IV appello 1 luglio 2016

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Mostrare se i sequenti di seguito sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero mostrare se sono validi o meno e soddisfacibili o insoddisfacibili in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $\neg A \rightarrow A \vdash \neg((A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \perp)$
  - 5 punti
    $\forall x \ (F(x) \ \& \ B(x)) \vdash \exists z \ (\neg F(z) \rightarrow \neg\neg B(z))$
  - 6 punti
    $\forall w \ (b = w \vee w = a) \vdash \neg\exists y \ (y \neq a \ \& \ y \neq b)$
  - 7 punti
    $\exists x \ \forall w \ (M(x) \vee B(w)) \vdash \forall w \ \exists y \ (\neg M(y) \rightarrow B(w))$
  - 6 punti
    $\exists w \ \neg\neg G(w) \vdash \forall y \ \neg G(y)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla logica classica classica con uguaglianza motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

  - (4 punti)

    Il vento, se soffia forte, spazza via le nubi.

    Non si dà il caso che il vento soffi forte e spazzi via le nubi.

    si consiglia di usare:
    S="il vento spazza via le nubi"
    F ="il vento soffia forte"

- (6 punti)

  Colui che legge molto sa molto.

  Non si dà il caso che ci sia qualcuno che non sa molto e legge molto.

  si consiglia di usare:
  L(x)= x legge molto
  S(x)= x sa molto

- (6 punti)

  Colui che legge molto sa molto.

  Non si dà il caso che chi legge molto non sappia molto.

  si consiglia di usare:
  L(x)= x legge molto
  S(x)= x sa molto

- (7 punti)

  Pietro ha un unico cugino.
  Nico è cugino di Pietro.
  Nico è diverso da Letizia.

  Letizia non è cugina di Pietro.

  si consiglia di usare:
  C(x,y)=x è cugino di y
  p=Pietro
  n=Nico
  l=Letizia

- (9 punti)

  L'autore della sonata K.281 è unico.
  Mozart è autore della sonata K.281.

  Nessuno diverso da Mozart è autore della sonata K.281.

  si consiglia di usare:
  A(x,y)="x è autore di y"
  s=sonata K.281
  m=Mozart

- (6 punti)

  In Australia ci sono degli aborigeni.
  Gli aborigeni vivono nella foresta.

  In Australia qualcuno vive nella foresta.

  si consiglia di usare:
  B(x)="x è un aborigeno"
  F(x)= "x vive nella foresta"
  A(x) ="x è in Australia"

- (14 punti)
  "In ogni locale c'è qualcuno che se lui canta nel locale allora nel locale tutti cantano."

  si consiglia di usare:
  L(x)= x è un locale
  C(x,y)= x canta in y

- (34 punti) Sia T_{boc} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Lia gioca a bocce se e solo se, o il nonno di Pietro ci gioca oppure Elsa non ci gioca.
  - Elsa e Lia sono delle ragazzine.
  - Elsa gioca a bocce solo se non ci gioca il nonno di Lia.
  - Sia il nonno di Lia che Elsa non giocano a bocce se Lia non gioca a bocce.
  - Sia il nonno di Lia che il nonno di Pietro giocano a bocce se non ci gioca Lia.

  Si consiglia di usare:
  R(x)= x è una ragazzina
  G(x)= x gioca a bocce
  o=nonno di Lia, p=nonno di Pietro, e=Elsa, l=Lia.

  Formalizzare le seguenti affermazioni e dedurne la validità in T_{boc}:

  - Qualcuno è una ragazzina.
  - Se il nonno di Pietro gioca a bocce allora ci gioca anche Lia.
  - Se Lia non gioca a bocce allora suo nonno non ci gioca.
  - Il nonno di Lia gioca a bocce se Lia non gioca a bocce.
  - Se Elsa gioca a bocce anche Lia ci gioca.
  - Se Elsa gioca a bocce allora il nonno di Lia non ci gioca oppure il nonno di Pietro ci gioca.
  - Lia gioca a bocce se Elsa non ci gioca ma ci gioca il nonno di Lia.
  - Lia gioca a bocce.
  - Elsa gioca a bocce solo se il nonno di Pietro pure ci gioca.

- (40 punti) Sia T_{vec} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se uno è più vecchio di un altro e quest'altro è più vecchio di un terzo, il primo è più vecchio del terzo.
  - Uno non è più vecchio di un altro se il secondo è più vecchio del primo.
  - Non si dà il caso che Clarissa non sia più vecchia di Ernesto.
  - Nessuno è più vecchio di Lorenzo.
  - Tutti quelli più vecchi di Gertrude sono anche più vecchi di Lorenzo.
  - Gertrude è più vecchia di Clarissa.
  - Non si dà il caso che Ernesto non sia più vecchio di Noemi.

suggerimento: si consiglia di usare:
V(x,y)= x è più vecchio di y
l=Lorenzo, g= Gertrude, c= Clarissa, e= Ernesto, n=Noemi
uno=x, altro =y, terzo=z

Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria in T_{vec}:

- Qualcuno è più vecchio di un altro.
- Noemi non è più vecchia di Ernesto.
- Nessuno è più vecchio di Gertrude.
- Gertrude è più vecchia di Ernesto.
- Ernesto non è più vecchio di Gertrude.
- Nessuno è più vecchio di se stesso.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (5 punti) $\vdash \forall y \; \exists z \; y = z + 0$
2. (5 punti) $\vdash \exists w \; (\; w \neq 3 \; \vee \; \forall z \; z = 3 \;)$
3. (6 punti) $\vdash \exists w \; \forall y \; \exists z \; y + z = w + y$
4. (7 punti) $\vdash 3 \neq 0 \; \rightarrow \; 4 \neq 2$
5. (7 punti) $\vdash \forall y \; (\; s(s(3)) \neq s(s(y)) \; \vee \; s(3) \neq s(y) \;)$
6. (7 punti) $\vdash \forall w \; \; (3 \neq y \; \rightarrow \; s(s(3)) \neq s(s(y)) \,)$
7. (8 punti) $\vdash \; \exists x \; 5 + 0 = x \cdot 1$
8. (9 punti) $\vdash \forall w \; \forall y \; s(s(y)) = w + 1$
9. (11 punti) $\vdash \forall x \; \exists y \; (\; \neg y + 2 = x \; \rightarrow \; (\; x = y + 1 \; \vee \; 0 = x \;) \;)$

- Stabilire se le seguenti regole, formalizzate dove occorre, e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

  - (17 punti)

$$\frac{\text{Il maestro scrive alla lavagna.} \;\vdash\; \text{Pierino guarda il maestro.}}{\text{Qualcuno scrive alla lavagna.} \;\vdash\; \text{Qualcuno scrive e qualcuno lo guarda.}} \; 1$$

    ove
    $S(x)$="x scrive alla lavagna"
    $G(x,y)$="x guarda y"
    m="il maestro"
    p="Pierino"

  - (10 punti)

$$\frac{D \vdash C}{\neg C \vdash \neg D \; \vee \; C} \; 2$$

- (16 punti)

$$\frac{\text{Pippo suona.} \ \vdash y \text{ ascolta.}}{\text{Tutti suonano.} \ \vdash \text{Tutti ascoltano.}} \ 3$$

ove
$S(x)$="x suona"
$A(x)$="x ascolta"
p="Pippo"

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot & \text{ax-}\top \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\mathrm{S} \qquad \begin{array}{c} =-\mathrm{ax} \\ \Gamma \vdash t = t, \Delta \end{array}$$

Aritmetica di Peano PA

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC$_=$ + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–D}_v$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{tra}^* & \text{cf}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$