7. Validità e soddisfacibilità classica di sequenti e regole

Diamo di seguito la definizione di validità e soddisfacibilità di un sequente e di una regola di sequenti.
Def. Validità di sequente
Un sequente

$$\Gamma \vdash \Delta$$

si dice **valido** rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità se vale

$$\models \quad \Gamma^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta^{\vee}$$

ovvero la tabella di verità di $\Gamma^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta^{\vee}$ ha in uscita TUTTI 1

ove

$\Gamma^{\&}$ è la congiunzione delle proposizioni in Γ oppure $\top$ se Γ è la lista vuota $\Delta^{\vee}$ è la disgiunzione delle proposizioni in Γ oppure $\perp$ se Δ è la lista vuota

Def. Validità di una regola ad una premessa
Una regola ad una premessa

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} *$$

si dice *valida rispetto alla semantica delle tabelle di verità* (oppure valida rispetto alla verità classica) se supposto che valga

$$\models \quad \Gamma_1^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta_1^{\vee}$$

allora vale

$$\models \quad \Gamma_2^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta_2^{\vee}$$

Def. Validità di regola a due premesse
Una regola a due premessa

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} *$$

si dice valida rispetto alla semantica delle tabelle di verità (oppure valida rispetto alla verità classica) se supposto che valgano

$$\models \quad \Gamma_1^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta_1^{\vee} \qquad \text{e} \qquad \models \Gamma_2^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta_2^{\vee}$$

allora vale

$$\models \quad \Gamma_3^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta_3^{\vee}$$

Def. Soddisfacibilità di un sequente
Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **soddisfacibile su una riga** della tabella di $\Gamma^{\&} \ \rightarrow \ \Delta^{\vee}$
se questa tabella assegna 1 alla riga considerata.

Def. CONSERVAZIONE Soddisfacibilità di una regola
Una regola **CONSERVA la SODDISFACIBILITÀ** se trasforma **sequenti soddisfacibili su una riga** in **sequenti soddisfacibili sulla stessa riga** (ove la riga in questione si riferisce ad una tabella di verità che contiene TUTTE le variabili proposizionali che compaiono in ALMENO una delle proposizioni

dei sequenti nella regola).

Lemma (sod-impl)
Data una proposizione $\texttt{pr} \to \texttt{pr}'$,
se per certi valori assegnati alle variabili proposizionali (ovvero su una certa riga della tabella) di $\texttt{pr} \to \texttt{pr}'$
si ha che se $\texttt{pr}$=1 allora pure $\texttt{pr}'= 1$
allora vale $\texttt{pr} \to \texttt{pr}'$=1, cioè $\texttt{pr} \to \texttt{pr}'$ è soddisfacibile sugli stessi valori assegnati alle variabili
(ovvero sulla stessa riga della tabella).

Attenzione ora a questa proposizioni:

Proposizione
Se un sequente è **valido** allora è pure **soddisfacibile**.

Si osservi che conservare la soddisfacibilità è una proprietà più forte che conservare la validità:

Proposizione
Se una regola **conserva la soddisfacibilità** allora **conserva la validità**, cioè è **valida**.

Esercizi

1. la regola
$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B, \Sigma \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$
conserva la soddisfacibilità, e quindi è valida, rispetto alla semantica delle tabelle di verità ??
2. la regola
$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{D}$$
conserva la soddisfacibilità, e quindi è valida, rispetto alla semantica delle tabelle di verità ??
3. l'assioma
$$\text{ax-}\perp \quad \Gamma_1, \perp, \Gamma_2 \vdash \nabla$$
vale rispetto alla semantica delle tabelle di verità??
4. la regola
$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$
conserva la soddisfacibilità, e quindi è valida, rispetto alla semantica delle tabelle di verità ??
5. la regola
$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{D}$$
conserva la soddisfacibilità, e quindi è valida, rispetto alla semantica delle tabelle di verità ??

6. la regola

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg\text{–D}$$

conserva la soddisfacibilità, e quindi è valida,è soddisfacibile, rispetto alla semantica delle tabelle di verità ??

7. la regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg\text{–S}$$

conserva la soddisfacibilità, e quindi è valida, rispetto alla semantica delle tabelle di verità ??

8. la regola

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \rightarrow\text{–D}$$

conserva la soddisfacibilità, e quindi è valida, rispetto alla semantica delle tabelle di verità ??