16. Esercizi su modelli

Ricordiamo che

Definizione di interpretazione e verità predicati con UNA variabile libera:
Dato un modello $\mathcal{D}$ per un generico predicato $\mathtt{pr(x)}$ diciamo che

$\forall \mathbf{x}\ \mathtt{pr(x)}$ è vero nel modello con dominio D

se *PER OGNI* $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ $\quad \mathtt{pr(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$
sse
$\forall \mathbf{d} \in \mathbf{D} \quad \mathtt{pr(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$

sse
$\forall \mathbf{d} \in \mathbf{D} \quad \mathtt{pr(\tilde{d})}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$
ove per ogni elemento $\mathbf{d}$ del dominio il simbolo $\tilde{\mathbf{d}}$ è una costante aggiunta al linguaggio per indicare $\mathbf{d}$ ed interpretata come $\mathbf{d}$

$\exists \mathbf{x}\ \mathtt{pr(x)}$ è vera nel modello con dominio $\mathbf{D}$

se *ESISTE* $d \in \mathbf{D}$ tale che $\quad \mathtt{pr(x)}^{\mathcal{D}}(d) = 1$
sse
$\exists \mathbf{d} \in \mathbf{D} \quad \mathtt{pr(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$

sse

$\exists \mathbf{d} \in \mathbf{D} \quad \mathtt{pr(\tilde{d})}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$
ove per ogni elemento $\mathbf{d}$ del dominio il simbolo $\tilde{\mathbf{d}}$ è una costante aggiunta al linguaggio per indicare $\mathbf{d}$ ed interpretata come $\mathbf{d}$

ed infine

$\mathtt{pr(x)}$ è **vero** nel modello $\mathcal{D}$
sse
$\forall \mathbf{x}\ \mathtt{pr(x)}$ è **vero** nel modello $\mathcal{D}$

e TUTTI gli altri connettivi proposizionali vengono INTERPRETATI nel modello secondo le tabelle di verità a partire dai valori assegnati alle loro componenti.

Esempi di modelli:

Il linguaggio predicativo con predicati atomici e costanti

M(x)= "x è mortale"
U(x)= "x è un uomo"

$\overline{s}$ = “Socrate”.

corrisponde ad un modello del tipo:

D= Esseri viventi
$\mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(d)$=1 sse “d è mortale” per $d \in D$
$\mathbf{U(x)}^{\mathcal{D}}(d)$=1 sse “d è un uomo” per $d \in D$
$\overline{s}^{\mathcal{D}}$ = “Socrate”.

In tal modello la proposizione

$$\mathbf{M(\overline{s})}^{\mathcal{D}} = \mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{s}^{\mathcal{D}}) = 1$$

e questo basta per concludere che l’implicazione

$$\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{U(x)}\ \rightarrow \mathbf{M(x)}\,)\,\&\,\mathbf{U(\overline{s})}\ \rightarrow\ \mathbf{M(\overline{s})} \qquad \text{è vera nel modello}$$

ossia vale

$$(\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{U(x)}\ \rightarrow\ \mathbf{M(x)}\,)\,\&\,\mathbf{U(\overline{s})}\ \rightarrow\ \mathbf{M(\overline{s})}\ )^{\mathcal{D}} = 1$$

Inoltre vale in tal modello

si ha $(\,\forall \mathbf{x}\ (\,\mathbf{U(x)}\ \rightarrow \mathbf{M(x)}\,)\,)^{\mathcal{D}} = 1$ perchè tutti gli uomini sono appunto mortali in quanto:

per ogni d essere vivente vale

$$\mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

e quindi vale

$$\mathbf{U(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})\ \rightarrow\ \mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

ovvero

$$\mathbf{U(x)}\ \rightarrow\ \mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

Se lavoriamo nel modello per il linguaggio con tutti i nomi dei suoi elementi:

D= Esseri viventi
$\mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(d)$=1 sse “**d è mortale**” per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$
$\mathbf{U(x)}^{\mathcal{D}}(d)$=1 sse “**d è un uomo**” per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$
$\overline{s}^{\mathcal{D}}$ = “**Socrate**”
$\tilde{\mathbf{d}}^{\mathcal{D}} = \mathbf{d}$ per ogni essere vivente $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$.

per ogni **d** *essere vivente* vale

$$\mathbf{M(\tilde{d})}^{\mathcal{D}} = 1$$

e quindi vale

$$\mathbf{U(\tilde{d})}^{\mathcal{D}}\ \rightarrow\ \mathbf{M(\tilde{d})}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

che rappresenta l’interpretazione del predicato sostituendo al posto della **x** tutti gli elementi del dominio **D**.

