I-Compitino LOGICA 21 novembre 2015

nome:

cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si considerano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente (se non lo fate perdete punti!).
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Se il punteggio **x** ottenuto in questo I compitino è superiore o uguale a **18** allora tale punteggio sarà SOMMATO al punteggio del primo appello di logica dell'anno 2015/2016 in cui il candidato riporterà un punteggio superiore a sua volta a **18** e sulla somma di tale punteggio sarà conteggiato il voto finale di superamento dell'esame di logica.
- Se il punteggio **x** ottenuto in questo I compitino è inferiore strettamente a **18** allora il candidato potrà superare uno dei primi due appelli invernali SOLO SE avrà riportato un punteggio superiore a

$$(\mathbf{18} - \mathbf{x})/\mathbf{5}$$

nella tipologia di esercizi già affrontati nel I compitino.

- Mostrare se i sequenti di seguito sono tautologie o opinioni o paradossi in logica classica, in altri termini si mostri se sono validi o non validi e se sono soddisfacibili o insoddisfacibili in logica classica. Nel caso il sequente non sia valido esibire una riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e poi in caso di soddisfacibilità una riga in cui il sequente è vero.

  Nel caso di paradossi o opinioni i punti vengono raddoppiati.

3 punti

1 $\neg(\,(A \to C\&B\,) \to \neg(B\,\&\,C\,)\,) \vdash \neg(\,A \vee \perp\,)$

3 punti

2 $\vdash \neg(\,\boxed{(\,\neg A \& \neg B \;\to\; \neg(\,A \vee B\,)\,)} \vee A\,)$

- Formalizzare in sequente le argomentazioni di seguito. Si provi se il sequente ottenuto è tautologia, opinione o paradosso, ovvero se è valido o meno e soddisfacibile o meno rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta. Nel caso il sequente non sia valido esibire una riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e poi in caso di soddisfacibilità una riga in cui il sequente è vero (nel caso di opinioni o paradossi i punti vengono raddoppiati):

3

  – (4 punti)

    Non si dà il caso che piova se splende il sole.

    Solo se non piove nevica. $\neg P \to N$

    Non si dà il caso che nè piova e nè splenda il sole e nè nevichi.

    si consiglia di usare:
    P=piove
    S =splende il sole
    N=nevica

4

  – (4 punti)

    Non si dà il caso che la casa sia antisismica e non sia isolata termicamente.

    La casa non è antisismica ed è a rischio di crollo, se non è isolata termicamente.

    si consiglia di usare:
    A =la casa è antisismica
    I =la casa è isolata termicamente
    R=la casa è a rischio di crollo

5

- Si formalizzino le seguenti affermazioni, che chiamiamo *premesse*:

  1. Solo se Ludovico e Nico sono al parco allora è domenica.
  2. Non si dà il caso che non sia nè sabato e neanche domenica.
  3. Nico non è al parco se Gaia o Beatrice sono al parco.
  4. Gaia non è al parco solo se Beatrice vi è.
  5. Nico è al parco se Gaia non vi è.
  6. Se Fausto è al parco, non si dà il caso che Nico non sia al parco oppure Gaia non sia al parco oppure Beatrice non sia al parco .
  7. Se Beatrice non è al parco allora è sabato.

Si consiglia di usare:

N=Nico è al parco
F=Fausto è al parco
G=Gaia è al parco
B=Beatrice è al parco
L=Ludovico è al parco
S=È sabato
D=È domenica

Formalizzare le seguenti affermazioni, che chiamiamo *conclusioni*, e dimostrare che ciascuna conclusione è conseguenza logica in $\mathbf{LC}_p$ di una o più affermazioni della lista delle premesse eventualmente unite a una o più conclusioni che precedono la conclusione considerata nella lista delle conclusioni:

1. (3 punti) Se Nico non è al parco non si dà il caso che Gaia non sia al parco.
2. (3 punti) Se Nico è al parco non vi è Gaia.
3. (3 punti) Beatrice non è al parco se Nico è al parco.
4. (3 punti) Gaia è al parco.
5. (3 punti) Nico non è al parco.
6. (3 punti) Fausto non è al parco.
7. (3 punti) Non è domenica ma è sabato.

- Negli esercizi che seguono il punteggio è riferito all'analisi della validità di ciascuna regola:

- (10 punti) la regola

$$\frac{\Gamma \vdash C \quad \Gamma \vdash E, A}{\Gamma \vdash (A \vee B) \vee C} \; 1$$

è valida? Sono valide le sue inverse? È regola sicura?

- (10 punti) la regola

$$\frac{A, B \vdash E \quad M, E, N \vdash K, P}{M, A, B, N \vdash K, P} \; 2$$

è valida? Sono valide le sue inverse? È regola sicura?

