3. Esercitazione 20 maggio 2011

- Formalizzare le argomentazioni in sequente e mostrare se la loro formalizzazione è valida rispetto alla semantica classica, ovvero se il sequente ottenuto è valido e in caso contrario si dica se è non valido e soddisfacibile o insoddisfacibile:

  1. $\dfrac{\text{Non si dà il caso che l'acqua non sia potabile e non sia un bene comune.}}{\text{L'acqua è un bene comune.}}$

     usando
     A="l'acqua è potabile"
     B="l'acqua è bene comune"

  2. $\dfrac{\text{Non tutti i programmi sono utili e corretti.}}{\text{Esiste un programma non utile.}}$

     usando
     $P(x)$="x è un programma"
     $U(x)$="x è utile"
     $C(x)$="x è corretto"

  3. $\dfrac{\text{Non tutti i programmi sono utili e corretti.}}{\text{Esiste un programma non utile o esiste un programma non corretto.}}$

     usando
     $P(x)$="x è un programma"
     $U(x)$="x è utile"
     $C(x)$="x è corretto"

  4. $\dfrac{\text{Non si dà il caso che non vinci e non perdi.}}{\text{Non vinci solo se non perdi.}}$

     usando
     V="vinci"
     P="perdi"

  5. $\dfrac{\begin{array}{l}\text{Solo i buoni sono stimati da tutti.}\\ \text{Alberto è buono.}\end{array}}{\text{Alberto è stimato da tutti.}}$

     usando
     $S(x, y)$="x stima y"
     $B(x)$= "x è buono"
     a="Alberto"

  6. $\dfrac{\begin{array}{l}\text{I buoni e soltanto loro sono stimati da tutti.}\\ \text{Alberto è buono.}\end{array}}{\text{Alberto è stimato da tutti.}}$

     usando
     $S(x, y)$="x stima y"
     $B(x)$= "x è buono"
     a="Alberto"

  7. $\dfrac{\begin{array}{l}\text{Ciascuno possiede ciò che non ha perduto.}\\ \text{Alberto non ha perduto la Ferrari testa rossa.}\end{array}}{\text{Alberto possiede la Ferrari testa rossa.}}$

usando
$P(x, y)$=”x possiede y”
$E(x, y)$= “x ha perduto y”
f=”Ferrari testa rossa”

8. $$\frac{\begin{array}{l}\text{Solo i buoni sono stimati da tutti.}\\ \text{Alberto è stimato da tutti.}\end{array}}{\text{Alberto è buono.}}$$

usando
$S(x, y)$=”x stima y”
$B(x)$= “x è buono”
a=”Alberto”

9. $$\frac{\text{Nessuno è buono e cattivo.}}{\text{Ogni buono non è cattivo.}}$$

usando
$C(x)$= “x è cattivo”
$B(x)$= “x è buono”
a=”Alberto”

10. $$\frac{\text{Se uno è mite e gentile allora è amabile.}}{\text{Se uno non è gentile allora non è amabile e neppure mite.}}$$

usando:
M(x)=x è mite
G(x)=x è gentile
A(x)=x è amabile

11. $$\frac{\begin{array}{l}\text{Non tutti i programmi hanno un ciclo.}\\ \text{Se un programma non ha un ciclo termina.}\end{array}}{\text{Qualche programma non termina.}}$$

usando
$P(x)$= “x è programma”
$T(x)$= “x termina”
$C(x)$= “x un ciclo”

12. $$\frac{\text{Tutti, se piove, si riparano.}}{\text{Tutti si riparano se piove.}}$$

usando
P= “Piove”
$0(x)$= “x si ripara”

13. $$\frac{\text{Non si dà il caso che qualcuno sia più alto di Piero.}}{\text{C'è qualcuno di cui nessuno è più alto.}}$$

usando
$\overline{p}$=”Piero”
$A(x, y)$=”x è più alto di y”

14. $$\frac{\text{Non si dà il caso che qualcuno sia più alto di Piero.}}{\text{Nessuno è più alto di Piero.}}$$

usando
$\overline{p}$="Piero"
$A(x, y)$="x è più alto di y"

15.
$$\frac{\begin{array}{l}\text{Solo se uno è italiano o francese può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.}\\ \text{Marc non è italiano.}\\ \text{Marc può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.}\end{array}}{\text{Marc è francese.}}$$

usando
$\overline{m}$="Marc"
$I(x)$="x è italiano"
$F(x)$="x è francese"
$P(x)$=" x può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia"

16.
$$\frac{\begin{array}{l}\text{Se uno è italiano o francese può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.}\\ \text{Marc non è italiano.}\\ \text{Marc può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.}\end{array}}{\text{Marc è francese.}}$$

usando
$\overline{m}$="Marc"
$I(x)$="x è italiano"
$F(x)$="x è francese"
$P(x)$=" x può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia"

- Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE e nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI o NON VALIDE o INSODDISFACIBILI:

1. $\models \forall x\ A(x)\&B(x)$?
2. $\models \exists x\ \ \perp \vee A(x)$?
3. $\models \exists x\ \ \perp$?
4. $\models \exists x\ A(x) \to \forall x\ A(x)$?
5. $\models A(c) \to \exists x\ A(x)$?
6. $\models \forall x\ A(x) \to \exists x\ A(x)$?
7. $\models \forall x\ A(x) \to A(c)$?
8. $\models \forall x\ (\ B(x) \vee (P(x) \to P(x))\ )$?
9. $\models \neg\exists x\ A(x) \to \forall x\ \neg A(x)$?
10. $\models \forall x\ \neg A(x) \to \neg\exists x\ A(x)$?
11. $\models \neg\forall x\ A(x) \to \exists x\ \neg A(x)$?
12. $\models \exists x\ \neg A(x) \to \neg\forall x\ A(x)$?
13. $\models \exists x\ \neg A(x) \to \forall x\ A(x)$?

