8.0.7 Esercizi su Validità e soddisfacibilità e loro negazioni

Formalizzare in un UNICA proposizione le seguenti asserzioni (secondo i suggerimenti indicati) e mostrare se la proposizione ottenuta è **valida** o in caso contrario dire per quali valori delle variabili **non è valida** e se è **soddisfacibile** (e per quali valori delle variabili lo è) o **insoddisfacibile**.

Ricordiamo che nel seguito adottiamo la convenzione della sezione 5, ovvero che quando scriviamo

$$\frac{\begin{array}{c}\textbf{frase}_1\\ \textbf{frase}_2\\ ....\\ \textbf{frase}_n\end{array}}{\textbf{frase}}$$

intendiamo

"Ammesso che valga sia **frase**$_1$ che **frase**$_2$, che ... **frase**$_n$, allora vale **frase**"

1. $\dfrac{\text{Non si dà il caso che l'affare non sia conveniente o non sicuro.}}{\text{L'affare è conveniente e sicuro.}}$

   A =l'affare è conveniente
   S = l'affare è sicuro

   Soluzione: una formalizzazione dell'asserzione è

   $$\neg(\ \neg A \vee \neg S)\ \rightarrow\ A\&S$$

   e questa per il teorema 6.6 applicato con la simmetrica della legge di De Morgan su $\neg A \vee \neg S$ è equivalente a
   $$\neg\neg(A\&S)\ \rightarrow\ A\&S$$
   che per il teorema 6.6 applicato con la legge della doppia negazione è equivalente a

   $$A\&S\ \rightarrow\ A\&S$$

   che è chiaramente valida. Siccome proposizioni equivalenti hanno la stessa tabella di verità allora la proposizione di partenza è valida.

2. $\dfrac{\text{Non si dà il caso che l'affare non sia conveniente o sicuro.}}{\text{L'affare non è conveniente nè sicuro.}}$

   A =l'affare è conveniente
   S =l'affare è sicuro

   Soluzione: Una formalizzazione dell'asserzione è

   $$\neg(\ \neg A \vee S)\ \rightarrow\ \neg A\&\neg S$$

   che per il teorema 6.6 applicato con la legge di De Morgan su $\neg(\ \neg A \vee S)$ è equivalente a

   $$\neg\neg A\&\neg S\ \rightarrow\ \neg A\&\neg S$$

   che sempre per il teorema 6.6 applicato con la legge della doppia negazione è equivalente a

   $$A\&\neg S\ \rightarrow\ \neg A\&\neg S$$

Ora chiaramente questa implicazione è NON valida se si trovano valori per cui $A\&\neg S$=1 e $\neg A\&\neg S$=0. Ora i valori che rendono vero l'antecedente dell'implicazione sono A=1 e S=0 da cui segue che il conseguente $\neg A\&\neg S$=0. Perciò la proposizione $A\&\neg S \;\rightarrow\; \neg A\&\neg S$ è NON VALIDA per i valori A=1 e S=0.

Inoltre per rendere soddisfacibile $A\&\neg S \;\rightarrow\; \neg A\&\neg S$ basta trovare dei valori per cui $A\&\neg S$=0 (oppure $\neg A\&\neg S$=1). E si vede chiaramente che per A=0, e S con valore qualsiasi, allora $A\&\neg S$=0 e quindi $A\&\neg S \;\rightarrow\; \neg A\&\neg S$=1. In conclusione $A\&\neg S \;\rightarrow\; \neg A\&\neg S$ risulta SODDISFACIBILE per A=0, e S con valore qualsiasi. Infine siccome proposizioni equivalenti hanno la stessa tabella di verità allora la proposizione di partenza $\neg(\;\neg A \vee S) \;\rightarrow\; \neg A\&\neg S$ è NON VALIDA e SODDISFACIBILE sugli stessi valori trovati per $A\&\neg S \;\rightarrow\; \neg A\&\neg S$.

3. Prima di consegnare rileggo il compito solo se riesco a scrivere qualcosa.

Se non riesco a scrivere qualcosa, prima di consegnare non rileggo il compito.

si consiglia di usare:
R =prima di consegnare rileggo il compito
S = riesco a scrivere qualcosa

4. Mario è scontento solo se non programma bene.

Se Mario è contento allora programma bene.

C=Mario è contento
P=Mario programma bene

5. Le lezioni tacciono se c'è un assemblea studentesca o è giorno festivo.

Non c'è un assemblea studentesca e non è giorno festivo, quindi le lezioni non tacciono.

L=le lezioni tacciono
A=c'è un assemblea studentesca
F=è giorno festivo

6. Non si dà il caso che il fattoriale termini e non si esca dal ciclo.
Si esce dal ciclo.

Non si dà il caso che se si esce dal ciclo il fattoriale non termini.

F= il fattoriale termina
C=si esce dal ciclo

7. Solo se non prendo l'ombrello non piove.
Non piove.

Non prendo l'ombrello.

P=piove
O=prendo l'ombrello

9 Calcolo dei sequenti LC_p

In questa sezione mostriamo un metodo più elegante, semplice e soprattutto **AUTOMATICO** per mostrare se una proposizione è valida o meno e soddisfacibile o meno.

Tale metodo è **MENO COMPLESSO** di quello delle tabelle di verità e consiste in una procedura algoritmica che **TERMINA SEMPRE** con una risposta. Questa procedura fa uso di un **calcolo dei sequenti** per la logica classica proposizionale. Anticipiamo soltanto che per verificare la validità (e soddisfacibilità) per esempio di

$$\models (V \to \neg R) \to (\neg V \to R)$$

costruiremo un **albero di derivazione...** in tale calcolo.

9.1 Cosa è un sequente?

Un **sequente** nel linguaggio delle proposizioni formali è una scrittura del tipo

$$\mathbf{P_1, P_2, \dots P_n} \ \vdash \ \mathbf{C_1, C_2, \dots C_m}$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo
SE $\mathbf{P_1}$ è **vero** e $\mathbf{P_2}$ è **vero**... e $\mathbf{P_n}$ è **vero** **ALLORA** uno dei $\mathbf{C_i}$ è **vero**
ossia $\mathbf{C_1}$ è **vero OPPURE** $\mathbf{C_2}$ è **vero... OPPURE** $\mathbf{C_m}$ è **vero**

o equivalentemente che vale

$$\models \ (\mathbf{P_1} \& \mathbf{P_2}) \dots \& \mathbf{P_n} \ \longrightarrow \ (\mathbf{C_1} \vee \mathbf{C_2}) \dots \vee \mathbf{C_m}$$

Usiamo le lettere greche maiuscole del tipo

$$\mathbf{\Gamma}, \quad \mathbf{\Delta}, \quad \mathbf{\Sigma} \dots$$

come META-VARIABILI per indicare una generica **LISTA** di **PROPOSIZIONI** anche vuota. Per esempio, possiamo pensare che una variabile Γ denoti $\mathbf{\Gamma} \equiv [\,]$ la lista vuota oppure

$$\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{P_1, P_2, \dots P_n}$$

E poi indichiamo con

$$\mathbf{\Gamma \vdash \Delta}$$

un generico sequente del tipo

$$\mathbf{P_1, P_2, \dots P_n \vdash C_1, C_2, \dots C_m}$$

posto che

$$\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{P_1, P_2, \dots P_n} \qquad \mathbf{\Delta} \equiv \mathbf{C_1, C_2, \dots C_m}$$

Ora mostriamo un esempio di formalizzazione in sequente. L'asserzione

Ammesso che "Il programma termina e dà risultato 1" allora "Il programma termina."

dopo averla rappresentata secondo la convenzione della sezione 5 in tal modo

Il programma termina e dà risultato 1.
―――――――――――――――――――――――――
Il programma è corretto.

si formalizza come sequente in questo modo

$$\mathbf{P \& U \vdash C}$$

ponendo:
P="**Il programma termina**"
U="**Il programma dà risultato 1**"
C="**Il programma è corretto**"

Il calcolo dei sequenti è composto da assiomi e da delle regole con cui operiamo *trasformazioni di sequenti* secondo lo schema

se VALE QUESTO SEQUENTE (o QUESTI due SEQUENTI) *allora* VALE QUEST'ALTRO SEQUENTE

Un esempio di tale trasformazione utilizzando la convenzione di sezione 5 è la scrittura

$$\frac{\mathbf{P}\&\mathbf{U} \vdash \mathbf{C}}{\mathbf{P}\&\mathbf{U} \vdash \mathbf{C}\vee\neg\mathbf{P}}$$

il cui significato è il seguente:
"**se** vale $\models$**P**&**U** $\rightarrow$ **C** **allora** vale pure $\models$**P**&**U** $\rightarrow$ **C**$\vee\neg$**P**"

9.2 Calcolo dei sequenti della Logica classica proposizionale LC$_p$

Il calcolo contiene regole per i connettivi $\perp$, &, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ assieme all' **assioma identità** e alle regole di **scambio a destra e a sinistra** come segue

$$\begin{array}{cc}
\text{ax-id} & \text{ax-}\perp \\
\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla \\[2ex]
\dfrac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} & \dfrac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}} \\[2ex]
\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D} & \dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S} \\[2ex]
\dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{D} & \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \\[2ex]
\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} & \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \\[2ex]
\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{D} & \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{S}
\end{array}$$

e tale calcolo è chiuso su tutte le regole ottenute istanziando le variabili **A** e **B** con proposizioni arbitrarie e i contesti denotati con lettere greche $\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\Sigma}$, **etc.** con liste (anche vuote) arbitrarie di proposizioni.

9.3 A che serve il calcolo? A costruire derivazioni!

Il nostro calcolo serve a costruire **alberi di derivazione**.

Si osservi che nel calcolo dei sequenti presentato ci sono due tipi di regole: quelle ad una premessa e quelle a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma'\vdash D'}{\Gamma\vdash D}\ \textbf{regola1} \qquad \frac{\Gamma''\vdash D'' \quad \Gamma''''\vdash D''''}{\Gamma\vdash D}\ \textbf{regola2}$$

ove i sequenti sopra la sbarra $\mathbf{\Gamma'}\vdash\mathbf{D'}$ nella regola 1 e i sequenti $\mathbf{\Gamma''}\vdash\mathbf{D''}$ e $\mathbf{\Gamma''''}\vdash\mathbf{D''''}$ nella regola 2 si dicono **premesse**, mentre il sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{D}$ in entrambi i casi si dice **conclusione**.

Poi nel calcolo ci sono anche regole a zero premesse ovvero gli **assiomi** che sono del tipo

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{C}, \mathbf{\Gamma_2}\vdash\mathbf{\Delta_1}, \mathbf{C}, \mathbf{\Delta_2}\end{array}$$

oppure

$$\begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \mathbf{\Gamma}, \bot, \mathbf{\Gamma'} \vdash \nabla\end{array}$$

Una derivazione è un genere particolare di albero del tipo

$$\dfrac{\Gamma_1\vdash D_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_5\vdash D_5}{\Gamma_3\vdash D_3}\,\textbf{regola1} \qquad \dfrac{\Gamma_6\vdash D_6}{\Gamma_4\vdash D_4}\,\textbf{regola1}}{\Gamma_2\vdash D_2}\,\textbf{regola2}}{\Gamma\vdash D}\,\textbf{regola2}$$

con radice un sequente, detto **sequente conclusione**, che nel caso sopra è $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{D}$
e con foglie i sequenti $\mathbf{\Gamma_1}\vdash\mathbf{D_1}$, $\mathbf{\Gamma_5}\vdash\mathbf{D_5}$, $\mathbf{\Gamma_6}\vdash\mathbf{D_6}$.

