## III appello 17 luglio 2021

`Nome:` `Cognome:`

- Scrivere in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Si ricorda di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Si ricorda di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Si esplicitino le eventuali regole derivate usate che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- ATTENZIONE: se si risolvono correttamente TUTTI gli esercizi con il segno ++ si prende il voto 30 independentemente dall'avere o meno un bonus accumulato.
- non si supera l'appello operando solo formalizzazioni a meno che non sia siano completati correttamente il primo e terzo esercizio qui di seguito.

- Mostrare se i sequenti elencati sotto sono tautologie, opinioni o paradossi in logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità si assegna il doppio dei punti indicati).

  - (`obbligatorio`)

    3 punti
    $\neg(A \to C) \vdash \neg\neg A \,\&\, \perp$

  - (++)
    6 punti
    $\exists y\, \exists z\, z \neq y \vdash a = b \vee \neg \forall y\, y = c$

  - (`obbligatorio` )

    5 punti
    $\neg\exists x\, \neg A(x) \,\&\, \neg\forall x\, x = x \vdash \forall z\, A(z)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi nella logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità si assegna il doppio dei punti indicati).

  - (6 punti )
    Chiunque ha rispetto dell'ambiente non inquina.
    I saggi non inquinano.
    ———————————————
    Chi inquina non è nè saggio nè ha rispetto dell'ambiente."

si consiglia di usare:
$R(y)$ =“y ha rispetto dell'ambiente”
$I(x)$=“x inquina”
$S(x)$= “x è saggio”

- (++) (6 punti)

$$\frac{\text{Qualcuno non interviene ma non neanche ascolta.}}{\text{Giada ascolta e interviene.}}$$

si consiglia di usare:
$A(x)$ =“x ascolta”
$I(x)$ = “x interviene”'
$g$= Giada ”

- (8 punti)

$$\frac{\text{Giada non ha figli.}}{\text{Non si dà il caso che Gloria abbia un solo figlio o almeno due figli.}}$$

si consiglia di usare:
$F(x, y)$= $x$ è figlio di $y$
g=Giada

- (++) (14 punti)

“Non esiste alcuno che se lui non ascolta e neanche impara allora nessuno ascolta o nessuno impara.”

si consiglia di usare:
$A(y)$ =“y ascolta”
$I(x)$ = “x impara”

- (30 punti) Sia $T_{arr}$ la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  1. Se Noemi arrampica allora non piove e non fa freddo.
  2. Fa freddo e Rita arrampica se non piove.
  3. Solo se fa freddo e Noemi non arrampica, allora non piove.
  4. Non piove se e solo se Rita e Noemi non arrampicano.
  5. Solo se Noemi arrampica allora non arrampica Rita.

  Si consiglia di usare:
  A(x)= x arrampica    F=fa freddo    P=piove    r=Rita    n=Noemi

  Formalizzare le seguenti affermazioni e dedurne la validità in $T_{arr}$:

  - (6 punti) Piove.
  - (5 punti) Noemi non arrampica.
  - (5 punti ) Rita arrampica.
  - (4 punti) Se Rita non arrampica allora fa freddo.
  - (5 punti) Qualcuno non arrampica ma qualcuno arrampica.

- (++ 49 punti) da fare Sia $T_{aiu}$ la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - (3 punti) Soltanto se uno aiuta un altro qualsiasi, quest'altro aiuta il primo.
  - (1 punto) Carlo non è Veronica.
  - (1 punti) Non si dà il caso che Monica non aiuti Carlo.
  - (3 punti) Monica aiuta soltanto Carlo.
  - (3 punti) Nessuno aiuta tutti e nessuno aiuta nessuno.
  - (2 punti) Beppe non aiuta nessuno.

  noindent Si consiglia di usare:
  $A(x, y)$= $x$ aiuta $y$
  b="Beppe"    v="Veronica"    c="Carlo"    m="Monica"

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria in $T_{aiu}$:

  - (6 punti) Beppe non aiuta Monica.
  - (6 punti) Carlo aiuta Monica.
  - (12 punti) Monica non aiuta Veronica.
  - (12 punti) Nessuno aiuta Beppe.

- (++) : Dall'affermazione

**Ip** **Il sabato almeno uno lavora.**

si dica quali delle seguenti affermazioni si possono dedurre (la classificazione di ciascuna vale 8 punti se è deducibile e 14 punti se NON lo è):

A **Se qualcuno lavora allora non è sabato.**
B **Di sabato ciascuno o lavora o non lavora.**
C **Solo se non è sabato nessuno lavora.**

da fare Si giustifichi la risposta corretta producendo una sua derivazione nella teoria predicativa

$$\mathbf{T_{Ip}} = \mathbf{LC}_= + \mathbf{Ip}$$

dopo aver formalizzato ciascuna affermazione utilizzando:
**L(x)= x lavora**
**S=è sabato**
Inoltre si giustifichi le risposte "affermazione X" non corrette classificando in $\mathbf{LC}_=$ il sequente **Ip** $\vdash$ "affermazione X" .

