I appello + II compitino 18 giugno 2010

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- Non si contano le brutte copie.

- Specificate le regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)

- Mostrare se i sequenti di seguito sono validi in LC e nel caso non lo siano mostrare un contromodello: **solo appello**

  3 punti

  $\neg(\ A \vee B\ ) \vdash A \rightarrow \neg B$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

  5 punti

  $\neg \forall x\ (\ C(x) \vee \perp\ ) \vdash \exists x\ \neg C(x)$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

  5 punti

  $\neg \exists x\ \neg B(x) \vdash \forall x\ B(x)$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

- Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI, ovvero hanno un modello che li rende validi, o INSODDISFACIBILI, ovvero nessun modello li rende validi, motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato di 2 punti)

  - (5 punti - **solo appello**)

    Non tutti i programmi sono utili e corretti.
    ———————————————————
    Esiste un programma non utile o non corretto.

    si consiglia di usare:
    P(x) = x è programma
    U(x) = x è utile
    C(x)= x è corretto

    corretto in LC sì no

- (3 punti - **solo appello**)

  Le lezioni tacciono se c'è un assemblea studentesca o è giorno festivo.

  Se non c'è un assemblea studentesca e non è giorno festivo le lezioni non tacciono.

  si consiglia di usare:
  L =le lezioni tacciono
  A = c'è un'assemblea studentesca
  F=è giorno festivo

  corretto in LC sì no

- (5 punti- **solo appello**)

  Se uno programma bene allora è affidabile.

  Esiste qualcuno che programma bene ed è affidabile.

  si consiglia di usare:
  P(x) = x programma bene
  A(x) = x è affidabile

  corretto in LC sì no

- (7 punti **appello + II compitino**)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  Lin1 è una versione del nuovo sistema operativo.
  Esiste un'unica versione del nuovo sistema operativo.

  Se Lin2 è diverso da Lin1 allora Lin2 non è una versione del nuovo sistema operativo.

  si consiglia di usare:
  V(x)= x è una versione del nuovo sistema operativo
  l_1="Lin1 "
  l_2="Lin2"

  corretto in $LC_=$ sì no

- (9 punti **appello + II compitino**)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  Lin1 è una versione del nuovo sistema operativo.
  Ogni versione del nuovo sistema operativo è uguale a Lin1.

  Esiste un'unica versione del nuovo sistema operativo.

  si consiglia di usare:
  V(x)= x è una versione del nuovo sistema operativo
  l_1="Lin1 "

corretto in $LC_=$ sì no

- (5 punti **appello + II compitino**) Stabilire se il sequente è valido in $LC_=$

$$t \neq h \vdash e = h \rightarrow e \neq t$$

corretto in $LC_=$ sì no

- Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE rispetto alla semantica classica e nel caso di NON validità dire se sono SODDISFACIBILI o INSODDISFACIBILI: ciascuna vale 5 punti (+ 1 punto se non valida)

  - $\models \exists x\ B(x) \rightarrow \forall x\ \neg B(x)$ (**solo appello**)
  - $\models \exists y\ \forall x\ x \neq y$ (**appello + II compitino**)
  - $\models \forall y\ \exists z\ \forall x\ (\ x = y \vee z \neq x\ )$ (**appello + II compitino**)

- (20 punti - **appello + II compitino**) Sia T^{cla}_{gi} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se Claudia non va in gita allora Giovanni ci va.
  - Beppe non va in gita se e solo se ci va Giovanni.
  - Beppe va in gita se Claudia non va in gita.
  - Non tutti vanno in gita.

  Si consiglia di usare:
  G(x)= x va in gita, c=Claudia, g=Giovanni, b=Beppe.

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione in T^{cla}_{gi}:

  - Qualcuno non va in gita.
  - Se Giovanni non va in gita allora Beppe ci va.
  - Se Claudia non va in gita allora Beppe non ci va.
  - Claudia va in gita.
  - Non si dà il caso che nessuno vada in gita.

- (25 punti) Sia T^{cla}_{am} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se Claudia ammira qualcuno questo qualcuno ammira Claudia.
  - Pippo ammira tutti quelli che Gianni non ammira.
  - Non c'è nessuno che Pippo ammiri.
  - Claudia ammira Fabio.

suggerimento: si consiglia di usare:
A(x,y)= x ammira y
g=Gianni, p= Pippo, f= Fabio, c= Claudia

Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria T^{cla}_{am}:

- Fabio ammira Claudia.
- Pippo non ammira Claudia.
- Gianni ammira tutti.
- Claudia ammirebbe Pippo se Pippo ammirasse Claudia.
- Gianni ammira Claudia.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile) (**appello + II compitino**)

1. (5 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ (\ x = 3 \rightarrow s(x) = s(y)\ )$
2. (5 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ y = x + y$
3. (5 punti) $\vdash \forall y\ (\ s(y) = 4 \rightarrow y = 3\ )$
4. (7 punti) $\vdash \exists z\ z \neq 3$
5. (10 punti) $\vdash 1 + 2 = 3$
6. (13 punti) $\vdash \forall y\ s(2 + y) = 3 + y$
7. (16 punti) $\vdash \forall y\ (\ y \neq 0 \rightarrow \exists x\ s(x) = y\ )$

- Stabilire quali delle seguenti regole sono valide e in caso positivo anche sicure: (8 punti ciascuna)

(**appello + compitino**)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, t = s, t = e \vdash s = e, \Delta}\ 1$$

(**solo appello**)

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash B}\ 2$$

Logica classica con uguaglianza- calcolo abbreviato $\mathbf{LC}^{abbr}_{=}$

$$\begin{array}{cc}
\text{ax-id} & \text{ax-}\bot \\
\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla
\end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg\text{−D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg\text{−S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to \text{−D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \to \text{−S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall\text{−D}\ (x \notin VL(\Gamma, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall\text{−S}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists\text{−S}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists\text{−D}$$

$$\begin{array}{c} = \text{−ax} \\ \Sigma \vdash t = t, \Delta \end{array} \qquad \frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = \text{−S}_f$$

Logica classica predicativa $\mathbf{LC}_=$ con uguaglianza

questa versione contiene le regole nel libro di Sambin

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ A \vdash A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{ax-}\bot \\ \bot \vdash \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&\text{−F} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{−re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{−re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee\text{−F} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{−re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{−re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to \text{−F} \qquad \frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta} \to \text{−re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta}\ \forall\text{−D}\ (x \notin VL(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{−re}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta}\ \exists\text{−S}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{−re}$$

$$\begin{array}{c} = \text{−ax} \\ \vdash t = t \end{array} \qquad \frac{\Sigma, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = \text{−S}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$\begin{aligned}
&Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0 \\
&Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ ) \\
&Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x \\
&Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y) \\
&Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0 \\
&Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x \\
&Ax7. \vdash A(0) \& \forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)
\end{aligned}$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\ s(0)\ )$$

Regole derivate per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \;\equiv\; \neg t = s$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{tra}^* & \text{cf}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u) \end{array}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash u = t}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v \quad \Gamma' \vdash v = u}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u}\ \text{tr-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$