Simulazione Esame 22/12/2021

Cavalli Riccardo

January 18, 2022

Esercizio 1

Mostrare se i sequenti elencati sotto sono tautologie, opinioni o paradossi in logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità si assegna il doppio dei punti indicati).

A (3 punti): B ⊢ ¬(B & ¬B) & ¬ B

$$
\dfrac{
 \dfrac{
  \dfrac{
   \dfrac{\begin{array}{c} ax - id \\ B, B \vdash B \end{array}}{B, B, \neg B \vdash}\ \neg\text{ -S}
  }{B, B \,\&\, \neg B \vdash}\ \&\text{ -S}
 }{B \vdash \neg(B \,\&\, \neg B)}\ \neg\text{ -D}
 \qquad
 \dfrac{B, B \vdash}{B \vdash \neg B}\ \neg\text{ -D}
}{B \vdash \neg(B \,\&\, \neg B) \,\&\, \neg B}\ \&\text{ -D}
$$

La foglia B, B ⊢ diventa falsa per B = 1 e quindi anche il sequente radice è falso in tal riga.

Provo a negare il sequente radice: ⊢ ¬(B → ¬(B & ¬B) & ¬ B)

$$
\dfrac{
 \dfrac{\vdash B \qquad \neg(B \,\&\, \neg B) \,\&\, \neg B \vdash}{B \to \neg(B \,\&\, \neg B) \,\&\, \neg B \vdash}\ \to\text{ -S}
}{\vdash \neg(B \to \neg(B \,\&\, \neg B) \,\&\, \neg B)}\ \neg\text{ -D}
$$

La foglia ⊢ B è falsa per B = 0 e quindi anche il sequente radice è falso in tal riga.
Essendo questo la negazione del sequente di partenza, allora il sequente originale è vero su tal riga.

Il sequente di partenza è quindi un'opinione.

B (6 punti): ¬ ∀x ∀y y=x, a = b ⊢ ∀x ∃y ¬x = y

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\begin{array}{c} ax - id \\ a = b, w = z, w = x \vdash w = z \end{array}}{a = b, w = z, w = x \vdash x = z}\ = \text{-S}
}{a = b, w = z \vdash \neg w = x, x = z}\ \neg\text{ -D}
}{a = b, w = z \vdash \exists y\, \neg w = y, x = z}\ \exists - D_v
}{a = b \vdash \neg w = z, \exists y\, \neg w = y, x = z}\ \neg\text{ -D}
}{a = b \vdash \exists y\, \neg w = y, x = z}\ \exists\text{ -D}
}{a = b \vdash x = z, \exists y\, \neg w = y}\ sc_{dx}
}{a = b \vdash \forall y\, y = z, \exists y\, \neg w = y}\ \forall - D(x \notin VL)
}{a = b \vdash \forall x\, \forall y\, y = x, \exists y\, \neg w = y}\ \forall - D(z \notin VL)
}{a = b, \neg\forall x\, \forall y\, y = x \vdash \exists y\, \neg w = y}\ \neg - S
}{\neg\forall x\, \forall y\, y = x, a = b \vdash \exists y\, \neg w = y}\ sc_{sx}
}{\neg\forall x\, \forall y\, y = x, a = b \vdash \forall x\, \exists y\, \neg x = y}\ \forall - D(w \notin VL)
$$

Il sequente radice è derivabile, quindi è una tautologia.

C (5 punti): ∃z A(z), ¬ ∀x A(x) ⊢ ¬ ∀y ¬A(y)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg -ax_{sx1}}{A(w),\neg A(w)\vdash}}{A(w),\forall y\neg A(y)\vdash}\ \forall -S_v}{\forall y\neg A(y),A(w)\vdash}\ sc_{sx}}{\forall y\neg A(y),\exists zA(z)\vdash}\ \exists - S(w\notin VL)}{\exists zA(z),\forall y\neg A(y)\vdash}\ sc_{sx}}{\exists zA(z),\neg\forall xA(x),\forall y\neg A(y)\vdash}\ in_{sx}}{\exists zA(z),\neg\forall xA(x)\vdash\neg\forall y\neg A(y)}\ \neg\text{ -D}
$$

Il sequente radice è derivabile, quindi è una tautologia.

Esercizio 2

Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi nella logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità si assegna il doppio dei punti indicati)

A (6 punti): ∀x(¬C(x) → ¬T(x)), ∀x(¬T(x) → C(x)) ⊢ ∀x C(x)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg -ax_{dx2}}{\vdash\neg C(w),\neg T(w),C(w)}\qquad\overset{ax-id}{\neg T(w)\vdash\neg T(w),C(w)}}{\neg C(w)\to\neg T(w)\vdash\neg T(w),C(w)}\ \to\text{ -S}}{\forall x(\neg C(x)\to\neg T(x))\vdash\neg T(w),C(w)}\ \forall -S_v\qquad\overset{ax-id}{\forall x(\neg C(x)\to\neg T(x)),C(w)\vdash C(w)}}{\forall x(\neg C(x)\to\neg T(x)),\neg T(w)\to C(w)\vdash C(w)}\ \to\text{ -S}}{\forall x(\neg C(x)\to\neg T(x)),\forall x(\neg T(x)\to C(x))\vdash C(w)}\ \forall -S_v}{\forall x(\neg C(x)\to\neg T(x)),\forall x(\neg T(x)\to C(x))\vdash\forall xC(x)}\ \forall - D(w\notin VL)
$$

Il sequente radice è derivabile, quindi è una tautologia.

