Raccolta di esercizi svolti

Benedetto Cosentino

a.a. 2016/2017

Indice

1 Derivazioni

1.1 Esercizio 1

Si consideri il sequente $\exists x \exists w(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{B}(w)) \vdash \exists y\ (\mathrm{C}(y)\ \&\ \mathrm{B}(y))$.
Si mostri se il sequente è **valido** o **non valido**. Nel caso in cui non sia valido, si indichi un contromodello e un modello.

Svolgimento

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{\mathrm{C}(z) \vdash \mathrm{C}(z)\ \exists y(...)} \qquad \mathrm{C}(z) \vdash \mathrm{B}(z)\ \exists y(...)}{\mathrm{C}(z) \vdash \mathrm{C}(z)\ \&\ \mathrm{B}(z), \exists y(...)}\ \&\text{-D}}{\mathrm{C}(z) \vdash \exists y(\mathrm{C}(y)\ \&\ \mathrm{B}(y))}\ \exists\text{-D} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathrm{B}(v) \vdash \mathrm{C}(v)\ \exists y(...) \qquad \dfrac{ax-id}{\mathrm{B}(v) \vdash \mathrm{B}(v)\ \exists y(...)}}{\mathrm{B}(v) \vdash \mathrm{C}(v)\ \&\ \mathrm{B}(v), \exists y(...)}\ \&\text{-D}}{\mathrm{B}(v) \vdash \exists y(\mathrm{C}(y)\ \&\ \mathrm{B}(y))}\ \exists\text{-D}}{\mathrm{C}(z) \vee \mathrm{B}(v) \vdash \exists y\ (\mathrm{C}(y)\ \&\ \mathrm{B}(y))}\ \vee\text{-S}}{\exists w(\mathrm{C}(z) \vee \mathrm{B}(w)) \vdash \exists y\ (\mathrm{C}(y)\ \&\ \mathrm{B}(y)) \quad **}\ \exists\text{-S}\ (v \notin VL(**))}{\exists x \exists w(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{B}(w)) \vdash \exists y\ (\mathrm{C}(y)\ \&\ \mathrm{B}(y)) \quad *}\ \exists\text{-S}\ (z \notin VL(*))}{}$$

Il sequente non è valido. Mostro un contromodello $\mathcal{D}$. Sia D = {Ugo, Pino} il dominio.
Pongo $\mathrm{C}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) = 1$, $\mathrm{C}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Pino}) = 0$, $\mathrm{B}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) = 0$ e $\mathrm{B}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Pino}) = 1$.
Quindi, $\mathrm{C}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) \vee \mathrm{B}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}) \equiv (\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{B}(w))^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo, d}) = 1$ per ogni $\mathrm{d} \in \mathrm{D}$.
Allora $(\exists w(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{B}(w))^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) = 1)$ e, di conseguenza, $(\exists x \exists w(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{B}(w)))^{\mathcal{D}} = 1$.
Invece, $\mathrm{C}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo})\ \&\ \mathrm{B}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) = 0$ e $\mathrm{C}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Pino})\ \&\ \mathrm{B}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Pino}) = 0$, ovvero $(\mathrm{C}(x)\ \&\ \mathrm{B}(x))^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) = 0$ e $(\mathrm{C}(x)\ \&\ \mathrm{B}(x))^{\mathcal{D}}(\mathrm{Pino}) = 0$. Segue che $(\mathrm{C}(x)\ \&\ \mathrm{B}(x))^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}) = 0$ per ogni $\mathrm{d} \in \mathrm{D}$. Quindi, $(\exists x(\mathrm{C}(x)\ \&\ \mathrm{B}(x)))^{\mathcal{D}} = 0$.
Il sequente iniziale $\exists x \exists w(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{B}(w)) \vdash \exists y\ (\mathrm{C}(y)\ \&\ \mathrm{B}(y))$ equivale all'implicazione
$(\exists x \exists w(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{B}(w)) \rightarrow \exists y\ (\mathrm{C}(y)\ \&\ \mathrm{B}(y)))^{\mathcal{D}} \equiv (\exists x \exists w(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{B}(w)))^{\mathcal{D}} \rightarrow (\exists y\ (\mathrm{C}(y)\ \&\ \mathrm{B}(y)))^{\mathcal{D}} =$
$= 1 \rightarrow 0 = 0$.
Il sequente, per il contromodello scelto, è falso e, quindi, è non valido.

Il sequente è soddisfacibile. Mostro un modello $\mathcal{D}$.
Sia D = {Ugo, Pino} il dominio.
Pongo $\mathrm{C}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}) = 0$ per ogni $\mathrm{d} \in \mathrm{D}$ e $\mathrm{B}(w)^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}) = 0$ per ogni $\mathrm{d} \in \mathrm{D}$.
Quindi, $\mathrm{C}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}_1) \vee \mathrm{B}(w)^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}_2) = 0$ per ogni coppia $(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2)$ con $\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2 \in \mathrm{D}$, ovvero
$(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{B}(w))^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2) = 0$ per ogni coppia $(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2)$ con $\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2 \in \mathrm{D}$.
Segue che $(\exists x(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{B}(w)))^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}_2) = 0$ per ogni $\mathrm{d}_2 \in \mathrm{D}$ e, dunque, $(\exists x \exists w(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{B}(w)))^{\mathcal{D}} = 0$.
Il sequente iniziale $\exists x \exists w(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{B}(w)) \vdash \exists y\ (\mathrm{C}(y)\ \&\ \mathrm{B}(y))$ equivale all'implicazione
$(\exists x \exists w(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{B}(w)) \rightarrow \exists y\ (\mathrm{C}(y)\ \&\ \mathrm{B}(y)))^{\mathcal{D}} \equiv$
$\equiv (\exists x \exists w(\mathrm{C}(x) \vee \mathrm{B}(w)))^{\mathcal{D}} \rightarrow (\exists y\ (\mathrm{C}(y)\ \&\ \mathrm{B}(y)))^{\mathcal{D}} =$
$= 0 \rightarrow (\exists y\ (\mathrm{C}(y)\ \&\ \mathrm{B}(y)))^{\mathcal{D}} = 1$. Quindi, per il modello scelto, il sequente è vero e, quindi, è soddisfacibile.

1.2 Esercizio 2

Si consideri il sequente $\exists w(\mathrm{F}(w) \vee \bot) \vdash \exists z(\mathrm{B}(z) \ \&\ \mathrm{F}(z))$.
Si mostri se il sequente è **valido** o **non valido**. Nel caso in cui non sia valido, si indichi un contromodello e un modello.

Svolgimento

$$
\cfrac{
\cfrac{
\cfrac{
\cfrac{
\mathrm{F}(x) \vdash \mathrm{B}(x), \exists z(...) \qquad \stackrel{ax-id}{\mathrm{F}(x) \vdash \mathrm{F}(x), \exists z(...)}
}{
\mathrm{F}(x) \vdash \mathrm{B}(x)\ \&\ \mathrm{F}(x), \exists z(...)
}\ \&\text{-D}
}{
\mathrm{F}(x) \vdash \exists z(\mathrm{B}(z)\ \&\ \mathrm{F}(z))
}\ \exists\text{-D}
\qquad
\stackrel{ax-\bot}{\bot \vdash \exists z(\mathrm{B}(z)\ \&\ \mathrm{F}(z))}
}{
\mathrm{F}(x) \vee \bot \vdash \exists z(\mathrm{B}(z)\ \&\ \mathrm{F}(z))
}\ \vee\text{-S}
}{
\exists w(\mathrm{F}(w) \vee \bot) \vdash \exists z(\mathrm{B}(z)\ \&\ \mathrm{F}(z)) \quad (*)
}\ \exists\text{-S}\ (x \notin VL(*))
$$

Il sequente è non valido. Mostro un contromodello $\mathcal{D}$.
Sia D = {Ugo} il dominio.
Pongo $\mathrm{F}(x)^{\mathcal{D}}(\text{Ugo}) = 1$ e $\mathrm{B}(x)^{\mathcal{D}}(\text{Ugo}) = 0$.
$\mathrm{F}(x)^{\mathcal{D}}(\text{Ugo}) = 1$ comporta che $\mathrm{F}(x)^{\mathcal{D}}(\text{Ugo}) \vee \bot = 1$, ovvero $(\mathrm{F}(x)(\text{Ugo}) \vee \bot)^{\mathcal{D}} = 1$. Quindi, dato che Ugo è il testimone, $(\exists w\ (\mathrm{F}(w) \vee \bot))^{\mathcal{D}} = 1$.
Invece, $\mathrm{F}(x)^{\mathcal{D}}(\text{Ugo})\ \&\ \mathrm{B}(x)^{\mathcal{D}}(\text{Ugo}) = 0$, ovvero $(\mathrm{F}(x)\ \&\ \mathrm{B}(x))^{\mathcal{D}}(\text{Ugo}) = 0$. Ma Ugo è l'unico elemento di D. Quindi, per ogni d $\in$ D, $(\mathrm{F}(x)\ \&\ \mathrm{B}(x))^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}) = 0$.
Allora $(\exists w\ (\mathrm{F}(w)\ \&\ \mathrm{B}(w)))^{\mathcal{D}} = 0$.
Il sequente radice equivale all'implicazione
$(\exists w(\mathrm{F}(w) \vee \bot) \rightarrow \exists z(\mathrm{B}(z)\ \&\ \mathrm{F}(z)))^{\mathcal{D}} \equiv (\exists w(\mathrm{F}(w) \vee \bot))^{\mathcal{D}} \rightarrow (\exists z(\mathrm{B}(z)\ \&\ \mathrm{F}(z)))^{\mathcal{D}} =$
$= 1 \rightarrow 0 = 0$.
Il sequente, nel contromodello scelto, è falso ed è perciò non valido.

Il sequente è soddisfacibile. Mostro un modello $\mathcal{D}$.
Sia D = {Ugo} il dominio.
Pongo $\mathrm{F}(x)^{\mathcal{D}}(\text{Ugo}) = 0$.
$\mathrm{F}(x)^{\mathcal{D}}(\text{Ugo}) = 0$ comporta che $\mathrm{F}(x)^{\mathcal{D}}(\text{Ugo}) \vee \bot = 0$, ovvero $(\mathrm{F}(x) \vee \bot)^{\mathcal{D}}(\text{Ugo}) = 0$. Ma Ugo è l'unico elemento di D, per cui $(\mathrm{F}(x) \vee \bot)^{\mathcal{D}}(\mathrm{d})=0$ per ogni d $\in$ D.
Segue che $(\exists w(\mathrm{F}(w) \vee \bot))^{\mathcal{D}} = 0$.
Il sequente radice equivale all'implicazione
$(\exists w(\mathrm{F}(w) \vee \bot) \rightarrow \exists z(\mathrm{B}(z)\ \&\ \mathrm{F}(z)))^{\mathcal{D}} \equiv (\exists w(\mathrm{F}(w) \vee \bot))^{\mathcal{D}} \rightarrow (\exists z(\mathrm{B}(z)\ \&\ \mathrm{F}(z)))^{\mathcal{D}} =$
$= 0 \rightarrow (\exists z(\mathrm{B}(z)\ \&\ \mathrm{F}(z)))^{\mathcal{D}} = 1$.
Il sequente, nel modello scelto, è vero ed è perciò soddisfacibile.

2 Formalizzazioni e Derivazioni

2.1 Esercizio 1

Si formalizzino le seguenti asserzioni e si mostri la derivazione del sequente ottenuto. Infine, Si indichi se il sequente è **valido** o **non valido**. Nel caso in cui non sia valido, si costruisca un contromodello e un modello.

$$\dfrac{\text{Chi parla troppo non ascolta} \\ \text{Nessuno parla troppo}}{\text{Tutti ascoltano}}$$

Si consiglia di usare:
$\mathrm{A}(x)$="x ascolta"
$\mathrm{P}(x)$="x parla troppo"

Svolgimento

La sua formalizzazione è $\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to \neg \mathrm{A}(x)),\ \neg\exists y\ \ \mathrm{P}(y) \vdash \forall z\, \mathrm{A}(z)$. Per cui, si può procedere con la sua derivazione.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(...) \vdash \mathrm{P}(w), \mathrm{P}(w), \exists y\,(...), \mathrm{A}(w) \qquad \dfrac{\forall x\,(...) \vdash \mathrm{A}(w), \mathrm{P}(w), \exists y\,(...), \mathrm{A}(w)}{\forall x\,(...), \neg \mathrm{A}(w) \vdash \mathrm{P}(w), \exists y\,(...), \mathrm{A}(w)}\,\neg\text{-S}}{\forall x\,(...), \mathrm{P}(w)\to \neg \mathrm{A}(w) \vdash \mathrm{P}(w), \exists y\,(...), \mathrm{A}(w)}\,\to\text{-S}}{\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to \neg \mathrm{A}(x)) \vdash \mathrm{P}(w), \exists y\,(...), \mathrm{A}(w)}\,\forall\text{-S}}{\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to \neg \mathrm{A}(x)) \vdash \exists y\, \mathrm{P}(y), \mathrm{A}(w)}\,\exists\text{-D}}{\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to \neg \mathrm{A}(x)), \neg\exists y\, \mathrm{P}(y) \vdash \mathrm{A}(w)}\,\neg\text{-S}}{\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to \neg \mathrm{A}(x)), \neg\exists y\, \mathrm{P}(y) \vdash \forall z\, \mathrm{A}(z) \quad (*)}\,\forall\text{-D } (w \notin VL(*))$$