- La regola

$$\frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists\text{−D}$$

è valida rispetto alla semantica classica?
e la sua inversa è valida?

- Formalizzare

  "Esiste un programma che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sè"

  usando
  $P(x)$="x è un programma"
  $A(x,y)$="x attiva y"

  e dire se la formula ottenuta è valida, soddisfacibile, non valida o insoddisfacibile.

- È vero che

  "In ogni bar di Padova c'e' un tale che se beve lui bevono tutti"

  ??

  Formalizzare e dedurre se la formula ottenuta è valida, soddisfacibile o insoddisfacibile.

- (esercizio fuori schema) come formalizzare

  " Se questa proposizione è vera allora 2+2=5"
  ??

  è vera? è falsa?

Logica classica- LC

$$\overset{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow -\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (x \notin VL(\Gamma, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

Schema riassuntivo su validità, insoddisfacibilità, soddisfacibilità

Dato sequente $\Gamma \vdash \Delta$

`passo 1`: si prova a derivarlo in LC

$$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow \text{ è valido} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{vai al passo 2} \end{cases}$$

`passo 2`: costruisci contromodello con foglia di albero che NON si chiude
se esiste contromodello $\Rightarrow$ il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è NON valido
e vai al passo 3

`passo 3`: prova a derivare $\vdash \neg(\ \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}\ )$ in LC

$$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta \text{ è insoddisfacibile} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{applica il passo 2 a } \vdash \neg(\ \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}\ ) \\ & \text{se trovi contromodello di } \neg(\ \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}\ ) \\ & \text{questo è modello di } \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} \\ & \text{che è quindi anche modello di } \Gamma \vdash \Delta \\ & \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta \text{ è soddisfacibile} \end{cases}$$

ESERCITAZIONE 20 MAGGIO

OK
?

1

1. $\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \rightarrow B$

Contromodello:

$A = 1$

$B = 0$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash B}{\vdash \neg A, B}\,\neg\text{-D} \qquad \vdash \neg B, B}{\vdash (\neg A \,\&\, \neg B), B}\,\&\text{-D}}{\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \vdash B}\,\neg\text{-S}}{\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \rightarrow B}\,\rightarrow\text{-D}$$

Essendo Facile, avrei potuto Farlo ad occhio.

- Modello: conclusione vera, quindi $B = 1$
- Contromodello
  - conclusione falsa $B = 0$
  - premessa vera: $\neg(\neg A \,\&\, \neg B) = 1$

    $\neg(\neg A \,\&\, \top) = 1 \Rightarrow \neg\neg A = 1 \Rightarrow A = 1$

Modello

$B = 1$

In quanto $B \vdash$ è come dire $B \vdash \bot$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \qquad B \vdash}{\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \rightarrow B \vdash}\,\rightarrow\text{-S}}{\vdash \neg(\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \rightarrow B)}\,\neg\text{-D}$$

2. $\neg\forall x\,(P(x) \rightarrow U(x) \,\&\, C(x)) \rightarrow \exists x\,(P(x) \,\&\, \neg U(x))$

non si chiude

$P(x), U(x) \vdash \exists x(P(x) \,\&\, \neg U(x)), C(x)$

$\neg$-D

$P(x) \vdash P(x) \ldots$ ax-id $\qquad P(x) \vdash \neg U(x), \exists x(\ldots), C(x)$

$\&$-D

$P(x) \vdash P(x) \,\&\, \neg U(x), \exists x(\ldots), C(x)$

$\exists$-D

$P(x) \vdash \exists x(\ldots), C(x)$

$\mathcal{E}$-Dx

$P(x) \vdash U(x), \exists x(\ldots) \qquad P(x) \vdash C(x), \exists x(\ldots)$ → potevo Fermarmi qui !!

$\&$-D

$P(x) \vdash U(x) \,\&\, C(x), \exists x(\ldots)$

$\rightarrow$-D

$\vdash P(x) \rightarrow U(x) \,\&\, C(x), \exists x(\ldots)$

$\forall$-D $\quad$ x non libera

$\vdash \forall x\,(P(x) \rightarrow U(x) \,\&\, C(x)), \exists x\,(P(x) \,\&\, \neg U(x))$

$\neg$-S

$\neg\forall x\,(P(x) \rightarrow U(x) \,\&\, C(x)) \vdash \exists x\,(P(x) \,\&\, \neg U(x))$

Contromodello:

$\mathcal{D}$: Nat

$C(x) = 0 \qquad P(x) = 1 \qquad U(x) = 1$

$\top, \top \vdash \exists x(\top \,\&\, \neg(\top)), \bot \Rightarrow \top \vdash \bot \Rightarrow$ Falso $\Rightarrow$ NON-VALIDA

$P(x) \vdash U(x)$

$P(x), \neg U(x) \vdash$ — $\neg$-S

$P(x) \,\&\, \neg U(x) \vdash$ — &-S

$\vdash \neg \forall x (P(x) \to C(x) \,\&\, U(x))$ $\qquad$ $\exists x (P(x) \,\&\, \neg U(x)) \vdash$ — $\exists$-S $\quad$ x non libera

