## 2 Prerequisiti del corso: saper ragionare (ovvero nessuno!)

Questo corso propone una riflessione sul modo di ragionare e quindi il solo prerequisito per seguirlo è di essere dotati di raziocinio. L'assunzione filosofica da cui partiamo è che in quanto essere umani **siamo già logici per natura**.

La **prova** psicologica che **la logica in quanto capacità di dedurre è un esercizio specifico del nostro essere animali razionali** è data dai seguenti fatti:

- **ridiamo delle barzellette**: se non si sa usare la logica o se non si sanno fare deduzioni, non si può ridere di certe barzellette;
- **riconosciamo i paradossi**: se non si usa la logica, non si riesce a riconoscere che certe affermazioni sono contraddittorie.

Mettiamoci dunque alla prova con una barzelletta ...

**Esempio di barzelletta "deduttiva".**

Ci sono due compagni, Bepi e Toni. Sono al bar, e passano al tempo a guardare la gente.

Son li che bevono. Entra un signore, e Bepi dice:

"Io non sono proprio capace di capire che mestiere fa quello lì."

"Ah, dice Toni, nemmeno io."

Questo signore ad un certo punto dopo essersi bevuto qualcosa va al bagno ma c'e' la fila. Allora Bepi dice:

"Beh, aspetta che lo seguo, così mentre aspetta mi permetto di domandarglielo."

Così fa, e gli domanda: "Mi scusi, lei, che mestiere fa?"

E quello: "Io sono un logico."

"Ah sì? E che cosa vuol dire?"

"Ah guardi, è una cosa complicata da spiegare, ci vuole un intero corso universitario per capirlo, oppure bisognerebbe leggere un libro intero. Anzi, le consiglio *Istruzioni per un robot* di un certo Giovanni Sambin. Si pensi che è così divertente che vi si raccontano barzellette sui logici. Ma se lei desidera, posso comunque darle un'idea con un esempio."

"Ah, comprerò certamente il libro, ma sono così curioso che voglio sentire anche l'esempio."

"Bene. Lei ce l'ha un acquario?"

"Beh, in effetti sì, capita che io abbia un acquario."

"Vede, da questo, con la logica, io **deduco** che le piacciono i pesci."

"Ah, caspita, è proprio vero."

"Vede, io allora **deduco** con la logica che lei ama la natura."

"Ah, è proprio vero, certamente io amo la natura."

"Vede, e da questo, sempre con la logica, io **deduco** che lei ama le donne."

"Ah, è proprio pazzesco ... Allora ho capito."

Esce, torna da Toni che gli chiede "Ti ha detto che mestiere fa?"

"Sì, fa il logico."

"Ah sì, e che cosa vuol dire che fa il logico?"

“È difficilissimo, bisogna leggere un libro sulle barzellette, però ti posso spiegare con un esempio.”

“Va beh, fammi l’esempio.”

“Tu ce l’hai un acquario? ”

“Io? no.”

“Beh, allora ti piacciono solo i maschi!”

Nella precedente barzelletta:

**da**

Aq $\Rightarrow$ Ps
Ps $\Rightarrow$ Nt
Nt $\Rightarrow$ Dn

**non segue che**

non Aq $\Rightarrow$ non Dn

ed è il riconoscimento della deduzione sbagliata che provoca la risata!

# 3 Genesi e utilità dei paradossi logici

I **paradossi logici** sono **contraddizioni** ovvero affermazioni sempre **false** per motivi puramente logici.

Ad esempio se asseriamo

**Napoleone è morto il 6 maggio 1821.**

diciamo una falsità storica (perchè Napoleone è morto il 5 maggio dello stesso anno secondo le fonti storiche) ma non una falsità logica.

Invece se diciamo

**Napoleone ammirava tutte le persone che non ammiravano se stesse e soltanto loro.**

diciamo una falsità logica visto che questa asserzione è una variante del paradosso dell’esercizio 9. Per capirlo basta chiedendersi: Napoleone ammirava o no se stesso?

