

Manuale pratico per il corso di Logica

Maria Emilia Maietti
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Università di Padova
via Trieste n. 63 - 35121 Padova, Italy
maietti@math.unipd.it

1 ottobre 2015

Indice

1	A che cosa serve un corso di logica?	6
1.1	Esempio di codifica in linguaggio formale.	9
1.2	Esempio di derivazione formale	9
1.3	Scopi del corso	9
1.4	Cosa imparerà il lettore nel corso?	11
1.4.1	Esempi di verità logiche	12
1.4.2	Esempi di verità extra-logiche	12
1.4.3	Procedure formali del corso	13
1.4.4	Verifica formale delle verità dell'aritmetica di Peano	13
1.4.5	Esempio di paradosso (o contraddizione) con stessa forma esercizio 9. del test	13
1.5	Utilità dello studio della logica per lo sviluppo delle scienze	14
1.5.1	Una possibile obiezione allo studio di un corso di logica	14
1.6	Come affrontare l'esame di logica	15
1.6.1	Difficoltà del corso	15
2	Prerequisiti del corso: saper ragionare (ovvero nessuno!)	16
3	Genesi e utilità dei paradossi logici	17
3.1	Superiorità dell'uomo sulla macchina	18
3.2	Quale è la causa del paradosso di Russell?	18
3.3	Esempio di paradosso in pittura	19
3.4	Paradosso del mentitore e i livelli di astrazione	19
3.5	Il caso giudiziario Protagora-Evatlo	20
3.5.1	Conclusione del caso giudiziario Protagora-Evatlo	21
3.5.2	Quale è la causa del paradosso giudiziario Protagora-Evatlo?	21
3.6	Utilità dei paradossi per le scienze	22
3.7	Come costruire paradossi?	22
4	La Logica come base di ogni scienza	23
5	Alla ricerca della forma logica	23
5.1	Necessità di un linguaggio formale	24
5.1.1	Livelli di riferimento in un programma	24
5.2	Livelli di riferimento nel corso	25
5.3	UNIVERSALITÀ del linguaggio logico formale	25

5.4	Spiegazione del carattere ASTRATTO della LOGICA	25
6	Linguaggio formale proposizionale	26
6.1	Grammatica delle proposizioni formali	26
6.2	ATTENZIONE: come mettere le parentesi	27
6.3	Cosa traducono & ed \rightarrow	27
6.4	Esempi di proposizioni simboliche	28
6.5	Formalizzazione di enunciati con premesse e conclusioni	29
6.6	Alla ricerca della verità	31
6.6.1	Nel corso di logica studiamo solo giudizi assertivi	32
6.7	Verità classica di una proposizione	33
6.7.1	Come si costruisce la tabella di verità di una proposizione?	33
6.7.2	Tabella di verità di \neg	33
6.7.3	Tabella di verità di &	34
6.7.4	Tabella di verità di \vee	34
6.7.5	Tabella di verità di \rightarrow	34
6.7.6	VALIDITÀ CLASSICA di una proposizione	34
6.7.7	Esempio di tabella di verità	35
6.8	Proposizioni VALIDE, SODDISFACIBILI e i loro NON	35
6.8.1	Esempi di analisi della validità di proposizioni	35
6.9	UGUAGLIANZA tra proposizioni	36
6.9.1	Connettivo equivalenza	36
6.9.2	Precisazione sull'identità sintattica	37
6.10	Tautologie classiche	37
6.11	Proprietà utili sull'equivalenza	38
7	Approfondimento sulle tabelle di verità	40
7.1	Ogni tabella a valori in 0 e 1 è tabella di una proposizione?	40
7.1.1	Esempio di uso di forma normale disgiuntiva	41
7.1.2	Esempio di uso di forma normale congiuntiva: il connettivo NAND	43
7.1.3	Raffinamento del teorema di completezza delle tabelle di verità	43
7.1.4	Quante sono le tabelle di verità ad n entrate?	44
8	Due strategie per verificare una tautologia	45
8.0.5	Altro esempio di verità classica	46
8.0.6	Esempio su validità e soddisfacibilità e i loro NON	46
8.0.7	In logica classica non c'è implicazione causale	47
8.0.8	Verità atemporali della logica classica proposizionale	48
8.0.9	Esercizi su Validità e soddisfacibilità e loro negazioni	49
9	Calcolo dei sequenti LC_p	51
9.1	Cosa è un sequente?	51
9.2	Calcolo dei sequenti della Logica classica proposizionale LC_p	52
9.3	A che serve il calcolo? A costruire derivazioni!	52
9.3.1	Quali sono gli assiomi in LC_p	53
9.3.2	Esempio di derivazione in LC_p	54
9.3.3	Come si sarebbe potuto scrivere il calcolo LC_p	55
9.3.4	Idea intuitiva di sequente e sue derivazioni	55
9.3.5	Test sulla comprensione del concetto di derivazione	56
9.4	Che proposizione rappresenta un sequente?	57
9.5	Validità e soddisfacibilità di un sequente in logica classica	57
9.5.1	Alla ricerca della validità con il calcolo dei sequenti	59
9.5.2	Soddisfacibilità di un sequente su una riga	59
9.6	Procedura di decisione per proposizioni classiche e sequenti in LC_p	60

9.6.1	Come stabilire se un sequente è DERIVABILE o meno in LC_p : PROCEDURA DECISIONE	60
9.6.2	Come trovare riga in cui un sequente NON è soddisfacibile	61
9.6.3	Esempio di applicazione della procedura di decisione	61
9.6.4	Esempio di applicazione della procedura di decisione di una proposizione	62
9.6.5	Esempio di applicazione della procedura di decisione	62
9.7	Relazione tra una proposizione e la sua negazione	64
9.8	Procedura per decidere validità e soddisfacibilità o meno di una proposizione in LC_p	64
9.8.1	Esempi di applicazione della procedura di decisione di una proposizione	65
9.8.2	Esempi di applicazione della procedura di decisione di una proposizione	65
9.9	Come rappresentare la negazione di un sequente?	65
9.10	PROCEDURA per DECIDERE VALIDITÀ e SODDISFACIBILITÀ e loro negazioni relative ad un SEQUENTE	67
9.10.1	Esempio di applicazione della procedura di decisione	67
9.10.2	Test di comprensione	68
9.11	Perché le procedure di decisioni per sequenti in logica classica proposizionale sono corrette?	68
9.11.1	Definizione di validità in logica classica proposizionale di una regola del calcolo dei sequenti	68
9.11.2	Significato di validità di una regola ad una premessa	70
9.11.3	Significato di validità di una regola a due premesse	71
9.12	Validità delle regole di LC_p	72
9.12.1	Validità assioma identità	72
9.12.2	Validità dell'assioma per il falso	72
9.12.3	Validità di sc_{sx}	73
9.12.4	Validità di sc_{dx}	73
9.12.5	Validità di $\&-D$	74
9.12.6	Validità di $\&-S$	74
9.12.7	Validità di $\vee-S$	75
9.12.8	Validità di $\vee-D$	75
9.12.9	Validità di $\neg-D$	76
9.12.10	Validità di $\neg-S$	76
9.12.11	Validità di $\rightarrow-D$	76
9.12.12	Validità per di $\rightarrow-S$	77
9.13	Esercizi su validità delle regole	78
9.14	Esercizio di formalizzazione in sequente e sua validità	79
9.15	Esercizio di formalizzazione in regola e sua validità	79
9.16	Correttezza della procedura di decisione per sequenti in LC_p	80
9.16.1	Regole inverse e sicure	80
9.16.2	Validità per riga di inversa $\rightarrow-D$	81
9.16.3	Validità di inverse di $\rightarrow-S$	81
9.16.4	Sicurezza delle regole di LC_p	82
9.16.5	Esercizi su validità e sicurezza delle regole dei sequenti	82
9.16.6	Perché la procedura di decisione derivabilità/validità di un sequente è corretta?	83
9.16.7	Cosa rappresenta in pratica una derivazione?	85
9.16.8	Metodo alternativo per decidere soddisfacibilità di un sequente NON valido	87
9.16.9	Completezza calcolo dei sequenti	87
9.16.10	Decidibilità del calcolo LC_p	88
9.16.11	NON c'è procedura di decisione con regole NON sicure	89
9.17	Esercizi su conseguenza logica	93
10	Logica classica predicativa	96
10.1	Linguaggio predicativo	96
10.1.1	Grammatica termini simbolici	97

10.1.2	Grammatica formule simboliche	97
10.1.3	Come mettere le parentesi	98
10.2	A cosa servono i predicati?	98
10.2.1	Esempi di formalizzazione di predicati	100
10.2.2	Nozione di variabile LIBERA in termini e formule	102
10.3	Calcolo dei sequenti LC per la Logica classica predicativa	102
10.3.1	Come si sarebbe potuto scrivere il calcolo LC	103
10.3.2	Attenzione alle condizioni su variabili	104
10.3.3	Esempi di derivazione: uso delle regole \forall -S e \exists -D	104
10.4	Come interpretare unicit� in logica predicativa? aggiungiamo il predicato di uguaglianza!	106
10.4.1	Grammatica predicati con uguaglianza	108
10.4.2	Il calcolo dei sequenti $LC_{=}$	108
10.4.3	Come usare le regole di uguaglianza?	109
10.5	Semantica classica dei predicati e quantificazione universale	110
10.5.1	Casi speciali di interpretazione di quantificatori	113
10.5.2	Interpretazione SOSTITUZIONE con costante	113
10.5.3	Interpretazione SOSTITUZIONE con termine generico	114
10.5.4	Notazione per indicare un modello	114
10.5.5	Notazione su interpretazione di uguaglianza, connettivi e quantificatori	114
10.5.6	Validit� e soddisfacibilit� di una formula predicativa	115
10.5.7	Idea intuitiva di validit� di un predicato e tabelle di verit�	116
10.5.8	Esempi di validit� e soddisfacibilit� di formule	117
10.6	Validit� di un sequente in logica predicativa classica	121
10.7	Come decidere la validit� di un sequente in logica classica predicativa	122
10.7.1	Procedura per stabilire validit�, insoddisfacibilit�, soddisfacibilit� di sequenti in LC	122
10.7.2	Precisazione sull'interpretazione di predicati	126
10.8	Su formalizzazioni con "solo", "soltanto"	131
10.9	Validit� regole per sequenti in logica predicativa classica	135
10.10	Validit� regole di LC e loro inverse	139
10.10.1	VALIDIT� regola \forall -D (caso semplice)	139
10.10.2	VALIDIT� regola \forall -D (caso generale)	140
10.10.3	VALIDIT� regola \forall -S e \forall -Sv	140
10.10.4	NON validit� inversa della regola \forall -Sv	141
10.10.5	VALIDIT� regola \exists -S (caso semplice)	142
10.10.6	VALIDIT� regola \exists -S (caso pi� generale)	142
10.10.7	VALIDIT� regola dell'esiste <i>a dx veloce</i> (caso semplice)	143
10.10.8	VALIDIT� regola dell'esiste <i>a dx veloce</i> ed di \exists -D (caso generale)	143
10.10.9	NON validit� dell'inversa della regola \exists -Dv	144
10.10.10	VALIDIT� regola inversa della regola \exists -D	145
10.10.11	VALIDIT� regole dell'uguaglianza	145
10.10.12	Regola dell'uguaglianza veloce	146
10.10.13	Esempi di applicazione delle regole	147
10.11	Sostituzione di una variabile	151
10.12	Regole derivate	153
10.12.1	Per velocizzare derivazioni: regole di indebolimento	154
10.13	Validit� = derivabilit� in $LC_{=}$	154
10.13.1	ATTENZIONE: NON Esiste procedura di decisione per LC o $LC_{=}$	155
10.13.2	Perch� modelli sono basati su dominio non vuoto	155
10.14	Consigli su ricerca validit�	155
10.14.1	Esercizi su formalizzazione con uguaglianza	156
10.14.2	Esercizio svolto seguendo i consigli dati	158
10.14.3	Soluzioni di esercizi su regole valide	161

11	Linguaggi predicativi con simboli di funzione	165
11.1	Calcolo dei sequenti $LC_{=}$ per la logica classica predicativa con uguaglianza e simboli di funzione	165
12	Nozione di teoria ed esempi	167
12.1	Come derivare in una teoria	168
12.2	Attenzione alla consistenza di una teoria	169
12.2.1	L'aggiunta delle regole di composizione NON cambia i teoremi di $LC_{=}$	170
12.3	esempio di teoria informatica: teoria di Hoare	170
12.4	Altro esempio di teoria matematica: teoria dei monoidi commutativi	171
12.5	Esercizi su teorie concrete	172
12.6	Ulteriore esempio di Teoria: l'Aritmetica di Peano	178
12.6.1	Cosa è derivabile in PA	179
12.7	Esercizi	180

1 A che cosa serve un corso di logica?

Nei nostri discorsi quotidiani ci è certamente capitato di usare il sostantivo “logica” o l’aggettivo “logico”. Un tipico uso è in frasi del tipo: “Ti pare logico che uno si comporti in quel modo?”, “Ma con che logica ragiona quella persona?”. Probabilmente negli studi pre-universitari avete incontrato un uso più formale di queste parole, in particolare se avete fatto dei test di “logica” oppure se avete imparato a fare l’ “analisi logica” delle frasi italiane.

In questo corso faremo un uso molto specifico della parola “logica” completamente nuovo rispetto agli usi comuni. In particolare, la parola denoterà un *sistema formale* di regole fissate per poter *dedurre* la verità di certe asserzioni, scritte come *formule*, a partire dall’assumere come vere eventuali altre assunzioni.

L’attività del dedurre è simile all’attività del programmare. Il linguaggio di una logica, o sistema formale, può essere proprio pensato come un linguaggio di programmazione ove i programmi sono le deduzioni della verità di formule a partire dalla verità di un insieme (anche vuoto) di formule assunte come vere.

Con il presente corso di logica il lettore imparerà a programmare (o calcolare) *deduzioni* per *verificare* la *correttezza* di certe affermazioni in una certa logica.

Perchè un informatico dovrebbe essere interessato a studiare un linguaggio per dedurre? Prima di rispondere a questa domanda, proponiamo al lettore il seguente test di logica.

Valuta la validità delle seguenti affermazioni e rispondi alle eventuali domande:

1. “Il programma

```
y = 1;
z = 0;
while (z ≠ x) {
    z = z + 1
    y = y * z;
}
```

non termina su input $x = 0$ ”

corretto **sì** **no**

2. “Il programma

```
y = 1;
z = 0;
while (z ≠ x) {
    z = z + 1
    y = y * z;
}
```

calcola in y il fattoriale $x!$ su input x numero naturale”

corretto **sì** **no**

3. Ammesso che

“se la radice quadrata canta alla Scala di Milano allora il tuo vicino di banco è Napoleone”

allora è vero che

“se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano”.

corretto sì no

4. per ogni numero naturale n esiste un numero naturale m tale che

$$n + m = n$$

corretto sì no

chi è questo m ?

5. per ogni numero naturale n

$$2 + n = 1 + n$$

corretto sì no

6. Ammesso che

“ non si dia il caso che non esista input su cui il programma X si ferma”

allora è vero che

“ il programma X si ferma su qualche input”.

corretto sì no

7. “ Dio esiste”.

corretto sì no

8. Ammesso che “ **non tutti i programmi siano utili e corretti**” allora è vero che “ **esiste un programma non utile o esiste un programma non corretto.**”

corretto	sì	no
----------	----	----

9. “Ogni bravo informatico può costruire un programma che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sè”

corretto	sì	no
----------	----	----

10. Supponi che le seguenti affermazioni siano valide

- “ **Se Carla non va in gita allora Giovanni ci va.**”
- “ **Beppe non va in gita se e solo se ci va Giovanni.**”
- “ **Beppe va in gita se Carla non va in gita.**”
- “ **Non tutti vanno in gita.**”

allora è vero che

- “ **Qualcuno non va in gita.**”

corretto	sì	no
----------	----	----

- “ **Se Giovanni non va in gita allora Beppe ci va.**”

corretto	sì	no
----------	----	----

- “ **Se Carla non va in gita allora Beppe non ci va.**”

corretto	sì	no
----------	----	----

- “ **Carla va in gita.**”

corretto	sì	no
----------	----	----

- “ **Non si dà il caso che nessuno vada in gita.**”

corretto	sì	no
----------	----	----

Pensate che un robot, ovvero un computer (ovvero un programma) sarebbe in grado di risolvere il test di logica che avete appena eseguito in modo corretto e automatico (o semiautomatico/interattivo con il vostro aiuto)?

Il presente corso di logica pone le basi affinché ciò possa realizzarsi, ovvero pone le basi per l'*intelligenza artificiale*.

Ma, allora, come si istruisce un robot a rispondere al test di logica?

L'idea di base è di istruirlo costruendo un *linguaggio formale* in cui poter *codificare* le asserzioni e provarne la *verità* tramite *derivazioni/deduzioni formali* che rappresentano la spiegazione *logica* del perchè certe asserzioni sono vere.

Anticipiamo qualche esempio di quel che faremo nel corso.

1.1 Esempio di codifica in linguaggio formale.

L'asserzione

Ammesso che
 “ **non si dia il caso che non esista input su cui il programma X si ferma**”
 allora è vero che
 “ **il programma X si ferma su qualche input**”.

si potrà formalizzare in tal modo nel sistema formale che useremo

$$\neg\neg(\exists x F(x)) \vdash \exists x F(x)$$

posto che:

$F(x) \stackrel{def}{=} \text{“ il programma si ferma sull'input } x \text{”}$

1.2 Esempio di derivazione formale

Una *derivazione* formale è un albero del tipo

$$\begin{array}{c}
 \text{ax-id} \\
 \frac{B(x) \vdash B(x)}{\frac{B(x), B(x) \rightarrow C(x) \vdash \exists y C(y)}{B(x) \rightarrow C(x), B(x) \vdash \exists y C(y)} \text{sc}_{sx}} \rightarrow -S \\
 \frac{B(x) \rightarrow C(x), B(x) \vdash \exists y C(y)}{B(x) \rightarrow C(x), \forall x B(x) \vdash \exists y C(y)} \forall -S_v \\
 \frac{B(x) \rightarrow C(x), \forall x B(x) \vdash \exists y C(y)}{B(x) \rightarrow C(x) \vdash \forall x B(x) \rightarrow \exists y C(y)} \rightarrow -D \\
 \frac{B(x) \rightarrow C(x) \vdash \forall x B(x) \rightarrow \exists y C(y)}{\exists x (B(x) \rightarrow C(x)) \vdash \forall x B(x) \rightarrow \exists y C(y)} \exists -S
 \end{array}$$

1.3 Scopi del corso

Gli scopi principali del corso sono

- imparare a *codificare asserzioni* in *linguaggio formale*
- imparare a *dedurre asserzioni* come *conseguenza logica* di altre *asserzioni* (tramite *alberi di derivazione*)

Ovvero il corso intende essere un'introduzione alla *deduzione formale/automatica*. Oltre a pensare all'arte del dedurre in modo analogico come un particolare tipo di *programmazione*, il nostro corso ha anche un aggancio concreto e specifico con il mondo della programmazione. Infatti lo studio della deduzione logico-formale pone le basi per la *verifica formale dei programmi*, ovvero per *formalizzare* la *correttezza (parziale)* di *programmi* rispetto ad una specifica, in modo *automatico/semiautomatico*.

In poche parole vogliamo costruire calcolatori sempre più intelligenti!

Consideriamo il seguente programma ad esempio

```

y = 1;
z = 0;
while (z ≠ x) {
    z = z + 1;
    y = y * z;
}

```

Questo programma calcola in y il fattoriale di x .

Per verificare questo programma, o qualsiasi altro, in letteratura esiste un calcolo che mostriamo di seguito solo per dare l'idea della parte che noi tratteremo nel corso:

Esempio di calcolo *formale* per correttezza programmi

$$\frac{(\phi) C_1 (\eta) \quad (\eta) C_2 (\psi)}{(\phi) C_1; C_2 (\psi)} \text{Composition}$$

$$\frac{}{(\psi[E/x]) x = E (\psi)} \text{Assignment}$$

$$\frac{(\phi \wedge B) C_1 (\psi) \quad (\phi \wedge \neg B) C_2 (\psi)}{(\phi) \text{if } B \{C_1\} \text{ else } \{C_2\} (\psi)} \text{If-statement}$$

$$\frac{(\psi \wedge B) C (\psi)}{(\psi) \text{while } B \{C\} (\psi \wedge \neg B)} \text{Partial-while}$$

$$\frac{\vdash_{\text{AR}} \phi' \rightarrow \phi \quad (\phi) C (\psi) \quad \vdash_{\text{AR}} \psi \rightarrow \psi'}{(\phi') C (\psi')} \text{Implied}$$

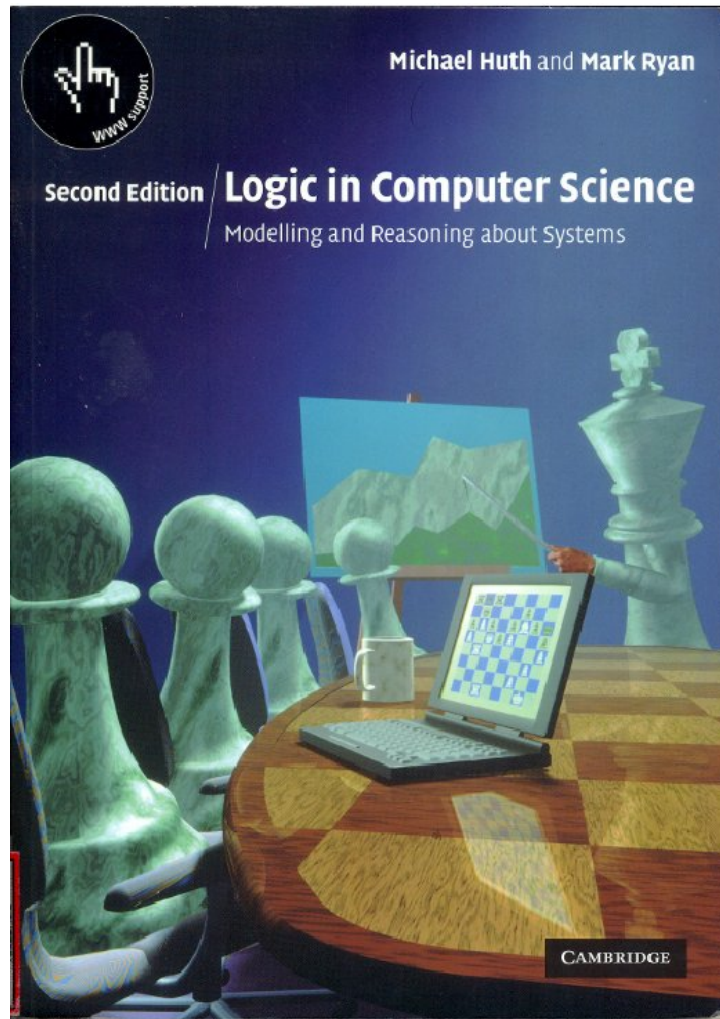
Figure 4.1. Proof rules for partial correctness of Hoare triples.

IMPARERETE A DERIVARE FORMALMENTE
QUESTE PARTI LOGICHE NEL CORSO

Esempio di verifica *formale* del programma fattoriale

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\langle 1 = 1 \rangle y = 1 \langle y = 1 \rangle}{i} \quad \frac{\langle y = 1 \wedge 0 = 0 \rangle z = 0 \langle y = 1 \wedge z = 0 \rangle}{i}}{\langle \top \rangle y = 1 \langle y = 1 \rangle} \quad \frac{\frac{\langle y = 1 \wedge z = 0 \rangle z = 0 \langle y = 1 \wedge z = 0 \rangle}{i}}{c} \\
 \frac{\langle \top \rangle y = 1; z = 0 \langle y = 1 \wedge z = 0 \rangle}{c} \\
 \frac{\frac{\frac{\frac{\langle y \cdot (z+1) = (z+1)! \rangle z = z+1 \langle y \cdot z = z! \rangle}{i} \quad \frac{\langle y = z! \wedge z \neq x \rangle z = z+1 \langle y \cdot z = z! \rangle}{i} \quad \frac{\langle y \cdot z = z! \rangle y = y * z \langle y = z! \rangle}{c}}{\langle y = z! \wedge z \neq x \rangle z = z+1; y = y * z \langle y = z! \rangle} \quad \frac{\langle y = z! \rangle \text{while } (z \neq x) \{ z = z+1; y = y * z \} \langle y = z! \wedge z = x \rangle}{w}}{\langle y = z! \rangle \text{while } (z \neq x) \{ z = z+1; y = y * z \} \langle y = z! \wedge z = x \rangle} \quad \frac{\langle y = 1 \wedge z = 0 \rangle \text{while } (z \neq x) \{ z = z+1; y = y * z \} \langle y = x! \rangle}{i}}{c} \\
 \langle \top \rangle y = 1; z = 0; \text{while } (z \neq x) \{ z = z+1; y = y * z \} \langle y = x! \rangle
 \end{array}$$

Riferimento bibliografico per la verifica dei programmi



1.4 Cosa imparerà il lettore nel corso?

Imparerà il concetto di **verità formale** (o **validità formale**), la quale può essere:

- una **verità relativa** ad una **logica**, per cui si parla di **verità logica**.

Infatti esistono **molte logiche**. Per esempio nella letteratura corrente si trovano le seguenti logiche: **logica classica**, **logica intuizionista**, **logica quantistica**, **logica lineare**, **logica modale**, **logica temporale**....

Noi, in questo corso, studieremo solo la **logica classica** e le sue teorie.

- una **verità relativa** ad una **teoria**, per cui si parla di **verità extra-logica** in quanto una teoria è un'estensione di una logica con assiomi specifici ovvero

$\text{teoria} = \text{logica} + \text{assiomi}$
--

Esistono molte **teorie** in ogni campo del sapere. Per esempio: **teoria della computabilità (in informatica)**, **teoria dell'aritmetica (in matematica)**, **teoria relativistica (in fisica)**, **teoria dell'evoluzione (in biologia)**, ...

1.4.1 Esempi di verità logiche

Ad esempio l'asserzione complessa

AmMESSo che “ non si dia il caso che non esista input su cui il programma X si ferma ” allora è vero che “ il programma X si ferma su qualche input ”.

è corretta in logica classica (ma non in logiche alternative come quella intuizionista). Per approfondimenti si veda il libro di G. Sambin “**Per Istruire Un Robot: (ovvero, come costruirsi una logica)**”.

Altro esempio è l'asserzione

AmMESSo che “ se la radice quadrata canta alla Scala di Milano allora il tuo vicino di banco è Napoleone ” allora è vero che “ se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano ”.

che è corretta formalmente ma senza significato perchè la proposizione “la radice quadrata canta alla Scala di Milano” non ha senso semanticamente (a meno di ulteriori specifiche come il fatto che “radice quadrata” è un nome per un cantante o gruppo di cantanti, ma allora dovrebbe andare con la maiuscola “Radice quadrata”..).

1.4.2 Esempi di verità extra-logiche

L'asserzione

per ogni numero naturale n esiste un numero naturale m tale che $n + m = n$

è corretta nella teoria dell'aritmetica, ma non è verità logica.

L'asserzione

“Dio esiste”

è corretta nella teoria della dottrina cristiana ma non è una verità logica.

Lo stesso dicasi per l'asserzione

“L’esistenza di Dio è certa”.

1.4.3 Procedure formali del corso

Nel corso verrà fornita una **procedura di verifica formale** per classificare le **asserzioni formalizzate** in **logica classica** come:

- **verità logiche:**
per es. esercizio 3. o 6. o 8. del test
- **falsità logiche, ovvero paradossi logici:**
per es. esercizio 9. del test
- **opinioni logiche, cioè asserzioni nè vere, nè false per la logica:**
per es. esercizio 7. del test

1.4.4 Verifica formale delle verità dell’aritmetica di Peano

Nel corso imparerete anche a verificare *formalmente* le **verità** della **teoria dell’aritmetica di Peano** come ad esempio che vale

$$5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5$$

con un albero del tipo

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5} \quad 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5}{\forall y (5 \cdot s(y) = 5 \cdot y + 5) \vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5} \forall\text{-S}_v}{\frac{\vdash \mathbf{Ax 6.} \quad \forall x \forall y (x \cdot s(y) = x \cdot y + x) \vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5}{\vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5} \forall\text{-S}_v \text{ comp}_{sx}}$$

Si noterà che $5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5$ NON è una verità della logica classica (serve infatti l’assioma 6. dell’aritmetica di Peano per derivarlo).

1.4.5 Esempio di paradosso (o contraddizione) con stessa forma esercizio 9. del test

L’asserzione dell’esercizio 9. del test precedente ha la stessa forma logica del famoso Paradosso di Russel:

“Nel villaggio di Cantù c’è un unico barbiere che rade tutti e soli gli uomini che non si radono da sè.”

Si vede che questa affermazione è un paradosso in quanto afferma una contraddizione: l’**esistenza** di tale barbiere. Questo barbiere, infatti, deve radersi ma non può farlo.

<p>il barbiere di Cantù rade se stesso</p> <p>sse</p> <p>non si rade da sè</p>
--

\Rightarrow l’**esistenza** di un tal barbiere porta ad una **CONTRADDIZIONE**
e analogamente

l'esistenza del programma dell'esercizio 9. del test
che **attiva se stesso**
sse
non si attiva da sè

porta ad una **contraddizione** con lo stesso tipo logico di ragionamento (o meglio *forma logica*) del paradosso del barbiere.

Ora il lettore provi ad inventare paradossi con la stessa forma... Durante il corso avrà modo di studiare la forma logica precisa di questi paradossi.

1.5 Utilità dello studio della logica per lo sviluppo delle scienze

Diamo di seguito delle motivazioni sull'utilità dello studio della logica per uno scienziato o per un amante della conoscenza.

1.5.1 Una possibile obiezione allo studio di un corso di logica

Una possibile obiezione allo studio della logica è il suo carattere astratto e lontano dai saperi scientifici. Una prova a supporto di ciò può apparire il fatto che non compare come materia di studio negli insegnamenti pre-universitari.

Uno quindi potrebbe dire: “**a me interessano solo le verità di alcune teorie scientifiche particolari**” come

- la **teoria dei sistemi operativi e delle reti** (in informatica)
- la **teoria delle equazioni differenziali** (in matematica)
- la **teoria delle stringhe** (in fisica)
- la **teoria della dottrina cristiana** (in teologia)
- etc....

e “mi interessano eventuali applicazioni di queste teorie all'intelligenza artificiale”!

Ma allora: *ha senso studiare logica pura oltrechè teorie?* Sì per questi motivi

- I **paradossi logici** sono **falsi** in **ogni** teoria scientifica.
- le scienze devono dare per scontato le **VERITÀ LOGICHE**.

In altre parole nel momento in cui uno scienziato studia una certa teoria è bene che abbia presente le verità logiche e i paradossi in modo da non perdere tempo a verificarli, in quanto le verità logiche sono valide a priori (e basta la logica per riconoscerle) e i paradossi sono falsi a priori. Quindi, ha senso che uno scienziato verifichi la validità di asserzioni tramite **DEDUZIONI LOGICHE** all'interno della sua teoria solo se queste asserzioni rientrano tra le **opinioni logiche** (quindi nè verità logiche, nè paradossi).

Ad esempio, non ha senso che un informatico provi a **costruire un programma che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sè**.

Concludiamo dicendo che il corso di logica che tratteremo dà pure un contributo scientifico concreto e specifico alla scienza dell'informazione perchè *offre le basi per rendere la logica applicabile all'intelligenza artificiale*.

1.6 Come affrontare l'esame di logica

È *indispensabile* fare molti esercizi, poichè l'esame si basa soprattutto sul **ragionamento** e non sulla **memoria**.

1.6.1 Difficoltà del corso

Lo studio della logica è molto astratto, più della matematica

In **logica**, come in **matematica**
non si sa **di cosa si parla**
nè se **ciò di cui si parla** sia **vero**.
(Russell)

2 Prerequisiti del corso: saper ragionare (ovvero nessuno!)

Questo corso propone una riflessione sul modo di ragionare e quindi il solo prerequisito per seguirlo è di essere dotati di raziocinio. L'assunzione filosofica da cui partiamo è che in quanto essere umani **siamo già logici per natura**.

La **prova** psicologica che **la logica in quanto capacità di dedurre è un esercizio specifico del nostro essere animali razionali** è data dai seguenti fatti:

- **ridiamo delle barzellette**: se non si sa usare la logica o se non si sanno fare deduzioni, non si può ridere di certe barzellette;
- **riconosciamo i paradossi**: se non si usa la logica, non si riesce a riconoscere che certe affermazioni sono contraddittorie.

Mettiamoci dunque alla prova con una barzelletta ...

Esempio di barzelletta “deduttiva”.

Ci sono due compagni, Bepi e Toni. Sono al bar, e passano al tempo a guardare la gente.

Son lì che bevono. Entra un signore, e Bepi dice:

“Io non sono proprio capace di capire che mestiere fa quello lì.”

“Ah, dice Toni, nemmeno io.”

Questo signore ad un certo punto dopo essersi bevuto qualcosa va al bagno ma c'è la fila. Allora Bepi dice:

“Beh, aspetta che lo seguo, così mentre aspetta mi permetto di domandarglielo.”

Così fa, e gli domanda: “Mi scusi, lei, che mestiere fa?”

E quello: “Io sono un logico.”

“Ah sì? E che cosa vuol dire?”

“Ah guardi, è una cosa complicata da spiegare, ci vuole un intero corso universitario per capirlo, oppure bisognerebbe leggere un libro intero. Anzi, le consiglio *Istruzioni per un robot* di un certo Giovanni Sabin. Si pensi che è così divertente che vi si raccontano barzellette sui logici. Ma se lei desidera, posso comunque darle un'idea con un esempio.”

“Ah, comprerò certamente il libro, ma sono così curioso che voglio sentire anche l'esempio.”

“Bene. Lei ce l'ha un acquario?”

“Beh, in effetti sì, capita che io abbia un acquario.”

“Vede, da questo, con la logica, io **deduco** che le piacciono i pesci.”

“Ah, caspita, è proprio vero.”

“Vede, io allora **deduco** con la logica che lei ama la natura.”

“Ah, è proprio vero, certamente io amo la natura.”

“Vede, e da questo, sempre con la logica, io **deduco** che lei ama le donne.”

“Ah, è proprio pazzesco ... Allora ho capito.”

Esce, torna da Toni che gli chiede “Ti ha detto che mestiere fa?”

“Sì, fa il logico.”

“Ah sì, e che cosa vuol dire che fa il logico?”

“È difficilissimo, bisogna leggere un libro sulle barzellette, però ti posso spiegare con un esempio.”

“Va beh, fammi l’esempio.”

“Tu ce l’hai un acquario? ”

“Io? no.”

“Beh, allora ti piacciono solo i maschi!”

Nella precedente barzelletta l’eventuale risata dell’ascoltatore è provocata dal riconoscimento del fatto che l’**assumere valide le seguenti affermazioni**

Aq \Rightarrow **Ps**

“Ad un uomo che ha un’acquario piacciono i pesci”

Ps \Rightarrow **Nt**

“Ad un uomo a cui piacciono i pesci piace la natura”

Nt \Rightarrow **Dn**

“Ad un uomo a cui piace la natura allora piacciono le donne”

non comporta che è pure valida l’affermazione

non Aq \Rightarrow **non Dn**

“Ad un uomo che non ha l’acquario non piacciono le donne”

che poi nella barzelletta è espresso dicendo che ad un uomo che non ha l’acquario piacciono solo gli uomini!

3 Genesi e utilità dei paradossi logici

I **paradossi logici** sono **contraddizioni** ovvero affermazioni sempre **false** per motivi puramente logici.

Ad esempio se asseriamo

“Napoleone è morto il 4 maggio 1821.”

diciamo una falsità storica (perchè Napoleone è morto il 5 maggio dello stesso anno secondo le fonti storiche) ma non una falsità logica.

Invece se diciamo

“Napoleone lodava tutte le persone che non lodavano se stesse e soltanto loro.”

diciamo una falsità logica visto che questa asserzione è una variante del paradosso dell’esercizio 9. Per capirlo basta chiedendosi: Napoleone lodava o no se stesso?

Risposta: se rispondiamo che Napoleone lodava se stesso allora, siccome lodava soltanto le persone che non si lodavano, dobbiamo concludere che non si lodava, contraddizione; dall’altro canto se rispondiamo che Napoleone non lodava se stesso allora ne segue che si lodava e quindi di nuovo troviamo una contraddizione. Questi ragionamenti ci portano a concludere che l’asserzione

“Napoleone lodava tutte le persone che non lodavano se stesse e soltanto loro.”

è falsa perchè contraddittoria ed è pure una falsità logica in quanto la contraddittorietà dell’asserzione rimane sia che l’afferriamo di Napoleone o di chiunque altro.

Invece se diciamo

“Posto che **Napoleone è nato nel 1769 e morto nel 1821** allora **ha vissuto più di 53 anni.**”

diciamo una falsità extra-logica (in particolare aritmetica) che NON è una falsità logica perchè occorre fare un calcolo con i numeri naturali per sapere se dalla premessa “*Napoleone è nato nel 1769 e morto nel 1821*” segue veramente che *ha vissuto più di 53 anni* e ciò non è vero in quanto 1821 meno 1769 fa 52 (qui che sia Napoleone soggetto della premessa o chiunque altro poco importa perchè l’affermazione è scorretta per un conto aritmetico!) e quindi al massimo ha vissuto 52 anni.

Di contro l’asserzione

“Posto che **Napoleone è nato nel 1769 e morto nel 1821** allora **ha vissuto almeno 51 anni.**”

è una verità extra-logica aritmetica (anche qui che sia Napoleone soggetto della premessa o chiunque altro poco importa, perchè l’affermazione è corretta per un conto aritmetico!).

Infine l’asserzione

“Posto che **Napoleone è nato nel 1769 e morto nel 1821** allora **ha vissuto più di 52 anni.**”

potrebbe essere una verità extra-logica ma non puramente aritmetica perchè per decidere la sua verità occorre sapere in che giorni Napoleone è nato e morto dato che la premessa non dice se Napoleone è morto prima o dopo aver compiuto 52 anni. Siccome da fonti storiche sappiamo che Napoleone è nato in agosto e morto in maggio di conseguenza l’asserzione è una falsità extra-logica (storico e aritmetica).

Ora vogliamo analizzare meglio alcuni paradossi: vedremo che essi nascono dal tentativo di identificare livelli diversi di riferimento della nostra attività raziocinante che invece devono essere tenuti distinti per evitare contraddizioni.

Infine accenneremo al fatto che i paradossi sono molto utili nello studio della logica e delle teorie scientifiche per capire cosa una teoria NON può dimostrare.

3.1 Superiorità dell’uomo sulla macchina

Un’attenta analisi dell’asserzione paradossale “**Ogni bravo informatico può costruire un programma che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sè**” porta a concludere che non si può ridurre la nostra attività del dedurre ad un unico livello, che nell’asserzione menzionata è quello del programmare, ovvero porta a concludere la **superiorità del raziocinio umano sul concetto di macchina/programma come attualmente concepito.**

3.2 Quale è la causa del paradosso di Russell?

Ora notiamo che la causa del paradosso di Russell

“**Nel villaggio di Cantù c’è un unico barbiere che rade tutti e soli gli uomini che non si radono da sè.**”

è simile a quella dell’esercizio 9. e consiste nell’identificazione di due livelli:

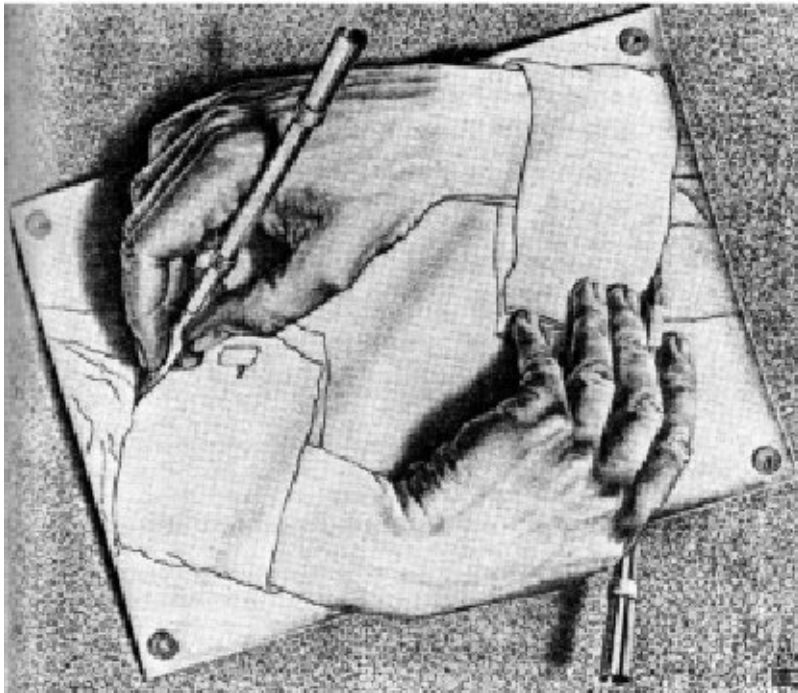
livello 1 — **barbiere soggetto** dell’azione “radere” quelli che “non si radono” (che a posteriori non può essere anche oggetto)

livello 2 — **cliente oggetto** dell’azione “radere” (che a posteriori non può coincidere con il barbiere!)

Ovvero: **barbiere = cliente** dà contraddizione.

3.3 Esempio di paradosso in pittura

L'opera "Mani che disegnano" di Escher (1948)



rappresenta un paradosso la cui causa è pure l'identificazione di due livelli:

livello 1 — **mano** solo **soggetto** dell'azione "disegnare"

livello 2 — **disegno** solo **oggetto** dell'azione "disegnare".

3.4 Paradosso del mentitore e i livelli di astrazione

Il famoso paradosso del mentitore ci insegna che quando ragioniamo ci sono sempre vari **livelli di riferimento**.

Prima di introdurre il paradosso, il lettore risponda a questa domanda

"Questa proposizione è falsa."

può essere vera?

Vediamo un pò cosa rispondere...

1. La proposizione "**Questa proposizione è falsa.**" è **vera** se e solo se quel che dice è vero, ossia che essa è **falsa**, e quindi non può essere **vera**.
2. La proposizione "**Questa proposizione è falsa.**" è **falsa** dunque quel che dice è vero e risulta quindi vera, da cui si conclude che non può essere nemmeno **falsa**.

Quindi concludiamo che la proposizione "**Questa proposizione è falsa.**" non può essere nè **vera**, nè **falsa**. Dunque di fronte alla domanda:

*"La proposizione: "**Questa proposizione è falsa.**" può essere vera o falsa."*

corretto sì no

la risposta è NO perchè l'asserzione “*La proposizione: “Questa proposizione è falsa.” può essere vera o falsa.*” è contraddittoria, ovvero un paradosso.

Tale paradosso nasce dall'identificazione di questi livelli:

- livello 1: valutazione di **vero** o **falso** da parte nostra (**livello metalinguistico**)
- livello 2: valutazione di **vero** o **falso** da parte della proposizione stessa come suo contenuto semantico (**livello linguistico**)

3.5 Il caso giudiziario Protagora-Evatlo

Riportiamo qui il celebre caso giudiziario avente come protagonisti Protagora ed Evatlo.

Il celebre sofista Protagora aveva accolto come discepolo Evatlo convenendo con lui che gli avrebbe pagato le lezioni quando avesse vinto la prima causa in tribunale.

Terminato il corso di studi, Evatlo non si decideva ad intraprendere l'attività forense e Protagora stanco di attendere il suo onorario, intentò causa al suo ex allievo il quale decise, apparentemente in modo avventato, di assumere personalmente la propria difesa.

Dilemma di Protagora.

Protagora disse

Se Evatlo perde questa causa allora dovrà pagarmi in forza della sentenza del tribunale. Se invece Evatlo vince questa causa allora dovrà pagarmi ugualmente, in forza del nostro accordo. Ora, o Evatlo perderà o vincerà. Dunque, finalmente, Evatlo dovrà pagarmi.
--

Controdilemma di Evatlo.

Evatlo replicò al maestro con un controdilemma:

Se io vinco questa causa allora non ti dovrò pagare in forza della sentenza del tribunale. Se invece la perdo allora non ti dovrò pagare in forza del nostro accordo. Ora le possibilità sono due: o vinco o perdo questa causa. Dunque, non ti dovrò pagare.

Chi ha ragione? Evatlo o Protagora? Per rispondere consideriamo i 2 casi possibili, ovvero che sia Evatlo a vincere la causa o che sia Protagora a vincerla.

Caso 1: Evatlo vince la causa (prima lettura):

Nel caso **Evatlo vincesses la causa**, allora Evatlo dovrebbe pagare in virtù dell'**accordo**, ma non dovrebbe pagare in virtù della **sentenza**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo non vince la causa** ovvero **il caso 1 non è possibile**.

caso 2: Evatlo non vince la causa (prima lettura):

Nel caso **Evatlo perdesse la causa**, allora Evatlo deve pagare in virtù della **sentenza**, ma non deve pagare in virtù dell'**accordo**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo vince la causa**. Ma ciò non è possibile perchè ci riporta al caso 1 che abbiamo detto non essere verificabile. Dunque concludiamo che **Evatlo nè vince nè perde** la causa. Dove sta l'errore?

Caso 1: Evatlo vince la causa (ad una lettura più attenta):

Nel caso **Evatlo vincesses la causa** e *l'accordo tra Protagora ed Evatlo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria*, allora Evatlo dovrebbe pagare in virtù dell'**accordo**, ma non dovrebbe pagare in virtù della **sentenza**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo non vince la causa**, però assumendo che *l'accordo tra Protagora ed Evatlo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria*.

Caso 2: Evatlo non vince la causa (ad una lettura più attenta):

Nel caso **Evatlo non vincesses la causa** e *l'accordo tra Protagora ed Evatlo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria*, allora Evatlo deve pagare in virtù della **sentenza**, ma non deve pagare in virtù dell'**accordo**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo vince la causa**. Ma sappiamo che se **Evatlo vince la causa**, si ricade nel caso 1 e allora di nuovo troviamo una **contraddizione!**

Cosa concludiamo?

3.5.1 Conclusione del caso giudiziario Protagora-Evatlo

(ad una lettura più attenta):

Nel caso *l'accordo tra Protagora ed Evatlo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria*, **sia che Evatlo vinca la causa sia che la perda**, si arriva ad una **contraddizione**.

Dunque, dando per scontato che il giudice emetta una sentenza, allora *l'accordo tra Protagora ed Evatlo non può essere rispettato dopo la sua emissione*.

In altre parole, nessuno dei due ha ragione, se si suppone che l'accordo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria.

Ora per verificare la comprensione di quanto sopra, si esegua questo test di comprensione:

Nel caso giudiziario Evatlo/Protagora l'accordo tra Protagora ed Evatlo può essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria.

corretto sì no

Chiaramente ora la risposta è “no” perchè l'asserzione

Nel caso giudiziario Protagora-Evatlo l'accordo tra Protagora ed Evatlo può essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria.

è una affermazione contraddittoria, ed è quindi una **falsità logica**.

3.5.2 Quale è la causa del paradosso giudiziario Protagora-Evatlo?

La contraddizione del paradosso giudiziario nasce dall'assumere che **il rispetto dell'accordo Protagora/Evatlo** permanga dopo l'emissione della **sentenza** ovvero che entrambi i livelli:

livello 1 — **rispetto accordo**

livello 2 — **sentenza**

siano **entrambi validi**.

Invece, se si assume valido il livello **sentenza** senza assumere come valido anche il livello **rispetto dell'accordo**, si **elimina la contraddizione**.

3.6 Utilità dei paradossi per le scienze

Nello studio delle teorie scientifiche i paradossi sono molto utili per scoprire ciò che una teoria (formale) **non** può dire... Ad esempio ragionando come segue: se una certa assunzione all'interno di una teoria porta ad un paradosso, allora nella teoria in questione l'assunzione risulta falsa.

Per esempio, oltre all'esercizio 9. del test iniziale esistono altre **istanze del paradosso di Russell** che forniscono interessanti risultati per l'**informatica**: usando la forma logica del **paradosso di Russell** si dimostra che è **irrisolubile** il famoso **problema della fermata di un programma** (che lo studente di informatica studierà nel corso di computabilità), ovvero che “**non esiste un programma che sappia decidere se ogni programma (compreso sè stesso) termina o no su un dato input**”.

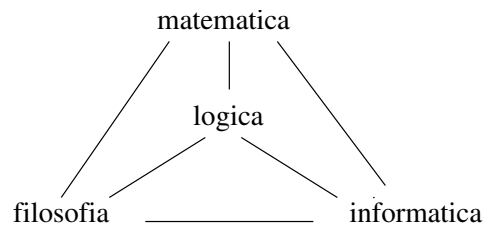
Possiamo accennare anche ad un'applicazione in **matematica** dell'uso dei paradossi: usando la forma logica del **paradosso del mentitore** si dimostra che la **teoria dell'aritmetica di Peano non può dimostrare** che **lei stessa non è contraddittoria**, ovvero che non deduce come vere delle falsità (secondo teorema di incompletezza di Gödel).

3.7 Come costruire paradossi?

Una volta scoperta la **forma logica** di un paradosso, se ne possono costruire di simili cambiando i costituenti senza cambiare la forma.... Quindi, per riconoscere i paradossi, è conveniente iniziare a studiare la **forma logica** delle frasi che sarà il primo argomento del nostro corso di logica.

4 La Logica come base di ogni scienza

La **Logica** è alla **base di ogni scienza (o teoria)** in quanto è **fondamento di ogni scienza** non tanto per i contenuti specifici ma per la loro articolazione **deduttiva**.



Infatti la logica si occupa di riconoscere la verità di un enunciato non tanto in quanto corrisponde ad uno stato del mondo (come avviene per le scienze) quanto di stabilire le **condizioni di verità** di un enunciato a partire da altri basandoci solo sulla sua **forma logica** espressa in un *LINGUAGGIO FORMALE*.

Prima di introdurre il linguaggio formale cerchiamo di capire cosa sia una forma logica di un enunciato intuitivamente.

5 Alla ricerca della forma logica

Intuitivamente la forma logica di una proposizione è la struttura astratta dei legami logici delle proposizioni semplici che la compongono.

Ad esempio la proposizione dell'asserzione

Ammesso che
“**se piove, i canali interni vengono chiusi**”,
allora, è vero che
“**se i canali interni non vengono chiusi, allora non piove**”

è complessa ed è composta dalle seguenti proposizioni semplici: “**piove**” e “**i canali interni vengono chiusi**” legate logicamente tramite “ammesso che”, e “allora è vero che”.

La proposizione della seguente asserzione ha la stessa forma logica della precedente

È vero che
“**se il tuo vicino di banco non è Napoleone
ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano**”
ammesso che
“**se la radice quadrata canta alla Scala di Milano
allora il tuo vicino di banco è Napoleone**”.

e ha pure la stessa forma e contenuto dell' **esercizio 3. del test**.

Mentre l'asserzione

“È vero che **c'è silenzio**
se **tutti dormono**
ed se è vero che
se tutti dormono c'è silenzio.”

ha la stessa forma di

“Ammesso che **Tizio ama Caio**
e che **se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio.**
ne segue che **Caio ama Tizio**”.

Ora introduciamo un modo più semplice per fare asserzioni complesse come quelle sopra.

Si noti che nelle asserzioni sopra, c'è sempre una *conclusione* (per esempio **Caio ama Tizio** nell'asserzione immediatamente sopra) che segue da delle proposizioni assunte come vere, dette *premesse*, (nell'asserzione immediatamente sopra le premesse sono **Tizio ama Caio** e **se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio**).

Ora indichiamo tali asserzioni complesse mettendo le premesse in lista sopra una linea che separa la conclusione come segue: scriviamo

Tizio ama Caio.
Se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio.

Caio ama Tizio.

come forma concisa per

“Ammesso che **Tizio ama Caio** e che **se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio** ne segue che **Caio ama Tizio**”.

Altro esempio: scriviamo

Tutti dormono.
Se tutti dormono c'è silenzio.

C'è silenzio.

come forma concisa per

“È vero che “**c'è silenzio**” se **tutti dormono** ed se è vero che **se tutti dormono c'è silenzio.**”

5.1 Necessità di un linguaggio formale

Per descrivere la **forma logica** di una frase si definisce un **linguaggio formale** (o **linguaggio simbolico**).

Ogni *linguaggio di programmazione* è un *esempio* di *linguaggio formale*.

Prima di introdurre il concetto di linguaggio formale torniamo sulla distinzione tra livelli di riferimento (per approfondimento il lettore legga il capitolo 1 del libro di Sambin “**Per Istruire Un Robot: (ovvero, come costruirsi una logica)**”).

5.1.1 Livelli di riferimento in un programma

Nel programma

```
y = 1;
z = 0;
while (z ≠ x) {
    z = z + 1
    y = y * z;
}
```

quanti **livelli di astrazione** o **riferimento** ci sono?

1. **codice del programma**, \Rightarrow livello del “**linguaggio**” cioè **sintassi**;

2. **commento/verifica** di ciò che fa, \Rightarrow livello del **metalinguaggio** cioè **SEMANTICA**.

