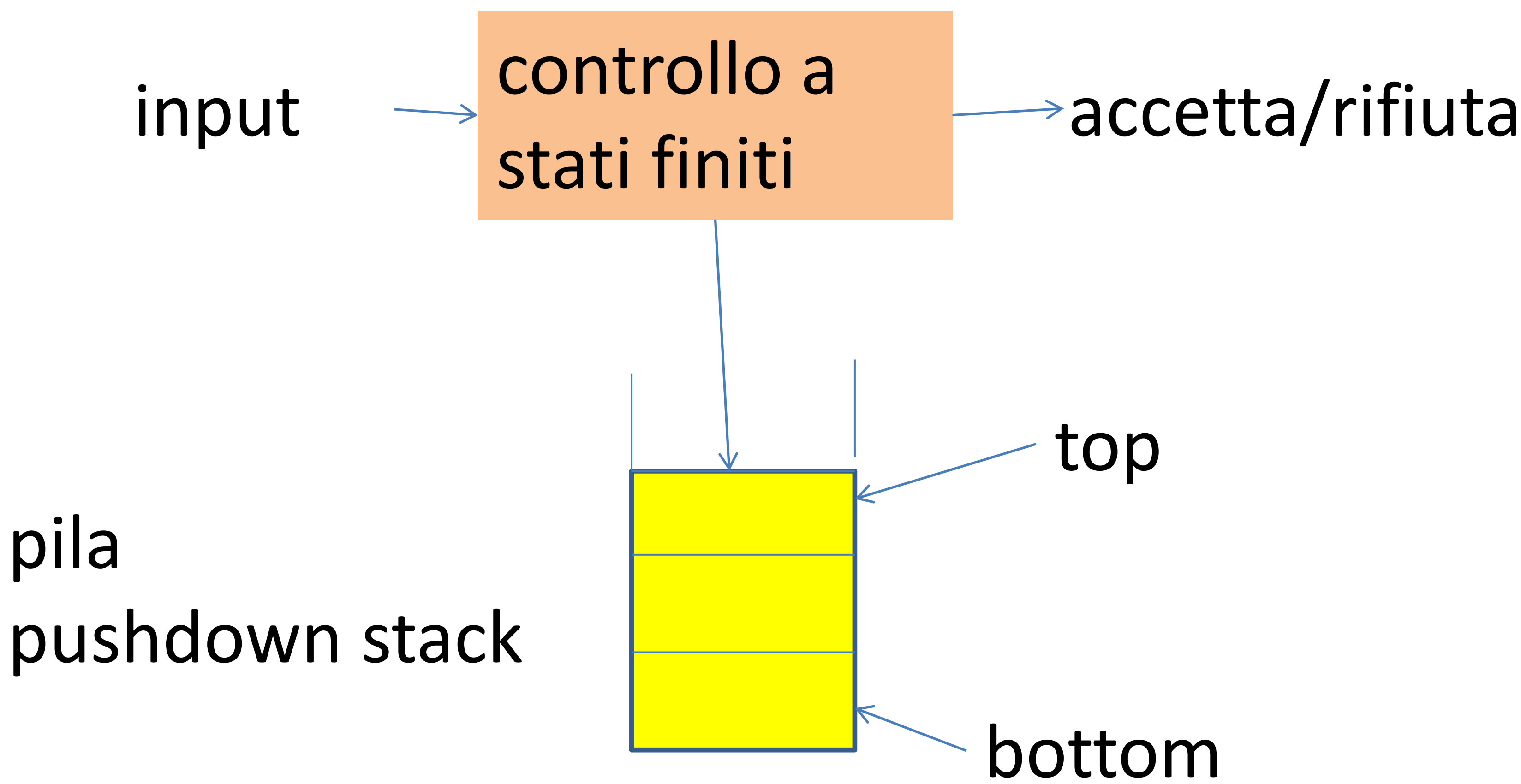
Automi a pila
PushDown Automaton (PDA)