Il sequente è non valido. Mostro un contromodello $\mathcal{D}$.
Sia D = {Ugo} il dominio.
Pongo $\mathrm{P}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) = 0$ e $\mathrm{A}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) = 0$.
$\mathrm{A}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) = 0$ comporta $\neg\mathrm{A}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) = 1$. Quindi, $\mathrm{P}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo})\to \neg\mathrm{A}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) =$
$= 0 \to 1 = 1$. $\mathrm{P}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo})\to \neg\mathrm{A}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) \equiv (\mathrm{P}(x)\to \neg\mathrm{A}(x))^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) = 1$. Ma Ugo è l'unico elemento di D. Di conseguenza, per ogni elemento $\mathrm{d} \in \mathrm{D}$, $(\mathrm{P}(x)\to \neg\mathrm{A}(x))^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}) = 1$, ovvero $(\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to \neg\mathrm{A}(x)))^{\mathcal{D}} = 1$.
Inoltre, $\mathrm{P}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) = 0$ comporta che, per ogni $\mathrm{d} \in \mathrm{D}$, $\mathrm{P}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}) = 0$, dal momento che Ugo è l'unico elemento di D. Quindi, non esiste $\mathrm{d} \in \mathrm{D}$ tale che $\mathrm{P}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}) = 1$, ovvero $(\exists y\, \mathrm{P}(y))^{\mathcal{D}}$=0.
Segue che $(\neg\exists y\, \mathrm{P}(y))^{\mathcal{D}} = 1$.
Infine, $\mathrm{A}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) = 0$ comporta che $(\forall z\, \mathrm{A}(z))^{\mathcal{D}} = 0$, dal momento che Ugo è il falsario del predicato in questione.
Il sequente radice equivale all'implicazione $((\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to\mathrm{A}(x))\ \&\ \neg\exists y\, \mathrm{P}(y)) \to \forall z\, \mathrm{A}(z))^{\mathcal{D}} \equiv$
$\equiv (\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to\mathrm{A}(x))\ \&\ \neg\exists y\, \mathrm{P}(y))^{\mathcal{D}} \to (\forall z\, \mathrm{A}(z))^{\mathcal{D}} \equiv (\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to\mathrm{A}(x)))^{\mathcal{D}}\ \&\ (\neg\exists y\, \mathrm{P}(y))^{\mathcal{D}} \to (\forall z\, \mathrm{A}(z))^{\mathcal{D}} = 1\ \&\ 1 \to 0 = 1 \to 0 = 0$.
Il sequente, nel contromodello scelto, è falso ed è perciò non valido.

Il sequente è soffisfacibile. Mostro un modello $\mathcal{D}$.
Sia D = {Ugo} il dominio.
Pongo $\mathrm{A}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo}) = 1$ e $\mathrm{P}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Ugo})$ a piacere.
Dal momento che Ugo è l'unico elemento di D, $\mathrm{A}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}) = 1$ per ogni $\mathrm{d} \in \mathrm{D}$. Quindi, $(\forall z\, \mathrm{A}(z))^{\mathcal{D}}$ $= 1$.
Il sequente radice equivale all'implicazione $((\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to\mathrm{A}(x))\ \&\ \neg\exists y\, \mathrm{P}(y)) \to \forall z\, \mathrm{A}(z))^{\mathcal{D}} \equiv$
$\equiv (\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to\mathrm{A}(x))\ \&\ \neg\exists y\, \mathrm{P}(y))^{\mathcal{D}} \to (\forall z\, \mathrm{A}(z))^{\mathcal{D}} = (\forall x\,(\mathrm{P}(x)\to\mathrm{A}(x))\ \&\ \neg\exists y\, \mathrm{P}(y))^{\mathcal{D}} \to 1 = 1$.
Il sequente, nel modello scelto, è vero ed è perciò soddisfacibile.

2.2 Esercizio 2

Si formalizzino le seguenti asserzioni e si mostri la derivazione del sequente ottenuto. Infine, Si indichi se il sequente è **valido** o **non valido**. Nel caso in cui non sia valido, si costruisca un contromodello e un modello.

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Un desiderio di Giulio è diventare un cantante rock.}\\ \text{Diventare un cantate rock è diverso che diventare un cantante di jazz}\\ \text{Diventare un cantate rock è diverso che diventare un cantante lirico}\\ \text{Giulio ha un unico desiderio.}\end{array}}{\text{Non è un desiderio di Giulio diventare un cantante di jazz e neppure diventare un cantante lirico.}}$$

Si consiglia di usare:
D(x,y)=“x è un desiderio di y”
r=“diventare un cantante rock”
j=“diventare un cantante di jazz”
l=“diventare un cantante lirico”
g=Giulio

Svolgimento La sua formalizzazione è
$\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g})\ \&\ \forall y_1 \forall y_2\, (\mathrm{D}(y_1,\mathrm{g})\ \&\ \mathrm{D}(y_2,\mathrm{g}) \to y_1 = y_2) \vdash \neg\mathrm{D(j,g)}\ \&\ \neg\mathrm{D(l,g)}$.
Per cui, si può procedere con la derivazione.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1 \qquad \pi_2}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g}), \forall y_2\, (\mathrm{D(r,g)}\ \&\ \mathrm{D}(y_2,\mathrm{g}) \to \mathrm{r}=y_2) \vdash \neg\mathrm{D(j,g)}\ \&\ \neg\mathrm{D(l,g)}}\ \&\text{-D}}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g}), \forall y_1 \forall y_2\, (\mathrm{D}(y_1,\mathrm{g})\ \&\ \mathrm{D}(y_2,\mathrm{g}) \to y_1 = y_2) \vdash \neg\mathrm{D(j,g)}\ \&\ \neg\mathrm{D(l,g)}}\ \forall\text{-S}_v}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g})\ \&\ \forall y_1 \forall y_2\, (\mathrm{D}(y_1,\mathrm{g})\ \&\ \mathrm{D}(y_2,\mathrm{g}) \to y_1 = y_2) \vdash \neg\mathrm{D(j,g)}\ \&\ \neg\mathrm{D(l,g)}}\ \&\text{-S}$$

La derivazione si dirama in π_1 e π_2. Vediamo prima la derivazione di π_1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg - ax_{sx_2}}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g}), \mathrm{r=l} \vdash \neg\mathrm{D(j,g)}} \qquad \pi_3}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g}), \mathrm{D(r,g)}\ \&\ \mathrm{D(j,g)} \to \mathrm{r=j} \vdash \neg\mathrm{D(j,g)}}\ \to\text{-S}}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g}), \forall y_2\, (\mathrm{D(r,g)}\ \&\ \mathrm{D}(y_2,\mathrm{g}) \to \mathrm{r}=y_2) \vdash \neg\mathrm{D(j,g)}}\ \forall\text{-S}_v$$
$$\pi_1$$

$$\dfrac{\dfrac{ax-id}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g}) \vdash \mathrm{D(r,g)}, \neg\mathrm{D(j,g)}} \qquad \dfrac{\neg - ax_{dx_1}}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g}) \vdash \mathrm{D(j,g)}, \neg\mathrm{D(j,g)}}}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g}) \vdash \mathrm{D(r,g)}\ \&\ \mathrm{D(j,g)}, \neg\mathrm{D(j,g)}}\ \&\text{-D}$$
$$\pi_3$$

Adesso, procediamo con la derivazione dell'albero π_2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg - ax_{sx_2}}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g}), \mathrm{r=l} \vdash \neg\mathrm{D(l,g)}} \qquad \pi_4}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g}), \mathrm{D(r,g)}\ \&\ \mathrm{D(l,g)} \to \mathrm{r=l} \vdash \neg\mathrm{D(l,g)}}\ \to\text{-S}}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g}), \forall y_2\, (\mathrm{D(r,g)}\ \&\ \mathrm{D}(y_2,\mathrm{g}) \to \mathrm{r}=y_2) \vdash \neg\mathrm{D(l,g)}}\ \forall\text{-S}_v$$
$$\pi_2$$

$$\dfrac{\dfrac{ax-id}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g}) \vdash \mathrm{D(r,g)}, \neg\mathrm{D(l,g)}} \qquad \dfrac{\neg - ax_{dx_1}}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g}) \vdash \mathrm{D(l,g)}, \neg\mathrm{D(l,g)}}}{\mathrm{D(r,g)}, \mathrm{r}\neq\mathrm{j}, \mathrm{r}\neq\mathrm{l}, \exists x\, \mathrm{D}(x,\mathrm{g}) \vdash \mathrm{D(r,g)}\ \&\ \mathrm{D(l,g)}, \neg\mathrm{D(l,g)}}\ \&\text{-D}$$
$$\pi_4$$

Il sequente è **valido**.

2.3 Esercizio 3

Si formalizzi la seguente asserzione e si mostri la derivazione del sequente ottenuto. Infine, si indichi se il sequente è **valido** o **non valido**. Nel caso in cui non sia valido, si costruisca un contromodello e un modello.

> "Qualcuno loda solo se stesso e loda quelli e soltanto quelli che non si lodano."

si consiglia di usare:
$\mathrm{L}(x,y)= x$ loda y

Svolgimento La sua formalizzazione è
$\vdash\ \exists x\,((\mathrm{L}(x,x)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(x,y)\rightarrow\ x\ =\ y))\ \&\ \forall z\,((\neg\mathrm{L}(z,z)\rightarrow\mathrm{L}(x,z))\ \&\ (\mathrm{L}(x,z)\rightarrow\ \neg\mathrm{L}(z,z))))$.
Questo sequente è un paradosso (Russell). Quindi, derivo la negazione del sequente.
La negazione è
$\vdash\neg\,(\mathrm{tt}\rightarrow\exists x\,((\mathrm{L}(x,x)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(x,y)\rightarrow x=y))\ \&\ \forall z\,((\neg\mathrm{L}(z,z)\rightarrow\mathrm{L}(x,z))\ \&\ (\mathrm{L}(x,z)\rightarrow\neg\mathrm{L}(z,z)))))$

$$
\dfrac{\dfrac{\overset{ax\text{-tt}}{\vdash \mathrm{tt}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1 \qquad \pi_2}{\mathrm{L}(w,w)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(w,y)\rightarrow w=y),\ \neg\mathrm{L}(w,w)\rightarrow \mathrm{L}(w,w),\ \mathrm{L}(w,w)\rightarrow\neg\mathrm{L}(w,w)\vdash}\ \rightarrow\text{-S}}{\mathrm{L}(w,w)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(w,y)\rightarrow w=y),\ (\neg\mathrm{L}(w,w)\rightarrow \mathrm{L}(w,w))\ \&\ (\mathrm{L}(w,w)\rightarrow\neg\mathrm{L}(w,w))\vdash}\ \&\text{-S}}{\mathrm{L}(w,w)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(w,y)\rightarrow w=y),\ \forall z\,((\neg\mathrm{L}(z,z)\rightarrow \mathrm{L}(w,z))\ \&\ (\mathrm{L}(w,z)\rightarrow\neg\mathrm{L}(z,z)))\vdash}\ \forall\text{-S}_v}{(\mathrm{L}(w,w)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(w,y)\rightarrow w=y))\ \&\ \forall z\,((\neg\mathrm{L}(z,z)\rightarrow \mathrm{L}(w,z))\ \&\ (\mathrm{L}(w,z)\rightarrow\neg\mathrm{L}(z,z)))\vdash}\ \&\text{-S}}{\exists x\,((\mathrm{L}(x,x)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(x,y)\rightarrow x=y))\ \&\ \forall z\,((\neg\mathrm{L}(z,z)\rightarrow \neg\mathrm{L}(x,z))\ \&\ (\mathrm{L}(x,z)\rightarrow\neg\mathrm{L}(z,z))))\vdash\ (*)}\ \exists\text{-S}\ (w\notin VL(*))}{\mathrm{tt}\rightarrow\exists x\,((\mathrm{L}(x,x)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(x,y)\rightarrow x=y))\ \&\ \forall z\,((\neg\mathrm{L}(z,z)\rightarrow \mathrm{L}(x,z))\ \&\ (\mathrm{L}(x,z)\rightarrow\neg\mathrm{L}(z,z))))\vdash}\ \rightarrow\text{-S}}{\vdash\neg(\mathrm{tt}\rightarrow\exists x\,((\mathrm{L}(x,x)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(x,y)\rightarrow x=y))\ \&\ \forall z\,((\neg\mathrm{L}(z,z)\rightarrow\mathrm{L}(x,z))\ \&\ (\mathrm{L}(x,z)\rightarrow\neg\mathrm{L}(x,x)))))}\ \neg\text{-D}
$$

La derivazione si sdoppia negli alberi π_1 e π_2. Vediamo prima la derivazione di π_1.

$$
\dfrac{\dfrac{\overset{\neg-ax_{dx_2}}{\mathrm{L}(w,w)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(w,y)\rightarrow w=y)\vdash\neg\mathrm{L}(w,w),\ \mathrm{L}(w,w)} \qquad \overset{ax-id}{\mathrm{L}(w,w)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(w,y)\rightarrow w=y),\ \mathrm{L}(w,w)\vdash \mathrm{L}(w,w)}}{\mathrm{L}(w,w)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(w,y)\rightarrow w=y),\ \neg\mathrm{L}(w,w)\rightarrow \mathrm{L}(w,w)\vdash \mathrm{L}(w,w)}\ \rightarrow\text{-S}}{\pi_1}
$$

Adesso, procediamo con la derivazione dell'albero π_2.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\mathrm{L}(w,w)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(w,y)\rightarrow w=y),\ \neg\mathrm{L}(w,w)\vdash\neg\mathrm{L}(w,w)} \qquad \overset{\neg-ax_{sx_2}}{\mathrm{L}(w,w)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(w,y)\rightarrow w=y),\ \neg\mathrm{L}(w,w),\ \mathrm{L}(w,w)\vdash}}{\mathrm{L}(w,w)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(w,y)\rightarrow w=y),\ \neg\mathrm{L}(w,w),\ \neg\mathrm{L}(w,w)\rightarrow \mathrm{L}(w,w)\vdash}\ \rightarrow\text{-S}}{\mathrm{L}(w,w)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{L}(w,y)\rightarrow w=y),\ \neg\mathrm{L}(w,w)\rightarrow \mathrm{L}(w,w),\ \neg\mathrm{L}(w,w)\vdash}\ sc_{sx}}{\pi_2}
$$

Il sequente negato è **valido**, quindi il sequente originale è **paradosso**.

