10 Logica classica predicativa

Dopo aver studiato la logica classica proposizionale, ovvero la logica delle proposizioni classiche, passiamo a studiare la logica classica predicativa, ovvero quella dei *predicati classici*.

In questa sezione introduciamo il linguaggio della logica classica predicativa, la nozione di validità delle sue formule e il relativo calcolo dei sequenti. Vedremo che useremo anche per i predicati un calcolo con tutte regole sicure ma siccome la loro complessità non diminuisce strettamente dal basso verso l'alto non avremo una procedura per decidere automaticamente la validità dei predicati. Comunque studieremo una procedura semi-automatica per stabilire tale validità.

10.1 Linguaggio predicativo

Un **linguaggio predicativo** ha 2 classi di **simboli**:

1. simboli chiamati **TERMINI** per indicare **enti**
   esempi: $\mathbf{x}$ variabile, $\bar{\mathbf{s}}$ per nome "**Socrate**"

2. simboli chiamati **PREDICATI** per indicare **proprietà logiche degli enti**
   esempi: $\mathbf{U(x)}$ per "**x è un uomo**"', $\mathbf{U(\bar{s})}$ per "**Socrate è un uomo**"'
   e i predicati sono chiusi sui **CONNETTIVI PROPOSIZIONALI** e **QUANTIFICAZIONI universali ed esistenziali**
   esempi: $\mathbf{U(x)\&M(x)}$ per "**x è un uomo ed è mortale**"', $\mathbf{U(x)\to M(x)}$ per "**se x è un uomo allora è mortale**"', $\forall\mathbf{x}\mathbf{M(x)}$ sta per "**tutti sono mortali**"', $\exists\mathbf{x}\mathbf{M(x)}$ sta per "**esiste qualcuno di mortale**"'

D'ora in poi usiamo il termine **FORMULA** per indicare un predicato
esso può essere:

- predicato (o formula) **atomico** ovvero dato come primitivo
- predicato (o formula) **composta** ovvero costruito con connettivi proposizionali o quantificazioni da quelli primitivi che sono chiusi sia su **quantificazione universale "per ogni"** che sulla **quantificazione esistenziale "esiste.."**.

Inoltre useremo il simbolo **fr** come meta-variabile per una *formula generica*
e la meta-variabile **t**, oppure **s** oppure **u** per indicare un *termine generico.*

10.1.1 Grammatica termini simbolici

Un **TERMINE t** può essere costruito in tal modo:

- una variabile **x** è un **termine** (indichiamo le variabili con le ultime lettere dell'alfabeto inglese **w**, **y**, **z**)
- una costante $\bar{\mathbf{c}}$ è un **termine** (indichiamo le costanti con qualsiasi lettera dell'alfabeto italiano evitando quelle per le variabili)

10.1.2 Grammatica formule simboliche

Una *formula* `fr` si può costruire in tal modo:

- sono **formule** i predicati **atomici** $\mathbf{P_k(t_1,\ldots,t_m)}$ ottenuti dal predicato atomico $\mathbf{P_k(x_1,\ldots,x_m)}$ sostituendo le variabili con termini $\mathbf{t_i}$ per $\mathbf{i = 1,\ldots,m}$

- $\forall$**x** `fr` (che si legge "per ogni x `fr`") è una **formula** se `fr` lo è
- $\exists$**x** `fr` (che si legge "esiste un x tale che `fr`") è una **formula** se `fr` lo è
- la costante "falso" $\perp$ è una **formula**
- la costante "vero" $\top$ è una **formula**
- $\mathtt{fr}_1\&\mathtt{fr}_2$ è una **formula** se $\mathtt{fr}_1$ e $\mathtt{fr}_2$ lo sono
- $\mathtt{fr}_1\vee\mathtt{fr}_2$ è una **formula** se $\mathtt{fr}_1$ e $\mathtt{fr}_2$ lo sono
- $\mathtt{fr}_1\rightarrow\mathtt{fr}_2$ è una **formula** se $\mathtt{fr}_1$ e $\mathtt{fr}_2$ lo sono
- $\neg$`fr` è una **formula** se `fr` lo è.

10.1.3 Come mettere le parentesi

Nello scrivere le proposizioni simboliche $\forall$ o $\exists$ si lega alla formula più vicina più di ogni altro connettivo come la negazione $\neg$, seguito a pari merito da $\vee, \&$, che a loro volta sono legate alle formule più di $\rightarrow$.

Ovvero

$$\neg, \forall, \exists \qquad \textbf{lega più di} \qquad \vee, \& \qquad \textbf{lega più di} \qquad \rightarrow$$

Esempi:

- "**(tutti** gli **x** tale che **A**(**x**) **) o B**"

  si scrive

  $$\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}$$

- "**tutti** gli **x** tale che **(A**(**x**) **o B)**"

  si scrive

  $$\forall \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B})$$

- " **(esiste un x tale che** $A(x)$ **) implica (** B **o** C **)**"

  si scrive

  $$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$$

- "**(esiste** un **x** tale che **(** $A(x)$ **implica** B **)) o** C "

  si scrive

  $$\exists \mathbf{x} (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{B}\ ) \vee \mathbf{C}$$

10.2 A cosa servono i predicati?

I predicati servono per formalizzare asserzione del tipo

$$\frac{\begin{array}{l}\textbf{Tutti gli uomini sono mortali}\\ \textbf{Socrate è un uomo}\end{array}}{\textbf{Socrate è mortale}}$$

ove si è adottato la convenzione (con la sbarra) in sezione 5. A tal scopo usiamo i seguenti predicati

$\mathbf{M(x)}$=**"x è mortale"**
$\mathbf{U(x)}$=**"x è un uomo"**
e introduciamo la costante $\overline{\mathbf{s}}$ per esprimere il nome "**Socrate**":

Poi per esprimere il "**tutti**" usiamo il simbolo di **quantificazione universale** "**per ogni**" davanti a un predicato e formalizziamo la frase "Tutti gli uomini sono mortali" in tal modo

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U(x)} \rightarrow \mathbf{M(x)}\ )$$

mentre "Socrate è un uomo" e "Socrate è mortale" si formalizzano rispettivamente in $\mathbf{U}(\overline{\mathbf{s}})$ e in $\mathbf{M}(\overline{\mathbf{s}})$ perchè *al posto della variabile x possiamo sostituire la costante* $\overline{\mathbf{s}}$.

Infine l'intera asserzione sopra si formalizza nel sequente

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U(x)} \rightarrow \mathbf{M(x)}\ ), \mathbf{U}(\overline{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{M}(\overline{\mathbf{s}})$$

Mentre per formalizzare l'asserzione

Qualche antenato di Mario è nobile.

ci avvaliamo delle seguenti funzioni proposizionali o predicati

$\mathbf{A(x,y)}$ = **"x è antenato di y"**
$\mathbf{N(x)}$ = **"x è nobile"**
e un nome, ovvero una costante, per indicare il nome di Mario

$\overline{\mathbf{m}}$=**"Mario"**.

Poi per esprimere "**qualche**" usiamo il simbolo di **quantificazione esistenziale** "**esiste**" davanti a un predicato

$$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{P(x)}$$

L'asserzione quindi si può esprimere così:

$$\exists \mathbf{x}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N(x)}\ )$$

$\forall \mathbf{x}(\ \mathbf{P(x)} \rightarrow \mathbf{Q(x)}$ traduce
Chi è P(x) è pure Q(x) Quelli che sono P(x)... sono Q(x) I P(x) sono Q(x) Chiunque è P(x), è pure Q(x) Ogni P(x) è Q(x) Soltanto i Q(x) sono P(x) Se uno è P(x) allora è pure Q(x) Solo se uno è Q(x) allora è pure P(x)

$\exists \mathbf{x}(\ \mathbf{P(x)}\ \&\mathbf{Q(x)}\ )$ traduce
C'è un P(x) che è Q(x) esiste un P(x) che è Q(x) qualche P(x) è Q(x)

$\neg\exists \mathbf{x}(\ \mathbf{P(x)}\ \&\mathbf{Q(x)}\ )$ traduce
nessun P(x) è un Q(x) non esiste un P(x) che è Q(x)

10.2.1 Esempi di formalizzazione di predicati

Ogni volta che formalizziamo un'asserzione usiamo un particolare linguaggio predicativo dato dalle costanti $\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_n}$, e da dei predicati $\mathbf{P_1(x_1, \ldots, x_m)}$, $\mathbf{P_2(x_1, \ldots, x_k)}, \ldots$.

1. L'asserzione

   "x più cinque è minore od uguale a sei"

   si può scrivere formalmente
   $$\mathbf{x + 5 \leq 6}$$

2. l'asserzione **"il quadrato di x più il quadrato di y è uguale ad uno"**

   si può scrivere formalmente
   $$\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$$

3. L'asserzione

   "esiste un numero x tale che $x + 5$ è minore o uguale di 6"

   si può formalizzare così

   $$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{x + 5 \leq 6}$$

   ove $\mathbf{x \leq y}$ è simbolo di predicato di minore o uguale

4. L'asserzione **"Se Mario non mangia allora non sta in piedi"**

   si può formalizzare così

   $$\neg\mathbf{M}(\overline{\mathbf{m}}) \rightarrow \neg\mathbf{P}(\overline{\mathbf{m}})$$

   ove
   M(x)="x mangia"
   P(x)= "x sta in piedi"
   $\overline{\mathbf{m}}$=**"Mario"**

5. L'asserzione

   "Chi non mangia non sta in piedi"

   è formalizzabile così
   $$\forall \mathbf{x}\ (\ \neg\mathbf{M(x)} \rightarrow \neg\mathbf{P(x)}\ )$$

   ponendo

   M(x)="x mangia"
   P(x)= "x sta in piedi"

6. L'asserzione

   "**Solo quelli che hanno il biglietto salgono sull'aereo.**"

   si può formalizzare così

   $$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{S(x)} \rightarrow \mathbf{B(x)}\ )$$

   con
   B(x)= " x ha il biglietto"

S(x)= "x sale sull'aereo"

7. l'asserzione

   "**Non si dà il caso che nessun programma termini.**"

   si può formalizzare in
   $$\neg\neg\exists \mathbf{x}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\&\mathbf{T}(\mathbf{x})\ )$$

   con
   P(x)= "x è programma"
   T(x)= "x termina"

8. l'asserzione

   "**Nessun programma con un ciclo infinito termina.**"

   si può formalizzare così
   $$\neg\exists \mathbf{x}(\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\&\exists \mathbf{y}\mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ )\&\mathbf{T}(\mathbf{x})\ )$$

   ove
   P(x)= "x è programma"
   T(x)= "x termina"

9. "**Un programma che non ha cicli termina.**"

   si può formalizzare in

   $$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\&\neg\exists \mathbf{y}\ \mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{x})\ )$$

   con
   P(x)= "x è programma"
   T(x)= "x termina"
   C(x, y)= "y è ciclo di x "

10.3 Semantica classica dei predicati e quantificazione universale

Per dire quando $\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x})$ è **vera** OCCORRE avere un dominio **D** su cui far variare **x** e occorre definire una funzione
$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$
ovvero dire se per un generico $\mathbf{d}\varepsilon\mathcal{D}$
$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

Def. 10.1 [modello] Dato linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ con costanti $\mathbf{c_j}$ e **predicati atomici** $\mathbf{P_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$ un modello per $\mathcal{L}$ è dato da

- un dominio (=insieme NON VUOTO) **D**
- un'interpretazione delle **costanti** come **elementi** di **D** e di **predicati atomici** come **funzioni** come segue

costante $\mathbf{c_j}$	$\rightsquigarrow$	elemento di dominio $\mathbf{c_j}^{\mathbf{D}}\varepsilon\mathbf{D}$
predicato **atomico** $\mathbf{P_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$	$\rightsquigarrow$	funzione $\mathbf{P_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D}^n \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

Esempio di modello Per il linguaggio predicativo con predicati atomici $\mathbf{M(x)}$ e $\mathbf{U(x)}$ e costante $\overline{\mathbf{s}}$ usato all'inizio di sezione 10.2 possiamo definire tale modello $\mathcal{D} \equiv (D, M(x)^{\mathcal{D}}, U(x)^{\mathcal{D}}, \overline{s}^{\mathcal{D}})$

D= Esseri viventi
$M(x)^D(d)$=1 sse "d è mortale" ovvero PER OGNI $d \in D$
$U(x)^D(d)$=1 sse "d è un uomo"
$\overline{s}^{\mathcal{D}}$ =l'attuale presidente della Repubblica Italiana.

Altro modello potrebbe essere

D= Enti dell'universo
$M(x)^D(d)$=1 sse "d è ente mortale"
$U(x)^D(d)$=1 sse "d è un essere umano"
$\overline{s}^D$ =l'attuale presidente del Consiglio.

Invece

$\mathbf{D} \equiv \{$ i sogni del mio vicino di banco $\}$
$A(x)^D(d) = 1$ sse il sogno d fa paura
$A(x)^D(d) = 0$ sse il sogno d NON fa paura
c^D = il sogno più brutto

NON è un MODELLO BEN DEFINITO perchè non so se il mio vicino di banco sogna e poi neppure quando un sogno fa paura o meno... ovvero NON so stabilire se per ogni d nel modello vale $A(x)^D(d) = 1$ o meno.

