Sulla sostituzione di variabile: attenzione a cattura variabili!

Definizione di sostituzione di un termine Dato un termine $\mathbf{t_{ter}}$ di un linguaggio predicativo e una formula $\mathtt{pr}(\mathtt{x})$ allora indichiamo con $\mathtt{pr}[x/t_{ter}]$ la formula ottenuta sostuendo x con $\mathbf{t_{ter}}$ in $\mathtt{pr}(\mathtt{x})$. Tale formula è definita come segue:

$$\mathbf{P_k}(\mathbf{t_1},\ldots,\mathbf{t_m})[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] \equiv \mathbf{P_k}(\mathbf{t_1}[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}],\ldots,\mathbf{t_m}[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}])$$

$$(\mathbf{t_1}{=}\mathbf{t_2})[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] \quad \equiv \quad \mathbf{t_1}[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] = \mathbf{t_2}[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}]$$

$$(\forall \mathbf{y_i}\ \mathtt{fr})[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] \equiv \begin{cases} \forall \mathbf{y_i}\ \mathtt{fr}[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] & \mathbf{x} \text{ compare in } \mathtt{fr} \\ & \text{e } \mathbf{y_i} \text{ NON compare libera in } \mathbf{t_{ter}} \\ \forall \mathbf{y_i}\ \mathtt{fr} & \text{se } \mathbf{x} \text{ non compare in } \mathtt{fr} \end{cases}$$

$$(\forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr})[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] \equiv (\forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr})$$

$$(\exists \mathbf{y_i}\ \mathtt{fr})[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] \equiv \begin{cases} \exists \mathbf{y_i}\ \mathtt{fr}[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] & \text{se } \mathbf{x} \text{ compare in } \mathtt{fr} \\ & \text{e } \mathbf{y_i} \text{ NON compare libera in } \mathbf{t_{ter}} \\ \exists \mathbf{y_i}\ \mathtt{fr} & \text{se } \quad \mathbf{x} \text{ non compare in } \mathtt{fr} \end{cases}$$

$$(\exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr})[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] \equiv \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}$$

$$(\mathtt{fr}_1\ \&\ \mathtt{fr}_2)[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] \equiv \mathtt{fr}_1[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}]\ \&\ \mathtt{fr}_2[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}]$$

$$(\mathtt{fr}_1 \vee \mathtt{fr}_2)[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] \equiv \mathtt{fr}_1[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] \vee \mathtt{fr}_2[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}]$$

$$(\mathtt{fr}_1 \rightarrow \mathtt{fr}_2)[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] \equiv \mathtt{fr}_1[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] \rightarrow \mathtt{fr}_2[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}]$$

$$(\neg \mathtt{fr}_1)[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}] \equiv \neg \mathtt{fr}_1[\mathrm{x}/\mathbf{t_{ter}}]$$

MORALE

> Quando sostituisci una variabile y al posto di x in un predicato $\mathtt{pr}(\mathtt{x})$
> controlla che - SE compare $\forall y$ o $\exists y$ in $\mathtt{pr}(\mathtt{x})$ -
> la sostituzione di x con y NON faccia cadere il nuovo y
> sotto il POTERE di $\forall y$ o $\exists y$
> ovvero aumenti il numero di occorrenze di y in loro potere!
>
> $$\frac{\exists y\ y = y \vdash \nabla}{\forall x\ \exists y\ x = y \vdash \nabla}\ \forall{-}\mathrm{S}_v \qquad \text{NOOOOO!!!!}$$
>
> $$\frac{\forall y\ y = a \vdash y = z}{\forall y\ y = a \vdash \forall x\ x = z}\ \forall{-}\mathrm{D} \qquad \text{SI!!!!}$$

Stabilire quali delle seguenti applicazioni di $\forall$-S o $\exists$-D sono lecite

1. È lecita la seguente applicazione di $\forall$-S

$$\frac{\forall y\ \exists x\ x < y + z\ , \qquad \exists x\ x < x + z \vdash \nabla}{\forall y\ \exists x\ x < y + z \vdash \nabla}\ \forall{-}\mathrm{S}$$

??

2. È lecita la seguente applicazione di $\forall$-S

$$\frac{\forall y\ \exists x\ x < y + z\ , \qquad \exists x\ x < z + z \vdash \nabla}{\forall y\ \exists x\ x < y + z \vdash \nabla}\ \forall\!-\!\mathrm{S}$$

??

3. È lecita la seguente applicazione di ∀-D

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ x < z + z}{\Gamma \vdash \forall y\ \exists x\ x < y + z}\ \forall\!-\!\mathrm{D}$$

??

4. È lecita la seguente applicazione di ∀-D

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ x < x + z}{\Gamma \vdash \forall y\ \exists x\ x < y + z}\ \forall\!-\!\mathrm{D}$$

??

5. È lecita la seguente applicazione di ∀-D

$$\frac{\forall y\ C(y) \vdash \exists x\ x < y + z}{\forall y\ C(y) \vdash \forall w\ \exists x\ x < w + z}\ \forall\!-\!\mathrm{D}$$

??