5.2 Livelli di riferimento nel corso

Nel nostro corso parleremo di almeno 2 livelli di riferimento in relazione ai linguaggi formali:

1. livello del **linguaggio formale** — **sintassi**
2. livello del **metalinguaggio/nostro linguaggio naturale** — **semantica**

Il livello del **linguaggio formale** è costituito da simboli ed espressioni del linguaggio che possiamo associare in modo specifico ad una **MACCHINA** o **ROBOT**.

Invece il livello del **metalinguaggio** è dato dal significato dei simboli ed espressioni del precedente livello che è assegnato da NOI in modo specifico.

Ricordiamo che dobbiamo operare una netta distinzione tra tali livelli di riferimento per non incorrere in paradossi.

5.3 UNIVERSALITÀ del linguaggio logico formale

Il linguaggio formale utilizzato per rappresentare le formule logiche è **UNIVERSALE** nel senso che non fa riferimento a nessun lingua parlata ma anzi potrebbe essere utilizzato per costruire traduttori automatici tra lingue diverse.

5.4 Spiegazione del carattere ASTRATTO della LOGICA

Ora possiamo capire meglio la citazione di Russell

In **logica**, come in **matematica**
non si sa di cosa si parla
nè se ciò di cui si parla sia vero.

ricordando che lo scopo della logica è di introdurre un **linguaggio simbolico** per studiare la **FORMA** degli enunciati **SENZA RIFERIMENTO** al contenuto semantico specifico dei loro componenti atomici.

Ad esempio l'argomentazione

Nessun falipo è goloso e Giove è un falipo.
Giove non è goloso.

è valida logicamente, come l'esercizio 3. del test anche se la parola "falipo" non compare nel vocabolario italiano, nè sappiamo se abbia senso attribuirgli l'aggettivo "goloso".

6 Linguaggio formale proposizionale

Costituenti delle nostre asserzioni sono le proposizioni, ove con proposizione si intende un enunciato in un determinato linguaggio, non solo dotato di senso ma anche di valore di verità (per approfondimento si rimanda al capitolo 1. del libro di Sambin). La logica formale studia le forme logiche delle proposizioni e la loro validità.

Ora introduciamo un linguaggio formale contenente segni per denotare le **PROPOSIZIONI** che si distinguono in atomiche e composte.

A tal fine usiamo le lettere dell'alfabeto

$$\mathbf{A, B, C \dots, Z}$$

come NOMI per indicare proposizioni ATOMICHE qualsiasi in modo **ASTRATTO**. Nel gergo formale **A, B, C \dots, Z** si dicono **VARIABILI PROPOSIZIONALI**.

A partire dalle **variabili proposizionali**

$$\mathbf{A, B, C \dots, Z}$$

costruiamo proposizioni composte usando i segni di
connettivo unario della **negazione**

$$\neg$$

connettivo binario dell' **implicazione**

$$\rightarrow$$

connettivo binario della **coniunzione**

$$\&$$

connettivo binario della **disgiunzione**

$$\vee$$

6.1 Grammatica delle proposizioni formali

Una proposizione formale

$$\mathbf{pr}$$

(che è una META-variabile per indicare una proposizione formale generica)

è una stringa di simboli ottenuti in tal modo:

pr \equiv **A** oppure **pr** \equiv **B** oppure una qualsiasi variabile proposizionale, che noi abbiamo fissato essere una lettera dell'alfabeto;

oppure **pr** coincide con una delle seguenti proposizioni ottenute da altre due generiche proposizioni **pr₁** e **pr₂** come segue:

pr₁&pr₂ che sta per **pr₁ e pr₂**

pr₁∨pr₂ che sta per **pr₁ o pr₂**

pr₁→pr₂ che sta per **se pr₁ allora pr₂**

ovvero **pr₁ implica pr₂**

¬pr₁ che sta per **NON si dà il caso che pr₁**

6.2 ATTENZIONE: come mettere le parentesi

Nello scrivere le proposizioni simboliche \neg si lega alla formula più vicina più di ogni altro connettivo, seguito a pari merito da \vee , $\&$, che a loro volta sono legate alle formule più di \rightarrow .

Ovvero

$$\neg \quad \text{lega più di} \quad \vee, \& \quad \text{lega più di} \quad \rightarrow$$

Esempi:

“(negazione di A) e B”

si scrive

$$\neg A \& B$$

“(negazione di (A e B)”

si scrive

$$\neg(A \& B)$$

“la (negazione di A) implica (B e C)”

si scrive

$$\neg A \rightarrow B \& C$$

“la negazione di ((A implica B) e C) ”

si scrive

$$\neg((A \rightarrow B) \& C)$$

6.3 Cosa traducono $\&$ ed \rightarrow

Si noti che la congiunzione $\mathbf{pr_1} \& \mathbf{pr_2}$ traduce legami tra $\mathbf{pr_1}$ e $\mathbf{pr_2}$ del tipo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{pr_1} \text{ e } \mathbf{pr_2} & \mathbf{pr_1} \text{ perchè } \mathbf{pr_2} & \mathbf{pr_1} \text{ mentre } \mathbf{pr_2} \\ \mathbf{pr_1} \text{ però } \mathbf{pr_2} & \mathbf{pr_1} \text{ quindi } \mathbf{pr_2} & \mathbf{pr_1} \text{ ma } \mathbf{pr_2} \end{array}$$

mentre l' *implicazione* $\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2}$ traduce legami del tipo

$$\begin{array}{cc} \text{se } \mathbf{pr_1} \text{ allora } \mathbf{pr_2} & \mathbf{pr_1} \text{ solo se } \mathbf{pr_2} \\ \mathbf{pr_2} \text{ se } \mathbf{pr_1} & \text{solo se } \mathbf{pr_2} \text{ vale } \mathbf{pr_1} \end{array}$$

Trucco per tradurre il solo se

- riscrivere la frase *togliendo* il “solo”
- tradurre la frase ottenuta usando l’implicazione
- se la frase ottenuta è $\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2$ allora la traduzione della frase iniziale si trova *SCAMBIANDO antecedente con conseguente*, ovvero scrivendo $\mathbf{pr}_2 \rightarrow \mathbf{pr}_1$

6.4 Esempi di proposizioni simboliche

1. La proposizione
“Oggi è venerdì e domani è sabato”
ha la forma logica di congiunzione di due proposizioni

$$V \& S$$

ove

$V =$ “Oggi è venerdì”

$S =$ “domani è sabato”

2. “Oggi è venerdì e domani è sabato, mentre dopodomani è domenica” si può formalizzare così

$$(V \& S) \& D$$

ove

$V =$ “Oggi è venerdì”

$S =$ “domani è sabato”

$D =$ “dopodomani è domenica”

(si noti che “mentre” ha lo stesso significato di una $\&$)

3. “Solo se piove prendo l’ombrello”

si può formalizzare così

$$O \rightarrow P$$

ove

$O =$ prendo l’ombrello e $P =$ piove.

(Si noti che il fatto che “piova” è la condizione NECESSARIA affinché io porti l’ombrello...).

4. “Il programma fattoriale termina sull’input 5 perchè ad un certo punto la condizione del **while** diventa falsa.”

si può formalizzare così

$$F \& T$$

ove

$F =$ “ad un certo punto la condizione del **while** diventa falsa”

$T =$ “Il programma fattoriale termina sull’input 5”

5. “Solo se ad un certo punto la condizione del **while** diventa falsa allora il programma fattoriale termina sull’input 5.”

si può formalizzare così

$$T \rightarrow F$$

6. “Se ad un certo punto la condizione del **while** diventa falsa allora il programma fattoriale termina sull’input 5.”

si può formalizzare così

$$F \rightarrow T$$

7. “Se e solo se ad un certo punto la condizione del **while** diventa falsa allora il programma fattoriale termina sull’input 5.”

si può formalizzare così

$$(F \rightarrow T) \ \& \ (T \rightarrow F)$$

8. “Ad un certo punto la condizione del **while** diventa falsa e quindi il programma fattoriale termina sull’input 5.”

si può formalizzare così

$$F \& T$$

(si noti che la frase sopra esprime non solo che vale $F \& T$ ma anche c’è un legame causale tra T ed F , ovvero che F implica T , ovvero che vale $F \rightarrow T$ oltrechè F da cui segue T).

Si noti che da 5) in poi le lettere F e T stanno ad indicare le proposizioni come in 3).

6.5 Formalizzazione di enunciati con premesse e conclusioni

Diamo ora la formalizzazione logica di enunciati più complessi come quelli in sezione 5 ove una conclusione segue da una o più premesse.

Ad esempio l’asserzione

“È vero che **se il treno è in ritardo i viaggiatori non sono contenti** se si assume che **se i viaggiatori son contenti allora il treno non è in ritardo**”.

si può formalizzare come UNICO enunciato formale in

$$(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (R \rightarrow \neg V)$$

ove

V = “**i viaggiatori sono contenti**”

R = “**il treno è in ritardo**”

ma grazie alla convenzione nella sezione 5 possiamo anche più semplicemente formalizzarlo in tal modo

$$\frac{V \rightarrow \neg R}{R \rightarrow \neg V}$$

Diamo di seguito la formalizzazione di altre asserzioni:

1. L'asserzione

“È vero che **non si dà il caso che non ci sia silenzio se tutti dormono** e se è vero che **se tutti dormono c'è silenzio**.”

si può formalizzare in

$$D \& (D \rightarrow S) \rightarrow \neg \neg S$$

e secondo la convenzione in sezione 5 in

$$\frac{\begin{array}{c} D \\ D \rightarrow S \end{array}}{\neg \neg S}$$

ove

$D =$ “**tutti dormono**”

$S =$ “**c'è silenzio**”

2. L'asserzione

“AmMESSo che **Tizio ama Caio** e che **se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio** ne segue che **Caio ama Tizio**”.

si può formalizzare in

$$T \& (T \rightarrow C) \rightarrow C$$

e secondo la convenzione in sezione 5 in

$$\frac{\begin{array}{c} T \\ T \rightarrow C \end{array}}{C}$$

ove

$T =$ “**Tizio ama Caio**”

$C =$ “**Caio ama Tizio**”

3. L'asserzione

“AmMESSo che **se piove, i canali interni vengono chiusi**, allora, è vero che **se i canali interni non vengono chiusi, allora non piove**”.

si può formalizzare in

$$(P \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg P)$$

e secondo la convenzione in sezione 5 in

$$\frac{P \rightarrow C}{\neg C \rightarrow \neg P}$$

ove

$P =$ “**piove**”

$C =$ “**i canali interni vengono chiusi**”

4. L'asserzione

“È vero che **c'è silenzio** se **tutti dormono** e se è vero che **se tutti dormono c'è silenzio.**”

si può formalizzare in

$$D \& (D \rightarrow S) \rightarrow S$$

e secondo la convenzione in sezione 5 in

$$\frac{D \quad D \rightarrow S}{S}$$

ove

$D =$ “**tutti dormono**”
 $S =$ “**c'è silenzio**”

5. l'asserzione

“È vero che **se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano** se si suppone che **se la radice quadrata canta alla Scala di Milano allora il tuo vicino di banco è Napoleone**”

si può formalizzare in

$$(C \rightarrow N) \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C)$$

e secondo la convenzione in sezione 5 in

$$\frac{C \rightarrow N}{\neg N \rightarrow \neg C}$$

ove

$N =$ “**il tuo vicino di banco è Napoleone**”
 $C =$ “**la radice quadrata canta alla Scala di Milano**”

Come si vede sopra le proposizioni in 3) e 5) hanno la stessa forma logica (a meno di variabili proposizionali), e così pure 2) e 4).

6.6 Alla ricerca della verità

Ricordando che la **Logica** si occupa di studiare la **verità** di un'argomentazione o proposizione **SOLTANTO** in base alla sua **forma logica** definiamo allora la **verità** di una **proposizione**.

Precisiamo inoltre che propriamente una **proposizione** è tale se oltre ad essere una successione di segni dotati di significato abbiamo anche un *criterio* per *stabilire se la proposizione è vera o falsa*.

Ricordiamo ad esempio che

“**Questa proposizione è falsa**”

NON è una proposizione propriamente, in quanto non può essere nè vera nè falsa come argomentato in sezione 3.4.

Altri esempi e controesempi di proposizioni sono i seguenti:

“In biblioteca al piano interrato c’è l’ultimo numero di Topolino”

è una proposizione perchè posso verificare la sua verità andando in biblioteca.

“La radice quadrata canta alla Scala di Milano.”

non è una proposizione perchè non ha senso e non posso quindi stabilire il suo valore di verità.

6.6.1 Nel corso di logica studiamo solo giudizi assertivi

Un **giudizio** è l’atto di dichiarare una proposizione e vi sono DIVERSI tipi di giudizio:

assertivo= la proposizione è asserita vera

ad es. **“Mario studia.”**

interrogativo= s’interroga sulla verità della proposizione

ad es. **“Mario studia?”**

direttivo= la proposizione esprime un’ordine da eseguire

ad es. **“Studia, Mario!”**

esclamativo= la proposizione esprime un’esclamazione.

ad es. **“Mario studia!”**

Nel corso di logica studiamo soltanto i **giudizi assertivi** in cui **asseriamo certe proposizioni** come **VERE**.

Altro esempio di giudizio assertivo: affermo che **“il numero 3 è dispari”** oppure semplicemente **“il numero 3 è dispari”**

6.7 Verità classica di una proposizione

Per stabilire quando una proposizione formale è vera ci serviamo delle **tabelle di verità**. A tal scopo ad ogni proposizione formale **pr** costruita tramite COMPOSIZIONE di connettivi logici

$$\mathbf{pr} \equiv \mathbf{comp}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n)$$

a partire dalle proposizione atomiche $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ associamo una funzione

$$\text{Tab}_{\mathbf{comp}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n)} : \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

rappresentata dalla tabella di verità

V_1	V_2	\dots	V_n	$\mathbf{comp}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n)$
0	1	\dots	\dots	\mathbf{c}_1
0	0	\dots	\dots	\mathbf{c}_2
1	1	\dots	\dots	\mathbf{c}_3
1	0	$\dots\dots\dots$	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

che associa a $\mathbf{comp}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n)$ un valore IN USCITA \mathbf{c}_i che può solo essere **1** (per **vero**) oppure **0** (per **falso**) al variare delle combinazioni di valori **0** e **1** associate alle proposizioni atomiche \mathbf{V}_i per $i = 1, \dots, n$.

6.7.1 Come si costruisce la tabella di verità di una proposizione?

La tabella di ogni **proposizione formale pr** si costruisce **componendo** (come funzioni) le tabelle dei connettivi

$$\neg, \vee, \&, \rightarrow$$

che compongono **pr** e che definiamo di seguito.

6.7.2 Tabella di verità di \neg

si ottiene considerando che

$$\neg \mathbf{A} \quad \text{è vero} \quad \text{sse} \quad \mathbf{A} \quad \text{è falso}$$

ed è la funzione unaria

A	$\neg A$
0	1
1	0

6.7.3 Tabella di verità di $\&$

si ottiene considerando che

$A \& B$ è vero sse A è vero e B è vero

ed è la funzione binaria

A	B	$A \& B$
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	0

6.7.4 Tabella di verità di \vee

si ottiene considerando che

$A \vee B$ è vero sse A è vero o B è vero
o sono veri entrambi

ed è la funzione binaria

A	B	$A \vee B$
0	1	1
0	0	0
1	1	1
1	0	1

6.7.5 Tabella di verità di \rightarrow

si ottiene considerando che

$A \rightarrow B$ è vero sse $\neg A \vee B$ è vero

ed è la funzione binaria

A	B	$\neg A$	$A \rightarrow B$
0	1	1	1
0	0	1	1
1	1	0	1
1	0	0	0

6.7.6 VALIDITÀ CLASSICA di una proposizione

Una proposizione pr è **vera classicamente** sse la **tabella di verità di pr** dà sempre 1 in uscita e sinonimi di “ pr è **vera classicamente**” sono i seguenti:

- “ pr è **TAUTOLOGIA classica**”
- “ pr è **VALIDA classicamente**”
- la scrittura simbolica $\models pr$ che si legge “ pr **vale classicamente**”.

6.7.7 Esempio di tabella di verità

La tabella di verità di $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{A}$ si ottiene costruendo dapprima la tabella di $A \rightarrow B$ e poi combinandola con la disgiunzione con A come segue

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \vee A$
0	1	1	1
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	1

6.8 Proposizioni VALIDE, SODDISFACIBILI e i loro NON

Una proposizione **pr** si dice

VALIDA in logica classica se è una tautologia, ovvero se sono 1 TUTTI i valori in uscita della sua tabella di verità

SODDISFACIBILE se è 1 QUALCHE valore in uscita della sua tabella di verità

NON VALIDA se è 0 QUALCHE valore in uscita della sua tabella di verità

INSODDISFACIBILE o **PARADOSSO** se sono 0 TUTTI i valori in uscita della sua tabella di verità.

esempio di proposizione VALIDA: $\neg \neg (\mathbf{P} \vee \neg \mathbf{P})$

esempio di proposizione SODDISFACIBILE: $\neg \mathbf{P}$ per $\mathbf{P} = 0$

esempio di proposizione NON VALIDA: $\mathbf{P} \rightarrow \neg \mathbf{P}$ per $\mathbf{P} = 1$

esempio di proposizione INSODDISFACIBILE: $\mathbf{P} \& \neg \mathbf{P}$

6.8.1 Esempi di analisi della validità di proposizioni

1. $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$ è una tautologia? Ovvero vale $\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$?

Se facciamo la tabella di verità per $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$ otteniamo

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \& A$
0	1	1	0
0	0	1	0
1	1	1	1
1	0	0	0

e concludiamo che è NON VALIDA (per esempio per $A = B = 0$) \Rightarrow NON è tautologia \Rightarrow NON vale $\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$

Concludiamo però che è soddisfacibile per $A = B = 1$.

2. Guardando la tabella di $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$ concludete che $\models \neg ((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A})$ vale ???

Chiaramente $\neg ((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A})$ è NON VALIDA (per i valori $A = B = 1$ ad esempio) e SODDISFACIBILE (per i valori $A = B = 0$).

3. vale

$$\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{A} \quad ?$$

Se facciamo la tabella di verità

A	B	A → B	(A → B) ∨ A
0	1	1	1
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	1

otteniamo che la formula $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{A}$ è **VERA classicamente**, \Rightarrow è una **tautologia classica** \Rightarrow vale $\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{A}$. Chiaramente la sua negazione $\neg((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{A})$ è INSODDISFACIBILE.

6.9 UGUAGLIANZA tra proposizioni

L'identità sintattica NON è il concetto più rilevante di uguaglianza tra proposizioni. L'uguaglianza tra proposizioni che ci interessa è quella che *identifica due proposizioni come uguali se hanno la stessa tabella di verità*. E quindi ci chiediamo:

quando due proposizioni formali \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 hanno la STESSA tabella di verità?

Innanzitutto notiamo che proposizioni sintatticamente diverse possono avere la stessa tabella di verità: per esempio

A	¬A
0	1
1	0

è anche la tabella di verità per $\neg \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}$

A	¬A & ¬A
0	1
1	0

e anche per $(\neg \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}) \& \neg \mathbf{A}$ e per $((\neg \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}) \& \neg \mathbf{A}) \& \neg \mathbf{A}$.

Per capire come sono relazionate tale proposizioni introduciamo il connettivo di equivalenza (o equiprobabilità).

6.9.1 Connettivo equivalenza

Indichiamo con il segno

$$\leftrightarrow$$

il connettivo **equivalenza** che è definito in tal modo: date due proposizioni formali \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2

$$\mathbf{pr}_1 \leftrightarrow \mathbf{pr}_2 \equiv (\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) \& (\mathbf{pr}_2 \rightarrow \mathbf{pr}_1)$$

che si legge “ \mathbf{pr}_1 è **equivalente** a “ \mathbf{pr}_2 ”.

Il connettivo “equivalenza” ha quindi la seguente tabella di verità

A	B	A\leftrightarrowB
0	1	0
0	0	1
1	1	1
1	0	0

Questo connettivo è importante perchè cattura esattamente l'uguaglianza semantica delle tabelle di verità (ove con "sse" s'intende "se e solo se"):

Theorem 6.1 *Date proposizioni \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 , allora*

\mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 hanno la **stessa tabella di verità** (contenente tutte le variabili che compaiono in entrambe)
sse
vale $\models \mathbf{pr}_1 \leftrightarrow \mathbf{pr}_2$

e in tal caso si dice che la proposizione \mathbf{pr}_1 è *uguale semanticamente* a \mathbf{pr}_2 , ovvero l'**uguaglianza semantica** di proposizioni è l' **equivalenza** di proposizioni.

6.9.2 Precisazione sull'identità sintattica

Precisiamo che consideriamo il connettivo dell'equivalenza $\mathbf{pr}_1 \leftrightarrow \mathbf{pr}_2$ come **ABBREVIAZIONE** di

$$(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) \ \& \ (\mathbf{pr}_2 \rightarrow \mathbf{pr}_1)$$

Di conseguenza diciamo che la proposizione \mathbf{pr}_1 è **uguale sintatticamente** a \mathbf{pr}_2 se le due proposizioni soddisfano una delle seguenti condizioni:

- sono proprio scritte nello stesso modo;
- oppure \mathbf{pr}_1 è ottenuta da \mathbf{pr}_2 sostituendo i nomi abbreviati con il loro significato.

Per esempio

$$A \& (B \leftrightarrow C) \text{ è uguale sintatticamente a } A \& ((B \rightarrow C) \ \& \ (C \rightarrow B))$$

Ovviamente proposizioni *sintatticamente uguali* sono anche *semanticamente uguali*, ovvero *hanno la stessa tabella di verità* perchè la scrittura $B \leftrightarrow C$ è solo un'abbreviazione per $(B \rightarrow C) \ \& \ (C \rightarrow B)$.

6.10 Tautologie classiche

Di seguito diamo una lista di proposizioni valide classicamente e lasciamo al lettore verificare che la loro tabella di verità ha TUTTI 1 in uscita:

$$\text{essenza implicazione} \qquad \models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$$

associatività \vee	$\models (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$
associatività $\&$	$\models (\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \& \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{A} \& (\mathbf{B} \& \mathbf{C})$
commutatività \vee	$\models \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$
commutatività $\&$	$\models \mathbf{A} \& \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B} \& \mathbf{A}$
distributività \vee su $\&$	$\models \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \& \mathbf{C}) \leftrightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \& (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})$
distributività $\&$ su \vee	$\models \mathbf{A} \& (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \leftrightarrow (\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \& \mathbf{C})$
idempotenza \vee	$\models \mathbf{A} \vee \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$
idempotenza $\&$	$\models \mathbf{A} \& \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$
leggi di De Morgan	$\models \neg(\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \leftrightarrow \neg \mathbf{B} \& \neg \mathbf{C}$ $\models \neg(\mathbf{B} \& \mathbf{C}) \leftrightarrow \neg \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{C}$
legge della doppia negazione	$\models \neg \neg \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$
legge della NON contraddizione	$\models \neg(\mathbf{A} \& \neg \mathbf{A})$
legge del terzo escluso	$\models \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$

La verità classica di una proposizione, ossia il suo essere tautologia, si mantiene anche dopo aver sostituito le sue variabili proposizionali con altre proposizioni a piacere. In termini più formali, le tautologie sono chiuse per sostituzione delle loro variabili proposizionali.

Infatti in ogni tautologia descritta sopra

$$\mathbf{pr}_1(A, B, C)$$

con variabili A, B, C, \dots si ottiene una nuova tautologia

$$\mathbf{pr}_1(\mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3, \mathbf{pr}_4)$$

se si sostituiscono A, B, C in $\mathbf{pr}_1(A, B, C)$ con proposizioni arbitrarie rispettivamente $\mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3, \mathbf{pr}_4$.

Una prova di ciò è costituita dal fatto che la tabella finale della proposizione $\mathbf{pr}_1(\mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3, \mathbf{pr}_4)$ è composizione di una tabella di una tautologia, che è funzione costante 1, con le tabelle delle proposizioni sostituite, ma siccome comporre con una funzione costante 1 dà luogo ancora ad una funzione costante 1, ne segue che la proposizione $\mathbf{pr}_1(\mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3, \mathbf{pr}_4)$ è pure tautologia.

Ad esempio è pure tautologia classica

$$\models \mathbf{pr} \vee \neg \mathbf{pr}$$

ove \mathbf{pr} è una qualsiasi altra proposizione.

La chiusura per sostituzione delle tautologie si può esprimere in tal modo:

Theorem 6.2 (sostituzione semplice) *Date le proposizioni $\mathbf{pr}_1(A)$ e \mathbf{pr}_2*

$\text{Se } \models \mathbf{pr}_1(A)$ $\text{allora } \models \mathbf{pr}_1(\mathbf{pr}_2).$
--

6.11 Proprietà utili sull'equivalenza

Ricordando che **proposizioni equivalenti** hanno **stessa tabella di verità** si ottiene che se è una vera pure l'altra lo è:

Proposition 6.3 (verità di equivalenti) *Date pr_1 e pr_2 proposizioni*

$$\begin{array}{c} \text{se} \quad \models \text{pr}_1 \leftrightarrow \text{pr}_2 \\ \text{allora} \\ \text{vale (} \quad \models \text{pr}_1 \quad \text{sse} \quad \models \text{pr}_2 \quad \text{)} \end{array}$$

L'equivalenza di proposizioni è una relazione simmetrica e transitiva:

Lemma 6.4 (simmetria equivalenti) *Date pr_1 e pr_2 proposizioni*

$$\text{se} \quad \models \text{pr}_1 \leftrightarrow \text{pr}_2 \quad \text{allora} \quad \models \text{pr}_2 \leftrightarrow \text{pr}_1$$

Esempio: per dedurre che $\models A \leftrightarrow A \& A$ vale basta usare la simmetria dell'equivalenza sopra a partire dall'idempotenza della $\&$ in sezione 6.10.

Lemma 6.5 (transitività equivalenti) *Date pr_1 , pr_2 e pr_3 proposizioni*

$$\begin{array}{c} \text{se} \quad \models \text{pr}_1 \leftrightarrow \text{pr}_2 \quad \text{e} \quad \models \text{pr}_2 \leftrightarrow \text{pr}_3 \\ \text{allora} \quad \models \text{pr}_1 \leftrightarrow \text{pr}_3 \end{array}$$

Esempio: per dedurre che $\models A \vee A \leftrightarrow A \& A$ vale basta usare la transitività dell'equivalenza a partire dalla simmetria dell'idempotenza della $\&$ in sezione 6.10 ovvero $A \leftrightarrow A \& A$ e dall'idempotenza della \vee .

Ora si noti che se due proposizioni sono uguali a meno di un loro pezzo e i due pezzi diversi sono equivalenti, allora le due proposizioni iniziali sono equivalenti. Per esempio le proposizioni

$$(C \rightarrow D) \& B \quad (\neg C \vee D) \& B$$

hanno i pezzi $C \rightarrow D$ e $\neg C \vee D$ che sono equivalenti per l'essenza della implicazione in sezione 6.10 e quindi loro sono equivalenti. Questa è un'istanza del seguente teorema:

Theorem 6.6 (equivalenza per pezzi) *Se vale $\models \text{pr}_1 \leftrightarrow \text{pr}_2$, ovvero pr_1 è equivalente a pr_2*

presa un'altra proposizione $\text{pr}_3(\mathbf{A})$, che è una scrittura per indicare che nella proposizione $\text{pr}_3(\mathbf{A})$ compare la variabile \mathbf{A} , allora vale

$$\models \text{pr}_3(\text{pr}_1) \leftrightarrow \text{pr}_3(\text{pr}_2)$$

Per applicare questo teorema al fine di dedurre che $(C \rightarrow D) \& B$ è equivalente a $(\neg C \vee D) \& B$ basta considerare la proposizione

$$A \& B$$

e sostituire A una volta con $C \rightarrow D$ e si ottiene (dopo aver messo le parentesi) $(C \rightarrow D) \& B$ e un'altra volta sostituire A con $\neg C \vee D$ e si ottiene $(\neg C \vee D) \& B$ che è equivalente a $(C \rightarrow D) \& B$ per il teorema enunciato.

Dal teorema 6.6 e teorema 6.1 segue come corollario che se in una proposizione $\text{pr}_3(A)$ si sostituisce A una volta con pr_1 e un'altra volta con un suo equivalente pr_2 si ottengono due proposizioni che hanno la proprietà che una è una tautologia sse lo è anche l'altra:

Corollary 6.7 (verità su equivalenza per pezzi) Se vale $\models \text{pr}_1 \leftrightarrow \text{pr}_2$, ovvero pr_1 è equivalente a pr_2

presa un'altra proposizione $\text{pr}_3(\mathbf{A})$, che è una scrittura per indicare che nella proposizione $\text{pr}_3(\mathbf{A})$ compare la variabile \mathbf{A} , allora vale

$$\models \text{pr}_3(\text{pr}_1) \quad \text{sse} \quad \models \text{pr}_3(\text{pr}_2)$$

7 Approfondimento sulle tabelle di verità

Di seguito riportiamo alcuni fatti interessanti relativi alle tabelle di verità.

7.1 Ogni tabella a valori in 0 e 1 è tabella di una proposizione?

Abbiamo visto come ogni proposizione formale possenga una tabella di verità. Ora ci chiediamo:

è anche vero che ogni funzione a valori in $\{0, 1\}$ con dominio $\{0, 1\}^n$ rappresentata da una tabella ad n entrate, per $n \geq 1$, (ove le righe sono pari a tutte le possibili combinazioni n -arie di 0 e 1) del tipo

V_1	V_2	\dots	V_n	???
0	1	\dots	\dots	\mathbf{c}_1
0	0	\dots	\dots	\mathbf{c}_2
1	1	\dots	\dots	\mathbf{c}_3
1	0	$\dots\dots$	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

(ove \mathbf{c}_i può essere solo 0 o 1)

*corrisponde ad una **proposizione formale** con (al più) n variabili proposizionali? Se sì dobbiamo forse aggiungere qualche connettivo a quelli già definiti per rappresentarla?*

La risposta è che OGNI TABELLA a n entrate, con $n \geq 1$, CORRISPONDE alla TABELLA di VERITÀ di una PROPOSIZIONE formale con al più n variabili proposizionali e che NON abbiamo bisogno di aggiungere nuove proposizioni per rappresentare tutte le tabelle di verità.

Il motivo è che vale il seguente teorema:

Theorem 7.1 (Completezza delle tabelle rispetto a $\neg, \vee, \&$) Ogni tabella con \mathbf{n} -entrate, con $\mathbf{n} \geq 1$, denota un connettivo \mathbf{n} -ario che si può scrivere con solo $\vee, \&$ ed \neg .

Questo teorema è in verità il corollario di altri due teoremi:

Theorem 7.2 (forma normale disgiuntiva) Ogni tabella con \mathbf{n} -entrate, con $\mathbf{n} \geq 1$, denota un connettivo \mathbf{n} -ario che si può scrivere in forma normale **disgiuntiva**

$$\bigvee_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato } 1} \text{riga}_{\mathbf{i}}$$

ove

$$\text{riga}_{\mathbf{i}} \equiv (((\mathbf{C}_{\mathbf{i},1} \& \mathbf{C}_{\mathbf{i},2}) \dots \& \mathbf{C}_{\mathbf{i},n})$$

è congiunzione di variabili o loro negazioni e

$$\bigvee_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato } 1} \mathbf{riga}_{\mathbf{i}} \equiv ((\mathbf{riga}_{\mathbf{i}_1} \vee \mathbf{riga}_{\mathbf{i}_2}) \vee \mathbf{riga}_{\mathbf{i}_3} \dots) \vee \mathbf{riga}_{\mathbf{i}_n}$$

La procedura per scrivere la forma normale disgiuntiva di una tabella di verità a n entrate è la seguente:

- considero la tabella di verità di $\mathbf{conn}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n)$
- se **NON ESISTE** almeno una riga con risultato 1 poni

$$\mathbf{V}_1 \& \neg \mathbf{V}_1$$

- se **ESISTE** almeno una riga con risultato 1 faccio la disgiunzione

$$\bigvee_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato } 1} \mathbf{riga}_{\mathbf{i}}$$

ove

$$\mathbf{riga}_{\mathbf{i}} \equiv (((\mathbf{C}_{\mathbf{i},1} \& \mathbf{C}_{\mathbf{i},2}) \dots \& \mathbf{C}_{\mathbf{i},n})$$

è multipla congiunzione di $\mathbf{C}_{\mathbf{i},k}$ definiti come segue

$$\mathbf{C}_{\mathbf{i},k} \equiv \begin{cases} \mathbf{V}_k & \text{se } 1 \text{ è il valore di } \mathbf{V}_k \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \\ \neg \mathbf{V}_k & \text{se } 0 \text{ è il valore di } \mathbf{V}_k \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \end{cases}$$

- si dimostra che

$$\models \mathbf{conn}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n) \leftrightarrow \bigvee_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato } 1} \mathbf{riga}_{\mathbf{i}}$$

7.1.1 Esempio di uso di forma normale disgiuntiva

Data la tabella di verità

A	B	$\mathbf{conn}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$
0	1	0
0	0	1
1	1	0
1	0	0

per scoprire che proposizione è $\mathbf{conn}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ usiamo il teorema **forma normale disgiuntiva** e scriviamo dunque le righe uscenti con 1

$$\neg \mathbf{A} \& \neg \mathbf{B}$$

e dal teorema deduciamo che possiamo definire

$$\mathbf{conn}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \neg \mathbf{A} \& \neg \mathbf{B}$$

perchè connettivi equivalenti hanno la stessa tabella di verità.

Se prendiamo invece questa tabella di verità

A	B	$\mathbf{conn}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$
0	1	1
0	0	1
1	1	0
1	0	1

chi è **conn**(**A**, **B**)? Per stabilirlo di nuovo usiamo il teorema di forma normale disgiuntiva e scriviamo dunque le righe uscenti con 1:

$$((\neg \mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vee (\neg \mathbf{A} \& \neg \mathbf{B})) \vee (\mathbf{A} \& \neg \mathbf{B})$$

dal teorema sappiamo che possiamo definire

$$\mathbf{conn}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv ((\neg \mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vee (\neg \mathbf{A} \& \neg \mathbf{B})) \vee (\mathbf{A} \& \neg \mathbf{B})$$

Però la scrittura del connettivo è molto complessa... Vediamo allora un'altro modo di scrivere il connettivo corrispondente ad una tabella di verità nel caso ci siano pochi 0 in uscita. A tal fine enunciamo il seguente teorema:

Theorem 7.3 (forma normale congiuntiva) *Ogni tabella con n -entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n -ario che si può scrivere in forma normale **congiuntiva***

$$\&_{\mathbf{i}} \text{ indice riga con risultato } 0 \quad \overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}}}$$

ove

$$\overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}}} \equiv (((\mathbf{C}_{\mathbf{i},1} \vee \mathbf{C}_{\mathbf{i},2}) \dots \vee \mathbf{C}_{\mathbf{i},n})$$

è disgiunzione di variabili o loro negazioni e

$$\&_{\mathbf{i}} \text{ riga con risultato } 0 \quad \overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}}} \equiv ((\overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}_1}} \& \overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}_2}}) \& \overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}_3}} \dots) \& \overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}_n}}$$

La procedura per scrivere la forma normale congiuntiva di una tabella di verità ad n entrate è la seguente:

- considero la tabella di verità del connettivo n -ario **conn**(**V**₁, ..., **V** _{n})
- se **NON ESISTE** almeno una riga con risultato 0 poni

$$\mathbf{V}_1 \vee \neg \mathbf{V}_1$$

- se **ESISTE** almeno una riga con risultato 0 faccio la congiunzione

$$\&_{\mathbf{i}} \text{ indice riga con risultato } 0 \quad \overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}}}$$

ove

$$\overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}}} \equiv (((\mathbf{C}_{\mathbf{i},1} \vee \mathbf{C}_{\mathbf{i},2}) \dots \vee \mathbf{C}_{\mathbf{i},n})$$

è multipla disgiunzione di **C** _{\mathbf{i}} definiti come segue

$$\mathbf{C}_{\mathbf{i},\mathbf{k}} \equiv \begin{cases} \mathbf{V}_{\mathbf{k}} & \text{se } 0 \text{ è il valore di } \mathbf{V}_{\mathbf{k}} \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \\ \neg \mathbf{V}_{\mathbf{k}} & \text{se } 1 \text{ è il valore di } \mathbf{V}_{\mathbf{k}} \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \end{cases}$$

- si dimostra che

$$\models \mathbf{conn}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n) \leftrightarrow \&_{\mathbf{i}} \text{ indice riga con risultato } 0 \quad \overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}}}$$

7.1.2 Esempio di uso di forma normale congiuntiva: il connettivo NAND

Quindi ora data la tabella

A	B	$\text{conn}(A, B)$
0	1	1
0	0	1
1	1	0
1	0	1

usiamo il teorema di forma normale congiuntiva e scriviamo le righe uscenti con 0: $\neg A \vee \neg B$ e deduciamo dal teorema che possiamo definire

$$\text{conn}(A, B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

perchè connettivi equivalenti hanno la stessa tabella di verità.

Inoltre per simmetria dell'equivalenza e per la legge di de Morgan in sezione 6.10 otteniamo che

$$\models \text{conn}(A, B) \leftrightarrow \neg(A \& B)$$

e quindi la tabella di verità rappresenta il connettivo NAND.

7.1.3 Raffinamento del teorema di completezza delle tabelle di verità

Theorem 7.4 ($\& + \neg$) *Ogni tabella con n -entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n -ario che si può scrivere con solo $\&$ e \neg .*

Dim. Segue per il teorema di forma normale congiuntiva, dopo aver notato che la disgiunzione tramite la legge di De Morgan e quella della doppia negazione in sezione 6.10 si può definire come segue

$$A \vee B \equiv \neg(\neg A \& \neg B)$$

In particolare, si noti che l'implicazione tramite la sua essenza in sezione 6.10 si può definire in tal modo

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

Theorem 7.5 ($\vee + \neg$) *Ogni tabella con n -entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n -ario che si può scrivere con solo \vee e \neg .*

Dim: Segue per il teorema di forma normale disgiuntiva dopo aver notato che la congiunzione tramite le leggi di De Morgan e quella della doppia negazione si può definire come segue

$$A \& B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$$

Theorem 7.6 ($\rightarrow + \neg$) *Ogni tabella con n -entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n -ario che si può scrivere con solo \rightarrow e \neg .*

Dim: Basta notare che si può definire la disgiunzione in tal modo

$$A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B$$

grazie alla legge della doppia negazione in sezione 6.10 e poi si applica il teorema 7.5.

Theorem 7.7 (solo NAND) *Ogni connettivo n -ario si può scrivere con solo NAND.*

Dim: Basta notare che tramite **NAND** si può definire sia la negazione che la disgiunzione come segue

$$\neg A \equiv \text{NAND}(A, A) \qquad A \vee B \equiv \text{NAND}(\neg A, \neg B)$$

ove nel secondo si usa ovviamente la definizione di negazione data nella definizione di sinistra. Poi si conclude per il teorema 7.5.

7.1.4 Quante sono le tabelle di verità ad n entrate?

Le possibili tabelle di verità con n entrate, con $n \geq 1$, sono

$$2^{2^n}$$

ovvero tante quante le funzioni da $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ e quindi i connettivi n -ari **a meno di equivalenza proposizionale** sono 2^{2^n}

Per esempio le tabelle di verità **unarie** sono $4 = 2^{2^1}$ e sono:

identità		negazione	
A	A	A	$\neg A$
0	0	0	1
1	1	1	0

costante falso		costante vero	
\perp		\mathbf{tt}	
0		1	

ove \perp è il nome alla costante “falso” che è da aggiungere alle proposizioni, \mathbf{tt} è il nome alla costante “vero” che è da aggiungere alle proposizioni.

Si noti che per i teoremi di completezza delle tabelle con i vari linguaggi si deduce che:

$$\models \perp \leftrightarrow \mathbf{A} \ \& \ \neg \mathbf{A} \qquad \models \mathbf{tt} \leftrightarrow \mathbf{A} \ \vee \ \neg \mathbf{A}$$

8 Due strategie per verificare una tautologia

Per quanto spiegato finora per vedere se vale

$$\models \text{pr}$$

abbiamo almeno due possibilità:

1. **strategia tabella:** *fai la tabella di verità di pr*
vantaggio: strategia sicura e automatica
svantaggio: la tabella può essere molto complessa
2. **strategia riduzione:** *riduci pr tramite equivalenze note ad una tautologia nota*
vantaggio: strategia veloce, se termina
svantaggio: strategia non automatica e non sempre terminante in una proposizione nota

Suggerimento: combinate le due strategie sopra!!

Esempio di verifica di validità di una proposizione. Abbiamo già visto che l'asserzione

“È vero che se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano se si suppone che se la radice quadrata canta alla Scala di Milano allora il tuo vicino di banco è Napoleone”

si può formalizzare in

$$(C \rightarrow N) \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C)$$

ove

N = “il tuo vicino di banco è Napoleone”

C = “la radice quadrata canta alla Scala di Milano”

Ora verifichiamo se $(C \rightarrow N) \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C)$ è una tautologia o non è valida e quindi soddisfacibile o insoddisfacibile.

Usando il teorema 6.6 sull'essenza dell'implicazione nell'antecedente dell'implicazione più esterna otteniamo che

$$\models ((C \rightarrow N) \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C)) \leftrightarrow (\neg C \vee N \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C))$$

Poi usando il teorema 6.6 sull'essenza dell'implicazione nel conseguente dell'implicazione più esterna otteniamo che

$$\models (\neg C \vee N \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C)) \leftrightarrow (\neg C \vee N \rightarrow \neg \neg N \vee \neg C)$$

Di nuovo usando il teorema 6.6 sulla legge della doppia negazione otteniamo che

$$\models (\neg C \vee N \rightarrow \neg \neg N \vee \neg C) \leftrightarrow (\neg C \vee N \rightarrow N \vee \neg C)$$

Infine usando il teorema 6.6 sulla commutatività di \vee otteniamo che

$$\models (\neg C \vee N \rightarrow N \vee \neg C) \leftrightarrow (N \vee \neg C \rightarrow N \vee \neg C)$$

e per transitività dell'equivalenza di proposizioni si ottiene che vale

$$\models ((C \rightarrow N) \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C)) \leftrightarrow (N \vee \neg C \rightarrow N \vee \neg C)$$

Ora chiaramente vale

$$\models N \vee \neg C \rightarrow N \vee \neg C$$

per il teorema di sostituzione semplice sapendo che $A \rightarrow A$ è una tautologia (si sostituisca A con $N \vee \neg C$).

Concludiamo quindi per la proposizione 6.3 sulla verità di equivalenti che vale PURE

$$\models (C \rightarrow N) \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C)$$

ossia $((C \rightarrow N) \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C))$ è tautologia, quindi è una proposizione VALIDA.

8.0.5 Altro esempio di verità classica

Per vedere se vale

$$\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$$

si usa due volte

$$\text{essenza} \rightarrow \models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \leftrightarrow (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B})$$

e si ottiene

$$\models (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee (\neg \mathbf{B} \vee \mathbf{A})$$

Infine per associatività e commutatività di \vee si ottiene

$$\models (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{A}) \vee (\neg \mathbf{B} \vee \mathbf{B})$$

e ora si conclude facilmente che la proposizione è una tautologia in quanto la sua tabella di verità risulta facile da costruire e dà sempre valore 1 perchè i disgiunti sono entrambe tautologie (la prima compare in sezione 6.10 e la seconda segue per commutatività di \vee dalla legge del terzo escluso).

8.0.6 Esempio su validità e soddisfacibilità e i loro NON

Esempio: formalizzare in un'unica proposizione l'asserzione

“È vero che se i viaggiatori non sono contenti allora il treno è in ritardo se si assume che se i viaggiatori son contenti allora il treno non è in ritardo.”

usando

$V =$ “i viaggiatori sono contenti”

$R =$ “il treno è in ritardo”

e mostrare se la proposizione ottenuta è tautologia classica e in caso contrario dire per quali valori delle variabili non è valida e se è soddisfacibile (e per quali valori delle variabili lo è) o insoddisfacibile.

La sua formalizzazione come UNICO enunciato è

$$(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$$

Usando il teorema 6.6 sull'essenza dell'implicazione due volte otteniamo che

$$\models ((V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)) \leftrightarrow (\neg V \vee \neg R \rightarrow \neg \neg V \vee R)$$

Di nuovo usando il teorema 6.6 sulla legge della doppia negazione otteniamo che

$$\models (\neg V \vee \neg R \rightarrow \neg \neg V \vee R) \leftrightarrow (\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R)$$

e per transitività si deduce

$$\models ((V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)) \leftrightarrow (\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R)$$

Ora si può procedere in vari modi per concludere.

1. (primo modo) Si prova a vedere se $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ è NON VALIDO trovando valori per V e R tali per cui la conseguenza $V \vee R$ risulti falsa mentre sia vera la premessa $\neg V \vee \neg R$ dell'implicazione. Si osservi che i valori per cui $V \vee R$ risulta falsa sono $V = R = 0$ e per questi la premessa $\neg V \vee \neg R$ risulta 1. Perciò l'implicazione

$$\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$$

risulta falsa per $V = R = 0$ e dunque $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ NON è VALIDO.

Si prova a vedere poi se $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ è SODDISFACIBILE. A tal scopo basta trovare dei valori per cui risulta 0 l'antecedente (ovvero risulta $\neg V \vee \neg R = 0$) e si osserva che a tal fine basta porre $V = R = 1$. Per tali valori l'implicazione $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ risulta vera. Quindi $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ risulta SODDISFACIBILE.

Dal fatto che vale $\models ((V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)) \leftrightarrow (\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R)$ ovvero che $(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$ ha la stessa tabella di verità di $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$, i risultati su NON validità e soddisfacibilità ottenuti per il secondo membro dell'equivalenza sopra valgono pure per il primo membro $(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$.

2. (altro modo) Si continua a trovare equivalenti di $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$. Infatti usando il teorema 6.6 sull'essenza dell'implicazione si trova che

$$\models (\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R) \leftrightarrow \neg(\neg V \vee \neg R) \vee (V \vee R)$$

Poi di nuovo usando il teorema 6.6 su una legge di De Morgan si ottiene

$$\models \neg(\neg V \vee \neg R) \vee (V \vee R) \leftrightarrow (\neg\neg V \& \neg\neg R) \vee (V \vee R)$$

e di nuovo usando il teorema 6.6 due volte sulla doppia negazione si conclude

$$\models (\neg\neg V \& \neg\neg R) \vee (V \vee R) \leftrightarrow (V \& R) \vee (V \vee R)$$

Ora per transitività si deduce

$$\models ((V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)) \leftrightarrow (V \& R) \vee (V \vee R)$$

ovvero che $(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$ ha la stessa tabella di verità di $(V \& R) \vee (V \vee R)$. Ora $(V \& R) \vee (V \vee R)$ è chiaramente NON valido se troviamo valori che falsificano sia $V \& R$ che $V \vee R$ e a tal scopo basta porre $V = R = 0$. Inoltre $(V \& R) \vee (V \vee R)$ è chiaramente SODDISFACIBILE ponendo $V = R = 1$ perchè $V \vee R$ diventa 1. Concludiamo che pure $(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$ è NON valido e SODDISFACIBILE sugli stessi valori.

8.0.7 In logica classica non c'è implicazione causale

La tautologia

$$\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$$

mostra con il seguente esempio che l'implicazione della logica classica NON è causale in quanto si trovano delle verità controintuitive riguardanti le implicazioni. Infatti ponendo

A=“Voi passerete l'esame di logica”

B=“Avete una zia con i calli”

si ottiene che

“Se voi passerete l'esame di logica allora avete una zia con i calli, oppure se avete una zia con i calli allora passerete l'esame di logica”

è vera logicamente secondo la logica classica.

8.0.8 Verità atemporalì della logica classica proposizionale

È vero che

“Non si dà il caso che se sono a Londra io sia a Padova”?

La risposta è che ovviamente sì non si dà questo caso.

Però una sua formalizzazione potrebbe essere

$$\neg(\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{P})$$

con

L = “Sono a Londra”

P = “Sono a Padova”

ma si noti che la proposizione sopra è equivalente a

$$\models \neg(\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{P}) \quad \leftrightarrow \quad \neg(\neg \mathbf{L} \vee \mathbf{P})$$

e per leggi di De Morgan

$$\models \neg(\neg \mathbf{L} \vee \mathbf{P}) \quad \leftrightarrow \quad \neg \neg \mathbf{L} \& \neg \mathbf{P}$$

e infine concludiamo

$$\models \neg \neg \mathbf{L} \& \neg \mathbf{P} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{L} \& \neg \mathbf{P}$$

ovvero l’affermazione di partenza risulta equivalente a

“Io sono a Londra e NON sono a Padova”

il che non è sempre vero...!

Spiegazione della apparente paradossalità: il valore di verità della frase sopra formalizzata in $\neg(\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{P})$ dipende da dove sono in questo momento: se NON sono a Londra la proposizione $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{P}$ diventa vera classicamente, e la sua negata falsa classicamente, altrimenti se sono a Londra $\neg(\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{P})$ risulta vera. Siccome la logica classica proposizionale tratta di verità atemporalì, o vere o false senza dipendenza dal tempo, questa logica non risulta adatta per formalizzare la proposizione “Non si dà il caso che se sono a Londra io sia a Padova” che sarebbe invece meglio formalizzare includendo la nozione del tempo e nella forma più precisa “non si dà il caso che se in un qualsiasi momento io sono a Londra allora sia pure nello stesso momento anche a Padova”.

8.0.9 Esercizi su Validità e soddisfacibilità e loro negazioni

Formalizzare in un UNICA proposizione le seguenti asserzioni (secondo i suggerimenti indicati) e mostrare se la proposizione ottenuta è **valida** o in caso contrario dire per quali valori delle variabili **non è valida** e se è **soddisfacibile** (e per quali valori delle variabili lo è) o **insoddisfacibile**.

Ricordiamo che nel seguito adottiamo la convenzione della sezione 5, ovvero che quando scriviamo

$$\frac{\begin{array}{c} \text{frase}_1 \\ \text{frase}_2 \\ \dots \\ \text{frase}_n \end{array}}{\text{frase}}$$

intendiamo

“AmMESSO che valga sia **frase**₁ che **frase**₂, che ... **frase**_n, allora vale **frase**”

1. $\frac{\text{Non si dà il caso che l'affare non sia conveniente o non sicuro.}}{\text{L'affare è conveniente e sicuro.}}$

A = l'affare è conveniente
S = l'affare è sicuro

Soluzione: una formalizzazione dell'asserzione è

$$\neg(\neg A \vee \neg S) \rightarrow A \& S$$

e questa per il teorema 6.6 applicato con la simmetrica della legge di De Morgan su $\neg A \vee \neg S$ è equivalente a

$$\neg\neg(A \& S) \rightarrow A \& S$$

che per il teorema 6.6 applicato con la legge della doppia negazione è equivalente a

$$A \& S \rightarrow A \& S$$

che è chiaramente valida. Siccome proposizioni equivalenti hanno la stessa tabella di verità allora la proposizione di partenza è valida.

2. $\frac{\text{Non si dà il caso che l'affare non sia conveniente o sia sicuro.}}{\text{L'affare non è conveniente nè sicuro.}}$

A = l'affare è conveniente
S = l'affare è sicuro

Soluzione: Una formalizzazione dell'asserzione è

$$\neg(\neg A \vee S) \rightarrow \neg A \& \neg S$$

che per il teorema 6.6 applicato con la legge di De Morgan su $\neg(\neg A \vee S)$ è equivalente a

$$\neg\neg A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S$$

che sempre per il teorema 6.6 applicato con la legge della doppia negazione è equivalente a

$$A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S$$

Ora chiaramente questa implicazione è NON valida se si trovano valori per cui $A \& \neg S = 1$ e $\neg A \& \neg S = 0$. Ora i valori che rendono vero l'antecedente dell'implicazione sono $A=1$ e $S=0$ da cui segue che il conseguente $\neg A \& \neg S = 0$. Perciò la proposizione $A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S$ è NON VALIDA per i valori $A=1$ e $S=0$.

Inoltre per rendere soddisfacibile $A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S$ basta trovare dei valori per cui $A \& \neg S = 0$ (oppure $\neg A \& \neg S = 1$). E si vede chiaramente che per $A=0$, e S con valore qualsiasi, allora $A \& \neg S = 0$ e quindi $A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S = 1$. In conclusione $A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S$ risulta SODDISFACIBILE per $A=0$, e S con valore qualsiasi. Infine siccome proposizioni equivalenti hanno la stessa tabella di verità allora la proposizione di partenza $\neg(\neg A \vee S) \rightarrow \neg A \& \neg S$ è NON VALIDA e SODDISFACIBILE sugli stessi valori trovati per $A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S$.

3. $\frac{\text{Prima di consegnare rileggo il compito solo se riesco a scrivere qualcosa.}}{\text{Se non riesco a scrivere qualcosa, prima di consegnare non rileggo il compito.}}$

si consiglia di usare:

R = prima di consegnare rileggo il compito

S = riesco a scrivere qualcosa

4. $\frac{\text{Mario è scontento solo se non programma bene.}}{\text{Se Mario è contento allora programma bene.}}$

C = Mario è contento

P = Mario programma bene

5. $\frac{\text{Le lezioni tacciono se c'è un'assemblea studentesca o è giorno festivo.}}{\text{Non c'è un'assemblea studentesca e non è giorno festivo, quindi le lezioni non tacciono.}}$

L = le lezioni tacciono

A = c'è un'assemblea studentesca

F = è giorno festivo

6. $\frac{\begin{array}{l} \text{Non si dà il caso che il fattoriale termini e non si esca dal ciclo.} \\ \text{Si esce dal ciclo.} \end{array}}{\text{Non si dà il caso che se si esce dal ciclo il fattoriale non termini.}}$

F = il fattoriale termina

C = si esce dal ciclo

7. $\frac{\begin{array}{l} \text{Solo se non prendo l'ombrello non piove.} \\ \text{Non piove.} \end{array}}{\text{Non prendo l'ombrello.}}$

P = piove

O = prendo l'ombrello

9 Calcolo dei sequenti LC_p

In questa sezione mostriamo un metodo più elegante, semplice e soprattutto **AUTOMATICO** per mostrare se una proposizione è valida o meno e soddisfacibile o meno.

