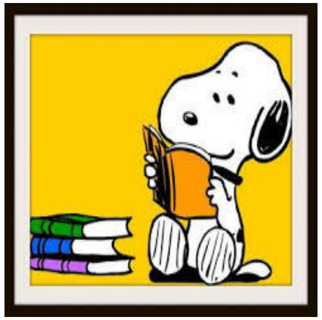
Chi non studia non passa gli esami



Chi non passa gli esami studia

Dunque tutti studiano!!!

9 Lezione Corso di Logica 2020/2021

29 ottobre 2020

Maria Emilia Maietti

Prova Parziale

SABATO 14 novembre 2020

ore 12

solo in presenza

in P300 via Luzzati 10

iscrizione obbligatoria via uniweb

SIMULAZIONE prova parziale

venerdi' 30 ottobre 2020

ore 11.30-12.30

CORREZIONE SIMULAZIONE

giovedi' 5 novembre	10.30-12.30
venerdi' 6 novembre	10.30-12.30

Perchè la procedura decisione 9.8 dispensa (lezione 8) funziona ??

1. le regole di $\mathbf{LC}_p$ **DIMINUISCONO** in **COMPLESSITÀ strettamente**

   dal BASSO verso ALTO $\Uparrow$

2. le regole di $\mathbf{LC}_p$ rappresentano **EQUIVALENZE tautologiche**

nel gergo sono regole **INVERTIBILI**=**SICURE**

studiamo regole sicure

Per capire bene **PERCHÈ funziona** la procedura di decisione in sez.9.8 dispensa (o lezione 8)

e per (eventualmente!) modificarla in meglio

o produrne altre....

introduciamo il concetto di **regola valida**

e poi quello di **regola sicura**

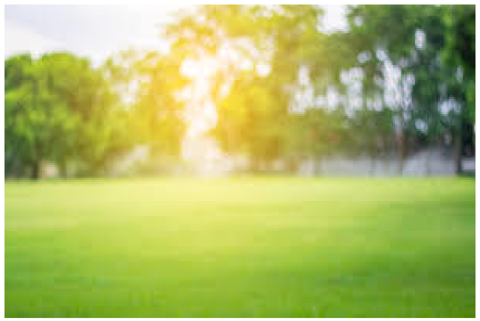
validità di un SEQUENTE su una riga della sua tabella

$\Gamma \vdash \Delta$ è *vero* su una data riga

(contenente le variabili proposizioni del sequente)

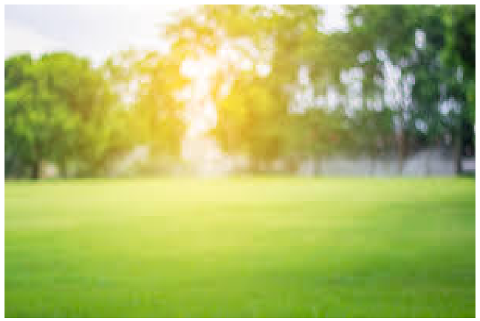
sse

$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ vale 1 su quella riga



idea generale di regola valida

una regola del calcolo dei sequenti è **valida** se TRASFORMA sequenti premessa veri **su una riga** chiamata $\mathbf{r}$ in un sequente conclusione vero sulla **STESSA riga** $\mathbf{r}$ dall'ALTO verso il BASSO.
la VERITÀ SCENDE $\Downarrow$ da **OGNI premessa**



Def. regola **valida** ad una premessa

Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

si dice valida

se il sequente **premessa** $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$ **è vero su una riga** r

(contenente tutte le variabili proposizionali che compaiono in qualche sequente nella regola)

$\Downarrow$

il sequente **conclusione** $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$ **è vero sulla stessa riga** r

Def. regola **valida** a due premesse

Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

si dice valida

se i sequenti **premessa**

$\Gamma_1 \ \vdash \ \Delta_1$ e $\Gamma_2 \ \vdash \ \Delta_2$ sono **ENTRAMBI veri su una riga** r

(contenente tutte le variabili proposizionali che compaiono in qualche sequente nella regola)

$\Downarrow$

il sequente **conclusione** $\Gamma_3 \ \vdash \ \Delta_3$ è **vero sulla stessa riga** r.

ogni regola valida è un IMPLICAZIONE!!

regole dei sequenti valide

=

IMPLICAZIONI (di implicazioni)!!

