C'e' uno qui  che

se la notte del 13 dicembre LUI riceve in regalo una Ferrari  da Santa Lucia

tutti  la notte del 13 dicembre ricevono in regalo una Ferrari da Santa Lucia 

17. Lezione Corso di Logica 2020/2021

10 dicembre 2020

Maria Emilia Maietti

email: maietti@math.unipd.it

SIMULAZIONE appello

venerdi' 18 dicembre 2020 (teorie)

+

giovedi' 7 gennaio 2021 (classificazione)

10.30-12.30

Precisazione su uso variabile vincolata

nel formalizzare frasi in lingua corrente

il nome della variabile **vincolata** x è **irrelevante**

nel senso che

può essere cambiato

a patto di *usare una variabile* **NUOVA**

Irrelevanza nome della variabile nel formalizzare

il nome della variabile nella semantica di un predicato atomico

è **irrelevante**

nel senso che ciascun enunciato formale

$$\forall x\ A(x) \qquad \forall y\ A(y) \qquad \forall z\ A(z)$$

è una **corretta** formalizzazione di

"*Tutti sono alti*"

ponendo

$A(x) =$ x *è alto*

indipendentemente dall'uso di x o y o z nel definire il significato di $A(x)$

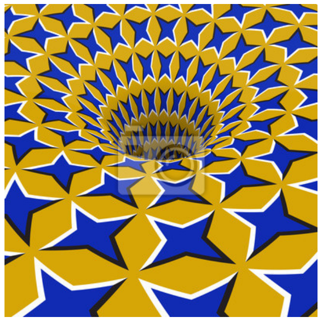
(che abbiamo descritto usando x ma che potevamo scrivere con y o altra variabile...!)

Irrelevanza nome di una variabile vincolata

la variabile **vincolata** serve solo come puntatore

perchè il nome della variabile **vincolata** $\mathbf{x}$ può essere cambiato

a patto di *usare una variabile* **NUOVA**



Motivo: se $\mathbf{z}$ non compare in $\mathtt{fr}$ allora sono **derivabili**

$\vdash \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr} \leftrightarrow \forall \mathbf{z}\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{z}]$ $\qquad$ $\vdash \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr} \leftrightarrow \exists \mathbf{z}\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{z}]$

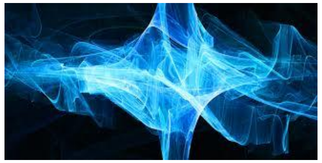
e lo si vede anche nella sua semantica!!

Irrelevanza nome della variabile nella semantica di un predicato

il nome della variabile nella semantica di un predicato atomico

è **irrelevante**

nel senso che



$$A(x)^D(-) : D \longrightarrow \{0,1\}$$

è **definita** a meno del nome di x ovvero

conveniamo che

per ogni $d \varepsilon D$

$$A(x)^D(d) = A(y)^D(d) = A(z)^D(d)$$

testimoni e falsari...

Nell'interpretazione dei predicati nei modelli

conveniamo di usare questa terminologia

testimone = elemento che rende vera una quantificazione esistenziale $\exists$

falsario = elemento che rende falsa una quantificazione universale $\forall$

testimoni per verificare una quantificazione esistenziale

$\exists x\, \mathtt{fr}(x)$ è **vera** nel modello $\mathcal{D}$ con dominio D

ovvero $\qquad (\exists x\, \mathtt{fr}(x))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$

sse

ESISTE $d \in \mathcal{D}$ **TESTIMONE**

tale che $\mathtt{fr}(x)^{\mathcal{D}}(d) = \mathbf{1}$

falsari per falsificare una quantificazione universale

un enunciato (senza variabili libere)

$\forall x\, \mathtt{fr}(x)$ è **FALSO** in un modello $\mathcal{D}$ con dominio D

ovvero $\quad (\forall x\, \mathtt{fr}(x))^{D} = \mathbf{0}$

se e solo se

$\mathtt{ESISTE\ almeno\ un}$ $\quad d_{\mathbf{f}} \varepsilon D$ detto **falsario**

tale che $\quad \mathtt{fr}(x)^{D}(d_{\mathbf{f}}) = \mathbf{0}$

TUTTI falsari per falsificare una quantificazione esistenziale

un enunciato (senza variabili libere)

$\exists x\ \mathtt{fr}(x)$ è **FALSO** in un modello $\mathcal{D}$ con dominio D

ovvero $\quad (\exists x\ \mathtt{fr}(x))^{D} = \mathbf{0}$

se e solo se

`TUTTI i` $\quad d \varepsilon D$ sono **falsari**

tale che $\quad \mathtt{fr}(x)^{D}(d) = \mathbf{0}$

Cosa vuol dire falsificare una formula con variabili libere?

