21. Nozione di teoria ed esempi

Def. 11.5 (teoria) *Con il termine* **teoria** *si intende un' estensione del calcolo della logica classica con uguaglianza $LC_=$ con degli* **assiomi extralogici** *e* **regole di composizione a dx e a sx**.

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ comp_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ comp_{dx}$$

Esercizio: si provi che le regole di composizioni sono valide: sono anche sicure?

Nel seguito identificheremo una teoria designando i SOLI assiomi extralogici.

Esempio di Teoria: Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è una teoria ottenuta aggiungendo a LC$_=$ le seguenti regole

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

e i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0) \& \forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

In tale teoria il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

ATTENZIONE nel linguaggio dell'aritmetica di Peano oltre alla costante

$$0$$

vi sono 3 simboli di funzione sono:

$$\mathbf{s(x)} \qquad \mathbf{x{+}y} \qquad \mathbf{x{\cdot}y}$$

quello del successore di **x**, quello della somma e quello del prodotto.

C'è un modello inteso per questo linguaggio ed è quello con dominio

$$D \equiv \text{ numeri naturali}$$

ove la funzione successore è la funzione che assegna ad un numero naturale proprio il suo successore:

$$\mathsf{s}(x)^{Nat}(-) : Nat \longrightarrow Nat \qquad\qquad \mathsf{s}(x)^{Nat}(n) \equiv n+1$$

il simbolo di somma $x+y$ interpretato nel modello dei naturali come la somma di due numeri naturali:

$$(x+y)^{Nat}(-,-) : Nat \times Nat \longrightarrow Nat \qquad\qquad (x+y)^{Nat}(n,m) \equiv n+m$$

e il simbolo di moltiplicazione $x{\cdot}y$ interpretato come la moltiplicazione di due numeri naturali:

$$(x{\cdot}y)^{Nat}(-,-) : Nat \times Nat \longrightarrow Nat \qquad\qquad (x{\cdot}y)^{Nat}(n,m) \equiv n \cdot m$$

Vista la presenza di simboli di funzioni di seguito diamo la definizione generale di linguaggio predicativo con simboli di funzione.

Linguaggi predicativi con simboli di funzione

Def. 11.6 (linguaggio predicativo con simboli di funzione) *: Un linguaggio predicativo con uguaglianza risulta $\mathcal{L}$ risulta determinato dai seguenti simboli di base:*

- *costanti per termini : c_j in numero a piacere*
- *funzioni tra termini: $f_k(x_1, \ldots x_n)$ in numero a piacere*
- *predicati atomici : $P_k(x_1, \ldots x_m)$ in numero a piacere*

e dunque per definire un modello $\mathcal{D}$ per $\mathcal{L}$, oltre ad interpretare le costanti $c_j^{\mathcal{D}} \varepsilon D$ e i predicati $\mathbf{P_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_m})^{\mathcal{D}}(-, \ldots, -) : \mathcal{D}^m \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, dobbiamo interpretare le funzioni tra termini come funzione tra domini

$$f_k(x_1, \ldots, x_n)^{\mathcal{D}}(-, \ldots, -) : \ \mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{D}$$

11.7.3 Esempio: una variabile libera come funzione identica

Dato linguaggio $\mathcal{L}$ con costanti $\mathbf{c_j}$, funzioni $\mathbf{f_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$ e predicati atomici $\mathbf{P_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_m})$ e fissato un dominio $\mathcal{D}$, ovvero insieme NON vuoto, con interpretazione di costanti $\mathbf{c_j}^{\mathcal{D}} \varepsilon \mathcal{D}$, funzioni $f_k(x_1, \ldots, x_n)^{\mathcal{D}}(-, \ldots, -) : \mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{D}$ e predicati atomici $\mathbf{P_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_m})^{\mathcal{D}}(-, \ldots, -) : \mathcal{D}^m \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, risulta che una variabile $\mathbf{x}$ si interpreta come la **FUNZIONE IDENTICA**:

$$\mathbf{x}^{\mathcal{D}}(-) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$$

quindi

$$\mathbf{x}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \equiv \mathbf{d}$$

Altro uso dei simboli di funzione

Problema: in quali modi possiamo formalizzare

"Ogni uomo ha come antenato suo padre"

??

