Correzione simulazione del compitino di logica del 8/11/2019

Stevanato Giacomo

15/11/2019

Esercizio 1. Mostrare se i sequenti elencati qui sotto sono tautologie o opinioni o paradossi in logica classica. Nel caso il sequente sia un'opinione esibire una riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e una riga in cui il sequente è vero.

1) $\vdash\ \neg\neg(\neg B \lor M)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B\ \vdash\ M}{\vdash\ \neg B, M}\ \neg - D}{\vdash\ \neg B \lor M}\ \lor - D}{\neg(\neg B \lor M) \vdash}\ \neg - S}{\vdash\ \neg\neg(\neg B \lor M)}\ \neg - D$$

Il sequente non è una tautologia. Possiamo già notare che il sequente è falso nella riga con $B = 1$ e $M = 0$. Poi possiamo continuare con due metodi:

- Metodo robotico
  Deriviamo la negazione del sequente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg B \vdash \qquad M \vdash}{\neg B \lor M\ \vdash}\ \lor - S}{\vdash\ \neg(\neg B \lor M)}\ \neg - D}{\neg\neg(\neg B \lor M)\ \vdash}\ \neg - S}{\vdash\ \neg\neg\neg(\neg B \lor M)}\ \neg - D$$

Ci possiamo fermare perché abbiamo trovato $M \vdash$ che non è un assioma. La negazione del sequente iniziale non è una tautologia e quindi il sequente iniziale è un'opinione. Quindi come già osservato il sequente iniziale è falso nella riga con $B = 1$ e $M = 0$, mentre dalla riga che falsifica la foglia $M \vdash$ dell'albero della negazione del sequente iniziale otteniamo che il sequente iniziale è vero nella riga con $M = 1$ e B a piacere.

- Metodo veloce
  Ci accorgiamo che $B \vdash M$ è l'unica foglia dell'albero del sequente iniziale e quindi la verità del sequente dipende solo dalla verità del sequente $B \vdash M$. Il sequente iniziale è quindi un'opinione ed è falso solo nella riga con $B = 1$ e $M = 0$ e vero in qualsiasi altra riga, ad esempio in quella con $B = M = 0$.

2) $\vdash \ \neg(A \to (B \to A))$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash A \qquad \dfrac{\vdash B \qquad A \vdash}{B \to A \ \vdash}\ \to -S}{A \to (B \to A) \ \vdash}\ \to -S}{\vdash \ \neg(A \to (B \to A))}\ \neg - D$$

Il sequente non è una tautologia. Poi possiamo continuare con due metodi:

- Metodo robotico:
  Deriviamo la negazione del sequente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A, B \ \vdash \ A\end{array}}{A \ \vdash \ B \to A}\ \to -D}{\vdash \ A \to (B \to A)}\ \to -D}{\neg(A \to (B \to A)) \ \vdash}\ \neg - S}{\vdash \ \neg\neg(A \to (B \to A))}\ \neg - D$$

  La negazione del sequente iniziale è una tautologia, quindi il sequente iniziale è un paradosso.

- Metodo veloce:
  Ci accorgiamo che, poiché la falsità scende più forte della verità, il sequente iniziale è falso se $A = 0$ e anche se $A = 1$. Quindi è sempre falso ed è un paradosso.

Esercizio 2. Formalizzare in sequente l'argomentazione descritta sotto (mettendo il segno di sequente al posto della sbarra). Si provi se il sequente ottenuto è una tautologia, opinione o paradosso motivando la risposta. Nel caso il sequente sia un'opinione esibire una riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e una riga in cui il sequente è vero.

$$\frac{\text{Non si può girare a destra nè a sinistra se le strade sono bloccate}}{\text{Solo se si può girare a destra le strade non sono bloccate}}$$

Si consiglia di usare:

- $D =$ "si può girare a destra"
- $S =$ "si può girare a sinistra"
- $B =$ "le strade sono bloccate"

Iniziamo traducendo le due frasi in proposizioni:

- "Non si può girare a destra nè a sinistra se le strade sono bloccate" diventa $B \to \neg D \& \neg S$
- "Solo se si può girare a destra le strade non sono bloccate" diventa $\neg B \to D$

Otteniamo il sequente $B \to \neg D \& \neg S \ \vdash \ \neg B \to D$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdash \ B, B, D \qquad \neg D \& \neg S \ \vdash \ B, D}{B \to \neg D \& \neg S \ \vdash B, D} \to -S}{B \to \neg D \& \neg S, \neg B \ \vdash \ D} \neg - S}{B \to \neg D \& \neg S \ \vdash \ \neg B \to D} \to -D$$