PDA


input
controllo a
stati finiti
accetta/rifiuta
top
pila
pushdown stack
bottom

la pila puo’ crescere arbitrariamente, ma può essere usata in modo restrittivo

--push: si inseriscono nuove cose in cima alla pila
-pop: si toglie la cima della pila (se c’è)

attenzione-------> non si può ispezionare il contenuto della pila senza buttarlo via

il controllo a stati finiti:
-legge il prossimo input
-guarda il simbolo in cima alla pila
-fa una transizione in cui può:
----cambiare stato (o no)
----consumare l’input (o no con ε)
---c eliminare, tenere o cambiare la cima della pila

esempio:
Lwwr={ ww^r | w in {0,1}*}, sono i palindromi pari

PDA che accetta Lwwr:
--uno stato di partenza q0 che scorre l'input e lo copia sullo stack e ad ogni passo può, sia continuare che invece indovinare di essere arrivato alla metà dell'input e quindi matcha il resto dell'input contro lo stack ➔ nondeterministico

se alla fine lo stack è vuoto allora OK

esempio di riconoscimento di 0110

Definizione di PDA:

$P=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q0, Z0, F)$

--Q = insieme finito di stati

-- Σ insieme finito di simboli di input

-- Γ insieme finito di alfabeto dello stack

-- δ funzione di transizione che riceve come argomenti una tripla (q,a,X) dove q è uno stato, a è il prossimo input e X la cima della pila δ(q,a,X) è un insieme finito di coppie (p,γ), dove p è uno stato e γ una stringa in Γ* che rimpiazza X. Se γ è vuota allora si fa un pop, se γ=X allora lo stack non cambia.

per Lwwr={ ww^r | w in {0,1}*}

P=({q0,q1,q2},{0,1},{0,1,Z0}, δ, q0, Z0, {q2})
con δ come segue:
-- δ(q0,0,Z0)={(q0,0Z0)} e δ(q0,1,Z0)={(q0,1Z0)}

-- δ(q0,0,0)={(q0,00)}, δ(q0,1,0)={(q0,10)} ecc.
--δ(q0,ε,Z0)={(q1,Z0)}, δ(q0,ε,0)={(q1,0)} e
δ(q0,ε,1)={(q1,1)}

