

9. Regole sicure e processo di decisione validità

Esercizio

1. La regola

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow -D$$

è soddisfacibile per riga, e quindi valida?

2. e la sua inversa

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma, A \vdash B} \rightarrow -D - inv$$

è pure soddisfacibile per riga, e quindi valida?

Diamo di seguito il concetto generale di regola inversa e sicura:

Def. 0.1 (regola inversa ad una premessa) La regola inversa di una regola del tipo

$$\frac{D_1, \dots, D_j \vdash E_1, \dots, E_k}{A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m} *$$

è la seguente

$$\frac{A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m}{D_1, \dots, D_j \vdash E_1, \dots, E_k} * - inv$$

Def. 0.2 (regola inversa ad due premesse) Le regole inverse di una regola del tipo

$$\frac{D_1, \dots, D_j \vdash E_1, \dots, E_k \quad D'_1, \dots, D'_{j'} \vdash E'_1, \dots, E'_{k'}}{A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m} *$$

sono le DUE seguenti

$$\frac{A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m}{D_1, \dots, D_j \vdash E_1, \dots, E_k} * - inv1 \quad \frac{A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m}{D'_1, \dots, D'_{j'} \vdash E'_1, \dots, E'_{k'}} * - inv2$$

Def. 0.3 (regola SICURA) Una regola si dice SICURA se lei e la sua inversa sono entrambe valide classicamente, rispetto alla semantica delle tabelle di verità.

Esercizi

1. La regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow -S$$

è sicura?

Darne una dimostrazione.

2. La regola

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee -S$$

è sicura?

ovvero lei è valida assieme alle sue inverse

$$\frac{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \vee -S - inv_1 \quad \frac{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}{\Gamma, B \vdash \Delta} \vee -S - inv_2$$

?

3. La regola

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \rightarrow -D$$

è sicura?

4. La regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \rightarrow -D$$

è sicura?

5. Quali regole del calcolo \mathbf{LC}_p sono sicure?

Procedura di decisione per proposizioni classiche

Per sapere se $\Gamma \vdash \nabla$ è derivabile in LC_p procedi in tal modo:

1. $\Gamma \vdash \nabla$ è assioma? $\begin{cases} \text{sì} & \text{vai in 5.} \\ \text{no} & \text{vai in 2.} \\ & \text{se in } \Gamma \text{ o in } \nabla \text{ c'è proposizione composta} \\ & \text{altrimenti STOP} \end{cases}$

2. Scegli in $\Gamma \vdash \nabla$ una proposizione composta, diciamo $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2$ per esempio.
 $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2$ è in posizione buona per applicare ad essa una SUA regola (a dx se $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2$ sta a dx di \vdash nel sequente, a sx se $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2$ sta a sx di \vdash)? $\begin{cases} \text{sì} & \text{vai in 4. operando su } \mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2 \\ \text{no} & \text{vai in 3. operando su } \mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2 \end{cases}$

3. se operi su $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2$ fai uno scambio per portarla in posizione buona da poter applicare la sua regola e vai in 4. operando su $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2$.

4. se operi su $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2$ applica la sua regola. Quante premesse ha la regola?
 $\begin{cases} \text{una} & \text{vai in 1. operando sulla premessa} \\ \text{due} & \text{scegli la prima premessa e vai in 1. operando su di essa} \end{cases}$
5. nell'albero ottenuto c'è foglia che NON è assioma con almeno una proposizione composta?
 $\begin{cases} \text{sì} & \text{scegli la foglia NON assioma e vai in 2.} \\ & \text{operando su di lei} \\ \text{no} & \text{STOP} \end{cases}$

CONCLUSIONE: se nell'albero ottenuto tutte le foglie sono assiomi, allora $\Gamma \vdash \nabla$ è derivabile in LC_p altrimenti NON lo è.

Come trovare riga con uscita 0 di proposizioni non valide

se algoritmo per $\Gamma \vdash \nabla$ si ferma con foglia del tipo

$$V_{i_1}, \dots, V_{i_n} \vdash V_{k_1}, \dots, V_{k_m}$$

che NON è assioma e fatta solo di variabili proposizionali ove

$$\{ V_{i_1}, \dots, V_{i_n} \} \cap \{ V_{k_1}, \dots, V_{k_m} \} = \emptyset$$

\Downarrow

la riga della tabella con

$$\begin{array}{ll} V_{i_j} = 1 & \text{se } V_{i_j} \text{ sta a sx sequente (ovvero tra le premesse del sequente)} \\ V_{k_j} = 0 & \text{se } V_{k_j} \text{ sta a dx sequente (ovvero tra le conclusioni del sequente)} \end{array}$$

dà valore 0 alla proposizione $\Gamma_{\&} \rightarrow \Delta_{\vee}$.

Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE o SODDISFACIBILI o NON VALIDE o INSODDISFACIBILI tramite la procedura di decisione del calcolo dei sequenti LC_p :

1. $\models P \& Q \rightarrow P \& R$?
2. $\models P \& Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$?
3. $\models P \rightarrow (Q \rightarrow P \& Q)$?
4. $\models ((P \rightarrow C) \& (Q \rightarrow C)) \vee D \rightarrow (P \vee Q \rightarrow C)$?
5. $\models P \rightarrow P$?
6. $\models P \vee \neg P$?
7. $\models P \& \neg P$?
8. $\models P \rightarrow (P \rightarrow P)$?
9. $\models (P \rightarrow P) \rightarrow P$?
10. $\models P \rightarrow (Q \rightarrow P)$?
11. $\models P \& Q \rightarrow P \vee Q$?
12. $\models P \vee Q \rightarrow P$?
13. $\models P \rightarrow (P \vee Q) \vee C$?
14. $\models (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P \vee Q$?
15. $\models \neg P \vee Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$?
16. $\models P \vee Q \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$?
17. $\models (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$?
18. $\models (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$?
19. $\models P \& (Q \vee R) \rightarrow (P \& Q) \vee (P \& R)$?
20. $\models P \rightarrow ((Q \vee R) \rightarrow (P \& Q) \vee (P \& R))$?
21. $\models A \vee \neg B \rightarrow \neg A \vee B$?

Correttezza procedura di decisione

1. Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ possiamo costruire un albero con rami infiniti applicando le regole di LC_p o ci fermiamo sempre dopo un numero finito di applicazioni delle regole?
2. Se la procedura di decisione su un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ dice SÌ, perchè il sequente è valido?
3. Se la procedura di decisione su un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ dice NO, perchè la riga trovata tramite la procedura rende il sequente NON valido?
4. L'albero

$$\frac{\frac{\frac{Q \vdash P, P \quad Q, Q \vdash P}{Q, P \rightarrow Q \vdash P} \rightarrow -S}{P \rightarrow Q, Q \vdash P} sc_{sx}}{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P} \rightarrow -D$$

cosa ci dice riguardo alla validità della proposizione $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$?

5. Come la procedura ci aiuta a dedurre che: se un *sequente valido* allora è pure *derivabile* in LC_p ?

Esercizi da appelli 2011

Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI e NON validi (e in che riga della loro tabella) o INSODDISFACIBILI, motivando la risposta:

1. Svolgere con la procedura esercizi allegato 6 della lezione del 24/4.

2. (1 appello bis)

Solo se cadono le foglie è autunno.

Se e solo se non cadono le foglie, non è autunno ma inverno.

si consiglia di usare:

C = “cadono le foglie”

I = “è inverno”

A = “è autunno”

3. (I appello)

Se ho tempo rileggo il compito.

Se e soltanto se ho tempo rileggo il compito.

si consiglia di usare:

R = “Rileggo il compito”

H = “Ho tempo”

4. (II appello)

Sono all'estero se non sono a Padova.

Non si dà il caso che sia a Padova e non sia all'estero.

si consiglia di usare:

E = “Sono all'estero”

P = “Sono a Padova”

5. (III appello)

Non si dà il caso che, se c'è vita sulla Luna, ci sia vita su Marte o su Saturno, o su Giove.

Se c'è vita sulla Luna e non su Giove allora c'è pure su Marte e Saturno.

si consiglia di usare:

L = “C'è vita sulla Luna”

M = “C'è vita su Marte”

S = “C'è vita su Saturno”

G = “C'è vita su Giove”

6. (IV appello)

Non c'è vita su Giove ma c'è su Marte e Saturno.

Non si dà il caso che, se c'è vita sulla Luna e non su Giove, allora ci sia pure su Marte.

si consiglia di usare le variabili dell'asserzione precedente.

Logica classica proposizionale \mathbf{LC}_p

$$\begin{array}{c}
 \text{ax-id} \qquad \qquad \qquad \text{ax-}\perp \\
 \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \qquad \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla \\
 \hline
 \frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}} \\
 \hline
 \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-D \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&-S \\
 \hline
 \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee-D \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee-S \\
 \hline
 \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg-D \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg-S \\
 \hline
 \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow-D \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow-S
 \end{array}$$