O la proposizione scritta

in questo riquadro è falsa

oppure

tu sei Superman

10 Lezione Corso di Logica 2020/2021

30 ottobre 2020

Maria Emilia Maietti

Prova Parziale

SABATO 14 novembre 2020

ore 12

solo in presenza

in P300 via Luzzati 10

iscrizione obbligatoria via uniweb

SIMULAZIONE prova parziale

venerdi' 30 ottobre 2020

ore 11.30-12.30

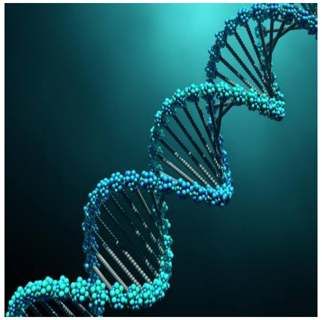
CORREZIONE SIMULAZIONE

giovedi' 5 novembre	10.30-12.30
venerdi' 6 novembre	10.30-12.30

Dalla Logica alla scienza...

Come si formalizza al computer

una teoria scientifica?



Nozione di teoria

Teoria proposizionale = calcolo logico per LC_p

+

assiomi (extralogici)

Ax.1, Ax.2,... Ax.k  

+

regola di composizione

$$\frac{\vdash \mathtt{fr} \qquad \Gamma, \mathtt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

sequente **derivabile** in una teoria $\mathcal{T}$

Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice derivabile nella **teoria proposizionale** $\mathcal{T}$

se esiste un albero avente:

1. $\Gamma \vdash \Delta$ come radice;

2. ogni foglia è istanza di un assioma di $\mathcal{T}$

(= o di un **assioma logico di LC$_p$** o di un **assioma extralogico specifico** di $\mathcal{T}$);

3. l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di $\mathcal{T}$

(= delle regole di LC$_p$ + regole di composizione)

def. di teorema in una teoria $\mathcal{T}$

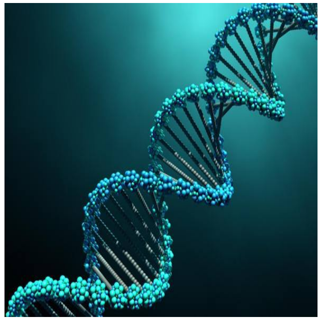
Una formula **fr** è detta **teorema di una teoria** $\mathcal{T}$

se il sequente $\vdash \mathtt{fr}$ è *derivabile in* $\mathcal{T}$

(con l'uso degli assiomi e delle regole di composizione!!)

Tutte le tautologie classiche $\mathtt{pr}$

sono teoremi (**tautologici**!) di OGNI teoria scientifica!!!



NON contraddittorietà del calcolo LC_p

Teorema di **NON contraddizione** del calcolo LC_p:

il calcolo logico LC_p **NON è contraddittorio**

ovvero nel calcolo LC_p **NON si può derivare** $\vdash \perp$

(si possono applicare solo scambi a vuoto! senza arrivare ad assiomi)

(inoltre permette di derivare soltanto **tautologie classiche**!!)

come usare la regola comp: I modo DERIVAZIONE con assiomi

in una teoria $\mathcal{T}$

data una derivazione π ottenuta con due assiomi di $\mathcal{T}$

$$\dfrac{\pi}{\mathsf{Ax}.i_1, \mathsf{Ax}.i_2 \vdash \mathtt{fr}}$$

si può comporre questa derivazione con **CIASCUN assioma**

fino a trovare una derivazione di $\vdash \mathtt{fr}$ nella teoria $\mathcal{T}$ in tal modo

$$\dfrac{\vdash \mathsf{Ax}.i_1 \qquad \dfrac{\vdash \mathsf{Ax}.i_2 \qquad \dfrac{\pi}{\mathsf{Ax}.i_1, \mathsf{Ax}.i_2 \vdash \mathtt{fr}}}{\mathsf{Ax}.i_1 \vdash \mathtt{fr}}\ \mathrm{comp}}{\vdash \mathtt{fr}}\ \mathrm{comp}$$

