14. come interpretare unicità? con l'uguaglianza

Problema: vogliamo formalizzare in logica classica

" Il programma fattoriale su input 2 dà un'unico output."

con
$O(x, y, z)$= il programma y su input z dà output il numero x
f=il programma fattoriale
2= due

oppure
" Certi potenti pensano solo a se stessi"

con
O(x)= x è potente
P(x,y)=x pensa a y

soluzione: estendiamo il linguaggio predicativo con il simbolo di uguaglianza fra generici termini t, s

$$t = s$$

la cui interpretazione in un fissato dominio $\mathcal{D}$ è ottenuta per sostituzione da

$$(x = y)^D(-) : D^2 \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x = y^D(d_1, d_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } d_1 = d_2 \\ 0 & \text{se } d_1 \neq d_2 \end{cases}$$

esempio: supposto $t \equiv c_1$ e $s \equiv c_2$ costanti allora

$$(t = s)^{\mathcal{D}} \equiv (x = y)^D(c_1^{\mathcal{D}}, c_2^{\mathcal{D}})$$

regole dell'uguaglianza

$$\begin{array}{c} = -\text{ax} \\ \Gamma \vdash t = t, \Delta \end{array} \qquad\qquad \frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\text{S}$$

Come usare le regole di uguaglianza?

Nella regola

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\text{S}$$

dall'alto verso il basso: NON TUTTE le occorrenze di t DEVONO essere rimpiazzate con s
dal basso verso l'alto: NON TUTTE le occorrenze di s DEVONO essere rimpiazzate con t.

Esempio 1: Se vogliamo derivare la simmetria dell'uguaglianza

$$t = s \vdash s = t$$

in $\text{LC}_=$ occorre applicare la regola $= -\text{S}$ in tal modo:
si identifichi

$$\Sigma \equiv \emptyset \qquad \Gamma(x) \equiv \emptyset \qquad \Delta(x) \equiv x = t \qquad \nabla \equiv \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(t) \equiv t = t \qquad \Delta(s) \equiv s = t$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\dfrac{\dfrac{=-\mathrm{ax}}{t = s \vdash t = t}}{t = s \vdash s = t} = -\mathrm{S}$$

Esempio 2: Se vogliamo derivare la transitività dell'uguaglianza

$$t = u, u = s \vdash t = s$$

in $\mathrm{LC}_=$ occorre applicare la regola $= -\mathrm{S}$ in tal modo:
si identifichi

$$\Sigma \equiv t = u \qquad \Gamma(x) \equiv \emptyset \qquad \Delta(x) \equiv t = x \qquad \nabla \equiv \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(u) \equiv t = u \qquad \Delta(s) \equiv t = s$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{ax-id}}{u = s, t = u \vdash t = u}}{t = u, u = s \vdash t = s} = -\mathrm{S}$$

Esercizi su uguaglianza

- Nell'estensione di LC con uguaglianza stabilire se sono validi o meno, o soddisfacibili o meno i seguenti sequenti:
  1. $\vdash \forall x\ x = x$
  2. $\vdash \exists x\ x = c$
  3. $\vdash \forall x\ x = x \rightarrow \exists x\ A(x)$
  4. $\vdash \forall y\ \forall x\ (\ y = z \rightarrow x = z\ )$
  5. $\vdash \forall y\ \forall x\ \forall z\ (\ x = y \,\&\, y = z\ \rightarrow\ x = z\ )$
- Formalizzare le frasi seguenti e provare se sono validi o meno, e soddisfacibili o meno:
  1. Il programma fattoriale su 3 dà come unico output 6.
     Il programma fattoriale su 3 dà output il numero x.
     ―――――――――――――――――――――
     Il numero x è uguale a 6.
     con
     f= " il fattoriale"
     3= " il numero tre"
     6= " il numero sei"
     $O(x, y, z)$= " il programma y su z dà output il numero x"
  2. Il programma fattoriale su 2 dà un'`unico` output.
     Il programma fattoriale su 2 dà output il numero 2.
     Il programma fattoriale su 2 dà output il numero x.
     ―――――――――――――――――――――
     Il numero x è uguale 2.
     con
     f= " il fattoriale"

2= " il numero due"
3= " il numero tre"
$O(x, y, z)$= " il programma y su z dà output il numero x"

3.
$$\frac{\begin{array}{l}\text{Il programma fattoriale su 2 dà un'}\texttt{unico}\text{ output.}\\ \text{Il programma fattoriale su 2 dà output 2.}\\ \text{2 è diverso da 3}\end{array}}{\text{Il programma fattoriale su 2 non dà output 3.}}$$

con
f= " il fattoriale"
2= " il numero due"
3= " il numero tre"
$O(x, y, z)$= " il programma y su z dà output il numero x"

4.
$$\frac{\begin{array}{l}\text{Il programma fattoriale su 2 dà un'}\texttt{unico}\text{ output.}\\ \text{Il programma fattoriale su 2 dà output 2.}\end{array}}{\text{Il programma fattoriale su 2 non dà output 3.}}$$

con
f= " il fattoriale"
3= " il numero due"
2= " il numero tre"
$O(x, y, z)$= " x è output del programma y su z"

