I appello e II compitino 27 giugno 2014

nome: cognome:

Appello II compitino

- A chi fa l'appello verrà valutato ogni esercizio per il superamento dell'esame.
- Per chi fa il II compitino:
  - per superare il II compitino è necessario fare almeno *un esercizio corretto dell'aritmetica di Peano*,
  - il punteggio degli esercizi con la dicitura II compitino VERRÀ AUMENTATO di un terzo per difetto,
  - non sarà valutato nessun esercizio con la dicitura (**NO II comp.**)
- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- (**NO II comp.**) Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):
  - 3 punti
    $\neg(\, A\&B\,) \vdash \neg(\, A \rightarrow B\,)\ \&\ \neg(\, B \rightarrow A\,)$
  - 5 punti
    $\forall y\,(\, A(y) \rightarrow \neg C(y)\,) \vdash \forall y\, C(y)\ \rightarrow\ \forall y\, \neg A(y)$
  - 5 punti
    $\neg\,\forall w\ (\ a = w\ \vee (\, a = w \rightarrow \perp\,)\,) \vdash \exists x\ (\ x = b\ \rightarrow \perp)$
  - 6 punti
    $\vdash \neg\,\forall w\ (\, a = w\ \vee b = w\,)\ \rightarrow\ \exists x\ (\ x = b\ \rightarrow \perp)$
  - 5 punti
    $\exists y\, \neg(\, C(y) \rightarrow \neg C(y)\,) \vdash \forall y\, D(y)$
  - 5 punti
    $\forall y\ \exists w\ (\ C(y)\, \&\, \neg B(w)\ ) \vdash \exists y\ (\, B(y) \rightarrow \perp\,)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

  - (**NO II comp.**) (3 punti)

    Non si dà il caso che solo se c'è foschia, è autunno o fa caldo.

    Non è autunno ma estate se c'è foschia e fa caldo.

    si consiglia di usare:
    F =“c'è foschia”
    I =“è estate”
    A=“è autunno”
    C=“fa caldo”

  - (6 punti)

    Meritano ammirazione soltanto gli onesti.
    Qualcuno non è onesto.

    Qualcuno non merita ammirazione perchè quelli non onesti non meritano ammirazione.

    si consiglia di usare:
    A(x)= x merita ammirazione
    O(x)= x è onesto

  - (8 punti)

    Gianni è volontario di una sola associazione.
    La Croce Rossa è diversa dalla Croce Verde.
    La Croce Verde è un'associazione.
    Gianni è volontario della Croce Verde.

    O la Croce Rossa non è un'associazione oppure Gianni non è volontario della Croce Rossa.

    si consiglia di usare:
    V(x,y)=“x è volontario di y”
    g=“Gianni”
    r=“Croce Rossa”
    v=“Croce Verde”
    A(x)=“x è un'associazione”

  - (7 punti)

    Non si dà il caso che ci sia un unico uccellino nella gabbia.

    O nessun uccellino è nella gabbia oppure,
    se nella gabbia c'è l'uccellino Filò allora nella gabbia c'è un uccellino diverso da Filò.

    si consiglia di usare:
    U(x)=“x è un uccellino nella gabbia”
    f =“Filò ”

  - (5 punti)

    Non si dà il caso che a qualcuno non piaccia il cielo stellato.

    A tutti piace qualcosa.

    si consiglia di usare:
    P(x,y)=“x piace a y”

c=“cielo stellato”

- (5 punti)

  A chi piace astronomia piace il cielo stellato.
  A chiunque piaccia il cielo stellato ama la notte.

  Se esiste qualcuno che non ama la notte allora esiste qualcuno a cui non piace astronomia.

  si consiglia di usare:
  P(x,y)=“x piace a y”
  A(x)=“x ama la notte”
  c=“cielo stellato”
  a=“astronomia”

- (7 punti)

  Non si dà il caso che nel lago di Garda ci siano soltanto barche a motore.

  Esistono barche nel lago di Garda che non sono a motore e non sono neanche barche a vela.

  si consiglia di usare:
  L(x)=“x è nel lago di Garda”
  B(x)= “x è una barca a motore”
  V(x)=“x è una barca a vela”

- (8 punti)

  “Non esiste nulla che è perfetto oppure crea soltanto quelli che non si creano da soli”

  si consiglia di usare:
  C(x,y)= x crea y
  P(x)= x è perfetto

• (22 punti) Sia T_{piz} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se a Carla non piace la pizza quattro formaggi, pure a Gino non piace.
  - Se a Gino piace la pizza margherita, allora a Carla piace la pizza margherita ma non la quattro formaggi.
  - A Gino non piace la pizza margherita solo se non gli piace pure la quattro formaggi.
  - Se a Carla piace la pizza margherita, allora piace pure a Gino.
  - Non si dà il caso che a Gino non piaccia nè la pizza margherita nè la pizza quattro formaggi.