Risposta: se rispondiamo che Napoleone ammirava se stesso allora, siccome ammirava soltanto le persone che non si ammiravano, dobbiamo concludere che non si ammirava, contraddizione; dall’altro canto se rispondiamo che Napoleone non ammirava se stesso allora ne segue che si ammirava e quindi di nuovo troviamo una contraddizione. Questi ragionamenti ci portano a concludere che l’asserzione

**Napoleone ammirava tutte le persone che non ammiravano se stesse e soltanto loro.**

è falsa perchè contraddittoria ed è pure una falsità logica in quanto la contraddittorietà dell’asserzione rimane sia che l’affermiamo di Napoleone o di chiunque altro.

Invece se diciamo

“Posto che **Napoleone è nato nel 1769 e morto nel 1821** allora **ha vissuto 60 anni**.”

diciamo una falsità extra-logica (diciamo aritmetica) e NON è una falsità logica perchè occorre fare un calcolo con i numeri naturali per sapere se dalla premessa *Napoleone è nato nel 1769 e morto nel 1821.* segue veramente che *ha vissuto 60 anni* e ciò non è vero in quanto 1821 meno 1769 fa 52 (qui che sia Napoleone soggetto della premessa o chiunque altro poco importa perchè l’affermazione sarebbe scorretta per un conto aritmetico!).

Di contro l'asserzione

"Posto che **Napoleone è nato nel 1769 e morto nel 1821** allora **ha vissuto almeno 51 anni**."

è una verità extra-logica aritmetica (anche qui che sia Napoleone soggetto della premessa o chiunque altro poco importa, perchè l'affermazione sarebbe corretta per un conto aritmetico!).

Ora vogliamo analizzare meglio alcuni paradossi: vedremo che essi nascono dal tentativo di appiattire livelli diversi di riferimento della nostra attività raziocinante che invece risultano irriducibili tra loro.

Infine accenneremo al fatto che i paradossi sono molto utili nello studio della logica e delle teorie scientifiche per capire cosa una teoria NON può dimostrare.

## 3.1 Superiorità dell'uomo sulla macchina

Un'attenta analisi dell'asserzione paradossale "**Ogni bravo informatico può costruire un programma che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sé**" porta a concludere che non si può ridurre la nostra attività del dedurre ad un unico livello, che nell'asserzione menzionata è quello del programmare, ovvero porta a concludere la **superiorità del raziocinio umano sul concetto di macchina/programma come attualmente concepito**.

## 3.2 Quale è la causa del paradosso di Russell?

Ora notiamo che la causa del paradosso di Russell

'**Nel villaggio di Cantù tutti c'è un unico barbiere che rade solo gli uomini che non si radono da sé**."

è simile a quella dell'esercizio 9. e consiste nell'appiattimento di due livelli:

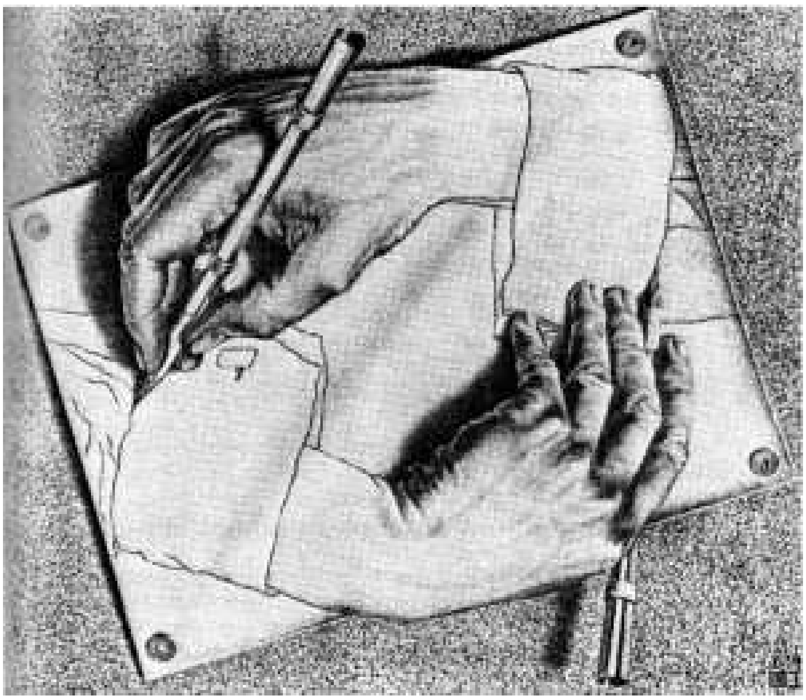
livello 1 — **barbiere soggetto** dell'azione "radere" quelli che "non si radono" (che a posteriori non può essere anche oggetto)

livello 2 — **cliente oggetto** dell'azione "radere" (che a posteriori non può coincidere con il barbiere!)