Def. 10.2 [**INTERPRETAZIONE FORMULE in un modello**] Dato linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ con costanti $\mathbf{c_j}$ e **predicati atomici** $\mathbf{P_k(x_1, \ldots, x_n)}$ e fissato un modello per $\mathcal{L}$ dato da un dominio $\mathbf{D}$, con interpretazione per costanti $\mathbf{c_j}^{\mathbf{D}} \varepsilon \mathbf{D}$
e per **predicati atomici**

$$\mathbf{P_k(x_1, \ldots, x_n)}^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D}^n \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

l'interpretazione di un **predicato composto** $\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$ in $\mathcal{L}$ è una FUNZIONE del tipo

$$\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(-, \ldots, -) : \mathbf{D}^n \ \rightarrow \ \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

definita per induzione come segue: fissati $(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n)$ in $\mathbf{D}^n$

$$\boxed{\begin{array}{c}(\neg \mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}) \ )^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1} \\ \text{sse} \\ \mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{0}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(\ \mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}) \ \& \ \mathtt{pr}_2(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}) \ )^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1} \\ \text{sse} \\ \mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1} \quad \mathbf{E} \quad \mathtt{pr}_2(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(\ \mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}) \vee \mathtt{pr}_2(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}) \ )^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1} \\ \text{sse} \\ \mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1} \quad \mathbf{O} \quad \mathtt{pr}_2(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(\ \mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}) \rightarrow \mathtt{pr}_2(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}) \ )^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1} \\ \text{sse} \\ \mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{0} \\ \text{oppure vale che} \\ \mathbf{SE} \ \mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1} \quad \mathbf{ALLORA} \quad \mathtt{pr}_2(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1}, \ldots, \mathbf{d_n}) = \mathbf{1}\end{array}}$$

$$(\forall \mathbf{x_n}\ \mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots \mathbf{x_{n-1}}, \mathbf{x_n})\ )^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{n-1}) = \mathbf{1}$$
sse
$$\textbf{PER OGNI}\quad \mathbf{d}\qquad \mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots \mathbf{x_{n-1}}, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n, \mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

$$(\exists \mathbf{x_n}\ \mathtt{pr_1}(\mathbf{x_1}, \ldots \mathbf{x_{n-1}}, \mathbf{x_n})\ )^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d_{n-1}}) = \mathbf{1}$$
sse
$$\textbf{ESISTE}\quad \mathbf{d}\qquad \mathtt{pr_1}(\mathbf{x_1}, \ldots \mathbf{x_{n-1}}, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n, \mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

10.3.1 Casi speciali di interpretazione di quantificatori

Le quantificazioni su un predicato $\mathtt{pr}(\mathbf{x})$ ad una variabile risultano interpretate in tale modo

$\forall \mathbf{x}\ \mathtt{pr}(\mathbf{x}) \quad \rightsquigarrow$
$$(\forall \mathbf{x}\ \mathtt{pr}(\mathbf{x})\ )^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$$
sse
$$\textbf{PER OGNI}\quad \mathbf{d}\qquad \mathtt{pr}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

$\exists \mathbf{x}\ \mathtt{pr}(\mathbf{x}) \quad \rightsquigarrow$
$$(\exists \mathbf{x}\ \mathtt{pr}(\mathbf{x})\ )^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$$
sse
$$\textbf{ESISTE}\quad \mathbf{d}\qquad \mathtt{pr}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

10.3.2 Interpretazione SOSTITUZIONE con costante

L'interpretazione del predicato
$$\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \mathbf{c}, \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})$$
ottenuto sostituendo in $\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \mathbf{x_j}, \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})$ la variabile $\mathbf{x_j}$ con la costante $\mathbf{c}$ si interpreta così:

$$\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \mathbf{c}, \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D}^{n-1} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

ove

$$\mathbf{A}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \mathbf{c}, \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{d}_{j+1}, \ldots \mathbf{d}_n)$$
$$\equiv$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \mathbf{x_j}, \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{c}^{\mathbf{D}}, \mathbf{d}_{j+1}, \ldots \mathbf{d}_n)$$

10.3.3 Interpretazione SOSTITUZIONE con termine generico

L'interpretazione del predicato
$$\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \mathbf{t}, \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})$$
ottenuto sostituendo in $\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \mathbf{x_j}, \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})$ il termine $\mathbf{t}$ (le cui variabili libere sono comprese tra $\mathbf{x_1}, ..\mathbf{x_{j-1}}, \mathbf{x_j}, \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n}$) si interpreta così:

$$\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \mathbf{t}, \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D}^{n-1} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

ove

$$\mathbf{A}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \mathbf{t}, \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{d}_{j+1}, \ldots \mathbf{d}_n)$$
$$\equiv$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \mathbf{x_j}, \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{t}^{\mathbf{D}}, \mathbf{d}_{j+1}, \ldots \mathbf{d}_n)$$

10.3.4 Idea intuitiva di validità predicato

L'idea intuitiva dietro la definizione di *validità dei predicati in modelli con lo stesso dominio* $\mathbf{D}$ è che per rendere valido $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$ possiamo costruire una tabella per $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$ con tante colonne quanti gli elementi in $\mathbf{D}$, ove ogni funzione $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(-)$ che interpreta il predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (e determina uno specifico modello con $\mathbf{D}$ dominio) è rappresentata da una sua riga (che quindi fa riferimento ad un modello su $\mathbf{D}$):

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1})$	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_2})$	...	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_n})$	...	$\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$
1	1	1111111111	1	11111111	**1**
0	1	...	...	...	**0**
1	1	0 ...	...	...	**0**
1	0	......	...	...	**0**
...	...	...	...	...	**0**
0	0	0000000000	0	00000000	**0**

Ora $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vero relativamente a $\mathbf{D}$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}$ solo se

$$\textbf{per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D}\ \ \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

(questo caso è rappresentato dalla prima riga nella tabella sopra- la riga può avere infinite entrate se infiniti sono gli elementi in $\mathbf{D}$....!!!)

Analogamente, per rappresentare la validità di un predicato in modelli con un fissato dominio $\mathbf{D}$, possiamo costruire una tabella per $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$ con tante colonne quanti gli elementi in $\mathbf{D}$, ove ogni funzione $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(-)$ che interpreta il predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (e determina uno specifico modello con $\mathbf{D}$ dominio) è rappresentata da una sua riga (che quindi fa riferimento ad un modello su $\mathbf{D}$):

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1})$	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_2})$	...	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_n})$	...	$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$
0	0	0000000000	0	000000000	**0**
0	1	...	...	...	**1**
1	1	0 ...	...	...	**1**
1	0	......	...	...	**1**
...	...	...	...	...	**1**
1	1	11111111111	1	1111111111	**1**

Ora $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vero relativamente a $\mathbf{D}$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}$ solo se **esiste un** $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ **tale che** $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ (questo caso è rappresentato da tutte le righe fuorchè la prima!!!)

10.3.5 Notazione per indicare un modello

Per indicare un modello con dominio $\mathbf{D}$ scriviamo

$$\mathcal{D} \equiv (\ \mathbf{D}, \mathbf{c_j}^{\mathbf{D}}, \mathbf{P_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}\ )$$

Talvolta indicheremo un modello semplicemente con

$$\mathcal{D}$$

quando dal contesto sarà chiaro quali sono le interpretazioni delle costanti e predicati atomici.

10.3.6 Validità e soddisfacibilità di formule

Diamo ora la nozione di **validità** di una formula **in un modello**:

Def. 10.3 [validità in un modello] Una **formula** $\mathtt{fr}(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})$ in un linguaggio $\mathcal{L}$ si dice **valida** nel modello **D** per **L**
se

$$\mathtt{fr}(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(-,\ldots,-):\mathbf{D}^n \;\rightarrow\; \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$$

è la funzione COSTANTE **1**
ovvero

$$\texttt{PER OGNI} \quad (\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n)\varepsilon\mathbf{D}^n \qquad \mathtt{fr}(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n)=\mathbf{1}$$

ovvero il dominio della funzione $\mathtt{fr}(\mathtt{x_1},\ldots,\mathtt{x_n})^{\mathbf{D}}(-,\ldots,-)$ dei valori a **1** è tutto **D**
e in tal caso scriviamo brevemente

$$\mathcal{D}\models \mathtt{fr}(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})$$

Ora diamo la nozione di **validità** di un predicato, o meglio di una formula, in **logica classica**:

Def. 10.4 Una formula $\mathtt{fr}$ in un linguaggio $\mathcal{L}$ è *VALIDA rispetto alla semantica classica* se è *VALIDA in OGNI modello per* $\mathcal{L}$.

Def. 10.5 Una formula $\mathtt{fr}$ in un linguaggio $\mathcal{L}$ è *SODDISFACIBILE rispetto alla semantica classica* se è *VALIDA in ALMENO UN modello per* $\mathcal{L}$.

Def. 10.6 un formula $\mathtt{fr}$ in un linguaggio $\mathcal{L}$ è *NON VALIDA rispetto alla semantica classica* se è *FALSA in ALMENO UN modello per* $\mathcal{L}$, ovvero la sua negazione $\neg\mathtt{fr}$ è *SODDISFACIBILE rispetto alla semantica classica.*

Def. 10.7 Una formula $\mathtt{fr}$ in un linguaggio $\mathcal{L}$ è *INSODDISFACIBILE rispetto alla semantica classica* se è *FALSA in OGNI modello per* $\mathcal{L}$, ovvero la sua negazione $\neg\mathtt{fr}$ è *VALIDA rispetto alla semantica classica.*

10.3.7 Esempi di validità e soddisfacibilità di formule

Dire se le seguenti formule sono valide, soddisfacibili o insoddisfacibili:

1. $A(c)$

   Questa formula è *NON valida.* Un modello che la falsifica è il seguente:

   $\mathcal{D}\;\equiv\;\mathbf{Nat}$
   $\mathbf{c^D}\;\equiv\;\mathbf{5}\;\varepsilon\mathbf{Nat}$
   $\mathbf{A(x)}^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d})\;\equiv\;\begin{cases}\mathbf{1} & \text{se } \mathbf{d}\leq\mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \text{altrimenti}\end{cases}$

   Infatti $\mathbf{A(c)^D}=\mathbf{A(x)^D}(\mathbf{c^D})=\mathbf{A(x)^D}(\mathbf{5})=\mathbf{0}$ perchè NON è vero che $\mathbf{5}\leq\mathbf{2}$. In pratica $\mathbf{A(c)}$ in questo modello formalizza $\mathbf{5}\leq\mathbf{2}$.

   Però $A(c)$ è anche *soddisfacibile* perchè valida nel modello

   $\mathcal{D}\;\equiv\;\mathbf{Nat}$
   $\mathbf{c^D}\;\equiv\;\mathbf{1}\;\varepsilon\mathbf{Nat}$
   $\mathbf{A(x)}^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d})\;\equiv\;\begin{cases}\mathbf{1} & \text{se } \mathbf{d}\leq\mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \text{altrimenti}\end{cases}$

   Infatti $\mathbf{A(c)^D}=\mathbf{A(x)^D}(\mathbf{c^D})=\mathbf{A(x)^D}(\mathbf{1})=\mathbf{1}$ perchè è vero che $\mathbf{1}\leq\mathbf{2}$.

   In pratica $\mathbf{A(c)}$ in questo modello formalizza $\mathbf{1}\leq\mathbf{2}$.

2. $A(x)\;\rightarrow\forall x\,A(x)$

   Questa formula è *NON valida.* Un modello che la falsifica è il seguente:

$\mathcal{D} \equiv \mathbf{Nat}$

$\mathbf{A(x)^{Nat}(d)} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{d} \leq \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti} \end{cases}$

Infatti $(\,\mathbf{A(x)} \;\to \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A(x)}\,)^{\mathbf{D}}(\mathbf{1}) = 0$ perchè mentre $\mathbf{A(x)^{Nat}(1)} = 1$ si ha che $(\forall x\, A(x)\,)^D = 0$ e quindi l'implicazione è falsa nel modello perchè la formula $\mathbf{A(x)} \;\to \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A(x)}$ è vera nel modello sse PER OGNI $d \in D$ si ha $(\,\mathbf{A(x)} \;\to \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A(x)}\,)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ mentre $(\,\mathbf{A(x)} \;\to \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A(x)}\,)^{\mathbf{D}}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$
In pratica $(\,\mathbf{A(x)} \;\to \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A(x)}\,)^{\mathbf{D}}(\mathbf{1})$ in questo modello formalizza

"**se un qualsiasi numero naturale x è** $\leq$ **2 allora tutti i numeri naturali x sono** $\leq$ **2**" ed è infatti falso.

Però $\mathbf{A(x)} \;\to \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A(x)}$ è anche *soddisfacibile* perchè valida nel modello

$\mathcal{D} \equiv \mathbf{Nat}$

$\mathbf{A(x)^{Nat}(d)} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{sempre} \\ \mathbf{0} & \text{mai} \end{cases}$

In questo modello $(\forall x\, A(x)\,)^D = 1$ per definizione e quindi a maggior ragione PER OGNI $d \in D$ si ha $(\,\mathbf{A(x)} \;\to \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A(x)}\,)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$

3. $A(c) \;\to \forall x\, A(x)$
4. $A(c) \;\to \exists x\, A(x)$
5. $\exists x\, A(x) \;\to \forall x\, A(x)$ è falso?
6. $\forall x\, \exists y\; B(x,y)$

   La formula *NON è valida.* Un modello che falsifica questa formula è il seguente

   $\mathcal{D} \equiv \mathbf{Nat}$

   $\mathbf{B(x,y)^{Nat}(d_1,d_2)} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{d_1} > \mathbf{d_2} \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{d_1} \leq \mathbf{d_2} \end{cases}$

   La formula $\forall x\, \exists y\; B(x,y)$ diviene nel modello sopra una formalizzazione di "**per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che x** $>$ **y**" che è falso nel modello per $x = 0$.

   La formula è *soddisfacibile.* Un modello in cui è vera è il seguente

   $\mathcal{D} \equiv \mathbf{Nat}$

   $\mathbf{B(x,y)^{Nat}(d_1,d_2)} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{d_1} < \mathbf{d_2} \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{d_1} \geq \mathbf{d_2} \end{cases}$

   La formula $\forall x\, \exists y\; B(x,y)$ diviene nel modello una formalizzazione di "**per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che x** $<$ **y**" ed è infatti vera.
7. $B(x,y) \;\to\; A(x)$

10.3.8 Nozione di variabile LIBERA in termine

L'introduzione dei quantificatori universale ed esistenziale nel linguaggio predicativo comporta la presenza di due tipi di variabili: quelle libere e quelle vincolate, ovvero nel raggio di azione di un quantificatore. Prima di definire le variabili libere di una formula precisiamo la ovvia definizione di variabile libera in un termine considerando che al momento i termini sono solo o variabili o costanti:

$VL(\mathbf{c}) \equiv \emptyset$ se $\mathbf{c}$ costante
$VL(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}$

Poi definiamo la nozione di variabile libera di una formula come segue:

$\mathbf{x}$ si dice **LIBERA** in $\mathtt{fr}$ **sse** $\mathbf{x} \in \mathbf{VL}(\mathtt{fr})$ ove

$$
\begin{array}{l}
VL(\perp) \equiv \emptyset \\
VL(\mathbf{P_k}(\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_m})) \equiv VL(\mathbf{t_1}) \cup \cdots \cup VL(\mathbf{t_m}) \\
VL(\forall \mathbf{y}\ \mathtt{fr}) \equiv VL(\mathtt{fr}) \setminus \{\mathbf{y}\} \text{ ovvero } \mathbf{y} \text{ appare } \mathbf{VINCOLATA} \text{ in } \forall \mathbf{y}\ \mathtt{fr} \\
VL(\exists \mathbf{y}\ \mathtt{fr}) \equiv VL(\mathtt{fr}) \setminus \{\mathbf{y}\} \text{ ovvero } \mathbf{y} \text{ appare } \mathbf{VINCOLATA} \text{ in } \forall \mathbf{y}\ \mathtt{fr} \\
VL(\mathtt{fr_1} \& \mathtt{fr_2}) \equiv VL(\mathtt{fr_1}) \cup VL(\mathtt{fr_2}) \\
VL(\mathtt{fr_1} \vee \mathtt{fr_2}) \equiv VL(\mathtt{fr_1}) \cup VL(\mathtt{fr_2}) \\
VL(\mathtt{fr_1} \to \mathtt{fr_2}) \equiv VL(\mathtt{fr_1}) \cup VL(\mathtt{fr_2}) \\
VL(\neg \mathtt{fr}) \equiv VL(\mathtt{fr})
\end{array}
$$

10.4 Validità sequenti e regole per predicati

Di seguito riportiamo la nozione di validità e soddisfacibilità per un sequente rispetto alla semantica classica e poi quella di validità e conservazione di soddisfacibilità in un modello per una regola.

Def. 10.8 Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è *VALIDO nella semantica classica* sse $\Gamma_{\&} \ \to \ \Delta_{\vee}$ lo è.

Def. 10.9 Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è *SODDISFACIBILE nella semantica classica* sse $\Gamma_{\&} \ \to \ \Delta_{\vee}$ lo è.

