14. Esercizi su logica predicativa

- Formalizzare le argomentazioni in sequente e mostrare se la loro formalizzazione è valida rispetto alla semantica classica, ovvero se il sequente ottenuto è valido e in caso contrario si dica se è non valido e soddisfacibile o insoddisfacibile:

1. Non si dà il caso che l'acqua non sia potabile e non sia un bene comune.
   ———
   L'acqua è un bene comune.

   usando
   A="l'acqua è potabile"
   B="l'acqua è bene comune"

2. Non tutti i programmi sono utili e corretti.
   ———
   Esiste un programma non utile.

   usando
   $P(x)$="x è un programma"
   $U(x)$="x è utile"
   $C(x)$="x è corretto"

3. Non tutti i programmi sono utili e corretti.
   ———
   Esiste un programma non utile o esiste un programma non corretto.

   usando
   $P(x)$="x è un programma"
   $U(x)$="x è utile"
   $C(x)$="x è corretto"

4. Non si dà il caso che non vinci e non perdi.
   ———
   Non vinci solo se non perdi.

   usando
   V="vinci"
   P="perdi"

5. Solo i buoni sono stimati da tutti.
   Alberto è buono.
   ———
   Alberto è stimato da tutti.

   usando
   $S(x,y)$="x stima y"
   $B(x)$= "x è buono"
   a="Alberto"

6. I buoni e soltanto loro sono stimati da tutti.
   Alberto è buono.
   ———
   Alberto è stimato da tutti.

   usando
   $S(x,y)$="x stima y"
   $B(x)$= "x è buono"
   a="Alberto"

7. Ciascuno possiede ciò che non ha perduto.
   Alberto non ha perduto la Ferrari testa rossa.
   ———
   Alberto possiede la Ferrari testa rossa.

usando
$P(x,y)$="x possiede y"
$E(x,y)$= "x ha perduto y"
f="Ferrari testa rossa"

8. Solo i buoni sono stimati da tutti.
Alberto è stimato da tutti.
___
Alberto è buono.

usando
$S(x,y)$="x stima y"
$B(x)$= "x è buono"
a="Alberto"

9. Nessuno è buono e cattivo.
___
Ogni buono non è cattivo.

usando
$C(x)$= "x è cattivo"
$B(x)$= "x è buono"
a="Alberto"

10. Se uno è mite e gentile allora è amabile.
___
Se uno non è gentile allora non è amabile e neppure mite.

usando:
M(x)=x è mite
G(x)=x è gentile
A(x)=x è amabile

11. Non tutti i programmi hanno un ciclo.
Se un programma non ha un ciclo termina.
___
Qualche programma non termina.

usando
$P(x)$= "x è programma"
$T(x)$= "x termina"
$C(x)$= "x ha un ciclo"

12. Tutti, se piove, si riparano.
___
Tutti si riparano se piove.

usando
P= "Piove"
$0(x)$= "x si ripara"

13. Non si dà il caso che qualcuno sia più alto di Piero.
___
C'è qualcuno di cui nessuno è più alto.

usando
$\overline{p}$="Piero"
$A(x,y)$="x è più alto di y"

14. Non si dà il caso che qualcuno sia più alto di Piero.
___
Nessuno è più alto di Piero.

usando
$\overline{p}$="Piero"
$A(x,y)$="x è più alto di y"

15.
$$\frac{\begin{array}{l}\text{Solo se uno è italiano o francese può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.}\\ \text{Marc non è italiano.}\\ \text{Marc può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.}\end{array}}{\text{Marc è francese.}}$$

usando
$\overline{m}$="Marc"
$I(x)$="x è italiano"
$F(x)$="x è francese"
$P(x)$=" x può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia"

16.
$$\frac{\begin{array}{l}\text{Se uno è italiano o francese può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.}\\ \text{Marc non è italiano.}\\ \text{Marc può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.}\end{array}}{\text{Marc è francese.}}$$

usando
$\overline{m}$="Marc"
$I(x)$="x è italiano"
$F(x)$="x è francese"
$P(x)$=" x può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia"

- Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE e nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI o NON VALIDE o INSODDISFACIBILI:

  1. $\models \forall x\ A(x)\&B(x)$?
  2. $\models \exists x\ \ \perp \vee A(x)$?
  3. $\models \exists x\ \ \perp$?
  4. $\models \exists x\ A(x) \to \forall x\ A(x)$?
  5. $\models A(c) \to \exists x\ A(x)$?
  6. $\models \forall x\ A(x) \to \exists x\ A(x)$?
  7. $\models \forall x\ A(x) \to A(c)$?
  8. $\models \forall x\ (\ B(x) \vee (P(x) \to P(x))\ )$?
  9. $\models \neg\exists x\ A(x) \to \forall x\ \neg A(x)$?
  10. $\models \forall x\ \neg A(x) \to \neg\exists x\ A(x)$?
  11. $\models \neg\forall x\ A(x) \to \exists x\ \neg A(x)$?
  12. $\models \exists x\ \neg A(x) \to \neg\forall x\ A(x)$?
  13. $\models \exists x\ \neg A(x) \to \forall x\ A(x)$?

- La regola
$$\frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists\text{−D}$$
è valida rispetto alla semantica classica?
e la sua inversa è valida?

- Formalizzare

  "Esiste un programma che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sè"

  usando
  $P(x)$="x è un programma"
  $A(x, y)$="x attiva y"

  e dire se la formula ottenuta è valida, soddisfacibile, non valida o insoddisfacibile.

- È vero che

  "In ogni bar di Padova c'e' un tale che se beve lui bevono tutti"

  ??

  Formalizzare e dedurre se la formula ottenuta è valida, soddisfacibile o insoddisfacibile.

Logica classica- LC

$$\overset{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla} \qquad \overset{\text{ax-}\top}{\Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\,\mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\,\mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\,\&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\,\&\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,\vee\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\,\vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,\neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \to -\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\,\forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\,\forall-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\,\exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\,\exists-\mathrm{D}$$

Schema riassuntivo su validità, insoddisfacibilità, soddisfacibilità

Dato sequente $\Gamma \vdash \Delta$

`passo 1`: si prova a derivarlo in LC

$$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow \text{ è valido} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{vai al passo 2} \end{cases}$$

`passo 2`: costruisci contromodello con foglia di albero che NON si chiude
se esiste contromodello $\Rightarrow$ il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è NON valido
e vai al passo 3

`passo 3`: prova a derivare $\vdash \neg(\ \Gamma^{\&} \to \Delta^{\vee}\ )$ in LC

$$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow\ \Gamma \vdash \Delta \text{ è insoddisfacibile} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{applica il passo 2 a } \vdash \neg(\ \Gamma^{\&} \to \Delta^{\vee}\ ) \\ & \text{se trovi contromodello di } \neg(\ \Gamma^{\&} \to \Delta^{\vee}\ ) \\ & \text{questo è modello di } \Gamma^{\&} \to \Delta^{\vee} \\ & \text{che è quindi anche modello di } \Gamma \vdash \Delta \\ & \Rightarrow\ \Gamma \vdash \Delta \text{ è soddisfacibile} \end{cases}$$