Automi e Linguaggi Formali

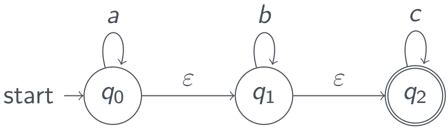
a.a. 2016/2017

LT in Informatica
14 Marzo 2017

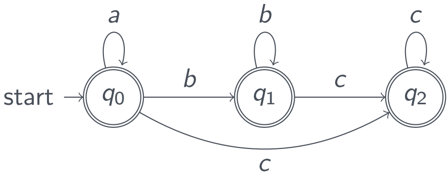
Università degli Studi di Padova

Esercizio

1. Costruiamo un ε-NFA che riconosce le parole costituite da zero o più a, seguite da zero o più b, seguite da zero o più c



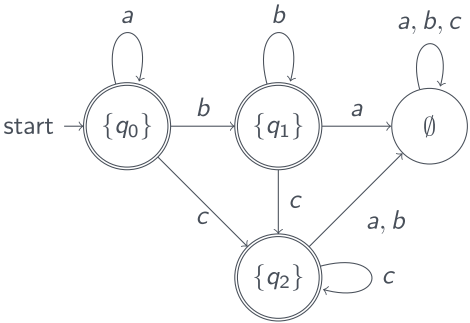
2. Eliminare le ε-transizioni dal risultato



3. Convertire l'NFA senza ε-transizioni in DFA

Università degli Studi di Padova

1. Costruiamo un ε-NFA che riconosce le parole costituite da zero o più a, seguite da zero o più b, seguite da zero o più c
2. Eliminare le ε-transizioni dal risultato
3. Convertire l'NFA senza ε-transizioni in DFA



- Un FA (NFA o DFA) è un metodo per costruire una macchina che riconosce linguaggi regolari
- Una espressione regolare è un modo dichiarativo per descrivere un linguaggio regolare.
- Esempio: $\mathbf{01}^* + \mathbf{10}^*$
- Le espressioni regolari sono usate, ad esempio, in:
  - comandi UNIX (`grep`)
  - strumenti per l'analisi lessicale di UNIX (`lex` (Lexical analyzer generator) e `flex` (Fast Lex))
  - editor di testo

Operazioni sui linguaggi

- **Unione:**

$$L \cup M = \{w : w \in L \text{ oppure } w \in M\}$$

- **Concatenazione:**

$$L.M = \{uv : u \in L \text{ e } v \in M\}$$

- **Potenze:**

$$L^0 = \{\varepsilon\} \qquad L^1 = L \qquad L^k = L.L^{k-1} = \underbrace{L.L.L.\ldots.L}_{k \text{ volte}}$$

- **Chiusura (o Star) di Kleene:**

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

Espressione regolari: sintassi

Università degli Studi di Padova

Le Espressioni Regolari sono costruite utilizzando

- un insieme di costanti di base:
  - ε per la stringa vuota
  - $\emptyset$ per il linguaggio vuoto
  - $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$ per i simboli $a, b, \cdots \in \Sigma$
- collegati da operatori:
  - $+$ per l'unione
  - $\cdot$ per la concatenazione
  - $*$ per la chiusura di Kleene
- raggruppati usando le parentesi:
  - $(\quad)$

Espressioni regolari: semantica

Se $\mathbf{E}$ è un espressione regolare, allora $L(\mathbf{E})$ è il linguaggio denotato da $\mathbf{E}$. La definizione di $L(\mathbf{E})$ è induttiva:

- **Caso Base:**
  - $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
  - $L(\emptyset) = \emptyset$
  - $L(\mathbf{a}) = \{a\}$
- **Caso induttivo:**
  - $L(\mathbf{E} + \mathbf{F}) = L(\mathbf{E}) \cup L(\mathbf{F})$
  - $L(\mathbf{EF}) = L(\mathbf{E}).L(\mathbf{F})$
  - $L(\mathbf{E}^*) = L(\mathbf{E})^*$
  - $L((\mathbf{E})) = L(\mathbf{E})$

- Scriviamo l'espressione regolare per

$$L = \{w \in \{0,1\}^* : 0 \text{ e } 1 \text{ alternati in } w\}$$

$$(\mathbf{01})^* + (\mathbf{10})^* + \mathbf{1}(\mathbf{01})^* + \mathbf{0}(\mathbf{10})^*$$

oppure

$$(\varepsilon + \mathbf{1})(\mathbf{01})^*(\varepsilon + \mathbf{0})$$

Espressioni regolari: precedenza

Come per le espressioni aritmetiche, anche per le espressioni regolari ci sono delle regole di precedenza degli operatori:

1. Chiusura di Kleene
2. Concatenazione (punto)
3. Unione ($+$)

Esempio:

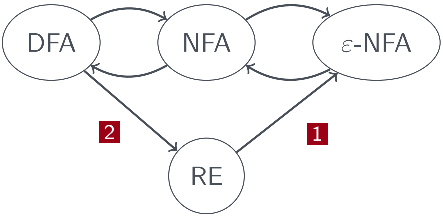
$$\mathbf{01}^* + \mathbf{1} \text{ è raggruppato in } (\mathbf{0}(\mathbf{1})^*) + \mathbf{1}$$

e denota un linguaggio diverso da

$$(\mathbf{01})^* + \mathbf{1}$$

Equivalenza tra FA e RE

Sappiamo già che DFA, NFA, e ε-NFA sono tutti equivalenti.



Gli FA sono equivalenti alle espressioni regolari:

1. Per ogni espressione regolare $\mathbf{R}$ esiste un ε-NFA A, tale che $L(A) = L(\mathbf{R})$
2. Per ogni DFA A possiamo costruire un'espressione regolare $\mathbf{R}$, tale che $L(\mathbf{R}) = L(A)$

Theorem

Per ogni espressione regolare $\mathbf{R}$ *possiamo costruire un* ε*-NFA* A *tale che* $L(A) = L(\mathbf{R})$

Dimostrazione:

Costruiremo un ε-NFA A con:

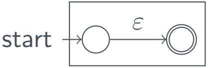
- un solo stato finale
- nessuna transizione entrante nello stato iniziale
- nessuna transizione uscente dallo stato finale

La dimostrazione è per induzione strutturale su $\mathbf{R}$

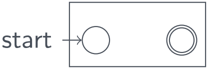
Da RE a ε-NFA

Caso Base:

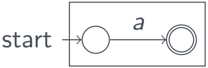
- automa per ε



- automa per $\emptyset$



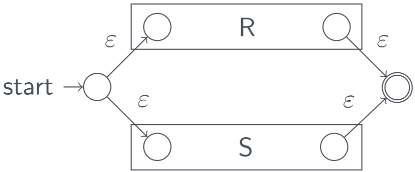
- automa per **a**



Da RE a ε-NFA

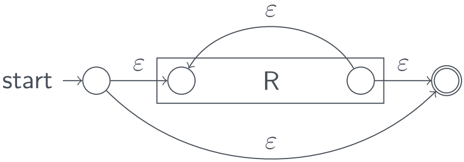
Caso Induttivo:

- automa per $\mathbf{R} + \mathbf{S}$



- automa per $\mathbf{RS}$

- automa per $\mathbf{R}^*$



Esercizio

Trasformiamo $(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0} + \mathbf{1})$ in ε-NFA