PER ISTRUIRE UN ROBOT

ovvero, come costruirsi una logica

Giovanni Sambin
sambin@math.unipd.it

Capitolo 4 - Istruire davvero il robot

Lo scopo di questo capitolo è arrivare a poter dare davvero istruzioni al robot su quello che si è visto nei capitoli precedenti. In particolare, vogliamo fargli fare davvero le deduzioni e dargli una trattazione matematica della verità delle proposizioni. Questo richiede che prima gli insegniamo quali sono le espressioni che deve trattare, cioè termini e formule. Tutte queste definizioni riguardano insiemi infiniti (le espresssioni possibili in un certo linguaggio sono infinite, le derivazioni sono infinite,...), e quindi dobbiamo prima cercare di capire almeno un po' che cosa è l'infinito, in modo poi di poterlo trattare in modo tanto costruttivo che il robot possa capirlo. Il metodo è quello delle definizioni per induzione. Vederemo quindi anche le dimostrazioni per induzione.

1. Fuga all'infinito

Qualunque cosa sia l'essere umano, la sua mente ha la straordinaria capacità di prendere una stessa cosa e leggerla come cosa in sé, per quello che è, oppure di vederla dal di fuori, da un livello di riferimento diverso e darle un significato diverso. In molti casi, questo fa scattare un processo potenzialmente infinito.

Questa nostra potenzialità di scappare all'infinito c'è molto spesso anche nella vita di tutti i giorni, ma l'infinito non c'è mai. Pensiamo ad esempio ai pacchetti del cacao Droste (similmente a certe scatole di corn flakes Kellogs). C'è raffigurata una donna, nel tipico costume olandese del Seicento, con un grande copricapo, che regge un vassoio con una tazza di cioccolato e a fianco il pacchetto di cacao... Droste, naturalmente, perché il buon cioccolato si fa con il cacao Droste! Cosicché sul pacchetto di cacao raffigurato sul nostro pacchetto di cacao Droste c'è, daccapo, una donna olandese con il tipico copricapo che regge un vassoio con sopra una tazza di cioccolato e a fianco un pacchetto di cacao Droste, che a sua volta... A tutti voi è già chiaro come continua la cosa: tutti, in modo quasi automatico ed immediato, riescono ad immaginare il processo all'infinito.

Ma è davvero infinita questa successione? In effetti la domanda è ambigua perché la risposta è "sì" oppure "no" a seconda del livello di riferimento in cui la leggiamo. La successione è infinita, se la leggiamo ad un livello astratto; infatti, non ha mai termine la possibilità di immaginare un disegno analogo ma più piccolo nella scatola di cacao presente in quello precedente. Non c'è alcun motivo teorico astratto per cui debba terminare. E tuttavia, se la leggiamo ad un livello concreto, l'infinito non c'è, né nelle mie parole, né nella realtà. Il processo ha un termine molto preciso, che è la capacità di risoluzione della stampante con cui è stato stampato quel pacchetto di cacao, oltreché della carta e del nostro occhio; è difficile andare oltre un millesimo di millimetro, e a quel punto il processo termina, forse dopo i primi 3-4 passaggi. Si vede allora che l'infinito certamente c'è, ma nel senso che è solo una nostra immagine mentale.

Anche qui ci sono esempi di giochi infantili. "C'era una volta un re seduto sul sofà che chiese alla sua serva 'raccontami una storia' ed ella incominciò: "C'era una volta un re... Questo è un esempio molto carino e può interessarci anche per i livelli di riferimento. Si tratta di un circolo vizioso. La storia si ripete sempre, le virgolette non si chiudono mai, ma ogni volta si aprono e si riaprono, e poi ancora e sembra davvero che non si chiudano mai. In realtà, anch'esse hanno fine, ma quando? Quando ci si stanca di raccontare. Questa non è affatto una banalità! Vi sto facendo osservare che una cosa è la nostra idealizzazione, apparentemente facile: una cosa va avanti all'infinito, lo capiamo al volo; un'altra è la realtà. In altre parole, questo concetto di infinito è un concetto tutto nostro, siamo noi che riusciamo a cogliere che una certa cosa può proseguire all'infinito. Il fatto di pensarlo così facilmente, non significa che c'è nella realtà. Ma per cogliere questo dobbiamo metterci all'esterno del meccanismo, mentre il meccanismo stesso neppure se n'è accorto che c'è in gioco un infinito.

Si potrebbe addirittura immaginare un robot istruito a leggere testi, a cui si dia come istruzione il seguente breve programma:

```
for i=0 to infinito
leggi:
    C'era una volta un re
    seduto sul sofà
    che chiese alla sua serva:
    'raccontami una storia'
    ed ella incominciò:
next i
```

Questo esempio è utilissimo per ricordare che l'infinito non ha bisogno di essere presente tutto intero qui davanti a noi, attuale. È esattamente per questo motivo che prima dicevo, a proposito del cacao Droste, che basta poco, un solo esempio, e voi avete già capito, senza bisogno di vedere l'intera fuga all'infinito, sapete già come proseguirà. Ma in quel momento ciò che viene compreso è solo l'infinito potenziale. Qui abbiamo una situazione in cui una macchina va avanti all'infinito ma solo in potenza, cioè come possibilità; eppure le istruzioni sono queste appena scritte, sono finite come gli esempi che abbiamo fatto per spiegare l'infinito.

I bambini questo concetto lo imparano all'asilo, con canzoncine del tipo: "Due elefanti/ si dondolavano/ sopra un filo/ di ragnatela/ e, ritenendo/ la cosa interessante,/ andarono a chiamare un altro elefante./ Tre elefanti/ si dondolavano/ sopra un filo/ di ragnatela/ e..." Ma come sanno che possono proseguire all'infinito, allo stesso modo sanno che possono fermarsi non appena sono stanchi. Per cui abbiamo certamente un infinito ma solo come possibilità, proprio perché sappiamo come funziona, sappiamo anche come "costruirlo".

Quello che noi, in altri termini, riusciamo a vedere è una infinita catena di livelli di riferimento (il cacao Droste, la storia del re), ed è un esempio di infinito potenziale dato da un numero di istruzioni finite. Non c'è nessun infinito là dentro, anche se l'esecuzione richiede un tempo infinito, nel senso più preciso che può procedere oltre ogni limite di tempo prefissato.

Questi esempi mostrano come l'infinito sia un concetto comune, che si usa nella vita di tutti i giorni anche senza essere matematici; e tuttavia in ogni caso si vede che ogni processo nella realtà si ferma, e l'infinito non esiste di per sé se non come potenzialità, come nostro modo di leggere la realtà. Vediamo altri esempi.

Nella pittura (Piero della Francesca, Mantegna, Dürer,...) il punto di fuga, o punto all'infinito, è quel punto del quadro a cui tendono tutte le rette. Ma sta nel quadro! quindi non certo infinito nel senso più concreto.

In certe sale antiche, ad esempio del '700, con specchi alle pareti, talvolta due specchi sono posti uno di fronte all'altro. Se ci si mette in mezzo, si vede uno specchio che specchia uno specchio che specchia uno specchio che specchia uno specchio ecc...[1] È facile cogliere, nel loro reciproco riflettersi una fuga all'infinito. Questo esempio dà forse più da pensare perché la capacità di risoluzione dell'immagine riflessa è senz'altro maggiore che sulla carta stampata.

La mia personale prima esperienza con un esempio di fuga all'infinito risale agli anni '50, quando ero alle elementari. Ricordo quando andavo dal barbiere, una sala abbastanza grande, con uno specchio a tutta parete da un lato e uno specchio a tutta parete dall'altro, e faceva impressione veder fuggire le infinite stanze nel loro riflettersi nei due specchi. Ed il gioco era ancor più divertente se ci si metteva in un angolino appena appena dentro lo specchio per non aver la sensazione di rimanere intrappolati in quell'abisso senza fine e così scorgere meglio l'effetto. Specchio specchio specchio specchio testa testa testa testa, infinite teste, infiniti specchi... Per noi è infinito, ma nella realtà è finito. Dobbiamo riconoscere che vedere "tutti" gli specchi è comunque impossibile, se non altro per i limiti dell'occhio: da un certo punto in poi noi confondiamo, l'occhio non è più capace di distinguere. Ed anche se lo fosse, sarebbe la stessa reciproca riflessione degli specchi ad incontrare dei limiti, dati dalla capacità di risoluzione e riflessione della lastra di cristallo che forma lo specchio, e quindi ai fotoni, se proprio vogliamo arrivare all'ultimo livello fisico possibile, quello dei quanti della meccanica quantistica. L'infinito, semplicemente non c'è... per quanto raffinato sia lo stimolo che ci spinge a pensare ad un processo infinito.

Un esempio simile, ma più attuale. Prendete una telecamera, collegata ad un monitor che rappresenti in tempo reale quello che la telecamera riprende. Cosa succede se quella telecamera riprende il monitor che rappresenta quello che quella telecamera riprende? Si crea subito un loop molto interessante: si vede un monitor, con dentro un monitor, con dentro un monitor, con dentro un monitor, ecc... In qualunque spettatore subito scatta l'immagine dell'infinito. Ma c'è un infinito? No, i pixel del monitor sono

[1] Molto più prosaico e ridotto è l'esempio di certi scompartimenti di treni in cui sopra ogni fila di sedili c'è un lungo specchio.

in numero finito, e ciascun pixel ha solo due scelte, o è attivato o non è attivato, fine.[2]

Vorrei chiarire: non stiamo parlando di raggiungere l'infinitamente piccolo o l'infinitamente grande, ma della ripetizione infinita di un processo. Che nella realtà si ferma perché non è fisicamente possibile ripetere davvero la divisione di una certa immagine infinite volte. La questione non è la misura grande o piccola, ma un'iterazione infinita.

La capacità di passare al metalivello è così potente che a fine Ottocento un matematico molto famoso, Richard Dedekind, assieme a Cantor uno dei primi a studiare la teoria degli insiemi, la usa addirittura per dimostrare l'esistenza di un insieme infinito, e la sua dimostrazione è quasi testualmente quello che segue. Pensate ad una qualunque cosa: abbiamo un certo pensiero, nel senso di atto del pensare. Quando Dedekind parla di un pensiero, non sappiamo a che cosa stesse pensando; noi possiamo pensare alla morosa, ad un buon caffè, a una bella gita, ad un sentimento nobile,... Adesso pensate al fatto che avete pensato quella cosa, e poi pensate al pensiero di aver pensato, e così via. Un pensiero `p`, il pensiero `penso a p`, il pensiero `penso che penso a p`,...; questi passaggi sono molto connaturati con il nostro modo di pensare, abbiamo immediatamente una catena potenzialmente infinita. Dedekind dice che questo è un esempio di insieme infinito.[3][4]

Egli sembrava sostenere, un po' maldestramente, che l'insieme infinito fosse nella nostra testa, con ció scatenando le reazioni di colleghi e oppositori che gli chiedevano come fosse possibile che un volume finito come il nostro cervello potesse contenere una cosa infinita.

