Esercizio 9.7

Testo

Considerare uno schema di relazione R (E, N, L, C, S, D, M, P, A) con le seguenti dipendenze funzionali:

$E \rightarrow NS$, $D \rightarrow M$,
$NL \rightarrow EMD$, $M \rightarrow D$,
$EN \rightarrow LCD$, $EPD \rightarrow A$,
$C \rightarrow S$, $NLCP \rightarrow A$.

Calcolare una copertura ridotta per tale insieme e decomporre la relazione in terza forma normale.

Soluzione

Innazitutto, separiamo le dipendenze che implicano più di un attributo:

$E \rightarrow N$,
$E \rightarrow S$,
$NL \rightarrow E$,
$NL \rightarrow M$,
$NL \rightarrow D$,
$EN \rightarrow L$,
$EN \rightarrow C$,
$EN \rightarrow D$,
$C \rightarrow S$,
$D \rightarrow M$,
$M \rightarrow D$,
$EPD \rightarrow A$,
$NLCP \rightarrow A$.

La seconda cosa da fare è controllare se esistono ridondanze, per ogni dipendenza con più di un attributo a sinistra, tra gli attributi che stanno a sinistra delle implicazioni. Ad esempio, date le dipendenze $ABC \rightarrow D$ e $A \rightarrow B$. In questo caso, B all'interno della dipendenza $ABC \rightarrow D$ è ridondante.
Attenzione: è possibile trovare attributi ridondanti anche in maniera più indiretta (nell'esempio, magari tramite due inferenze $A \rightarrow E$ e $E \rightarrow B$). Inoltre, bisogna stare attenti alla possibilità che una coppia (o anche una n-upla) di attributi possa implicarne un'altro (ad esempio B potrebbe essere implicato da AC).
Proseguiamo. La prima dipendenza con due attributi è $NL \rightarrow E$. Vediamo se $N \rightarrow L$ o viceversa: lo facciamo cercando N^+ e L^+.

$$N^+ = \{ N \},\ L^+ = \{ L \}$$

Quindi, nessuno dei due è ridondante. Proseguiamo con la coppia EN. Sappiamo già che N non implica E, quindi calcoliamo la chiusura di E.

$$E^+ = \{ E, N, S, L, C, D, S, M\}$$

Notiamo che $E \rightarrow N$, quindi in EN il secondo attributo è ridondante.
Passiamo, quindi, a EPD. Già sappiamo che $E \rightarrow D$. Quindi, D è ridondante e può essere eliminato. Invece, E non implica P. Calcoliamo, quindi, la chiusura di P.

$$P^+ = \{ P \}$$

Segue che nessuno dei due è ridondante.
Resta da controllare solo NLCP. Le chiusure di N, L e P sono già note e non indicano ridondanze. Calcoliamo quella di C.

$$C^+ = \{ C, S \}$$

Bisogna calcolare adesso la chiusura delle coppie di attributi. Calcoliamo quella di NL.

$$NL^+ = \{ N, L, E, M, D, S, C \}$$

NL inferisce C, quindi quest'ultimo è ridondante e potrà essere eliminato. Le altre coppie possibili sono, quindi, LP e NP le cui chiusure sono:

$$LP^+ = \{ L, P \} \text{ e } NP^+ = \{ N, P \}$$

Quindi, non esistono nella dipendenza altri attributi ridondanti.
Alla fine, eliminando gli attributi avremo:

$E \rightarrow N$,
$E \rightarrow S$,
$NL \rightarrow E$,
$NL \rightarrow M$,
$NL \rightarrow D$,
$EN \rightarrow L$,
$EN \rightarrow C$,
$EN \rightarrow D$,
$C \rightarrow S$,
$D \rightarrow M$,
$M \rightarrow D$,
$EPD \rightarrow A$,
$NLCP \rightarrow A$.

$\longrightarrow$

$E \rightarrow N$,
$E \rightarrow S$,
$NL \rightarrow E$,
$NL \rightarrow M$,
$NL \rightarrow D$,
$E\cancel{N} \rightarrow L$,
$E\cancel{N} \rightarrow C$,
$E\cancel{N} \rightarrow D$,
$C \rightarrow S$,
$D \rightarrow M$,
$M \rightarrow D$,
$EP\cancel{D} \rightarrow A$,
$NL\cancel{C}P \rightarrow A$.

Avendo eliminato tutti gli attributi ridondanti, è possibile proseguire con l'eliminazione delle dipendenze ridondanti. Per verificare che una dipendenza sia ridondante, è sufficiente verificare che tale dipendenza sia ottenibile tramite la combinazione di altre. Per veder ciò, data una dipendenza $X \rightarrow A$, si calcola X^+ escludendo $X \rightarrow A$. **Suggerimento:** è inutile effettuare il procedimento per ogni dipendenza. Invece, basta effettuare la verifica solo per gli attributi che vengono implicati in più di una dipendenza. Ad esempio, N è implicato in una sola dipendenza funzionale e perciò sarà impossibile trovare una combinazione di sequenze che possano sostituire $E \rightarrow N$!