B (6 punti): ¬ ∃x C(x) ⊢ ∃x(¬C(x) & ¬T(x))

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg -ax_{dx2}}{\vdash\neg C(x),\exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)),C(x),\exists xC(x)}\qquad\dfrac{T(x)\vdash\exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)),C(x),\exists xC(x)}{\vdash\neg T(x),\exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)),C(x),\exists xC(x)}\ \neg\text{ -D}}{\vdash\neg C(x)\ \&\ \neg T(x),\exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)),C(x),\exists xC(x)}\ \&\text{ -D}}{\vdash\exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)),C(x),\exists xC(x)}\ \exists\text{ -D}}{\vdash C(x),\exists xC(x),\exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x))}\ sc_{dx}}{\vdash\exists xC(x),\exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x))}\ \exists\text{ -D}}{\neg\exists xC(x)\vdash\exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x))}\ \neg\text{ -S}
$$

La foglia che non si riesce a derivare

T(x) ⊢ ∃x(¬C(x) & ¬T(x)), C(x), ∃x C(x)

suggerisce il seguente contromodello

D_{contra} = { Minni }

$T(x)^{D_{contra}}$(Minni) = 1

$C(x)^{D_{contra}}(\text{Minni}) = 0$

Il sequente radice non vale in tal modello perchè

$(\exists x\ C(x))^{D_{contra}} = 0$ perchè ci sono solo falsari nel dominio dato che c'è solo Minni

$(\neg \exists x\ C(x))^{D_{contra}} = \neg(\exists x\ C(x))^{D_{contra}} = \neg 0 = 1$

$(\exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)))^{D_{contra}} = 0$ perchè $(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x))^{D_{contra}} = 0$ avendo $C(x)^{D_{contra}}(\text{Minni}) = 0$ e $T(x)^{D_{contra}}(\text{Minni}) = 1$

Quindi $(\neg \exists x\ C(x) \vdash \exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)))^{D_{contra}} = (\neg \exists x\ C(x))^{D_{contra}} \vdash (\exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)))^{D_{contra}} = 1 \vdash 0 = 0$

Provo a negare il sequente radice: $\vdash \neg(\neg \exists x\ C(x) \to \exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{C(w) \vdash}{\exists x C(x) \vdash}\ \exists - S(w \notin VL)}{\vdash \neg \exists x C(x)}\ \neg - D \qquad \exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)) \vdash}{\neg \exists x C(x) \to \exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)) \vdash}\ \to \text{-S}}{\vdash \neg(\neg \exists x C(x) \to \exists x(\neg C(x)\ \&\ \neg T(x)))}\ \neg \text{-D}$$

La foglia che non si riesce a derivare

$C(w) \vdash$

suggerisce il seguente contromodello

$D_{contra} = \{ \text{Minni} \}$

$C(w)^{D_{contra}}(\text{Minni}) = 1$

$T(w)^{D_{contra}}(\text{Minni}) =$ a piacere

Il sequente radice non vale in tal modello perchè

$(\exists x\ C(x))^{D_{contra}} = 1$ perchè $C(w)^{D_{contra}}(\text{Minni}) = 1$ (c'è un testimone)

$(\neg \exists x\ C(x))^{D_{contra}} = \neg(\exists x\ C(x))^{D_{contra}} = \neg 1 = 0$

Quindi $\neg((\neg \exists x\ C(x) \to \exists x(\neg C(x)\ \&\ \text{“a piacere”}))^{D_{contra}}) =$
$\neg((\neg \exists x\ C(x))^{D_{contra}} \to (\exists x(\neg C(x)\ \&\ \text{“a piacere”}))^{D_{contra}}) = \neg(0 \to ?) = \neg 1 = 0$

Questo contromodello è un modello del sequente di partenza essendo l'ultimo sequente analizzato la negazione di quello di partenza.

Infatti il sequente di partenza $(\neg \exists x\ C(x) \vdash \exists x(\neg C(x)\ \&\ \text{“a piacere”}))^{D_{contra}} = 0 \to ? = 1.$

Quindi il sequente di partenza è un'opinione avendo un modello e un contromodello.

C (22 punti): ∀x ∃y((M(y,x) & ∀y1 ∀y2 (M(y1,x) & M(y2,x) → y1 = y2)) & ¬x = y) ⊢ ¬e = r → ¬M(e,l) ∨ (¬M(r,l) & ¬M(l,l))

