18. Sostituzione di variabile: attenzione a cattura variabili!

Esercizio: Verificare validità e soddisfacibilità di

1. $$\vdash \exists x\, \exists y\, x = y$$

2. $$\vdash \forall x\ \exists y\ \exists z\ (\ x = y \vee y = z\ )$$

3. $$\forall w\ \ w = a \vdash \forall x\, \forall y\, x = y$$

Definizione (sostituzione di termine) Dato un termine t di un linguaggio predicativo e una formula $\texttt{pr}(\texttt{x})$ allora indichiamo con $\texttt{pr}[x/t]$ la formula ottenuta sostuendo x con t in $\texttt{pr}(\texttt{x})$. Tale formula è definita come segue:

$$P_k(t_1, \ldots, t_m)[x/t] \equiv P_k(t_1[x/t], \ldots, t_m[x/t])$$

$$(\forall y_i\ \texttt{pr})[x/t] \equiv \begin{cases} \forall y_i\ \texttt{pr}[x/t] & \text{se } y_i \neq x \text{ e } x \text{ compare in } \texttt{pr} \\ & \text{e } y_i \text{ NON compare libera in t} \\ \forall y_i\ \texttt{pr} & \text{se } y_i \equiv x \quad \text{o} \quad x \text{ non compare in } \texttt{pr} \end{cases}$$

$$(\exists y_i\ \texttt{pr})[x/t] \equiv \begin{cases} \exists y_i\ \texttt{pr}[x/t] & \text{se } y_i \neq x \text{ e } x \text{ compare in } \texttt{pr} \\ & \text{e } y_i \text{ NON compare libera in t} \\ \exists y_i\ \texttt{pr} & \text{se } y_i \equiv x \quad \text{o} \quad x \text{ non compare in } \texttt{pr} \end{cases}$$

$$(\texttt{pr}_1\ \&\ \texttt{pr}_2)[x/t] \equiv \texttt{pr}_1[x/t]\ \&\ \texttt{pr}_2[x/t]$$
$$(\texttt{pr}_1 \vee \texttt{pr}_2)[x/t] \equiv \texttt{pr}_1[x/t] \vee \texttt{pr}_2[x/t]$$
$$(\texttt{pr}_1 \to \texttt{pr}_2)[x/t] \equiv \texttt{pr}_1[x/t] \to \texttt{pr}_2[x/t]$$
$$(\neg\texttt{pr}_1)[x/t] \equiv \neg\texttt{pr}_1[x/t]$$

MORALE

Quando sostituisci una variabile y al posto di x in un predicato $\texttt{pr}(\texttt{x})$
controlla che - SE compare $\forall y$ o $\exists y$ in $\texttt{pr}(\texttt{x})$ -
la sostituzione di x con y NON faccia cadere il nuovo y
sotto il POTERE di $\forall y$ o $\exists y$
ovvero aumenti il numero di occorrenze di y in loro potere!

$$\frac{\exists y\ y = y \vdash \nabla}{\forall x\ \exists y\ x = y \vdash \nabla}\ \forall\text{−S}$$ NOOOOO!!!!

$$\frac{\forall y\ y = a \vdash y = z}{\forall y\ y = a \vdash \forall x\ x = z}\ \forall\text{−D}$$ SI!!!!

Stabilire quali delle seguenti applicazioni di ∀-S o ∃-D sono lecite

1. È lecita la seguente applicazione di ∀-S

$$\frac{\forall y\ \exists x\ x < y + z, \qquad \exists x\ x < x + z \vdash \nabla}{\forall y\ \exists x\ x < y + z \vdash \nabla}\ \forall\text{−S}$$

??

2. È lecita la seguente applicazione di ∀-S

$$\frac{\forall y\ \exists x\ x < y+z, \qquad \exists x\ x < z+z \vdash \nabla}{\forall y\ \exists x\ x < y+z \vdash \nabla}\ \forall\text{−S}$$

??

3. È lecita la seguente applicazione di ∀-D

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ x < z+z}{\Gamma \vdash \forall y\ \exists x\ x < y+z}\ \forall\text{−D}$$

??

4. È lecita la seguente applicazione di ∀-D

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ x < x+z}{\Gamma \vdash \forall y\ \exists x\ x < y+z}\ \forall\text{−D}$$

??

5. È lecita la seguente applicazione di ∀-D

$$\frac{\forall y\ C(y) \vdash \exists x\ x < y+z}{\forall y\ C(y) \vdash \forall w\ \exists x\ x < w+z}\ \forall\text{−D}$$

??

Regole derivate

Una regola

$$\frac{\Gamma'\vdash D'}{\Gamma\vdash D}\ regola*$$

si dice **regola derivata** nella logica $LC_=$ se
supposti i suoi sequenti premessa derivabili in $LC_=$,
ovvero data una derivazione

$$\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma'\vdash D'\end{array}$$

allora la derivazione ottenuta applicando la regola

$$\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \dfrac{\Gamma'\vdash D'}{\Gamma\vdash D}\ regola*\end{array}$$

si può ESPANDERE in una derivazione di $\Gamma\vdash D$ a partire da π in $LC_=$ SENZA ispezionare le derivazioni dei sequenti premessa.
Ciò significa che una *regola derivata* è localmente trasformabile in un pezzo di albero di derivazione usando interamente regole di $LC_=$.

Esempi regole derivate

$$\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx1}\\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx2}\\ \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C\end{array}$$

$$\frac{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \qquad \frac{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\begin{array}{c}\text{rf}^*\\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{sm}^*\\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{tra}^*\\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{cp}^*\\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta\end{array}$$

Regole valide per abbreviare derivazioni

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–Sv} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–Dv}$$