Def. 10.10 Una regola ad una premessa

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \ *$$

si dice *valida rispetto alla semantica classica*, se supposto che valga (in ogni modello) $\Gamma_1^{\&} \ \to \ \Delta_1^{\vee}$ ovvero che valga

$$\models \ \Gamma_1^{\&} \ \to \ \Delta_1^{\vee}$$

allora vale (in ogni modello) $\Gamma_2^{\&} \ \to \ \Delta_2^{\vee}$ ovvero vale

$$\models \ \Gamma_2^{\&} \ \to \ \Delta_2^{\vee}$$

Def. 10.11 Una regola a due premessa

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \ *$$

si dice *valida rispetto alla semantica classica* (oppure *valida rispetto alla verità classica*), se supposto che valgano (in ogni modello) sia $\Gamma_1^{\&} \ \to \ \Delta_1^{\vee}$ che $\Gamma_2^{\&} \ \to \ \Delta_2^{\vee}$, ovvero

$$\models \ \Gamma_1^{\&} \ \to \ \Delta_1^{\vee} \qquad \text{e} \qquad \models \Gamma_2^{\&} \ \to \ \Delta_2^{\vee}$$

allora vale (in ogni modello) $\Gamma_3^{\&} \ \to \ \Delta_3^{\vee}$, ovvero

$$\models \ \Gamma_3^{\&} \ \to \ \Delta_3^{\vee}$$

Def. 10.12 una regola ad una premessa

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \ *$$

si dice che CONSERVA LA SODDISFACIBILITÀ in un modello, se supposto che valga $\Gamma_1^{\&} \ \to \ \Delta_1^{\vee}$ in un MODELLO $\mathcal{D}$ ovvero

$$\mathcal{D} \models \ \Gamma_1^{\&} \ \to \ \Delta_1^{\vee}$$

allora nello STESSO MODELLO $\mathcal{D}$ vale $\Gamma_2^{\&} \ \to \ \Delta_2^{\vee}$ ovvero

$$\mathcal{D} \models \ \Gamma_2^{\&} \ \to \ \Delta_2^{\vee}$$

Def. 10.13 Una regola a due premessa

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} *$$

si dice che CONSERVA LA SODDISFACIBILITÀ in un modello, se supposto che valgano in un modello $\mathcal{D}$ sia $\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}$ che $\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}$ ovvero

$$\mathcal{D} \models \Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{D} \models \Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}$$

allora nello STESSO MODELLO $\mathcal{D}$ vale $\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee}$ ovvero

$$\mathcal{D} \models \Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee}$$

11 Calcolo dei sequenti LC per la Logica classica

Il calcolo seguente è chiuso sulle applicazioni delle regole ottenute mettendo al posto delle variabili A, B e dei predicati $A(x)$ delle formule qualsiasi e al posto di w nelle regole $\exists-$S e $\forall-$D una *qualsiasi altra variabile* purchè rispetti le condizioni dettate dalle regole.

Inoltre si ricorda che con **t** si intende una meta-variabile per un termine che può essere una delle variabili $x, y, z, \ldots$ oppure una delle costanti $a, b, c, \ldots$.

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot & \text{ax-}\top \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow -\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

11.0.1 Attenzione alle condizioni su variabili

Quando si applica $\forall-$D o $\exists-$S controllare le **condizioni su variabili**:

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ A(z) \vdash A(z)\end{array}}{A(z) \vdash \forall z\ A(z)}\ \forall-\mathrm{D}\ \textbf{NO!!!}}{\exists z\ A(z) \vdash \forall z\ A(z)}\ \exists-\mathrm{S} \qquad \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ A(z) \vdash A(z)\end{array}}{\exists z\ A(z) \vdash A(z)}\ \exists-\mathrm{S}\ \textbf{NO!!!}}{\exists z\ A(z) \vdash \forall z\ A(z)}\ \forall-\mathrm{D}$$

NON sono derivazioni corrette: nella prima NON si può applicare $\forall-$D perchè **z** è libera nel contesto a **sx** di $\vdash$
e nella seconda NON si può applicare $\exists-$S perchè **z** è libera nel contesto a **dx** di $\vdash$.

11.0.2 Esempi di derivazione: uso delle regole $\forall-$S e $\exists-$D

Nel calcolo LC possiamo derivare il sequente

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\ )\ , \mathbf{U}(\overline{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{M}(\overline{\mathbf{s}})$$

in tal modo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ ) \vdash U(\overline{s}), M(\overline{s})} \qquad \dfrac{\text{ax-id}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ ),\ \ M(\overline{s}) \vdash M(\overline{s})}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ )\ U(\overline{s})\rightarrow M(\overline{s}) \vdash M(\overline{s})}\ \rightarrow-\text{S}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ ) \vdash M(\overline{s})}\ \forall-\text{S}}{\forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ ), U(\overline{s}) \vdash M(\overline{s})}\ \text{sc}_{\text{sx}}$$

Si noti che conviene applicare la regola $\forall-$S mettendo al posto della metavariabile $\mathbf{t}$ il termine (costante o variabile) che si spera possa condurre a trovare una derivazione, ovvero non ha senso applicare prima la regola $\forall-$S per esempio con la variabile $\mathbf{x}$

$$\dfrac{\dfrac{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ )\ U(x)\rightarrow M(x) \vdash M(\overline{s})}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ ) \vdash M(\overline{s})}\ \forall-\text{S}}{\forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ ), U(\overline{s}) \vdash M(\overline{s})}\ \text{sc}_{\text{sx}}$$

Anche se grazie al fatto che la regola $\forall-$S è sicura si può recuperare la sostituzione giusta al secondo colpo così (allungando però la derivazione...)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{U(\overline{s}), U(x)\rightarrow M(x),\ \forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ ) \vdash U(\overline{s}), M(\overline{s})} \qquad \dfrac{\text{ax-id}}{U(\overline{s}), U(x)\rightarrow M(x),\ \forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ ),\ \ M(\overline{s}) \vdash M(\overline{s})}}{U(\overline{s}), U(x)\rightarrow M(x),\ \forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ )\ U(\overline{s})\rightarrow M(\overline{s}) \vdash M(\overline{s})}\ \rightarrow-\text{S}}{U(\overline{s}), U(x)\rightarrow M(x), \forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ ) \vdash M(\overline{s})}\ \forall-\text{S}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ )\ , U(x)\rightarrow M(x) \vdash M(\overline{s})}\ \text{sc}_{\text{sx}}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ ) \vdash M(\overline{s})}\ \forall-\text{S}}{\forall x\ (\ U(x)\rightarrow M(x)\ ), U(\overline{s}) \vdash M(\overline{s})}\ \text{sc}_{\text{sx}}$$

Inoltre l'asserzione composta

$$\dfrac{\textbf{Il conte Augusto è un'antenato di Mario ed è nobile}}{\textbf{Qualche antenato di Mario è nobile}}$$

si può formalizzare nel sequente

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}, \overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{c})\ \vdash\ \exists \mathbf{x}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{x})\ )$$

ove si pone
$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ = **"x è antenato di y"**
$\mathbf{N}(\mathbf{x})$ = **"x è nobile"**
$\overline{\mathbf{m}}$=**"Mario"**
c="Il conte Augusto"

Possiamo derivare il sequente in LC in tal modo:

$$\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{\mathbf{A}(\mathbf{c}, \overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{c})\ \vdash\ \mathbf{A}(\mathbf{c}, \overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{c}), \exists \mathbf{x}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{x})\ )}}{\mathbf{A}(\mathbf{c}, \overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{c})\ \vdash\ \exists \mathbf{x}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{x})\ )}\ \exists-\text{D}$$

Si noti che conviene applicare la regola $\exists-$D mettendo al posto della metavariabile $\mathbf{t}$ il termine (costante o variabile) che si spera possa condurre a trovare una derivazione.

11.1 Schema riassuntivo su validità, insoddisfacibilità, soddisfacibilità

Dato sequente $\Gamma \vdash \Delta$

`passo 1`: si prova a derivarlo in LC

$$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow \text{ è valido} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{vai al passo 2} \end{cases}$$

`passo 2`: costruisci contromodello con foglia di albero che NON si chiude

se esiste contromodello $\Rightarrow$ il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è NON valido

e vai al passo 3

`passo 3`: prova a derivare $\vdash \neg(\ \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}\ )$ in LC

$$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow \ \Gamma \vdash \Delta \text{ è insoddisfacibile} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{applica il passo 2 a } \vdash \neg(\ \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}\ ) \\ & \text{se trovi contromodello di } \neg(\ \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}\ ) \\ & \text{questo è modello di } \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} \\ & \text{che è quindi anche modello di } \Gamma \vdash \Delta \\ & \Rightarrow \ \Gamma \vdash \Delta \text{ è soddisfacibile} \end{cases}$$

11.1.1 Esempi di applicazione della procedura sopra

Esercizio: si provi a determinare la validità e soddisfacibilità del sequente che formalizza

$$\frac{\textbf{Se uno è mite e gentile allora è amabile.}}{\textbf{Se uno non è gentile allora non è amabile e neppure mite}.}$$

L'asserzione si formalizza nel sequente

$$\forall\mathbf{x}(\ \mathbf{M}(\mathbf{x})\&\mathbf{G}(\mathbf{x})\rightarrow\mathbf{A}(\mathbf{x})\ )\vdash\forall\mathbf{x}(\ \neg\mathbf{G}(\mathbf{x})\rightarrow\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg\mathbf{M}(\mathbf{x})\ )$$

usando:

M(x)=x è mite

G(x)=x è gentile

A(x)=x è amabile

che proviamo a vedere se si deriva seguendo lo schema in sezione 11.1.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ ), A(x)\vdash G(x)}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ )\vdash\neg A(x), G(x)}\ \neg-\text{D} \qquad \cfrac{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ ), M(x)\vdash G(x)}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ ),\vdash\neg M(x), G(x)}\ \neg-\text{D}}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ )\vdash\neg A(x)\&\neg M(x), G(x)}\ \&-\text{D}}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ )\vdash G(x),\neg A(x)\&\neg M(x)}\ \text{sc}_{\text{dx}}}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ ),\neg G(x)\vdash\neg A(x)\&\neg M(x)}\ \neg-\text{S}}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\ \rightarrow\ A(x)\ )\vdash\neg G(x)\ \rightarrow\ \neg A(x)\&\neg M(x)}\ \rightarrow-\text{D}}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\ \rightarrow\ A(x)\ )\vdash\forall x\ (\neg G(x)\ \rightarrow\ \neg A(x)\&\neg M(x)\ )}\ \forall-\text{D}$$

ove il primo $\forall-$D si applica perchè **x** NON compare libera nel resto del sequente. E poi ci accorgiamo che non ha senso continuare... continuando la seconda foglia dell'albero precedente otteniamo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\textbf{ax-id}}{M(x),\, \forall x\ (\dots)\vdash M(x)} \qquad M(x),\, \forall x\ (\dots)\vdash G(x)}{M(x), \forall x\ (\dots)\vdash M(x)\&G(x), G(x)}\ \&-\mathrm{D} \qquad M(x),\, \forall x\ (\dots), A(x)\vdash G(x)}{M(x), \forall x\ (\dots), M(x)\&G(x)\to A(x)\vdash G(x)}\ \to -\mathrm{S}}{M(x), \forall x\ (\ M(x)\&G(x)\to A(x)\ )\vdash G(x)}\ \forall-\mathrm{S}}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\to A(x)\ ), M(x)\vdash G(x)}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

e poi ci accorgiamo che continuando di nuovo con $\forall-$S dopo uno scambio non otteniamo nulla di nuovo... e quindi ci conviene falsificare una delle foglie dell'albero prima di applicare $\forall-$S.

Per esempio decidiamo di falsificare la foglia a sx

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\to\mathbf{A(x)}\ ), \mathbf{M(x)}\vdash\mathbf{G(x)}$$

A tal scopo prendiamo un dominio **D** non vuoto qualsiasi e poniamo:
$\mathbf{G(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ per ogni **d** in **D**,
$\mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ per ogni **d** in **D**
e $\mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}$ è definito a piacere. Poi si noti che

$$(\ \forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\to\mathbf{A(x)}\ )\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

poichè per ogni **d** in **D** si ha $(\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ e quindi tale modello risulta un *contromodello* del sequente (ovvero lo falsifica)

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\to\mathbf{A(x)}\ ), \mathbf{M(x)}\vdash\mathbf{G(x)}$$

perchè su un elemento del dominio (in realtà su ogni elemento del dominio) le **premesse** sono **vere** mentre le **conclusioni** sono **false**, da cui il sequente di partenza

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\ \to\ \mathbf{A(x)}\ )\vdash\forall \mathbf{x}\ (\ \neg\mathbf{G(x)}\ \to\ \neg\mathbf{A(x)}\&\neg\mathbf{M(x)}\ )$$

risulta **non valido** perchè abbiamo adottato solo regole sicure per arrivare alla foglia

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\to\mathbf{A(x)}\ ), \mathbf{M(x)}\vdash\mathbf{G(x)}$$

`MORALE`= abbiamo costruito un contromodello pensando ad un dominio in cui **TUTTI gli individui d NON sono gentili** ma **tutti sono miti** senza considerare se sono amabili o meno.
In questo modo NON è vero che **se uno non è gentile NON è neppure mite** senza per questo contraddire il fatto che **se uno è gentile e mite allora è amabile** che vale perchè l'antecedente di questa implicazione non si verifica mai nel modello (non ci sono infatti nel nostro dominio individui gentili!!).

Poi per studiare la soddisfacibilità del sequente

$$\forall \mathbf{x}(\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\to\mathbf{A(x)}\ )\vdash\forall \mathbf{x}(\ \neg\mathbf{G(x)}\to\neg\mathbf{A(x)}\&\neg\mathbf{M(x)}\ )$$

proviamo a derivare la negazione della formula che rappresenta il sequente ovvero

$$\vdash\ \neg(\ \mathbf{pr_1}\to\ \mathbf{pr_2}\ )$$

ove $\mathbf{pr_1}\ \equiv\ \forall \mathbf{x}(\ \mathbf{M(x)}\&\mathbf{G(x)}\to\mathbf{A(x)}\ )$
$\mathbf{pr_2}\ \equiv\ \forall \mathbf{x}(\ \neg\mathbf{G(x)}\to\neg\mathbf{A(x)}\&\neg\mathbf{M(x)}\ )$

e si ottiene (sviluppando l'albero nel modo ottimale, ovvero senza applicare $\forall-$S inutilmente..)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{M(x), G(x)} \vdash \mathbf{A(x)}}{\mathbf{M(x)\&G(x)} \vdash \mathbf{A(x)}}\ \&-\mathrm{D}}{\mathbf{M(x)\&G(x)} \rightarrow \mathbf{A(x)}}\ \rightarrow -\mathrm{D}}{\vdash \mathbf{pr_1}}\ \forall-\mathrm{D} \qquad \mathbf{pr_2} \vdash}{\dfrac{\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2} \vdash}{\vdash \neg(\, \mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2}\,)}\ \neg-\mathrm{D}}\ \rightarrow -\mathrm{D}
$$

ove l'applicazione di $\forall-$D è lecita perchè la variabile x non appare libera nel sequente conclusione. Ora per ottenere un contromodello della negazione del sequente di partenza, e quindi un modello del sequente di partenza basta falsificare $\mathbf{pr_2} \vdash$, ovvero rendere vero $\mathbf{pr_2}$, oppure basta falsificare la foglia a destra $\mathbf{M(x), G(x)} \vdash \mathbf{A(x)}$.

Procediamo a rendere vero $\mathbf{pr_2}$ in un modello $\mathcal{D}$ in tal modo:
dato un dominio $\mathbf{D}$ non vuoto si definisce
$\mathbf{G(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ per ogni $\mathbf{d}$ in $\mathbf{D}$, con $\mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}$ e $\mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}$ definiti a piacere
perchè in tal caso

$$(\, \forall \mathbf{x}\ (\, \neg \mathbf{G(x)} \rightarrow \neg \mathbf{A(x)} \& \neg \mathbf{M(x)}\,)\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

poichè per ogni $\mathbf{d}$ in $\mathbf{D}$ si ha $(\, \neg \mathbf{G(x)}\,)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ e dunque $\mathcal{D}$ fornisce un modello del sequente sopra.

