III appello 15 giugno 2017

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti di seguito sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero mostrare se sono validi o meno e soddisfacibili o insoddisfacibili in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di opinioni o paradossi i punti vanno raddoppiati):

– 3 punti
$\vdash \neg(\ (B \to M \vee F\ ) \to (\ C\&B \to M\ )\ )$

– 5 punti
$\neg\forall y\ (\ \neg y \neq a\ \vee\ a \neq y) \vdash x = w$

– 5 punti
$C(w) \vdash \neg\exists y\,(\,\perp\to C(y)\ )$

– 6 punti
$\exists x\ \exists y\ x \neq y \vdash \forall x\,\exists w\, x \neq w$

– 5 punti
$\exists x\ (\ C(x)\ \to\ \neg M(z)\,) \vdash \neg\forall x\ \neg\neg C(x)\ \vee\ \exists y\ \neg M(y)$

– 7 punti
$b \neq a \vdash \exists x\,\exists w\,(\,C(x,w)\ \to\ x \neq w\,)$

• Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla logica classica classica con uguaglianza motivando la risposta. Inoltre nel caso di opinioni o paradossi il punteggio è raddoppiato e la sola traduzione in formula proposizionale conta 1 punto mentre quella in formula predicativa 2 punti.

- (4 punti)

$$\frac{\text{Non si dà il caso che, se è notte si vedano le stelle.}}{\text{Se si vede la Luna allora non si dà il caso non sia è notte o non si vedano le stelle.}}$$

si consiglia di usare:
L = "si vede la Luna"   N = "è notte"
S= "si vedono le stelle"

- (6 punti)

  Quelli che non sopportano il sole sopportano la pioggia.
  Sopportano l'estate quelli che sopportano il sole.

  Chi non sopporta l'estate sopporta la pioggia.

  si consiglia di usare:
  S(x,y) = "x sopporta y"
  p="la pioggia"
  e="l'estate"
  s="il sole"

- (8 punti)

  Se piove, soltanto quelli che sopportano la pioggia sono contenti.

  Chi non sopporta la pioggia non è contento, se piove.

  si consiglia di usare:
  S(x,y) = "x ama y"
  C(x)= "x é contento"
  l="la pioggia"
  P="piove"

- (7 punti)

  Tutti i gatti mangiano i topi.
  I topi mangiano alcuni insetti.

  I gatti non mangiano insetti.

  si consiglia di usare:
  G(x)= x è un gatto
  T(x)= x è un topo
  I(x)= x è un insetto
  M(x,y)= x mangia y

- (7 punti)

  Esistono animali in via d'estinzione.
  Il Panda minore e il rinoceronte sono animali in via d'estinzione.

  Non cè un'unico animale in via d'estinzione nello zoo se il Panda minore è diverso dal rinoceronte.

  si consiglia di usare:
  E(x,y)= "x è un'animale in via di estinzione nello zoo"
  p="Panda minore", r="rinoceronte"

- (8 punti)

  Tutti hanno un'unica padre.

  Non si dà il caso che ci sia qualcuno senza una madre.

  si consiglia di usare:
  M(x,y)= x è madre di y

- (14 punti)
  "Esiste qualcuno che adora soltanto ciò che tutti adorano."

  si consiglia di usare:
  A(x,y)= x adora y

- (16 punti) Sia T_{prof} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Ivo è un ballerino solo se John lo è.
  - Non si dà il caso che Ivo non sia un regista e non sia un ballerino.
  - Ivo è un ballerino se e solo se Lulù è una ballerina.
  - John è un ballerino solo se Lulù non è una ballerina.
  - Non si dà il caso che Lulù non sia una ballerina oppure John non è un ballerino.

  Si consiglia di usare:
  B(x)="x è una ballerino"
  R(x)="x è uno regista"

  l=Lulù, i=Ivo, j=John.

  Dedurre poi in T_{prof} le seguenti affermazioni:

  - John non è un ballerino.
  - Lulù non è una ballerina.
  - Ivo non è un ballerino.
  - John è un regista.

- (22 punti) Sia T_{camp} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Qualche margherita del campo è in fiore.
  - Non tutti gli gigli del campo sono in fiore.
  - Nessuna margherita del campo è in fiore se qualche papavero del campo è in fiore.
  - Se tutte le margherite del campo fossero fiorite allora lo sarebbero anche tutti i gigli del campo.

  Si consiglia di usare:
  P(x)= "x è un papavero del campo"
  M(x)="x è una margherita del campo"
  G(x)="x è un giglio del campo"
  F(x)="x è in fiore"

  Dedurre poi in T_{camp} le seguenti affermazioni:

  - Nessun c'è papavero del campo che sia in fiore.
  - Qualcosa è in fiore.
  - Qualche margherita del campo non è in fiore.
  - I gigli del campo sono in fiore solo se lo sono tutti i papaveri del campo.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (5 punti) $\vdash\ \exists x\ \exists y\ y = 0 + 5 \cdot y$
  2. (5 punti) $\vdash\ \exists x\ \exists y\ \exists z\ \ x + z = z$
  3. (6 punti) $\vdash \exists y\, \exists w\ \exists x\ y \cdot x = z \cdot w$
  4. (7 punti) $\vdash \exists y\ (5 + 1) + 0 = 0 + y$
  5. (7 punti) $\vdash \forall y\ \forall w\ (\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0\ \vee\ \neg y \neq w\ )$
  6. (7 punti) $\vdash \forall w\ \forall z\ w = z + (w + z)$
  7. (8 punti) $\vdash \exists y\ \forall w\ (w \cdot y) + w = w \cdot s(y)$
  8. (11 punti) $\vdash \forall x\ (\ \neg x \neq 0\ \vee\ ((x + 0) \cdot s(x) \neq 0\ )$

- Stabilire se le seguenti regole, formalizzate dove occorre, e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

  - (7 punti)

$$\frac{\text{È notte, Il cielo è sereno} \ \vdash\ \text{Beatrice guarda la Luna}}{\text{È notte e non si dà il caso che il cielo non sia sereno} \ \vdash\ \text{Tutti guardano la Luna}}\ 1$$

    ove
    $G(x)$="x guarda la Luna"
    L="Il cielo è sereno"
    N="É notte"
    b="Beatrice"

  - (7 punti)

$$\frac{\Sigma \vdash B\&C}{\Gamma, \Sigma \vdash C \vee B}\ 2$$

  - (10 punti)

$$\frac{\text{Ennio suona} \ \vdash\ \text{Tutti applaudono}}{\text{C'è qualcuno che suona} \ \vdash\ \text{Qualcuno applaude}}\ 3$$

    è istanza di una regola valida, assieme alla sua inversa, rispetto alla semantica classica, ove
    $A(x)$="x applaude"
    $S(x)$="x suona"
    e="Ennio"

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot & \text{ax-}\top \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\mathrm{S} \qquad \begin{array}{c} =-\mathrm{ax} \\ \Gamma \vdash t = t, \Delta \end{array}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC$_=$ + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$\begin{aligned} &Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0 \\ &Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ ) \\ &Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x \\ &Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y) \\ &Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0 \\ &Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x \\ &Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x) \end{aligned}$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \ \equiv \ \neg t = s$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{"}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{"}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–D}_v$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{tra}^* & \text{cf}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\, P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$