una formula con variabili libere

$\mathtt{fr}(y_1, \ldots, y_n)$ è **FALSA** in un modello $\mathcal{D}$ con dominio D

se e solo se

ESISTONO $(d_{\mathbf{f}\,1}, \ldots, d_{\mathbf{f}\,n}) \varepsilon D^n$ detti **falsari**

tale che $\mathtt{fr}(y_1, \ldots, y_n)^D(d_{\mathbf{f}\,1}, \ldots, d_{\mathbf{f}\,n}) = \mathbf{0}$

Formalizzare e Derivare

C'e' uno qui  che

se LUI riceve in regalo una Ferrari

tutti  ricevono in regalo una Ferrari

usando

$R(x)$="x *riceve in regalo una Ferrari*"

Formalizzazione

C'e' uno qui  che

se LUI riceve in regalo una Ferrari

tutti  ricevono in regalo una Ferrari

usando

$R(x)$="x *riceve in regalo una Ferrari*"

si può formalizzare in tal modo

$$\exists x \ (\ R(x) \rightarrow \forall x \ R(x) \ )$$

Tautologia controintuitiva!!

$\exists x \; (\; R(x) \rightarrow \forall x \; R(x) \;)$ è una **TAUTOLOGIA** molto controintuitiva!!

e la si provi a derivare in $\mathrm{LC}_=$.....!!!

insistendo e **riprovando** con regole **sicure** e **NON** veloci...

spiegazione della Tautologia controintuitiva!!

$\exists x\ (\ R(x) \to \forall x\ R(x)\ )$ è una **TAUTOLOGIA** molto controintuitiva!!

ma se si ricorda che

l'**implicazione classica**

$R(x) \to \forall x\ R(x)$ è **equivalente** a $\neg R(x) \vee \forall x\ R(x)$

ne segue che l'enunciato di partenza è equivalente a

$$\exists x\ (\ \neg R(x) \vee \forall x\ R(x)\ )$$

che è chiaramente una tautologia!!

spiegazione della Tautologia controintuitiva!!

" C'e' uno qui che se LUI riceve in regalo una Ferrari

tutti ricevono in regalo una Ferrari"

tradotto in $\exists x \ (\ R(x) \rightarrow \forall x \ R(x) \ )$

è equivalente (!!!!) a dire che

" C'e' uno qui che o LUI **NON** riceve in regalo una Ferrari

oppure **tutti** *ricevono in regalo una Ferrari* "

tradotto in $\exists x \ (\ \neg R(x) \vee \forall x \ R(x) \ )$

spiegazione della Tautologia controintuitiva!! con modelli

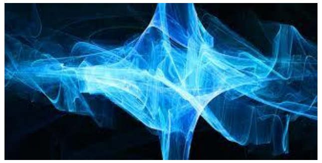
se $\exists x\ (\ R(x) \to \forall x\ R(x)\ )$ è una **TAUTOLOGIA** molto controintuitiva!!

deve essere vera in **OGNI** modello

e vediamo perchè...

spiegazione della Tautologia controintuitiva!! con modelli

fissato un modello con dominio D (NON vuoto per def.!!!)



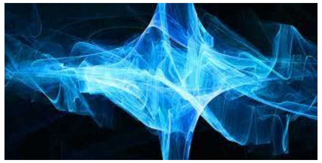
con $\quad R(x)^{D}(-) : D \longrightarrow \{0, 1\}$

distinguiamo **2 casi**:

1. $(\ \forall x\ R(x)\ )^{D} = \mathbf{1}$ (= tutti ricevono la Ferrari!!)
2. $(\ \forall x\ R(x)\ )^{D} = \mathbf{0}$ (= **NON** tutti ricevono la Ferrari!!)

spiegazione della Tautologia controintuitiva!! I caso

fissato un modello con dominio D (NON vuoto per def.!!!)



con $\qquad R(x)^{D}(-) : D \longrightarrow \{0, 1\}$

nel caso

1. $(\ \forall x\ R(x)\ )^{D} = \mathbf{1}$ (= tutti ricevono la Ferrari!!)

possiamo prendere come **TESTIMONE** della quantificazione esistenziale

$$(\ \exists x\ (\ R(x) \rightarrow \forall x\ R(x)\ )\ )^{D} = \mathbf{1}$$

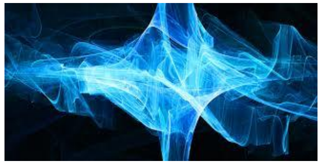
un qualsiasi d in D (visto che D NON è vuoto c'è di sicuro!!!)

