pre I-Compitino 30 maggio 2011

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Mostrare se i sequenti di seguito sono validi (o soltanto soddisfacibili o nessuna delle due) in logica classica (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso)

  2 punti

  $$(A \to B) \to (A \to C) \vdash A \vee B \to C \quad \begin{cases} \text{valido in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{non valido in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{soddisfacibile in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{insoddisfacibile in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$$

  2 punti

  $$(A \to B \& \neg A) \to C \vee B \vdash (A \to \perp) \leftrightarrow A \quad \begin{cases} \text{valido in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{non valido in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{soddisfacibile in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{insoddisfacibile in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$$

  3 punti

  $$\exists x B(x) \vdash \forall x \, (\, A(x) \ \vee \ \neg A(x) \,) \quad \begin{cases} \text{valido in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{non valido in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{soddisfacibile in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{insoddisfacibile in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$$

  3 punti

  $$\vdash \exists x (\, A(x) \ \& \ \perp \,) \quad \begin{cases} \text{valido in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{non valido in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{soddisfacibile in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{insoddisfacibile in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$$

  3 punti

  $$\vdash \exists x \neg\neg A(x) \ \to \ \neg \forall x \ \neg A(x) \quad \begin{cases} \text{valido in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{non valido in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{soddisfacibile in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{insoddisfacibile in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$$

3 punti

$\vdash \exists x \neg\neg A(x) \ \rightarrow\ \forall x\ \neg\neg A(x)$

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

3 punti

$\vdash \neg\exists x\ \neg A(x) \ \rightarrow\ \forall x\ \neg A(x)$

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

3 punti

$\vdash \exists x\ (A(x)\&\ \perp) \rightarrow \forall x\ (\ A(x)\ \vee\ C(x)\,)$

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

3 punti

$\vdash \neg(\ \exists x\ (A(x)\&\ \perp) \rightarrow \forall x\ (\ A(x)\ \vee\ C(x)\,)\,)$

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

- Formalizzare in sequente le argomentazioni di seguito. Si provi se il sequente ottenuto è valido e soddisfacibile o meno rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 4 punti

    Se sono in treno e chiacchero non mi annoio.
    Se sono in treno, solo se mi annoio chiacchero.
    ____
    Non si dà il caso che se sono in treno mi annoi e chiaccheri.

    si consiglia di usare:
    T=sono in treno
    S=mi annoio
    C=chiacchero

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

– 5 punti

Soltanto i programmi corretti ed eseguibili da tutti sono utili.
Fac è un programma che non è eseguibile da tutti.

Fac è un programma che non è utile.

si consiglia di usare:
P(x)= x è un programma
U(x)= x è utile
C(x)= x è corretto
E(x,y)= x è eseguibile da y
f=Fac

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

– 5 punti

Qualche programma eseguibile da tutti è inutile.

Tutti i programmi sono utili, o eseguibili da tutti, oppure inutili.

si consiglia di usare: come sopra

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

– 5 punti

Qualche programma eseguibile da tutti è inutile.

Tutti i programmi sono utili ed eseguibili da tutti oppure inutili.

si consiglia di usare: come sopra

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

– 5 punti

Soltanto i programmi corretti ed eseguibili da tutti sono utili.
Fac è un programma che non è utile ma corretto.

Fac è un programma che non è eseguibile da tutti.

si consiglia di usare: come sopra

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

– 5 punti

Non di dà il caso che qualcuno sia più sapiente di Socrate

Se qualcuno è più sapiente di Socrate allora lo sono tutti.

si consiglia di usare:
S(x,y)= x è più sapiente di y
s=Socrate

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

– 5 punti

Chi dorme bene vive bene.
Chi vive bene è felice

Chi dorme bene è felice.

si consiglia di usare:
D(x)= x dorme bene
V(x)=x vive bene
F(x)=x è felice

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

– 5 punti

Quelli intelligenti e onesti sanno di non sapere.

Quelli non onesti non sono intelligenti e non sanno di non sapere.

si consiglia di usare:
M(x)= x è intelligente
G(x)= x è onesto
A(x)= x sa di non sapere

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

– 6 punti

Se ciascun uomo ha coscienza di rispettare il diritto allora ogni legge è superflua.
Se gli uomini non hanno coscienza di rispettare il diritto allora ogni legge è inefficace.

