Soluzione esercizi - Simulazione parziale di Logica

Alessio Ferrarini e Raimondo Faggioli
e corretto dal docente

Gennaio 2020

1 Esercizio 1

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash B}{\vdash \neg A, B}\,\neg - D}{\neg\neg A \vdash B}\,\neg - S \qquad \vdash B, B}{B \to \neg\neg A \vdash B}\,\to -S}{\vdash \neg(B \to \neg\neg A), B}\,\neg - D}{\vdash B, \neg(B \to \neg\neg A)}\,sc - dx}{\neg B \vdash \neg(B \to \neg\neg A)}\,\neg - S
$$

La foglia $A \vdash B$, diventa falsa per $B = 0, A = 1$ e quindi anche il sequente radice è falso su tal riga.

Provo a derivare la negazione del sequente di partenza:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash A}{B, \neg A \vdash}\,\neg - S}{B \vdash \neg\neg A}\,\neg - D}{\vdash B \to \neg\neg A}\,\to -D}{\neg(B \to \neg\neg A) \vdash}\,\neg - S \qquad \dfrac{B \vdash}{\vdash \neg B}\,\neg - D}{\neg B \to \neg(B \to \neg\neg A) \vdash}\,\to -S}{\vdash \neg(\neg B \to \neg(B \to \neg\neg A))}\,\neg - D
$$

La foglia $B \vdash A$ é falsa per $B = 1$ e $A =$ a piacere e quindi anche il sequente radice. Essendo questo la negazione del sequente originale, allora il sequente originale è vero sul tal riga.

In conclusione il sequente originale è un opinione.

2 Esercizio 2

$$
\begin{array}{cl}
= \text{- ax} & \\
c = w, w = d, w = x \vdash w = w & \\
\hline
c = w, w = d, w = x \vdash x = w & = -S \\
\hline
c = w, w = x, w = d \vdash x = w & sc - sx \\
\hline
c = w, w = x, w = d \vdash x = d & = -S \\
\hline
c = w, w = x, w = d, x \neq d \vdash & \neg - S \\
\hline
c = x, x \neq d, w = x, w = d \vdash & sc - sx \\
\hline
c = x, x \neq d, w = x \vdash w \neq d & \neg - D \\
\hline
c = x, x \neq d, w = x \vdash \exists y\, w \neq y & \exists - Dv \\
\hline
c = x, x \neq d \vdash w \neq x, w \neq d & \neg - D \\
\hline
c = x, x \neq d \vdash \exists y\, w \neq y & \exists - D \\
\hline
c = x, x \neq d \vdash \forall z\, \exists y\, z \neq y & \forall - D\ w \notin VL \\
\hline
c = x \& x \neq d \vdash \forall z\, \exists y\, z \neq y & \& - S \\
\hline
\exists w\, (c = w \& w \neq d) \vdash \forall z\, \exists y\, z \neq y & \exists - S\ x \notin VL
\end{array}
$$

Essendo derivabile il sequente radice è una tautologia.

3 Esercizio 3

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{M(w) \vdash M(w)}}{M(w) \vdash \exists x M(x)}\ \exists - D\ v
          \qquad
          \dfrac{\text{Loop}}{A(w) \vdash \exists x M(x)}
        }{M(w) \vee A(w) \vdash \exists x M(x)}\ \vee - S
      }{\vdash \neg(M(w) \vee A(w)), \exists x M(x)}\ \neg - D
    }{\vdash \forall x \neg(M(x) \vee A(x)), \exists x M(x)}\ \forall - D\ w \notin VL
  }{\vdash \exists x M(x), \forall x \neg(M(x) \vee A(x))}\ sc - dx
}{\neg \exists x M(x) \vdash \forall x \neg(M(x) \vee A(x))}\ \neg - S
$$

Cercando di falsificare la foglia a D che NON è assioma costruiamo un CONTROMODELLO del sequente radice come segue:
$D = \{Unit\}$
$M(x)^{\mathrm{D}}(d) = 0$ per ogni $d \in D$
$A(x)^{\mathrm{D}}(d) = 1$ per ogni $d \in D$
Il sequente radice NON vale in tal modello, che è quindi un suo contromodello !,perchè:
$(\neg \exists x M(x))^D = \neg(\exists x(M(x)))^D = \neg(1) = 0$
mentre $\forall x(\neg M(x) \vee A(x))^D = 0$
perchè per ogni d
$\neg(M(x) \vee A(x))(d) = \neg(M(x)^D(d) \vee A(x)^D(d)) = \neg(0 \vee 1) = \neg 1 = 0.$
Dunque $(\neg \exists x M(x) \vdash \forall x \neg(M(x) \vee A(x))^D = 1 \to 0 = 0.$

Proviamo a derivare la negazione del sequente originale:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$M(w) \vdash$}
\RightLabel{$\xleftarrow{\exists - S \ w \notin VL}$}
\UnaryInfC{$\exists x M(x) \vdash$}
\RightLabel{$\neg D$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg \exists x M(x)$}
\AxiomC{Loop}
\noLine
\UnaryInfC{$\forall x \neg (M(x) \vee A(x)) \vdash$}
\RightLabel{$\rightarrow -S$}
\BinaryInfC{$\neg \exists x M(x) \rightarrow \forall x \neg (M(x) \vee A(x)) \vdash$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(\neg \exists x M(x) \rightarrow \forall x \neg(\ M(x) \vee A(x) \ ) \ )$}
\end{prooftree}
$$