per cui vale

$$(R(x) \rightarrow \forall x\ R(x)\ )^{D}(d) = (\ R(x)\ )^{D}(d) \rightarrow (\ \forall x\ R(x)\ )^{D} = \mathbf{1} \rightarrow\ \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

spiegazione della Tautologia controintuitiva!! II caso

fissato un modello con dominio D (NON vuoto per def.!!!)



con $\quad R(x)^{D}(-) : D \longrightarrow \{0, 1\}$

nel caso

2. $(\ \forall x\ R(x)\ )^{D} = \mathbf{0}$ (= **NON** tutti ricevono la Ferrari!!)

quindi esiste un **falsario** $d_{\mathbf{f}}$ che **NON riceve la Ferrari**

ovvero per cui vale $\quad (R(x)\ )^{D}(d_{\mathbf{f}}) = \mathbf{0}$

e che possiamo scegliere come **TESTIMONE** della quantificazione esistenziale

$$(\ \exists x\ (\ R(x) \rightarrow \forall x\ R(x)\ )\ )^{D} = \mathbf{1}$$

PERCHÈ vale

$$(\ R(x) \rightarrow \forall x\ R(x)\ )^{D}(d_{\mathbf{f}})\ =\ (\ R(x)\ )^{D}(d_{\mathbf{f}}) \rightarrow (\ \forall x\ R(x)\ )^{D} = \mathbf{0} \rightarrow\ \mathbf{0} = \mathbf{1}$$

spiegazione della Tautologia controintuitiva!!

“ C'e' uno qui che se LUI riceve in regalo una Ferrari   **tutti** ricevono in regalo una Ferrari”

tradotto in $\exists x\ (\ R(x) \rightarrow \forall x\ R(x)\ )$

NON è equivalente a dire che

“Se c'e' uno qui che *riceve in regalo una Ferrari*   allora **tutti** ricevono in regalo una Ferrari”

tradotto in $\exists x\ R(x) \rightarrow \forall x\ R(x)$

Procedura per classificare un sequente in $LC_=$

Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ (senza variabili libere):

`passo 1`: si prova a derivare $\Gamma \vdash \Delta$ in $LC_=$ secondo **vademecum**

- se si deriva $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ è **tautologia**
- se NON riesci a derivare vai al passo 2

`passo 2`: costruisci un **contromodello** della foglia che NON riesci a derivare e controlla che lo sia anche del sequente radice quindi $\Gamma \vdash \Delta$ **NON è tautologia** e poi vai al passo 3

`passo 3`: prova a derivare $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ in $LC_=$ secondo **vademecum**

- se $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ si deriva $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ è un **PARADOSSO**
- se NON riesci a derivare $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ applica il passo 2 al sequente $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$
- se hai un contromodello per $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ $\Rightarrow$ hai un **modello** per $\Gamma \vdash \Delta$
  $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ è OPINIONE

Classificare il sequente

$$\exists x\ R(x) \rightarrow \forall x\ R(x)$$

che traduce

"Se c'e' uno qui che *ha ricevuto in regalo una Ferrari*
allora **tutti** *hanno ricevuto in regalo una Ferrari*"

ponendo

$R(x)$="x *ha ricevuto in regalo una Ferrari*"

Applichiamo la procedura e andiamo a derivare

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{R}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{R}(\mathbf{z})}{\exists \mathbf{x}\, \mathbf{R}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{R}(\mathbf{z})}\ \exists-\mathrm{D}}{\exists \mathbf{x}\, \mathbf{R}(\mathbf{x}) \vdash \forall \mathbf{x}\, \mathbf{R}(\mathbf{x})}\ \forall-\mathrm{D}}{\vdash \exists \mathbf{x}\, \mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{R}(\mathbf{x})}\ \rightarrow-\mathrm{D}$$

ove la prima applicazione di $\forall-\mathrm{D}$ è corretta poichè $\mathbf{z}$ non compare nel sequente radice

e così pure l'ultima applicazione di $\exists-\mathrm{D}$ è pure corretta perchè w NON compare proprio

e l'ultima foglia suggerisce di costruire

un **contromodello** con **2 elementi**:

uno (al posto di $\mathbf{w}$) che ha ricevuto la Ferrari!!!

uno (al posto di $\mathbf{z}$) che **NON** ha ricevuto la Ferrari!!!