- Stabilire se la seguente regola è sicura rispetto alla semantica classica (nel caso di regola non sicura si analizzi entrambe le inverse):

  - (++ solo sicurezza della regola) (15 punti)

$$\frac{\neg F \vdash \neg C \ \& \ M \qquad C \vdash M \vee \bot}{C \vdash \neg\neg F}\ 1$$

fatto

- (++) (32 punti) (*Esercizio facoltativo*)

  In un gioco due amiche fanno un'affermazione, che è vera o falsa.
  Un'affermazione è mancante e l'altra è riportata sotto:
  **Celeste**: ....
  **Morgana**: **Una di noi due mente e soltanto lei**.

  Si può dedurre, anche se non si conosce l'affermazione di Celeste, quante affermazioni sono vere?

  a) No
  b) Sì, sono vere tutte e due le affermazioni.
  c) Sì, è vera solo l'affermazione di Morgana.
  d) Sì, è vera solo l'affermazione di Celeste.
  e) Nessuna affermazione è vera.

  Si analizzino le varie affermazioni nella teoria proposizionale $T_{Morgana}$ ottenuta estendendo $\mathbf{LC}_p$ con la formalizzazione di ciò che dice Morgana (formalizzazione 2 punti) tramite:
  $M$= l'affermazione di Morgana è vera
  $C$= l'affermazione di Celeste è vera

## Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\mathtt{tt}\\ \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'\end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\frac{\Sigma\ ,\ t_{ter} = s_{ter}\ ,\ \Gamma(t_{ter})\ \vdash\ \Delta(t_{ter})\ ,\ \nabla}{\Sigma\ ,\ \Gamma(s_{ter})\ ,\ t_{ter} = s_{ter}\ \vdash\ \Delta(s_{ter})\ ,\ \nabla}\ =-\text{S} \qquad \begin{array}{c}=-\text{ax}\\ \Gamma \vdash t_{ter} = t_{ter}\ ,\ \Delta\end{array}$$

**TAUTOLOGIE CLASSICHE**

| | | | |
|---|---|---|---|
| associatività $\vee$ | $( A \vee B ) \vee C$ | $\leftrightarrow$ | $A \vee ( B \vee C )$ |
| associatività & | $( A \& B ) \& C$ | $\leftrightarrow$ | $A \& ( B \& C )$ |
| commutatività $\vee$ | $A \vee B$ | $\leftrightarrow$ | $B \vee A$ |
| commutatività & | $A \& B$ | $\leftrightarrow$ | $B \& A$ |
| distributività $\vee$ su & | $A \vee ( B \& C )$ | $\leftrightarrow$ | $( A \vee B ) \& ( A \vee C )$ |
| distributività & su $\vee$ | $A \& ( B \vee C )$ | $\leftrightarrow$ | $( A \& B ) \vee ( A \& C )$ |
| idempotenza $\vee$ | $A \vee A$ | $\leftrightarrow$ | $A$ |
| idempotenza & | $A \& A$ | $\leftrightarrow$ | $A$ |
| leggi di De Morgan | $\neg( B \vee C )$ | $\leftrightarrow$ | $\neg B \& \neg C$ |
| | $\neg( B \& C )$ | $\leftrightarrow$ | $\neg B \vee \neg C$ |
| legge della doppia negazione | $\neg\neg A$ | $\leftrightarrow$ | $A$ |
| implicazione classica | $( A \rightarrow C )$ | $\leftrightarrow$ | $\neg A \vee C$ |
| disgiunzione come antecendente | $( A \vee B \rightarrow C )$ | $\leftrightarrow$ | $( A \rightarrow C ) \& ( B \rightarrow C )$ |
| congiunzione come antecendente | $( A \& B \rightarrow C )$ | $\leftrightarrow$ | $( A \rightarrow ( B \rightarrow C ) )$ |
| legge della contrapposizione | $( A \rightarrow C )$ | $\leftrightarrow$ | $( \neg C \rightarrow \neg A )$ |
| legge del modus ponens | $A \& ( A \rightarrow C )$ | $\rightarrow$ | $C$ |
| legge della NON contraddizione | $\neg( A \& \neg A )$ | | |
| legge del terzo escluso | $A \vee \neg A$ | | |
| leggi di De Morgan | $\neg( \exists x\ A(x) )$ | $\leftrightarrow$ | $\forall x\ \neg A(x)$ |
| | $\neg( \forall x\ A(x) )$ | $\leftrightarrow$ | $\exists x\ \neg A(x)$ |

### Regola di composizione

$$\frac{\vdash \texttt{fr} \qquad\qquad \Gamma, \texttt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

## Regole derivate o ammissibili per $\mathbf{LC}_=$

si ricorda che $t \neq s \ \equiv \ \neg t = s$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C}$$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{-S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{-D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{-S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{-D}_v$$