Questa è una vera idiozia, perché quell'infinito che dovrebbe essere dentro la nostra mente c'è chiaramente solo nel senso di potenzialità, come possibilità di passare sempre ad un livello di riferimento superiore, e continuare questo processo senza mai fermarsi. Ma è nient'altro che un infinito potenziale perché nessuno di noi mai, per capire che è infinito, per sapere che può sempre salire di un livello ogni volta, deve necessariamente farlo, ma ci basta sapere che *lo si può fare*. Ma una potenzialità è un'idea astratta, e non in atto, quindi è un pensiero solo, e non infiniti pensieri.

È un processo mentale analogo all'intuizione del concetto di numero naturale come "successore di". Cosa sono i numeri naturali? Si potrebbe dire che sono i numeri tipo 1, 2, 3, e così via, dove "così via" indica appunto

[2]Supponendo che il monitor abbia la risoluzione di 1000 per 1000, quante immagini diverse sono teoricamente possibili? Infinite? No, un numero finito, e nemmeno troppo difficile da scrivere: 2^{10^6}.

[3]Si noti: l'insieme risultante è infinito, ma l'operazione del concepirlo è comunque un singolo atto del pensiero, e come tale puoò benissimo stare nella nostra testa, anche se fisicamente limitata dal cranio.

[4]Notate che questo processo di salire di livello, cioè avere un pensiero, guardarlo da fuori, guardare noi stessi che lo guardiamo da fuori, guardare me che guardo me guardare che guardo da fuori, ecc. *deve* aver termine; se si fa sempre così, ci si frega la vita. Tipico esempio è un ragazzo molto timido che va ad una festa da ballo e vuole assolutamente invitare una ragazza che ha adocchiato in fondo alla sala e pensa "Adesso la invito..." e questo pensiero che ho pensato non è ancora la cosa... "Devo muovermi..."; e dopo pensa, "Ma questa cosa che l'ho pensata..." ecc. e insomma si perde; non conviene (intanto quella balla con qualcun altro!).

il processo. Andare avanti all'infinito: capiamo cosa vuol dire, ma c'è un infinito attuale, cioè il risultato completo in qualche parte?

La mia risposta è banale: semplicemente no. Non esiste luogo al mondo in cui ci siano tutti i numeri naturali. Innanzitutto perché, come vedremo a pag. 7, questo non può aver alcun senso concreto: occuperebbero uno spazio infinito. Ma soprattutto perché in ogni caso è un'assunzione del tutto inutile per poterci formare il concetto della successione infinita, proprio come in tutti gli esempi visti finora. Certamente la catena non si presenta lì davanti a noi tutta completata, esplicitata, perchè non lo sarà mai, per gli stessi motivi che abbiamo visto finora. Ma non è necessario nemmeno che la catena intera (infinita) esista in qualche mondo a noi inaccessibile, per cogliere che il processo è potenzialmente infinito. Come per tutti gli esempi visti finora, basta appunto cogliere che si può procedere sempre.[5]

Quindi la definizione migliore di numeri naturali è la seguente: 0 *è un numero naturale e se a è un numero naturale, anche il successore di a è un numero naturale*. Sono numeri naturali solo quegli elementi che si ottengono in questo modo. Dove supponiamo sia chiaro che cosa vuol dire ottenere i numeri applicando quelle regole e cioè: si parte da 0, e poi si applica la regola che fa passare al successore e si trova il successore di 0, e poi il successore del successore, e poi il successore del successore del successore, senza mai finire. Cioè? Cos'è questo se non un infinito potenziale? Ma questo comunque è una definizione perfettamente comprensibile del concetto di numero naturale. Più formalmente, è perfettamente chiaro cosa significa che l'insieme N dei numeri naturali è definito dalle due regole di generazione dei suoi elementi:

$$0 \in N \qquad \frac{a \in N}{a' \in N}$$

[5]Se il lettore ha resistenze mentali ad accettare il fatto che anche l'infinito dei numeri naturali esiste solo come infinito potenziale, provi a descrivere l'infinito che ha in mente con la massima precisione possibile. Si renderà conto allora che quel che può fare è appunto al più descrivere il processo di costruzione dei numeri naturali. Si tratta allora semplicemente di rendersi conto che c'è una confusione tra istruzioni ed esecuzione: spesso si crede che per poter concepire un insieme infinito esso deve essere già "eseguito" in qualche parte, anche se noi lo sappiamo cogliere solo attraverso le istruzioni che lo hanno generato. Ma con un po' di riflessione ci si renderà conto che tutto ciò è un inutile giro vizioso: basta dire che il concetto di numero naturale è esso stesso il processo, cioè l'idea che posso andare avanti sempre, non posso mai fermarmi e dire che ho finito. Ma appunto questa è una idea, cioè l'afferrare con un unico pensiero. Aggiungere l'assunzione che esso debba comparire come "eseguito" in qualche parte, non è altro appunto che una assunzione ulteriore e anche inutile, dato che noi comunque possiamo accedere al concetto solo tramite qualche pensiero "finito", come quello dato dalla regola. In altre parole: il concetto dei numeri naturali infiniti possiamo certamente averlo, ma in concreto non esiste un oggetto che ce lo faccia vedere, che ce lo rappresenti.

Questa situazione è esattamente analoga a quella vista con gli esempi dalla vita quotidiana. Ciascuno di noi esseri umani è bravissimo a concepire il concetto di iterazione infinita, e questa capacità fa parte addirittura del nostro bagaglio evolutivo, ma da questo non c'è alcun motivo per arrivare a dire che l'infinito esiste in modo attuale. Esistenza potenziale, cioè nella nostra mente, ed esistenza attuale, cioè nella realtà, sono due cose ben diverse, vedi ad esempio tutti gli esempi di personaggi fittizi come Topolino, Sherlock Holmes, ecc. ***Nella versione definitiva, ci sarà un'appendice sul tema dell'esistenza dei concetti astratti.***

Incluso il fatto sottointeso che nient'altro è un numero naturale. Mi ripeto: il concetto di numero naturale si riduce a quello delle due regole, dove si deve intendere che la regola è la forma astratta del processo infinito, che permette comunque di passare da un elemento al suo successore.

Una domanda possibile è: il fatto di avere un metodo per costruire tutti i numeri naturali, dice anche che ogni proprietà su di essi sia effettivamente accertabile? No certo. In questo modo, infatti, staremmo confondendo una buona definizione con la *decidibilità*. Non è detto che una buona definizione sia anche automaticamente decidibile. Ci è perfettamente chiaro cosa vuol dire saltare nove metri in lungo anche se non lo sappiamo fare, così com'è perfettamente chiaro cosa vuol dire che un bambino di tre anni da grande farà i miliardi. In quel momento tutto ciò non è affatto decidibile. Nel caso dei numeri, ci è perfettamente chiara la proprietà di un numero pari di essere la somma di due numeri primi, ma non sappiamo affatto se questo vale o no per utti i numeri (congettura di Goldbach). Una definizione può essere perfettamente chiara senza necessariamente avere un algoritmo che dica se una certa cosa così e così definita accadrà o meno.

Viceversa, qui si sta dando semplicemente una costruzione per definire i numeri naturali, che dice che data quella costruzione, nient'altro è un numero naturale. Si può avere una costruzione c che non ha la forma apparente richiesta dalle regole, ma che, ridotta in qualche modo, produrrà qualcosa del tipo a' che dice che quello è un numero naturale. Ad esempio 10^{10} non ha la forma né di 0 né di successore, eppure è ottenuto mediante una definizione che, se si va a smontare, almeno in linea teorica porterà alla riduzione di quel numero a successore di qualcosa: le definizioni implicite dentro l'espressione 10^{10}, come la somma, il prodotto, l'esponente, infatti, sono tutte definite per induzione, proprio come i numeri naturali.

Torniamo alla discussione generale degli esempi. È importante sottolineare che il processo infinito scatta solo se diamo un significato all'immagine che vediamo, per cui capiamo che una sua parte è l'immagine di sé stessa. In altre parole, bisogna "capire" qualcosa, non basta percepire, come potrebbe fare una macchina fotografica: per questa, l'immagine del cacao Droste vale tanto quanto una qualunque altra immagine. La stessa cosa per il pensiero del pensiero del pensiero... o anche per i numeri naturali: si deve capire la regola che produce numeri, e non solo numeri specifici. È per questo che l'infinito si lega al passaggio al metalivello.

Può sembrare ad alcuni che si possa rendere in termini matematici il passaggio dal linguaggio al metalinguaggio, e quindi risolverlo una volta per tutte. L'idea è quella di dispiegare (invece che spiegare) davanti a noi il linguaggio (in particolare, il linguaggio formalizzato della logica - vedi seguito), il suo metalinguaggio, e poi il metalinguaggio del metalinguaggio, e così via in una catena infinita che includerà di ogni linguaggio introdotto anche il suo metalinguaggio. Così sarà tutto di fronte a noi, e non ci sarà più bisogno di parlare del metalinguaggio. Alcuni ragionano effettivamente così, nel tentativo di universale matematizzazione del nostro modo di pensare.

A me sembra chiaro che questa è una soluzione illusoria, cioè che l'introduzione di una catena infinita non è una via d'uscita al dover comunque parlare del metalinguaggio. Primo, perché come abbiamo visto l'infinito non esiste nella realtà, è comunque solo una potenzialità concepita dalla nostra mente. Se "esistere nella realtà" significa avere una determinazione di luogo e di tempo, qualunque entità infinita in cui ogni suo elemento occupa uno spazio finito, quantunque piccolo, dovrà necessariamente avere bisogno di uno spazio infinito, e qui sono gli astrofisici a dirci che non stanno così le cose nella realtà. Inoltre, se anche ci fosse in qualche parte dell'universo qualche cosa di infinito, il nostro cervello non ce la farebbe a contenerne una rappresentazione fedele e completa, elemento per elemento, e quindi noi, per comprenderlo, dovremmo in ogni caso accontentarci del concetto di infinito potenziale.