$\Rightarrow$ **fr** diventa **teorema della teoria** $\mathcal{T}$.

come usare la regola comp: Il modo con TEOREMI GIÀ NOTI

in una TEORIA la CONOSCENZA si ACCUMULA con la regola comp:

Data una derivazione π_1

$$\frac{\pi_1}{\vdash \mathtt{T}_1}$$

allora si può usare il teorema già noto $\mathtt{T}_1$ come premessa per derivare un'altra formula $\mathtt{T}_2$

$$\frac{\pi_2}{\mathtt{T}_1 \vdash \mathtt{T}_2}$$

e poi **componendo le derivazioni** π_1 **e** π_2 **con comp**

in tal modo

$$\frac{\dfrac{\pi_1}{\vdash \mathtt{T}_1} \qquad \dfrac{\pi_2}{\mathtt{T}_1 \vdash \mathtt{T}_2}}{\vdash \mathtt{T}_2}\ \mathrm{comp}$$

si trova che $\mathtt{T}_2$ è pure un teorema di $\mathcal{T}$

ovvero

in una **teoria** *si possono derivare* **nuovi teoremi componendo** con derivazioni di **teoremi già noti** (*in libreria!*)

Attenzione alle teorie contraddittorie

in una teoria con assiomi contraddittori, come ad esempio:

Sia T_{contra} la teoria con assiomi:

		Anna afferma il vero
$Ax.1$	è	$\vdash A$
		Anna NON afferma il vero
$Ax.2$	è	$\vdash \neg A$

possiamo derivare il sequente $\vdash \perp$ in due modi!!

I modo: derivazione del falso in T_{contra}

direttamente con gli assiomi

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{Ax.}_1\\ \vdash A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{Ax.}_2\\ \vdash \neg A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A \vdash A, \perp\end{array}}{A, \neg A \vdash \perp}\ \neg\text{−D}}{A \vdash \perp}\ \text{comp}}{\vdash \perp}\ \text{comp}$$

II modo: derivazione del falso in T_{contra}

con teorema intermedio + derivazione solo logica

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{Ax.}1\\ \vdash A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{Ax.}2\\ \vdash \neg A\end{array}}{\vdash A\&\neg A}\ \&-\mathrm{D} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A \vdash A, \bot\end{array}}{A, \neg A \vdash \bot}\ \neg-\mathrm{S}}{A\&\neg A \vdash \bot}\ \&-\mathrm{S}}{\vdash \bot}\ \mathrm{comp}$$

Nelle teorie contraddittorie OGNI proposizione è vera!!

In una teoria $\mathcal{T}$ in cui si deriva il falso $\vdash\bot$

OGNI formula $\mathtt{fr}$ risulta vera

in quanto si deriva in tal modo

$$\dfrac{\dfrac{\text{derivazione del falso}}{\vdash\bot} \qquad \overset{\text{ax-}\bot}{\bot \vdash \mathtt{fr}}}{\vdash \mathtt{fr}}\ \text{comp}$$

Esempio di teoria proposizionale

Assiomi extralogici della teoria T_{gi}:

Giovanni va in gita se Carla non ci va.

Beppe non va in gita se e solo se ci va Giovanni.

Beppe va in gita se Carla non va in gita.

Toni va in gita solo se ci va Carla.

alcuni teoremi di T_{gi}

Se Giovanni non va in gita allora Beppe ci va.

Se Carla non va in gita allora Beppe non ci va.

Carla va in gita.

Solo se Carla va in gita allora ci vanno sia Toni che Giovanni.

Se Carla non va in gita ci va Ester.

Non si dà il caso che Carla non vada in gita e che ci vada Beppe.

Assiomi della teoria T_{gi}

Giovanni va in gita se Carla non ci va.

$Ax.1$ è $\neg C \rightarrow G$

Beppe non va in gita se e solo se ci va Giovanni.

$Ax.2$ è $(\neg B \rightarrow G) \,\&\, (G \rightarrow \neg B)$

Beppe va in gita se Carla non va in gita.