Contromodello

secondo i suggerimenti ricevuti *nella ricerca di una derivazione alternativa*

un **contromodello** $\mathcal{D}_{\mathbf{contra}}$ di $\exists \mathbf{x}\, \mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{R}(\mathbf{x})$

è ad esempio

$\mathbf{D}_{\mathbf{contra}} = \{\ \mathtt{Topolino}\ ,\ \mathtt{Minni}\ \}$

$\mathbf{R}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}}(\mathbf{d})=1$ sse d *è femmina*

e in tal modello $(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{R}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}} = \mathbf{0}$ perchè $\mathtt{Topolino}$ non è una femmina

$(\exists \mathbf{x}\, \mathbf{R}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}} = \mathbf{1}$ perchè $\mathbf{R}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{1}$

quindi $(\ \exists \mathbf{x}\, \mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{R}(\mathbf{x})\ )^{\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}} = \mathbf{1} \ \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}$

opinione o paradosso?

il **contromodello** $\mathcal{D}_{contra}$ ci dice che $\exists x\, R(x) \to \forall x\, R(x)$ **NON** è **tautologia**

e secondo la procedura per stabilire se è **opinione** o **paradosso**

proviamo a derivare la sua negazione in tal modo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash R(x), \exists x\, R(x)}{\vdash \exists x\, R(x)}\ \exists{-}\mathrm{D} \qquad \forall x R(x) \vdash}{\exists x\, R(x) \to \forall x\, R(x) \vdash}\ \to{-}\mathrm{S}}{\vdash \neg(\ \exists x\, R(x) \to \forall x\, R(x)\ )}\ \neg{-}\mathrm{D}$$

e concentrandosi sul ramo di sx si vede che si va avanti all'infinito con $\exists{-}\mathrm{D}$ SENZA riuscire a derivarlo

$\Rightarrow$ conviene **fermarsi a falsificare** $\vdash R(x), \exists x\, R(x)$

e basta un solo elemento per x che NON ha ricevuto la Ferrari!!

che rende **falso** $R(x)$ e quindi $\exists x\, R(x)$

Un Contromodello della negazione dell'enunciato di partenza

un **contromodello** $\mathcal{D}_{\mathbf{contraneg}}$ di $\neg(\ \exists x\ R(x) \rightarrow \forall x\ R(x)\ )$

è un **modello** di $\exists x\ R(x) \rightarrow \forall x\ R(x)$

e seguendo i *suggerimenti ottenuti dalla ricerca della derivazione* precedente

si può costruire in tal modo:

$\mathbf{D}_{\mathbf{contraneg}} = \{\ \texttt{Minni}\ \}$

$\mathbf{R}(\mathbf{x})^{D_{contraneg}}(d)$=1 sse d *è maschio*

e in tal modello $(\forall \mathbf{x}\ \mathbf{R}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D}_{\mathbf{contraneg}}} = \mathbf{0}$

perchè $\texttt{Minni}$ **NON** è un maschio

siccome c'è solo Lei $(\exists \mathbf{x}\ \mathbf{R}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D}_{\mathbf{contraneg}}} = \mathbf{0}$

quindi $(\ \exists x\ R(x) \rightarrow \forall x\ R(x)\ )^{D_{contraneg}} = \mathbf{0}\ \rightarrow\ \mathbf{0} = \mathbf{1}$

ovvero $(\ \neg(\ \exists x\ R(x) \rightarrow \forall x\ R(x)\ )\ )^{D_{contraneg}} = \mathbf{0}$

contromodello della negazione alternativo

in **alternativa** nella derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \exists x\ R(x) \qquad \dfrac{\forall x\ R(x)\ ,\ R(x) \vdash}{\forall x\ R(x) \vdash}\ \forall\!-\!\mathrm{S}}{\exists x\ R(x) \to \forall x\ R(x) \vdash}\ \to -\mathrm{S}}{\vdash \neg(\ \exists x\ R(x) \to \forall x\ R(x)\ )}\ \neg\!-\!\mathrm{D}$$

possiamo concentrarci sul ramo di dx dove si vede che si va avanti all'infinito con $\forall\!-\!\mathrm{S}$ SENZA riuscire a derivarlo

$\Rightarrow$ conviene **fermarsi a falsificare** $\forall x\ R(x), R(x) \vdash$

e basta un contromodello con un solo elemento per x che ha ricevuto la Ferrari!!

