17. Consigli vari

Nell'intento di cercare una derivazione di un sequente è meglio:

applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e $\forall$-D e $\exists$-S
se non si riesce a derivare il sequente meglio costruire il contromodello falsificando il sequente che si trova lungo il ramo che non finisce con foglie tutte assiomi PRIMA di un'applicazione (o di una seconda applicazione) di $\forall$-S o $\exists$-D
Se si confida di poter derivare il sequente si possono abbreviare le derivazioni con le regole di indebolimento o con le regole veloci, come $\exists-$D$\mathbf{v}$ e $\forall-$S$\mathbf{v}$
NON USARE regole NON SICURE per costruire contromodelli (e, sebbene NON sia obbligatorio, controllare che il sequente radice sia falso nel contromodello)
NON USARE regole NON SICURE se non si è sicuri se il sequente è derivabile
usare SOLO lettere $\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ come VARIABILI meglio se NUOVE nelle regole $\exists$**-S** e $\forall$**-D**
usare le lettere minuscole $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \ldots$ come costanti
le lettere **u**,**v**, **u**, **t**,**s** sono usate come METAVARIABILI per termini ovvero sono usate al posto sia di costanti che di variabili
applicare le regole $\forall$-S e $\exists$-D con TERMINI presenti nelle formule del sequente (se ce ne sono)
quando applichi la regola $\forall$-S perchè c'è ... $\vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$... nel sequente conclusione o la regola $\exists$-D agendo su ... $\vdash \exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$... nel sequente conclusione CONTROLLA di non mettere al posto di $\mathbf{z}$ una variabile $\mathbf{w}$ che diventa VINCOLATA in $\mathbf{A}(\mathbf{w})$!! (ad esempio se $\mathbf{A}(\mathbf{z}) \equiv \forall \mathbf{w}\ \mathbf{w} \neq \mathbf{z}$ la sostituzione $\mathbf{A}(\mathbf{w}) \equiv \forall \mathbf{w}\ \mathbf{w} \neq \mathbf{w}$ NON è LECITA!!!)

18. Nozione di teoria ed esempi

Def. Con il termine **teoria** si intende un'*estensione* del calcolo della logica classica con uguaglianza $LC_=$ con degli **assiomi extralogici** e **regole di composizione a dx e a sx**

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{comp}_{dx}$$

ovvero in breve

TEORIA= LOGICA + regole composizione + assiomi EXTRALOGICI

teorema:
I calcoli $\mathbf{LC}_=$ e $\mathbf{LC}_=$**+composizioni** dimostrano gli stessi sequenti
(questo fatto è noto come *teorema di eliminazione della composizione*)

Esercizio: si provi che le regole di composizioni sono valide.

Le regole di composizioni sono anche sicure? NOOOO!!! mostrare perchè ....

Memo:

In una teoria le foglie di una derivazione
possono essere ASSIOMI extralogici!!!
(di solito usati con le regole $\mathbf{comp}_{sx}$)

Esempio di Teoria: Aritmetica di Peano detta PA

L'aritmetica di Peano, in breve **PA**, è una teoria ottenuta aggiungendo a $LC_=$ le seguenti regole

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{comp}_{dx}$$

e i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \rightarrow x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash\ A(0)\ \&\ \forall x\ (\ A(x) \rightarrow A(s(x))\ )\ \rightarrow\ \forall x\ A(x)$$

ATTENZIONE nuovi tipi di simboli!: nel linguaggio dell'aritmetica di Peano oltre alla costante zero 0 vi sono 3 simboli di funzione:

$$\mathbf{s(x)} \qquad\qquad \mathbf{x+y} \qquad\qquad \mathbf{x\cdot y}$$

quello del successore di $\mathbf{x}$, quello della somma e quello del prodotto.

Nella teoria dell'aritmetica di Peano il numerale n si rappresenta in tal modo
$\mathbf{n} \equiv \underbrace{\mathbf{s(s\ldots(0))}}_{\text{n-volte}}$

e quindi per esempio

$\mathbf{1} \equiv \mathbf{s(0)}$

$\mathbf{2} \equiv \mathbf{s(\,s(0)\,)}$

Utili regole valide su uguaglianza

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad\qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

Ad esempio il sequente

$$\vdash 1 + 0 = 1$$

Si può derivare per esempio così

$$\cfrac{\vdash \mathbf{Ax}.3 \qquad \cfrac{\cfrac{\textbf{ax-id}}{\mathbf{Ax}.3\,,\ s(0)+0=s(0) \vdash s(0)+0=s(0)}}{\forall x\ x+0=x \vdash s(0)+0=s(0)}\ \forall\text{−S}}{\vdash s(0)+0=s(0)}\ \text{comp}_{\mathbf{sx}}$$

Domande:

- É possibile che in **PA** si derivi una formula `fr`, ovvero si deriva $\vdash$ `fr`, e ANCHE la sua negazione ossia si deriva $\vdash \neg$`fr`???