Una possibilità è usare i seguenti simboli predicativi
$U(x)$= "x è un uomo"
$A(y,x)$= "y è antenato di x"
$P(y,x)$= "y è padre di x"

e formalizzarlo in

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U}(\mathbf{x})\ \rightarrow \exists \mathbf{y}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{y},\mathbf{x})\ \&\ \mathbf{A}(\mathbf{y},\mathbf{x})\ )$$

Ma visto che il padre è unico si può introdurre un simbolo $p(x)$ per la funzione (parziale)

$$p(x) = \text{ padre di } x$$

e in tal caso come si formalizza la frase sopra???

Per esempio in tal modo

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{p}(\mathbf{x}),\mathbf{x})$$

Poi un modello per il linguaggio predicativo **L** con simboli $\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ e $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ è questo:
$\mathcal{D}$= insieme degli **uomini**

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d},\mathbf{d}') = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \textbf{"d è antenato di d}'\textbf{"} \\ \mathbf{0} & \text{se } \textbf{"d NON è antenato di d}'\textbf{"} \end{cases}$$

$\mathbf{p}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) =$ **padre di d**
ben definita perchè tutti hanno un padre!!!

11.7.4 Attenzione alla consistenza di una teoria

L'aggiunta delle regole di **composizione** e di assiomi extralogici a $\mathbf{LC}_=$ per formare una teoria fa sì che NON sia più evidente che la teoria è consistente ovvero che $\vdash \perp$ NON sia derivabile nella teoria.

Invece per il calcolo $\mathbf{LC}_=$ possiamo dimostrare il seguente teorema

Theorem 11.7 (CONSISTENZA calcolo $\mathbf{LC}_=$) *Il calcolo* $\mathbf{LC}_=$ *NON può derivare il falso, ovvero* $\vdash \perp$ *NON è derivabile in* $\mathbf{LC}_=$*, ovvero il calcolo è* **consistente**.

Prova: se $\vdash \perp$ fosse derivabile in $\mathbf{LC}_=$ allora ci sarebbe una derivazione con radice $\vdash \perp$ ma NESSUNA regola di $\mathbf{LC}_=$ è applicabile dal basso verso l'alto a partire da $\vdash \perp$, da cui concludiamo che $\vdash \perp$ NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$.

11.7.5 L'aggiunta delle regole di composizione NON cambia i teoremi di $\mathbf{LC}_=$

Sappiamo dal teorema 9.17 che il calcolo $\mathbf{LC}_=$ è valido e completo rispetto alla semantica classica. Questo significa che se anche aggiungiamo regole valide nella semantica classica ad $\mathrm{LC}_=$ NON aumentiamo il numero dei sequenti derivabili in $\mathrm{LC}_=$, e quindi dei teoremi di $\mathrm{LC}_=$. In particolare si dimostra che:

Theorem 11.8 (validità composizioni in $\mathbf{LC}_=$) *I calcoli formali* $\mathbf{LC}_=$ *e* $\mathbf{LC}_=$ **+ composizioni a dx e sx** *sono* **EQUIVALENTI**.

Però questo non vale necessariamente anche in una teoria ed è per questo che usiamo le regole di composizione.

11.7.6 esempio di teoria informatica: teoria di Hoare

La teoria di Hoare è ottenuta aggiungendo all'**aritmetica di Peano classica** le regole seguenti per derivare **correttezza parziale dei programmi**

$$\dfrac{(\!|\phi|\!)\ C_1\ (\!|\eta|\!) \qquad (\!|\eta|\!)\ C_2\ (\!|\psi|\!)}{(\!|\phi|\!)\ C_1; C_2\ (\!|\psi|\!)}\ \text{Composition}$$

$$\dfrac{}{(\!|\psi[E/x]|\!)\ x = E\ (\!|\psi|\!)}\ \text{Assignment}$$

$$\dfrac{(\!|\phi \wedge B|\!)\ C_1\ (\!|\psi|\!) \qquad (\!|\phi \wedge \neg B|\!)\ C_2\ (\!|\psi|\!)}{(\!|\phi|\!)\ \texttt{if}\ B\ \{C_1\}\ \texttt{else}\ \{C_2\}\ (\!|\psi|\!)}\ \text{If-statement}$$

$$\dfrac{(\!|\psi \wedge B|\!)\ C\ (\!|\psi|\!)}{(\!|\psi|\!)\ \texttt{while}\ B\ \{C\}\ (\!|\psi \wedge \neg B|\!)}\ \text{Partial-while}$$

$$\dfrac{\vdash_{\mathrm{AR}} \phi' \to \phi \qquad (\!|\phi|\!)\ C\ (\!|\psi|\!) \qquad \vdash_{\mathrm{AR}} \psi \to \psi'}{(\!|\phi'|\!)\ C\ (\!|\psi'|\!)}\ \text{Implied}$$