$\neg \forall x (P(x) \to C(x) \,\&\, U(x)) \to \exists x (P(x) \,\&\, \neg U(x)) \vdash$ — $\to$ S

$\vdash \neg(\neg \forall x (P(x) \to C(x) \,\&\, U(x)) \to \exists x (P(x) \,\&\, \neg U(x)))$ — $\neg$-D

Modello

$P(x) = 1 \qquad U(x) = 0 \quad \Rightarrow$ soddisfacibile

$T \vdash \bot$ ---> falso

Falsifico la negazione

3. $\neg \forall x (P(x) \to U(x) \,\&\, C(x)) \to \exists x (P(x) \,\&\, \neg U(x)), \exists x (P(x) \,\&\, \neg C(x))$

Valida

ax-id

$C(x), P(x) \vdash P(x), U(x)$

$P(x), C(x) \vdash P(x), U(x)$ — Sc-sx $\qquad$ $\neg$-ax dx 2: $P(x), C(x) \vdash \neg U(x), U(x)$

$P(x), C(x) \vdash P(x) \,\&\, \neg U(x), U(x)$ — &-D

$P(x), C(x) \vdash U(x), P(x) \,\&\, \neg U(x)$ — Sc-dx $\qquad$ ax-id: $P(x), C(x) \vdash C(x), \ldots$

$P(x), C(x) \vdash U(x) \,\&\, C(x), P(x) \,\&\, \neg U(x)$

ax-id: $P(x) \vdash P(x), \ldots$ $\qquad$ $P(x) \vdash \neg C(x), U(x) \,\&\, C(x), P(x) \,\&\, \neg U(x)$ — $\neg$-D

$P(x) \vdash P(x) \,\&\, \neg C(x), U(x) \,\&\, C(x), P(x) \,\&\, \neg U(x)$ — &-D

$P(x) \vdash U(x) \,\&\, C(x), P(x) \,\&\, \neg C(x), P(x) \,\&\, \neg U(x)$ — Sc-dx

$\vdash P(x) \to U(x) \,\&\, C(x), P(x) \,\&\, \neg C(x), P(x) \,\&\, \neg U(x)$ — $\to$ D

$\vdash P(x) \,\&\, \neg C(x), P(x) \to U(x) \,\&\, C(x), P(x) \,\&\, \neg U(x)$ — Sc-dx

$\vdash \exists x (P(x) \,\&\, \neg C(x)), P(x) \to U(x) \,\&\, C(x), P(x) \,\&\, \neg U(x)$ — $\exists$re

$\vdash P(x) \,\&\, \neg U(x), P(x) \to U(x) \,\&\, C(x), \exists x(\ldots)$ — Sc-dx

$\vdash \exists x\, P(x) \,\&\, \neg U(x), P(x) \to U(x) \,\&\, C(x), \exists x(\ldots)$ — $\exists$-re

$\vdash P(x) \to U(x) \,\&\, C(x), \exists x (P(x) \,\&\, \neg U(x)), \exists x (P(x) \,\&\, \neg C(x))$ — Sc-dx

$\vdash \forall x (P(x) \to U(x) \,\&\, C(x)), \exists x (P(x) \,\&\, \neg U(x)), \exists x (P(x) \,\&\, \neg C(x))$ — $\forall$-D $\quad$ x non libera

$\neg \forall x (P(x) \to U(x) \,\&\, C(x)) \vdash \exists x (P(x) \,\&\, \neg U(x)), \exists x (P(x) \,\&\, \neg C(x))$ — $\neg$-S

4. $\neg(\neg V \,\&\, \neg P) \to \neg V \to \neg P$

non si chiude!

$\neg$-ax-dx 2

$\vdash \neg V, V, \neg P \qquad \vdash \neg P, V, \neg P$

$\vdash \neg V \,\&\, \neg P, V, \neg P$ — &-D

$\neg(\neg V \,\&\, \neg P) \vdash V, \neg P$ — $\neg$-S

$\neg(\neg V \,\&\, \neg P), \neg V \vdash \neg P$ — $\neg$-S

$\neg(\neg V \,\&\, \neg P) \vdash \neg V \to \neg P$ — $\to$ D

Contro modello:

$\neg P = 0 \Rightarrow P = 1$

$V = 0$

non valida

Modello:

$V = 1$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \neg(\neg V \,\&\, \neg P) \qquad \dfrac{\dfrac{V \vdash}{\vdash \neg V}\,\neg\text{-D} \qquad \neg P \vdash}{\neg V \to \neg P \vdash}\,\to\text{-S}}{\neg(\neg V \,\&\, \neg P) \to \neg V \to \neg P \vdash}\,\to\text{-S}}{\vdash \neg(\neg(\neg V \,\&\, \neg P) \to \neg V \to \neg P)}\,\neg\text{-D}$$

5. $\forall x(\forall y\, S(y,x) \to B(x)),\ B(a) \to \forall y S(y,a)$

Sono bloccato! Provo a fare un contromodello di:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B(a), \forall x(\dots) \vdash \forall y S(y,a), S(y,a) \qquad B(a), \forall x(\dots), B(a) \vdash S(y,a)}{B(a), \forall x(\dots), \forall y S(y,a) \to B(a) \vdash S(y,a)}\,\to\text{-S}}{B(a), \forall x(\forall y S(y,x) \to B(x)) \vdash S(y,a)}\,\forall\text{-S}}{\forall x(\forall y S(y,x) \to B(x)), B(a) \vdash S(y,a)}\,\text{Sc-sx}}{\forall x(\forall y S(y,x) \to B(x)), B(a) \vdash \forall y S(y,a)}\,\forall\text{-D}$$

y non libera

Contromodello:

$B(x) = 1 \qquad S(y,x) = 0$

$\top, \forall x(\forall y \bot \to \top) \vdash \bot \qquad \top, \top \vdash \bot \qquad$ non valida

Modello:

$\forall y\, S(y,a) = 1 \Rightarrow S(y,x) = 1$

Non si chiude!

