# Automi e Linguaggi Formali

## Parte 4 – Linguaggi non regolari

Università degli Studi di Padova

Davide Bresolin
Ultimo aggiornamento: 22 marzo 2020

# Sommario

# Uno strano linguaggio



- costruite un FA che riconosce il linguaggio

$$L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$$

- rispondete alla domanda

il linguaggio $L_{01}$ è regolare?

# Dimostriamo che $L_{01}$ non è regolare

- Supponiamo che $L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ sia regolare
- Allora deve essere accettato da un DFA $A$ con un certo numero $k$ di stati
- Cosa succede quando $A$ legge $0^k$?
- Seguirà una qualche sequenza di transizioni:

$$\text{start} \longrightarrow \underbrace{p_0 \xrightarrow{0} p_1 \xrightarrow{0} p_2 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} p_k}_{k+1 \text{ stati}}$$

- Siccome ci sono $k + 1$ stati nella sequenza, esiste uno stato che si ripete: esistono $i < j$ tali che $p_i = p_j$
- Chiamiamo $q$ questo stato

# Dimostriamo che $L_{01}$ non è regolare



- Cosa succede quando l'automa $A$ legge $1^i$ partendo da $q$?
- Se l'automa finisce la lettura in uno stato finale:
  - allora accetta, sbagliando, la parola $0^j1^i$
- Se l'automa finisce la lettura in uno stato non finale:
  - allora rifiuta, sbagliando, la parola $0^i1^i$
- In entrambi i casi abbiamo ingannato l'automa, quindi $L_{01}$ non può essere regolare

# Il Pumping Lemma per Linguaggi Regolari

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

**Theorem (Pumping Lemma per Linguaggi Regolari)**

*Sia $L$ un linguaggio regolare. Allora*

- *esiste una lunghezza $k \geq 0$ tale che*
- *ogni parola $w \in L$ di lunghezza $|w| \geq k$*
- *può essere spezzata in $w = xyz$ tale che:*
  1. $y \neq \varepsilon$ *(il secondo pezzo è non vuoto)*
  2. $|xy| \leq k$ *(i primi due pezzi sono lunghi al max $k$)*
  3. $\forall i \geq 0$, $xy^iz \in L$ *(possiamo "pompare" $y$ rimanendo in $L$)*

# Pumping Lemma: dimostrazione



**Dimostrazione:**

- Supponiamo che $L$ sia un linguaggio regolare
- Allora è riconosciuto da un DFA con, supponiamo, $k$ stati
- Consideriamo una parola $w = a_1 a_2 \dots a_n \in L$ di lunghezza $n \geq k$
- Consideriamo gli stati nella computazione di $A$ per $w$:

$$p_0 p_1 p_2 \dots p_k \dots p_n$$

- Siccome in $p_0, p_1, \dots, p_k$ ci sono $k + 1$ stati, ne esiste uno che si ripete:

$$\text{esistono } l < m \text{ tali che } p_l = p_m \text{ e } m \leq k$$

# Pumping Lemma: dimostrazione

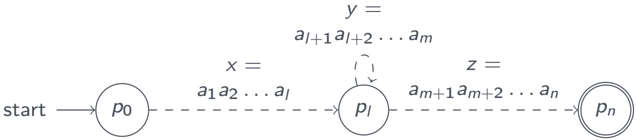


- Possiamo spezzare $w$ in tre parti $w = xyz$:
  1. $x = a_1 a_2 \dots a_l$
  2. $y = a_{l+1} a_{l+2} \dots a_m$
  3. $z = a_{m+1} a_{m+2} \dots a_n$
- che rispettano le condizioni del Lemma:
  - $y \neq \varepsilon$ perché $l < m$
  - $|xy| \leq k$ perché $m \leq k$

# Pumping Lemma: dimostrazione



- Quindi, nel grafo delle transizioni di $A$:




- E di conseguenza anche $xy^i z$ viene riconosciuta dall'automa per ogni $i \geq 0$ $\square$

# Uso del Pumping Lemma



- Ogni linguaggio regolare soddisfa il Pumping Lemma.
- Un linguaggio che falsifica il Pumping Lemma non può essere regolare:
  - per ogni lunghezza $k \geq 0$
  - esiste una parola $w \in L$ di lunghezza $|w| \geq k$ tale che
  - per ogni suddivisione $w = xyz$ tale che:
    1. $y \neq \varepsilon$ (il secondo pezzo è non vuoto)
    2. $|xy| \leq k$ (i primi due pezzi sono lunghi al max $k$)
  - esiste un $i \geq 0$ tale che $xy^iz \in L$ (possiamo "pompare" $y$ ed uscire da $L$)
- Attenzione: esistono linguaggi non regolari che rispettano il Pumping Lemma!