Cercando di falsificare la foglia a sx che NON è assioma costruiamo un CONTROMODELLO del sequente radice come segue:
$D = \{Unit\}$
$M(x)^{\mathrm{D}}(d) = 1 \ \forall d \in D$
$A(x)^{\mathrm{D}}(d) = a \ piacere$
Il sequente radice NON vale in tal modello perchè:
$(\neg \exists x M(x))^D = \neg(\exists x M(x))^D = \neg(1) = 0$
$\neg(\ (\neg \exists x M(x) \rightarrow \forall x \neg (M(x) \vee A(x))^D) = \neg(0 \rightarrow ?) = \neg 1 = 0$

Tal contromodello risulta essere un modello del sequente di partenza essendo il sequente sopra la negazione del sequente di partenza. Infatti $(\neg \exists x M(x) \vdash \forall x \neg (M(x) \vee A(x))^D = 0 \rightarrow ? = 1$.

Quindi il sequente originale ha un contromodello e un modello e perciò è un' opinione.

4 Esercizio 4

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$C(w) \vdash C(w)$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$C(w), T(w) \vdash T(w)$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$C(w), T(w) \vdash C(w)$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$C(w), T(w), \neg C(w) \vdash$}
\RightLabel{$\rightarrow -S$}
\BinaryInfC{$C(w), T(w), T(w) \rightarrow \neg C(w) \vdash$}
\RightLabel{$\forall - Sv$}
\UnaryInfC{$C(w), T(w), \forall x (T(x) \rightarrow \neg C(x)) \vdash$}
\RightLabel{$sc - sx$}
\UnaryInfC{$C(w), \forall x (T(x) \rightarrow \neg C(x)), T(w) \vdash$}
\RightLabel{$\rightarrow -S$}
\BinaryInfC{$C(w), \forall x (T(x) \rightarrow \neg C(x)), C(w) \rightarrow T(w) \vdash$}
\RightLabel{$\forall - Sv$}
\UnaryInfC{$C(w), \forall x (T(x) \rightarrow \neg C(x)), \forall x (C(x) \rightarrow T(x)) \vdash$}
\RightLabel{$sc - sx$}
\UnaryInfC{$\forall x (C(x) \rightarrow T(x)), \forall x (T(x) \rightarrow \neg C(x)), C(w) \vdash$}
\RightLabel{$\xleftarrow{\exists - S \ w \notin VL}$}
\UnaryInfC{$\forall x (C(x) \rightarrow T(x)), \forall x (T(x) \rightarrow \neg C(x)), \exists x C(x) \vdash$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$\forall x (C(x) \rightarrow T(x)), \forall x (T(x) \rightarrow \neg C(x)) \vdash \neg \exists x C(x)$}
\end{prooftree}
$$

Il sequente radice essendo derivabile è una tautologia.

5 Esercizio 5

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Ax-id}}{P(w), R(y) \vdash R(y), \exists x(R(x)\&P(x)), R(w)} \qquad \overset{\text{Loop}}{P(w), R(y) \vdash P(y), \exists x(R(x)\&P(x)), R(w)}}{P(w), R(y) \vdash R(y)\&P(y), \exists x(R(x)\&P(x)), R(w)}\;\& - dx}{P(w), R(y) \vdash \exists x(R(x)\&P(x)), R(w)}\;\exists - dx}{P(w), R(y) \vdash R(w), \exists x(R(x)\&P(x))}\;\text{sc-dx} \qquad \overset{\text{Ax-id}}{P(w), R(y) \vdash P(w), \exists x(R(x)\&P(x))}}{P(w), R(y) \vdash R(w)\&P(w), \exists x(R(x)\&P(x))}\;\& - dx}{P(w), R(y) \vdash \exists x(R(x)\&P(x))}\;\exists - D}{P(w), \exists x R(x) \vdash \exists x(R(x)\&P(x))}\;\xleftarrow{\exists - S\ y \notin VL}}{\exists x R(x), P(w) \vdash \exists x(R(x)\&P(x))}\;sc - dx}{\exists x R(x), \exists x P(x) \vdash \exists x(R(x)\&P(x))}\;\xleftarrow{\exists - S\ w \notin VL}}{\exists x R(x)\&\exists x P(x) \vdash \exists x(R(x)\&P(x))}\;\& - S
$$

Cercando di falsificare la foglia centrale che NON è assioma costruiamo un CONTROMODELLO del sequente radice come segue:
$D = \{Mario, Luigi\}$

$$
R(x)^{\mathrm{D}}(d) = \begin{cases} 1 & \text{sse d = Mario} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

$$
P(x)^{\mathrm{D}}(d) = \begin{cases} 1 & \text{sse d = Luigi} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

Il sequente radice NON vale in tal modello perchè:
$\exists x R(x)^D \& \exists x P(x)^D \rightarrow \exists x(R(x)\&P(x))^D =$
=1 (Perchè esiste Mario) &1 (Perchè esiste Mario) $\rightarrow$ 0 (Perchè nè Mario nè Luigi soddisfano la congiunzione.) =0