2.4 Esercizio 4

Si formalizzi la seguente asserzione e si mostri la derivazione del sequente ottenuto. Infine, si indichi se il sequente è **valido** o **non valido**. Nel caso in cui non sia valido, si costruisca un contromodello e un modello.

“Non si dà il caso che non ci sia nessuno che non dorma oppure esista qualcuno che se lui non dorme allora tutti non dormono.”

Si consiglia di usare:
$\mathrm{D}(x) = x$ dorme

Svolgimento La sua formalizzazione è
$\vdash \neg(\neg\exists x\, \neg \mathrm{D}(x) \vee \exists y\, (\neg \mathrm{D}(y) \rightarrow \forall z\, \neg \mathrm{D}(z)))$
Questo sequente è la negazione di una tautologia incontrata in aula. Quindi, il sequente è un paradosso. Per mostrarlo, derivo la negazione del sequente. La negazione è
$\vdash \neg(\mathrm{tt} \rightarrow \neg(\neg\exists x\, \neg \mathrm{D}(x) \vee \exists y\, (\neg \mathrm{D}(y) \rightarrow \forall z\, \neg\, \mathrm{D}(z))))$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax\text{-tt}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash \mathrm{tt}$}
\AxiomC{$ax - id$}
\noLine
\UnaryInfC{$\exists x\, \neg \mathrm{D}(x), \neg \mathrm{D}(y), \neg \mathrm{D}(w) \vdash \forall z\, \neg \mathrm{D}(z), \neg \mathrm{D}(w)$}
\RightLabel{$\rightarrow$-D}
\UnaryInfC{$\exists x\, \neg \mathrm{D}(x), \neg \mathrm{D}(y) \vdash \neg \mathrm{D}(w) \rightarrow \forall z\, \neg \mathrm{D}(z), \neg \mathrm{D}(w)$}
\RightLabel{$\exists$-D_v}
\UnaryInfC{$\exists x\, \neg \mathrm{D}(x), \neg \mathrm{D}(y) \vdash \exists y\, (\neg \mathrm{D}(y) \rightarrow \forall z\, \neg \mathrm{D}(z)), \neg \mathrm{D}(w)$}
\RightLabel{sc_{dx}}
\UnaryInfC{$\exists x\, \neg \mathrm{D}(x), \neg \mathrm{D}(y) \vdash \neg \mathrm{D}(w), \exists y\, (\neg \mathrm{D}(y) \rightarrow \forall z\, \neg \mathrm{D}(z))$}
\RightLabel{$\forall$-D $(w \in VL(*))$}
\UnaryInfC{$\exists x\, \neg \mathrm{D}(x), \neg \mathrm{D}(y) \vdash \forall z\, \neg \mathrm{D}(z), \exists y\, (\neg \mathrm{D}(y) \rightarrow \forall z\, \neg \mathrm{D}(z)) \quad (*)$}
\RightLabel{$\rightarrow$-D}
\UnaryInfC{$\exists x\, \neg \mathrm{D}(x) \vdash \neg \mathrm{D}(y) \rightarrow \forall z\, \neg \mathrm{D}(z), \exists y\, (\neg \mathrm{D}(y) \rightarrow \forall z\, \neg \mathrm{D}(z))$}
\RightLabel{$\exists$-D}
\UnaryInfC{$\exists x\, \neg \mathrm{D}(x) \vdash \exists y\, (\neg \mathrm{D}(y) \rightarrow \forall z\, \neg \mathrm{D}(z))$}
\RightLabel{$\neg$-D}
\UnaryInfC{$\vdash \neg\exists x\, \neg \mathrm{D}(x), \exists y\, (\neg \mathrm{D}(y) \rightarrow \forall z\, \neg \mathrm{D}(z))$}
\RightLabel{$\vee$-D}
\UnaryInfC{$\vdash \neg\exists x\, \neg \mathrm{D}(x) \vee \exists y\, (\neg \mathrm{D}(y) \rightarrow \forall z\, \neg \mathrm{D}(z))$}
\RightLabel{$\neg$-S}
\UnaryInfC{$\neg(\neg\exists x\, \neg \mathrm{D}(x) \vee \exists y\, (\neg \mathrm{D}(y) \rightarrow \forall z\, \neg \mathrm{D}(z))) \vdash$}
\RightLabel{$\rightarrow$-S}
\BinaryInfC{$\mathrm{tt} \rightarrow \neg(\neg\exists x\, \neg \mathrm{D}(x) \vee \exists y\, (\neg \mathrm{D}(y) \rightarrow \forall z\ \mathrm{D}(z))) \vdash$}
\RightLabel{$\neg$-D}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(\mathrm{tt} \rightarrow \neg(\neg\exists x\, \neg \mathrm{D}(x) \vee \exists y\, (\neg \mathrm{D}(y) \rightarrow \forall z\ \mathrm{D}(z))))$}
\end{prooftree}
$$

Il sequente negato è **valido**, quindi il sequente originale è **paradosso**.

3 Teorie

3.1 Esercizio 1

Sia T_{cas} la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Soltanto se la madre e il padre non stanno a casa Alice non esce con il cane.
- Alice esce con il cane se il padre non sta a casa o non è mattina.
- Se la madre non sta a casa Alice non esce con il cane.
- Il padre sta a casa se e solo se è mattina.
- Qualcuno non sta a casa.
- Qualcuno esce con il cane.

Si consiglia di usare:
P(x)="x sta a casa"
E(x)="x esce con il cane"
a="Alice"
p="il padre"
m="la madre"
M="è mattina"
Dedurre poi in T_{cas} le seguenti affermazioni:

- Il padre non sta a casa se non è mattina.
- Se il padre sta in casa Alice esce con il cane.
- Se non è mattina Alice esce con il cane.
- Se è mattina Alice esce con il cane.
- Se Alice non esce con il cane allora è mattina e il padre sta in casa.
- Il padre non sta in casa se Alice non esce con il cane.
- Alice esce con il cane.
- La madre sta in casa.
- Qualcuno sta a casa e qualcuno esce con il cane.

Svolgimento

Formalizzazione degli assiomi (Ax)

1. $\neg$E(a) $\rightarrow$ $\neg$P(m) & $\neg$P(p)
2. $\neg$P(p) $\vee$ $\neg$M $\rightarrow$ E(a)
3. $\neg$P(m) $\rightarrow$ $\neg$E(a)
4. (P(p) $\rightarrow$ M) & (M $\rightarrow$ P(p))
5. $\exists x\, \neg \mathrm{P}(x)$
6. $\exists x\, \mathrm{E}(x)$

Formalizzazione delle conclusioni (C)

1. $\neg$M $\rightarrow$ $\neg$P(p)
2. P(p) $\rightarrow$ E(a)
3. $\neg$M $\rightarrow$ E(a)
4. M $\rightarrow$ E(a)
5. $\neg$E(a) $\rightarrow$ M & P(p)
6. $\neg$E(a)$\rightarrow$ $\neg$ P(p)
7. E(a)
8. P(m)
9. $\exists x\, \mathrm{P}(x)$ & $\exists y\, \mathrm{E}(y)$

Derivazioni

$\boxed{\mathbf{Ax.4} \vdash \mathbf{C}_1}$

$$\dfrac{\vdash \mathrm{Ax.4} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg - ax_{dx_1}}{\mathrm{M} \to \mathrm{P(p)} \vdash \mathrm{P(p)}, \mathrm{M}, \neg\mathrm{P(p)}} \qquad \dfrac{ax - id}{\mathrm{M} \to \mathrm{P(p)}, \mathrm{M} \vdash \mathrm{M}, \neg\mathrm{P(p)}}}{\mathrm{M} \to \mathrm{P(p)}, \mathrm{P(p)} \to \mathrm{M} \vdash \mathrm{M}, \neg\mathrm{P(p)}}\ \to\text{-S}}{\mathrm{P(p)} \to \mathrm{M}, \mathrm{M} \to \mathrm{P(p)} \vdash \mathrm{M}, \neg\mathrm{P(p)}}\ \mathrm{sc}_{sx}}{(\mathrm{P(p)} \to \mathrm{M})\ \&\ (\mathrm{M} \to \mathrm{P(p)}) \vdash \mathrm{M}, \neg\mathrm{P(p)}}\ \&\text{-S}}{(\mathrm{P(p)} \to \mathrm{M})\ \&\ (\mathrm{M} \to \mathrm{P(p)}), \neg\mathrm{M} \vdash \neg\mathrm{P(p)}}\ \neg\text{-S}}{\mathrm{Ax.4} \vdash \neg\mathrm{M} \to \neg\mathrm{P(p)}}\ \to\text{-D}}{}}{\vdash \neg\mathrm{M} \to \neg\mathrm{P(p)}}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

$\boxed{\mathbf{Ax.1} \vdash \mathbf{C}_2}$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \mathrm{Ax.1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg - ax_{dx_2}}{\mathrm{P(p)} \vdash \neg\mathrm{E(a)}, \mathrm{E(a)}} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg - ax_{sx_1}}{\mathrm{P(p)}, \neg\mathrm{P(m)}, \neg\mathrm{P(p)} \vdash \mathrm{E(a)}}}{\mathrm{P(p)}, \neg\mathrm{P(m)}\ \&\ \neg\mathrm{P(p)} \vdash \mathrm{E(a)}}\ \&\text{-S}}{\mathrm{P(p)}, \neg\mathrm{E(a)} \to \neg\mathrm{P(m)}\ \&\ \neg\mathrm{P(p)} \vdash \mathrm{E(a)}}\ \to\text{-S}}{\mathrm{P(p)}, \mathrm{Ax.1} \vdash \mathrm{E(a)}}}{\mathrm{P(p)} \vdash \mathrm{E(a)}}\ \mathrm{comp}_{sx}}{\mathrm{P(p)} \to \mathrm{E(a)}}\ \to\text{-D}$$

$\boxed{\mathbf{Ax.2} \vdash \mathbf{C}_3}$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \mathrm{Ax.2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax - id}{\neg\mathrm{M} \vdash \neg\mathrm{P(p)}, \neg\mathrm{M}, \mathrm{E(a)}}}{\neg\mathrm{M} \vdash \neg\mathrm{P(p)} \vee \neg\mathrm{M}, \mathrm{E(a)}}\ \vee\text{-D} \qquad \dfrac{ax - id}{\neg\mathrm{M}, \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{E(a)}}}{\neg\mathrm{M}, \neg\mathrm{P(p)} \vee \neg\mathrm{M} \to \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{E(a)}}\ \to\text{-S}}{\neg\mathrm{M}, \mathrm{Ax.2} \vdash \mathrm{E(a)}}}{\neg\mathrm{M} \vdash \mathrm{E(a)}}\ \mathrm{comp}_{sx}}{\vdash \neg\mathrm{M} \to \mathrm{E(a)}}\ \to$$

$\boxed{\mathbf{Ax.4},\ \mathbf{C}_2 \vdash \mathbf{C}_4}$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \mathrm{C}_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \mathrm{Ax.4} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax - id}{\mathrm{M}, \mathrm{P(p)} \to \mathrm{M} \vdash \mathrm{M}, \mathrm{P(p)}, \mathrm{E(a)}} \qquad \dfrac{ax - id}{\mathrm{M}, \mathrm{P(p)} \to \mathrm{M}, \mathrm{P(p)} \vdash \mathrm{P(p)}, \mathrm{E(a)}}}{\mathrm{M}, \mathrm{P(p)} \to \mathrm{M}, \mathrm{M} \to \mathrm{P(p)} \vdash \mathrm{P(p)}, \mathrm{E(a)}}\ \to\text{-S}}{\mathrm{M}, (\mathrm{P(p)} \to \mathrm{M})\ \&\ (\mathrm{M} \to \mathrm{P(p)}) \vdash \mathrm{P(p)}, \mathrm{E(a)}}\ \&\text{-S}}{\mathrm{M}, \mathrm{Ax.4} \vdash \mathrm{P(p)}, \mathrm{E(a)}}}{\mathrm{M} \vdash \mathrm{P(p)}, \mathrm{E(a)}}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \dfrac{ax - id}{\mathrm{M}, \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{E(a)}}}{\mathrm{M}, \mathrm{P(p)} \to \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{E(a)}}\ \to\text{-S}}{\mathrm{M}, \mathrm{C}_2 \vdash \mathrm{E(a)}}}{\mathrm{M} \vdash \mathrm{E(a)}}\ \mathrm{comp}_{sx}}{\vdash \mathrm{M} \to \mathrm{E(a)}}\ \to\text{-D}$$

