SIMULAZIONE I appello e II compitino 10 giugno 2013

nome: cognome:

Appello II compitino

- A chi fa l'appello verrà valutato ogni esercizio per il superamento dell'esame.
- A chi fa il II compitino verranno valutati soltanto gli esercizi con la dicitura II compitino e i punti segnati VERRANNO AUMENTATI di un terzo per difetto.
- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $\vdash \neg(A\&B \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow A)) \vee B$
  - 5 punti
    $\neg C(w) \ \& \ \exists w \ C(w) \vdash \neg\forall y \ C(y)$
  - 5 punti
    $\vdash \forall y \neg(C(y) \rightarrow D(y))$
  - 5 punti
    $\exists y \ A(y) \vdash A(w) \vee \neg\forall x \ (A(x) \rightarrow B(x))$
  - 5 punti
    $\vdash \forall y \ \exists z \ y \neq z \rightarrow \neg\forall x \ \forall y \ x = y$
  - 5 punti
    $\vdash \neg(\forall x \ \forall y \ x = y \ \& \ \exists x \ \exists y \ x \neq y)$
  - 5 punti
    $\vdash a = b \vee \exists x \ \exists y \ x \neq y$
  - 6 punti
    $\vdash \forall y \ \exists z \ (y \neq z \rightarrow \forall x \forall y \ y = x)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

  - (3 punti)

    Non si dà il caso che se il treno passa le sbarre del passaggio a livello non siano chiuse.

    Non si dà il caso che soltanto se il treno non passa le sbarre del passaggio a livello non siano chiuse.

    si consiglia di usare:
    T="il treno passa"
    C(x) ="x è chiuso"
    s="sbarre del passaggio a livello"

  - (7 punti)

    Non si dà il caso che se qualche topo balla allora qualche gatto non dorma.

    Qualche topo balla perchè i gatti dormono.

    si consiglia di usare:
    T(x)="x è un topo"
    B(x)= "x balla"
    G(x) ="x è un gatto"
    D(x)= "x dorme"

  - (5 punti)

    Solo i libri pubblicati si possono acquistare.

    Se un libro non è pubblicato non si può acquistare.

    si consiglia di usare:
    C(x)="x si può acquistare"
    L(x)= "x è un libro"
    P(x) ="x è pubblicato"

  - (5 punti)

    I pesci di lago sono pesci d'acqua dolce.
    Nessun pesce d'acqua dolce sopravvive nel mare.

    Quelli che sopravvivono nel mare non sono pesci di lago.

    si consiglia di usare:
    L(x)="x è un pesce di lago"
    A(x)= "x è un pesce d'acqua dolce"
    S(x) ="x sopravvive nel mare"

  - (5 punti)

    Ogni pesce di mare vive in acqua salata e non dolce.

    Qualche pesce di mare non vive in acqua dolce.

    si consiglia di usare:
    P(x) ="x è un pesce di mare"
    D(x)= "x vive in acqua dolce"
    S(x)= "x vive in acqua salata"

- (8 punti)

  Noemi non ha un unico gatto.
  Fufi è un gatto di Noemi ed anche Ringo lo è.
  Se un gatto è di Noemi allora questo è Fufi oppure Ringo.

  Ringo è diverso da Fufi.

  si consiglia di usare:
  G(x,y)="x è un gatto di y"
  r="Ringo"
  f="Fufi"
  n="Noemi"

- **II comp.** (7 punti) Stabilire se in $LC_=$ e in PA è valido o meno, e soddisfacibile o meno (nel caso di non validità si aumenta il punteggio come descritto all'inizio):

  Il programma SQ dà un'`unico` output su ogni input.
  Il programma SQ su 2 dà output 1.

  Il programma SQ su 2 non dà output 3.

  si consiglia di usare:
  2= " 2"
  3= " 3"
  s= " il programma SQ"
  $O(x, y, z)$= " il programma y su z dà output il numero x"

- **II comp.** (20 punti) Sia T_{ca} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se Chiara sta in cortile Fufi non scappa.
  - Nino sta in cortile soltanto se ci sta anche Chiara ma non Dick.
  - Soltanto se Nino sta in cortile Ringo abbaia.
  - Ringo abbaia se e soltanto se Fufi scappa.
  - Soltanto se Dick è in cortile Fufi non scappa.

