Automi e Linguaggi Formali

a.a. 2016/2017

LT in Informatica
20 Marzo 2017

Università degli Studi di Padova

Esercizio 1 del 17 Marzo

Università degli Studi di Padova

Considerare il seguente NFA con ε-transizioni

	ε	a	b	c
$\rightarrow p$	$\{q, r\}$	$\emptyset$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{r\}$	$\{p, q\}$
$*r$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Calcolare la ε-chiusura di ogni stato e trasformare l'automa in un NFA senza ε-transizioni

Esercizio 1 del 17 Marzo: soluzione

ε-chiusura degli stati:

$$\mathrm{ECLOSE}(p) = \{p, q, r\}$$
$$\mathrm{ECLOSE}(q) = \{q\}$$
$$\mathrm{ECLOSE}(r) = \{r\}$$

Tabella di transizione dell'automa senza ε-transizioni:

	a	b	c
$\rightarrow *p$	$\{p\}$	$\{q, r\}$	$\{p, q, r\}$
q	$\{p\}$	$\{r\}$	$\{p, q\}$
$*r$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Esercizio 2 del 17 Marzo

Scrivere un'espressione regolare che definisce il linguaggio di tutti i numeri telefono. Un numero di telefono è una stringa con le seguenti caratteristiche:

- può iniziare con un prefisso internazionale opzionale rappresentato dal "+" seguito da due cifre decimali (+39, +49, +01)
- seguito da un prefisso di 3 o 4 cifre decimali (obbligatorio)
- e da un numero di telefono composto da almeno una cifra decimale (e lungo a piacere)

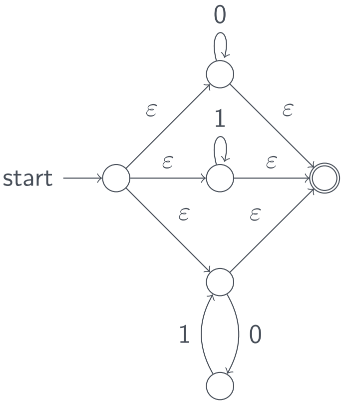
Ogni componente del numero di telefono è separata da uno spazio. Nella descrizione dell'espressione regolare, utilizzare "+" per rappresentare il carattere + e " " per rappresentare lo spazio.

Esercizio 2 del 17 Marzo: soluzione

$$
\begin{aligned}
\mathsf{T} &= (\varepsilon + \mathsf{I}\text{" "})\mathsf{P}\text{" "}\mathsf{N} \\
\mathsf{I} &= \text{"} + \text{"}\mathsf{DD} \\
\mathsf{P} &= (\mathsf{DDD} + \mathsf{DDDD}) \\
\mathsf{N} &= \mathsf{DD}^* \\
\mathsf{D} &= (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)
\end{aligned}
$$

Costruire un ε-NFA equivalente all'espressione $\mathbf{0}^* + \mathbf{1}^* + (\mathbf{01})^*$

Soluzione:



Theorem (Pumping Lemma per Linguaggi Regolari)

Sia L un linguaggio regolare. Allora

- *esiste una lunghezza $n \geq 0$ tale che*
- *ogni parola $w \in L$ di lunghezza $|w| \geq n$*
- *può essere spezzata in $w = xyz$ tale che:*
  1. *$y \neq \varepsilon$ (il secondo pezzo è non vuoto)*
  2. *$|xy| \leq n$ (i primi due pezzi sono lunghi al max n)*
  3. *$\forall k \geq 0$, $xy^kz \in L$ (possiamo "pompare" y rimanendo in L)*

Il Pumping Lemma come Gioco

- L'avversario sceglie la lunghezza k
- Noi scegliamo una parola w
- L'avversario spezza w in xyz
- Noi scegliamo i tale che $xy^iz \notin L$
- allora abbiamo vinto

1. Sia L_{ab} il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ con un numero di b maggiore del numero di a. L_{ab} è regolare?

No, L_{ab} non è regolare:

- supponiamo per assurdo che lo sia
- sia n la lunghezza data dal Pumping Lemma
- consideriamo la parola $w = a^n b^{n+1}$
- prendiamo un qualsiasi split $w = xyz$ tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq n$:

$$w = \underbrace{aaa \dots\dots}_{x}\underbrace{\dots a}_{y}\underbrace{abbb \dots bb}_{z}$$

- per il Pumping lemma, anche $xy^2z \in L_{ab}$, ma contiene più a che b $\Rightarrow$ assurdo

Università degli Studi di Padova

2. Il linguaggio $L_{rev} = \{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$ è regolare?

No, L_{rev} non è regolare:

- supponiamo per assurdo che lo sia
- sia n la lunghezza data dal Pumping Lemma
- consideriamo la parola $w = a^n bba^n$
- prendiamo un qualsiasi split $w = xyz$ tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq n$:

$$w = \underbrace{aaa\ldots}_{x}\underbrace{\ldots a}_{y}\underbrace{abbaaa\ldots aaa}_{z}$$

- per il Pumping lemma, anche $xy^0z = xz \in L_{rev}$, ma non la posso spezzare in $ww^R \Rightarrow$ assurdo

3. Il linguaggio $L_{nk} = \{a^n b^k : n \text{ è dispari oppure } k \text{ è pari}\}$ è regolare?

Si, L_{nk} è regolare:

- è rappresentato dall'espressione regolare $\mathbf{a(aa)^*b^*} + \mathbf{a^*(bb)^*}$
- e riconosciuto dall'automa