Ogni legge è superflua o inefficace.

si consiglia di usare:
U(x)=x è uomo
D(x) = x ha coscienza di rispettare il diritto
L(x)=x è legge
E(x) = x è efficace
S(x)= x è superfluo

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

– 6 punti

Qualsiasi sia il segreto che Platone ha rivelato ad Aristotele
questo non è stato rivelato da nessuno a tutti.

Esiste un segreto che nessuno ha rivelato a nessun'altro.

si consiglia di usare:
p=Platone
R(y,x, z)= y ha rivelato il segreto x a z
a= Aristotele

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

– 7 punti

"Non esiste nulla che se è onnipotente e immortale allora tutti sono immortali"

si consiglia di usare:
O(x)=x è onnipotente
I(x)= x è immortale

valido in LC	poichè ....
non valido in LC	poichè ....
soddisfacibile in LC	poichè ....
insoddisfacibile in LC	poichè ....

- Stabilire quali delle seguenti regole sono valide e lo stesso per le loro inverse (l'analisi dell'inversa raddoppia i punti).

  - (7 punti)

$$\frac{\Gamma \vdash A(x) \vee \perp, \nabla}{\Gamma \vdash \forall x\ A(x), \nabla}\ 1$$

  - (3 punti)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \perp, C \vdash \Delta}\ 2$$

  - (5 punti)

$$\frac{\Gamma \vdash A(c), A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ 3$$

Logica classica- LC

$$\overset{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

Regole derivate o ammissibili in LC

$$\overset{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C}$$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \mathrm{in_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{in_{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A}\ \mathrm{cn_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \mathrm{cn_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{re}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\mathrm{re} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists-\mathrm{re}$$

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

PRE - I° - COMPITINO 30 MAGGIO 2011 OK

1

• a.

non si chiude

?

$$A, A \vdash B, C$$
$$\frac{A, A\to C \vdash C \qquad \dfrac{A \vdash A \to B, C}{}\ \to D}{A, (A\to B)\to(A\to C) \vdash C}\ \to S$$
$$\frac{(A\to B)\to(A\to C), A \vdash C \qquad (A\to B)\to(A\to C), B \vdash C}{(A\to B)\to(A\to C), A \vee B \vdash C}\ \vee\text{-}S$$
$$\frac{(A\to B)\to(A\to C), A\vee B \vdash C}{(A\to B)\to(A\to C) \vdash A\vee B \to C}\ \to D$$

(Sc-sx)

Contromodello:

$A = 1$ $B = 0$ $C = 0$

↳ non valida

Modello

Rendo vera la conclusione : $A \vee B \to C = 1 \Rightarrow C = 1$ gli atri a piacere

↳ soddisfacibile

• b.

Contromodello:

$A = 1$ $C = 1$ → non valida

Modello

$C = 0$ $B = 0$ $A = 1$ → rendo falsa la premessa → soddisfacibile

non si chiude

$$\frac{A, A, C \vdash \bot}{A, A, C \vee B \vdash \bot}\ \vee\text{-}S$$
$$A, A, (A\to B \,\&\, \neg A) \to (C\vee B) \vdash \bot \quad \to S$$
$$(A\to B \,\&\, \neg A) \to (C\vee B), A, A \vdash \bot \quad \text{Sc-sx}$$
$$(A\to B \,\&\, \neg A) \to (C\vee B), A \vdash A \to \bot \quad \to D$$
$$(A\to B \,\&\, \neg A) \to (C\vee B) \vdash A \to (A\to \bot) \quad \to D$$
$$\frac{(A\to B \,\&\, \neg A) \to (C\vee B) \vdash (A\to\bot) \to A \qquad (A\to B \,\&\, \neg A) \to (C\vee B) \vdash A \to (A\to \bot)}{(A\to B \,\&\, \neg A) \to (C\vee B) \vdash (A\to\bot)\to A \;\&\; A \to (A\to\bot)}\ \&\text{-}S$$

• C. $\exists_x B(x) \vdash \forall_x (A(x) \vee \neg A(x))$

$A(x) \vee \neg A(x)$ e' sempre vera! Quindi ho la conclusione valida!