Proviamo a derivare la negazione del sequente originale:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Loop}}{\vdash \exists x P(x)} \qquad \overset{\text{Loop}}{\vdash \exists x R(x)}}{\vdash \exists x R(x) \& \exists x P(x)}\;\& - D \qquad \dfrac{\dfrac{R(w), P(w) \vdash}{R(w)\&P(w) \vdash}\;\& - S}{\exists x(R(x)\&P(x)) \vdash}\;\xleftarrow{\exists - S\ w \notin VL}}{\vdash \exists x R(x) \& \exists x P(x) \rightarrow \exists x(R(x)\&P(x))}\;\rightarrow - D}{\vdash \neg(\exists x R(x) \& \exists x P(x) \rightarrow \exists x(R(x)\&P(x)))}\;\neg - S
$$

Cercando di falsificare la foglia a sx che NON è assioma costruiamo un CONTROMODELLO del sequente radice come segue:
$D = \{Unit\}$
$R(x)^{\mathrm{D}}(d) = 0\ \forall d \in D$
$P(x)^{\mathrm{D}}(d) = ?\ \forall d \in D$
Questo modello è un contromodello del sequente radice perchè:
$(\exists x R(x) \& \exists x P(x))^D = (\exists x R(x))^D \& (\exists x P(x))^D = 0\&? = 0$

Quindi $(\neg(\exists x R(x) \& \exists x P(x) \rightarrow \exists x(R(x)\&P(x)))^D = \neg(\exists x R(x)^D \& \exists x P(x)^D \rightarrow \exists x(R(x)\&P(x))^D) =$
$\neg(0 \rightarrow ?) = \neg(1) = 0$

Essendo questo un contromodello della negazione del sequente di partenza diventa un modello del sequente di partenza ed infatti $(\exists x R(x) \& \exists x P(x) \rightarrow \exists x(R(x) \& P(x)))^D = 0 \rightarrow ? = 1$

Quindi il sequente di partenza ha un modello e un contromodello ed è perciò un' opinione.

6 Esercizio 6

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{Ax-Id}
\noLine
\UnaryInfC{$B(m,t), B(m,c), B(m,w) \vdash B(m,t), t = c$}
\AxiomC{Ax-Id}
\noLine
\UnaryInfC{$B(m,t), B(m,c), B(m,w) \vdash B(m,c), t = c$}
\RightLabel{$\& - D$}
\BinaryInfC{$B(m,t), B(m,c), B(m,w) \vdash B(m,t) \& B(m,c), t = c$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$B(m,t), B(m,c), B(m,w), t = c \vdash t = c$}
\RightLabel{$\rightarrow -S$}
\BinaryInfC{$B(m,t), B(m,c), B(m,w), B(m,t) \& B(m,c) \rightarrow t = c \vdash t = c$}
\RightLabel{$\forall - Sv$}
\UnaryInfC{$B(m,t), B(m,c), B(m,w), \forall z(B(m,t) \& B(m,z) \rightarrow t = z) \vdash t = c$}
\RightLabel{$\forall - Sv$}
\UnaryInfC{$B(m,t), B(m,c), B(m,w), \forall y \forall z(B(m,y) \& B(m,z) \rightarrow y = z) \vdash t = c$}
\RightLabel{$\& - S$}
\UnaryInfC{$B(m,t), B(m,c), B(m,w) \& \forall y \forall z(B(m,y) \& B(m,z) \rightarrow y = z) \vdash t = c$}
\RightLabel{$\xleftarrow{\exists - S\ w \notin VL}$}
\UnaryInfC{$B(m,t), B(m,c), \exists x B(m,x) \& \forall y \forall z(B(m,y) \& B(m,z) \rightarrow y = z) \vdash t = c$}
\RightLabel{$sc - sx$}
\UnaryInfC{$\exists x B(m,x) \& \forall y \forall z(B(m,y) \& B(m,z) \rightarrow y = z), B(m,t), B(m,c) \vdash t = c$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$\exists x B(m,x) \& \forall y \forall z(B(m,y) \& B(m,z) \rightarrow y = z), B(m,t) \vdash \neg B(m,c), t = c$}
\RightLabel{$sc - sx$}
\UnaryInfC{$\exists x B(m,x) \& \forall y \forall z(B(m,y) \& B(m,z) \rightarrow y = z), B(m,t) \vdash t = c, \neg B(m,c)$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$\exists x B(m,x) \& \forall y \forall z(B(m,y) \& B(m,z) \rightarrow y = z), B(m,t), t \neq c \vdash \neg B(m,c)$}
\end{prooftree}
$$

Il sequente essendo derivabile è una tautologia.

7 Esercizio 7

$\exists x \forall y L(x,y) \leftrightarrow \neg L(y,y)$

Siccome si nota subito essere il paradosso di Russell, procediamo direttamente a studiarne la negazione.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$L(w,w) \vdash L(w,w)$}
\RightLabel{$\neg - dx$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg L(w,w), L(w,w)$}
\RightLabel{$sc - dx$}
\UnaryInfC{$\vdash L(w,w), \neg L(w,w)$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg L(w,w) \vdash \neg L(w,w)$}
\RightLabel{$\rightarrow -sx$}
\BinaryInfC{$L(w,w) \rightarrow \neg L(w,w) \vdash \neg L(w,w)$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$L(w,w) \vdash L(w,w)$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$L(w,w) \vdash L(w,w)$}
\RightLabel{$\neg - dx$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg L(w,w), L(w,w)$}
\RightLabel{$\rightarrow -sx$}
\BinaryInfC{$L(w,w), L(w,w) \rightarrow \neg L(w,w) \vdash$}
\RightLabel{$sc - sx$}
\UnaryInfC{$L(w,w) \rightarrow \neg L(w,w), L(w,w) \vdash$}
\RightLabel{$\rightarrow -sx$}
\BinaryInfC{$L(w,w) \rightarrow \neg L(w,w), \neg L(w,w) \rightarrow L(w,w) \vdash$}
\RightLabel{$\& - sx$}
\UnaryInfC{$(L(w,w) \rightarrow \neg L(w,w)) \& (\neg L(w,w) \rightarrow L(w,w)) \vdash$}
\RightLabel{$\forall - sx\ v$}
\UnaryInfC{$\forall y(L(w,y) \leftrightarrow \neg L(y,y)) \vdash$}
\RightLabel{$\xleftarrow{\exists - sx\ w \notin VL}$}
\UnaryInfC{$\exists x \forall y(L(x,y) \leftrightarrow \neg L(y,y)) \vdash$}
\end{prooftree}
$$