5.
$$\frac{\begin{array}{l}\text{Franco è venuto ad una sola riunione.}\\ \text{Franco non è venuto all'ultima riunione.}\\ \text{Franco è venuto alla riunione del 10 giugno.}\end{array}}{\text{L'ultima riunione non è quella del 10 giugno.}}$$

ove si consiglia di usare:
V(x,y)= x è venuto alla riunione y
u=ultima riunione
d=riunione del 10 giugno
f=Franco

- Mostrare se le seguenti regole dell'uguaglianza sono valide e sicure:

$$\frac{\Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash s = t}\ 1 \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash t = s \quad \Gamma \vdash s = u}{\Gamma \vdash t = u}\ 2$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash t = u}\ 3$$

15. Simboli di funzione e Teoria dell'aritmetica di Peano

Problema: in quali modi possiamo formalizzare

"Ogni uomo ha come antenato suo padre"

??
Una possibilità è usare i seguenti simboli predicativi
$U(x)$= "x è un uomo"
$A(y,x)$= "y è antenato di x"
$P(y,x)$= "y è padre di x"

Ma visto che il padre è unico si può introdurre un simbolo $p(x)$ per la funzione (parziale)

$$p(x) = \text{ padre di } x$$

e in tal caso come si formalizza la frase sopra???

Definizione di linguaggio predicativo con simboli di funzione: i `termini` di un linguaggio predicativo con uguaglianza $\mathcal{L}$ risultano comprendere:

- *costanti* per termini : c_j in numero a piacere
- *funzioni* tra termini: $f_k(x_1, \ldots x_n)$ in numero a piacere
- *predicati atomici* : $P_k(x_1, \ldots x_m)$ in numero a piacere

e per definire un modello $\mathcal{D}$ per $\mathcal{L}$ interpretiamo una *funzione tra termini* come *funzione tra domini*

$$f_k(x_1, \ldots, x_n)^{\mathcal{D}}(-, \ldots, -) : \ \mathcal{D}^n \ \longrightarrow \ \mathcal{D}$$

Un esempio di linguaggio predicativo con uguaglianza e simboli di funzione è quello usato per definire la *teoria dell'aritmetica di Peano.*

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $\mathrm{LC}_=$ le seguenti regole

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

e i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x \ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x \ \forall y \ (\ s(x) = s(y) \rightarrow x = y \ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x \ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x \ \forall y \ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x \ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x \ \forall y \ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0) \& \forall x \ (\ A(x) \rightarrow A(s(x)) \ ) \rightarrow \forall x \ A(x)$$

In tale teoria il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \ \equiv \ \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \ \equiv \ s(0)$$

$$2 \equiv s(\, s(0)\,)$$

Nel linguaggio dell'aritmetica di Peano i simboli di funzione sono:
il simbolo di successore $\mathsf{s}(x)$ interpretato nel modello dei naturali come

$$\mathsf{s}(x)^{Nat}(-) : Nat \longrightarrow Nat \qquad\qquad \mathsf{s}(x)^{Nat}(n) \equiv n+1$$

il simbolo di somma $x{+}y$ interpretato nel modello dei naturali come

$$(x{+}y)^{Nat}(-,-) : Nat \times Nat \longrightarrow Nat \qquad\qquad (x{+}y)^{Nat}(n,m) \equiv n+m$$

e il simbolo di moltiplicazione $x{\cdot}y$

$$(x{\cdot}y)^{Nat}(-,-) : Nat \times Nat \longrightarrow Nat \qquad\qquad (x{\cdot}y)^{Nat}(n,m) \equiv n \cdot m$$

Esercizi su uguaglianza e aritmetica

- mostrare che in logica classica con uguaglianza sono validi i sequenti seguenti:

$$\begin{array}{c}\text{cf}^*\\ \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u)\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{cp}^*\\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u)\end{array}$$

- Mostrare che nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi:

1. (4 punti) $\vdash \forall x\ (\ s(x) = s(5) \rightarrow x = 5\ )$
2. (4 punti) $\vdash 0 = 4 \cdot 0$
3. (4 punti) $\vdash \forall x\ (\ x = 7 \rightarrow s(x) = s(7)\ )$
4. (7 punti) $\vdash 1 + 2 = 3$
5. (7 punti) $\vdash 5 \cdot 1 = 5$
6. (10 punti) $\vdash \forall x\ s(x) \neq x$
7. (10 punti) $\vdash \forall x \exists y\ x \neq y$

16. Induzione e teorie nel linguaggio comune

- $\vdash \forall x\ 0 + x = x$ è valido in PA?

- il sequente $\vdash \exists y\ \exists x\ x \neq y$ è valido in $LC_=$? è soddisfacibile se non è valido?

- il sequente $\vdash \exists y\ \exists x\ x \neq y$ è valido in PA??

- (esempio di teoria da vita comune)

  Sia T_g la teoria ottenuta dalla formalizzazione dei seguenti assiomi

  - " Se Claudia non va in gita allora Giovanni ci va."
  - " Beppe non va in gita se e solo se ci va Giovanni."
  - " Beppe va in gita se Claudia non va in gita."
  - " Non tutti vanno in gita."

  ove $G(x)$= x va in gita
  g=Giovanni, c=Claudia, b= Beppe

  Si verifichi se valgono in T_g

  - " Qualcuno non va in gita."
  - " Se Giovanni non va in gita allora Beppe ci va."
  - " Se Claudia non va in gita allora Beppe non ci va."
  - " Claudia va in gita."
  - " Non si dà il caso che nessuno vada in gita."

