Costruzione di un modello/contromodello $\mathcal{D}$ di un sequente (con spiegazione)

Benedetto Cosentino

Questa qui è la notazione che la prof.ssa Maietti ha utilizzato durante l'anno accademico 2016/2017. Non assicuro in modo assoluto che sia corretta, ma è quella che ho usato io nelle prove durante il corso dell'anno.

Sia $\neg\forall w\,\neg\neg G(w) \vdash \neg\exists y\, F(y)$ il sequente in questione. Esso avrà la seguente derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F(y) \vdash G(w)}{F(y) \vdash \neg\neg G(w)}\ \neg\neg\text{-D}}{F(y) \vdash \forall w\,\neg\neg G(w)}\ \forall\text{-D}\ (w \notin VL(F(y), \forall w\,\neg\neg G(w)))}{\exists y\, F(y) \vdash \forall w\,\neg\neg G(w)}\ \exists\text{-S}\ (y \notin VL(\exists y\, F(y), \forall w\,\neg\neg G(w)))}{\exists y\, F(y), \neg\forall w\,\neg\neg G(w) \vdash}\ \neg\text{-S}}{\neg\forall w\,\neg\neg G(w), \exists y\, F(y) \vdash}\ \text{sc}_{sx}}{\neg\forall w\,\neg\neg G(w) \vdash \neg\exists y\, F(y)}\ \neg\text{-D}$$

Il sequente non è valido.
Bisogna, quindi, cercare un contromodello che chiameremo $\mathcal{D}$. A tale scopo, basta scegliere un dominio $\mathbf{D}$ in cui le funzioni $F(y)$ e $G(w)$ assumano dei valori che rendano l'implicazione $\neg\forall w\,\neg\neg G(w) \to \neg\exists y\, F(y)$ falsa. Basta selezionare una foglia qualunque (nel nostro caso ne abbiamo una sola) e falsificarla, scegliendo $F(y)$=1 e $G(w)$=0 (infatti $1 \to 0 = 0$).
Un buon metodo per determinare il numero di elementi del dominio è basarsi sulla quantità di variabili libere presenti nella foglia scelta. In questo caso, ve ne sono due (y e w). Perciò $\mathbf{D}$ avrà due elementi.

Mostriamo un contromodello $\mathcal{D}$. Sia $\mathbf{D}$ dominio.

$\mathbf{D}$={ Mario, Gianni }

Bisogna precisare che $\mathbf{D}$ e $\mathcal{D}$ sono entità differenti (che graficamente vengono distinte dall'uso del corsivo). Il primo è un insieme scelto arbitrariamente come dominio delle funzioni, il secondo è un modello (in questo caso un contromodello), il quale è definito dal dominio $\mathbf{D}$ e da determinati valori delle funzioni (in questo caso di $F(y)$ e $G(w)$) sugli elementi del dominio $\mathbf{D}$ scelto.

Associamo alle funzioni $F(y)^{\mathcal{D}}$ e $G(w)^{\mathcal{D}}$ dei valori

$F(y)^{\mathcal{D}}$(Mario)=1
$G(w)^{\mathcal{D}}$(Gianni)=0

Notare che si tratta di una vera e propria **scelta arbitraria** dei valori, ovvero i valori da associare a $F(y)^{\mathcal{D}}$(Mario) e a $G(w)^{\mathcal{D}}$(Gianni) sono scelti a vostra discrezione!
La scrittura $F(y)^{\mathcal{D}}$(Mario)=1 significa "letteralmente" il valore di $F(y)$ nel modello $\mathcal{D}$, quando y=Mario, è uguale a 1.

Dimostriamo adesso che il sequente originario è falsificato dalle scelte operate.
Se $F(y)^{\mathcal{D}}$(Mario)=1, allora vuol dire che esiste un y per cui vale $F(y)^{\mathcal{D}}$. Quindi, $(\exists y\, F(y))^{\mathcal{D}}$=1 e $\neg(\exists y\, F(y))^{\mathcal{D}}$=$(\neg\exists y\, F(y))^{\mathcal{D}}$=0.
Se $G(w)^{\mathcal{D}}$(Gianni)=0, allora posso dire che $\neg\neg(G(w))^{\mathcal{D}}$(Gianni)=$(\neg\neg G(w))^{\mathcal{D}}$(Gianni)=0. Ciò comporta che $(\forall w\,\neg\neg G(w))^{\mathcal{D}}$=0 dato che esiste un falsario e, di conseguenza, $(\neg\forall w\,\neg\neg G(w))^{\mathcal{D}}$=1.
Quindi, il sequente $\neg\forall w\,\neg\neg G(w) \vdash \neg\exists y\, F(y)$ equivale all'implicazione $\neg\forall w\,\neg\neg G(w) \to \neg\exists y\, F(y)$.
Dunque, nel modello $\mathcal{D}$