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \forall x(\forall y S(y,x) \to B(x)), B(a) \qquad \forall y S(y,a) \vdash}{\forall x(\forall y S(y,x) \to B(x)), B(a) \to \forall y S(y,a) \vdash}\,\to\text{-S}}{\vdash \neg((\forall x(\forall y\, S(y,x) \to B(x)), B(a)) \to \forall y\, S(y,a))}\,\neg\text{-D}$$

6) $\forall x(B(x) \leftrightarrow \forall y\, S(y,x)),\ B(a) \to \forall y\, S(y,a)$

$\forall x\,(B(x) \to \forall y\, S(y,x)\ \&\ \forall y\, S(y,x) \to B(x)),\ B(a) \to \forall y\, S(y,a)$

Valida

ax-id

$$\forall y\, S(y,a) \to B(a),\ B(a) \vdash B(a), S(y,a)$$

sc-sx

$$B(a),\ \forall y\, S(y,a) \to B(a) \vdash B(a),\ S(y,a)$$

ax-id

$$B(a),\ \forall y\, S(y,a) \to B(a),\ S(y,a) \vdash S(y,a)$$

$\forall$-re

$$B(a),\ \forall y\, S(y,a) \to B(a),\ \forall y\, S(y,a) \vdash S(y,a)$$

$\to$S

$$B(a)\ ,\ \forall y\, S(y,a) \to B(a)\ ,\ B(a) \to \forall y\, S(y,a) \vdash S(y,a)$$

Sc-sx

$$B(a),\ B(a) \to \forall y\, S(y,a),\ \forall y\, S(y,a) \to B(a) \vdash S(y,a)$$

&-S

$$B(a),\ \ B(a) \to \forall y\, S(y,a)\ \&\ \forall y\, S(y,a) \to B(a) \vdash S(y,a)$$

$\forall$-re

$$B(a),\ \forall x\,(B(x) \to \forall y\, S(y,x)\ \&\ \forall y\, S(y,x) \to B(x)) \vdash S(y,a)$$

Sc-sx

$$\forall x\,(B(x) \to \forall y\, S(y,x)\ \&\ \forall y\, S(y,x) \to B(x)),\ B(a) \vdash S(y,a)$$

$\forall$-D y non libera

$$\forall x\,(B(x) \to \forall y\, S(y,x)\ \&\ \forall y\, S(y,x) \to B(x)),\ B(a) \vdash \forall y\, S(y,a)$$

7) $\forall x\, \forall y(\neg E(x,y) \to P(x,y)),\ \neg E(a,f) \to P(a,f)$

VALIDA!

$\neg$-ax dx2

$$\vdash \neg E(a,f),\ E(a,f),\ P(a,f)$$

ax-id

$$P(a,f) \vdash P(a,f)\ ,\ E(a,f)$$

Sc-dx

$$P(a,f) \vdash E(a,f)\ ,\ P(a,f)$$

$\to$S

$$\neg E(a,f) \to P(a,f) \vdash E(a,f)\ ,\ P(a,f)$$

$\forall$-re

$$\forall y\ (\neg E(a,y) \to P(a,y)) \vdash E(a,f)\ ,\ P(a,f)$$

$\forall$-re

$$\forall x \forall y(\ldots) \vdash E(a,f),\ P(a,f)$$

$\neg$-S

$$\forall x\, \forall y\ (\neg E(x,y) \to P(x,y)),\ \neg E(a,f) \vdash P(a,f)$$

8) $\forall x\, \forall y\,(S(x,y) \to B(y)),\ \forall x\, S(x,a) \vdash B(a)$

valida!

ax-id

$$S(x,a) \vdash S(x,a), B(a)$$

ax-id

$$S(x,a), B(a) \vdash B(a)$$

$\to$S

$$S(x,a)\ ,\ S(x,a) \to B(a) \vdash B(a)$$

$\forall$-re

$$S(x,a)\ ,\ \forall y\,(S(x,y) \to B(y)) \vdash B(a)$$

$\forall$-re

$$S(x,a)\ ,\ \forall x\, \forall y\,(S(x,y) \to B(y)) \vdash B(a)$$

Sc-sx

$$\forall x\, \forall y\,(S(x,y) \to B(y)),\ S(x,a) \vdash B(a)$$

$\forall$-re

$$\forall x\, \forall y\ (S(x,y) \to B(y)),\ \forall x\, S(x,a) \vdash B(a)$$

9) $\neg\exists x\,(C(x)\ \&\ B(x)) \to \forall x\,(B(x) \to \neg C(x))$

Valida

$\neg$-ax dx 1 ax-id

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B(x) \vdash C(x), \neg C(x) \qquad B(x) \vdash B(x), \neg C(x)}{B(x) \vdash C(x)\ \&\ B(x), \neg C(x)}\ \&\text{-D}}{B(x) \vdash \exists x\,(C(x)\ \&\ B(x)), \neg C(x)}\ \exists\text{-re}}{B(x), \neg\exists x(\dots) \vdash \neg C(x)}\ \neg\text{-S}}{\neg\exists x(\dots), B(x) \vdash \neg C(x)}\ \text{Sc-sx}}{\neg\exists x\,(C(x)\ \&\ B(x)) \vdash B(x) \to \neg C(x)}\ \to\text{-D}}{\neg\exists x\,(C(x)\ \&\ B(x)) \vdash \forall x\,(B(x) \to \neg C(x))}\ \forall\text{-D}$$

