

SIMULAZIONE I appello 8 gennaio 2016

nome:

cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- Mostrare se i sequenti di seguito sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero mostrare se sono validi o meno e soddisfacibili o insoddisfacibili in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

3 punti

- $\neg(A \& B) \vdash \neg(A \rightarrow B) \& \neg(B \rightarrow A)$

5 punti

- $\exists w (B(x) \rightarrow \perp) \vdash$

6 punti

- $C \vee \neg C \vdash \neg \forall w (a = w \vee (a = w \rightarrow \perp))$

6 punti

- $\exists y \neg(C(y) \rightarrow \neg C(y)) \vdash \forall y C(y)$

6 punti

- $\forall y \exists w (C(y) \& \neg B(w)) \vdash \exists y (B(y) \rightarrow \perp)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla logica classica classica con uguaglianza motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

(5 punti)

Non si dà il caso che, solo se c'è foschia, è autunno o fa caldo.

Non è autunno ma estate, se c'è foschia e fa caldo.

si consiglia di usare:

F = "c'è foschia"

I = "è estate"

A = "è autunno"

C = "fa caldo"

- (7 punti)

Meritano ammirazione soltanto gli onesti.

Qualcuno non è onesto.

Qualcuno non merita ammirazione perchè quelli non onesti non meritano ammirazione.

si consiglia di usare:

$A(x)$ = x merita ammirazione

g = Gino

$O(x)$ = x è onesto

- (9 punti)

Gianni è volontario di un'unica associazione.

La Croce Rossa è diversa dalla Croce Verde.

La Croce Verde è un'associazione.

Gianni è volontario della Croce Verde.

O la Croce Rossa non è un'associazione oppure Gianni non è volontario della Croce Rossa.

si consiglia di usare:

$V(x,y)$ = " x è volontario di y "

g = "Gianni"

r = "Croce Rossa"

v = "Croce Verde"

$A(x)$ = " x è un'associazione"

- (8 punti)

Non si dà il caso che ci sia un unico uccellino nella gabbia.

O nessun uccellino è nella gabbia oppure,

se nella gabbia c'è l'uccellino Filò allora nella gabbia c'è un uccellino diverso da Filò.

si consiglia di usare:

$U(x)$ = " x è un uccellino nella gabbia"

f = "Filò"

- (7 punti)

Non si dà il caso che a qualcuno non piaccia il cielo stellato.

A tutti piace qualcosa.

si consiglia di usare:

$P(x,y)$ = " x piace a y "

c = "cielo stellato"

- (8 punti)

Non si dà il caso che nel lago di Garda ci siano soltanto barche a motore.

Esiste qualcosa nel lago di Garda che non è una barca a motore e neanche una barca a vela.

si consiglia di usare:

$L(x)$ = " x è nel lago di Garda"

$B(x)$ = " x è una barca a motore"

$V(x)$ = " x è una barca a vela"

- (9 punti)

“Non esiste nulla che se è immortale allora tutti sono immortali”

si consiglia di usare:

$O(x) = x$ è immortale

- (9 punti)

“Non esiste nulla che è perfetto e crea tutti e soltanto quelli che non si creano da soli”

si consiglia di usare:

$C(x,y) = x$ crea y

$P(x) = x$ è perfetto

- (20 punti) Sia T_{piz} la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Se a Gino non piace la pizza quattro formaggi, la pizza margherita non piace a Carla.
- Se a Gino piace la pizza quattro formaggi, allora a Carla piace la pizza margherita ma non la quattro formaggi.
- Solo se a Gino non piace la pizza margherita, allora non piace pure a Carla.
- Se a Carla piace la pizza margherita, allora piace pure a Gino.
- Non si dà il caso che a Gino non piaccia nè la pizza margherita nè la pizza quattro formaggi.

Si consiglia di usare:

$P(x,y) = \text{“}x \text{ piace a } y\text{”}$

$m = \text{“pizza margherita”}$

$q = \text{“pizza quattro formaggi”}$

$c = \text{“Carla”}$

$g = \text{“Gino”}$

Dedurre poi in T_{piz} le seguenti affermazioni:

- A Gino piace la pizza quattro formaggi.
- A Carla piace la pizza margherita.
- A Carla non piace la pizza quattro formaggi.
- Non a tutti piace tutto.

- (22 punti) Sia T_{mer} la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Non si dà il caso che, al mercato non ci siano banchetti di vestiti oppure ci siano banchetti di frutta.
- Se al mercato ci fosse un banchetto di antiquariato, ci sarebbe un banchetto di frutta.
- Al mercato c'è un banchetto di scarpe solo se non ci sono banchetti di vestiti.
- Al mercato c'è un banchetto di scarpe o, se non ci sono banchetti di antiquariato ci sono banchetti di utensili per la casa.