Per il ramo sx della & da destra. Vai sotto ↑ — Per il ramo dx della & da destra. Vai sotto ↑

$$
\begin{array}{cl}
\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow & \\ \hline
M(w,l), \forall y1 \forall y2(M(y1,l) \ \&\ M(y2,l) \rightarrow y1 = y2) \vdash \neg M(r,l) \ \&\ \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \text{\& -D} \\ \hline
M(w,l), \forall y1 \forall y2(M(y1,l) \ \&\ M(y2,l) \rightarrow y1 = y2) \vdash l = w, e = r, \neg M(e,l), \neg M(r,l) \ \&\ \neg M(l,l) & sc_{dx} \\ \hline
M(w,l) \ \&\ \forall y1 \forall y2(M(y1,l) \ \&\ M(y2,l) \rightarrow y1 = y2) \vdash l = w, e = r, \neg M(e,l), \neg M(r,l) \ \&\ \neg M(l,l) & \text{\& -S} \\ \hline
M(w,l) \ \&\ \forall y1 \forall y2(M(y1,l) \ \&\ M(y2,l) \rightarrow y1 = y2), \neg l = w \vdash e = r, \neg M(e,l), \neg M(r,l) \ \&\ \neg M(l,l) & \neg \text{ -S} \\ \hline
(M(w,l) \ \&\ \forall y1 \forall y2(M(y1,l) \ \&\ M(y2,l) \rightarrow y1 = y2)) \ \&\ \neg l = w \vdash e = r, \neg M(e,l), \neg M(r,l) \ \&\ \neg M(l,l) & \text{\& -S} \\ \hline
\exists y((M(y,l) \ \&\ \forall y1 \forall y2(M(y1,l) \ \&\ M(y2,l) \rightarrow y1 = y2)) \ \&\ \neg l = y) \vdash e = r, \neg M(e,l), \neg M(r,l) \ \&\ \neg M(l,l) & \exists - S(w \notin VL) \\ \hline
\forall x \exists y((M(y,x) \ \&\ \forall y1 \forall y2(M(y1,x) \ \&\ M(y2,x) \rightarrow y1 = y2)) \ \&\ \neg x = y) \vdash e = r, \neg M(e,l), \neg M(r,l) \ \&\ \neg M(l,l) & \forall - S_v \\ \hline
\forall x \exists y((M(y,x) \ \&\ \forall y1 \forall y2(M(y1,x) \ \&\ M(y2,x) \rightarrow y1 = y2)) \ \&\ \neg x = y), \neg e = r \vdash \neg M(e,l), \neg M(r,l) \ \&\ \neg M(l,l) & \neg \text{ -S} \\ \hline
\forall x \exists y((M(y,x) \ \&\ \forall y1 \forall y2(M(y1,x) \ \&\ M(y2,x) \rightarrow y1 = y2)) \ \&\ \neg x = y), \neg e = r \vdash \neg M(e,l) \vee (\neg M(r,l) \ \&\ \neg M(l,l)) & \vee \text{ -D} \\ \hline
\forall x \exists y((M(y,x) \ \&\ \forall y1 \forall y2(M(y1,x) \ \&\ M(y2,x) \rightarrow y1 = y2)) \ \&\ \neg x = y) \vdash \neg e = r \rightarrow \neg M(e,l) \vee (\neg M(r,l) \ \&\ \neg M(l,l)) & \rightarrow \text{ -D}
\end{array}
$$

Sviluppo del ramo sinistro della & -D

Per il ramo sx dell'implicazione. Vai sotto

$$
\begin{array}{cl}
\uparrow \qquad\qquad\qquad \overset{ax - id}{M(w,l), e = r \vdash \neg M(r,l), l = w, e = r, \neg M(e,l)} & \\ \hline
M(w,l), M(e,l) \ \&\ M(r,l) \rightarrow e = r \vdash \neg M(r,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \rightarrow \text{ -S} \\ \hline
M(w,l), \forall y2(M(e,l) \ \&\ M(y2,l) \rightarrow e = y2) \vdash \neg M(r,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \forall - S_v \\ \hline
M(w,l), \forall y1 \forall y2(M(y1,l) \ \&\ M(y2,l) \rightarrow y1 = y2) \vdash \neg M(r,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \forall - S_v
\end{array}
$$

Sviluppo del ramo sinistro della → -S

$$
\dfrac{\overset{\neg - ax_{dx1}}{M(w,l) \vdash M(e,l), \neg M(r,l), l = w, e = r, \neg M(e,l)} \qquad \overset{\neg - ax_{dx1}}{M(w,l) \vdash M(r,l), \neg M(r,l), l = w, e = r, \neg M(e,l)}}{M(w,l) \vdash M(e,l) \ \&\ M(r,l), \neg M(r,l), l = w, e = r, \neg M(e,l)} \ \text{\& -D}
$$

Completato lo sviluppo del ramo sinistro della & -D

Sviluppo del ramo destro della & -D

Per il ramo sx dell'implicazione. Vai sotto

$$
\begin{array}{cl}
\uparrow \qquad\qquad\qquad \overset{ax - id}{M(w,l), l = w \vdash \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l)} & \\ \hline
M(w,l), M(l,l) \ \&\ M(w,l) \rightarrow l = w \vdash \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \rightarrow \text{ -S} \\ \hline
M(w,l), \forall y2(M(l,l) \ \&\ M(y2,l) \rightarrow l = y2) \vdash \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \forall - S_v \\ \hline
M(w,l), \forall y1 \forall y2(M(y1,l) \ \&\ M(y2,l) \rightarrow y1 = y2) \vdash \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l) & \forall - S_v
\end{array}
$$

Sviluppo del ramo sinistro della → -S

$$
\dfrac{\overset{\neg - ax_{dx1}}{M(w,l) \vdash M(l,l), \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l)} \qquad \overset{ax - id}{M(w,l) \vdash M(w,l), \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l)}}{M(w,l) \vdash M(l,l) \ \&\ M(w,l), \neg M(l,l), l = w, e = r, \neg M(e,l)} \ \text{\& -D}
$$

Completato lo sviluppo del ramo destro della & -D

Il sequente radice è derivabile, quindi è una tautologia.

