle forme sentenziali che produce. Quest'ultima osservazione è importante nei casi in cui w1 o w2 è vuota.

A questo punto basta osservare che w1 S w2 può generare w= w1 m w2, dove m= bba/bab/abb, usando una delle tre produzioni ricorsive ed eliminando gli extra S con la produzione S -> ε.

Per completare la prova resta da dimostrare il seguente Lemma 2:

Lemma 2: Per ogni derivazione S =>* w, con |w| >=3, e per ogni w1 e w2 tali che w1w2=w, è vero che S=>*w1Sw2.

Dimostrazione: procediamo per induzione sullla lunghezza di w.

Base : |w|=3, allora S => abb | bab | bba il ragionamento è uguale nei 3 casi e quindi consideriamo solo il primo. Una derivazione S =>*abb inizia con S => SaSbSbS=>*abb e da questo, per ogni divisione di abb in 2 parti w1w2=abb, segue che S=>*w1Sw2.

Step: sia |w|=(n+1)*3 con n>=1 e assumiamo che il Lemma 2 valga per tutte le stringhe di lunghezza al più 3*n. Consideriamo che S=>*w. Il primo passo della derivazione certamente usa una delle 3 produzioni ricorsive, assumiamo che sia, S => SaSbSbS=>*w (per le altre 2 possibili produzioni il ragionamento è simile). Allora w=z1az2bz3bz4, dove ciascuno dei 4 S di SaSbSbS deriva il corrispondente zi. Allora se dividiamo w in 2 parti, cioè w = w1w2, la divisione di w si trova in uno dei seguenti 2 casi:

a) Il margine destro di w1 cade all'estremo (sinistro o destro) di uno zi,
b) Il margine destro di w1 cade all'interno di uno zi

In entrambi i casi, visto che |zi| <=3*n, l'ipotesi induttiva ci garantisce che se il margine destro di w1 taglia zi nelle 2 parti z' e z'', allora S=>*z'Sz''. Si osservi che z' e z'' possono essere anche vuote.

Questo fatto mostra quindi che il Lemma è vero, visto che per generare le altre parti di w diverse da zi si può semplicemente usare gli stessi passi usati nella derivazione originale S=>* w.