II appello 7 febbraio 2017

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti di seguito sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero mostrare se sono validi o meno e soddisfacibili o insoddisfacibili in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di opinioni o paradossi i punti vanno raddoppiati):

  - 3 punti
    $C \to B \vdash \neg(B \ \& \ \neg C)$
  - 5 punti
    $\vdash \exists z \ (F(z) \ \vee \ B(z)) \ \to \ \forall z \ B(z)$
  - 5 punti
    $\vdash \neg(\ \exists z \ (F(z) \ \to \bot) \ \to \ \neg\forall z \ F(z) \ )$
  - 6 punti
    $\forall x \ x \neq a \ \& \ \exists y \ y \neq c \ \vdash \ \neg\forall x \ x = a$
  - 6 punti
    $d \neq c \ \vdash \ \neg\forall x \ x = a$
  - 7 punti
    $\exists x \ \forall w \ (\ C(x) \ \vee \ B(w) \ ) \ \vdash \ \forall w \ \exists x \ (\ \neg C(x) \ \to \ B(w) \ )$

• Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla logica classica classica con uguaglianza motivando la risposta. Inoltre nel caso di opinioni o paradossi il punteggio è raddoppiato e la sola traduzione in formula proposizionale conta 1 punto mentre quella in formula predicativa 2 punti.

  - (4 punti)
    È meglio rischiare se l'obiettivo è importante.
    ―――――――――――――――――――――――――
    L'obiettivo non è importante e non è meglio rischiare.

si consiglia di usare:
R=“È meglio rischiare”
0=“L’obiettivo è importante”

- (6 punti)

  Non ci sono rose senza spine.
  Le rose pungono.

  Le rose hanno le spine e pungono.

  si consiglia di usare:
  S(x) = “x ha spine”
  R(x) = “x è una rosa”
  P(x) = “x punge”

- (7 punti)

  Non si dà il caso che ciò che non ha spine sia una rosa.
  Le rose pungono.

  Le rose hanno le spine.

  si consiglia di usare:
  S(x) = “x ha spine”
  R(x) = “x è una rosa”
  P(x) = “x punge”

- (6 punti)

  Chi ascolta non parla troppo.
  Qualcuno parla troppo.

  Qualcuno non ascolta o medita.

  si consiglia di usare:
  M(x)=“x medita”
  A(x)= “x ascolta ”
  P(x) =“x parla troppo”

- (7 punti)

  C’è un’unica strada forestale.
  La E11 è una strada forestale.
  La P12 è una strada provinciale.
  Le strade provinciali non sono strade forestali.

  La P12 non è una strada forestale.

  si consiglia di usare:
  F(y)=“y è una strada forestale”
  P(x)= “x è una strada provinciale”
  e=“E11”
  p=“P12”

- (8 punti)

  Mauro ha un'unica cugina.
  Gigliola è diversa da Beatrice.
  ―――――――――――――――――――――――――――――
  Se Beatrice è cugina di Gino allora Gigliola non è cugina di Gino.

  si consiglia di usare:
  C(x,y)="x è cugino di y"
  m= "Mauro"
  g="Gigliola"
  b="Beatrice"
  n="Gino"

- (14 punti)

  "Non si dà il caso che, chi ama se stesso e ama quelli e soltanto quelli che non si amano allora non ami tutti ."

  si consiglia di usare:
  A(x,y)= x ama y

- (14 punti)

  "Non si dà il caso che esista qualcuno che se lui compie un'azione allora tutti compiono un'azione. "

  si consiglia di usare:
  C(x,y)= x compie l'azione y

• Sia T_{esc} la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Arturo esce solo se Valeria esce.
  - Non si dà il caso che Valeria esca e Arturo non esca.
  - Non si dà il caso che Fiorello esca e Arturo non esca.
  - Soltanto se Arturo esce Mila esce.
  - Se Arturo esce allora Valeria non esce ma Giulia si'.

