## III appello 5 settembre 2012

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $\vdash \neg( C \to ( \neg F \to ( A \to ( A \to B ) \to A ) ) )$

  - 5 punti
    $\vdash \forall w\ ( \neg F(w) \ \to\ \neg\neg F(w) ) \ \&\ \forall y \neg F(y)$

  - 5 punti
    $\exists x\ A(x) \ \vdash\ \neg \forall x\ \neg A(x) \ \vee\ A(x)$

  - 5 punti
    $\neg\ \forall y\ \neg A(y) \ \to\ C(x) \vdash \exists x\ A(x) \ \to\ C(x)$

  - 6 punti
    $\vdash \exists x\, \exists y\, \exists w\, ( x \neq y \ \&\ ( y \neq w \,\&\, x \neq w ) )$

  - 5 punti
    $\vdash a \neq b \ \&\ b \ \neq c \ \to\ a \neq c \ \vee\ \exists x\ \exists y\ x \neq y$

  - 5 punti
    $\vdash \neg \forall y\ \forall z\ z \neq y \ \&\ \exists x\ x = c$

  - 5 punti
    $\vdash \exists x\ \exists y\ ( x \neq a \ \to\ y \neq b\ )$

• Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

- (3 punti)

  Se c'e' l'arcobaleno allora ha piovuto e c'e' soltanto se ha piovuto.
  ___
  Non si dà il caso che nè abbia piovuto nè ci sia l'arcobaleno.

  si consiglia di usare:
  A =C'e' l'arcobaleno
  P =Ha piovuto

- (6 punti)

  Quelli che sperano e non agiscono non possono ottenere nulla.
  ___
  Solo chi agisce può ottenere qualcosa.

  si consiglia di usare:
  A(x) =x agisce
  S(x)= x spera
  P(x,y)=x puó ottenere y

- (5 punti)

  Non si dà il caso che se tutti i topi ballano allora qualche gatto non dorme.
  ___
  I gatti dormono.

  si consiglia di usare:
  T(x)=x è un topo
  B(x)= x balla
  G(x) =x è un gatto
  D(x)= x dorme

- (7 punti)

  Non tutti gli animali mangiano degli animali.
  ___
  Alcuni animali non mangiano nessun animale erbivoro.

  si consiglia di usare:
  M(x,y)=x mangia y
  A(x)= x è un animale
  E(x)= x è un erbivoro

- (5 punti)

  I mammiferi sono animali.
  Tutte le scimmie sono mammiferi.
  ___
  Non si dà il caso che le scimmie non siano animali.

  si consiglia di usare:
  A(x) = x è un animale
  S(x)= x è una scimmia
  M(x)= x è un mammifero

- (7 punti)

  Fufi è un cane di Beppe ed è l'unico.
  ___
  Se il cane qui sotto è un cane di Beppe allora è Fufi.

  si consiglia di usare:
  C(x,y)= x è un cane di y
  f=Fufi
  b=Beppe

q=cane qui sotto

- (21 punti) Sia $T_{piz}$ la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Clara non va a mangiare la pizza solo se Leo e Berto ci vanno.
  - Berto non va a mangiare la pizza se Sonia non ci va.
  - Sonia va a mangiare la pizza solo se Clara ci va.
  - Non si dà il caso che se Elena va a mangiare la pizza allora Sonia ci vada.
  - Clara e Sonia vanno a mangiare la pizza soltanto se Elena non ci va.

  Si consiglia di usare:
  P(x)="x va a mangiare la pizza"
  l="Leo"
  c="Clara"
  e="Elena"
  b="Berto"
  s="Sonia"

  Dedurre poi in $T_{piz}$ le seguenti affermazioni:

  - Se Berto va a mangiare la pizza allora Sonia ci va.
  - Clara va a mangiare la pizza se Leo non ci va.
  - Clara va a mangiare la pizza.
  - Elena va a mangiare la pizza.
  - Sonia non va a mangiare la pizza.
  - Berto non va a mangiare la pizza.
  - Qualcuno va a mangiare la pizza ma qualcuno non ci va.