- (11 punti) Formalizzare la regola seguente

$$\frac{\text{È inverno e nevica in città} \vdash \text{Nevica in montagna.}}{\text{È inverno.} \vdash \text{Non nevica in città oppure nevica in montagna, oppure piove.}} \; 2$$

ove
I=È inverno
M=Nevica in montagna
C=Nevica in città
P=Piove

La regola ottenuta è valida? È valida la sua inversa? È regola sicura?

La negazione del sequente iniziale è tautologia

Quindi il sequente iniziale è un paradosso

ax-id

$\neg A, B \vdash B, A$

$\neg$-S

$\neg A, B, \neg B \vdash A$

sc-sx

ax-id: $\neg A, \neg B, A \vdash A$ $\qquad$ $\neg A, \neg B, B \vdash A$

$\vee$-S

$\neg A, \neg B, A \vee B \vdash A$

$\neg$-D

$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B), A$

&-S

$\neg A \,\&\, \neg B \vdash \neg(A \vee B), A$

$\rightarrow$-D

$\vdash \neg A \,\&\, \neg B \rightarrow \neg(A \vee B), A$

$\vee$-D

$\vdash (\neg A \,\&\, \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)) \vee A$

$\neg$-S

ax-tt: $\vdash tt$ $\qquad$ $\neg((\neg A \,\&\, \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)) \vee A) \vdash$

$\rightarrow$-S

$tt \rightarrow (\neg((\neg A \,\&\, \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)) \vee A)) \vdash$

$\neg$-D

$\vdash \neg(tt \rightarrow (\neg((\neg A \,\&\, \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)) \vee A)))$ $\Rightarrow$ negazione del sequente iniziale

$\vdash \neg((\neg A \,\&\, \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)) \vee A)$ $\Rightarrow$ sequente iniziale

(2)

Il sequente radice è una tautologia

6

ax-id

$N \rightarrow \neg P, S \vdash P, P, S, N$

$\rightarrow$-D

$N \rightarrow \neg P \vdash S \rightarrow P, P, S, N$

$\neg$-S

$N \rightarrow \neg P, \neg(S \rightarrow P) \vdash P, S, N$

sc-sx

$\neg(S \rightarrow P), N \rightarrow \neg P \vdash P, S, N$

$\neg$-S

$\neg(S \rightarrow P), N \rightarrow \neg P, \neg P \vdash S, N$

$\neg$-S

$\neg(S \rightarrow P), N \rightarrow \neg P, \neg P, \neg S \vdash N$

&-S

$\neg(S \rightarrow P), N \rightarrow \neg P, \neg P \,\&\, \neg S \vdash N$

$\neg$-S

$\neg(S \rightarrow P), N \rightarrow \neg P, (\neg P \,\&\, \neg S), \neg N \vdash$

&-S

$\neg(S \rightarrow P), N \rightarrow \neg P, (\neg P \,\&\, \neg S) \,\&\, \neg N \vdash$

$\neg$-D

$\neg(S \rightarrow P), N \rightarrow \neg P \vdash \neg((\neg P \,\&\, \neg S) \,\&\, \neg N)$

(3)

⑤

PREMESSE		CONCLUSIONI	
P_1	$D \to L \& N$	C_1	$\neg N \to \neg\neg G$
P_2	$\neg(\neg S \& \neg D)$	C_2	$N \to \neg G$
P_3	$G \vee B \to \neg N$	C_3	$N \to \neg B$
P_4	$\neg G \to B$	C_4	G
P_5	$\neg G \to N$	C_5	$\neg N$
P_6	$F \to \neg((\neg N \vee \neg G) \vee \neg B)$	C_6	$\neg F$
P_7	$\neg B \to S$	C_7	$\neg D \& S$

OK

1

√ OK

10

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{\text{ax-id}}{\neg G \vdash \neg G, N} \qquad \overset{\text{ax-id}}{\neg G, N \vdash N}}{\neg G, \neg G \to N \vdash N}\ \to\text{-S}}{\neg G, \neg G \to N, \neg N \vdash}\ \neg\text{-S}}{\neg G \to N, \neg N, \neg G \vdash}\ \text{scsx}}{\neg G \to N, \neg N \vdash \neg\neg G}\ \neg\text{-D}}{\neg G \to N \vdash \neg N \to \neg\neg G}\ \to\text{-D}
$$