$(\neg\forall w\,\neg\neg G(w) \to \neg\exists y\, F(y))^{\mathcal{D}}$=$(\neg\forall w\,\neg\neg G(w))^{\mathcal{D}} \to (\neg\exists y\, F(y))^{\mathcal{D}}$=$1 \to 0 = 0$

Il sequente è, quindi, falsificato.

Per mostrare che sia soddisfacibile, si può procedere in due modi:

- negare il sequente di partenza, effettuare una derivazione e trovare un contromodello del sequente *negato* (in questo caso, il sequente negato è $\vdash \neg(\neg\forall w\, \neg\neg G(w) \rightarrow \neg\exists y\, F(y))$);
- trovare un modello in cui il sequente originario sia vero (questa scelta è consigliabile perché garantisce un risparmio di tempo non indifferente durante l'esame, a patto di continuare la derivazione del sequente fino a che non si ottengono **tutte** le foglie e di essere **assolutamente** sicuri di trovarsi di fronte a un sequente soddisfacibile).

Per trovare un modello in cui il sequente sia vero, basta scegliere un dominio **D** in cui le funzioni $F(y)^{\mathcal{D}}$ e $G(w)^{\mathcal{D}}$ diano valori per cui l'implicazione $(\neg\forall w\, \neg\neg G(w) \rightarrow \neg\exists y\, F(y))^{\mathcal{D}}$ sia vera.
Osserviamo, dunque, **tutte** le foglie dell'albero che abbiamo ottenuto dalla derivazione (in questo caso una sola) e assegnamo dei valori alle funzioni in modo che **ogni** foglia sia vera. Ciò si ottiene ponendo tutte le conclusioni pari a 1 (infatti $0 \rightarrow 1 = 1$ e $1 \rightarrow 1 = 1$).
Per il sequente preso in esame, basterà scegliere un valore per la funzione $G(w)^{\mathcal{D}}$ pari a 1.

Quindi, mostriamo un modello $\mathcal{D}$. Sia **D** dominio.

D={ Mario, Gianni }

Associamo a $G(w)^{\mathcal{D}}$ dei valori

$G(w)^{\mathcal{D}}$(Mario)=1
$G(w)^{\mathcal{D}}$(Gianni)=1
(Avremmo anche potuto scrivere $G(w)^{\mathcal{D}}(x)=1\ \forall\, x \in \mathbf{D}$)

Quindi, $G(w)^{\mathcal{D}}(x)=1$ per ogni x in **D**, ovvero, per ogni elemento del dominio **D**, $G(w)^{\mathcal{D}}$ vale 1.
Allora $\neg\neg G(w)^{\mathcal{D}}(x)=(\neg\neg G(w))^{\mathcal{D}}(x)=1$ per ogni x in **D**, cioè $(\forall w\, \neg\neg G(w))^{\mathcal{D}}=1$. Conseguentemente, $(\neg\forall w\, \neg\neg G(w))^{\mathcal{D}}=0$.
Il sequente $\neg\forall w\, \neg\neg G(w) \vdash \neg\exists y\, F(y)$ equivale all'implicazione $\neg\forall w\, \neg\neg G(w) \rightarrow \neg\exists y\, F(y)$.
Dunque, nel modello $\mathcal{D}$

$(\neg\forall w\, \neg\neg G(w) \rightarrow \neg\exists y\, F(y))^{\mathcal{D}}=(\neg\forall w\, \neg\neg G(w))^{\mathcal{D}} \rightarrow (\neg\exists y\, F(y))^{\mathcal{D}}= 0 \rightarrow (\neg\exists y\, F(y))^{\mathcal{D}} = 1.$

Quindi, il sequente è verificato e, di conseguenza, è soddisfacibile.

Nel caso in cui non sia possibile trovare un modello che renda vera l'implicazione, potremmo aver di fronte un *paradosso* e dovremo necessariamente mostrare che la negazione del sequente è una *tautologia*. In sostanza, abbiamo perso tempo! Perciò, è consigliabile cercare un modello che renda il sequente vero, solo quando si è sicuri che esso sia soddisfacibile.