$\boxed{\textbf{Ax.2} \vdash \textbf{C}_5}$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \mathrm{Ax.2}$}
\AxiomC{$\neg - ax_{dx_1}$}
\UnaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{M}, \neg \mathrm{P(p)}, \neg \mathrm{M}$}
\AxiomC{$\neg - ax_{dx_1}$}
\UnaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{P(p)}, \neg \mathrm{P(p)}, \neg \mathrm{M}$}
\RightLabel{\& -D}
\BinaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{M} \,\&\, \mathrm{P(p)}, \neg \mathrm{P(p)}, \neg \mathrm{M}$}
\RightLabel{sc$_{dx}$}
\UnaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)} \vdash \neg \mathrm{P(p)}, \neg \mathrm{M}, \mathrm{M} \,\&\, \mathrm{P(p)}$}
\RightLabel{$\vee$-D}
\UnaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)} \vdash \neg \mathrm{P(p)} \vee \neg \mathrm{M}, \mathrm{M} \,\&\, \mathrm{P(p)}$}
\AxiomC{$\neg - ax_{sx_2}$}
\UnaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)}, \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{M} \,\&\, \mathrm{P(p)}$}
\RightLabel{$\rightarrow$-S}
\BinaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)}, \neg \mathrm{P(p)} \vee \neg \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{M} \,\&\, \mathrm{P(p)}$}
\UnaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)}, \mathrm{Ax.2} \vdash \mathrm{M} \,\&\, \mathrm{P(p)}$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{M} \,\&\, \mathrm{P(p)}$}
\RightLabel{$\rightarrow$-D}
\UnaryInfC{$\vdash \neg \mathrm{E(a)} \rightarrow \mathrm{M} \,\&\, \mathrm{P(p)}$}
\end{prooftree}
$$

$\boxed{\textbf{C}_2 \vdash \textbf{C}_6}$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \mathrm{C}_2$}
\AxiomC{$\neg - ax_{dx_1}$}
\UnaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{P(p)}, \neg\, \mathrm{P(p)}$}
\AxiomC{$\neg - ax_{sx_2}$}
\UnaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)}, \mathrm{E(a)} \vdash \neg\, \mathrm{P(p)}$}
\RightLabel{$\rightarrow$-S}
\BinaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)}, \mathrm{P(p)} \rightarrow \mathrm{E(a)} \vdash \neg\, \mathrm{P(p)}$}
\UnaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)}, \mathrm{C}_2 \vdash \neg\, \mathrm{P(p)}$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)} \vdash \neg\, \mathrm{P(p)}$}
\RightLabel{$\rightarrow$-D}
\UnaryInfC{$\vdash \neg \mathrm{E(a)} \rightarrow \neg\, \mathrm{P(p)}$}
\end{prooftree}
$$

$\boxed{\textbf{C}_3\textbf{, C}_4 \vdash \textbf{C}_7}$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \mathrm{C}_4$}
\AxiomC{$\vdash \mathrm{C}_3$}
\AxiomC{$\neg - ax_{dx_2}$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg \mathrm{M}, \mathrm{M}, \mathrm{E(a)}$}
\AxiomC{$ax - id$}
\UnaryInfC{$\mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{M}, \mathrm{E(a)}$}
\RightLabel{$\rightarrow$-S}
\BinaryInfC{$\neg \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{M}, \mathrm{E(a)}$}
\UnaryInfC{$\mathrm{C}_3 \vdash \mathrm{M}, \mathrm{E(a)}$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash \mathrm{M}, \mathrm{E(a)}$}
\AxiomC{$ax - id$}
\UnaryInfC{$\mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{E(a)}$}
\RightLabel{$\rightarrow$-S}
\BinaryInfC{$\mathrm{M} \rightarrow \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{E(a)}$}
\UnaryInfC{$\mathrm{C}_4 \vdash \mathrm{E(a)}$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash \mathrm{E(a)}$}
\end{prooftree}
$$

$\boxed{\textbf{C}_7\textbf{, Ax.3} \vdash \textbf{C}_8}$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \mathrm{Ax.3}$}
\AxiomC{$\neg - ax_{dx_2}$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg \mathrm{P(m)}, \mathrm{P(m)}$}
\AxiomC{$\vdash \mathrm{C}_7$}
\AxiomC{$\neg - ax_{sx_1}$}
\UnaryInfC{$\mathrm{E(a)}, \neg \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{P(m)}$}
\UnaryInfC{$\mathrm{C}_7, \neg \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{P(m)}$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\neg \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{P(m)}$}
\RightLabel{$\rightarrow$-S}
\BinaryInfC{$\neg \mathrm{P(m)} \rightarrow \neg \mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{P(m)}$}
\UnaryInfC{$\mathrm{Ax.3} \vdash \mathrm{P(m)}$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash \mathrm{P(m)}$}
\end{prooftree}
$$

$\boxed{\textbf{C}_8\textbf{, C}_7 \vdash \textbf{C}_9}$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \mathrm{C}_8$}
\AxiomC{$ax - id$}
\UnaryInfC{$\mathrm{P(m)} \vdash \mathrm{P(m)}$}
\RightLabel{$\exists$-D$_v$}
\UnaryInfC{$\mathrm{P(m)} \vdash \exists x\, \mathrm{P}(x)$}
\UnaryInfC{$\mathrm{C}_8 \vdash \exists x\, \mathrm{P}(x)$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash \exists x\, \mathrm{P}(x)$}
\AxiomC{$\vdash \mathrm{C}_7$}
\AxiomC{$ax - id$}
\UnaryInfC{$\mathrm{E(a)} \vdash \mathrm{E(a)}$}
\RightLabel{$\exists$-D$_v$}
\UnaryInfC{$\mathrm{E(a)} \vdash \exists y\, \mathrm{E}(y)$}
\UnaryInfC{$\mathrm{C}_7 \vdash \exists y\, \mathrm{E}(y)$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash \exists y\, \mathrm{E}(y)$}
\RightLabel{\& -S}
\BinaryInfC{$\vdash \exists x\, \mathrm{P}(x) \,\&\, \exists y\, \mathrm{E}(y)$}
\end{prooftree}
$$

3.2 Esercizio 2

Sia T_{film} la teoria ottenuta estendendo $\mathbf{LC}_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Non si dà il caso che il regista sia Marylin.
- Gloria è diversa da Marylin e dal regista.
- Gloria non filma il regista.
- Il regista filma qualcuno e solo lui.
- Quelli che il regista non filma filmano il regista.
- Per ognuno c'e' qualcuno che lo filma.
- Soltanto quelli che il regista non filma filmano il regista.
- Marylin non filma nessuno.

si consiglia di usare:
S(x, y)= x filma y
m=Marylin
g=Gloria
r=il regista
Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata :

- Marylin non filma il regista.
- Il regista filma quelli che non lo filmano.
- Il regista filma soltanto quelli che non lo filmano.
- Il regista filma Gloria.
- Non si dà il caso che tutti filmino il regista.
- C'è qualcuno che il regista non filma.
- Il registra filma Marylin.
- Non si dà il caso che tutti quelli che il regista filma filmino il regista.

Svolgimento

Formalizzazioni degli assiomi (Ax)

1. $\mathrm{r} \neq \mathrm{m}$
2. $(\mathrm{g} \neq \mathrm{m})$ & $(\mathrm{g} \neq \mathrm{r})$
3. $\neg \mathrm{S}(\mathrm{g},\mathrm{r})$
4. $\exists x\, (\mathrm{S}(\mathrm{r},\, x)\ \&\ \forall y\, (\mathrm{S}(\mathrm{r},\, y)\to\ y = x))$
5. $\forall x\, (\neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\, x)\to \mathrm{S}(x,\, \mathrm{r}))$
6. $\forall x\, \exists y\, \mathrm{S}(y, x)$
7. $\forall x\, (\mathrm{S}(x,\, \mathrm{r})\to\ \neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\, x))$
8. $\neg \exists x\, \mathrm{S}(\mathrm{m},\, x)$

Formalizzazioni delle conclusioni (C)

1. $\neg \mathrm{S}(\mathrm{m},\, \mathrm{r})$
2. $\forall x\, (\neg \mathrm{S}(x,\, \mathrm{r})\to \mathrm{S}(\mathrm{r},\, x))$
3. $\forall x\, (\mathrm{S}(\mathrm{r},\, x)\to\ \neg \mathrm{S}(x,\, \mathrm{r}))$
4. $\mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{g})$
5. $\neg \forall x\, \mathrm{S}(x,\, \mathrm{r})$
6. $\exists x\, \neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\, x)$
7. $\mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{m})$
8. $\neg \forall x\, (\mathrm{S}(\mathrm{r},\, x)\to \mathrm{S}(x,\, \mathrm{r}))$

Derivazioni Si può facilmente notare che Ax.5 e Ax.7 costituiscano insieme parte del paradosso di Russell, proprio quella che conduce alla contraddizione.
Quindi, mostro che Ax.5 & Ax.7 deriva il falso ($\bot$), ovvero derivo il sequente
$\forall x\, (\neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\, x)\to \mathrm{S}(x,\, \mathrm{r})),\ \forall x\, (\mathrm{S}(x,\, \mathrm{r})\to\ \neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\, x)) \vdash \bot$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg - ax_{dx_2}}{\vdash \neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}),\, \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}),\, \bot} \qquad \overset{ax - id}{\mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}) \vdash \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}),\, \bot}}{\neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r})\to \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}) \vdash \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}),\, \bot}\ \to\text{-S}}{\forall x\, (\neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\, x)\to \mathrm{S}(x,\, \mathrm{r})) \vdash \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}),\, \bot}\ \forall\text{-S}_v \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg - ax_{dx_2}}{\vdash \neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}),\, \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}),\, \bot} \qquad \overset{ax - id}{\mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}) \vdash \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}),\, \bot}}{\neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r})\to \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}) \vdash \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}),\, \bot}\ \to\text{-S}}{\forall x\, (\neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\, x)\to \mathrm{S}(x,\, \mathrm{r})) \vdash \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}),\, \bot}\ \forall\text{-S}_v}{\forall x\, (\neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\, x)\to \mathrm{S}(x,\, \mathrm{r})),\, \neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}) \vdash \bot}\ \neg\text{-S}}{\dfrac{\forall x\, (\neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\, x)\to \mathrm{S}(x,\, \mathrm{r})),\, \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r})\to\ \neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\mathrm{r}) \vdash \bot}{\underset{\pi}{\forall x\, (\neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\, x)\to \mathrm{S}(x,\, \mathrm{r})),\, \forall x\, (\mathrm{S}(x,\, \mathrm{r})\to\ \neg \mathrm{S}(\mathrm{r},\, x)) \vdash \bot}}\ \forall\text{-S}_v}\ \to\text{-S}
$$

Il sequente è **valido**, dunque Ax.5, Ax.7 $\vdash \bot$ e chiamo l'albero mostrato π.

Proseguiamo con le derivazioni delle conclusioni. Usando $\bot$, dimostro ogni conclusione (dato che il falso implica ogni cosa) e, infine, derivo $\bot$ con Ax.5 e Ax.7 riconducendomi all'albero π.

$\boxed{\textbf{Ax.5, Ax.7} \vdash \mathbf{C_1}}$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \text{Ax.7} \qquad \dfrac{\vdash \text{Ax.5} \qquad \dfrac{\pi}{\text{Ax.5, Ax.7} \vdash \bot}}{\text{Ax.7} \vdash \bot}\,\text{comp}_{sx}}{\vdash \bot}\,\text{comp}_{sx} \qquad \stackrel{ax-\bot}{\bot \vdash \neg \text{S}(\text{m, r})}}{\vdash \neg \text{S}(\text{m, r})}\,\text{comp}_{sx}$$

$\boxed{\textbf{Ax.5, Ax.7} \vdash \mathbf{C_2}}$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \text{Ax.7} \qquad \dfrac{\vdash \text{Ax.5} \qquad \dfrac{\pi}{\text{Ax.5, Ax.7} \vdash \bot}}{\text{Ax.7} \vdash \bot}\,\text{comp}_{sx}}{\vdash \bot}\,\text{comp}_{sx} \qquad \stackrel{ax-\bot}{\bot \vdash \forall x\,(\neg \text{S}(x, \text{r}) \rightarrow \text{S}(\text{r}, x))}}{\vdash \forall x\,(\neg \text{S}(x, \text{r}) \rightarrow \text{S}(\text{r}, x))}\,\text{comp}_{sx}$$

$\boxed{\textbf{Ax.5, Ax.7} \vdash \mathbf{C_3}}$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \text{Ax.7} \qquad \dfrac{\vdash \text{Ax.5} \qquad \dfrac{\pi}{\text{Ax.5, Ax.7} \vdash \bot}}{\text{Ax.7} \vdash \bot}\,\text{comp}_{sx}}{\vdash \bot}\,\text{comp}_{sx} \qquad \stackrel{ax-\bot}{\bot \vdash \forall x\,(\text{S}(\text{r}, x) \rightarrow \neg \text{S}(x, \text{r}))}}{\vdash \forall x\,(\text{S}(\text{r}, x) \rightarrow \neg \text{S}(x, \text{r}))}\,\text{comp}_{sx}$$

$\boxed{\textbf{Ax.5, Ax.7} \vdash \mathbf{C_4}}$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \text{Ax.7} \qquad \dfrac{\vdash \text{Ax.5} \qquad \dfrac{\pi}{\text{Ax.5, Ax.7} \vdash \bot}}{\text{Ax.7} \vdash \bot}\,\text{comp}_{sx}}{\vdash \bot}\,\text{comp}_{sx} \qquad \stackrel{ax-\bot}{\bot \vdash \text{S}(\text{r,g})}}{\vdash \text{S}(\text{r,g})}\,\text{comp}_{sx}$$

$\boxed{\textbf{Ax.5, Ax.7} \vdash \mathbf{C_5}}$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \text{Ax.7} \qquad \dfrac{\vdash \text{Ax.5} \qquad \dfrac{\pi}{\text{Ax.5, Ax.7} \vdash \bot}}{\text{Ax.7} \vdash \bot}\,\text{comp}_{sx}}{\vdash \bot}\,\text{comp}_{sx} \qquad \stackrel{ax-\bot}{\bot \vdash \neg \forall x\, \text{S}(x, \text{r})}}{\vdash \neg \forall x\, \text{S}(x, \text{r})}\,\text{comp}_{sx}$$