In conclusione, il sequente $\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2}$ sopra risulta **non valido** ma **soddisfacibile**.

11.1.2 Precisazione sull' interpretazione di predicati

Abbiamo definito in definizione 10.2 l'interpretazione di un predicato $\mathbf{A(x)}$ in un modello $\mathbf{D}$ come una funzione

$$\mathbf{A(x)}^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D} \ \longrightarrow\ \{\, \mathbf{0}, \mathbf{1}\, \}$$

visto che c'è SOLO $\mathbf{x}$ *come variabile libera in* $\mathbf{A(x)}$.

Ora precisiamo che *tale interpretazione è indipendente dal nome della variabile* x ovvero pure il predicato $\mathbf{A(z)}^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D} \ \longrightarrow\ \{\, \mathbf{0}, \mathbf{1}\, \}$ si interpreta nello stesso modo

$$\mathbf{A(z)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{A(x)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) \qquad \text{per } \mathbf{d} \in \mathbf{D}$$

in quanto l'interpretazione di un predicato *NON dipende dal nome della variabile libera.*

Ma attenzione: se dobbiamo per esempio interpretare il predicato $\mathbf{A(x)} \rightarrow \mathbf{A(w)}$ con due variabili diverse allora occorre procedere ad interpretare $\mathbf{A(x)}$ in presenza di **più** variabili libere diverse da $\mathbf{x}$.

L'interpretazione di un predicato $\mathbf{A(x)}$ in dipendenza di un contesto di **più** variabili diverse che contengono $\mathbf{x}$ si ottiene come segue:
l'interpretazione di $\mathbf{A(x)}$ sotto contesto $\mathbf{x}$ rimane quella di partenza ma la scriviamo per intenderci in tal modo

$$(\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D} \ \longrightarrow\ \{\, \mathbf{0}, \mathbf{1}\, \} \qquad (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) \ \equiv\ \mathbf{A(x)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) \qquad \text{per } \mathbf{d} \in \mathbf{D}$$

Come detto sopra abbiamo pure che il predicato $\mathbf{A(w)}$, ottenuto da $\mathbf{A(x)}$ mettendo $\mathbf{w}$ al posto della occorrenza libera di $\mathbf{x}$, risulta interpretato nel contesto con solo $\mathbf{w}$ allo stesso modo

$$(\mathbf{A(w)}_{[\mathbf{w}]})^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D} \ \longrightarrow\ \{\, \mathbf{0}, \mathbf{1}\, \} \qquad (\mathbf{A(w)}_{[\mathbf{w}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) \qquad \text{per } \mathbf{d} \in \mathbf{D}$$

per un qualsiasi $\mathbf{d}$ nel dominio $\mathbf{D}$.
Invece $\mathbf{A(x)}$ sotto contesto $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ diventa

$$
\begin{array}{l}
(\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]})^{\mathbf{D}}(-,-) : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \ \longrightarrow\ \{\, \mathbf{0}, \mathbf{1}\, \} \\
(\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) \ \equiv\ (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1}) = (\mathbf{A(y)}_{[\mathbf{y}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1}) \qquad \text{per } \mathbf{d_1}, \mathbf{d_2} \in \mathbf{D}
\end{array}
$$

mentre abbiamo

$$\begin{array}{l}(\mathbf{A(y)}_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]})^{\mathbf{D}}(-,-) : \mathbf{D}\times\mathbf{D} \ \longrightarrow\ \{\,\mathbf{0},\mathbf{1}\,\}\\ (\mathbf{A(y)}_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2}) \equiv (\mathbf{A(y)}_{[\mathbf{y}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_2}) = (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_2}) \qquad \text{per } \mathbf{d_1},\mathbf{d_2}\in\mathbf{D}\end{array}$$

facendo attenzione che in entrambe ASSUMIAMO che il contesto delle variabili sia sempre interpretato *secondo l'ordine alfabetico*, ovvero l'elemento da sostituire alla variabile $\mathbf{x}$ varia sul primo dominio, ovvero su $\mathbf{d_1}$, mentre quello per la variabile $\mathbf{y}$ (che nell'alfabeto viene dopo ad $\mathbf{x}$) varia sul secondo dominio ovvero su $\mathbf{d_2}$. Da ciò segue che

$$(\mathbf{A(x)} \to \mathbf{A(w)})^{\mathbf{D}}(-,-) : \mathbf{D}\times\mathbf{D} \ \longrightarrow\ \{\,\mathbf{0},\mathbf{1}\,\}$$

risulta definito in tal modo

$$\begin{array}{rcl}(\,\mathbf{A(x)} \to \mathbf{A(w)}_{[\mathbf{x},\mathbf{w}]}\,)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2}) & \equiv & (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x},\mathbf{w}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2}) \to (\mathbf{A(w)}_{[\mathbf{x},\mathbf{w}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2})\\ & = & (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1}) \to (\mathbf{A(w)}_{[\mathbf{w}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_2})\\ & = & (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1}) \to (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_2})\end{array}$$

Esercizio: Si stabilisca la validità e soddisfacibilità o meno del sequente

$$\exists\mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}\vdash\forall\mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}$$

Proviamo ad applicare la procedura 11.1 e quindi a derivare

$$\cfrac{\cfrac{\mathbf{A(w)} \vdash \mathbf{A(z)}}{\exists\mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}\vdash\mathbf{A(z)}}\ \forall\text{−D}}{\exists\mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}\vdash\forall\mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}}\ \forall\text{−D}$$

L'ultima foglia suggerisce di costruire un contromodello falsificando il sequente

$$\mathbf{A(w)}\vdash\mathbf{A(z)}$$

ovvero la formula $\mathbf{A(w)} \to \mathbf{A(z)}$. A tal scopo basta trovare un modello $\mathbf{D}$ tale che

$$(\,\mathbf{A(w)} \to \mathbf{A(z)}\,)^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D}\times\mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$$

(ove $\mathbf{w}$ varia sulla prima componente $\mathbf{D}$ del prodotto $\mathbf{D}\times\mathbf{D}$ e $\mathbf{z}$ sulla seconda componente secondo l'ordine alfabetico delle lettere rappresentanti le variabili visto che $\mathbf{w}$ viene prima di $\mathbf{z}$) NON sia la funzione costante $\mathbf{1}$, ovvero esista una coppia $(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2})$ in $\mathbf{D}\times\mathbf{D}$ tale che

$$(\,\mathbf{A(w)} \to \mathbf{A(z)}\,)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2}) = \mathbf{A(w)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1}) \to \mathbf{A(z)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{0}$$

Quindi basta che risulti $\mathbf{A(w)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1}) = \mathbf{1}$ e $\mathbf{A(z)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{0}$. A tal scopo basta definire:
$\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{Marco},\mathbf{Pippo}\}$ e poi

$$\mathbf{A(z)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{Marco}) = \mathbf{1} \qquad \mathbf{A(z)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{Pippo}) = \mathbf{0}$$

(si noti che vale pure $\mathbf{A(w)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{Marco}) = \mathbf{1} \qquad \mathbf{A(w)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{Pippo}) = \mathbf{0}$).

Infatti $\mathbf{A(z)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{Marco},\mathbf{Pippo}) = \mathbf{A(z)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{Pippo}) = \mathbf{0}$ mentre $\mathbf{A(w)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{Marco},\mathbf{Pippo}) = \mathbf{A(w)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{Marco}) = \mathbf{1}$.

Dunque il sequente $\exists\mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}\vdash\forall\mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}$ *NON è valido.*

Ora per provare se è **soddisfacibile** proviamo a derivare

$$\vdash\neg(\,\exists\mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \to \forall\mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}\,)$$

nel tentativo di derivare la negazione del sequente di partenza

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\vdash}{\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\vdash}\ \rightarrow -\mathrm{S}}{\vdash\neg(\ \exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ )}\ \neg-\mathrm{D}$$

la foglia che non si chiude a sx dice che si può costruire contromodello **falsificando**:

$$\vdash \exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

(si ricordi che il contesto vuoto a sx si interpreta sempre come vero..) ovvero trovando un modello $\mathcal{D}$ tale che $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$
per esempio ponendo

$$\begin{array}{l} \mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat} \\ \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0} \text{ per ogni naturale } \mathbf{d} \end{array}$$

e questo diventa modello del sequente $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\vdash\forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$, da cui segue che il sequente $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\vdash\forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$ risulta **soddisfacibile**.

Oppure la foglia che non si chiude a dx dice che si può costruire contromodello **falsificando**:

$$\forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\vdash$$

(si ricordi che il contesto vuoto a dx si interpreta sempre come falso..) ovvero trovando un modello $\mathcal{D}$ tale che $\forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$. Per esempio possiamo definire

$$\begin{array}{l} \mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat} \\ \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \text{ sempre} \end{array}$$

e questo diventa modello del sequente $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\vdash\forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$

11.2 Validità regole di LC e loro inverse

Di seguito mostriamo che le regole di LC sono valide assieme alle loro inverse, ovvero sono TUTTE SICURE.

11.2.1 conservazione SODDISFACIBILITÀ regola $\forall-$D (caso semplice)

La regola

$$\dfrac{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{A}(\mathbf{w}), \nabla}{\mathbf{\Gamma}\vdash\forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma}, \forall \mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla))$$

conserva la SODDISFACIBILITÀ, ed è quindi anche **valida**.

Per semplicità supponiamo che sia $\mathbf{\Gamma}$ che ∇ siano proposizione senza variabili libere. Ora fissato un modello $\mathcal{D}$, se $\mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla$ è vero in $\mathcal{D}$ allora per ogni $\mathbf{d}\varepsilon\mathbf{D}$ si ha che

$$(\ \mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

ovvero che

$$\mathbf{\Gamma}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee \nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Ora se $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{1}$ (si ricorda che non compare $\mathbf{x}$ in $\mathbf{\Gamma}$)
allora per ogni $\mathbf{d}\varepsilon\mathcal{D}$ si ha per ipotesi $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee \nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$
ovvero che $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ oppure $\nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$.
Ora sia hanno 2 casi:

caso 1: $\nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ da cui si conclude $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$
caso 2: $\nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ e quindi per ogni $\mathbf{d} \varepsilon \mathcal{D}$ $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ da cui

$$(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

e quindi $(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$.
Dunque il sequente conclusione è valido in $\mathcal{D}$.

11.2.2 conservazione SODDISFACIBILITÀ regola $\forall-$D (caso generale)

La regola $\forall-$D **conserva la SODDISFACIBILITÀ** anche se supponiamo $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{y})$ e $\nabla \equiv \mathbf{C}(\mathbf{y})$ e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ supponiamo $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Fissato un modello $\mathcal{D}$ se $\mathbf{B}(\mathbf{y}) \to \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})$ è **valido in** $\mathcal{D}$ allora per ogni $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2} \varepsilon \mathbf{D}$ si ha che $(\mathbf{B}(\mathbf{y}) \to \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}\,)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ ovvero che

$$\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) \to \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

Ora se fissato $\mathbf{d_2}$ si ha $\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ (si ricorda che non compare $\mathbf{x}$ in $\mathbf{B}(\mathbf{y})$), allora per ogni $\mathbf{d_1} \varepsilon \mathbf{D}$ si ha per ipotesi $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$
ovvero che $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$.
Ora sia hanno 2 casi:
caso 1: $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ da cui si conclude $(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$
caso 2: $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = 0$ e quindi per ogni $\mathbf{d_1} \varepsilon \mathcal{D}$ $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ da cui

$$(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

e quindi $(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$

La regola $\forall-$D è pure sicura perchè la sua inversa pure conserva la soddisfacibilità in un modello. Lo si provi per esercizio.

11.2.3 Conservazione soddisfacibilità regola dell'esiste *a dx veloce* (caso semplice)

La regola

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}\mathbf{v}$$

conserva la SODDISFACIBILITÀ in un modello ed è quindi anche **valida**.

Per semplicità supponiamo che sia $\mathbf{\Gamma}$ che ∇ siano proposizioni senza variabili libere e $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ una costante. Ora fissato un modello $\mathcal{D}$, se $(\mathbf{\Gamma} \to \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \nabla)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, e se assumiamo anche che $\mathbf{\Gamma}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ allora per validità sequente premessa otteniamo che $(\mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \nabla)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, ovvero che $\mathbf{A}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ o che $\nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$.

Ora analizziamo i seguenti due casi:
caso 1. $\nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ da cui concludiamo $(\exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$.
caso 2. $\nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ da cui per ipotesi otteniamo $\mathbf{A}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, da cui $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ quindi $(\exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, da cui concludiamo $(\exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, ovvero pure il sequente conclusione è **valido** nel modello $\mathcal{D}$.

11.2.4 Conservazione soddisfacibilità regola dell'esiste *a dx veloce* (caso generale)

La regola $\exists-$Dv **conserva la SODDISFACIBILITÀ in un modello** anche se si assume che $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{y})$ e $\nabla \equiv \mathbf{C}(\mathbf{y})$ e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ poniamo $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e assumiamo pure che $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ sia una costante.

Fissato un modello $\mathcal{D}$, se $\mathbf{B(y)} \rightarrow \mathbf{A'(t,y)} \vee \mathbf{C(y)}$ è **vera nel modello**, e quindi per ogni $\mathbf{d}\varepsilon\mathbf{D}$ si ha $(\ \mathbf{B(y)} \rightarrow \mathbf{A'(t,y)} \vee \mathbf{C(y)}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, ovvero che per ogni $\mathbf{d}\varepsilon\mathbf{D}$

$$\mathbf{B(y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \rightarrow \mathbf{A'(t,y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee \mathbf{C}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

Se assumiamo anche che $\mathbf{B(y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ allora per l'ipotesi di validità nel modello del sequente premessa otteniamo che per ogni $\mathbf{d}\varepsilon\mathbf{D}$ $\mathbf{A'(t,y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee \mathbf{C(y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$.
Ora analizziamo due casi:
caso 1. $\mathbf{C(y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ da cui concludiamo $(\ \exists\mathbf{x}\ \mathbf{A'(x,y)} \vee \mathbf{C(y)}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$.
caso 2. $\mathbf{C(y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ da cui per ipotesi otteniamo che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ abbiamo che $\mathbf{A'(t,y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, da cui $\mathbf{A'(x,y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}}, \mathbf{d}) = \mathbf{A'(t,y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$. Quindi $(\ \exists\mathbf{x}\ \mathbf{A'(x,y)}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ da cui concludiamo $(\ \exists\mathbf{x}\ \mathbf{A'(x,y)} \vee \mathbf{C(y)}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$.

11.2.5 NON validità regola ∃−Dv

La **regola** ∃−D**v** è pericolosa, ovvero NON SICURA perchè NON conserva la **validità** all'insù ⇑.

Un *controesempio* è dato dal seguente esempio.