D (15 punti): ⊢ ¬ ∃x(∀y ((A(y,y) → ¬A(x,y)) & (¬A(x,y) → A(y,y))) & ¬A(x,x))

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg -ax_{dx2}}{A(w,w) \to \neg A(w,w) \vdash \neg A(w,w), A(w,w)} \qquad \overset{ax-id}{A(w,w) \to \neg A(w,w), A(w,w) \vdash A(w,w)}}{A(w,w) \to \neg A(w,w), \neg A(w,w) \to A(w,w) \vdash A(w,w)}\;\to\text{-S}}{(A(w,w) \to \neg A(w,w))\ \&\ (\neg A(w,w) \to A(w,w)) \vdash A(w,w)}\;\&\text{-S}}{\forall y((A(y,y) \to \neg A(w,y))\ \&\ (\neg A(w,y) \to A(y,y))) \vdash A(w,w)}\;\forall -S_v}{\forall y((A(y,y) \to \neg A(w,y))\ \&\ (\neg A(w,y) \to A(y,y))), \neg A(w,w) \vdash}\;\neg\text{-S}}{\forall y((A(y,y) \to \neg A(w,y))\ \&\ (\neg A(w,y) \to A(y,y)))\ \&\ \neg A(w,w) \vdash}\;\&\text{-S}}{\exists x(\forall y((A(y,y) \to \neg A(x,y))\ \&\ (\neg A(x,y) \to A(y,y)))\ \&\ \neg A(x,x)) \vdash}\;\xleftarrow{\exists - S(w \notin VL)}}{\vdash \neg\exists x(\forall y((A(y,y) \to \neg A(x,y))\ \&\ (\neg A(x,y) \to A(y,y)))\ \&\ \neg A(x,x))}\;\neg - D
$$

Il sequente radice è derivabile, quindi è una tautologia.

Esercizio 3 (31 punti)

AX.1: D(e) → ¬ D(a)
AX.2: D(e) ∨ D(p) → D(a)
AX.3: ¬ D(a) → ¬ D(p) & D(g)
AX.4: D(g) → ∀x (D(x) ∨ ¬ D(x))
AX.5: D(a) → D(e) ∨ D(p)
AX.6: ¬ D(p) → ¬ D(g)

A Alice danza: D(a)

$$
\dfrac{\vdash AX.2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash AX.3 \qquad \dfrac{\overset{\neg -ax_{dx2}}{\vdash \neg D(a), D(e), D(p), D(a)} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash AX.6 \qquad \dfrac{\overset{ax-id}{\neg D(p), D(g) \vdash \neg D(p), D(e), D(p), D(a)} \qquad \overset{\neg -ax_{sx1}}{\neg D(p), D(g), \neg D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)}}{\neg D(p), D(g), \neg D(p) \to \neg D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)}\;\to\text{-S}}{\neg D(p), D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)}\;comp}{\neg D(p)\ \&\ D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)}\;\&\text{-S}}{\neg D(a) \to \neg D(p)\ \&\ D(g) \vdash D(e), D(p), D(a)}\;\to\text{-S}}{\vdash D(e), D(p), D(a)}\;comp}{\vdash D(e) \vee D(p), D(a)}\;\vee\text{-D} \qquad \overset{ax-id}{D(a) \vdash D(a)}}{D(e) \vee D(p) \to D(a) \vdash D(a)}\;\to\text{-S}}{\vdash D(a)}\;comp
$$

E Eleonora non danza: ¬ D(e)

$$
\dfrac{\vdash T.1 \qquad \dfrac{\vdash AX.1 \qquad \dfrac{\overset{\neg -ax_{dx1}}{D(a) \vdash D(e), \neg D(e)} \qquad \overset{\neg -ax_{sx1}}{D(a), \neg D(a) \vdash \neg D(e)}}{D(a), D(e) \to \neg D(a) \vdash \neg D(e)}\;\to\text{-S}}{D(a) \vdash \neg D(e)}\;comp}{\vdash \neg D(e)}\;comp
$$

P Il primo ballerino danza: D(p)

$$
\dfrac{\vdash T.1 \qquad \dfrac{\vdash T.2 \qquad \dfrac{\vdash AX.5 \qquad \dfrac{\overset{ax-id}{D(a), \neg D(e) \vdash D(a), D(p)} \qquad \dfrac{\overset{\neg -ax_{sx2}}{D(a), \neg D(e), D(e) \vdash D(p)} \qquad \overset{ax-id}{D(a), \neg D(e), D(p) \vdash D(p)}}{D(a), \neg D(e), D(e) \vee D(p) \vdash D(p)}\;\vee\text{-S}}{D(a), \neg D(e), D(a) \to D(e) \vee D(p) \vdash D(p)}\;\to\text{-S}}{D(a), \neg D(e) \vdash D(p)}\;comp}{D(a) \vdash D(p)}\;comp}{\vdash D(p)}\;comp
$$