8 Teoria 1

8.1 Traduzione assiomi

Ax1) $R(b) \rightarrow \neg C(d)$

Ax2) $\exists x S(x) \rightarrow \neg R(l)$

Ax3) $\neg R(l) \to \exists x S(x)$
Ax4) $\neg C(d) \to R(b) \& R(l)$
Ax5) $R(l) \vee \neg \exists x S(x) \to C(d)$

8.2 Traduzione teoremi

T1 $R(l) \to \neg \exists x S(x)$
T2 $C(d)$
T3 $\neg R(b)$
T4 $\exists x \neg R(x)$

8.3 Dimostrazione teoremi

8.3.1 T1

$$\dfrac{\overset{Ax2}{\vdash \exists x S(x) \to \neg R(l)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Ax-id}}{R(l), S(w) \vdash S(w), \exists x S(x)}}{R(l), S(w) \vdash \exists x S(x)}\ \exists - D \qquad \overset{\neg - ax_{S1}}{R(l), S(w), \neg R(l) \vdash}}{R(l), S(w), \exists x S(x) \to \neg R(l) \vdash}\ \to -S}{\exists x S(x) \to \neg R(l), R(l), S(w) \vdash}\ sc - sx}{\exists x S(x) \to \neg R(l), R(l), \exists x S(x) \vdash}\ \xleftarrow{\exists - S w \notin VL}}{\exists x S(x) \to \neg R(l), R(l) \vdash \neg \exists x S(x)}\ \neg - D}{\exists x S(x) \to \neg R(l) \vdash R(l) \to \neg \exists x S(x)}\ \to -D}{\vdash R(l) \to \neg \exists x S(x)}\ comp$$

8.3.2 T2

$$\dfrac{Ax4 \qquad \dfrac{Ax5 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg - ax_{D2}}{\vdash \neg C(d), R(l), \neg \exists x S(x), C(d)} \qquad \dfrac{\overset{\text{Ax-id}}{R(b), R(l) \vdash R(l), \neg \exists x S(x), C(d)}}{R(b) \& R(l) \vdash R(l), \neg \exists x S(x), C(d)}\ \& - S}{\neg C(d) \to R(b) \& R(l) \vdash R(l), \neg \exists x S(x), C(d)}\ \to -S}{\neg C(d) \to R(b) \& R(l) \vdash R(l) \vee \neg \exists x S(x), C(d)}\ \vee - D \qquad \overset{\text{Ax-id}}{\neg C(d) \to R(b) \& R(l), C(d) \vdash C(d)}}{Ax4, R(l) \vee \neg \exists x S(x) \to C(d) \vdash C(d)}\ \to -S}{\neg C(d) \to R(b) \& R(l) \vdash C(d)}\ comp}{\vdash C(d)}\ comp$$

8.3.3 T3

$$\dfrac{\overset{T2}{\vdash C(d)} \qquad \dfrac{\overset{Ax1}{\vdash R(b) \to \neg C(d)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Ax-id}}{C(d), R(b) \vdash R(b)} \qquad \overset{\neg - ax_{S1}}{C(d), R(b), \neg C(d) \vdash}}{C(d), R(b), R(b) \to \neg C(d) \vdash}\ \to -S}{C(d), R(b) \to \neg C(d), R(b) \vdash}\ sc_S}{C(d), R(b) \to \neg C(d) \vdash \neg R(b)}\ \neg - D}{C(d) \vdash \neg R(b)}\ comp}{\vdash \neg R(b)}\ comp$$

8.3.4 T4

$$\dfrac{\begin{array}{c} T3 \\ \vdash \neg R(b) \end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \neg - ax_{S2} \\ \neg R(b), R(b) \vdash \end{array}}{\neg R(b) \vdash \neg R(b)}\,\neg - D}{\neg R(b) \vdash \exists x \neg R(x)}\,\exists - Dv}{\vdash \exists x \neg R(x)}\,comp$$

9 Teoria 2

9.1 Traduzione assiomi

Ax1) $\forall x \forall y \forall z (A(x,y) \& A(y,z) \to A(x,z))$
Ax2) $A(r,c)$
Ax3) $\forall x \forall y (A(x,y) \vee A(y,x))$
Ax4) $\neg \exists x A(x,x)$
Ax5) $\neg \exists x A(x,e)$
Ax6) $A(b,r)$

9.2 Traduzione teoremi

T1 $\neg A(b,e)$
T2 $A(b,c)$
T3 $b \neq r$
T4 $\forall x ((x \neq e) \to A(e,x))$

9.3 Dimostrazione teoremi

9.3.1 Derivazione del falso

Dato che gli assiomi **Ax3** e **Ax4** sono contradditori, possiamo derivare il falso con la regola della composizione direttamente con gli assiomi.

