Pre- I appello e II compitino 11 giugno 2012

nome: cognome:

appello II compitino

- a chi fa l'appello verrà valutato ogni esercizio per il superamento dell'esame.
- a chi fa il II compitino verranno valutati soltanto gli esercizi con la dicitura II compitino e i punti segnati VERRANNO AUMENTATI di un terzo.
- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):
  - 3 punti
    $(C \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B \vdash B \rightarrow \neg C$
  - 5 punti
    $\vdash \neg \exists y\, (\neg C(y) \vee D(y))$
  - 5 punti
    $\forall x\, \forall y\, (\neg C(x) \vee \neg A(y)) \vdash \neg \exists y\, (A(y) \vee C(y))$
  - 5 punti
    $\vdash \neg(\exists x\, \neg B(x) \rightarrow \forall x\, \neg B(x))$
  - 5 punti
    $\vdash \exists y \forall z\, (z = y \vee \neg y = z)$
  - 6 punti
    $\exists x\, \exists y\, x \neq y \vdash \forall z\, z \neq z$
  - 5 punti
    $\exists x\, \exists y\, x \neq y \vdash \neg \exists z\, z \neq z$
  - 4 punti
    $\vdash w = x \rightarrow x = u \vee u \neq w$

- Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

  - (3 punti)

    $$\frac{\text{Rileggo il compito solo se ho tempo.}}{\text{Se e soltanto se ho tempo rileggo il compito.}}$$

    si consiglia di usare:
    R =“Rileggo il compito”
    H =“Ho tempo”

  - (5 punti)

    $$\frac{\text{I cerchi non hanno un angolo.}}{\text{Ciò che ha un angolo non è un cerchio oppure non è una figura geometrica.}}$$

    si consiglia di usare:
    A(x) =“x ha un angolo”
    C(x)= “x è un cerchio”
    F(x)= “x è figura geometrica”

  - (5 punti)

    $$\frac{\text{Non c'è in commercio un computer quantistico.}}{\text{Se ci fosse in commercio un computer quantistico qualche informatico sarebbe felice.}}$$

    si consiglia di usare:
    Q(x) =“x è un computer quantistico”
    C(x)= “x è in commercio”
    I(x)=“x è informatico”
    F(x)=“x è felice”

  - (5 punti)

    $$\frac{\text{Chiunque sa costruire un programma non sbaglia nessuna volta.}}{\text{Quelli che non sanno costruire un programma sbagliano qualche volta.}}$$

    si consiglia di usare:
    S(x,y) = x sa costruire il programma y
    V(x,y)= x sbaglia la volta y

- (7 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  $$\frac{\begin{array}{l}\text{C'è un unico soluzione del mio problema.}\\ \text{Il metodo di Gianni è una soluzione del mio problema.}\\ \text{Il metodo di Gianni è il metodo di Beppe.}\end{array}}{\text{Il metodo di Beppe è una soluzione del mio problema.}}$$

  si consiglia di usare:
  M(x)= x è una soluzione del mio problema
  g=metodo di Gianni
  b=metodo di Beppe

- (7 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in LC$_=$:

  Non c'è un unico metodo che risolve il mio problema.
  Il metodo di Gianni risolve il mio problema.

  C'è un metodo diverso da quello di Gianni che risolve il mio problema.

  si consiglia di usare:
  M(x)= x è metodo che risolve il mio problema
  g=metodo di Gianni

- (8 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in LC$_=$:

  Ognuno ha un'unica madre.
  Gianna è la madre di Enzo.
  La madre di Enzo è austriaca.

  Gianna è austriaca.

  si consiglia di usare:
  M(x,y)= x è la madre di y
  E(x)= x è austriaca
  g=Gianna
  e=Enzo

- (**II comp**) (12 punti) Sia T_{bi} la teoria che estende LC$_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Sia Chiara che Pina vanno in bici.
  - Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va
  - Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.
  - Chiara non va in bici se Elia non ci va.

  Si consiglia di usare:
  V(x)= x va in bici,
  c=Chiara, p=Pina, e=Elia, g=Giorgio, f=Fabio.

  Dedurre poi le seguenti affermazioni in T_{bi}:

  - Fabio non va in bici.
  - Giorgio va in bici.
  - Se Fabio va in bici allora Chiara non ci va.
  - Elia va in bici.

- (**II comp**) (24 punti) Sia T_{vec} la teoria ottenuta estendendo LC$_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Pippo è più vecchio di Ada.
  - Nessuno è più vecchio di Gigi.
  - Chi è più vecchio di Pippo è piú vecchio di Gigi.
  - Ada è più vecchia di Chiara.

- Non si dà il caso che Chiara non sia più vecchia di Titti.
- Se uno è più vecchio di un altro e quest'altro è più vecchio di un terzo, il primo è più vecchio del terzo.
- Chiara non è Titti.

suggerimento: si consiglia di usare:
A(x,y)= x è più vecchio di y
g=Gigi, p= Pippo, a= Ada, c= Chiara, t=Titti
uno=x, altro =y, terzo=z

Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

Derivare

- Qualcuno è più vecchio di Ada.
- Nessuno è più vecchio di Pippo.
- Pippo è più vecchio di Chiara.
- Qualcuno è piú vecchio di Titti.
- Ada è più vecchia di qualcuno che non è Chiara.

• (**II comp.**) Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (5 punti) $\vdash \forall x\ \forall z\ (\ z \neq x \vee s(x) = s(x)\ )$
2. (6 punti) $\vdash \forall y\ \exists z\ \exists w\ s(y) = z + w$
3. (5 punti) $\vdash \exists y\ \forall x\ y = x \cdot y$
4. (7 punti) $\vdash \forall y\ (\ 3 \neq s(y)\ \vee\ 2 = y\ )$
5. (6 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ 2 + s(y) = s(x)$
6. (8 punti) $\vdash 100 + 2 = 102$
7. (10 punti) $\vdash \exists x\ \forall y\ x = x + y$
8. (10 punti) $\vdash \forall x\ (\ x \neq 0\ \rightarrow \exists y\ s(y) = x\ )$

• Stabilire quali delle seguenti regole sono valide rispetto alla semantica classica e in caso positivo anche sicure: (8 punti ciascuna)

$$\frac{\Gamma \vdash x = c, \Delta}{\Gamma, \exists x\ x \neq c \vdash \Delta}\ 1$$

$$\frac{\Gamma, x = c \vdash \Delta}{\Gamma \vdash x = c, \Delta}\ 2$$

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\text{ax-id} \quad \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \qquad \text{ax-}\bot \quad \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla \qquad \text{ax-}\top \quad \Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\text{S} \qquad =-\text{ax} \quad \Gamma \vdash t = t, \Delta$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $LC_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx}, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n\ \equiv\ \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1\ \equiv\ s(0)$$
$$2\ \equiv\ s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \ \equiv \ \neg t = s$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{"}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{"}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–D}_v$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{tra}^* & \text{cf}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $LC_{=}$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\, P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$