Il sequente e' quindi sempre valido!

• d. $\vdash \exists_x (A(x) \,\&\, \bot)$

Essendovi $A(x) \,\&\, \bot$, cio' rende la consegrenza insoddisfacibile, percio' il sequente e' : insoddisfacibile

• e.

VALIDA!

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\text{-ax}_{sx1}}{A(x), \neg A(x) \vdash}\ \forall\text{-re}}{A(x), \forall x\, \neg A(x) \vdash}\ \neg\text{-D}}{A(x) \vdash \neg \forall x\, \neg A(x)}\ \neg\text{-S}}{\vdash \neg A(x), \neg\forall x\, \neg A(x)}\ \neg\text{-S}}{\neg\neg A(x) \vdash \neg \forall x\, \neg A(x)}\ \exists\text{-S}\ x \text{ non libero}}{\exists x\, \neg\neg A(x) \vdash \neg \forall x\, \neg A(x)}$$

} potevo applicare $\neg\neg$-S

• f $\exists x\ \neg\neg A(x) \rightarrow \forall x\ \neg\neg A(x)$

- Contromodello

$\mathcal{D}$: Nat $\qquad (A(x))^{\mathcal{D}} = \begin{cases} 1 & \text{per } x=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\exists x\ \neg\neg A(x) = 1 \qquad \forall x\ \neg\neg A(x) = 0 \rightarrow$ non valida

- Modello

$\mathcal{D}$: Nat $\qquad (A(x))^{\mathcal{D}} = 1 \rightarrow$ soddisfacibile

• g. $\neg \exists x\ \neg A(x) \vdash \forall x\ \neg A(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \exists x\, \neg A(x), \neg A(x)}{\neg \exists x\, \neg A(x) \vdash \neg A(x)}\ \neg\text{-S}}{\neg\exists x\, \neg A(x) \vdash \forall x\, \neg A(x)}\ \forall\text{-D}\ x \text{ non libera}$$

- Contromodello.

$\neg A(x) = 0 \rightarrow A(x) = 1 \quad \mathcal{D}$. Nat $\rightarrow$ non valida

- Modello

$\mathcal{D}$: Nat rende vera la conclusione $(\forall x\ \neg A(x))^{\mathcal{D}} = 1 \rightarrow (A(x))^{\mathcal{D}} = 0 \rightarrow$ soddisfacibile

• h. $\exists x\ (A(x)\ \&\ \perp) \rightarrow \forall x\ (A(x) \vee C(x))$

$A(x)\ \&\ \perp$ e' falsa in qualsiasi modello. Ho quindi una premessa falsa, quindi il sequente e' valido

• i. $\neg(\exists x\ (A(x)\ \&\ \perp) \rightarrow \forall x\ (A(x) \vee C(x)))$

La negazione di un sequente valido da' un sequente insoddisfacibile. Quindi, dato che la proposizione dentro il not e' valida, questo sequente e' insoddisfacibile.

(2) a) $T \& C \to \neg S,\ T \to (C \to S) \vdash \neg(T \to S \& C)$

- Contromodello:

Pongo: $C=1$ $S=0$ $T=0$ $\to$ non valida

- Modello

Pongo $T=1$ $S=0$ $C=0$ $T \& \bot \to \neg\bot,\ T \to (\bot \to \bot) \vdash \neg(T \to \bot \& \bot) \Rightarrow T, \neg \vdash T \to$ soddisfacibile

non si chiude

$$C, \neg S \vdash T \qquad C \vdash T\&C, T \quad \to S$$
$$C, T\&C \to \neg S \vdash T \quad \text{Sc-dx}$$
$$T\&C \to \neg S, C, S\&C \vdash \qquad T\&C \to \neg S, C \vdash T \quad \to S$$
$$T\&C \to \neg S, C, T \to S\&C \vdash$$
$$T\&C \to \neg S, T \to S\&C, S \vdash \qquad T\&C \to \neg S, T \to S\&C, C \vdash \quad \to S$$
$$T\&C \to \neg S, T \to S\&C, C \to S \vdash \qquad T\&C \to \neg S, T \to S\&C \vdash T \quad \to S$$
$$T\&C \to \neg S, T \to S\&C, T \to (C \to S) \vdash \quad \text{Sc-sx}$$
$$T\&C \to \neg S, T \to (C \to S), T \to S\&C \vdash \quad \neg\text{-D}$$
$$T\&C \to \neg S, T \to (C \to S) \vdash \neg(T \to S\&C)$$

b) $\forall x(U(x) \to P(x) \& C(x) \& \forall y E(x,y)),\ \neg\forall y E(f,y) \& P(f) \vdash \neg U(f) \& P(f)$