x non libera

10) $\forall x\,(M(x)\ \&\ G(x) \to A(x)) \vdash \forall x\,(\neg G(x) \to \neg A(x)\ \&\ \neg M(x))$

Contro modello:

$\neg A(x) = 0 \to A(x) = 1$ $\quad \neg G(x) = 1 \Rightarrow G(x) = 0$ $\quad M(x)$ indifferente $\to$ pongo $\emptyset$

$\forall x(\bot\ \&\ \bot \to T), \neg\bot \vdash \neg T \Rightarrow \forall x\ \underbrace{\bot \to T}_{T}, T \vdash \bot \Rightarrow T \vdash \bot \Rightarrow$ non valida!

Modello

$M(x) = 1 \qquad G(x) = 1 \qquad A(x) = 0$

Soddisfacibile!

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(M(x)\ \&\ G(x) \to A(x)), \neg G(x) \vdash \neg A(x) \qquad \forall x\,(M(x)\ \&\ G(x) \to A(x)), \neg G(x) \vdash \neg M(x)}{\forall x\,(M(x)\ \&\ G(x) \to A(x)), \neg G(x) \vdash \neg A(x)\ \&\ \neg M(x)}\ \&\text{-D}}{\forall x\,(M(x)\ \&\ G(x) \to A(x)) \vdash \neg G(x) \to \neg A(x)\ \&\ \neg M(x)}\ \to\text{D}}{\forall x\,(M(x)\ \&\ G(x) \to A(x)) \vdash \forall x\,(\neg G(x) \to \neg A(x)\ \&\ \neg M(x))}\ \forall\text{D}$$

Non si chiude!

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{M(x), G(x) \vdash A(x)}{M(x)\ \&\ G(x) \vdash A(x)}\ \&\text{-S}}{\vdash M(x)\ \&\ G(x) \to A(x)}\ \to\text{D}}{\vdash \forall x\,(M(x)\ \&\ G(x) \to A(x))}\ \forall\text{-D x non libero} \qquad \forall x\,(\neg G(x) \to \neg A(x)\ \&\ \neg M(x)) \vdash}{\forall x\,(M(x)\ \&\ G(x) \to A(x)) \to \forall x\,(\neg G(x) \to \neg A(x)\ \&\ \neg M(x)) \vdash}\ \to\text{-S}}{\vdash \neg(\forall x\,(M(x)\ \&\ G(x) \to A(x)) \to \forall x\,(\neg G(x) \to \neg A(x)\ \&\ \neg M(x)))}\ \neg\text{-S}$$

11) $\neg \forall x\,(P(x) \to C(x)),\ \forall x\,(P(x) \& \neg C(x) \to T(x)) \vdash \exists x\,(P(x) \& \neg T(x))$

non si chiude!

$P(x), \forall x(\dots), P(x), T(x) \vdash \neg T(x), \exists x(\dots), C(x)$

$P(x), \forall x(\dots), P(x), C(x) \to T(x) \vdash \neg T(x), \exists x(\dots), C(x)$ $\to$-S

$P(x), \forall x(\dots), P(x) \& C(x) \to T(x) \vdash \neg T(x), \exists x(\dots), C(x)$ &-S

$P(x), \forall x\,(P(x) \& \neg C(x) \to T(x)) \vdash \neg T(x), \exists x(\dots), C(x)$ $\forall$-S

ax-id

$\forall x(\dots), P(x) \vdash P(x), \exists x(\dots), C(x)$ $\qquad$ $\forall x(\dots), P(x) \vdash \neg T(x), \exists x(\dots), C(x)$ sc-sx

$\forall x(\dots), P(x) \vdash P(x) \& \neg T(x), \exists x(\dots), C(x)$ &-D

guardo qui $\Rightarrow$ $\forall x(\dots), P(x) \vdash \exists x(\dots), C(x)$ $\exists$-S

$\forall x\,(P(x) \& \neg C(x) \to T(x)), P(x) \vdash C(x), \exists x\,(P(x) \& \neg T(x))$ sc-sx

$\forall x\,(P(x) \& \neg C(x) \to T(x)) \vdash P(x) \to C(x), \exists x\,(P(x) \& \neg T(x))$ $\to$D

$\forall x\,(P(x) \& \neg C(x) \to T(x)) \vdash \forall x\,(P(x) \to C(x)), \exists x\,(P(x) \& \neg T(x))$ $\forall$-D x non

$\neg \forall x\,(P(x) \to C(x)) \vdash$ $\neg$-S

$\neg \forall x\,(P(x) \to C(x)), \forall x\,(P(x) \& \neg C(x) \to T(x)) \vdash \exists x\,(P(x) \& \neg T(x))$ sc-sx