Ovvero: **barbiere** = **cliente** dà contraddizione.

## 3.3 Esempio di paradosso in pittura

L'opera "Mani che disegnano" di Escher (1948)



rappresenta una paradosso la cui causa è pure l' appiattimento di due livelli:

livello 1 — **mano** solo **soggetto** dell'azione "disegnare"

livello 2 — **disegno** solo **oggetto** dell'azione "disegnare".

## 3.4 Paradosso del mentitore e i livelli di astrazione

Il famoso paradosso del mentitore ci insegna che quando ragioniamo ci sono sempre vari **livelli** di **riferimento**.

Prima di introdurre il paradosso, il lettore risponda a questa domanda

"*Questa proposizione è falsa.*"

può essere vera?

Vediamo un pò cosa rispondere...

1. La proposizione "**Questa proposizione è falsa.**" è **vera** se e solo se quel che dice è vero, ossia che essa è **falsa**

   $\Downarrow$

   e quindi non può essere **vera**.

2. La proposizione "**Questa proposizione è falsa.**" è **falsa** se e solo se quel che dice è falso, e dunque è **vera**

   $\Downarrow$

   e quindi non può essere nemmeno **falsa**.

$\Downarrow$

Quindi concludiamo che la proposizione "**Questa proposizione è falsa.**" non può essere né **vera**, né **falsa**. Dunque di fronte alla domanda:

| | | |
|---|---|---|
| "*La proposizione:* "**Questa proposizione è falsa.**" *puó essere* **vera** *o* **falsa**." | | |
| **corretto** | **sì** | **no** |

la risposta è NO perchè l'asserzione "*La proposizione:* "**Questa proposizione è falsa.**" *puó essere* **vera** *o* **falsa**." è contradditoria, ovvero un paradosso.

Tale paradosso nasce dall'identificazione di questi livelli:

– livello 1: valutazione **vero** o **falso** da parte nostra (**livello metalinguistico**)

– livello 2: valutazione come significato della proposizione (**livello linguistico**)

## 3.5 Il caso giudiziario Protagora-Evatlo

Riportiamo qui il celebre caso giudiziario avente come protagonisti Protagora ed Evatlo.

Il celebre sofista Protagora aveva accolto come discepolo Evatlo convenendo con lui che gli avrebbe pagato le lezioni quando avesse vinto la prima causa in tribunale.

Terminato il corso di studi, Evatlo non si decideva ad intraprendere l'attività forense e Protagora stanco di attendere il suo onorario, intentò causa al suo ex allievo il quale decise, apparentemente in modo avventato, di assumere personalmente la propria difesa.

***Dilemma di Protagora.***

Protagora disse

**Se Evatlo perde questa causa**
**allora dovrà pagarmi in forza della sentenza del tribunale.**
**Se invece Evatlo vince questa causa**
**allora dovrà pagarmi ugualmente, in forza del nostro accordo.**
**Ora, o Evatlo perderà o vincerà.**

---

**Dunque, finalmente, Evatlo dovrà pagarmi.**

***Controdilemma di Evatlo.***

Evatlo replicò al maestro con un controdilemma:

**Se io vinco questa causa**
**allora non ti dovrò pagare in forza della sentenza del tribunale.**
**Se invece la perdo**
**allora non ti dovrò pagare in forza del nostro accordo.**
**Ora le possibilità sono due:**
**o vinco o perdo questa causa.**

---

**Dunque, non ti dovrò pagare.**

**Chi ha ragione? Evatlo o Protagora?** Per rispondere consideriamo i 2 casi possibili, ovvero che sia Evatlo a vincere la causa o che sia Protagora a vincerla.

**Caso 1: Evatlo vince la causa** (`prima lettura`):

Nel caso **Evatlo vincesse la causa**, allora Evatlo dovrebbe pagare in virtù dell'**accordo**, ma non dovrebbe pagare in virtù della **sentenza**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo non vince la causa** ovvero **il caso 1 non è possibile**.