Tale metodo è **MENO COMPLESSO** di quello delle tabelle di verità e consiste in una procedura algoritmica che **TERMINA SEMPRE** con una risposta. Questa procedura fa uso di un **calcolo dei sequenti** per la logica classica proposizionale. Anticipiamo soltanto che per verificare la validità (e soddisfacibilità) per esempio di

$$\models (V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$$

costruiremo un **albero di derivazione...** in tale calcolo.

9.1 Cosa è un sequente?

Un **sequente** nel linguaggio delle proposizioni formali è una scrittura del tipo

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash C_1, C_2, \dots, C_m$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

SE P_1 è vero e P_2 è vero... e P_n è vero **ALLORA** uno dei C_i è vero
ossia C_1 è vero **OPPURE** C_2 è vero... **OPPURE** C_m è vero

o equivalentemente che vale

$$(P_1 \& P_2) \dots \& P_n \longrightarrow (C_1 \vee C_2) \dots \vee C_m$$

Usiamo le lettere greche maiuscole del tipo

$$\Gamma, \quad \Delta, \quad \Sigma \dots$$

come META-VARIABILI per indicare una generica **LISTA** di **PROPOSIZIONI** anche vuota. Per esempio, possiamo pensare che una variabile Γ denoti $\Gamma \equiv []$ la lista vuota oppure

$$\Gamma \equiv P_1, P_2, \dots, P_n$$

E poi indichiamo con

$$\Gamma \vdash \Delta$$

un generico sequente del tipo

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash C_1, C_2, \dots, C_m$$

posto che

$$\Gamma \equiv P_1, P_2, \dots, P_n \quad \Delta \equiv C_1, C_2, \dots, C_m$$

Ora mostriamo un esempio di formalizzazione in sequente. L'asserzione

Ammesso che “Il programma termina e dà risultato 1” allora “Il programma è corretto.”

dopo averla rappresentata secondo la convenzione della sezione 5 in tal modo

Il programma termina e dà risultato 1.
Il programma è corretto.

si formalizza come sequente in questo modo

$$P \& U \vdash C$$

ponendo:

P="Il programma termina"

U="Il programma dà risultato 1"

C="Il programma è corretto"

Il calcolo dei sequenti è composto da assiomi e da delle regole con cui operiamo *trasformazioni di sequenti* secondo lo schema

se VALE QUESTO SEQUENTE (o QUESTI due SEQUENTI) allora VALE QUEST'ALTRO SEQUENTE

Un esempio di tale trasformazione utilizzando la convenzione di sezione 5 è la scrittura

$$\frac{\mathbf{P\&U \vdash C}}{\mathbf{P\&U \vdash C \vee \neg P}}$$

il cui significato è il seguente:

"se vale $\mathbf{P\&U \rightarrow C}$ allora vale pure $\mathbf{P\&U \rightarrow C \vee \neg P}$ "

9.2 Calcolo dei sequenti della Logica classica proposizionale LC_p

Il calcolo contiene regole per i connettivi \perp , $\&$, \vee , \neg , \rightarrow assieme all' **assioma identità** e alle regole di **scambio a destra e a sinistra** come segue

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \quad \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \quad \text{ax-}\perp \quad \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla \quad \text{ax-}\mathbf{tt} \quad \Gamma \vdash \nabla, \mathbf{tt}, \nabla' \\ \frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{sc}_{\text{sx}} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}} \\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-D \quad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&-S \\ \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee-D \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee-S \\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg-D \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg-S \\ \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow-D \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow-S \end{array}$$

e tale calcolo è chiuso su tutte le regole ottenute istanziando le variabili **A** e **B** con proposizioni arbitrarie e i contesti denotati con lettere greche **Γ, Δ, Σ , etc.** con liste arbitrarie di proposizioni (anche vuote).

In pratica l'assioma identità è uno *schema* di assiomi uno per ogni sostituzione delle lettere greche **Γ, Δ, Σ , etc.** con liste precise di proposizioni e le lettere **A** e **B** con proposizioni qualsiasi.

9.3 A che serve il calcolo? A costruire derivazioni!

Il nostro calcolo serve a costruire **alberi di derivazione**.

Si osservi che nel calcolo dei sequenti presentato ci sono due tipi di regole: quelle ad una premessa e quelle a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma' \vdash D'}{\Gamma \vdash D} \text{regola1} \quad \frac{\Gamma'' \vdash D'' \quad \Gamma''' \vdash D'''}{\Gamma \vdash D} \text{regola2}$$

ove i sequenti sopra la sbarra $\Gamma' \vdash D'$ nella regola 1 e i sequenti $\Gamma'' \vdash D''$ e $\Gamma''' \vdash D'''$ nella regola 2 si dicono **premesse**, mentre il sequente $\Gamma \vdash D$ in entrambi i casi si dice **conclusione**.

Poi nel calcolo ci sono anche regole a zero premesse ovvero gli **assiomi** che sono del tipo

$$\text{ax-id} \\ \Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, A, \Delta_2$$

oppure

$$\text{ax-}\perp \\ \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla$$

Una derivazione è un genere particolare di albero del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash D_1 \quad \frac{\frac{\Gamma_5 \vdash D_5}{\Gamma_3 \vdash D_3} \text{regola1} \quad \frac{\Gamma_6 \vdash D_6}{\Gamma_4 \vdash D_4} \text{regola1}}{\Gamma_2 \vdash D_2} \text{regola2}}{\Gamma \vdash D} \text{regola2}$$

con radice un sequente, detto **sequente conclusione**, che nel caso sopra è $\Gamma \vdash D$ e con foglie i sequenti $\Gamma_1 \vdash D_1$, $\Gamma_5 \vdash D_5$, $\Gamma_6 \vdash D_6$.

Per esempio nell'albero

$$\frac{\Gamma_1 \vdash D_1 \quad \frac{\frac{\Gamma_5 \vdash D_5}{\Gamma_3 \vdash D_3} \text{regola1} \quad \frac{\Gamma_6 \vdash D_6}{\Gamma_4 \vdash D_4} \text{regola1}}{\Gamma_2 \vdash D_2} \text{regola2}}{\Gamma \vdash D} \text{regola2}$$

la radice $\Gamma \vdash D$ ha due predecessori $\Gamma_1 \vdash D_1$ e $\Gamma_2 \vdash D_2$ ed è stata ottenuta applicando la **regola 2**.

Si noti che siccome considereremo solo regole con al più due premesse allora ogni albero di derivazione avrà nodi con al più due predecessori.

Un **albero** come quello mostrato sopra si dice **albero di derivazione** o semplicemente **derivazione** del **sequente radice** se le sue foglie sono **ASSIOMI** (= **regole senza premesse**).

Più precisamente diamo la seguente definizione:

Def. 9.1 (sequente derivabile) *Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice derivabile nel calcolo dei sequenti \mathbf{LC}_p se esiste un albero avente*

- $\Gamma \vdash \Delta$ come radice;
- ogni foglia è istanza di un assioma di \mathbf{LC}_p ottenuto sostituendo le variabili A, B con arbitrarie proposizioni \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 e le variabili $\Gamma, \Delta, \nabla, \Sigma$ con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).
- l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di \mathbf{LC}_p ottenute sostituendo le variabili A, B con arbitrarie proposizioni \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 e le variabili $\Gamma, \Delta, \nabla, \Sigma$ con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).

9.3.1 Quali sono gli assiomi in \mathbf{LC}_p

Gli assiomi in \mathbf{LC}_p sono di tre tipi: gli assiomi identità, gli assiomi del falso e quelli del vero

$$\begin{array}{lll} \text{ax-id} & \text{ax-}\perp & \text{ax-tt} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \mathbf{tt}, \nabla' \end{array}$$

Quindi un albero costruito a partire da un sequente è una derivazione se e solo se le sue foglie sono istanze degli assiomi sopra.

Si noti che è *assioma identità OGNI sequente* che ha *ALMENO UNA PROPOSIZIONE (o ATOMICA o COMPOSTA)* che compare a *sx* e a *dx* del segno di sequente \vdash .

Ad esempio noti che il sequente

$$\mathbf{A} \vdash \mathbf{A}$$

è un'istanza dell'assioma identità **ax-id** con Γ, Γ', Δ e Δ' tutte liste vuote.

Pure una qualsiasi proposizione **pr** dà luogo con

$$\Gamma, \mathbf{pr}, \Gamma' \vdash \Delta, \mathbf{pr}, \Delta'$$

ad un'istanza dell'assioma identità **ax-id** dopo aver sostituito proprio **pr** al posto di **A**.

Ad esempio il sequente

$$\mathbf{C}, \mathbf{P}, \mathbf{A} \& (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}), \mathbf{M} \vdash \mathbf{H} \& \mathbf{C}, \mathbf{A} \& (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C})$$

è *assioma identità* ove al posto di Γ c'è \mathbf{C}, \mathbf{P} , al posto di \mathbf{A} c'è $\mathbf{A} \& (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C})$, al posto di Γ' c'è \mathbf{M} , al posto Δ c'è $\mathbf{H} \& \mathbf{C}$ e al posto di Δ' c'è la lista vuota.

Si noti che uno stesso sequente può essere riconosciuto assioma identità con diverse sostituzioni delle variabili di contesto che compaiono nello schema dell'assioma identità

$$\Gamma, \mathbf{A}, \Gamma' \vdash \Delta, \mathbf{A}, \Delta'$$

Ad esempio il sequente

$$\mathbf{B}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S} \vdash \mathbf{H}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S}, \mathbf{M}$$

è un'istanza dell'assioma identità **ax-id** dopo aver sostituito nello schema sopra **A** con **S** e aver posto $\Gamma \equiv \mathbf{B}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}$, la lista vuota al posto di Γ' e aver posto $\Delta \equiv \mathbf{H}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}$ e infine $\Delta' \equiv \mathbf{M}$.

Però lo stesso sequente

$$\mathbf{B}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S} \vdash \mathbf{H}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S}, \mathbf{M}$$

è ANCHE istanza dello schema assioma identità

$$\Gamma, \mathbf{A}, \Gamma' \vdash \Delta, \mathbf{A}, \Delta'$$

in altro modo sostituendo **A** con $\mathbf{D} \vee \mathbf{C}$ e ponendo $\Gamma \equiv \mathbf{B}$, poi $\Gamma' \equiv \mathbf{S}$ e $\Delta \equiv \mathbf{H}$ e infine $\Delta' \equiv \mathbf{S}, \mathbf{M}$.

In sostanza un sequente è un assioma identità se compare *ALMENO una stessa proposizione* a sinistra e a destra del segno \vdash e quindi a maggior ragione nei casi in cui compaiono più proposizioni sia a dx che a sx del segno \vdash .

9.3.2 Esempio di derivazione in LC_p

Se ad esempio vogliamo costruire un albero di derivazione per il sequente

$$\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \& \mathbf{P}$$

dobbiamo scrivere il sequente come radice dell'albero e quindi costruire l'albero di derivazione dal BASSO verso l'ALTO applicando le regole, per esempio la $\&-D$ come segue

$$\frac{\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \quad \mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}}{\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \& \mathbf{P}}$$

Il lettore noti che questa regola è un'istanza della regola $\&-D$ del calcolo ottenuta ponendo: \mathbf{Q} al posto di \mathbf{A} , \mathbf{P} al posto di \mathbf{B} e la lista vuota al posto di Δ e $\mathbf{P}\&\mathbf{Q}$ al posto di Γ .

Si noti che il pezzo di derivazione

$$\frac{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q} \quad \mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}} \&-D$$

NON è albero di derivazione completo perchè le sue foglie non sono assiomi!

Invece applicando altre regole arriviamo a questo albero di derivazione:

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{P}, \mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}} \&-S \quad \frac{\text{ax-id}}{\mathbf{P}, \mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}} \&-S}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}} \&-D$$

ove $\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}$ è la RADICE mentre $\mathbf{P}, \mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}$ e $\mathbf{P}, \mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}$ sono rispettivamente foglie del ramo di sinistra e di quello di destra.

9.3.3 Come si sarebbe potuto scrivere il calcolo \mathbf{LC}_p

Dopo la descrizione delle regole del calcolo dei sequenti \mathbf{LC}_p in 9.2 abbiamo precisato che le regole si possono applicare anche a sequenti ottenuti sostituendo le variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} con arbitrarie proposizioni \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 . Per rendere più esplicita ed evidente questa proprietà possiamo descrivere il calcolo dei sequenti \mathbf{LC}_p in modo equivalente scrivendo le regole con \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 , che chiamiamo META-variabili per proposizioni complesse arbitrarie, al posto di \mathbf{A} e \mathbf{B} (la differenza tra le variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} e le META-variabili \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 è che le prime sono i costituenti di base della grammatica delle proposizioni per formare proposizioni complesse, ad esempio $A\&(B\vee C) \rightarrow D$, mentre le seconde sono solo variabili di più alto livello per indicare una proposizione complessa):

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \quad \text{ax-}\perp \quad \text{ax-tt} \\ \Gamma, \mathbf{pr}_1, \Gamma' \vdash \Delta, \mathbf{pr}_1, \Delta' \quad \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla \quad \Gamma \vdash \nabla, \mathbf{tt}, \nabla' \\ \frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{sc}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{dx} \\ \frac{\Gamma \vdash \mathbf{pr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathbf{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{pr}_1 \& \mathbf{pr}_2, \Delta} \&-D \quad \frac{\Gamma, \mathbf{pr}_1, \mathbf{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{pr}_1 \& \mathbf{pr}_2 \vdash \Delta} \&S \\ \frac{\Gamma \vdash \mathbf{pr}_1, \mathbf{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{pr}_1 \vee \mathbf{pr}_2, \Delta} \vee D \quad \frac{\Gamma, \mathbf{pr}_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathbf{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{pr}_1 \vee \mathbf{pr}_2 \vdash \Delta} \vee -S \\ \frac{\Gamma, \mathbf{pr}_1 \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{pr}_1, \Delta} \neg -D \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{pr}_1, \Delta}{\Gamma, \neg \mathbf{pr}_1 \vdash \Delta} \neg -S \\ \frac{\Gamma, \mathbf{pr}_1 \vdash \mathbf{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \Delta} \rightarrow -D \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{pr}_1, \Delta \quad \Gamma, \mathbf{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2 \vdash \Delta} \rightarrow -S \end{array}$$

9.3.4 Idea intuitiva di sequente e sue derivazioni

Dal punto di vista logico un *sequente* è un *giudizio assertivo* mentre una derivazione di un sequente rappresenta un'*argomentazione* che ne prova la validità. Possiamo inoltre pensare la **deduzione di un sequente** come la *scrittura di un programma* ove il *linguaggio di programmazione* è il **calcolo dei sequenti**.

9.3.5 Test sulla comprensione del concetto di derivazione

1. La seguente è una derivazione in logica classica proposizionale LC_p

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{P, Q \vdash P} \quad \frac{P \& Q \vdash Q}{P \& Q \vdash Q \& P} \&-S}{P \& Q \vdash Q \& P}$$

?

Risposta: NO, perchè la sua foglia di sinistra è $P \& Q \vdash Q$ che NON è un'istanza di un'assioma.

2. La seguente è una derivazione in logica classica proposizionale LC_p

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{A, B, C \vdash A}}{A \& B, C \vdash A} \&-S$$

?

NO, perchè l'applicazione $\&-S$ è scorretta, OCCORRE operare uno scambio prima di applicarla! Una corretta applicazione di $\&-S$ è nel seguente albero

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{C, A, B \vdash A}}{C, A \& B \vdash A} \&-S \quad \text{sc}_{sx} \quad \frac{}{A \& B, C \vdash A}$$

che è una corretta derivazione.

MORALE: occorre RICORDARE di operare gli SCAMBI necessari!

3. Derivare in LC_p

$$A \& B \vdash B \& A$$

Basta prendere la derivazione di $P \& Q \vdash Q \& P$ in sezione 9.3.2 e sostituire P con A e Q con B .

4. Derivare in LC_p

$$(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)$$

Esistono derivazioni diverse di uno stesso sequente?

Sì generalmente vi sono diverse derivazioni avente come radice uno stesso sequente. Ecco qui una per $(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)$

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{C, A, B \vdash A}}{C, A \& B \vdash A} \&-S \quad \frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{C, A, B \vdash B}}{C, A, B \vdash B \& C} \&-S \quad \frac{\frac{\text{ax-id}}{C, A, B \vdash C}}{C, A, B \vdash B \& C} \&-S}{\frac{C, A \& B \vdash B \& C}{A \& B, C \vdash B \& C} \text{sc}_{sx}} \&-S \quad \frac{(A \& B) \& C \vdash B \& C}{(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)} \&-D$$

Ma questa derivazione NON è la più corta. Una più corta si ottiene applicando la regola $\&-D$ il più tardi possibile.

5. Si noti che per derivare in LC_p

$$\mathbf{A} \& (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \vdash (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \& \mathbf{A}$$

basta prendere la derivazione sopra di $\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \& \mathbf{P}$ in sezione 9.3.2 e sostituire \mathbf{P} con \mathbf{A} e \mathbf{Q} con $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}$. ottenendo

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{A}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C} \vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}} \quad \frac{\text{ax-id}}{\mathbf{A}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C} \vdash \mathbf{A}}}{\frac{\mathbf{A} \& (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C} \quad \mathbf{A} \& (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \vdash \mathbf{A}}{\mathbf{A} \& (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \vdash (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \& \mathbf{A}}} \&-S \quad \&-D$$

Ovvero le derivazioni sono chiuse per sostituzioni delle loro variabili proposizionali, ossia le proposizioni atomiche, con generiche proposizioni:

*una derivazione di un sequente **rimane derivazione**
anche dopo aver sostituito **TUTTE LE OCCORRENZE** di alcune delle sue variabili proposizionali
con **PROPOSIZIONI ARBITRARIE***

9.4 Che proposizione rappresenta un sequente?

Coerentemente con quanto già espresso all'inizio sul significato di un sequente diciamo che il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ rappresenta la proposizione

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$$

ove le notazioni $\Gamma^{\&}$ e Δ^{\vee} sono definite a loro volta come segue:

$\Gamma^{\&} \equiv (\mathbf{pr}_1 \& \mathbf{pr}_2) \dots \& \mathbf{pr}_n$
 è la congiunzione delle proposizioni in $\Gamma \equiv \mathbf{pr}_1, \mathbf{pr}_2, \dots \mathbf{pr}_n$
 oppure
 $\Gamma^{\&} \equiv \mathbf{tt}$ (costante vero) se Γ è la lista vuota
 oppure
 $\Gamma^{\&} \equiv \mathbf{pr}_1$ se $\Gamma \equiv \mathbf{pr}_1$

$\Delta^{\vee} \equiv (\mathbf{pr}_1 \vee \mathbf{pr}_2) \dots \vee \mathbf{pr}_n$
 è la disgiunzione delle proposizioni in $\Delta \equiv \mathbf{pr}_1, \mathbf{pr}_2, \dots \mathbf{pr}_n$
 oppure
 $\Delta^{\vee} \equiv \perp$ (costante falso) se Δ è la lista vuota
 oppure
 $\Delta^{\vee} \equiv \mathbf{pr}_1$ se $\Delta \equiv \mathbf{pr}_1$

Questi notazioni sono usate nella definizione di validità di un sequente per interpretare una lista di proposizioni Γ a sinistra del segno \vdash come un'unica proposizione $\Gamma^{\&}$ che è la congiunzione (associata a sinistra) delle proposizioni nella lista Γ e poi per interpretare una lista di proposizioni Δ a destra del segno \vdash come un'unica proposizione Δ^{\vee} che è la disgiunzione (associata a sinistra) delle proposizioni nella lista Δ .

9.5 Validità e soddisfacibilità di un sequente in logica classica

Diciamo che un sequente è valido se lo è la proposizione implicativa che lo rappresenta come segue:

un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **valido secondo la logica classica** o (**valido classicamente**)

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} \text{ è tautologia} \quad \text{sse}$$

Possiamo dunque trasferire la classificazione dalle proposizioni ai sequenti come segue:

un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **NON valido classicamente**

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} \text{ è NON valido classicamente} \quad \text{sse}$$

un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **soddisfacibile classicamente**

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} \text{ è soddisfacibile classicamente} \quad \text{sse}$$

un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **insoddisfacibile** (o **paradossale**)

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} \text{ è insoddisfacibile (o paradosso)} \quad \text{sse}$$

Def. Tabella di verità di un sequente: La tabella di verità di un sequente

$$\Gamma \vdash \Delta$$

è la tabella di verità della proposizione

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$$

(che rappresenta il suo significato secondo la logica classica).

Con queste definizioni dovrebbe risultare chiaro che il motivo per cui il contesto vuoto a sinistra del sequente si interpreta come la costante vero \mathbf{tt} è per indicare che

$$\vdash pr \quad \text{è valido} \quad \text{sse} \quad \mathbf{tt} \rightarrow pr \text{ è tautologia}$$

e siccome

$$(\mathbf{tt} \rightarrow pr) \leftrightarrow pr$$

è una tautologia si deduce che

$$\vdash pr \quad \text{è valido} \quad \text{sse} \quad pr \text{ è tautologia}$$

Inoltre anche

$$\mathbf{tt} \& pr \leftrightarrow pr$$

è una tautologia ovvero la costante vero è elemento neutro per la congiunzione e può essere sempre aggiunta ad un congiunto senza alterarne il valore di verità (come d'altra parte la lista vuota aggiunta ad una lista è uguale alla lista stessa).

Similmente il motivo per cui il contesto vuoto a destra del sequente si interpreta come la costante falso \perp è per indicare che

$$pr \vdash \quad \text{è valido} \quad \text{sse} \quad pr \rightarrow \perp \text{ è tautologia}$$

e siccome pure

$$(pr \rightarrow \perp) \leftrightarrow \neg pr$$

è una tautologia si deduce che

$$pr \vdash \quad \text{è valido} \quad \text{sse} \quad \neg pr \text{ è tautologia}$$

Inoltre pure

$$\perp \vee pr \leftrightarrow pr$$

è una tautologia ovvero il falso è elemento neutro per la disgiunzione e può essere sempre aggiunto ad un disgiunto senza alterarne il valore di verità.

9.5.1 Alla ricerca della validità con il calcolo dei sequenti

Useremo il calcolo dei sequenti per stabilire la verità di una proposizione formale e di un sequente per il fatto che vale la seguente identificazione del concetto di derivabilità e quello di validità:

$\vdash pr$ è radice di una derivazione in \mathbf{LC}_p sse pr è una <i>tautologia</i> ovvero la sua tabella di verità ha 1 in ogni uscita
--

Inoltre vale pure più in generale

$\Gamma \vdash \Delta$ è radice di una derivazione in \mathbf{LC}_p sse $\Gamma \& \rightarrow \Delta^\vee$ è TAUTOLOGIA ovvero $\Gamma \vdash \Delta$ è VALIDO
--

Nel seguito andiamo a dimostrare il motivo per cui il concetto di **sequente derivabile** coincide con quello di **sequente valido**. Innanzitutto mostreremo che gli *assiomi sono sequenti validi*. Se poi riusciamo a mostrare che anche *le regole del calcolo sono valide*, e in particolare che conservano la VERITÀ dall'ALTO verso il BASSO allora ne risulta che una derivazione avente come radice un sequente del tipo $\vdash pr$ rende tale sequente valido perchè la validità SCENDE dalle foglie con assiomi validi fino alla radice come esemplificato in questa derivazione di un verso dell'associatività della congiunzione

$\frac{\text{valido}}{C, A, B \vdash A}$	$\frac{\text{valido} \quad C, A, B \vdash B \quad \text{e} \quad \text{valido} \quad C, A, B \vdash C}{C, A, B \vdash B \& C} \Downarrow \text{valido}$
$\frac{\frac{C, A, B \vdash A}{C, A \& B \vdash A} \Downarrow \text{valido}}{A \& B, C \vdash A} \Downarrow \text{valido}$	$\frac{\frac{C, A, B \vdash B \& C}{C, A \& B \vdash B \& C} \Downarrow \text{valido}}{A \& B, C \vdash B \& C} \Downarrow \text{valido}$
$\frac{\frac{A \& B, C \vdash A}{(A \& B) \& C \vdash A} \Downarrow \text{valido}}{(A \& B) \& C \vdash A} \text{ e } \frac{\frac{A \& B, C \vdash B \& C}{(A \& B) \& C \vdash B \& C} \Downarrow \text{valido}}{(A \& B) \& C \vdash B \& C} \Downarrow \text{valido}$	$\frac{(A \& B) \& C \vdash A \quad \text{e} \quad (A \& B) \& C \vdash B \& C}{(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)} \Downarrow \text{valido}$

9.5.2 Soddisfacibilità di un sequente su una riga

Diciamo che un sequente è vero su una riga se lo è la proposizione implicativa che lo rappresenta:

Def. 9.2 (seguente soddisfatto (o vero) su una riga) *Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è soddisfatto (o vero) su una riga contenente le variabili proposizioni del sequente sse la proposizione*

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$$

è vera sulla riga considerata.

Si osservi che possiamo associare ad una proposizione **pr** INFINITE TABELLE di VERITÀ, una per OGNI lista finita di variabili proposizionali che INCLUDANO le variabili effettivamente presenti in **pr**.

Ad esempio alla proposizione **A&B** e ad una lista arbitraria di variabili proposizionali contenenti **A** e **B** possiamo associare una tabella di verità il cui valore in uscita è però determinato solo dai valori su **A** e **B**:

<i>A</i>	<i>B</i>	...	<i>V_n</i>	<i>A&B</i>
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	0
...
...

9.6 Procedura di decisione per proposizioni classiche e sequenti in LC_p

Una caratteristica importante delle regole del calcolo LC_p che dimostreremo per bene nel seguito è che il concetto di derivabilità di un sequente $\Gamma \vdash \nabla$ nel calcolo COINCIDE con quello della sua validità. E non solo...perchè addirittura esiste una PROCEDURA di decisione per **decidere** se un sequente è **derivabile** o meno e quindi **valido** o meno. Tale procedura induce una PROCEDURA di DECISIONE della VALIDITÀ di una proposizione qualsiasi **pr**, semplicemente perchè si applica la procedura di decisione di derivazione di un sequente al sequente $\vdash \text{pr}$ ricordando che la validità del sequente $\vdash \text{pr}$ coincide con la validità di $\text{tt} \rightarrow \text{pr}$ e quindi di **pr**.

L'esistenza di tali procedure si basa essenzialmente su due fatti:

- le regole di LC_p conservano la verità su ogni riga di variabili proposizionali (che include quelle presenti nei sequenti coinvolti nella regola) sia dall'ALTO delle premesse verso il BASSO della conclusione ma anche anche dalla conclusione in BASSO verso ciascuna premessa in ALTO;
- tutte le regole di LC_p eccetto quelle degli scambi a sx e a dx, DIMINUISCONO di COMPLESSITÀ dal BASSO verso l'ALTO.

In pratica nel calcolo è possibile costruire derivazioni dei sequenti, che, se si evita di applicare le regole di scambio inutilmente, permettono di costruire alberi dove le foglie sono costituite o di assiomi o di sole variabili proposizionali.

9.6.1 Come stabilire se un sequente è DERIVABILE o meno in LC_p : PROCEDURA DECISIONE

Per sapere se $\Gamma \vdash \nabla$ è **DERIVABILE** in LC_p procedi in tal modo:

1. $\Gamma \vdash \nabla$ è assioma? $\left\{ \begin{array}{ll} \text{sì} & \text{vai in 5.} \\ \text{no} & \text{vai in 2.} \end{array} \right.$
se in Γ o in ∇ c'è proposizione composta
altrimenti STOP

2. Scegli in $\Gamma \vdash \nabla$ una proposizione composta, diciamo $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ per esempio (incluso anche il caso $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2 \equiv \neg \text{pr}_1$).

$\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ è in posizione buona per applicare ad essa una SUA regola (a dx se $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ sta a dx di \vdash nel sequente, a sx se $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ sta a sx di \vdash)? $\begin{cases} \text{sì} & \text{vai in 4. operando su } \text{pr}_1 \circ \text{pr}_2 \\ \text{no} & \text{vai in 3. operando su } \text{pr}_1 \circ \text{pr}_2 \end{cases}$

3. se operi su $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ fai uno scambio per portarla in posizione buona da poter applicare la sua regola e vai in 4. operando su $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$.

4. se operi su $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ applica la sua regola. Quante premesse ha la regola?

$\begin{cases} \text{una} & \text{vai in 1. operando sulla premessa} \\ \text{due} & \text{scegli la prima premessa e vai in 1. operando su di essa} \end{cases}$

5. nell'albero ottenuto c'è foglia che NON è assioma con almeno una proposizione composta?

$\begin{cases} \text{sì} & \text{scegli la foglia NON assioma e vai in 2.} \\ & \text{operando su di lei} \\ \text{no} & \text{STOP} \end{cases}$

CONCLUSIONE: se nell'albero ottenuto tutte le foglie sono assiomi, allora $\Gamma \vdash \nabla$ è **DERIVABILE** in LC_p , e quindi **VALIDO** ;

altrimenti **NON è DERIVABILE** e quindi **NON VALIDO** perchè si trova una RIGA in cui il sequente **NON è SODDISFACIBILE** come segue nella prossima sezione.

9.6.2 Come trovare riga in cui un sequente NON è soddisfacibile

Se l'algoritmo per $\Gamma \vdash \nabla$ si ferma con una foglia del tipo

$$\mathbf{V}_{i_1}, \dots, \mathbf{V}_{i_n} \vdash \mathbf{V}_{k_1}, \dots, \mathbf{V}_{k_m}$$

che NON è assioma e fatta solo di variabili proposizionali ove

$$\{ V_{i_1}, \dots, V_{i_n} \} \cap \{ V_{k_1}, \dots, V_{k_m} \} = \emptyset$$

\Downarrow

la riga della tabella con

$$\begin{aligned} V_{i_j} &= 1 && \text{se } V_{i_j} \text{ sta a sx sequente (ovvero tra le premesse del sequente)} \\ &&& \text{per } j = 1, \dots, n \\ V_{k_j} &= 0 && \text{se } V_{k_j} \text{ sta a dx sequente (ovvero tra le conclusioni del sequente)} \\ &&& \text{per } j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

dà valore **0** alla proposizione $\Gamma^{\&} \rightarrow \nabla^{\vee}$, ovvero la rende falsa.

9.6.3 Esempio di applicazione della procedura di decisione

Il sequente

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash (\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}) \& (\mathbf{D} \vee \mathbf{M})$$

è valido?

NO, non è valido in quanto applicando la procedura di decisione al sequente possiamo costruire un albero del tipo

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{P}, \mathbf{R}}{\mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{P}, \mathbf{R}} \&-S \quad \mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{R}}{\mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{R}} \rightarrow-S}{\frac{\frac{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{R}}{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}} \text{sc}_{sx} \quad \rightarrow-D \quad \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{M}}{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash (\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}) \& (\mathbf{D} \vee \mathbf{M})} \&-D$$

che ha una foglia $\mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{P}, \mathbf{R}$ senza proposizioni composte che NON è un assioma e che ci dice che su ogni riga della tabella di verità del sequente radice in cui si pone $\mathbf{A} = \mathbf{1}, \mathbf{B} = \mathbf{1}$ e poi $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ (non importa quale sia il valore di \mathbf{D} e di \mathbf{M}) il sequente $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash (\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}) \& (\mathbf{D} \vee \mathbf{M})$ risulta falso.

9.6.4 Esempio di applicazione della procedura di decisione di una proposizione

Domanda: è valida la proposizione $\mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}$?

Invece di fare la tabella di verità applichiamo la procedura di decisione sopra al sequente $\vdash \mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}$ ottenendo

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}} \quad \neg \neg S}{\mathbf{Q}, \neg \mathbf{Q} \vdash} \quad \neg \neg D}{\mathbf{Q} \vdash \neg \neg \mathbf{Q}} \rightarrow-D \quad \rightarrow-D$$

che è albero di derivazione e quindi la proposizione $\mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}$ è **valida**.

9.6.5 Esempio di applicazione della procedura di decisione

Domanda: è valida la proposizione $(\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$?

Abbiamo già risposto in sezione 8.0.6 ma ora rispondiamo applicando la procedura di decisione sopra al sequente

$$\vdash (\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$$

e otteniamo

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{R} \quad \neg \mathbf{R} \vdash \mathbf{V}, \mathbf{R}}{\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R} \vdash \mathbf{V}, \mathbf{R}} \rightarrow-S \quad \neg \neg S}{\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}, \neg \mathbf{V} \vdash \mathbf{R}} \rightarrow-D \quad \rightarrow-D}{\vdash (\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})} \rightarrow-D$$

ove si noti che in $\rightarrow-S$ NON abbiamo continuato a derivare la seconda premessa in quanto seguendo la procedura di decisione sulla prima premessa finiamo in una foglia NON assioma da cui deduciamo che la proposizione $(\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$ è **NON valida** sulla riga $\mathbf{V} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Test di comprensione:

- È vero che un albero di derivazione di un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ ottenuto secondo la procedura sopra ha foglie senza proposizioni composte??

NO, perchè gli assiomi identità possono essere riconosciuti tali per la presenza di una stessa proposizione ANCHE COMPOSTA a sx e a dx del sequente come nella seguente derivazione

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{A, P \rightarrow C \vdash P \rightarrow C} \quad \frac{A \& (P \rightarrow C) \vdash P \rightarrow C}{A \& (P \rightarrow C) \vdash (P \rightarrow C) \& A} \&-S \quad \frac{\frac{\text{ax-id}}{A, P \rightarrow C \vdash A} \quad \frac{A \& (P \rightarrow C) \vdash A}{A \& (P \rightarrow C) \vdash A} \&-S}{A \& (P \rightarrow C) \vdash (P \rightarrow C) \& A} \&-D$$

- È vero che per stabilire se un sequente NON è derivabile, ovvero NON è valido devo avere un albero le cui foglie NON hanno proposizioni COMPOSTE?

NO, perchè basta fermarsi quando ALMENO UNA FOGLIA è SENZA PROPOSIZIONI COMPOSTE e SENZA PROPOSIZIONI ATOMICHE a dx e a sx del segno \vdash . Vedi esempio in sezioni ?? e 9.6.5.

- Se un albero ha una foglia del tipo

$$\vdash P, Q, R$$

quale è la riga della sua tabella che va a zero?

Secondo la procedura sopra la riga ottenuta ponendo $P = 0$, $Q = 0$ e $R = 0$ manda a zero il sequente in quanto NON ci sono lettere a sx di \vdash .

Questo si capisce ricordando che il sequente $\vdash P, Q, R$ è valido solo se lo è la proposizione

$$tt \rightarrow (P \vee Q) \vee R$$

che risulta falsa appunto sulla riga della sua tabella ottenuta ponendo $P = 0$, $Q = 0$ e $R = 0$.

- Se un albero ha una foglia del tipo

$$P, Q, R \vdash$$

quale è la riga della sua tabella che va a zero?

Secondo la procedura sopra la riga ottenuta ponendo $P = 1$, $Q = 1$ e $R = 1$ manda a zero il sequente in quanto NON ci sono lettere a dx di \vdash .

Questo si capisce ricordando che il sequente $P, Q, R \vdash$ è valido solo se lo è la proposizione

$$(P \& Q) \& R \rightarrow \perp$$

che risulta falsa appunto sulla riga della sua tabella ottenuta ponendo $P = 1$, $Q = 1$ e $R = 1$.

Per approfondimento: Si costruisca un albero per il sequente

$$P \rightarrow A \& B \vdash (A \& B \rightarrow R) \& (D \vee M)$$

in cui le foglie sono senza proposizione composte. Si noti che ogni foglia senza proposizioni composte che NON è un assioma suggerisce una riga in cui il sequente radice risulta falso.

Dunque si potrebbe modificare la procedura di decisione 9.6.1 lasciando la possibilità al punto 4. di scegliere anche la seconda premessa e di andare poi in 1. nel caso che la regola di $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ su cui si è operato ha due premesse!!!

9.7 Relazione tra una proposizione e la sua negazione

Si noti che la negazione di una proposizione si comporta nel seguente modo rispetto alla validità:

pr VALIDA	sse	¬pr INSODDISFACIBILE
pr INSODDISFACIBILE	sse	¬pr VALIDA

pr NON VALIDA su riga r	sse	¬pr SODDISFACIBILE su riga r
pr SODDISFACIBILE su riga r	sse	¬pr NON VALIDA su riga r

Questa relazione suggerisce come applicare la procedura di decisione in sezione 9.6.1 per sapere se un sequente o una proposizione NON valida sia anche soddisfacibile su una qualche riga. Infatti, nel caso una proposizione **pr** risulti NON valida grazie alla procedura, per sapere se **pr** è pure **soddisfacibile** basta riapplicare la procedura al sequente della sua negazione

$$\vdash \neg \text{pr}$$

Ora se $\vdash \neg \text{pr}$ risulta valida ne segue che $\vdash \text{pr}$ è insoddisfacibile e quindi la proposizione **pr** è un paradosso. Altrimenti se $\vdash \neg \text{pr}$ risulta NON valida, allora una riga su cui il sequente $\vdash \neg \text{pr}$ NON è valido dà una riga su cui $\vdash \text{pr}$ è vero, ovvero **pr** è vero su questa riga, e dunque risulta soddisfacibile.

9.8 Procedura per decidere validità e soddisfacibilità o meno di una proposizione in LC_p

Data una proposizione **pr**

passo 1: si applichi la procedura di decisione provando a derivare $\vdash \text{pr}$ in LC_p

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{se si deriva} & \Rightarrow \text{pr è valida} \\ \text{se la procedura termina con un NON derivabile} & \text{vai al passo 2} \end{array} \right.$

passo 2: la proposizione **pr** è **NON valida** e la riga su cui la tabella di **pr** va a **0** si ottiene in tal modo: prendi una foglia non assioma di sole variabili proposizionali

(per es. quella che ha fatto sì che la procedura termini con un NO)

e poni a **1** le variabili a sx del sequente e a **0** quelle a dx

\Rightarrow ogni riga che contiene tale assegnazione di variabili proposizionali manda a **0** la proposizione **pr**

poi vai al passo 3

passo 3: prova a derivare $\vdash \neg \text{pr}$ in LC_p applicando la procedura di decisione

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{se } \vdash \neg \text{pr} \text{ si deriva} & \Rightarrow \vdash \text{pr} \\ & \text{è insoddisfacibile} \\ \text{se la procedura termina con } \vdash \neg \text{pr} \text{ NON derivabile} & \text{applica il passo 2} \\ & \text{a } \vdash \neg \text{pr} \\ & \text{e la riga trovata assegna 1} \\ & \text{a pr} \\ & \Rightarrow \text{pr è soddisfacibile su di essa} \end{array} \right.$

9.8.1 Esempi di applicazione della procedura di decisione di una proposizione

Domanda: è valida la proposizione $\mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}$?

Invece di fare la tabella di verità applichiamo la procedura di decisione sopra al sequente $\vdash \mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}$ ottenendo

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}}}{\mathbf{Q}, \neg \mathbf{Q} \vdash} \neg\text{-S}}{\mathbf{Q} \vdash \neg \neg \mathbf{Q}} \neg\text{-D} \quad \frac{\mathbf{Q} \vdash \neg \neg \mathbf{Q}}{\vdash \mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}} \rightarrow\text{-D}$$

che è albero di derivazione e quindi la proposizione $\mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}$ è **valida**.

9.8.2 Esempi di applicazione della procedura di decisione di una proposizione

Domanda: è valida la proposizione $(\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$?

Abbiamo già risposto in sezione 8.0.6 ma ora rispondiamo applicando la procedura di decisione sopra al sequente

$$\vdash (\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$$

e otteniamo

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{R} \quad \neg \mathbf{R} \vdash \mathbf{V}, \mathbf{R}}{\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R} \vdash \mathbf{V}, \mathbf{R}} \rightarrow\text{-S}}{\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}, \neg \mathbf{V} \vdash \mathbf{R}} \neg\text{-S}}{\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R} \vdash \neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}} \rightarrow\text{-D} \quad \frac{\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R} \vdash \neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}}{\vdash (\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})} \rightarrow\text{-D}$$

ove si noti che in $\rightarrow\text{-S}$ NON abbiamo continuato a derivare la seconda premessa in quanto seguendo la procedura di decisione sulla prima premessa finiamo in una foglia NON assioma da cui deduciamo che la proposizione $(\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$ è **NON valida** sulla riga $\mathbf{V} = \mathbf{R} = 0$.

Per stabilire se è soddisfacibile andiamo a derivare

$$\vdash \neg ((\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}))$$

ottenendo

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{V}, \mathbf{R} \vdash}{\mathbf{V} \vdash \neg \mathbf{R}} \neg\text{-D}}{\vdash \mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}} \rightarrow\text{-D} \quad \frac{\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R} \vdash}{(\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}) \vdash} \rightarrow\text{-S}}{\vdash \neg ((\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}))} \neg\text{-D}$$

ove si noti che in $\rightarrow\text{-S}$ NON abbiamo continuato a derivare la seconda premessa in quanto seguendo la procedura di decisione sulla prima premessa finiamo in una foglia NON assioma che ci permette di concludere che $\neg ((\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}))$ è **NON valida** su $\mathbf{V} = \mathbf{R} = 1$. Quindi concludiamo che la proposizione $(\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$ è **soddisfacibile** su $\mathbf{V} = \mathbf{R} = 1$.

9.9 Come rappresentare la negazione di un sequente?

Sopra abbiamo visto una procedura di decisione di validità e soddisfacibilità o meno di una proposizione **pr**, andando ad analizzare anche la sua negazione $\neg \mathbf{pr}$ nel caso **pr** risulti NON valida.

Ora vorremmo applicare la procedura sopra per decidere la validità e soddisfacibilità o meno di un sequente. Però occorre sapere che sequente rappresenta la sua “negazione”. Dunque ci chiediamo:

Come possiamo rappresentare la negazione di un sequente?

Per rispondere si ricordi che la validità e soddisfacibilità di un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ sono state definite in termini della proposizione $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ che esso rappresenta. Infatti un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice **valido**, **NON valido**, **soddisfacibile** o **insoddisfacibile** se e solo se è valida, non valida, soddisfacibile o insoddisfacibile rispettivamente la proposizione $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$.

Ora visto che un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è valido sse la proposizione $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è una tautologia ne segue che per decidere sia **validità** che **soddisfacibilità** di un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si può applicare il processo sopra in sezione 9.8 alla proposizione $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$.

In conclusione possiamo concludere che il sequente che rappresenta la negazione del sequente

$$\Gamma \vdash \Delta$$

si può rappresentare con il sequente

$$\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$$

Infatti un sequente si comporta con la sua negazione in modo analogo a quanto notato per una proposizione e la sua negazione in sezione 9.7:

$\Gamma \vdash \Delta$ VALIDO	sse	$\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ PARADOSSALE =INSODDISFACIBILE
$\Gamma \vdash \Delta$ PARADOSSALE =INSODDISFACIBILE	sse	$\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ VALIDO
$\Gamma \vdash \Delta$ NON VALIDO su riga r	sse	$\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ SODDISFACIBILE su riga r
$\Gamma \vdash \Delta$ SODDISFACIBILE su riga r	sse	$\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ NON VALIDO su riga r

9.10 PROCEDURA per DECIDERE VALIDITÀ e SODDISFACIBILITÀ e loro negazioni relative ad un SEQUENTE

Passo 1: Per decidere se un **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$ è **valido** o meno si applichi la procedura di decisione della sua validità in sezione 9.6.1 al sequente. Si hanno due casi:
I caso: il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **derivabile**, dunque è **valido** e quindi STOP.
II caso: il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **NON derivabile** e quindi è **NON valido**.
 La riga su cui $\Gamma \vdash \Delta$ non è valido si trova seguendo le istruzioni in sezione 9.6.2. Si vada poi al passo 2.
Passo 2: per decidere se il **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$ è **soddisfacibile** o meno si applichi il processo di decisione di validità in sezione 9.6.1 nell'allegato 9 al sequente $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$
 Ora si hanno due sottocasi:
I sottocaso: $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ risulta **NON derivabile** e quindi **NON valido** e quindi $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **soddisfacibile** (oltrechè **NON valido**) e la riga su cui $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ NON è vero è una riga in cui il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ risulta vero e quindi $\Gamma \vdash \Delta$ è **soddisfacibile** e dunque STOP.
II sottocaso: $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ risulta **valido** quindi $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **INSoddisfacibile** e dunque STOP.

9.10.1 Esempio di applicazione della procedura di decisione

Il sequente $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$ è valido?

Applichiamo la procedura di decisione di derivabilità di un sequente in sezione 9.6.1 e otteniamo il seguente albero:

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}, \mathbf{P} \quad \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}}{\mathbf{Q}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}} \rightarrow -S}{\frac{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}}{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}} \text{sc}_{sx}} \rightarrow -D$$

in cui la foglia a sinistra NON è un assioma e dunque $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$ è **NON valido**. Una riga su cui il sequente NON è vero è data dall'eseguire quanto descritto in sezione 9.6.2 sulla foglia a sinistra e quindi una riga che falsifica il sequente è data da $\mathbf{Q} = 1$ e $\mathbf{P} = 0$.

Per vedere se il sequente è soddisfacibile applichiamo la procedura di derivazione di un sequente in sezione 9.6.1 al sequente

$$\vdash \neg((\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}))$$

e otteniamo

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}}{\vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}} \rightarrow -D \quad \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P} \vdash}{(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}) \vdash} \rightarrow -S}{\vdash \neg((\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}))} \neg -D$$

che dice che NON è valido sulla riga $\mathbf{P} = 1$ e $\mathbf{Q} = 0$ e dunque il sequente di partenza

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$$

è **soddisfacibile** sulla stessa riga.

9.10.2 Test di comprensione

1. Se una proposizione \mathbf{pr} è NON valida su una certa riga della sua tabella cosa possiamo dire della sua negazione $\neg\mathbf{pr}$?

Possiamo solo dire che $\neg\mathbf{pr}$ è soddisfacibile sulla riga in cui \mathbf{pr} è NON valida.

2. Se una proposizione è VALIDA cosa possiamo dire della sua negazione $\neg\mathbf{pr}$?

La proposizione $\neg\mathbf{pr}$ risulta INSoddisfacibile.

3. Come possiamo decidere che $\Gamma \vdash \Delta$ è valido?

Con la procedura di decisione applicata al sequente in sezione 9.6.1.

4. Come possiamo decidere che $\Gamma \vdash \Delta$ è soddisfacibile o meno?

Con la procedura ottimale in sezione 9.10 descritta sopra.

9.11 Perchè le procedure di decisioni per sequenti in logica classica proposizionale sono corrette?

Scopo di questa sezione è chiarire come mai le procedure nelle sezioni precedenti per decidere se un sequente è valido o meno, ed è soddisfacibile oppure non lo è sono corrette. A tal scopo introduciamo il concetto di *regola valida in logica classica proposizionale* e poi vedremo pure il concetto di *regola sicura in logica classica proposizionale*.

9.11.1 Definizione di validità in logica classica proposizionale di una regola del calcolo dei sequenti

Ora proseguiamo enunciando la definizione di validità in logica classica proposizionale di una regola del calcolo di sequenti.

L'idea è che una regola si dice *valida* se trasforma dall'ALTO verso il BASSO *sequenti veri su una fissata riga r in sequenti veri sulla riga r* (supposto che le riga in questione si riferisca ad una tabella di verità che contiene TUTTE le variabili proposizionali che compaiono in ALMENO una delle proposizioni dei sequenti nella regola), ovvero *se supposto* che TUTTI i sequenti premessa siano **veri su una riga allora** il sequente conclusione è pure **vero sulla STESSA RIGA**.

Per maggior chiarezza diamo in dettaglio la definizione di validità di una regola del calcolo di sequenti distinguendo tra regole ad una premessa e regole a due premesse.

Ricordiamo che

Def. 9.3 (verità di un sequente su una riga della sua tabella di verità) *Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è vero su una riga r della sua tabella di verità (ovviamente contenente le variabili proposizionali delle proposizioni nel sequente!) se $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è 1, cioè vero, sulla riga r .*

Def. 9.4 (validità regola ad una premessa) *Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo*

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

si dice valida rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità se, il sequente premessa

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1$$

è vero su una riga r della sua tabella di verità eventualmente estesa a contenere tutte le variabili proposizionali che compaiono in qualche sequente nella regola (inclusa la conclusione!), allora il seguente **conclusione**

$$\Gamma_2 \vdash \Delta_2$$

è vero sulla stessa riga r .

Def. 9.5 (validità regola ad due premesse) Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

si dice **valida rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità**)
se supposto che i sequenti **premessa**

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2$$

siano **ENTRAMBI** veri su una riga r della loro tabella di verità eventualmente estesa a contenere tutte le variabili proposizionali che compaiono nei sequenti della regola, allora il seguente **conclusione**

$$\Gamma_3 \vdash \Delta_3$$

è vero sulla stessa riga r .

Nel seguito mostriamo come il segno di inferenza di una regola corrisponde ad un'implicazione formale.

A tal scopo poniamo l'attenzione sul semplice fatto che per rendere vera su una riga un'implicazione $\text{pr} \rightarrow \text{pr}'$ basta controllare che se l'antecedente pr è vero sulla riga allora lo è pure il conseguente pr' .

Lemma 9.6 (scorciatoia) Vale il seguente fatto:

Data una proposizione $\text{pr} \rightarrow \text{pr}'$,
se su una certa riga r della tabella di $\text{pr} \rightarrow \text{pr}'$,
si ha che se $\text{pr}=1$ allora pure $\text{pr}'=1$
allora vale $\text{pr} \rightarrow \text{pr}'=1$ sulla stessa riga della tabella.

Dim. Infatti o pr è **0** sulla riga in questione, e in tal caso l'implicazione $\text{pr} \rightarrow \text{pr}'$ è vera sulla riga in questione, oppure pr è **1** e allora per l'ipotesi $\text{pr}' = 1$ e di nuovo $\text{pr} \rightarrow \text{pr}'$ è vera sulla riga in questione.

Grazie a questo lemma possiamo notare immediatamente i seguenti fatti:

Proposition 9.7 Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

è valida sse la proposizione

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$$

è vera su ogni riga della sua tabella, e quindi è una tautologia.

Proposition 9.8 Una regola del calcolo dei sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

è valida sse la proposizione

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \& (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})$$

è vera su ogni riga della sua tabella, e quindi è una tautologia.

Nel seguito mostreremo che le regole del calcolo dei sequenti della Logica classica proposizionale \mathbf{LC}_p sono valide.

Si noti che vale pure che le regole del calcolo conservano la validità dei sequenti:

Proposition 9.9 Vale la seguente proprietà:

*Se una regola nel linguaggio proposizionale è valida, allora **conserva la validità** dei sequenti, nel senso che se i suoi sequenti premessa sono validi allora anche il sequente conclusione è valido.*

Dim. Sia fissata una regola valida nel linguaggio proposizionale e supponiamo che i suoi sequenti premessa siano validi. Ne segue che fissata una riga arbitraria r contenente le variabili di tutti i sequenti nella regola entrambe le premesse sono vere su questa riga essendo entrambe valide. Per la validità della regola ne segue che anche la conclusione è vera sulla stessa riga r . Ma siccome i sequenti premessa sono veri su ogni riga, facendo lo stesso ragionamento ne segue che pure la conclusione è vera su ogni riga e dunque anche la conclusione è valida come si voleva dimostrare.

9.11.2 Significato di validità di una regola ad una premessa

Grazie alla proposizione 9.7 una regola ad una premessa è valida

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

sse la proposizione

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$$

è una tautologia.

Ora osserviamo la sua tabella di verità confrontandola con i valori che assumono su una riga data la proposizione che rappresenta la sua premessa $\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}$ e la premessa del sequente $\Gamma_2^{\&}$ e la sua conclusione Δ_2^{\vee}

$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}$	$\Gamma_2^{\&}$	Δ_2^{\vee}	$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$
0	-	-	1
-	0	-	1
1	1	1??	1???
1	1	0??	0???

Si osservi che le righe in cui $\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} = 0$ oppure $\Gamma_2^{\&} = 0$ rendono vera la proposizione

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$$

e quindi la regola conserva la verità su queste righe.

In pratica le **uniche righe da controllare per sapere se**

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$$

è tautologia (ovvero la sua tabella è fatta solo di 1 in uscita!) sono le righe in cui si ha

$$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2^{\&} = 1$$

e dobbiamo controllare SE su tali righe risulta $\Delta_2^{\vee} = 1$. Se ciò accade la regola è **valida**.

In caso contrario **una riga su cui** $\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} = 1$ **e** $\Gamma_2^{\&} = 1$ **ma** $\Delta_2^{\vee} = 0$ **dà un controesempio alla validità della regola** e quindi la regola risulta **NON valida**.

