4. Esercitazione 7 maggio 2010

- Formalizzare le frasi seguenti e provare la loro correttezza, ovvero mostrare se la loro formalizzazione è valida rispetto alla semantica classica:
  si consiglia di usare il calcolo dei sequenti per provare la validità del sequente
  e di costruire un contromodello per provare la non validità

1. $$\frac{\text{Solo se un un programma è corretto allora è utile.}}{\text{Se un programma non è corretto allora non è utile.}}$$

   usando:
   P(x)=x è un programma
   C(x)=x è corretto
   U(x)=x è utile

2. $$\frac{\begin{array}{l}\text{Non tutti i programmi hanno un ciclo.}\\ \text{Se un programma non ha un ciclo termina.}\end{array}}{\text{Qualche programma termina.}}$$

   usando
   $P(x)$= "x è programma"
   $T(x)$= "x termina"
   $C(x)$= "x un ciclo"

3. $$\frac{\text{Tutti, se piove, si riparano.}}{\text{Se piove, qualcuno si ripara.}}$$

   usando
   P= "Piove"
   $0(x)$= "x si ripara"

4. $$\frac{\text{Non si dà il caso che qualcuno sia più alto di Piero.}}{\text{Se qualcuno è più alto di Piero allora Piero è più alto di Toni.}}$$

   usando
   $\overline{p}$="Piero"
   $A(x, y)$="x è più alto di y"
   $\overline{t}$="Toni"

5. $$\frac{\text{Non si dà il caso che qualcuno sia più alto di Piero.}}{\text{Non si dà il caso che nessuno sia più alto di Piero.}}$$

   usando
   $\overline{p}$="Piero"
   $A(x, y)$="x è più alto di y"

6. $$\frac{\begin{array}{l}\text{Solo se uno non è nè italiano e nè francese}\\ \text{non può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.}\\ \text{Marc può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.}\end{array}}{\text{Marc è italiano o francese.}}$$

   usando
   $\overline{m}$="Marc"
   $I(x)$="x è italiano"

$F(x)$="x è francese"
$P(x)$=" x può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia"

7. $$\frac{\begin{array}{l}\text{Se e solo se uno non è nè italiano e nè francese non può partecipare}\\ \text{al programma di scambio culturale Italia-Francia.}\\ \text{Marc può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.}\end{array}}{\text{Marc è italiano o francese.}}$$

usando
$\overline{m}$="Marc"
$I(x)$="x è italiano"
$F(x)$="x è francese"
$P(x)$=" x può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia"

- Si ricorda che una proposizione **A** si dice

  VALIDA se è valida in ogni interpretazione

  SODDISFACIBILE se è valida in qualche interpretazione

  NON VALIDA se NON è valida in qualche interpretazione

  INSODDISFACIBILE se NON è MAI valida

- Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE e nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI o NON VALIDE o INSODDISFACIBILI:

  1. $\models \forall x \; (\; A(x) \vee \neg A(x) \;)$?
  2. $\models \exists x \; (\; \perp \rightarrow A(x) \;)$?
  3. $\models \exists x \; A(x)$?
  4. $\models (\; C \rightarrow \exists x \; A(x) \;) \rightarrow \exists x(\; C \rightarrow \; A(x) \;)$?
     con x non in C
  5. $\models A(c) \rightarrow \exists x \; A(x)$?
  6. $\models \forall x \; A(x) \rightarrow \exists x \; A(x)$?
  7. $\models \forall x \; A(x) \rightarrow A(c)$?
  8. $\models \forall x \; (\; B(x) \vee (P(x) \rightarrow P(x)) \;)$?
  9. $\models \neg \exists x \; A(x) \rightarrow \forall x \; \neg A(x)$?
  10. $\models \forall x \; \neg A(x) \rightarrow \neg \exists x \; A(x)$?
  11. $\models \neg \forall x \; A(x) \rightarrow \exists x \; \neg A(x)$?
  12. $\models \exists x \; \neg A(x) \rightarrow \neg \forall x \; A(x)$?
  13. $\models (\; \exists x \; A(x) \rightarrow C \;) \rightarrow \forall x \; (\; A(x) \rightarrow C \;)$?
      con x non in C

- la seguente regola è valida? è sicura?

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), A(s), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x \; A(x), \nabla} \; \exists\text{−D}$$

- la regola

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash B, C, \Delta}\ ind\text{−D}$$

  è valida? è sicura?

- Dare un esempio di

  1. una formula valida
  2. una formula soddisfacibile ma non valida
  3. una formula insoddisfacibile
  4. una formula non valida e non insoddisfacibile

  rispetto alla semantica classica.
  Motivare le risposte con contromodelli o derivazioni nel calcolo dei sequenti.

- Se una formula è valida, cosa diventa la sua negazione? Motivare la risposta con un esempio.

- Se una formula è soddisfacibile, cosa possiamo dire della sua negazione? Motivare la risposta con un esempio.

Spunti per approfondimento personale fuori programma:

- Il calcolo dei sequenti della logica classica NON è **decidibile**, ovvero non esiste una procedura di decisione per le sue tautologie
  quali regole impediscono di ottenere una procedura come quella per la logica classica proposizionale???

Logica classica- calcolo abbreviato LC^{abbr}

$$\begin{array}{cc} \text{ax-id} & \text{ax-}\perp \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow -\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (x \notin VL(\Gamma, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$