Logica classica con uguaglianza- $\mathbf{LC}_=$

$$\begin{array}{cc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \to -\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to -\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S} \qquad \begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \Gamma \vdash t = t, \Delta \end{array}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $\mathrm{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx}, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x \; s(x) \neq 0$$

$$Ax2. \vdash \forall x \; \forall y \; (\; s(x) = s(y) \rightarrow x = y \;)$$

$$Ax3. \vdash \forall x \quad x + 0 = x$$

$$Ax4. \vdash \forall x \; \forall y \; x + s(y) = s(x + y)$$

$$Ax5. \vdash \forall x \; x \cdot 0 = 0$$

$$Ax6. \vdash \forall x \; \forall y \; x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$

$$Ax7. \vdash A(0) \& \forall x \; (\; A(x) \rightarrow A(s(x)) \;) \rightarrow \forall x \; A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \; \equiv \; \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \; \equiv \; s(0)$$

$$2 \; \equiv \; s(\, s(0) \,)$$

ESERCIZI ULTIMA PARTE

- Da guardare con attenzione! Potenziali errori -

FORMALIZZAZIONE (slides p 578 - 580)

- Il programma fattoriale su 2 da' <u>unico</u> output

  F = Il fattoriale

  $O(x,y,z)$ = x e' output del programma y su x

  $\exists x(O(x,F,2) \,\&\, \forall y(O(y,F,2) \rightarrow x=y))$

  $\exists x\, O(x,F,2) \,\&\, \forall x_1 \forall x_2 (O(x_1,F,2) \,\&\, O(x_2,F,2) \rightarrow x_1=x_2)$

- Certi potenti pensano solo a se stessi.

  $O(x)$ = x e' potente

  $P(x,y)$ = x pensa a y

  $\exists x(O(x) \,\&\, \forall y(P(x,y) \rightarrow x=y))$

- Certi potenti pensanano a se stessi e soltanto a se stessi

  $\exists x(O(x) \,\&\, P(x,x) \,\&\, \forall y(P(x,y) \rightarrow x=y))$

PEANO

- Derivare: $\vdash 1+0=1$, sapendo che $1=S(0)$ slide p. 629

VALIDO!

$$\dfrac{\overset{Ax\,3}{\vdash \forall x\; x+0=0} \qquad \dfrac{\dfrac{S(0)+0=S(0) \vdash S(0)+0=S(0)}{\forall x\; x+0=x \vdash S(0)+0=S(0)}\;\text{ax-id}\;\; \forall\text{-re}}{}}{\vdash S(0)+0=S(0)}\;\text{comp sx}$$

- Derivare: $\vdash 5+1=6$ slide p. 631

Valida

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Ax 3} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{5+0=5,\ 5+S(0)=S(5+0) \vdash 5+S(0)=S(5+0)}}{5+S(0)=S(5+0),\ 5+0=5 \vdash 5+S(0)=S(5)}\ -S}{5+S(0)=S(5+0),\ \forall x(x+0=x) \vdash 5+S(0)=S(5)}\ \forall\text{-re}}{5+S(0)=S(5+0) \vdash 5+S(0)=S(5)}\ \text{Comp sx}}{\dfrac{\dfrac{\forall y\ 5+S(y)=S(5+y) \vdash 5+1=6}{\forall x \forall y\ x+S(y)=S(x+y) \vdash 5+1=6}\ \forall\text{-re}}{}\ \forall\text{-re}}$$

$$\dfrac{\text{Ax 4} \qquad \forall x \forall y\ x+S(y)=S(x+y) \vdash 5+1=6}{\vdash 5+1=6}\ \text{Comp sx}$$

Esercizi 14

1

1. $\forall x\ (x=x)$

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash x=x}\ \text{ax}}{\vdash \forall x\ (x=x)}\ \forall\text{-D} \quad x \text{ non libera}$$

2. $\exists x\ (x=c)$

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash c=c}\ \text{ax}}{\vdash \exists x\ (x=c)}\ \exists\text{-re}$$

3. $\forall x\ x=x \rightarrow \exists x\ A(x)$

Contromodello

$\mathcal{D}=\{1\}$ $\qquad A(x)=0$

$\top \rightarrow \bot \rightarrow$ non-valida

Modello

$\mathcal{D}=\{1\}$ $\qquad A(x)=1$

$\top \rightarrow \top \rightarrow$ soddisfacibile

4. $\forall y \forall x\ (y=z \rightarrow x=z)$

Modello

$\mathcal{D}=\{1\}$ $\qquad$ soddisfacibile $\qquad 1=1 \rightarrow 1=1$

Contromodello

$\mathcal{D}=\text{Nat}$ $\qquad 3=3 \rightarrow 2=3 \qquad \top \rightarrow \bot \rightarrow$ non valida