Ci possiamo fermare perché $\vdash B, B, D$ non è un assioma, quindi il sequente iniziale non è una tautologia. Possiamo già notare quindi che il sequente iniziale è falso nella riga con $B = D = 0$ e S a piacere. Deriviamo ora la negazione del sequente:

$$\cfrac{\cfrac{\vdash \ B \to \neg D \& \neg S \qquad \cfrac{\vdash \ \neg B \qquad D \vdash}{\neg B \to D \ \vdash} \to -S}{(B \to \neg D \& \neg S) \to (\neg B \to D) \ \vdash} \to -S}{\vdash \ \neg((B \to \neg D \& \neg S) \to (\neg B \to D))} \neg - D$$

Ci possiamo fermare perché $D \vdash$ non è un assioma. La negazione del sequente iniziale non è una tautologia, quindi il sequente iniziale non è un paradosso ed è allora un'opinione. In particolare dalla foglia $D \ \vdash$ dell'albero della negazione del sequente iniziale si trova la riga r in cui il sequente iniziale è vero con $D = 1$ e B e S a piacere.

Esercizio 3. Sia T_{vel} la teoria ottenuta estendendo LC_p con la formalizzazione dei sequenti assiomi:

Ax1) Sara non va in barca a vela ma ci va Emma
Ax2) Non si dà il caso che nè Filippo e nè Michele non vadano in barca a vela
Ax3) Michele va in barca a vela se e solo se tira vento
Ax4) Solo se Filippo non va in barca ci va Michele invece
Ax5) Tira vento se Filippo va in barca a vela

Si consiglia di usare:

- T = "tira vento"
- E = "Emma va in barca a vela"
- F = "Filippo va in barca a vela"
- M = "Michele va in barca a vela"
- S = "Sara va in barca a vela"

Derivare poi in T_{vel} i teoremi corrispondenti alla formalizzazione delle seguenti affermazioni:

T1) Emma va in barca a vela.
T2) Filippo non va in barca a vela.
T3) Michele va in barca a vela.
T4) Tira vento.

Traduciamo innanzitutto gli assiomi in proposizioni:

Ax1) $\neg S \& E$
Ax2) $\neg(\neg F \& \neg M)$
Ax3) $(M \to T) \& (T \to M)$
Ax4) $M \to \neg F$
Ax5) $F \to T$

Passo a tradurre in proposizioni e dimostrare i teoremi:

T1) E

$$\dfrac{\vdash \text{Ax1} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{\neg S, E \vdash E}}{\neg S \& E \vdash E}\ \& - S}{\vdash E}\ \text{comp}$$

T2) $\neg F$

$$
\dfrac{\vdash \mathrm{Ax4} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg F \vdash \neg F}\,\text{ax-id} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash \mathrm{Ax5} \qquad \dfrac{\dfrac{}{F \vdash F, M}\,\text{ax-id} \qquad \pi_1}{F, F \to T \vdash M}\,\to -S}{F \vdash M}\,\text{comp}}{\vdash \neg F, M}\,\neg - D}{M \to \neg F \vdash \neg F}\,\to -S}{\vdash \neg F}\,\text{comp}
$$

La diramazione π_1 è mostrata qui di seguito per motivi di spazio.

$$
\dfrac{\vdash \mathrm{Ax3} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F, T, M \to T, M \vdash M}\,\text{ax-id} \qquad \dfrac{}{F, T, M \to T \vdash T, M}\,\text{ax-id}}{F, T, M \to T, T \to M \vdash M}\,\to -S}{F, T, (M \to T)\&(T \to M) \vdash M}\,\& - S}{F, T \vdash M}\,\text{comp}
$$

T3) M

$$
\dfrac{\vdash \mathrm{Ax2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \mathrm{T2} \qquad \dfrac{}{\neg F \vdash \neg F, M}\,\text{ax-id}}{\vdash \neg F, M}\,\text{comp} \qquad \dfrac{\dfrac{}{M \vdash M}\,\text{ax-id}}{\vdash \neg M, M}\,\neg - D}{\vdash \neg F \& \neg M, M}\,\& - D}{\neg(\neg F \& \neg M) \vdash M}\,\neg - S}{\vdash M}\,\text{comp}
$$