VALIDA

$$\overset{\text{ax-id}}{P(f), P(f) \& C(f), E(f,y) \vdash E(f,y), \neg U(f) \& P(f)} \quad \forall\text{-re}$$
$$P(f), P(f) \& C(f), \forall y E(f,y) \vdash E(f,y), \neg U(f) \& P(f) \quad \&\text{-S}$$
$$P(f), P(f) \& C(f) \& \forall y E(f,y) \vdash E(f,y), \neg U(f) \& P(f)$$
$$\overset{\neg\text{-ax dx2}}{P(f) \vdash \neg U(f), U(f), E(f,y)} \qquad \overset{\text{ax-id}}{P(f) \vdash P(f), U(f), E(f,y)} \quad \&\text{-D}$$
$$P(f) \vdash \neg U(f) \& P(f), U(f), E(f,y) \quad \text{Sc-dx}$$
$$P(f) \vdash U(f), E(f,y), \neg U(f) \& P(f) \quad \to S$$
$$P(f), U(f) \to P(f) \& C(f) \& \forall y E(f,y) \vdash E(f,y), \neg U(f) \& P(f) \quad \forall\text{-re} \dashrightarrow \text{prima sc-sx}$$
$$\forall x(U(x) \to P(x) \& C(x) \& \forall y E(x,y)), P(f) \vdash E(f,y), \neg U(f) \& P(f) \quad \forall\text{-D} \quad y \text{ non libero}$$
$$\forall x(U(x) \to P(x) \& C(x) \& \forall y E(x,y)), P(f) \vdash \forall y E(f,y), \neg U(f) \& P(f) \quad \neg\text{-S} \dashrightarrow \text{prima } \&\text{-S}$$
$$\forall x(U(x) \to P(x) \& C(x) \& \forall y E(x,y)), \neg\forall y E(f,y) \& P(f) \vdash \neg U(f) \& P(f)$$

c) $\exists x(P(x) \& \forall y E(x,y) \& \neg U(x)) \vdash \forall x(P(x) \to U(x) \vee \forall y E(x,y) \vee \neg U(x))$

Nella conclusione del sequente è presente la sequenza: $U(x) \vee \neg U(x)$ che per la legge del terzo escluso rende la conclusione sempre vera, quindi il sequente valido.

d) $\exists_x (P(x) \;\&\; \forall_y E(x,y) \;\&\; \neg U(x)) \rightarrow \forall_x (P(x) \rightarrow (U(x) \;\&\; \forall_y E(x,y)) \vee \neg U(x))$

non si chiude

$P(x), \forall_y E(x,y) \vdash U(x), \forall_x (P(x) \rightarrow (U(x) \;\&\; \forall_y E(x,y)) \vee \neg U(x))$ — $\neg$-S

$P(x), \forall_y E(x,y), \neg U(x) \vdash \forall_x (P(x) \rightarrow (U(x) \;\&\; \forall_y E(x,y)) \vee \neg U(x))$ — &-S

$P(x), \forall_y E(x,y) \;\&\; \neg U(x) \vdash \forall_x (P(x) \rightarrow (U(x) \;\&\; \forall_y E(x,y)) \vee \neg U(x))$ — &-S

$P(x) \;\&\; \forall_y E(x,y) \;\&\; \neg U(x) \vdash \forall_x (P(x) \rightarrow (U(x) \;\&\; \forall_y E(x,y)) \vee \neg U(x))$ — $\exists$-S x non libero

$\exists_x (P(x) \;\&\; \forall_y E(x,y) \;\&\; \neg U(x)) \vdash \forall_x (P(x) \rightarrow (U(x) \;\&\; \forall_y E(x,y)) \vee \neg U(x))$

- Contromodello:

$\mathcal{D}$: Nat pongo: $(P(x))^{\mathcal{D}}=1$ $(E(x,y))^{\mathcal{D}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x<3 \\ 0 & \text{atrimenti} \end{cases}$ $(U(x))^{\mathcal{D}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x>3 \\ 0 & \text{atrimenti} \end{cases}$

$(\exists x(\dots))^{\mathcal{D}} = 1$ $\quad (\forall x(\dots))^{\mathcal{D}} = 0$ → non valida

N.B. Solo se variano sia $U(x)$ che $E(x,y)$ potrò avere la conclusione falsa!