5. $\forall y \forall x \forall z \, (x=y \,\&\, y=z \rightarrow x=z)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{y=z,\, x=z \vdash x=z}\ \text{ax-id}}{x=y,\, y=z \vdash x=z}\ =\text{-S}}{x=y \,\&\, y=z \vdash x=z}\ \&\text{-S}}{\vdash x=y \,\&\, y=z \rightarrow x=z}\ \rightarrow\text{-D}}{\vdash \forall z\,(x=y \,\&\, y=z \rightarrow x=z)}\ \forall\text{-D } z \text{ non libera}}{\vdash \forall x \forall z\,(x=y \,\&\, y=z \rightarrow x=z)}\ \forall\text{-D } x \text{ non libera}}{\vdash \forall y \forall x \forall z\,(x=y \,\&\, y=z \rightarrow x=z)}\ \forall\text{-D } y \text{ non libera}}{}$$

(2)

1. $O(6,F,3) \,\&\, \forall x\,(O(x,F,3) \rightarrow x=6),\ O(x,F,3) \rightarrow x=6$

2. $\exists x\,(O(x,F,2) \,\&\, \forall y\,(O(y,F,2) \rightarrow x=y)),\ O(z,F,2),\ O(x,F,2) \rightarrow x=z$

3. $\exists x\,(O(x,F,2) \,\&\, \forall y\,(O(y,F,2) \rightarrow x=y)),\ O(2,F,2),\ \neg 2=3 \rightarrow \neg O(3,F,2)$

4. $\exists x\,(O(x,F,2) \,\&\, \forall y\,(O(y,F,2) \rightarrow x=y)),\ O(2,F,2) \rightarrow \neg O(3,F,2)$

5. $\exists x\,(V(F,x) \,\&\, \forall y\,(V(F,y) \rightarrow x=y)),\ \neg V(F,u),\ V(F,d) \rightarrow \neg u=d$

Valida!

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x(\ldots),\ u=d,\ V(F,d) \vdash V(F,d)}\ \text{ax-id}}{\exists x(\ldots),\ V(F,d),\ u=d \vdash V(F,u)}\ =\text{-S}}{\exists x(\ldots),\ V(F,d),\ u=d,\ \neg V(F,u) \vdash}\ \neg\text{-S}}{\exists x(\ldots),\ \neg V(F,u),\ V(F,d),\ u=d \vdash}\ \text{Sc-sx}}{\exists x\,(V(F,x) \,\&\, \forall y\,(V(F,y) \rightarrow x=y)),\ \neg V(F,u),\ V(F,d) \vdash \neg u=d}\ \neg\text{-D}$$

Vedi pag 3.1 e 3.2

ESERCIZI 15

(2)

1. $\vdash \forall x\,(S(x) = S(5) \rightarrow x = 5)$

VALIDA!

ax-id

$S(x) = S(5) \rightarrow x=5 \vdash S(x) = S(5) \rightarrow x=5$ $\quad\forall$-re

$\forall y\,(S(x) = S(y) \rightarrow x=y) \vdash S(x) = S(5) \rightarrow x=5$ $\quad\forall$-re

$\vdash Ax2 \qquad \forall x \forall y\,(S(x) = S(y) \rightarrow x=y) \vdash S(x) = S(5) \rightarrow x=5$ $\quad$ Comp-sx

$\vdash S(x) = S(5) \rightarrow x=5$ $\quad\forall$-D x non libera

$\vdash \forall x\,(S(x) = S(5) \rightarrow x=5)$

2. $\vdash 0 = 4 \cdot 0$

VALida!

sm*

$4 \cdot 0 = 0 \vdash 0 = 4 \cdot 0$ $\quad\forall$-re

$\vdash Ax5 \qquad \forall x\; x \cdot 0 = 0 \vdash 0 = 4 \cdot 0$ $\quad$ Comp-sx

$\vdash 0 = 4 \cdot 0$

3. $\forall x\,(x=7 \rightarrow S(x) = S(7))$

VALIDA

ax-id $\qquad\qquad$ ax-id

$x=7 \vdash x=7,\ S(x)=S(7) \qquad x=7,\ S(x)=S(7) \vdash S(x)=S(7)$ $\quad\rightarrow$-S

$x=7,\ S(x)=S(7) \rightarrow x=7 \vdash S(x)=S(7)$ $\quad$ sc-sx

$S(x)=S(7) \rightarrow x=7,\ x=7 \vdash S(x)=S(7)$ $\quad\rightarrow$-D

$S(x)=S(7) \rightarrow x=7 \vdash x=7 \rightarrow S(x)=S(7)$ $\quad\forall$-re

$\forall y\,(S(x)=S(y) \rightarrow x=y) \vdash x=7 \rightarrow S(x)=S(7)$ $\quad\forall$-re

$\vdash Ax2 \qquad \forall x \forall y\,(S(x)=S(y) \rightarrow x=y) \vdash x=7 \rightarrow S(x)=S(7)$ $\quad$ Comp-sx

$\vdash x=7 \rightarrow S(x)=S(7)$ $\quad\forall$-D x non libera

$\vdash \forall x\,(x=7 \rightarrow S(x)=S(7))$

(4)