  Si consiglia di usare:
  A(x)="x abbaia"
  C(x)="x sta in cortile"
  S(x)="x scappa"
  d="Dick"
  n="Nino"
  r="Ringo"
  f="Fufi"
  c="Chiara"

  Dedurre poi in T_{ca} le seguenti affermazioni:

  - Nino sta in cortile se Fufi scappa.
  - Nino non sta in cortile.
  - Ringo non abbaia o Fufi scappa.
  - Fufi non scappa.

- Dick sta in cortile.
- Quelli che scappano non sono uguali a Fufi.

- **II comp.** (25 punti) Sia T_{vi} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se uno è seduto vicino ad un'altro, quest'altro è seduto vicino al primo.
  - Paolo è seduto vicino a Ciro e a Michele.
  - Non c'è alcuno seduto vicino a Gino.
  - Fabio non è seduto vicino ad alcuno.
  - Se uno è seduto vicino a Paolo e un'altro pure allora il primo è seduto vicino al secondo.

  Si consiglia di usare:
  V(x,y)= "x è seduto vicino ad y"
  g="Gino"
  p="Paolo"
  f="Fabio"
  c="Ciro"
  m="Michele"

  Dedurre poi in T_{vi} le seguenti affermazioni:

  - Non si dà il caso che ci sia qualcuno seduto vicino sia a Fabio che a Ciro.
  - Ciro è seduto vicino a Paolo.
  - Gino non è seduto vicino a Paolo.
  - Se Ciro non è Michele non si dà il caso che ci sia uno e soltanto lui seduto vicino a Paolo.
  - Ciro è seduto vicino a Michele e Michele è seduto vicino a Ciro.
  - C'è ne é al piú uno seduto vicino a Gino.

- **II comp.** Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (5 punti) $\vdash\ \exists x\ \exists y\ x + y \neq 0$
  2. (5 punti) $\vdash \forall y\ \exists w\ (\ y \neq w\ \rightarrow\ s(w) \neq s(y)\ )$
  3. (7 punti) $\vdash \exists y\ \exists w\ s(w) = y + w$
  4. (5 punti) $\vdash (\ s(z) = s(6)\ \rightarrow 6 = z\ )\ \vee\ 1 = 0$
  5. (6 punti) $\vdash \forall w\ \exists z\ w = w + s(z)$
  6. (7 punti) $\vdash \forall w\ \exists z\ (\ w \neq z\ \vee\ 4 \neq z\ )$
  7. (8 punti) $\vdash \forall x\ \forall y\ (\ y \cdot x \neq 0 \rightarrow x \neq 0\ )$
  8. (8 punti) $\vdash 2 \cdot 2 = 4$
  9. (11 punti) $\vdash \forall x\ 1 + x = x + 1$
  10. (12 punti) $\vdash \forall y\ \forall x\ (\ x \neq 0\ \rightarrow x \cdot y \neq 0\ )$
  11. (12 punti) $\vdash \forall x\ \forall y\ (\ x \neq 0 \rightarrow (x + y) + x \neq 0\ )$

- Stabilire se le seguenti regole sono valide e anche sicure rispetto alla semantica classica:

  (8 punti)
  $$\frac{\Gamma \vdash A(x) \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \forall x\ A(x)\ \&\ B}\ 1$$

  (5 punti)
  $$\frac{\Gamma \vdash A \qquad B \vdash \Delta}{\Gamma, \neg A \rightarrow \neg B \vdash \Delta}\ 2$$

- (10 punti) Stabilire se la formalizzazione di

  $$\frac{\text{L'aereo decolla } \vdash\ x \text{ è seduto e Carlo è pure addormentato}}{\text{L'aereo decolla } \vdash \text{Tutti sono seduti e qualcuno è pure addormento}}\ 3$$

  è istanza di una regola valida, assieme alla sua inversa, rispetto alla semantica classica, ove
  $S(x)$="x è seduto"
  D="l'aereo decolla "
  $A(x)$="x è addormentato"
  c="Carlo"

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\top\\ \Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'\end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\mathrm{S} \qquad \begin{array}{c}= -\mathrm{ax}\\ \Gamma \vdash t = t, \Delta\end{array}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC$_=$ + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$

$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$

$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$

$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$

$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$

$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$

$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \;\equiv\; \neg t = s$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C}$$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{−S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{−D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{"}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{"}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{−S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{−D}_v$$

$$\overset{\text{rf}^*}{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'}$$

$$\overset{\text{sm}^*}{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta}$$

$$\overset{\text{tra}^*}{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta} \qquad \overset{\text{cf}^*}{\Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta}$$

$$\overset{\text{cp}^*}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_{=}$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$