**caso 2: Evatlo non vince la causa** (`prima lettura`):

Nel caso **Evatlo perdesse la causa**, allora Evatlo deve pagare in virtù della **sentenza**, ma non deve pagare in virtù dell'**accordo**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo vince la causa**. Ma ciò non è possibile perchè ci riporta al caso 1 che abbiamo detto non essere verificabile. Dunque concludiamo che **Evatlo nè vince nè perde** la causa. Dove sta l'errore?

**Caso 1: Evatlo vince la causa** (`ad una lettura più attenta`):

Nel caso **Evatlo vincesse la causa** e `l'accordo potesse essere rispettato`, allora Evatlo dovrebbe pagare in virtù dell'**accordo**, ma non dovrebbe pagare in virtù della **sentenza**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo non vince la causa**, però **assumendo** che **l'accordo possa essere rispettato**.

**Caso 2: Evatlo non vince la causa** (`ad una lettura più attenta`):

Nel caso **Evatlo non vincesse la causa** e *l'accordo potesse essere rispettato*, allora Evatlo deve pagare in virtù della **sentenza**, ma non deve pagare in virtù dell'**accordo**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo vince la causa**. Ma sappiamo che se **Evatlo vince la causa**, si ricade nel caso 1 e allora di nuovo troviamo una **contraddizione!**

Cosa concludiamo?

### 3.5.1 Conclusione del caso giudiziario Protagora-Evatlo

(`ad una lettura più attenta`):

Nel caso *l'accordo potesse essere rispettato*, **sia che Evatlo vinca la causa sia che la perda**, si arriva ad una **contraddizione**.

Dunque, dando per scontato che il giudice emetta una sentenza, allora *l'accordo* **non** *può essere rispettato.*

In altre parole, nessuno dei due ha ragione, se si suppone che l'accordo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria.

Ora per verificare la comprensione di quanto sopra, si esegua questo test di comprensione:

*Nel caso giudiziario Evatlo/Protagora l'accordo tra Protagora ed Evatlo può essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria.*

corretto sì no

Chiaramente ora la risposta è "no" perchè l'asserzione

*Nel caso giudiziario Protagora-Evatlo l'accordo tra Protagora ed Evatlo può essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria.*

è una affermazione contraddittoria, ed è quindi una **falsità logica**.

## 3.6 Quale è la causa del paradosso giudiziario Protagora-Evatlo?

La contraddizione del paradosso giudiziario nasce dall'assumere che **il rispetto dell'accordo Protagora/Evatlo** permanga dopo l'emissione della **sentenza** ovvero che entrambi i livelli:

livello 1 — **rispetto accordo**

livello 2 — **sentenza**

siano **entrambi validi**.

Invece, se si assume valido il livello **sentenza** senza assumere come valido anche il livello **rispetto dell'accordo**, si **elimina la contraddizione**.

### 3.6.1 Utilità dei paradossi per le scienze

Nello studio delle teorie scientifiche i paradossi sono molto utili per scoprire ciò che una teoria (formale) **non** può dire...

Ad esempio ragionando come segue: se una certa assunzione all'interno di una teoria porta ad un paradosso, allora nella teoria in questione l'assunzione risulta falsa.

Per esempio, oltre all'esercizio 9. del test iniziale esistono altre **istanze del paradosso di Russell** che forniscono interessanti risultati per l'**informatica**: usando la forma logica del **paradosso di Russell** si dimostra che è **irrisolubile** il famoso **problema della fermata di un programma** (che lo studente di informatica studierà nel corso di computabilità), ovvero che "**non esiste un programma che sappia decidere se ogni programma (compreso sé stesso) termina o no su un dato input**".

Possiamo accennare anche ad un'applicazione in **matematica** dell'uso dei paradossi: usando la forma logica del **paradosso del mentitore** si dimostra che la **teoria dell'aritmetica non può dimostrare** che **lei stessa non è contradditoria**, ovvero che non deduce come vere delle falsità (secondo teorema di incompletezza di Goëdel).

### 3.6.2 Come costruire paradossi?

Una volta scoperta la **forma logica** di un paradosso, se ne possono costruire di simili cambiando i costituenti senza cambiare la forma.... Quindi, per riconoscere i paradossi, è conveniente iniziare a studiare la **forma logica** delle frasi che sarà il primo argomento del nostro corso di logica.