1-

VALIDA

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{O(x,F,3), O(6,F,3), x=6 \vdash x=6} \qquad \dfrac{\overset{\text{ax-id}}{O(6,F,3), O(x,F,3) \vdash O(x,F,3), x=6}}{O(x,F,3), O(6,F,3), \vdash O(x,F,3), x=6}\,\text{sc-sx}}{O(x,F,3), O(6,F,3), O(x,F,3) \to x=6 \vdash x=6}\,\to S}{O(x,F,3), O(6,F,3), \forall x\,(O(x,F,3) \to x=6) \vdash x=6}\,\forall\text{-re}}{O(x,F,3), O(6,F,3) \,\&\, \forall x\,(O(x,F,3) \to x=6) \vdash x=6}\,\&\text{-S}}{O(6,F,3) \,\&\, \forall x\,(O(x,F,3) \to x=6), O(x,F,3) \vdash x=6}\,\text{Sc-sx}
$$

2-

VALIDA

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{sm*}}{O(x,F,2), O(2,F,2), O(2,F,2), 2=x \vdash x=2} \qquad \dfrac{\overset{\text{ax-id}}{O(2,F,2), O(2,F,2), O(x,F,2) \vdash O(x,F,2), x=2}}{O(x,F,2), O(2,F,2), O(2,F,2) \vdash O(x,F,2), x=2}\,\text{Sc-sx}}{O(x,F,2), O(2,F,2), O(2,F,2), O(x,F,2) \to 2=x \vdash x=2}\,\to S}{O(x,F,2), O(2,F,2), O(2,F,2), \forall y\,(O(y,F,2) \to 2=y) \vdash x=2}\,\forall\text{-re}}{O(x,F,2), O(2,F,2), O(2,F,2) \,\&\, \forall y\,(O(y,F,2) \to 2=y) \vdash x=2}\,\&\text{-S}}{O(x,F,2), O(2,F,2), \exists x\,(O(x,F,2) \,\&\, \forall y\,(O(y,F,2) \to x=y)) \vdash x=2}\,\exists\text{-S}
$$

$$
\dfrac{O(x,F,2), O(2,F,2), \exists x\,(O(x,F,2) \,\&\, \forall y\,(O(y,F,2) \to x=y)) \vdash x=2}{\exists x\,(O(x,F,2) \,\&\, \forall y\,(O(y,F,2) \to x=y)), O(2,F,2), O(x,F,2) \vdash x=2}\,\text{Sc-sx}
$$

x e' libera! ma non metto x, ma una costante z

↓

Posso?!

z non e' variabile libera

3

VALIDA

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg\text{ax sx2}}{O(2,F,2), \neg 2=3, O(2,F,2), 2=3 \vdash \neg O(3,F,2)} \qquad \overset{\neg\text{ax dx1}}{O(2,F,2), \neg 2=3, O(2,F,2) \vdash O(3,F,2), \neg O(3,F,2)}}{O(2,F,2), \neg 2=3, O(2,F,2), O(3,F,2) \to 2=3 \vdash \neg O(3,F,2)}\,\to S}{O(2,F,2), \neg 2=3, O(2,F,2), \forall y\,(O(y,F,2) \to 2=y) \vdash \neg O(3,F,2)}\,\forall\text{-re}}{O(2,F,2), \neg 2=3, O(2,F,2) \,\&\, \forall y\,(O(y,F,2) \to 2=y) \vdash \neg O(3,F,2)}\,\&\text{-S}}{O(2,F,2), \neg 2=3, \exists x\,(O(x,F,2) \,\&\, \forall y\,(O(y,F,2) \to x=y)) \vdash \neg O(3,F,2)}\,\exists\text{-S}
$$

x non libera

$$
\dfrac{O(2,F,2), \neg 2=3, \exists x\,(O(x,F,2) \,\&\, \forall y\,(O(y,F,2) \to x=y)) \vdash \neg O(3,F,2)}{\exists x\,(O(x,F,2) \,\&\, \forall y\,(O(y,F,2) \to x=y)), O(2,F,2), \neg 2=3 \vdash \neg O(3,F,2)}\,\text{Sc-sx}
$$

4-

non si chiude

$$
\begin{array}{ll}
O(2,f,2),\ O(x,f,2),\ \forall y\,(O(y,f,2)\to x=y) \vdash \neg O(3,f,2) & \\
\hline
O(2,f,2),\ O(x,f,2)\ \&\ \forall y\,(O(y,f,2)\to x=y) \vdash \neg O(3,f,2) & \&\text{-S} \\
\hline
O(2,f,2),\ \exists x\,(O(x,f,2)\ \&\ \forall y\,(O(y,f,2)\to x=y)) \vdash \neg O(3,f,2) & \exists\text{-S} \quad x \text{ non libera} \\
\hline
\exists x\,(O(x,f,2)\ \&\ \forall y\,(O(y,f,2)\to x=y)),\ O(2,f,2) \vdash \neg O(3,f,2) & \text{Sc-sx}
\end{array}
$$

Contromodello

$\neg O(3,f,2)=0 \ \rightarrow\ O(3,f,2)=1$

$\mathcal{D}:\{1\}$ pongo $O(x,y,z)=1$ $\Rightarrow$ non valido

$T,\ T,\ \forall y\,(T\to T) \vdash \neg T$

Modello

$O(x,y,z)=0$

$\mathcal{D}:$ Nat $\quad \bot,\ \bot,\ \forall y\,(\bot\to\bot) \to \neg\bot$ $\Rightarrow$ soddisfacibile