Secondo, perché come ora vedremo in ogni caso la considerazione del metalinguaggio, ovvero quella che io chiamo "assunzione di responsabilità", è comunque necessaria. Alla fine, la morale sarà che non c'è proprio verso, non possiamo fare a meno di mettere in campo noi stessi, con la nostra coscienza, la nostra responsabilità, il nostro capire o non capire le cose, e accettare quello che ho cercato di discutere nelle ultime due lezioni, la inesauribile, nontrascurabile e ineliminabile differenza tra linguaggio e metalinguaggio.

Vediamolo con un esempio, spero divertente e comunque rilevante per la nostra discussione. Sapete che la moglie di Nanni Moretti ha scritto la tesi di laurea con me? Siete perplessi? Confermo, sì, la moglie di Moretti ha scritto la tesi di laurea con me.

Ad Antonio potrà capitare di raccontarlo ad un suo amico dicendo: "Sai che la moglie di Nanni Moretti ha scritto la tesi di laurea con Sambin?" Qui naturalmente Antonio si assume la responsabilità del credere a quello che vi ho raccontato. Agnese non ci crede, cioè lei pensa che: "la moglie di Moretti ha scritto la tesi con Sambin" possa essere falsa; è scettica ma intrigata, e quando arriva a casa vuole raccontare qualcosa a sua sorella Beatrice. Allora non si assume direttamente la responsabilità di ciò che ho detto, la lascia a Beatrice, ma ciò nonostante può dire una cosa verissima, e cioè: "Lo sai che Sambin ha detto che la moglie di Moretti ha scritto la tesi di laurea con lui?" perché certamente è vero che Sambin ha detto che la moglie di Moretti ha scritto la tesi con lui.

Qual è la differenza? La differenza è che Antonio ci crede e Agnese no. Chi ha ragione? Dipende dalla verità di quel che dico; lei è più sicura nel senso che quando dice "lo sai che Sambin ha detto...", lei stessa ha verificato ciò che io ho detto e quindi lei è sicura di dire una cosa vera.

Beatrice, la sorella di Agnese, può essere scettica o meno. Può avere due atteggiamenti: dice a un terzo amico che si chiama Carlo: "lo sai che Sambin dice che..." oppure, se non si fida neppure di quel che ha detto Agnese, dirà a Carlo: "lo sai che Agnese ha detto che Sambin ha detto...". In questo caso infatti si assume solo la responsabilità di quello che ha sentito. Poniamo ora che la notizia si sparga velocemente ed allora il passaparola potrà essere della forma "Sai che la moglie di Nanni Moretti ha scritto la tesi con Sambin?", oppure "Sai che Agnese ha detto che Sambin dice che la moglie di Nanni Moretti ha scritto la tesi con lui?", oppure "Sai che Beatrice ha detto che Agnese ha detto che Sambin dice che la moglie di Nanni Moretti ha scritto la tesi con lui?", oppure...

Questa catena è infinita? Potenzialmente sì; ma nella pratica non è mai infinita. E come si rompe la catena? Prima o poi uno arriva a decidere che atteggiamento ha nei confronti di quella certa proposizione o asserzione.

La situazione descritta non è così strampalata, sono cose che succedono. Si possono immaginare altri esempi. Posso dire: "Ho conosciuto Alfred Tarski". Chi crede che sia vero dirà: "Sambin ha conosciuto Tarski", se no "Sambin dice che ha conosciuto Tarski". E poi: "Un mio amico ha detto che Sambin dice che ha conosciuto Tarski". Togliendovi ogni responsabilità, potete dire una cosa comunque vera (vedi anche pag. **??**).

Oppure provate a raccontare ad un vostro amico, Pasquale: "Lo sai che Sambin ha raccontato barzellette in aula?". Pasquale non ci crederà mai, non è possibile e va da un suo amico e dice: "Lo sai che Filippo dice che Sambin ha raccontato barzellette in aula? non è possibile" ecc. Sto cercando di colorire per cercare di farvi immedesimare.

Questa catena in teoria può andare avanti all'infinito, come avete già capito. Tutti noi esseri umani siamo dotati di questa incredibile capacità di capire subito quando un meccanismo si può sempre ripetere, credo che questo sia parte dei vantaggi per la sopravvivenza a cui siamo arrivati con l'evoluzione.

Nulla impedisce di pensare che vi siano altre persone, tante persone, infinite persone impegnate in questo infinito passaparola. Ma ha senso ragionevole pensare ad una catena davvero infinita? No certamente, questa catena potenzialmente infinita, la teorica fuga all'infinito per evitare di prendere una decisione, prima o poi viene bloccata nei fatti. Anche supponendo che tutti siano molto scettici, o molto critici, e vogliano tutti dire verità certe senza assumersi alcuna responsabilità, la catena termina di fatto dopo al più 3-4 passaggi. Nella pratica, o per noia o per mancanza di tempo o perché si capisce che non serve a niente, ad un certo punto ci si assume la responsabilità e si decide se si ritiene che il contenuto di quella proposizione sia vero o no.

Non è possibile continuare a dire cose vere, sempre lavandosene le mani, senza entrare nel merito e senza mettere in moto la propria capacità di discernimento. Detto in altri termini, non esiste la comunicazione in sé e l'atteggiamento di un soggetto che accompagna una proposizione fa parte integrante della comunicazione.

Questo evidenzia immediatamente, senza entrare in questioni filosofiche grosse, che, almeno a livello di comunicazione, il concetto di verità è essenzialmente dipendente da ciascuno di noi. Negli esempi visti, ciascuno decide se è vera o no e da lì in poi si comporta di conseguenza.

Vorrei farvi osservare che questa assunzione di responsabilità è ineliminabile, e non c'è modo di non assumere responsabilità; voglio dire, se noi continuiamo a prendere proposizioni e poi prendere la proposizione che dice che quella è vera e poi prendere la proposizione che quella dice che quell'altra è vera ecc., continuando così non ne andiamo fuori, non ci guadagniamo nulla, non facciamo altro che scrivere proposizioni; ma prima o poi dobbiamo decidere che atteggiamento vogliamo assumere, prima o poi dobbiamo fare questo passo rispetto a quello che scriviamo o diciamo. Questo è quello che io chiamo l'assunzione di responsabilità, e d'ora in poi la consideriamo al primo passaggio, al passo uno invece che aspettare che Carlo dica che Beatrice dica che Agnese dica che ecc.. . .

Vorrei chiarire che non sto parlando di responsabilità etica, ciò non può comparire in un corso di logica. Semplicemente mi assumo la responsabilità nel senso che il soggetto ha la consapevolezza di ciò che sta asserendo.

Per capire cosa intendo per responsabilità, proviamo a vedere come viene distribuita tra me e una macchina. Ho una calcolatrice trovata in un fustino di detersivo ormai oltre quindici anni fa. Mi piace continuare ad usarla, dato che funziona. Se batto 32, e poi -20%, la calcolatrice dà come risultato $25,6$. Ma è la calcolatrice che si assume la responsabilità di quel risultato? Certamente no: ad esempio, se desse $24,5$ non potrei pretendere di pagare $24,5$ euro un libro da 32 euro con lo sconto del 20%. La calcolatrice è fatta di microcircuiti, al più possiamo dire che esegue le istruzioni, ma certo non che si assume la responsabilità del risultato, certamente non è "lei" a scegliere quel risultato fra varie possibilità. Sono io a fidarmi del risultato: mi assumo la responsabilità perché ho fatto delle prove e perché so che tali chip sono affidabili. Sono io a dire che la macchina ha eseguito l'operazione correttamente. Se la macchina "si sbaglia" e io mi fido del suo $24,5$, in realtà sono io che sbaglio.

1.1. I numeri naturali e gli insiemi definiti induttivamente. I numeri naturali sono lo strumento per contare più antico e più radicato nella cultura. Come abbiamo accennato, anch'essi sono stati creati dall'uomo lungo la sua storia (una riprova è che ancor oggi ci sono tracce di civiltà in cui non si sapeva contare oltre il numero delle dita). Oggi ciascuno di noi li comprende in modo abbastanza completo e definitivo, ed è quindi superfluo cercare di spiegarli tramite nozioni più semplici. Tuttavia, è utile vedere, o ricordare, alcuni aspetti dei numeri naturali che talora vengono dati per scontati, forse in quanto troppo ovvi.

A tutti noi è noto il significato dei puntini in $1, 2, 3, ...$: dopo ogni numero naturale, segue un numero successivo. Forse non siamo altrettanto consapevoli del fatto che questo modo di procedere è il caso più semplice di un modo molto più generale di costruire insiemi, di cui ora diamo un cenno.

Sia dato un insieme finito di oggetti iniziali B, ed un insieme finito di operazioni C, che possiamo chiamare i "costruttori". Allora non è difficile concepire l'insieme di tutti gli oggetti ottenibili da quelli iniziali B applicando i costruttori C "quante volte si vuole". Un esempio concreto può essere: se B ha come elementi Adamo ed Eva, e l'operazione è quella di fare figli, l'insieme (infinito?) risultante è tutta l'umanità, in ogni epoca, anche futura. Naturalmente, questo non è un esempio facilmente riducibile a matematica, soprattutto perché, a parte la difficoltà dell'astrazione, l'operazione non è chiaramente definita (una coppia può avere molti figli, o nessuno). Tuttavia, è certamente un esempio alla base anche della definizione matematica, tanto che l'insieme ottenuto da B e C si dice induttivamente generato a partire da B tramite C.

Un altro esempio vicino alla vita di tutti i giorni può essere il seguente. Consideriamo come oggetti iniziali le 26 lettere dell'alfabeto latino, e come "costruttore" l'operazione di affiancare due qualunque successioni (finite) di lettere. Allora l'insieme generato conterrà tutte le possibili successioni finite di lettere, o "parole", sensate o meno.

Questo modo di definire insiemi è fondamentale in tutta la matematica; ad esempio, il minimo sottogruppo che contenga un insieme X è il sottoinsieme generato induttivamente considerando X come oggetti iniziali, e l'operazione del gruppo come costruttore.