9.11.3 Significato di validità di una regola a due premesse

Grazie alla proposizione 9.7 una regola a due premesse è valida

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

sse la proposizione

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \& (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})$$

è una tautologia.

Ora osserviamo la sua tabella di verità confrontandola con i valori che assumono su una riga data le proposizioni che rappresentano le sue premesse $\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}$ e $\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}$ e la premessa del sequente $\Gamma_3^{\&}$ e la sua conclusione Δ_3^{\vee}

$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}$	$\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}$	$\Gamma_3^{\&}$	Δ_3^{\vee}	$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \& (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})$
0	-	-	-	1
-	0	-	-	1
-	-	0	-	1
1	1	1	1??	1???
1	1	1	0??	0???

Si osservi che *le righe in cui* $\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} = 0$ *oppure* $\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee} = 0$ *oppure* $\Gamma_3^{\&} = 0$ rendono vera la proposizione

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \& (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})$$

e quindi la regola conserva la verità su queste righe.

In pratica le **uniche righe da controllare per sapere se**

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \& (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})$$

è tautologia (ovvero la sua tabella è fatta solo di 1 in uscita!) sono le righe in cui si ha

$$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^\vee = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^\vee = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_3^{\&} = 1$$

e dobbiamo controllare SE su tali righe risulta $\Delta_3^\vee = 1$. Se ciò accade la regola è valida.

In caso contrario una riga su cui $\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^\vee = 1$ e $\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^\vee = 1$ e $\Gamma_3^{\&} = 1$ ma $\Delta_3^\vee = 0$ dà un controesempio alla validità della regola e quindi la regola risulta **NON** valida.

9.12 Validità delle regole di \mathbf{LC}_p

Proseguiamo ora con il mostrare che tutti gli assiomi e le regole del calcolo \mathbf{LC}_p sono valide. Questo significa che nell'esempio della derivazione di un verso dell'associatività la verità su una qualsiasi riga si conserva dall'alto verso il basso perchè tutte le foglie essendo assiomi sono senza dubbio vere sulla riga in questione:

$$\frac{\frac{\text{vero-su-riga}}{C, A, B \vdash A} \Downarrow_{\text{vero-su-riga}} \frac{C, A \& B \vdash A}{A \& B, C \vdash A} \Downarrow_{\text{vero-su-riga}} (A \& B) \& C \vdash A}{(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)} \text{ e } \frac{\frac{\text{vero-su-riga}}{C, A, B \vdash B} \text{ e } \frac{\text{vero-su-riga}}{C, A, B \vdash C}}{C, A, B \vdash B \& C} \Downarrow_{\text{vero-su-riga}} \frac{C, A \& B \vdash B \& C}{A \& B, C \vdash B \& C} \Downarrow_{\text{vero-su-riga}} \frac{(A \& B) \& C \vdash B \& C}{(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)} \Downarrow_{\text{vero-su-riga}}$$

Theorem 9.10 (validità regole \mathbf{LC}_p) TUTTE le regole di \mathbf{LC}_p conservano la verità per riga e gli assiomi sono validi.

Procediamo a dimostrare quanto affermato dal teorema regola per regola a partire dagli assiomi.

9.12.1 Validità assioma identità

L'assioma identità

$$\frac{\text{ax-id}}{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, A, \Delta_2}$$

è valido perchè vale

$$\models (\Gamma_1^{\&} \& \mathbf{A}) \& \Gamma_2^{\&} \rightarrow (\Delta_1^\vee \vee \mathbf{A}) \vee \Delta_2^\vee$$

Infatti se $(\Gamma_1^{\&} \& \mathbf{A}) \& \Gamma_2^{\&}$ vale 1 in una certa riga della tabella allora $\mathbf{A} = 1$ e quindi che pure $(\Delta_1^\vee \vee \mathbf{A}) \vee \Delta_2^\vee$ vale 1 sulla stessa riga e dunque per il lemma scorciatoia 9.6 l'assioma è vero sulla riga considerata. Siccome questo vale per una riga generica allora il sequente è vero su ogni riga e quindi è valido.

9.12.2 Validità dell'assioma per il falso

L'assioma

$$\frac{\text{ax-}\perp}{\Gamma_1, \perp, \Gamma_2 \vdash \nabla}$$

è valido perchè ogni riga della tabella di

$$(\Gamma_1^{\&} \& \perp) \& \Gamma_2^{\&} \rightarrow \nabla^\vee$$

assegna 0 a $(\Gamma_1^{\&} \& \perp) \& \Gamma_2^{\&}$ e quindi 1 alla proposizione implicativa.

Esempio: l'affermazione seguente

“Se fossi Superman, sarei in grado di volare”

si può formalizzare in

$$\perp \vdash V$$

assumendo che

$\perp =$ Sono Superman (che è una falsità)

$V =$ Sono in grado di volare

ed è valida per l'assioma del falso sopra. E' anche valida nell'ipotesi che fossi Superman davvero perchè Superman come personaggio fantastico volava.

Però sarebbe valida pure l'affermazione “Se fossi Superman, non sarei in grado di volare” perchè comunque, la premessa “Sono Superman” è falsa ed è equivalente a tradurla con \perp .

9.12.3 Validità di sc_{sx}

La regola di **scambio a sinistra**

$$\frac{\Sigma, \Gamma_1, \Theta, \Gamma_2, \Delta \vdash \nabla}{\Sigma, \Gamma_2, \Theta, \Gamma_1, \Delta \vdash \nabla} sc_{sx}$$

conserva la **verità su una riga**. Si osservi che questa regola conserva banalmente la verità su riga perchè il fatto che valga $(\Sigma, \Gamma_1, \Theta, \Gamma_2, \Delta)^\& = 1$ su una certa riga, e che comporti che $\Delta^\vee = 1$, è **indipendente** dall'ordine delle proposizioni in $\Sigma, \Gamma_1, \Theta, \Gamma_2, \Delta$.

Però per esercizio di precisione mostriamolo per bene formalmente. Iniziamo supponendo che sia **1** il valore di

$$(((\Sigma^\& \& \Gamma_1^\&) \& \Theta^\&) \& \Gamma_2^\&) \& \Delta^\& \rightarrow \nabla^\vee$$

su una certa riga della sua tabella. Ora se supponiamo che sia **1** sulla stessa riga pure il valore di $(((\Sigma^\& \& \Gamma_2^\&) \& \Theta^\&) \& \Gamma_1^\&) \& \Delta^\&$, allora abbiamo che ogni congiunto ha valore **1** e così pure anche $(((\Sigma^\& \& \Gamma_1^\&) \& \Theta^\&) \& \Gamma_2^\&) \& \Delta^\&$ e quindi per la **verità** della **premessa** si conclude che ∇^\vee ha valore **1**. Quindi per il lemma scorciatoia 9.6 $(((\Sigma^\& \& \Gamma_2^\&) \& \Theta^\&) \& \Gamma_1^\&) \& \Delta^\& \rightarrow \nabla^\vee$ è vera sulla riga considerata in partenza.

9.12.4 Validità di sc_{dx}

La regola di **scambio a destra**

$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta_2, \Theta, \Delta_1, \nabla} sc_{dx}$$

conserva la **verità su una riga** facilmente. Infatti, supposto che valga $\Gamma^\& = 1$ su una certa riga, il fatto che valga $(\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla)^\vee = 1$ sulla stessa riga è **indipendente** dall'ordine delle proposizioni in $\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla$.

Però per esercizio di precisione mostriamolo per bene formalmente. Iniziamo supponendo che sia **1** il valore di

$$\Gamma^\& \rightarrow (\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla)^\vee$$

su una certa riga della sua tabella. Ora se supponiamo che valga pure $\Gamma^\& = 1$ sulla stessa riga, per la verità della premessa sulla stessa riga si ottiene che $(\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla)^\vee = 1$ e dato che qualche disgiunto in $(\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla)^\vee$ ha valore **1** ne segue che pure qualche disgiunto in $(\Sigma, \Delta_2, \Theta, \Delta_1, \nabla)^\vee$

(che si differenzia dalla lista $(\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla)^\vee$ solo per scambi di proposizioni) ha valore **1** e dunque $(\Sigma, \Delta_2, \Theta, \Delta_1, \nabla)^\vee = \mathbf{1}$. Quindi per il lemma scorciatoia 9.6 concludiamo che

$$\Gamma^\& \rightarrow (\Sigma, \Delta_2, \Theta, \Delta_1, \nabla)^\vee$$

è vera sulla riga considerata in partenza.

9.12.5 Validità di $\&-D$

La regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-D$$

conserva la **verità su una riga**.

Innanzitutto, supponiamo che Δ sia una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(A \& B, \Delta)^\vee$ in $(A \& B) \vee \Delta$ (altrimenti dovremmo scrivere

$$(\dots((A \& B) \vee A_1) \vee A_2) \dots \vee A_n$$

posto che $\Delta \equiv A_1, A_2, \dots A_n$).

Poi supponiamo che sia **1** il valore di

$$\Gamma^\& \rightarrow A \vee \Delta$$

su una certa riga della sua tabella e che sia pure **1** il valore della tabella di

$$\Gamma^\& \rightarrow B \vee \Delta$$

sulla stessa riga considerata sopra.

Ora supponiamo che sia **1** sulla stessa riga pure il valore di $\Gamma^\&$. Per la **verità** della PRIMA **premessa sulla riga considerata** si conclude che $A \vee \Delta$ ha valore **1**. Qui si presentano *due casi*: A è **1** oppure Δ è **1**.

I caso $A=1$. In tal caso si consideri che per la **verità** della SECONDA **premessa sulla riga considerata** si ottiene che $B \vee \Delta$ ha valore **1**. Qui si presentano altri due casi: B è **1** oppure Δ è **1**. Nel sottocaso $B = 1$, assieme all'ipotesi $A = 1$ si conclude $A \& B=1$ e dunque $(A \& B) \vee \Delta = 1$.

Nel sottocaso $\Delta = 1$, che coincide anche con il secondo caso sopra, si conclude lo stesso che $(A \& B) \vee \Delta = 1$.

Quindi per il lemma scorciatoia 9.6 $\Gamma^\& \rightarrow (A \& B) \vee \Delta$ è vera sulla riga considerata in partenza.

9.12.6 Validità di $\&-S$

La regola

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&-S$$

conserva la **verità su una riga**. La prova di ciò è banale in quanto la virgola a sinistra è proprio interpretata come una $\&$ (e la differenza dell'interpretazione delle ipotesi del sequente sopra rispetto alle premesse di quello sotto sono solo di associatività diversa dei vari congiunti..) però la facciamo per bene di seguito per esercizio.

Innanzitutto, supponiamo che Γ sia una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\Gamma, A, B)^\&$ in $(\Gamma \& A) \& B$.

Ora supponiamo che sia **1** il valore di

$$(\Gamma \& A) \& B \rightarrow \Delta^\vee$$

su una certa riga della sua tabella e che sia pure 1 il valore di $\Gamma \& (\mathbf{A} \& \mathbf{B})$. Ne segue che è 1 sia il valore di Γ che di \mathbf{A} che di \mathbf{B} sulla stessa riga della tabella. Dunque il valore di $(\Gamma \& \mathbf{A}) \& \mathbf{B}$ è 1 e per ipotesi ne segue che pure il valore di Δ^\vee è 1 sulla riga considerata.

Quindi per il lemma scorciatoia 9.6

$$\Gamma \& (\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \rightarrow \Delta^\vee$$

è vera sulla riga considerata in partenza.

9.12.7 Validità di \vee -S

La regola

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee\text{-S}$$

conserva la **verità su una riga**.

Innanzitutto, supponiamo che Γ sia una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\Gamma, \mathbf{A} \vee \mathbf{B})^\&$ in $\Gamma \& (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$.

Ora supponiamo che sia 1 il valore di

$$\Gamma \& \mathbf{A} \rightarrow \Delta^\vee$$

su una certa riga della sua tabella, e sia 1 pure

$$\Gamma \& \mathbf{B} \rightarrow \Delta^\vee$$

sulla stessa riga della sua tabella. Infine supponiamo sia pure 1 il valore di $\Gamma \& (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$. Ne segue che è 1 sia il valore di Γ che di $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ sulla stessa riga della tabella.

Qui abbiamo 2 casi: o $\mathbf{A} = 1$ oppure $\mathbf{B} = 1$ sulla riga della tabella considerata.

Nel caso $\mathbf{A} = 1$ la stessa riga dà $\Gamma \& \mathbf{A} = 1$ e per la **verità** della PRIMA **premessa sulla riga considerata** si ottiene che Δ^\vee è 1 e dunque per il lemma scorciatoia 9.6 si conclude che

$$\Gamma \& (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow \Delta^\vee$$

è vera sulla riga considerata in partenza.

Nel caso $\mathbf{B} = 1$ la stessa riga dà $\Gamma \& \mathbf{B} = 1$ e per la **verità** della SECONDA **premessa sulla riga considerata** si ottiene che Δ^\vee è 1 e dunque per il lemma scorciatoia 9.6 si conclude che

$$\Gamma \& (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow \Delta^\vee$$

è vera sulla riga considerata in partenza.

9.12.8 Validità di \vee -D

La regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee\text{-D}$$

conserva la **verità riga** in quanto i due sequenti si interpretano nella stessa proposizione

$$\Gamma^\& \rightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \Delta^\vee$$

9.12.9 Validità di $\neg\neg$ -D

La regola

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg\neg\text{-D}$$

conserva la **verità su una riga**.

Innanzitutto, supponiamo che Δ sia composta di una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\neg A, \Delta)^\vee$ in $\neg A \vee \Delta$.

Poi supponiamo che sia **1** il valore di

$$\Gamma^\& \& A \rightarrow \Delta$$

su una certa riga della sua tabella e supponiamo pure che sia **1** il valore di $\Gamma^\&$ sulla stessa riga della tabella. Ora questa riga dà valore $A = 1$ oppure $A = 0$.

I caso $A = 1$. In tal caso per la **verità** dell'unica **premessa della regola sulla riga considerata** si ottiene che Δ^\vee ha valore **1** e dunque pure $\neg A \vee \Delta^\vee = 1$.

II caso $A = 0$. In tal caso $\neg A = 1$ e quindi di nuovo $\neg A \vee \Delta^\vee$ ha valore **1**.

Per il lemma scorciatoia 9.6 concludiamo che $\Gamma^\& \rightarrow (\neg A) \vee \Delta$ è vera sulla riga considerata in partenza.

9.12.10 Validità di \neg -S

La regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg\text{-S}$$

conserva la **verità su una riga**.

Innanzitutto, supponiamo che Δ sia composta di una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(A, \Delta)^\vee$ in $A \vee \Delta$.

Poi supponiamo che sia **1** il valore di

$$\Gamma \rightarrow A \vee \Delta$$

e di $\Gamma \& \neg A$ su una stessa riga della loro tabella (includenti tutte le variabili proposizione che compaiono in almeno un sequente della regola in questione). Ne segue che $\Gamma = 1$ e così pure che $\neg A = 1$ da cui segue $A = 0$. Da $\Gamma = 1$ per la **verità** della **premessa sulla riga considerata** da si ottiene che $A \vee \Delta = 1$ e da $A = 0$ si conclude conclude $\Delta = 1$.

Per il lemma scorciatoia 9.6 si conclude che $\Gamma \& \neg A \rightarrow \Delta$ è vera sulla riga considerata in partenza.

9.12.11 Validità di \rightarrow -D

La regola

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow\text{-D}$$

conserva la **verità su una riga**.

Innanzitutto, supponiamo che Δ sia composta da una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(B, \Delta)^\vee$ in $B \vee \Delta$.

Poi supponiamo che sia **1** il valore di

$$\Gamma^\& \& A \rightarrow B \vee \Delta$$

su una certa riga della sua tabella e supponiamo pure che $\Gamma^{\&} = 1$ sulla stessa riga della tabella. Ma questa riga dà valore $\mathbf{A} = 1$ oppure $\mathbf{A} = 0$.

I caso $\mathbf{A} = 1$. In tal caso per la **verità** dell'unica **premessa** della regola **sulla riga considerata** si ottiene che $(\mathbf{B} \vee \Delta)^\vee$ ha valore **1** e si hanno due sottocasi:

I sottocaso $\mathbf{B} = 1$ e quindi $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = 1$ e di conseguenza $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \Delta^\vee$ ha valore **1**.

II sottocaso $\Delta = 1$ e quindi $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \Delta^\vee$ ha valore **1**.

II caso $\mathbf{A} = 0$. In tal caso $\neg \mathbf{A} = 1$ e quindi $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = 1$ e di conseguenza $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \Delta^\vee$ ha valore **1**.

Per il lemma scorciatoia 9.6 concludiamo che $\Gamma^{\&} \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \Delta$ è vera sulla riga considerata in partenza.

9.12.12 Validità per di \rightarrow -S

La regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow -S$$

conserva la **verità su una riga**.

Innanzitutto, supponiamo che Γ e Δ siano entrambi composti da una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^{\&}$ in $\Gamma \& (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ e così pure quella di $(\mathbf{A} \vee \Delta)^\vee$ in $\mathbf{A} \vee \Delta$.

Poi supponiamo che sia 1 il valore di

$$\Gamma \rightarrow \mathbf{A} \vee \Delta$$

e di

$$\Gamma \& \mathbf{B} \rightarrow \Delta$$

su una certa riga della loro tabella includente le variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} . Inoltre supponiamo che $\Gamma \& (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = 1$ sulla stessa riga della sua tabella. Ne segue che Γ ha valore **1** e così pure $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. Ora il fatto che $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = 1$ ci fa concludere due casi: $\mathbf{A} = 0$ oppure $\mathbf{B} = 1$.

I caso $\mathbf{A} = 0$. In tal caso si consideri che per la **verità** della PRIMA **premessa sulla riga considerata** da $\Gamma = 1$ si ottiene che $\mathbf{A} \vee \Delta$ ha valore **1** e sapendo che $\mathbf{A} = 0$ si conclude $\Delta = 1$.

II caso $\mathbf{B} = 1$. In tal caso si consideri che per la **verità** della SECONDA **premessa sulla riga considerata**, ricordando che vale $\Gamma = 1$, si ottiene che Δ ha valore **1**.

In entrambi i casi avendo ottenuto $\Delta = 1$, per il lemma scorciatoia 9.6 si conclude che $\Gamma \& (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \Delta$ è vera sulla riga considerata in partenza.

Abbiamo qui concluso di dimostrare il teorema di validità delle regole del calcolo per i sequenti della logica classica proposizione \mathbf{LC}_p :

Theorem 9.11 (VALIDITÀ regole di \mathbf{LC}_p) *Tutte le regole di \mathbf{LC}_p sono valide classicamente rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità.*

Da questo teorema concludiamo che se un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **derivabile** allora è **valido** perchè la VALIDITÀ SCENDE \Downarrow dalle foglie di assiomi validi fino alla radice $\Gamma \vdash \Delta$:

Theorem 9.12 (VALIDITÀ sequenti) *Se il sequente*

$$\text{pr}_1, \dots, \text{pr}_n \vdash \text{pr}_k, \dots, \text{pr}_m$$

è derivabile in \mathbf{LC}_p , ovvero ammette una derivazione, allora

$$(((\text{pr}_1 \& \text{pr}_2 \& \dots \& \text{pr}_n \rightarrow (((\text{pr}_k \vee \text{pr}_{k+1}) \dots \vee \text{pr}_m$$

è una tautologia.

9.13 Esercizi su validità delle regole

1. la regola

$$\frac{C \vdash A, \Delta \quad C, B \vdash D}{C, A \rightarrow B \vdash D} \rightarrow *$$

è valida ??

NO. Infatti solo su certe righe (o con certe proposizioni) conserva la verità. Per esempio se $\Delta \equiv D$ si trova un'istanza della regola $\rightarrow -S$ e dunque conserva la verità su una riga.

Pure nel caso che Δ sia la lista vuota ovvero nel caso

$$\frac{C \vdash A \quad C, B \vdash D}{C, A \rightarrow B \vdash D} \rightarrow *$$

l'istanza della regola conserva la verità su una riga. Infatti supponiamo che sia 1 il valore di

$$C \rightarrow A$$

e di

$$C \& B \rightarrow D$$

su una certa riga della loro tabella includente le variabili proposizionali **A** e **B**. Poi se pure supponiamo che $C \& (A \rightarrow B) = 1$ sulla stessa riga allora innanzitutto $C = 1$ e dunque dalla verità della prima premessa $C \rightarrow A$ sulla riga considerata si conclude che $A = 1$. Ora dall'assunzione $C \& (A \rightarrow B) = 1$ si deduce che $A \rightarrow B = 1$ e dal fatto che $A = 1$ si conclude che $B = 1$. Ora dalla verità della seconda premessa $C \& B \rightarrow D$ sapendo che $C \& B = 1$ si conclude $D = 1$ come volevasi dimostrare. Infine per il lemma scorciatoia 9.6 si conclude che $C \& (A \rightarrow B) \rightarrow D$ è vera sulla riga considerata in partenza.

Ma se poniamo $\Delta \equiv H$ una lettera diversa da **D** allora vediamo che la regola

$$\frac{C \vdash A, H \quad C, B \vdash D}{C, A \rightarrow B \vdash D} \rightarrow *$$

non è valida perchè troviamo un'assegnazione di valore alle variabili proposizionali, ovvero una riga che rende veri

$$C \rightarrow A \vee H \quad \text{e} \quad C \& B \rightarrow D$$

ma non $C \& (A \rightarrow B) \rightarrow D$. A tal scopo proviamo a trovare una riga su cui $C \& (A \rightarrow B) \rightarrow D$ NON è valido. Tale riga deve porre $C = 1$ e $C \& (A \rightarrow B) = 1$ con $D = 0$. Ora dobbiamo dare valore ad **A** e a **B** in modo da rendere vere le premesse. Ma per rendere vero $C \& B \rightarrow D$ sapendo che $D = 0$ e $C = 1$ dobbiamo porre $B = 0$. Ora ricordando che $C \& (A \rightarrow B) = 1$ ovvero che $(A \rightarrow B) = 1$, dal fatto che $B = 0$ ne segue che dobbiamo porre $A = 0$. Infine per rendere $(C \rightarrow A \vee H) = 1$ sapendo che $C = 1$ basta porre $H = 1$.

Quindi per $C = H = 1$ con $A = B = D = 0$ le premesse della regola $\rightarrow *$ sono vere mentre la conclusione è falsa. Dunque la regola non conserva necessariamente la verità su una riga ed è quindi NON valida.

2. la regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee -D_1$$

è valida, ovvero conserva la verità per riga ??

9.14 Esercizio di formalizzazione in sequente e sua validità

Formalizzare in sequente

Non mangio gli spinaci.
Se mi piacessero gli spinaci li mangerei.
 Non mi piacciono gli spinaci.

utilizzando:

M=mangio gli spinaci

P=mi piacciono gli spinaci

e provare se è derivabile in LC_p il sequente ottenuto.

Nel caso positivo il sequente è valido, perchè??

Soluzione:

L'asserzione si formalizza ad esempio nel sequente

$$\neg M, P \rightarrow M \vdash \neg P$$

che è valido per il teorema 9.12 perchè si deriva ad esempio in tal modo

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{\neg M, P \vdash P} \quad \neg\text{-D}}{\neg M \vdash \neg P, P} \quad \text{sc}_{dx} \quad \frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{M \vdash M, \neg P} \quad \neg\text{-S}}{M, \neg M \vdash \neg P} \quad \text{sc}_{sx}}{\neg M, M \vdash \neg P} \quad \rightarrow\text{-D}}{\neg M, P \rightarrow M \vdash \neg P}$$

9.15 Esercizio di formalizzazione in regola e sua validità

Formalizzare in regola la seguente

Ad Alice piacciono gli spinaci \vdash Alice mangia gli spinaci
 Alice non mangia gli spinaci \vdash Ad Alice non piacciono gli spinaci

utilizzando:

S= Alice mangia gli spinaci

P=Ad Alice piacciono gli spinaci

1. scrivere la proposizione corrispondente alla validità della regola:

$$(P \rightarrow S) \rightarrow (\neg S \rightarrow \neg P)$$

2. stabilire se la regola ottenuta è una regola valida.

La regola ottenuta è:

$$\frac{P \vdash S}{\neg S \vdash \neg P}$$

Per quanto detto in sezione 9.11.2 sopra per mostrare la validità della regola basta dimostrare che se su una riga r (contenente S e P) si ha

$$(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{S}) = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \neg \mathbf{S} = \mathbf{1}$$

allora vale pure $\neg \mathbf{P} = \mathbf{1}$.

Ora su questa (misteriosa!) riga o vale $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ o vale $\mathbf{P} = \mathbf{0}$:

caso 1. $\mathbf{P} = \mathbf{1}$: in tal caso per la verità della premessa $(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{S}) = \mathbf{1}$ concludiamo che $\mathbf{S} = \mathbf{1}$, ma ciò contrasta con l'ipotesi che sulla riga valga $\neg \mathbf{S} = \mathbf{1}$ e quindi questo caso NON sussiste sotto le ipotesi di partenza;

caso 2. $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ma allora vale $\neg \mathbf{P} = \mathbf{1}$ come speravamo.

Per concludere in modo preciso, ricordiamo che l'aver dimostrato che se in una riga si ha $(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{S}) = \mathbf{1}$ e $\neg \mathbf{S} = \mathbf{1}$ allora abbiamo pure che $\neg \mathbf{P} = \mathbf{1}$, equivale, per il lemma scorciatoia 9.6, ad aver dimostrato che se su una riga si ha $(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{S}) = \mathbf{1}$ allora sulla stessa riga si ha pure $(\neg \mathbf{S} \rightarrow \neg \mathbf{P}) = \mathbf{1}$ e dunque la regola è valida per definizione.

9.16 Correttezza della procedura di decisione per sequenti in \mathbf{LC}_p

Ora mostriamo la correttezza della procedura di decisione in sezione 9.10 che dipende a sua volta da quella in sezione 9.6.1.

L'esistenza delle procedure di decisione si basa essenzialmente su due fatti:

- le regole di \mathbf{LC}_p sono regole SICURE, ovvero oltre ad essere valide, anche le loro regole INVERSE sono valide;
- tutte le regole di \mathbf{LC}_p eccetto quelle degli scambi a sx e a dx, DIMINUISCONO di COMPLESSITÀ dal BASSO verso l'ALTO.

9.16.1 Regole inverse e sicure

Diamo ora la definizione di regola inversa di una regola ad una premessa e di regole inverse di una regola a due premesse.

Def. 9.13 (regola inversa ad una premessa) *La regola inversa di una regola del tipo*

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \Delta'} *$$

è la seguente

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta} * - \text{inv}$$

Def. 9.14 (regola inversa ad due premesse) *Le regole inverse di una regola del tipo*

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma' \vdash \Delta'} *$$

sono le DUE seguenti

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1} * - \text{inv1} \quad \frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} * - \text{inv2}$$

Def. 9.15 (regola SICURA) *Una regola si dice SICURA se lei e le sue inverse sono entrambe valide classicamente, ovvero rispetto alla semantica delle tabelle di verità.*

Ora osserviamo che tutte le regole di \mathbf{LC}_p sono sicure ovvero le loro inverse sono valide:

Theorem 9.16 (validità inverse di \mathbf{LC}_p) *TUTTE le INVERSE delle regole di \mathbf{LC}_p sono valide.*

Diamo ora di seguito solo la dimostrazione di validità delle inverse delle regole dell'implicazione lasciando di dimostrare per esercizio la validità delle inverse delle altre regole di \mathbf{LC}_p .

9.16.2 Validità per riga di inversa \rightarrow -D

L'inversa della regola \rightarrow -D che è

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}{\Gamma, A \vdash B, \Delta} \rightarrow\text{-D} - \text{inv}$$

conserva la **verità su una riga**.

Innanzitutto, supponiamo che Δ sia composta da una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\mathbf{B}, \Delta)^\vee$ in $\mathbf{B} \vee \Delta$.

Poi supponiamo che sia **1** il valore di

$$\Gamma^\& \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \Delta$$

su una certa riga della sua tabella e supponiamo pure che $\Gamma^\& \& \mathbf{A} = \mathbf{1}$ sulla stessa riga della tabella. In particolare abbiamo che $\Gamma^\& = \mathbf{1}$ e dunque per la **verità** dell'unica **premessa** della regola **sulla riga considerata** si ottiene che $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \Delta = \mathbf{1}$. Qui abbiamo 2 casi: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ oppure $\Delta = \mathbf{1}$.

I caso $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$. Ora dal fatto che per assunzione iniziale $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ si ottiene che $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ e dunque $\mathbf{B} \vee \Delta = \mathbf{1}$.

II caso $\Delta = \mathbf{1}$. In tal caso risulta subito che $\mathbf{B} \vee \Delta = \mathbf{1}$.

In entrambi i casi avendo ottenuto $\mathbf{B} \vee \Delta = \mathbf{1}$, per il lemma scorciatoia 9.6 concludiamo che $\Gamma^\& \& \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vee \Delta$ è vero sulla riga considerata in partenza.

9.16.3 Validità di inverse di \rightarrow -S

La regola

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \rightarrow\text{-S} - \text{inv}_1$$

conserva la **verità su una riga**.

Innanzitutto, supponiamo che Γ e Δ siano entrambi composti da una proposizione sola (gli altri casi seguono analogamente) per semplificare l'interpretazione della lista $(\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^\&$ in $\Gamma \& (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ e così pure quella di $(\mathbf{A} \vee \Delta)^\vee$ in $\mathbf{A} \vee \Delta$. Poi supponiamo che sia **1** il valore di

$$\Gamma \& (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \Delta$$

e pure che $\Gamma = \mathbf{1}$ su una stessa riga della loro tabella includente le variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} . Ora su questa riga consideriamo due casi: $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ o $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

I caso $\mathbf{A} = \mathbf{1}$. Segue che $\mathbf{A} \vee \Delta = \mathbf{1}$.

II caso $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. In tal caso si ha $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ e dunque per la **verità** della **premessa sulla riga considerata** si ottiene che $\Delta = \mathbf{1}$ e quindi di nuovo che $\mathbf{A} \vee \Delta = \mathbf{1}$.

In entrambi i casi avendo ottenuto $\mathbf{A} \vee \Delta = \mathbf{1}$, per il lemma scorciatoia 9.6 si conclude che

$$\Gamma \rightarrow \mathbf{A} \vee \Delta$$

è vera sulla riga considerata in partenza.

La regola

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}{\Gamma, B \vdash \Delta} \rightarrow -S - inv_2$$

conserva la **verità su una riga**.

Supponiamo che sia 1 il valore di

$$\Gamma^{\&} \& (A \rightarrow B) \rightarrow \Delta^{\vee}$$

e di $\Gamma^{\&} \& B = 1$ su una certa riga della loro tabella includente le variabili proposizionali **A** e **B**. Ora su questa riga abbiamo che pure $A \rightarrow B = 1$, perchè dall'ipotesi $B = 1$. Dunque per la **verità** della **premessa sulla riga considerata** si ottiene che $\Delta^{\vee} = 1$, e per il lemma scorciatoia 9.6 si conclude che

$$\Gamma^{\&} \& B \rightarrow \Delta^{\vee}$$

è vera sulla riga considerata in partenza.

9.16.4 Sicurezza delle regole di LC_p

Dalla proposizione 9.9 assieme ai teoremi 9.10 e 9.16 deduciamo che le regole di LC_p sono tutte sicure:

Corollary 9.17 (sicurezza regole LC_p) *TUTTE le regole di LC_p e le loro INVERSE sono valide rispetto alla semantica delle tabelle di verità, ovvero sono regole SICURE.*

Concludiamo quindi che

nelle regole del calcolo LC_p la **VERITÀ per RIGA SCENDE** \Downarrow dall'**alto** verso il **basso** se **TUTTE** le FOGLIE sono **VERE sulla riga** ed anche **SALE** \Uparrow dal **basso** verso l'**alto** dalla radice $\Gamma \vdash \Delta$ verso ogni **SINGOLA FOGLIA**.

9.16.5 Esercizi su validità e sicurezza delle regole dei sequenti

1. La regola

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \vdash \Delta \quad \Gamma, B, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B, \Sigma \vdash \Delta} \vee -S$$

è sicura?

ovvero lei è valida assieme alle sue inverse

$$\frac{\Gamma, A \vee B, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, A, \Sigma \vdash \Delta} \vee -S - inv_1 \qquad \frac{\Gamma, A \vee B, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, B, \Sigma \vdash \Delta} \vee -S - inv_2$$

?

2. La regola

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \& -re_1$$

è sicura?

Soluzione: la regola conserva la verità su una riga ed è quindi valida procedendo analogamente alla dimostrazione di conservazione della verità per riga di $\&-S$.

Invece la sua inversa

$$\frac{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \&-re_1 - inv$$

NON è valida. A tal scopo dobbiamo mostrare una riga in cui la premessa

$$\Gamma \& (A \& B) \rightarrow \Delta^\vee$$

è vera mentre NON lo è la conclusione $\Gamma \& A \rightarrow \Delta^\vee$.

Per trovare tale riga procediamo come al solito provando a dimostrare la sua validità. Quindi supponiamo di avere una riga in cui la premessa $\Gamma \& (A \& B) \rightarrow \Delta^\vee$ va ad **1** e si abbia pure che la premessa del sequente sia vera sulla riga considerata, ovvero $\Gamma \& \mathbf{A} = \mathbf{1}$. Allora abbiamo che $\Gamma \& = \mathbf{1}$ e pure $\mathbf{A} = \mathbf{1}$, ma di \mathbf{B} non sappiamo niente. Abbiamo quindi da analizzare due casi: sulla riga considerata o $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

I caso: $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ allora si ottiene $\Gamma \& (\mathbf{A} \& \mathbf{B}) = \mathbf{1}$ e dunque per la verità della premessa $\Gamma \& (\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \rightarrow \Delta^\vee = \mathbf{1}$ se ne deduce che $\Delta^\vee = \mathbf{1}$, come speravamo.

II caso $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ e qui non sappiamo proseguire...anzi questo caso ci ispira il controesempio che dice che la regola NON conserva la verità per riga dalla sua premessa alla sua conclusione. Infatti ponendo il falso \perp al posto di B e di Δ e la costante vero \mathbf{tt} al posto di \mathbf{A} , otteniamo che in questo caso la regola diventa:

$$\frac{\mathbf{tt} \& \perp \vdash \perp}{\mathbf{tt} \vdash \perp} \&-re_1 - inv$$

e questa ha la premessa $\mathbf{tt} \& \perp \rightarrow \perp$ valida mentre la conclusione $\mathbf{tt} \rightarrow \perp$ è chiaramente NON valida. Dunque la regola $\& - re_1 - inv$ NON è valida e quindi la regola $\&-re_1$ è valida ma NON sicura.

3. La regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \rightarrow -D$$

è sicura?

9.16.6 Perché la procedura di decisione derivabilità/validità di un sequente è corretta?

Abbiamo già anticipato che la correttezza della procedura di decisione 9.6.1 della validità di un sequente proposizionale è conseguenza del fatto che le regole di \mathbf{LC}_p sono sicure, oltrechè del fatto che tali regole (escluso gli scambi a sx e a dx) DIMINUISCONO strettamente di COMPLESSITÀ dal BASSO verso l'ALTO. Vediamo in dettaglio perchè.

Se la procedura di sezione 9.6.1 applicata al sequente $\Gamma \vdash \nabla$ dice che questo è **valido** è perchè abbiamo costruito un albero di derivazione con radice $\Gamma \vdash \nabla$. Ora avendo a disposizione un'albero di derivazione, il sequente è certamente **VALIDO** ovvero vale

$$\models \Gamma \& \rightarrow \nabla^\vee$$

per il teorema 9.11 di validità degli assiomi e regole di \mathbf{LC}_p in quanto la validità scende dalle foglie che sono assiomi, e quindi validi, fino alla radice $\Gamma \vdash \nabla$.

Se la procedura invece dice che $\Gamma \vdash \nabla$ **NON è derivabile** allora si trova una foglia in cui il sequente NON è soddisfacibile. Supponiamo che la procedura si fermi con foglia del tipo

$$\mathbf{V}_{i_1}, \dots, \mathbf{V}_{i_n} \vdash \mathbf{V}_{k_1}, \dots, \mathbf{V}_{k_m}$$

che NON è assioma e fatta solo di variabili proposizionali, visto che non c'è variabile comune a dx e a sx (altrimenti la foglia sarebbe assioma!). Dunque mettendo a **1** tutte le variabili **premesse** e a **0** tutte le **conclusioni** si trova che la tabella di verità di

$$(\mathbf{V}_{i_1} \& \mathbf{V}_{i_2}) \dots \& \mathbf{V}_{i_n} \rightarrow (\mathbf{V}_{k_1} \vee \mathbf{V}_{k_2}) \dots \vee \mathbf{V}_{k_m}$$

risulta **0** in corrispondenza di tali valori. Ora, sicuramente $\Gamma \vdash \nabla$ è pure falsa sulla riga scelta, altrimenti se $\Gamma \vdash \nabla$ fosse **vera** sulla riga scelta per **conservazione della VERITÀ su una riga** delle **regole INVERSE** sarebbero veri sulla riga in questione TUTTI i sequenti lungo il ramo che finisce nella foglia $\mathbf{V}_{i_1}, \dots, \mathbf{V}_{i_n} \vdash \mathbf{V}_{k_1}, \dots, \mathbf{V}_{k_m}$ compresa lei che invece NON lo è. Dunque, il sequente $\Gamma \vdash \nabla$ **NON è valido** perchè NON è vero sulla riga scelta.

Si noti infine che nel caso il sequente $\Gamma \vdash \nabla$ NON sia valido, a maggior ragione il sequente NON è nemmeno derivabile in \mathbf{LC}_p in altro modo, perchè se fosse derivabile sarebbe anche valido per il teorema di validità 9.12 mentre abbiamo stabilito che non lo è.

Dal fatto che in un albero la verità per riga scende fino alla radice se tutte le foglie sono vere sulla riga, e dal fatto che la verità su una riga sale dalla radice fino a ciascuna foglia concludiamo che:

**in un albero fatto SOLO di regole di \mathbf{LC}_p
(con foglie che non sono necessariamente assiomi)**

la **FALSITÀ** su una riga **SCENDE** \Downarrow da UNA **SINGOLA foglia**
fino alla **RADICE** $\Gamma \vdash \Delta$

la **VALIDITÀ SCENDE** \Downarrow dall'ALTO verso il BASSO se **TUTTE LE FOGLIE** sono **VALIDE**
ed anche **SALE** \Uparrow dal **basso** verso l'**alto** dalla radice $\Gamma \vdash \Delta$ verso ogni **SINGOLA FOGLIA**.

Si noti infine che la procedura di decisione 9.6.1 **TERMINA SEMPRE** su ogni sequente perchè nel derivare le regole DIMINUISCONO la COMPLESSITÀ dei sequenti coinvolti (togliendo connettivi) strettamente dal BASSO verso l'ALTO e l'applicazione delle regole di scambio è ridotta al minimo.

Esempio in cui la falsità su una riga scende

Nell'esempio di sezione 9.10.1 abbiamo applicato la procedura di decisione 9.6.1 al sequente $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ e costruito il seguente albero che NON è di derivazione

$$\frac{\frac{\frac{Q \vdash P, R \quad Q, Q \vdash R}{Q, P \rightarrow Q \vdash R} \rightarrow -S}{P \rightarrow Q, Q \vdash R} \text{sc}_{sx}}{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow R} \rightarrow -D$$

Secondo la procedura basta trovare una riga per cui una foglia risulti falsa perchè il sequente radice risulti falso sulla stessa riga. Nell'esempio abbiamo scelto di falsificare la foglia di sinistra ponendo $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{P} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$ e possiamo osservare che la falsità scende da questa foglia fino alla radice attraverso tutti i sequenti del ramo che parte dalla radice fino alla foglia considerata:

$$\begin{array}{c}
\text{fals.su riga } \mathbf{Q} = 1 \quad \mathbf{P} = \mathbf{R} = 0 \\
\frac{Q \vdash P, R \quad Q, Q \vdash R}{Q, P \rightarrow Q \vdash R} \Downarrow_{\text{fals.su riga}} \\
\frac{Q, P \rightarrow Q \vdash R}{P \rightarrow Q, Q \vdash R} \Downarrow_{\text{fals.su riga}} \\
\frac{P \rightarrow Q, Q \vdash R}{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow R} \Downarrow_{\text{fals.su riga}}
\end{array}$$

Analogamente possiamo falsificare la foglia di destra per far scendere la falsità sulla riga

$$\begin{array}{c}
\text{fals.su riga } \mathbf{Q} = 1 \quad \mathbf{R} = 0 \\
\frac{Q \vdash P, R \quad Q, Q \vdash R}{Q, P \rightarrow Q \vdash R} \Downarrow_{\text{fals.su riga}} \\
\frac{Q, P \rightarrow Q \vdash R}{P \rightarrow Q, Q \vdash R} \Downarrow_{\text{fals.su riga}} \\
\frac{P \rightarrow Q, Q \vdash R}{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow R} \Downarrow_{\text{fals.su riga}}
\end{array}$$

Si noti che $\mathbf{Q} = 1$ e $\mathbf{R} = 0$ falsifica la foglia di sinistra ed anche la radice (oltrechè tutte i sequenti del ramo che parte dalla radice fino alla foglia considerata).

9.16.7 Cosa rappresenta in pratica una derivazione?

Ora vediamo in alcuni esempi il significato di un'albero di derivazione esplicitando la semantica dei suoi sequenti e delle sue regole.

Significato della derivazione rispetto a validità dei sequenti coinvolti Ricopiamo qui l'albero di derivazione dell'esempio in sezione 9.8.1

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \\
\frac{}{Q \vdash Q} \\
\frac{Q \vdash Q}{Q, \neg Q \vdash} \neg\text{-S} \\
\frac{Q, \neg Q \vdash}{Q \vdash \neg\neg Q} \neg\text{-D} \\
\frac{Q \vdash \neg\neg Q}{\vdash Q \rightarrow \neg\neg Q} \rightarrow\text{-D}
\end{array}$$

Grazie a questo albero di derivazione abbiamo concluso che la proposizione $\vdash \mathbf{Q} \rightarrow \neg\neg \mathbf{Q}$ è **valida**.

Notiamo ora come la VALIDITÀ dei sequenti coinvolti SCENDA \Downarrow dall'assioma identità fino al sequente radice.

Infatti, ricordando che $\models \text{pr}$ è un segno per indicare che pr è una tautologia, osserviamo che

$$\models \mathbf{Q} \rightarrow \neg\neg \mathbf{Q}$$

vale per la **validità delle regole all'ingiù** \Downarrow stabilita nel teorema di validità delle regole 9.10 assieme al fatto che regole valide conservano la validità dei sequenti come osservato in proposizione 9.9.

Quindi sapendo che banalmente vale

$$\models \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$$

sappiamo dalla validità della regola $\neg\text{-S}$ che vale pure

$$\models \mathbf{Q} \& \neg \mathbf{Q} \rightarrow \perp$$

e dalla validità della regola $\neg\text{-D}$ pure che

$$\models \mathbf{Q} \rightarrow \neg\neg \mathbf{Q}$$

e infine per la validità della regola $\rightarrow\text{-D}$ concludiamo che vale

$$\models \text{tt} \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \neg\neg \mathbf{Q})$$

che abbiamo scritto ricordando che il contesto vuoto a sinistra del sequente si traduce con la costante vero \mathbf{tt} e dá una proposizione equivalente a

$$\models \mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}$$

in quanto sappiamo che vale $\models (\mathbf{tt} \rightarrow \mathbf{pr}) \leftrightarrow \mathbf{pr}$.

Significato della derivazione con regole sicure

Si noti che applicando la proposizione 9.7 al significato di regola sicura ad una premessa si ottiene la seguente caratterizzazione:

Proposition 9.18 *Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo*

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

è sicura *sse la proposizione*

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \leftrightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$$

è vera su ogni riga della sua tabella, e quindi è una tautologia.

Si noti che applicando la proposizione 9.8 al significato di regola sicura a due premesse si ottiene la seguente caratterizzazione:

Proposition 9.19 *Una regola del calcolo dei sequenti a due premesse del tipo*

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

è sicura *sse la proposizione*

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \& (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) \leftrightarrow (\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})$$

è vera su ogni riga della sua tabella, e quindi è una tautologia.

Ora applichiamo questa caratterizzazione delle regole sicure per analizzare una derivazione con regole di \mathbf{LC}_p concentrandoci sul fatto che sono sicure e vedendo in concreto cos'è una derivazione rispetto alla semantica dei sequenti coinvolti.

Riprendiamo l'esempio di sezione 8, ovvero il problema di stabilire se

$$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$$

è una tautologia. A tal scopo applichiamo la procedura di decisione al sequente

$$\vdash (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$$

e otteniamo la seguente derivazione

$$\begin{array}{c} \mathbf{ax-id} \\ \frac{A, B \vdash A, B}{A \vdash B \rightarrow A, B} \rightarrow -D \\ \frac{A \vdash B \rightarrow A, B}{A \vdash B, B \rightarrow A} \mathbf{sc_{sx}} \\ \frac{A \vdash B, B \rightarrow A}{\vdash A \rightarrow B, B \rightarrow A} \rightarrow -D \\ \frac{\vdash A \rightarrow B, B \rightarrow A}{\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)} \vee -D \end{array}$$

Siccome sappiamo che le regole adoperate nella derivazione sopra sono sicure, ovvero conservano la validità dei sequenti sia da TUTTE le foglie fino alla radice ma anche dalla radice fino a CIASCUNA

foglia, esplicitiamo il significato delle regole e dei sequenti coinvolti tramite la caratterizzazione delle regole sicure in proposizione 9.18.

Concludiamo che la derivazione sopra non fa altro che operare le seguenti equivalenze di proposizioni implicative

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \\
& \quad \Updownarrow \\
& \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}) \vee \mathbf{B} \\
& \quad \Updownarrow \\
& \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}) \\
& \quad \Updownarrow \\
& \mathbf{tt} \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})
\end{aligned}$$

e l'ultima è equivalente ad $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$ sapendo che vale

$$\models (\mathbf{tt} \rightarrow \mathbf{pr}) \leftrightarrow \mathbf{pr}$$

In pratica la derivazione opera una STRATEGIA di RIDUZIONE a proposizioni chiaramente valide (ovvero gli assiomi identità o del falso) attraverso una serie di equivalenze tra proposizioni *dimostrate valide a priori* con il teorema di validità 9.10. Però la strategia di decidere la validità di una proposizione attraverso la costruzione di una derivazione è migliore rispetto a quelle in sezione 8 perchè termina sempre con una risposta ed è quindi eseguibile in modo automatico da un computer!

9.16.8 Metodo alternativo per decidere soddisfacibilità di un sequente NON valido

Un **modo alternativo** per vedere se un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ NON valido è soddisfacibile su una riga è provare a trovare *l'esistenza di una riga che rende SODDISFACIBILI TUTTE LE FOGLIE dell'albero ottenuto applicando tutte le regole possibili su ogni connettivo presente (escluso quindi le regole di scambio a sx e a dx)*.

Riprendiamo l'esempio in sezione 9.10.1 dove abbiamo concluso che il sequente $P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P$ NON è valido, stabilendo anche una riga in cui non è vero, e abbiamo concluso che è pure soddisfacibile dando una riga su cui è vero dopo aver applicato l'intera procedura 9.6.1.

Ora riprendiamo l'albero (che non è di derivazione!) costruito per decidere la NON validità del sequente che è pure fatto di foglie con sole variabili proposizionali

$$\begin{array}{c}
\frac{Q \vdash P, P \quad Q, Q \vdash P}{Q, P \rightarrow Q \vdash P} \rightarrow -S \\
\frac{P \rightarrow Q, Q \vdash P}{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P} \text{sc}_{sx} \\
\frac{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P}{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P} \rightarrow -D
\end{array}$$

ove vi sono presenti due foglie NON assiomi. Si vede che su una riga in cui $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ (con P designato a piacere) le due foglie diventano soddisfacibili e quindi per il teorema di conservazione della verità per riga 9.10 il sequente radice $P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P$ diventa **soddisfacibile** perchè vero su ogni riga con $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

9.16.9 Completezza calcolo dei sequenti

La **correttezza** della procedura di decisione per sequenti in \mathbf{LC}_p implica il seguente teorema di **completezza del calcolo \mathbf{LC}_p** rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità:

Theorem 9.20 (validità e completezza classica) *Il concetto di DERIVABILITÀ in \mathbf{LC}_p coincide con quello di VALIDITÀ CLASSICA delle tabelle di verità, ovvero il sequente $\mathbf{pr}_1, \dots, \mathbf{pr}_n \vdash \mathbf{pr}_k, \dots, \mathbf{pr}_m$ è derivabile in \mathbf{LC}_p sse è valido ossia $\models (((\mathbf{pr}_1 \& \mathbf{pr}_2 \& \dots) \& \mathbf{pr}_n) \rightarrow (((\mathbf{pr}_k \vee \mathbf{pr}_{k+1}) \dots) \vee \mathbf{pr}_m))$.*

Dimostrazione: Per il teorema di validità dei sequenti 9.12 se il sequente è derivabile allora è valido. Per mostrare il viceversa procediamo come segue: se $((\mathbf{pr}_1 \& \mathbf{pr}_2) \& \dots \mathbf{pr}_n \rightarrow ((\mathbf{pr}_k \vee \mathbf{pr}_{k+1}) \dots \vee \mathbf{pr}_m)$ è tautologia, ovvero il sequente di partenza è valido, allora applichiamo la procedura di decisione a

$$\mathbf{pr}_1, \dots, \mathbf{pr}_n \vdash \mathbf{pr}_k, \dots, \mathbf{pr}_m$$

e questa deve dare un albero di derivazione per cui il sequente risulta derivabile; infatti non può dire che il sequente è NON derivabile e quindi NON valido perchè la riga che assegna **0** al sequente non esiste per l'ipotesi del suo essere tautologia.

Ora diamo la definizione di teorema all'interno del calcolo dei sequenti \mathbf{LC}_p :

Def. Una proposizione \mathbf{pr} si dice *teorema* della logica classica proposizionale \mathbf{LC}_p se $\vdash \mathbf{A}$ è derivabile nel calcolo \mathbf{LC}_p .

Quindi, dal teorema 9.20 deduciamo che:

teoremi in \mathbf{LC}_p = tautologie classiche
--

Infine osserviamo che il calcolo \mathbf{LC}_p NON può derivare il falso ovvero è, come si dice usualmente, *consistente*:

Theorem 9.21 (consistenza calcolo proposizionale classico) *Il calcolo \mathbf{LC}_p NON può derivare il falso ovvero $\vdash \perp$ NON è derivabile in \mathbf{LC}_p .*

Dim.: se $\vdash \perp$ fosse derivabile in \mathbf{LC}_p allora sarebbe una **tautologia** per il teorema di validità dei sequenti derivabili in sezione 9.12, ovvero varrebbe

$$\models \perp$$

che invece non vale perchè la tabella di \perp è la funzione costante **0**.

9.16.10 Decidibilità del calcolo \mathbf{LC}_p

Def. Un calcolo si dice **DECIDIBILE** se *esiste un programma (=algoritmo) che permette di decidere se una proposizione \mathbf{pr} è teorema del calcolo (ovvero $\vdash \mathbf{pr}$ è derivabile nel calcolo)*

Il calcolo dei sequenti per la logica classica proposizionale \mathbf{LC}_p è DECIDIBILE perchè esiste procedura di decisione per le sue proposizioni in sezione 9.8, che ricordiamo dipende **ESSENZIALMENTE** dal fatto che

1. il calcolo \mathbf{LC}_p ha tutte **REGOLE SICURE**;
2. le regole di \mathbf{LC}_p (escluso gli scambi) **diminuiscono in COMPLESSITÀ \uparrow dal BASSO verso l'ALTO**;
3. gli scambi sono applicati solo quando necessario.

In particolare l'applicazione degli scambi solo quando necessario e la diminuzione di complessità dal basso verso l'alto delle regole dei connettivi fa sì che la procedura di decisione per la derivabilità di un sequente termini. Invece la presenza di regole sicure garantisce la correttezza della procedura.

9.16.11 NON c'è procedura di decisione con regole NON sicure

Se al posto di

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&-S$$

adottassimo le regole del libro del prof. Sambin

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&-re_1 \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&-re_2$$

potremmo costruire alberi che NON sono di derivazione con foglie contenente solo variabili proposizionali e NON assiomi, per sequenti VALIDI. Ciò significa che con regole NON sicure *non possiamo necessariamente avere una procedura di decisione come quella di sezione 9.6.1* che ci permette di concludere che un sequente NON è valido semplicemente dal fatto che NON abbiamo costruito un albero di derivazione una volta che siamo arrivati a delle foglie con solo variabili proposizionali e che NON sono assiomi. Vediamo bene perchè con un esempio.

Ora sappiamo che $A \& (B \vee C) \vdash B \vee C$ è certamente valido rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità (nel dubbio si applichi la procedura di sezione 9.6.1!). Ma se usiamo il calcolo in cui abbiamo rimpiazziamo la regola $\&-re_1$ e $\&-re_2$ al posto di $\&-S$ per costruire alberi, possiamo costruire questo albero

$$\frac{\frac{A \vdash B, C}{A \vdash B \vee C} \&-re_1}{A \& (B \vee C) \vdash B \vee C} \&-re_1$$

con una foglia non assioma e fatta solo di variabili proposizionali. Però NON possiamo concludere che la radice $A \& (B \vee C) \vdash B \vee C$ NON è valida!