L'asserzione

$$\frac{\text{È arrivato in stazione il treno per Venezia} \vdash \text{Marco sale sul treno per Venezia.}}{\text{È arrivato in stazione il treno per Venezia} \vdash \text{Qualcuno sale sul treno per Venezia.}}$$

si può formalizzare in

$$\frac{\mathbf{A(v)} \vdash \mathbf{S(m,v)}}{\mathbf{A(v)} \vdash \exists\mathbf{x}\ \mathbf{S(x,v)}}$$

usando
$A(x)$="x è arrivato in stazione"
$S(x,y)$="x sale su y.
m="Marco"
v="treno per Venezia"

Ora

$$\frac{\mathbf{A(v)} \vdash \mathbf{S(m,v)}}{\mathbf{A(v)} \vdash \exists\mathbf{x}\ \mathbf{S(x,v)}}$$

è un'applicazione della regola ∃−D**v** che sappiamo essere valida. Però la sua inversa non è vera nel modello seguente:

$\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{Marco}, \mathbf{trenoVE}, \mathbf{Piero}\}$
$\mathbf{v^D} \equiv \mathbf{trenoVE}$
$\mathbf{m^D} \equiv \mathbf{Marco}$
$\mathbf{p^D} \equiv \mathbf{Piero}$
$\mathbf{A(x)^D(d)} = \mathbf{1}$ sse $\mathbf{d} = \mathbf{trenoVE}$
$\mathbf{S(d_1, d_2)} = \mathbf{1}$ sse $\mathbf{d_1} = \mathbf{Piero}$ e $\mathbf{d_2} = \mathbf{trenoVE}$.

E in tal modello $(\exists\mathbf{x}\ \mathbf{S(x,v)})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$ e così pure $\mathbf{A(v)^D} = \mathbf{A(x)^D(trenoVE)} = \mathbf{1}$ ma $\mathbf{S(m,v)^D} = \mathbf{0}$. In pratica abbiamo trovato un modello in cui vale $\mathbf{A(v)} \vdash \exists\mathbf{x}\ \mathbf{S(x,v)}$ ma NON vale $\mathbf{A(v)} \vdash \mathbf{S(m,v)}$, ovvero

$$\frac{\mathbf{A(v)} \vdash \exists\mathbf{x}\ \mathbf{S(x,v)}}{\mathbf{A(v)} \vdash \mathbf{S(m,v)}}$$

NON è valida, ed essendo un'istanza della regola inversa dell'esiste veloce ∃−D**v**, rende tale inversa ∃−D**v** − **inv** NON valida.

11.2.6 Conservazione soddisfacibilità regola inversa della regola $\exists-$D

Quindi per rendere la regola di esiste a dx sicura occorre modificarla ponendo

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

che è chiaramente sicura ora. Infatti se in un modello $\mathcal{D}$ la premessa è vera e se supponiamo $(\Gamma^{\&})^{\mathcal{D}} = 1$ allora per l'ipotesi abbiamo che $(\exists x\ A(x)\ \vee\ \nabla^{\vee})^{\mathbf{D}} = 1$ da cui abbiamo tre casi.

1 $\mathbf{A(x)^{D}(t^{D})} = \mathbf{A(t)^{D}} = \mathbf{1}$ da cui segue che vale pure $\exists\mathbf{x}\ \mathbf{A(x)^{D}} = \mathbf{1}$ e allora anche il sequente conclusione è vero nel modello.

2. $\exists\mathbf{x}\ \mathbf{A(x)^{D}} = \mathbf{1}$ allora anche il sequente conclusione è vero nel modello.

3. $(\nabla^{\vee})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$ allora anche il sequente conclusione è vero nel modello.

11.2.7 Esempi di applicazione di regole

L'asserzione

$$\frac{\mathbf{x} > \mathbf{0} \vdash \text{se } \mathbf{y} > \mathbf{0} \text{ allora } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}}{\mathbf{x} > \mathbf{0} \vdash \text{per ogni } \mathbf{y}, \text{ se } \mathbf{y} > \mathbf{0} \text{ allora } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}}$$

formalizzata in

$$\frac{\mathbf{x} > \mathbf{0} \vdash \mathbf{y} > \mathbf{0}\ \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}}{\mathbf{x} > \mathbf{0} \vdash \forall \mathbf{y}(\,\mathbf{y} > \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}\,)}$$

è un esempio di corretta applicazione della regola $\forall-$D che è pure sicura, ovvero scambiando la conclusione con la premessa l'asserzione rimane valida.

Invece l'esempio

$$\frac{\mathbf{y} > \mathbf{0} \vdash \text{se } \mathbf{x} > \mathbf{0} \text{ allora } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}}{\mathbf{y} > \mathbf{0} \vdash \text{per ogni } \mathbf{y}, \text{ se } \mathbf{x} > \mathbf{0} \text{ allora } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}}$$

si formalizza in

$$\frac{\mathbf{y} > \mathbf{0} \vdash \mathbf{x} > \mathbf{0}\ \rightarrow\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}}{\mathbf{y} > \mathbf{0} \vdash \forall \mathbf{y}(\,\mathbf{x} > \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}\,)}$$

Si noti che questa NON è una corretta applicazione della regola $\forall-\mathbf{D}$ in quanto la $\mathbf{y}$ è LIBERA nel contesto a sinistra $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ Difatti nel modello $D \equiv Nat$ dei numeri naturali con $>$ interpretato come "maggiore stretto" e il simbolo $\cdot$ come moltiplicazione, si ha che il sequente premessa è vero mentre il sequente conclusione è falso perchè $\forall\,\mathbf{y}(\,\mathbf{x} > \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}\,)$ è falso per $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

11.2.8 Conservazione soddisfacibilità regola $\exists-$S (caso semplice)

La regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A(w)} \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma}, \exists\mathbf{x}\ \mathbf{A(x)} \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (\mathbf{x} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma}, \exists\mathbf{x}\ \mathbf{A(x)}, \nabla))$$

conserva la SODDISFACIBILITÀ in un modello ed è anche **valida**, poichè - supponendo che $\mathbf{\Gamma}$ e ∇ siano proposizioni senza variabili libere, allora fissato un modello $\mathcal{D}$ se $\mathbf{\Gamma}\ \&\ \mathbf{A(x)} \rightarrow \nabla$ è **vero** nel modello, allora per ogni $\mathbf{d}\varepsilon\mathbf{D}$ si ha $(\ \mathbf{\Gamma}\ \&\ \mathbf{A(x)} \rightarrow \nabla\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, ovvero che per ogni $\mathbf{d}\varepsilon\mathcal{D}$ si ha $\mathbf{\Gamma}^{\mathcal{D}}\ \&\ \mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \rightarrow \nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Se assumiamo anche che $(\ \mathbf{\Gamma}\ \&\ \exists\mathbf{x}\ \mathbf{A(x)}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, ne segue che $\mathbf{\Gamma}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e che esiste $\overline{\mathbf{d}}\varepsilon\mathbf{D}$ tale che $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\overline{\mathbf{d}}) = \mathbf{1}$ e dunque $\mathbf{\Gamma}^{\mathcal{D}}$ & $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\overline{\mathbf{d}}) = \mathbf{1}$ da cui si conclude per validità sequente premessa che $\nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e quindi il sequente conclusione è **vero** nel modello $\mathcal{D}$.

11.2.9 Conservazione soddisfacibilità regola ∃−S (caso più generale)

La regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma}, \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla}\ \exists\text{−S}\ (\mathbf{x} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Delta}))$$

conserva la SODDISFACIBILITÀ in un modello ed è anche **valida**. Supponiamo ora che $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{y})$ e $\nabla \equiv \mathbf{C}(\mathbf{y})$ e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ poniamo $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Ora fissato un modello $\mathcal{D}$, se $\mathbf{B}(\mathbf{y})$ & $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{y})$ è **vero** nel modello, allora per ogni $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}\varepsilon\mathbf{D}$ si ha ($\mathbf{B}(\mathbf{y})$ & $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{y})$ $)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$
ovvero che per ogni $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}\varepsilon\mathcal{D}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2})\ \&\ \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

Se assumiamo anche che ($\mathbf{B}(\mathbf{y})$ & $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ $)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$, ne segue che $\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ e che esiste $\mathbf{d_1}\varepsilon\mathcal{D}$ tale che $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ e dunque $\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2})$ & $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ da cui si conclude per validità sequente premessa che $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$.

11.2.10 Conservazione soddisfacibilità regola ∀−S (caso più generale)

La regola del "per ogni" a sx veloce

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall\text{−S}\mathbf{v}$$

conserva la SODDISFACIBILITÀ in un modello ed è quindi anche **valida**.

Supponiamo che $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{y})$ e $\nabla \equiv \mathbf{C}(\mathbf{y})$ e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ci sia $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e che $\mathbf{t}$ sia una costante.

Ora fissato un modello $\mathcal{D}$, se $\mathbf{B}(\mathbf{y})$ & $\mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{y})$ è **valido** nel modello, allora per ogni $\mathbf{d}\varepsilon\mathbf{D}$ si ha ($\mathbf{B}(\mathbf{y})$ & $\mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{y})$ $)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ ovvero che

$$\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})\ \&\ \mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

Ora se fissato $\mathbf{d}$ si suppone anche che ($\mathbf{B}(\mathbf{y})$ & $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ $)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, ne segue che $\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ e che ($\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ $)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, ossia che per ogni $\overline{\mathbf{d}}\varepsilon\mathbf{D}$ si ha $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\overline{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = \mathbf{1}$, da cui $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}}, \mathbf{d}) = \mathbf{1}$, ossia $\mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, e quindi si ottiene $\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$ & $\mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, da cui per validità sequente premessa si conclude $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$.

11.2.11 NON validità inversa della regola ∀−Sv

La regola del "per ogni" veloce

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall\text{−S}\mathbf{v}$$

è pericolosa, ovvero **NON è SICURA** perchè NON è valida anche all'insù ⇑, ovvero la sua inversa NON è valida.

Infatti se si considera il modello
$\mathcal{D} \equiv \mathbf{Nat}$ e $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{n}) \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{n} \leq \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{n} > \mathbf{7} \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \text{ sse } \mathbf{d} \leq \mathbf{7}$$

Dato $\mathbf{A(t)}^{\mathcal{D}} = \mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$ e che ($\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)}$)$^{\mathbf{Nat}} = \mathbf{0}$ risulta che

$$\cfrac{A(t) \vdash \perp \qquad \textbf{NON valido} \text{ nel modello}}{\forall x\ A(x) \vdash \perp \qquad \textbf{valido} \text{ nel modello}}\ \forall\text{−S}\mathbf{v}$$

ovvero otteniamo che l'inversa della regola $\forall$−Sv NON è valida in quanto

$$\cfrac{\forall \mathbf{n} \in \mathbf{Nat}\ \mathbf{n} \leq \mathbf{7}\ \ \vdash \perp \qquad \textbf{valido} \text{ nel modello}}{\mathbf{0} \leq \mathbf{7}\ \ \vdash \perp \qquad \textbf{NON valido} \text{ nel modello}}\ \forall\text{−S}\mathbf{v} - \mathbf{inv}$$

11.2.12 Esempi di applicazione delle regole

1. L'asserzione

   $$\cfrac{\text{La cometa x entra nell'orbita di cattura del Sole} \vdash \text{C'è un scia luminosa nel cielo.}}{\text{Qualche cometa entra nell'orbita di cattura del Sole} \vdash \text{C'è una scia luminosa nel cielo.}}$$

   si può formalizzare in

   $$\cfrac{\mathbf{C(x)} \& \mathbf{O(x,s)}\ \vdash\ \mathbf{L}}{\exists \mathbf{x}\,(\ \mathbf{C(x)} \& \mathbf{O(x,s)}\ ) \vdash \mathbf{L}}$$

   usando
   $C(x)$=“x è una cometa”
   $O(x,y)$=“x entra nell'orbita di cattura di y”
   L=“c'è una scia luminosa nel cielo”
   s=“Sole”
   che è un esempio di applicazione corretta della regola $\exists$−S visto che $\mathbf{x}$ non compare libera nel sequente conclusione. Quindi l'applicazione della regola è valida con la sua inversa, ovvero anche l'asserzione ottenuta invertendo la conclusione con la premessa è pure valida.

2. l'asserzione

   $$\cfrac{\text{Pippo vede la stella Sirio} \vdash \text{Il cielo non è nuvoloso.}}{\text{Pippo vede tutte le stelle} \vdash \text{Il cielo non è nuvoloso.}}$$

   si formalizza in

   $$\cfrac{S(s) \& V(p,s) \vdash \neg L}{\forall x\,(\ S(x) \rightarrow V(p,x)\ ) \vdash \neg L}$$

   usando
   $V(x,y)$=“x **vede** y”
   $S(x)$=“x **è una stella**”
   L=“**Il cielo è nuvoloso**”
   p=“**Pippo**”
   s=“**Sirio**”

   A prima vista non è applicazione di una regola come quella del “per ogni” a sx veloce. Allora proviamo a cercare una derivazione della conclusione per capire se la conclusione segue dalla premessa...

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{L}, \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{x})\,) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{s}) \qquad L, \forall x\,(S(s) \rightarrow V(p,x)\,), V(p,s) \vdash}{\mathbf{L}, \forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{x})\,), \mathbf{S}(\mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{s}) \vdash}\ \rightarrow -\mathrm{S}}{\mathbf{L}, \forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{x})\,) \vdash}\ \forall -\mathrm{S}}{\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{x})\,), \mathbf{L} \vdash}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}}{\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{x})\,) \vdash \neg \mathbf{L}}\ \neg -\mathrm{D}$$

Ora dalla foglia di sx possiamo dedurre che se facciamo un modello

$$\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{Sirio}, \mathbf{Pippo}\}$$

in cui poniamo

per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ $\mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$
$\mathbf{L}^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$
$\mathbf{s}^{\mathbf{D}} = \mathbf{Sirio}$, $\mathbf{p}^{\mathbf{D}} = \mathbf{Pippo}$
e infine $\mathbf{V}(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\mathbf{D}}$ definito a piacere

abbiamo che $(\,\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{x})\,)\,)^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$ perchè non c'è nessuna stella in $\mathbf{D}$, ovvero $\mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$, e quindi l'implicazione $(\,\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{x})\,)^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$, mentre $(\neg\mathbf{L})^{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$ e dunque nel modello il sequente $\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{x})\,) \vdash \neg\mathbf{L}$ risulta falso. Invece il sequente $\mathbf{S}(\mathbf{s}) \& \mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{s}) \vdash \neg\mathbf{L}$ risulta vero nel modello perchè $(\,\mathbf{S}(\mathbf{s}) \& \mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{s}) \rightarrow \neg\mathbf{L})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$ in quanto $\mathbf{S}(\mathbf{s})^{\mathbf{D}} = \mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{s}^{\mathbf{D}}) = \mathbf{0}$ e dunque $(\mathbf{S}(\mathbf{s}) \& \mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{s}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$, ovvero l'implicazione è vera nel modello scelto.

In conclusione l'asserzione di partenza *NON è valida* perchè abbiamo trovato un modello in cui la premessa è vera ma la conclusione no.

11.3 Come interpretare unicità in logica predicativa? aggiungiamo il predicato di uguaglianza!

In sezione 10.1.2 abbiamo visto che per definire un linguaggio predicativo occorre avere come base di partenza dei predicati atomici $\mathbf{P_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_m})$ che negli esempi in sezione 10.2 sono ad esempio $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ o $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ etc. Ora ci concentriamo su linguaggi predicativi dove c'è senz'altro come predicato atomico, il predicato binario dell'uguaglianza $\mathbf{t} = \mathbf{s}$ che indica che il termine $\mathbf{t}$ è uguale al termine $\mathbf{s}$. I linguaggi predicativi con l'aggiunta dell'uguaglianza si chiamano **linguaggi predicativi con uguaglianza** e la logica predicativa con le regole dell'uguaglianza si chiama **LOGICA PREDICATIVA con UGUAGLIANZA**.

Vediamo a che serve l'uguaglianza con degli esempi.