Siamo pronti per affrontare una definizione più formale. Innanzitutto, mentre dovrebbe essere chiaro cosa significa che B è un insieme finito (deve comunque essere chiaro, perché a questo livello non c'è modo di spiegarlo usando nozioni più semplici), dobbiamo e possiamo specificare un po' di più cosa si intende per "costruttori". Ogni costruttore, per cominciare, opera su certi argomenti, in un numero specificato e finito; dato un costruttore c in C, come per ogni funzione matematica scriviamo $c(x_1, \cdots, x_n)$ per indicare il risultato dell'operazione c sugli argomenti $x_1, \cdots, x_n$. Nel caso più astratto, di c non sappiamo nient'altro che il numero di argomenti, e quindi dobbiamo intendere che $c(x_1, \cdots, x_n)$ sia diverso da tutti gli oggetti costruiti in un altro modo (sia a partire da argomenti diversi, che usando costruttori diversi); in pratica, di $c(x_1, \cdots, x_n)$ sappiamo solo che è il risultato dell'applicazione del costruttore c agli argomenti $x_1, \cdots, x_n$, che è niente di più, niente di meno di quello che ci dice la scrittura $c(x_1, \cdots, x_n)$ stessa.

Resta una domanda: che cosa indicano le variabili x_1, ..., x_n? Ovvero, su che dominio operano i costruttori? Anche qui la risposta è semplice e difficile: non importa conoscere esattamente il dominio di applicazione, ma basta sapere che tutti gli oggetti che man mano costruisco vi siano contenuti.

Ora finalmente possiamo cominciare ad illustrare più formalmente che cosa si intende per "l'insieme $I(B, C)$ generato induttivamente da B e C", o brevemente "l'insieme definito da B e C". In primo luogo, richiediamo che $I(B, C)$ contenga tutti gli oggetti di B. Un modo per esprimere formalmente questo è richiedere che valga la regola (quello che sta scritto sopra la sbarra è la premessa, o assunzione, e quello che sta sotto è la conclusione: dire che la regola vale significa che ogni volta che vale la premessa possiamo concludere che vale anche la conclusione):

$$\frac{x \in B}{x \in I(B, C)}$$

dove si intende che l'uso della lettera x sia solo un modo per esprimere il seguente fatto: qualunque sia l'oggetto che riconosciamo essere elemento di B, vogliamo che lo stesso oggetto stia in $I(B, C)$. Naturalmente, poiché B è finito, supponiamo formato dagli oggetti $\{b_1, \ldots, b_k\}$, lo stesso fatto può essere equivalentemente espresso dalle k clausole:

$$b_1 \in I(B, C), \qquad \cdots \qquad , b_k \in I(B, C)$$

Ora vogliamo esprimere il fatto che, qualunque siano gli elementi già ottenuti di $I(B, C)$, applicare ad essi un costruttore dà luogo ad un elemento che sta ancora in $I(B, C)$; come prima, si esprime dicendo che $I(B, C)$ è chiuso per la regola

$$\frac{x_1 \in I(B, C), \quad \cdots \quad , x_n \in I(B, C)}{c(x_1, \ldots, x_n) \in I(B, C)}$$

Ben inteso, le due regole non bastano a determinare univocamente $I(B, C)$, ma solo per dire cosa assolutamente non può mancare. Si intende allora che $I(B, C)$ sia quell'insieme formato solo da quegli elementi che sono ottenibili applicando reiteratamente le due regole: tutti gli elementi di B, poi i costruttori applicati a tutti i possibili argomenti in B, poi ancora i costruttori applicati agli oggetti così ottenuti, ecc. In altri termini, si intende che $I(B, C)$ sia il più piccolo tra tutti gli insiemi che soddisfano le due regole. Per esercizio, si provi a scrivere tutti gli elementi generati induttivamente a partire da due oggetti a e b con due costruttori, f con un argomento e g con due; si vedrà quanto velocemente aumentano le possibili combinazioni.

A questo punto l'esempio più semplice di insieme definito induttivamente è quello in cui B contiene un solo elemento 0, e C un solo costruttore s, che opera su un solo argomento. Se scriviamo gli elementi di $I(\{0\}, \{s\})$ in una lista, otteniamo $\{0, s0, ss0, sss0, ...\}$. Se poi diciamo che sx indica $x + 1$, vediamo che abbiamo ottenuto esattamente l'insieme $\mathbb{N}$ di tutti i numeri naturali da cui eravamo partiti, salvo la scrittura diversa.

Ora vediamo che cosa abbiamo imparato da questa digressione. E' vero, non abbiamo "dedotto" il concetto dei numeri naturali da altri più semplici, però abbiamo visto che è possibile costruirli usando soltanto poche regole. Tuttavia, a guardar bene, un concetto di infinito dobbiamo comunque averlo già in mente: cosa vuol dire infatti applicare le regole, o i costruttori, quante volte si vuole? Un numero finito di volte, grande quanto si vuole; cioè, una volta, due volte, tre volte, ... e siamo tornati ai numeri naturali, sotto altra forma. Sì, è un circolo vizioso, che però ci ha fatto capire parecchie cose. Per prima cosa, che la costruzione dei numeri naturali non è concettualmente più semplice di quella di altri insiemi combinatoriamente molto più complessi, quello che cambia è solo la dimensione di B e C usati.

In secondo luogo, abbiamo implicitamente visto come si può dimostrare che una qualche proprietà deve valere per ogni elemento di $I(B, C)$: basta che valga per tutti gli elementi di B, e che, quando vale per $x_1, \ldots, x_n$, valga anche per $c(x_1, \ldots, x_n)$, qualunque siano $x_1, \ldots, x_n$ e $c \in C$. Nel caso dei numeri naturali, questo diventa un principio ben noto, il principio di induzione aritmetica:

Principio di induzione *Sia $P(n)$ una proprietà definita sui numeri naturali. Se vale $P(0)$ e, qualunque sia n, dal fatto che $P(n)$ vale segue che anche $P(n + 1)$ vale, allora $P(n)$ vale per ogni n naturale.*

Esempio: data una fila infinita di carabinieri, se il colonnello comanda: il primo si butti dal ponte, e poi: se quello davanti a voi s'è buttato, anche voi dovete buttarvi, bene, per il principio di induzione, tutti i carabinieri della fila si butteranno dal ponte (l'esempio funziona solo con i carabinieri, perché una persona normale preferirebbe salvare la pelle piuttosto che un principio matematico! o meglio, preferirebbe disobbedire agli ordini).

Altri esempi: qualunque proprietà non banale dei numeri naturali.

Una forma di induzione è necessaria non solo per dimostrare proprietà, come il principio di induzione, ma anche per definire funzioni, e allora prende il nome di principio di definizione per ricorsione. Gli esempi più importanti sono quelli di somma e prodotto. Ricordiamo qual è il significato della somma $a + b$: a partire da a, applicare b volte l'operazione di successore.

Immaginiamo che a sia fissato; allora $a + 0 = a$, e, per conoscere $a + s(b)$, basta conoscere $a+b$ e prenderne il successore. Queste due "istruzioni" sono sufficienti per calcolare $a+b$ per qualunque b, proprio perché tutti i b naturali sono ottenuti o come 0 o come successore di qualche numero naturale, che a sua volta o è 0 o è successore di un altro numero naturale, ecc. Tutte le informazioni necessarie per calcolare la somma sono quindi contenute nelle due seguenti equazioni:

$$
\begin{aligned}
&a + 0 = a \\
&a + s(b) = s(a + b)
\end{aligned}
$$

Se si vuole calcolare $5 + 7$ (attenzione: scriviamo 5 al posto del numero naturale $sssss0$ ottenuto da 0 applicando il costruttore s cinque volte, e lo stesso per 7), basta ottenere 7 come successore di un numero, $7 = s(6)$, e allora $5 + 7 = s(5 + 6)$; ora per calcolare $5 + 6$, basta ricordare che $6 = s(5)$, quindi $5+6 = s(5+5)$, da cui anche $5+7 = ss(5+5)$. Procedendo in questo modo, si arriva a $sssssss(5 + 0)$, ma $5 + 0 = 5$, e quindi $5 + 7 = sssssss5$.

In modo analogo, nota la somma, si definisce il prodotto; conviene anche qui fissare il primo argomento a, e definire il prodotto per ricorsione, ricordando il significato intuitivo del prodotto. Alle elementari si legge $a \times b$ come "a volte b", che vuol dire proprio: considero b tante volte quante indicate da a. Le due equazioni per il prodotto esprimono esattamente questo:

$$
\begin{aligned}
&0 \cdot b = 0 \\
&s(a) \cdot b = a \cdot b + b
\end{aligned}
$$

Usando le definizioni ricorsive e il principio di induzione, si possono dimostrare le usuali proprietà della somma e del prodotto. Per esercizio, si dimostri ad esempio che sia $(N, +, 0)$ che $(N, \cdot, 1)$ sono monoidi commutativi (questo esercizio non è affatto banale la prima volta, e anche in seguito ci vuole pazienza per dedurre fatti anche banali; il rischio è di dare per note proprietà non ancora dedotte).

Infine, c'è un ordinamento naturale dei numeri naturali, quello con cui vengono "costruiti". Diciamo che $a \leq b$ se "per costruire b devo passare per a", ovvero se b è ottenuto da a applicando s un certo numero di volte (compreso lo zero); ricordando la definizione di somma, questo equivale a dire che $a \leq b$ sse esiste $c \in N$ tale che $b = a + c$, ovvero in simboli:

$$a \leq b \equiv \exists c \in N(b = a + c)$$

Se si vuole definire un ordine stretto, basta porre $a < b \equiv a \leq b \,\&\; a \neq b$, ovvero $a < b \equiv \exists c \in N(b = a + s(c))$.

Importante. Il principio di induzione si applica non solo ai numeri naturali, ma a tutti gli insiemi definiti induttivamente. Le giustificazioni viste per i naturali si applicano anche ad ogni insieme definito induttivamente. Vedi esercizi.

2. Linguaggi del primo ordine

Ripensiamo a come le proposizioni sono state trattate fino ad ora; per noi fino ad ora le proposizioni sono espresse in modo simbolico, ma sono specifiche proposizioni con un significato specifico, legate ad un certo contesto, salvo quando abbiamo parlato di gruppi in cui, abbiamo detto, hanno significato specifico nel momento in cui diciamo qual è il gruppo in questione. In generale per noi una proposizione è qualcosa di specifico e l'espressione simbolica è solo quello che si scrive per esprimere questo significato specifico.