1

3

$P_5 \vdash C_1$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{\text{ax-id}}{N, G \vdash G, B}}{N, G \vdash G \vee B}\ \vee\text{-D} \qquad \cfrac{\overset{\text{ax-id}}{N, G \vdash N}}{N, G, \neg N \vdash}\ \neg\text{-S}}{N, G, G \vee B \to \neg N \vdash}\ \to\text{-S}}{G \vee B \to \neg N, N, G \vdash}\ \text{scsx}}{G \vee B \to \neg N, N \vdash \neg G}\ \neg\text{-D}}{G \vee B \to \neg N \vdash N \to \neg G}\ \to\text{-D}
$$

3

$P_3 \vdash C_2$

2

ax-id $N, B \vdash G, B, \neg G$ ∨-D $N, B \vdash G \vee B, \neg G$

ax-id $N, B \vdash N, \neg G$ ¬-S $N, B, \neg N \vdash \neg G$

→-S $N, B, G \vee B \to \neg N \vdash \neg G$

ax-id $N, N, B \vdash G, B$ ∨-D $N, N, B \vdash G \vee B$

ax-id $N, N, B \vdash N$ ¬-S $N, N, B, \neg N \vdash$

→-S $N, N, B, G \vee B \to \neg N \vdash$

sc sx $N, B, G \vee B \to \neg N, N \vdash$

→-S $N, B, G \vee B \to \neg N, \neg G \to N \vdash$

sc sx $G \vee B \to \neg N, \neg G \to N, N, B \vdash$

¬-D $G \vee B \to \neg N, \neg G \to N, N \vdash \neg B$

→-D $G \vee B \to \neg N, \neg G \to N \vdash N \to \neg B$

$P_3, P_5 \vdash C_3$

5

ax-id $N, G \vdash B, G$ ¬-D $N \vdash \neg G, B, G$

ax-id $N, B \vdash B, G$

→-S $N, \neg G \to B \vdash B, G$ ¬-S $N, \neg G \to B, \neg B \vdash G$

ax-id $N, \neg G \to B \vdash N, G$

→-S $N, \neg G \to B, N \to \neg B \vdash G$

sc sx $\neg G \to B, N \to \neg B, N \vdash G$

ax-id $\neg G \to B, N \to \neg B, G \vdash G$ ¬-D $\neg G \to B, N \to \neg B \vdash \neg G, G$

→-S $\neg G \to B, N \to \neg B, \neg G \to N \vdash G$

sc sx $\neg G \to B, \neg G \to N, N \to \neg B \vdash G$

$P_4, P_5, C_3 \vdash C_4$

3

ax-id $G \vdash G, B, \neg N$ ∨-D $G \vdash G \vee B, \neg N$

ax-id $G, \neg N \vdash \neg N$

→-S $G, G \vee B \to \neg N \vdash \neg N$

sc sx $G \vee B \to \neg N, G \vdash \neg N$

~~$G \vee B \to \neg N, \neg G \to B,$~~

~~$P_3, P_4, C_2 \vdash C_5$~~

$P_3, C_4 \vdash C_5$

3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{\neg N, F \vdash F}}{\neg N \vdash \neg F, F}\,\neg\text{-D}}{\neg N \vdash F, \neg F}\,\text{sc dx} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{\neg N \vdash \neg N, \neg G, \neg B, \neg F}}{\neg N \vdash \neg N \vee \neg G, \neg B, \neg F}\,\vee\text{-D}}{\neg N \vdash (\neg N \vee \neg G) \vee \neg B, \neg F}\,\vee\text{-D}}{\neg N, \neg((\neg N \vee \neg G) \vee \neg B) \vdash \neg F}\,\neg\text{-S}}{\neg N, F \to \neg((\neg N \vee \neg G) \vee \neg B) \vdash \neg F}\,\to\text{-S}$$

$C_5, P_6 \vdash C_6$

3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{* \text{ (sotto)}}{\neg N \vdash \neg S \& \neg D, \neg D \& S, D}}{\neg N \vdash D, \neg S \& \neg D, \neg D \& S}\,\text{sc dx} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{L, N \vdash N, \neg S \& \neg D, \neg D \& S}}{L, N, \neg N \vdash \neg S \& \neg D, \neg D \& S}\,\neg\text{-S}}{\neg N, L, N \vdash \neg S \& \neg D, \neg D \& S}\,\text{sc sx}}{\neg N, L \& N \vdash \neg S \& \neg D, \neg D \& S}\,\&\text{-S}}{\neg N, D \to L \& N \vdash \neg S \& \neg D, \neg D \& S}\,\to\text{-S}}{\neg N, D \to L \& N, \neg(\neg S \& \neg D) \vdash \neg D \& S}\,\neg\text{-S}$$