Un **albero** come quello mostrato si dice **albero di derivazione** o semplicemente **derivazione** del **sequente radice** se le sue foglie sono **ASSIOMI** (= **regole senza premesse**).

Per esempio nell'albero

$$\dfrac{\Gamma_1\vdash D_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_5\vdash D_5}{\Gamma_3\vdash D_3}\,\textbf{regola1} \qquad \dfrac{\Gamma_6\vdash D_6}{\Gamma_4\vdash D_4}\,\textbf{regola1}}{\Gamma_2\vdash D_2}\,\textbf{regola2}}{\Gamma\vdash D}\,\textbf{regola2}$$

la radice $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{D}$ ha due predecessori $\mathbf{\Gamma_1}\vdash\mathbf{D_1}$ e $\mathbf{\Gamma_2}\vdash\mathbf{D_2}$ ed è stata ottenuta applicando la **regola 2**.

Si noti che siccome considereremo solo regole con al più due premesse allora ogni albero di derivazione avrà nodi con al più due predecessori.

Più precisamente diamo la seguente definizione:

Def. 9.1 (sequente derivabile) *Un sequente* $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ *si dice* `derivabile` *nel calcolo dei sequenti* $\mathbf{LC}_p$ *se esiste un albero avente*

- $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ *come radice;*

- *ogni foglia è istanza di un assioma di* $\mathbf{LC}_p$
ottenuto **sostituendo** *le variabili* $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ *con arbitrarie proposizioni* $\mathtt{pr}_1$ *e* $\mathtt{pr}_2$
e le variabili $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Delta}$, ∇, $\mathbf{\Sigma}$ *con liste di proposizioni arbitrarie (anche lista vuota).*

- *l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di* $\mathbf{LC}_p$
ottenute **sostituendo** *le variabili* $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ *con arbitrarie proposizioni* $\mathtt{pr}_1$ *e* $\mathtt{pr}_2$
e le variabili $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Delta}$, ∇, $\mathbf{\Sigma}$ *con liste di proposizioni arbitrarie (anche lista vuota).*

9.3.1 Come si sarebbe potuto scrivere il calcolo $\mathbf{LC}_p$

Dopo la descrizione delle regole del calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$ in 9.2 abbiamo precisato che le regole si possono applicare anche a sequenti ottenuti sostituendo le variabili proposizionali $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ con arbitrarie proposizioni $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$. Per rendere più esplicita ed evidente questa proprietà possiamo descrivere il calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$ in modo equivalente scrivendo le regole con $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$, che chiamiamo

META-variabili per proposizioni complesse arbitrarie, al posto di **A** e **B** (la differenza tra le variabili proposizionali **A** e **B** e le META-variabili $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$ è che le prime sono i costituenti di base della grammatica delle proposizioni per formare proposizioni complesse, ad esempio $A\&(B \vee C) \rightarrow D$, mentre le seconde sono solo variabili di più alto livello per indicare una proposizione complessa):

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \Gamma, \mathtt{pr}_1, \Gamma' \vdash \Delta, \mathtt{pr}_1, \Delta'\end{array} & \begin{array}{c}\textbf{ax-}\bot\\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla\end{array} \\[2ex]
\dfrac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} & \dfrac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}} \\[2ex]
\dfrac{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathtt{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1 \& \mathtt{pr}_2, \Delta}\ \&-\mathrm{D} & \dfrac{\Gamma, \mathtt{pr}_1, \mathtt{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathtt{pr}_1 \& \mathtt{pr}_2 \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \\[2ex]
\dfrac{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1, \mathtt{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1 \vee \mathtt{pr}_2, \Delta}\ \vee\mathrm{D} & \dfrac{\Gamma, \mathtt{pr}_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathtt{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathtt{pr}_1 \vee \mathtt{pr}_2 \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \\[2ex]
\dfrac{\Gamma, \mathtt{pr}_1 \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathtt{pr}_1, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} & \dfrac{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1, \Delta}{\Gamma, \neg \mathtt{pr}_1 \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \\[2ex]
\dfrac{\Gamma, \mathtt{pr}_1 \vdash \mathtt{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1 \rightarrow \mathtt{pr}_2, \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{D} & \dfrac{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1, \Delta \quad \Gamma, \mathtt{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathtt{pr}_1 \rightarrow \mathtt{pr}_2 \vdash \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{S}
\end{array}$$

9.3.2 Idea intuitiva di sequente e sue derivazioni

Dal punto di vista logico un *sequente* è un *giudizio assertivo* mentre una derivazione di un sequente rappresenta un'*argomentazione* che ne prova la validità. Possiamo inoltre pensare la **deduzione di un sequente** come la *scrittura di un programma* ove il *linguaggio di programmazione* è il **calcolo dei sequenti**.

9.3.3 Esempio di derivazione in $\mathbf{LC_p}$

Se ad esempio vogliamo costruire un albero di derivazione per il sequente

$$\mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}\&\mathbf{P}$$

dobbiamo scrivere il sequente come radice dell'albero e quindi costruire l'albero di derivazione dal BASSO verso l'ALTO applicando le regole, per esempio la $\&-$D come segue

$$\dfrac{\mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \quad \mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}\&\mathbf{P}}$$

Il lettore noti che questa regola è un'istanza della regola $\&-$D del calcolo ottenuta ponendo: **Q** al posto di **A**, **P** al posto di **B** e la lista vuota al posto di $\boldsymbol{\Delta}$ e **P**&**Q** al posto di $\boldsymbol{\Gamma}$.

Si noti che il pezzo di derivazione

$$\dfrac{\mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \quad \mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}\&\mathbf{P}}\ \&-\mathrm{D}$$

NON è albero di derivazione completa perchè le sue foglie non sono assiomi!

Invece applicando altre regole arriviamo a questo albero di derivazione:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{P}, \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}\end{array}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}}\ \&-\mathrm{S} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{P}, \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}\end{array}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}}\ \&-\mathrm{S}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}\&\mathbf{P}}\ \&-\mathrm{D}$$

9.3.4 Test sulla comprensione del concetto di derivazione

1. La seguente è una derivazione in logica classica proposizionale LC_p

$$\dfrac{P\&Q\vdash Q \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ P,Q\vdash P\end{array}}{P\&Q\vdash P}\ \&-\mathrm{S}}{P\&Q\vdash Q\&P}$$

?

Risposta: NO, perchè la sua foglia di sinistra è $P\&Q\vdash Q$ che NON è un'istanza di un'assioma.

2. La seguente è una derivazione in logica classica proposizionale LC_p

$$\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ A,B,C\vdash A\end{array}}{A\&B,C\vdash A}\ \&-\mathrm{S}$$

?

NO, perchè l'applicazione $\&-$S è scorretta, OCCORRE operare uno scambio prima di applicarla! Una corretta applicazione di $\&-$S è nel seguente albero

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ C,A,B\vdash A\end{array}}{C,A\&B\vdash A}\ \&-\mathrm{S}}{A\&B,C\vdash A}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}$$

che è una corretta derivazione.

MORALE: occorre RICORDARE di operare gli SCAMBI necessari!

3. Derivare in LC_p

$$A\&B \vdash B\&A$$

Basta prendere la derivazione di $P\&Q \vdash Q\&P$ in sezione 9.3.3 e sostituire P con A e Q con B.

4. Derivare in LC_p

$$(A\&B)\&C\vdash A\&(B\&C)$$

Esistono derivazioni diverse di uno stesso sequente?

Sì generalmente vi sono diverse derivazioni avente come radice uno stesso sequente. Ecco qui una per $(A\&B)\&C\vdash A\&(B\&C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ C,A,B\vdash A\end{array}}{C,A\&B\vdash A}\ \&-\mathrm{S}}{A\&B,C\vdash A}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}}{(A\&B)\&C\vdash A}\ \&-\mathrm{S} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ C,A,B\vdash B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ C,A,B\vdash C\end{array}}{C,A,B\vdash B\&C}\ \&-\mathrm{D}}{C,A\&B\vdash B\&C}\ \&-\mathrm{S}}{A\&B,C\vdash B\&C}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}}{(A\&B)\&C\vdash B\&C}\ \&-\mathrm{S}}{(A\&B)\&C\vdash A\&(B\&C)}\ \&-\mathrm{D}$$

Ma questa derivazione NON è la più corta. Una più corta si ottiene applicando la regola $\&-$D il più tardi possibile.

9.3.5 Alla ricerca della validità con il calcolo dei sequenti

La ragione per cui risulta rilevante usare il calcolo dei sequenti per stabilire la verità di una proposizione formale è che vale la seguente identificazione del concetto di derivabilità e quello di validità per una proposizione:

$\vdash \texttt{pr}$ è radice di una derivazione in $\mathbf{LC}_p$
sse
$\models \texttt{pr}$
ovvero la sua **tabella di verità** ha **1** in ogni uscita

Nel seguito andiamo a dimostrare il motivo di tale identificazione. Innanzitutto mostreremo che gli *assiomi sono sequenti validi*. Se poi riusciamo a mostrare che anche *le regole del calcolo sono valide*, ovvero che conservano la VALIDITÀ dall'ALTO verso il BASSO allora ne risulta che una derivazione avente come radice un sequente del tipo $\vdash \texttt{pr}$ rende tale sequente valido perchè la validità SCENDE dalle foglie con assiomi validi fino alla radice. A tal scopo proseguiamo dando la definizione di regola valida.

9.3.6 Validità regole del calcolo

Una regola ad una premessa chiamata $*$ del tipo

$$\frac{D_1, \ldots, D_j \vdash E_1, \ldots, E_k}{A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m} \; *$$

ove il sequente **premessa** è $D_1, \ldots, D_j \vdash E_1, \ldots, E_k$ e il sequente **conclusione** è $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ si dice **valida rispetto alla semantica delle tabelle di verità** (oppure **valida rispetto alla verità classica**)
se supposto che

$$\models (((\mathbf{D_1} \& \mathbf{D_2}) \& \ldots \& \mathbf{D_j} \quad \rightarrow \quad (((\mathbf{E_1} \vee \mathbf{E_2}) \ldots \vee \mathbf{E_k})$$

allora vale

$$\models (((\mathbf{A_1} \& \mathbf{A_2}) \& \ldots \& \mathbf{A_n} \quad \rightarrow \quad (((\mathbf{B_1} \vee \mathbf{B_2}) \ldots \vee \mathbf{B_m})$$

ovvero la regola **TRASFORMA sequenti validi** in **sequenti validi** dall'ALTO verso il BASSO.