$\boxed{\textbf{Ax.5, Ax.7} \vdash \mathbf{C_6}}$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \text{Ax.7} \qquad \dfrac{\vdash \text{Ax.5} \qquad \dfrac{\pi}{\text{Ax.5, Ax.7} \vdash \bot}}{\text{Ax.7} \vdash \bot}\,\text{comp}_{sx}}{\vdash \bot}\,\text{comp}_{sx} \qquad \stackrel{ax-\bot}{\bot \vdash \exists x\, \neg \text{S}(\text{r}, x)}}{\vdash \exists x\, \neg \text{S}(\text{r}, x)}\,\text{comp}_{sx}$$

$\boxed{\textbf{Ax.5, Ax.7} \vdash \mathbf{C_7}}$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \text{Ax.7} \qquad \dfrac{\vdash \text{Ax.5} \qquad \dfrac{\pi}{\text{Ax.5, Ax.7} \vdash \bot}}{\text{Ax.7} \vdash \bot}\,\text{comp}_{sx}}{\vdash \bot}\,\text{comp}_{sx} \qquad \stackrel{ax-\bot}{\bot \vdash \text{S}(\text{r,m})}}{\vdash \text{S}(\text{r,m})}\,\text{comp}_{sx}$$

$\boxed{\textbf{Ax.5, Ax.7} \vdash \mathbf{C_8}}$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \text{Ax.7} \qquad \dfrac{\vdash \text{Ax.5} \qquad \dfrac{\pi}{\text{Ax.5, Ax.7} \vdash \bot}}{\text{Ax.7} \vdash \bot}\,\text{comp}_{sx}}{\vdash \bot}\,\text{comp}_{sx} \qquad \stackrel{ax-\bot}{\bot \vdash \neg \forall x\,(\text{S}(\text{r}, x) \rightarrow \text{S}(x, \text{r}))}}{\vdash \neg \forall x\,(\text{S}(\text{r}, x) \rightarrow \text{S}(x, \text{r}))}\,\text{comp}_{sx}$$

4 Aritmetica di Peano (PA)

<u>Nota:</u> questi esercizi sono quelli che, a mio parere, ho svolto peggio all'interno della raccolta. Se riuscite a trovare procedimenti migliori, vi invito a leggere quelli.

Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile):

1. $\vdash \exists x\, \exists y\; y = 0 + 5 \cdot y$
2. $\vdash \exists x\, \exists y\, \exists z\; x + z = z$
3. $\vdash \exists y\, \exists w\, \exists x\; y \cdot x = z \cdot w$
4. $\vdash \exists y\, (5 + 1) + 0 = 0 + y$
5. $\vdash \forall y\, \forall w\, (s(w) + 0 \neq s(y) + 0 \vee \neg y \neq w)$
6. $\vdash \forall w\, \forall z\; w = z + (w + z)$
7. $\vdash \exists y\, \forall w\, (w \cdot y) + w = w \cdot s(y)$
8. $\vdash \forall x \exists y\, (s(x) + 0 \neq x + y)$

$\boxed{\textbf{Ax.3, Ax.5} \vdash \mathbf{C}_1}$

\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash$ Ax.3}
\AxiomC{$\vdash$ Ax.5}
\AxiomC{sm*}
\UnaryInfC{$5 \cdot 0 = 0,\, 0 + 5 \cdot 0 = 0 \vdash 0 = 0 + 5 \cdot 0$}
\RightLabel{=-S}
\UnaryInfC{$0 + 0 = 0,\, 5 \cdot 0 = 0 \vdash 0 = 0 + 5 \cdot 0$}
\RightLabel{$\forall$-S$_v$}
\UnaryInfC{$0 + 0 = 0,\, \forall x\, x \cdot 0 = 0 \vdash 0 = 0 + 5 \cdot 0$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$0 + 0 = 0 \vdash 0 = 0 + 5 \cdot 0$}
\RightLabel{$\forall$-S$_v$}
\UnaryInfC{$\forall x\, x + 0 = 0 \vdash 0 = 0 + 5 \cdot 0$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash 0 = 0 + 5 \cdot 0$}
\RightLabel{$\exists$-D$_v$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists y\; y = 0 + 5 \cdot y$}
\RightLabel{$\exists$-D$_v$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists x\, \exists y\; y = 0 + 5 \cdot y$}
\end{prooftree}

$\boxed{\textbf{Ax.3} \vdash \mathbf{C}_2}$

\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash$ Ax.3}
\AxiomC{$ax - id$}
\UnaryInfC{$0 + 0 = 0 \vdash 0 + 0 = 0$}
\RightLabel{$\forall$-S$_v$}
\UnaryInfC{$\forall x\, x + 0 = 0 \vdash 0 + 0 = 0$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash 0 + 0 = 0$}
\RightLabel{$\exists$-D$_v$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists z\, 0 + z = z$}
\RightLabel{$\exists$-D$_v$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists y\, \exists z\, 0 + z = z$}
\RightLabel{$\exists$-D$_v$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists x\, \exists y\, \exists z\, x + z = z$}
\end{prooftree}

$\boxed{\textbf{Ax.5} \vdash \mathbf{C}_3}$

\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash$ Ax.5}
\AxiomC{$ax - id$}
\UnaryInfC{$z \cdot 0 = 0, 0 \cdot 0 = z \cdot 0 \vdash 0 \cdot 0 = z \cdot 0$}
\RightLabel{=-S}
\UnaryInfC{$0 \cdot 0 = 0, z \cdot 0 = 0 \vdash 0 \cdot 0 = z \cdot 0$}
\RightLabel{$\forall$-S$_v$}
\UnaryInfC{$0 \cdot 0 = 0, \forall x\, x \cdot 0 = 0 \vdash 0 \cdot 0 = z \cdot 0$}
\RightLabel{sc$_{sx}$}
\UnaryInfC{$\forall x\, x \cdot 0 = 0, 0 \cdot 0 = 0 \vdash 0 \cdot 0 = z \cdot 0$}
\RightLabel{$\forall$-S}
\UnaryInfC{$\forall x\, x \cdot 0 = 0 \vdash 0 \cdot 0 = z \cdot 0$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash 0 \cdot 0 = z \cdot 0$}
\RightLabel{$\exists$-D$_v$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists x\, 0 \cdot x = z \cdot 0$}
\RightLabel{$\exists$-D$_v$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists w\, \exists x\, 0 \cdot x = z \cdot w$}
\RightLabel{$\exists$-D$_v$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists y\, \exists w\, \exists x\, y \cdot x = z \cdot w$}
\end{prooftree}

$\boxed{\textbf{Ax.4, Ax.3} \vdash \mathbf{C}_4}$

$$
\begin{array}{cl}
\pi_1 \qquad \pi_2 & \\
\hline
\forall x\forall y\, x+s(y)=s(x+y) \vdash\ s(5+0)+0=0+s(5) & \text{tr-r} \\
\hline
\forall x\forall y\, x+s(y)=s(x+y),\ s(5+0)=5+s(0) \vdash\ s(5+0)+0=0+s(5) & \mathrm{In}_{sx} \\
\hline
\forall x\forall y\, x+s(y)=s(x+y),\ s(5+0)=5+s(0) \vdash\ (5+s(0))+0=0+s(5) & \text{=-S} \\
\hline
\forall x\forall y\, x+s(y)=s(x+y),\ 5+s(0)=s(5+0) \vdash\ (5+s(0))+0=0+s(5) & \text{sy-l} \\
\hline
\forall x\forall y\, x+s(y)=s(x+y),\ \forall y\, 5+s(y)=s(5+y) \vdash\ (5+1)+0=0+s(5) & \forall\text{-S}_v \\
\hline
\vdash \text{Ax.4} \qquad \forall x\forall y\, x+s(y)=s(x+y) \vdash\ (5+1)+0=0+s(5) & \forall\text{-S} \\
\hline
\vdash\ (5+1)+0=0+s(5) & \mathrm{comp}_{sx} \\
\hline
\vdash\ \exists y\,(5+1)+0=0+y & \exists\text{-D}_v
\end{array}
$$

L'albero qui si sdoppia in π_1 e π_2 .

$$
\begin{array}{cl}
ax-id & \\
\forall x\forall y\,(...),\ s(5)+0=s(5),\ 0=0+0 \vdash\ s(5)+0=s(5) & \\
\hline
\forall x\forall y\,(...),\ s(5)+0=s(5),\ 0=0+0 \vdash\ s(5)+0=s(s(s(s(s(s(0)))))) & \\
\hline
\forall x\forall y\,(...),\ s(5)+0=s(5),\ 0=0+0 \vdash\ s(5)+0=s(s(s(s(s(s(0+0)))))) & \text{=-S} \\
\hline
\forall x\forall y\,(...),\ s(5)+0=s(5),\ 0+0=0 \vdash\ s(5)+0=s(s(s(s(s(s(0+0)))))) & \text{sy-l} \\
\hline
\forall x\forall y\,(...),\ s(5)+0=s(5),\ \forall x\, x+0=x \vdash\ s(5)+0=s(s(s(s(s(s(0+0)))))) & \forall\text{-S}_v \\
\hline
\forall x\forall y\,(...),\ \forall x\, x+0=x,\ s(5)+0=s(5) \vdash\ s(5)+0=s(s(s(s(s(s(0+0)))))) & \mathrm{sc}_{sx} \\
\hline
\vdash \text{Ax.3} \qquad \forall x\forall y\,(...),\ \forall x\, x+0=x \vdash\ s(5)+0=s(s(s(s(s(s(0+0)))))) & \forall\text{-S} \\
\hline
\forall x\forall y\,(...) \vdash\ s(5+0)+0=s(s(s(s(s(s(0+0)))))) & \\
\hline
\pi_1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cl}
\text{sm*} & \\
0+s(5)=s(0+5) \vdash\ s(0+5)=0+s(5) & \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y) \vdash\ s(0+5)=0+s(5) & \forall\text{-S}_v \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y),\ 0+s(4)=s(0+4) \vdash\ s(0+s(4))=0+s(5) & \mathrm{In}_{sx} \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y),\ 0+s(4)=s(0+4) \vdash\ s(s(0+4))=0+s(5) & \text{=-S} \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y) \vdash\ s(s(0+4))=0+s(5) & \forall\text{-S} \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y),\ 0+s(3)=s(0+3) \vdash\ s(s(0+s(3)))=0+s(5) & \mathrm{In}_{sx} \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y),\ 0+s(3)=s(0+3) \vdash\ s(s(s(0+3)))=0+s(5) & \text{=-S} \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y) \vdash\ s(s(s(0+3)))=0+s(5) & \forall\text{-S} \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y),\ 0+s(2)=s(0+2) \vdash\ s(s(s(0+s(2))))=0+s(5) & \mathrm{In}_{sx} \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y),\ 0+s(2)=s(0+2) \vdash\ s(s(s(s(0+2))))=0+s(5) & \text{=-S} \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y) \vdash\ s(s(s(s(0+2))))=0+s(5) & \forall\text{-S} \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y),\ 0+s(1)=s(0+1) \vdash\ s(s(s(s(0+s(1)))))=0+s(5) & \mathrm{In}_{sx} \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y),\ 0+s(1)=s(0+1) \vdash\ s(s(s(s(s(0+1)))))=0+s(5) & \text{=-S} \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y) \vdash\ s(s(s(s(s(0+1)))))=0+s(5) & \forall\text{-S} \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y),\ 0+s(0)=s(0+0) \vdash\ s(s(s(s(s(0+s(0))))))=0+s(5) & \mathrm{In}_{sx} \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y),\ 0+s(0)=s(0+0) \vdash\ s(s(s(s(s(s(0+0))))))=0+s(5) & \text{=-S} \\
\hline
\forall y\, 0+s(y)=s(0+y) \vdash\ s(s(s(s(s(s(0+0))))))=0+s(5) & \forall\text{-S} \\
\hline
\forall x\forall y\, x+s(y)=s(x+y) \vdash\ s(s(s(s(s(s(0+0))))))=0+s(5) & \forall\text{-S}_v \\
\hline
\pi_2 &
\end{array}
$$

$\boxed{\textbf{Ax.3, Ax.2} \vdash \mathbf{C}_5}$

$$
\dfrac{
\vdash \text{Ax.2}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\pi_1 \qquad \pi_2}{s(w) = s(y) \to w = y \vdash\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0,\ \neg y \neq w}\ \to\text{-S}
}{\forall y\,(s(w) = s(y) \to w = y) \vdash\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0,\ \neg y \neq w}\ \forall\text{-S}_v
}{\forall x \forall y\,(s(x) = s(y) \to x = y) \vdash\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0,\ \neg y \neq w}\ \forall\text{-S}_v
}{\vdash\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0,\ \neg y \neq w}\ \text{comp}_{sx}
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\vdash\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0,\ \neg y \neq w}{\vdash\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0 \lor \neg y \neq w}\ \lor\text{-D}
}{\vdash\ \forall w\,(s(w) + 0 \neq s(y) + 0 \lor \neg y \neq w) \quad (**)}\ \forall\text{-D}\ (w \notin VL(**))
}{\vdash\ \forall y \forall w\,(s(w) + 0 \neq s(y) + 0 \lor \neg y \neq w) \quad (*)}\ \forall\text{-D}\ (y \notin VL(*))
$$

L'albero qui si sdoppia in π_1 e π_2 .