- Se in **PA** si derivasse una formula $\vdash$ `fr` e anche la sua negazione $\vdash \neg$`fr`, si deriverebbe in **PA** pure il sequente $\vdash\perp$??
- dai punti precedenti si mostri che: se si assume che in **PA** NON si deriva il sequente $\vdash\perp$, ovvero **PA** è NON CONTRADDITTORIA o CONSISTENTE, allora
  - se in **PA** si deriva $\vdash$ `fr` allora $\vdash \neg$`fr` NON si deriva in **PA**;
  - se in **PA** si deriva $\vdash \neg$`fr` allora $\vdash$ `fr` NON si deriva in **PA**

Esercizi

Stabilire quali dei sequenti sotto sono validi nell'aritmetica di Peano: (suggerimento: nel caso di validità lo si mostri derivando il sequente e nel caso di non validità sospetta lo si dimostri derivando la negazione del sequente e assumendo che in **PA** non si deriva il sequente $\vdash\perp$ si concluda che il sequente di partenza non si deriva....)

1. $\vdash 5 + 0 = 5$
2. $\vdash \forall x\ (\ s(x) = s(5) \rightarrow x = 5\ )$
3. $\vdash 0 = 4 \cdot 0$
4. $\vdash \forall x\ (\ x = 7 \rightarrow s(x) = s(7)\ )$
5. $\vdash \exists x\ \exists y\ 1 + x = 3 + y$
6. $\vdash \forall x\ \exists y\ (5 \cdot 1) \cdot 0 = 5 \cdot y$
7. $\vdash \exists x\ \exists y\ x \neq y$
8. $\vdash \forall x\ 0 \neq s(x) + 0$
9. $\vdash \forall x\ \forall y\ x = y$
10. $\vdash 5 + 1 = 6$
11. $\vdash 0 + 1 = 1$
12. $\vdash \forall x\ 0 \neq s(x) + 0$

Memo: come cercare verità in una teoria

Ha senso provare verità teoriche tra formule *non valide e soddisfacibili* di $LC_=$ $\Rightarrow$ NO assiomi extra per paradossi e verità logiche

Teorie generiche

1. Sia T_{bi} la teoria che estende $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

   - Sia Chiara che Pina vanno in bici.
   - Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va
   - Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.
   - Chiara non va in bici se Elia non ci va.

   Si consiglia di usare:
   V(x)= x va in bici,
   c=Chiara, p=Pina, e=Elia, g=Giorgio, f=Fabio.

   Dedurre poi le seguenti affermazioni in T_{bi}:

   - Fabio non va in bici.
   - Giorgio va in bici.
   - Se Fabio va in bici allora Chiara non ci va.
   - Elia va in bici.
   - Qualcuno va in bici e qualcuno non ci va.

2. Sia T_{vec} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

   - Pippo è più vecchio di Ada.
   - Nessuno è più vecchio di Gigi.
   - Chi è più vecchio di Pippo è piú vecchio di Gigi.
   - Ada è più vecchia di Chiara.
   - Non si dà il caso che Chiara non sia più vecchia di Titti.
   - Se uno è più vecchio di un altro e quest'altro è più vecchio di un terzo, il primo è più vecchio del terzo.
   - Chiara non è Titti.

   suggerimento: si consiglia di usare:
   A(x,y)= x è più vecchio di y
   g=Gigi, p= Pippo, a= Ada, c= Chiara, t=Titti
   uno=x, altro =y, terzo=z

   Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

   Derivare

   - Qualcuno è più vecchio di Ada.
   - Nessuno è più vecchio di Pippo.
   - Pippo è più vecchio di Chiara.
   - Qualcuno è piú vecchio di Titti.
   - Ada è più vecchia di qualcuno che non è Chiara.

3. Sia T_{gi}^{cla} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

   (a) Se Claudia non va in gita allora Giovanni ci va.
   (b) Beppe non va in gita se e solo se ci va Giovanni.
   (c) Beppe va in gita se Claudia non va in gita.
   (d) Non tutti vanno in gita.

   Si consiglia di usare:
   G(x)= x va in gita, c=Claudia, g=Giovanni, b=Beppe.

   Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione in T_{gi}^{cla}:

   (e) Qualcuno non va in gita.
   (f) Se Giovanni non va in gita allora Beppe ci va.
   (g) Se Claudia non va in gita allora Beppe non ci va.
   (h) Claudia va in gita.
   (i) Non si dà il caso che nessuno vada in gita.

4. Sia T_{am}^{cla} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

   (a) Se Claudia ammira qualcuno questo qualcuno ammira Claudia.
   (b) Pippo ammira tutti quelli che Gianni non ammira.
   (c) Non c'è nessuno che Pippo ammiri.
   (d) Claudia ammira Fabio.

   suggerimento: si consiglia di usare:
   A(x,y)= x ammira y
   g=Gianni, p= Pippo, f= Fabio, c= Claudia

   Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria T_{am}^{cla}:

   (e) Fabio ammira Claudia.
   (f) Pippo non ammira Claudia.
   (g) Gianni ammira tutti.
   (h) Claudia ammirebbe Pippo se Pippo ammirasse Claudia.
   (i) Gianni ammira Claudia.