4. $\vdash 1+2=3$

Vedi: allegato commutatività somma

$\vdash \forall x \forall y (x+y=y+x)$

ax-id

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{2+0=2,\ 2+S(0)=S(0)+2,\ S(0)+2=S(2) \vdash S(0)+2=S(2)}{2+0=2,\ 2+S(0)=S(2),\ 2+S(0)=S(0)+2 \vdash S(0)+2=S(2)}\ {-S}}{2+0=2,\ 2+S(0)=S(2),\ \forall y(2+y=y+2) \vdash S(0)+2=S(2)}\ \forall\text{-re}}{2+0=2,\ 2+S(0)=S(2),\ \forall x\forall y(x+y=y+x) \vdash S(0)+2=S(2)}\ \forall\text{-re}}{2+0=2,\ 2+S(0)=S(2) \vdash S(0)+2=S(2)}\ \text{Comp sx}$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{2+0=2,\ 2+S(0)=S(2) \vdash S(0)+2=S(2)}{2+S(0)=S(2+0),\ 2+0=2 \vdash S(0)+2=S(2)}\ {-S}\qquad \vdash Ax\,3}{2+S(0)=S(2+0),\ \forall x\ x+0=x \vdash S(0)+2=S(2)}\ \forall\text{-re}}{2+S(0)=S(2+0) \vdash S(0)+2=S(2)}\ \text{Comp-sx}}{\forall y\ 2+S(y)=S(2+y) \vdash S(0)+2=S(2)}\ \forall\text{-re}$$

$$\frac{\vdash Ax\,4 \qquad \dfrac{\forall y\ 2+S(y)=S(2+y) \vdash S(0)+2=S(2)}{\forall x\forall y\ x+S(y)=S(x+y) \vdash S(0)+2=S(2)}\ \forall\text{-re}}{\vdash S(0)+2=S(2)}\ \text{Comp-sx}$$

5. $\vdash 5\cdot 1=5$

ax-id

$$\frac{\dfrac{\dfrac{5\cdot 0=0,\ 5+0=5,\ 5\cdot S(0)=5 \vdash 5\cdot S(0)=5}{5\cdot 0=0,\ 5\cdot S(0)=0+5,\ 5+0=5 \vdash 5\cdot S(0)=5}\ {-S}}{5\cdot 0=0,\ 5\cdot S(0)=0+5,\ \forall x(x+0=x) \vdash 5\cdot S(0)=5}\ \forall\text{-re} \qquad \vdash Ax\,3}{5\cdot 0=0,\ 5\cdot S(0)=0+5 \vdash 5\cdot S(0)=5}\ \text{Comp-sx}$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{5\cdot 0=0,\ 5\cdot S(0)=0+5 \vdash 5\cdot S(0)=5}{5\cdot S(0)=5\cdot 0+5,\ 5\cdot 0=0 \vdash 5\cdot S(0)=5}\ {-S}}{5\cdot S(0)=5\cdot 0+5,\ \forall x(x\cdot 0=0) \vdash 5\cdot S(0)=5}\ \forall\text{-re} \qquad \vdash Ax\,5}{5\cdot S(0)=5\cdot 0+5 \vdash 5\cdot S(0)=5}\ \text{Comp-sx}$$

$$\frac{\vdash Ax\,6 \qquad \dfrac{\dfrac{5\cdot S(0)=5\cdot 0+5 \vdash 5\cdot S(0)=5}{\forall y\ 5\cdot S(y)=5\cdot y+5 \vdash 5\cdot 1=5}\ \forall\text{-re}}{\forall x\forall y\ x\cdot S(y)=x\cdot y+x \vdash 5\cdot 1=5}\ \forall\text{-re}}{\vdash 5\cdot 1=5}\ \text{Comp-sx}$$

6. $\vdash \forall x\ \ x\neq S(x)$

Sm*

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x=S(x) \vdash S(x)=x}{x=S(x),\ \neg S(x)=x \vdash}\ \neg\text{-S}}{x=S(x),\ \forall x\ S(x)\neq x \vdash}\ \forall\text{-re} \qquad \vdash x}{x=S(x) \vdash}\ \text{Comp-sx}}{\vdash x\neq S(x)}\ \neg\text{-S}}{\vdash \forall x\ \ x\neq S(x)}\ \forall\text{-D}\ x \text{ non libera}$$

VALIDA

ax-id ax-id

$$\frac{S(S(x))=S(x),\ S(x)=x \vdash S(x)=x \qquad S(S(x))=S(x) \vdash S(S(x))=S(x),\ S(x)=x}{S(S(x))=S(x),\ S(S(x))=S(x)\rightarrow S(x)=x \vdash S(x)=x}\ {\rightarrow S}$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{S(S(x))=S(x),\ S(S(x))=S(x)\rightarrow S(x)=x \vdash S(x)=x}{S(S(x))=S(x),\ \forall y(S(S(x))=S(y)\rightarrow S(x)=y) \vdash S(x)=x}\ \forall\text{-re}}{S(S(x))=S(x),\ \forall x\forall y(S(x)=S(y)\rightarrow x=y) \vdash S(x)=x}\ \forall\text{-re} \qquad \vdash Ax\,2}{S(S(x))=S(x) \vdash S(x)=x}\ \text{Comp-sx}$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{S(S(x))=S(x) \vdash S(x)=x}{\vdash S(S(x))\neq S(x),\ S(x)=x}\ \neg\text{-D}}{\vdash S(x)=x,\ S(S(x))\neq S(x)}\ \text{Sc-sx}}{S(x)\neq x \vdash S(S(x))\neq S(x)}\ \neg\text{-S}}{\vdash S(x)\neq x \rightarrow S(S(x))\neq S(x)}\ {\rightarrow D}}{\vdash \forall x\,(S(x)\neq x \rightarrow S(S(x))\neq S(x))}\ \forall\text{-D}\ x \text{ non libera}$$