Esempio 0: come formalizzare in logica classica

"**c''e un x uguale a cinque**"

?

Con la formula

$$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{x}{=}\mathbf{5}$$

Esempio 1: come formalizzare in logica classica

"**Il programma fattoriale su input 2 dà un'unico output.**"

con
$O(x,y,z)$= "il programma y su input z dà output il numero x"

f=“il programma fattoriale”
2= “due”

?

Una possibile formalizzazione è la seguente:

$$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{O}(\mathbf{x},\mathbf{f},\mathbf{2})\ \&\ \forall \mathbf{y_1}\ \forall \mathbf{y_2}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{y_1},\mathbf{f},\mathbf{2})\ \&\ \mathbf{O}(\mathbf{y_2},\mathbf{f},\mathbf{2}) \rightarrow \mathbf{y_1}{=}\mathbf{y_2}\ )$$

Esempio 2: come formalizzare in logica classica

“**Certi potenti pensano solo a se stessi**”

con
$\mathbf{O}(\mathbf{x})$= “x è potente”
$\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y})$=“x pensa a y”

?

Una possibile formalizzazione è la seguente:

$$\exists\ \mathbf{x}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{x})\ \&\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y}{=}\mathbf{x}\ )\ )$$

Esempio 3: come formalizzare in logica classica

“**Certi potenti pensano a se stessi e soltanto a se stessi**”

con
$\mathbf{O}(\mathbf{x})$= “x è potente”
$\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y})$=“x pensa a y”

?

Una possibile formalizzazione è la seguente:

$$\exists\ \mathbf{x}\ (\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{x})\ \&\ \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{x})\ )\ \&\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y}{=}\mathbf{x}\ )\ )$$

11.3.1 Grammatica predicati con uguaglianza

Descriviamo qui come si costruiscono le formule all'interno di un linguaggio predicativo con uguaglianza. La differenza rispetto a quanto descritto in definizione **??** è che tra i predicati di base c'è pure l'uguaglianza:

Def. 11.1 La grammatica delle *formule del linguaggio predicativo con l'aggiunta dell'uguaglianza* diventa:

- il predicato $\mathbf{t}{=}\mathbf{s}$ è una **formula** se $\mathbf{t}$ ed $\mathbf{s}$ sono **termini**.
- i predicati atomici $\mathbf{P_k}(\mathbf{t_1},\ldots,\mathbf{t_m})$ sono **formule** se $\mathbf{t_i}$ sono **termini** per $\mathbf{i}=\mathbf{1},\ldots,\mathbf{m}$.
- $\forall \mathbf{x}$ `fr` è una **formula** se `fr` lo è.
- $\exists \mathbf{x}$ `fr` è una **formula** se `fr` lo è.
- la proposizione $\perp$ è una **formula**.

- $\texttt{fr}\&\texttt{fr}_2$ è una **formula** se $\texttt{fr}$ e $\texttt{fr}_2$ lo sono.
- $\texttt{fr}\vee\texttt{fr}_2$ è una **formula** se $\texttt{fr}$ e $\texttt{fr}_2$ lo sono.
- $\texttt{fr}\rightarrow\texttt{fr}_2$ è una **formula** se $\texttt{fr}$ e $\texttt{fr}_2$ lo sono.
- $\neg\texttt{fr}$ è una **formula** se $\texttt{fr}$ lo è.

11.3.2 Interpretazione del predicato di uguaglianza in un modello

L'interpretazione del predicato di uguaglianza in un modello è dato dall'uguaglianza dell'interpretazione dei termini eguagliati sintatticamente:

Def. 11.2 [**INTERPRETAZIONE FORMULE con uguaglianza in un modello**] Si estenda la definizione di interpretazione in sezione 10.2 interpretando la formula $\mathbf{t} = \mathbf{y}$ come segue:
diamo dapprima l'interpretazione del predicato $\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$(x = y)^D(-) : D^2 \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x = y^D(d_1, d_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } d_1 = d_2 \\ 0 & \text{se } d_1 \neq d_2 \end{cases}$$

e poi usando l'interpretazione della sostituzione in definizione 10.3.3 definiamo:

$$(t_1 = t_2)^D(-) : D^2 \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x = y^D(d_1, d_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } t_1^D = t_2^D \\ 0 & \text{se } t_1^D \neq t_2^D \end{cases}$$

Esempio: Nel modello $\mathbf{D} \equiv$ numeri naturali con $c^D \equiv 5$ allora, per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$$(\mathbf{x} = \mathbf{c})^{\mathcal{D}} \equiv 1 \text{ sse } \mathbf{d} = \mathbf{5}$$

11.3.3 Regole predicato con uguaglianza

Introduciamo ora le regole dei sequenti relative al predicato dell'uguaglianza da aggiungere al calcolo della logica predicativa LC.

Regole dell'uguaglianza

$$\begin{array}{c} = -\text{ax} \\ \Gamma\vdash t = t, \Delta \end{array} \qquad\qquad \frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\text{S}$$

L'assioma

$$\begin{array}{c} = -\text{ax} \\ \Gamma\vdash t{=}t, \Delta \end{array}$$

è **valido** perchè è valido in OGNI modello:
supponiamo $\mathbf{\Gamma}$ un solo predicato e sia $\mathcal{D}$ un modello. Distinguiamo 2 casi:
1. $\mathbf{t}$ è una costante, ovvero $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ con $\mathbf{c}^{\mathcal{D}} \varepsilon \mathcal{D}$, e quindi si ha chiaramente

$$(\mathbf{c}{=}\mathbf{c})^{\mathcal{D}} \equiv (\mathbf{x}{=}\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}}, \mathbf{c}^{\mathcal{D}}) \equiv \mathbf{1}$$

da cui si ha $(\mathbf{\Gamma} \to \mathbf{t}{=}\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ perchè il conseguente è vero nel modello.
2. $\mathbf{t}$ è una variabile, ovvero $\mathbf{t} \equiv \mathbf{x}$, da cui la validità di $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{x}{=}\mathbf{x}$ supposto che in $\mathbf{\Gamma}$ ci siano solo proposizioni con $\mathbf{x}$ variabile libera segue in quanto per ogni $\mathbf{d}$ nel modello $(\mathbf{\Gamma} \to \mathbf{x}{=}\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, poichè $(\mathbf{x}{=}\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ visto che $\mathbf{d} = \mathbf{d}$.

Inoltre la regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t})\vdash\mathbf{\Delta}(\mathbf{t})}{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s}), \mathbf{t}{=}\mathbf{s}\vdash\mathbf{\Delta}(\mathbf{s})} = -\mathrm{S}^{*}$$

è **valida** poichè conserva la soddisfacibilità dei sequenti in ogni modello: per semplicità supponiamo $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c_1}$ e $\mathbf{s} \equiv \mathbf{c_2}$ costanti e che $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t})$ e $\mathbf{\Delta}(\mathbf{t})$ non abbiamo variabili libere.
Ora, se $(\ \mathbf{\Gamma}(\mathbf{s})^{\&}\ \&\ \mathbf{t}{=}\mathbf{s}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ il sequente conclusione vale banalmente nel modello.
Quindi supponiamo che $(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s})^{\&}\ \&\ \mathbf{t}{=}\mathbf{s})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e mostriamo che $\mathbf{\Delta}(\mathbf{s})^{\vee\mathcal{D}}{=}\mathbf{1}$.
Dall'ipotesi otteniamo che $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s})^{\&^{\mathcal{D}}} = \mathbf{1}$ e $(\mathbf{t}{=}\mathbf{s})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ ovvero $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$.
Ma $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s})^{\&^{\mathcal{D}}} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})^{\&^{\mathcal{D}}}(\mathbf{s}^{\mathcal{D}})$ e da $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$ concludiamo

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s})^{\&^{\mathcal{D}}} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})^{\&^{\mathcal{D}}}(\mathbf{s}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})^{\&^{\mathcal{D}}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}}$$

e quindi da $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s})^{\&^{\mathcal{D}}} = \mathbf{1}$ otteniamo $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t})^{\&^{\mathcal{D}}} = \mathbf{1}$.
Ora per la validità del sequente premessa, ovvero che

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t})^{\&^{\mathcal{D}}} \to \mathbf{\Delta}(\mathbf{t})^{\vee^{\mathcal{D}}} = \mathbf{1}$$

ne segue che $\mathbf{\Delta}(\mathbf{t})^{\&^{\mathcal{D}}} = \mathbf{1}$ e siccome ragionando come sopra da $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$ concludiamo

$$\mathbf{\Delta}(\mathbf{s})^{\vee^{\mathcal{D}}} = \mathbf{\Delta}(\mathbf{t})^{\vee^{\mathcal{D}}}$$

e da $\mathbf{\Delta}(\mathbf{t})^{\vee^{\mathcal{D}}} = \mathbf{1}$ si conclude pure che

$$\mathbf{\Delta}(\mathbf{s})^{\vee^{\mathcal{D}}} = \mathbf{1}$$

11.3.4 Il calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_{=}$

Il calcolo $\mathbf{LC}_{=}$ è il calcolo della `logica classica con uguaglianza` ovvero il calcolo **LC** con le regole dell'uguaglianza

$$\overset{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\perp}{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to -\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to -\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\text{S} \qquad \begin{array}{c} = -\text{ax} \\ \Gamma \vdash t = t, \Delta \end{array}$$

11.3.5 Come usare le regole di uguaglianza?

Nella regola

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\text{S}$$

dall'alto verso il basso: NON TUTTE le occorrenze di t DEVONO essere rimpiazzate con s
dal basso verso l'alto: NON TUTTE le occorrenze di s DEVONO essere rimpiazzate con t.

Esempio 1: Se vogliamo derivare la simmetria dell'uguaglianza

$$t = s \vdash s = t$$

in $\text{LC}_=$ occorre applicare la regola $= -\text{S}$ in tal modo:
si identifichi

$$\Sigma\ \equiv\ \emptyset \qquad \Gamma(x)\ \equiv\ \emptyset \qquad \Delta(x)\ \equiv\ x = t \qquad \nabla\ \equiv\ \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(t)\ \equiv\ t = t \qquad \Delta(s)\ \equiv\ s = t$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\frac{\begin{array}{c} = -\text{ax} \\ t = s \vdash t = t \end{array}}{t = s \vdash s = t}\ = -\text{S}$$

Esempio 2: Se vogliamo derivare la transitività dell'uguaglianza

$$t = u, u = s \vdash t = s$$

in $\text{LC}_=$ occorre applicare la regola $= -\text{S}$ in tal modo:
si identifichi

$$\Sigma\ \equiv\ t = u \qquad \Gamma(x)\ \equiv\ \emptyset \qquad \Delta(x)\ \equiv\ t = x \qquad \nabla\ \equiv\ \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(u) \equiv t = u \qquad \Delta(s) \equiv t = s$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax} - \text{id}\\ u = s, t = u \vdash t = u\end{array}}{t = u, u = s \vdash t = s} = -\text{S}$$

Esercizi su uguaglianza

- Nell'estensione di LC con uguaglianza stabilire se sono validi o meno, o soddisfacibili o meno i seguenti sequenti:

  1. $\vdash \forall x\ x = x$

     è **valido** perchè si deriva in tal modo

     $$\dfrac{\begin{array}{c}= \text{-ax}\\ \vdash x{=}x\end{array}}{\vdash \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x{=}x}}\ \forall{-}\text{D}$$

     ove l'applicazione di $\forall$ -D è lecita perchè non ci sono altre formule

  2. $\vdash \neg\forall x\ x = x$

     il sequente è **insoddisfacibile** perchè una derivazione non si trova e proviamo subito a derivare la negazione della sua conclusione ovvero $\vdash \neg\neg\forall x\ x = x$

     $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}= \text{-ax}\\ \vdash x = \mathbf{x}\end{array}}{\neg\forall\mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x} \vdash}\ \forall{-}\text{D}}{\neg\forall\mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x} \vdash}\ \neg{-}\text{S}}{\vdash \neg\neg\forall\mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x}}\ \neg{-}\text{D}$$

  3. $$\vdash \forall\mathbf{y}\ \forall\mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}$$

     Per vedere se è valido proviamo a derivarlo...

     $$\dfrac{\dfrac{\vdash \mathbf{x{=}y}}{\vdash \forall\mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}}\ \forall{-}\text{D}}{\vdash \forall\mathbf{y}\ \forall\mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}}\ \forall{-}\text{D}$$

     e non trovando derivazione si prova a costruire contromodello di $\mathbf{x{=}y}$.
     Basta prendere un dominio $\mathcal{D} \equiv \{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$ e si ha che siccome $(\mathbf{x} = \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) \equiv \mathbf{0}$ perchè $\mathbf{1} \neq \mathbf{2}$ allora

     $$\vdash \forall\mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}$$

     è **NON valido** e avendo usato regole sicure pure $\vdash \forall\mathbf{y}\ \forall\mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}$ è **NON valido**.

     Poi per vedere se è soddisfacibile si prova a derivare la sua negazione e si trova ad esempio

     $$\dfrac{\dfrac{\forall\mathbf{y}\ \forall\mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}, \mathbf{z} = \mathbf{y} \vdash}{\forall\mathbf{y}\ \forall\mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y} \vdash}\ \forall{-}\text{S}}{\vdash \neg\forall\mathbf{y}\ \forall\mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}}\ \neg{-}\text{D}$$

(sono possibili varie sostituzioni di $\mathbf{x}$ nell'applicazione di $\forall-$S...)
e si prova a costruire contromodello di $\forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x}{=}\mathbf{y}, \mathbf{z}{=}\mathbf{y} \vdash$.
A tal scopo basta dominio $\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{1}\}$ e si ha che `per ogni` $\mathbf{d}, \mathbf{d}' \varepsilon \mathbf{D}$ si ha $(\mathbf{x}{=}\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = \mathbf{1}$, da cui segue che $\vdash \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x}{=}\mathbf{y}$ è **soddisfacibile**, appunto in un dominio con al più un unico elemento!!