G Se Gertrude danza anche Alice Danza: D(g) → D(a)

$$\dfrac{\dfrac{\vdash T.1 \qquad \begin{array}{c} ax-id \\ D(g), D(a) \vdash D(a) \end{array}}{D(g) \vdash D(a)}\ comp}{\vdash D(g) \to D(a)}\ \to\text{-D}$$

Q Qualcuno danza ma non tutti: ∃x D(x) & ∃x ¬ D(x)

$$\dfrac{\vdash T.1 \qquad \dfrac{\vdash T.2 \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} ax-id \\ D(a), \neg D(e) \vdash D(a) \end{array}}{D(a), \neg D(e) \vdash \exists x D(x)}\ \exists -D_v \qquad \dfrac{\begin{array}{c} ax-id \\ D(a), \neg D(e) \vdash \neg D(e) \end{array}}{D(a), \neg D(e) \vdash \exists x \neg D(x)}\ \exists \text{-}-D_v}{D(a), \neg D(e) \vdash \exists x D(x)\ \&\ \exists x \neg D(x)}\ \&\text{ -D}}{D(a) \vdash \exists x D(x)\ \&\ \exists x \neg D(x)}\ comp}{\vdash \exists x D(x)\ \&\ \exists x \neg D(x)}\ comp$$

Esercizio 4 (60 punti)

AX.1: ∀x ∀y ∀z(C(x,y) & C(y,z) → ¬ C(x,z))
AX.2: ¬ ∃x C(p,x)
AX.3: ∀x ∀y(C(x,y) → C(y,x))
AX.4: C(v,m) & ∀x(C(v,x) → x=m)
AX.5: ¬(∃x ¬C(l,x))

P Piero non chiama Luca: ¬ C(p,l)

$$\dfrac{\vdash AX.2 \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \neg -ax_{dx1} \\ \vdash C(p,l), \neg C(p,l) \end{array}}{\vdash \exists x C(p,x), \neg C(p,l)}\ \exists -D_v}{\neg \exists x C(p,x) \vdash \neg C(p,l)}\ \neg\text{ -S}}{\vdash \neg C(p,l)}\ comp$$

L Luca chiama Piero: C(l,p)

$$\dfrac{\vdash AX.5 \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \neg -ax_{dx2} \\ \vdash \neg C(l,p), C(l,p) \end{array}}{\vdash \exists x \neg C(l,x), C(l,p)}\ \exists -D_v}{\neg \exists x \neg C(l,x) \vdash C(l,p)}\ \neg\text{ -S}}{\vdash C(l,p)}\ comp$$

Dopo aver mostrato una derivazione nella teoria in T_{ch} delle affermazioni precedenti noto una contraddizione tra i primi due teoremi e l'assioma 3.
Provo quindi a derivare il falso.

F Derivazione del falso

$$\dfrac{\vdash T.1 \qquad \dfrac{\vdash T.2 \qquad \dfrac{\vdash AX.3 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\neg C(p,l), C(l,p) \vdash C(l,p), \perp} \qquad \overset{\neg -ax_{sx2}}{\neg C(p,l), C(l,p), C(p,l) \vdash \perp}}{\neg C(p,l), C(l,p), C(l,p) \to C(p,l)) \vdash \perp}\ \to\text{-S}}{\neg C(p,l), C(l,p), \forall y(C(l,y) \to C(y,l)) \vdash \perp}\ \forall -S_v}{\neg C(p,l), C(l,p), \forall x \forall y(C(x,y) \to C(y,x)) \vdash \perp}\ \forall -S_v}{\neg C(p,l), C(l,p) \vdash \perp}\ comp}{\neg C(p,l) \vdash \perp}\ comp}{\vdash \perp}\ comp$$

M Mila chiama Veronica: C(m,v)

Per derivare l'affermazione utilizzo come assioma il falso, che ho derivato utilizzando i primi due teoremi e l'assioma 3

$$\dfrac{\vdash \perp \qquad \overset{ax-\perp}{\perp \vdash C(m,v)}}{\vdash C(m,v)}\ comp$$

N Nessuno chiama se stesso: ¬ ∃x C(x,x)

Per derivare l'affermazione utilizzo come assioma il falso, che ho derivato utilizzando i primi due teoremi e l'assioma 3

$$\dfrac{\vdash \perp \qquad \overset{ax-\perp}{\perp \vdash \neg \exists x C(x,x)}}{\vdash \neg \exists x C(x,x)}\ comp$$

M Mila è diversa da Veronica: ¬m=v

Per derivare l'affermazione utilizzo come assioma il falso, che ho derivato utilizzando i primi due teoremi e l'assioma 3

$$\dfrac{\vdash \perp \qquad \overset{ax-\perp}{\perp \vdash \neg m = v}}{\vdash \neg m = v}\ comp$$

Esercizio 5

Ipotesi: D'inverno non tutti non vanno a sciare: I → ∃x S(x)