- (25 punti) Sia $T_{dis}$ la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Nella dispensa c'è un pacco di riso e uno di pane ma non uno di pasta.
  - Soltanto nella dispensa ci sono pacchi di farina o pacchi di pane.
  - Tutto ciò che è nella dispensa si può utilizzare per cucinare.
  - Tutti pacchi di riso o di pane nella dispensa sono vecchi.
  - Se ci fosse un pacco di zucchero nella dispensa ci sarebbe anche un pacco di pasta e dei grissini.

  Si consiglia di usare:
  D(x)= "x è nella dispensa"
  R(x)=" x è un pacco di riso
  G(x)="x è un grissino"
  F(x)=" x è un pacco di farina"
  Z(x)=" x è un pacco di zucchero"
  C(x)="x si può utilizzare per cucinare"
  N(x)="x è un pacco di pane"
  S(x)="x è un pacco di pasta"
  V(x)="x è vecchio"

  Dedurre poi in $T_{dis}$ le seguenti affermazioni:

- C‘è qualcosa nella dispensa.
- C’è un pacco di riso vecchio nella dispensa.
- Non c‘è un pacco di zucchero nella dispensa.
- I pacchi di farina si possono utilizzare per cucinare.
- Non si dà il caso che i pacchi di pane non siano vecchi.
- Se ci fosse un pacco di pasta nella dispensa ci sarebbero anche dei grissini.

- Dire se nell’aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (5 punti) $\vdash 2 = 1 \ \& \ 7 = 1$
2. (5 punti) $\vdash \forall x \ \forall y \ (\ x \neq y \ \rightarrow \ s(x) \neq s(5)\ )$
3. (5 punti) $\vdash \exists x \ \exists y \ \exists z \ x \cdot z = y \cdot z$
4. (5 punti) $\vdash \exists y \ \exists x \ y \neq y \cdot x$
5. (6 punti) $\vdash \forall x \ \forall y \ x = y$
6. (6 punti) $\vdash \forall w \ \exists x \ \exists y \ x + y = w + x$
7. (7 punti) $\vdash x = x + 1$
8. (10 punti) $\vdash \forall x \ (\ x = 1 \ \vee \ \exists y \ s(y) \neq x\ )$
9. (10 punti) $\vdash \forall x \ x + 1 = s(x)$
10. (12 punti) $\vdash \forall x \ \forall y \ (\ x \neq 0 \rightarrow (x \cdot y) + x \neq 0\ )$

- Stabilire se le seguenti regole sono valide e anche sicure rispetto alla semantica classica:

(8 punti)

$$\frac{\Gamma, x = c \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \ x = c \vdash \Delta} \ 1$$

(5 punti)

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg(A \& B) \vdash \Delta} \ 2$$

- (10 punti) Stabilire se la formalizzazione di

$$\frac{\text{Frick canta} \vdash \text{La festa riesce bene}}{\text{Tutti cantano e danzano} \ \vdash \ \text{La festa riesce bene}} \ 3$$

è istanza di una regola valida assieme alla sua inversa rispetto alla semantica classica, ove
$C(x)$=“$x$ canta”
$D(x)$=“$x$ danza”
$P$=“La festa riesce bene”
$f$=“Frick”

## Logica classica con uguaglianza- $\mathbf{LC}_=$

$$\frac{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \frac{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla} \qquad \frac{\text{ax-}\top}{\Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&{-}\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee{-}\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg{-}\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg{-}\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \rightarrow{-}\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \rightarrow{-}\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall{-}\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall{-}\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists{-}\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists{-}\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\mathrm{S} \qquad \frac{= -\mathrm{ax}}{\Gamma \vdash t = t, \Delta}$$

## Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $\mathrm{LC}_=$ + $\mathrm{comp}_{sx}$+ $\mathrm{comp}_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$

$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \rightarrow x = y\ )$

$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$

$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$

$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$

$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$

$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \rightarrow A(s(x))\ ) \rightarrow \forall x\ A(x)$

ove il numerale $n$ si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

## Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\text{S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists-\text{D}_v$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{tra}^* & \text{cf}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

## 1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_= + \text{comp}_{sx} + \text{comp}_{dx}$ si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$