In realtà in questo calcolo modificato con regole NON sicure possiamo derivare il sequente se applichiamo $\&-re_2$ come segue

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{B \vee C \vdash B \vee C}}{A \& (B \vee C) \vdash B \vee C} \&-re_2$$

La morale è che in un calcolo con regole NON sicure si *può sbagliare strategia di derivazione* andando a costruire alberi che non sono di derivazione pur avendo una radice valida perchè si scelgono regole non utili a trovare la derivazione che NON conservano la verità per riga dal basso verso l'alto.

Invece con la regola sicura $\&S$ non c'è strategia sbagliata ogni applicazione di regola è ok ...

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{A, B \vee C \vdash B \vee C}}{A \& (B \vee C) \vdash B \vee C} \&S$$

al più uno può allungare la derivazione ad esempio come segue

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{A, B \vdash B, C} \quad \frac{\text{ax-id}}{A, C \vdash B, C}}{\frac{A, B \vee C \vdash B, C}{A, B \vee C \vdash B \vee C} \vee D} \&S \vee S$$

Esercizi

Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI e NON validi (e in che riga della loro tabella) o INSODDISFACIBILI, motivando la risposta:

1.
$$\frac{\text{O esco la sera e quindi mi diverto, oppure mi riposo se non esco la sera.}}{\text{O mi diverto o mi riposo.}}$$

si consiglia di usare:

E=esco la sera

D=mi diverto

R= mi riposo

Soluzione: l'asserzione si può formalizzare in tal modo

$$(\mathbf{E} \& \mathbf{D}) \vee (\neg \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$$

Applicando la procedura di decisione in sezione 9.6.1 si ottiene

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{E, D \vdash D, R} \quad \frac{\frac{E \vdash D, R}{\vdash \neg E, D, R} \quad \neg\text{-D} \quad \frac{\text{ax-id}}{R \vdash D, R}}{\neg E \rightarrow R \vdash D, R} \rightarrow\text{-S}}{\frac{(E \& D) \vee (\neg E \rightarrow R) \vdash D, R}{(E \& D) \vee (\neg E \rightarrow R) \vdash D \vee R} \vee\text{-S}} \vee\text{-D}$$

Dalla foglia che non si chiude $\mathbf{E} \vdash \mathbf{D}, \mathbf{R}$ deduciamo che il sequente di partenza è NON valido sulla riga che assegna $\mathbf{E} = 1$ e $\mathbf{D} = \mathbf{R} = 0$.

Si poi vede facilmente che per $\mathbf{D} = 1$ ove i valori di \mathbf{E}, \mathbf{R} sono assegnati a piacere, si ha $\mathbf{D} \vee \mathbf{R} = 1$ ovvero la foglia $E \vdash D, R$ risulta vera su ogni riga con $\mathbf{D} = 1$ e dunque per la validità delle regole di \mathbf{LC}_p usate nell'albero sopra, il sequente radice $(\mathbf{E} \& \mathbf{D}) \vee (\neg \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$ risulta vero su tali righe e si conclude che esso è SODDISFACIBILE.

Alternativamente, si può applicare la procedura in sezione 9.6.1 al sequente

$$\vdash \neg((\mathbf{E} \& \mathbf{D}) \vee (\neg \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{D} \vee \mathbf{R})$$

per trovare che NON è valido e la riga su cui non è vero è la riga in cui il sequente $(\mathbf{E} \& \mathbf{D}) \vee (\neg \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$ è vero, e dunque concludiamo che è SODDISFACIBILE e NON valido.

2. (1 appello bis)

$$\frac{\text{Solo se cadono le foglie è autunno.}}{\text{Se e solo se non cadono le foglie, non è autunno ma inverno.}}$$

si consiglia di usare:

C = "cadono le foglie"

I = "è inverno"

A = "è autunno"

3. (I appello)

$$\frac{\text{Se ho tempo rileggo il compito.}}{\text{Se e soltanto se ho tempo rileggo il compito.}}$$

si consiglia di usare:
 R = “Rileggo il compito”
 H = “Ho tempo”

4. (II appello)

Sono all'estero se non sono a Padova.

 Non si dà il caso che sia a Padova e non sia all'estero.

si consiglia di usare:
 E = “Sono all'estero”
 P = “Sono a Padova”

5. (III appello)

Non si dà il caso che, se c'è vita sulla Luna, ci sia vita su Marte o su Saturno, o su Giove.

 Se c'è vita sulla Luna e non su Giove allora c'è pure su Marte e Saturno.

si consiglia di usare:
 L = “C'è vita sulla Luna”
 M = “C'è vita su Marte”
 S = “C'è vita su Saturno”
 G = “C'è vita su Giove”

6. (IV appello)

Non c'è vita su Giove ma c'è su Marte e Saturno.

 Non si dà il caso che, se c'è vita sulla Luna e non su Giove, allora ci sia pure su Marte.

si consiglia di usare le variabili dell'asserzione precedente.

7. $\frac{\text{È meglio ammainare le vele se il mare è in tempesta.}}{\text{Soltanto se il mare non è in tempesta ed è calmo, non è meglio ammainare le vele.}}$

si consiglia di usare:
 T = “il mare è in tempesta”
 M = “è meglio ammainare le vele”
 C = “il mare è calmo”

8. $\frac{\text{Lo Scirocco non soffia né da nord né da ovest se c'è afa.}}{\text{Non si dà il caso che soltanto se c'è afa lo Scirocco soffi da nord.}}$

si consiglia di usare:
 N = “Scirocco soffia da nord”
 O = “Scirocco soffia da ovest”
 A = “C'è afa”

Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, rispetto alla semantica classica:

1. $(B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow C) \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow A$

$$2. \neg(A \rightarrow \neg B \vee \neg A) \leftrightarrow \neg(B \& A) \vdash \neg B \leftrightarrow B$$

Stabilire se le seguenti regole sono valide e anche sicure rispetto alla semantica classica:

1.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \text{ 1}$$

2.

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \rightarrow A \vdash \Delta} \text{ 2}$$

9.17 Esercizi su conseguenza logica

Anticipiamo qui degli esercizi che saranno ripresi quando svolgeremo il concetto di teoria.

1. Si formalizzino le seguenti affermazioni, che chiamiamo *premesse*:

- (a) Sia Chiara che Pina vanno in bici.
- (b) Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va
- (c) Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.
- (d) Chiara non va in bici se Elia non ci va.

Si consiglia di usare:

C=Chiara va in bici

P=Pina va in bici

E=Elia va in bici

G=Giorgio va in bici

F=Fabio va in bici.

Formalizzare le seguenti affermazioni, che chiamiamo *conclusioni*, e dimostrare che ciascuna conclusione è conseguenza logica delle premesse in \mathbf{LC}_p mostrando che è conseguenza logica di una o più affermazioni della lista delle premesse eventualmente unite a una o più conclusioni che precedono la conclusione considerata nella lista delle conclusioni:

- (a) Fabio non va in bici.
- (b) Giorgio va in bici.
- (c) Se Fabio va in bici allora Chiara non ci va.
- (d) Elia va in bici.

Soluzione (cenni essenziali)

- P_a è $C \ \& \ P$
- P_b è $P \rightarrow G \vee F$
- P_c è $F \rightarrow \neg C$
- P_d è $\neg E \rightarrow \neg C$

- C_a è $\neg F$ che è conseguenza logica delle premesse derivando

$$\mathbf{P_a, P_c} \vdash \mathbf{C_a}$$

- C_b è G che è conseguenza logica delle premesse derivando

$$\mathbf{P_a, P_b, C_a} \vdash \mathbf{C_b}$$

- C_c è $F \rightarrow \neg C$ che è la premessa P_c e dunque è conseguenza logica delle premesse derivando

$$\mathbf{P_c} \vdash \mathbf{C_c}$$

che è già assioma identità.

- C_d è E che è conseguenza logica delle premesse derivando

$$P_a, P_d \vdash C_d$$

2. Si formalizzino le seguenti affermazioni, che chiamiamo *premesse*:

- (a) Se Claudia non va in gita allora Giovanni ci va.
- (b) Beppe non va in gita se e solo se ci va Giovanni.
- (c) Beppe va in gita se Claudia non va in gita.
- (d) Toni va in gita solo se ci va Claudia.

Si consiglia di usare:

C= Claudia va in gita

G=Giovanni va in gita

B=Beppe va in gita

T=Toni va in gita

E=Ester va in gita

Formalizzare le seguenti affermazioni, che chiamiamo *conclusioni*, e dimostrare che ciascuna conclusione è conseguenza logica delle premesse in LC_p mostrando che è conseguenza logica di una o più affermazioni della lista delle premesse eventualmente unite a una o più conclusioni che precedono la conclusione considerata nella lista delle conclusioni:

- (a) Se Giovanni non va in gita allora Beppe ci va.
- (b) Se Claudia non va in gita allora Beppe non ci va.
- (c) Claudia va in gita.
- (d) Solo se Claudia va in gita allora ci vanno sia Toni che Giovanni.
- (e) Se Claudia non va in gita ci va Ester.
- (f) Non si dà il caso che Claudia non vada in gita e che ci vada Beppe.

Soluzione (cenni essenziali)

- P_a è $\neg C \rightarrow G$

- P_b è $(\neg B \rightarrow G) \ \& \ (G \rightarrow \neg B)$

- P_c è $\neg C \rightarrow B$

- P_d è $T \rightarrow C$

- C_a è $\neg G \rightarrow B$ che è conseguenza logica delle premesse derivando

$$P_b \vdash C_a$$

- C_b è $\neg C \rightarrow \neg B$ che è conseguenza logica delle premesse derivando

$$P_a, P_b \vdash C_b$$

- C_c è C che è conseguenza logica delle premesse derivando

$$C_b, P_c \vdash C_b$$

- C_d è $T \& G \rightarrow C$ che è conseguenza logica delle premesse derivando

$$P_d \vdash C_d$$

- C_e è $\neg C \rightarrow E$ che è conseguenza logica delle premesse derivando

$$C_c \vdash C_e$$

- C_f è $\neg(\neg C \& B)$ che è conseguenza logica delle premesse derivando

$$C_c \vdash C_f$$

10 Logica classica predicativa

Dopo aver studiato la logica classica proposizionale, ovvero la logica delle proposizioni classiche, passiamo a studiare la logica classica predicativa, ovvero quella dei *predicati classici*.

In questa sezione introduciamo il linguaggio della logica classica predicativa, la nozione di validità dei suoi predicati, chiamati anche genericamente “formule”, e il relativo calcolo dei sequenti. Vedremo che useremo anche per i predicati un calcolo con tutte regole sicure ma siccome la loro complessità non diminuisce strettamente dal basso verso l’alto non avremo una procedura per decidere automaticamente la validità dei predicati. Comunque studieremo una procedura semi-automatica per stabilire tale validità.

10.1 Linguaggio predicativo

Un **linguaggio predicativo** ha 2 classi di **simboli**:

1. simboli chiamati **TERMINI** per indicare **enti**
esempi: x variabile, \bar{s} per nome “**Socrate**”
2. simboli chiamati **PREDICATI** per indicare **proprietà logiche degli enti**
esempi: $U(x)$ per “**x è un uomo**”, $U(\bar{s})$ per “**Socrate è un uomo**”
e i predicati sono chiusi sui **CONNETTIVI PROPOSIZIONALI** e **QUANTIFICAZIONI universali ed esistenziali**
esempi: $U(x) \& M(x)$ per “**x è un uomo ed è mortale**”, $U(x) \rightarrow M(x)$ per “**se x è un uomo allora è mortale**”, $\forall x M(x)$ sta per “**tutti sono mortali**”, $\exists x M(x)$ sta per “**esiste qualcuno di mortale**”

D’ora in poi usiamo il termine **FORMULA** per indicare un predicato esso può essere:

- predicato (o formula) **atomico** ovvero dato come primitivo
- predicato (o formula) **composta** ovvero costruito con connettivi proposizionali o quantificazioni da quelli primitivi che sono chiusi sia su **quantificazione universale** “per ogni” che sulla **quantificazione esistenziale** “esiste..”.

Inoltre useremo il simbolo **fr** come meta-variabile per una *formula generica* e la meta-variabile **t**, oppure **s** oppure **u** per indicare un *termine generico*.

Diamo qui la definizione di linguaggio predicativo formale:

Def. 10.1 Un linguaggio \mathcal{L} predicativo è individuato da

- un insieme di **COSTANTI**:

a, b, \dots, h

più generalmente indicate con la scrittura

$$(c_j)_{j \in J}$$

*ovvero una famiglia di costanti
indiciate su un insieme J grande
a piacere*

- un insieme di **PREDICATI atomici**

dipendenti da un numero FINITO qualsiasi di variabili oppure variabili proposizionali (non dipendenti da nessuna variabile):

$A(x_1, \dots, x_n), \dots, B, C(x_1, \dots, x_m), \dots, M(x), \dots, L, E, \dots$
più generalmente indicati con la scrittura

$$(P_k(x_1, \dots, x_m))_{k \in K}$$

ovvero una famiglia di predicati
con un numero finito di variabili
indiciate su un insieme K grande
a piacere oppure vuoto

Queste costanti e questi predicati atomici costituiscono l'alfabeto di \mathcal{L} e sono utilizzati per generare i termini e le formule del linguaggio \mathcal{L} come segue nelle prossime sezioni.

Si osservi che sopra tra i predicati del linguaggio predicativo abbiamo *incluso le variabili proposizionali* A, B, C, \dots del linguaggio proposizionale pensandole come *predicati senza variabili libere*.

10.1.1 Grammatica termini simbolici

Nel linguaggio \mathcal{L} un **TERMINE** t può essere costruito in tal modo:

- una variabile x è un **termine** (indichiamo le variabili con le ultime lettere MINUSCOLE dell'alfabeto inglese w, x, y, z)
- una costante \bar{c} in \mathcal{L} è un **termine** (indichiamo le costanti con una lettera MINUSCOLA preferibilmente tra le prime dell'alfabeto italiano, evitando così le lettere usate come variabili.)

10.1.2 Grammatica formule simboliche

Una *formula* fr nel linguaggio di \mathcal{L} si può costruire in tal modo:

- sono **formule** i predicati **atomici** $P_k(t_1, \dots, t_m)$ ottenuti dal predicato atomico $P_k(x_1, \dots, x_m)$ di \mathcal{L} sostituendo le variabili con termini t_i per $i = 1, \dots, m$
- $\forall x \text{ } fr$ (che si legge "per ogni x fr ") è una **formula** se fr lo è
- $\exists x \text{ } fr$ (che si legge "esiste un x tale che fr ") è una **formula** se fr lo è
- la costante "falso" \perp è una **formula**
- la costante "vero" tt è una **formula**
- $fr_1 \& fr_2$ è una **formula** se fr_1 e fr_2 lo sono
- $fr_1 \vee fr_2$ è una **formula** se fr_1 e fr_2 lo sono
- $fr_1 \rightarrow fr_2$ è una **formula** se fr_1 e fr_2 lo sono
- $\neg fr$ è una **formula** se fr lo è.

Esempi di linguaggi: Il linguaggio

$$\mathcal{L} \equiv (\bar{s}, U(x), M(x))$$

è costituito dalla costante \bar{s} assieme ai predicati unari $U(x)$ e $M(x)$ e le sue formule sono solo quelle generate con questi predicati e costanti: ad esempio $U(x) \rightarrow M(x)$ è una formula di questo linguaggio, come pure $U(\bar{s}) \& M(\bar{s})$ mentre NON è formula di questo linguaggio $M(a)$ oppure $C(x, b)$.

Si noti che ogni variabile proposizionale \mathbf{A} può essere vista come *predicato* 0-ario ovvero senza variabili. Per esempio il linguaggio predicativo più piccolo che contiene la formula $\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ è un linguaggio predicativo senza costanti e con i soli predicati 0-ari \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} ovvero

$$\mathcal{L}' \equiv (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$$

Infine il linguaggio predicativo più piccolo che contiene la formula $\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{c}, \mathbf{y})$ è il linguaggio predicativo

$$\mathcal{L}'' \equiv (\mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

ove il predicato atomico è $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (che si scrive con due variabili libere qualsiasi).

10.1.3 Come mettere le parentesi

Nello scrivere i predicati \forall o \exists si lega alla formula più vicina più di ogni altro connettivo come la negazione \neg , seguito a pari merito da \vee , $\&$, che a loro volta sono legate alle formule più di \rightarrow .

Ovvero

$$\neg, \forall, \exists \quad \text{lega più di} \quad \vee, \& \quad \text{lega più di} \quad \rightarrow$$

Esempi:

- “(tutti gli \mathbf{x} tale che $\mathbf{A}(\mathbf{x})$) o \mathbf{B} ”

si scrive

$$\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}$$

- “tutti gli \mathbf{x} tale che ($\mathbf{A}(\mathbf{x})$ o \mathbf{B})”

si scrive

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B})$$

- “ (esiste un \mathbf{x} tale che $\mathbf{A}(\mathbf{x})$) implica (\mathbf{B} o \mathbf{C})”

si scrive

$$\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$$

- “(esiste un \mathbf{x} tale che ($\mathbf{A}(\mathbf{x})$ implica \mathbf{B})) o \mathbf{C} ”

si scrive

$$\exists \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$$

10.2 A cosa servono i predicati?

I predicati servono per formalizzare asserzioni del tipo

Tutti gli uomini sono mortali
Socrate è un uomo
Socrate è mortale

ove si è adottato la convenzione (con la sbarra) in sezione 5. A tal scopo usiamo i seguenti predicati

$M(x) = \text{"}x \text{ è mortale"}$

$U(x) = \text{"}x \text{ è un uomo"}$

e introduciamo la costante \bar{s} per esprimere il nome "Socrate":

Poi per esprimere il "tutti" usiamo il simbolo di **quantificazione universale** "per ogni" davanti a un predicato e formalizziamo la frase "Tutti gli uomini sono mortali" in tal modo

$$\forall x (U(x) \rightarrow M(x))$$

mentre "Socrate è un uomo" e "Socrate è mortale" si formalizzano rispettivamente in $U(\bar{s})$ e in $M(\bar{s})$ perchè *al posto della variabile x possiamo sostituire la costante \bar{s}* .

Infine l'intera asserzione sopra si formalizza nel seguente

$$\forall x (U(x) \rightarrow M(x)), U(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})$$

Mentre per formalizzare l'asserzione

Qualche antenato di Mario è nobile.

ci avvaliamo delle seguenti funzioni proposizionali o predicati

$A(x, y) = \text{"}x \text{ è antenato di } y\text{"}$

$N(x) = \text{"}x \text{ è nobile"}$

e un nome, ovvero una costante, per indicare il nome di Mario

$\bar{m} = \text{"Mario"}$.

Poi per esprimere "qualche" usiamo il simbolo di **quantificazione esistenziale** "esiste" davanti a un predicato

$$\exists x P(x)$$

L'asserzione quindi si può esprimere così:

$$\exists x (A(x, \bar{m}) \ \& \ N(x))$$

$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ traduce

Tutti i $P(x)$ sono $Q(x)$
Chi è $P(x)$ è pure $Q(x)$
Quelli che sono $P(x)$... sono $Q(x)$
I $P(x)$ sono $Q(x)$
Un $P(x)$ è un $Q(x)$
Chiunque è $P(x)$, è pure $Q(x)$
Ogni $P(x)$ è $Q(x)$
Soltanto i $Q(x)$ sono $P(x)$
Se uno è $P(x)$ allora è pure $Q(x)$
Solo se uno è $Q(x)$ allora è pure $P(x)$

$\exists x (P(x) \ \& \ Q(x))$ traduce

C'è un $P(x)$ che è $Q(x)$
esiste un $P(x)$ che è $Q(x)$
qualche $P(x)$ è $Q(x)$

$\neg \exists x (P(x) \ \& \ Q(x))$ traduce

nessun $P(x)$ è un $Q(x)$
non esiste un $P(x)$ che è $Q(x)$

Trucco per tradurre soltanto quelli, solo quelli che

- riscrivere la frase *togliendo* il "soltanto", o "solo"
- tradurre la frase ottenuta usando la quantificazione universale e l'implicazione
- se la frase ottenuta è $\forall x (\mathbf{fr}_1(x) \rightarrow \mathbf{fr}_2(x))$ allora la traduzione della frase iniziale si ricava *SCAMBIANDO antecedente con conseguente*, ovvero scrivendo $\forall x (\mathbf{fr}_2(x) \rightarrow \mathbf{fr}_1(x))$

10.2.1 Esempi di formalizzazione di predicati

Ogni volta che formalizziamo un'asserzione usiamo un particolare linguaggio predicativo dato dalle costanti $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$, e da dei predicati atomici $\mathbf{P}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m), \mathbf{P}_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k), \dots$

1. L'asserzione

"x più cinque è minore od uguale a sei"

si può scrivere formalmente

$$\mathbf{x} + 5 \leq 6$$

ove $\mathbf{x} + 5 \leq \mathbf{y}$ è simbolo di predicato per "x +5 minore o uguale ad y"
e ovviamente 6 è il numero sei.

2. l'asserzione **"il quadrato di x più il quadrato di y è uguale ad uno"**

si può scrivere formalmente

$$\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = 1$$

3. L'asserzione

"esiste un numero x tale che x è minore o uguale di 6"

si può formalizzare così

$$\exists \mathbf{x} (\mathbf{N}(\mathbf{x}) \ \& \ \mathbf{x} \leq 6)$$

ove

$\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ è simbolo di predicato di minore o uguale ovvero "x è minore od uguale ad y"
 $\mathbf{N}(\mathbf{x}) =$ "x è un numero"

4. L'asserzione **"Se Mario non mangia allora non sta in piedi"**

si può formalizzare così

$$\neg \mathbf{M}(\overline{\mathbf{m}}) \rightarrow \neg \mathbf{P}(\overline{\mathbf{m}})$$

ove

$\mathbf{M}(\mathbf{x}) =$ "x mangia"

$\mathbf{P}(\mathbf{x}) =$ "x sta in piedi"

$\overline{\mathbf{m}} =$ "Mario"

5. L'asserzione

“Chi non mangia non sta in piedi”

è formalizzabile così

$$\forall x (\neg M(x) \rightarrow \neg P(x))$$

ponendo

M(x)=“x mangia”

P(x)= “x sta in piedi”

6. L'asserzione

“Solo quelli che hanno il biglietto salgono sull'aereo.”

si può formalizzare così

$$\forall x (S(x) \rightarrow B(x))$$

con

B(x)= “ x ha il biglietto”

S(x)= “x sale sull'aereo”

7. l'asserzione

“Non si dà il caso che nessun programma termini.”

si può formalizzare in

$$\neg \neg \exists x (P(x) \ \& \ T(x))$$

con

P(x)= “x è programma”

T(x)= “x termina”

8. l'asserzione

“Nessun programma con un ciclo infinito termina.”

si può formalizzare così

$$\neg \exists x ((P(x) \ \& \ \exists y C(x,y)) \ \& \ T(x))$$

ove

P(x)= “x è programma”

T(x)= “x termina”

C(x,y)= “y è ciclo di x ”

9. **“Un programma che non ha cicli termina.”**

si può formalizzare in

$$\forall x (P(x) \ \& \ \neg \exists y C(x,y) \rightarrow T(x))$$

con

P(x)= “x è programma”

T(x)= “x termina”

C(x,y)= “y è ciclo di x ”

10.2.2 Nozione di variabile LIBERA in termini e formule

L'introduzione dei quantificatori universale ed esistenziale nel linguaggio predicativo comporta la presenza di due tipi di variabili: le *variabili libere*, che sono variabili all'interno di una formula senza quantificatori legati ad esse, e le *variabili vincolate*, che sono variabili che cadono nel raggio di azione di un quantificatore.

Prima di definire le variabili libere di una formula precisiamo la ovvia definizione di variabile libera in un termine considerando che al momento i termini sono solo o variabili o costanti:

$$\begin{aligned}\mathbf{VL}(\mathbf{c}) &\equiv \emptyset && \text{se } \mathbf{c} \text{ costante} \\ \mathbf{VL}(\mathbf{x}) &\equiv \mathbf{x}\end{aligned}$$

Poi definiamo la nozione di variabile libera di una formula come segue:

\mathbf{x} si dice **LIBERA** in \mathbf{fr} sse $\mathbf{x} \in \mathbf{VL}(\mathbf{fr})$ ove

$$\begin{aligned}\mathbf{VL}(\perp) &\equiv \emptyset \\ \mathbf{VL}(\mathbf{P}_k(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_m)) &\equiv \mathbf{VL}(\mathbf{t}_1) \cup \dots \cup \mathbf{VL}(\mathbf{t}_m) \\ \mathbf{VL}(\forall \mathbf{y} \mathbf{fr}) &\equiv \mathbf{VL}(\mathbf{fr}) \setminus \{\mathbf{y}\} \text{ ovvero } \mathbf{y} \text{ appare VINCOLATA in } \forall \mathbf{y} \mathbf{fr} \\ \mathbf{VL}(\exists \mathbf{y} \mathbf{fr}) &\equiv \mathbf{VL}(\mathbf{fr}) \setminus \{\mathbf{y}\} \text{ ovvero } \mathbf{y} \text{ appare VINCOLATA in } \exists \mathbf{y} \mathbf{fr} \\ \mathbf{VL}(\mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2) &\equiv \mathbf{VL}(\mathbf{fr}_1) \cup \mathbf{VL}(\mathbf{fr}_2) \\ \mathbf{VL}(\mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2) &\equiv \mathbf{VL}(\mathbf{fr}_1) \cup \mathbf{VL}(\mathbf{fr}_2) \\ \mathbf{VL}(\mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2) &\equiv \mathbf{VL}(\mathbf{fr}_1) \cup \mathbf{VL}(\mathbf{fr}_2) \\ \mathbf{VL}(\neg \mathbf{fr}) &\equiv \mathbf{VL}(\mathbf{fr})\end{aligned}$$

Esempi

$$\mathbf{VL}(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{z} \mathbf{B}(\mathbf{z}, \mathbf{y})) = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$$

$$\mathbf{VL}(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$$

poichè \mathbf{x} è libera in $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ anche se vincolata in $\forall \mathbf{x} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\mathbf{VL}(\mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})) = \{\mathbf{z}\}$$

$$\mathbf{VL}(\forall \mathbf{z} \mathbf{B}(\mathbf{z}) \vee \mathbf{A}(\mathbf{z}, \mathbf{x})) = \{\mathbf{z}, \mathbf{x}\}$$

poichè \mathbf{z} è libera nel secondo disgiunto $\mathbf{A}(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ perchè il $\forall \mathbf{z}$ lega solo l'occorrenza di \mathbf{z} in $\mathbf{B}(\mathbf{z})$

$$\mathbf{VL}(\forall \mathbf{z} (\mathbf{B}(\mathbf{z}) \vee \mathbf{A}(\mathbf{z}, \mathbf{x}))) = \{\mathbf{x}\}$$

perchè il $\forall \mathbf{z}$ lega entrambe le occorrenze di \mathbf{z} per la convenzione sulle parentesi.

Si osservi che dire che *una variabile \mathbf{w} è NON LIBERA in una formula \mathbf{fr}* significa due cose:

- o \mathbf{w} NON compare per nulla in \mathbf{fr} ,
- oppure \mathbf{w} compare vincolata in \mathbf{fr} , ovvero nel raggio di azione di un quantificatore.

10.3 Calcolo dei sequenti LC per la Logica classica predicativa

Il calcolo seguente è chiuso sulle applicazioni delle regole ottenute mettendo al posto delle variabili A, B e dei predicati $A(x)$ delle formule qualsiasi e al posto di w nelle regole \exists -S e \forall -D una *qualsiasi altra variabile* purchè rispetti le condizioni dettate dalle regole.

Inoltre si ricorda che con \mathbf{t} si intende una meta-variabile per un termine che può essere una delle variabili x, y, z, \dots oppure una delle costanti a, b, c, \dots .

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \quad \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \quad \text{ax-}\perp \quad \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla \\
\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma} \text{sc}_{\text{sx}} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}} \\
\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&\text{S} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&\text{-D} \\
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee\text{-S} \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee\text{D} \\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg\text{-S} \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg\text{-D} \\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow\text{-S} \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow\text{-D} \\
\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall\text{-S} \quad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \forall\text{-D} \ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla)) \\
\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \nabla} \exists\text{-S} \ (w \notin VL(\Gamma, \exists x A(x), \nabla)) \quad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists\text{-D}
\end{array}$$

Poi diciamo che un **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$ è **derivabile nel calcolo LC** se tal sequente ammette una derivazione nel senso di definizione 12.2 applicata a **LC**.

10.3.1 Come si sarebbe potuto scrivere il calcolo LC

Prima della descrizione delle regole del calcolo dei sequenti **LC** in 10.3 abbiamo precisato che le regole si possono applicare anche a sequenti ottenuti sostituendo le variabili per predicati atomici $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e le variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} con formule qualsiasi. Per rendere più esplicita ed evidente questa proprietà possiamo descrivere il calcolo dei sequenti **LC** in modo equivalente scrivendo le regole con \mathbf{fr}_1 e \mathbf{fr}_2 , che chiamiamo META-variabili per formule complesse arbitrarie, al posto di \mathbf{A} e \mathbf{B} e $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (la differenza tra le variabili $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e \mathbf{B} e le META-variabili \mathbf{fr}_1 e \mathbf{fr}_2 è che le prime sono i costituenti di base della grammatica delle formule per formare formule complesse, ad esempio $A \& (B(x) \vee C) \rightarrow \exists x D(x, y)$, mentre le seconde sono solo variabili di più alto livello per indicare una formula complessa). Si noti che la scrittura $\mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$ indica la formula ottenuta sostituendo le occorrenze libere della variabile \mathbf{x} in \mathbf{fr} con il termine \mathbf{t} (la definizione formale di sostituzione sarà data in una delle prossime sezioni).

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \quad \Gamma, \mathbf{fr}_1, \Gamma' \vdash \Delta, \mathbf{fr}_1, \Delta' \quad \text{ax-}\perp \quad \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla \quad \text{ax-}\top \quad \Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla' \\
\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{sc}_{\text{sx}} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}} \\
\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathbf{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2, \Delta} \&\text{-D} \quad \frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1, \mathbf{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2 \vdash \Delta} \&\text{S} \\
\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1, \mathbf{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2, \Delta} \vee\text{D} \quad \frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathbf{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2 \vdash \Delta} \vee\text{-S}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{fr}_1, \Delta} \neg\text{-D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1, \Delta}{\Gamma, \neg \mathbf{fr}_1 \vdash \Delta} \neg\text{-S} \\
\\
\frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vdash \mathbf{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2, \Delta} \rightarrow\text{-D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1, \Delta \quad \Gamma, \mathbf{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2 \vdash \Delta} \rightarrow\text{-S} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}, \nabla} \forall\text{-D} \ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}, \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \nabla}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr} \vdash \nabla} \forall\text{-S} \\
\\
\frac{\Gamma, \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}] \vdash \nabla}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{fr} \vdash \nabla} \exists\text{-S} \ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}, \nabla}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}, \nabla} \exists\text{-D}
\end{array}$$

Def. 10.2 (sequente derivabile in $\mathbf{LC}_=$) *Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice derivabile nel calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_=$*

se esiste un albero avente

- $\Gamma \vdash \Delta$ come radice;
- ogni foglia è istanza di un assioma di $\mathbf{LC}_=$ ottenuto sostituendo le variabili \mathbf{A}, \mathbf{B} con arbitrarie proposizioni \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 e le variabili $\Gamma, \Delta, \nabla, \Sigma$ con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).
- l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di $\mathbf{LC}_=$ ottenute sostituendo le variabili \mathbf{A}, \mathbf{B} con arbitrarie proposizioni \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 e le variabili $\Gamma, \Delta, \nabla, \Sigma$ con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).

10.3.2 Attenzione alle condizioni su variabili

Quando si applica $\forall\text{-D}$ o $\exists\text{-S}$ controllare le **condizioni su variabili**:

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \\
\frac{\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \forall\text{-D NO!!!} \\
\frac{\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \exists\text{-S}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{ax-id} \\
\frac{\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})} \exists\text{-S NO!!!} \\
\frac{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \forall\text{-D}
\end{array}$$

NON sono derivazioni corrette: nella prima NON si può applicare $\forall\text{-D}$ perchè \mathbf{z} è libera nel contesto a \mathbf{sx} di \vdash ovvero in $\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$

e nella seconda NON si può applicare $\exists\text{-S}$ perchè \mathbf{z} è libera nel contesto a \mathbf{dx} di \vdash ovvero in $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})$.

10.3.3 Esempi di derivazione: uso delle regole $\forall\text{-S}$ e $\exists\text{-D}$

Nel calcolo LC possiamo derivare il sequente

$$\forall \mathbf{x} \ (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})), \mathbf{U}(\bar{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{M}(\bar{\mathbf{s}})$$

in tal modo

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash U(\bar{s}), M(\bar{s})} \quad \frac{\text{ax-id}}{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)), M(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})}}{\frac{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash U(\bar{s}) \rightarrow M(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})}{\frac{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})}{\forall x (U(x) \rightarrow M(x)), U(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})} \text{sc}_{sx}} \forall -S} \rightarrow -S$$

Si noti che conviene applicare la regola $\forall -S$ mettendo al posto della metavariable \mathbf{t} il termine (costante o variabile) che si spera possa condurre a trovare una derivazione, ovvero non ha senso applicare prima la regola $\forall -S$ per esempio con la variabile \mathbf{x}

$$\frac{\frac{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \quad U(x) \rightarrow M(x) \vdash M(\bar{s})}{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})} \forall -S}{\forall x (U(x) \rightarrow M(x)), U(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})} \text{sc}_{sx}$$

Anche se grazie al fatto che la regola $\forall -S$ è sicura si può recuperare la sostituzione giusta al secondo colpo così

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash U(\bar{s}), M(\bar{s})} \quad \frac{\text{ax-id}}{U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)), M(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})}}{\frac{U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash U(\bar{s}) \rightarrow M(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})}{\frac{U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})}{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)), U(x) \rightarrow M(x) \vdash M(\bar{s})} \text{sc}_{sx}} \forall -S} \rightarrow -S$$

Inoltre l'asserzione composta

Il conte Augusto è un'antenato di Mario ed è nobile
Qualche antenato di Mario è nobile

si può formalizzare nel seguente

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{c}) \vdash \exists \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{x}))$$

ove si pone

$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{“x è antenato di y”}$

$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \text{“x è nobile”}$

$\bar{\mathbf{m}} = \text{“Mario”}$

$\mathbf{c} = \text{“Il conte Augusto”}$

Possiamo derivare il seguente in LC in tal modo:

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{A}(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{c}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{c}), \exists \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{x}))}}{\mathbf{A}(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{c}) \vdash \exists \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{x}))} \exists -D$$

Si noti che conviene applicare la regola $\exists -D$ mettendo al posto della metavariable \mathbf{t} un termine (costante o variabile) che *compare nel resto del seguente* e che si spera possa condurre a trovare una derivazione.

10.4 Come interpretare unicità in logica predicativa? aggiungiamo il predicato di uguaglianza!

In sezione 10.1.2 abbiamo visto che per definire un linguaggio predicativo occorre avere come base di partenza dei predicati atomici $P_k(x_1, \dots, x_m)$ che negli esempi in sezione 10.2 sono ad esempio $U(x)$ o $M(x)$ etc. Ora ci concentriamo su linguaggi predicativi dove c'è senz'altro come predicato atomico il predicato binario dell'uguaglianza $t = s$ che indica che il termine t è uguale al termine s . I linguaggi predicativi con l'aggiunta dell'uguaglianza si chiamano **linguaggi predicativi con uguaglianza** e la logica predicativa con le regole dell'uguaglianza si chiama **LOGICA PREDICATIVA con UGUAGLIANZA**.

Vediamo a che serve l'uguaglianza con degli esempi.

Esempio 0: come formalizzare in logica classica

“c'è un x uguale a cinque”

?

Con la formula

$$\exists x \, x=5$$

Esempio 1: come formalizzare in logica classica

“Il programma fattoriale su input 2 dà un'unico output.”

con

$O(x, y, z)$ = “il programma y su input z dà output il numero x ”

f = “il programma fattoriale”

2 = “due”

?

Una possibile formalizzazione è la seguente:

$$\exists x \, O(x, f, 2) \ \& \ \forall y_1 \, \forall y_2 \, (O(y_1, f, 2) \ \& \ O(y_2, f, 2) \rightarrow y_1=y_2)$$

Un'altra possibile formalizzazione (meno conveniente però per derivare) è la seguente:

$$\exists x \, (O(x, f, 2) \ \& \ \forall y \, (O(y, f, 2) \rightarrow y=x))$$

Esempio 2: come formalizzare in logica classica

“Il programma fattoriale assegna ad ogni input un'unico output.”

con

$O(x, y, z)$ = “il programma y su input z dà output il numero x ”
 f = “il programma fattoriale”

?

Una possibile formalizzazione è la seguente:

$$\forall z (\exists x O(x, f, z) \ \& \ \forall y_1 \forall y_2 (O(y_1, f, z) \ \& \ O(y_2, f, z) \rightarrow y_1 = y_2))$$

Un'altra possibile formalizzazione (meno conveniente però per derivare) è la seguente:

$$\forall z \exists x (O(x, f, z) \ \& \ \forall y (O(y, f, z) \rightarrow y = x))$$

Esempio 4: come formalizzare in logica classica

“Certi potenti pensano a se stessi e soltanto a se stessi”

con

$O(x)$ = “ x è potente”

$P(x, y)$ = “ x pensa a y ”

?

Una possibile formalizzazione è la seguente:

$$\exists x ((O(x) \ \& \ P(x, x)) \ \& \ \forall y (P(x, y) \rightarrow y = x))$$

Esempio 4: come formalizzare in logica classica

“Certi potenti pensano solo a se stessi”

con

$O(x)$ = “ x è potente”

$P(x, y)$ = “ x pensa a y ”

?

Una possibile formalizzazione LETTERALE è la seguente:

$$\exists x (O(x) \ \& \ \forall y (P(x, y) \rightarrow y = x))$$

In realtà la frase sopra è affermata per intendere che **“Certi potenti pensano a se stessi e soltanto a se stessi”** la cui formalizzazione è nell'esempio sopra.

10.4.1 Grammatica predicati con uguaglianza

Descriviamo qui come si costruiscono le formule all'interno di un linguaggio predicativo con uguaglianza. La differenza rispetto a quanto descritto in definizione 10.7.1 è che tra i predicati di base c'è pure l'uguaglianza:

Def. 10.3 La grammatica delle *formule del linguaggio predicativo con l'aggiunta dell'uguaglianza* diventa:

- il predicato $t=s$ è una **formula** se t ed s sono **termini**.
- i predicati atomici $P_k(t_1, \dots, t_m)$ sono **formule** se t_i sono **termini** per $i = 1, \dots, m$.
- $\forall x \text{ fr}$ è una **formula** se fr lo è.
- $\exists x \text{ fr}$ è una **formula** se fr lo è.
- la proposizione \perp è una **formula**.
- $\text{fr} \& \text{fr}_2$ è una **formula** se fr e fr_2 lo sono.
- $\text{fr} \vee \text{fr}_2$ è una **formula** se fr e fr_2 lo sono.
- $\text{fr} \rightarrow \text{fr}_2$ è una **formula** se fr e fr_2 lo sono.
- $\neg \text{fr}$ è una **formula** se fr lo è.

Notazione "diverso": Nel seguito usiamo l'abbreviazione

$$t \neq s \equiv \neg t = s$$

per indicare il predicato che il termine t è diverso dal termine s .

10.4.2 Il calcolo dei sequenti $LC_=$

Il calcolo $LC_=$ è il calcolo della logica classica con uguaglianza ovvero il calcolo LC con le regole dell'uguaglianza

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{ax-id} \\
 \frac{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'}{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma} \text{sc}_{sx} \quad \frac{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla} \text{sc}_{dx} \\
 \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&S \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-D \\
 \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee-S \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee D \\
 \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg-S \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg-D \\
 \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow-S \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow-D \\
 \frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall-S \quad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \forall-D \ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla)) \\
 \frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \nabla} \exists-S \ (w \notin VL(\Gamma, \exists x A(x), \nabla)) \quad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists-D \\
 \frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} =-S \quad \frac{}{\Gamma \vdash t = t, \Delta} =-ax
 \end{array}
 \end{array}$$

ove con $\Gamma(\mathbf{t})$ si intende che il termine \mathbf{t} può comparire nelle formule in $\Gamma(t)$.

10.4.3 Come usare le regole di uguaglianza?

Nella regola

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -S$$

dall'alto verso il basso: NON TUTTE le occorrenze di t DEVONO essere rimpiazzate con s
dal basso verso l'alto: NON TUTTE le occorrenze di s DEVONO essere rimpiazzate con t .

Ad esempio nella derivazione

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{t}=\mathbf{s} \vdash \mathbf{t} = \mathbf{t}, \mathbf{f}=\mathbf{t}}{t=s \vdash s=t, f=t} = -S}{\frac{t=s \vdash f=t, s=t}{t=s \vdash f=s, s=t} \text{sc}_{sx}} = -S$$

nella prima applicazione non abbiamo sostituito tutte le occorrenze di s con t ma solo alcune.

Esempio 1: Se vogliamo derivare la simmetria dell'uguaglianza

$$t = s \vdash s = t$$

in $LC_{=}$ occorre applicare la regola $= -S$ in tal modo:

si identifichi

$$\Sigma \equiv \emptyset \quad \Gamma(x) \equiv \emptyset \quad \Delta(x) \equiv x = t \quad \nabla \equiv \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(t) \equiv t = t \quad \Delta(s) \equiv s = t$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\frac{\frac{= -ax}{t = s \vdash t = t}}{t = s \vdash s = t} = -S$$

Esempio 2: Se vogliamo derivare la transitività dell'uguaglianza

$$t = u, u = s \vdash t = s$$

in $LC_{=}$ occorre applicare la regola $= -S$ in tal modo:

si identifichi

$$\Sigma \equiv \emptyset \quad \Gamma(x) \equiv t = u \quad \Delta(x) \equiv t = x \quad \nabla \equiv \emptyset$$

(si noti che in $\Gamma(x)$ non compare proprio x !!) e quindi si ha che

$$\Delta(u) \equiv t = u \quad \Delta(s) \equiv t = s$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\frac{\frac{ax - id}{u = s, t = u \vdash t = u}}{t = u, u = s \vdash t = s} = -S$$

Alternativamente possiamo usare la regola $= -S$ con

$$\Sigma \equiv t = u \quad \Gamma(x) \equiv \emptyset \quad \Delta(x) \equiv t = x \quad \nabla \equiv \emptyset$$

e quindi ottenere la seguente derivazione:

$$\frac{\text{ax} - \text{id} \quad t = u, u = s \vdash t = u}{t = u, u = s \vdash t = s} = -S$$

10.5 Semantica classica dei predicati e quantificazione universale

Per dire quando $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è **vera** OCCORRE avere un dominio \mathbf{D} su cui far variare \mathbf{x} e occorre definire una funzione

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D} \longrightarrow \{0, 1\}$$

ovvero dire se per un generico $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1 \quad \text{o} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 0$$

Def. 10.4 (modello) Dato linguaggio predicativo \mathcal{L} con costanti \mathbf{c}_j e predicati atomici $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ un modello per \mathcal{L} è dato da

- un dominio (=insieme NON VUOTO) \mathbf{D}
- un'interpretazione delle **costanti** come **elementi** di \mathbf{D} e di **predicati atomici** diversi dall'uguaglianza come **funzioni** come segue

costante \mathbf{c}_j	\rightsquigarrow	elemento di dominio $\mathbf{c}_j^{\mathcal{D}} \in \mathbf{D}$
predicato atomico $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$	\rightsquigarrow	funzione $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D}^n \longrightarrow \{0, 1\}$ se $n \geq 1$ è il suo numero di variabili libere
variabile proposizionale \mathbf{B}	\rightsquigarrow	$\mathbf{B}^{\mathcal{D}} \in \{0, 1\}$
ovvero predicato atomico senza variabili libere		

Vedremo poi che l'interpretazione del predicato di uguaglianza in un modello è la stessa in tutti i modelli e corrisponde all'uguaglianza di elementi nel modello come segue:

$$(x = y)^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D}^2 \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x = y^{\mathcal{D}}(d_1, d_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } d_1 = d_2 \\ 0 & \text{se } d_1 \neq d_2 \end{cases}$$

e poi usando l'interpretazione della sostituzione in definizione 10.5.3 definiamo:

$$(t_1 = t_2)^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D}^2 \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$t_1 = t_2^{\mathcal{D}}(d_1, d_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } t_1^{\mathcal{D}}(d_1, d_2) = t_2^{\mathcal{D}}(d_1, d_2) \\ 0 & \text{se } t_1^{\mathcal{D}}(d_1, d_2) \neq t_2^{\mathcal{D}}(d_1, d_2) \end{cases}$$

Esempi:

Se consideriamo il linguaggio predicativo arricchito della sola costante \mathbf{c} allora nel modello

$\mathbf{D} \equiv$ numeri naturali
 $\mathbf{c}^{\mathcal{D}} \equiv 5$

si ha che

$$(\mathbf{x} = \mathbf{c})^{\mathcal{D}} : \mathbf{D} \longrightarrow \{0, 1\}$$

ove per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$$(\mathbf{x} = \mathbf{c})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \equiv 1 \text{ sse } \mathbf{d} = \mathbf{c}^{\mathcal{D}} \text{ ovvero sse } \mathbf{d} = 5$$

Per il linguaggio predicativo con predicati atomici $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ e costante \bar{s} usato all'inizio di sezione 10.2 possiamo definire tale modello $\mathcal{D} \equiv (D, M(x)^{\mathcal{D}}, U(x)^{\mathcal{D}}, \bar{s}^{\mathcal{D}})$

$D =$ Esseri viventi (esistiti ed esistenti)

$M(x)^{\mathcal{D}}(d) = 1$ sse “d è mortale” ovvero PER OGNI $d \in D$

$U(x)^{\mathcal{D}}(d) = 1$ sse “d è un uomo”

$\bar{s}^{\mathcal{D}} =$ l'attuale presidente della Repubblica Italiana.

Altro modello potrebbe essere

$D = \{\text{Pippo}, \text{Topolino}, \text{Minni}\}$

$M(x)^{\mathcal{D}}(d) = 1$ sse d è maschio

$U(x)^{\mathcal{D}}(d) = 1$ sse d è femmina

$\bar{s}^{\mathcal{D}} = \text{Minni}$.

Invece

$\mathbf{D} \equiv$ I sogni del mio vicino di banco.

$A(x)^{\mathcal{D}}(d) = 1$ sse il sogno d fa paura

$A(x)^{\mathcal{D}}(d) = 0$ sse il sogno d NON fa paura

$\mathbf{c}^{\mathcal{D}} =$ il sogno più brutto

NON è un MODELLO BEN DEFINITO perchè non so se il mio vicino di banco sogna e poi neppure quando un sogno fa paura o meno... ovvero NON so stabilire se per ogni d nel modello vale $A(x)^{\mathcal{D}}(d) = 1$ o meno.

Def. 10.5 [INTERPRETAZIONE FORMULE in un modello] Dato linguaggio predicativo \mathcal{L} con costanti \mathbf{c}_j e **predicati atomici** $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ dipendenti da \mathbf{n} variabili libere e variabili proposizionali \mathbf{B} , e fissato un modello per \mathcal{L} con un dominio \mathbf{D} e interpretazione per costanti $\mathbf{c}_j^{\mathcal{D}} \in \mathbf{D}$ e interpretazione per **predicati atomici** dipendenti da \mathbf{n} variabili

$$\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D}^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

e variabili proposizionali $\mathbf{B}^{\mathcal{D}} \in \{0, 1\}$,

il predicato atomico di uguaglianza $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ è interpretato in tal modo

$$(x = y)^{\mathcal{D}}(-) : D^2 \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x = y^{\mathcal{D}}(d_1, d_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } d_1 = d_2 \\ 0 & \text{se } d_1 \neq d_2 \end{cases}$$

e più in generale l'uguaglianza $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ tra termini generici \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 le cui variabili libere sono (propriamente!) incluse nella lista $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ è interpretato in tal modo

$$(t_1 = t_2)_{[x_1, \dots, x_n]}^D(-) : D^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$(t_1 = t_2)_{[x_1, \dots, x_n]}^D(d_1, \dots, d_n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } t_1^D = t_2^D \\ 0 & \text{se } t_1^D \neq t_2^D \end{cases}$$

e l'interpretazione di un **predicato composto** $\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ in \mathcal{L} è una FUNZIONE del tipo

$$\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^D(-, \dots, -) : \mathbf{D}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

definita per induzione come segue: fissati $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n)$ in \mathbf{D}^n

$$\begin{aligned} (\neg \text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n))^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) &= 1 \\ \text{sse} \\ \text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \& \text{pr}_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n))^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) &= 1 \\ \text{sse} \\ \text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \quad \mathbf{E} \quad \text{pr}_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \vee \text{pr}_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n))^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) &= 1 \\ \text{sse} \\ \text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \quad \mathbf{O} \quad \text{pr}_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \rightarrow \text{pr}_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n))^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) &= 1 \\ \text{sse} \\ \text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 0 \\ \text{oppure vale che} \\ \mathbf{SE} \text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \quad \mathbf{ALLORA} \quad \text{pr}_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\forall \mathbf{x}_n \text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n))^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}) &= 1 \\ \text{sse} \\ \mathbf{PER OGNI} \quad \mathbf{d} \quad \text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\exists \mathbf{x}_n \text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n))^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}) &= 1 \\ \text{sse} \\ \mathbf{ESISTE} \quad \mathbf{d} \quad \text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}) &= 1 \end{aligned}$$

Si noti che l'interpretazione di un predicato atomico \mathbf{B} senza variabili libere, ovvero di una variabile proposizionale, risulta

$$\mathbf{B}^D = 0 \text{ oppure } \mathbf{B}^D = 1$$

Allo stesso modo l'interpretazione di una proposizione \mathbf{pr} , ovvero di un predicato i cui predicati atomici sono variabili proposizionali, ovvero predicati senza variabili libere, risulta

$$\mathbf{pr}^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \text{ oppure } \mathbf{pr}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Quindi *ciascun modello per la proposizione \mathbf{pr} nel linguaggio predicativo esteso con le sue variabili proposizionali è in corrispondenza con una riga della tabella di verità della proposizione \mathbf{pr}* , e viceversa, *ciascuna riga della tabella di verità di \mathbf{pr} determina un modello predicativo del linguaggio predicativo esteso con le variabili proposizionali di \mathbf{pr}* .

10.5.1 Casi speciali di interpretazione di quantificatori

Le quantificazioni su un predicato $\mathbf{pr}(\mathbf{x})$ ad una variabile risultano interpretate in tale modo

$$\begin{array}{c} (\forall \mathbf{x} \mathbf{pr}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \\ \text{sse} \\ \text{PER OGNI } \mathbf{d} \quad \mathbf{pr}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\exists \mathbf{x} \mathbf{pr}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \\ \text{sse} \\ \text{ESISTE } \mathbf{d} \quad \mathbf{pr}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \end{array}$$

10.5.2 Interpretazione SOSTITUZIONE con costante

L'interpretazione del predicato

$$\mathbf{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{c}, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$$

ottenuto sostituendo in $\mathbf{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$ la variabile \mathbf{x}_j con la costante \mathbf{c} si interpreta così:

$$\mathbf{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{c}, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D}^{n-1} \rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

ove

$$\begin{array}{c} \mathbf{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{c}, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{d}_{j+1}, \dots, \mathbf{d}_n) \\ \equiv \\ \mathbf{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{c}^{\mathcal{D}}, \mathbf{d}_{j+1}, \dots, \mathbf{d}_n) \end{array}$$

In particolare dato un predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e una costante \mathbf{c} e un modello con dominio \mathbf{D} con interpretazione della costante $\mathbf{c}^{\mathcal{D}} \in \mathbf{D}$ e interpretazione del predicato

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D} \rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

allora

$$\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}})$$

Esempio:

Nel modello $D = \{\text{Pippo}, \text{Topolino}, \text{Minni}\}$

$M(x)^D(d)=1$ sse d è maschio

$U(x)^D(d)=1$ sse d è femmina

$\bar{s}^D = \text{Minni}$

risulta che

$$U(\bar{s})^D = U(x)^D(\bar{s}^D) = U(x)^D(\text{Minni}) = 1$$

mentre

$$M(\bar{s})^D = M(x)^D(\bar{s}^D) = M(x)^D(\text{Minni}) = 0$$

10.5.3 Interpretazione SOSTITUZIONE con termine generico

L'interpretazione del predicato

$$\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{t}, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$$

ottenuto sostituendo in $\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$ il termine \mathbf{t} (le cui variabili libere sono comprese tra $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n$) si interpreta così:

$$\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{t}, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)^D(-) : \mathbf{D}^{n-1} \rightarrow \{0, 1\}$$

ove

$$\begin{aligned} & \text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{t}, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{d}_{j+1}, \dots, \mathbf{d}_n) \\ & \quad \equiv \\ & \text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{t}^D, \mathbf{d}_{j+1}, \dots, \mathbf{d}_n) \end{aligned}$$

10.5.4 Notazione per indicare un modello

Per indicare un modello con dominio \mathbf{D} scriviamo

$$\mathcal{D} \equiv (\mathbf{D}, \mathbf{c}_j^D, \mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^D)$$

Talvolta indicheremo un modello semplicemente con

$$\mathcal{D}$$

quando dal contesto sarà chiaro quali sono le interpretazioni delle costanti e predicati atomici.