Si consiglia di usare:

$V(x)$ = “ x è un banchetto di vestiti al mercato”

$F(x)$ = “ x è un banchetto di frutta al mercato”

$U(x)$ = “ x è un banchetto di utensili per la casa al mercato”

$S(x)$ = “ x è un banchetto di scarpe al mercato”

$A(x)$ = “ x è un banchetto di antiquariato al mercato ”

Dedurre poi in T_{mer} le seguenti affermazioni:

- Al mercato non c'è un banchetto di frutta.
 - Al mercato non c'è un banchetto di antiquariato.
 - Al mercato non c'è alcun banchetto di scarpe.
 - Al mercato c'è un banchetto di utensili per la casa.
- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (6 punti) $\vdash \exists x \forall y y + x = y$
2. (6 punti) $\vdash \exists x \forall y x + y = x$
3. (7 punti) $\vdash \exists x \exists y x \cdot y = x$
4. (7 punti) $3 = 0 \vdash \exists y \forall z z = y$
5. (7 punti) $\vdash \forall y \exists w (y \neq 3 \rightarrow s(w) \neq s(y))$
6. (14 punti) $\vdash \forall x 2 + x = x + 2$

- Stabilire se le seguenti regole, formalizzate dove occorre, e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

- (12 punti)

$$\frac{\text{Carlo ha mangiato} \vdash \text{Carlo e Paolo sono sazi.}}{\text{Tutti han mangiato} \vdash \text{Carlo è sazio.}} 1$$

ove

$M(x)$ = “ x ha mangiato”

$A(x)$ = “ x è sazio”

c = “Carlo”

p = “Paolo”

- (8 punti)

$$\frac{B \vdash C}{\Gamma, \perp \vee B \vdash C} 2$$

- (15 punti)

$$\frac{y \text{ ha cucinato per tutti.} \vdash x \text{ è sazio.}}{\text{Qualcuno ha cucinato per tutti.} \vdash \text{Tutti sono sazi.}} 3$$

ove

$C(x, y)$ = “ x ha cucinato per y ”

$S(x)$ = “ x è sazio”

Logica classica con uguaglianza- $LC_{=}$

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \\
\frac{}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \\
\\
\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma} \text{sc}_{sx} \\
\\
\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&S \\
\\
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee-S \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg-S \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow-S \\
\\
\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall-S \\
\\
\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \nabla} \exists-S \ (w \notin VL(\Gamma, \exists x A(x), \Delta)) \\
\\
\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} =-S
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{ax-}\perp \\
\frac{}{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{dx} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-D \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee D \\
\\
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg-D \\
\\
\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow-D \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \forall-D \ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla)) \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists-D \\
\\
= -ax \\
\Gamma \vdash t = t, \Delta
\end{array}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $LC_{=}$ + comp_{sx} + comp_{dx} , ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla} \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$\begin{array}{l}
Ax1. \vdash \forall x \ s(x) \neq 0 \\
Ax2. \vdash \forall x \ \forall y \ (\ s(x) = s(y) \rightarrow x = y \) \\
Ax3. \vdash \forall x \ x + 0 = x \\
Ax4. \vdash \forall x \ \forall y \ x + s(y) = s(x + y) \\
Ax5. \vdash \forall x \ x \cdot 0 = 0 \\
Ax6. \vdash \forall x \ \forall y \ x \cdot s(y) = x \cdot y + x \\
Ax7. \vdash A(0) \& \forall x \ (\ A(x) \rightarrow A(s(x)) \) \rightarrow \forall x \ A(x)
\end{array}$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \dots (0))}_{n\text{-volte}}$$

e quindi per esempio

$$\begin{array}{l}
1 \equiv s(0) \\
2 \equiv s(s(0))
\end{array}$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg\neg\text{aX}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \quad \frac{\neg\neg\text{aX}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C} \\
 \\
 \frac{\neg\neg\text{aX}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \quad \frac{\neg\neg\text{aX}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta} \neg\neg\text{-S} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta} \neg\neg\text{-D} \\
 \\
 \frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma} \text{in}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{in}_{dx} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \Delta} \forall\text{-S}_v \quad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \Delta} \exists\text{-D}_v \\
 \\
 \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'} \text{rf}^* \\
 \\
 \frac{}{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta} \text{sm}^* \\
 \\
 \frac{}{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta} \text{tra}^* \quad \frac{}{\Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta} \text{cf}^* \\
 \\
 \frac{}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta} \text{cp}^* \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta} \text{sy-r} \quad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta} \text{sy-l} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'} \text{tr-r}
 \end{array}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_= + \text{comp}_{sx} + \text{comp}_{dx}$ si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x (P(x) \rightarrow P(s(x)))}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x P(x)} \text{ind}$$