Adesso dobbiamo considerare la pura scrittura di una proposizione, cioà svuotarla del suo significato, cioè dimenticarci del suo contenuto e vederla come semplice espressione, ed infine reinterpretarla.

Questo doppio passaggio apparentemente sembra inutile. Qual è, quindi, il vantaggio di questo procedimento? Nel momento in cui si svuota la scrittura del suo significato, la si può leggere come pura espressione e trattare come oggetto matematico e quindi ottenere teoremi; il contenuto lo reintroduciamo tramite la definizione delle possibili interpretazioni di questa scrittura, ovvero di proposizioni associate alla stessa espressione.

Questo fenomeno ha vari aspetti. Quando abbiamo scritto $F(x, y)$, per dire "x è figlio di y", tutte le proposizioni le abbiamo scritte pensando a "x è figlio di y"; qualunque sia però lo stock di assiomi che scriviamo, possiamo interpretarlo come "x precede y" in un certo albero binario e dimenticarci di "x è figlio di y" e leggerlo con un'interpretazione matematica completamente diversa, oppure in un altro dominio. Questo ha lo scopo di poter trattare l'espressione e le derivazioni in un modo puramente formale e quindi matematico.

Diamo a questo punto definizioni puramente sintattiche, che cioè non abbiano a che fare con il significato e che ci permettano di trattare le nostre espressioni in modo matematico. Rimettere il significato vorrà dire: data una certa espressione, si deve dire come si interpretano i segni di quella espressione, e con ciò le si ridà significato.

Ad esempio: $\forall x \exists y F(x, y)$, dato il nostro esercizio sulle parentele, vuol dire che ogni x è figlio di qualche y, dato che "è figlio di" è il significato di F; ma in un'altra interpretazione, lo stesso segno F potrebbe essere letto come un ordine qualunque, e allora la stessa espressione $\forall x \exists y F(x, y)$ indica che non esiste un elemento finale, cioè che ogni x ha un successore. Non necessariamente quindi $F(x, y)$ è riferita ai figli (ad esempio la posso leggere come $x \leq y$ sui numeri naturali).

Trattare le cose in modo astratto e applicarle poi a campi diversi è un'invenzione non dei logici ma dei matematici del '800. Dare definizioni rigorose delle espressioni che tratteremo non è molto diverso da ciò che abbiamo fatto fino ad ora, solo che adesso forniamo una forma matematica e precisa.

Il punto di partenza è fissare un alfabeto, e precise regole di formazione delle espressioni, e quindi arrivare ad un linguaggio simbolico completo. Successivamente dovremmo dare una definizione rigorosa del concetto di derivabilità, e quindi di teorema, poi si potrà rendere in termini matematici anche il concetto di verità, introducendo opportune strutture matematiche da pensarsi come struttura dei valori di verità possibili.

Incominciamo con il fissare un linguaggio, perché termini e formule sono definiti solo con un linguaggio. La trattazione matematica della logica si basa su una precisa definizione del linguaggio simbolico usato, che nel caso nostro si chiama linguaggio dei predicati, o *linguaggio del primo ordine*[6].

Come per ogni linguaggio L, è necessario fissare un'alfabeto, quindi termini e formule formano insiemi (nel nostro senso) costruttivi, e poi fissare le regole di formazione delle espressioni.

Un linguaggio al primo ordine contiene tutti[7] i segni seguenti [8]:

$\&, \vee, \rightarrow,$	(segni per connettivi)
$\perp$	(segni per il falso)
$\exists, \forall$	(segni per i quantificatori)
$x_1, ..., x_n, ...$	(variabili per individui)

ed inoltre un qualunque sottoinsieme di questa seconda parte:

$c_1, ..., c_n, ...$		(segni per costanti)
R_i^n	per ogni $i, n; n > 0$	(segno per l'i-esima relazione n-aria)
f_i^n	per ogni $i, n; n > 0$	(segno per l'i-esima funzione n-aria)

Poiché i segni della prima parte sono fissi (cioè sono presenti in qualunque linguaggio del primo ordine) per determinare un linguaggio basterà specificare quali segni di funzioni, relazioni e costanti si abbia intenzione di usare. Questi segni possono comparire in numero infinito, in numero finito o anche essere assenti. Nel caso in cui ce ne siano infiniti ci sarà una regola che ci dice come generare questi segni, in ogni caso l'insieme dei segni specifici del nostro linguaggio L sarà un insieme dato in modo costruttivo, un esempio di numero infinito di funzioni è f_1^n, f_2^n, f_3^n, ..., altrimenti sarà necessario specificarli singolarmente.

Vediamo ora in che modo questi segni vengono combinati con altri seguendo determinate regole. Quando si interpretano delle espressioni, un segno di relazione è interpretato in una certa relazione, un segno di funzione in una ben precisa funzione.

Ad *esempio* $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ è un gruppo e quando scriviamo $x \cdot x^{-1} = 1$ non sappiamo chi è quel puntino, sappiamo solo che è un segno per una funzione binaria e il tutto diventa specifico, concreto, solo nel momento in cui diciamo chi è il gruppo.

Stiamo facendo la stessa cosa, anche se molto più in generale: scriveremo espressioni che sono pronte per diventare proposizioni, ma che, per poterlo essere, dovranno venire interpretate di volta in volta.

È necessario ora ricordare la distinzione tra linguaggio definito formalmente (linguaggio oggetto) e linguaggio naturale (metalinguaggio): il primo si può pensare come prodotto di una macchina, in quanto oggetto puramente formale che, pur essendo costruito da noi, è indipendente da interpretazioni e significati; il secondo è invece il linguaggio con il quale parliamo e discutiamo del primo, ed è indispensabile per dare definizioni ed effettuare dimostrazioni relative al linguaggio oggetto, come si vedrà subito, e soprattutto, per dare un significato al linguaggio oggetto, e quindi renderlo utile.

---

[6] La logica considera anche altri linguaggi, a cui abbiamo già dato qualche cenno: linguaggi al secondo ordine, linguaggi con tipi, linguaggio modale, ecc.

[7] Nell'approccio classico talvolta si considerano alcune costanti logiche come abbreviazioni di combinazioni di altre, considerate più basilari; ad esempio, si possono definire tutti i connettivi a partire solo da $\rightarrow$ e $\perp$.

[8] Quando si dice "segni per" vuol dire che si sta preparando l'interpretazione

Il linguaggio oggetto dovrà permetterci di descrivere un dominio di individui e delle relazioni tra di essi, sarà allora necessario indicare quelle stringhe del nostro linguaggio che traducano formalmente i concetti di individui e proprietà o relazioni; cioè, essendo questo insieme infinito, dare delle regole di costruzione per questi due insiemi,i termini e le formule.

I termini sono espressioni per denotare individui (o funzioni tra individui), le formule per indicare proprietà o relazioni (scrittura di una proposizione). Ora diamo le regole di formazione di queste espressioni, quindi la definizione sarà necessariamente induttiva: cioè la definizione sarà una serie di clausole che dicono che in una certa situazione si può formare una tale espressione che si chiamerà termine. È come se si dessero istruzioni ad una macchina, quindi sono clausole molto costruttive.

2.1. I termini. Incominciamo con l'affermare che i termini di L formano un insieme (nel senso costruttivo) chiamato Trm_L, perché le regole di formazione sono assolutamente costruttive. I termini sono quelle espressioni che *servono per denotare individui*[9] una volta che li interpretiamo. Quando si daranno le interpretazioni si dovrà anche specificare i domini in cui variano le variabili. I termini sono quindi espressioni che servono a denotare individui di quel dominio. Per semplificare, in genere, si prende un unico dominio dove farle variare. Una definizione rigorosa è data da due condizioni:

Definizione 2.1. L'insieme Trm_L dei termini del linguaggo L è definito induttivamente dalle clausole:

(1) $x_i \in Trm_L$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$ (cioè tutte le variabili sono termini) e $c \in Trm_L$ se c è un segno di costante di L
(2) Se $t_1, ..., t_n \in Trm_L$ ed f è un segno di funzione n-aria, allora $f(t_1, ..., t_n) \in Trm_L$

In parole povere, sono chiamate termini le variabili, i segni per costanti e tutte le espressioni ottenute applicando un segno di funzione (del linguaggio) a termini ottenuti precedentemente.

Facciamo un paio di esempi:

esempio 1 Nella struttura delle parentele è stato usato $P(x, y) = y$ padre di x. $p(x)$ serve per denotare un individuo, cioè y il padre di x. La funzione serve per indicare elementi e non per fare affermazioni; $p(x)$ quindi è un termine. In particolare se si dichiara $x = i$ ($i = me\ stesso$), allora $p(i)$ è un termine, che si dirà termine chiuso in quanto non contiene variabili (e perciò denota un individuo).

esempio 2 Presi i numeri naturali se x ed y sono variabili, allora anche $x + y$ serve per denotare individui: è semplicemente un individuo ottenuto applicando la funzione somma a due individui ipotetici.

La clausola *2* espressa nella notazione che abbiamo usato (esempio per i numeri naturali) dovremmo scrivere qualcosa di questo tipo:

$$\frac{t_1, ..., t_n \in Trm_L \quad f \in \{segni\ di\ funzione\ n-aria\ di\ L\}}{f(t_1, ..., t_n) \in Trm_L}$$

[9]non li denotano, ma "servono per", nel senso che potrebbero denotare funzioni calcolate su individui

Naturalmente questa è una scrittura buona per un libro, bisogna trovare un modo affinché sia interpretabile da una macchina. Comunque dovrebbe dare un'idea più chiara del fatto che è un insieme costruito con regole precise e quindi in particolare avranno un senso le quantificazioni sull' insieme di termini. Ad esempio, possiamo scrivere $\forall t \in Trm_L A(t)$, in un certo senso stiamo matematizzando la logica, e la tratteremo come un oggetto matematico, quindi possiamo scrivere proposizioni sulle espressioni.

esempio: x_1, x_2, $f_1^2(x_1, x_2)$, $f_1^3(x_1, f_1^2(x_1, x_2), x_3)$, $f_1^1(f_1^1(f_1^1(f_1^1(f_1^1(x_1)))))$ e $f_1^4(x_1, x_2, f_1^2(x_1, x_2), f_1^3(x_1, f_1^2(x_1, x_2), x_3))$ sono termini (nella pratica, non si è *mai* così formali).