Una regola a due premesse chiamata $*$ del tipo

$$\frac{D_1, \ldots, D_j \vdash E_1, \ldots, E_k \qquad\qquad D'_1 \ldots D'_{j'} \vdash E'_1 \ldots E'_{k'}}{A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m} \; *$$

si dice **valida rispetto alla semantica delle tabelle di verità** (oppure **valida rispetto alla verità classica**)
se supposto che

$$\models (((\mathbf{D_1} \& \mathbf{D_2}) \& \ldots \& \mathbf{D_j} \rightarrow (((\mathbf{E_1} \vee \mathbf{E_2}) \ldots \vee \mathbf{E_k})$$
$$\text{e}$$
$$\models (((\mathbf{D'_1} \& \mathbf{D'_2}) \& \ldots \& \mathbf{D'_{j'}} \rightarrow (((\mathbf{E'_1} \vee \mathbf{E'_2}) \ldots \vee \mathbf{E'_{k'}})$$

allora vale

$$\models (((\mathbf{A_1} \& \mathbf{A_2}) \& \ldots \& \mathbf{A_n} \rightarrow (((\mathbf{B_1} \vee \mathbf{B_2}) \ldots \vee \mathbf{B_m})$$

ovvero la regola **TRASFORMA sequenti validi** in **sequenti validi** dall'ALTO verso il BASSO.

Nel seguito vedremo che per mostrare che le regole del calcolo dei sequenti della Logica classica proposizionale sono valide, mostreremo che tali regole soddisfano una proprietà più forte ovvero che *le regole del calcolo* $\mathbf{LC}_p$ *conservano la soddisfacibilità per riga.*

Prima di proseguire a dare le definizioni necessarie di soddisfacibilità per riga di regole (e anche di sequenti) introduciamo una notazione per interpretare la congiunzione di una lista di proposizioni e la disgiunzione di una lista di proposizioni come segue:

$\Gamma^{\&} \equiv (\mathtt{pr_1}\&\mathtt{pr_2})\ldots\&\mathtt{pr_n}$ è la congiunzione delle proposizioni in $\Gamma \equiv \mathtt{pr_1}, \mathtt{pr_2}, \ldots \mathtt{pr_n}$ oppure $\Gamma^{\&} \equiv \top$ (costante vero) se Γ è la lista vuota
$\Delta^{\vee} \equiv (\mathtt{pr_1}\vee\mathtt{pr_2})\ldots\vee\mathtt{pr_n}$ è la disgiunzione delle proposizioni in $\Delta \equiv \mathtt{pr_1}, \mathtt{pr_2}, \ldots \mathtt{pr_n}$ oppure $\Delta^{\vee} \equiv \perp$ (costante falso) se Δ è la lista vuota

Ci serviremo di questa notazione nella definizione di validità dei sequenti per interpretare una lista di proposizioni Γ *a sinistra* del segno $\vdash$ come un'unica proposizione $\Gamma^{\&}$ che è la congiunzione (associata a sinistra) *delle proposizioni nella lista* Γ e poi per interpretare una lista di proposizioni Δ *a destra* del segno $\vdash$ come un'unica proposizione $\Delta^{\vee}$ che è la *disgiunzione* (associata a sinistra) *delle proposizioni nella lista* Δ.

9.3.7 Validità e soddisfacibilità di un sequente

Diamo ora la ovvia definizione di sequente soddisfacibile su una riga, richiamando prima quella di sequente valido classicamente:

Def. 9.2 (sequente valido) *Un sequente* $\boldsymbol{\Gamma \vdash \Delta}$ *è valido classicamente, o rispetto alla semantica della tabella di verità, sse vale* $\models \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$.

Def. 9.3 (sequente soddisfacibile su una riga) *Un sequente* $\Gamma \vdash \Delta$ *è soddisfacibile su una riga (contenente le variabili proposizioni del sequente) sse lo è la proposizione* $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$.

Si osservi che possiamo associare ad una proposizione `pr` INFINITE TABELLE di VERITÀ, una per OGNI lista finita di variabili proposizionali che INCLUDANO le variabili effettivamente presenti in `pr`.

Ad esempio alla proposizione $A\&B$ e ad una lista arbitraria di variabili proposizionali contenenti A e B possiamo associare una tabella di verità il cui valore in uscita è però determinato solo dai valori su A e B:

A	B	...	V_n	$A\&B$
0	1	...	...	**0**
0	0	...	...	**0**
1	1	...	...	**1**
1	0	......	...	**0**
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

Def. 9.4 (regola soddisfacibile per riga) *Una regola CONSERVA la SODDISFACIBILITÀ per riga se trasforma dall'ALTO verso il BASSO sequenti soddisfacibili su una riga in sequenti soddisfacibili sulla stessa riga (supposto che le riga in questione si riferisca ad una tabella di verità che contiene TUTTE le variabili proposizionali che compaiono in ALMENO una delle proposizioni dei sequenti nella regola), ovvero se supposto che TUTTI i sequenti premessa siano* **soddisfacibili su una riga** *allora il sequente conclusione è pure* **soddisfacibile sulla STESSA RIGA**.

Come esempi di regole soddisfacibili per riga mostriamo che TUTTE le regole del calcolo LC_p sono soddisfacibili per riga. Ci interessa mostrare questo perchè il fatto che tali regole conservino la soddisfacibilità per riga dall'ALTO verso il BASSO implica che conservano pure la validità dei sequenti dall'ALTO verso il BASSO:

Proposition 9.5 *Vale la seguente proprietà:*

Se una regola **conserva la soddisfacibilità per riga** *allora* **conserva la validità**, *cioè è* **valida**.

Dim. Supponiamo che una regola conservi la soddisfacibilità per riga e supponiamo che abbia la premessa (o le premesse) valide. Ora su una riga arbitraria abbiamo che la premessa (o le premesse) sono soddisfacibili (in quanto valida/e) e quindi per la conservazione della soddisfacibilità per riga abbiamo che la conclusione è pure soddisfacibile sulla stessa riga. Siccome la riga era arbitraria ciò comporta che la conclusione è soddisfacibile su OGNI riga ed è quindi valida. Dunque la regola è valida.

Questa può sembrare una proposizione controintuitiva rispetto al fatto che una proposizione valida, o un sequente valido, è pure soddisfacibile ma non vale il viceversa:

Lemma 9.6 *Vale la seguente proprietà:*

Se un sequente è **valido** *allora è pure* **soddisfacibile**.

ma non vale il viceversa: ad esempio il sequente $A \vdash B$ è soddisfacibile per $A = 0$ ma NON è valido ponendo $A = 1$ e $B = 0$.

Nel seguito useremo il seguente lemma in cui mostriamo che per rendere soddisfacibile su una riga una implicazione $\mathtt{pr} \to \mathtt{pr}'$ basta controllare che se l'antecedente $\mathtt{pr}$ è soddisfacibile sulla riga allora lo è pure il conseguente $\mathtt{pr}'$.

Lemma 9.7 (sod-impl) *Vale il seguente fatto:*

Data una proposizione $\mathtt{pr} \to \mathtt{pr}'$,
se per certi valori assegnati alle variabili proposizionali
(ovvero su una certa riga della tabella) di $\mathtt{pr} \to \mathtt{pr}'$
si ha che se $\mathtt{pr}$*=1 allora pure* $\mathtt{pr}'$*= 1*
allora vale $\mathtt{pr} \to \mathtt{pr}'$*=1, cioè* $\mathtt{pr} \to \mathtt{pr}'$ *è soddisfacibile sugli stessi valori assegnati alle variabili*
(ovvero sulla stessa riga della tabella).

Dim. Infatti o $\mathtt{pr}$ è **0** sulla riga in questione, e in tal caso l'implicazione $\mathtt{pr} \to \mathtt{pr}'$ è soddisfacibile oppure è **1** e allora per l'ipotesi $\mathtt{pr}' = \mathtt{1}$ e di nuovo $\mathtt{pr} \to \mathtt{pr}'$ è soddisfacibile sulla riga in questione.

Proseguiamo ora con il mostrare che gli assiomi del calcolo $\mathbf{LC}_p$ sono validi:

Theorem 9.8 (soddisfacibilità per riga regole $\mathbf{LC}_p$) **TUTTE** *le* **regole** *di* $\mathbf{LC}_p$ *conservano la* **soddisfacibilità per riga** *e gli assiomi sono* **validi**.

Procediamo a dimostrare quanto affermato dal teorema regola per regola a partire dagli assiomi.

9.3.8 Validità assioma identità

L'assioma identità

$$\textbf{ax-id}$$
$$\Gamma_{\mathbf{1}}, A, \Gamma_{\mathbf{2}} \vdash \Delta_{\mathbf{1}}, A, \Delta_{\mathbf{2}}$$

è valido perchè vale

$$\models (\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \& \mathbf{A})\, \& \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \rightarrow (\mathbf{\Delta_1^{\vee}} \vee \mathbf{A})\, \vee \mathbf{\Delta_2^{\vee}}$$

Infatti se $(\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \& \mathbf{A})\, \& \mathbf{\Gamma_2^{\&}}$ vale **1** in una certa riga della tabella allora $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ e quindi che pure $(\mathbf{\Delta_1^{\vee}} \vee \mathbf{A})\, \vee \mathbf{\Delta_2^{\vee}}$ vale **1** sulla stessa riga e dunque per il lemma 9.7 l'assioma è soddisfacibile sulla riga considerata. Siccome questo vale per una riga generica allora il sequente è soddisfacibile su ogni riga e quindi è valido.

9.3.9 Validità dell'assioma per il falso

L'assioma

$$\textbf{ax-}\bot$$
$$\Gamma_1, \bot, \Gamma_2 \vdash \nabla$$

è valido perchè ogni riga della tabella di

$$(\, \mathbf{\Gamma_1^{\&}} \& \perp) \& \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \rightarrow \nabla^{\vee}$$

assegna **0** a $(\, \mathbf{\Gamma^{\&}} \& \perp) \& \mathbf{\Gamma_2^{\&}}$ e quindi **1** alla proposizione implicativa.

Esempio: l'affermazione seguente

"**Se fossi Superman, sarei in grado di volare**"

si può formalizzare in

$$\perp \vdash \mathbf{V}$$

assumendo che
$\perp=$ **Sono Superman (che è una falsità)**
$\mathbf{V}=$ **Sono in grado di volare**

ed è valida per l'assioma del falso sopra. E' anche valida nell'ipotesi che fossi Superman davvero perchè Superman come personaggio fantastico volava.

9.3.10 Soddisfacibilità per riga di $\mathbf{sc}_{sx}$

La regola di **scambio a sinistra**

$$\frac{\Sigma, \Gamma_{\mathbf{1}}, \Theta, \Gamma_{\mathbf{2}}, \Delta \vdash \nabla}{\Sigma, \Gamma_{\mathbf{2}}, \Theta, \Gamma_{\mathbf{1}}, \Delta \vdash \nabla}\ \mathrm{sc_{sx}}$$

conserva la **soddisfacibilità per riga**. Si osservi che questa regola conserva banalmente la soddisfacibilità perchè il fatto che valga $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Gamma_2}, \mathbf{\Delta})^{\&} = \mathbf{1}$ **su una certa riga**, e che comporti che $\Delta^{\vee} = 1$, è **indipendente** dall'ordine delle proposizioni in $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Gamma_2}, \mathbf{\Delta}$.