che rende vero $R(x)$ e quindi $\forall x\ R(x)$ 

Un Contromodello della negazione dell'enunciato di partenza

secondo i suggerimenti ricevuti *nella ricerca di una derivazione alternativa*

un altro **contromodello** $\mathcal{D}_{\mathbf{contraneg2}}$ di $\quad \neg(\ \exists x\ R(x) \rightarrow \forall x\ R(x)\ )$

che è un **modello** di $\quad \exists x\ R(x) \rightarrow \forall x\ R(x)$

è quindi ad esempio

$\mathbf{D_{contraneg2}}$= $\{$ $\mathtt{Minni}$ $\}$
$\mathbf{R}(\mathbf{x})^{D_{contraneg2}}(d)$=**1** sse d *è femmina*

e in tal modello $\quad (\forall \mathbf{x}\ \mathbf{R}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D_{contraneg2}}} = \mathbf{1}$

perchè $\mathtt{Minni}$ è una femmina e c'è solo lei nel modello!!

e a maggior ragione $\quad (\exists \mathbf{x}\ \mathbf{R}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D_{contraneg2}}} = \mathbf{1}$

quindi $\quad (\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x}\ \mathbf{R}(\mathbf{x})\ )^{\mathbf{D_{contraneg2}}} = \mathbf{1}\ \rightarrow\ \mathbf{1} = \mathbf{1}$

ovvero $(\ \neg(\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x}\ \mathbf{R}(\mathbf{x})\ )\ )^{\mathbf{D_{contraneg2}}} = \mathbf{0}$

quindi

grazie al contromodello $\mathcal{D}_{\mathbf{contra}}$

e al modello $\mathcal{D}_{\mathbf{contraNeg}}$ (oppure al modello $\mathcal{D}_{\mathbf{contraNeg2}}$!!)

concludiamo che

$$\exists x\ R(x) \rightarrow \forall x\ R(x)$$

è un' **OPINIONE**

Esempio di formalizzazione

Ciascuno possiede ciò che non ha perduto.

Nessuno ha perduto un miliardo.

Tutti possiedono un miliardo.

usando

$P(x, y)$="x *possiede* y"

$E(x, y)$= "x *ha perduto* y"

m="*un miliardo*"

si può formalizzare in tal modo

$$\forall x\, \forall y\ (\ \neg E(x, y) \rightarrow P(x, y)\ )\ ,\ \neg\exists x\ E(x, m) \vdash \forall x\ P(x, m)$$

Esempio di applicazione regole derivate + indebolimento in $LC_=$

derivazione con uso di regole veloci e derivate: 

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\vdash \neg E(w,m)\,,\ E(w,m)\,,\ P(w,m)}
\qquad
\dfrac{\text{ax-id}}{P(w,m) \vdash\ E(w,m)\,,\ P(w,m)}
}{\neg E(w,m) \rightarrow P(w,m)\ ) \ \vdash\ E(w,m)\,,\ P(w,m)}\ \rightarrow\!-\mathrm{S}
}{\neg E(w,m) \rightarrow P(w,m)\ ) \ \vdash \exists x\ E(x,m)\,,\ P(w,m)}\ \exists\!-\!\mathrm{D}_v
}{\forall y\ (\ \neg E(w,y) \rightarrow P(w,y)\ )\ \vdash\ \exists x\ E(x,m)\,,\ P(w,m)}\ \forall\!-\!\mathrm{S}_v
}{\forall x\ \forall y\ (\ \neg E(x,y) \rightarrow P(x,y)\ )\ \vdash\ \exists x\ E(x,m)\,,\ P(w,m)}\ \forall\!-\!\mathrm{S}_v
}{\forall x\ \forall y\ (\ \neg E(x,y) \rightarrow P(x,y)\ )\,,\ \neg\exists x\ E(x,m)\ \vdash\ P(w,m)}\ \neg\!-\!\mathrm{S}
}{\forall x\ \forall y\ (\ \neg E(x,y) \rightarrow P(x,y)\ )\,,\ \neg\exists x\ E(x,m) \vdash \forall x\ P(x,m)}\ \forall\!-\!\mathrm{D}
$$

ove $\forall\!-\!\mathrm{D}$ è corretta perchè w non compare libera nel sequente radice.

Esempio di tautologia controintuitiva

Ciascuno possiede ciò che non ha perduto.

Nessuno ha perduto un miliardo.

Tutti possiedono un miliardo.

usando

$P(x, y)$="x *possiede* y"

$E(x, y)$= "x *ha perduto* y"

m="*un miliardo*"

si può formalizzare in tal modo

$$\forall x\, \forall y\ (\ \neg E(x, y) \rightarrow P(x, y)\ )\ ,\ \neg \exists x\ E(x, m) \vdash \forall x\ P(x, m)$$

e siccome si deriva in $\mathrm{LC}_{=}$ è una tautologia  !!!