Prima di approfondire questo argomento diamo la seguente:

Definizione 2.2. L'insieme dei termini chiusi è definito induttivamente da:

(1) i segni per costanti sono termini chiusi.
(2) se $t_1, t_2, ..., t_n$ sono termini chiusi e f_i^n è un segno di funzione n-aria, allora $f_i^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ è un termine chiuso.

In altre parole, un termine è chiuso se non contiene variabili.

Queste due definizioni, grazie alle loro clausole *1* e *2*, sono degli esempi di definizione per induzione, o induttiva, cioè l'insieme Trm_L è un insieme induttivamente definito e quindi un dominio in senso costruttivo.

Le clausole (o condizioni) iniziali (o di base), ci dicono quali oggetti stiano nell'insieme immediatamente, senza alcuna precedente conoscenza, ci sono inoltre delle condizioni induttive, che specificano in quali modi si possono costruire nuovi oggetti dell'insieme a partire da questi oggetti dati. Nel caso dei termini, la condizione *1* ci dice da quali espressioni "si parte" per costruire, con la regola *2*, tutti i termini.

L'unico modo per dimostrare che per ogni termine t vale qualcosa.... è fare una prova per induzione: si considera come termine tutto ciò che si può ottenere applicando per un numero finito di volte le due condizioni, cioè costruendo espressioni. Risulta implicito che nient'altro è un termine.

Supponiamo di voler dimostrare che una certa proposizione è vera per ogni termine t.

Si può fare per induzione perché l'insieme Trm_L è definito induttivamente. Se ad esempio la nostra proposizione è "t è colorato di rosso", possiamo usare una proprietà qualunque, è solo per mettere in moto una questione visiva, allora per poterla dire vera, dobbiamo mostrare che vale per ogni termine costruito senza premesse, (variabili e costanti) e che se vale per un certi termini $t_1, \ldots, t_k$ e f è un segno con k argomenti, allora vale anche per $f(t_1, \ldots, t_k)$. Cioè: parto da elementi colorati di rosso, e le regole per la costruzione di nuovi elementi conservano la proprietà: essere colorato di rosso.

Passiamo adesso ad un *esempio* abbastanza familiare e tipico di definizione induttiva cioè la definizione dei numeri naturali:

1. 0 è un numero naturale (base);

2. se x è un numero naturale, allora $s(x)$ è un numero naturale (passo induttivo).

I numeri naturali sono quindi rappresentabili come i termini chiusi di un particolare linguaggio, con un solo segno di costante ed un solo segno di funzione, unaria. In questo caso, possiamo rappresentare graficamente l'insieme di tutti i termini con una catena infinita discendente:

$$\begin{array}{c} 0 \\ | \\ s0 \\ | \\ ss0 \end{array}$$

Una definizione induttiva di questo tipo è una definizione costruttiva: infatti, nel definire i numeri naturali, essa ci da contemporaneamente un procedimento per costruirli. I "costruttori" (vocabolo preso dalla teoria dei calcolatori più che dalla logica) in questo caso sono il solo "s".

Se vogliamo dimostrare con l'induzione una certa proprietà per ogni elemento dell'insieme considerato, dobbiamo essere in grado di verificare che una data proprietà vale per gli oggetti "di base", cioè quelli che appartengono immediatamente all'insieme (in pratica quelli indicati nel passo base della definizione), e poi dimostrare che i "costruttori" conservano tale proprietà, cioè che se un oggetto ha quella proprietà, costruendone altri con il procedimento descritto nel passo induttivo otteniamo oggetti che hanno ancora quella proprietà, allora possiamo concludere che ogni oggetto appartenente all'insieme considerato possiede quella proprietà, e quindi che essa vale in generale per tutti gli elementi.

Diamo adesso un esempio (banale) di derivazione per induzione su Trm_L:

esempio Indichiamo con $P(t) \equiv$ "il numero delle parentesi aperte in t è uguale al numero della parentesi chiuse". Nel caso in cui t è ottenuto con la regola *1*, si dimostra che soddisfa la proprietà P, cioè che vale $P(t)$, in maniera banale; infatti in tal caso t è x_i oppure c_i, e il numero di parentesi aperte e chiuse è comunque zero.

Se $t_1....t_n$ soddisfano la proprietà P, allora chiaramente anche $f(t_1, \ldots, t_n)$ soddisfa P. Infatti, detto $pa(t)$ e $pc(t)$ rispettivamente il numero di parentesi aperte e di parentesi chiuse in t, si ha che $pa(f(t_1, \ldots, t_n)) = 1 + pa(t_1) + \cdots + pa(t_n)$. Per ipotesi induttiva $pa(t_1) = pc(t_1), \ldots, pa(t_n) = pc(t_n)$ e quindi $pc(f(t_1, \ldots, t_n))$, che è uguale a $1 + pc(t_1) + \ldots pc(t_n)$, risulta uguale a $pa(f(t_1, \ldots, t_n))$. (Esercizio: scrivere un vero programma che fa questo lavoro, in tutti i dettagli).

Diamo ora alcuni esempi di linguaggio e di relativa costruzione dei termini.

esempio 1 Costruiamo l'insieme dei termini a partire da un segno per costante, 0, e da due segni per funzioni unarie, f e g. Otteniamo l'albero binario completo (cioè, che non si ferma mai, è infinito in tutti i rami):

Osserviamo che, pur essendoci solamente 2 segni per funzioni, la rappresentazione grafica è molto complessa; se, invece di un solo segno di costante, avessimo considerato tutte le variabili, il grafico dei termini ottenuti avrebbe avuto la forma di un "albero" con infinite "radici" che si ramifica verso il basso in modo sempre più articolato una per ogni variabile.

esempio 2 Sia L_A il linguaggio degli anelli, con $+$, $\cdot$, $-$, 0, 1, $=$ il suo alfabeto. Se supponiamo che l'anello sia commutativo con unità, allora, in una tale struttura, un termine può essere uguale ad un altro più semplice (ad esempio $(x + x = (1 + 1)x = 2x)$. Una situazione matematica dove di

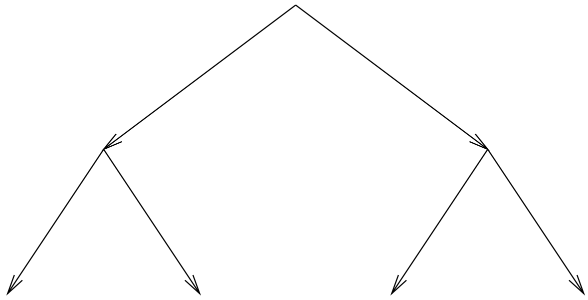

FIGURA 1. albero binario

fatto si usano i termini, anche se non si nominano esplicitamente, è il campo (e l'anello) dei polinomi: $K(x)$ ($K[x]$). L'anello dei polinomi è costruito a partire dai termini, ed in generale vale la seguente:

PROPOSIZIONE 2.3. In un anello commutativo con unità, per ogni termine $t(x)$ esiste un polinomio $p(x)$ tale che $t = p$. Se $t = t(x_1, \ldots, x_n)$, cioè in t compaiono le variabili $x_1, \ldots, x_n$, allora il polinomio a cui sarà uguale sarà del tipo: $p = p(x_1, \ldots, x_n)$.

Possiamo quindi affermare che i termini generalizzano ad una situazione qualsiasi il ruolo dei polinomi in un anello commutativo con unità.
esercizio In ogni spazio vettoriale ogni termine si può scrivere nella forma: $\Sigma_i k_i v_i$. Dare senso a questa affermazione e dimostrarla.

2.2. Le formule. Le formule sono espressioni del linguaggio formale, cioè combinazioni di segni. Sono quindi prive di un qualsiasi significato specifico; una volta interpretate (cioè dotate di un contenuto), diventano proposizioni specifiche o funzioni proposizionali.

Vedremo più avanti che le formule di base vengono dette formule atomiche. Viceversa ogni proposizione, per poter essere trattata matematicomente, deve essere espressa mediante una formula (non sempre ciò è possibile). Introduciamo adesso l'insieme delle formule Frm che è definito per induzione dalle clausole:

DEFINIZIONE 2.4. L'insieme delle formule è definito induttivamente dalle clausole:
(1) Se $t_1, ..., t_n \in Trm_L$ e R è un segno di relazione n-ario (cioè significa che sarà interpretato come una relazione tra n individui), allora $R(t_1, ..., t_n) \in Frm$. Inoltre, $\perp \in Frm$ falso è una formula. Queste vengono dette formule atomiche.
(2) Se $A\ B \in Frm$ allora $(A\&B)$,$(A \vee B)$,$(A \to B) \in Frm$[10]
(3) Se $A \in Frm$ allora $(\forall x_i)A \in Frm$ e $(\exists x_i)A \in Frm$ per qualunque $i = 1, 2, 3....$

Le formule ottenute con *1* si diranno atomiche.
esempio: nella struttura delle parentele F è un segno del linguaggio e $F(x, y)$ o $F(a, y)$ (a=Antonio) sono formule atomiche, quindi formule. Poi

[10] manca $\neg A$, perché è definito implicitamente come abbreviazione di $A \to falso$

abbiamo usato i segni del linguaggio e costruito le proposizioni semplicemente unendo proposizioni fra di loro con connettivi oppure modificandole con quantificatori.

Si noti che nella clausola *3* non serve specificare x libera in A, sarà essenziale distinguere quando faremo le regole di inferenza, perché $\forall$ e $\exists$ si applicano senza limiti a qualunque formula, anche se x non compare in essa, ad *esempio* $\forall x(0 = 0)$ è concessa come formula.

In realtà questa non è solo una convenzione in quanto, anche se x non occorre in A, $\forall xAx$ e $\exists xAx$ hanno un significato ben preciso, il quantificatore ha il campo d'azione la formula che sta a destra, quindi basta per la lettura unica.

Le parentesi servono ad indicare il procedimento di costruzione, altrimenti non si riesce a leggere la scrittura in modo univoco, possiamo vedere un paio di esempi:

esempio 1 $A\&B \rightarrow C$ non sarebbe individuata univocamente come formula si può avere:$(A\&B) \rightarrow C$ oppure $A\&(B \rightarrow C)$

esempio 2, siano $R_1(t_1, ...)$, $R_2(t_1^{'}, ...)$ due formule atomiche, allora anche $R_1(t_1, ...)$ & $R_2(t_1^{'}, ...)$ è una formula, allora possiamo scrivere: $R_1(t_1, ...)$ & $R_2(t_1^{'}, ...) \vee R_3(s_1, ...)$ che risulta essere, anche lei, una formula. A questo punto troviamo in difficoltà, poiché non si sa se è R_1 & $(R_2 \vee R_3)$ oppure $(R_1$ & $R_2) \vee R_3$.

