I appello e II compitino 25 giugno 2012

nome: cognome:

appello II compitino

- A chi fa l'appello verrà valutato ogni esercizio per il superamento dell'esame.
- A chi fa il II compitino verranno valutati soltanto gli esercizi con la dicitura II compitino e i punti segnati VERRANNO AUMENTATI di un terzo.
- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $(\neg C \to \neg A) \to \neg B \vdash \neg C$
  - 5 punti
    $\vdash \neg \exists y\, (\neg C(y) \vee \neg\neg C(y))$
  - 5 punti
    $\exists x\, (B(x) \& \neg B(x)) \vdash \forall x\, \neg B(x) \to \exists x\, \neg B(x)$
  - 6 punti
    $\exists x\, \forall y\, (\neg C(x) \vee \neg A(y)) \vdash \forall z\, \exists y\, (A(y) \to \neg C(y))$
  - 5 punti
    $\vdash \exists w\, \forall z\, (z = w \to w = z)$
  - 5 punti
    $\forall z\; z \neq z \vdash \exists x\, \exists y\, (x = a \,\&\, y = b)$
  - 5 punti
    $\vdash \forall x\, \neg\, \exists z\; z \neq x$
  - 5 punti
    $\vdash w = x \to \forall y\, (x = y \to y = w)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

  - (3 punti)

    $$\frac{\text{Solo se non ho tempo non rileggo il compito.}}{\text{Se ho tempo rileggo il compito, ma se non ho tempo non lo rileggo.}}$$

    si consiglia di usare:
    R ="Rileggo il compito"
    H ="Ho tempo"

  - (5 punti)

    $$\frac{\text{Non tutti i tavoli sono di legno.}}{\text{Qualche tavolo non nè di legno, nè di ferro.}}$$

    si consiglia di usare:
    L(x) ="x è di legno"
    T(x)= "x è un tavolo"
    F(x)= "x è di ferro"

  - (6 punti)

    $$\frac{\text{Non tutti mentono.}}{\text{Qualcuno non mente o non tace la verità.}}$$

    si consiglia di usare:
    M(x) ="x mente"
    V(x)= "x tace la verità"

  - (6 punti)

    $$\frac{\text{Gli amici sono preziosi.} \quad \text{Non si dà il caso che ci sia qualcosa che non ha valore inestimabile e sia prezioso.}}{\text{Gli amici hanno valore inestimabile.}}$$

    si consiglia di usare:
    A(x)=x è un amico
    P(x)=x è prezioso
    V(x) = x ha valore inestimabile

  - (6 punti)

    $$\frac{\text{Quelli che non hanno controllato la correttezza dei loro programmi non sono tranquilli.}}{\text{Qualcuno non è tranquillo oppure ha controllato la correttezza dei suoi programmi.}}$$

    si consiglia di usare:
    P(x) = x ha controllato la correttezza dei suoi programmi
    T(x)= x è tranquillo

  - (7 punti)

    $$\frac{\text{Il fratello di Beppe ha un unico nome.} \quad \text{Gianni è il nome del fratello di Beppe} \quad \text{Gianni è diverso Carlo.}}{\text{Carlo non è il nome del fratello di Beppe.}}$$

    si consiglia di usare:
    N(x,y)= x è il nome di y

g=Gianni
c=Carlo
f=fratello di Beppe

- (7 punti)

  C'è un unico bicchiere sul tavolo.
  Il bicchiere di Mario è sul tavolo.

  Se il bicchiere rosso non è un bicchiere sul tavolo allora il bicchiere rosso non è uguale al bicchiere di Mario.

  si consiglia di usare:
  B(x)= x è un bicchiere sul tavolo
  b=bicchiere di Mario
  r=bicchiere rosso

- (**II comp**) (18 punti) Sia T_{pia} la teoria ottenuta estendendo LC$_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - A Pippo non piace cavalcare solo se pure a Gino non piace.
  - A Gino piace cavalcare se piace anche a Pippo.
  - Se a Gino non piace nuotare, a Pippo non piace cavalcare.
  - Se a Gino piace nuotare, allora a Pippo piace cavalcare ma non nuotare.
  - Non si dà il caso che a Gino non piaccia nè cavalcare nè nuotare.

  Si consiglia di usare:
  P(x,y)="x piace a y"
  c="cavalcare"
  n="nuotare"
  g="Gino"
  p="Pippo"

  Dedurre poi in T_{pia} le seguenti affermazioni:

  - A Gino piace cavalcare o nuotare.
  - A Gino piace cavalcare se gli piace nuotare.
  - A Gino piace cavalcare.
  - A Pippo piace cavalcare.
  - A Gino piace nuotare.
  - A Pippo non piace nuotare.

- (**II comp**) (26 punti) Sia T_{pr} la teoria ottenuta estendendo LC$_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Nel prato ci sono ortiche solo se non ci sono margherite.
  - Nel prato c'è un'ortica o, se non ci sono quadrifogli ci sono soffioni.
  - Non si dà il caso che nel prato non ci sia una margherita o ci sia un papavero.
  - Nel prato ci sarebbe un papavero, se ci fosse un quadrifoglio.
  - Soltanto i papaveri nel prato sono un pò appassiti.

Si consiglia di usare:
M(x)= "x è una margherita ed è nel prato"
P(x)= "x è un papavero ed è nel prato"
S(x)= "x è un soffione ed è nel prato"
Q(x)= "x è un quadrifoglio ed è nel prato"
O(x)= "x è un'ortica ed è nel prato"
F(x)= "x è un pò appassito"

Dedurre poi in T_{pr} le seguenti affermazioni:

- Nel prato non c'è alcun papavero.
- Nel prato non ci sono quadrifogli.
- Nel prato non ci sono ortiche.
- Nel prato c'è un soffione.
- Non c'è nulla di un pò appassito.
- I soffioni nel prato non sono un pò appassiti.
- Le ortiche nel prato sono un pò appassite.

- (**II comp**) Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (5 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ 7 = x + y$
2. (5 punti) $\vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) \neq s(y)\ \rightarrow\ x \neq y\ )$
3. (6 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ (\ x \neq s(y)\ \vee\ x = y + y\ )$
4. (5 punti) $\vdash \exists y\ \exists x\ \exists z\ z \cdot x = y \cdot x$
5. (5 punti) $\vdash 7 = 0$
6. (7 punti) $\vdash \forall x\ x \cdot 1 = x$
7. (10 punti) $\vdash \forall x\ (\ x \neq 0\ \rightarrow\ x + x \neq 0\ )$
8. (10 punti) $\vdash \forall x\ (\ x \neq 0\ \rightarrow\ x \cdot x \neq 0\ )$
9. (13 punti) $\vdash 1 = 3$

- Stabilire se le seguenti regole sono valide rispetto alla semantica classica e anche sicure:

(8 punti)

$$\frac{\Gamma \vdash x = c\,, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\ x = c\,, \Delta}\ 1$$

(5 punti)

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg(A \& B)\,, \Delta}\ 2$$

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot & \text{ax-}\top \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\text{S} \qquad \begin{array}{c} = -\text{ax} \\ \Gamma \vdash t = t, \Delta \end{array}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC$_=$ + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$

$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$

$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$

$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$

$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$

$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$

$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \dots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx1}\\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx2}\\ \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx1}\\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx2}\\ \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''\end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{−S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{−D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{−S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{−D}_v$$

$$\begin{array}{c}\text{rf}^*\\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{sm}^*\\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{tra}^*\\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{cf}^*\\ \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{cp}^*\\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta\end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \rightarrow P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$