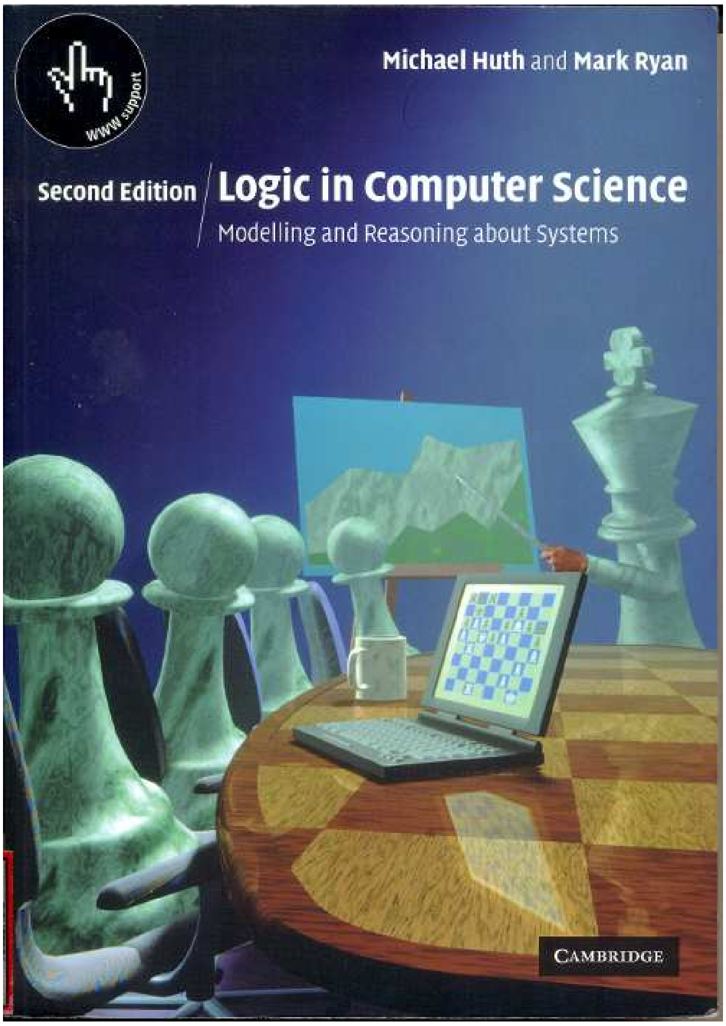
Figure 4.1. Proof rules for partial correctness of Hoare triples.

IMPARERETE A DERIVARE FORMALMENTE QUESTE PARTI LOGICHE NEL CORSO

esempio di **derivazione** di correttezza

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\!|1=1|\!)\ \texttt{y = 1}\ (\!|y=1|\!)}{(\!|\top|\!)\ \texttt{y = 1}\ (\!|y=1|\!)}\,i \qquad \dfrac{(\!|y=1\wedge 0=0|\!)\ \texttt{z = 0}\ (\!|y=1\wedge z=0|\!)}{(\!|y=1|\!)\ \texttt{z = 0}\ (\!|y=1\wedge z=0|\!)}\,i}{(\!|\top|\!)\ \texttt{y = 1; z = 0}\ (\!|y=1\wedge z=0|\!)}\,c \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\!|y\cdot(z+1)=(z+1)!|\!)\ \texttt{z = z+1}\ (\!|y\cdot z=z!|\!)}{(\!|y=z!\wedge z\neq x|\!)\ \texttt{z = z+1}\ (\!|y\cdot z=z!|\!)}\,i \qquad (\!|y\cdot z=z!|\!)\ \texttt{y = y*z}\ (\!|y=z!|\!)}{(\!|y=z!\wedge z\neq x|\!)\ \texttt{z = z+1; y = y*z}\ (\!|y=z!|\!)}\,c}{(\!|y=z!|\!)\ \texttt{while (z != x) \{z = z+1; y = y*z\}}\ (\!|y=z!\wedge z=x|\!)}\,w}{(\!|y=1\wedge z=0|\!)\ \texttt{while (z != x) \{z = z+1; y = y*z\}}\ (\!|y=x!|\!)}\,i}{(\!|\top|\!)\ \texttt{y = 1; z = 0; while (z != x) \{z = z+1; y = y*z\}}\ (\!|y=x!|\!)}\,c$$