# Il Pumping Lemma come Gioco


- L'avversario sceglie la lunghezza $k$
- Noi scegliamo una parola $w$
- L'avversario spezza $w$ in $xyz$
- Noi scegliamo $i$ tale che $xy^iz \notin L$
- allora abbiamo vinto

1 Sia $L_{ab}$ il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ dove il numero di $a$ è uguale al numero di $b$. $L_{ab}$ è regolare?

**No, $L_{ab}$ non è regolare:**

- supponiamo per assurdo che lo sia
- sia $k$ la lunghezza data dal Pumping Lemma
- consideriamo la parola $w = a^k b^k$
- sia $w = xyz$ una suddivisione di $w$ tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$:
  $w = \underbrace{aaa \ldots a}_{x}\underbrace{a \ldots a}_{y}\underbrace{a \ldots ab \ldots bb}_{z}$
- poiché $|xy| \leq k$, le stringhe $x$ e $y$ sono fatte solo di $a$
- per il Pumping lemma, anche $xy^2z \in L_{ab}$, ma contiene più $a$ che $b$ $\Rightarrow$ assurdo

2 Il linguaggio $L_{rev} = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$ è regolare?

**No, $L_{rev}$ non è regolare:**

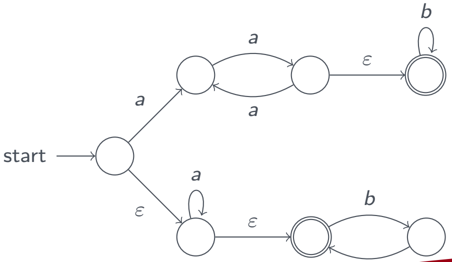
- supponiamo per assurdo che lo sia
- sia $k$ la lunghezza data dal Pumping Lemma
- consideriamo la parola $w = a^k bba^k$
- sia $w = xyz$ una suddivisione di $w$ tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$:
  $w = \underbrace{aaa\ldots}_{x}\underbrace{\ldots a}_{y}\underbrace{abbaaa\ldots aaa}_{z}$
- poiché $|xy| \leq k$, le stringhe $x$ e $y$ sono fatte solo di $a$
- per il Pumping lemma, anche $xy^0z = xz \in L_{rev}$, ma non la posso spezzare in $ww^R \Rightarrow$ assurdo

# Pumping Lemma: esercizi

3. Il linguaggio $L_{nm} = \{a^n b^m : n \text{ è dispari oppure } m \text{ è pari}\}$ è regolare?

**Si, $L_{nm}$ è regolare:**

- è rappresentato dall'espressione regolare $\mathbf{a(aa)^*b^* + a^*(bb)^*}$
- e riconosciuto dall'automa



4 Il linguaggio $L_p = \{1^p : p \text{ è primo}\}$ è regolare?

**No, $L_p$ non è regolare:**

- supponiamo per assurdo che lo sia
- sia $k$ la lunghezza data dal Pumping Lemma
- consideriamo una parola $w = 1^p$ con $p$ primo e $p > k + 2$
- sia $w = xyz$ una suddivsione di $w$ tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$:

$$w = \underbrace{11\dots11}_{x}\underbrace{11\dots1}_{y}\underbrace{111\dots11}_{z}$$

- ...

# Pumping Lemma: esercizi

- ...
- sia $|y| = m$: allora $|xz| = p - m$
- per il Pumping lemma, anche $v = xy^{p-m}z \in L_p$
- allora $|v| = m(p - m) + p - m = (p - m)(m + 1)$ si può scomporre in due fattori
- poiché $y \neq \varepsilon$, allora $|y| = m > 0$ e $m + 1 > 1$
- anche $p - m > 1$ perché abbiamo scelto $p > k + 2$ e $m \leq k$ perché $|xy| \leq k$
- i due fattori sono entrambi maggiori di 1 e quindi $|v|$ non è un numero primo
- $v \notin L_{rev}$, assurdo

# Pumping Lemma: esercizi



5. Il linguaggio $L_{3n} = \{1^{3n+2} : n \geq 0\}$ è regolare?
6. Il linguaggio $L_{mn} = \{0^n 1^m 0^n : m + n > 0\}$ è regolare?
7. Il linguaggio $L_{mnp} = \{0^n 1^m 0^p : m + n + p > 0\}$ è regolare?
8. Il linguaggio

   $$L_{2ab} = \left\{ w \in \{a, b\}^* : \text{ numero di } a \text{ è due volte il numero di } b \right\}$$

   è regolare?