Si consiglia di usare:
P(x,y)=“x piace a y”
m=“pizza margherita”
c=“Carla”
g=“Gino”
q=“pizza quattro formaggi”

Dedurre poi in T_{piz} le seguenti affermazioni:

- A Gino non piace la pizza quattro formaggi.

- A Gino piace la pizza margherita.
- A Carla piace la pizza margherita.
- A Carla non piace la pizza quattro formaggi.
- Non a tutti piace tutto.

- (23 punti) (**II comp.**) Sia T_{mer} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se al mercato ci fosse un banchetto di antiquariato, al mercato ci sarebbe un banchetto di frutta.
  - Al mercato c'è un banchetto di scarpe solo se al mercato non ci sono banchetti di vestiti.
  - Non si dà il caso che, al mercato non ci siano banchetti di vestiti o al mercato ci siano banchetti di frutta.
  - Al mercato c'è un banchetto di scarpe o, se al mercato non ci sono banchetti di antiquariato ci sono banchetti di utensili per la casa.

  Si consiglia di usare:
  V(x)= "x è un banchetto di vestiti"
  F(x)= "x è un banchetto di frutta "
  U(x)= "x è un banchetto di utensili per la casa"
  S(x)= "x è un banchetto di scarpe "
  A(x)= "x è un banchetto di antiquariato"
  M(x)="x è al mercato"

  Dedurre poi in T_{mer} le seguenti affermazioni:

  - Al mercato non c'è nessun banchetto di frutta.
  - Al mercato c'è un banchetto di vestiti.
  - Al mercato non c'è nessun banchetto di antiquariato.
  - Al mercato non c'è alcun banchetto di scarpe.
  - Al mercato c'è un banchetto di utensili per la casa.
  - Un banchetto di frutta al mercato non è un banchetto di vestiti.

- **II comp.** Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (5 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ x \cdot y = x$
  2. (5 punti) $3 = 0 \vdash \exists y\ \forall z\ z = y$
  3. (5 punti) $\vdash \forall y\ \exists w\ (\ y \neq 3\ \rightarrow\ s(w) \neq s(y)\ )$
  4. (6 punti) $\vdash \exists y\ \exists w\ s(w) + y = w + s(y)$
  5. (6 punti) $\vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(y) \cdot x \neq 0 \rightarrow x \neq 0\ )$
  6. (7 punti) $\vdash \forall w\ \forall z\ w \cdot z = w$
  7. (9 punti) $\vdash \forall w\ \exists z\ w \cdot z = w$
  8. (10 punti) $\vdash \forall y\ \exists w\ s(w) + y = w + s(y)$

9. (11 punti) $\vdash 3 + 1 = 1$
10. (11 punti) $\vdash \forall x\ \forall y\ (\ x \neq 0\ \rightarrow\ x \cdot y \neq 0\ )$
11. (11 punti) $\vdash \forall x\ s(x) + x = x + s(x)$
12. (14 punti) $\vdash \forall x\ 2 + x = x + 2$

- Stabilire se le seguenti regole, formalizzate dove occorre, e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

  -

  $$\frac{x \text{ ha mangiato } \vdash\ x \text{ è a posto}}{\text{Tutti han mangiato } \vdash \text{Carlo è a posto}}\ 1$$

  ove
  $M(x)$="x ha mangiato"
  $A(x)$="x è a posto"
  c="Carlo"

  - (7 punti)

  $$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad\qquad B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ 2$$

  - (10 punti)

  $$\frac{x \text{ ha mangiato } \vdash\ x \text{ è a posto}}{\text{Carlo ha mangiato } \vdash \text{Carlo è a posto}}\ 1$$

  ove
  $M(x)$="x ha mangiato"
  $A(x)$="x è a posto"
  c="Carlo"

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot & \text{ax-}\top \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \to -\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to -\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\text{S} \qquad \begin{array}{c} = -\text{ax} \\ \Gamma \vdash t = t, \Delta \end{array}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $LC_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx}, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$\begin{array}{l} Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0 \\ Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ ) \\ Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x \\ Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y) \\ Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0 \\ Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x \\ Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x) \end{array}$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \;\equiv\; \neg t = s$

$$\frac{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \qquad \frac{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C}$$

$$\frac{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \qquad \frac{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{''} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{''} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{''}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{''}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–D}_v$$

$$\frac{\text{rf}^*}{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'} \qquad \frac{\Sigma, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = \text{–S}_v$$

$$\frac{\text{sm}^*}{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta}$$

$$\frac{\text{tra}^*}{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta} \qquad \frac{\text{cf}^*}{\Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta}$$

$$\frac{\text{cp}^*}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_{=}$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$