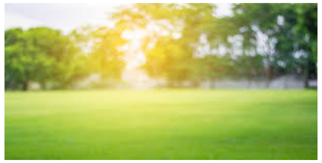
ogni regola è un' IMPLICAZIONE!!

Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$ è **valida**

sse

$$(\ \Gamma_1^{\&} \ \rightarrow \ \Delta_1^{\vee}\ ) \quad \rightarrow \quad (\ \Gamma_2^{\&} \ \rightarrow \ \Delta_2^{\vee}\ )$$ è una tautologia.



$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \to \mathbf{\Delta_1^{\vee}}$	$\mathbf{\Gamma_2^{\&}}$	$\mathbf{\Delta_2^{\vee}}$	$(\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \to \mathbf{\Delta_1^{\vee}}) \to (\mathbf{\Gamma_2^{\&}} \to \mathbf{\Delta_2^{\vee}})$
0	-	-	1
-	0	-	1
1	1	1??	1???
1	1	0??	0???

Una regola di inferenza di sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \qquad \text{è valida}$$

se e solo se

vale la seguente condizione scorciatoia1:

su OGNI riga r

$$\Gamma_1^{\&} \;\rightarrow\; \Delta_1^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2^{\&} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta_2^{\vee} = 1$$

Una regola di inferenza di sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$ **NON** è **valida**

se e solo se

vale la seguente condizione scorciatoia1bis:

ESISTE una riga r tale che

$$\Gamma_1^{\&} \;\rightarrow\; \Delta_1^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2^{\&} = 1 \quad \text{e} \quad \Delta_2^{\vee} = 0$$

anche solo per **particolari liste di proposizioni messe al posto di** Γ_1, Γ_2 e Δ_1, Δ_2

ogni regola è un' IMPLICAZIONE!!

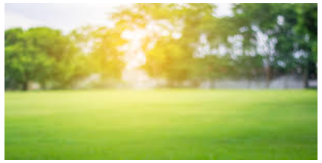
Una regola del calcolo dei sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

è **valida**

sse

$(\ \Gamma_1^{\&} \ \rightarrow\ \Delta_1^{\vee}\ )\ \&\ (\ \Gamma_2^{\&} \ \rightarrow\ \Delta_2^{\vee}\ ) \ \rightarrow\ (\ \Gamma_3^{\&} \ \rightarrow\ \Delta_3^{\vee}\ )$ è una tautologia.



$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}$	$\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}$	$\Gamma_3^{\&}$	$\Delta_3^{\vee}$	$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \& (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})$
0	-	-	-	1
-	0	-	-	1
-	-	0	-	1
1	1	1	1??	1???
1	1	1	0??	0???

Una regola di inferenza di sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$ è **valida**

se e solo se

vale la seguente condizione scorciatoia2:

su OGNI riga r

$$\Gamma_1^{\&} \ \rightarrow \ \Delta_1^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2^{\&} \ \rightarrow \ \Delta_2^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_3^{\&} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta_3^{\vee} = 1$$

Una regola di inferenza di sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

NON è **valida**

se e solo se

vale la seguente condizione scorciatoia2bis:

ESISTE una riga r su cui

$$\Gamma_1^{\&} \;\rightarrow\; \Delta_1^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2^{\&} \;\rightarrow\; \Delta_2^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma_3^{\&} = 1} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Delta_3^{\vee} = 0}$$

anche solo per **particolari liste di proposizioni messe al posto di**

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ e $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

regola SICURA

una regola si dice SICURA

= se è valida + le sue INVERSE sono pure valide

ovvero nella regola

la VERITÀ SCENDE $\Downarrow^{ogniPremessa}$ da OGNI premessa

la VERITÀ SALE $\Uparrow^{ogniPremessa}$ verso OGNI premessa

Inversa di una regola ad una premessa

la regola inversa 

di una regola del tipo

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \Delta'} \; *$$

è

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta} \; * - inv$$

Inverse di una regola a due premesse

le regole inverse  

di una regola del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma' \vdash \Delta'} \; *$$

sono DUE

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1} \; * - inv1 \qquad\qquad \frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \; * - inv2$$

regola SICURA ad una premessa è un' equivalenza !!

Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$ è **sicura**

sse

$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \leftrightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$ è una tautologia.

regola **sicura** a due premesse è un'**equivalenza**!!