A Se è inverno qualcuno va a sciare e qualcuno non ci va: I → ∃x S(x) & ∃x ¬ S(x)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash Ip$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$I \vdash I, \exists x S(x)$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$I, S(w) \vdash S(w)$}
\RightLabel{$\exists -D_v$}
\UnaryInfC{$I, S(w) \vdash \exists x S(x)$}
\RightLabel{$\exists - S(w \notin VL)$}
\UnaryInfC{$I, \exists x S(x) \vdash \exists x S(x)$}
\RightLabel{$\rightarrow -S$}
\BinaryInfC{$I, I \rightarrow \exists x S(x) \vdash \exists x S(x)$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$I \vdash I, \exists x \neg S(x)$}
\AxiomC{$I, S(w), S(w) \vdash \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{$\neg$ -D}
\UnaryInfC{$I, S(w) \vdash \neg S(w), \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{$\exists$ -D}
\UnaryInfC{$I, S(w) \vdash \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{$\exists - S(w \notin VL)$}
\UnaryInfC{$I, \exists x S(x) \vdash \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{$\rightarrow -S$}
\BinaryInfC{$I, I \rightarrow \exists x S(x) \vdash \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{& -D}
\BinaryInfC{$I, I \rightarrow \exists x S(x) \vdash \exists x S(x) \ \& \ \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{sc_{sx}}
\UnaryInfC{$I \rightarrow \exists x S(x), I \vdash \exists x S(x) \ \& \ \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{$\rightarrow$ -D}
\UnaryInfC{$I \rightarrow \exists x S(x) \vdash I \rightarrow \exists x S(x) \ \& \ \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash I \rightarrow \exists x S(x) \ \& \ \exists x \neg S(x)$}
\end{prooftree}
$$

Contromodello di Ipotesi ⊢ Aff. A

La foglia che non si riesce a derivare

I, S(w), S(w) ⊢ ∃x ¬S(x)

suggerisce il seguente contromodello

D_{contra}= { Minni }

$I^{D_{contra}}$=1

$S(w)^{D_{contra}}$(Minni)=1

In questo modello

$(\neg S(w))^{D_{contra}}$(Minni)=0

$(\exists x \neg S(x))^{D_{contra}} = 0$ perchè ci sono solo falsari nel dominio dato che c'è solo Minni

$(\exists x\ S(x))^{D_{contra}} = 1$ perchè $S(w)^{D_{contra}}$(Minni)=1 (c'è un testimone)

Ipotesi$^{D_{contra}}$: $I^{D_{contra}} \rightarrow (\exists x\ S(x))^{D_{contra}}$ equivale a 1 → 1 equivale a 1

Aff. $A^{D_{contra}}$: $I^{D_{contra}} \rightarrow (\exists x\ S(x)\ \&\ \exists x\ \neg S(x))^{D_{contra}}$: $I^{D_{contra}} \rightarrow (\exists x\ S(x))^{D_{contra}}\ \&\ (\exists x\ \neg S(x))^{D_{contra}}$
equivale a 1 → 1 & 0 equivale a 1 → 0 equivale a 0

Quindi, $(\text{Ipotesi} \vdash \text{Aff. A})^{D_{contra}}$ equivale a 1 ⊢ 0 equivale a 0

Ho trovato un contromodello, quindi l'affermazione A non è deducibile dall'ipotesi.

B Se è inverno qualcuno va a sciare oppure qualcuno non ci va: I → ∃x S(x) ∨ ∃x ¬ S(x)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash Ip$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$I \vdash I, \exists x S(x), \exists x \neg S(x)$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$I, S(w) \vdash S(w), \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{$\exists -D_v$}
\UnaryInfC{$I, S(w) \vdash \exists x S(x), \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{$\exists - S(w \notin VL)$}
\UnaryInfC{$I, \exists x S(x) \vdash \exists x S(x), \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{$\rightarrow -S$}
\BinaryInfC{$I, I \rightarrow \exists x S(x) \vdash \exists x S(x), \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{sc_{sx}}
\UnaryInfC{$I \rightarrow \exists x S(x), I \vdash \exists x S(x), \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{$\vee$ -D}
\UnaryInfC{$I \rightarrow \exists x S(x), I \vdash \exists x S(x) \vee \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{$\rightarrow$ -D}
\UnaryInfC{$I \rightarrow \exists x S(x) \vdash I \rightarrow \exists x S(x) \vee \exists x \neg S(x)$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash I \rightarrow \exists x S(x) \vee \exists x \neg S(x)$}
\end{prooftree}
$$

L'affermazione B è deducibile dall'ipotesi.

C Se tutti vanno a sciare non è inverno: ∀x S(x) → ¬ I

$$
\dfrac{\vdash Ip \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg\ -ax_{dx1}}{\forall x S(x) \vdash I, \neg I} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{S(w), \forall x S(x), S(w) \vdash \neg I}{S(w), \forall x S(x) \vdash \neg I}\ \forall\text{ -S}}{\forall x S(x), S(w) \vdash \neg I}\ sc_{sx}}{\forall x S(x), \exists x S(x) \vdash \neg I}\ \exists - S(w \notin VL)}{\forall x S(x), I \to \exists x S(x) \vdash \neg I}\ \to -S}{I \to \exists x S(x), \forall x S(x) \vdash \neg I}\ sc_{sx}}{I \to \exists x S(x) \vdash \forall x S(x) \to \neg I}\ \to\text{ -D}}{\vdash \forall x S(x) \to \neg I}\ comp
$$

