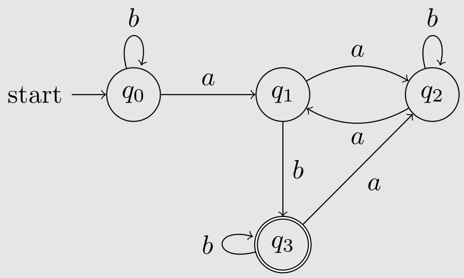
Soluzioni della Parte I – Linguaggi Regolari

1. Considerare il linguaggio $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*$ con un numero dispari di a e che terminano con $b\}$

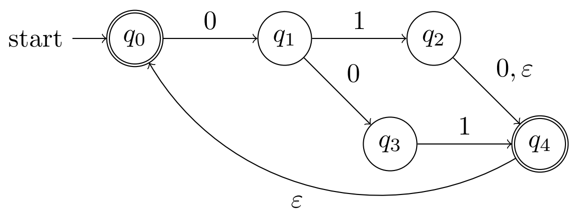
(a) Dare un automa a stati finiti *deterministico* che accetti il linguaggio L.



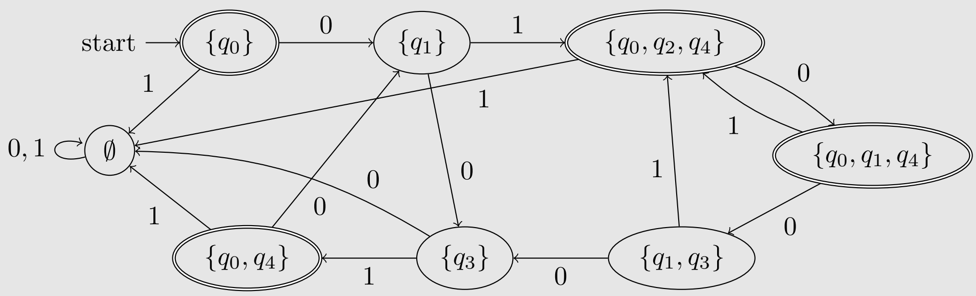
(b) Dare un'espressione regolare che rappresenti il linguaggio L.

$$b^* a \, (b^* a b^* a)^* \, b^* b$$

2. Dato il seguente NFA



costruire un DFA equivalente. Dare solo la parte del DFA che è raggiungibile dallo stato iniziale.



3. Minimizzare il DFA che avete ottenuto come soluzione dell'esercizio 2 usando l'algoritmo riempi-tabella.

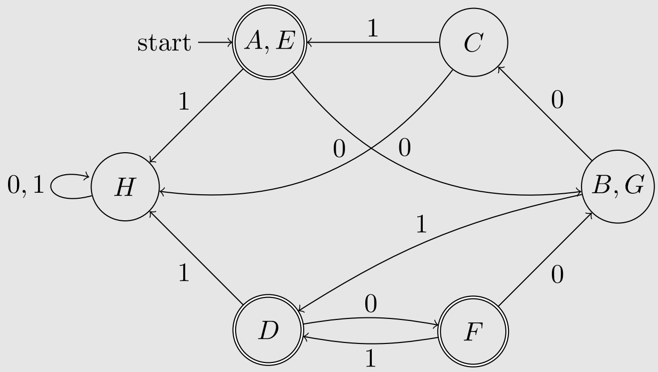
Rinominiamo gli stati del DFA soluzione dell'esercizio 2 come segue:

$$A = \{q_0\} \quad B = \{q_1\} \quad C = \{q_3\} \quad D = \{q_0, q_2, q_4\}$$
$$E = \{q_0, q_4\} \quad F = \{q_0, q_1, q_4\} \quad G = \{q_1, q_3\} \quad H = \emptyset$$

L'esecuzione dell'algoritmo riempi-tabella porta alla seguente tabella finale:

	A	B	C	D	E	F	G
B	X						
C	X	X					
D	X	X	X				
E		X	X	X			
F	X	X	X	X	X		
G	X		X	X	X	X	
H	X	X	X	X	X	X	X

Fondendo le due coppie di stati equivalenti $A \equiv E$ e $B \equiv G$ otteniamo il DFA minimo:



4. Sia $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{=}\}$ e considerate il linguaggio

$$EQ = \{w\texttt{=}w \mid w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*\}$$

Per esempio, la stringa `abab=abab` appartiene ad EQ perché la stringa a destra dell'uguale è identica alla stringa a sinistra dell'uguale. Viceversa, la stringa `aaaa=abb` non appartiene ad EQ perché la stringa a destra dell'uguale è diversa dalla stringa a sinistra dell'uguale.

(a) Completate il seguente schema di partita per il Gioco del Pumping Lemma in modo da far vincere il Giocatore 2:

Giocatore 1: sceglie il valore di $h = \mathbf{4}$
Giocatore 2: sceglie la parola $w \in EQ$ di lunghezza maggiore di h

$$w = \texttt{aaaa=aaaa}$$

Giocatore 1: suddivide w in

- $x = \texttt{a}$
- $y = \texttt{aa}$
- $z = \texttt{a=aaaa}$

rispettando le condizioni che $|xy| \leq h$ e $y \neq \varepsilon$
Giocatore 2: sceglie una potenza $k = \mathbf{2}$
La parola $xy^kz = \texttt{aaaaaa=aaaa} \notin EQ$: vince il **Giocatore 2**

(b) Dimostrate che EQ non è un linguaggio regolare usando il Pumping Lemma.

Supponiamo per assurdo che EQ sia regolare:

- sia h la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = \texttt{a}^h\texttt{=}\texttt{a}^h$, che appartiene ad EQ ed è di lunghezza maggiore di h;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq h$;
- poiché $|xy| \leq h$, allora xy è completamente contenuta nel prefisso $\texttt{a}^h$ di w posto prima dell'ugale, e quindi sia x che y sono composte solo da $\texttt{a}$. Inoltre, siccome $y \neq \varepsilon$, possiamo dire che $y = \texttt{a}^p$ per qualche valore $p > 0$. Allora la parola xy^2z è nella forma $\texttt{a}^{h+p}\texttt{=}\texttt{a}^h$, e non appartiene al linguaggio perché la stringa a destra dell'uguale è diversa dalla stringa a sinistra dell'uguale.

Abbiamo trovato un assurdo quindi EQ non può essere regolare.