Costruzione di un modello/contromodello $\mathcal{D}$ di un sequente

Benedetto Cosentino

Questa qui è la notazione che la prof.ssa Maietti ha utilizzato durante l'anno accademico 2016/2017. Non assicuro in modo assoluto che sia corretta, ma è quella che ho usato io nelle prove durante il corso dell'anno.

Sia $\neg\forall w\,\neg\neg G(w) \vdash \neg\exists y\,F(y)$ il sequente in questione. Esso avrà la seguente derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F(y) \vdash G(w)}{F(y) \vdash \neg\neg G(w)}\ \neg\neg\text{-D}}{F(y) \vdash \forall w\,\neg\neg G(w)}\ \forall\text{-D } (w \notin VL(F(y), \forall w\,\neg\neg G(w)))}{\exists y\,F(y) \vdash \forall w\,\neg\neg G(w)}\ \exists\text{-S } (y \notin VL(\exists y\,F(y), \forall w\,\neg\neg G(w)))}{\exists y\,F(y), \neg\forall w\,\neg\neg G(w) \vdash}\ \neg\text{-S}}{\neg\forall w\,\neg\neg G(w), \exists y\,F(y) \vdash}\ \text{sc}_{sx}}{\neg\forall w\,\neg\neg G(w) \vdash \neg\exists y\,F(y)}\ \neg\text{-D}$$

Il sequente non è valido.
Mostro un contromodello $\mathcal{D}$. Sia **D** dominio.

D={ Mario, Gianni }

Associo alle funzioni $F(y)^{\mathcal{D}}$ e $G(w)^{\mathcal{D}}$ dei valori

$F(y)^{\mathcal{D}}$(Mario)=1
$G(w)^{\mathcal{D}}$(Gianni)=0

Dimostro adesso che il sequente originario è falsificato dalle scelte operate.
Se $F(y)^{\mathcal{D}}$(Mario)=1, allora vuol dire che esiste un y per cui vale $F(y)^{\mathcal{D}}$. Quindi, $(\exists y\,F(y))^{\mathcal{D}}$=1 e $\neg(\exists y\,F(y))^{\mathcal{D}}$=$(\neg\exists y\,F(y))^{\mathcal{D}}$=0.
Se $G(w)^{\mathcal{D}}$(Gianni)=0, allora posso dire che $\neg\neg(G(w))^{\mathcal{D}}$(Gianni)=$(\neg\neg G(w))^{\mathcal{D}}$(Gianni)=0. Ciò comporta che $(\forall w\,\neg\neg G(w))^{\mathcal{D}}$=0 dato che esiste un falsario e, di conseguenza, $(\neg\forall w\,\neg\neg G(w))^{\mathcal{D}}$=1.
Quindi, il sequente $\neg\forall w\,\neg\neg G(w) \vdash \neg\exists y\,F(y)$ equivale all'implicazione $\neg\forall w\,\neg\neg G(w) \to \neg\exists y\,F(y)$.
Dunque, nel modello $\mathcal{D}$

$(\neg\forall w\,\neg\neg G(w) \to \neg\exists y\,F(y))^{\mathcal{D}}$=$(\neg\forall w\,\neg\neg G(w))^{\mathcal{D}} \to (\neg\exists y\,F(y))^{\mathcal{D}}$=$1 \to 0 = 0$

Il sequente è, quindi, falsificato.

Quindi, mostro un modello $\mathcal{D}$. Sia **D** dominio.

D={ Mario, Gianni }

Associo a $G(w)^{\mathcal{D}}$ dei valori

$G(w)^{\mathcal{D}}$(Mario)=1
$G(w)^{\mathcal{D}}$(Gianni)=1
(Avrei anche potuto scrivere $G(w)^{\mathcal{D}}(x)$=1 $\forall\, x \in \mathbf{D}$)

Quindi, $G(w)^{\mathcal{D}}(x)$=1 per ogni x in **D**, ovvero, per ogni elemento del dominio **D**, $G(w)^{\mathcal{D}}$ vale 1.
Allora $\neg\neg G(w)^{\mathcal{D}}(x)$=$(\neg\neg G(w))^{\mathcal{D}}(x)$=1 per ogni x in **D**, cioè $(\forall w\,\neg\neg G(w))^{\mathcal{D}}$=1. Conseguentemente, $(\neg\forall w\,\neg\neg G(w))^{\mathcal{D}}$=0.
Il sequente $\neg\forall w\,\neg\neg G(w) \vdash \neg\exists y\,F(y)$ equivale all'implicazione $\neg\forall w\,\neg\neg G(w) \to \neg\exists y\,F(y)$.
Dunque, nel modello $\mathcal{D}$

$(\neg\forall w\,\neg\neg G(w) \to \neg\exists y\,F(y))^{\mathcal{D}}$=$(\neg\forall w\,\neg\neg G(w))^{\mathcal{D}} \to (\neg\exists y\,F(y))^{\mathcal{D}}$= $0 \to (\neg\exists y\,F(y))^{\mathcal{D}} = 1$.

Quindi, il sequente è verificato e, di conseguenza, è soddisfacibile.