II appello 2 febbraio 2021

`Nome:` `Cognome:`

`Bonus:` si' no

- Scrivere in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Si ricorda di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Si ricorda di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Si esplicitino le eventuali regole derivate usate che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- ATTENZIONE: se si risolvono correttamente TUTTI gli esercizi con il segno ++ si prende il voto 30 independentemente dall'avere o meno un bonus accumulato.
- non si supera l'appello operando solo formalizzazioni a meno che non sia siano completati correttamente il primo e terzo esercizio qui di seguito.
- Per chi NON ha bonus il I e III esercizio sono obbligatori.

• Mostrare se i sequenti elencati sotto sono tautologie, opinioni o paradossi in logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità si assegna il doppio dei punti indicati).

  - (`obbligatorio per chi NON ha bonus`)

    3 punti
    $\neg(\ A\ \rightarrow\ B\ ) \vdash \neg A\ \&\ \neg B$

  - (++)
    6 punti
    $\exists y\ \exists z\ y \neq z\ \vdash b = a\ \vee\ \neg\ \forall y\ y = c$

  - (`obbligatorio per chi NON ha bonus`)

    5 punti
    $\exists x\ \neg A(x)\ \&\ \forall z\ A(z)\ \vdash\ \forall z\ (\ A(z)\ \vee \neg A(z)\ )$

• Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi nella logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità si assegna il doppio dei punti indicati).

- (6 punti)

  Chi ascolta non parla senza riflettere.
  Se uno non ascolta non è saggio.

  I saggi non parlano senza riflettere.”

  si consiglia di usare:
  $P(y)$ =“y parla senza riflettere’
  $A(x)$=“x ascolta”
  $S(x)$= “x è saggio. ”

- (++) (6 punti)

  Gloria ascolta ma non impara.

  Tutti imparano.

  si consiglia di usare:
  $A(y)$ =“y ascolta”
  $I(x)$ = “x impara”
  g= Gloria ”

- (8 punti)

  Gloria non ha alcun fratello gemello.

  Non si dà il caso che Gloria abbia un’unico fratello gemello.

  si consiglia di usare:
  $F(x, y)$= x è fratello gemello di y
  g=Gloria

- (++) (14 punti)

  “Non esiste alcuno che se ascolta e impara allora tutti ascoltano.”

  si consiglia di usare:
  $A(y)$ =“y ascolta”
  $I(x)$ = “x impara”

- (29 punti) Sia T_{pas} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  1. Se Penelope non va a passeggiare allora pure Mia non ci va e neanche Ernesto.
  2. Sia Ernesto che Ludovica vanno a passeggiare se non ci va Mia.
  3. Solo se sia Ernesto che Penelope non vanno a passeggiare Mia non va a passeggiare.
  4. Mia va a passeggiare se e solo se, o Ludovica ci va oppure Penelope non ci va.
  5. Solo se Penelope va a passeggiare ci va pure Ludovica.

  Si consiglia di usare:
  P(x)= x va in a passeggiare   e=Ernesto   b=Ludovica   p=Penelope   . m=Mia.

  Formalizzare le seguenti affermazioni e dedurne la validità in T_{pass}:

  - (6 punti) Mia va a passeggiare.
  - (4 punti) Penelope va a passeggiare.
  - (5 punti) Ludovica va a passeggiare.
  - (4 punti) Se Ludovica non va a passeggiare allora Ernesto ci va.
  - (5 punti) O tutti vanno a passeggiare oppure qualcuno non ci va.

- (++ 49 punti) Sia T_{con} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - (1 punti) Violetta si confida con Tatiana.
  - (3 punti) Violetta si confida al più con Tatiana.
  - (1 punto) Tatiana non è Rosa.
  - (3 punti) Nessuno si confida con nessuno.
  - (2 punti) Nessuno si confida con Patrizia.
  - (3 punti) Se uno si confida con un altro qualsiasi, quest'altro si confida con il primo.

  noindent Si consiglia di usare:
  $C(x, y)$= x si confida con y
  p="Patrizia"   r="Rosa"   t="Tatiana"   v="Violetta"

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria in T_{con}:

  - (6 punti) Violetta non si confida con Patrizia.
  - (6 punti) Tatiana si confida con Violetta.
  - (12 punti) Violetta non si confida con Rosa.
  - (12 punti) Patrizia non si confida con nessuno.

- (++) : Dall'affermazione

  Ip **La domenica non tutti non lavorano.**

  si dica quali delle seguenti affermazioni si possono dedurre (la classificazione di ciascuna vale 8 punti se è deducibile e 14 punti se NON lo è):

  A **Se nessuno lavora allora non è domenica.**
  B **Di domenica qualcuno lavora.**
  C **Se nessuno non lavora non è domenica.**

  Si giustifichi la risposta corretta producendo una sua derivazione nella teoria predicativa

  $$\mathbf{T_{Ip}} = \mathbf{LC_{=}} + \mathbf{Ip}$$

  dopo aver formalizzato ciascuna affermazione utilizzando:
  L(x)= x lavora
  D=è domenica
  Inoltre si giustifichi le risposte "affermazione X" non corrette classificando in $\mathbf{LC_{=}}$ il sequente $\mathbf{Ip} \vdash$ "affermazione X" .