$$\dfrac{\begin{array}{c} Ax3 \\ \vdash \forall x \forall y (A(x,y) \vee A(y,x)) \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} Ax4 \\ \vdash \neg \exists x A(x,x) \end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \text{Ax-id} \\ A(x,x) \vdash A(x,x), \bot \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Ax-id} \\ A(x,x) \vdash A(x,x), \bot \end{array}}{A(x,x) \vee A(x,x) \vdash A(x,x), \bot}\,\vee - S}{\forall y (A(x,y) \vee A(y,x)) \vdash A(x,x), \bot}\,\forall - Sv}{\forall x \forall y (A(x,y) \vee A(y,x)) \vdash A(x,x), \bot}\,\forall - Sv}{\forall x \forall y (A(x,y) \vee A(y,x)) \vdash \exists x A(x,x), \bot}\,\exists - Dv}{\forall x \forall y (A(x,y) \vee A(y,x)), \neg \exists x A(x,x) \vdash \bot}\,\neg - S}{\forall x \forall y (A(x,y) \vee A(y,x)) \vdash \bot}\,comp}{\vdash \bot}\,comp$$

Ora tutti i teoremi in T_{alt} risultano veri in tal teoria derivandoli come seque:

$$\dfrac{\vdash \bot \qquad \bot \vdash T_i}{\vdash T_i}$$

per $i = 1..4$
per esempio: **T1**

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$derivazionedelfalso$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash \bot$}
\AxiomC{Ax-$\bot$}
\noLine
\UnaryInfC{$\bot \vdash \neg A(b,e)$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash \neg A(b,e)$}
\end{prooftree}
$$

IN ALTERNATIVA
PER CHI non si fosse accorto della contraddittorietá degli assiomi mostriamo una derivazione di ogni singolo teorema DIRETTAMENTE dagli assiomi DATI come segue:

9.3.2 T1

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$Ax5$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash \neg\exists x\, A(x,e)$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$A(b,e) \vdash A(b,e)$}
\RightLabel{$\exists - Dv$}
\UnaryInfC{$A(b,e) \vdash \exists x\, A(x,e)$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A(b,e), \exists x\, A(x,e)$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$\neg\exists x\, A(x,e) \vdash \neg A(b,e)$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash \neg A(b,e)$}
\end{prooftree}
$$

9.3.3 T2

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$Ax6$}
\AxiomC{$Ax2$}
\AxiomC{$Ax1$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$A(b;r), A(r;c) \vdash A(b;r), A(b;c)$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$A(b;r), A(r;c) \vdash A(r;c), A(b;c)$}
\RightLabel{$\& - D$}
\BinaryInfC{$A(b;r), A(r;c) \vdash A(b;r)\&A(r;c), A(b;c)$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$A(b;r), A(r;c), A(b;c) \vdash A(b;c)$}
\RightLabel{$\rightarrow -S$}
\BinaryInfC{$A(b;r), A(r;c), (A(b;r)\&A(r;c)) \rightarrow A(b;c) \vdash A(b;c)$}
\RightLabel{$\forall - Sv$}
\UnaryInfC{$A(b;r), A(r;c), \forall z((A(b;r)\&A(r;z)) \rightarrow A(b;z)) \vdash A(b;c)$}
\RightLabel{$\forall - Sv$}
\UnaryInfC{$A(b;r), A(r;c), \forall y\forall z((A(b;y)\&A(y;z)) \rightarrow A(b;z)) \vdash A(b;c)$}
\RightLabel{$\forall - Sv$}
\UnaryInfC{$A(b;r), A(r;c), \forall x\forall y\forall z((A(x;y)\&A(y;z)) \rightarrow A(x;z)) \vdash A(b;c)$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$A(b;r), A(r;c) \vdash A(b;c)$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$A(b;r) \vdash A(b;c)$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash A(b;c)$}
\end{prooftree}
$$

9.3.4 T3

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$Ax6$}
\noLine
\UnaryInfC{$A(b,r)$}
\AxiomC{$Ax4$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg\exists x A(x,x)$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$b = r, A(b,b) \vdash A(b,b)$}
\RightLabel{$\exists - Dv$}
\UnaryInfC{$b = r, A(b,b) \vdash \exists x A(x,x)$}
\RightLabel{$= -S$}
\UnaryInfC{$A(b,r), b = r \vdash \exists x A(x,x)$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$A(b,r) \vdash \neg(b = r), \exists x A(x,x)$}
\RightLabel{$sc - sx$}
\UnaryInfC{$A(b,r) \vdash \exists x A(x,x), b \neq r$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$A(b,r), \neg\exists x A(x,x) \vdash b \neq r$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$A(b,r) \vdash b \neq r$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash b \neq r$}
\end{prooftree}
$$