Contromodello di Ipotesi ⊢ Aff. C

La foglia che non si riesce a derivare

S(w), ∀x S(x), S(w) ⊢ ¬ I

suggerisce il seguente contromodello

D_{contra}= { Minni }

$I^{D_{contra}}$=1

$S(w)^{D_{contra}}$(Minni)=1

In questo modello

$(\forall x\ S(x))^{D_{contra}} = 1$ perchè sono tutti testimoni dato che nel dominio c'è solo Minni

$(\exists x\ S(x))^{D_{contra}} = 1$ perchè $S(w)^{D_{contra}}$(Minni)=1 (c'è un testimone)

$(\neg I)^{D_{contra}}$=0

Ipotesi$^{D_{contra}}$: $I^{D_{contra}} \to (\exists x\ S(x))^{D_{contra}}$ equivale a 1 → 1 equivale a 1

Aff. $C^{D_{contra}}$: $(\forall x\ S(x))^{D_{contra}} \to (\neg\ I)^{D_{contra}}$ equivale a 1 → 0 equivale a 0

(Ipotesi ⊢ Aff. C)$^{D_{contra}}$ equivale a 1 ⊢ 0 equivale a 0

Ho trovato un contromodello, quindi l'affermazione C non è deducibile dall'ipotesi.

Esercizio 6 (15 punti)

Stabilire se la seguente regola è sicura rispetto alla semantica classica (nel caso di regola non sicura si analizzi entrambe le inverse)

A

$$\frac{F \vdash \neg C \,\&\, M \qquad\qquad C \vdash \neg M}{\neg\neg M \vee F \vdash \neg C}\ 1$$

Ipotesi
Sia r una riga fissata sulla tabella di verità
1) F → ¬C & M = 1, riscritta come ¬F ∨ (¬C & M) = 1
2) C → ¬M = 1, riscritta come ¬C ∨ ¬M = 1
3) ¬¬M ∨ F = 1, riscritta come M ∨ F = 1

Tesi ¬C = 1

Dimostrazione
Considero l'ipotesi 1.
Perchè ¬F ∨ (¬C & M) sia uguale a 1 ho due casi possibili:

Caso 1
¬F = 1 e quindi F = 0

Ipotesi 1) Dato che ¬F = 1 ottengo 1 ∨ (¬C & M) = 1 ok

Ipotesi 3) Dato che F = 0 ottengo M ∨ 0, quindi M = 1 in modo che 1 ∨ 0 = 1 ok

Ipotesi 2) Dato che M = 1 e ¬M = 0 ottengo ¬C ∨ 0, quindi ¬C = 1 in modo che 1 ∨ 0 = 1 ok

Tesi verificata per il caso 1 dato che ¬C = 1.

Caso 2
¬C & M = 1 e quindi ¬C = 1 e M = 1

Ipotesi 1) Dato che ¬C = 1 e M = 1 ottengo ¬F ∨ 1 = 1 ok

Ipotesi 2) Dato che ¬C = 1, M = 1 e ¬M = 0 ottengo 1 ∨ 0 = 1 ok

Ipotesi 3) Dato che M = 1 ottengo 1 ∨ F = 1 ok

Tesi verificata per il caso 2 dato che ¬C = 1.

Quindi la regola è valida.

Controllo la sicurezza della regola.

Prima regola inversa:

$$\frac{\neg\neg M \vee F \vdash \neg C}{F \vdash \neg C \,\&\, M}\ inv_1$$

Ipotesi
Sia r una riga fissata sulla tabella di verità
1) ¬¬M ∨ F → ¬C = 1, riscritta come ¬(M ∨ F) ∨ ¬C = 1
2) F = 1

Tesi ¬C & M = 0

Dimostrazione
Dall'ipotesi 2) so che F = 1, quindi l'ipotesi 1) diventa $\neg(M \vee 1) \vee \neg C = 1$

Qualsiasi sia il valore di M ottengo $\neg 1 \vee \neg C = 1$, che equivale a $0 \vee \neg C = 1$

Da ciò ricavo che $\neg C = 1$, così anche l'ipotesi 1) è ok

Essendo M un valore qualsiasi, decido di prendere M = 0

In questo modo la tesi $\neg C \,\&\, M = 0$ diventa $1 \,\&\, 0 = 0$

La tesi quindi è verificata, perciò la regola non è valida.

Seconda regola inversa:

$$\frac{\neg\neg M \vee F \vdash \neg C}{C \vdash \neg M}\ inv_2$$

Ipotesi
Sia r una riga fissata sulla tabella di verità
1) $\neg\neg M \vee F \rightarrow \neg C = 1$, riscritta come $\neg(M \vee F) \vee \neg C = 1$
2) C = 1

Tesi $\neg M = 1$

Dimostrazione
Dall'ipotesi 2) so che C = 1, quindi l'ipotesi 1) diventa $\neg(M \vee F) \vee \neg 1 = 1$

Ottengo quindi $\neg(M \vee F) \vee 0 = 1$

Da ciò ricavo che M = 0 e F = 0, così ho $\neg(0 \vee 0) \vee 0$, che equivale a $\neg 0 \vee 0$

Ottengo $1 \vee 0 = 1$, quindi anche l'ipotesi 1) è ok

Avendo M = 0, la tesi $\neg M = 1$ diventa $\neg 0 = 1$

La tesi quindi è verificata, perciò la regola è valida.