Però per esercizio di precisione mostriamolo per bene formalmente. Iniziamo supponendo che sia **1** il valore di

$$(((\mathbf{\Sigma}^{\&} \& \mathbf{\Gamma_1}^{\&})\ \& \mathbf{\Theta}^{\&}) \& \mathbf{\Gamma_2}^{\&}) \& \mathbf{\Delta}^{\&} \rightarrow \nabla^{\vee}$$

su una certa riga della sua tabella. Ora se supponiamo che sia **1** sulla stessa riga pure il valore di $(((\mathbf{\Sigma}^{\&} \& \mathbf{\Gamma_2^{\&}})\ \& \mathbf{\Theta}^{\&}) \& \mathbf{\Gamma_1^{\&}}) \& \mathbf{\Delta}^{\&}$, allora abbiamo che ogni congiunto ha valore **1** e così pure anche

$(((\mathbf{\Sigma}^{\&}\&\mathbf{\Gamma_1^{\&}})\ \&\mathbf{\Theta}^{\&})\&\mathbf{\Gamma_2^{\&}})\&\mathbf{\Delta}^{\&}$ e quindi per la **soddisfacibilità** della **premessa** si conclude che $\nabla^{\vee}$ ha valore **1**. Quindi per il lemma 9.7 $(((\mathbf{\Sigma}^{\&}\&\mathbf{\Gamma_2}^{\&})\ \&\mathbf{\Theta}^{\&})\&\mathbf{\Gamma_1}^{\&})\&\mathbf{\Delta}^{\&} \rightarrow \nabla^{\vee}$ è soddisfacibile sulla riga considerata in partenza.

9.3.11 Soddisfacibilità per riga di $\mathbf{sc}_{dx}$

La regola di **scambio a destra**

$$\frac{\Gamma\vdash\Sigma,\Delta_{\mathbf{1}},\Theta,\Delta_{\mathbf{2}},\nabla}{\Gamma\vdash\Sigma,\Delta_{\mathbf{2}},\Theta,\Delta_{\mathbf{1}},\nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

conserva la **soddisfacibilità per riga**. Si osservi che questa regola conserva banalmente la soddisfacibilità perchè, supposto che valga $\mathbf{\Gamma}^{\&}=\mathbf{1}$ su una certa riga, il fatto che valga $(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Delta_1},\mathbf{\Theta},\mathbf{\Delta_2},\nabla)^{\vee}=\mathbf{1}$ **sulla stessa riga** è **indipendente** dall'ordine delle proposizioni in $\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Delta_1},\mathbf{\Theta},\mathbf{\Delta_2},\nabla$.

Però per esercizio di precisione mostriamolo per bene formalmente. Iniziamo supponendo che sia **1** il valore di

$$\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Delta_1},\mathbf{\Theta},\mathbf{\Delta_2},\nabla)^{\vee}$$

su una certa riga della sua tabella. Ora se supponiamo che valga pure $\mathbf{\Gamma}^{\&}=\mathbf{1}$ sulla stessa riga, per la soddisfacibilità della premessa sulla stessa riga si ottiene che $(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Delta_1},\mathbf{\Theta},\mathbf{\Delta_2},\nabla)^{\vee}=\mathbf{1}$ e dato che ogni disgiunto in $(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Delta_1},\mathbf{\Theta},\mathbf{\Delta_2},\nabla)^{\vee}$ ha valore **1** ne segue che vale $(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Delta_2},\mathbf{\Theta},\mathbf{\Delta_1},\nabla)^{\vee}=\mathbf{1}$. Quindi per il lemma 9.7 concludiamo che

$$\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow(\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Delta_2},\mathbf{\Theta},\mathbf{\Delta_1},\nabla)^{\vee}$$

è soddisfacibile sulla riga considerata in partenza.

9.3.12 Soddisfacibilità per riga di &−D

La regola

$$\frac{\Gamma\vdash A,\Delta\quad\Gamma\vdash B,\Delta}{\Gamma\vdash A\&B,\Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

conserva la **soddisfacibilità per riga**.

Innanzitutto, supponiamo che $\mathbf{\Delta}$ sia una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\mathbf{A}\&\mathbf{B},\mathbf{\Delta})^{\vee}$ in $(\mathbf{A}\&\mathbf{B})\vee\mathbf{\Delta}$ (altrimenti dovremmo scrivere

$$(...((\mathbf{A}\&\mathbf{B})\vee\mathbf{A_1})\vee\mathbf{A_2})...)\vee\mathbf{A_n}$$

posto che $\mathbf{\Delta}\equiv\mathbf{A_1},\mathbf{A_2},\dots\mathbf{A_n}$).

Poi supponiamo che sia **1** il valore di

$$\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\mathbf{A}\vee\mathbf{\Delta}$$

su una certa riga della sua tabella comprendente tra le variabili pure **B** e che sia pure **1** il valore della tabella di

$$\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\mathbf{B}\vee\mathbf{\Delta}$$

sulla stessa riga considerata sopra che quindi comprende pure A come variabile.

Ora supponiamo che sia **1** sulla stessa riga pure il valore di $\mathbf{\Gamma}^{\&}$. Per la **soddisfacibilità** della PRIMA **premessa** sulla riga considerata si conclude che $\mathbf{A}\vee\mathbf{\Delta}$ ha valore **1**. Qui si presentano *due casi*: **A** è **1** oppure $\mathbf{\Delta}$ è **1**.

I caso **A**=1. In tal caso si consideri che per la **soddisfacibilità** della SECONDA **premessa** sulla riga considerata si ottiene che $\mathbf{B}\vee\mathbf{\Delta}$ ha valore **1**. Qui si presentano altri due casi: **B** è **1** oppure $\mathbf{\Delta}$ è **1**. Nel sottocaso $\mathbf{B}=\mathbf{1}$, assieme all'ipotesi $\mathbf{A}=\mathbf{1}$ si conclude **A**&**B**=1 e dunque $(\mathbf{A}\&\mathbf{B})\vee\mathbf{\Delta}=\mathbf{1}$.

Nel sottocaso $\mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$, che coincide anche con il secondo caso sopra, si conclude lo stesso che $(\mathbf{A}\&\mathbf{B})\vee\mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$.

Quindi per il lemma 9.7 $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow (\mathbf{A}\&\mathbf{B})\vee\mathbf{\Delta}$ è soddisfacibile sulla riga considerata in partenza.

9.3.13 Soddisfacibilità per riga di &-S

La regola

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

conserva la **soddisfacibilità per riga**. La prova di ciò è banale in quanto la virgola a sinistra è proprio interpretata come una & (e la differenza dell'interpretazione delle ipotesi del sequente sopra rispetto alle premesse di quello sotto sono solo di associatività diversa dei vari congiunti..) però la facciamo per bene di seguito per esercizio.

Innanzitutto, supponiamo che $\mathbf{\Gamma}$ sia una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{B})^{\&}$ in $(\mathbf{\Gamma}\,\&\,\mathbf{A})\,\&\mathbf{B}$.

Ora supponiamo che sia $\mathbf{1}$ il valore di

$$(\mathbf{\Gamma}\,\&\,\mathbf{A})\,\&\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$$

su una certa riga della sua tabella e che sia pure 1 il valore di $\mathbf{\Gamma}\,\&\,(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$. Ne segue che è $\mathbf{1}$ sia il valore di $\mathbf{\Gamma}$ che di $\mathbf{A}$ che di $\mathbf{B}$ sulla stessa riga della tabella. Dunque il valore di $(\mathbf{\Gamma}\,\&\,\mathbf{A})\,\&\mathbf{B}$ è $\mathbf{1}$ e per ipotesi ne segue che pure il valore di $\mathbf{\Delta}^{\vee}$ è $\mathbf{1}$ sulla riga considerata.

Quindi per il lemma 9.7

$$\mathbf{\Gamma}\,\&\,(\mathbf{A}\&\mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$$

è soddisfacibile sulla riga considerata in partenza.

9.3.14 Soddisfacibilità per riga di ∨-S

La regola

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

conserva la **soddisfacibilità per riga**.

Innanzitutto, supponiamo che $\mathbf{\Gamma}$ sia una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B})^{\&}$ in $\mathbf{\Gamma}\,\&\,(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$.

Ora supponiamo che sia $\mathbf{1}$ il valore di

$$\mathbf{\Gamma}\,\&\,\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$$

su una certa riga della sua tabella comprendente pure la variabile proposizionale $\mathbf{B}$, e sia $\mathbf{1}$ pure

$$\mathbf{\Gamma}\,\&\,\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$$

sulla stessa riga della sua tabella che quindi comprende pure la variabile $\mathbf{A}$. Infine supponiamo sia pure $\mathbf{1}$ il valore di $\mathbf{\Gamma}\,\&\,(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$. Ne segue che è $\mathbf{1}$ sia il valore di $\mathbf{\Gamma}$ che di $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ sulla stessa riga della tabella.

Qui abbiamo 2 casi: o $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ sulla riga della tabella considerata.

Nel caso $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ la stessa riga dà $\mathbf{\Gamma}\&\mathbf{A} = \mathbf{1}$ e per la **soddisfacibilità** della PRIMA **premessa** sulla riga considerata si ottiene che $\mathbf{\Delta}^{\vee}$ è $\mathbf{1}$ e dunque per il lemma 9.7 si conclude che

$$\mathbf{\Gamma}\,\&\,(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$$

è soddisfacibile sulla riga considerata in partenza.

Nel caso $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ la stessa riga dà $\mathbf{\Gamma}\&\mathbf{B} = \mathbf{1}$ e per la **soddisfacibilità** della SECONDA **premessa** sulla riga considerata si ottiene che $\mathbf{\Delta}^{\vee}$ è $\mathbf{1}$ e dunque per il lemma 9.7 si conclude che

$$\mathbf{\Gamma} \,\&\, (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$$

è soddisfacibile sulla riga considerata in partenza.

9.3.15 Soddisfacibilità per riga di $\vee-$D

La regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{D}$$

conserva la **soddisfacibilità per riga** in quanto i due sequenti si interpretano nella stessa proposizione

$$\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{\Delta}$$

9.3.16 Soddisfacibilità per riga di $\neg-$D

La regola

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

conserva la **soddisfacibilità per riga**.

Innanzitutto, supponiamo che $\mathbf{\Delta}$ sia composta di una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\neg\mathbf{A}, \mathbf{\Delta})^{\vee}$ in $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta}$.

Poi supponiamo che sia $\mathbf{1}$ il valore di

$$\mathbf{\Gamma}^{\&} \,\&\, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{\Delta}$$

su una certa riga della sua tabella e supponiamo pure che sia $\mathbf{1}$ il valore di $\mathbf{\Gamma}^{\&}$ sulla stessa riga della tabella. Ma questa riga dà valore $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

I caso $\mathbf{A} = \mathbf{1}$. In tal caso per la **soddisfacibilità** dell'unica **premessa** della regola sulla riga considerata si ottiene che $\Delta^{\vee}$ ha valore $\mathbf{1}$ e dunque pure $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$.