9.3.5 T4

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{Ax3}
\noLine
\UnaryInfC{$\forall x \forall y (A(x,y) \vee A(y,x))$}
\AxiomC{$Ax5$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg \exists x A(x,e)$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$w \neq e, A(e,w) \vdash A(e,w), A(w,e)$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$w \neq e, A(w,e) \vdash A(e,w), A(w,e)$}
\RightLabel{$\vee - S$}
\BinaryInfC{$w \neq e, A(w,e) \vee A(e,w) \vdash A(e,w), A(w,e)$}
\RightLabel{$sc - sx$}
\UnaryInfC{$A(w,e) \vee A(e,w), w \neq e \vdash A(e,w), A(w,e)$}
\RightLabel{$\rightarrow -D$}
\UnaryInfC{$A(w,e) \vee A(e,w) \vdash (w \neq e) \rightarrow A(e,w), A(w,e)$}
\RightLabel{$sc - dx$}
\UnaryInfC{$A(w,e) \vee A(e,w) \vdash (w \neq e) \rightarrow A(e,w), A(w,e)$}
\RightLabel{$\forall - S$}
\UnaryInfC{$\forall y (A(w,y) \vee A(y,w)) \vdash A(w,e), (w \neq e) \rightarrow A(e,w)$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y (A(x,y) \vee A(y,x)) \vdash A(w,e), (w \neq e) \rightarrow A(e,w)$}
\RightLabel{$\exists - D$}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y (A(x,y) \vee A(y,x)) \vdash \exists x A(x,e), (w \neq e) \rightarrow A(e,w)$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y (A(x,y) \vee A(y,x), \neg \exists x A(x,e) \vdash (w \neq e) \rightarrow A(e,w)$}
\RightLabel{$\xleftarrow{\forall - D \ w \notin VL}$}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y (A(x,y) \vee A(y,x)), \neg \exists x A(x,e) \vdash \forall x ((x \neq e) \rightarrow A(e,x))$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\forall x \forall y (A(x,y) \vee A(y,x)) \vdash \forall x ((x \neq e) \rightarrow A(e,x))$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash \forall x ((x \neq e) \rightarrow A(e,x))$}
\end{prooftree}
$$

10 Esercizio 10

La regola:

$$\frac{D \vdash \neg M \qquad \vdash \neg F \& C}{M \vdash \neg D \& C} \; 1$$

è valida? lo sono le sue inverse?
Al fine di dimostrare la validita' della regola mostriamo questo teorema:
Ipotesi
Sia r una riga fissata sulla tabella di veritá
1)$D \rightarrow \neg M = 1$ su r
2)$tt \rightarrow \neg F \& C = 1$ su r
3)$M = 1$ su r

Tesi
$\neg D \& C = 1$ su r

Dimostrazione: Dall'ipotesi **3)** sappiamo che $M = 1$, quindi l'ipotesi **1)**, diventa $D \rightarrow 0$, percui $D = 0$. Invece dall'ipotesi **2)** ricaviamo $1 \rightarrow \neg 0 \& 1$ e $F = 0, C = 1$
La nostra tesi è provata $\neg 0 \& 1 = 1$, e la regola è valida.

- Regola inversa 1:

$$\frac{M \vdash \neg D \& C}{D \vdash \neg M} \; 1 \text{ - Inv-1}$$

Per dimostrare la validita' della prima regola inversa mostriamo questo teorema:
Ipotesi
Sia r una riga fissata sulla tabella di veritá

1)$M \to \neg D\&C = 1$ su r
2)$D = 1$ su r

Tesi
$\neg M = 1$ su r

Dimostrazione: Dall'ipotesi **2)** sappiamo che $D = 1$, quindi l' ipotesi **1)** diventa $M \to 0\&C = 1$ da cui ricaviamo $M = 0$.
La nostra tesi è verificata $1 \to \neg 0 = 1$, e la prima inversa della regola è valida.

- Regola inversa 2:

$$\frac{M \vdash \neg D\&C}{\vdash \neg F\&C} \text{ 1 - Inv-2}$$

Per dimostrare la validita' della seconda regola inversa cerco una riga r tale che:
1)$M \to \neg D\&C = 1$ su r
2)$tt = 1$ (sempre vera)
3)$\neg F\&C = 0$

Considero: $C = D = F = M = 0$
1)$0 \to \neg 0\&0 = 1$ ok
3)$\neg 0\&0 = 0$ ok

Quindi la regola non è valida.

Infine concludiamo che la regola di partenza 1 è solo valida ma NON è sicura in quanto una sua inversa NON è valida.

11 Esercizio Facoltativo 1

Dall'affermazione:
Ip D'estate c'è qualcuno che è felice
si dica quali delle seguenti affermazioni si possono dedurre:
A Se nessuno è felice allora non è estate.
B Se non è estate tutti sono infelici.
C Se non è estate qualcuno è infelice.

11.1 Traduzione

Ip $\vdash E \to \exists x F(x)$
A $\vdash \neg \exists x F(x) \to \neg E$
B $\vdash \neg E \to \forall x F(x)$
C $\vdash \neg E \to \exists x \neg F(x)$

11.2 Svolgimento

11.2.1 A

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash Ip1$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$E \vdash E, \exists x F(x)$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$E, \exists x F(x) \vdash \exists x F(x)$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$E, E \to \exists x F(x) \vdash \exists x F(x)$}
\RightLabel{$sc - sx$}
\UnaryInfC{$E \to \exists x F(x), E \vdash \exists x F(x)$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$E \to \exists x F(x), E, \neg \exists x F(x) \vdash$}
\RightLabel{$sc - sx$}
\UnaryInfC{$E \to \exists x F(x), \neg \exists x F(x), E \vdash$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$E \to \exists x F(x), \neg \exists x F(x) \vdash \neg E$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$E \to \exists x F(x) \vdash \neg \exists x F(x) \to \neg E$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\vdash \neg \exists x F(x) \to \neg E$}
\end{prooftree}
$$

Quindi A è una tautologia per il calcolo $LC_=$ + Ip ovvero A è deducibile da Ip e costituisce una risposta corretta al quesito posto.