$$
\dfrac{
\vdash \text{Ax.3}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\neg - ax_{dx_1}}{s(y) + 0 = s(y) \vdash\ s(w) + 0 = s(y) + 0,\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0,\ \neg y \neq w}
}{s(y) + 0 = s(y) \vdash\ s(w) + 0 = s(y),\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0,\ \neg y \neq w}\ =\text{-S}
}{\forall x\, x + 0 = x \vdash\ s(w) + 0 = s(y),\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0,\ \neg y \neq w}\ \forall\text{-S}_v
}{\forall x\, x + 0 = x,\ s(w) + 0 = s(w) \vdash\ s(w) + 0 = s(y),\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0,\ \neg y \neq w}\ \text{In}_{sx}
}{\forall x\, x + 0 = x,\ s(w) + 0 = s(w) \vdash\ s(w) = s(y),\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0,\ \neg y \neq w}\ =\text{-S}
}{\forall x\, x + 0 = x \vdash\ s(w) = s(y),\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0,\ \neg y \neq w}\ \forall\text{-S}
}{
\dfrac{\vdash\ s(w) = s(y),\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0,\ \neg y \neq w}{\pi_1}
}\ \text{comp}_{sx}
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\text{sm*}}{w = y \vdash\ y = w,\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0}
}{w = y \vdash\ \neg y \neq w,\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0}\ \neg\neg\text{-D}
}{w = y \vdash\ s(w) + 0 \neq s(y) + 0,\ \neg y \neq w}\ \text{sc}_{dx}
}{\pi_2}
$$

Ax.4, Ax.3, Ax.1 $\vdash$ C$_6$

Il sequente C$_6$ è falso, per cui lo nego e ne mostro una derivazione.

$$\text{sm*}$$
$$\dfrac{s(1) = 1 + s(0),\ 0 = s(1) \vdash s(1) = 0}{s(1) = 1 + s(0),\ 0 = s(1),\ s(1) \neq 0 \vdash}\ \neg\text{-S}$$
$$\dfrac{s(1) = 1 + s(0),\ 0 = s(1),\ s(1) \neq 0 \vdash}{s(1) = 1 + s(0),\ 0 = s(1),\ \forall x\, s(x) \neq 0 \vdash}\ \forall\text{-S}_v$$
$$\dfrac{\vdash \text{Ax.2} \qquad s(1) = 1 + s(0),\ 0 = s(1),\ \forall x\, s(x) \neq 0 \vdash}{s(1) = 1 + s(0),\ 0 = s(1) \vdash}\ \text{comp}_{sx}$$
$$\dfrac{s(1) = 1 + s(0),\ 0 = s(1) \vdash}{0 = 1 + s(0),\ s(1) = 1 + s(0) \vdash}\ =\text{-S}$$
$$\dfrac{0 = 1 + s(0),\ s(1) = 1 + s(0) \vdash}{0 = 1 + s(0),\ 1 + s(0) = s(1) \vdash}\ \text{sy-l}$$
$$\dfrac{0 = 1 + s(0),\ 1 + s(0) = s(1) \vdash}{0 = 1 + s(0),\ 1 = 1 + 0,\ 1 + s(0) = s(1) \vdash}\ \text{In}_{sx}$$
$$\dfrac{0 = 1 + s(0),\ 1 = 1 + 0,\ 1 + s(0) = s(1) \vdash}{0 = 1 + s(0),\ 1 + s(0) = s(1 + 0),\ 1 = 1 + 0 \vdash}\ =\text{-S}$$
$$\dfrac{0 = 1 + s(0),\ 1 + s(0) = s(1 + 0),\ 1 = 1 + 0 \vdash}{0 = 1 + s(0),\ 1 + s(0) = s(1 + 0),\ 1 + 0 = 1 \vdash}\ \text{sy-l}$$
$$\dfrac{0 = 1 + s(0),\ 1 + s(0) = s(1 + 0),\ 1 + 0 = 1 \vdash}{0 = 1 + s(0),\ 1 + s(0) = s(1 + 0),\ \forall x\, x + 0 = x \vdash}\ \forall\text{-S}_v$$
$$\dfrac{0 = 1 + s(0),\ 1 + s(0) = s(1 + 0),\ \forall x\, x + 0 = x \vdash}{\forall x\, x + 0 = x,\ 0 = 1 + s(0),\ 1 + s(0) = s(1 + 0) \vdash}\ \text{sc}_{sx}$$
$$\dfrac{\forall x\, x + 0 = x,\ 0 = 1 + s(0),\ 1 + s(0) = s(1 + 0) \vdash}{\forall x\, x + 0 = x,\ 0 = 1 + s(0),\ \forall y\, 1 + s(y) = s(1 + y) \vdash}\ \forall\text{-S}_v$$
$$\dfrac{\forall x\, x + 0 = x,\ 0 = 1 + s(0),\ \forall y\, 1 + s(y) = s(1 + y) \vdash}{\forall x\, x + 0 = x,\ 0 = 1 + s(0),\ \forall x \forall y\, x + s(y) = s(x + y) \vdash}\ \forall\text{-S}_v$$
$$\dfrac{\forall x\, x + 0 = x,\ 0 = 1 + s(0),\ \forall x \forall y\, x + s(y) = s(x + y) \vdash}{\forall x \forall y\, x + s(y) = s(x + y),\ \forall x\, x + 0 = x,\ 0 = 1 + s(0) \vdash}\ \text{sc}_{sx}$$
$$\dfrac{\forall x \forall y\, x + s(y) = s(x + y),\ \forall x\, x + 0 = x,\ 0 = 1 + s(0) \vdash}{\forall x \forall y\, (...),\ \forall x\, x + 0 = x,\ 0 = 0 + 0,\ 0 = 1 + s(0) \vdash}\ \text{In}_{sx}$$
$$\dfrac{\forall x \forall y\, (...),\ \forall x\, x + 0 = x,\ 0 = 0 + 0,\ 0 = 1 + s(0) \vdash}{\forall x \forall y\, (...),\ 0 = 1 + s(0 + 0),\ \forall x\, x + 0 = x,\ 0 = 0 + 0 \vdash}\ =\text{-S}$$
$$\dfrac{\forall x \forall y\, (...),\ 0 = 1 + s(0 + 0),\ \forall x\, x + 0 = x,\ 0 = 0 + 0 \vdash}{\forall x \forall y\, (...),\ 0 = 1 + s(0 + 0),\ \forall x\, x + 0 = x,\ 0 + 0 = 0 \vdash}\ \text{sy-l}$$
$$\dfrac{\forall x \forall y\, (...),\ 0 = 1 + s(0 + 0),\ \forall x\, x + 0 = x,\ 0 + 0 = 0 \vdash}{\forall x \forall y\, (...),\ 0 = 1 + s(0 + 0),\ \forall x\, x + 0 = x \vdash}\ \forall\text{-S}$$
$$\dfrac{\vdash \text{Ax.3} \qquad \forall x \forall y\, (...),\ 0 = 1 + s(0 + 0),\ \forall x\, x + 0 = x \vdash}{\forall x \forall y\, x + s(y) = s(x + y),\ 0 = 1 + s(0 + 0) \vdash}\ \text{comp}_{sx}$$
$$\dfrac{\forall x \forall y\, x + s(y) = s(x + y),\ 0 = 1 + s(0 + 0) \vdash}{\forall x \forall y\, (...),\ s(0 + 0) = 0 + s(0),\ 0 = 1 + s(0 + 0) \vdash}\ \text{In}_{sx}$$
$$\dfrac{\forall x \forall y\, (...),\ s(0 + 0) = 0 + s(0),\ 0 = 1 + s(0 + 0) \vdash}{0 = 1 + (0 + s(0)),\ \forall x \forall y\, (...),\ s(0 + 0) = 0 + s(0) \vdash}\ =\text{-S}$$
$$\dfrac{0 = 1 + (0 + s(0)),\ \forall x \forall y\, (...),\ s(0 + 0) = 0 + s(0) \vdash}{0 = 1 + (0 + s(0)),\ \forall x \forall y\, (...),\ 0 + s(0) = s(0 + 0) \vdash}\ \text{sy-l}$$
$$\dfrac{0 = 1 + (0 + s(0)),\ \forall x \forall y\, (...),\ 0 + s(0) = s(0 + 0) \vdash}{0 = 1 + (0 + s(0)),\ \forall x \forall y\, (...),\ \forall y\, 0 + s(y) = s(0 + y) \vdash}\ \forall\text{-S}_v$$
$$\dfrac{0 = 1 + (0 + s(0)),\ \forall x \forall y\, (...),\ \forall y\, 0 + s(y) = s(0 + y) \vdash}{0 = 1 + (0 + 1),\ \forall x \forall y\, x + s(y) = s(x + y) \vdash}\ \forall\text{-S}$$
$$\dfrac{\vdash \text{Ax.4} \qquad 0 = 1 + (0 + 1),\ \forall x \forall y\, x + s(y) = s(x + y) \vdash}{0 = 1 + (0 + 1) \vdash}\ \text{comp}_{sx}$$
$$\dfrac{0 = 1 + (0 + 1) \vdash}{\forall z\, 0 = z + (0 + z) \vdash}\ \forall\text{-S}_v$$
$$\dfrac{\forall z\, 0 = z + (0 + z) \vdash}{\forall w\, \forall z\, w = z + (w + z) \vdash}\ \forall\text{-S}_v$$
$$\dfrac{\dfrac{ax\text{-tt}}{\vdash \text{tt}} \qquad \forall w\, \forall z\, w = z + (w + z) \vdash}{\text{tt} \to\ \forall w\, \forall z\, w = z + (w + z) \vdash}\ \to\text{-S}$$
$$\dfrac{\text{tt} \to\ \forall w\, \forall z\, w = z + (w + z) \vdash}{\vdash\ \neg(\text{tt} \to\ \forall w\, \forall z\, w = z + (w + z))}\ \neg\text{-D}$$

Ax.6 $\vdash$ C$_7$

$$\text{sm*}$$
$$\dfrac{x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x \vdash\ (x \cdot y) + x = x \cdot s(y)}{\forall y\, x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x \vdash\ (x \cdot y) + x = x \cdot s(y)}\ \forall\text{-S}_v$$
$$\dfrac{\forall y\, x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x \vdash\ (x \cdot y) + x = x \cdot s(y)}{\forall x \forall y\, x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x \vdash\ (x \cdot y) + x = x \cdot s(y)}\ \forall\text{-S}_v$$
$$\dfrac{\vdash \text{Ax.6} \qquad \forall x \forall y\, x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x \vdash\ (x \cdot y) + x = x \cdot s(y)}{\vdash\ (x \cdot y) + x = x \cdot s(y)}\ \text{comp}_{sx}$$
$$\dfrac{\vdash\ (x \cdot y) + x = x \cdot s(y)}{\vdash\ \forall w\, (w \cdot y) + w = w \cdot s(y) \quad (*)}\ \forall\text{-D}\ (x \notin VL\ (*))$$
$$\dfrac{\vdash\ \forall w\, (w \cdot y) + w = w \cdot s(y) \quad (*)}{\vdash\ \exists y\, \forall w\, (w \cdot y) + w = w \cdot s(y)}\ \exists\text{-D}_v$$

$\boxed{\textbf{Ax.3, Ax.1} \vdash \mathbf{C}_8}$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash$ Ax.1}
\AxiomC{$\vdash$ Ax.3}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$0+0=0,\ s(0)+0=s(0),\ s(0)+0\neq 0+0 \vdash\ s(0)+0\neq 0+0$}
\RightLabel{=-S}
\UnaryInfC{$0+0=0,\ s(0)\neq 0+0,\ s(0)+0=s(0) \vdash\ s(0)+0\neq 0+0$}
\RightLabel{$\forall$-S$_v$}
\UnaryInfC{$0+0=0,\ s(0)\neq 0+0,\ \forall x\, x+0=x \vdash\ s(0)+0\neq 0+0$}
\RightLabel{sc$_v$}
\UnaryInfC{$\forall x\,(...),\ 0+0=0,\ s(0)\neq 0+0 \vdash\ s(0)+0\neq 0+0$}
\RightLabel{=-S}
\UnaryInfC{$s(0)\neq 0,\ \forall x\,(...),\ 0+0=0 \vdash\ s(0)+0\neq 0+0$}
\RightLabel{$\forall$-S}
\UnaryInfC{$s(0)\neq 0,\ \forall x\, x+0=x \vdash\ s(0)+0\neq 0+0$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$s(0)\neq 0 \vdash\ s(0)+0\neq 0+0$}
\RightLabel{$\forall$-S$_v$}
\UnaryInfC{$\forall x\, s(x)\neq 0 \vdash\ s(0)+0\neq 0+0$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash\ s(0)+0\neq 0+0$}
\AxiomC{π_1}
\RightLabel{ind}
\BinaryInfC{$\vdash\ \forall x\,(s(x)+0\neq x+0)$}
\RightLabel{$\exists$-D$_v$}
\UnaryInfC{$\vdash\ \exists y\forall x\,(s(x)+0\neq x+y)$}
\end{prooftree}
$$