10.5.5 Notazione su interpretazione di uguaglianza, connettivi e quantificatori

Per semplificare il calcolo dell'interpretazione di un predicato in un modello \mathcal{D} con dominio \mathbf{D} , supposto che con $\bar{\mathbf{d}}$ intendiamo una lista $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n)$ di elementi del dominio, poi che supposto che pr sia un predicato dipendente al più da \mathbf{n} variabili libere $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ e infine che $\text{pr}(\mathbf{x})$ sia un predicato dipendente al più da \mathbf{n} variabili libere $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ e anche da \mathbf{x}

$$(\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2_{[x_1, \dots, x_n]})^D(\bar{\mathbf{d}}) \equiv \mathbf{t}_1^D =_D \mathbf{t}_2^D$$

$$\text{ove } \mathbf{t}_1^D =_D \mathbf{t}_2^D \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{t}_1^D = \mathbf{t}_2^D \\ 0 & \text{se } \mathbf{t}_1^D \neq \mathbf{t}_2^D \end{cases}$$

$$(\neg \text{pr})^D(\bar{\mathbf{d}}) = \neg(\text{pr}^D(\bar{\mathbf{d}}))$$

$$\text{ove } \neg(\text{pr}^D(\bar{\mathbf{d}})) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \text{pr}^D(\bar{\mathbf{d}}) = 0 \\ 0 & \text{altrimenti ovvero se } \text{pr}^D(\bar{\mathbf{d}}) = 1 \end{cases}$$

$$(\text{pr}_1 \& \text{pr}_2)^D(\bar{\mathbf{d}}) = \text{pr}_1^D(\bar{\mathbf{d}}) \& \text{pr}_2^D(\bar{\mathbf{d}})$$

$$\text{ove } \text{pr}_1^D(\bar{\mathbf{d}}) \& \text{pr}_2^D(\bar{\mathbf{d}}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \text{pr}_1^D(\bar{\mathbf{d}}) = 1 \quad \text{E} \quad \text{pr}_2^D(\bar{\mathbf{d}}) = 1 \\ 0 & \text{altrimenti ovvero se } \text{pr}_1^D(\bar{\mathbf{d}}) = 0 \quad \text{oppure} \quad \text{pr}_2^D(\bar{\mathbf{d}}) = 0 \end{cases}$$

$$(\text{pr}_1 \vee \text{pr}_2)^D(\bar{\mathbf{d}}) = \text{pr}_1^D(\bar{\mathbf{d}}) \vee \text{pr}_2^D(\bar{\mathbf{d}})$$

$$\text{ove } \text{pr}_1^D(\bar{\mathbf{d}}) \vee \text{pr}_2^D(\bar{\mathbf{d}}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \text{pr}_1^D(\bar{\mathbf{d}}) = 1 \quad \text{oppure} \quad \text{pr}_2^D(\bar{\mathbf{d}}) = 1 \\ 0 & \text{altrimenti ovvero se } \text{pr}_1^D(\bar{\mathbf{d}}) = 0 \quad \text{E} \quad \text{pr}_2^D(\bar{\mathbf{d}}) = 0 \end{cases}$$

$$(\text{pr}_1 \rightarrow \text{pr}_2)^D(\bar{\mathbf{d}}) = \text{pr}_1^D(\bar{\mathbf{d}}) \rightarrow \text{pr}_2^D(\bar{\mathbf{d}})$$

$$\text{ove } \text{pr}_1^D(\bar{\mathbf{d}}) \rightarrow \text{pr}_2^D(\bar{\mathbf{d}}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \text{pr}_1^D(\bar{\mathbf{d}}) = 0 \quad \text{oppure} \quad \text{pr}_2^D(\bar{\mathbf{d}}) = 1 \\ 0 & \text{altrimenti ovvero se } \text{pr}_1^D(\bar{\mathbf{d}}) = 1 \quad \text{E} \quad \text{pr}_2^D(\bar{\mathbf{d}}) = 0 \end{cases}$$

$$(\forall \mathbf{x} \text{pr}(\mathbf{x}))^D(\bar{\mathbf{d}}) = \forall \mathbf{d}' \in \mathbf{D} \text{pr}(\mathbf{x})^D(\bar{\mathbf{d}}, \mathbf{d}')$$

$$\text{ove } \forall \mathbf{d}' \in \mathbf{D} \text{pr}(\mathbf{x})^D(\bar{\mathbf{d}}, \mathbf{d}') \equiv \begin{cases} 1 & \text{se per ogni } \mathbf{d}' \quad \text{pr}(\mathbf{x})^D(\bar{\mathbf{d}}, \mathbf{d}') = 1 \\ 0 & \text{se esiste un } \mathbf{d}' \text{ (falsario!) tale che } \text{pr}(\mathbf{x})^D(\bar{\mathbf{d}}, \mathbf{d}') = 0 \end{cases}$$

$$(\exists \mathbf{x} \text{pr}(\mathbf{x}))^D(\bar{\mathbf{d}}) = \exists \mathbf{d}' \in \mathbf{D} \text{pr}(\mathbf{x})^D(\bar{\mathbf{d}}, \mathbf{d}')$$

$$\text{ove } \exists \mathbf{d}' \in \mathbf{D} \text{pr}(\mathbf{x})^D(\bar{\mathbf{d}}, \mathbf{d}') \equiv \begin{cases} 1 & \text{se esiste un } \mathbf{d}' \text{ tale che } \text{pr}(\mathbf{x})^D(\bar{\mathbf{d}}, \mathbf{d}') = 1 \\ 0 & \text{se ogni } \mathbf{d}' \text{ è (un falsario!) tale che } \text{pr}(\mathbf{x})^D(\bar{\mathbf{d}}, \mathbf{d}') = 0 \end{cases}$$

10.5.6 Validità e soddisfacibilità di una formula predicativa

Ora diamo la nozione di **validità** di un predicato, o formula, in **logica classica**:

Def. 10.6 Una formula **fr** in un linguaggio \mathcal{L} è **VALIDA** o **TAUTOLOGIA** rispetto alla semantica classica se è **VERA** in **OGNI** modello per \mathcal{L} .

Def. 10.7 Una formula **fr** in un linguaggio \mathcal{L} è **SODDISFACIBILE** rispetto alla semantica classica se è **VERA** in **ALMENO UN** modello per \mathcal{L} .

Def. 10.8 un formula **fr** in un linguaggio \mathcal{L} è **NON VALIDA** rispetto alla semantica classica se è **FALSA** in **ALMENO UN** modello per \mathcal{L} , che è chiamato **CONTROMODELLO** di **fr**.

Def. 10.9 Una formula **fr** in un linguaggio \mathcal{L} è **INSODDISFACIBILE** o **PARADOSSO** rispetto alla semantica classica se è **FALSA** in **OGNI** modello per \mathcal{L} , ovvero la sua negazione $\neg \text{fr}$ è **VALIDA** o **TAUTOLOGIA** rispetto alla semantica classica.

Abbiamo quindi questo parallelismo tra concetti per il linguaggio proposizionale e predicativo:

	Linguaggio proposizionale	Linguaggio predicativo
sintassi	proposizione	predicati
Variabili	A, B, C, ...	K, A(x), B(y), C(x,y), ...
verità globale	tabella di verità	I modelli
verità locale	riga di tabella	UN modello
validità	proposizione valida tautologia =sua tabella con TUTTI 1	predicato valido tautologia = vero in TUTTI i modelli
NON validità	proposizione NON valida = sua tabella con UNA riga 0	predicato NON valido = falso in UN modello detto CONTROMODELLO
soddisfacibilità	proposizione soddisfacibile = sua tabella con UNA riga 1	predicato soddisfacibile =vero in UN modello
INSoddisfacibilità	proposizione INSoddisfacibile paradosso =sua tabella con TUTTI 0	predicato INSoddisfacibile paradosso =falso in TUTTI i modelli

Concludiamo aggiungendo pure che

un **predicato**, chiamato anche **formula**, **fr** è **OPINIONE** nella semantica classica se **fr** è **NON VALIDO** e **SODDISFACIBILE** ovvero **fr** è **falso** in **UN** modello ed è **vero** in un **ALTRO** modello.

10.5.7 Idea intuitiva di validità di un predicato e tabelle di verità

Le tabelle di verità non sono più sufficienti per catturare la nozione di validità di un predicato in quanto occorre verificare controllare la sua validità in **OGNI** MODELLO. Ora osserviamo che se fissiamo un dominio **D** e ci restringiamo a considerare la validità di una formula come $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ in *modelli con lo stesso dominio D* rispetto ad un linguaggio predicativo con un solo predicato atomico **A(x)**, per provare se è valido $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ in tali modelli con lo stesso dominio **D** possiamo costruire una tabella per $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ con tante colonne quanti sono gli elementi in **D**, ove ogni funzione $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(-)$ che interpreta il predicato **A(x)** (e determina uno specifico modello con **D** dominio) è rappresentata da una riga della tabella le

cui colonne sono in corrispondenza con gli elementi di \mathbf{D} :

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1)$	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2)$...	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_n)$...	$\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$
1	1	1111111111	1	11111111	1
0	1	0
1	1	0	0
1	0	0
...	0
0	0	0000000000	0	00000000	0

Ora $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vero relativamente a \mathbf{D} e $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ solo se

$$\text{per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D} \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

(questo caso è rappresentato dalla prima riga nella tabella sopra- si osservi che la riga può avere infinite entrate se infiniti sono gli elementi in \mathbf{D}!!!)

Analogamente, per rappresentare la validità di un predicato in modelli con un fissato dominio \mathbf{D} , possiamo costruire una tabella per $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ con tante colonne quanti gli elementi in \mathbf{D} , ove ogni funzione $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(-)$ che interpreta il predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (e determina uno specifico modello con \mathbf{D} dominio) è rappresentata da una sua riga (che quindi fa riferimento ad un modello su \mathbf{D}):

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1)$	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2)$...	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_n)$...	$\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$
0	0	0000000000	0	0000000000	0
0	1	1
1	1	0	1
1	0	1
...	1
1	1	1111111111	1	1111111111	1

Ora $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vero relativamente a \mathbf{D} e $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ solo se **esiste un $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ tale che $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$** (questo caso è rappresentato da tutte le righe fuorchè la prima!!!)

In pratica un modello per una formula corrisponde ad una riga della tabella di verità per una proposizione.

10.5.8 Esempi di validità e soddisfacibilità di formule

Nel modello

\mathbf{D} = Esseri viventi (esistiti ed esistenti)

$\mathbf{M}(\mathbf{x})$ = “x è mortale”

$\mathbf{U}(\mathbf{x})$ = “x è un uomo”

$\bar{\mathbf{s}}$ = “Socrate”.

si ha $\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ perchè tutti gli uomini sono appunto mortali.

Mentre nel modello

\mathbf{D} = {Pippo, Topolino, Minni}

$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse \mathbf{d} è maschio

$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse \mathbf{d} è femmina

$\bar{\mathbf{s}}^{\mathcal{D}} = \text{Minni}$.

si ha $\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$

perchè esiste un individuo del dominio per cui $(\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$, ovvero $d = \text{Minni}$, dato che

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = \mathbf{1}.$$

Dire se le seguenti formule sono valide, soddisfacibili o insoddisfacibili:

1. $\mathbf{A}(\mathbf{c})$

Questa formula è *NON valida*.

Un modello che falsifica $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ è il seguente

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \{\text{Minni}\} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{0} \text{ sempre} \\ \mathbf{c}^{\mathcal{D}} &= \text{Minni}. \end{aligned}$$

Infatti in questo modello \mathcal{D} si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = \mathbf{0}$$

Un altro modello che falsifica $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ è il seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\equiv \mathbf{Nat} \\ \mathbf{c}^{\mathcal{D}} &\equiv \mathbf{5} \in \mathbf{Nat} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d}) &\equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{d} \leq \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Infatti $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{5}) = \mathbf{0}$ perchè NON è vero che $\mathbf{5} \leq \mathbf{2}$. In pratica $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ in questo modello formalizza $\mathbf{5} \leq \mathbf{2}$.

Però $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ è anche *soddisfacibile* perchè vera nel modello

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \{\text{Minni}\} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{1} \text{ sempre} \\ \mathbf{c}^{\mathcal{D}} &= \text{Minni}. \end{aligned}$$

Infatti per questo modello \mathcal{D} si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = \mathbf{1}$$

Oppure $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ è vera anche nel modello $\mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat}$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{\mathcal{D}} &\equiv \mathbf{1} \in \mathbf{Nat} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d}) &\equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{d} \leq \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Infatti $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ perchè è vero che $\mathbf{1} \leq \mathbf{2}$.

In pratica $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ in questo modello formalizza $\mathbf{1} \leq \mathbf{2}$.

2. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$

Questa formula è *NON valida*. Un modello che falsifica $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è il seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \{\text{Topolino}, \text{Minni}\} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{1} \text{ sse } \mathbf{d} \text{ è maschio} \end{aligned}$$

In tal modello \mathcal{D} si ha che $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 0$. Inoltre

$$(\mathbf{A}(x) \rightarrow \forall x \mathbf{A}(x))^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = 0$$

perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = 1$ mentre $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$.

Un altro modello che falsifica $\mathbf{A}(x) \rightarrow \forall x \mathbf{A}(x)$ è

$\mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{d} \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infatti $(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{1}) = 0$ perchè mentre $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{1}) = 1$ si ha che $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$ e quindi l'implicazione è falsa nel modello perchè la formula $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vera nel modello sse PER OGNI $d \in D$ si ha $(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ mentre $(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{1}) = 0$. In pratica $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ in questo modello formalizza

“se un qualsiasi numero naturale x è ≤ 2 allora tutti i numeri naturali x sono ≤ 2 ” ed è infatti falso.

Però $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è anche *soddisfacibile* perchè vera nel modello

$\mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sempre

$\mathbf{c}^{\mathcal{D}} = \text{Minni}$.

Infatti per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$, ovvero per $\mathbf{d} = \text{Minni}$, si ha

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 1$$

poichè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 1$ e pure $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 1$.

Un altro modello in cui $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vera è il seguente

$\mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{sempre} \\ 0 & \text{mai} \end{cases}$$

In questo modello $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 1$ per definizione e quindi a maggior ragione PER OGNI $d \in D$ si ha $(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$

3. $\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$

Questa formula è *NON valida*. Un modello che falsifica $\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è il seguente:

$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse d è maschio

$\mathbf{c}^{\mathcal{D}} = \text{Topolino}$.

In tal modello \mathcal{D} si ha che $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 0$. Inoltre

$$(\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$$

perchè $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = 1$ mentre $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$.

La formula $\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è anche *soddisfacibile* perchè vera nel modello

$\mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$
 $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sempre
 $\mathbf{c}^{\mathcal{D}} = \text{Minni}$.

Infatti per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$, ovvero per $d = \text{Minni}$, si ha

$$(\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 1$$

poichè $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 1$ vale.

4. $\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$

Questa formula è *valida* poichè vera in ogni modello. Infatti considerato un modello \mathcal{D} qualsiasi, allora o $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = 0$ e quindi l'implicazione è vera senza analizzare il conseguente, oppure $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = 1$. Ora nel caso $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = 1$ si ha che per definizione di interpretazione di sostituzione $\mathbf{1} = \mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}})$ da cui esiste un $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ (che è $\mathbf{c}^{\mathcal{D}}$) tale che $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, ovvero $(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 1$ e dunque l'implicazione $\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vera anche nel caso $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = 1$.

5. $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$

Questa formula è *NON valida*. Un modello che falsifica $\exists x A(x) \rightarrow \forall x A(x)$ è il seguente:

$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$
 $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse d è maschio

In tal modello \mathcal{D} si ha che $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 0$. Inoltre

$$(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

perchè $(\exists x A(x))^{\mathcal{D}} = 1$ perchè esiste un d , che è $d = \text{Topolino}$ tale che $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(d) = 1$ (infatti $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = 1$) mentre $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$.

La formula $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è anche *soddisfacibile* perchè vera nel modello

$\mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$
 $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sempre

Infatti per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$, ovvero per $\mathbf{d} = \text{Minni}$ si ha

$$(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

poichè $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 1$ vale.

6. $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

La formula *NON è valida*. Un modello che falsifica $\forall x \exists y B(x, y)$ è il seguente

$\mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat}$
 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{d}_1 > \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{d}_1 \leq \mathbf{d}_2 \end{cases}$

Nel modello sopra la formula $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ diviene una formalizzazione di “**per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che $x > y$** ” che è falso nel modello per $x = 0$ (lo si dimostri per bene).

La formula $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è *soddisfacibile*. Un modello in cui è vera è il seguente

$\mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{d}_1 < \mathbf{d}_2 \\ 0 & \text{se } \mathbf{d}_1 \geq \mathbf{d}_2 \end{cases}$$

per $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \mathbf{D}$.

Nel modello sopra la formula $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ diviene una formalizzazione di “**per ogni numero naturale \mathbf{x} esiste un numero naturale \mathbf{y} tale che $\mathbf{x} < \mathbf{y}$** ” ed è infatti vera.

7. $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})$

Questa formula è *NON valida*. Un modello che falsifica $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è il seguente:

$\mathbf{D} = \{\mathbf{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 0$ sempre

$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = 1$ sempre

per $\mathbf{d}, \mathbf{d}' \in \mathbf{D}$, ove i valori $(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$ vanno assegnati alle variabili secondo l'ordine alfabetico, ovvero \mathbf{d} va messo al posto di \mathbf{x} , mentre \mathbf{d}' al posto di \mathbf{y} .

Infatti $(\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = 0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 0$ sempre mentre $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = 1$ sempre.

La formula $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è *soddisfacibile*. Un modello in cui è vera è il seguente

$\mathbf{D} = \{\mathbf{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sempre

$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}$ definito a piacere

Infatti in tal modello per ogni $\mathbf{d}, \mathbf{d}' \in \mathbf{D}$, che poi è solo $\mathbf{d} = \mathbf{d}' = \mathbf{Minni}$, si ha $(\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = 1$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sempre e quindi non importa sapere quale è il valore di $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$.

10.6 Validità di un sequente in logica predicativa classica

Di seguito riportiamo la nozione di validità e soddisfacibilità per un sequente rispetto alla semantica classica. Come in logica proposizionale un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ viene definito valido o meno, e soddisfacibile o meno se lo è la proposizione che lo rappresenta

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$$

Comunque riportiamo le definizioni precise:

Def. un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **vero in modello \mathcal{D}** se $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **vero nel modello \mathcal{D}** .

Def. un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **VALIDO** ovvero è **TAUTOLOGIA** nella semantica classica, se $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **VALIDO** ovvero **TAUTOLOGIA** nella semantica classica, ovvero $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **vero in OGNI modello**

Def. un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **SODDISFACIBILE** nella semantica classica se $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **SODDISFACIBILE** nella semantica classica, ovvero **ESISTE un MODELLO** in cui $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **vero**.

Def. un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **NON VALIDO** nella semantica classica se $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **NON VALIDO** rispetto alla semantica classica, ovvero **ESISTE un MODELLO** in cui $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **falso** che è chiamato **CONTROMODELLO**.

Def. un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **INSODDISFACIBILE**, ovvero **PARADOSSALE** nella semantica classica se $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **INSODDISFACIBILE**, ovvero **PARADOSSO** rispetto alla semantica classica, ovvero $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **falso** in **TUTTI i modelli**.

Concludiamo aggiungendo pure che

Def. un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **OPINIONE** nella semantica classica se $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **OPINIONE** rispetto alla semantica classica, ovvero $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **NON VALIDO** e **SODDISFACIBILE** ovvero $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **falso** in **UN modello** ed è **vero** in **un ALTRO modello**.

10.7 Come decidere la validità di un sequente in logica classica predicativa

Al contrario della logica classica proposizionale, per la **logica classica predicativa** **NON esiste una procedura AUTOMATICA** per decidere la validità di arbitrarie formule o sequenti.

Esiste però una **procedura SEMI-automatica** che si avvale del calcolo dei sequenti LC e richiede la costruzione di contro-modelli nel caso di non validità.

10.7.1 Procedura per stabilire validità, insoddisfacibilità, soddisfacibilità di sequenti in LC

Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$

passo 1: si prova a derivarlo in **LC**=

$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow \text{è valido ovvero è tautologia} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{vai al passo 2} \end{cases}$

passo 2: costruisci contromodello con foglia di albero che NON si chiude

se esiste contromodello \Rightarrow il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **NON valido**

e vai al passo 3

passo 3: prova a derivare la negazione di $\Gamma \vdash \Delta$ in **LC**=

che è $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ se non ci sono variabili libere

oppure è $\vdash \neg \forall \bar{y} (\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ se \bar{y} è la lista che contiene tutte le variabili libere del sequente $\Gamma \vdash \Delta$

{	se si deriva	$\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ è insoddisfacibile ovvero è paradossale
	se NON si riesce a derivare	applica il passo 2 alla negazione di $\Gamma \vdash \Delta$
		se trovi contromodello di $\neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ (oppure di $\vdash \neg \forall \bar{y}(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$)
		questo è modello di $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$
		che è quindi anche modello di $\Gamma \vdash \Delta$
		$\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ è soddisfacibile
		e siccome è pure non valido allora $\Gamma \vdash \Delta$ risulta OPINIONE

Consigli su come derivare

Nell'intento di cercare una derivazione è meglio:

applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e \forall -D e \exists -S con VARIABILI NUOVE
applicare le regole \forall -S e \exists -D con TERMINI presenti nelle formule del sequente
se non si riesce a derivare il sequente a causa di una foglia non assioma che non si riesce a chiudere (ovvero non si riesce a farla diventare nodo di un ramo con assiomi come foglie), conviene costruire il contromodello falsificando il sequente che si trova lungo il ramo che finisce nella foglia non assioma PRIMA di una seconda applicazione di \forall -S o \exists -D

Esempio Cerchiamo una derivazione di

$$\forall z (\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z)) \vdash \forall z \mathbf{A}(z)$$

Applicando prima \forall -D di \forall -S troviamo ad esempio questa derivazione

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{ax-id}}{\forall z (\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z)), \mathbf{A}(z), \mathbf{B}(z) \vdash \mathbf{A}(z)}{\forall z (\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z)), \mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z) \vdash \mathbf{A}(z)} \&-S}{\forall z (\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z)) \vdash \mathbf{A}(z)} \forall-S}{\forall z (\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z)) \vdash \forall z \mathbf{A}(z)} \forall-D$$

ove il primo \forall -D è corretto perchè \mathbf{z} non compare libera nel sequente radice.

Se invece avessimo applicato prima \forall -S avremmo ottenuto una derivazione del genere ad esempio

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{ax-id}}{\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z), \forall z (\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z)), \mathbf{A}(w), \mathbf{B}(w) \vdash \mathbf{A}(w)}{\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z), \forall z (\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z)), \mathbf{A}(w) \& \mathbf{B}(w) \vdash \mathbf{A}(w)} \&-S}{\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z), \forall z (\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z)) \vdash \mathbf{A}(w)} \forall-S}{\frac{\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z), \forall z (\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z)) \vdash \mathbf{A}(w)}{\forall z (\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z)), \mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z) \vdash \mathbf{A}(w)} \text{sc}_{sx}}{\frac{\forall z (\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z)), \mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z) \vdash \forall z \mathbf{A}(z)}{\forall z (\mathbf{A}(z) \& \mathbf{B}(z)) \vdash \forall z \mathbf{A}(z)} \forall-D} \forall-S$$

ove l'applicazione di \forall -D è corretta perchè \mathbf{w} non compare libera nel sequente sopra il sequente radice.

In questa derivazione si vede che la prima applicazione di \forall -S è stata inutile perchè è il \forall -D che sceglie la variabile libera con cui finire la derivazione, per via del fatto che lo si applica solo se la variabile liberata dal quantificatore non compare libera nel sequente conclusione della regola.

Come falsificare una formula con variabili libere?

Si ricordi che

una **formula**

$\text{fr}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ è **VERA** in un modello \mathcal{D}

se e solo se

PER OGNI $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$ $\text{fr}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1$

se e solo se

$(\forall \mathbf{y}_1 \forall \mathbf{y}_2 \dots \forall \mathbf{y}_n \text{fr}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n))^{\mathcal{D}} = 1$

da cui segue che

una **formula**

$\text{fr}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ è **FALSA** in un modello \mathcal{D}

se e solo se

ESISTONO $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$ detti “**FALSARI**” tale che
 $\text{fr}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 0$

Esempio La formula $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è **NON valida** perchè falsa in tal modello:

$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse \mathbf{d} è maschio

In tal modello \mathcal{D} si ha che $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 0$, ovvero Minni è un falsario della proposizione $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

Inoltre

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = 0$$

perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = 1$ mentre $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$, ovvero Topolino è un falsario della proposizione $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

Si noti però che

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 1$$

perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 0$.

Si osservi in aggiunta che per mostrare che $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è **SODDISFACIBILE** occorre necessariamente cambiare modello perchè occorre costruire un modello \mathcal{D} in cui vale

$$\text{PER OGNI } (\mathbf{d} \in \mathbf{D} \quad (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$$

per esempio ponendo

$D = \{\text{Minni}\}$
 $A(x)^D(\text{Minni}) = 1.$

Memo

per **falsificare** una formula con una variabile libera $pr(x)$
BASTA TROVARE un elemento d che è un falsario della formula $pr(x)$
 ovvero un elemento su cui **la funzione interpretante la formula $pr(x)$ risulti falsa su d**
 e **NON** c'è bisogno di trovarla **falsa su TUTTI i valori del dominio del modello D ,**
 ovvero **NON c'è bisogno che TUTTI gli elementi d del dominio D**
 risultino **falsari** della funzione che interpreta $pr(x)$!!!.

10.7.2 Precisazione sull'interpretazione di predicati

Abbiamo definito in definizione 10.5 l'interpretazione di un predicato $A(x)$ in un modello D come una funzione

$$A(x)^D(-) : D \longrightarrow \{0, 1\}$$

visto che c'è *SOLO* x come variabile libera in $A(x)$.

Ora precisiamo che l'interpretazione di un predicato **NON dipende dal NOME delle variabili** ma **dipende solo dal numero e ordine delle variabili che compaiono nel predicato** ovvero per esempio il predicato $A(z)^D(-) : D \longrightarrow \{0, 1\}$ si interpreta nello stesso modo sia che dipenda da z come unica variabile che da x , ovvero

$$A(z)^D(d) = A(x)^D(d) \quad \text{per } d \in D$$

in quanto l'interpretazione di un predicato *NON dipende dal nome della variabile libera ma solo dal fatto che ce ne è una!*.

Però se dobbiamo interpretare $A(z) \& A(x)$ dobbiamo pensare sia $A(z)$ che $A(x)$ come funzione binarie nel contesto delle variabili

$$[x, z]$$

in quanto la formula $A(z) \& A(x)$ si interpreta come una funzione binaria

$$(A(z) \& A(x))^D(-) : D \times D \longrightarrow \{0, 1\}$$

ovvero dobbiamo specificare quale sia l'interpretazione sia di $A(z)$ che $A(x)$ sotto contesto $[x, z]$, ovvero dobbiamo specificare

$$(A(z)_{[x, z]})^D(-) : D \times D \longrightarrow \{0, 1\} \quad (A(x)_{[x, z]})^D(-) : D \times D \longrightarrow \{0, 1\}$$

a partire dall'interpretazione con un'unica variabile libera

$$A(z)_{[z]}^D(d) = A(x)_{[x]}^D(d) \quad \text{per } d \in D$$

A tal scopo ASSUMIAMO che il contesto delle variabili sia sempre interpretato *secondo l'ordine alfabetico*, ovvero dato $(d_1, d_2) \in D \times D$ l'elemento da sostituire alla variabile x varia sul PRIMO dominio, ovvero su d_1 , mentre quello per la variabile z (che nell'alfabeto viene dopo ad x) varia sul SECONDO

dominio ovvero su \mathbf{d}_2 . Poi se c'è pure la variabile \mathbf{w} questa varierebbe sul PRIMO dominio perchè nell'ordine alfabetico \mathbf{w} è prima di \mathbf{x} .

Per esempio

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{y}))^{\mathbf{D}}(-, -) : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{0, 1\}$$

risulta definito in tal modo

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{y})_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \\ & \equiv (\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{y})_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \\ & = (\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1) \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{y})_{[\mathbf{y}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_2) \\ & = (\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1) \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_2) \end{aligned}$$

Mentre ad esempio

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A}(\mathbf{z}) \& \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \\ & \equiv (\mathbf{A}(\mathbf{z})_{[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \& (\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \\ & = (\mathbf{A}(\mathbf{z})_{[\mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_3) \& (\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_2) \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1) \end{aligned}$$

Inoltre nel seguente modello

$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$
 $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse \mathbf{d} è maschio

$$(\mathbf{A}(\mathbf{z}) \& \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(\text{Minni}, \text{Topolino}, \text{Topolino}) = 0$$

perchè

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A}(\mathbf{z}) \& \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(\text{Minni}, \text{Topolino}, \text{Topolino}) \\ & = (\mathbf{A}(\mathbf{z})_{[\mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(\text{Topolino}) \& (\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\text{Topolino}) \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}]})^{\mathbf{D}}(\text{Minni}) \\ & = 1 \rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

Quindi $\mathbf{A}(\mathbf{z}) \& \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})$ NON è vero nel modello.

Invece nel modello $\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sempre

chiaramente $\mathbf{A}(\mathbf{z}) \& \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})$ è vera perchè per ogni $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \in \mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \mathbf{D}$ si ha

$$(\mathbf{A}(\mathbf{z}) \& \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = 1$$

Esercizio: Si stabilisca la validità e soddisfacibilità o meno del seguente

$$\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

Proviamo ad applicare la procedura 10.7.1 e quindi procediamo a derivare

$$\frac{\frac{\mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})} \forall - \mathbf{D}}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \forall - \mathbf{D}$$

ove la prima applicazione di $\forall - D$ è corretta poichè \mathbf{z} non appare libera in $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$ e cosè pure l'ultima applicazione di $\forall - D$ è pure corretta perchè \mathbf{w} non appare libera (perchè NON compare proprio) in $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})$.

L'ultima foglia suggerisce di costruire un contromodello falsificando il sequente

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

ovvero la formula $\mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{z})$. A tal scopo basta trovare un modello \mathbf{D} tale che

$$(\mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{z}))^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{0, 1\}$$

(ove \mathbf{w} varia sulla prima componente \mathbf{D} del prodotto $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$ e \mathbf{z} sulla seconda componente secondo l'ordine alfabetico delle lettere rappresentanti le variabili visto che \mathbf{w} viene prima di \mathbf{z}) NON sia la funzione costante $\mathbf{1}$, ovvero esista una coppia $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ in $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$ tale che

$$(\mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{z}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{0}$$

Quindi basta che risulti $\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1) = \mathbf{1}$ e $\mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{0}$. A tal scopo basta definire: $\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{Minni}, \mathbf{Pippo}\}$ e poi

$$\mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Minni}) = \mathbf{1} \quad \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Pippo}) = \mathbf{0}$$

(si noti che vale pure $\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Minni}) = \mathbf{1} \quad \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Pippo}) = \mathbf{0}$).

Infatti $\mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Minni}, \mathbf{Pippo}) = \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Pippo}) = \mathbf{0}$ mentre $\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Minni}, \mathbf{Pippo}) = \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Minni}) = \mathbf{1}$.

Dunque il sequente $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$ NON è valido.

Ora per provare se è **soddisfacibile** proviamo a derivare la negazione del sequente di partenza

$$\vdash \neg(\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}))$$

e nel tentativo di derivarlo otteniamo

$$\frac{\frac{\vdash \exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash} \rightarrow -S}{\vdash \neg(\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}))} \neg -D$$

Ora consideriamo la foglia a sx. Si vede che se si prova a continuare a derivare con $\exists - D$ non si arriva che a ripetere l'esistenziale assieme a delle formule del tipo $\mathbf{A}(\mathbf{t})$. **Conviene fermarsi prima di un'applicazione di $\exists - D$ (o al più dopo una sola applicazione)** e procedere a trovare un contromodello **falsificando**

$$\vdash \exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

(si ricordi che il contesto vuoto a sx si interpreta sempre come vero..) ovvero basta costruire un modello \mathcal{D} in cui vale $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$.

Per esempio possiamo definire \mathcal{D} ponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\equiv \mathbf{Nat} \\ \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{0} \text{ per ogni naturale } \mathbf{d} \end{aligned}$$

Infatti in questo modello chiaramente $(\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ e dunque tal modello rende falso

$$\vdash \neg(\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}))$$

e dunque rende vero il sequente di partenza $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$, da cui segue che il sequente $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$ risulta **soddisfacibile**.

Alternativamente invece di analizzare la foglia a sx potevamo proseguire la derivazione con la foglia a dx

$$\forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash$$

Anche qui si può notare che se si prova a continuare a derivare con $\forall - \mathbf{S}$ non si arriva che a ripetere la formula universale assieme a delle formule del tipo $\mathbf{A}(\mathbf{t})$. **Conviene fermarsi prima di ogni applicazione di $\forall - \mathbf{S}$ (o al più dopo una sola applicazione)** e procedere a trovare un contromodello falsificando:

$$\forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash$$

(si ricordi che il contesto vuoto a dx si interpreta sempre come falso..) ovvero basta costruire un modello \mathcal{D} in cui vale $\forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Per esempio possiamo definire

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\equiv \mathbf{Nat} \\ \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{1} \text{ sempre} \end{aligned}$$

Questo modello è contromodello per il sequente

$$\vdash \neg(\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}))$$

e dunque rende vero il sequente di partenza $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$. Abbiamo concluso dunque con un altro tipo di modello che il sequente $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$ risulta **soddisfacibile**.

Esercizio: si provi a determinare la validità e soddisfacibilità o meno del sequente che formalizza

Se uno è mite e gentile allora è amabile.
Se uno non è gentile allora non è amabile e neppure mite.

L'asserzione si formalizza nel sequente

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})) \vdash \forall \mathbf{x} (\neg \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \& \neg \mathbf{M}(\mathbf{x}))$$

usando:

$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ è mite
 $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ è gentile
 $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ è amabile

che proviamo a vedere se si deriva seguendo lo schema in sezione 10.7.1.

$$\frac{\frac{\frac{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), A(x) \vdash G(x)}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \neg A(x), G(x)} \neg -D \quad \frac{\frac{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), M(x) \vdash G(x)}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), \vdash \neg M(x), G(x)} \neg -D}{\frac{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \neg A(x) \& \neg M(x), G(x)}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash G(x), \neg A(x) \& \neg M(x)} \& -D} \text{sc}_{dx}$$

$$\frac{\frac{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), \neg G(x) \vdash \neg A(x) \& \neg M(x)}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \neg G(x) \rightarrow \neg A(x) \& \neg M(x)} \neg -S}{\frac{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \neg G(x) \rightarrow \neg A(x) \& \neg M(x)}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \forall x (\neg G(x) \rightarrow \neg A(x) \& \neg M(x))} \rightarrow -D} \forall -D$$

ove il primo \forall -D si applica perchè \mathbf{x} NON compare libera nel resto del sequente. E poi ci accorgiamo che non ha senso continuare... Infatti continuando a derivare la seconda foglia dell'albero precedente otteniamo

$$\begin{array}{c}
 \text{ax-id} \\
 \frac{M(x), \forall x (\dots) \vdash M(x) \quad M(x), \forall x (\dots) \vdash G(x), G(x)}{M(x), \forall x (\dots) \vdash M(x) \& G(x), G(x)} \&-D \quad \frac{M(x), \forall x (\dots), A(x) \vdash G(x)}{M(x), \forall x (\dots), M(x) \& G(x) \rightarrow A(x) \vdash G(x)} \rightarrow -S \\
 \frac{M(x), \forall x (\dots), M(x) \& G(x) \rightarrow A(x) \vdash G(x)}{M(x), \forall x (\dots), M(x) \& G(x) \rightarrow A(x) \vdash G(x)} \forall -S \\
 \frac{M(x), \forall x (\dots), M(x) \& G(x) \rightarrow A(x) \vdash G(x)}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), M(x) \vdash G(x)} \text{sc}_{dx}
 \end{array}$$

e ci accorgiamo che la foglia

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} (\dots) \vdash \mathbf{G}(\mathbf{x}), \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

in alto a dx risulta equivalente al sequente dell'albero prima di \forall -S

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})) \vdash \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

a meno di una ripetizione di $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ nelle conclusioni. E analogamente continuando a derivare l'albero sopra con \forall -S dopo uno scambio non otteniamo nulla di nuovo... e quindi ci conviene falsificare il sequente dell'albero prima di applicare \forall -S, ovvero

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})) \vdash \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

A tal scopo prendiamo un dominio \mathbf{D} non vuoto qualsiasi e poniamo:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{d} \text{ in } \mathbf{D},$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{d} \text{ in } \mathbf{D}$$

e $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ è definito a piacere. Poi si noti che

$$(\forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

poichè per ogni \mathbf{d} in \mathbf{D} si ha $(\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ e quindi tale modello risulta un *contromodello* del sequente

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})), \mathbf{M}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

(ovvero lo falsifica) perchè su un elemento del dominio (in realtà su ogni elemento del dominio) le **premesse** sono **vere** mentre le **conclusioni** sono **false**, da cui il sequente di partenza

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})) \vdash \forall \mathbf{x} (\neg \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \& \neg \mathbf{M}(\mathbf{x}))$$

risulta **non valido** perchè abbiamo adottato solo regole (che mostreremo essere) sicure per arrivare alla foglia

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})), \mathbf{M}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

MORALE= abbiamo costruito un contromodello pensando ad un dominio in cui **TUTTI gli individui d NON sono gentili** ma **tutti sono miti** senza considerare se sono amabili o meno.

In questo modo NON è vero che **se uno non è gentile NON è neppure mite** senza per questo contraddire il fatto che **se uno è gentile e mite allora è amabile** che vale perchè l'antecedente di questa implicazione non si verifica mai nel modello (non ci sono infatti nel nostro dominio individui gentili!!).

Poi procediamo a studiare la soddisfacibilità del sequente di partenza che per comodità abbreviamo come segue

$$\vdash \mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2$$

$$\text{ove } \mathbf{pr}_1 \equiv \forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}))$$

$$\mathbf{pr}_2 \equiv \forall \mathbf{x} (\neg \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \& \neg \mathbf{M}(\mathbf{x})).$$

A tal scopo proviamo a derivare la negazione della formula che rappresenta il sequente ovvero

$$\vdash \neg(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2)$$

e si ottiene (sviluppando l'albero nel modo ottimale, ovvero senza applicare \forall -S inutilmente..)

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}), \mathbf{G}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{x})} \&-D}{\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})} \rightarrow -D}{\vdash \mathbf{pr}_1} \forall -D \quad \frac{\mathbf{pr}_2 \vdash}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2 \vdash} \rightarrow -D$$

$$\vdash \neg(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) \quad \neg -D$$

ove l'applicazione di \forall -D è lecita perchè la variabile x non appare libera nel sequente conclusione. Ora per ottenere un contromodello della negazione del sequente di partenza, e quindi un modello del sequente di partenza basta falsificare la foglia

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}), \mathbf{G}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

mandando sempre a **1** l'interpretazione di $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ e a **0** quella di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$: ovvero dato un dominio \mathbf{D} non vuoto si definisce

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D} \end{aligned}$$

In tal modello si verifica che **per ogni** $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$$(\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \& \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

ovvero si è trovato un contromodello per la negazione del sequente di partenza

$$\vdash \neg(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2)$$

e dunque un modello per il sequente di partenza.

In conclusione, il sequente di partenza $\vdash \mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2$ sopra risulta **non valido** ma **soddisfacibile**.

10.8 Su formalizzazioni con “solo”, “soltanto”

Si noti che la frase

“Bracciodiferro mangia soltanto spinaci.”

oppure

“Bracciodiferro mangia solo spinaci.”

letteralmente dovrebbe essere formalizzata in

$$\forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})$$

ponendo

\mathbf{b} =Bracciodiferro

$\bar{\mathbf{s}}$ =spinaci

$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ = \mathbf{x} mangia \mathbf{y}

3.

$$\exists y \, M(\mathbf{b}, y) \rightarrow M(\mathbf{b}, \bar{s}) \vdash \forall y \, (M(\mathbf{b}, y) \rightarrow M(\mathbf{b}, \bar{s}))$$

è tautologia in $\mathbf{LC}_=$ (lo si dimostri per esercizio).

4.

$$\exists y \, M(\mathbf{b}, y) \rightarrow M(\mathbf{b}, \bar{s}) \vdash \forall y \, (M(\mathbf{b}, y) \rightarrow y = \bar{s})$$

NON è tautologia bensì un'opinione.

Per dimostrarlo proviamo seguiamo la procedura in sezione 10.7.1 a derivare il sequente in $\mathbf{LC}_=$ come segue

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{M(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \vdash M(\mathbf{b}, \mathbf{w}), \exists y \, M(\mathbf{b}, y), \mathbf{w} = \bar{s}}}{M(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \vdash \exists y \, M(\mathbf{b}, y), \mathbf{w} = \bar{s}} \exists\text{-D} \quad \frac{M(\mathbf{b}, \mathbf{w}), M(\mathbf{b}, \bar{s}) \vdash \mathbf{w} = \bar{s}}{M(\mathbf{b}, \mathbf{w}), \exists y \, M(\mathbf{b}, y) \rightarrow M(\mathbf{b}, \bar{s}) \vdash \mathbf{w} = \bar{s}} \rightarrow\text{-S} \\ \frac{\frac{\frac{\frac{M(\mathbf{b}, \mathbf{w}), \exists y \, M(\mathbf{b}, y) \rightarrow M(\mathbf{b}, \bar{s}) \vdash \mathbf{w} = \bar{s}}{\exists y \, M(\mathbf{b}, y) \rightarrow M(\mathbf{b}, \bar{s}), M(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \vdash \mathbf{w} = \bar{s}} \text{sc}_{sx}}}{\exists y \, M(\mathbf{b}, y) \rightarrow M(\mathbf{b}, \bar{s}) \vdash M(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{w} = \bar{s}} \rightarrow\text{-D}}{\exists y \, M(\mathbf{b}, y) \rightarrow M(\mathbf{b}, \bar{s}) \vdash \forall y \, (M(\mathbf{b}, y) \rightarrow y = \bar{s})} \forall\text{-D}$$

ove la prima applicazione di $\forall\text{-D}$ è lecita perchè la variabile \mathbf{w} non è libera nel sequente radice in quanto NON CI COMPARE!!!.

Ora si nota che la foglia

$$M(\mathbf{b}, \mathbf{w}), M(\mathbf{b}, \bar{s}) \vdash \mathbf{w} = \bar{s}$$

NON è un assioma e ad essa non si può applicare altra regola eccetto che le regole di scambio a sx e a dx con cui non arriviamo di certo ad un assioma. Dunque conviene cercare un contromodello di tale foglia mandando a **1** le premesse valutate su un elemento \mathbf{d} da mettere al posto di \mathbf{w} e mandando a **0** la conclusione valutata sempre sullo stesso elemento \mathbf{d} da mettere al posto di \mathbf{w} che risulterà quindi *il falsario* della foglia nel contromodello. In questo caso possiamo semplicemente pensare che TUTTE le coppie di elementi $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ rendano vero $M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (nel significato originale del predicato nel contromodello *tutti si mangiano a vicenda compresi loro stessi!*). Poi per rendere falso $\mathbf{w} = \bar{s}$ sull'ipotetico falsario dobbiamo per forza mettere nel dominio \mathbf{D} del contromodello ALMENO DUE elementi: uno per interpretare \bar{s} e l'altro per metterlo al posto di \mathbf{w} come falsario. Si noti che in questo contromodello l'interpretazione di \mathbf{b} può essere data a piacere perchè non è rilevante per falsificare la foglia.

Ovvero poniamo

$$\mathbf{D} \equiv \{ \text{Pippo}, \text{Minni} \} \quad \bar{s}^{\mathbf{D}} = \text{Minni}$$

e poi

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1 \quad \text{sempre}$$

ovvero

$$\begin{aligned} M(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \text{Pippo}) &= 1 \\ M(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \text{Minni}) &= 1 \\ M(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\text{Minni}, \text{Minni}) &= 1 \\ M(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\text{Minni}, \text{Pippo}) &= 1 \end{aligned}$$

Infine poniamo $\bar{b}^{\mathbf{D}} = \text{Minni}$ (ma la costante \mathbf{b} potrebbe essere interpretata anche come **Pippo** in quanto la foglia rimane falsa anche nel modello con $\bar{b}^{\mathbf{D}} = \text{Pippo}$).

Dunque in tal modello \mathcal{D} l'interpretazione di $\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w})$, $\mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}}$ è una funzione

$$(\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \rightarrow \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} : \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

che NON è costantemente $\mathbf{1}$ in quanto c'è un falsario che è Pippo ovvero

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \rightarrow \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) &= (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}))^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \rightarrow (\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} \rightarrow (\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \bar{\mathbf{s}}^{\mathbf{D}}) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \mathbf{b}^{\mathbf{D}}) \& \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{b}^{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} \rightarrow (\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \text{Minni}) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \text{Minni}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} \rightarrow \mathbf{0} \\ &= \mathbf{1} \& \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Si noti che potevamo scrivere direttamente

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \rightarrow \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) &= (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}))^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \rightarrow (\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} \rightarrow (\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \bar{\mathbf{s}}^{\mathbf{D}}) \\ &= \mathbf{1} \& \mathbf{1} \rightarrow (\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \text{Minni}) \\ &= \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

sapendo che l'interpretazione di $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è sempre $\mathbf{1}$ su ogni coppia del dominio.

Secondo la procedura in sezione 10.7.1 concludiamo che il seguente radice

$$\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})$$

NON è tautologia, ovvero **NON è valido** perchè non lo è una foglia dell'albero ottenuto applicando regole di **LC**₌.

Dunque la traduzione letterale di

“Se Bracciodiferro mangia qualcosa mangia spinaci.”

NON implica la traduzione letterale della frase ad essa equivalente

“Se Bracciodiferro mangia qualcosa quel qualcosa sono spinaci.”

(si ricordi che \vdash si interpreta come implicazione!).

Possiamo proseguire nel vedere se il seguente

$$\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})$$

è opinione o per caso è un paradosso.....

A tal scopo possiamo seguire la procedura in sezione 10.7.1 provando a derivare la negazione

$$\vdash \neg ((\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}))$$

ovvero

$$\frac{\vdash \exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \quad \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}) \vdash}{(\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}) \vdash} \rightarrow -S$$

$$\frac{}{\vdash \neg ((\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}))} \neg -D$$

e qui possiamo vedere che la foglia di destra

$$\forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}) \vdash$$

non porta ad un assioma applicando la regola di \forall -S più volte ... (il lettore ci provi da sè).
 Conviene quindi trovare un contromodello per tale sequente mandando a **1** il predicato

$$\forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})$$

Un semplice contromodello può essere ottenuto mandando a **1** il predicato $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}$ su ogni elemento del dominio e a tal scopo basta considerare il dominio UN SOLO ELEMENTO.

Quindi poniamo

$$\mathbf{D} \equiv \{ \text{Pippo} \} \quad \bar{\mathbf{s}}^{\mathbf{D}} = \text{Pippo}$$

e $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sia una funzione definita A PIACERE. Infatti in tal modello abbiamo che

$$(\forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$$

poichè sull'unico elemento Pippo risulta che

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}(\text{Pippo})} &= \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}(\text{Pippo})} \rightarrow (\mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}(\text{Pippo})} \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}(\text{Pippo})} \rightarrow (\mathbf{y} = \mathbf{w})^{\mathbf{D}(\bar{\mathbf{s}}^{\mathbf{D}}, \text{Pippo})} \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}(\text{Pippo})} \rightarrow (\mathbf{y} = \mathbf{w})^{\mathbf{D}(\text{Pippo}, \text{Pippo})} \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}(\text{Pippo})} \rightarrow \mathbf{1} \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Ora un tal contromodello esteso a piacere con l'interpretazione della costante **b** dà un contromodello per il sequente

$$\vdash \neg ((\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}))$$

e dunque un modello in cui è vero il sequente

$$\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})$$

che risulta perciò **soddisfacibile** e quindi un'**opinione**.

Per esercizio si provi a continuare a derivare la foglia

$$\vdash \exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})$$

e si trovi un suo contromodello che sarà un contromodello per il sequente

$$\vdash \neg ((\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}))$$

di tipo completamente diverso da quello trovato sopra!

10.9 Validità regole per sequenti in logica predicativa classica

Qui diamo il concetto di validità di una regola nel linguaggio dei predicati per la semantica classica. A tal scopo interpretiamo i sequenti, interpretando come al solito il segno di sequente \vdash come implicazione preceduta questa volta però dalla quantificazione universale di tutte le variabili libere presenti.

Dapprima introduciamo il concetto di **regola vera in un modello**. Intuitivamente una regola è vera in un modello \mathcal{D} se trasforma **sequenti premessa veri nel modello \mathcal{D}** in un **sequente conclusione vero sempre in \mathcal{D}** , ovvero **una regola è vera in un modello se la VERITÀ SCENDE \Downarrow lungo la regola nel modello se TUTTE le premesse sono vere nel modello**.

Def. Verità in un modello di una regola ad una premessa

Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \quad \text{si dice **vera** in un modello } \mathcal{D}$$

se il sequente **premessa** $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$ è vero in un modello \mathcal{D}

\Downarrow

il sequente **conclusione** $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$ è vero nello stesso modello \mathcal{D}

Def. Verità in un modello di regola a due premesse

Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \quad \text{si dice **vera** in un modello } \mathcal{D}$$

se i sequenti **premessa**

$\Gamma_1 \vdash \Delta_1$ e $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$ sono **ENTRAMBI** veri in un modello \mathcal{D}

\Downarrow

il sequente **conclusione** $\Gamma_3 \vdash \Delta_3$ è vero stesso modello \mathcal{D} .

Al fine di capire meglio quando una regola è vera in un modello vogliamo studiare alcune caratterizzazioni alternative della nozione di verità di una regola in un modello.

A tal scopo osserviamo che vale la seguente caratterizzazione di verità in un modello per una formula con variabili libere:

in un modello \mathcal{D} **vale** $\text{fr}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$
sse
 \mathcal{D} **rende vera** $\forall \mathbf{y}_1 \forall \mathbf{y}_2 \dots \forall \mathbf{y}_n \text{fr}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$

Ora osserviamo che la **validità di una regola** equivale alla **validità di una formula** ottenuta interpretando come implicazione il segno di inferenza di un sequente premessa o due sequenti premessa ad un sequente conclusione dopo aver interpretato i sequenti stessi come implicazioni quantificate universalmente.

Prima di far ciò introduciamo le seguenti abbreviazioni per indicare una lista finita di variabili:

$$\bar{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$$

$$\forall \bar{\mathbf{y}} \text{fr}(\bar{\mathbf{y}}) \equiv \forall \mathbf{y}_1 \forall \mathbf{y}_2 \dots \forall \mathbf{y}_n \text{fr}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$$

Inoltre utilizziamo la scrittura

$$\Gamma(\bar{\mathbf{y}})$$

per indicare che *le variabili libere occorrenti in $\Gamma(\bar{y})$ sono incluse nella lista $\bar{y} \equiv y_1, y_2, \dots, y_n$* (e quindi nella lista potrebbero esserci variabili che non compaiono nella lista di formule $\Gamma(\bar{y})$).

Ora utilizziamo le abbreviazioni sopra nelle seguenti caratterizzazioni:

Una regola ad una premessa

$$\frac{\Gamma_1(\bar{y}) \vdash \Delta_1(\bar{y})}{\Gamma_2(\bar{y}) \vdash \Delta_2(\bar{y})}$$

si dice **vera** in un **modello** \mathcal{D}

se e solo se

$$\forall \bar{y} (\Gamma_1^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_1^{\vee}(\bar{y})) \rightarrow \forall \bar{y} (\Gamma_2^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_2^{\vee}(\bar{y}))$$

è **vera** nel modello \mathcal{D} .

Una regola a due premesse

$$\frac{\Gamma_1(\bar{y}) \vdash \Delta_1(\bar{y}) \quad \Gamma_2(\bar{y}) \vdash \Delta_2(\bar{y})}{\Gamma_3(\bar{y}) \vdash \Delta_3(\bar{y})}$$

si dice **vera in un dato modello** \mathcal{D}

se e solo se

$$\forall \bar{y} (\Gamma_1^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_1^{\vee}(\bar{y})) \& \forall \bar{y} (\Gamma_2^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_2^{\vee}(\bar{y})) \rightarrow \forall \bar{y} (\Gamma_3^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_3^{\vee}(\bar{y}))$$

è **vera nel modello** \mathcal{D} .