Quindi per poter a ovviare questo inconveniente, nel momento stesso in cui si costruisce la formula, la si richiude tra parentesi in modo da ricordare quale sia il connettivo principale. Allora si ha: $(R_1(t_1, ...)\&R_2(t_1^{'}, ...)) \vee R_3(s_1, ...)$; in questo modo la lettura dell'espressione è unica.

La stessa definizione di frm si può scrivere più formalmente:

Definizione 2.5. (1) $\perp \in Frm$ (regola per il falso)

(2) $R(t_1, ..., t_n)$ (regola per le relazioni)

3. $$\frac{A \in Frm \quad B \in Frm}{(A\&B) \in Frm} \qquad \frac{A \in Frm \quad B \in Frm}{(A \vee B) \in Frm} \qquad \frac{A \in Frm \quad B \in Frm}{(A \rightarrow B) \in Frm}$$ (regole per i connettivi)

4. $$\frac{A \in Frm \quad i \in N}{\forall x_i A \in Frm} \qquad \frac{A \in Frm}{\exists x_i A \in Frm}$$ (regola per i quantificatori)

Si noti anche che, se tra i segni di relazione compare $=$, allora ogni equazione tra due termini risulta una formula atomica; ad *esempio*, l'espressione $x + y = y + x$ è una formula atomica.

Nel caso particolare in cui un determinato linguaggio sia totalmente privo di segni per relazioni, si ottengono egualmente formule, ma soltanto del tipo: $\perp$, $(\perp$ & $\perp)$, $(\perp \vee \perp), \ldots$, cioè tutte quelle costruite a partire da $\perp$ con nessuna, una, o più occorrenze delle costanti logiche $\&, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$.

Come si è visto non abbiamo mai parlato di dominio, cioè non si è scritto: $(x \in D)$ perché si è discusso sempre in astratto. Se vogliamo infatti che Frm sia un insieme, abbiamo due scelte: o fissiamo D, cioè fissiamo dove devono variare le variabili, oppure lo lasciamo ad arbitrio così l'insieme delle formule non risulta determinato e viene trattato come stringhe di segni, farà parte dell'interpretazione dire qual è il dominio delle variabili. Infatti, nel momento in cui si dice che le variabili sono di un unico dominio, questo rimane sottointeso. Conviene usare questo criterio: non menzionare il dominio, e considerarlo come parte dell'interpretazione[11].

Abbiamo visto che le relazioni sono funzioni proposizionali in un determinato dominio D. Ad *esempio*, nel caso di una relazione binaria R, si ha $R(x, y)$ *prop* $(x, y \in D)$. *Esempi* di relazioni sono: $=$ in algebra, $F(x, y)$ nella struttura delle parentele, $\leq$ in altri casi, ecc. Tutti questi sono esempi di relazioni binarie, ma non possiamo escludere a priori di aver bisogno di relazioni con un numero diverso di argomenti. Per questo scriviamo in generale $R(t_1, \ldots, t_n)$.

Perche Frm è un insieme? Una volta fissato il linguaggio L in questione, termini e formule così definiti, sono veri e propri insiemi, anche da un punto di vista costruttivo, perché la loro definizione ci dà anche un metodo per costruirli.

Le condizioni *2* e *3* sono induttive in modo chiaro,anche se ci sono infinite regole, qualunque sia la variabile io posso quantificare su essa, quindi ho infinite regole di costruzione, una per ogni i nel caso dei quantificatori.

Facciamo ora un commento sulla regola *1*: se compaiono $t_1....t_n$ termini, allora $R(t_1....t_n)$ è una formula, in che senso allora l'insieme delle formule è un insieme costruttivo anche se si parla su un insieme (i termini) dato precedentemente?

Dev'essere che l'insieme dei termini che sto usando sia costruttivo.

In termini di immagini di un calcolatore (macchina) si può pensare così: pensiamo ad una macchina che lista l'insieme dei termini, questo è possibile perché ci sono regole di generazione, quindi questa macchina listerà variabili, insiemi di costanti, ed un po' alla volta sputerà fuori tutte le possibili combinazioni seguendo le regole *1* e *2*.

Supponiamo di avere una macchina T che sputa fuori i termini $t_1....t_n$ se si da un tempo infinito, come faccio a costruire una macchina F che lista l'insieme delle formule, $A_1 A_2$.....?

Cominciamo a far partire una macchina che sputa fuori i termini, ma non posso aspettare che li produca tutti per cominciare a produrre formule[12], altrimenti non finisco più, e quindi man mano che la macchina T fa il suo lavoro, faccio partire la macchina F: la prima produce una lista infinita contenente tutti e soli i termini e la seconda una contenente tutte e sole le formule.

Se ad un istante di tempo la macchina T è arrivata ad n, la macchina F userà i termini $t_1....t_n$ per costruire le sue formule, siccome il tempo passa,

[11]se vogliamo svuotare del significato le scritture, non si può nemmeno scrivere D, perché sarebbe un segno che dovrebbe essere interpretato

[12]pur essendo insiemi infiniti, sono listabili, cioè, in linea teorica, è possibile elencare rispettivamente tutti i loro elementi, in virtù del fatto che le rispettive definizioni sono costruttive.

la macchia T allunga la lista dei termini che ha sputato e di conseguenza anche la macchina F un po' alla volta butta fuori tutte le formule.

Perché ciò è possibile?

Perché c'è un numero finito di scelte possibili tra i termini fino ad ora prodotto.

L'insieme delle formule è complesso, disponendo di molti "costruttori" è un albero molto ramificato, ciò non toglie che sia in ogni senso un insieme costruttivo.

Per verificare che una proprietà vale per tutte le formule l'unico modo è dare una dimostrazione per induzione sulla costruzione delle formule.

Abbiamo chiarito che quando definiamo un linguaggio lo dobbiamo fare nel modo più preciso: dichiarando tutti i segni quando sono finiti, o mettendo a disposizione delle regole fatte in modo che ciascun segno possa essere prodotto con un numero finito di passi. Perciò possiamo fare l'inverso: data una qualunque stringa di segni sarà possibile istruire una macchina affinché decida se una data espressione sia un termine, una formula o nessuno dei due.

Quindi "costruttivo" non implica necessariamente "finito", però implica "al più numerabile". prendiamo come esempio gli assiomi dell'aritmetica di Peano (PA).

In conclusione uno dei motivi fondamentali per cui abbiamo introdotto le definizioni formali di linguaggio, di termine e di formula è questo: ora possiamo trattare il concetto di dimostrabilità con i meccanismi tecnici della matematica, e addirittura studiare quanto possa essere in qualche modo simulato ed eseguito da un calcolatore.

Conviene a questo punto dare una distinzione rigorosa fra il caso in cui una variabile x compaia libera in una formula e il caso in cui x vi compare vincolata - chiusa - quantificata.

Noi assumeremo che variabile libera (free) abbia il significato di "libera per sostituzione", cioè tale che ad essa si possa sostituire qualunque espressione, mentre una variabile quantificata (bound) non è altro che un segnaposto, le variabili libere sono quelle che non cadono dentro un $\forall$ oppure $\exists$, noi indicheremo quindi con l'insieme $FV(A)$ "free variable di A" le variabili libere di una certe formula A.

Definiamo questo insieme induttivamente sulla costruzione delle formule.

Possiamo essere più rigorosi dicendo: definiamo una funzione sull'insieme delle formule nelle parti finite di $\mathbb{N}$. L'immagine tramite f di ogni formula sarà l'insieme degli indici delle variabili che siano libere in A.

Vediamo un *esempio*: nella formula $\forall x\ (x + x = 2x)$, x compare quantificata; non si può sostituire 3 al posto di x perché si ottiene $\forall x\ (3 + 3 = 6)$ che non ha più il senso voluto.

Diamo ora una definizione induttiva di variabile libera, prima in un termine e poi in una formula:

DEFINIZIONE 2.6. Diciamo che x è una variabile libera del termine t, se vi compare. A sua volta, questo è definito induttivamente da:

(1) x compare in x;
(2) Se x compare in uno dei termini $t_1, \ldots, t_n$, allora x compare in $f_i^n t_1, \ldots, t_n$

La definizione di variabile libera in una formula è allora data da:

(1) x non è libera in $\perp$;
(2) x è libera in $R_i^n t_1, \ldots, t_n$ se x compare in almeno uno dei termini $t_1, \ldots, t_n$;
(3) se x è libera nelle formule A e B, allora è libera in $(A\&B)$, $(B\&A)$, $(A \vee B)$, $(B \vee A)$, $(A \rightarrow B)$, $(B \rightarrow A)$ e, se $x \neq y$, in $(\forall y A)$, $(\exists y A)$;
(4) x non è libera in $(\forall x\ A)$ e in $(\exists x\ A)$.

Una variabile che compare ma non è libera si dice vincolata, o bound, o dummy. Un tipico esempio di variabile vincolata è la variabile di integrazione in un integrale definito.

Concludiamo con alcuni esercizi:

esercizio 1 Consideriamo un linguaggio in cui le relazioni siano $\in, \subseteq, =$ (tutte e tre binarie); verificare che

1. $\forall u\, \forall v\, (u \subseteq v\ \rightarrow\ \forall x\, (x \in u\ \rightarrow\ x \in v))$;
2. $\forall w\, \forall u\, (w = u\ \rightarrow\ \forall z\, (z \in w\ \rightarrow\ z \in u))$;
3. $\forall w\, \forall u\, \exists v\, (\forall t\, (t \in v\ \rightarrow\ (t \in w\ \wedge\ t \in u)))$

sono formule.

esercizio 2 Proviamo a scrivere delle istruzioni, in qualche linguaggio di programmazione che conosciamo (oppure lo inventiamo), che farà si che gli output siano tutti termini se si da un tempo infinito.

3. Le derivazioni

Abbiamo definito gli insiemi Trm e Frm, (tramite regole di costruzione), dunque possono essere dominio di quantificazione, e sono insiemi numerabili.

A questo punto saremmo pronti anche per dare una definizione formale delle derivazioni. Dovremmo solo dare una definizione induttiva delle derivazioni, cioè definire per induzione un insieme Drv i cui elementi sono coppie (Γ, Δ) per cui $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile (in LJ o LK). Questa definizione in qualche modo è già implicita in tutti gli esempi di derivazione che abbiamo visto, e per questo (in questa versione delle dispense) non la vediamo esplicitamente.