- Stabilire se la seguente regola è sicura rispetto alla semantica classica (nel caso di regola non sicura si analizzi entrambe le inverse):

  - (++ solo sicurezza della regola) (15 punti)

  $$\frac{\neg F \vdash \neg C \ \& \ M \qquad C \vdash M \ \vee \ F}{C \vdash \neg\neg F} \ 1$$

- (++) (32 punti) (*Esercizio facoltativo*)

  In un gioco due amiche fanno un'affermazione, che è vera o falsa.
  Un'affermazione è mancante e l'altra è riportata sotto:
  Celeste: ....
  Morgana: **Se Celeste afferma il falso anch'io affermo il falso**.

  Si può dedurre, anche se non si conosce l'affermazione di Celeste, quante affermazioni sono vere?

  a) No
  b) Sì, sono vere tutte e due le affermazioni.
  c) Sì, è vera solo l'affermazione di Morgana.
  d) Sì, è vera solo l'affermazione di Celeste.
  e) Nessuna affermazione è vera.

  Si analizzino le varie affermazioni nella teoria proposizionale $T_{Morgana}$ ottenuta estendendo $\mathbf{LC}_p$ con la formalizzazione di ciò che dice Morgana (formalizzazione 2 punti) tramite:
  M= l'affermazione di Morgana è vera
  C= l'affermazione di Celeste è vera

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\mathtt{tt}\\ \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'\end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to -\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to -\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma\ ,\ t_{ter} = s_{ter}\ ,\ \Gamma(t_{ter})\ \vdash\ \Delta(t_{ter})\ ,\ \nabla}{\Sigma\ ,\ \Gamma(s_{ter})\ ,\ t_{ter} = s_{ter}\ \vdash\ \Delta(s_{ter})\ ,\ \nabla}\ = -\mathrm{S} \qquad \begin{array}{c}= -\text{ax}\\ \Gamma \vdash t_{ter} = t_{ter}\ ,\ \Delta\end{array}$$

TAUTOLOGIE CLASSICHE

associatività $\vee$	$(\ A \vee B\ ) \vee C$	$\leftrightarrow$	$A \vee (\ B \vee C\ )$
associatività &	$(\ A \& B\ ) \& C$	$\leftrightarrow$	$A \& (\ B \& C\ )$
commutatività $\vee$	$A \vee B$	$\leftrightarrow$	$B \vee A$
commutatività &	$A \& B$	$\leftrightarrow$	$B \& A$
distributività $\vee$ su &	$A \vee (\ B \& C\ )$	$\leftrightarrow$	$(\ A \vee B\ ) \& (\ A \vee C\ )$
distributività & su $\vee$	$A \& (\ B \vee C\ )$	$\leftrightarrow$	$(\ A \& B\ ) \vee (\ A \& C\ )$
idempotenza $\vee$	$A \vee A$	$\leftrightarrow$	A
idempotenza &	$A \& A$	$\leftrightarrow$	A
leggi di De Morgan	$\neg(\ B \vee C\ )$	$\leftrightarrow$	$\neg B \& \neg C$
	$\neg(\ B \& C\ )$	$\leftrightarrow$	$\neg B \vee \neg C$
legge della doppia negazione	$\neg\neg A$	$\leftrightarrow$	A
implicazione classica	$(\ A \ \rightarrow\ C\ )$	$\leftrightarrow$	$\neg A\ \vee\ C$
disgiunzione come antecendente	$(\ A \vee B\ \rightarrow\ C\ )$	$\leftrightarrow$	$(\ A\ \rightarrow\ C\ ) \ \&\ (\ B\ \rightarrow\ C\ )$
congiunzione come antecendente	$(\ A \& B\ \rightarrow\ C\ )$	$\leftrightarrow$	$(\ A\ \rightarrow\ (\ B\ \rightarrow\ C\ )\ )$
legge della contrapposizione	$(\ A \rightarrow\ C\ )$	$\leftrightarrow$	$(\ \neg C\ \rightarrow\ \neg A\ )$
legge del modus ponens	$A\ \&\ (\ A \rightarrow\ C\ )$	$\rightarrow$	C
legge della NON contraddizione	$\neg(\ A \& \neg A\ )$		
legge del terzo escluso	$A \vee \neg A$		
leggi di De Morgan	$\neg(\ \exists x\ A(x)\ )$	$\leftrightarrow$	$\forall x\ \neg A(x)$
	$\neg(\ \forall x\ A(x)\ )$	$\leftrightarrow$	$\exists x\ \neg A(x)$

Regola di composizione

$$\frac{\vdash \texttt{fr} \qquad\qquad \Gamma, \texttt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

Regole derivate o ammissibili per $\mathbf{LC}_=$

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx1}\\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C\end{array} & \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx2}\\ \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx1}\\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''\end{array} & \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx2}\\ \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''\end{array}
\end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{"}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{"}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–D}_v$$