$E \rightarrow N$,
$E \rightarrow S$,
$NL \rightarrow E$,
$NL \rightarrow M$,
$NL \rightarrow D$,
$E \rightarrow L$,
$E \rightarrow C$,
$E \rightarrow D$,
$C \rightarrow S$,
$D \rightarrow M$,
$M \rightarrow D$,
$EP \rightarrow A$,
$NLP \rightarrow A$.

Come appena detto, possiamo non effetuare il procedimento sopra descritto per la prima dipendenza. Passiamo, perciò, direttamente alla seconda. Calcoliamo E^+ escludendo $E \rightarrow S$, se otteniamo S tra gli elementi della chiusura allora la dipendenza sarà ridondante.

$$E^+ = \{ E, N, L, C, D, S, M \}$$

Dato che $S \in E^+$, la dipendenza è ridondante.

$E \rightarrow N$,
$E \rightarrow S$,
$NL \rightarrow E$,
$NL \rightarrow M$,
$NL \rightarrow D$,
$E \rightarrow L$,
$E \rightarrow C$,
$E \rightarrow D$,
$C \rightarrow S$,
$D \rightarrow M$,
$M \rightarrow D$,
$EP \rightarrow A$,
$NLP \rightarrow A$.

$\longrightarrow$

$E \rightarrow N$,
$\cancel{E \rightarrow S}$,
$NL \rightarrow E$,
$NL \rightarrow M$,
$NL \rightarrow D$,
$E \rightarrow L$,
$E \rightarrow C$,
$E \rightarrow D$,
$C \rightarrow S$,
$D \rightarrow M$,
$M \rightarrow D$,
$EP \rightarrow A$,
$NLP \rightarrow A$.

Saltiamo $NL \rightarrow E$ (dato che E è implicato solo da NL) e proseguiamo verificando $NL \rightarrow M$. Quindi, calcoliamo NL^+ escludendo questa dipendenza.

$$NL^+ = \{ N, L, E, D, C, S, M \}$$

Dato che $M \in NL^+$, la dipendenza è ridondante.

$E \rightarrow N$,
$NL \rightarrow E$,
$NL \rightarrow M$,
$NL \rightarrow D$,
$E \rightarrow L$,
$E \rightarrow C$,
$E \rightarrow D$,
$C \rightarrow S$,
$D \rightarrow M$,
$M \rightarrow D$,
$EP \rightarrow A$,
$NLP \rightarrow A$.

$\longrightarrow$

$E \rightarrow N$,
$NL \rightarrow E$,
$\cancel{NL \rightarrow M}$,
$NL \rightarrow D$,
$E \rightarrow L$,
$E \rightarrow C$,
$E \rightarrow D$,
$C \rightarrow S$,
$D \rightarrow M$,
$M \rightarrow D$,
$EP \rightarrow A$,
$NLP \rightarrow A$.

Verifichiamo adesso $NL \rightarrow D$. Calcoliamo NL^+ escludendo questa dipendenza.

$$NL^+ = \{ N, L, E, C, D, S, M \}$$

Dato che $D \in NL^+$, la dipendenza è ridondante.

$E \rightarrow N$,
$NL \rightarrow E$,
$NL \rightarrow D$,
$E \rightarrow L$,
$E \rightarrow C$,
$E \rightarrow D$,
$C \rightarrow S$,
$D \rightarrow M$,
$M \rightarrow D$,
$EP \rightarrow A$,
$NLP \rightarrow A$.

$\longrightarrow$

$E \rightarrow N$,
$NL \rightarrow E$,
$\cancel{NL \rightarrow D}$,
$E \rightarrow L$,
$E \rightarrow C$,
$E \rightarrow D$,
$C \rightarrow S$,
$D \rightarrow M$,
$M \rightarrow D$,
$EP \rightarrow A$,
$NLP \rightarrow A$.

Saltiamo $E \rightarrow L$ e $E \rightarrow C$ e verifichiamo $E \rightarrow D$. Calcoliamo la chiusura di E ignorando questa dipendenza.

$$E^+ = \{ E, N, L, C, S \}$$

$E \rightarrow N$,
$NL \rightarrow E$,
$E \rightarrow L$,
$E \rightarrow C$,
$E \rightarrow D$,
$C \rightarrow S$,
$D \rightarrow M$,
$M \rightarrow D$,
$EP \rightarrow A$,
$NLP \rightarrow A$.

$\longrightarrow$

$E \rightarrow N$,
$NL \rightarrow E$,
$E \rightarrow L$,
$E \rightarrow C$,
$E \rightarrow D$,
$C \rightarrow S$,
$D \rightarrow M$,
$M \rightarrow D$,
$EP \rightarrow A$,
$NLP \rightarrow A$.

$D \notin E^+$, quindi non va tolta. Ora, è possibile saltare anche $C \rightarrow S$ e $D \rightarrow M$ e verifichiamo $M \rightarrow D$. Calcoliamo M^+ escludendo la dipendenza scelta.

$$M^+ = \{ M \}$$

$D \notin M^+$, quindi la dipendenza non è ridondante.

