13 Validità regole per logica predicativa

Posto che le variabili libere che compaiono in una formula sono quelle che non sono sotto il raggio di un quantificatore quali sono le variabili libere di

1. $A(x) \rightarrow \forall z\ B(z, y)$
2. $A(x) \rightarrow \forall x\ B(x, y)$

Def. Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è *SODDISFACIBILE nella semantica classica* sse $\Gamma_{\&} \ \rightarrow\ \Delta_{\vee}$ lo è.

Def. Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è *VALIDO nella semantica classica* sse $\Gamma_{\&} \ \rightarrow\ \Delta_{\vee}$ lo è.

Def. una regola ad una premessa

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \ *$$

si dice *valida rispetto alla semantica classica*
se supposto che valga (in ogni modello) $\Gamma_1^{\&} \ \rightarrow\ \Delta_1^{\vee}$ ovvero

$$\models \quad \Gamma_1^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta_1^{\vee}$$

allora vale (in ogni modello) $\Gamma_2^{\&} \ \rightarrow\ \Delta_2^{\vee}$ ovvero

$$\models \quad \Gamma_2^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta_2^{\vee}$$

Def. una regola a due premessa

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \ *$$

si dice *valida rispetto alla semantica classica* (oppure *valida rispetto alla verità classica*)
se supposto che valgano (in ogni modello) sia $\Gamma_1^{\&} \ \rightarrow\ \Delta_1^{\vee}$ che $\Gamma_2^{\&} \ \rightarrow\ \Delta_2^{\vee}$
ovvero

$$\models \quad \Gamma_1^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta_1^{\vee} \qquad \text{e} \qquad \models \Gamma_2^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta_2^{\vee}$$

allora vale (in ogni modello) $\Gamma_3^{\&} \ \rightarrow\ \Delta_3^{\vee}$
ovvero

$$\models \quad \Gamma_3^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta_3^{\vee}$$

Def. una regola ad una premessa

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \ *$$

si dice che CONSERVA LA SODDISFACIBILITÀ in un modello
se supposto che valga in un MODELLO $\mathcal{D}$ $\Gamma_1^{\&} \ \rightarrow\ \Delta_1^{\vee}$ ovvero

$$\mathcal{D} \models \quad \Gamma_1^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta_1^{\vee}$$

allora nello STESSO MODELLO $\mathcal{D}$ vale $\Gamma_2^{\&} \ \rightarrow\ \Delta_2^{\vee}$ ovvero

$$\mathcal{D} \models \quad \Gamma_2^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta_2^{\vee}$$

Def. una regola a due premessa

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \ *$$

si dice che CONSERVA LA SODDISFACIBILITÀ in un modello
se supposto che valgano in un modello $\mathcal{D}$ sia $\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}$ che $\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}$ ovvero

$$\mathcal{D} \models \Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} \models \Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}$$

allora nello STESSO MODELLO $\mathcal{D}$ vale $\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee}$ ovvero

$$\mathcal{D} \models \Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee}$$

Esercizi

1. la regola

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall\text{−D}\ (x \notin VL(\Gamma, \nabla))$$

   è valida rispetto alla semantica classica ??
   conserva la soddisfacibilità in un modello??
   e la sua inversa è valida??
   la sua inversa conserva la soddisfacibilità in un modello?

2. la regola

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall\text{−re}$$

   è valida rispetto alla semantica classica ??
   conserva la soddisfacibilità in un modello??
   e la sua inversa conserva la soddisfacibilità in un modello?

3. la regola

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall\text{−S}$$

   è valida rispetto alla semantica classica ??
   conserva la soddisfacibilità in un modello??
   e la sua inversa conserva la soddisfacibilità in un modello?

4. la regola

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists\text{−re}$$

   è valida rispetto alla semantica classica ??
   conserva la soddisfacibilità in un modello??
   e la sua inversa conserva la soddisfacibilità in un modello?

5. la regola

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists\text{−D}$$

   è valida rispetto alla semantica classica ??
   conserva la soddisfacibilità in un modello??
   e la sua inversa conserva la soddisfacibilità in un modello?

6. la regola

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists\text{–S}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta))$$

è valida rispetto alla semantica classica ??
conserva la soddisfacibilità in un modello??
e la sua inversa conserva la soddisfacibilità in un modello?