4. $\vdash \exists x\ x = c$
5. $\vdash \forall y\ \forall x\ (\ y = z \to x = z\ )$
6. $\vdash \forall y\ \forall x\ \forall z\ (\ x = y \,\&\, y = z\ \ \to\ \ x = z\ )$
7. $\vdash \exists x\, \exists y\, x = y$
8. $\vdash \forall x\ \exists y\ \exists z\ (\ x = y \vee y = z\ )$
9. $\forall w\ \ w = a \vdash \forall x \forall y\, x = y$

- Formalizzare le frasi seguenti e provare se sono validi o meno, e soddisfacibili o meno:

1. L'asserzione

   Il programma fattoriale su 2 dà un'`unico` output.
   Il programma fattoriale su 2 dà output il numero 2.
   Il programma fattoriale su 2 dà output il numero x.
   ―――――――――――――――――――――――――――――――
   Il numero x è uguale 2.

   si può formalizzare in

   $$\exists \mathbf{y}\ \mathbf{O}(\mathbf{y}, \mathbf{f}, \mathbf{2}) \,\&\, \forall \mathbf{y_1}\ \forall \mathbf{y_2}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{y_1}, \mathbf{f}, \mathbf{2}) \,\&\, \mathbf{O}(\mathbf{y_2}, \mathbf{f}, \mathbf{2}) \to \mathbf{y_1}{=}\mathbf{y_2}\ )\,,\ \mathbf{O}(\mathbf{2}, \mathbf{f}, \mathbf{2}),\ \mathbf{O}(\mathbf{x}, \mathbf{f}, \mathbf{2}) \vdash \mathbf{x} = \mathbf{2}$$

   con
   $f{=}$ " il fattoriale"
   $2{=}$ " il numero due"
   $O(x, y, z){=}$ " il programma y su z dà output il numero x"

   Nel seguito usiamo le seguenti abbreviazioni:

   $\mathbf{Q}(\mathbf{x})\ \equiv\ \mathbf{O}(\mathbf{x}, \mathbf{f}, \mathbf{2})$

   $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{Q(2), Q(x) \vdash Q(2), x = 2} \quad \dfrac{\text{ax-id}}{Q(2), Q(x) \vdash Q(x), x = 2}}{Q(2), Q(x) \vdash Q(2) \& Q(x), x = 2}\ \&-\text{D} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-=}}{Q(2), Q(x), 2 = x \vdash 2 = 2}}{Q(2), Q(x), 2 = x \vdash x = 2}\ =-\text{S}}{Q(2), Q(x), Q(2) \& Q(x) \to 2 = x \vdash x = 2}\ \to-\text{S}}{Q(2), Q(x), \forall y_2\ (\ Q(2) \& Q(y_2) \to 2 = y_2\ ) \vdash x = 2}\ \forall-\text{S}v}{Q(2), Q(x), \exists y\ Q(y)\,, \forall y_2\ (\ Q(2) \& Q(y_2) \to 2 = y_2\ ) \vdash x = 2}\ -\text{in}_{sx}}{Q(2), Q(x), \exists y\ Q(y)\,, \forall y_1\ \forall y_2\ (\ Q(y_1) \& Q(y_2) \to y_1 = y_2\ ) \vdash x = 2}\ \forall-\text{S}v}{Q(2), Q(x), \exists y\ Q(y) \,\&\, \forall y_1\ \forall y_2\ (\ Q(y_1) \& Q(y_2) \to y_1 = y_2\ ) \vdash x = 2}\ \&-\text{S}}{\exists y\ Q(y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\ Q(y_1) \& Q(y_2) \to y_1 = y_2\ )\,, Q(2),\ Q(x) \vdash x = 2}\ \text{sc}_{sx}$$

2. L'asserzione

   Franco è venuto ad una sola riunione.
   Franco non è venuto all'ultima riunione.
   Franco è venuto alla riunione del 10 giugno.
   ―――――――――――――――――――――――――――――――
   L'ultima riunione non è quella del 10 giugno.

si può formalizzare in

$$\exists y\ V(f,y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\,V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\,)\,,\ \neg V(f,u),\ V(f,d)\vdash u\neq d$$

ove si consiglia di usare:
V(x,y)= x è venuto alla riunione y
u=ultima riunione
d=riunione del 10 giugno
f=Franco

Il sequente è derivabile in $\mathrm{LC}_=$ ad esempio come segue:

$$
\begin{array}{cl}
\text{ax-id} & \\
\exists y\ V(f,y)\,\&\,\forall y_1\ \forall y_2\ (\,V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\,),\ u=d,\ V(f,u)\vdash V(f,u) & \\
\hline
\exists y\ V(f,y)\,\&\,\forall y_1\ \forall y_2\ (\,V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\,),\ V(f,d), u=d\vdash V(f,u) & =-\mathrm{S} \\
\hline
\exists y\ V(f,y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\,V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\,)\,,\ V(f,d), u=d, \neg V(f,u)\vdash & \neg-\mathrm{S} \\
\hline
\exists y\ V(f,y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\,V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\,)\,,\ \neg V(f,u),\ V(f,d), u=d\vdash & \mathrm{sc}_{sx} \\
\hline
\exists y\ V(f,y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\,V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\,)\,,\ \neg V(f,u),\ V(f,d)\vdash u\neq d & \neg-\mathrm{D}
\end{array}
$$

3\.
Il programma fattoriale su 3 dà come unico output 6.
Il programma fattoriale su 3 dà output il numero x.

Il numero x è uguale a 6.

con
f= “ il fattoriale”
3= “ il numero tre”
6= “ il numero sei”
$O(x,y,z)$= “ il programma y su z dà output il numero x”

4\.
Il programma fattoriale su 2 dà un’`unico` output.
Il programma fattoriale su 2 dà output il numero 2.
Il programma fattoriale su 2 dà output il numero x.

Il numero x è uguale 2.

con
f= “ il fattoriale”
2= “ il numero due”
$O(x,y,z)$= “ il programma y su z dà output il numero x”

5\.
Il programma fattoriale su 2 dà un’`unico` output.
Il programma fattoriale su 2 dà output 2.
2 è diverso da 3

Il programma fattoriale su 2 non dà output 3.

con
f= “ il fattoriale”
2= “ il numero due”
3= “ il numero tre”
$O(x,y,z)$= “ il programma y su z dà output il numero x”

11.4 Sostituzione di una variabile

Diamo di seguito la definizione di sostituzione di un termine t al posto di x in una formula $\texttt{pr(x)}$ di un linguaggio predicativo che indichiamo con la scrittura $\texttt{pr}[x/t]$:

Def. 11.3 Dato un termine t e una formula $\texttt{pr(x)}$ di un linguaggio predicativo definiamo:

$$P_k(t_1,\dots,t_m)[x/t] \equiv P_k(t_1[x/t],\dots,t_m[x/t])$$

$$(\forall y_i\ \texttt{pr})[x/t] \equiv \begin{cases} \forall y_i\ \texttt{pr}[x/t] & \text{se } y_i \neq x \text{ e } x \text{ compare in } \texttt{pr} \\ & \text{e } y_i \text{ NON compare libera in } \ t \\ \forall y_i\ \texttt{pr} & \text{se } y_i \equiv x \quad \text{o} \quad x \text{ non compare in } \texttt{pr} \end{cases}$$

$$(\exists y_i\ \texttt{pr})[x/t] \equiv \begin{cases} \exists y_i\ \texttt{pr}[x/t] & \text{se } y_i \neq x \text{ e } x \text{ compare in } \texttt{pr} \\ & \text{e } y_i \text{ NON compare libera in } \ t \\ \exists y_i\ \texttt{pr} & \text{se } y_i \equiv x \quad \text{o} \quad x \text{ non compare in } \texttt{pr} \end{cases}$$

$$(\texttt{pr}_1\ \&\ \texttt{pr}_2)[x/t] \equiv \texttt{pr}_1[x/t]\ \&\ \texttt{pr}_2[x/t]$$
$$(\texttt{pr}_1 \vee \texttt{pr}_2)[x/t] \equiv \texttt{pr}_1[x/t] \vee \texttt{pr}_2[x/t]$$
$$(\texttt{pr}_1 \rightarrow \texttt{pr}_2)[x/t] \equiv \texttt{pr}_1[x/t] \rightarrow \texttt{pr}_2[x/t]$$
$$(\neg\texttt{pr}_1)[x/t] \equiv \neg\texttt{pr}_1[x/t]$$

MORALE

Quando sostituisci una variabile y al posto di x in un predicato $\texttt{pr(x)}$
controlla che - SE compare $\forall y$ o $\exists y$ in $\texttt{pr(x)}$ -
la sostituzione di x con y NON faccia cadere il nuovo y
sotto il POTERE di $\forall y$ o $\exists y$
ovvero aumenti il numero di occorrenze di y in loro potere!

$$\dfrac{\exists y\ y = y \vdash \nabla}{\forall x\ \exists y\ x = y \vdash \nabla}\ \forall\text{−S} \qquad \text{NOOOOO!!!!}$$

$$\dfrac{\forall y\ y = a \vdash y = z}{\forall y\ y = a \vdash \forall x\ x = z}\ \forall\text{−D} \qquad \text{SI!!!!}$$

Stabilire quali delle seguenti applicazioni di ∀-S o ∃-D sono lecite

1. È lecita la seguente applicazione di ∀-S

$$\dfrac{\forall y\ \exists x\ x < y + z, \qquad \exists x\ x < x + z \vdash \nabla}{\forall y\ \exists x\ x < y + z \vdash \nabla}\ \forall\text{−S}$$

   ??

   NO, perchè la sostituzione di y con x NON è lecita perchè aumenta il potere di azione di $\exists x$

2. È lecita la seguente applicazione di ∀-S

$$\dfrac{\forall y\ \exists x\ x < y + z, \qquad \exists x\ x < z + z \vdash \nabla}{\forall y\ \exists x\ x < y + z \vdash \nabla}\ \forall\text{−S}$$

   ??

   SÌ perchè è lecita la sostituzione.

3. È lecita la seguente applicazione di ∀-D

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ x < z + z}{\Gamma \vdash \forall y\ \exists x\ x < y + z}\ \forall\text{−D}$$

??

NO perchè z è libera nel sequente conclusione.

4. È lecita la seguente applicazione di ∀-D

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ x < x + z}{\Gamma \vdash \forall y\ \exists x\ x < y + z}\ \forall\text{−D}$$

??

NO perchè la sostituzione di y con x NON è lecita in quanto aumenta il potere di azione dell' $\exists x$.

5. È lecita la seguente applicazione di ∀-D

$$\frac{\forall y\ C(y) \vdash \exists x\ x < y + z}{\forall y\ C(y) \vdash \forall w\ \exists x\ x < w + z}\ \forall\text{−D}$$

??

Sì perchè la variabile y NON è libera nel sequente conclusione.

11.5 Regole derivate

Una regola

$$\frac{\Gamma'\vdash D'}{\Gamma\vdash D}\ regola*$$

si dice **regola derivata** nella logica $\mathrm{LC}_=$ se
supposti i suoi sequenti premessa derivabili in $\mathrm{LC}_=$,
ovvero data una derivazione

$$\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma'\vdash D'\end{array}$$

allora la derivazione ottenuta applicando la regola

$$\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \dfrac{\Gamma'\vdash D'}{\Gamma\vdash D}\ regola*\end{array}$$

si può ESPANDERE in una derivazione di $\Gamma\vdash D$ a partire da π in $\mathrm{LC}_=$ SENZA ispezionare le derivazioni dei sequenti premessa.
Ciò significa che una *regola derivata* è localmente trasformabile in un pezzo di albero di derivazione usando interamente regole di $\mathrm{LC}_=$.

Esempi di regole derivate

Per esercizio si mostri che le seguenti sono regole derivate:

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{tra}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

11.5.1 Per velocizzare derivazioni: regole di indebolimento

$$\frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

Queste regole sono valide, ma non altrettanto le loro inverse, perchè?

11.6 Validità = derivabilità in $\mathbf{LC}_=$

Il fatto che tutte le **regole di $\mathbf{LC}_=$** sono **valide** rispetto alla semantica dei modelli classici ci fa dedurre che i sequenti derivabili sono validi rispetto alla semantica classica dei modelli. Ma vale pure il viceversa:

Theorem 11.4 (validità + completezza di LC rispetto a modelli)

$$\boxed{\begin{array}{c} \textbf{teoremi in LC}_= \\ = \\ \textbf{tautologie predicative classiche} \end{array}}$$

Ovvero tutte le **tautologie** della semantica classica, ovvero tutte le formule **valide** in ogni modello, sono **teoremi** di $\mathbf{LC}_=$, ovvero formule derivabili in $\mathbf{LC}_=$.

11.6.1 ATTENZIONE: NON Esiste procedura di decisione per LC o $\mathbf{LC}_=$

Le regole COLPEVOLI dell' assenza di un processo decisione per **LC** e per $\mathbf{LC}_=$ sono

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

oltrechè la regola $= -$S, poichè nel cercare una derivazione di un sequente radice dal basso verso l'altro $\Uparrow$ **può aumentare complessità** dei segni, mentre nel caso **proposizionale**, ovvero senza quantificatori nell'andare in sù $\Uparrow$ alla ricerca di una derivazione di un sequente radice **la complessità dei segni diminuiva per ogni regola riguardante un connettivo** escluso le regole di scambio.

Ad **esempio** nel cercare una derivazione dalla radice verso l'alto $\Uparrow$ applicando le regole sopra **può aumentare complessità** dei segni aggiungendo sempre più termini come segue, e non è detto che si riesca a capire se si può raggiungere o meno un assioma senza provare a fare un contromodello che ci conviene trovare PRIMA dell'applicazione del $\forall-$S:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\Gamma, A(t), A(s), A(u), \forall x\ A(x) \vdash \nabla}}{\Gamma, A(t), A(s), \forall x\ A(x), A(u) \vdash \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}}{\Gamma, A(t), A(s), \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}}{\Gamma, A(t), \forall x\ A(x), A(s) \vdash \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}}{\Gamma, A(t), \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}}{\cfrac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}$$

11.6.2 Perchè modelli sono basati su dominio non vuoto

Osserviamo che il sequente

$$\vdash \exists \mathbf{x}\ \mathbf{x}{=}\mathbf{x}$$

è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ per esempio in tal modo

$$\cfrac{\cfrac{= \text{-ax}}{\vdash y{=}y}}{\vdash \exists x\ x{=}x}\ \exists-\mathrm{re}$$

Questa derivazione ci porta a concludere che per dimostrare in OGNI MODELLO su un dominio **D** che $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{x}{=}\mathbf{x}$ vale occorre ASSUMERE che esista almeno un $\mathbf{d} \varepsilon \mathbf{D}$, che poi verifica banalmente che $\mathbf{d} = \mathbf{d}$, e quindi occorre che il dominio sia NON vuoto.