$E \to N$,	$C \to S$,		$E \to N$,	$C \to S$,
$NL \to E$,	$D \to M$,		$NL \to E$,	$D \to M$,
$E \to L$,	$M \to D$,	$\longrightarrow$	$E \to L$,	$M \to D$,
$E \to C$,	$EP \to A$,		$E \to C$,	$EP \to A$,
$E \to D$,	$NLP \to A$.		$E \to D$,	$NLP \to A$.

Esaminiamo adesso $EP \to A$. Calcoliamo EP^+ escludendo la dipendenza.

$$EP^+ = \{ E, P, N, L, C, D, S, M, A \}$$

Dato che $A \in EP^+$, la dipendenza è ridondante.

$E \to N$,	$C \to S$,		$E \to N$,	$C \to S$,
$NL \to E$,	$D \to M$,		$NL \to E$,	$D \to M$,
$E \to L$,	$M \to D$,	$\longrightarrow$	$E \to L$,	$M \to D$,
$E \to C$,	$EP \to A$,		$E \to C$,	$\cancel{EP \to A}$,
$E \to D$,	$NLP \to A$.		$E \to D$,	$NLP \to A$.

Infine, saltiamo $NLP \to A$.

Quindi, la nostra copertura ridotta alla fine è:

$E \to N$,	$C \to S$,
$NL \to E$,	$D \to M$,
$E \to L$,	$M \to D$,
$E \to C$,	$NLP \to A$.
$E \to D$,	

Avviso: per un insieme di dipendenze funzionali ci possono essere più coperture ridotte possibili, in base all'ordine in cui vengono esaminate le dipendenze. L'assistente in aula durante lo svolgimento degli esercizi ha caldamente invitato tutti a seguire l'ordine in cui le dipendenze sono state scritte (cioé dall'alto verso il basso)!

È possibile distinguere una chiave in base alle chiusure: infatti, se un attributo o un insieme di attributi riesce a implicare tutti gli attributi della relazione, allora è chiave. Per individuare la chiave della relazione basta, quindi, calcolare tutte le chiusure.

$E^+ = \{ E, N, L, C, D, S, M \}$	NO
$NL^+ = \{ N, L, E, C, D, S, M \}$	NO
$C^+ = \{ C, S \}$	NO
$D^+ = \{ D, M \}$	NO
$M^+ = \{ M, D \}$	NO
$NLP^+ = \{ N, L, P, A, E, C, D, S, M \}$	SI

Quindi, NLP è chiave della relazione. Tuttavia, non è detto che sia l'unica: se osserviamo le chiusure di E e NL, è possibile notare che questi insiemi di attributi si avvicinano a essere chiavi. A entrambi mancano A e P. Dal momento che $E \to N$ ed $E \to L$ segue che $E \to NL$. Quindi, $EP \to NLP$. Segue da $NLP \to A$ che $EP \to A$. Ovvero, aggiungendo P ad E si ottiene un'altra chiave! Infatti, $EP^+ = \{ E, P, N, L, C, D, S, M, A \}$.

Suggerimento: per notare la presenza di altre chiavi in modo più intuitivo, basta guardare quanti elementi hanno le chiusure. Se ne hanno molti è possibile che possano diventare delle chiavi aggiungendo qualche attributo. Bisogna però a stare attenti a non indicare delle superchiavi anziché delle chiavi.

L'ultima parte dell'esercizio prevede la scomposizione della relazione in terza forma normale (3NF). Per far ciò, è sufficiente prendere le dipendenze funzionali e raggrupparle in base alle chiusure calcolate. Otterremo nel nostro caso:

$E \to N$, $E \to L$, $E \to C$, $E \to D$, $NL \to E$	$C \to S$	$D \to M$, $M \to D$	$NLP \to A$

Dopo di che, scriviamo tante relazioni quanti sono i gruppi ottenuti. Queste relazioni avranno come attributi, quelli coinvolti nelle dipendenze.

$\mathbf{R}_1$(E,N,L,C,D)

$\mathbf{R}_2$(C,S)

$\mathbf{R}_3$(D,M)

$\mathbf{R}_4$(N,L,P,A)

Ora, se un insieme di attributi di una relazione è completamente contenuto in un altro, allora la relazione viene eliminata. Nel nostro caso, ciò non avviene. Inoltre, se nessuno degli insiemi di attributi è chiave per la relazione originale va aggiunto una nuova relazione che contiene una chiave. Non è il nostro caso. Alla fine le relazioni ottenute sono quelle sopra indicate. A ognuna di esse associamo le sue dipendenze funzionali.

$\mathbf{R}_1$(E,N,L,C,D) con E $\rightarrow$ N, E $\rightarrow$ L, E $\rightarrow$ C, E $\rightarrow$ D e NL $\rightarrow$ E

$\mathbf{R}_2$(C,S) con C $\rightarrow$ S

$\mathbf{R}_3$(D,M) con D $\rightarrow$ M e M $\rightarrow$ D

$\mathbf{R}_4$(N,L,P,A) con NLP $\rightarrow$ A