La diramazione π_1 è mostrata qui seguentemente.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash$ Ax.3}
\AxiomC{$\vdash$ Ax.2}
\AxiomC{π_2}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$s(x)\neq x \vdash\ s(s(x))\neq s(x)$}
\RightLabel{In$_{sx}$}
\UnaryInfC{$s(x)=s(x)+0,\ x=x+0,\ s(x)\neq x \vdash\ s(s(x))\neq s(x)$}
\RightLabel{=-S}
\UnaryInfC{$s(x)=s(x)+0,\ s(x)\neq x+0,\ x=x+0 \vdash\ s(s(x))\neq s(x)$}
\RightLabel{sy-l}
\UnaryInfC{$s(x)=s(x)+0,\ s(x)\neq x+0,\ x+0=x \vdash\ s(s(x))\neq s(x)$}
\RightLabel{$\forall$-S$_v$}
\UnaryInfC{$s(x)=s(x)+0,\ s(x)\neq x+0,\ \forall x\, x+0=x \vdash\ s(s(x))\neq s(x)$}
\RightLabel{sc$_{sx}$}
\UnaryInfC{$\forall x\, x+0=x,\ s(x)=s(x)+0,\ s(x)\neq x+0 \vdash\ s(s(x))\neq s(x)$}
\RightLabel{=-S}
\UnaryInfC{$s(x)+0\neq x+0,\ \forall x\, x+0=x,\ s(x)=s(x)+0 \vdash\ s(s(x))\neq s(x)+0$}
\RightLabel{sy-l}
\UnaryInfC{$s(x)+0\neq x+0,\ \forall x\, x+0=x,\ s(x)+0=s(x) \vdash\ s(s(x))\neq s(x)+0$}
\RightLabel{$\forall$-S}
\UnaryInfC{$s(x)+0\neq x+0,\ \forall x\, x+0=x \vdash\ s(s(x))\neq s(x)+0$}
\RightLabel{In$_{sx}$}
\UnaryInfC{$s(x)+0\neq x+0,\ \forall x\, x+0=x,\ s(s(x))=s(s(x))+0 \vdash\ s(s(x))\neq s(x)+0$}
\RightLabel{=-S}
\UnaryInfC{$s(x)+0\neq x+0,\ \forall x\, x+0=x,\ s(s(x))=s(s(x))+0 \vdash\ s(s(x))+0\neq s(x)+0$}
\RightLabel{sy-l}
\UnaryInfC{$s(x)+0\neq x+0,\ \forall x\, x+0=x,\ s(s(x))+0=s(s(x)) \vdash\ s(s(x))+0\neq s(x)+0$}
\RightLabel{$\forall$-S}
\UnaryInfC{$s(x)+0\neq x+0,\ \forall x\, x+0=x \vdash\ s(s(x))+0\neq s(x)+0$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$s(x)+0\neq x+0 \vdash\ s(s(x))+0\neq s(x)+0$}
\RightLabel{$\to$-D}
\UnaryInfC{$\vdash\ s(x)+0\neq x+0 \to s(s(x))+0\neq s(x)+0$}
\RightLabel{$\forall$-D$(x\notin VL\ (*))$}
\UnaryInfC{$\vdash\ \forall x\,(s(x)+0\neq x+0 \to s(s(x))+0\neq s(x)+0) \qquad (*)$}
\UnaryInfC{π_1}
\end{prooftree}
$$

La diramazione π_2 è mostrata qui seguentemente.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax-\neg_{dx_1}$}
\noLine
\UnaryInfC{$s(x)\neq x \vdash\ s(s(x))=s(x),\ s(s(x))\neq s(x)$}
\AxiomC{$ax-\neg_{sx_2}$}
\noLine
\UnaryInfC{$s(x)\neq x,\ s(x)=x \vdash\ s(s(x))\neq s(x)$}
\RightLabel{$\to$-S}
\BinaryInfC{$s(x)\neq x,\ s(s(x))=s(x)\to s(x)=x \vdash\ s(s(x))\neq s(x)$}
\RightLabel{$\forall$-S$_v$}
\UnaryInfC{$s(x)\neq x,\ \forall y\,(s(s(x))=s(y)\to s(x)=y) \vdash\ s(s(x))\neq s(x)$}
\RightLabel{$\forall$-S$_v$}
\UnaryInfC{$s(x)\neq x,\ \forall x\forall y\,(s(x)=s(y)\to x=y) \vdash\ s(s(x))\neq s(x)$}
\UnaryInfC{π_2}
\end{prooftree}
$$

5 Validità delle Regole

Stabilire se le seguenti regole, formalizzate dove occorre, e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica classica.

5.1 Esercizio 1

$$\frac{\Gamma, \neg C, \neg A \vdash H \,\&\, \neg H}{\Gamma \vdash C \vee A, H}\, 1$$

Per dimostrare che la regola è valida, data una riga r della tabella di verità, devo mostrare che:

Ipotesi

① $\Gamma^{\&} \,\&\, (\neg C \,\&\, \neg A) \rightarrow H \,\&\, \neg H = 1$ su r

② $\Gamma^{\&} = 1$ su r

Tesi

$(C \vee A) \vee H = 1$ su r

Dimostrazione Sono presenti due casi: $H = 1$ e $H = 0$.

- Se $H = 1$ su r, allora $(C \vee A) \vee H = 1$ su r e la tesi è verificata.
- Se $H = 0$ su r, allora $H \,\&\, \neg H = 0$ su r. Segue dall'ipotesi ① che $\Gamma^{\&} \,\&\, (\neg C \,\&\, \neg A) = 0$ su r. Dunque, dall'ipotesi ② segue che $(\neg C \,\&\, \neg A) = 0$ su r.
  Abbiamo due sottocasi: ⓐ $\neg C = 0$ e ⓑ $\neg A = 0$ su r.
  - ⓐ $\neg C = 0$ su r implica che $C = 1$ su r. Quindi, $C \vee A = 1$ su r e di conseguenza $(C \vee A) \vee H = 1$ su r. La tesi è verificata.
  - ⓑ $\neg A = 0$ su r implica che $A = 1$ su r. Quindi, $C \vee A = 1$ su r e di conseguenza $(C \vee A) \vee H = 1$ su r. La tesi è verificata.

La tesi è sempre vera, quindi **la regola 1 è valida.**

Inversa

$$\frac{\Gamma \vdash C \vee A, H}{\Gamma, \neg C, \neg A \vdash H \,\&\, \neg H}\, 1_{\text{inv}}$$

Per dimostrare che la regola è valida, data una riga r della tabella di verità, devo mostrare che:

Ipotesi

① $\Gamma^{\&} \rightarrow (C \vee A) \vee H = 1$ su r

② $\Gamma^{\&} \,\&\, (\neg C \,\&\, \neg A) = 1$ su r

Tesi

$H \,\&\, \neg H = 1$ su r

Dimostrazione La regola 1_{inv} non è valida: infatti, se scelgo la riga $\Gamma^{\&} = 1$, $C = A = 0$, $H = 1$, allora $\neg C = \neg A = 1$ e $C \vee A = 0$ sulla riga. Inoltre, $\neg C \,\&\, \neg A = 1$, quindi $\Gamma^{\&} \,\&\, (\neg C \,\&\, \neg A) = 1$ sulla riga. Infine, $(C \vee A) \vee H = 1$ e, quindi, $\Gamma^{\&} \rightarrow (C \vee A) \vee H = 1$ sulla riga, ma $\neg H = 0$ comporta $H \,\&\, \neg H = 0$ sulla riga.
Quindi, le ipotesi sono verificate, ma la tesi è falsa.
La regola 1_{inv} non è valida e la regola 1 non è sicura.

5.2 Esercizio 2

$$\frac{\mathrm{C} \vdash \mathrm{A}, \mathrm{D} \qquad \mathrm{C}, \mathrm{M} \vdash \mathrm{D}}{\mathrm{A} \to \mathrm{M} \vdash \mathrm{C} \to \mathrm{D}}\ 2$$

Per dimostrare che la regola è valida, data una riga r della tabella di verità, devo mostrare che:

Ipotesi

① $\mathrm{C} \to \mathrm{A} \vee \mathrm{D} = 1$ su r

② $\mathrm{C}\ \&\ \mathrm{M} \to \mathrm{D} = 1$ su r

③ $\mathrm{A} \to \mathrm{M} = 1$ su r

Tesi

$\mathrm{C} \to \mathrm{D} = 1$ su r

Dimostrazione Ci sono due casi: $\mathrm{C} = 0$ e $\mathrm{C} = 1$ su r.

- Se $\mathrm{C} = 0$ su r, allora $\mathrm{C} \to \mathrm{D} = 1$ su r. La tesi è verificata.
- Se $\mathrm{C} = 1$ su r, allora abbiamo due sottocasi: ⓐ $\mathrm{C}\ \&\ \mathrm{M} = 1$ e ⓑ $\mathrm{C}\ \&\ \mathrm{M} = 0$ su r
  - ⓐ Se $\mathrm{C}\ \&\ \mathrm{M} = 1$ su r, allora per l'ipotesi ② $\mathrm{D} = 1$ su r necessariamente e, quindi, la tesi è verificata.
  - ⓑ Se $\mathrm{C}\ \&\ \mathrm{M} = 0$ su r, allora $\mathrm{M} = 0$ su r e per l'ipotesi ③ $\mathrm{A} = 0$ su r necessariamente. Da $\mathrm{C} = 1$ su r e dall'ipotesi ① segue che $\mathrm{A} \vee \mathrm{D} = 1$ su r necessariamente. $\mathrm{A} = 0$ su r comporta $\mathrm{D} = 1$ su r. Quindi, $\mathrm{C} \to \mathrm{D} = 1$ su r. La tesi è verificata.

La tesi è sempre vera, quindi **la regola 2 è valida.**

Inverse

1ª inversa

$$\frac{A \to M \vdash C \to D}{C \vdash A, D}\, 2_{\text{inv}_1}$$

Per dimostrare che la regola è valida, data una riga r della tabella di verità, devo mostrare che:

Ipotesi

① $(A \to M) \to (C \to D) = 1$ su r

② $C = 1$ su r

Tesi

$A \vee D = 1$ su r

Dimostrazione Ci sono due casi: ⓐ $A \to M = 1$ e ⓑ $A \to M = 0$ su r.

ⓐ Se $A \to M = 1$ su r, allora per l'ipotesi ① $C \to D = 1$ su r necessariamente e, dunque, per l'ipotesi ② $D = 1$ su r. Quindi, $A \vee D = 1$ su r. La tesi è verificata.

ⓑ $A \to M = 0$ su r implica $A = 1$ e $M = 0$ entrambi su r. Quindi, $A \vee D = 1$ su r. La tesi è verificata.

La tesi è sempre vera, quindi **la regola $\mathbf{2_{inv_1}}$ è valida.**

2ª inversa

$$\frac{A \to M \vdash C \to D}{C, M \vdash D}\, 2_{\text{inv}_2}$$

Per dimostrare che la regola è valida, data una riga r della tabella di verità, devo mostrare che:

Ipotesi

① $(A \to M) \to (C \to D) = 1$ su r

② $C \,\&\, M = 1$ su r

Tesi

$D = 1$ su r

Dimostrazione Per l'ipotesi ②, $C = M = 1$ su r e, quindi, $A \to M = 1$ su r.
Per l'ipotesi ①, segue che $C \to D = 1$ su r necessariamente. $C = 1$ su r implica che $D = 1$ su r necessariamente. La tesi è verificata.
La tesi è sempre vera, quindi **la regola $\mathbf{2_{inv_2}}$ è valida.**

La regola 2 e le sue inverse sono valide, quindi la regola 2 è sicura.

5.3 Esercizio 3

$$\frac{\text{Dino è un poeta} \vdash \text{Dino scrive poesie}}{\text{Non esiste poeta che non scriva poesie} \vdash \text{Qualcuno scrive poesie}}\ 3$$

ove:
S(x)="x scrive poesie"
P(x)="x è un poeta"
d = "Dino"

La sua formalizzazione è

$$\frac{\mathrm{P(d)} \vdash \mathrm{S(d)}}{\neg\exists x\,(\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x)) \vdash \exists x\ \mathrm{S}(x)}\ 3$$

Sia $\mathcal{D}$ un modello e D il suo dominio.
Ipotesi: $(\mathrm{P(d)}\rightarrow\mathrm{S(d)})^{\mathcal{D}} = 1$ con $\mathrm{d}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Dino}$

Tesi: $(\neg\exists x\ (\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x)) \rightarrow \exists x\ \mathrm{S}(x))^{\mathcal{D}} = 1$

Dimostrazione La regola 3 non è valida. Mostro un contromodello $\mathcal{D}$.
D = {Dino}, $\mathrm{P}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino}) = 0$ e $\mathrm{S}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino}) = 0$.
Allora $(\mathrm{P(d)}\rightarrow\mathrm{S(d)})^{\mathcal{D}} \equiv \mathrm{P}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino}) \rightarrow \mathrm{S}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino}) = 0 \rightarrow 0 = 1$.
Ma $(\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x))^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}) = 0$ per ogni d ∈ D, poiché Dino è l'unico elemento di D: infatti, $\mathrm{P}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino})\ \&\ \neg\mathrm{S}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino}) = 0\ \&\ 1 = 0$.
Quindi non esiste $\overline{\mathrm{d}} \in \mathrm{D}$ tale che $(\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x))^{\mathcal{D}}(\overline{\mathrm{d}}) = 1$, ovvero non ha testimoni.
Quindi, $(\exists x\,(\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x)))^{\mathcal{D}} = 0$ e $(\neg\exists x\,(\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x)))^{\mathcal{D}} = 1$.
Ma $\mathrm{S}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{d}) = 0$ per ogni d ∈ D poiché Dino è l'unico elemento di D e $\mathrm{S}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino}) = 0$. Quindi, $(\exists x\,\mathrm{S}(x))^{\mathcal{D}} = 0$. Dunque, la tesi
$(\neg\exists x\ (\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x)) \rightarrow \exists x\ \mathrm{S}(x))^{\mathcal{D}} \equiv (\neg\exists x\ (\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x)))^{\mathcal{D}} \rightarrow (\exists x\ \mathrm{S}(x))^{\mathcal{D}} = 1 \rightarrow 0 = 0$.
Le ipotesi sono verificate, ma non la tesi.
La regola 3 non è valida e non è sicura.