11.7 Consigli su ricerca validità e formalizzazione

Nell'intento di cercare una derivazione è meglio:

applicate PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e ∀-D e ∃-S
se non si riesce a derivare il sequente a causa di una foglia non assioma che non si riesce a chiudere (ovvero non si riesce a farla diventare nodo di un ramo con assiomi come foglie), conviene costruire il contromodello falsificando il sequente che si trova lungo il ramo che finisce nella foglia non assioma PRIMA di un'applicazione di ∀-S o ∃-D
Se si confida di poter derivare il sequente si possono abbreviare le derivazioni con le regole di indebolimento
NON USARE regole NON SICURE per costruire contromodelli

11.7.1 Esercizio svolto seguendo i consigli dati

Esercizio *Stabilire validità e soddisfacibilità o meno della formalizzazione dell'asserzione*:

$$\dfrac{\begin{array}{l}\textbf{Se gli studenti hanno coscienza di rispettare il silenzio allora ogni richiamo è superfluo.}\\ \textbf{Se gli studenti non hanno coscienza di rispettare il silenzio allora ogni richiamo è inefficace.}\end{array}}{\textbf{Ogni richiamo è superfluo o inefficace.}}$$

ove si consiglia di usare:
S(x)=x è studente
C(x)=x ha coscienza di rispettare il silenzio
R(x)=x è un richiamo
E(x)= x è efficace
P(x)=x è superfluo

Soluzione Il sequente si può formalizzare così:

$$\begin{array}{r}\forall \mathbf{x}\,(\mathbf{S(x)} \to \mathbf{C(x)}) \to \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{R(x)} \to \mathbf{P(x)})\ ,\ \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{S(x)} \to \neg\mathbf{C(x)}) \to \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{R(x)} \to \neg\mathbf{E(x)})\\ \vdash \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{R(x)} \to \mathbf{P(x)}\vee\neg\mathbf{E(x)}\ )\end{array}$$

Seguiamo lo schema in sezione 11.1 per stabilire la sua validità e iniziamo a cercare una sua derivazione in tal modo:

usiamo a tal scopo le seguenti abbreviazioni

$\mathbf{pr_1} \equiv \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{S(x)} \to \mathbf{C(x)})$
$\mathbf{pr_2} \equiv \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R(x)} \to \mathbf{P(x)})$
$\mathbf{pr_3} \equiv \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{S(x)} \to \neg\mathbf{C(x)})$
$\mathbf{pr_4} \equiv \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R(x)} \to \neg\mathbf{E(x)})$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{R(x)},\mathbf{E(x)},\mathbf{S(w)},\mathbf{C(w)},\mathbf{S(z)} \vdash \mathbf{C(z)},\mathbf{P(x)}}{\mathbf{R(x)},\mathbf{E(x)},\mathbf{S(w)},\mathbf{C(w)} \vdash \mathbf{S(z)} \to \mathbf{C(z)},\mathbf{P(x)}}\ \to\!-\mathrm{D}}{\mathbf{R(x)},\mathbf{E(x)},\mathbf{S(w)},\mathbf{C(w)} \vdash \mathbf{pr_1},\mathbf{P(x)}}\ \forall\!-\mathrm{D} \qquad \mathbf{R(x)},\mathbf{E(x)},\mathbf{S(w)},\mathbf{C(w)},\mathbf{pr_2} \vdash \mathbf{P(x)}}{\mathbf{R(x)},\mathbf{E(x)},\mathbf{S(w)},\mathbf{C(w)},\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2} \vdash \mathbf{P(x)}}\ \to\!-\mathrm{S}}{\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2},\mathbf{R(x)},\mathbf{E(x)},\mathbf{S(w)},\mathbf{C(w)} \vdash \mathbf{P(x)}}\ \mathrm{sc}_{sx}}{\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2},\mathbf{R(x)},\mathbf{E(x)},\mathbf{S(w)} \vdash \neg\mathbf{C(w)},\mathbf{P(x)}}\ \neg\!-\mathrm{D}}{\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2},\mathbf{R(x)},\mathbf{E(x)} \vdash \mathbf{S(w)} \to \neg\mathbf{C(w)},\mathbf{P(x)}}\ \to\!-\mathrm{D}}{\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2},\mathbf{R(x)},\mathbf{E(x)} \vdash \mathbf{pr_3},\mathbf{P(x)}}\ \forall\!-\mathrm{D} \qquad \mathbf{seq}}{\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2},\mathbf{R(x)},\mathbf{E(x)},\mathbf{pr_3} \to \mathbf{pr_4} \vdash \mathbf{P(x)}}\ \to\!-\mathrm{S}}{\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2},\mathbf{pr_3} \to \mathbf{pr_4},\ \mathbf{R(x)},\mathbf{E(x)} \vdash \mathbf{P(x)}}\ \mathrm{sc}_{sx}}{\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2},\mathbf{pr_3} \to \mathbf{pr_4},\ \mathbf{R(x)} \vdash \neg\mathbf{E(x)},\mathbf{P(x)}}\ \neg\!-\mathrm{D}}{\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2},\mathbf{pr_3} \to \mathbf{pr_4},\ \mathbf{R(x)} \vdash \mathbf{P(x)},\neg\mathbf{E(x)}}\ \mathrm{sc}_{dx}}{\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2},\mathbf{pr_3} \to \mathbf{pr_4},\ \mathbf{R(x)} \vdash \mathbf{P(x)}\vee\neg\mathbf{E(x)}}\ \vee\!-\mathrm{D}}{\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2},\mathbf{pr_3} \to \mathbf{pr_4} \vdash \mathbf{R(x)} \to \mathbf{P(x)}\vee\neg\mathbf{E(x)}}\ \to\!-\mathrm{D}}{\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2},\mathbf{pr_3} \to \mathbf{pr_4} \vdash \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R(x)} \to \mathbf{P(x)}\vee\neg\mathbf{E(x)}\ )}\ \forall\!-\mathrm{D}$$

ove $\mathbf{seq} \equiv \mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2},\mathbf{R(x)}\ ,\ \mathbf{E(x)},\ \mathbf{pr_4} \vdash \mathbf{P(x)}$
e inoltre il primo $\forall-$D si può applicare perchè x non è libera nel sequente radice, mentre l'altro $\forall-$D si può applicare perchè w non è libera nel sequente $\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2},\mathbf{R(x)},\mathbf{E(x)} \vdash \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{S(x)} \to \neg\mathbf{C(x)}),\mathbf{P(x)}$ e l'ultimo $\forall-$D si può applicare perchè z non è libera nel sequente $\mathbf{R(x)},\mathbf{E(x)},\mathbf{S(w)},\mathbf{C(w)} \vdash \mathbf{pr_1},\mathbf{P(x)}$.

Ora la foglia più a sinistra non è un assioma e non si può applicare altro. Chiaramente questo dice che il sequente NON è valido perchè abbiamo applicato solo regole sicure.

Quindi costruiamo un modello dove sia falsa la foglia

$$\mathbf{R(x), E(x), S(w), C(w), S(z) \vdash C(z), P(x)}$$

Dato che l'interpretazione di questo sequente foglia in un dominio $\mathbf{D}$ è una funzione

$$(((\mathbf{R(x)\&E(x))\&S(w))\&C(w))\&S(z) \rightarrow C(z) \vee P(x)}\ )^{\mathbf{D}} : \mathbf{D \times D \times D} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

per far sì che non sia la funzione costante $\mathbf{1}$ basta trovare una terna $(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}, \mathbf{d_3})$ in $\mathbf{D \times D \times D}$ da sostituire al posto di w, x, z che renda falsa l'implicazione, ovvero per cui risulti

$$(((\mathbf{R(x)\&E(x))\&S(w))\&C(w))\&S(z) \rightarrow C(z) \vee P(x)}\ )^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}, \mathbf{d_3}) = \mathbf{0}$$

Basta porre

$$\mathbf{D} = \{\mathbf{Licia}, \mathbf{Mario}, \mathbf{Betti}\}$$

in modo che valga, usando sempre x come variabile per ogni predicato sopra (che ha solo una variabile libera)

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = \mathbf{0} & \mathbf{R(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = \mathbf{1} & \mathbf{E(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{S(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = 1 & \mathbf{C(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = 1 & \\ \mathbf{S(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = 1 & \mathbf{C(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = 0 & \end{array}$$

(questo non dice cosa fa ogni predicato su **Mario**, **Licia** e **Betti** ma queste sono informazioni sufficienti per falsificare il sequente...)

Poi si definisca i rimanenti valori a piacere

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) =?? & \mathbf{P(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) =?? \\ \mathbf{R(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) =?? & \mathbf{P(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) =?? \\ \mathbf{E(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) =?? & \mathbf{E(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) =?? \\ \mathbf{S(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) =?? & \mathbf{S(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) =?? \end{array}$$

ovvero si fissi al posto dei punti di domanda un valore a piacere (in questo modo il modello è completamente determinato!).

Nel modello risulta banalmente che

$$(((\mathbf{R(x)\&E(x))\&S(w))\&C(w))\&S(z) \rightarrow C(z) \vee P(x)}\ )^{\mathbf{D}}(\mathbf{Licia}, \mathbf{Mario}, \mathbf{Betti}) = \mathbf{0}$$

Ora si noti che **Mario** è la causa per cui nel modello risulta falso

$$\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R(x)} \rightarrow \mathbf{P(x)} \vee \neg \mathbf{E(x)}\ )$$

perchè rende vero $\mathbf{R(x)}$ ma non $\mathbf{P(x)}$ e nemmeno $\neg\mathbf{E(x)}$.

Poi si noti che **Licia** è la causa per cui nel modello risulta falso

$$\mathtt{pr}_3 \equiv \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{S(x)} \rightarrow \neg \mathbf{C(x)})$$

in quanto verifica $\mathbf{S(x)}$ ma non $\neg\mathbf{C(x)}$. Dunque nel modello risulta vera l'implicazione

$$\mathbf{pr_3} \rightarrow \mathbf{pr_4}$$

essendo l'antecedente dell'implicazione falso nel modello.

Infine si noti che **Betti** è la causa per cui nel modello risulta falso

$$\mathtt{pr_1} \equiv \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{x}))$$

in quanto verifica $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ ma non $\mathbf{C}(\mathbf{x})$. Dunque nel modello risulta vera l'implicazione

$$\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2}$$

essendo l'antecedente dell'implicazione falso nel modello.

Dunque il sequente iniziale

$$\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2}, \mathbf{pr_3} \rightarrow \mathbf{pr_4} \vdash \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )$$

è **NON valido**.

Per vedere se è soddisfacibile, possiamo applicare la procedura derivando

$$\vdash \neg(\ (\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2}) \& (\mathbf{pr_3} \rightarrow \mathbf{pr_4})\ \rightarrow\ \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )\ )$$

e vediamo che

$$\dfrac{\dfrac{\vdash (\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2}) \& (\mathbf{pr_3} \rightarrow \mathbf{pr_4}) \qquad \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ ) \vdash}{(\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2}) \& (\mathbf{pr_3} \rightarrow \mathbf{pr_4})\ \rightarrow\ \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )\ ) \vdash}\ \rightarrow\!-\mathrm{S}}{\vdash \neg(\ (\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2}) \& (\mathbf{pr_3} \rightarrow \mathbf{pr_4})\ \rightarrow\ \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )\ )}\ \neg\!-\mathrm{D}$$

Consideriamo la foglia di destra e secondi i consigli in 11.7 ci fermiamo senza applicare la regola $\forall-$S e cerchiamo di trovare un modello in cui $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )$ è vera.

A tal fine, essendo una quantificazione universale basta porre l'interpretazione della funzione

$$(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D}} : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

come funzione costante $\mathbf{1}$. A tal scopo, basta scegliere un dominio $\mathbf{D}$ non vuoto qualsiasi e porre o la premessa sempre a $\mathbf{0}$, o la conclusione sempre a $\mathbf{1}$. Scegliamo la prima ovvero poniamo

$$\textit{per ogni}\ \mathbf{d} \in \mathbf{D} \qquad \mathbf{R}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

e in tal caso *per ogni* $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ $(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ e dunque

$$(\ \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )\ )^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$$

Dunque il sequente è **soddisfacibile** in tal modello.

11.7.2 esercizio su regole valide svolto

Si stabilisca se la regola

$$\dfrac{\Gamma \vdash A(x) \vee \perp, \nabla}{\Gamma \vdash \forall x\ A(x), \nabla}\ *$$

è sicura, ovvero valida con la sua inversa.

Questa regola è chiaramente NON valida perchè permette una quantificazione universale senza condizioni sulle variabili. Allora riprendiamo quanto mostrato in sezione 11.0.1 e vediamo che possiamo derivare il seguente sequente

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{A(x)\vdash A(x),\perp}\end{array}}{\mathbf{A(x)\vdash A(x)\vee\perp}}\ \vee-\mathrm{D}}{\mathbf{A(x)\vdash\forall x\ A(x)}}\ *}{\mathbf{\exists x\ A(x)\vdash\forall x\ A(x)}}\ \exists-\mathrm{S}$$

ove la prima applicazione di $\exists-$S è corretta perchè x non è libera nel sequente radice e nella seconda si applica la regola data.

Ora per quanto mostrato in sezione 11.1.2 il sequente

$$\exists x\ A(x)\vdash\forall x\ A(x)$$

NON è valido e dunque una delle regole sopra usate per derivarlo NON è valida. Siccome abbiamo usato la regola $\exists-$S in modo corretto e questa è pure valida assieme alla regola $\vee-$D, l'unica regola che è NON valida è proprio la regola $*$.

Ora vediamo che la *regola inversa* **inv**$*$ di

$$\frac{\Gamma\vdash A(x)\vee\perp,\nabla}{\Gamma\vdash\forall x\ A(x),\nabla}\ *$$

ovvero

$$\frac{\Gamma\vdash\forall x\ A(x),\nabla}{\Gamma\vdash A(x)\vee\perp,\nabla}\ \mathrm{inv}-*$$

è **valida**. Lo proviamo nel caso in cui $\mathbf{\Gamma}$ e $\mathbf{\Delta}$ siano entrambi composti da una sola formula (che è equivalente al caso in cui sono composti da più formule perchè è sempre possibile trasformare la virgola a sinistra come & e quella a destra come $\vee$) e siano dipendenti sia da $\mathbf{x}$ che da $\mathbf{y}$ dato che restringersi alle proposizioni senza variabili potrebbe semplificare un pò troppo come visto per la non validità della regola. Questo caso rappresenta il caso più generale perchè trattare la presenza di più variabili oltre ad $\mathbf{x}$ è equivalente a trattare un'unica variabile y oltre ad x. Dunque supponiamo

$$\mathbf{\Gamma}\ \equiv\ \mathbf{B(x,y)} \qquad\qquad \mathbf{\Delta}\ \equiv\ \mathbf{C(x,y)}$$

Ora mostriamo che la regola conserva la soddisfacibilità in un modello. Fissiamo un modello $\mathcal{D}$ e supponiamo che renda vero $\mathbf{\Gamma\vdash\forall x\ A(x)},\nabla$.

L'ipotesi equivale ad assumere che

$$(\,\mathbf{B(x,y)}\to\forall\mathbf{x}\ \mathbf{A(x)}\ \vee\ \mathbf{C(x,y)}\,)^{\mathcal{D}}(-,-):\mathcal{D}\times\mathcal{D}\ \longrightarrow\ \{\mathbf{0},\mathbf{1}\,\}$$

è la funzione costante $\mathbf{1}$.
Mostriamo ora che è valido pure $\mathbf{\Gamma\vdash A(x)}\vee\perp,\nabla$ ovvero la funzione interpretante

$$\mathbf{B(x,y)\vdash A(x)}\vee\perp,\mathbf{C(x,y)}$$

che è

$$(\,\mathbf{B(x,y)}\to(\,\mathbf{A(x)}\vee\perp)\vee\mathbf{C(x,y)}\,)^{\mathcal{D}}(-,-):\mathcal{D}\times\mathcal{D}\ \longrightarrow\ \{\mathbf{0},\mathbf{1}\,\}$$

Ora presi $\mathbf{d_1},\mathbf{d_2}$ a piacere in $\mathcal{D}$ si ha che se $\mathbf{B(x,y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2})=\mathbf{0}$ allora

$$(\,\mathbf{B(x,y)}\to(\,\mathbf{A(x)}\vee\perp)\vee\mathbf{C(x,y)}\,)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2})=\mathbf{1}$$

mentre se $\mathbf{B(x,y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ allora per ipotesi si ha che $(\,\forall\mathbf{x}\ \mathbf{A(x)} \vee \mathbf{C(x,y)}\,)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$.
Ora si hanno due casi:
I caso: $\mathbf{C(x,y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ e quindi si conclude

$$(\,\mathbf{B(x,y)} \rightarrow (\,\mathbf{A(x)} \vee \perp\,) \vee \mathbf{C(x,y)}\,)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

II caso: $(\forall\mathbf{x}\ \mathbf{A(x)}\,)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ ovvero $(\forall\mathbf{x}\ \mathbf{A(x)}\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, e quindi vale pure $\mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}) = \mathbf{1}$ (si noti che la variabile $\mathbf{x}$ corrisponde alla prima componente della funzione in $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$) e dunque

$$(\,\mathbf{B(x,y)} \rightarrow (\,\mathbf{A(x)} \vee \perp\,) \vee \mathbf{C(x,y)}\,)^{\mathcal{D}}(-,-)(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

In conclusione avendo ispezionato la verità su una coppia $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}$ a piacere si conclude che il sequente conclusione è vero nel modello $\mathbf{D}$.

Ciò significa che la regola inversa della regola $*$ conserva la soddisfacibilità in un qualsiasi modello ed è quindi **valida**.