II caso $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. In tal caso $\neg\mathbf{A} = \mathbf{1}$ e quindi di nuovo $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta}^{\vee}$ ha valore $\mathbf{1}$.

Per il lemma 9.7 concludiamo che $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow (\neg\mathbf{A}) \vee \mathbf{\Delta}$ è soddisfacibile sulla riga considerata in partenza.

9.3.17 Soddisfacibilità per riga di $\neg$-S

La regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

conserva la **soddisfacibilità per riga**.

Innanzitutto, supponiamo che $\mathbf{\Delta}$ sia composta di una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\mathbf{A}, \mathbf{\Delta})^{\vee}$ in $\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta}$.

Poi supponiamo che sia $\mathbf{1}$ il valore di

$$\mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta}$$

e di $\mathbf{\Gamma} \,\&\, \neg\mathbf{A}$ su una stessa riga della loro tabella (includenti tutte le variabili proposizione che compaiono in almeno un sequente della regola in questione). Ne segue che $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{1}$ e così pure che $\neg\mathbf{A} = \mathbf{1}$ da cui segue $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Da $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{1}$ per la **soddisfacibilità** della **premessa** sulla riga considerata da si ottiene che $\mathbf{A} \vee \mathbf{\Gamma} = \mathbf{1}$ e da $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ si conclude conclude $\mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$.

Per il lemma 9.7 si conclude che $\mathbf{\Gamma} \,\&\, \neg\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{\Delta}$ è soddisfacibile sulla riga considerata in partenza.

9.3.18 Soddisfacibilità per riga di →-D

La regola

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow\!-\mathrm{D}$$

conserva la **soddisfacibilità per riga**.

Innanzitutto, supponiamo che $\mathbf{\Delta}$ sia composta da una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\mathbf{B}, \mathbf{\Delta})^{\vee}$ in $\mathbf{B} \vee \mathbf{\Delta}$.

Poi supponiamo che sia $\mathbf{1}$ il valore di

$$\mathbf{\Gamma}^{\&} \,\&\, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vee \mathbf{\Delta}$$

su una certa riga della sua tabella e supponiamo pure che $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ sulla stessa riga della tabella. Ma questa riga dà valore $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

I caso $\mathbf{A} = \mathbf{1}$. In tal caso per la **soddisfacibilità** dell'unica **premessa** della regola sulla riga considerata si ottiene che $(B \vee \Delta)^{\vee}$ ha valore $\mathbf{1}$ e si hanno due sottocasi:

I sottocaso $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ e quindi $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ e di conseguenza $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{\Delta}^{\vee}$ ha valore $\mathbf{1}$.

II sottocaso $\mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$ e quindi $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{\Delta}^{\vee}$ ha valore $\mathbf{1}$.

II caso $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. In tal caso $\neg\mathbf{A} = \mathbf{1}$ e quindi $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ e di conseguenza $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{\Delta}^{\vee}$ ha valore $\mathbf{1}$.

Per il lemma 9.7 concludiamo che $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{\Delta}$ è soddisfacibile sulla riga considerata in partenza.

9.3.19 Soddisfacibilità per riga di →-S

La regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow -\mathrm{S}$$

conserva la **soddisfacibilità per riga**.

Innanzitutto, supponiamo che $\mathbf{\Gamma}$ e $\mathbf{\Delta}$ siano entrambi composti da una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^{\&}$ in $\mathbf{\Gamma} \,\&\, (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ e così pure quella di $(\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta})^{\vee}$ in $\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta}$.

Poi supponiamo che sia 1 il valore di

$$\mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta}$$

e di

$$\mathbf{\Gamma} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{\Delta}$$

su una certa riga della loro tabella includente le variabili proposizionali $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Inoltre supponiamo che $\mathbf{\Gamma} \& (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{1}$ sulla stessa riga della sua tabella. Ne segue che $\mathbf{\Gamma}$ ha valore $\mathbf{1}$ e così pure $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. Ora il fatto che $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ ci fa concludere due casi: $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{B} = \mathbf{1}$.

I caso $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. In tal caso si consideri che per la **soddisfacibilità** della PRIMA **premessa** sulla riga considerata da $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{1}$ si ottiene che $\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta}$ ha valore $\mathbf{1}$ e sapendo che $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ si conclude $\mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$.

II caso **B**=1. In tal caso si consideri che per la **soddisfacibilità** della SECONDA **premessa** sulla riga considerata, ricordando che vale $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{1}$, si ottiene che $\mathbf{\Delta}$ ha valore **1**.

In entrambi i casi avendo ottenuto $\mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$, per il lemma 9.7 si conclude che $\mathbf{\Gamma} \,\&\, (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{\Delta}$ è soddisfacibile sulla riga considerata in partenza.

Sapendo che grazie alla proposizione 9.5 le regole che **conservano soddisfacibilità per riga** sono pure **valide**, deduciamo dal teorema 9.8 il seguente teorema di validità delle regole del calcolo per i sequenti della logica classica proposizione $\mathbf{LC}_p$:

Theorem 9.9 (VALIDITÀ regole di $\mathbf{LC}_p$) *Tutte le regole di LC_p sono* **valide** *classicamente rispetto alla semantica delle tabelle di verità.*

Quindi concludiamo che se un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è **derivabile** allora è **valido** perchè la VALIDITÀ SCENDE $\Downarrow$ dalle foglie di assiomi validi fino alla radice $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$:

Theorem 9.10 (VALIDITÀ sequenti) *Se il sequente* $\mathtt{pr_1}, \ldots, \mathtt{pr_n} \vdash \mathtt{pr_k}, \ldots, \mathtt{pr_m}$ *è derivabile in LC_p* $\Rightarrow$ *vale* $\models (((\mathtt{pr_1} \& \mathtt{pr_2} \& \ldots \& \mathtt{pr_n} \to (((\mathtt{pr_k} \vee \mathtt{pr_{k+1}}) \ldots \vee \mathtt{pr_m}$

9.4 Esercizi su soddisfacibilità per riga delle regole

1. la regola

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B, \Sigma \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

   è soddisfacibile per riga, e quindi valida classicamente?

2. la regola

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to -\mathrm{D}$$

   è soddisfacibile per riga, e quindi valida classicamente??

9.5 Esercizio di formalizzazione e validità

Formalizzare in sequente

Non mangio gli spinaci.
Se mi piacessero gli spinaci li mangerei.
____
Non mi piacciono gli spinaci.

utilizzando:
M=mangio gli spinaci
P=mi piacciono gli spinaci

e provare se è derivabile in LC_p il sequente ottenuto.

Nel caso positivo il sequente è valido, perchè??

Soluzione:
L'asserzione si formalizza ad esempio nel sequente

$$\neg M, P \to M \vdash \neg P$$

che è valido per il teorema 9.10 perchè si deriva ad esempio in tal modo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{\neg M, P\vdash P}\ \neg\text{–D}}{\neg M\vdash \neg P, P}\ \text{sc}_{\text{dx}}}{\neg M\vdash P, \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{M\vdash M, \neg P}\ \neg\text{–S}}{M, \neg M\vdash \neg P}\ \text{sc}_{\text{sx}}}{\neg M, M\vdash \neg P}$$
$$\dfrac{\neg M\vdash P, \neg P \qquad \neg M, M\vdash \neg P}{\neg M, P\rightarrow M\vdash \neg P}\ \rightarrow\text{–D}$$

9.6 Procedura di decisione per proposizioni classiche

Una caratteristica importante delle regole del calcolo $\mathbf{LC}_p$ è che il concetto di derivabilità di un sequente $\Gamma\vdash\nabla$ nel calcolo COINCIDE con quello della sua validità. E non solo...perchè addirittura esiste una PROCEDURA di decisione per **decidere** se un sequente è **derivabile** o meno e quindi **valido** o meno. Tale procedura induce una PROCEDURA di DECISIONE della VALIDITÀ di una proposizione qualsiasi `pr`, semplicemente perchè si applica la procedura di decisione di derivazione di un sequente al sequente $\vdash$ `pr`.

L'esistenza di tali procedure si basa essenzialmente sul fatto che le regole di $\mathbf{LC}_p$ oltre ad essere valide, hanno anche le loro inverse come valide, sono quindi come vedremo REGOLE SICURE, e anche sul fatto che tali regole (escluso gli scambi a sx e a dx) DIMINUISCONO di COMPLESSITÀ dal BASSO verso l'ALTO.

9.6.1 Regole inverse e sicure

Diamo ora la definizione di regola inversa di una regola ad una premessa e di regole inverse di una regola a due premesse.

Def. 9.11 (regola inversa ad una premessa) *La regola* **inversa** *di una regola del tipo*

$$\frac{D_1, \ldots, D_j\vdash E_1, \ldots, E_k}{A_1, \ldots, A_n\vdash B_1, \ldots, B_m}\ *$$

è la seguente

$$\frac{A_1, \ldots, A_n\vdash B_1, \ldots, B_m}{D_1, \ldots, D_j\vdash E_1, \ldots, E_k}\ * - \textbf{inv}$$

Def. 9.12 (regola inversa ad due premesse) *Le regole* **inverse** *di una regola del tipo*

$$\frac{D_1, \ldots, D_j\vdash E_1, \ldots, E_k \qquad D'_1, \ldots, D'_{j'}\vdash E'_1, \ldots, E_{k'}}{A_1, \ldots, A_n\vdash B_1, \ldots, B_m}\ *$$

sono le DUE seguenti

$$\frac{A_1, \ldots, A_n\vdash B_1, \ldots, B_m}{D_1, \ldots, D_j\vdash E_1, \ldots, E_k}\ * - \textbf{inv1} \qquad \frac{A_1, \ldots, A_n\vdash B_1, \ldots, B_m}{D'_1, \ldots, D'_{j'}\vdash E'_1, \ldots, E_{k'}}\ * - \textbf{inv2}$$

Def. 9.13 (regola SICURA) *Una regola si dice* **SICURA** *se lei e la sua inversa sono entrambe* **valide** *classicamente, ovvero rispetto alla semantica delle tabelle di verità.*

Per dimostrare la validità delle regole inverse di $\mathbf{LC}_p$, come abbiamo fatto per mostrare la validità delle regole in teorema 9.9, mostriamo che queste conservano la soddisfacibilità per riga:

Theorem 9.14 (soddisfacibilità inverse di $\mathbf{LC}_p$) **TUTTE** *le* **INVERSE** *delle regole di* $\mathbf{LC}_p$ *conservano la* **soddisfacibilità per riga**.

Diamo ora di seguito la dimostrazione di soddisfacibilità per riga solo per le inverse delle regole di implicazione lasciando di dimostrare la soddisfacibilità per riga delle altre regole per esercizio.

9.6.2 Soddisfacibilità per riga di inversa →-D

L'inversa della regola **→-D** che è

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}{\Gamma, A \vdash B, \Delta} \rightarrow\!-\mathrm{D} - \mathbf{inv}$$

conserva la **soddisfacibilità per riga**.