$C_5, P_1, P_2 \vdash C_7$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{\neg N, D \vdash \neg S, D}}{\neg N \vdash \neg D, \neg S, D}\,\neg\text{-D} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{\neg N, S \vdash S, D}}{\neg N \vdash \neg S, S, D}\,\neg\text{-D}}{\neg N \vdash S, \neg S, D}\,\text{sc dx}}{\neg N \vdash \neg D \& S, \neg S, D}\,\&\text{-D}}{\neg N \vdash \neg S, \neg D \& S, D}\,\text{sc dx} \qquad \dfrac{\overset{\text{ax-id}}{\neg N, D \vdash \neg D \& S, D}}{\neg N \vdash \neg D, \neg D \& S, D}\,\neg\text{-D}}{\neg N \vdash \neg S \& \neg D, \neg D \& S, D}\,\&\text{-D}$$

*
(da sopra)

REGOLA (1)

$$\frac{\Gamma \vdash C \qquad \Gamma \vdash E, A}{\Gamma \vdash (A \vee B) \vee C}\ 1$$

Per i lemmi visti a lezioni, per controllare la validità basta controllare se sulla riga r in cui

(IPOTESI) 1. $\Gamma^\& \rightarrow C \underset{r}{=} 1$ allora (TESI) $(A \vee B) \vee C \underset{r}{=} 1$

2. $\Gamma^\& \rightarrow E \vee A \underset{r}{=} 1$

3. $\Gamma^\& \underset{r}{=} 1$

Dall'ipotesi 3 e 1, deduco che deve essere $C \underset{r}{=} 1$, quindi $(A \vee B) \vee C \underset{r}{=} 1$, ed ho verificato la tesi.

Quindi la regola 1 è valida

Analizzo la sua inversa:

$$\frac{\Gamma \vdash (A \vee B) \vee C}{\Gamma \vdash C}\ inv_1\text{-}1$$

Per i lemmi visti a lezione, per controllare la validità di inv1-1 basta controllare che sulla riga r in cui

(IPOTESI) 1. $\Gamma^\& \rightarrow (A \vee B) \vee C \underset{r}{=} 1$ allora (TESI) $C \underset{r}{=} 1$

2. $\Gamma^\& \underset{r}{=} 1$

30

Posso osservare che, ponendo $\Gamma \equiv F$, la regola inv1-1 è $\dfrac{F \vdash (A \vee B) \vee C}{F \vdash C}$

e osservo che sulla riga r in cui $F \underset{r}{=} 1$, $A \underset{r}{=} 1$, $B \underset{r}{=} 1$, $C \underset{r}{=} 0$,

ho che $F \rightarrow (A \vee B) \vee C \underset{r}{=} 1$ ma $F \rightarrow C \underset{r}{=} 0$

di conseguenza la regola inv1-1 non è valida.

$$\frac{\Gamma \vdash (A \vee B) \vee C}{\Gamma \vdash E, A} \; inv_2 - 1$$

Posso osservare che, ponendo $\Gamma \equiv F$, la regola $inv_2 - 1$ diventa $\dfrac{F \vdash (A \vee B) \vee C}{F \vdash E, A}$

e osservo che nella riga r in cui $F \underset{r}{=} 1$, $A \underset{r}{=} 0$, $E \underset{r}{=} 0$, $B \underset{r}{=} 1$, $C \underset{r}{=} 1$

ho che $F \rightarrow (A \vee B) \vee C \underset{r}{=} 1$ ma $F \rightarrow E \vee A \underset{r}{=} 0$

di conseguenza la regola $inv_2 - 1$ non è valida.

Poiché le inverse della regola 1 non sono valide, la regola 1 non è sicura.

REGOLA 2

$$\frac{A, B \vdash E \qquad M, E, N \vdash K, P}{M, A, B, N \vdash K, P} \; 2$$

Per i lemmi visti a lezione basta controllare, per vedere se è valida, se nella riga r in cui

(IPOTESI) 1. $A \& B \rightarrow E \underset{r}{=} 1$ allora (TESI) $K \vee P \underset{r}{=} 1$

2. $(M \& E) \& N \rightarrow K \vee P \underset{r}{=} 1$

3. $((M \& A) \& B) \& N \underset{r}{=} 1$

Dall'ipotesi 3 deduco che $N \underset{r}{=} 1$, $B \underset{r}{=} 1$, $A \underset{r}{=} 1$ e $M \underset{r}{=} 1$.

Poiché, quindi, $A \underset{r}{=} 1$ e $B \underset{r}{=} 1$ ho che $A \& B \underset{r}{=} 1$ e dall'ipotesi 1 deduco che $E \underset{r}{=} 1$.

Quindi, poiché $E \underset{r}{=} 1$, $M \underset{r}{=} 1$, $N \underset{r}{=} 1$, dall'ipotesi 2 deduco che $K \vee P \underset{r}{=} 1$, cioè la tesi.

La regola 2 è quindi valida.