Un altro modello per il linguaggio predicativo con $\mathbf{M}(\mathbf{x}), \mathbf{U}(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{s}}$ è si ottiene prendendo come dominio

$\mathbf{D}$= $\{\texttt{Topolino}, \texttt{Minni}\}$

$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse $\mathbf{d}$ è maschio
$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse $\mathbf{d}$ è femmina
$\overline{s}^{\mathcal{D}}$ =$\texttt{Minni}$.

In tal modello si ha $(\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{U}(\mathbf{x})\ \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\,)\,)^{\mathcal{D}} = 0$
perchè esiste un individuo del dominio per cui $(\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\,)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 0$ e questo individuo esiste ponendo $\mathbf{d} = \texttt{Minni}$, dato che $\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ ($\texttt{Minni}$)=0 e $\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ ($\texttt{Minni}$)=1.

e nel modello associato con i nomi degli elementi del dominio

$\mathbf{D}$= $\{\texttt{Pippo}, \texttt{Minni}\}$

$\overline{s}^{\mathcal{D}}$ =$\texttt{Minni}$.
$\widetilde{\texttt{Minni}}^{\mathcal{D}} = \texttt{Minni}$
$\widetilde{\texttt{Pippo}}^{\mathcal{D}} = \texttt{Pippo}$

potremmo semplicemente dire:

chi è $\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ ponendo

$$\mathbf{M}(\widetilde{\texttt{Minni}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{M}(\widetilde{\texttt{Pippo}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

chi è $\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ ponendo

$$\mathbf{U}(\widetilde{\texttt{Minni}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{U}(\widetilde{\texttt{Pippo}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

visto che informalmente

$\mathbf{M}(\mathbf{x})$= $\mathbf{x}$ è un maschio
$\mathbf{U}(\mathbf{x})$= $\mathbf{x}$ è una femmina

Quindi in tal modello si ha $(\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{U}(\mathbf{x})\ \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\,)\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$
perchè esiste un individuo del dominio per cui

$$(\,\mathbf{U}(\widetilde{\texttt{Minni}}) \rightarrow \mathbf{M}(\widetilde{\texttt{Minni}})\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \ \rightarrow\ \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

dato che

$$\mathbf{M}(\widetilde{\texttt{Minni}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{U}(\widetilde{\texttt{Minni}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

L'interpretazione dell'uguaglianza è la STESSA in ogni modello

Nel definire un modello NON si deve menzionare l'interpretazione dell'uguaglianza perchè la sua interpretazione è la **STESSA in TUTTI i modelli** e corrisponde all'**uguaglianza degli elementi che interpretano i termini all'interno del dominio** D **di un modello** $\mathcal{D}$ come segue:

$$(\mathbf{x} = \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D}^2 \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 \\ 0 & \text{se } \mathbf{d}_1 \neq \mathbf{d}_2 \end{cases}$$

ovvero se il modello $\mathcal{D}$ con dominio $\mathbf{D}$ ha nomi per tutti gli elementi di $\mathbf{D}$ allora

$$(\mathbf{x} = \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D^2} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

$$(\mathbf{x} = \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \equiv \widetilde{\mathbf{d_1}} = \widetilde{\mathbf{d_2}} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{d}_1 \neq \mathbf{d}_2 \end{cases}$$

e nel caso di due costanti

$$(\mathbf{c_1} = \mathbf{c_2})^{\mathcal{D}} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

$$(\mathbf{c_1} = \mathbf{c_2})^{\mathcal{D}} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{c_1}^{\mathcal{D}} = \mathbf{c_2}^{\mathcal{D}} \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{c_1}^{\mathcal{D}} \neq \mathbf{c_2}^{\mathcal{D}} \end{cases}$$

e nel caso di una costante e variabile

$$(\mathbf{x} = \mathbf{c})^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

$$(\mathbf{x} = \mathbf{c})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{d} = \mathbf{c}^{\mathcal{D}} \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{d} \neq \mathbf{c}^{\mathcal{D}} \end{cases}$$

e analogamente si definisce l'interpretazione di $\mathbf{c} = \mathbf{x}$.