Inversa

$$\frac{\neg\exists x\ (\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x)) \vdash \exists x\ \mathrm{S}(x)}{\mathrm{P(d)} \vdash \mathrm{S(d)}}\ 3_{\mathrm{inv}}$$

Sia $\mathcal{D}$ un modello e D il suo dominio.
Ipotesi: $(\neg\exists x\ (\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x)) \rightarrow \exists x\ \mathrm{S}(x))^{\mathcal{D}} = 1$

Tesi: $(\mathrm{P(d)}\rightarrow\mathrm{S(d)})^{\mathcal{D}} = 1$ con $\mathrm{d}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Dino}$

Dimostrazione La regola 3_{inv} non è valida. Mostro un contromodello $\mathcal{D}$.
D = {Dino}, $\mathrm{P}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino}) = 1$ e $\mathrm{S}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino}) = 0$.
Dino è l'unico elemento di D.
$\mathrm{P}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino}) = 1$ e $\neg\mathrm{S}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino}) = 1$. Quindi, $\mathrm{P}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino})\ \&\ \neg\mathrm{S}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino}) = 1$. Segue che $(\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x))^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino}) = 1$.
Dunque, $(\exists x\,(\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x)))^{\mathcal{D}} = 1$ e $(\neg\exists x\,(\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x)))^{\mathcal{D}} = 0$.
Quindi, l'ipotesi
$(\neg\exists x\,(\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x)) \rightarrow \exists x\,\mathrm{S}(x))^{\mathcal{D}} \equiv (\neg\exists x\,(\mathrm{P}(x)\ \&\ \neg\mathrm{S}(x)))^{\mathcal{D}} \rightarrow (\exists x\,\mathrm{S}(x))^{\mathcal{D}} =$
$= 0 \rightarrow (\exists x\,\mathrm{S}(x))^{\mathcal{D}} = 1$, ovvero l'ipotesi è verificata.
Ma $(\mathrm{P(d)} \rightarrow \mathrm{S(d)})^{\mathcal{D}} = \mathrm{P}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino}) \rightarrow \mathrm{S}(x)^{\mathcal{D}}(\mathrm{Dino}) = 1 \rightarrow 0 = 0$, ovvero la tesi è falsa.
Le ipotesi sono verificate, ma non la tesi.
La regola 3_{inv} non è valida e la regola 3 non è sicura.

5.4 Esercizio 4

$$\frac{\text{Flavio ascolta qualcosa} \vdash \text{Flavio non ascolta Beethoven}}{\text{Flavio ascolta Mozart} \vdash \text{Qualcuno non ascolta Beethoven}}\ 4$$

ove A(x, y)="x ascolta y"
m="Mozart"
b="Beethoven"
f="Flavio"

La sua formalizzazione è

$$\frac{\exists y\, \mathrm{A}(\mathrm{f},\, y) \vdash \neg\mathrm{A}(\mathrm{f},\, \mathrm{b})}{\mathrm{A}(\mathrm{f},\, \mathrm{m}) \vdash \exists x\, \neg\mathrm{A}(x,\, \mathrm{b})}\ 4$$

Sia $\mathcal{D}$ un modello e D il suo dominio.
Ipotesi: $(\exists y\, \mathrm{A}(\mathrm{f},\, y) \to \neg\mathrm{A}(\mathrm{f},\, \mathrm{b}))^{\mathcal{D}} = 1$ con $\mathrm{f}^{\mathcal{D}} = \text{Flavio}$ e $\mathrm{b}^{\mathcal{D}} = \text{Beethoven}$

Tesi: $(\mathrm{A}(\mathrm{f},\, \mathrm{m}) \to \exists x\, \neg\mathrm{A}(x,\, \mathrm{b}))^{\mathcal{D}} = 1$ con $\mathrm{f}^{\mathcal{D}} = \text{Flavio}$, $\mathrm{m}^{\mathcal{D}} = \text{Mozart}$ e $\mathrm{b}^{\mathcal{D}} = \text{Beethoven}$

Dimostrazione La tesi $(\mathrm{A}(\mathrm{f},\, \mathrm{m}) \to \exists x\, \mathrm{A}(x,\, \mathrm{b}))^{\mathcal{D}}$ equivale a
$\mathrm{A}(x,\, y)^{\mathcal{D}}(\text{Flavio, Mozart}) \to (\exists x\, \neg\mathrm{A}(x,\, y))^{\mathcal{D}}(\text{Beethoven})$.
Ci sono due casi:

1. Se $\mathrm{A}(x,\, y)^{\mathcal{D}}(\text{Flavio, Mozart}) = 0$, allora $(\mathrm{A}(\mathrm{f},\, \mathrm{m}) \to \exists x\, \mathrm{A}(x,\, \mathrm{b}))^{\mathcal{D}} \equiv$
   $\equiv \mathrm{A}(x,\, y)^{\mathcal{D}}(\text{Flavio, Mozart}) \to (\exists x\, \mathrm{A}(x,\, y))^{\mathcal{D}}(\text{Beethoven}) =$
   $= 0 \to (\exists x\, \mathrm{A}(x,\, y))^{\mathcal{D}}(\text{Beethoven}) = 1$, ovvero la tesi è verificata.

2. Se $\mathrm{A}(x,\, y)^{\mathcal{D}}(\text{Flavio, Mozart}) = 1$, allora Mozart è testimone di $\mathrm{A}(x,\, y)^{\mathcal{D}}(\text{Flavio, d})$ con $\mathrm{d} \in \mathrm{D}$. Quindi, $(\exists y\, \mathrm{A}(x,\, y))^{\mathcal{D}}(\text{Flavio}) = 1$.
   L'ipotesi $(\exists y\, \mathrm{A}(\mathrm{f},\, y) \to \neg\mathrm{A}(\mathrm{f},\, \mathrm{b}))^{\mathcal{D}}$ equivale a
   $(\exists y\, \mathrm{A}(x,\, y))^{\mathcal{D}}(\text{Flavio}) \to (\neg\mathrm{A}(x,\, y))^{\mathcal{D}}(\text{Flavio, Beethoven})$.
   Quindi, necessariamente $(\neg\mathrm{A}(x,\, y))^{\mathcal{D}}(\text{Flavio, Beethoven}) = 1$.
   Quindi, Flavio è testimone di $\neg\mathrm{A}(x,\, y)^{\mathcal{D}}(\text{d, Beethoven})$ con $\mathrm{d} \in \mathrm{D}$.
   Quindi, $(\exists x\, \neg\mathrm{A}(x,\, y))^{\mathcal{D}}(\text{Beethoven}) = 1$. Segue che $(\mathrm{A}(\mathrm{f},\, \mathrm{m}) \to \exists x\, \mathrm{A}(x,\, \mathrm{b}))^{\mathcal{D}} \equiv$
   $\equiv \mathrm{A}(x,\, y)^{\mathcal{D}}(\text{Flavio, Mozart}) \to (\exists x\, \neg\mathrm{A}(x,\, y))^{\mathcal{D}}(\text{Beethoven}) = 1 \to 1 = 1$, ovvero la tesi è verificata.

La tesi è sempre vera, quindi **la regola 4 è valida.**

Inversa

$$\frac{\mathrm{A}(\mathrm{f},\ \mathrm{m}) \vdash \exists x\, \neg \mathrm{A}(x,\ \mathrm{b})}{\exists y\, \mathrm{A}(\mathrm{f},\ y) \vdash \neg \mathrm{A}(\mathrm{f},\ \mathrm{b})}\ 4_{\mathrm{inv}}$$

Sia $\mathcal{D}$ un modello e D il suo dominio.
Ipotesi: $(\mathrm{A}(\mathrm{f},\ \mathrm{m}) \to \exists x\, \neg \mathrm{A}(x,\ \mathrm{b}))^{\mathcal{D}} = 1$ con $\mathrm{f}^{\mathcal{D}} =$ Flavio, $\mathrm{m}^{\mathcal{D}} =$ Mozart e $\mathrm{b}^{\mathcal{D}} =$ Beethoven

Tesi: $(\exists y\, \mathrm{A}(\mathrm{f},\ y) \to \neg \mathrm{A}(\mathrm{f},\ \mathrm{b}))^{\mathcal{D}} = 1$ con $\mathrm{f}^{\mathcal{D}} =$ Flavio e $\mathrm{b}^{\mathcal{D}} =$ Beethoven

Dimostrazione La regola 4_{inv} è non valida. Mostro un contromodello $\mathcal{D}$.
Sia D = {Flavio, Mozart, Beethoven},
$\mathrm{A}(x,\ y)^{\mathcal{D}}$(Flavio, Mozart) = 0 e $\mathrm{A}(x,\ y)^{\mathcal{D}}$(Flavio, Beethoven) = 1.
$(\mathrm{A}(\mathrm{f},\ \mathrm{m}) \to \exists x\, \neg \mathrm{A}(x,\ \mathrm{b}))^{\mathcal{D}} \equiv \mathrm{A}(x,\ y)^{\mathcal{D}}$(Flavio, Mozart)$\to(\exists x\, \neg \mathrm{A}(x,\ y))^{\mathcal{D}}$(Beethoven) =
= 0 $\to (\exists x\, \neg \mathrm{A}(x,\ y))^{\mathcal{D}}$(Beethoven) = 1, ovvero l'ipotesi è verificata.
Da $\mathrm{A}(x,\ y)^{\mathcal{D}}$(Flavio, Beethoven) = 1 segue che Beethoven è testimone di $\mathrm{A}(x,\ y)^{\mathcal{D}}$(Flavio, d) con d $\in$ D. Quindi, $(\exists y\, \mathrm{A}(x,\ y))^{\mathcal{D}}$(Flavio) = 1.
$(\exists y\, \mathrm{A}(\mathrm{f},\ y) \to \neg \mathrm{A}(\mathrm{f},\ \mathrm{b}))^{\mathcal{D}} \equiv (\exists y\, \mathrm{A}(x,\ y))^{\mathcal{D}}$(Flavio) $\to \neg \mathrm{A}(x,\ y)^{\mathcal{D}}$(Flavio, Beethoven) = 1 $\to$ 0 = 0, ovvero la tesi è falsa.
Quindi, l'ipotesi è verificata, ma non la tesi.
La regola 4_{inv} non è valida e la regola 4 non è sicura.

Consigli per l'esame

L'esame di logica si basa su una grande quantità di esercizi, suddivisi in 5 categorie: ① Derivazioni, ② Formalizzazioni e Derivazioni, ③ Teorie, ④ derivazione nell'Aritmetica di Peano e ⑤ verifica della Validità delle Regole. Il maggior numero di esercizi è concentrato nella seconda e nella terza parte dell'esame, anche se esercizi come quelli della parte ⑤ ti ricompensano con più punti.
La struttura dell'esame permette di "personalizzare" l'approccio. Occorre, quindi, stabilire una strategia **corretta** in base alle proprie capacità e al tempo di studio impiegato.
Ecco quali conoscenze servono, secondo me, per ognuna delle categorie elencate:

① **Derivazioni:** la parte più semplice dell'esame e non richiede uno studio approfondito. Basta saper usare le regole viste in aula, saper negare un sequente e costruire un modello/contromodello;

② **Formalizzazioni e Derivazioni:** la parte principale dell'esame, insieme alla ③. Presenta degli esercizi con difficoltà crescente: i primi richiedono uno studio non troppo approfondito, ma accompagnato da una discreta dose di esercitazioni pratiche; gli ultimi sono abbastanza difficili e sono spesso paradossi o tautologie presentati in aula "camuffati" in qualche modo(ad es. paradosso di Russell). Essi richiedono uno studio non superficiale. Le conoscenze richieste sono le stesse del punto ① unite a più o meno sviluppate capacità di formalizzazione dei sequenti;

③ **Teorie:** la parte forse più conveniente dell'esame: richiede capacità di formalizzazione non spiccate, la conoscenza delle regole (anche comp_{sx}) e delle tautologie classiche più comuni (ad es. De Morgan) e saper "concatenare" le implicazioni (ad es. $\text{A}\to\text{B}, \text{B}\to\text{C}\vdash\text{A}\to\text{C}$). Inoltre, può esser utile saper riconoscere paradossi scaturiti dalla composizione di assiomi o conclusioni (vedi Esercizio 3.2);

④ **Aritmetica di Peano:** la parte meno conveniente, a mio parere: esercizi lunghi e punti non sufficientemente elevati. Sono richieste buone capacità di derivazione e un'ottima conoscenza della regola =-S, insieme a quelle derivate da essa (sy-l, sy-r, tr-r), e degli assiomi rf*,sm*,tra*,cf*,cp*. L'ultimo sequente solitamente esige l'uso dell'induzione, ovvero della regola ind. Inoltre, è fondamentale conoscere le proprietà dei numeri naturali in modo tale da poter intuire se il sequente che si sta derivando sia vero o falso;

⑤ **Validità delle Regole:** lo svolgimento di questa parte è consigliato a chi conosce bene la teoria e abbia letto almeno una volta il materiale indicato dal docente, specialmente per le regole che prevedono l'uso dei quantificatori. Sono richieste un'ottima conoscenza delle regole mostrate in aula e una chiara comprensione dei quantificatori. Inoltre, raccomando di consultare l'insegnante per esser sicuri di usare le corrette notazioni e terminologie.

La mia strategia La mia strategia prevede lo svolgimento della parte ① fino al raggiungimento dei 18 punti, al fine di poter continuare il resto dell'esame senza l'ansia di non passarlo. Svolti tali esercizi, segue un breve controllo delle teorie (3 min. massimo): se una teoria presenta degli assiomi contraddittori, allora si prosegue alla derivazione del $\perp$ in tale teoria e alla derivazione delle sue conclusioni. Segue la derivazione dei paradossi o tautologie "camuffati". Infine, si passa allo svolgimento della parte ⑤. Se resta tempo si prosegue con le derivazioni più semplici della parte ④.