-- δ(q1,0,0)={(q1, ε)}, δ(q1,1,1)={(q1, ε)}
-- δ(q1, ε,Z0)={(q2, Z0)},

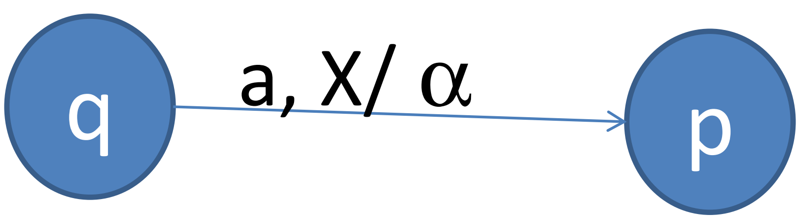
notazione grafica per PDA

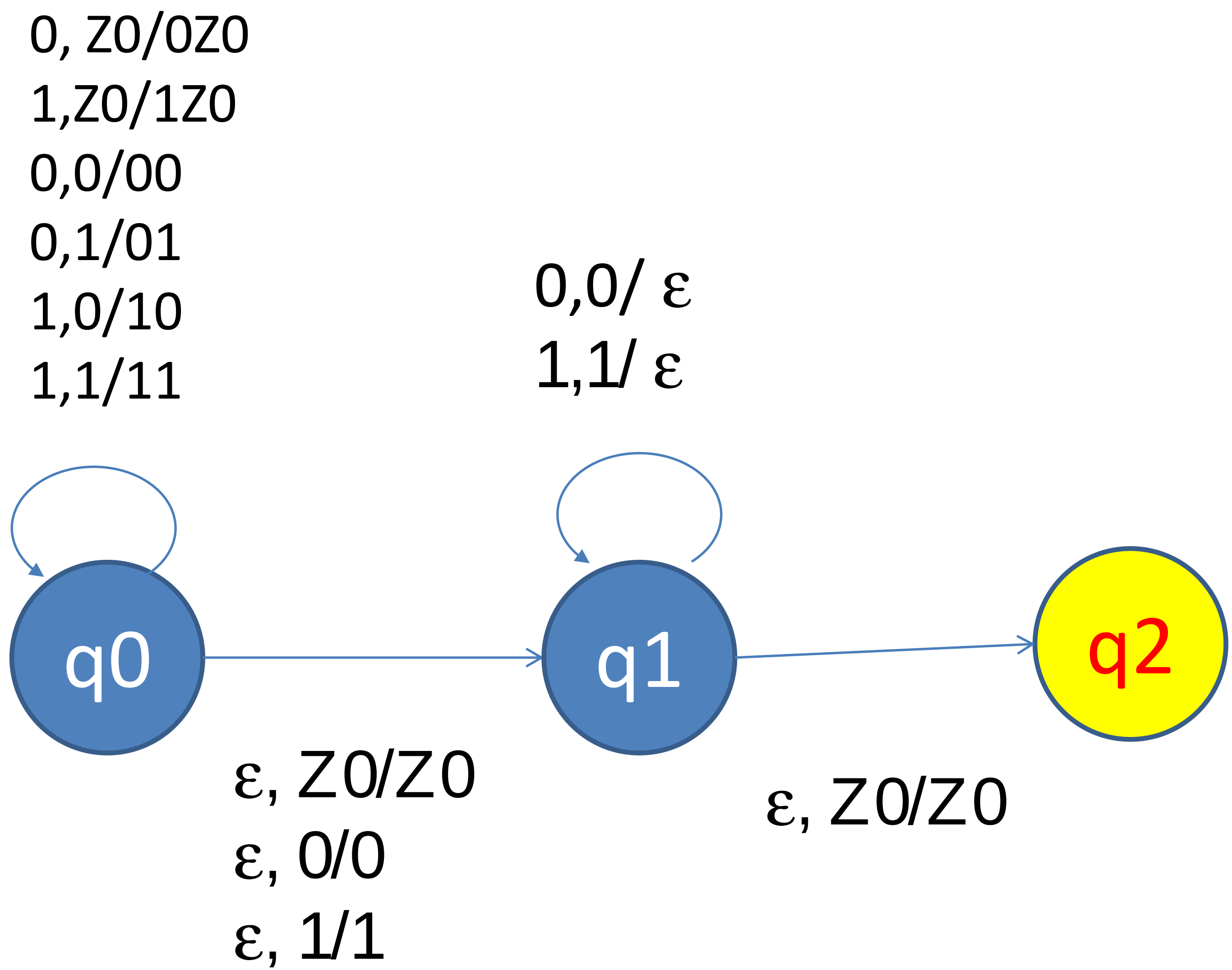
-nodi corrispondono agli stati

-si distingue lo stato iniziale con una freccia

-gli archi corrispondono alle transizioni e hanno etichette che rappresentano cosa succede su input e stack:

se $\delta(q,a,X)$ contiene (p,α) allora:





0, Z0/0Z0
1,Z0/1Z0
0,0/00
0,1/01
1,0/10
1,1/11
0,0/ ε
1,1/ ε
q0
q1
q2
ε, Z0/Z0
ε, 0/0
ε, 1/1
ε, Z0/Z0

Descrizioni istantanee (ID)

supponiamo che $\delta(q,a,X)$ contenga (p,α), allora

$(q,aw,X\beta) \mid\!- (p,w,\alpha\beta)$

come al solito rappresentiamo la chiusura di $\mid\!-$ come $\mid\!-^*$

calcolo del PDA di ww^r

intuizione: posso aggiungere stringhe non usate all'input e allo stack, mantenendo la computazione

Teorema 6.5
dato un PDA P, se $(q,x,\alpha) \vdash^* (p,y,\beta)$, allora per ogni stringa w e γ è vero che

$$(q,xw,\alpha\gamma) \vdash^* (p,yw,\beta\gamma)$$

l'inverso è falso

però vale per l'input:

Teorema 6.6
se $(q,xw,\alpha) \vdash^* (p, yw,\beta)$
allora è vero che
$(q,x,\alpha) \vdash^* (p, y,\beta)$

Dimostrazione: non si può rigenerare l'input, quindi w non ha influenza

Modalità di accettazione:

--per stato finale:

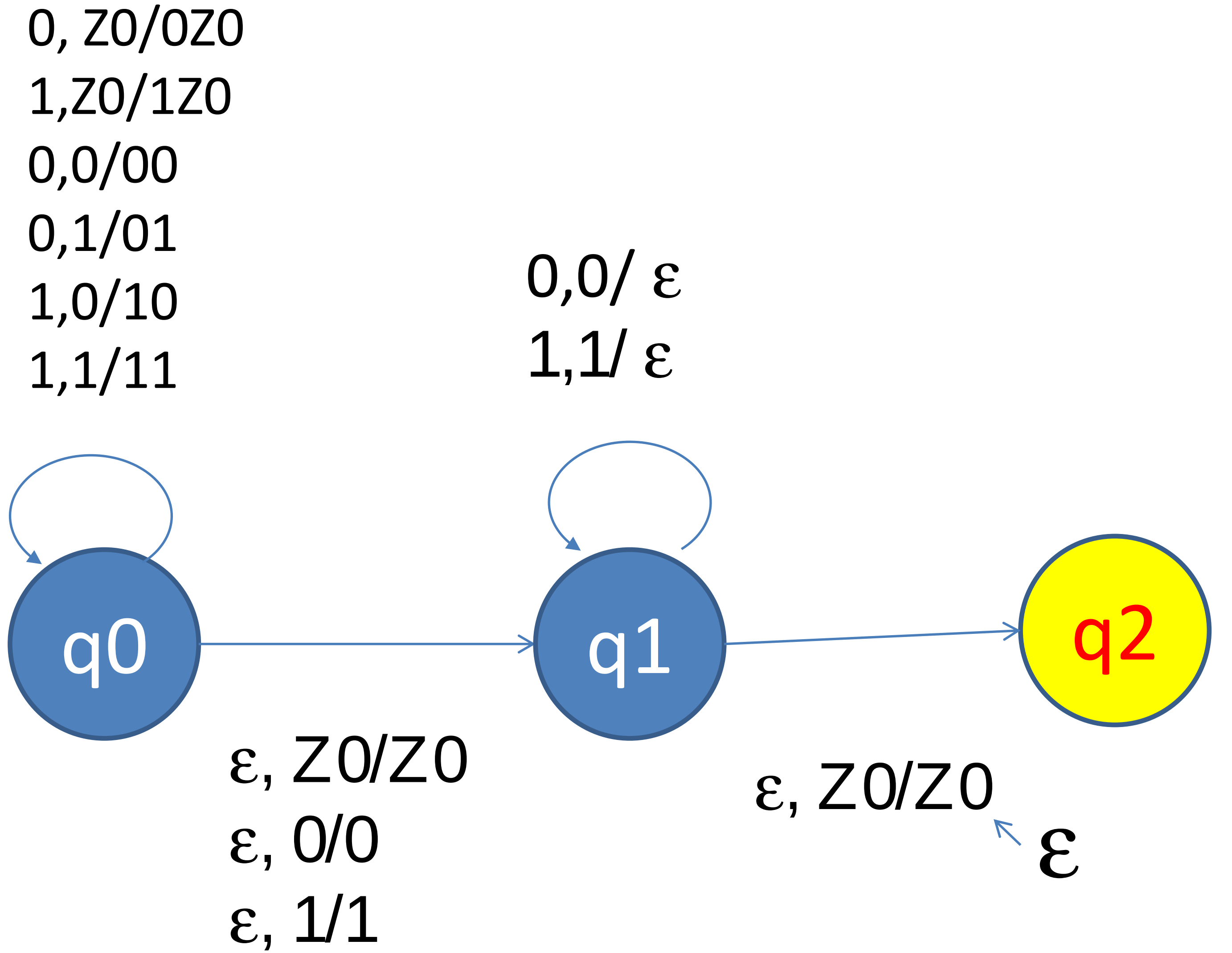
Dato P, L(P) è { w | w in Σ^*, (q0,w,Z0) |- (qf,ε,α), con qf stato finale}

