## 2. Esercitazione 23 aprile 2010

- Formalizzare le frasi seguenti e provare la loro correttezza, ovvero mostrare se la loro formalizzazione è valida in logica classica proposizionale:

1. $$\frac{\begin{array}{l}\text{Non si dà il caso che il fattoriale termini e non si esca dal ciclo.}\\ \text{Si esce dal ciclo.}\end{array}}{\text{Il fattoriale termina}}$$

   usando
   $E$= "Si esce dal ciclo"
   $T$= "Il fattoriale termina"

2. $$\frac{\begin{array}{l}\text{Solo se piove prendo l'ombrello.}\\ \text{Non piove.}\end{array}}{\text{Non prendo l'ombrello}}$$

   usando
   $P$= "Piove"
   0= "Prendo l'ombrello"

3. $$\frac{\text{Abbiamo sia pane che formaggio.}}{\text{Abbiamo pane o formaggio.}}$$

   usare come variabili proposizionali: P, F

   P="Abbiamo pane"
   F="Abbiamo formaggio"

4. $$\frac{\text{Non si dà il caso che domenica prossima non vada nè al mare né a camminare in montagna.}}{\text{Domenica prossima vado al mare o a camminare in montagna.}}$$

   si consiglia di usare:
   M= Domenica prossima vado al mare.
   C= Domenica prossima vado a camminare in montagna.

5. $$\frac{\text{Non si dà il caso che in questo paese se piove allora ci sia il sole.}}{\text{Se in questo paese piove allora non c'è il sole.}}$$

   si consiglia di usare:
   P= in questo paese piove
   S= in questo paese c'e' il sole.

6. $$\frac{\text{Sia che io sia al lavoro o non sia al lavoro trascorro serenamente i miei giorni e sono felice.}}{\text{Sono felice.}}$$

   si consiglia di usare:
   L= Io sono al lavoro
   S=Trascorro serenamente i miei giorni
   F=Sono felice

- Provare se la formalizzazione delle frasi seguenti usando

  $P$= "Il programma fattoriale termina sull' input 5."

  $F$= "Ad un certo punto la condizione del `while` diventa falsa"

E la loro NEGAZIONE dà una tautologia usando la procedura del calcolo dei sequenti:

1. Il programma fattoriale termina sull'input 5 perchè ad un certo punto la condizione del `while` diventa falsa.

$$P\&F$$

2. Ad un certo punto la condizione del `while` diventa falsa e quindi il programma fattoriale termina sull'input 5.

$$P\&F$$

3. Se ad un certo punto la condizione del `while` diventa falsa allora il programma fattoriale termina sull'input 5.

$$F \rightarrow P$$

4. Solo se ad un certo punto la condizione del `while` diventa falsa allora il programma fattoriale termina sull'input 5.

$$P \rightarrow F$$

5. Se e solo se ad un certo punto la condizione del `while` diventa falsa allora il programma fattoriale termina sull'input 5.

$$P \leftrightarrow F$$

6. Non si dà il caso che il programma fattoriali termini sull'input 5 e che ad un certo punto la condizione del `while` non diventi falsa.

$$\neg(P\&\neg F)$$

7. Se non si dà il caso che il programma fattoriale non termini sull'input 5, allora il programma fattoriale termina sull'input 5 oppure non si dà il che il caso che ad un certo punto la condizione del `while` diventa falsa.

$$\neg\neg P \rightarrow (P \vee \neg F)$$

8. Posto che se il programma termina sull'input 5 allora ad un certo punto la condizione del `while` diventa falsa, se non si dà il caso che la condizione del `while` diventi falsa allora il programma non termina sull'input 5.

$$(P \rightarrow F)\&\neg F \rightarrow \neg P$$

- Mostrare se sono derivabili in logica classica proposizionale:

$$\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$$

$$\neg\neg\neg A \vdash \neg A \vee A$$

$$(A \rightarrow C)\&(B \rightarrow C) \vdash B \vee A \rightarrow C$$

Si ricorda che una proposizione **A** si dice

**VALIDA** se è una tautologia, ovvero la sua tabella di verità è la funzione constante 1

**SODDISFACIBILE** se qualche valore della sua tabella di verità è 1

**NON VALIDA** se qualche valore della sua tabella di verità è 0

**INSODDISFACIBILE** se TUTTI I valori della sua tabella di verità sono 0

- Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE o SODDISFACIBILI o NON VALIDE o INSODDISFACIBILI:

  1. $\models P\&Q \rightarrow P$ ?
  2. $\models P\&Q \rightarrow Q$ ?
  3. $\models P \rightarrow (Q \rightarrow P\&Q)$?
  4. $\models (\ (\ P \rightarrow C\ )\&(\ Q \rightarrow C\ )\ ) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow C\ )$ ?
  5. $\models P \rightarrow P$ ?
  6. $\models P \vee \neg P$ ?
  7. $\models P\&\neg P$ ?
  8. $\models P \rightarrow (P \rightarrow P)$ ?
  9. $\models (P \rightarrow P) \rightarrow P$ ?
  10. $\models P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ ?
  11. $\models P\&Q \rightarrow P \vee Q$ ?
  12. $\models P \vee Q \rightarrow P$ ?
  13. $\models P \rightarrow P \vee Q$ ?
  14. $\models (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P \vee Q$ ?
  15. $\models \neg P \vee Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$ ?
  16. $\models P \vee Q \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$ ?
  17. $\models (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ ?
  18. $\models (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$ ?
  19. $\models P\&(Q \vee R) \rightarrow (P\&Q) \vee (P\&R)$?
  20. $\models P \rightarrow ((Q \vee R) \rightarrow (P\&Q) \vee (P\&R))$?
  21. $\models A \vee \neg B \rightarrow \neg A \vee B$ ?

- i. Mostrare la validità rispetto alla semantica delle tabelle di verità della regola

  $$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg\text{–S}$$

  ii. scrivere l'inversa della regola sopra e mostrare la sua validità.

  iii. la regola

  $$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\text{–S}$$

  è valida? Giustificare la risposta.

**Spunti per approfondimento personale fuori programma**:

- disegnare le regole del calcolo proposizionale classico in modo da NON dover usare gli scambi.
- come si formalizza
  "Non si dà il caso che se mento allora dica la verità"?

**calcolo sequenti Logica proposizionale classica $\mathbf{LC}_p^{abbr}$**

$$\text{ax-id}\quad \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \qquad\qquad \text{ax-}\bot\quad \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow -\mathrm{S}$$