¬-ax dx1

$$\frac{\vdash Ax\,1 \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash S(0)=0,\ \neg S(0)=0}{S(0)\neq 0 \vdash S(0)\neq 0}\ \neg\text{-S}}{\forall x\ S(x)\neq 0 \vdash S(0)\neq 0}\ \forall\text{-re}}{\vdash S(0)\neq 0}\ \text{Comp-sx}$$

$$\frac{\vdash S(0)\neq 0 \qquad \vdash \forall x\,(S(x)\neq x \rightarrow S(S(x))\neq S(x))}{\vdash \forall x\ S(x)\neq x}\ \text{Ind}$$

$\forall x\, \exists y \;\; x \neq y$

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\frac{}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'}\ \text{ax-id} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{ax-}\bot$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&\text{–D}$$

⑦ $\vdash \forall x\, \exists y \;\; x \neq y$

VALIDA

$$\cfrac{\cfrac{\vdash \text{Es precedente} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{x = S(x) \vdash S(x) = x}\ \text{sm}^*}{\vdash \neg x = S(x),\ S(x) = x}\ \neg\text{-D}}{\vdash S(x) = x,\ \neg x = S(x)}\ \text{sc-dx}}{S(x) \neq x \vdash x \neq S(x)}\ \neg\text{-S}}{\forall x\ S(x) \neq x \vdash x \neq S(x)}\ \forall\text{-re}}{\vdash x \neq S(x)}\ \text{Comp-sx}}{\cfrac{\vdash \exists y\ x \neq y}{\vdash \forall x\, \exists y\ x \neq y}\ \forall\text{-D} \quad x \text{ non libera}}\ \exists\text{-re}$$

ESERCIZI 16

① $\vdash \forall x\ 0 + x = x$

VALIDA

$$\cfrac{\cfrac{\vdash Ax3 \qquad \cfrac{\cfrac{}{0+0=0 \vdash 0+0=0}\ \text{ax-id}}{\forall x\ x+0=x \vdash 0+0=0}\ \forall\text{-re}}{\vdash 0+0=0}\ \text{Comp-sx} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{0+x=x \vdash S(x)=S(x)}\ =\text{-ax}}{0+x=x \vdash S(0+x)=S(x)}\ =\text{-S} \qquad \cfrac{\vdash Ax4 \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{}{0 \cdot S(x) = S(0+x) \vdash 0+S(x) = S(0+x)}\ \text{ax-id}}{\forall y\ 0 \cdot S(y) = S(0+y) \vdash 0+S(x) = S(0+x)}\ \forall\text{-re}}{Ax4 \vdash 0+S(x) = S(0+x)}\ \forall\text{-re}}{\vdash 0+S(x) = S(0+x)}\ \text{Comp-sx}}{0+x=x \vdash 0+S(x) = S(x)}\ \text{tr-r}}{\vdash 0+x=x \to 0+S(x)=S(x)}\ \to\text{D}}{\vdash \forall x(0+x=x \to 0+S(x)=S(x))}\ \forall\text{-D} \quad x \text{ non libera}}{\vdash \forall x\ 0+x=x}\ \text{Ind}$$

⑥

② $\vdash \exists y \exists x\ x \neq y$

Contromodello:

$x \neq y \to T$ $\quad \mathcal{D}: Nat$ $\quad \to$ soddisfacibile

Modello

$\mathcal{D}\ \{1\}$ $\quad x \neq y \to \bot$ $\quad \to$ non valida

$$\dfrac{\dfrac{\vdash x \neq y,\ \exists x(\dots),\ \exists y \exists x(\dots)}{\vdash \exists x\ x \neq y,\ \exists y \exists x(\dots)}\ \exists\text{-D}}{\vdash \exists y \exists x\ x \neq y}$$

③ $\vdash \exists y \exists x\ x \neq y$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash Ax1 \qquad \dfrac{\dfrac{}{S(x) \neq 0 \vdash S(x) \neq 0}\ \text{ax-id}}{\forall x\ S(x) \neq 0 \vdash S(x) \neq 0}\ \forall\text{-re}}{\vdash S(x) \neq 0}\ \text{Comp-sx}}{\dfrac{\vdash \exists x\ x \neq 0}{\vdash \exists y \exists x\ x \neq y}\ \exists\text{-re}}\ \exists\text{-re}$$

④ Teoria da vita comune

Ax1: $\neg G(c) \to G(a)$

Ax2: $\neg G(b) \leftrightarrow G(a) \Rightarrow \neg G(b) \to G(a)\ \&\ G(a) \to \neg G(b)$