- Modello:

$\mathcal{D}$: Nat pongo $(P(x))^{\mathcal{D}}=0$ → implicazione sempre vera → conclusione vera → soddisfacibile

e) $\forall_x (U(x) \rightarrow P(x) \;\&\; C(x) \;\&\; \forall_y E(x,y)), P(f) \;\&\; \neg U(f) \;\&\; C(f) \vdash P(f) \;\&\; \neg \forall_y E(x,y)$

Ramo sinistro:

ax-id

$\forall x(\dots), C(f), \neg U(f), P(f) \vdash P(f)$

$\forall x(\dots), P(f), \neg U(f), C(f) \vdash P(f)$

Ramo destro:

non si chiude

$\forall x(\dots), P(f), \forall_y E(x,y), C(f) \vdash U(f)$ — $\neg$-S

$\forall x(\dots), P(f), \forall_y E(x,y), C(f), \neg U(f) \vdash$ — sc-sx

$\forall x(\dots), P(f), \neg U(f), C(f), \forall_y E(x,y) \vdash$ — $\neg$-D

$\forall x(\dots), P(f), \neg U(f), C(f) \vdash \neg \forall_y E(x,y)$ — &-D

Sotto:

$\forall x(\dots), P(f), \neg U(f), C(f) \vdash P(f) \;\&\; \neg \forall_y E(x,y)$ — &-S

$\forall_x (U(x) \rightarrow P(x) \;\&\; C(x) \;\&\; \forall_y E(x,y)), P(f), \neg U(f) \;\&\; C(f) \vdash P(f) \;\&\; \neg \forall_y E(x,y)$ — &-S

$\forall_x (U(x) \rightarrow P(x) \;\&\; C(x) \;\&\; \forall_y E(x,y)), P(f) \;\&\; \neg U(f) \;\&\; C(f) \vdash P(f) \;\&\; \neg \forall_y E(x,y)$

- Modello:

$\mathcal{D}$. Nat pongo $(P(x))^{\mathcal{D}}=1$ $(E(x,y))^{\mathcal{D}}=0$ → rendo vera la conclusione

gli altri a piacere

→ soddisfacibile

- Contromodello

$\mathcal{D}$: Nat pongo $(U(x))^{\mathcal{D}}=0$, $(P(x))^{\mathcal{D}}=1$, $(C(x))^{\mathcal{D}}=1$

$(E(x,y))^{\mathcal{D}}=1$

$\forall_x (\bot \rightarrow \top \;\&\; \top \;\&\; \top), \top \;\&\; \neg\bot \;\&\; \top \vdash \top \;\&\; \neg \top \Rightarrow \top \vdash \bot$ → non valida

f) $\neg \exists_x S(x,\bar{s}) \vdash \exists_x S(x,\bar{s}) \to \forall_x S(x,\bar{s})$

VALIDA

ax-id

$S(x,\bar{s}) \vdash S(x,\bar{s}), \forall_x S(x,\bar{s})$ $\quad \exists$-re

$S(x,\bar{s}) \vdash \exists_x S(x,\bar{s}), \forall_x S(x,\bar{s})$ $\quad \neg$-S

$S(x,\bar{s}), \neg \exists_x S(x,\bar{s}) \vdash \forall_x S(x,\bar{s})$ $\quad$ sc-sx

$\neg \exists_x S(x,\bar{s}), S(x,\bar{s}) \vdash \forall_x S(x,\bar{s})$ $\quad \exists$-S x non libero

$\neg \exists_x S(x,\bar{s}), \exists_x S(x,\bar{s}) \vdash \forall_x S(x,\bar{s})$ $\quad \to$D