Esempi:

Nel seguente modello del linguaggio dato ed esteso con i nomi $\tilde{\mathbf{d}}$ degli elementi $\mathbf{d}$ del dominio

$\mathbf{D}= \{\mathtt{Pippo}, \mathtt{Minni}, \mathtt{Topolino}\}$
$a^{\mathcal{D}}$ $=\mathtt{Minni}$
$b^{\mathcal{D}}$ $=\mathtt{Minni}$.
$\widetilde{\mathtt{Minni}}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Minni}$
$\widetilde{\mathtt{Pippo}}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Pippo}$
$\widetilde{\mathtt{Topolino}}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Topolino}$

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b})^{\mathcal{D}} = (\widetilde{\mathtt{Minni}} = \widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

perchè $\mathbf{a}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Minni} = \mathbf{b}^{\mathcal{D}}$

invece nel modello

$\mathbf{D}= \{\mathtt{Pippo}, \mathtt{Minni}, \mathtt{Topolino}\}$
$b^{\mathcal{D}}$ $=\mathtt{Pippo}$
$a^{\mathcal{D}}$ $=\mathtt{Minni}$.
$\widetilde{\mathtt{Minni}}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Minni}$
$\widetilde{\mathtt{Pippo}}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Pippo}$
$\widetilde{\mathtt{Topolino}}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Topolino}$

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b})^{\mathcal{D}} = (\widetilde{\mathtt{Minni}} = \widetilde{\mathtt{Pippo}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

perchè $\mathbf{a}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Minni} \neq \mathbf{b}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Pippo}$.

Quindi il sequente

$$\vdash \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

è un opinione perchè c'è un modello in cui è falso (il secondo) e un modello in cui è vero (il primo).

Esercizi:

Classificare le seguenti formule usando modelli e contromodello nel caso di opinioni:

1. $A(c)$
2. $\forall x\, A(x)$
3. $\exists x\, A(x)$
4. $\forall x\ \forall y\ x = y$
5. $a \neq b$
6. $\exists x\ A(x)\ \rightarrow \forall x\ A(x)$

Si classifichino in termini di tautologia, opinione e paradosso le formalizzazioni delle seguenti argomentazioni costruendo un contromodello nel caso NON si riesca a derivare il sequente:

1. $\dfrac{\text{Ognuno sta attento oppure tutti dormono.}}{\text{Ciascuno o sta attento o dorme.}}$

   usando:
   A(x)=x sta attento
   D(x)=x dorme

2. $\dfrac{\text{Ciascuno o sta attento o dorme.}}{\text{Tutti stanno attenti oppure tutti dormono.}}$

   usando:
   A(x)=x sta attento
   D(x)=x dorme

3. $\dfrac{\text{Non tutti i programmi sono utili e corretti.}}{\text{Esiste un programma non utile.}}$

   usando
   $P(x)$="x è un programma"
   $U(x)$="x è utile"
   $C(x)$="x è corretto"

4. $\dfrac{\text{Non tutti i programmi sono utili e corretti.}}{\text{Esiste un programma non utile o esiste un programma non corretto.}}$

   usando
   $P(x)$="x è un programma"
   $U(x)$="x è utile"
   $C(x)$="x è corretto"

Solo i buoni sono stimati da tutti.
5. Alberto è buono.

Alberto è stimato da tutti.

usando
$S(x, y)$=”x stima y”
$B(x)$= “x è buono”
a=”Alberto”

I buoni e soltanto loro sono stimati da tutti.
6. Alberto è buono.

Alberto è stimato da tutti.

usando
$S(x, y)$=”x stima y”
$B(x)$= “x è buono”
a=”Alberto”

Ciascuno possiede ciò che non ha perduto.
7. Alberto non ha perduto la Ferrari testa rossa.

Alberto possiede la Ferrari testa rossa.

usando
$P(x, y)$=”x possiede y”
$E(x, y)$= “x ha perduto y”
f=”Ferrari testa rossa”

Solo i buoni sono stimati da tutti.
8. Alberto è stimato da tutti.

Alberto è buono.

usando
$S(x, y)$=”x stima y”
$B(x)$= “x è buono”
a=”Alberto”

9. Nessuno è buono e cattivo.

Ogni buono non è cattivo.

usando
$C(x)$= “x è cattivo”
$B(x)$= “x è buono”
a=”Alberto”