--con stack vuoto

N(P)={w | w in Σ^*, (q0,w,Z0) |-* (q,ε,ε)}

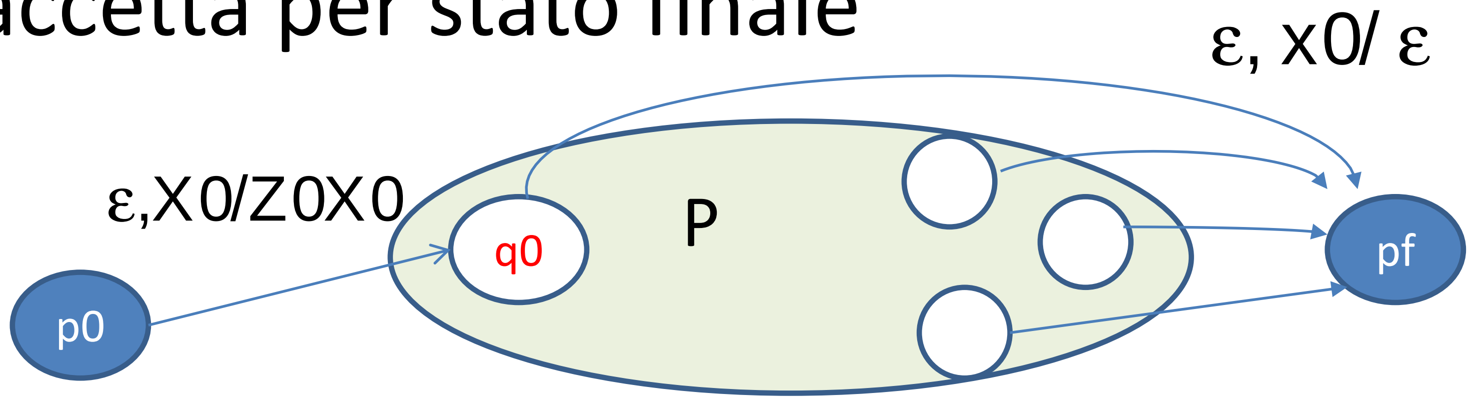
per un dato PDA P, L(P) e N(P) possono essere diversi

Il PDA che accetta ww^R, i palindromi di lunghezza pari, ha N(P)= ∅, ma è facile modificarlo



è sempre possibile passare da un PDA P che accetta in uno dei due modi ad un'altro P' che accetta nell'altro modo e accetta lo stesso linguaggio di P.

da P che accetta per stack vuoto a P' che accetta per stato finale



Dimostrazione:

w è il N(P) sse è in L(P')

(<=)

esiste $(q0,w,Z0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ per il Teorema 6.5,

$(q0,w,Z0X0) \vdash^* (q, \varepsilon, X0)$

e per costruzione esiste

$(q, \varepsilon, X0) \vdash (qf, \varepsilon, \varepsilon)$

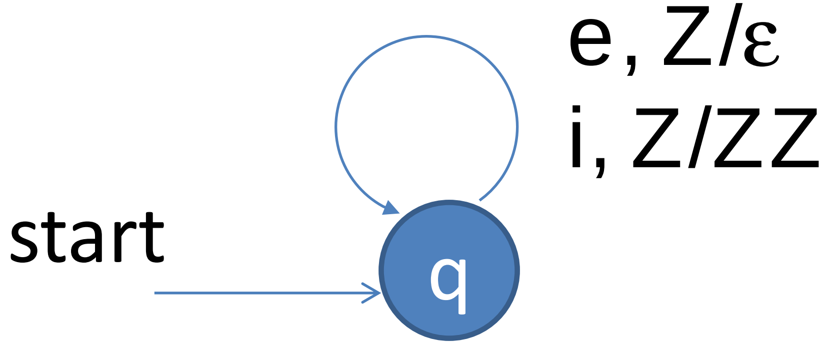
infine esiste: $(p0,w,X0) \vdash (q0,w,Z0X0)$

(=>) per costruzione una computazione di P' è:

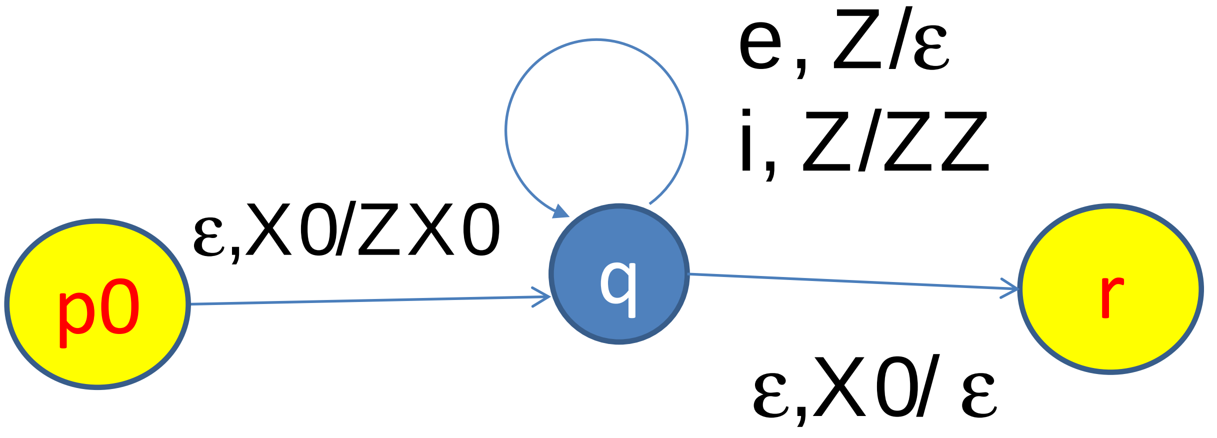
$(p0,w,X0) \vdash \underline{(q0,w,Z0X0) \vdash^* (q,\varepsilon,X0)} \vdash (pf, \varepsilon, \varepsilon)$

dove questa è una computazione di P

esempio: un PDA che accetta con stack vuoto le stringhe in {i,e}* tali che ci sia un prefisso in cui il numero di e supera quello degli i di 1 (insomma sono i programmi sbagliati)

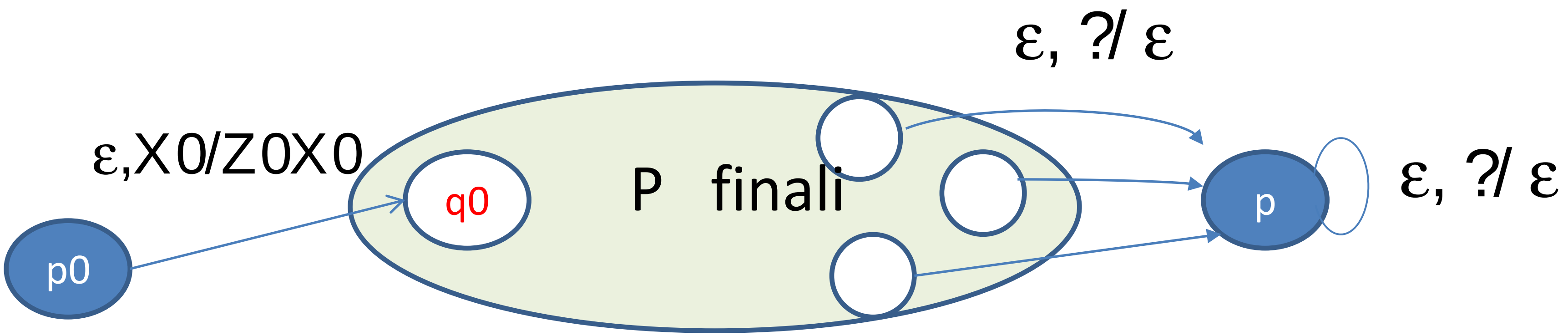


attenzione: Z0 è Z



ma cosa accettano veramente?

Da stato finale P a stack vuoto P'



X0 previene che P svuoti lo stack accettando inavvertitamente, visto che P non ha mosse per X0

(<=) se $(q0,w,Z0) \vdash^* (qf, \varepsilon,\alpha)$ allora
$(p0,w,X0) \vdash (q0,w,Z0X0) \vdash^* (qf, \varepsilon,\alpha X0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$
(=>) è l'inversa