Scrivere un programma che controlli se una data espressione rappresenta davvero una derivazione che usa solo le regole di LJ o LK, è un compito relativamente facile per un programmatore ($proof - checking$). È diverso dal compito della ricerca di una derivazione ($proof - search$), cioè il compito di rispondere alla domanda: è derivabile $\Gamma\ \vdash\ A$?"

Tutte le regole di LJ o LK sono formulate , in un modo tale che "di sopra", tra le premesse, compaiano solo formule che compaiono anche nella conclusione, eventualmente come sottoformule (A è una sottoformula di $A \vee B$, etc.); allora il robot, una volta che ha la conclusione che deve derivare, sa dove cercare, perché basta che faccia un test su tutte le possibilità, applicando tutte le regole possibili, e tutte le scomposizioni possibili, che saranno comunque in numero finito. È chiaro che la cosa non è così semplice: Γ potrebbe essere lungo, contenere a sua volta altre cose che possono dar luogo a premesse diverse. È un lavoro non banale, ma può essere effettuato. Nel caso proposizionale si dimostra che c'è una procedura di decisione, proprio partendo da quest'idea.

Dunque si possono dare istruzioni ad un calcolatore in modo tale che, per formule proposizionali, cioè senza quantificatori, sia in grado di rispondere alla domanda: "da Γ si deriva A ?". Questo sia per la logica classica che per quella intuizionistica. Questo fatto si esprime dicendo: "La logica proposizionale è decidibile". Il problema di decidibilità appena citato anzi è un problema standard, di riferimento, per chi si occupa di teoria degli algoritmi o della complessità.

E nel caso dei quantificatori? La cosa incredibile è che nel caso dei quantificatori si può dimostrare che tale problema non è decidibile: cioè non esiste un algoritmo che sia in grado di rispondere alla domanda: "A è derivabile da Γ"? se tra le formule compaiono dei quantificatori. Questo è un tipico risultato da logici, nel senso che è uno studio di cosa si può fare o non si può fare con certi strumenti. A ben pensarci, è un risultato molto potente.

4. Le teorie assiomatiche

Una volta che si sia fissato un calcolo logico, lo si può utilizzare in un ambito di conoscenze specifico, ovvero per sviluppare una specifica teoria (ad esempio matematica come la teoria dei gruppi).

DEFINIZIONE 4.1. Una teoria assiomatica T nel linguaggio L è determinata da un calcolo logico L (LJ, LK o anche altri) e da un insieme Σ di formule di L, chiamate *assiomi* di T (si noti che Σ può essere anche infinito). Si dice che A è conseguenza logica di Γ in T se esiste una deduzione in L con conclusione A e assunzioni contenute in $\Gamma \cup \Sigma$. In particolare, si dice che A è un teorema di T se esiste una deduzione di A con assunzioni tutte contenute in Σ.

Questo è il concetto di teoria che si ha in logica: ci vuole un linguaggio, bisogna specificare la logica (ci sono almeno due scelte) gli assiomi, questo ci permette di fare le cose in maniera rigorosamente matematica. L'idea è questa: dato un insieme di postulati, o assiomi, l'apparato (deduttivo) della logica, ci permette delle conclusioni, e questo è ciò che vale nella teoria T.

Il punto importante è che si deve specificare anche qual è l'apparato deduttivo, perché non è affatto scontato che ce ne sia uno solo, si deve specificare se la logica è classica o intuizionistica, oppure una terza.

Si noti inoltre che la teoria (assiomatica) dei gruppi è scritta nel linguaggio $(+, -, 0, =)$, data da assiomi ben noti, è usualmente svolta nella logica classica. Similmente per anelli, campi, ecc. Si noti che nelle teorie algebriche compare sempre l'uguaglianza $=$; quando $=$ è tra i segni del linguaggio, si intende che una teoria deve contenere assiomi o regole che esprimano il significato di questo segno. Si ha cioè:

Convenzione *Se nel linguaggio L è presente il segno $=$, si intende che agli assiomi di una teoria, vanno aggiunti i seguenti:*

1- $\forall x(x = x)$;
2- $\forall xyz((x = y \;\&\; z = y) \to x = z)$;
3- $\forall xy(x = y \to y = x)$;
4- $x_1 = y_1 \& \ldots \& x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$ per ogni segno di funzione f;

5- $x_1 = y_1 \& \ldots \& x_n = y_n \to (R(x_1, \ldots, x_n) \to R(y_1, \ldots, y_n))$ per ogni segno di relazione R.

Come si dimostra facilmente, questi assiomi sono equivalenti alle regole date in precedenza, e cioè

1. $\vdash x = x$
2. $x = y, z = y \vdash x = z$
3. $y = x \vdash x = y$;
4. $x_1 = y_1 \quad \ldots \quad x_n = y_n \;\vdash\; f(x_1, \ldots, y_n) = f(x_1, \ldots, y_n)$ per ogni segno di funzione f;
5. $x_1 = y_1 \quad \ldots \quad x_n = y_n, R(x_1, \ldots, x_n) \;\vdash\; R(y_1, \ldots, y_n)$ per ogni segno di relazione R;

Naturalmente, le prime tre assunzioni dicono che $=$ è un'equivalenza, l'ordine è intenzionale, mentre le ultime due dicono che $=$ è rispettato da funzioni e da relazioni.

Un utile esercizio è dimostrare che tutte queste proprietà si estendono a termini arbitrari e a formule arbitrarie, cioè che vale (dove si intende che s, t siano termini arbitrari e A una formula arbitraria):

1. $\vdash t = t$
2. $t_1 = t_2, t_3 = t_2 \vdash t_1 = t_3$
3. $s = t \vdash t = s$;
4. $s_1 = t_1 \quad \ldots \quad s_n = t_n \;\vdash\; f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$ per ogni segno di funzione f;
5. $s_1 = t_1 \quad \ldots \quad s_n = t_n, A(s_1, \ldots, s_n) \;\vdash\; A(t_1, \ldots, t_n)$ per ogni formula A;

esercizio: Tenendo presente che tra i segni R possibili c'è anche $=$, dimostrare che le proprietà simmetrica (*3*) e transitiva (*2*) sono deducibili dalle altre (suggerimento: prima togliamo la simmetrica, dimostriamo che segue dalla transitiva, poi dimostriamo la transitiva).

5. Interpretazione di termini e formule (versione molto provvisoria)

Affinché le espressioni del linguaggio formale, come termini e formule, acquistino un contenuto, si deve specificare una interpretazione dei segni che vi compaiono.

Interpretare i segni per variabile $x_1, x_2, x_3, \ldots$ significa specificare un dominio D e assegnare un valore alle variabili con $\sigma : N \to D$, che dice in che valore in D va la variabile i-esima.

I segni per costante $c_1, c_2, c_3, \ldots$ si interpretano in $c_1^{\mathfrak{D}}, c_2^{\mathfrak{D}}, c_3^{\mathfrak{D}}, \ldots \in D$, elementi di D.

Una interpretazione dei segni per funzione $f_1, f_2, f_3, \ldots$ è data da funzioni $f^{\mathfrak{D}} : D^n \to D$, dove n è il numero di argomenti di f. Si noti bene la differenza: f è solo un segno, mentre $f^{\mathfrak{D}}$ è una vera funzione, o operazione, come $=$ o $\cdot$.

Un termine qualunque t si interpreta di conseguenza in $t^{\mathfrak{D}}$ con $t^{\mathfrak{D}} \equiv t^{\mathfrak{D}}(\sigma x_1, \ldots, \sigma x_n)$, che è definito induttivamente da $(f(t_1, \ldots, t_n))^{\mathfrak{D}} \equiv f^{\mathfrak{D}}(t_1^{\mathfrak{D}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{D}})$.

L'interpretazione di un segno per relazione R è naturalmente una relazione $R^{\mathfrak{D}}$, con lo stesso numero di argomenti.

Quindi una interpretazione del linguaggio è data da $\mathcal{D} = (D, f^{\mathcal{D}}, \ldots, R^{\mathcal{D}}, \ldots)$. Questo permette di dare contenuto ad ogni formula, che diventa una proposizione specifica su $\mathcal{D}$. Questo naturalmente è ottenuto tramite una definizione induttiva, seguendo l'idea che, una volta interpretati i segni di funzione e i segni di relazione, tutto il resto è obbligato, perché l'interpretazione delle costanti logiche è quella che abbimao già dato (tramite le regole di inferenza).

La definizione tradizionale in logica classica è quella che segue, dove si scrive $\mathcal{D} \models_\sigma A$, per dire che nell'interpretazione $\mathcal{D}$ la formula A vale (o che $\mathcal{D}$ è modello di A).

Definizione 5.1. Per ogni interpretazione $\mathcal{D}$, si definisce induttivamente:

$\mathcal{D} \models_\sigma (R\ t_1, ..., t_n)$ *sse* $R^{\mathcal{D}}(t_1^{\mathcal{D},\sigma}, ..., t_n^{\mathcal{D},\sigma})$ è vera (cioè, se vale come proposizione intorno a $\mathcal{D}$
$\mathcal{D} \models_\sigma (A\&B)$ *sse* $\mathcal{D} \models_\sigma A$ *e* $\mathcal{D} \models_\sigma B$
$\mathcal{D} \models_\sigma (A \vee B)$ *sse* $\mathcal{D} \models_\sigma A$ *o* $\mathcal{D} \models_\sigma B$
$\mathcal{D} \models_\sigma (\neg A)$ *sse non* $\mathcal{D} \models_\sigma A$
$\mathcal{D} \models_\sigma (\forall x A)$ *sse per ogni* $d \in D$, *se* $\sigma^* x = d$ *e* $\sigma^* y = \sigma y$ *allora* $\mathcal{D} \models_{\sigma^*} A$
$\mathcal{D} \models_\sigma (\exists x A)$ *sse per ogni* $d \in D$, *se* $\sigma^* x = d$ *e* $\sigma^* y = \sigma y$ *allora* $\mathcal{D} \models_{\sigma^*} A$

Questa è la tradizione più diffusa, il punto di riferimento. ed è chiamata la definizione di verità di Tarski. Noi vedremo più in dettaglio una definizione per il caso di LJ, che si chiama semantica di Kripke. E per ora ci limitiamo al caso senza quantificatori.