V appello 12 gennaio 2011

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- Non si contano le brutte copie.

- Specificate le regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)

• Mostrare se i sequenti di seguito sono validi in LC e nel caso non lo siano mostrare un contromodello:

3 punti

$(C \rightarrow \neg A) \vee \neg B \vdash \neg B \rightarrow \neg C \vee \neg A$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

5 punti

$\exists y \ (C(y) \,\&\, D(y)) \vdash \exists x \ (\neg C(x) \rightarrow \neg D(x) \ )$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

5 punti

$\neg \forall x \ (\ C(x) \vee A(x) \ ) \vdash \neg \exists x \ (\ A(x) \& \neg A(x) \ )$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

• Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI, ovvero hanno un modello che li rende validi, o INSODDISFACIBILI, ovvero nessun modello li rende validi, motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato di 2 punti)

- (3 punti)

Non si dà il caso i prezzi non siano aumentati solo se l'inflazione è diminuita.
I prezzi non sono aumentati.

L'inflazione non è diminuita.

si consiglia di usare:
P ="I prezzi sono aumentati"
C ="L'inflazione è diminuita"

corretto in LC sì no

- (5 punti)

  Nulla accade per caso.

  Se qualcosa capita non accade per caso.

  si consiglia di usare:
  A(x) = x accade
  C(x)= x capita

  corretto in LC   sì   no

- (5 punti)

  Non tutti ballano bene sia il tango che la salsa.

  Qualcuno sa ballare bene il tango e qualcuno la salsa.

  si consiglia di usare:
  B(x,y) = x balla bene y
  t=tango
  s=salsa

  corretto in LC   sì   no

- (7 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  L'appello di oggi è un appello invernale ed è l'unico.
  L'appello di oggi è il quinto appello.

  L'appello di oggi è un appello invernale.

  si consiglia di usare:
  I(x)= x è appello invernale
  o=appello di oggi
  q=quinto appello

  corretto in $LC_=$ sì   no

- (7 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:
  L'appello di oggi è l' unico appello invernale.
  L'appello di oggi NON è il terzo appello.

  Esiste un appello invernale e il terzo appello non è invernale.

  si consiglia di usare:
  I(x)= x è appello invernale
  o=appello di oggi
  t=terzo appello

corretto in $LC_=$ sì no

- (5 punti) Stabilire se il sequente è valido in $LC_=$

$$u \neq z \to w \neq u \vdash (\, u = v \& w = v\,) \& w = t \to t = u$$

corretto in $LC_=$ sì no

- Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE rispetto alla semantica classica e nel caso di NON validità dire se sono SODDISFACIBILI o INSODDISFACIBILI: ciascuna vale 5 punti (+1 punto se non valida)

$\models \neg\exists x\ (\ B(x)\&\neg B(x) \to C(x))$
$\models \forall y\, \forall z\, z = y \vee y = y \vdash \exists x\ \exists y\ x \neq y$
$\models \exists x\ \exists y\ \exists z\ x \neq z \vee x \neq y \vdash \exists z\ \exists y\ z \neq y$

- (10 punti) Sia T^{cla}_{sc} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
  - Paolo sciopera solo se tutti scioperano.
  - Se Claudio sciopera allora Elena non sciopera e Paolo sì.
  - Solo se Elena sciopera Claudio non sciopera.

  Si consiglia di usare:
  S(x)= x suona, c=Claudio, p=Paolo, e=Elena.

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione in T^{cla}_{sc}:
  - Claudio non sciopera.
  - Paolo non sciopera.
  - Elena sciopera.

- (24 punti) Sia T^{cla}_{ba} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
  - Non si dà il caso che qualcuno non abbia visto la balena.
  - Se Gianni avesse visto la foca allora non avrebbe visto la balena.
  - Quelli che hanno visto l'albatros non hanno visto la foca o la balena.

  suggerimento: si consiglia di usare:
  V(x,y)= x ha visto y
  a=albatros, b=balena, f= foca

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria T^{cla}_{im}:

- Gianni ha visto la balena.
- Gianni non ha visto la foca.
- Non tutti hanno visto sia la balena che la foca.
- Gianni non ha visto l'albatros.
- Nessuno che abbia visto la foca ha visto l'albatros.
- Non c'e' nessuno che abbia visto tutto quello che non ha visto Gianni.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (5 punti) $\vdash \exists x\, \exists z\, (\ s(x) = s(z) \to z = y\ )$
2. (5 punti) $\vdash \exists y\, \exists z\; z + y = s(z)$
3. (5 punti) $\vdash \neg\exists x\; x = x + x$
4. (5 punti) $\vdash \forall y\; \exists x(\, x = y \to s(x) = s(7)\,)$
5. (6 punti) $\vdash \exists x\; \exists y\; x \cdot s(y) = 2$
6. (8 punti) $\vdash (7 + 1) \cdot 1 = 8$
7. (10 punti) $\vdash \forall x\; 1 \cdot x = x$

- Stabilire quali delle seguenti regole sono valide e in caso positivo anche sicure: (8 punti ciascuna)

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ 1$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{A\Gamma, \neg A \vdash \neg C}\ 2$$

Logica classica con uguaglianza- calcolo abbreviato $\mathbf{LC}_{=}^{abbr}$

$$\text{ax-id} \qquad \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \qquad\qquad \text{ax-}\bot \qquad \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \to -\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (x \notin VL(\Gamma, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists\text{–S}\ (x \notin VL(\Gamma, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists\text{–D}$$

$$\begin{array}{c} = -\text{ax} \\ \Sigma \vdash t = t, \Delta \end{array} \qquad \frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\text{S}_f$$

Logica classica predicativa $\mathbf{LC}_=$ con uguaglianza

questa versione contiene le regole nel libro di Sambin

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ A \vdash A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{ax-}\bot \\ \bot\vdash \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{”} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{”} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{”}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{”}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&\text{–F} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{–re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{–re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee\text{–F} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{–re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{–re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to \text{–F} \qquad \frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta} \to \text{–re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta}\ \forall\text{–D}\ (x \notin VL(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–re}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta}\ \exists\text{–S}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–re}$$

$$\frac{}{\vdash t = t} = -\mathrm{ax} \qquad \frac{\Sigma, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC + comp_{sx}+ comp_{dx}

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla} \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \rightarrow x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0) \& \forall x\ (\ A(x) \rightarrow A(s(x))\ ) \rightarrow \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\, s(0)\,)$$

Regole derivate per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\frac{}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash \Delta} \neg\text{-ax}_{sx1} \qquad \frac{}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash \Delta} \neg\text{-ax}_{sx2}$$

$$\neg\text{-ax}_{dx1} \qquad\qquad \neg\text{-ax}_{dx2}$$
$$\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' \qquad\qquad \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\text{rf}^*$$
$$\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'$$

$$\text{sm}^*$$
$$\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta$$

$$\text{tra}^* \qquad\qquad \text{cf}^*$$
$$\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta \qquad\qquad \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta$$

$$\text{cp}^*$$
$$\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $LC_= + \text{comp}_{sx} + \text{comp}_{dx}$ si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad\qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\, P(x) \rightarrow P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$