Automi e Linguaggi Formali
Compitino del 9 Aprile 2018

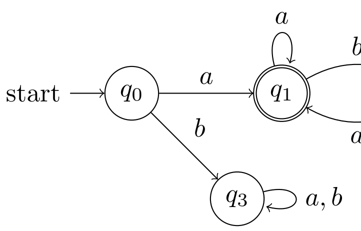
Soluzione della Parte I – Linguaggi Regolari

1. Considerare il linguaggio $L = \{\text{stringhe di } a \text{ e } b \text{ che iniziano con } a \text{ e finiscono con } a\}$

(a) Dare un automa a stati finiti *deterministico* che accetti il linguaggio L.
(b) Dare un'espressione regolare che rappresenti il linguaggio L.

Soluzione:

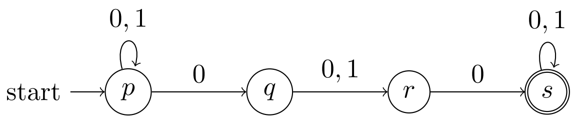
(a)



(b) Alcune soluzioni possibili:

$$\mathbf{a}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*\mathbf{a}+\mathbf{a} \qquad\qquad \mathbf{a}(\mathbf{b}^*\mathbf{a})^*$$

2. Dato il seguente NFA

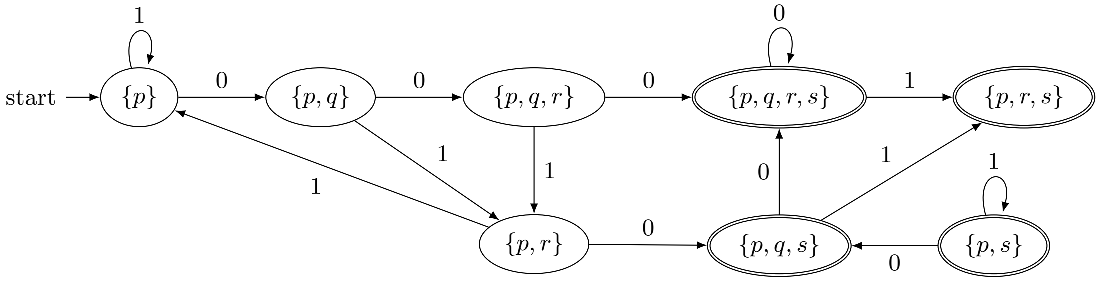


costruire un DFA equivalente

Soluzione: Applicando la costruzione a sottoinsiemi si ottiene il DFA con la seguente tabella di transizione (dove gli stati non raggiungibili dallo stato iniziale $\{p\}$ sono omessi):

	0	1
$\rightarrow \{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$	$\{p, q, r\}$	$\{p, r\}$
$\{p, r\}$	$\{p, q, s\}$	$\{p\}$
$\{p, q, r\}$	$\{p, q, r, s\}$	$\{p, r\}$
$*\{p, q, s\}$	$\{p, q, r, s\}$	$\{p, r, s\}$
$*\{p, r, s\}$	$\{p, q, s\}$	$\{p, s\}$
$*\{p, s\}$	$\{p, q, s\}$	$\{p, s\}$
$*\{p, q, r, s\}$	$\{p, q, r, s\}$	$\{p, r, s\}$

e con il seguente diagramma di transizione:



3. Il linguaggio
$$L = \{a^n b^m c^{n-m} : n > m > 0\}$$
è regolare? Motivare in modo formale la risposta.

Soluzione: Il linguaggio non è regolare. Supponiamo per assurdo che lo sia:

- sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma; possiamo supporre senza perdita di generalità che $h > 1$;
- consideriamo la parola $w = a^h bc^{h-1}$, che appartiene ad L ed è di lunghezza maggiore di h;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$;
- poiché $|xy| \leq h$, allora xy è completamente contenuta nel prefisso a^h di w, e quindi sia x che y sono composte solo da a. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, possiamo dire che $y = a^p$ per qualche valore $p > 0$. Allora la parola xy^2z è nella forma $a^{h+p}bc^{h-1}$, e quindi non appartiene al linguaggio perché il numero di c non è uguale al numero di a meno il numero di b (dovrebbero essere $h + p - 1$ mentre sono solo $h - 1$).

Abbiamo trovato un assurdo quindi L non può essere regolare.

4. Sia L un linguaggio regolare su un alfabeto Σ. Dimostrare che anche il seguente linguaggio è regolare:
$$\mathit{init}(L) = \{w \in \Sigma^* : \text{ esiste } x \in \Sigma^* \text{ tale che } wx \in L\}$$

Soluzione: Per dimostrare che $\mathit{init}(L)$ è regolare vediamo come è possibile costruire un automa a stati finiti che riconosce $\mathit{init}(L)$ a partire dall'automa a stati finiti che riconosce L.

Sia quindi $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un DFA che riconosce il linguaggio L. Costruiamo il DFA $B = (Q, \Sigma, q_0, \delta, G)$ che ha gli stessi stati, le stesse transizioni e lo stesso stato iniziale di A. Definiamo l'insieme G degli stati finali del nuovo automa come $G = \{q \in Q :$ esiste una sequenza di transizioni da q ad uno stato finale $f \in F\}$, ossia come tutti gli stati a partire dai quali possiamo raggiungere uno stato finale di A. Dobbiamo dimostrare che $L(B) = \mathit{init}(L)$.

- Sia $w \in \mathit{init}(L)$: allora per la definizione deve esistere $x \in \Sigma^*$ tale che $wx \in L$. Poiché A è un automa deterministico, esiste una sola sequenza di transizioni che parte da q_0 e accetta la parola wx in A. Possiamo spezzare questa sequenza in due parti: una prima sequenza che parte da q_0, legge w e arriva in uno stato intermedio q, e una seconda sequenza che parte da q, legge x e arriva ad uno stato finale $f \in F$. Ma allora lo stato intermedio q deve appartenere agli stati finali G di B! Quindi la parola w viene accettata dall'automa B.
- Prendiamo ora una parola $w \in L(B)$. Poiché B è un automa deterministico, esiste una sola sequenza di transizioni che parte da q_0 e accetta la parola w arrivando ad uno stato finale $q \in G$. Per la definizione di G, esiste una sequenza di transizioni che porta da q ad uno stato finale f di A. Quindi deve esistere una parola x i cui simboli etichettano le transizioni della sequenza da q a f. Ma allora possiamo creare una sequenza di transizioni da q_0 a f che riconosce la parola wx, che quindi appartiene a L. Dalla definizione di $\mathit{init}(L)$ segue che $w \in \mathit{init}(L)$.