$\neg \exists_x S(x,\bar{s}) \vdash \exists_x S(x,\bar{s}) \to \forall_x S(x,\bar{s})$

g) $\forall_x (D(x) \to V(x)), \forall_x (V(x) \to F(x)) \vdash \forall_x (D(x) \to F(x))$

VALIDA

ax-id $\quad$ ax-id

$D(x), V(x) \vdash V(x), F(x) \qquad D(x), V(x), F(x) \vdash F(x)$ $\quad \to$S

$D(x), V(x), V(x) \to F(x) \vdash F(x)$ $\quad$ sc-sx

$V(x) \to F(x), D(x), V(x) \vdash F(x)$

ax-id

$V(x) \to F(x), D(x) \vdash D(x), F(x)$ $\quad \to$S

$V(x) \to F(x), D(x), D(x) \to V(x) \vdash F(x)$ $\quad$ sc-sx

$V(x) \to F(x), D(x) \to V(x), D(x) \vdash F(x)$ $\quad \to$D

$V(x) \to F(x), D(x) \to V(x) \vdash D(x) \to F(x)$ $\quad \forall$-re

$V(x) \to F(x), \forall_x (D(x) \to V(x)) \vdash D(x) \to F(x)$ $\quad$ sc-sx

$\forall_x (D(x) \to V(x)), V(x) \to F(x) \vdash D(x) \to F(x)$ $\quad \forall$-re

$\forall_x (D(x) \to V(x)), \forall_x (V(x) \to F(x)) \vdash D(x) \to F(x)$ $\quad \forall$-D x non libera

$\forall_x (D(x) \to V(x)), \forall_x (V(x) \to F(x)) \vdash \forall_x (D(x) \to F(x))$

h) $\forall_x (M(x) \,\&\, G(x) \to A(x)) \vdash \forall_x (\neg G(x) \to \neg M(x) \,\&\, \neg A(x))$

non si chiude

$\forall_x (M(x) \,\&\, G(x) \to A(x)), A(x) \vdash G(x)$ $\quad \neg$-S

$\forall_x (M(x) \,\&\, G(x) \to A(x)) \vdash \neg A(x), G(x)$ $\quad$ sc-sx

$\forall_x (M(x) \,\&\, G(x) \to A(x)) \vdash G(x), \neg A(x)$ $\quad \neg$-S

$\forall_x (M(x) \,\&\, G(x) \to A(x)), \neg G(x) \vdash \neg M(x) \qquad \forall_x (M(x) \,\&\, G(x) \to A(x)), \neg G(x) \vdash \neg A(x)$ $\quad \&$-D

$\forall_x (M(x) \,\&\, G(x) \to A(x)), \neg G(x) \vdash \neg M(x) \,\&\, \neg A(x)$ $\quad \to$D

$\forall_x (M(x) \,\&\, G(x) \to A(x)) \vdash \neg G(x) \to \neg M(x) \,\&\, \neg A(x)$ $\quad \forall$-D x non libero

$\forall_x (M(x) \,\&\, G(x) \to A(x)) \vdash \forall_x (\neg G(x) \to \neg M(x) \,\&\, \neg A(x))$

- Contromodello

$\mathcal{D}$: Nat $\quad$ pongo $(G(x))^{\mathcal{D}} = 0 \quad (A(x))^{\mathcal{D}} = 1$ $\quad$ gli atri a piacere

$\forall_x (\ldots \,\&\, \bot \to T), T \vdash \bot$ $\dashrightarrow$ $T \nvdash \bot$ $\to$ non valida

- Modello

$\mathcal{D}$: Nat $\quad$ pongo: $(M(x))^{\mathcal{D}} = 1 \quad (G(x))^{\mathcal{D}} = 1 \quad (A(x))^{\mathcal{D}} = 0$

quindi: $(\forall_x (M(x) \,\&\, G(x) \to A(x)))^{\mathcal{D}} = 0$ ed essendo falsa la premessa il sequente sarà valido $\dashrightarrow$ soddisfacibile