Contromodello:

$\exists x\,(P(x) \& \neg T(x)) = 0 \qquad C(x) = 0 \qquad \mathcal{D}: Nat$

$\forall x\,(P(x) \& \neg C(x) \to T(x)) = 1 \qquad P(x) = 1$

Pongo $P(x) = 1 \qquad C(x) = 0 \qquad T(x) = 1$ $\Rightarrow$ Non Valida

Modello:

$C(x) = 1$ Il resto a piacere $\Rightarrow$ Soddisfacibile

12) $\forall x\,(P \to O(x)) \vdash P \to \forall x\, O(x)$

VALIDA

ax-id $\qquad$ ax-id

$P, O(x) \vdash O(x) \qquad P \vdash P, O(x)$

$P, P \to O(x) \vdash O(x)$ $\to$S

$P, \forall x\,(P \to O(x)) \vdash O(x)$ $\forall$-re

$\forall x\,(P \to O(x)), P \vdash O(x)$ sc-sx

$\forall x\,(P \to O(x)), P \vdash \forall x\, O(x)$ $\forall$-D x non libera

$\forall x\,(P \to O(x)) \vdash P \to \forall x\, O(x)$ $\to$D

Esiste un y di cui nessuno è più alto

13) $\neg \exists x\, A(x,\bar{p}) \vdash \neg \exists x \exists y\, A(x,y)$

VALIDA

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{A(x,\bar{p}) \vdash \exists x\, A(x,\bar{p})}}{\exists y\, A(x,y) \vdash \exists x\, A(x,\bar{p})}\ \exists\text{-S } y \text{ non libere}}{\exists x \exists y\, A(x,y) \vdash \exists x\, A(x,\bar{p})}\ \exists\text{-S } x \text{ non libero}}{\vdash \neg\exists x \exists y\, A(x,y),\ \exists x\, A(x,\bar{p})}\ \neg\text{-D}}{\vdash \exists x\, A(x,\bar{p}),\ \neg\exists x \exists y\, A(x,y)}\ \text{Sc-sx}}{\neg\exists x\, A(x,\bar{p}) \vdash \neg\exists x \exists y\, A(x,y)}\ \neg\text{-S}$$

14) $\neg \exists x A(x,\bar{p}) \vdash \neg \exists x\, A(x,\bar{p})$ valida

15) $\forall x\,(P(x) \rightarrow I(x) \vee F(x)),\ \neg I(\bar{m}),\ P(m) \vdash F(m)$

VALIDA

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg\text{ax sx}_2}{P(\bar{m}), \neg I(\bar{m}), I(m) \vdash F(\bar{m})} \qquad \overset{\text{ax-id}}{P(\bar{m}), \neg I(\bar{m}), F(\bar{m}) \vdash F(\bar{m})}}{P(\bar{m}), \neg I(\bar{m}), I(\bar{m}) \vee F(\bar{m}) \vdash F(\bar{m})}\ \vee\text{-S} \qquad \dfrac{\overset{\text{ax-id}}{\neg I(\bar{m}),\ P(\bar{m}) \vdash P(\bar{m}), F(\bar{m})}}{P(\bar{m}), \neg I(\bar{m}) \vdash P(\bar{m}), F(\bar{m})}\ \text{Sc-sx}}{P(\bar{m}), \neg I(m),\ P(\bar{m}) \rightarrow I(\bar{m}) \vee F(\bar{m}) \vdash F(\bar{m})}\ \rightarrow\text{S}}{P(\bar{m}), \neg I(\bar{m}),\ \forall x\,(P(x) \rightarrow I(x) \vee F(x)) \vdash F(\bar{m})}\ \forall\text{-re}}{\forall x\,(P(x) \rightarrow I(x) \vee F(x)),\ \neg I(\bar{m}),\ P(\bar{m}) \vdash F(\bar{m})}\ \text{Sc-sx}$$

16) $\forall x\,(I(x) \vee F(x) \rightarrow P(x)),\ \neg I(\bar{m}),\ P(\bar{m}) \vdash F(\bar{m})$

- Contromodello:

  $P(x) = 1 \quad I(x) = 0 \quad F(x) = 0 \qquad \mathcal{D}$: Nat

  $\forall x\,(\bot \vee \bot \rightarrow \top),\ \neg\bot,\ \top \vdash \bot$ → non valida

- Modello

  $\mathcal{D}$: Nat

  $F(x) = 1$ gli altri a piacere → soddisfacibile

2

1. $\vdash \forall x\, A(x) \& B(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash A(x) \qquad B(x) \vdash}{\vdash A(x) \& B(x)}\ \&\text{-D}}{\vdash \forall x\, A(x) \& B(x)}\ \forall\text{-D} \quad x \text{ non libero}$$

- Contromodello

$A(x) = 0$ → non valido

$\mathcal{D}$: Nat

- Modello

$A(x) = 1$ $B(x) = 1$ $\mathcal{D}$: Nat → soddisfacibile

2. $\vdash \exists x \perp \vee A(x)$

- Contromodello

$\mathcal{D}$: Nat $A(x) = 0$ → non valida

- Modello

$\mathcal{D}$: Nat $A(x) = 1$ → soddisfacibile

3. $\vdash \exists x \perp$

valida! (dal falso segue il vero)

$$\dfrac{\dfrac{\perp \vdash}{\exists x \perp \vdash}\ \exists\text{-S} \quad x \text{ non libera}}{\vdash \neg \exists x \perp}\ \neg\text{-D}$$

