II appello 5 luglio 2010

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- Non si contano le brutte copie.

- Specificate le regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)

- Mostrare se i sequenti di seguito sono validi in LC e nel caso non lo siano mostrare un contromodello: **solo appello**

3 punti

$\neg(\ A \rightarrow \neg B\ ) \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

5 punti

$\forall x\ C(x) \vdash \neg\exists x\ \neg C(x)$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

5 punti

$\neg\exists x\ (\ \perp \vee C(x)\ ) \vdash \neg\forall x\ \neg C(x)$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

- Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI, ovvero hanno un modello che li rende validi, o INSODDISFACIBILI, ovvero nessun modello li rende validi, motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato di 2 punti)

  - (5 punti)

    Non tutti i programmatori hanno una laurea in informatica.

    Esistono programmatori senza laurea in informatica o senza diploma.

    si consiglia di usare:
    P(x) = x è programmatore
    L(x) = x ha una laurea in informatica
    D(x) = x ha un diploma

    corretto in LC sì no

- (5 punti)

  I robot sono controllati da un programma.

  Esistono robot controllati da un programma.

  si consiglia di usare:
  R(x) = x è robot
  C(x) = x è controllato da un programma

  corretto in LC sì no

- (3 punti)

  Mario è bravo se programma bene.

  Mario non è bravo se non programma bene.

  si consiglia di usare:
  M =Mario è bravo
  P = Mario programma bene

  corretto in LC sì no

- (7 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  Mario ha scritto un unico programma.
  Mario ha scritto il programma Tex.
  Latex è diverso da Tex.

  Mario non ha scritto il programma Latex.

  si consiglia di usare:
  S(x,y)= x ha scritto il programma y
  l=”Latex ”
  t=”Tex”
  m=’Mario”

  corretto in $LC_=$ sì no

- (7 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  Mario ha scritto il programma Tex.
  Mario ha scritto il programma Latex.
  Latex è diverso da Tex.

  Non si dà il caso che Mario abbia scritto un unico programma.

si consiglia di usare:
S(x,y)= x ha scritto il programma y
l=”Latex ”
t=”Tex”
m=’Mario”

corretto in $\mathrm{LC}_=$ sì no

- (5 punti) Stabilire se il sequente è valido in $\mathrm{LC}_=$

$$e = u, u = t, e = s \vdash e = t \vee u = s$$

corretto in $\mathrm{LC}_=$ sì no

- Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE rispetto alla semantica classica e nel caso di NON validità dire se sono SODDISFACIBILI o INSODDISFACIBILI: ciascuna vale 5 punti (+ 1 punto se non valida)

  – $\models \forall x\ (\ B(x) \to \neg B(x)\ )$
  – $\models \exists y\ \exists x\ (\ x \neq y \vee \perp\ )$
  – $\models \exists z\ \exists y\ (\ x = z \vee z \neq y\ )$

- (20 punti) Sia T^{cla}_{par} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se Claudia non gioca allora Giovanni non gioca.
  - Paolo gioca se e solo se Giovanni gioca e Claudia non gioca.
  - Se Paolo non gioca allora Giovanni non gioca.
  - Non si dà il caso che sia Giovanni che Claudia che Paolo non giochino.

  Si consiglia di usare:
  G(x)= x va in gita, c=Claudia, g=Giovanni, p=Paolo.

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione in T^{cla}_{gi}:

  - Qualcuno gioca.
  - Non si dà il caso che Giovanni giochi e Claudia non giochi.
  - Paolo non gioca.
  - Giovanni non gioca.
  - Claudia gioca.

- (30 punti) Sia T^{cla}_{sal} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Qualcuno saluta tutti.
- Gianni non saluta quelli che non lo salutano.
- Pippo non saluta nessuno.
- Claudia saluta quelli che la salutano.

suggerimento: si consiglia di usare:
S(x,y)= x saluta y
g=Gianni, p= Pippo, c= Claudia

Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria T^{cla}_{sal}:

- Qualcuno non saluta tutti.
- Qualcuno saluta Pippo.
- Pippo non saluta Gianni.
- Gianni non saluta Pippo.
- Qualcuno saluta Claudia.
- Claudia saluta qualcuno.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (5 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ (\ s(x) = s(y) \to y = x\ )$
  2. (5 punti) $1 = 0 \vdash \perp$
  3. (5 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ y = x \cdot y$
  4. (5 punti) $\vdash \forall y\ (\ y = 4 \to s(y) = 5\ )$
  5. (8 punti) $\vdash \exists z\ z + 1 = 3$
  6. (10 punti) $\vdash 3 \cdot 1 = 3$
  7. (10 punti) $\vdash \forall y\ s(y + 2) = y + 3$

- Stabilire quali delle seguenti regole sono valide e in caso positivo anche sicure: (8 punti ciascuna)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash s = e, \Delta}\ 1$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \to A}\ 2$$

Logica classica con uguaglianza- calcolo abbreviato $\mathbf{LC}^{abbr}_{=}$

$$\text{ax-id} \qquad\qquad \text{ax-}\perp$$

$$\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \qquad\qquad \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee\text{−D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee\text{−S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg\text{−D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg\text{−S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to\text{−D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \to\text{−S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \forall\text{−D } (x \notin VL(\Gamma, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla} \forall\text{−S}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla} \exists\text{−S } (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla} \exists\text{−D}$$

$$\begin{array}{c} = -\text{ax} \\ \Sigma \vdash t = t, \Delta \end{array} \qquad \frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\text{S}_f$$

Logica classica predicativa $\mathbf{LC}_=$ con uguaglianza

questa versione contiene le regole nel libro di Sambin

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ A \vdash A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{ax-}\perp \\ \perp \vdash \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma} \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma} \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"} \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A} \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla} \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&\text{−F} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&\text{−re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&\text{−re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee\text{−F} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee\text{−re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee\text{−re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to -\mathrm{F} \qquad \frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta} \to -\mathrm{re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta} \forall -\mathrm{D} \ (x \notin VL(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \ A(x) \vdash \Delta} \forall -\mathrm{re}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \ A(x) \vdash \Delta} \exists -\mathrm{S} \ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists \ x \ A(x), \Delta} \exists -\mathrm{re}$$

$$\begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \vdash t = t \end{array} \qquad \frac{\Sigma, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC + comp_{sx}+ comp_{dx}

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla} \ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"} \ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$Ax1. \vdash \forall x \ s(x) \neq 0$

$Ax2. \vdash \forall x \ \forall y \ (\ s(x) = s(y) \to x = y \ )$

$Ax3. \vdash \forall x \ \ x + 0 = x$

$Ax4. \vdash \forall x \ \forall y \ x + s(y) = s(x + y)$

$Ax5. \vdash \forall x \ x \cdot 0 = 0$

$Ax6. \vdash \forall x \ \forall y \ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$

$Ax7. \vdash A(0) \& \forall x \ (\ A(x) \to A(s(x)) \ ) \to \forall x \ A(x)$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \ \equiv \ \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\neg\text{-ax}_{sx1} \atop \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash \Delta \qquad \neg\text{-ax}_{sx2} \atop \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash \Delta$$

$$\neg\text{-ax}_{dx1} \atop \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' \qquad \neg\text{-ax}_{dx2} \atop \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\text{rf}^* \atop \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'$$

$$\text{sm}^* \atop \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta$$

$$\text{tra}^* \atop \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta \qquad \text{cf}^* \atop \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta$$

$$\text{cp}^* \atop \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $LC_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \rightarrow P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$