I Compitino 17 maggio 2010

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- Non si contano le brutte copie.

- Specificate la logica in cui fate le derivazioni.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)

- Mostrare se i sequenti di seguito sono derivabili o meno in logica classica, e nel caso negativo, se si tratta di sequenti con sole proposizioni dire la riga della tabella in cui risulta falsa e nel caso di sequenti con formule fornire un contromodello della validità del sequente:

2 punti
$(A \to B) \to \neg A \& C \vdash B \to (B \to C)$

$$\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$$

2 punti
$\vdash (\ (A \to \neg B\ ) \to A\ ) \to A$

$$\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$$

3 punti
$\exists x\ (\ \neg B(x) \to A \vee \forall y\ C(y)\ ) \vdash \forall x\ \neg B(x) \to A \vee \forall x\ C(x) \qquad (\ x \notin VL(A)\ )$

$$\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$$

3 punti
$\exists x\ (\ A(x) \to \neg A(x)\ ) \vdash \neg \forall x\ (\ A(x) \vee \perp\ )$

$$\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$$

- Formalizzare in sequente le argomentazioni di seguito. Si provi se il sequente ottenuto è valido rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta (nel caso il sequente non sia valido l'esercizio vale 2 punti in più):

1. (5 punti)

   Tutti dormono.
   Nessuno sogna.

   Solo se Paolo non dorme allora sogna.

   si consiglia di usare:
   D(x)= x dorme
   S(x)= x sogna
   p=Paolo

   corretto in LC sì no

2. (5 punti)

   Se un programma non termina o non funziona allora è inutile.
   Il fattoriale è un programma utile.

   Il fattoriale termina e funziona.

   si consiglia di usare:
   P(x)= x è un programma
   T(x)= x termina
   F(x)= x funziona
   U(x)=x è utile
   f=il fattoriale

   corretto in LC sì no

3. (5 punti)

   Se tutti pagano le tasse, tutti ottengono adeguati benefici sociali.

   Chi paga le tasse ottiene adeguati benefici sociali.

   si consiglia di usare:
   T(x)= x paga le tasse
   B(x)=x ottiene adeguati benefici sociali

   corretto in LC sì no

4. (3 punti)

   La segretaria non accende il computer solo se non deve scrivere una lettera o deve parlare con il capo.
   La segretaria deve scrivere una lettera.
   La segretaria non accende il computer.

   La segretaria non deve parlare con il capo.

   si consiglia di usare:
   C = la segretaria accende il computer
   A = la segretaria deve parlare con il capo.
   L = la segretaria deve scrivere una lettera.

   corretto in LC sì no

5. (5 punti)

   Chi programma bene è bravo.
   Chi programma bene è intelligente.

   Qualcuno è bravo ed intelligente.

   si consiglia di usare:
   P(x)= x programma bene
   B(x)=x è bravo
   I(x)=x è intelligente

   corretto in LC sì no

6. (5 punti)

   Non tutte le ciambelle hanno il buco.

   Non esistono ciambelle con il buco o esistono ciambelle senza buco.

   si consiglia di usare:
   C(x)= x è ciambella
   B(x)= x ha il buco

   corretto in LC sì no

7. (5 punti)

   Tutte le cartelle del desktop di Gigi sono vuote
   oppure tutte le cartelle del desktop di Gigi sono corrotte.

   Ogni cartella del desktop di Gigi è vuota oppure corrotta.

   si consiglia di usare:
   D(x,y)= x è una cartella del desktop di y
   V(x) = x è vuota
   C(x) = x è corrotta
   g=Gigi

   corretto in LC sì no

- Stabilire quali delle seguenti formule sono VALIDE e nel caso negativo (ovvero nel caso non siano valide) dire se sono SODDISFACIBILI o INSODDISFACIBILI motivando la risposta: (ciascuna vale 5 punti)

  1. $\forall x\ (\ (\ A(x) \vee \neg A(x)\ ) \vee \perp)$
  2. $\exists x\ (\ A(x) \rightarrow \neg A(x)\ )$
  3. $\exists x\ (\ A(x) \leftrightarrow \neg A(x)\ )$
  4. $\forall x\ A(x) \vee \forall x\ \neg A(x)$
  5. $\exists x\ \neg A(x) \rightarrow \forall x\ A(x)$

- Stabilire quali delle seguenti regole sono valide mostrando la prova o un controesempio.
  Nel caso siano valide stabilire pure se sono sicure, ovvero se la loro inversa è pure valida.

(ciascuno vale 8 punti)

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \nabla}{\Gamma, B \vdash \forall x \; A(x), \nabla} \; 1$$

$$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg B, \neg C, \Delta} \; 2$$

$$\frac{\Gamma, A(x), B(y) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \; A(x), B(y) \vdash \Delta} \; 3 \quad (x \notin VL(\Gamma, B(y), \Delta))$$

Esercizi da 10 punti:

- Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI, ovvero hanno un modello che li rende validi, o INSODDISFACIBILI, ovvero nessun modello li rende validi, motivando la risposta:

  1. (10 punti)
     "Non esiste nulla che se è immortale allora tutti sono immortali"

     si consiglia di usare:
     I(x)= x è immortale

  2. (10 punti)

     $$\frac{\text{Ogni cartella del desktop di Gigi è vuota oppure corrotta.}}{\begin{array}{l}\text{Tutte le cartelle del desktop di Gigi sono vuote}\\ \text{oppure tutte le cartelle del desktop di Gigi sono corrotte.}\end{array}}$$

     si consiglia di usare:
     D(x,y)= x è una cartella del desktop di y
     V(x) = x è vuota
     C(x) = x è corrotta
     g=Gigi

corretto in LC sì no

Logica classica- calcolo abbreviato LC^{abbr}

$$\text{ax-id} \qquad\qquad \text{ax-}\bot$$
$$\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \qquad\qquad \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to -\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (x \notin VL(\Gamma, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

Logica classica predicativa LC

$$\begin{array}{cc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot \\ A \vdash A & \bot\vdash \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma'}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \nabla}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \nabla}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash \nabla}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash \nabla}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \nabla \quad \Gamma \vdash B, \nabla}{\Gamma \vdash A\&B, \nabla}\ \&-\text{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \nabla}{\Gamma, A\&B \vdash \nabla}\ \&-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \nabla}{\Gamma, A\&B \vdash \nabla}\ \&-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \nabla \quad \Gamma, B \vdash \nabla}{\Gamma, A \vee B \vdash \nabla}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \nabla}{\Gamma \vdash A \vee B, \nabla}\ \vee-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \nabla}{\Gamma \vdash A \vee B, \nabla}\ \vee-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \nabla}{\Gamma \vdash A \to B, \nabla}\ \to -\text{D} \qquad \frac{\Gamma' \vdash A, \nabla \quad \Gamma, B \vdash \nabla}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \nabla}\ \to -\text{re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta}\ \forall-\text{D}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta}\ \exists-\text{S}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists-\text{re}$$