Innanzitutto, supponiamo che $\mathbf{\Delta}$ sia composta da una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\mathbf{B}, \mathbf{\Delta})^{\vee}$ in $\mathbf{B} \vee \mathbf{\Delta}$.

Poi supponiamo che sia **1** il valore di

$$\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow (\, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \,) \vee \mathbf{\Delta}$$

su una certa riga della sua tabella e supponiamo pure che $\mathbf{\Gamma}^{\&} \,\&\, \mathbf{A} = \mathbf{1}$ sulla stessa riga della tabella. In particolare abbiamo che $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ e dunque per la **soddisfacibilità** dell'unica **premessa** della regola sulla riga considerata si ottiene che $(\, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \,) \vee \mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$. Qui abbiamo 2 casi: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$.

I caso $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$. Ora dal fatto che per assunzione iniziale $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ si ottiene che $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ e dunque $\mathbf{B} \vee \mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$.

II caso $\mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$. In tal caso risulta subito che $\mathbf{B} \vee \mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$.

In entrambi i casi avendo ottenuto $\mathbf{B} \vee \mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$, per il lemma 9.7 concludiamo che $\mathbf{\Gamma}^{\&} \,\&\, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vee \mathbf{\Delta}$ è soddisfacibile sulla riga considerata in partenza.

9.6.3 Soddisfacibilità per riga di inverse di →-S

La regola

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \rightarrow -\mathrm{S} - inv_1$$

conserva la **soddisfacibilità per riga**.

Innanzitutto, supponiamo che $\mathbf{\Gamma}$ e $\mathbf{\Delta}$ siano entrambi composti da una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^{\&}$ in $\mathbf{\Gamma} \,\&\, (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ e così pure quella di $(\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta})^{\vee}$ in $\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta}$. Poi supponiamo che sia 1 il valore di

$$\mathbf{\Gamma} \,\&\, (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{\Delta}$$

e pure che $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{1}$ su una stessa riga della loro tabella includente le variabili proposizionali **A** e **B**. Ora su questa riga consideriamo due casi: $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

I caso $\mathbf{A} = \mathbf{1}$. Segue che $\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$.

II caso $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. In tal caso si ha $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ e dunque per la **soddisfacibilità** della **premessa** sulla riga considerata si ottiene che $\mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$ e quindi di nuovo che $\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$.

In entrambi i casi avendo ottenuto $\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta} = \mathbf{1}$, per il lemma 9.7 si conclude che

$$\mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta}$$

è soddisfacibile sulla riga considerata in partenza.

La regola

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}{\Gamma, B \vdash \Delta} \rightarrow -\mathrm{S} - inv_2$$

conserva la **soddisfacibilità per riga**.

Supponiamo che sia 1 il valore di

$$\mathbf{\Gamma}^{\&} \,\&\, (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$$

e di $\mathbf{\Gamma}^{\&}\&\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su una certa riga della loro tabella includente le variabili proposizionali **A** e **B**. Ora su questa riga abbiamo che pure $\mathbf{A}{\rightarrow}\mathbf{B} = \mathbf{1}$, perchè dall'ipotesi $\mathbf{B} = \mathbf{1}$. Dunque per la **soddisfacibilità** della **premessa** sulla riga considerata si ottiene che $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$, e per il lemma 9.7 si conclude che

$$\mathbf{\Gamma}^{\&}\&\mathbf{B}\rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$$

è soddisfacibile sulla riga considerata in partenza.

9.6.4 Sicurezza delle regole di $\mathbf{LC}_p$

Dalla proposizione 9.5 assieme ai teoremi 9.8 e 9.14 deduciamo che le regole di $\mathbf{LC}_p$ sono tutte sicure:

Corollary 9.15 (sicurezza regole $\mathbf{LC}_p$) **TUTTE** *le regole di* $\mathbf{LC}_p$ *e le loro* **INVERSE** *sono* **valide** *rispetto alla semantica delle tabelle di verità, ovvero sono regole* **SICURE**.

Concludiamo quindi che

nelle regole del calcolo $\mathbf{LC}_p$ la **SODDISFACIBILITÀ per RIGA SCENDE** $\Downarrow$ dall'**ALTO** verso il **BASSO** **SE TUTTE** LE FOGLIE sono **VERE sulla riga** ed anche **SALE** $\Uparrow$ dal **BASSO** verso l'**ALTO** verso ogni **SINGOLA FOGLIA**.
$\Downarrow$
la **FALSITÀ** su una riga **SCENDE** $\Downarrow$ da UNA **SINGOLA FOGLIA** fino alla RADICE $\Gamma \vdash \Delta$ (perchè la **VALIDITÀ SALE** $\Uparrow$ dal BASSO verso l'ALTO verso **CIASCUNA singola foglia**) la **VALIDITÀ SCENDE** $\Downarrow$ dall'ALTO verso il BASSO se **TUTTE** LE **FOGLIE** sono **VALIDE**

9.6.5 Esercizi su validità e sicurezza delle regole dei sequenti

1. La regola

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma\vdash\Delta \quad \Gamma, B, \Sigma\vdash\Delta}{\Gamma, A\vee B, \Sigma\vdash\Delta}\ \vee\!-\!\mathrm{S}$$

   è sicura?

   ovvero lei è valida assieme alle sue inverse

$$\frac{\Gamma, A\vee B, \Sigma\vdash\Delta}{\Gamma, A, \Sigma\vdash\Delta}\ \vee\!-\!\mathrm{S}-inv_1 \qquad\qquad \frac{\Gamma, A\vee B, \Sigma\vdash\Delta}{\Gamma, B, \Sigma\vdash\Delta}\ \vee\!-\!\mathrm{S}-inv_2$$

   ?

2. La regola

$$\frac{\Gamma, A\vdash\Delta}{\Gamma, A\&B\vdash\Delta}\ \&\!-\!\mathrm{re}_1$$

   è sicura?

Soluzione: la regola conserva la soddisfacibilità per riga ed è quindi valida procedendo analogamente alla dimostrazione di conservazione della soddisfacibilità per riga di &−S.

Invece la sua inversa

$$\frac{\Gamma, A\&B\vdash\Delta}{\Gamma, A\vdash\Delta}\ \&{-}\mathrm{re}_1 - \mathrm{inv}$$

NON è valida. Infatti supposto che la premessa vada ad $\mathbf{1}$ su una certa riga si ha che se $\mathbf{\Gamma}^{\&}\&\mathbf{A} = \mathbf{1}$ allora abbiamo che $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ e pure $\mathbf{A} = \mathbf{1}$, ma di $\mathbf{B}$ non sappiamo niente e ci sono due casi $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

I caso: $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ allora l'ipotesi della premessa $\mathbf{\Gamma}^{\&}\&(\mathbf{A}\&\mathbf{B}) = \mathbf{1}$ e dunque per la soddisfacibilità della premessa $\mathbf{\Gamma}^{\&}\&(\mathbf{A}\&\mathbf{B}) \to \mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ se ne deduce che $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$.

II caso $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ e qui non sappiamo proseguire...anzi questo caso ci ispira il controesempio che sfugge alla conservazione della soddisfacibilità per riga. Infatti ponendo il falso $\perp$ al posto di B e di Δ e la costante vero $\top$ al posto di $\mathbf{A}$, otteniamo che la regola si instanzia in tal modo:

$$\frac{\top\& \perp\vdash\perp}{\top\vdash\perp}\ \&{-}\mathrm{re}_1 - \mathrm{inv}$$

e questa ha la premessa $\top\& \perp\to\perp$ valida mentre la conclusione $\top \to\perp$ è NON valida chiaramente.

3. La regola

$$\frac{\Gamma\vdash A, \Delta}{\Gamma\vdash A \vee B, \Delta}\ \to{-}\mathrm{D}$$

è sicura?

Ora diamo una procedura di decisione di derivabilità o meno di un sequente che è conseguenza del fatto che le regole di $\mathbf{LC}_p$ sono sicure, oltrechè del fatto che tali regole (escluso gli scambi a sx e a dx) DIMINUISCONO strettamente di COMPLESSITÀ dal BASSO verso l'ALTO.

9.6.6 Come stabilire se un sequente è DERIVABILE o meno

Per sapere se $\Gamma\vdash\nabla$ è **DERIVABILE** in $\mathbf{LC}_p$ procedi in tal modo:

1. $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ è assioma? $\begin{cases} \text{sì} & \text{vai in 5.} \\ \text{no} & \text{vai in 2.} \\ & \text{se in } \Gamma \text{ o in } \nabla \text{ c'è proposizione composta} \\ & \text{altrimenti STOP} \end{cases}$

2. Scegli in $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ una proposizione composta, diciamo $\mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2$ per esempio.
$\mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2$ è in posizione buona per applicare ad essa una SUA regola (a dx se $\mathtt{pr}_1 \circ \mathtt{pr}_2$ sta a dx di $\vdash$ nel sequente, a sx se $\mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2$ sta a sx di $\vdash$)? $\begin{cases} \text{sì} & \text{vai in 4. operando su } \mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2 \\ \text{no} & \text{vai in 3. operando su } \mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2 \end{cases}$

3. se operi su $\mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2$ fai uno scambio per portarla in posizione buona da poter applicare la sua regola e vai in 4. operando su $\mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2$.

4. se operi su $\mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2$ applica la sua regola. Quante premesse ha la regola?

$\begin{cases} \text{una} & \text{vai in 1. operando sulla premessa} \\ \text{due} & \text{scegli la prima premessa e vai in 1. operando su di essa} \end{cases}$

5. nell'albero ottenuto c'è foglia che NON è assioma con almeno una proposizione composta?

$$\begin{cases} \text{sì} & \text{scegli la foglia NON assioma e vai in 2.} \\ & \text{operando su di lei} \\ \text{no} & \text{STOP} \end{cases}$$

CONCLUSIONE: se nell'albero ottenuto tutte le foglie sono assiomi, allora $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ è **DERIVABILE** in $\mathbf{LC}_p$, e quindi **VALIDO** per teorema 9.10;
altrimenti **NON è DERIVABILE** e quindi **NON VALIDO** perchè si trova una RIGA in cui il sequente **NON è SODDISFACIBILE** come segue nella prossima sezione.

9.6.7 Come trovare riga in cui un sequente NON è soddisfacibile

Se l'algoritmo per $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ si ferma con una foglia del tipo

$$\mathbf{V_{i_1}, \ldots V_{i_n} \vdash V_{k_1}, \ldots V_{k_m}}$$

che NON è assioma e fatta solo di variabili proposizionali ove

$$\{\ V_{i_1}, \ldots V_{i_n}\ \} \bigcap \{\ V_{k_1}, \ldots V_{k_m}\ \} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

la riga della tabella con

$$\begin{array}{lll} V_{i_j} = 1 & \text{se } V_{i_j} \text{ sta a sx sequente (ovvero tra le premesse del sequente)} \\ V_{k_j} = 0 & \text{se } V_{k_j} \text{ sta a dx sequente (ovvero tra le conclusioni del sequente)} \end{array}$$

dà valore **0** alla proposizione $\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\mathbf{\Delta}^{\vee}$.

