IV appello 19 settembre 2013

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $\vdash \neg(B\&A \leftrightarrow \neg B \vee \neg\neg\neg C)$
  - 5 punti
    $\exists x\ (A(x) \rightarrow B(x))\ ,\ C(x) \vdash \neg\forall x\ (A(x)\ \&\ (\neg B(x) \vee \neg A(x)))$
  - 5 punti
    $\exists w\ (w = a \vee (w = b \vee w = c)) \vdash a \neq w \vee (c \neq b \vee w = a)$
  - 5 punti
    $\vdash \exists z\ \exists x\ z \neq x \vee \neg\neg\forall x\ \forall y\ x = y$
  - 6 punti
    $\forall x\ (x = a \vee x = b) \vdash a \neq b \rightarrow \neg\exists x\ \forall y\ y = x$
  - 6 punti
    $\vdash \exists z\ \exists x\ z \neq x \rightarrow \exists y\ c \neq y$

• Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

  - (3 punti)

    È meglio ammainare le vele solo se il mare è in tempesta.

    Soltanto se il mare non è in tempesta o è calmo, non è meglio ammainare le vele.

    si consiglia di usare:
    T="il mare è in tempesta"
    M ="è meglio ammainare le vele"
    C="il mare è calmo"

- (6 punti)

  Qualche italiano che Mario conosce vuole visitare New York.

  Non si dá il caso che nessuno voglia visitare New York.

  si consiglia di usare:
  I(x)="x è italiano"
  V(x,y)= "x vuole visitare y"
  n ="New York"
  m="Mario"
  C(x,y)="x conosce y"

- (5 punti)

  Nei boschi crescono i funghi.
  Alcuni funghi sono velenosi.

  Alcuni funghi velenosi crescono nei boschi.

  si consiglia di usare:
  C(x)="x cresce nei boschi"
  F(x) ="x é un fungo"
  V(x) ="x é velenoso"

- (7 punti)

  C'é un'unica cameriera nella sala verde.
  Nella sala verde c'è Gisella.

  Gisella è una cameriera.

  si consiglia di usare:
  S(y)="y è nella sala verde"
  C(x)= "x è una cameriera"
  g="Gisella"

- (5 punti)

  I volontari della Croce Rossa sono amati da tutti.
  Mario é un volontario della Croce Rossa.

  Mario è amato da qualcuno.

  si consiglia di usare:
  V(y) ="y è un volontario della Croce Rossa"
  A(x,y)= "x ama y"
  m= "Mario"

- (7 punti)

  Le case di Venezia costano di più di quelle di Padova.
  Le case di Padova costano di più di quelle di Mestre.

  Tutte le case di Venezia costano di piú di quelle di Mestre.

  si consiglia di usare:
  C(y, x) ="y è una casa di x"
  D(x,y)="y costa di più di x"
  p="Padova"
  v="Venezia"
  m="Mestre"

- (22 punti) Sia T_{bar} la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Pietro va in barca solo se tira vento.
  - Se e solo se non tira vento Carlo non va in barca.
  - Carlo va in barca solo se non ci va Lidia.
  - Se Lidia va in barca allora tira vento.
  - Non si dà il caso che nè Pietro, nè Lidia e nè Carlo non vadano in barca.

  Si consiglia di usare:

  T="tira vento"
  B(x)="x va in barca"
  p="Pietro"
  l="Lidia"
  c="Carlo"

  Dedurre poi in T_{tor} le seguenti affermazioni:

  - Se Lidia va in barca allora ci va anche Carlo.
  - Se non tira vento allora Carlo non va in barca e neanche Pietro.
  - Lidia non va in barca.
  - Pietro o Carlo vanno in barca.
  - Qualcuno va in barca.
  - Tira vento.

- (30 punti) Sia T_{do} la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Dati due frutti o il primo è più dolce del secondo o il secondo è più dolce del primo.
  - Il melone, l'uva, l'anguria e il fico sono frutti.
  - Il melone è più dolce dell'anguria.
  - Nessun frutto è più dolce di se stesso.
  - Non c'è frutto che sia più dolce del fico.
  - L'uva è più dolce del melone.
  - Se un frutto è più dolce di un altro frutto, e quest'altro è più dolce di un terzo frutto, allora il primo frutto è più dolce del terzo frutto.

  Si consiglia di usare:
  D(x,y)= "x è più dolce di y"
  F(x)="x è un frutto"
  u="uva"
  m="melone"
  a="anguria"
  f="fico"

  Dedurre poi in T_{am} le seguenti affermazioni:

  - L'uva non è più dolce del fico.
  - L'uva è più dolce dell'anguria.

- Il fico è più dolce del melone.
- Il fico è più dolce di tutti i frutti eccetto se stesso.
- Il melone non è più dolce dell'uva.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (5 punti) $\vdash \exists y\ \exists w\ (\ s(w) = s(y)\ \vee\ y \neq w\ )$
  2. (5 punti) $\vdash \forall y\ \exists z(\ s(z) = s(5)\ \rightarrow\ 5 = y\ )$
  3. (5 punti) $\vdash \exists w\ \exists y\ \exists z\ y \cdot w = w + z$
  4. (5 punti) $\vdash \forall y\ (\ 3 \neq y\ \rightarrow\ s(y) \neq s(3)\ )$
  5. (7 punti) $\vdash \forall x\ x + 1 \neq 8$
  6. (6 punti) $\vdash \exists y\ 3 = y \cdot 1$
  7. (9 punti) $\vdash \forall x\ \forall y\ \exists z\ (\ x \cdot y = x \cdot z + x\ \vee\ y = 0\ )$
  8. (9 punti) $\vdash \exists w\ \forall z\ w = z \cdot z$
  9. (10 punti) $\vdash \forall w\ \forall z\ (\ w + z \neq 0\ \rightarrow\ 0 \neq w\ \&\ z \neq 0\,)$

- Stabilire se le seguenti regole sono valide e anche sicure rispetto alla semantica classica:

  (8 punti)

$$\frac{A(x) \vdash \Delta \qquad\qquad B \vdash \Delta}{\exists x\ A(x)\ \vee\ B \vdash \Delta}\ 1$$

  (5 punti)

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \vdash B, \Delta}{\Gamma, \neg A \rightarrow \neg B \vdash \Delta}\ 2$$

- (10 punti) Stabilire se la formalizzazione di

$$\frac{\text{Mario ha sognato Silvia} \vdash\ \text{Mario ha dormito bene}}{\text{Qualcuno ha sognato qualcosa}\ \vdash\ \text{Qualcuno ha dormito bene}}\ 3$$

  è istanza di una regola valida, assieme alla sua inversa, rispetto alla semantica classica, ove
  $S(x, y)$="x ha sognato y"
  $D(x)$="x ha dormito bene"
  m="Mario"
  s="Silvia"

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\overset{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla} \qquad \overset{\text{ax-}\top}{\Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\mathrm{S} \qquad \overset{=-\mathrm{ax}}{\Gamma \vdash t = t, \Delta}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $LC_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx}, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\ \&\ \forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ )\ \to\ \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–D}_v$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{tra}^* & \text{cf}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_= + \text{comp}_{sx} + \text{comp}_{dx}$ si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\, P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$