11.2.2 B

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash Ip1$}
\AxiomC{$\vdash F(w), E, E$}
\RightLabel{$\xleftarrow{\forall - D \; w \notin VL}$}
\UnaryInfC{$\vdash \forall x F(x), E, E$}
\RightLabel{$sc - D$}
\UnaryInfC{$\vdash E, E, \forall x F(x)$}
\AxiomC{Ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$F(w) \vdash F(w), E$}
\RightLabel{$\forall v - D$}
\UnaryInfC{$F(w) \vdash \forall x F(x), E$}
\RightLabel{sc -D}
\UnaryInfC{$F(w) \vdash E, \forall x F(x)$}
\RightLabel{$\xleftarrow{\exists - S \; w \notin VL}$}
\UnaryInfC{$\exists x F(x) \vdash E, \forall x F(x)$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$E \to \exists x F(x) \vdash E, \forall x F(x)$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$E \to \exists x F(x), \neg E \vdash \forall x F(x)$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$E \to \exists x F(x) \vdash \neg E \to \forall x F(x)$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\vdash \neg E \to \forall x F(x)$}
\end{prooftree}
$$

Il sequente di partenza NON è deducibile da IP in quanto possiamo costruire il seguente CONTROMODELLO ispirati dalla foglia a sx dell'albero sopra che NON è assioma:
$D = \{Unit\}$
$E = 0$
$F(x)^{\mathrm{D}}(d) = 0 \; \forall d \in D$
Ip vale in tal modello perchè:
$0 \to \exists x F(x) = 1$
ma B non vale in tal modello, che è quindi un suo contromomdello, perchè:
$(\neg E \to \forall x F(x))^D = \neg E^D \to \forall x F(x)^D = \neg 0 \to 0 = 1 \to 0 = 0$
$(\forall x F(x))^D = 0$ perchè $F(x)^D(Unit) = 0$ e c'è solo lui.

Quindi risulta che la risposta B non è quindi deducibile da IP in quanto $Ip \vdash B$ ha un contromodello che è il modello sopra dove $(Ip \vdash B)^D = 1 \to 0 = 0$

11.2.3 C

$$
\dfrac{\vdash Ip1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F(x) \vdash \exists x \neg F(x), E, E,}{\vdash \neg F(x), \exists x \neg F(x), E, E,}\ \neg - D}{\vdash \exists x \neg F(x), E, E}\ \exists - D}{\vdash E, E, \exists x \neg F(x)}\ sc - D \qquad \dfrac{\overset{\text{Loop}}{F(w) \vdash E, \exists x \neg F(x)}}{\exists x F(x) \vdash E, \exists x \neg F(x)}\ \xleftarrow{\exists - S\ w \notin VL}}{E \to \exists x F(x) \vdash E, \exists x \neg F(x)}\ \to -S}{E \to \exists x F(x), \neg E \vdash \exists x \neg F(x)}\ \neg - S}{E \to \exists x F(x) \vdash \neg E \to \exists x \neg F(x)}\ \to -D}{\vdash \neg E \to \exists x \neg F(x)}\ \text{comp}
$$

Il sequente di partenza NON è deducibile da IP in quanto possiamo costruire il seguente CONTROMODELLO ispirati dalla foglia a sx che NON è assioma nell'albero sopra:
$D = \{Unit\}$
$E = 0$
$F(x)^{\mathrm{D}}(d) = 1\ \forall d \in D$
quindi $(\exists x F(x))^D = 1$ mentre $(\exists x \neg F(x))^D = 0$ perchè c'è solo Unit.
Poi Ip vale in tal modello perchè:
$IP^D = 0 \to (\exists x F(x))^D = 1$
B non vale perchè:
$(\neg E \to \exists x \neg F(x))^D = \neg E^D \to (\exists x \neg F(x))^D =$
$\neg 0 \to \neg 1 = 1 \to 0 = 0$

Quindi risulta che la risposta C non è quindi deducibile da IP in quanto $Ip \vdash C$ ha un contromodello che è il modello sopra dove $(Ip \vdash C)^D = 1 \to 0 = 0$.

12 Esercizio Facoltativo 2

In un gioco due amiche fanno un'affermazione, che è vera o falsa.
Un'affermazione è mancante e l'altra è riportata sotto:
Celeste: ...
Morgana: se l'affermazione di Celeste fosse falsa anch'io direi il falso.
Si può dedurre, anche se non si conosce l'affermazione di Celeste, quante affermazioni sono vere?
a) No, ma se una è vera anche l'altra lo è.
b) Sì, sono vere tutte e due le affermazioni.
c) Sì, è vera solo l'affermazione di Morgana.
d) Sì, è vera solo l'affermazione di Celeste.
e) Nessuna affermazione è vera.