$Ax.3$ è $\neg C \rightarrow B$

Toni va in gita solo se ci va Carla.

$Ax.4$ è $T \rightarrow C$

il primo teorema è *Se Giovanni non va in gita allora Beppe ci va.*

ovvero

$\mathtt{T}_1$ è $\neg G \rightarrow B$

che si deriva come segue

$$\dfrac{\vdash \mathsf{Ax.}_2 \qquad \dfrac{\pi}{(\neg B \rightarrow G)\,\&\,(G \rightarrow \neg B) \vdash \neg G \rightarrow B}}{\vdash \neg G \rightarrow B}\ \text{comp}$$

ove π è una qualche derivazione nella teoria (qui basta in LC_p!!!)

che si lascia al lettore da completare...

VEDI CAP.11 dispensa per soluzioni

Test di logica

In un gioco cinque amiche fanno un'affermazione, che è vera o falsa.

Quattro affermazioni sono riportate sotto, una è mancante:

Anna: 11 è un numero primo

Celeste: ..

Francesca: un rombo ha 4 lati uguali

Morgana: l'affermazione di Celeste è falsa

Tiziana: una sola tra le affermazioni precedenti è vera.

Si può dedurre, anche se non si conosce l'affermazione di Celeste, quante delle cinque affermazioni sono vere?

a) No

b) Sì, sono vere solo due affermazioni

c)Sì, è vera solo un'affermazione

d)Sì, sono vere solo tre affermazioni

e) Sì, sono vere solo quattro affermazioni

Formalizziamo il gioco precedente ponendo:

A= Anna dice il vero

C= Celeste dice il vero

F= Francesca dice il vero

M=Morgana dice il vero

T= Tiziana dice il vero

semplificando le affermazioni banalmente vere o false otteniamo la teoria T_{test} con i seguenti assiomi:

	Anna: 11 è un numero primo
Ax.1	$\vdash A$
	Francesca: un rombo ha 4 lati uguali
Ax.2	$\vdash F$
	Morgana: l'affermazione di Celeste è falsa
Ax.3	$\vdash M \leftrightarrow \neg C$
	Tiziana: una sola tra le affermazioni precedenti è vera.
Ax.4	$\vdash \neg T$

Per stabilire quante persone in T_{test} dicono il vero, dobbiamo stabilire chi tra Morgana e Celeste dice il vero.

Quindi proviamo a derivare nella teoria $\vdash M \vee C$

componendo con l'unico assioma che parla di loro in tal modo:

$$\dfrac{\vdash \mathsf{Ax.}_3 \qquad \dfrac{\pi}{\mathsf{Ax.}_3 \vdash M \vee C}}{\vdash M \vee C}\ \text{comp}$$

e si lascia al lettore di trovare la derivazione π.

Ora sappiamo che almeno una tra Morgana e Celeste dice il vero

ma non sappiamo se tutte e due lo dicono

e neanche se è possibile stabilire quante di loro davvero dicono il vero.

Quindi proviamo a derivare nella teoria $\vdash M \,\&\, C$

componendo con l'unico assioma che parla di loro in tal modo:

$$\dfrac{\vdash \mathsf{Ax.}_3 \qquad \dfrac{\dfrac{\pi_1}{\mathsf{Ax.}_3 \vdash M} \qquad \dfrac{\pi_2}{\mathsf{Ax.}_3 \vdash C}}{\mathsf{Ax.}_3 \vdash M \,\&\, C}\ \&-\mathrm{D}}{\vdash M \,\&\, C}\ \mathrm{comp}$$

