1. (8 punti) Considera il linguaggio

$$L = \{0^m 1^n \mid m > 3n\}.$$

Dimostra che L non è regolare.

2. (8 punti) Per ogni linguaggio L, sia $\text{substring}(L) = \{v \mid uvw \in L$ per qualche coppia di stringhe $u, w\}$. Dimostra che se L è un linguaggio context-free, allora anche $\text{substring}(L)$ è un linguaggio context-free.

1) Assumiamo per assurdo il linguaggio sia regolare e immaginiamo "h" come possibile pumping length.
Immaginiamo, date le condizioni $y \neq \varepsilon$, $w=xyz$, $|xy| <= k$,
una suddivisione $k=0^{3p+1}1^p$ con $p > 0$
Consideriamo quindi un pumping $w=xy^iz$ dove $i=0$
e la parola sarebbe $w=0^{3p+1}1^p1^{k-p} \rightarrow 0^{3p+1}1^k$ che non appartiene al linguaggio e quindi il linguaggio non è regolare.

2) Se L è linguaggio CF, allora esiste una grammatica che lo genera. Possiamo assumere che G sia in forma normale di Chomsky e, come tale, ammetterà sempre regole del tipo A → BC con A,B,C simboli non terminali ed A → b simbolo non terminale.
Quindi nella normale grammatica fatta ad esempio:

A → BC
A → b

essendo la proprietà da mantenere la sottostringa (quindi "u" e "w" due stringhe prima e dopo di "v"):
A → BC
B → aBb | D
D → c
C → b

Infatti, un esempio di derivazione sarebbe (leftmost):
A → BC → aBbC → aaBbbC → aaDbbC → aacbbb