12.1 Traduzione

Morgana: $M \leftrightarrow (\neg C \to \neg M)$

12.2 Verifica di non contraddittorietà

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{"ax-id"}
\noLine
\UnaryInfC{$M \vdash M, \bot$}
\AxiomC{"ax-id"}
\noLine
\UnaryInfC{$M \vdash M, \bot, C$}
\RightLabel{$\neg - dx$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg M, M, \bot, C$}
\RightLabel{$sc - dx$}
\UnaryInfC{$\vdash C, \neg M, M, \bot$}
\RightLabel{$\neg - sx$}
\UnaryInfC{$\neg C \vdash \neg M, M, \bot$}
\RightLabel{$\rightarrow -dx$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg C \rightarrow \neg M, M, \bot$}
\RightLabel{$\rightarrow -sx$}
\BinaryInfC{$\neg C \rightarrow \neg M \rightarrow M \vdash M, \bot$}
\RightLabel{$\neg - sx$}
\UnaryInfC{$\neg C \rightarrow \neg M \rightarrow M, \neg M \vdash \bot$}
\AxiomC{$M, M, C \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg - dx$}
\UnaryInfC{$M, M \vdash \neg C, \bot$}
\RightLabel{$\rightarrow -dx$}
\UnaryInfC{$M \vdash M \rightarrow \neg C, \bot$}
\AxiomC{"ax-id"}
\noLine
\UnaryInfC{$M, M, C \vdash \bot, C$}
\RightLabel{$\neg - dx$}
\UnaryInfC{$M, M \vdash \neg C, \bot, C$}
\RightLabel{$\rightarrow -dx$}
\UnaryInfC{$M \vdash M \rightarrow \neg C, \bot, C$}
\RightLabel{$\neg - dx$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg M, M \rightarrow \neg C, \bot, C$}
\RightLabel{$sc - dx$}
\UnaryInfC{$\vdash C, \neg M, M \rightarrow \neg C, \bot$}
\RightLabel{$\neg - sx$}
\UnaryInfC{$\neg C \vdash \neg M, M \rightarrow \neg C, \bot$}
\RightLabel{$\rightarrow -dx$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg C \rightarrow \neg M, M \rightarrow \neg C, \bot$}
\RightLabel{$\rightarrow -sx$}
\BinaryInfC{$\neg C \rightarrow \neg M \rightarrow M \vdash M \rightarrow \neg C, \bot$}
\RightLabel{$\rightarrow -sx$}
\BinaryInfC{$\neg C \rightarrow \neg M \rightarrow M, M \rightarrow \neg C \rightarrow \neg M \vdash \bot$}
\RightLabel{$\& - sx$}
\UnaryInfC{$(M \rightarrow \neg C \rightarrow \neg M)\&(\neg C \rightarrow \neg M \rightarrow M) \vdash \bot$}
\end{prooftree}
$$

Non essendo derivabile il falso risulta che l'affermazione di Morgana non è contraddittoria.

12.3 Verifica risposta B

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{"ax-id"}
\noLine
\UnaryInfC{$M \vdash M, M\&C$}
\AxiomC{"ax-id"}
\noLine
\UnaryInfC{$M \vdash M, M\&C, C$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg M, M, M\&C, C$}
\RightLabel{$sc - D$}
\UnaryInfC{$\vdash C, \neg M, M, M\&C$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$\neg C \vdash \neg M, M, M\&C$}
\RightLabel{$\rightarrow -D$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg C \rightarrow \neg M, M, M\&C$}
\RightLabel{$\rightarrow -S$}
\BinaryInfC{$\neg C \rightarrow \neg M \rightarrow M \vdash M, M\&C$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$\neg C \rightarrow \neg M \rightarrow M, \neg M \vdash M\&C$}
\AxiomC{"ax-id"}
\noLine
\UnaryInfC{$M, C \vdash C$}
\AxiomC{"ax-id"}
\noLine
\UnaryInfC{$M, C \vdash M$}
\RightLabel{$\& - D$}
\BinaryInfC{$M, C \vdash M\&C$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$M \vdash \neg C, M\&C$}
\AxiomC{"ax-id"}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg C \vdash \neg M, \neg C, M\&C$}
\RightLabel{$\rightarrow -D$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg C \rightarrow \neg M, \neg C, M\&C$}
\RightLabel{$\rightarrow -S$}
\BinaryInfC{$\neg C \rightarrow \neg M \rightarrow M \vdash \neg C, M\&C$}
\RightLabel{$\rightarrow -S$}
\BinaryInfC{$\neg C \rightarrow \neg M \rightarrow M, \neg C \rightarrow \neg M \vdash M\&C$}
\AxiomC{"ax-id"}
\noLine
\UnaryInfC{$M \vdash M, M\&C$}
\AxiomC{"ax-id"}
\noLine
\UnaryInfC{$M \vdash M, M\&C, C$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg M, M, M\&C, C$}
\RightLabel{$sc - D$}
\UnaryInfC{$\vdash C, \neg M, M, M\&C$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$\neg C \vdash \neg M, M, M\&C$}
\RightLabel{$\rightarrow -D$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg C \rightarrow \neg M, M, M\&C$}
\RightLabel{$\rightarrow -S$}
\BinaryInfC{$\neg C \rightarrow \neg M \rightarrow M \vdash M, M\&C$}
\RightLabel{$\rightarrow -S$}
\BinaryInfC{$\neg C \rightarrow \neg M \rightarrow M, M \rightarrow \neg C \rightarrow \neg M \vdash M\&C$}
\RightLabel{$\& - S$}
\UnaryInfC{$(M \rightarrow \neg C \rightarrow \neg M)\&(\neg C \rightarrow \neg M \rightarrow M) \vdash M\&C$}
\end{prooftree}
$$

La risposta corretta quindi risulta essere la B in quanto dall'ipotesi abbiamo derivato che $M\&C$ risultano affermare la verità.

12.3.1 A - C - D - E

Siccome la teoria non è contraddittoria e B già risulta la risposta corretta le rimanenti non sono derivabili.