Una regola del calcolo dei sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$ è **sicura**

sse

$(\,\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}\,)\ \&\ (\,\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}\,) \quad\leftrightarrow\quad (\,\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee}\,)$ è una tautologia.

ogni regola è un' IMPLICAZIONE!!

le regole del calcolo dei sequenti **LC**$_p$

sono TUTTE **sicure**

=

EQUIVALENZE di implicazioni!!

Esempio: *questa regola è sicura?*

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\mathrm{-re1}$$

Controlliamo se la regola è valida

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee-\mathrm{re1}$$ è valida

se vale la **condizione scorciatoia1**

quindi verifichiamo:

Ipotesi

sia r una riga fissata della *tabella di verità dei sequenti* nella regola

(1) $\Gamma^{\&} \rightarrow A = 1$ su r

(2) $\Gamma^{\&} = 1$ su r

Tesi

$A \vee B = 1$ su r.

Verifichiamo condizione scorciatoia1

Ipotesi

sia r una riga fissata della *tabella di verità dei sequenti* nella regola

(1) $\Gamma^{\&} \rightarrow A = 1$ su r

(2) $\Gamma^{\&} = 1$ su r

Tesi

$A \vee B = 1$ su r.

dim.

Dall'ipotesi (2) applicata ad (1) sappiamo che su r vale $A = 1$

quindi pure $A \vee B = 1$ su r

e quindi la tesi è **OK**

$\Rightarrow$ la regola $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\!-\mathrm{re1}$ è valida

Controlliamo se la regola è pure sicura...

per verificare che
$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\!-\mathrm{re1}$$

è sicura oltrechè valida

controlliamo che sia valida pure la sua inversa:

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash A}\ \mathrm{inv} - \vee\!-\mathrm{re1}$$

Controlliamo se l'inversa è pure valida...

$$\frac{\Gamma\vdash A\vee B}{\Gamma\vdash A}\ \mathrm{inv}-\vee-\mathrm{re1}$$ è valida

se vale la **condizione scorciatoia1**

quindi verifichiamo:

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

(1) $\Gamma^{\&} \to A\vee B = 1$ su r

(2)$\Gamma^{\&} = 1$ su r

Tesi

$A = 1$ su r.

condizione scorciatoia1 non funziona ...

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

(1) $\Gamma^{\&} \rightarrow A \vee B = 1$ su r

(2) $\Gamma^{\&} = 1$ su r

Tesi

$A = 1$ su r.

dim.

Dall'ipotesi (2) applicata ad (1) sappiamo che su r vale $A \vee B = 1$

ma NON sappiamo se vale proprio $A = 1$!!!

anzi al contrario una riga in cui $A = 0$ e B=1 e $\Gamma^{\&} = 1$

verifica la condizione **scorciatoia1bis**!!!!!

Controlliamo condizione scorciatoia1bis per l'inversa

verifichiamo che vale la **condizione scorciatoia1bis** per il caso particolare della regola inversa

con la variabile D al posto di Γ $$\frac{D \vdash A \vee B}{D \vdash A}\ \mathrm{inv} - \vee\mathrm{-re1}$$

e si vede che

sulla riga r definita da $D = B = \mathbf{1}$ e $A = \mathbf{0}$ valgono

(1) $D \rightarrow A \vee B = \mathbf{1}$ perchè $A \vee B = \mathbf{1}$

(2) $D = \mathbf{1}$ su r

(3) $A = \mathbf{0}$ su r

ovvero la condizione **scorciatoia1bis** è verificata!

$\Rightarrow$ la regola $$\frac{\Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash A}\ \mathrm{inv} - \vee\mathrm{-re1}$$ **NON** è valida (perchè **NON** valida nel caso particolare)

$\Rightarrow$ la regola $$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\mathrm{-re1}$$ **NON** è sicura anche se valida

IMPORTANTE conclusione!!!

data la riga r con definita da $D = B = \mathbf{1}$ e $A = \mathbf{0}$ valgono

$$\dfrac{\textbf{falso} \text{ su riga r} \qquad D \vdash A}{\textbf{vero} \text{ su r} \qquad D \vdash A \vee B} \; \vee\!-\!\mathrm{re1}$$

la **falsità** **NON scende** dall'ALTO verso il BASSO

$\Rightarrow$ **NON** vale la procedura di decisione con regole **NON sicure**!!!