Vediamo che NON esiste la derivazione π_1

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$C \vdash M, M$}
\RightLabel{$\neg-\mathrm{D}$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg C\,,\, M, M$}
\RightLabel{sc_{dx}}
\UnaryInfC{$\vdash M, \neg C\,, M$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg C \ \vdash \neg C, M$}
\RightLabel{$\rightarrow-\mathrm{S}$}
\BinaryInfC{$M \rightarrow\neg C \ \vdash \neg C, M$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$M \rightarrow\neg C\,,\ M \ \vdash M$}
\RightLabel{$\rightarrow-\mathrm{S}$}
\BinaryInfC{$M \rightarrow\neg C\,,\ \neg C \rightarrow M \ \vdash M$}
\RightLabel{$\&-\mathrm{S}$}
\UnaryInfC{$(M \rightarrow\neg C)\ \&\ (\neg C \rightarrow M) \vdash M$}
\end{prooftree}
$$

e l'unica riga che falsifica il sequente è C=**1** e M=**0**

che rende vero l'assioma $\mathtt{Ax}_3$ nella premessa e falsa la conclusione M

e questo dice che è possibile (MA non necessario) che Celeste dica il vero e Morgana il falso

Vediamo che NON esiste la derivazione π_2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{M, C \vdash C}}{M \to \neg C \vdash \neg C, C}\,\neg\text{-D} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{M, \vdash M, C} \qquad \dfrac{M \vdash C, C}{M, \neg C \vdash C}\,\neg\text{-D}}{M, M \to \neg C \vdash C}\,\to\text{-S}}{M \to \neg C, M \vdash C}\,\text{sc}_{sx}}{M \to \neg C\ ,\ \neg C \to M \vdash C}\,\to\text{-S}}{(M \to \neg C)\ \&\ (\neg C \to M) \vdash C}\,\&\text{-S}$$

e l'unica riga che falsifica il sequente è C=**0** e M=**1**

che rende vero l'assioma $\mathtt{Ax}_3$ nella premessa e falsa la conclusione C

e questo dice che è possibile (MA non necessario) che Celeste dica il falso e Morgana il vero

L'albero del sequente $\mathsf{Ax.}_3 \vdash M \,\&\, C$ risulta dunque

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{l} \text{con unica foglia NON assioma} \\ C \vdash M, M \\ \pi_1 \end{array}}{\mathsf{Ax.}_3 \vdash M} \qquad \dfrac{\begin{array}{l} \text{con unica foglia NON assioma} \\ M \vdash C, C \\ \pi_2 \end{array}}{\mathsf{Ax.}_3 \vdash C}}{\mathsf{Ax.}_3 \vdash M \,\&\, C}\ \&\!-\!\mathrm{S}$$

con le uniche righe di falsità che rendono

C=**1** ma M=**0** oppure C=**0** ma M=**1**

senza poter rendere entrambe false (e infatti sapevamo che $M \vee C$ risulta vera in T_{test})

ma NEANCHE entrambe vere (con M=C entrambi $= \mathbf{1}$ o entrambi $= \mathbf{0}$)

perchè in tal caso $\mathsf{Ax.}_3$ risulterebbe falso mentre deve essere vero in quanto assioma!

E difatti *questo albero rappresenta la tabella di verità del sequente e permette da solo di rispondere al test.*

Quindi risulterà che $\neg(\ M \,\&\, C\ )$ è derivabile in T_{test}.

Conclusione

Si vede che nella teoria T_{test} si deriva $\vdash \neg(\ M\ \&\ C\ )$

componendo con Ax.$_3$:

$$\cfrac{\vdash \text{Ax.}_3 \qquad \cfrac{\pi}{\text{Ax.}_3 \vdash \neg(\ M\ \&\ C\ )}}{\vdash \neg(\ M\ \&\ C\ )}\ \text{comp}$$

Lasciamo al lettore di trovare la derivazione π

In conclusione in T_{test} SOLTANTO tre amiche dicono il vero

in quanto o Morgana o Celeste dicono il vero (perchè $\vdash\ M \vee C$ risulta derivabile ovvero vera in T_{test})

MA NON entrambe (perchè $\vdash \neg(\ M\ \&\ C\ )$ risulta derivabile ovvero vera in T_{test})

(e se la derivazione π non esistesse si concluderebbe che NON è possibile decidere se tre o quattro dicono il vero!)