14. Come interpretare unicità? con l'uguaglianza

Problema: vogliamo formalizzare in logica classica

1. Tutti sono diversi.
2. Tutti sono uguali.
3. Ce ne sono due diversi.
4. Per ognuno c'è qualcuno di diverso da lui.
5. "Marcello ha un'unica laurea"

   con
   L(x,y)= x è una laurea di y
   m=Marcello

6. " Il programma fattoriale su input 2 dà un'unico output."

   con
   $O(x, y, z)$= il programma y su input z dà output il numero x
   f=il programma fattoriale
   2= due

7. " Certi potenti pensano solo a se stessi"

   con
   O(x)= x è potente
   P(x,y)=x pensa a y

Regole dell'uguaglianza:

$$\frac{\mathbf{\Sigma}\ ,\ \mathbf{t_{ter}} = \mathbf{s_{ter}}\ ,\ \mathbf{\Gamma}(\mathbf{t_{ter}})\ \vdash\ \mathbf{\Delta}(\mathbf{t_{ter}})\ ,\ \nabla}{\mathbf{\Sigma}\ ,\ \mathbf{\Gamma}(\mathbf{s_{ter}})\ ,\ \mathbf{t_{ter}} = \mathbf{s_{ter}}\ \vdash\ \mathbf{\Delta}(\mathbf{s_{ter}})\ ,\ \nabla} = -\mathrm{S} \qquad\qquad \begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{t_{ter}} = \mathbf{t_{ter}}\ ,\ \mathbf{\Delta} \end{array}$$

Come usare le regole di uguaglianza?

Nella regola

$$\frac{\mathbf{\Sigma}\ ,\ \mathbf{t_{ter}} = \mathbf{s_{ter}}\ ,\ \mathbf{\Gamma}(\mathbf{t_{ter}})\ \vdash\ \mathbf{\Delta}(\mathbf{t_{ter}})\ ,\ \nabla}{\mathbf{\Sigma}\ ,\ \mathbf{\Gamma}(\mathbf{s_{ter}})\ ,\ \mathbf{t_{ter}} = \mathbf{s_{ter}}\ \vdash\ \mathbf{\Delta}(\mathbf{s_{ter}})\ ,\ \nabla} = -\mathrm{S}$$

dall'alto verso il basso: NON TUTTE le occorrenze di $\mathbf{t_{ter}}$ DEVONO essere rimpiazzate con $\mathbf{s_{ter}}$
dal basso verso l'alto: NON TUTTE le occorrenze di $\mathbf{s_{ter}}$ DEVONO essere rimpiazzate con $\mathbf{t_{ter}}$.

Esempio 1: Se vogliamo derivare la simmetria dell'uguaglianza

$$t = s \vdash s = t$$

in $\mathrm{LC}_=$ si può applicare la regola $= -\mathrm{S}$ in tal modo:
si identifichi

$$\Sigma \;\equiv\; \emptyset \qquad \Gamma(x) \;\equiv\; \emptyset \qquad \Delta(x) \;\equiv\; x = t \qquad \nabla \;\equiv\; \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(t) \;\equiv\; t = t \qquad \Delta(s) \;\equiv\; s = t$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\dfrac{\begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ t = s \vdash t = t \end{array}}{t = s \vdash s = t} \; = -\mathrm{S}$$

Esempio 2: Se vogliamo derivare la transitività dell'uguaglianza

$$t = u, u = s \vdash t = s$$

in $\mathrm{LC}_=$ si può applicare la regola $= -\mathrm{S}$ in tal modo:
si identifichi

$$\Sigma \;\equiv\; t = u \qquad \Gamma(x) \;\equiv\; \emptyset \qquad \Delta(x) \;\equiv\; t = x \qquad \nabla \;\equiv\; \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(u) \;\equiv\; t = u \qquad \Delta(s) \;\equiv\; t = s$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \mathrm{ax} - \mathrm{id} \\ t = u, u = s \vdash t = u \end{array}}{t = u, u = s \vdash t = s} \; = -\mathrm{S}$$