I) $\forall x\,(U(x)\,\&\,D(x)) \to \forall x\,(L(x)\to S(x)),\ \forall x\,(U(x)\,\&\,\neg D(x)) \to \forall x\,(L(x)\to \neg E(x)) \vdash \forall x\,(L(x)\to S(x)\vee\neg E(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\ldots)\to\forall x(\ldots),\ \forall x(\ldots)\to\forall x(\ldots),\ L(x),E(x)\vdash S(x)}{\forall x(\ldots)\to\forall x(\ldots),\ \forall x(\ldots)\to\forall x(\ldots),\ L(x)\vdash\neg E(x),S(x)}\ \neg\text{-D}}{\forall x(\ldots)\to\forall x(\ldots),\ \forall x(\ldots)\to\forall x(\ldots),\ L(x)\vdash S(x),\neg E(x)}\ \text{Sc-sx}}{\forall x(\ldots)\to\forall x(\ldots),\ \forall x(\ldots)\to\forall x(\ldots),\ L(x)\vdash S(x)\vee\neg E(x)}\ \vee\text{-D}}{\forall x(\ldots)\to\forall x(\ldots),\ \forall x(\ldots)\to\forall x(\ldots)\vdash L(x)\to S(x)\vee\neg E(x)}\ \to\text{D}}{\forall x(\ldots)\to\forall x(\ldots),\ \forall x(\ldots)\to\forall x(\ldots)\vdash\forall x(L(x)\to S(x)\vee\neg E(x))}\ \forall\text{-D}\ x \text{ non libera}$$

- Contromodello

$\mathcal{D}$: Nat pongo $L(x)=1$ $E(x)=1$ $S(x)=0$ $U(x)=0$ gli atri a piacere

$\forall x(\underbrace{\bot\,\&\,?}_{\bot})\to\forall x(\top\to\bot),\ \forall x(\underbrace{\bot\,\&\,\neg ?}_{\bot})\to\forall x(\top\to\neg\top)\vdash\forall x(\top\to\bot\,\&\,\neg\top)\Rightarrow \top\vdash\bot$

↳ non valida

- Modello

$\mathcal{D}$: Nat pongo $L(x)=0$ gli atri a piacere

$(\forall x(L(x)\to S(x)\vee\neg E(x)))^{\mathcal{D}}=1$ → ho la conclusione vera → soddisfacibile

L) $\forall x(R(p,x,a)\to\neg\exists y\,\forall z\,R(y,x,z))\to\exists x\,\neg\exists y\,\exists z\,R(y,x,z)$

- Modello

$\mathcal{D}$: Nat Rendo vera la conclusione → $(\exists x\neg\exists y\,\exists z\,R(y,x,z))^{\mathcal{D}}=1$

↳ $(R(y,x,z))^{\mathcal{D}}=0$

- Contromodello

$\mathcal{D}$: Nat $R(y,x,z)=\begin{cases}1 & \text{se } y=p,\ z=a,\ \forall x\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$

$\forall x(\top\to\neg\bot)\to\neg\top\Rightarrow\top\vdash\bot$ ⟶ non soddisfacibile

m) $\neg\exists x\,(O(x)\,\&\,I(x)\to\forall y\,I(y))$ ⟵ nota validità (quello del Bar!)

non si chiude!

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y\,I(y)\vdash \qquad \vdash O(x)\,\&\,I(x)}{O(x)\,\&\,I(x)\to\forall y\,I(y)\vdash}\ \to\text{S}}{\exists x\,(O(x)\,\&\,I(x)\to\forall y\,I(y))\vdash}\ \exists\text{-S}\ x\text{ non libera}}{\vdash\neg\exists x\,(O(x)\,\&\,I(x)\to\forall y\,I(y))}\ \neg\text{-D}$$