  Si consiglia di usare:
  E(x)="x esce"
  C(x)="x è contento"
  a="Arturo"
  v="Valeria"
  f="Fiorello"
  m="Mila"
  g="Giulia"

  Dedurre poi in T_{esc} le seguenti affermazioni (4 punti per ciascuna):

  - Se Valeria esce allora Arturo esce.
  - Non si dà il caso che Giulia non esca e Arturo esca.

- Arturo non esce.
- Valeria non esce.
- Fiorello non esce.
- Mila non esce.
- Qualcuno non esce.
- Se tutti uscissero tutti sarebbero contenti.
- Quelli che escono sono diversi da Fiorello e da Arturo.
- Ciascuno o esce o non esce.

Sia T_{rec} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Alice recita con Fiorello.
- Se qualcuno recita con Ottavia o con Fiorello allora recita anche con Dario.
- Tutti recitano con Ottavia.
- Se uno recita con un'altro allora anche quest'altro recita con il primo.
- Se uno recita con un'altro e quest'altro recita con un terzo allora anche il primo recita con il terzo.
- Non tutti recitano con tutti.

Si consiglia di usare:
R(x,y)= "x recita con y"
t="Teresa"
o="Ottavia"
f="Dario"
f= "Fiorello"
a="Alice"

Dedurre poi in T_{rec} le seguenti affermazioni:

- (7 punti) Non si dà il caso che Alice non reciti con Ottavia.
- (7 punti) Non si dà il caso che Alice non reciti con nessuno.
- (8 punti) Alice recita con Dario.
- (10 punti) Tutti recitano con Dario.
- (10 punti) Ottavia recita con tutti.
- (8 punti) Ottavia recita con Alice e Dario.
- (10 punti) Ognuno recita con se stesso.
- (8 punti) Non si dà il caso che nessuno reciti con Teresa.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (6 punti) $\vdash \exists z\ \exists y\ y = z + z$
2. (7 punti) $\vdash \exists z\ \exists w\ y \cdot w = z + z$
3. (7 punti) $\vdash \exists w\ \exists y\ w \cdot y = y$

4. (8 punti) $\vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot y = x$
5. (8 punti) $\vdash \forall x\ (\ 0 \neq x\ \rightarrow\ 1 \neq s(x)\ )$
6. (10 punti) $\vdash \forall x\ (\ x + 3 = (x + 2) + 1)$
7. (10 punti) $\vdash \forall x\ x + x = x$
8. (10 punti) $\vdash 3 \neq 2$
9. (14 punti) $\vdash \forall x\ \exists y\ \ s(x) + 0 \neq (x + y)$

- Stabilire se le seguenti regole, formalizzate dove occorre, e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

  - (17 punti)

$$\frac{\text{Dino è un poeta.}\ \vdash\ \text{Dino scrive poesie.}}{\text{Non esiste poeta che non scriva poesie.}\ \vdash\ \text{Qualcuno scrive poesie.}}\ 1$$

  ove
  $S(x)$="x scrive poesie"
  $P(x)$="x è un poeta"
  d="Dino"

  - (10 punti)

$$\frac{D \vdash \neg(\ A\ \vee\ C\ ) \qquad\qquad \neg A \vdash M}{D \& C \vdash M}\ 2$$

  - (16 punti)

$$\frac{\text{Flavio ascolta qualcosa.}\ \vdash\ \text{Flavio non ascolta Beethoven.}}{\text{Flavio ascolta Mozart.} \vdash \text{Qualcuno non ascolta Beethoven.}}\ 3$$

  ove
  $A(x, y)$="x ascolta y"
  m="Mozart"
  b="Beethoven"
  f="Flavio"

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\mathtt{tt}\\ \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'\end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\mathrm{S} \qquad \begin{array}{c}= -\mathrm{ax}\\ \Gamma \vdash t = t, \Delta\end{array}$$

Aritmetica di Peano PA

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC$_=$ + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$

$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$

$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$

$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$

$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$

$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$

$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{sx1} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{dx1} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–D}_v$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{tra}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{cf}^* \\ \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\, P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$