Concludiamo che la regola di partenza 1 è valida ma non sicura dato che una sua regola inversa non è valida.

Esercizio 7 (32 punti)

In un gioco due amiche fanno un'affermazione, che è vera o falsa.
Un'affermazione è mancante e l'altra è riportata sotto:

AX.1: Morgana: almeno una di noi afferma il vero: $M \leftrightarrow M \vee C$ riscritta come $(M \to M \vee C) \,\&\, (M \vee C \to M)$

Si può dedurre, anche se non si conosce l'affermazione di Celeste, quante affermazioni sono vere?

Possibili soluzioni:
a) No, ma se Celeste dice il vero anche Morgana dice il vero.
a') No, ma se Morgana dice il vero anche Celeste dice il vero.
b) Sì, sono vere tutte e due le affermazioni.
c) Sì, è vera solo l'affermazione di Morgana.
d) Sì, è vera solo l'affermazione di Celeste.
e) Nessuna affermazione è vera.

Provo a verificare se entrambe dicono il vero.

1

$$\dfrac{(M \to M \vee C) \,\&\, (M \vee C \to M) \vdash M \qquad (M \to M \vee C) \,\&\, (M \vee C \to M) \vdash C}{(M \to M \vee C) \,\&\, (M \vee C \to M) \vdash M \,\&\, C}\ \&\text{-D}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash M, M \vee C, M \qquad \overset{ax-id}{M \vee C \vdash M \vee C, M}}{M \to M \vee C \vdash M \vee C, M}\ \to\text{-S} \qquad \overset{ax-id}{M \to M \vee C, M \vdash M}}{M \to M \vee C, M \vee C \to M \vdash M}\ \to\text{-S}}{(M \to M \vee C) \,\&\, (M \vee C \to M) \vdash M}\ \&\text{-S}$$

Non è vero che M afferma il vero perchè il sequente radice è falso per M = 0 e C = 0.
Già da questo posso escludere l'opzione b) secondo cui tutte e due le affermazioni sono vere.
Controllo ora se C afferma il vero.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash M, M \vee C, C \qquad \overset{ax-id}{M \vee C \vdash M \vee C, C}}{M \to M \vee C \vdash M \vee C, C}\ \to\text{-S} \qquad M \to M \vee C, M \vdash C}{M \to M \vee C, M \vee C \to M \vdash C}\ \to\text{-S}}{(M \to M \vee C) \,\&\, (M \vee C \to M) \vdash C}\ \&\text{-S}$$

Non è vero che C afferma il vero perchè il sequente radice è falso per M = 0 e C = 0.

Posso escludere ora l'opzione c) secondo cui è vera solo l'affermazione di Morgana.
Posso escludere l'opzione d) secondo cui è vera solo l'affermazione di Celeste.

Posso verificare adesso l'opzione e), dato che dalle affermazioni precedenti ho notato la possibilià che entrambe dicano il falso.

$$\dfrac{(M \to M \vee C) \,\&\, (M \vee C \to M) \vdash \neg M \qquad\qquad (M \to M \vee C) \,\&\, (M \vee C \to M) \vdash \neg C}{(M \to M \vee C) \,\&\, (M \vee C \to M) \vdash \neg M \,\&\, \neg C}\ \&\text{ -D}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\neg - ax_{dx1}\\ M \to M \vee C \vdash M, C, \neg M\end{array}}{M \to M \vee C \vdash M \vee C, \neg M}\ \vee\text{ -D} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}ax - id\\ M \vdash M, \neg M\end{array} \qquad \dfrac{M, M \vee C, M \vdash}{M, M \vee C \vdash \neg M}\ \neg\text{ -D}}{M, M \to M \vee C \vdash \neg M}\ \to\text{ -S}}{M \to M \vee C, M \vdash \neg M}\ sc_{sx}}{M \to M \vee C, M \vee C \to M \vdash \neg M}\ \to\text{ -S}}{(M \to M \vee C) \,\&\, (M \vee C \to M) \vdash \neg M}\ \&\text{ -S}$$

Non è vero che M afferma il falso perchè il sequente radice è falso per M = 1 e C = 1.
Già da questo posso escludere l'opzione e) secondo cui tutte e due dicono il falso.

Quindi non posso capire quante affermazioni sono vere.
Rimangono le opzioni a) e a').

Controllo l'opzione a).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}ax - id\\ C, M \to M \vee C \vdash M, C, M\end{array}}{C, M \to M \vee C \vdash M \vee C, M}\ \vee\text{ -D} \qquad \begin{array}{c}ax - id\\ C, M \to M \vee C, M \vdash M\end{array}}{C, M \to M \vee C, M \vee C \to M \vdash M}\ \to\text{ -S}}{C, (M \to M \vee C) \,\&\, (M \vee C \to M) \vdash M}\ \&\text{ -S}}{(M \to M \vee C) \,\&\, (M \vee C \to M), C \vdash M}\ sc_{sx}}{(M \to M \vee C) \,\&\, (M \vee C \to M) \vdash C \to M}\ \to\text{ -D}$$

Il sequente è derivabile, quindi l'opzione a),
secondo cui se Celeste dice il vero anche Morgana dice il vero, è corretta.