Diamo ora una ulteriore caratterizzazione della validità delle regole che utilizza il lemma scorciatoia 9.6 applicato alle formule implicative caratterizzanti la validità di una regola presentate sopra:

Def. Verità in un modello di una regola ad una premessa

Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \quad \text{si dice **vera** in un modello } \mathcal{D}$$

se **per ogni** $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$

$$(\Gamma_1^{\&}(\bar{\mathbf{y}}) \rightarrow \Delta_1^{\vee}(\bar{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \text{ nel modello } \mathcal{D}$$

\Downarrow

nel modello \mathcal{D}

$$\text{per ogni } (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n \quad \text{se} \quad \Gamma_2^{\&}(\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta_2^{\vee}(\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1.$$

Def. Verità in un modello di regola a due premesse

Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \quad \text{si dice è **vera** in un modello } \mathcal{D}$$

se **nel modello** \mathcal{D}

per ogni $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$

$$(\Gamma_1^{\&}(\bar{\mathbf{y}}) \rightarrow \Delta_1^{\vee}(\bar{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1$$

e

per ogni $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$

$$(\Gamma_2^{\&}(\bar{\mathbf{y}}) \rightarrow \Delta_2^{\vee}(\bar{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1$$

\Downarrow

nel modello \mathcal{D}

$$\text{per ogni } (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n \quad \text{se} \quad \Gamma_3^{\&}(\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta_3^{\vee}(\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1$$

Siamo quindi pronti ad enunciare la definizione di regola valida e sicura per sequenti predicativi:

Def. 10.10 *Una regola (ad una o due premessa) per sequenti nel linguaggio predicativo classico si dice **valida** rispetto alla semantica classica dei predicati se è **vera** in ogni modello \mathcal{D} .*

Def. 10.11 Una regola per sequenti nel linguaggio predicativo classico si dice **SICURA** se lei e le sue inverse sono entrambe **valide** rispetto alla semantica classica.

Con le osservazioni sopra risulta ora chiaro che per vedere se una regola è NON valida basta trovare un modello \mathcal{D} e un'istanza della regola in cui la premessa o le premesse sono vere nel modello mentre NON lo è la conclusione. Dopo aver mostrato la validità delle regole del calcolo per la logica classica predicativa faremo esempi di regole NON valide.

Una **regola** con sequenti predicativi è **NON valida** se **esiste UN modello** in cui le **premesse** della regola sono **VERE** mentre è **FALSA la conclusione** della regola

10.10 Validità regole di LC e loro inverse

Di seguito mostriamo che le regole di LC sono valide assieme alle loro inverse, ovvero sono TUTTE SICURE.

10.10.1 VALIDITÀ regola \forall -D (caso semplice)

La regola

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w}), \nabla}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla} \quad \forall\text{-D } (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla))$$

è **valida**. Per semplicità supponiamo che sia Γ che ∇ siano liste di proposizioni senza variabili libere. Allora per mostrare la validità della regola possiamo mostrare che in un qualsiasi modello \mathcal{D} vale

$$\forall \mathbf{w} (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

Per provare l'implicazione più esterna usiamo il lemma scorciatoia 9.6. Ora supponiamo che $\forall \mathbf{w} (\Gamma \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla)$ sia vero in \mathcal{D} . Ne segue che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha che

$$(\Gamma \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

ovvero che (si ricorda che non compare \mathbf{w} in Γ)

$$(\Gamma^{\&})^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee \nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Mostriamo ora che vale pure

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

usando di nuovo il lemma scorciatoia. A tal scopo supponiamo $(\Gamma^{\&})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Allora per ogni $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ si ha per ipotesi $\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee \nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$

ovvero che $\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ oppure $\nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$.

Ora si hanno 2 casi:

caso 1: $\nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ da cui si conclude $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$

caso 2: $\nabla^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ e quindi per ogni $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ (perchè l'interpretazione di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e quella $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ sono le stesse in presenza di una sola variabile) da cui

$$(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

e quindi $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$.

Dunque il sequente conclusione è valido in \mathcal{D} .

10.10.2 VALIDITÀ regola \forall -D (caso generale)

La regola \forall -D è **VALIDA** anche se supponiamo $\Gamma \equiv \mathbf{B}(\mathbf{y})$ e $\nabla \equiv \mathbf{C}(\mathbf{y})$ e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ supponiamo $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})$. Questo è il caso più generale perchè in presenza nel sequente di due o più variabili libere si procede come se ce ne fosse una.

Fissato un modello \mathcal{D} applichiamo il lemma scorciatoia 9.6 per mostrare che in esso vale

$$\forall \mathbf{w} \forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

Dunque se $\forall \mathbf{w} \forall \mathbf{y} (\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))$ è **valido in \mathcal{D}** allora per ogni $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \mathbf{D}$ si ha che

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$$

ovvero che (si ricorda che non compare \mathbf{w} in $\mathbf{B}(\mathbf{y})$)

$$\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = 1$$

Ora mostriamo che per ogni $\mathbf{d}_2 \in \mathbf{D}$ vale

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = 1$$

tramite il lemma scorciatoia. Dunque a tal scopo supponiamo che $\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = 1$. Allora per ogni $\mathbf{d}_1 \in \mathbf{D}$ si ha per ipotesi $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = 1$

ovvero che $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$ oppure $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = 1$.

Ora si hanno 2 casi:

caso 1: $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = 1$ da cui si conclude $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = 1$

caso 2: $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = 0$ e quindi per ogni $\mathbf{d}_1 \in \mathbf{D}$ $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$ (perchè l'interpretazione di $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ e quella $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sono le stesse in presenza di due sole variabili) da cui

$$(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = 1$$

e quindi $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = 1$. Dunque abbiamo mostrato che *per ogni \mathbf{d}_2* vale

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = 1$$

e dunque vale in \mathcal{D}

$$(\forall \mathbf{y} (\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})))^{\mathcal{D}} = 1$$

La regola \forall -D è pure sicura perchè la sua inversa pure conserva la soddisfacibilità in un modello. Lo si provi per esercizio.

10.10.3 VALIDITÀ regola \forall -S e \forall -Sv

Consideriamo questa versione veloce della regola del “per ogni” a sx

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall\text{-Sv}$$

Dimostriamo che è **valida** da cui segue facilmente che anche la regola \forall -S lo è. Lo dimostriamo supponendo Γ, ∇ e $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ senza variabili libere per semplicità (il caso generale segue analogamente). A tal scopo mostriamo che in un modello \mathcal{D} qualsiasi fissato vale

$$(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{t}) \rightarrow \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \& \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})$$

usando il lemma scorciatoia 9.6. Quindi supponiamo che nel modello \mathcal{D} la premessa sia vera, ovvero che valga

$$(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{t}) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = 1$$

Ora per mostrare che pure il seguente conclusione è vero usiamo di nuovo il lemma scorciatoia e supponiamo che $(\Gamma^{\&} \& \forall x A(x))^{\mathcal{D}} = 1$. Dunque $(\Gamma^{\&})^{\mathcal{D}} = 1$ e pure $(\forall x A(x))^{\mathcal{D}} = 1$. Da ciò segue che in particolare per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ e quindi anche che

$$A(t)^{\mathcal{D}} = A(x)^{\mathcal{D}}(t^{\mathcal{D}}) = 1$$

Dunque otteniamo che $(\Gamma^{\&} \& A(t))^{\mathcal{D}} = 1$ e per la validità nel modello del seguente premessa concludiamo che $(\nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = 1$. Dunque per il lemma scorciatoia abbiamo provato che

$$(\Gamma^{\&} \& \forall x A(x) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = 1$$

e quindi la regola è valida.

Chiaramente anche la regola

$$\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall\text{-S}$$

è valida (lo si dimostri per esercizio) ma ora in questa versione è anche sicura (lo si dimostri per esercizio).

10.10.4 NON validità inversa della regola $\forall\text{-Sv}$

La regola del “per ogni” veloce

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall\text{-Sv}$$

NON è SICURA perchè NON è valida anche all’insù \uparrow , ovvero la sua inversa

$$\frac{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla}{\Gamma, \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vdash \nabla} \text{inv} - \forall\text{-Sv}$$

NON è valida.

Infatti se si considera il modello

$$\mathcal{D} \equiv \mathbf{Nat} \text{ e } \mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{n}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{n} \leq 7 \\ 0 & \text{se } \mathbf{n} > 7 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1 \text{ sse } \mathbf{d} \leq 7$$

Dato $\mathbf{A}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{0}) = 1$ e che $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathbf{Nat}} = 0$ risulta che

$$\frac{A(t) \vdash \perp \quad \text{falso nel modello}}{\forall x A(x) \vdash \perp \quad \text{vero nel modello}} \forall\text{-Sv}$$

ovvero otteniamo che l’inversa della regola $\forall\text{-Sv}$ NON è valida in quanto

$$\frac{\forall \mathbf{n} \in \mathbf{Nat} \ \mathbf{n} \leq 7 \vdash \perp \quad \text{vero nel modello}}{0 \leq 7 \vdash \perp \quad \text{falso nel modello}} \forall\text{-Sv} - \text{inv}$$

10.10.5 VALIDITÀ regola \exists -S (caso semplice)

La regola

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla} \exists\text{-S } (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla))$$

è **valida**. Trattiamo dapprima il caso semplice in cui Γ e ∇ siano proposizioni senza variabili libere. Per mostrare la validità della regola mostriamo che in ogni modello \mathcal{D} vale

$$\forall \mathbf{w} (\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})$$

applicando il lemma scorciatoia 9.6. Dunque supponiamo che nel modello valga

$$(\forall \mathbf{w} (\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \nabla^{\vee}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

ovvero che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha

$$(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

ovvero che per ogni $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ si ha $\Gamma^{\&\mathcal{D}} \& \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \rightarrow \nabla^{\vee\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Ora mostriamo pure che vale

$$(\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

usando di nuovo il lemma scorciatoia. A tal scopo assumiamo anche che $(\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, ne segue che $\Gamma^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e che esiste $\bar{\mathbf{d}} \in \mathbf{D}$ tale che $\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\bar{\mathbf{d}}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\bar{\mathbf{d}}) = \mathbf{1}$ (si ricorda che l'interpretazione di un predicato con una sola variabile libera è indipendente dal nome della variabile) e dunque $\Gamma^{\&\mathcal{D}} \& \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\bar{\mathbf{d}}) = \mathbf{1}$. Ora per la validità nel modello del sequente premessa su $\bar{\mathbf{d}}$ ovvero

$$(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}}(\bar{\mathbf{d}}) = \mathbf{1}$$

e dalla validità nel modello delle premesse di questa implicazione si conclude $\nabla^{\vee\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e quindi per il lemma scorciatoia il sequente conclusione è **vero** nel modello \mathcal{D} ossia

$$(\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Concludiamo quindi di nuovo per il lemma scorciatoia che la regola è valida.

10.10.6 VALIDITÀ regola \exists -S (caso più generale)

La regola

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla} \exists\text{-S } (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \Delta))$$

è **valida**.

Per provarlo ci possiamo limitare al caso in cui $\Gamma \equiv \mathbf{B}(\mathbf{y})$ e $\nabla \equiv \mathbf{C}(\mathbf{y})$ e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ poniamo $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})$. Mostriamo che fissato un modello \mathcal{D} allora vale

$$\forall \mathbf{w} \forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \nabla^{\vee}) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})$$

tramite il lemma scorciatoia 9.6. A tal scopo supponiamo pure che $\forall \mathbf{y} (\mathbf{B}(\mathbf{y}) \& \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{y}))$ sia **vero** nel modello, il che significa che per ogni $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \mathbf{D}$ si ha $(\mathbf{B}(\mathbf{y}) \& \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ ovvero che per ogni $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \mathcal{D}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) \& \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$$

Ora fissato un arbitrario $\mathbf{d}_2 \in \mathcal{D}$, mostriamo che

$$(\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$$

con il lemma scorciatoia. A tal scopo assumiamo anche che $(\mathbf{B}(\mathbf{y}) \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$, ne segue che $\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ e che esiste $\mathbf{d}_1 \in \mathcal{D}$ tale che $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ (perchè l'interpretazione di $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ e quella $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sono le stesse in presenza di due sole variabili) e dunque $\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) \& \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ da cui si conclude per la validità del sequente premessa che $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$. Dunque abbiamo mostrato che *per ogni* $\mathbf{d}_2 \in \mathcal{D}$

$$(\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$$

e dunque pure che vale

$$(\forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Quindi per il lemma scorciatoia la regola è valida.

10.10.7 VALIDITÀ regola dell'esiste a dx veloce (caso semplice)

Consideriamo la seguente versione "veloce" della regola dell'esiste a destra

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t}), \nabla}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla} \exists\text{--Dv}$$

e mostriamo che è **valida**. Trattiamo il caso semplice in cui Γ , ∇ e $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ non hanno variabili libere. In particolare supponiamo $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ ovvero sia una costante. Appliciamo il lemma scorciatoia 9.6 per dimostrare che in un modello qualsiasi \mathcal{D} vale

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

Ora fissato un modello \mathcal{D} , supponiamo pure che $(\Gamma \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e dobbiamo mostrare che vale pure

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Applichiamo a tal scopo il lemma scorciatoia 9.6 e assumiamo anche che $\Gamma^{\& \mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Allora per validità sequente premessa otteniamo che $(\mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, ovvero che $\mathbf{A}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ o che $\nabla^{\vee \mathcal{D}} = \mathbf{1}$.

Ora analizziamo i seguenti due casi:

caso 1. $\nabla^{\vee \mathcal{D}} = \mathbf{1}$ da cui concludiamo $(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$.

caso 2. $\nabla^{\vee \mathcal{D}} = \mathbf{0}$ da cui per ipotesi otteniamo $\mathbf{A}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, da cui $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ quindi $(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, da cui concludiamo $(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Dunque per il lemma scorciatoia nel modello \mathcal{D} vale

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Quindi la regola è **valida**.

10.10.8 VALIDITÀ regola dell'esiste a dx veloce ed di $\exists\text{--D}$ (caso generale)

Se mostriamo che la regola $\exists\text{--Dv}$ è valida nel caso generale allora ne segue banalmente che è pure valida la regola $\exists\text{--D}$ (lo si dimostri).

La regola $\exists\text{--Dv}$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t}), \nabla}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla} \exists\text{--Dv}$$

è **VALIDA** anche se si assume che $\Gamma \equiv \mathbf{B}(\mathbf{y})$ e $\nabla \equiv \mathbf{C}(\mathbf{y})$ e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ poniamo $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e assumiamo pure che $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ sia una costante. Il caso in cui nei sequenti compaiano più variabili ancora si tratta analogamente.

Per mostrare la validità della regola, verifichiamo che in un modello qualsiasi \mathcal{D} fissato vale

$$\forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

applicando il lemma scorciatoia 9.6. Supponiamo dunque che se $\forall y (\mathbf{B}(y) \rightarrow \mathbf{A}'(t, y) \vee \mathbf{C}(y))$ sia **vera nel modello**, e quindi per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha $(\mathbf{B}(y) \rightarrow \mathbf{A}'(t, y) \vee \mathbf{C}(y))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$, ovvero che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$$\mathbf{B}(y)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \rightarrow \mathbf{A}'(t, y)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee \mathbf{C}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$$

Ora mostriamo che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ vale

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \exists x \mathbf{A}(x) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$$

usando il lemma scorciatoia. A tal scopo assumiamo dunque che $\Gamma^{\&} = \mathbf{B}(y)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$. Allora per l'ipotesi di validità nel modello del sequente premessa otteniamo che $\mathbf{A}'(t, y)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee \mathbf{C}(y)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$.

Ora analizziamo due casi:

caso 1. $\mathbf{C}(y)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ da cui concludiamo $(\exists x \mathbf{A}'(x, y) \vee \mathbf{C}(y))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$.

caso 2. $\mathbf{C}(y)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 0$ da cui per ipotesi otteniamo che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ abbiamo che $\mathbf{A}'(t, y)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$, da cui $\mathbf{A}'(x, y)^{\mathcal{D}}(t^{\mathcal{D}}, \mathbf{d}) = \mathbf{A}'(t, y)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$. Quindi $(\exists x \mathbf{A}'(x, y))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ da cui concludiamo $(\exists x \mathbf{A}'(x, y) \vee \mathbf{C}(y))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$. Abbiamo quindi mostrato che nel modello \mathcal{D} per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ vale

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \exists x \mathbf{A}(x) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$$

e dunque anche che vale

$$\forall y (\Gamma^{\&} \rightarrow \exists x \mathbf{A}(x) \vee \nabla^{\vee})$$

La regola è quindi valida.

10.10.9 NON validità dell'inversa della regola \exists -Dv

La **regola** \exists -Dv è NON SICURA perchè NON conserva la **validità in un modello** all'insù \Uparrow .

Un *controesempio* è dato dal seguente esempio.

L'asserzione

$$\frac{\text{È arrivato in stazione il treno per Venezia} \vdash \text{Marco sale sul treno per Venezia.}}{\text{È arrivato in stazione il treno per Venezia} \vdash \text{Qualcuno sale sul treno per Venezia.}}$$

si può formalizzare in

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})}{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists x \mathbf{S}(x, \mathbf{v})}$$

usando

$A(x)$ = “ x è arrivato in stazione”

$S(x, y)$ = “ x sale su y .”

m = “Marco”

v = “treno per Venezia”

Ora

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})}{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists x \mathbf{S}(x, \mathbf{v})}$$

è un'applicazione della regola \exists -Dv che sappiamo essere valida. Però la sua inversa non è vera nel modello seguente:

$\mathbf{D} \equiv \{\text{Marco, trenoVE, Piero}\}$

$\mathbf{v}^{\mathcal{D}} \equiv \text{trenoVE}$

$\mathbf{m}^{\mathcal{D}} \equiv \text{Marco}$

$\mathbf{p}^{\mathcal{D}} \equiv \text{Piero}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse $\mathbf{d} = \mathbf{trenoVE}$
 $\mathbf{S}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ sse $\mathbf{d}_1 = \mathbf{Piero}$ e $\mathbf{d}_2 = \mathbf{trenoVE}$.

E in tal modello $(\exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e così pure $\mathbf{A}(\mathbf{v})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{trenoVE}) = \mathbf{1}$ ma $\mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ (ovvero nel modello, il treno per Venezia è arrivato in stazione, **Piero** sale sul treno per Venezia, e quindi qualcuno ci sale, mentre invece **Marco** non ci sale). In pratica abbiamo trovato un modello in cui vale $\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ ma NON vale $\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})$, ovvero

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})}$$

NON è valida, ed essendo un'istanza della regola inversa dell'esiste veloce $\exists\text{--Dv}$, rende tale inversa $\exists\text{--Dv} - \mathbf{inv}$ NON valida.

10.10.10 VALIDITÀ regola inversa della regola $\exists\text{--D}$

Quindi per rendere la regola di esiste a dx sicura occorre modificarla ponendo

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists\text{--D}$$

che è ora sicura. Infatti possiamo mostrare che la sua inversa

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla} \mathbf{inv}\text{--}\exists\text{--D}$$

è pure valida. Lo dimostriamo supponendo Γ, ∇ e $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ senza variabili libere per semplicità (il caso generale segue analogamente). A tal scopo mostriamo che in un modello \mathcal{D} qualsiasi fissato vale

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \nabla^{\vee})$$

usando il lemma scorciatoia 9.6. Quindi supponiamo che nel modello \mathcal{D} la premessa sia vera, ovvero che valga

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Ora per mostrare che pure il seguente conclusione è vero nel modello usiamo di nuovo il lemma scorciatoia e supponiamo che $(\Gamma^{\&})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Dunque per l'ipotesi abbiamo che $(\exists x A(x) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ da cui abbiamo tre casi.

1. $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ da cui segue che vale pure $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e allora anche il seguente conclusione è vero nel modello.

2. $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ allora anche il seguente conclusione è vero nel modello.

3. $(\nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ allora anche il seguente conclusione è vero nel modello.

Dunque nel modello risulta valido il seguente conclusione e quindi per il lemma scorciatoia anche la regola inversa

10.10.11 VALIDITÀ regole dell'uguaglianza

Verifichiamo ora che le regole dei sequenti relative al predicato dell'uguaglianza da aggiungere al calcolo della logica predicativa LC sono valide.

L'assioma

$$\begin{array}{c} = -\text{ax} \\ \Gamma \vdash t=t, \Delta \end{array}$$

è **valido** perchè è vero in OGNI modello:

supponiamo Γ un solo predicato e sia \mathcal{D} un modello. Distinguiamo 2 casi:

1. \mathbf{t} è una costante, ovvero $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ con $\mathbf{c}^{\mathcal{D}} \varepsilon \mathcal{D}$, e quindi si ha chiaramente

$$(\mathbf{c}=\mathbf{c})^{\mathcal{D}} \equiv (\mathbf{x}=\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}}, \mathbf{c}^{\mathcal{D}}) \equiv \mathbf{1}$$

da cui si ha $(\Gamma \rightarrow \mathbf{t}=\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ perchè il conseguente è vero nel modello.

2. \mathbf{t} è una variabile, ovvero $\mathbf{t} \equiv \mathbf{x}$, da cui la validità di $\Gamma \vdash \mathbf{x}=\mathbf{x}$ supposto che in Γ ci siano solo proposizioni con \mathbf{x} variabile libera segue in quanto per ogni \mathbf{d} nel modello $(\Gamma \rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, poichè $(\mathbf{x}=\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ visto che $\mathbf{d} = \mathbf{d}$.

La regola

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -S$$

è **valida** e pure sicura (visto che l'inversa ha la stessa struttura della regola solo con \mathbf{s} al posto di \mathbf{t} e uno scambio di premesse).

Ora mostriamo che la regola $=-S$ è valida supponendo tutte le formule nella regola senza variabili libere per semplicità (il caso generale segue analogamente). Dunque supponiamo in particolare $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}_1$ e $\mathbf{s} \equiv \mathbf{c}_2$ ovvero che siano costanti. Poi mostriamo che in ogni modello \mathcal{D} fissato è vera la formula

$$(\Sigma^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s} \& \Gamma(\mathbf{t})^{\&} \rightarrow \Delta(\mathbf{t})^{\vee} \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Sigma^{\&} \& \Gamma(\mathbf{s})^{\&} \& t = s \rightarrow \Delta(\mathbf{s})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})$$

A tal scopo applichiamo il lemma scorciatoia 9.6 e supponiamo che nel modello valga

$$(\Sigma^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s} \& \Gamma(\mathbf{t})^{\&} \rightarrow \Delta(\mathbf{t})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Dobbiamo mostrare che in \mathcal{D} vale pure

$$(\Sigma^{\&} \& \Gamma(\mathbf{s})^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s} \rightarrow \Delta(\mathbf{s})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Applichiamo di nuovo il lemma scorciatoia e supponiamo anche che $(\Sigma^{\&} \& \Gamma(\mathbf{s})^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$.

Quindi dall'ipotesi otteniamo che $(\Sigma^{\&})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ con $\Gamma(\mathbf{s})^{\&\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e $(\mathbf{t}=\mathbf{s})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ ovvero $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$.

Ma $\Gamma(\mathbf{s})^{\&\mathcal{D}} = \Gamma(\mathbf{x})^{\&\mathcal{D}}(\mathbf{s}^{\mathcal{D}})$ e da $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$ concludiamo

$$\Gamma(\mathbf{s})^{\&\mathcal{D}} = \Gamma(\mathbf{x})^{\&\mathcal{D}}(\mathbf{s}^{\mathcal{D}}) = \Gamma(\mathbf{x})^{\&\mathcal{D}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}}) = \Gamma(\mathbf{t})^{\mathcal{D}}$$

e quindi da $\Gamma(\mathbf{s})^{\&\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ otteniamo $\Gamma(\mathbf{t})^{\&\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, e mettendo insieme le altre assunzioni si trova che $(\Sigma^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s} \& \Gamma(\mathbf{t})^{\&})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ Da cui per l'ipotesi di validità del sequente premessa in \mathcal{D} concludiamo che

$$(\Delta(\mathbf{t})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Ora nel caso $\Delta(\mathbf{t})^{\&\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, ragionando come sopra da $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$ concludiamo

$$\Delta(\mathbf{s})^{\vee\mathcal{D}} = \Delta(\mathbf{t})^{\vee\mathcal{D}}$$

e da $\Delta(\mathbf{t})^{\vee\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ si conclude pure che $\Delta(\mathbf{s})^{\vee\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e dunque $(\Delta(\mathbf{s})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Invece nel caso $(\nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ si conclude subito $(\Delta(\mathbf{s})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e dunque che il sequente conclusione è vero nel modello \mathcal{D} . Per il lemma scorciatoia si deduce che la regola è valida.

10.10.12 Regola dell'uguaglianza veloce

Si noti che la versione veloce della regola $=-S$ ovvero

$$\frac{\Gamma(\mathbf{t}) \vdash \Delta(\mathbf{t})}{\Gamma(\mathbf{s}), \mathbf{t} = \mathbf{s} \vdash \Delta(\mathbf{s})} = -S_v$$

è valida ma non SICURA.

Ad esempio se la applichiamo rimuovendo solo alcune occorrenze come in

$$\frac{\begin{array}{c} ??? \\ \vdash f=t, s=t \end{array}}{t=s \vdash f=s, s=t} = -S^*$$

si ottiene una foglia NON valida mentre la radice lo è.

Infatti sopra dovevamo sostituire TUTTE le occorrenze di \mathbf{s} optando per

$$\frac{\begin{array}{c} =-ax \\ \vdash t = t, f=t \end{array}}{\vdash f=t, t=t} \text{ SC}_{sx} \\ \frac{}{t=s \vdash f=s, s=t} = -S^*$$

Invece ripetendo il primo tentativo con $= -S$ anzichè con la sua versione semplificata otteniamo

$$\frac{\begin{array}{c} =-ax \\ \mathbf{t} = \mathbf{s} \vdash \mathbf{t} = \mathbf{t}, \mathbf{f} = \mathbf{t} \end{array}}{t=s \vdash s=t, f=t} = -S \\ \frac{}{t=s \vdash f=t, s=t} \text{ SC}_{sx} \\ \frac{}{t=s \vdash f=s, s=t} = -S$$

ove la prima applicazione di $= -S$ è INUTILE, ma ci si riprende con la seconda....

10.10.13 Esempi di applicazione delle regole

1. L'asserzione

$$\frac{\mathbf{x} > \mathbf{0} \vdash \text{se } \mathbf{y} > \mathbf{0} \text{ allora } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}}{\mathbf{x} > \mathbf{0} \vdash \text{per ogni } \mathbf{y}, \text{ se } \mathbf{y} > \mathbf{0} \text{ allora } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}}$$

formalizzata in

$$\frac{\mathbf{x} > \mathbf{0} \vdash \mathbf{y} > \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}}{\mathbf{x} > \mathbf{0} \vdash \forall \mathbf{y} (\mathbf{y} > \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0})}$$

è un esempio di corretta applicazione della regola $\forall-D$ che è pure sicura, ovvero scambiando la conclusione con la premessa l'asserzione rimane valida.

Invece l'esempio

$$\frac{\mathbf{y} > \mathbf{0} \vdash \text{se } \mathbf{x} > \mathbf{0} \text{ allora } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}}{\mathbf{y} > \mathbf{0} \vdash \text{per ogni } \mathbf{y}, \text{ se } \mathbf{x} > \mathbf{0} \text{ allora } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}}$$

si formalizza in

$$\frac{\mathbf{y} > \mathbf{0} \vdash \mathbf{x} > \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0}}{\mathbf{y} > \mathbf{0} \vdash \forall \mathbf{y} (\mathbf{x} > \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0})}$$

Si noti che questa NON è una corretta applicazione della regola $\forall-D$ in quanto la \mathbf{y} è LIBERA nel contesto a sinistra $\mathbf{y} > \mathbf{0}$. Difatti nel modello $D \equiv Nat$ dei numeri naturali con $>$ interpretato come "maggiore stretto" e il simbolo \cdot come moltiplicazione, si ha che il sequente premessa è vero mentre il sequente conclusione è falso perchè $\forall \mathbf{y} (\mathbf{x} > \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > \mathbf{0})$ è falso per $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

2. L'asserzione

La cometa x entra nell'orbita di cattura del Sole $\vdash C$ è una scia luminosa nel cielo.
 Qualche cometa entra nell'orbita di cattura del Sole $\vdash C$ è una scia luminosa nel cielo.

si può formalizzare in

$$\frac{C(\mathbf{x}) \& O(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \vdash L}{\exists \mathbf{x} (C(\mathbf{x}) \& O(\mathbf{x}, \mathbf{s})) \vdash L}$$

usando

$C(x) = "x \text{ è una cometa}"$

$O(x, y) = "x \text{ entra nell'orbita di cattura di } y"$

$L = "c'è una scia luminosa nel cielo"$

$s = "Sole"$

che è un esempio di applicazione corretta della regola \exists -S visto che \mathbf{x} non compare libera nel sequente conclusione. Quindi l'applicazione della regola è valida con la sua inversa, ovvero anche l'asserzione ottenuta invertendo la conclusione con la premessa è pure valida.

3. l'asserzione

Pippo vede la stella Sirio \vdash Il cielo non è nuvoloso.
 Pippo vede tutte le stelle \vdash Il cielo non è nuvoloso.

si formalizza in

$$\frac{S(s) \& V(p, s) \vdash \neg L}{\forall x (S(x) \rightarrow V(p, x)) \vdash \neg L}$$

usando

$V(x, y) = "x \text{ vede } y"$

$S(x) = "x \text{ è una stella}"$

$L = "Il \text{ cielo è nuvoloso}"$

$p = "Pippo"$

$s = "Sirio"$

A prima vista non è applicazione di una regola come quella del "per ogni" a sx veloce. Allora proviamo a cercare una derivazione della conclusione per capire se la conclusione segue dalla premessa...

$$\frac{\frac{\frac{L, \forall \mathbf{x} (S(\mathbf{x}) \rightarrow V(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \vdash S(\mathbf{s}) \quad L, \forall \mathbf{x} (S(\mathbf{s}) \rightarrow V(\mathbf{p}, \mathbf{x})), V(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \vdash}{L, \forall \mathbf{x} (S(\mathbf{x}) \rightarrow V(\mathbf{p}, \mathbf{x})), S(\mathbf{s}) \rightarrow V(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \vdash} \rightarrow -S}{\frac{L, \forall \mathbf{x} (S(\mathbf{x}) \rightarrow V(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \vdash}{\forall \mathbf{x} (S(\mathbf{x}) \rightarrow V(\mathbf{p}, \mathbf{x})), L \vdash} \forall -S} \neg -D$$

Ora dalla foglia di sx possiamo dedurre che se facciamo un modello

$$\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{Sirio}, \mathbf{Pippo}\}$$

in cui poniamo

per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D} \ S(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = 0$

$\mathbf{L}^{\mathbf{D}} = 1$

$\mathbf{s}^{\mathbf{D}} = \mathbf{Sirio}, \mathbf{p}^{\mathbf{D}} = \mathbf{Pippo}$

e infine $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}$ definito a piacere

abbiamo che $(\forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x})))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ perchè non c'è nessuna stella in \mathbf{D} , ovvero $\mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$, e quindi l'implicazione $(\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, mentre $(\neg \mathbf{L})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ e dunque nel modello il sequente $\forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \vdash \neg \mathbf{L}$ risulta falso. Invece il sequente $\mathbf{S}(\mathbf{s}) \& \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \vdash \neg \mathbf{L}$ risulta vero nel modello perchè $(\mathbf{S}(\mathbf{s}) \& \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \rightarrow \neg \mathbf{L})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ in quanto $\mathbf{S}(\mathbf{s})^{\mathcal{D}} = \mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{s}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{0}$ e dunque $(\mathbf{S}(\mathbf{s}) \& \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{s}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$, ovvero l'implicazione è vera nel modello scelto.

In conclusione l'asserzione di partenza *NON* è *valida* perchè abbiamo trovato un modello in cui la premessa è vera ma la conclusione no.

Esercizi su uguaglianza

- Nell'estensione di LC con uguaglianza stabilire se sono validi o meno, o soddisfacibili o meno i seguenti sequenti:

$$1. \vdash \forall x \, x = x$$

è **valido** perchè si deriva in tal modo

$$\frac{\begin{array}{c} = -ax \\ \vdash x = x \end{array}}{\vdash \forall x \, x = x} \forall -D$$

ove l'applicazione di $\forall -D$ è lecita perchè x non è libera nel sequente radice.

$$2. \vdash \neg \forall x \, x = x$$

il sequente è **insoddisfacibile** perchè una derivazione non si trova (provarci per crederci!) e possiamo subito a derivare la negazione della sua conclusione ovvero $\vdash \neg \neg \forall x \, x = x$

$$\frac{\begin{array}{c} = -ax \\ \vdash x = x \end{array}}{\vdash \forall x \, x = x} \forall -D \quad \frac{\vdash \forall x \, x = x}{\neg \forall x \, x = x \vdash} \neg -S \quad \frac{\neg \forall x \, x = x \vdash}{\vdash \neg \neg \forall x \, x = x} \neg -D$$

$$3. \vdash \forall y \, \forall x \, x = y$$

Per vedere se è valido proviamo a derivarlo...

$$\frac{\vdash x = y}{\vdash \forall x \, x = y} \forall -D \quad \frac{\vdash \forall x \, x = y}{\vdash \forall y \, \forall x \, x = y} \forall -D$$

ove la prima applicazione di $\forall -D$ è corretta perchè y non appare libera nel sequente radice, ed anche la seconda applicazione di $\forall -D$ è corretta perchè x non appare libera nel suo sequente conclusione.

Non trovando derivazione si prova a costruire contromodello di $x = y$. Basta prendere un dominio

$$\mathbf{D} \equiv \{1, 2\}$$

e si ha che siccome $(x = y)^{\mathcal{D}}(1, 2) \equiv \mathbf{0}$ perchè $1 \neq 2$ allora

$$\vdash x = y$$

è **NON valido** (perchè falso nel contromodello sopra) e avendo usato regole sicure pure $\vdash \forall y \, \forall x \, x = y$ è **NON valido**.

Poi per vedere se $\vdash \forall y \forall x x=y$ è soddisfacibile si prova a derivare la sua negazione e si trova ad esempio

$$\frac{\frac{\frac{\forall y \forall x x=y, \forall x x=y, x=y \vdash}{\forall y \forall x x=y, \forall x x=y \vdash} \forall-S}{\forall y \forall x x=y \vdash} \forall-S}{\vdash \neg \forall y \forall x x=y} \neg-D$$

e si prova a costruire contromodello di $\forall y \forall x x=y, \forall x x=y, x=y$.

A tal scopo basta dominio $\mathbf{D} \equiv \{1\}$ e si ha che per ogni $d, d' \in \mathbf{D}$ si ha $(x=y)^{\mathcal{D}}(d, d') = 1$, da cui segue che $\vdash \forall y \forall x x=y$ è **soddisfacibile**, appunto in un dominio con al più un unico elemento!!

4. $\vdash \exists x x = c$ è valido in quanto una sua derivazione è

$$\frac{\frac{= -ax}{\vdash c=c}}{\vdash \exists x x = c} \exists-Dv$$

5. $\vdash \forall y \forall x (y = z \rightarrow x = z)$

Proviamo a derivarlo

$$\frac{\frac{\frac{y = z \vdash x = z}{\vdash y = z \rightarrow x = z} \rightarrow-D}{\vdash \forall x (y = z \rightarrow x = z)} \forall-D}{\vdash \forall y \forall x (y = z \rightarrow x = z)} \forall-D$$

ove la prima applicazione di $\forall-D$ è corretta perchè y non appare libera nel sequente radice, ed anche la seconda applicazione di $\forall-D$ è corretta perchè x non appare libera nel suo sequente conclusione.

Ora si trova un contromodello della foglia $y = z \vdash x = z$

Basta prendere

$$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$$

e in questo modello

$$(y = z \rightarrow x = z)^{\mathcal{D}}(\text{Minni}, \text{Topolino}, \text{Topolino}) = 0$$

perchè $y = z^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}, \text{Topolino}) = 1$ mentre $x = z^{\mathcal{D}}(\text{Minni}, \text{Topolino}) = 0$ (si ricordi che x corrisponde al primo elemento della tripla, y al secondo e z al terzo). Dunque il sequente di partenza è NON valido.

Chiaramente $\forall y \forall x (y = z \rightarrow x = z)$ è soddisfacibile. Basta prendere un modello con un unico elemento

$$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}\}$$

perchè in tal caso per ogni $d_1, d_2, d_3 \in \mathbf{D}$ che sono tutti uguali a Topolino si ha

$$(y = z \rightarrow x = z)^{\mathcal{D}}(d_1, d_2, d_3) = (y = z)^{\mathcal{D}}(d_2, d_3) \rightarrow (x = z)^{\mathcal{D}}(d_1, d_3) = 1 \rightarrow 1 = 1$$

e dunque il sequente di partenza è vero nel modello, e quindi è soddisfacibile.

6. $\vdash \forall y \forall x \forall z (x = y \ \& \ y = z \rightarrow x = z)$
7. $\vdash \exists x \exists y x = y$
8. $\vdash \forall x \exists y \exists z (x = y \vee y = z)$
9. $\forall w \ w = a \vdash \forall x \forall y x = y$

10.11 Sostituzione di una variabile

La sostituzione di un termine t al posto di una variabile x in una formula

$$\mathbf{fr}(x)$$

per ottenere $\mathbf{fr}(t)$ NON è sempre lecita. Il motivo è che una sostituzione deve per forza conservare la validità in quanto in ogni modello \mathcal{D} vale

$$\mathbf{fr}(\mathbf{x}) \text{ è vera} \quad \text{sse} \quad \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}(\mathbf{x}) \text{ è vera}$$

e dunque se $\mathbf{fr}(x)$ è vera in un modello allora lo deve essere pure $\mathbf{fr}(t)$. Ma allora vediamo con questo esempio che NON ogni sostituzione funziona in tal senso e che dobbiamo proibire certe sostituzioni. Per esempio se pensiamo che

$$\mathbf{fr}(x) \equiv \exists \mathbf{y} \mathbf{y} \text{ è madre di } \mathbf{x}$$

allora sappiamo che vale pure

$$\forall \mathbf{x} \mathbf{fr}(\mathbf{x}) \equiv \forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{y} \text{ è madre di } \mathbf{x}$$

ovvero “*ciascuno ha una madre*” il che è vero nel modello in cui il dominio è costituito dagli uomini e il predicato è interpretato come sopra. Ora se sostituiamo in questo $\mathbf{fr}(x)$ un'altra variabile \mathbf{w} o costante \mathbf{c} continua a valere $\mathbf{fr}(t)$ nel modello assegnato. Invece se sostituiamo \mathbf{x} con \mathbf{y} otteniamo

$$\mathbf{fr}(y) \equiv \exists \mathbf{y} \mathbf{y} \text{ è madre di } \mathbf{y}$$

il che è falso nel modello. Da questo esempio concludiamo che non possiamo sostituire in una variabile libera di una formula una variabile che è vincolata nella sottoformula che contiene la variabile libera.

Diamo di seguito la definizione di sostituzione di un termine t al posto di x in una formula $\mathbf{fr}(\mathbf{x})$ di un linguaggio predicativo che indichiamo con la scrittura $\mathbf{fr}[x/t]$:

Def. 10.12 Dato un termine t e una formula $\mathbf{fr}(\mathbf{x})$ di un linguaggio predicativo definiamo:

$$\begin{aligned} P_k(t_1, \dots, t_m)[x/t] &\equiv P_k(t_1[x/t], \dots, t_m[x/t]) \\ (\forall y_i \mathbf{fr})[x/t] &\equiv \begin{cases} \forall y_i \mathbf{fr}[x/t] & \text{se } y_i \neq x \text{ e } x \text{ compare in } \mathbf{fr} \\ & \text{e } y_i \text{ NON compare libera in } t \\ \forall y_i \mathbf{fr} & \text{se } y_i \equiv x \text{ o } x \text{ non compare in } \mathbf{fr} \end{cases} \\ (\exists y_i \mathbf{fr})[x/t] &\equiv \begin{cases} \exists y_i \mathbf{fr}[x/t] & \text{se } y_i \neq x \text{ e } x \text{ compare in } \mathbf{fr} \\ & \text{e } y_i \text{ NON compare libera in } t \\ \exists y_i \mathbf{fr} & \text{se } y_i \equiv x \text{ o } x \text{ non compare in } \mathbf{fr} \end{cases} \\ (\mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2)[x/t] &\equiv \mathbf{fr}_1[x/t] \& \mathbf{fr}_2[x/t] \\ (\mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2)[x/t] &\equiv \mathbf{fr}_1[x/t] \vee \mathbf{fr}_2[x/t] \\ (\mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2)[x/t] &\equiv \mathbf{fr}_1[x/t] \rightarrow \mathbf{fr}_2[x/t] \\ (\neg \mathbf{fr}_1)[x/t] &\equiv \neg \mathbf{fr}_1[x/t] \end{aligned}$$

MORALE

Quando sostituisci una variabile y al posto di x in un predicato $\text{pr}(x)$ controlla che - SE compare $\forall y$ o $\exists y$ in $\text{pr}(x)$ - la sostituzione di x con y NON faccia cadere il nuovo y sotto il POTERE di $\forall y$ o $\exists y$ ovvero aumenti il numero di occorrenze di y in loro potere!

$$\frac{\exists y \ y < y \vdash \nabla}{\forall x \ \exists y \ x < y \vdash \nabla} \forall\text{-S} \quad \text{NOOOOO!!!!}$$

$$\frac{\forall y \ y = a \vdash y = z}{\forall y \ y = a \vdash \forall x \ x = z} \forall\text{-D} \quad \text{SI!!!!}$$

Stabilire quali delle seguenti applicazioni di $\forall\text{-S}$ o $\exists\text{-D}$ sono lecite

1. È lecita la seguente applicazione di $\forall\text{-S}$

$$\frac{\forall y \ \exists x \ x < y + z, \quad \exists x \ x < x + z \vdash \nabla}{\forall y \ \exists x \ x < y + z \vdash \nabla} \forall\text{-S}$$

??

NO, perchè la sostituzione di y con x NON è lecita (dal basso verso l'alto) perchè aumenta il potere di azione di $\exists x$

2. È lecita la seguente applicazione di $\forall\text{-S}$

$$\frac{\forall y \ \exists x \ x < y + z, \quad \exists x \ x < z + z \vdash \nabla}{\forall y \ \exists x \ x < y + z \vdash \nabla} \forall\text{-S}$$

??

SÌ perchè è lecita la sostituzione in quanto z è libera nel sequente conclusione.

3. È lecita la seguente applicazione di $\forall\text{-D}$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \ x < z + z}{\Gamma \vdash \forall y \ \exists x \ x < y + z} \forall\text{-D}$$

??

NO ma per la condizione sull'applicazione di $\forall\text{-D}$ (e non per errori di sostituzione!) perchè z è libera nel sequente conclusione.

4. È lecita la seguente applicazione di $\forall\text{-D}$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \ x < x + z}{\Gamma \vdash \forall y \ \exists x \ x < y + z} \forall\text{-D}$$

??

NO perchè la sostituzione di y con x NON è lecita in quanto aumenta il potere di azione dell' $\exists x$.

5. È lecita la seguente applicazione di \forall -D

$$\frac{\forall y C(y) \vdash \exists x x < y + z}{\forall y C(y) \vdash \forall w \exists x x < w + z} \forall\text{-D}$$

??

Sì perchè la variabile **y** NON è libera nel sequente conclusione e la sostituzione è lecita visto che non aumenta il potere della quantificazione di **y** nel sequente conclusione.

10.12 Regole derivate

Una regola

$$\frac{\Gamma' \vdash D'}{\Gamma \vdash D} \text{ regola*}$$

si dice **regola derivata** nella logica $\text{LC}_{=}$ se
supposti i suoi sequenti premessa derivabili in $\text{LC}_{=}$,
ovvero data una derivazione

$$\begin{array}{c} \pi \\ \vdots \\ \Gamma' \vdash D' \end{array}$$

allora la derivazione ottenuta applicando la regola

$$\frac{\begin{array}{c} \pi \\ \vdots \\ \Gamma' \vdash D' \end{array}}{\Gamma \vdash D} \text{ regola*}$$

si può ESPANDERE in una derivazione di $\Gamma \vdash D$ a partire da π in $\text{LC}_{=}$ SENZA ispezionare le derivazioni dei sequenti premessa.

Ciò significa che una *regola derivata* è localmente trasformabile in un pezzo di albero di derivazione usando interamente regole di $\text{LC}_{=}$.

Esempi di regole derivate

Il sequente

$$\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C \quad \neg\text{-ax}_{sx1}$$

è assioma **derivato** perchè abbrevia:

$$\frac{\frac{\Gamma, A, \Gamma', \Gamma'' \vdash A, C}{\Gamma, A, \Gamma', \Gamma'', \neg A \vdash C} \neg\text{-S}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \text{sc}_{\text{sx}}$$

Per esercizio si mostri che i seguenti sono tutti assiomi derivati:

$$\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \quad \neg\text{-ax}_{sx2}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg\neg\text{ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \quad \frac{\neg\neg\text{ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''} \\
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta} \neg\neg\text{-S} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta} \neg\neg\text{-D} \\
\text{rf}^* \\
\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \\
\text{sm}^* \\
\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \\
\text{tra}^* \\
\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta \\
\text{cp}^* \\
\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta
\end{array}$$

10.12.1 Per velocizzare derivazioni: regole di indebolimento

$$\frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma} \text{in}_{\text{sx}} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{in}_{\text{dx}}$$

Queste regole sono valide, ma non altrettanto le loro inverse, perchè?

10.13 Validità = derivabilità in $\text{LC}_=$

Il fatto che tutte le **regole di $\text{LC}_=$** sono **valide** rispetto alla semantica dei modelli classici ci permette di concludere che i sequenti derivabili sono validi rispetto alla semantica classica dei modelli. Ma vale pure il viceversa:

Theorem 10.13 (validità + completezza di sequenti in LC rispetto a semantica classica)

sequenti derivabili in $\text{LC}_=$ = sequenti validi rispetto alla semantica classica

Come corollario le formule valide sono esattamente i teoremi di $\text{LC}_=$

Theorem 10.14 (validità + completezza di formule in $\text{LC}_=$ rispetto a semantica classica)

teoremi (=formule derivabili) in $\text{LC}_=$ = tautologie predicative classiche

Ovvero tutte le **tautologie** della semantica classica, ovvero tutte le formule **valide** in ogni modello, sono **teoremi** di $\text{LC}_=$, ovvero formule derivabili in $\text{LC}_=$.

10.13.1 ATTENZIONE: NON Esiste procedura di decisione per \mathbf{LC} o $\mathbf{LC}_=$

Le regole COLPEVOLI dell' assenza di un processo decisione per \mathbf{LC} e per $\mathbf{LC}_=$ sono

$$\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall-S \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists-D$$

oltrechè la regola $=-S$, poichè nel cercare una derivazione di un sequente radice dal basso verso l'altro \Uparrow con queste regole **aumenta la complessità** dei segni. Si ricorda che non si può fare altrimenti se si vuole avere una procedura anche semi-automatica come in sezione 10.7.1 perchè le versioni veloci di queste regole non sono sicure ovvero non permettono di concludere che se una foglia è falsa in un modello anche la radice lo è.

Per esempio nel cercare una derivazione dalla radice verso l'alto \Uparrow del tipo

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\Gamma, A(t), A(s), A(u), \forall x A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, A(t), A(s), \forall x A(x), A(u) \vdash \nabla} sc_{sx} \\ \frac{\Gamma, A(t), A(s), \forall x A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, A(t), A(s), \forall x A(x), A(s) \vdash \nabla} \forall-S \\ \frac{\Gamma, A(t), \forall x A(x), A(s) \vdash \nabla}{\Gamma, A(t), \forall x A(x) \vdash \nabla} sc_{sx} \\ \frac{\Gamma, A(t), \forall x A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla} \forall-S \\ \frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall-S \end{array}$$

applicando le regole sopra dal basso verso l'alto aggiungiamo sempre più termini, e non è detto che si riesca a capire se si può raggiungere o meno un assioma senza provare a fare un contromodello di un sequente foglia anche se non si sono applicate tutte le regole possibili. In tal caso ci conviene trovare il contromodello del sequente ottenuto PRIMA dell'applicazione di $\forall-S$.

10.13.2 Perchè modelli sono basati su dominio non vuoto

Osserviamo che il sequente

$$\vdash \exists x \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ per esempio in tal modo

$$\begin{array}{c} =-ax \\ \vdash y=y \\ \hline \vdash \exists x x=x \end{array} \exists-re$$

Questa derivazione ci porta a concludere che per dimostrare che in OGNI MODELLO su un dominio \mathbf{D} vale $\exists x \mathbf{x} = \mathbf{x}$ occorre ASSUMERE che esista almeno un $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$, che poi verifica banalmente che $\mathbf{d} = \mathbf{d}$, e quindi occorre che il dominio sia NON vuoto.

10.14 Consigli su ricerca validità

Nell'intento di cercare una derivazione di un sequente è meglio:

applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e \forall -D e \exists -S
se non si riesce a derivare il sequente meglio costruire il contromodello falsificando il sequente che si trova lungo il ramo che non finisce con foglie tutte assiomi PRIMA di una (o una seconda) applicazione di \forall -S o \exists -D
Se si confida di poter derivare il sequente si possono abbreviare le derivazioni con le regole di indebolimento
NON USARE regole NON SICURE per costruire contromodelli (e, sebbene NON sia obbligatorio, controllare che il sequente radice sia falso nel contromodello)
NON USARE regole NON SICURE se non si è sicuri se il sequente è derivabile
usare SOLO le lettere w, x, y, z come VARIABILI nelle regole \exists -S e \forall -D
usare le lettere minuscole a, b, c, d, ... come costanti
le lettere u, v, u, t, s sono usate come METAVARIABILI per termini ovvero sono usate al posto sia di costanti che di variabili

10.14.1 Esercizi su formalizzazione con uguaglianza

Formalizzare le frasi seguenti e provare se sono validi o meno, e soddisfacibili o meno:

1. L'asserzione

Il programma fattoriale su 2 dà un'unico output.
Il programma fattoriale su 2 dà output il numero 2.
Il programma fattoriale su 2 dà output il numero x .

Il numero x è uguale 2.

si può formalizzare in

$$\exists y \, O(y, f, 2) \ \& \ \forall y_1 \, \forall y_2 \, (\, O(y_1, f, 2) \ \& \ O(y_2, f, 2) \rightarrow y_1 = y_2 \,), \, O(2, f, 2), \, O(x, f, 2) \vdash x = 2$$

con

f = “ il fattoriale”

2 = “ il numero due”

$O(x, y, z)$ = “ il programma y su z dà output il numero x ”

Nel seguito usiamo le seguenti abbreviazioni:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{O}(\mathbf{x}, \mathbf{f}, 2)$$

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{Q(2), Q(x) \vdash Q(2), x = 2} \quad \frac{\text{ax-id}}{Q(2), Q(x) \vdash Q(x), x = 2}}{Q(2), Q(x) \vdash Q(2) \& Q(x), x = 2} \quad \&-D \quad \frac{\frac{\text{ax}=\frac{Q(2), Q(x), 2 = x \vdash 2 = 2}{Q(2), Q(x), 2 = x \vdash x = 2} = -S}{Q(2), Q(x), 2 = x \vdash x = 2} \rightarrow -S}{\frac{Q(2), Q(x), Q(2) \& Q(x) \rightarrow 2 = x \vdash x = 2}{Q(2), Q(x), \forall y_2 (Q(2) \& Q(y_2) \rightarrow 2 = y_2) \vdash x = 2} \forall -Sv} \rightarrow -S$$

$$\frac{\frac{Q(2), Q(x), \exists y Q(y), \forall y_2 (Q(2) \& Q(y_2) \rightarrow 2 = y_2) \vdash x = 2}{Q(2), Q(x), \exists y Q(y), \forall y_1 \forall y_2 (Q(y_1) \& Q(y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \vdash x = 2} \forall -Sv}{\frac{Q(2), Q(x), \exists y Q(y) \& \forall y_1 \forall y_2 (Q(y_1) \& Q(y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \vdash x = 2}{\exists y Q(y) \& \forall y_1 \forall y_2 (Q(y_1) \& Q(y_2) \rightarrow y_1 = y_2), Q(2), Q(x) \vdash x = 2} \&-S} \text{sc}_{sx}$$

2. L'asserzione

Franco è venuto ad una sola riunione.

Franco non è venuto all'ultima riunione.

Franco è venuto alla riunione del 10 giugno.

L'ultima riunione non è quella del 10 giugno.

si può formalizzare in

$$\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), \neg V(f, u), V(f, d) \vdash u \neq d$$

ove si consiglia di usare:

$V(x, y)$ = x è venuto alla riunione y

u=ultima riunione

d=riunione del 10 giugno

f=Franco

Il sequente è derivabile in $LC_=$ ad esempio come segue:

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), u = d, V(f, u) \vdash V(f, u)}{\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), V(f, d), u = d \vdash V(f, u)} = -S$$

$$\frac{\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), V(f, d), u = d \vdash V(f, u)}{\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), V(f, d), u = d, \neg V(f, u) \vdash} \neg -S$$

$$\frac{\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), \neg V(f, u), V(f, d), u = d \vdash}{\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), \neg V(f, u), V(f, d) \vdash u \neq d} \text{sc}_{sx}$$

$$\frac{\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), \neg V(f, u), V(f, d) \vdash u \neq d}{\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), \neg V(f, u), V(f, d) \vdash u \neq d} \neg -D$$

Il programma fattoriale su 3 dà come unico output 6.