T4) T

$$
\dfrac{\vdash \mathrm{Ax3} \qquad \dfrac{\dfrac{\pi_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{M \vdash M, T}\,\text{ax-id} \qquad \dfrac{}{M, T \vdash T}\,\text{ax-it}}{M, M \to T \vdash T}\,\to -S}{M \to T, M \vdash T}\,sc_{sx}}{M \to T, T \to M \vdash T}\,\to -S}{(M \to T)\&(T \to M) \vdash T}\,\& - S}{\vdash T}\,\text{comp}
$$

La diramazione π_2 è mostrata qui di seguito per motivi di spazio.

$$
\dfrac{\dfrac{\vdash \mathrm{T3} \qquad \dfrac{}{M \vdash M, T, T}\,\text{ax-id}}{\vdash M, T, T}\,\text{comp} \qquad \dfrac{}{T \vdash T, T}\,\text{ax-it}}{M \to T \vdash T, T}\,\to -S
$$

Esercizio 4.

- La regola

$$\frac{\vdash\ A\&B \qquad C, A\&B, D\ \vdash\ M}{C, D\ \vdash\ M}\,0$$

è valida? Sono valide le sue inverse? È regola sicura?

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono:

(1) $tt \to A\&B = 1$ su r (equivalente a $A\&B = 1$ su r)
(2) $(C\&(A\&B))\&D \to M = 1$ su r
(3) $C\&D = 1$ su r

Tesi
$M = 1$ su r

Dimostrazione. Dall'ipotesi (3) sappiamo che $C = 1$ e $D = 1$ su r. Inoltre dall'ipotesi (1) sappiamo che $A = 1$ e $B = 1$ su r. Ora nell'ipotesi (2) otteniamo $1 \to M$, da cui $M = 1$ su r che era la tesi. □

La tesi è soddisfatta quindi la regola è valida.

Controlliamo ora se la regola è invertibile e quindi sicura. Invertendo la regola iniziale otteniamo due regole che vanno controllate separatamente:

- Regola inversa 1:

$$\frac{C, D\ \vdash\ M}{\vdash\ A\&B}\,\text{inv-0}$$

Cerco una riga r tale che:

(1) $C\&D \to M = 1$ su r
(2) $tt = 1$ su r (sempre vera)
(3) $A\&B = 0$ su r

Considero la riga con $A = B = C = D = M = 0$

(1) $0\&0 \to 0 = 1$ ok
(3) $0\&0 = 0$ ok

La riga considerata è la riga che cercavo, quindi la regola non è valida e la regola iniziale non è invertibile e quindi non è sicura.

– Regola inversa 2:

$$\frac{C, D \ \vdash \ M}{C, A\&B, D \ \vdash \ M} \text{inv-0}$$

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono:

(1) $C\&D \rightarrow M = 1$ su r
(2) $(C\&(A\&B))\&D = 1$ su r

Tesi
$M = 1$ su r

Dimostrazione. Dall'ipotesi (2) sappiamo che $C = 1$ e $D = 1$ su r. Ora l'ipotesi (1) diventa $1\&1 \rightarrow M = 1$ da cui otteniamo $M = 1$ su r che era la nostra tesi. □

La tesi è soddisfatta quindi la regola è valida.

- La regola

$$\frac{A \ \vdash \ \neg A \vee M}{A \vee M \vdash M} \ 1$$

è valida? È valida la sua inversa? È regola sicura?

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono:

(1) $A \rightarrow \neg A \vee M = 1$ su r
(2) $A \vee M = 1$ su r

Tesi
$M = 1$ su r

Dimostrazione. Dall'ipotesi (2) abbiamo due casi:

– $M = 1$ su r che la nostra tesi
– $A = 1$ su r. Ora l'ipotesi (1) diventa $1 \rightarrow 0 \vee M = 1$ da cui otteniamo $M = 1$ su r che è la nostra tesi.

□

La tesi è verificata quindi la regola è valida.

Controlliamo ora se la regola è invertibile e quindi sicura.

$$\frac{A \vee M \vdash M}{A \ \vdash \ \neg A \vee M} \text{ inv-1}$$

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono:
(1) $A \vee M \to M = 1$ su r
(2) $A = 1$ su r
Tesi
$M = 1$ su r

Dimostrazione. Dall'ipotesi (2) abbiamo che $A = 1$ su r. Ora nell'ipotesi (1) otteniamo $1 \vee M \to M = 1$ su r da cui otteniamo $M = 1$ su r che è la nostra tesi. $\square$

La tesi è verificata quindi la regola è valida. La regola iniziale è quindi invertibile e sicura.