4. $\vdash \exists x\, A(x) \rightarrow \forall x\, A(x)$

- Contromodello:

$\mathcal{D}$: Nat $A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\exists x\, A(x) = 1$ $\forall x\, A(x) = 0$ ⇒ non valida

- Modello

$\mathcal{D}$: Nat $A(x) = 1$ ⇒ soddisfacibile

5- $\vdash A(c) \to \exists x\, A(x)$

VALIDA

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{A(c) \vdash A(c)}}{A(c) \vdash \exists x\, A(x)}\ \exists\text{-re}}{\vdash A(c) \to \exists x\, A(x)}\ \to D$$

6- $\vdash \forall x\, A(x) \to \exists x\, A(x)$

VALIDA

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{A(x) \vdash A(x)}}{\forall x\, A(x) \vdash A(x)}\ \forall\text{-re}}{\forall x\, A(x) \vdash \exists x\, A(x)}\ \exists\text{re}$$

7- $\vdash \forall x\, A(x) \to A(c)$

Valida

$$\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{A(c) \vdash A(c)}}{\forall x\, A(x) \vdash A(c)}\ \forall\text{-re}$$

8 $\forall x\, (B(x) \lor (P(x) \to P(x)))$

VALIDA

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{P(x) \vdash P(x), B(x)}}{\vdash P(x) \to P(x), B(x)}\ \to D}{\vdash B(x), P(x) \to P(x)}\ \text{sc-sx}}{\vdash B(x) \lor (P(x) \to P(x))}\ \lor\text{-D}}{\vdash \forall x\, (B(x) \lor (P(x) \to P(x)))}\ \forall\text{-D} \quad x \text{ non libera}$$

9- $\neg \exists x\, A(x) \to \forall x\, \neg A(x)$

VALIDA

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg\text{ax dx 1}}{\vdash A(x), \neg A(x)}}{\vdash \exists x\, A(x), \neg A(x)}\ \exists\text{-re}}{\neg \exists x\, A(x) \vdash \neg A(x)}\ \neg\text{-S}}{\neg \exists x\, A(x) \vdash \forall x\, \neg A(x)}\ \forall\text{-D} \quad x \text{ non libera}$$

10. $\forall x\ \neg A(x) \to \neg \exists x\ A(x)$

VALIDA

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg ax\ sx1}{A(x), \neg A(x) \vdash}}{A(x), \forall x\ \neg A(x) \vdash}\ \forall\text{-re}}{\forall x\ \neg A(x), A(x) \vdash}\ sc\text{-}sx}{\forall x\ \neg A(x), \exists x\ A(x) \vdash}\ \exists\text{-}S \quad x \text{ non libera}}{\forall x\ \neg A(x) \vdash \neg \exists x\ A(x)}\ \neg\text{-}D$$

11. $\neg \forall x\ A(x) \to \exists x\ \neg A(x)$

VALIDA

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg ax\ dx2}{\vdash \neg A(x), A(x)}}{\vdash \exists x \neg A(x), A(x)}\ \exists\text{-re}}{\vdash A(x), \exists x\ \neg A(x)}\ sc\text{-}sx}{\vdash \forall x\ A(x), \exists x\ \neg A(x)}\ \forall\text{-}D \quad x \text{ non libera}}{\neg \forall x\ A(x) \vdash \exists x\ \neg A(x)}\ \neg\text{-}S$$

12. $\exists x\ \neg A(x) \to \neg \forall x\ A(x)$

VALIDA

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg ax\ sx2}{\neg A(x), A(x) \vdash}}{\neg A(x), \forall x\ A(x) \vdash}\ \forall\text{-re}}{\neg A(x) \vdash \neg \forall x\ A(x)}\ \neg\text{-}D}{\exists x\ \neg A(x) \vdash \neg \forall x\ A(x)}\ \exists\text{-}S \quad x \text{ non libera}$$

13. $\exists x\ \neg A(x) \to \forall x\ A(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\text{bloccato!}}{\exists x\ \neg A(x) \vdash A(x)}}{\exists x\ \neg A(x) \vdash \forall x\ A(x)}\ \forall\text{-}D \quad x \text{ non libera}$$

- Contromodello

D: Nat $\quad A(x) = 0 \quad \exists x\ \neg\bot \vdash \bot \to$ non valida

- Modello

D: Nat $\quad A(x) = 1 \quad \exists x\ \neg\top \vdash \top \to$ soddisfacibile

④ PARADOSSO RUSSEL

Esiste un programma che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sè.

$$\exists x \left(P(x) \;\&\; \forall y \left(A(x,y) \leftrightarrow \neg A(y,y) \;\&\; P(y)\right)\right)$$

Forma equivalente (RISOLVIBILE)

$$\exists x \left(P(x) \;\&\; \forall y \left(\left(A(x,y) \rightarrow \neg A(y,y) \;\&\; P(y)\right) \;\&\; \left(\neg A(y,y) \;\&\; P(y) \rightarrow A(x,y)\right)\right)\right)$$

Essendo un paradosso risolvo la sua negazione:

VALIDA

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\neg\text{-ax dx 1}}{P(x) \vdash A(x,x), \neg A(x,x)}}{P(x), \neg A(x,x) \vdash \neg A(x,x)}\,\neg\text{-S} \qquad \dfrac{\overset{\text{ax-id}}{\neg A(x,x), P(x) \vdash P(x)}}{P(x), \neg A(x,x) \vdash P(x)}\,\text{sc-dx}}{P(x), \neg A(x,x) \vdash \neg A(x,x) \;\&\; P(x)}\,\&\text{-D}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{P(x), A(x,x) \vdash A(x,x)} \qquad \dfrac{\overset{\neg\text{-ax sx 1}}{P(x), A(x,x), \neg A(x,x), P(x) \vdash}}{P(x), A(x,x), \neg A(x,x) \;\&\; P(x) \vdash}\,\&\text{-S}}{P(x), A(x,x), A(x,x) \rightarrow \neg A(x,x) \;\&\; P(x) \vdash}\,\rightarrow\text{S}}{P(x), A(x,x) \rightarrow \neg A(x,x) \;\&\; P(x), A(x,x) \vdash}\,\text{sc-sx}$$

$$\dfrac{P(x), \neg A(x,x) \vdash \neg A(x,x) \;\&\; P(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\neg\text{-ax dx2}}{P(x) \vdash \neg A(x,x), A(x,x)} \qquad \overset{\text{ax-id}}{P(x) \vdash P(x), A(x,x)}}{P(x) \vdash \neg A(x,x) \;\&\; P(x), A(x,x)}\,\&\text{-D}}{P(x) \vdash A(x,x), \neg A(x,x) \;\&\; P(x)}\,\text{sc-dx}}{P(x), A(x,x) \rightarrow \neg A(x,x) \vdash \neg A(x,x) \;\&\; P(x)}\,\rightarrow\text{S}$$

$$\dfrac{P(x), A(x,x) \rightarrow \neg A(x,x) \;\&\; P(x), A(x,x) \vdash \qquad P(x), A(x,x) \rightarrow \neg A(x,x) \vdash \neg A(x,x) \;\&\; P(x)}{P(x), A(x,x) \rightarrow \neg A(x,x) \;\&\; P(x), \neg A(x,x) \;\&\; P(x) \rightarrow A(x,x) \vdash}\,\rightarrow\text{S}$$

$$\dfrac{P(x), A(x,x) \rightarrow \neg A(x,x) \;\&\; P(x), \neg A(x,x) \;\&\; P(x) \rightarrow A(x,x) \vdash}{P(x), \left(A(x,x) \rightarrow \neg A(x,x) \;\&\; P(x)\right) \;\&\; \left(\neg A(x,x) \;\&\; P(x) \rightarrow A(x,x)\right) \vdash}\,\&\text{-S}$$

$$\dfrac{}{P(x), \forall y \left(\left(A(x,y) \rightarrow \neg A(y,y) \;\&\; P(y)\right) \;\&\; \left(\neg A(y,y) \;\&\; P(y) \rightarrow A(x,y)\right)\right) \vdash}\,\forall\text{-re}$$

$$\dfrac{}{P(x) \;\&\; \forall y \left(A(x,y) \rightarrow \neg A(y,y) \;\&\; P(y) \;\&\; \neg A(y,y) \;\&\; P(y) \rightarrow A(x,y)\right) \vdash}\,\&\text{-S}$$

$$\dfrac{}{\exists x \left(P(x) \;\&\; \forall y \left(A(x,y) \rightarrow \neg A(y,y) \;\&\; P(y) \;\&\; \neg A(y,y) \;\&\; P(y) \rightarrow A(x,y)\right)\right) \vdash}\,\exists\text{-S} \text{ x non libero}$$

$$\dfrac{}{\vdash \neg \exists x \left(P(x) \;\&\; \forall y \left(A(x,y) \rightarrow \neg A(y,y) \;\&\; P(y) \;\&\; \neg A(y,y) \;\&\; P(y) \rightarrow A(x,y)\right)\right)}\,\neg\text{-S}$$

(5) SEQUENTE VALIDO

"In ogni bar di Padora c'e' un tale che se beve lui bevono tutti"

$B(x) = x$ beve

$E(x,y) = x$ e' nel bar y di Padova

$A(x) = x$ e' un bar di Padova

$$\forall x\,(A(x) \to \exists y\,(B(y) \to \forall z\, B(z)))$$

VALIDA

ax-id

$$A(x), B(x), B(y) \vdash B(y), \forall z\, B(z)$$

sc-dx

$$A(x), B(x), B(y) \vdash \forall z\, B(z), B(y)$$

$\to$D

$$A(x), B(x) \vdash B(y) \to \forall z\, B(z), B(y)$$

$\exists$-re

$$A(x), B(x) \vdash \exists y\,(B(y) \to \forall z\, B(z)), B(y)$$

sc-dx

$$A(x), B(x) \vdash B(y), \exists y\,(\ldots)$$

$\forall$-D y non libera

$$A(x), B(x) \vdash \forall z\, B(z), \exists y\,(\ldots)$$

$\to$D

$$A(x) \vdash B(x) \to \forall z\, B(z), \exists y\,(\ldots)$$

$\exists$-S

$$A(x) \vdash \exists y\,(B(y) \to \forall z\, B(z))$$

$\to$D

$$\vdash A(x) \to \exists y\,(B(y) \to \forall z\, B(z))$$

$\forall$-D x non libera

$$\vdash \forall x\,(A(x) \to \exists y\,(B(y) \to \forall z\, B(z)))$$

by Caesar