3. Il programma fattoriale su 3 dà output il numero x.

Il numero x è uguale a 6.

con

f= " il fattoriale"

3= " il numero tre"

6= " il numero sei"

$O(x, y, z)$ = " il programma y su z dà output il numero x"

4.
$$\frac{\begin{array}{l} \text{Il programma fattoriale su 2 dà un'unico output.} \\ \text{Il programma fattoriale su 2 dà output il numero 2.} \\ \text{Il programma fattoriale su 2 dà output il numero } x. \end{array}}{\text{Il numero } x \text{ è uguale 2.}}$$
- con
 $f =$ “ il fattoriale”
 $2 =$ “ il numero due”
 $O(x, y, z) =$ “ il programma y su z dà output il numero x ”
5.
$$\frac{\begin{array}{l} \text{Il programma fattoriale su 2 dà un'unico output.} \\ \text{Il programma fattoriale su 2 dà output 2.} \\ \text{2 è diverso da 3} \end{array}}{\text{Il programma fattoriale su 2 non dà output 3.}}$$
- con
 $f =$ “ il fattoriale”
 $2 =$ “ il numero due”
 $3 =$ “ il numero tre”
 $O(x, y, z) =$ “ il programma y su z dà output il numero x ”

10.14.2 Esercizio svolto seguendo i consigli dati

Esercizio Stabilire validità e soddisfacibilità o meno della formalizzazione dell'asserzione:

Se gli studenti hanno coscienza di rispettare il silenzio allora ogni richiamo è superfluo.

Se gli studenti non hanno coscienza di rispettare il silenzio allora ogni richiamo è inefficace.

Ogni richiamo è superfluo o inefficace.

ove si consiglia di usare:

$S(x) = x$ è studente

$C(x) = x$ ha coscienza di rispettare il silenzio

$R(x) = x$ è un richiamo

$E(x) = x$ è efficace

$P(x) = x$ è superfluo

Soluzione Il seguente si può formalizzare così:

$$\forall x (S(x) \rightarrow C(x)) \rightarrow \forall x (R(x) \rightarrow P(x)), \forall x (S(x) \rightarrow \neg C(x)) \rightarrow \forall x (R(x) \rightarrow \neg E(x)) \\ \vdash \forall x (R(x) \rightarrow P(x) \vee \neg E(x))$$

Seguiamo lo schema in sezione 10.7.1 per stabilire la sua validità e iniziamo a cercare una sua derivazione in tal modo:

usiamo a tal scopo le seguenti abbreviazioni

$pr_1 \equiv \forall x (S(x) \rightarrow C(x))$

$pr_2 \equiv \forall x (R(x) \rightarrow P(x))$

$pr_3 \equiv \forall x (S(x) \rightarrow \neg C(x))$

$pr_4 \equiv \forall x (R(x) \rightarrow \neg E(x))$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}), \mathbf{S}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{C}(\mathbf{z}), \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{z}), \mathbf{P}(\mathbf{x})} \rightarrow -D}{\mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{pr}_1, \mathbf{P}(\mathbf{x})} \forall -D \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}), \mathbf{pr}_2 \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow -S \\
\frac{\frac{\frac{\mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}), \mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2 \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})} SC_{sx}}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}) \vdash \neg \mathbf{C}(\mathbf{w}), \mathbf{P}(\mathbf{x})} \neg -D \\
\frac{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{w}) \rightarrow \neg \mathbf{C}(\mathbf{w}), \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{pr}_3, \mathbf{P}(\mathbf{x})} \rightarrow -D \quad \forall -D \\
\frac{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{pr}_3, \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4 \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})} seq \rightarrow -S \\
\frac{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4, \mathbf{R}(\mathbf{x}) \vdash \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{P}(\mathbf{x})} SC_{sx} \quad \neg -D \\
\frac{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4, \mathbf{R}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x}), \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4, \mathbf{R}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})} SC_{dx} \quad \forall -D \\
\frac{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4, \mathbf{R}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4 \vdash \mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})} \rightarrow -D \quad \forall -D \\
\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4 \vdash \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}))
\end{array}$$

ove $seq \equiv \mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{pr}_4 \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})$

e inoltre il primo $\forall -D$ si può applicare perchè x non è libera nel sequente radice, mentre l'altro $\forall -D$ si può applicare perchè w non è libera nel sequente $\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{C}(\mathbf{x})), \mathbf{P}(\mathbf{x})$ e l'ultimo $\forall -D$ si può applicare perchè z non è libera nel sequente $\mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{pr}_1, \mathbf{P}(\mathbf{x})$.

Ora la foglia più a sinistra non è un assioma e non si può applicare altro. Chiaramente questo dice che il sequente NON è valido perchè abbiamo applicato solo regole sicure.

Quindi costruiamo un modello dove sia falsa la foglia

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}), \mathbf{S}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{C}(\mathbf{z}), \mathbf{P}(\mathbf{x})$$

Dato che l'interpretazione di questo sequente foglia in un dominio \mathbf{D} è una funzione

$$(((\mathbf{R}(\mathbf{x}) \& \mathbf{E}(\mathbf{x})) \& \mathbf{S}(\mathbf{w})) \& \mathbf{C}(\mathbf{w})) \& \mathbf{S}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{z}) \vee \mathbf{P}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D}} : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{0, 1\}$$

per far sì che non sia la funzione costante $\mathbf{1}$ basta trovare una terna $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ in $\mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \mathbf{D}$ da sostituire al posto di $\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}$ che renda falsa l'implicazione, ovvero per cui risulti

$$(((\mathbf{R}(\mathbf{x}) \& \mathbf{E}(\mathbf{x})) \& \mathbf{S}(\mathbf{w})) \& \mathbf{C}(\mathbf{w})) \& \mathbf{S}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{z}) \vee \mathbf{P}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = 0$$

Basta porre

$$\mathbf{D} = \{\mathbf{Licia}, \mathbf{Mario}, \mathbf{Betti}\}$$

pensando di mettere **Licia** al posto di \mathbf{w} , poi **Mario** al posto di \mathbf{x} e infine **Betti** al posto di \mathbf{z} , mandando a $\mathbf{0}$ o $\mathbf{1}$ i predicati su di loro a seconda se si trovino a dx o a sx del sequente.

Possiamo definire la semantica dei vari predicati usando sempre \mathbf{x} come variabile per ogni predicato sopra (visto che ciascun predicato ha solo una variabile libera e quando si definisce singolarmente la sua interpretazione nel modello non importa il nome della sua variabile!) come segue

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{Mario}) = 0 & \mathbf{R}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{Mario}) = 1 & \mathbf{E}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{Mario}) = 1 \\
\mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{Licia}) = 1 & \mathbf{C}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{Licia}) = 1 & \\
\mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{Betti}) = 1 & \mathbf{C}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{Betti}) = 0 &
\end{array}$$

(questo non dice cosa fa ogni predicato su **Mario**, **Licia** e **Betti** ma queste sono informazioni sufficienti per falsificare il sequente...)

Poi si definisca i rimanenti valori a piacere

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = ?? & \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = ?? \\ \mathbf{R}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = ?? & \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = ?? \\ \mathbf{E}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = ?? & \mathbf{E}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = ?? \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = ?? & \mathbf{C}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = ?? \end{array}$$

ovvero si fissi al posto dei punti di domanda un valore a piacere (in questo modo il modello è completamente determinato!).

Nel modello risulta banalmente che

$$(((\mathbf{R}(\mathbf{x}) \ \& \ \mathbf{E}(\mathbf{x})) \ \& \ \mathbf{S}(\mathbf{w})) \ \& \ \mathbf{C}(\mathbf{w})) \ \& \ \mathbf{S}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{z}) \vee \mathbf{P}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}, \mathbf{Mario}, \mathbf{Betti}) = \mathbf{0}$$

(si ricordi di assegnare gli elementi del dominio secondo l'ordine alfabetico, ovvero di mettere **Licia** al posto di **w**, poi **Mario** al posto di **x** e infine **Betti** al posto di **z**).

Ora si noti che **Mario** è la causa per cui nel modello risulta falso

$$\forall \mathbf{x} \ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}))$$

perchè rende vero **R(x)** ma non **P(x)** e nemmeno $\neg \mathbf{E}(\mathbf{x})$.

Poi si noti che **Licia** è la causa per cui nel modello risulta falso

$$\mathbf{pr}_3 \equiv \forall \mathbf{x} \ (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{C}(\mathbf{x}))$$

in quanto verifica **S(x)** ma non $\neg \mathbf{C}(\mathbf{x})$. Dunque nel modello risulta vera l'implicazione

$$\mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4$$

essendo l'antecedente dell'implicazione falso nel modello.

Infine si noti che **Betti** è la causa per cui nel modello risulta falso

$$\mathbf{pr}_1 \equiv \forall \mathbf{x} \ (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{x}))$$

in quanto verifica **S(x)** ma non **C(x)**. Dunque nel modello risulta vera l'implicazione

$$\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2$$

essendo l'antecedente dell'implicazione falso nel modello.

Dunque il sequente iniziale

$$\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4 \vdash \forall \mathbf{x} \ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}))$$

è **NON valido**.

Per vedere se è soddisfacibile, possiamo applicare la procedura derivando

$$\vdash \neg ((\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) \ \& \ (\mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4) \rightarrow \forall \mathbf{x} \ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})))$$

e vediamo che

$$\frac{\frac{\vdash (\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) \ \& \ (\mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4) \quad \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})) \vdash}{(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) \ \& \ (\mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4) \rightarrow \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})) \vdash} \rightarrow -S}{\vdash \neg((\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) \ \& \ (\mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4) \rightarrow \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})))} \neg -D$$

Consideriamo la foglia di destra e secondi i consigli in 10.14 ci fermiamo senza applicare la regola $\forall -S$ e cerchiamo di trovare un modello in cui $\forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}))$ è vera.

A tal fine, essendo una quantificazione universale basta porre l'interpretazione della funzione

$$(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

come funzione costante **1**. A tal scopo, basta scegliere un dominio **D** non vuoto qualsiasi e porre o la premessa sempre a **0**, o la conclusione sempre a **1**. Scegliamo la prima ovvero poniamo

$$\text{per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D} \quad \mathbf{R}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

e in tal caso per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ $(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ e dunque

$$(\forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Dunque il sequente è **soddisfacibile** in tal modello.

10.14.3 Soluzioni di esercizi su regole valide

1. Si stabilisca se la regola

$$\frac{C \vdash A(x) \vee \perp, \nabla}{C \vdash \forall x A(x), \nabla} \quad 1(VL(C) = \emptyset)$$

è sicura, ovvero valida con la sua inversa.

Questa regola è NON valida perchè permette una quantificazione universale SENZA PROIBIRE l'occorrenza di **x** come variabile libera in ∇ che è invece proibita nella regola $\forall -D$.

Per provarlo, mostriamo che il suo utilizzo assieme alle regole del calcolo **LC**₌ permette di derivare un sequente non valido come segue.

$$\frac{\frac{\frac{\neg -\mathbf{ax}_{dx_1}}{\vdash \mathbf{A}(\mathbf{x}), \perp, \neg \mathbf{A}(\mathbf{x})} \quad \vdash \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp, \neg \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \neg \mathbf{A}(\mathbf{x})} \vee -D \quad \mathbf{1}}{\vdash \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})} sc_{dx} \quad \vdash \forall \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee -D$$

ove l'applicazione di $\forall -D$ è corretta perchè **x** non è libera nel sequente radice.

Ora mostriamo che la radice dell'albero sopra

$$\vdash \forall \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

NON è un sequente valido. Infatti la formula $\forall \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ che interpreta il sequente non è vera ad esempio nel modello

$$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \text{ sse } \mathbf{d} \text{ è maschio}$$

in quanto in tal modello si ha che $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}(\text{Minni})} = 0$ e dall'altra parte si ha pure $(\forall \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}(\text{Topolino})} = 1$ e dunque concludiamo

$$(\forall \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$$

Ora vediamo che la *regola inversa inv-1* di

$$\frac{C \vdash A(x) \vee \perp, \nabla}{C \vdash \forall x A(x), \nabla} 1(VL(C) = \emptyset)$$

ovvero

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash A(x) \vee \perp, \nabla} \text{inv} - 1(\mathbf{VL}(\mathbf{C}) = \emptyset)$$

è **valida**.

Lo proviamo nel caso in cui ∇ è composta da una sola formula (che è equivalente al caso in cui è composta da più formule perchè è sempre possibile trasformare la virgola a sinistra come & e quella a destra come \vee) e sia dipendente sia da \mathbf{x} che da \mathbf{y} dato che restringersi alle proposizioni senza variabili potrebbe semplificare un pò troppo. Questo caso rappresenta il caso più generale perchè trattare la presenza di più variabili oltre ad \mathbf{x} è equivalente a trattare un'unica variabile \mathbf{y} oltre ad \mathbf{x} . Dunque supponiamo

$$\nabla \equiv \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Ora mostriamo che la regola è valida verificando che in ogni modello \mathcal{D} fissato vale

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \nabla^{\vee})$$

che con le scelte fatte diventa

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \rightarrow \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

Usiamo il lemma scorciatoia per mostrare questo e supponiamo che nel modello valga

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

ovvero che per ogni $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ in \mathcal{D}

$$(\mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$$

Ora per mostrare che vale nel modello pure

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

ovvero che per ogni $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ in \mathcal{D}

$$(\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$$

usiamo di nuovo il lemma scorciatoia e supponiamo che nel modello \mathcal{D} valga $\mathbf{C}^{\mathcal{D}} = 1$. Dunque per l'ipotesi

$$(\mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$$

si ricava che nel modello

$$(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$$

Ora si hanno due casi:

I caso: $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$ e quindi

$$(\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$$

Il caso: $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e quindi vale pure $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ (si noti che la variabile \mathbf{x} corrisponde alla prima componente della funzione in $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$) e dunque

$$(\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(-, -)(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$$

In conclusione avendo ispezionato la verità su una coppia $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ a piacere si conclude che il seguente conclusione

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

è vero nel modello \mathbf{D} .

Ciò significa che la regola inversa della regola **1** è **valida**.

2.

$$\frac{x \text{ parla ad alta voce} \vdash x \text{ disturba}}{\text{Qualcuno parla ad alta voce} \vdash \text{Qualcuno disturba}} \mathbf{3}$$

è istanza di una regola valida assieme alla sua inversa

ove

$P(x) = "x \text{ parla ad alta voce}"$

$D(x) = "x \text{ disturba}"$

La regola **3** si formalizza in

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x})} \mathbf{3}$$

ed è valida perchè risulta una regola derivata, ovvero composizione di regole di $\mathbf{LC}_=$, come segue

$$\frac{\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x})} \exists\text{-D}_v}{\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x})} \exists\text{-S}$$

ove l'applicazione di $\exists\text{-S}$ è corretta perchè \mathbf{x} non è libera nel seguente radice.

Invece l'inversa della regola

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x})} \mathbf{3}$$

ovvero

$$\frac{\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{D}(\mathbf{x})} \text{inv} - \mathbf{3}$$

risulta NON valida ad esempio nel modello

$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$

$\mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse \mathbf{d} è maschio

$\mathbf{D}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse \mathbf{d} è femmina

Infatti in tal modello risulta che il seguente premessa $(\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ perchè $(\exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ in quanto $\mathbf{D}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = \mathbf{1}$. Però il seguente conclusione è falso nel modello perchè

$$(\mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = \mathbf{0}$$

in quanto $\mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}(\text{Topolino})} = \mathbf{1}$ mentre $\mathbf{D}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}(\text{Topolino})} = \mathbf{0}$ ovvero nel modello fissato non vale

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{x}))$$

ovvero abbiamo mostrato un modello in cui la formula che rappresenta la regola inversa

$$(\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x})) \rightarrow \forall \mathbf{x} (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{x}))$$

NON è valida.

11 Linguaggi predicativi con simboli di funzione

Possiamo aggiungere al linguaggio predicativo L anche simboli di funzioni come segue:

Def. 11.1 (linguaggio predicativo con simboli di funzione) *Un linguaggio predicativo con uguaglianza \mathcal{L} risulta determinato dai seguenti simboli di base*

- costanti per termini : \mathbf{c}_j in numero a piacere
- funzioni tra termini: $\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ in numero a piacere
- predicati atomici : $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ in numero a piacere

e dunque per definire un modello \mathcal{D} per \mathcal{L} , oltre ad interpretare le costanti $\mathbf{c}_j \in \mathcal{D}$ e i predicati

$$\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)^{\mathcal{D}}(-, \dots, -) : \mathcal{D}^m \longrightarrow \{0, 1\}$$

dobbiamo interpretare le funzioni tra termini come funzioni tra domini

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(-, \dots, -) : \mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{D}$$

Nel caso della presenza di simboli di funzioni il calcolo dei sequenti per la logica classica predicativa viene arricchito anche di una regola dell'uguaglianza a sinistra che sostituisce il termine di sinistra con quello di destra ovvero della regola

$$\frac{\Sigma, \mathbf{s} = \mathbf{t}, \Gamma(\mathbf{t}) \vdash \Delta(\mathbf{t}), \nabla}{\Sigma, \Gamma(\mathbf{s}), \mathbf{s} = \mathbf{t} \vdash \Delta(\mathbf{s}), \nabla} = -S_{\text{sym}}$$

in quanto in presenza di simboli di funzioni non basta $=_S$ per catturare TUTTI i sequenti validi nella semantica della logica classica con uguaglianza e simboli di funzioni.

11.1 Calcolo dei sequenti LC_- per la logica classica predicativa con uguaglianza e simboli di funzione

$\frac{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'}{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'} \text{ ax-id} \quad \frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{ sc}_{\text{sx}}$ $\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&S$ $\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee-S$ $\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg-S$ $\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow-S$ $\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall-S$ $\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \nabla} \exists-S \quad (w \notin VL(\Gamma, \exists x A(x), \nabla))$ $\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -S$ $= -\text{ax}$ $\Gamma \vdash t = t, \Delta$	$\frac{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla} \text{ ax-}\perp \quad \frac{\Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla} \text{ ax-}\top$ $\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{ sc}_{\text{dx}}$ $\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-D$ $\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee D$ $\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg-D$ $\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow-D$ $\frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \forall-D \quad (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$ $\frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists-D$ $\frac{\Sigma, s = t, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), s = t \vdash \Delta(s), \nabla} = -S_{\text{sym}}$
--	--

Uso dei simboli di funzione nella formalizzazione

Problema: in quali modi possiamo formalizzare

“Ogni uomo ha come antenato suo padre”

??

Una possibilità è usare i seguenti simboli predicativi

$\mathbf{U}(\mathbf{x}) =$ “ x è un uomo”

$\mathbf{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) =$ “ y è antenato di x ”

$\mathbf{P}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) =$ “ y è padre di x ”

e formalizzarlo in

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{y} (\mathbf{P}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \ \& \ \mathbf{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x})))$$

Ma visto che il padre è unico si può introdurre un simbolo $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ per la funzione (parziale)

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \textit{padre di } x$$

e in tal caso come si formalizza la frase sopra???

Per esempio in tal modo

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{p}(\mathbf{x}), \mathbf{x}))$$

Poi un modello per il linguaggio predicativo \mathbf{L} con simboli $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ è questo:

$\mathcal{D} =$ insieme degli **uomini**

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = \begin{cases} 1 & \text{se “d è antenato di d’”} \\ 0 & \text{se “d NON è antenato di d’”} \end{cases}$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \textit{padre di } \mathbf{d}$$

ben definita perchè tutti hanno un padre!!!

12 Nozione di teoria ed esempi

Ora applichiamo quanto appreso precedentemente sulla logica classica con uguaglianza allo studio di alcune sue teorie. In senso lato passiamo dallo studio della logica a quello della scienza, ovvero di una teoria scientifica. Ci limiteremo alquanto in questo proposito, perchè ci soffermeremo solo a studiare l'aritmetica di Peano e alcune teorie tratte da contesti di vita comune.

Def. 12.1 (teoria) *Con il termine **teoria** si intende un'estensione del calcolo della logica classica con uguaglianza $LC_=$ con degli **assiomi extralogici** e **regole di composizione a dx e a sx**.*

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla} \text{comp}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{comp}_{dx}$$

ovvero in breve

TEORIA = LOGICA + regole composizione + assiomi EXTRALOGICI

Def. 12.2 (sequente derivabile in una teoria \mathcal{T}) *Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice derivabile nella teoria \mathcal{T} se esiste un albero avente*

- $\Gamma \vdash \Delta$ come radice;
- ogni foglia è istanza di un assioma di \mathcal{T}
(ossia o assioma logico di $LC_=$ o assioma extralogico specifico di \mathcal{T})
- l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di \mathcal{T}
compreso le regole di composizione dx o sx.

Def. 12.3 *Una formula **fr** si dice **teorema** di una specifica teoria \mathcal{T} se è derivabile nella teoria \mathcal{T} (ovvero è una “tautologia di \mathcal{T} ”).*

Esercizio: si provi che le regole di composizioni sono valide.

Le regole di composizioni sono anche sicure? NO, le regole di composizioni NON conservano la validità dal basso verso l'alto come si vede da questo controesempio

$$\frac{C \vdash A \quad \text{NON Valido} \quad A \vdash C \ \& \ C \quad \text{NON Valido}}{C \vdash C \ \& \ C \quad \text{Valido}} \text{comp}_{sx}$$

che funziona sia per provare che entrambe le inverse della composizione a sinistra

$$\frac{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma' \vdash A} \text{inv1-comp}_{sx} \quad \frac{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla} \text{inv2-comp}_{sx}$$

NON sono valide, e quindi la composizione a sinistra NON è una regola sicura ma solo valida, che per provare che entrambe le inverse della composizione a destra

$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma''} \text{inv1-comp}_{dx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}{A \vdash \Sigma'} \text{inv2-comp}_{dx}$$

NON sono valide, e quindi la composizione a destra NON è una regola sicura ma solo valida.

Si noti che le regole di **composizione** sono utili perchè permettono di dimostrare un certo sequente facendo uso di **lemmi**.

Ad esempio per dimostrare che un certo programma termina su \mathbf{x} quando $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ potremmo dedurlo dal fatto che sappiamo che il programma termina su ogni input \mathbf{x} maggiore od uguale a zero:

$$\frac{\mathbf{x} = \mathbf{1} \vdash \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \vdash \text{Il programma termina su } \mathbf{x}}{\mathbf{x} = \mathbf{1} \vdash \text{Il programma termina su } \mathbf{x}} \text{comp}_{sx}$$

ove $\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \vdash \text{Il programma termina su } \mathbf{x}$ può essere pensato come **lemma** per concludere

$$\mathbf{x} = \mathbf{1} \vdash \text{Il programma termina su } \mathbf{x}$$

Nel seguito identificheremo una teoria designando i SOLI assiomi extralogici.

12.1 Come derivare in una teoria

Se la teoria \mathcal{T} è fatta da assiomi extralogici

- Ax.1
- Ax.2
- Ax.3
- Ax.4
- ...
- Ax.k

Allora in \mathcal{T} sono *teoremi* TUTTE le formule **fr** che si ottengono da una derivazione π di **fr** con l'uso di assiomi extralogici come premesse.

Per esempio se riuscite a trovare una derivazione π con assiomi del tipo

$$\frac{\pi}{\text{Ax}.i_1, \text{Ax}.i_2 \vdash \mathbf{fr}}$$

allora potete comporla con la regola di *composizione* fino a trovare una derivazione di $\vdash \mathbf{fr}$ nella teoria \mathcal{T} in tal modo

$$\frac{\vdash \text{Ax}.i_1 \quad \frac{\vdash \text{Ax}.i_2 \quad \frac{\pi}{\text{Ax}.i_1, \text{Ax}.i_2 \vdash \mathbf{fr}} \text{comp}}{\text{Ax}.i_1 \vdash \mathbf{fr}} \text{comp}}{\vdash \mathbf{fr}} \text{comp}$$

In sostanza

IN UNA TEORIA LA CONOSCENZA SI ACCUMULA con la regola comp:

Se in una teoria avete **già dimostrato** $\vdash \mathbf{fr}_1$ ovvero avete trovato una derivazione π_1

$$\frac{\pi_1}{\vdash \mathbf{fr}_1}$$

allora **potete usare la formula \mathbf{fr}_1 come premessa per derivare un'altra formula \mathbf{C}** .
Se ci riuscite e trovate una derivazione nella teoria del tipo

$$\frac{\pi_C}{\mathbf{fr}_1 \vdash \mathbf{C}}$$

allora **potete comporre le derivazioni π_1 e π_C con il cut**
per ottenere una derivazione di $\vdash \mathbf{C}$ (senza premessa) nella teoria
in tal modo

$$\frac{\frac{\pi_1}{\vdash \mathbf{fr}_1} \quad \frac{\pi_C}{\mathbf{fr}_1 \vdash \mathbf{C}}}{\vdash \mathbf{C}} \text{ comp}$$

12.2 Attenzione alla consistenza di una teoria

L'aggiunta delle regole di **composizione** e di assiomi extralogici a $\mathbf{LC}_=$ per formare una teoria fa sì che NON sia più evidente che la teoria è consistente ovvero NON contraddittoria ovvero che $\vdash \perp$ NON sia derivabile nella teoria.

Il problema è serio in quanto se la teoria deriva il falso allora è una teoria INUTILE in quanto permette di derivare ogni formula:

Proposition 12.4 *Se in una teoria \mathcal{T} si riesce a derivare il falso, ovvero il sequente $\vdash \perp$, allora in \mathcal{T} ogni formula \mathbf{fr} è teorema ovvero si deriva $\vdash \mathbf{fr}$ per OGNI formula \mathbf{fr} .*

Dim. Sia

$$\frac{\pi_1}{\vdash \perp}$$

la derivazione del falso che si assume esistere in \mathcal{T} . Allora per ogni formula \mathbf{fr} si trova in \mathcal{T} una derivazione di $\vdash \mathbf{fr}$ del tipo

$$\frac{\frac{\pi_1}{\vdash \perp} \quad \text{ax-id} \quad \perp \vdash \mathbf{fr}}{\vdash \mathbf{fr}} \text{ comp}$$

Risulta invece evidente che il calcolo della logica predicativa con uguaglianza $\mathbf{LC}_=$ è consistente:

Theorem 12.5 (CONSISTENZA calcolo $\mathbf{LC}_=$) *Il calcolo $\mathbf{LC}_=$ NON può derivare il falso, ovvero $\vdash \perp$ NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$, ovvero il calcolo è consistente oppure NON contraddittorio.*

Prova: se $\vdash \perp$ fosse derivabile in $\mathbf{LC}_=$ allora ci sarebbe una derivazione con radice $\vdash \perp$ ma NESSUNA regola di $\mathbf{LC}_=$, eccetto le regole di scambio, è applicabile dal basso verso l'alto a partire da $\vdash \perp$, da cui concludiamo che $\vdash \perp$ NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$.

12.2.1 L'aggiunta delle regole di composizione NON cambia i teoremi di $LC_{=}$

Sappiamo dal teorema 9.20 che il calcolo $LC_{=}$ è valido e completo rispetto alla semantica classica. Questo significa che se anche aggiungiamo regole valide nella semantica classica ad $LC_{=}$ NON aumentiamo il numero dei sequenti derivabili in $LC_{=}$, e quindi dei teoremi di $LC_{=}$. In particolare si dimostra il cosiddetto *teorema del taglio* ovvero che:

Theorem 12.6 (validità composizioni in $LC_{=}$) *I calcoli formali $LC_{=}$ e $LC_{=}$ + composizioni a dx e sx sono EQUIVALENTI.*

Però questo non vale necessariamente anche in una teoria ed è per questo che la formuliamo usando le regole di composizione.

12.3 esempio di teoria informatica: teoria di Hoare

La teoria di Hoare è ottenuta aggiungendo all'**aritmetica di Peano classica** (che descriveremo precisamente in seguito) le seguenti regole per derivare **correttezza parziale dei programmi**

$$\begin{array}{c} \frac{(\phi) C_1 (\eta) \quad (\eta) C_2 (\psi)}{(\phi) C_1; C_2 (\psi)} \text{Composition} \\[10pt] \frac{}{(\psi[E/x]) x = E (\psi)} \text{Assignment} \\[10pt] \frac{(\phi \wedge B) C_1 (\psi) \quad (\phi \wedge \neg B) C_2 (\psi)}{(\phi) \text{ if } B \{C_1\} \text{ else } \{C_2\} (\psi)} \text{If-statement} \\[10pt] \frac{(\psi \wedge B) C (\psi)}{(\psi) \text{ while } B \{C\} (\psi \wedge \neg B)} \text{Partial-while} \\[10pt] \frac{\frac{}{\vdash_{AR} \phi' \rightarrow \phi} \quad (\phi) C (\psi) \quad \frac{}{\vdash_{AR} \psi \rightarrow \psi'}}{(\phi') C (\psi')} \text{Implied} \end{array}$$

Figure 4.1. Proof rules for partial correctness of Hoare triples.

IMPARERETE A DERIVARE FORMALMENTE
QUESTE PARTI LOGICHE NEL CORSO

esempio di **derivazione** di correttezza

ove x, y, z sono supposti **elementi del monoide**

Ax1. $\vdash \forall x \quad x+0=x$
zero è elemento neutro

Ax2. $\vdash \forall x \forall y \quad x+y=y+x$
somma è commutativa

Ax3. $\vdash \forall x \forall y \forall z \quad (x+y)+z=x+(y+z)$
somma è associativa

esercizio:

provare che in Mon_{cl} si deriva

$$\vdash \forall x \quad 0+x=x$$

12.5 Esercizi su teorie concrete

Diamo di seguiti esempi di teorie concrete e come esercizio deriviamo alcune verità su di esse.

1. Sia T_{bi} la teoria che estende $\text{LC}_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
 - Sia Chiara che Pina vanno in bici.
 - Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va
 - Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.
 - Chiara non va in bici se Elia non ci va.

Si consiglia di usare:

$V(x) = x$ va in bici,

c =Chiara, p =Pina, e =Elia, g =Giorgio, f =Fabio.

Dedurre poi le seguenti affermazioni in T_{bi} :

- Fabio non va in bici.
- Giorgio va in bici.
- Se Fabio va in bici allora Chiara non ci va.
- Elia va in bici.
- Qualcuno va in bici e qualcuno non ci va.

Soluzione

- Ax. 1 Sia Chiara che Pina vanno in bici.

$$V(c) \& V(p)$$

- Ax. 2 Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va.

$$V(p) \rightarrow V(g) \vee V(f)$$

- Ax. 3 Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.

$$V(f) \rightarrow \neg V(c)$$

- Ax. 4 Chiara non va in bici se Elia non ci va.

$$\neg V(e) \rightarrow \neg V(c)$$

- 5. Fabio non va in bici.

$$\vdash \neg V(f)$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\frac{\frac{\frac{\vdash \neg V(f), \neg V(f)}{\vdash V(f) \rightarrow \neg V(c) \vdash \neg V(f)} \text{ Ax 3.} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash V(c), V(p) \vdash V(c), \neg V(f)}{\text{ax-id}}}{V(c) \& V(p) \vdash V(c), \neg V(f)} \text{ Ax 1.} \quad \frac{\frac{\vdash V(c), \neg V(f)}{\neg V(c) \vdash \neg V(f)} \neg S}{\vdash V(c), \neg V(f)} \&S}{\vdash V(c), \neg V(f)} \text{ comp}_{sx}}{\vdash \neg V(f)} \text{ comp}_{sx} \rightarrow \neg S$$

- 6. Giorgio va in bici.

$$\vdash V(g)$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash V(p), V(g)}{\vdash V(p) \rightarrow V(g) \vee V(f) \vdash V(g)} \text{ Ax 2.} \quad \frac{\frac{\frac{\pi_1}{\vdash V(p), V(g)} \quad \frac{\pi_2}{V(g) \vee V(f) \vdash V(g)}}{\vdash V(g) \vee V(f) \vdash V(g)} \text{ comp}_{sx}}{\vdash V(g)} \rightarrow \neg S$$

dove π_1 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash V(c), V(p) \vdash V(p), V(g)}{\text{ax-id}}}{V(c) \& V(p) \vdash V(p), V(g)} \text{ Ax 1.} \quad \frac{\vdash V(p), V(g)}{\text{comp}_{sx}} \&\neg S}{\vdash V(p), V(g)}$$

e dove π_2 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash V(f), \neg V(f) \vdash V(g)}{\neg\text{-ax}_{sx1}}}{V(f) \vdash V(g)} \text{ Ax 5.} \quad \frac{\vdash V(g)}{\text{comp}_{sx}} \text{ ax-id}}{\vdash V(g) \vee V(f) \vdash V(g)} \vee\neg S$$

- 7. Se Fabio va in bici allora Chiara non va

$$\vdash V(f) \rightarrow \neg V(c)$$

che è l'assioma 3. e dunque

$$\text{Ax.3} \\ \vdash V(f) \rightarrow \neg V(c)$$

è già una derivazione!!

- 8. Elia va in bici.

$$\vdash V(e)$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\frac{\vdash \text{Ax.4} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \neg V(e), V(e)}{\neg \text{ax}_{dx_2}}}{\vdash \neg V(e), V(e)}}{\vdash \neg V(e) \rightarrow \neg V(c) \vdash V(e)} \rightarrow -S}{\vdash V(e)} \text{comp}_{sx}}{\vdash \text{Ax.1} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\text{ax-id} \quad V(c), V(p) \vdash V(c), V(e)}{V(c) \& V(p) \vdash V(c), V(e)} \&-S}{\vdash V(c), V(e)} \neg-S}{\neg V(c) \vdash V(e)} \neg-S} \text{comp}_{sx}} \rightarrow -S$$

- 9. Qualcuno va in bici e qualcuno non ci va.

$$\vdash \exists x V(x) \& \exists y \neg V(y)$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\frac{\vdash 6. \quad \frac{\frac{\text{ax-id} \quad V(g) \vdash V(g)}{V(g) \vdash \exists x V(x)} \exists-D_v}{\vdash \exists x V(x)} \text{comp}_{sx} \quad \vdash 5. \quad \frac{\frac{\frac{\text{ax-id} \quad \neg V(f) \vdash \neg V(f)}{\neg V(f) \vdash \exists y \neg V(y)} \exists-D_v}{\vdash \exists y \neg V(y)} \text{comp}_{sx}}{\vdash \exists x V(x) \& \exists y \neg V(y)} \&-S$$

2. Sia T_{vec} la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Pippo è più vecchio di Ada.
- Nessuno è più vecchio di Gigi.
- Chi è più vecchio di Pippo è più vecchio di Gigi.
- Ada è più vecchia di Chiara.
- Non si dà il caso che Chiara non sia più vecchia di Titti.
- Se uno è più vecchio di un altro e quest'altro è più vecchio di un terzo, il primo è più vecchio del terzo.
- Chiara non è Titti.

suggerimento: si consiglia di usare:

$A(x,y) = x$ è più vecchio di y

g =Gigi, p =Pippo, a =Ada, c =Chiara, t =Titti

$uno=x$, $altro=y$, $terzo=z$

Dopo aver formalizzato le frasi seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

Derivare

- Qualcuno è più vecchio di Ada.
- Nessuno è più vecchio di Pippo.
- Pippo è più vecchio di Chiara.
- Qualcuno è più vecchio di Titti.
- Ada è più vecchia di qualcuno che non è Chiara.

Soluzione

- Ax.1 Pippo è più vecchio di Ada.

$$A(p, a)$$

- Ax.2 Nessuno è più vecchio di Gigi.

$$\neg \exists x A(x, g)$$

- Ax.3 Chi è più vecchio di Pippo è più vecchio di Gigi.

$$\forall x (A(x, p) \rightarrow A(x, g))$$

- Ax.4 Non si dà il caso che Chiara non sia più vecchia di Titti.

$$\neg \neg A(c, t)$$

- Ax.5 Se uno è più vecchio di un altro e quest'altro è più vecchio di un terzo, il primo è più vecchio del terzo.

$$\forall x \forall y \forall z (A(x, y) \& A(y, z) \rightarrow A(x, z))$$

- Ax.6 Ada è più vecchia di Chiara.

$$A(a, c)$$

- Ax.7 Chiara non è Titti.

$$c \neq t$$

- 8. Non esiste qualcuno più vecchio di Pippo.

$$\neg \exists x A(x, p)$$

Si può derivare in T_{vec} come segue

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{ax-id} \quad \text{ax-id} \\
 \frac{A(x, p) \vdash A(x, p), A(x, g) \quad A(x, p), A(x, g) \vdash A(x, g)}{A(x, p), A(x, p) \rightarrow A(x, g) \vdash A(x, g)} \rightarrow -S \\
 \frac{A(x, p), A(x, p) \rightarrow A(x, g) \vdash A(x, g)}{A(x, p), \forall x (A(x, p) \rightarrow A(x, g)) \vdash A(x, g)} \forall -S_v \\
 \frac{A(x, p), \forall x (A(x, p) \rightarrow A(x, g)) \vdash A(x, g)}{\forall x (A(x, p) \rightarrow A(x, g)), A(x, p) \vdash A(x, g)} sc-S \\
 \frac{\forall x (A(x, p) \rightarrow A(x, g)), A(x, p) \vdash A(x, g)}{\forall x (A(x, p) \rightarrow A(x, g)), A(x, p) \vdash \exists x A(x, g)} \exists -D_v \\
 \frac{\forall x (A(x, p) \rightarrow A(x, g)), A(x, p) \vdash \exists x A(x, g)}{\forall x (A(x, p) \rightarrow A(x, g)), \exists x A(x, p) \vdash \exists x A(x, g)} \exists -S \text{ (vedi sotto)} \\
 \vdash \text{Ax 3.} \quad \frac{\forall x (A(x, p) \rightarrow A(x, g)), \exists x A(x, p) \vdash \exists x A(x, g)}{\exists x A(x, p) \vdash \exists x A(x, g)} \text{comp}_{sx} \\
 \frac{\exists x A(x, p) \vdash \exists x A(x, g)}{\vdash \neg \exists x A(x, p), \exists x A(x, g)} \neg -D \\
 \frac{\vdash \neg \exists x A(x, p), \exists x A(x, g)}{\vdash \exists x A(x, g), \neg \exists x A(x, p)} sc-D \\
 \frac{\vdash \exists x A(x, g), \neg \exists x A(x, p)}{\neg \exists x A(x, g) \vdash \neg \exists x A(x, p)} \neg -S \\
 \vdash \text{Ax 2.} \quad \frac{\neg \exists x A(x, g) \vdash \neg \exists x A(x, p)}{\vdash \neg \exists x A(x, p)} \text{comp}_{sx}
 \end{array}
 \end{array}$$

ove l'applicazione di \exists -S è possibile perchè x non è libera in $\forall x (A(x, p) \rightarrow A(x, g))$, $\exists x A(x, p) \vdash \exists x A(x, g)$.

- 9. Qualcuno è più vecchio di Ada.

$$\exists x A(x, a)$$

Si può derivare in T_{vec} come segue

$$\frac{\text{Ax 1.} \quad \frac{\text{ax-id} \quad \frac{A(p, a) \vdash A(p, a)}{A(p, a) \vdash \exists x A(x, a)} \quad \exists\text{-D}_v}{\vdash \exists x A(x, a)} \text{comp}_{sx}$$

- 10. Qualcuno è più vecchio di Titti.

$$\exists x A(x, t)$$

si può derivare come segue:

$$\frac{\text{Ax 4.} \quad \frac{\text{ax-id} \quad \frac{A(c, t) \vdash A(c, t)}{A(c, t) \vdash \exists x A(x, t)} \quad \exists\text{-D}_v}{\neg\neg A(c, t) \vdash \exists x A(x, t)} \neg\neg\text{-S} \quad \text{comp}_{sx}}{\vdash \exists x A(x, t)}$$

- 11. Pippo è più vecchio di Chiara.

$$A(p, c)$$

Si può derivare in T_{vec} come segue

$$\frac{\text{Ax 1.} \quad \frac{\text{Ax 6.} \quad \frac{\text{Ax 5.} \quad \frac{\pi \quad \vdots}{A(a, c), A(p, a), \forall x \forall y \forall z (A(x, y) \& A(y, z) \rightarrow A(x, z)) \vdash A(p, c)}{A(a, c), A(p, a) \vdash A(p, c)} \text{comp}_s}{A(p, a) \vdash A(p, c)} \text{comp}_{sx}}{\vdash A(p, c)}$$

dove π è la seguente derivazione

$$\frac{\text{ax-id} \quad \frac{A(a, c), A(p, a) \vdash A(p, a), A(p, c)}{A(a, c), A(p, a) \vdash A(p, a) \& A(a, c), A(p, c)} \quad \text{ax-id} \quad \frac{A(a, c), A(p, a) \vdash A(a, c), A(p, c)}{A(a, c), A(p, a) \vdash A(p, a) \& A(a, c), A(p, c)} \quad \&\text{-S}}{\frac{A(a, c), A(p, a), A(p, c) \vdash A(p, c) \quad \frac{A(a, c), A(p, a), A(p, a) \& A(a, c) \rightarrow A(p, c) \vdash A(p, c)}{A(a, c), A(p, a), \forall z (A(p, a) \& A(a, z) \rightarrow A(p, z)) \vdash A(p, c)} \quad \forall\text{-S}_v}{\frac{A(a, c), A(p, a), \forall y \forall z (A(p, y) \& A(y, z) \rightarrow A(p, z)) \vdash A(p, c)}{A(a, c), A(p, a), \forall x \forall y \forall z (A(x, y) \& A(y, z) \rightarrow A(x, z)) \vdash A(p, c)} \quad \forall\text{-S}_v} \rightarrow\text{-S}$$

- 12. Ada è più vecchia di qualcuno che non è Chiara.

$$\exists x (A(a, x) \ \& \ x \neq c)$$

si deriva componendo con Ax.6, Ax.4, Ax.7 e Ax.5 e in particolare in quest'ultimo si sale con $\forall - S_v$ ponendo a al posto di x , poi c al posto di y e infine t al posto di z . Per concludere occorre applicare $\exists - D_v$ con t al posto di x .

12.6 Ulteriore esempio di Teoria: l'Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è una teoria ottenuta aggiungendo a $LC_=$ le seguenti regole

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla} \text{comp}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{comp}_{dx}$$

e i seguenti assiomi:

$$\mathbf{Ax1.} \vdash \forall x \, s(x) \neq 0$$

$$\mathbf{Ax2.} \vdash \forall x \, \forall y \, (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$$

$$\mathbf{Ax3.} \vdash \forall x \, x + 0 = x$$

$$\mathbf{Ax4.} \vdash \forall x \, \forall y \, x + s(y) = s(x + y)$$

$$\mathbf{Ax5.} \vdash \forall x \, x \cdot 0 = 0$$

$$\mathbf{Ax6.} \vdash \forall x \, \forall y \, x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$

$$\mathbf{Ax7.} \vdash \mathbf{A}(0) \ \& \ \forall x \, (\mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{A}(s(x))) \rightarrow \forall x \, \mathbf{A}(x)$$

In tale teoria il numerale \mathbf{n} si rappresenta in tal modo

$$\mathbf{n} \equiv \underbrace{s(s \dots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$\mathbf{1} \equiv s(0)$$

$$\mathbf{2} \equiv s(s(0))$$

ATTENZIONE nel linguaggio dell'aritmetica di Peano oltre alla costante

$$0$$

vi sono 3 simboli di funzione sono:

$$s(x) \quad x+y \quad x \cdot y$$

quello del successore di x , quello della somma e quello del prodotto.

C'è un *modello inteso* per questo linguaggio ed è quello con dominio

$$\mathbf{D} \equiv \text{numeri naturali}$$

ove la funzione successore è la funzione che assegna ad un numero naturale proprio il suo successore:

$$s(x)^{\mathbf{Nat}}(-) : \mathbf{Nat} \longrightarrow \mathbf{Nat} \quad s(x)^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{n}) \equiv \mathbf{n} + 1$$

il simbolo di somma $x+y$ interpretato nel modello dei naturali come la somma di due numeri naturali:

$$(x+y)^{\mathbf{Nat}}(-, -) : \mathbf{Nat} \times \mathbf{Nat} \longrightarrow \mathbf{Nat} \quad (x+y)^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \equiv \mathbf{n} + \mathbf{m}$$

e il simbolo di moltiplicazione $x \cdot y$ interpretato come la moltiplicazione di due numeri naturali:

$$(x \cdot y)^{\mathbf{Nat}}(-, -) : \mathbf{Nat} \times \mathbf{Nat} \longrightarrow \mathbf{Nat} \quad (x \cdot y)^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}$$

Vista la presenza di simboli di funzioni di seguito diamo la definizione generale di linguaggio predicativo con simboli di funzione.

12.6.1 Cosa è derivabile in PA...

Abbiamo già fatto notare come nel calcolo dei sequenti della logica classica predicativa $\mathbf{LC}_=$ sia facile dimostrare che il sequente $\vdash \perp$ NON è derivabile, ovvero che la logica classica predicativa è consistente, o NON contraddittoria. Non è invece evidente il fatto che il sequente $\vdash \perp$ NON sia derivabile nell'aritmetica di Peano \mathbf{PA} . Anzi, secondo il teorema di incompletezza di Gödel si può dimostrare che il sequente $\vdash \perp$ NON è derivabile in \mathbf{PA} solo assumendo come veri assiomi più potenti di quelli di \mathbf{PA} (quelli di \mathbf{PA} non bastano a dimostrare la consistenza degli stessi).

Ora si noti il seguente importante proposizione

Proposition 12.7 *Se l'aritmetica di Peano \mathbf{PA} è consistente, ovvero in essa NON si deriva il sequente $\vdash \perp$, allora NON è possibile che in \mathbf{PA} si derivi una formula \mathbf{fr} , ovvero il sequente $\vdash \mathbf{fr}$, e ANCHE la sua negazione, ovvero il sequente $\vdash \neg \mathbf{fr}$.*

Dim. Supponiamo che in \mathbf{PA} esistano una derivazione di $\vdash \mathbf{fr}$ e un'altra per $\vdash \neg \mathbf{fr}$ che indichiamo rispettivamente in tal modo

$$\frac{\pi_1}{\vdash \mathbf{fr}} \qquad \frac{\pi_2}{\vdash \neg \mathbf{fr}}$$

Allora usando la regola di composizione otteniamo una derivazione del falso come segue

$$\frac{\frac{\frac{\pi_1}{\vdash \mathbf{fr}} \quad \frac{\pi_2}{\vdash \neg \mathbf{fr}}}{\vdash \mathbf{fr} \& \neg \mathbf{fr}} \&-D \quad \frac{\frac{\text{ax-id} \quad \mathbf{fr} \vdash \mathbf{fr}, \perp}{\mathbf{fr} \vdash \mathbf{fr}, \perp} \neg-S \quad \frac{\mathbf{fr} \vdash \mathbf{fr}, \perp}{\mathbf{fr} \& \neg \mathbf{fr} \vdash \perp} \&-S}{\vdash \perp} \text{comp}$$

Ma ciò è assurdo perchè contraddice la nostra ipotesi che in \mathbf{PA} il falso NON è derivabile e dunque NON è possibile che esistano entrambe le derivazioni.

Quindi dalla proposizione sopra si deduce che:

- Se \mathbf{PA} è consistente e si deriva una formula \mathbf{fr} , ovvero il sequente $\vdash \mathbf{fr}$, allora NON si deriva in \mathbf{PA} la sua negazione $\vdash \neg \mathbf{fr}$;
- Se \mathbf{PA} è consistente e si deriva una formula negata $\neg \mathbf{fr}$, ovvero il sequente $\vdash \neg \mathbf{fr}$, allora NON si deriva in \mathbf{PA} la formula ovvero il sequente $\vdash \mathbf{fr}$

Esempio Chiaramente $\vdash 1 = 0$ NON è derivabile in \mathbf{PA} se \mathbf{PA} è consistente per la proposizione sopra in quanto in \mathbf{PA} si dimostra che $\vdash 1 \neq 0$ ad esempio in tal modo: si ricordi che $1 \equiv s(0)$

$$\frac{\frac{\text{ax-id} \quad \mathbf{Ax.1}, s(0) \neq 0 \vdash s(0) \neq 0}{\forall x s(x) \neq 0 \vdash s(0) \neq 0} \forall-S \quad \vdash \mathbf{Ax.1}}{\vdash s(0) \neq 0} \text{comp}_{sx}$$

Infine ricordiamo che le tautologie logiche di $\mathbf{LC}_=$ sono pure derivabili in \mathbf{PA} e quindi i paradossi logici di $\mathbf{LC}_=$ (la cui negazione, ricorda, è tautologia!) sono pure paradossi per \mathbf{PA} .

Approfondimento su consistenza di \mathbf{PA} : Il famoso logico Kurt Gödel ha dimostrato che se l'aritmetica di Peano \mathbf{PA} è consistente, allora esiste una formula \mathbf{fr} SENZA VARIABILI libere nel linguaggio di \mathbf{PA} (che ricordiamo è fatto solo di formule predicative a partire dall'uguaglianza e dai simboli per funzione di successore, somma e prodotto e la costante zero) che per \mathbf{PA} è un'opinione ovvero NON è derivabile in \mathbf{PA} nè $\vdash \mathbf{fr}$ e nè la sua negazione $\vdash \neg \mathbf{fr}$ (questo fatto va sotto il nome di I teorema di incompletezza di Gödel).

Anzi, Gödel ha pure dimostrato che è un'opinione per **PA** la formula **fr** che codifica in aritmetica il fatto che il sequente $\vdash \perp$ NON è derivabile dai suoi assiomi (questo fatto è un caso particolare del II teorema di incompletezza di Gödel) da cui segue che solo degli assiomi più potenti di quelli di **PA** possono provare che **PA** è consistente e quindi non contraddittoria.

12.7 Esercizi

- mostrare che in logica classica con uguaglianza sono validi i sequenti o regole che seguono:

$$\begin{array}{c}
 \text{cf}^* \\
 \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u) \\
 \\
 \text{cp}^* \\
 \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u) \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta} \text{ sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta} \text{ sy-l} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'} \text{ tr-r}
 \end{array}$$

- Mostrare se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi:

(a) $1 + 0 = 1$

Soluzione: si può derivare per esempio così

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\frac{\text{Ax.3}, s(0)+0=s(0) \vdash s(0)+0=s(0)}{\forall x \ x+0=x \vdash s(0)+0=s(0)} \forall\text{-S}}{\vdash s(0)+0=s(0)} \text{ comp}_{\text{sx}}$$

(b) $0 + 1 = 1$

(c) $5 + 1 = 6$

I soluzione

Il sequente si può derivare anche in tal modo usando la regola valida tr-r

$$\frac{\frac{\vdots}{\pi_1} \vdash 5 + 1 = s(5 + 0) \quad \frac{\vdots}{\pi_2} \vdash s(5 + 0) = s(5)}{\vdash 5 + 1 = 6} \text{ tr-r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \\
\frac{5 + 1 = s(5 + 0) \vdash 5 + 1 = s(5 + 0)}{\forall y \ 5 + s(y) = s(5 + y) \vdash 5 + 1 = s(5 + 0)} \forall\text{-S}_v \\
\frac{\vdash \text{Ax 4.} \quad \frac{\forall x \ \forall y \ x + s(y) = s(x + y) \vdash 5 + 1 = s(5 + 0)}{\vdash 5 + 1 = s(5 + 0)} \forall\text{-S}_v}{\vdash 5 + 1 = s(5 + 0)} \text{comp}_{sx}
\end{array}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\begin{array}{c}
\text{cf}^* \\
\frac{5 + 0 = 5 \vdash s(5 + 0) = s(5)}{\forall x \ x + 0 = x \vdash s(5 + 0) = s(5)} \forall\text{-S}_v \\
\frac{\vdash \text{Ax 3.} \quad \frac{\forall x \ x + 0 = x \vdash s(5 + 0) = s(5)}{\vdash s(5 + 0) = s(5)} \text{comp}_{sx}}{\vdash s(5 + 0) = s(5)}
\end{array}$$

II soluzione

$$\begin{array}{c}
\text{=-ax} \\
\frac{\vdash \quad \text{s(5+0)=s(5+0)}}{\text{5+0=5} \vdash \text{s(5+0)=s(5)}} =\text{-S}_v \\
\frac{\vdash \text{Ax 3.} \quad \frac{\forall x \ x+0=x \vdash \text{s(5+0)=s(5)}}{\vdash \text{s(5+0)=s(5)}} \forall\text{-S}_v}{\vdash \text{s(5+0)=s(5)}} \text{comp}_{sx} \\
\frac{\text{s(5+0)=5+1} \vdash \text{5+1=6}}{\text{5+1=s(5+0)} \vdash \text{5+1=6}} =\text{-S}_v \\
\frac{\text{5+1=s(5+0)} \vdash \text{5+1=6}}{\forall y \ 5+s(y)=s(5+y) \vdash \text{5+1=6}} \text{sy-l} \\
\frac{\vdash \text{Ax 4.} \quad \frac{\forall y \ 5+s(y)=s(5+y) \vdash \text{5+1=6}}{\forall x \ \forall y \ x+s(y)=s(x+y) \vdash \text{5+1=6}} \forall\text{-S}_v}{\vdash \text{5+1=6}} \forall\text{-S}_v \text{comp}_{sx}
\end{array}$$

ove si ricorda che $6 \equiv \mathbf{s(5)}$ e nell'ultimo passaggio sopra si è sostituito $\mathbf{s(5)}$ con $\mathbf{s(5+0)}$.

- (d) $\vdash \forall x \ (s(x) = s(5) \rightarrow x = 5)$
- (e) $\vdash 0 = 4 \cdot 0$
- (f) $\vdash \forall x \ (x = 7 \rightarrow s(x) = s(7))$
- (g) $\vdash 1 + 2 = 3$
- (h) $\vdash 5 \cdot 1 = 5$
- (i) $\vdash \exists x \ \exists y \ x \neq y$
- (j) $\vdash \forall x \ 0 \neq s(x)$