9.6.8 Perchè la procedura di decisione derivabilità/validità di un sequente è corretta?

Se la procedura applicata al sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ dice che questo è **derivabile** allora abbiamo costruito un albero di derivazione con radice $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$. Quindi il sequente è **VALIDO** ovvero vale $\models\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\nabla^{\vee}$ per teorema 9.9 di validità delle regole di $\mathbf{LC}_p$.

Se la procedura invece dice che $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ **NON è derivabile** allora si trova una foglia in cui il sequente NON è soddisfacibile. Supponiamo che la procedura si fermi con foglia del tipo

$$\mathbf{V_{i_1}, \ldots V_{i_n} \vdash V_{k_1}, \ldots V_{k_m}}$$

che NON è assioma e fatta solo di variabili proposizionali, visto che non c'è variabile comune a dx e a sx (altrimenti la foglia sarebbe assioma!). Dunque mettendo a **1** tutte le variabili **premesse** e a **0** tutte le **conclusioni** si trova che la tabella di verità di

$$\mathbf{(V_{i_1} \& V_{i_2}) \ldots \& V_{i_n} \rightarrow (V_{k_1} \vee V_{k_2}) \ldots \vee V_{k_m}}$$

risulta **0** in corrispondenza di tali valori. Quindi, se $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ fosse **soddisfacibile** sulla riga scelta per **conservazione SODDISFACIBILITÀ per riga** delle **regole INVERSE** sarebbero validi TUTTI i sequenti lungo il ramo che finisce nella foglia $\mathbf{V_{i_1}, \ldots V_{i_n} \vdash V_{k_1}, \ldots V_{k_m}}$ compresa lei che invece NON lo è. Dunque, il sequente **NON è soddisfacibile** sulla riga scelta, ovvero la proposizione $\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\nabla^{\vee}$ **non è tautologia**, ossia $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ **NON è valido**.

A maggior ragione il sequente NON è nemmeno derivabile in $\mathbf{LC}_p$ in altro modo, perchè se fosse derivabile sarebbe anche valido per il teorema di validità 9.10 mentre abbiamo stabilito che non lo è.

9.6.9 Procedura per decidere validità e soddisfacibilità o meno di una proposizione

Data una proposizione `pr`
`passo 1`: si applichi la procedura di decisione provando a derivare $\vdash$ `pr` in LC_p

$$\begin{cases}\textbf{se si deriva} & \Rightarrow\ \texttt{pr}\ \text{è}\ \textbf{valida}\\ \textbf{se la procedura termina con un NON derivabile} & \text{vai al passo 2}\end{cases}$$

`passo 2`: la proposizione `pr` è **NON valida** e la riga su cui la tabella di `pr` va a **0** si ottiene in tal modo: prendi una foglia non assioma di sole variabili proposizionali
(per es. quella che ha fatto sì che la procedura termini con un NO)
e poni a **1** le variabili a sx del sequente e a **0** quelle a dx
$\Rightarrow$ ogni riga che contiene tale assegnazione di variabili proposizionali manda a **0** la proposizione `pr`
poi vai al passo 3
`passo 3`: prova a derivare $\vdash \neg$`pr` in $\mathbf{LC}_p$ applicando la procedura di decisione

$$\begin{cases}\text{se} \vdash \neg\texttt{pr}\ \text{si deriva} & \Rightarrow\ \vdash \texttt{pr}\\ & \text{è}\ \textbf{insoddisfacibile}\\ \text{se la procedura termina con} \vdash \neg\texttt{pr}\ \text{NON derivabile} & \text{applica il passo 2}\\ & \text{a} \vdash \neg\texttt{pr}\\ & \text{e la riga trovata assegna}\ \mathbf{1}\\ & \text{a}\ \texttt{pr}\\ & \Rightarrow\ \texttt{pr}\ \text{è}\ \textbf{soddisfacibile}\ \text{su di essa}\end{cases}$$

9.6.10 Esempio di validità di una proposizione

Domanda: è valida la proposizione $Q\to\neg\neg Q$?

Invece di fare la tabella di verità applichiamo la procedura di decisione al sequente $\vdash Q\to\neg\neg Q$ e otteniamo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ Q\vdash Q\end{array}}{Q,\neg Q\vdash}\ \neg-\mathrm{S}}{Q\vdash\neg\neg Q}\ \neg-\mathrm{D}}{\vdash Q\to\neg\neg Q}\ \to-\mathrm{D}$$

che è albero di derivazione e quindi la proposizione è **valida**.

Si noti come la VALIDITÀ SCENDA $\Downarrow$ dall'assioma identità fino al sequente radice.

9.6.11 Procedura ottimale per decidere validità e soddisfacibilità o meno di un sequente

Un sequente eredita le proprietà di validità e soddisfacibilità della proposizione che rappresenta, ovvero:

Def. 9.16 *Un sequente* $\Gamma\vdash\Delta$ *si dice* **soddisfacibile** *o* **insoddisfacibile** *se è soddisfacibile o insoddisfacibile la proposizione* $\Gamma^{\&} \ \to\ \Delta^{\vee}$.

Ora visto che un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è valido sse la proposizione $\mathbf{\Gamma}^{\&}\to\mathbf{\Delta}^{\vee}$ è una tautologia ne segue che per decidere sia **validità** che **soddisfacibilità** di un sequente **sequente** $\Gamma\vdash\Delta$ si può applicare il processo sopra alla proposizione $\Gamma^{\&}\to\Delta^{\vee}$: per decidere sia la **validità** che la **soddisfacibilità** di un sequente $\Gamma\vdash\Delta$ si può applicare il processo di decisione della proposizione $\Gamma^{\&}\to\Delta^{\vee}$ in sezione 9.6.9. Ma tale processo si può semplificare in quello che segue.

PROCEDURA OTTIMALE per DECIDERE VALIDITÀ dei SEQUENTI

> **Passo 1**: Per decidere se un **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$ è **valido** o meno
> si applichi la procedura di decisione della sua derivazione nell'allegato 9 del 7/5 al sequente.
> Si hanno due casi:
> *I caso*: il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **derivabile**, dunque è **valido** e quindi STOP.
> *II caso*: il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **NON derivabile** e quindi è **NON valido**.
> La riga su cui non è valido si trova come nell'allegato 9 succitato. Si vada poi al passo 2.
> **Passo 2**: per decidere se il **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$ è **soddisfacibile** o meno
> si applichi il processo di decisione di derivabilità nell'allegato 9 al sequente $\vdash \neg(\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee})$
> Ora si hanno due sottocasi:
> *I sottocaso*: $\vdash \neg(\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee})$ risulta **NON derivabile** e quindi **NON valido**
> e quindi $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **soddisfacibile** (oltrechè **NON valido**)
> e la riga su cui $\vdash \neg(\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee})$ NON è soddisfacibile
> è una riga in cui il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **soddisfacibile** e dunque STOP.
> *II sottocaso*: $\vdash \neg(\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee})$ risulta **valido**
> quindi $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **INsoddisfacibile** e dunque STOP.

9.6.12 Esempio di sequente NON VALIDO

Il sequente $P{\rightarrow}Q{\vdash}Q{\rightarrow}P$ è valido?

Applichiamo la procedura di decisione di derivabilità di un sequente in sezione 9.6.6 e otteniamo il seguente albero parziale:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q{\vdash}P, P \qquad Q, Q{\vdash}P}{Q, P{\rightarrow}Q{\vdash}P}\ \rightarrow\!-\mathrm{S}}{P{\rightarrow}Q, Q{\vdash}P}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}}{P{\rightarrow}Q{\vdash}Q{\rightarrow}P}\ \rightarrow\!-\mathrm{D}$$

in cui la foglia a sinistra NON è un assioma e dunque $P{\rightarrow}Q{\vdash}Q{\rightarrow}P$ è NON valido. Una riga su cui il sequente NON è soddisfacibile è data dall'eseguire quanto descritto in sezione 9.6.7 sulla foglia a sinistra e quindi una riga che falsifica il sequente è data da $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{P} = \mathbf{0}$.

Per vedere se il sequente è soddisfacibile applichiamo la procedura di derivazione di un sequente in sezione 9.6.6 al sequente

$$\vdash \neg(\,(\ \mathbf{P}{\rightarrow}\mathbf{Q}\ ){\rightarrow}(\ \mathbf{Q}{\rightarrow}\mathbf{P}\ )\,)$$

e otteniamo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}}{\vdash \mathbf{P}{\rightarrow}\mathbf{Q}}\ \rightarrow -\mathrm{D} \qquad \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}{\vdash}}{(\ \mathbf{P}{\rightarrow}\mathbf{Q}\ ){\rightarrow}(\ \mathbf{Q}{\rightarrow}\mathbf{P}\ ) \vdash}\ \rightarrow -\mathrm{S}}{\vdash \neg(\,(\ \mathbf{P}{\rightarrow}\mathbf{Q}\ ){\rightarrow}(\ \mathbf{Q}{\rightarrow}\mathbf{P}\ )\,)}\ \neg{-}\mathrm{D}$$

che dice che NON è valido sulla riga $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ e dunque il sequente di partenza

$$P{\rightarrow}Q{\vdash}Q{\rightarrow}P$$

è **soddisfacibile** sulla stessa riga.

9.6.13 Metodo alternativo per decidere soddisfacibilità di un sequente NON valido

Un **modo alternativo** per vedere se un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ NON valido è soddisfacibile su una riga è provare a trovare *l'esistenza di una riga che rende SODDISFACIBILI TUTTE LE FOGLIE dell'albero* ottenuto applicando tutte le regole possibili su ogni connettivo presente (escluso quindi le regole di scambio a sx e a dx).

Nel caso del sequente $P{\rightarrow}Q{\vdash}Q{\rightarrow}P$ l'albero in cui sono state applicate tutte le regole di connettivi eccettuato scambi è il seguente

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{Q{\vdash}P, P \quad Q, Q{\vdash}P}{Q, P{\rightarrow}Q{\vdash}P}\ {\rightarrow}\text{-S}}{P{\rightarrow}Q, Q{\vdash}P}\ \text{sc}_{\text{sx}}}{P{\rightarrow}Q{\vdash}Q{\rightarrow}P}\ {\rightarrow}\text{-D}$$

ove vi sono presenti due foglie NON assiomi. Si vede che su una riga in cui $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ (con P designato a piacere) le due foglie diventano soddisfacibili e quindi per il teorema di conservazione della soddisfacibilità per riga 9.8 il sequente radice $P{\rightarrow}Q{\vdash}Q{\rightarrow}P$ diventa **soddisfacibile** su ogni riga con $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

9.6.14 Test di comprensione

1. Se una proposizione `pr` è NON valida su una certa riga della sua tabella cosa possiamo dire della sua negazione ¬`pr`?

   Possiamo solo dire che ¬`pr` è soddisfacibile sulla riga in cui `pr` è NON valida.

2. Se una proposizione è VALIDA cosa possiamo dire della sua negazione ¬`pr`?

   La proposizione ¬`pr` risulta INsoddisfacibile.