Esercizi su uguaglianza

- Provare se le formalizzazioni nella prima pagina danno luogo a tautologie o paradossi, ovvero sono derivabili i sequenti dati o le loro negazioni assumendo che la negazione di un sequente predicativo

  $$\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$$

  SENZA variabili libere è il sequente

  $$\vdash \neg(\mathbf{\Gamma}^{\&} \;\rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee})$$

- Nella logica classica predicativa con uguaglianza $\mathrm{LC}_=$ provare a vedere quali di questi sequenti sono tautologie o paradossi:

  1. $a \neq b \;\vdash \forall x\ \exists y\ x \neq y$
  2. $\forall x\ \exists y\ x \neq y \;\vdash\; a \neq b$
  3. $\exists x\ \exists y\ x \neq y \;\vdash\; \forall x\ \exists y\ x \neq y$
  4. $\vdash \exists y \forall x\ x = y$
  5. $\vdash \forall x\ x \neq x$
  6. $\vdash \exists x\ x \neq x$

7. $\vdash \forall x \; x = x$
8. $\vdash \exists x \; x = c$
9. $\vdash \forall y \; \forall x \; (\; y = x \rightarrow x = y \;)$
10. $\vdash \forall y \; \forall x \; (\; y = z \rightarrow x = z \;)$
11. $\vdash \forall y \; \forall x \; \forall z \; (\; x = y \,\&\, y = z \;\; \rightarrow \;\; x = z \;)$

- Formalizzare le frasi in sequenti le argomentazioni elencate sotto e provare a derivarli in $\mathbf{LC}_{=}$:

1.

La sera dell'ultimo dell'anno festeggio con amici.
Non vedo l'ora che arrivi la sera dell' ultimo dell'anno.
La sera dell'ultimo dell'anno è il 31 dicembre.

Non vedo l'ora che arrivi la sera del 31 dicembre.

utilizzando:
F(x)= la sera di x festeggio con amici
O(x)= non vedo l'ora che arrivi la sera di x
a= ultimo dellanno
d= 31 dicembre

2.

Franco non è venuto all'ultima riunione.
Franco è venuto alla riunione del 10 giugno.

L'ultima riunione non è quella del 10 giugno.

utilizzando:
V(x,y)= x è venuto alla riunione y
u=ultima riunione
d=riunione del 10 giugno
f=Franco

3.

Franco è venuto ad una sola riunione.
Franco non è venuto all'ultima riunione.
Franco è venuto alla riunione del 10 giugno.

L'ultima riunione non è quella del 10 giugno.

utilizzando:
V(x,y)= x è venuto alla riunione y
u=ultima riunione
d=riunione del 10 giugno
f=Franco

4.

Il programma fattoriale su 3 dà come unico output 6.
Il programma fattoriale su 3 dà output il numero x.

Il numero x è uguale a 6.

con
f= " il fattoriale"
3= " il numero tre"
6= " il numero sei"
$O(x, y, z)$= " il programma y su z dà output il numero x"

5.

Il programma fattoriale su 2 dà un'`unico` output.
Il programma fattoriale su 2 dà output il numero 2.
Il programma fattoriale su 2 dà output il numero x.

Il numero x è uguale 2.

con
f= " il fattoriale"

2= " il numero due"
3= " il numero tre"
$O(x, y, z)$= " il programma y su z dà output il numero x"

6.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Il programma fattoriale su 2 dà un'}\texttt{unico}\text{ output.}\\ \text{Il programma fattoriale su 2 dà output 2.}\\ \text{2 è diverso da 3}\end{array}}{\text{Il programma fattoriale su 2 non dà output 3.}}$$

con
f= " il fattoriale"
2= " il numero due"
3= " il numero tre"
$O(x, y, z)$= " il programma y su z dà output il numero x"