Validità   Bar

insoddisfacibile

↑

$$
\begin{array}{c|l}
\text{ax-id} & \\
O(x), I(x), O(y), I(y) \vdash I(y), \forall y\, I(y) & \\
\hline
O(x), I(x), O(y), I(y) \vdash \forall y\, I(y), I(y) & \text{sc-dx} \\
\hline
O(x), I(x), O(y) \& I(y) \vdash \forall y\, I(y), I(y) & \&\text{-S} \\
\hline
O(x), I(x) \vdash O(y) \& I(y) \rightarrow \forall y\, I(y), I(y) & \rightarrow \text{D} \\
\hline
O(x), I(x) \vdash \exists x(\ldots), I(y) & \exists\text{-re} \\
\hline
O(x), I(x) \vdash I(y), \exists x(\ldots) & \text{sc-sx} \\
\hline
O(x) \& I(x) \vdash I(y), \exists x(\ldots) & \&\text{-S} \\
\hline
O(x) \& I(x) \vdash \forall y\, I(y), \exists x(\ldots) & \forall\text{-D} \quad y \text{ non libera} \\
\hline
\vdash O(x) \& I(x) \rightarrow \forall y\, I(y), \exists x(\ldots) & \rightarrow \text{D} \\
\hline
\vdash \exists x(O(x) \& I(x) \rightarrow \forall y\, I(y)) & \exists\text{-D} \\
\hline
\vdash \neg\neg \exists x\, (O(x) \& I(x) \rightarrow \forall y\, I(y)) & \neg\neg\text{-D}
\end{array}
$$

3 Regole

a)

$$\frac{\Gamma \vdash A(x) \vee \perp, \nabla}{\Gamma \vdash \forall x\, A(x), \nabla}$$

Questa regola è simile ~~∀~~D ma non pone condizioni sulle variabili.

Controesempio:

Pongo: $\Gamma = \exists x\, A(x)$ $\quad \nabla = \emptyset$

$$
\begin{array}{c|l}
\text{ax-id} & \\
A(x) \vdash A(x), \perp & \\
\hline
A(x) \vdash A(x) \vee \perp & \vee\text{-D} \\
\hline
A(x) \vdash \forall x\, A(x) & \text{a} \\
\hline
\exists x\, A(x) \vdash \forall x\, A(x) & \exists\text{-S} \quad x \text{ non libera}
\end{array}
$$

Da un modello non valido in ogni dominio ho ricavato una tautologia, quindi la regola non è valida

b)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \perp, C \vdash \Delta} \quad \text{b}$$

(Noto che è simile all'indebolimento, quindi ipotizzo valida ma non sicura)

Supposta la premessa valida, quindi $\Gamma \vdash \Delta = 1$, la conseguenza risulta essere sempre valida, in quanto $\perp$ a sx dell'implicazione rende $\Gamma, \perp, C \vdash \Delta = 1$. La regola è quindi valida.

La sua inversa : $\dfrac{\Gamma, \bot, C \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ b^{inv}$

non e' valida, infatti:

Controesempio:

pongo: $\Gamma = \top \quad \Delta = \bot \quad C = \emptyset$ $\qquad \dfrac{\top, \bot \vdash \bot}{\top \vdash \bot}$ ---> valida / ---> non valida

(c)

$$\frac{\Gamma \vdash A(c), A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla}\ c$$

Supponendo la premessa vera, e le proposizioni Γ e ∇ senza variabili libere, se in un generico $\mathcal{D}$ $\Gamma = 1$, allora per validita' del sequente premessa posso avere tre casi:

- I° caso: $\nabla^{\mathcal{D}} = 1$, quindi anche $\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla$ sara 1
- II° caso: $(A(x))^{\mathcal{D}} = 1$, quindi $(\exists x A(x))^{\mathcal{D}}$ sara' 1, quindi la conclusione e' verificat[a]
- III° caso: valido quanto detto nel II°

da cio concludiamo che la regola e' VALIDA

La sua inversa : $\dfrac{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash A(c), A(x), \nabla}\ c^{inv}$

non e' valida,

Contromodello:

$\Gamma = \emptyset \quad \nabla = \emptyset$

$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\mathcal{D}$: Nat $\quad c = 7$
$\quad x = 4$

$\exists x A(x) = 1$

$A(c) = A(7) = 0$

$A(x) = A(4) = 0$

$\dfrac{\vdash \top}{\vdash \bot, \bot}$ → NON VALIDA

Avrei potuto:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash A(c), A(x), \nabla}{\Gamma \vdash A(x), A(c), \nabla}\ \text{Sc-dx}}{\Gamma \vdash \exists x A(x), A(c), \nabla}\ \exists\text{-re}}{\Gamma \vdash A(c), \exists x A(x), \nabla}\ \text{Sc-dx}}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla}\ \exists\text{-D}$$

---> valida, ma non sicura
⇓
regola valida!

by Caesar