3. Come possiamo decidere che $\Gamma \vdash \Delta$ è valido?

   Con la procedura di decisione applicata al sequente in sezione 9.6.6.

4. Come possiamo decidere che $\Gamma \vdash \Delta$ è soddisfacibile o meno?

   Con la procedura ottimale in sezione 9.6.11 descritta sopra.

Esercizi

Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI e NON validi (e in che riga della loro tabella) o INSODDISFACIBILI, motivando la risposta:

1. $\dfrac{\text{O esco la sera e quindi mi diverto, oppure mi riposo se non esco la sera.}}{\text{O mi diverto o mi riposo.}}$

   si consiglia di usare:
   E=esco la sera
   D=mi diverto
   R= mi riposo

   Soluzione: l'asserzione si può formalizzare in tal modo

$$(\mathbf{E}\&\mathbf{D}) \vee (\neg\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$$

Applicando la procedura di decisione in sezione 9.6.6 si ottiene

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ E, D \vdash D, R\end{array}}{E\&D \vdash D, R}\,\&-\mathrm{S} \qquad \dfrac{\dfrac{E \vdash D, R}{\vdash \neg E, D, R}\,\neg-\mathrm{D} \qquad \begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ R \vdash D, R\end{array}}{\neg E \to R \vdash D, R}\,\to-\mathrm{S}}{(E\&D) \vee (\neg E \to R) \vdash D, R}\,\vee-\mathrm{S}}{(E\&D) \vee (\neg E \to R) \vdash D \vee R}\,\vee-\mathrm{D}$$

Dalla foglia che non si chiude $\mathbf{E} \vdash \mathbf{D}, \mathbf{R}$ deduciamo che il sequente di partenza è NON valido sulla riga che assegna $\mathbf{E} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{D} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Si poi vede facilmente che per $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ ove i valori di $\mathbf{E}, \mathbf{R}$ sono assegnati a piacere, si ha $\mathbf{D} \vee \mathbf{R} = \mathbf{1}$ ovvero la conclusione del sequente risulta soddisfacibile.

Alternativamente, si può applicare la procedura in sezione 9.6.6 al sequente

$$\vdash \neg(\,(\mathbf{E}\&\mathbf{D}) \vee (\neg\mathbf{E} \to \mathbf{R}) \to \mathbf{D} \vee \mathbf{R}\,)$$

per trovare che NON è valido e la riga su cui non è soddisfacibile è la riga in cui il sequente $(\mathbf{E}\&\mathbf{D}) \vee (\neg\mathbf{E} \to \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$ è soddisfacibile.

2. (1 appello bis)

$$\frac{\text{Solo se cadono le foglie è autunno.}}{\text{Se e solo se non cadono le foglie, non è autunno ma inverno.}}$$

si consiglia di usare:
C = "cadono le foglie"
I = "è inverno"
A= "è autunno"

3. (I appello)

$$\frac{\text{Se ho tempo rileggo il compito.}}{\text{Se e soltanto se ho tempo rileggo il compito.}}$$

si consiglia di usare:
R = "Rileggo il compito"
H = "Ho tempo"

4. (II appello)

$$\frac{\text{Sono all'estero se non sono a Padova.}}{\text{Non si dà il caso che sia a Padova e non sia all'estero.}}$$

si consiglia di usare:
E = "Sono all'estero"
P = "Sono a Padova"

5. (III appello)

$$\frac{\text{Non si dà il caso che, se c'è vita sulla Luna, ci sia vita su Marte o su Saturno, o su Giove.}}{\text{Se c'è vita sulla Luna e non su Giove allora c'è pure su Marte e Saturno.}}$$

si consiglia di usare:
L = "C'è vita sulla Luna"

M ="C'è vita su Marte"
S="C'è vita su Saturno"
G="C'è vita su Giove"

6. (IV appello)

$$\frac{\text{Non c'è vita su Giove ma c'è su Marte e Saturno.}}{\text{Non si dà il caso che, se c'è vita sulla Luna e non su Giove, allora ci sia pure su Marte.}}$$

si consiglia di usare le variabili dell'asserzione precedente.

Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, rispetto alla semantica classica:

1. $(B \to A) \to (A \to C) \vdash (B \to C) \to A$

2. $\neg(A \to \neg B \vee \neg A) \leftrightarrow \neg(B \& A) \vdash \neg B \leftrightarrow B$

9.6.15 Completezza calcolo dei sequenti

La **correttezza** procedura decisione per $\mathbf{LC}_p$ implica il seguente teorema di **completezza del calcolo $\mathbf{LC}_p$** rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità:

Theorem 9.17 (validità e completezza classica) *Il concetto di DERIVABILITÀ in* $\mathbf{LC}_p$ *coincide con quello di VALIDITÀ CLASSICA delle tabelle di verità, ovvero il sequente* $\mathtt{pr_1}, \ldots, \mathtt{pr_n} \vdash \mathtt{pr_k}, \ldots, \mathtt{pr_m}$ *è derivabile in* LC_p *sse è valido ossia* $\models (((\mathtt{pr_1} \& \mathtt{pr_2} \& \ldots) \& \mathtt{pr_n} \to (((\mathtt{pr_k} \vee \mathtt{pr_{k+1}}) \ldots) \vee \mathtt{pr_m}$.

Dimostrazione: Per il teorema di validità dei sequenti 9.10 se il sequente è derivabile allora è valido. Per mostrare il viceversa procediamo come segue: se $(((\mathtt{pr_1} \& \mathtt{pr_2}) \& \ldots \mathtt{pr_n} \to (((\mathtt{pr_k} \vee \mathtt{pr_{k+1}}) \ldots \vee \mathtt{pr_m}$ è tautologia, ovvero il sequente di partenza è valido, allora applichiamo la procedura di decisione a

$$\mathtt{pr_1}, \ldots, \mathtt{pr_n} \vdash \mathtt{pr_k}, \ldots, \mathtt{pr_m}$$

e questa deve dare un albero di derivazione per cui il sequente risulta derivabile; infatti non può dire che il sequente è NON derivabile e quindi NON valido perchè la riga che assegna **0** al sequente non esiste per l'ipotesi del suo essere tautologia.

Ora diamo la definizione di teorema all'interno del calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$:

Def. Una proposizione $\mathtt{pr}$ si dice *teorema* della logica classica proposizionale $\mathbf{LC}_p$ se $\vdash \mathbf{A}$ è derivabile nel calcolo $\mathbf{LC}_p$.

Quindi, dal teorema 9.17 deduciamo che:

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{teoremi in } \mathbf{LC}_p \\ = \\ \textbf{tautologie classiche}\end{array}}$$

Infine osserviamo che il calcolo $\mathbf{LC}_p$ NON può derivare il falso ovvero è, come si dice usualmente, *consistente*:

Theorem 9.18 (consistenza calcolo proposizionale classico) *Il calcolo* $\mathbf{LC}_p$ *NON può derivare il falso ovvero* $\vdash \perp$ *NON è derivabile in* $\mathbf{LC}_p$.

Dim.: se $\vdash\ \perp$ fosse derivabile in $\mathbf{LC}_p$ allora sarebbe una **tautologia** per il teorema di validità dei sequenti derivabili in sezione 9.10, ovvero varrebbe

$$\models \perp$$

che invece non vale perchè la tabella di $\perp$ è la funzione costante $\mathbf{0}$.

9.6.16 Decidibilità del calcolo $\mathbf{LC}_p$

Def. Un calcolo si dice **DECIDIBILE** se *esiste un* **programma***(=algoritmo) che permette di* **decidere** *se una proposizione* `pr` *è* **teorema del calcolo** *(ovvero* $\vdash$ `pr` *è derivabile nel calcolo)*

Il calcolo dei sequenti per la logica classica proposizionale $\mathbf{LC}_p$ è DECIDIBILE perchè esiste procedura di decisione per le sue proposizioni in sezione 9.6.9 che dipende dal fatto che

1. il calcolo $\mathbf{LC}_p$ ha tutte REGOLE SICURE;
2. le regole di $\mathbf{LC}_p$ (escluso gli scambi) **diminuiscono in COMPLESSITÀ** $\Uparrow$ **dal BASSO verso l'ALTO**.

In particolare la diminuzione di complessità dal basso verso l'alto fa sì che la procedura di decisione per la derivabilità di un sequente termini. Invece la presenza di regole sicure garantisce la correttezza della procedura.

9.6.17 Esempio di regole non sicure

Se al posto di

$$\frac{\Gamma, A, B\vdash\Delta}{\Gamma, A\&B\vdash\Delta}\ \&\text{S}$$

adottassimo le regole del libro di Sambin

$$\frac{\Gamma, A\vdash\boldsymbol{\Delta}}{\Gamma, A\&B\vdash\boldsymbol{\Delta}}\ \&{-}\text{re}_{\mathbf{1}} \qquad \frac{\Gamma, B\vdash\boldsymbol{\Delta}}{\Gamma, A\&B\vdash\boldsymbol{\Delta}}\ \&{-}\text{re}_{\mathbf{2}}$$

otterremmo che seppur $\mathbf{A}\&(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}$ è tautologia avremmo che l'applicazione di $\&{-}\text{re}_{\mathbf{1}}$ ci porta fuori strada

$$\frac{A\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}}{A\&(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}}\ \&{-}\text{re}_{\mathbf{1}}$$

Mentre ci fa concludere un'applicazione di $\&{-}\text{re}_{\mathbf{2}}$

$$\frac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{B}\vee\mathbf{C}\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\end{array}}{A\&(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}}\ \&{-}\text{re}_{\mathbf{2}}$$

Invece con la regola sicura &S non c'è strategia sbagliata
ogni applicazione di regola è ok ...

$$\frac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{A}, \mathbf{B}\vee\mathbf{C}\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\end{array}}{A\&(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}}\ \&\text{S}$$

al più uno può allungare la derivazione ad esempio come segue

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{\mathbf{A},\mathbf{B}\vdash\mathbf{B},\mathbf{C}} \qquad \dfrac{\text{ax-id}}{\mathbf{A},\mathbf{C}\vdash\mathbf{B},\mathbf{C}}}{A,\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\vdash\mathbf{B},\mathbf{C}}\ \vee\text{S}}{A,\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}}\ \vee\text{D}}{A\&(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}}\ \&\text{S}
$$

9.6.18 Test di comprensione

1. Se una proposizione `pr` è NON valida su una certa riga della sua tabella cosa possiamo dire della sua negazione ¬`pr`?

   Possiamo solo dire che ¬`pr` è soddisfacibile sulla riga in cui `pr` è NON valida.

2. Se una proposizione è VALIDA cosa possiamo dire della sua negazione ¬`pr`?

   La proposizione ¬`pr` risulta INsoddisfacibile.

3. Come possiamo decidere che $\Gamma \vdash \Delta$ è valido?

   Con la procedura di decisione applicata al sequente.

4. Come possiamo decidere che $\Gamma \vdash \Delta$ è soddisfacibile o meno?

   Con la procedura ottimale in sezione 9.6.11 descritta sopra.