Ax3: $\neg G(c) \to G(b)$

Ax4 $\neg \forall x\ G(x)$

1) $\vdash \exists x\ \neg G(x)$

VALIDA

$$\dfrac{\vdash Ax4 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg G(x), G(x)}\ \neg\text{-ax dx2}}{\vdash \exists x\ \neg G(x), G(x)}\ \exists\text{-re}}{\vdash G(x), \exists x\ \neg G(x)}\ \text{sc-sx}}{\vdash \forall x\ G(x), \exists x\ \neg G(x)}\ \forall\text{-D } x \text{ non libera}}{\neg \forall x\ G(x) \vdash \exists x\ \neg G(x)}\ \neg\text{-S}}{\vdash \exists x\ \neg G(x)}\ \text{Comp.sx}$$

2) $\vdash \neg G(a) \to G(b)$

VALIDA

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg G(a), G(a) \to \neg G(b), G(a) \vdash \neg G(c), \neg G(c), G(b)}\ \neg\text{-ax sx2} \qquad \dfrac{}{\neg G(b), G(a) \to \neg G(b) \vdash \neg G(b), \neg G(c), G(b)}\ \neg\text{ax sx2}}{\neg G(a), G(a) \to \neg G(b), \neg G(b) \to G(a) \vdash \neg G(c), \neg G(c), G(b)}\ \to S$$

$$\dfrac{\vdash Ax2 \qquad \neg G(a), G(a) \to \neg G(b), \neg G(b) \to G(a) \vdash \neg G(c), \neg G(c), G(b)}{\neg G(a) \vdash \neg G(c), \neg G(c), G(b)}\ \text{Comp-sx}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg G(a), G(a) \vdash \neg G(c), G(b)}\ \neg\text{-ax sx2} \qquad \neg G(a) \vdash \neg G(c), \neg G(c), G(b)}{\neg G(a), \neg G(c) \to G(a) \vdash \neg G(c), G(b)}\ \to S$$

$$\dfrac{\vdash Ax1 \qquad \neg G(a), \neg G(c) \to G(a) \vdash \neg G(c), G(b)}{\neg G(a) \vdash \neg G(c), G(b)}\ \text{Comp-sx}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg G(a), G(b) \vdash G(b)}\ \text{ax-id} \qquad \neg G(a) \vdash \neg G(c), G(b)}{\neg G(a), \neg G(c) \to G(b) \vdash G(b)}\ \to S$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash Ax3 \qquad \neg G(a), \neg G(c) \to G(b) \vdash G(b)}{\neg G(a) \vdash G(b)}\ \text{Comp sx}}{\vdash \neg G(a) \to G(b)}\ \to D$$

3) $\neg G(c) \to \neg G(c)$

VALIDA

ax-id

ax-id $\quad \neg G(c), G(b), \neg G(b) \to G(a), G(a) \vdash G(a), \neg G(b) \quad$ Sc-sx

$\neg G(c), G(b), G(a), \neg G(b) \to G(a), \neg G(b) \vdash \neg G(b) \qquad \neg G(c), G(b), G(a), \neg G(b) \to G(a) \vdash G(a), \neg G(b) \quad \to S$

ax-id

$G(b), \neg G(c) \vdash \neg G(c), \neg G(b)$ Sc-sx $\qquad \vdash Ax2 \quad \neg G(c), G(b), G(a), \neg G(b) \to G(a), G(a) \to \neg G(b) \vdash \neg G(b) \quad$ Comp sx

$\neg G(c), G(b) \vdash \neg G(c), \neg G(b) \qquad \neg G(c), G(b), G(a) \vdash \neg G(b) \quad \to S$

$\vdash Ax1 \quad \neg G(c), G(b), \neg G(c) \to G(a) \vdash \neg G(b) \quad$ Comp sx

ax-id

$\neg G(c), G(b) \vdash \neg G(b) \qquad \neg G(c) \vdash \neg G(c), \neg G(b) \quad \to S$

$\vdash Ax3 \quad \neg G(c), \neg G(c) \to G(b) \vdash \neg G(b) \quad$ Comp-sx

$\neg G(c) \vdash \neg G(b) \quad \to D$

$\vdash \neg G(c) \to \neg G(b)$

4) $\vdash G(c)$

VALIDA

$\neg$-ax sx2 $\qquad \neg$ ax dx2

$\neg G(b), G(b) \vdash G(c) \qquad \neg G(b) \vdash \neg G(c), G(c) \quad \to S$

$\vdash Ax\,3 \quad \neg G(b), \neg G(c) \to G(b) \vdash G(c) \quad$ Comp sx

$\neg$-ax dx2

$\neg G(b) \vdash G(c) \qquad \vdash \neg G(c), G(c) \quad \to S$

3) $\quad \neg G(c) \to \neg G(b) \vdash G(c) \quad$ Comp-sx

$\vdash G(c)$

5) $\vdash \neg\neg\exists x\, G(x)$

VALIDA

ax-id

4) $\quad G(c) \vdash G(c) \quad$ Comp sx

$\vdash G(c) \quad \exists$-S $\quad$ x non libero

$\vdash \exists x\, G(x) \quad \neg$-S

$\neg\exists x\, G(x) \vdash \quad \neg$-D

$\vdash \neg\neg\exists x\, G(x)$

By Caesar