testo di riferimento



Questa teoria si può usare per costruire un programma che certifica la correttezza dei programmi all'interno della logica di Hoare e il calcolo dei sequenti dell'aritmetica.

11.7.7 Altro esempio di teoria matematica: teoria dei monoidi commutativi

$$\mathrm{Mon}_{\mathbf{cl}} \equiv \mathbf{LC}+\ \mathbf{Ax\ 1.}\ +\ \mathbf{Ax\ 2.}\ +\ \mathbf{Ax\ 3.}+\ \mathbf{comp}_{sx}\ +\ \mathbf{comp}_{dx}$$

ove $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono supposti **elementi del monoide**

$\mathbf{Ax}1.\vdash\forall\mathbf{x}\ \ \mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$
zero è elemento neutro

$\mathbf{Ax}2.\vdash\forall\mathbf{x}\ \forall\mathbf{y}\ \ \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$
somma è commutativa

$\mathbf{Ax}3.\vdash\forall\mathbf{x}\ \ \forall\mathbf{y}\ \ \forall\mathbf{z}\ \ (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$
somma è associativa

esercizio:
provare che in $\mathrm{Mon}_{\mathbf{cl}}$ si deriva

$$\vdash\forall\mathbf{x}\ \ \mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$$

11.8 Esercizi

1. mostrare che in logica classica con uguaglianza sono validi i sequenti seguenti:

$$\begin{array}{c}\mathrm{cf}^{*}\\ \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u)\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\mathrm{cp}^{*}\\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u)\end{array}$$

2. Mostrare se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi:

   (a) $1 + 0 = 1$

   Soluzione: si può derivare per esempio così

$$\dfrac{\vdash \mathbf{Ax}.3 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{Ax}.3, s(0)+0=s(0) \vdash s(0)+0=s(0)\end{array}}{\forall x\; x+0=x \vdash s(0)+0=s(0)}\,\forall-\mathrm{S}}{\vdash s(0)+0=s(0)}\,\mathrm{comp}_{\mathbf{sx}}$$

   (b) $0 + 1 = 1$

   (c) $1 + 0 = 0$

   (d) $0 + 1 = 0$

   (e) $5 + 1 = 6$

   I soluzione

$$\dfrac{\vdash \mathbf{Ax\ 4.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \mathbf{Ax\ 3.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{=-ax}\\ 5+0=5, \mathbf{5+1=s(5+0)} \;\vdash\; \mathbf{s(5+0)=s(5+0)}\end{array}}{5+1=s(5+0), \mathbf{5+0=5} \;\vdash\; \mathbf{s(5+0)=s(5)}}\,=-\mathrm{S}_{\mathbf{f}}}{5+1=s(5+0), \mathbf{Ax\ 3.}, 5+0=5 \;\vdash\; s(5+0)=s(5)}\,\mathrm{in}_{\mathrm{sx}}}{5+1=s(5+0), \forall x\ (x+0=x) \;\vdash\; s(5+0)=s(5)}\,\forall-\mathrm{S}}{5+1=s(5+0) \;\vdash\; 5+1=6}\,\mathrm{comp}_{\mathbf{sx}}}{\mathbf{Ax\ 4.}, \forall y.., \quad 5+1=s(5+0) \;\vdash\; 5+1=6}\,\mathrm{in}_{\mathrm{sx}}}{\mathbf{Ax\ 4.}, \forall y\ 5+s(y)=s(5+y) \;\vdash\; 5+1=6}\,\forall-\mathrm{S}}{\forall x\ \forall y\ x+s(y)=s(x+y) \;\vdash\; 5+1=6}\,\forall-\mathrm{S}}{\vdash\; 5+1=6}\,\mathrm{comp}_{\mathbf{sx}}$$

   ove si ricorda che $\mathbf{6} \equiv \mathbf{s(5)}$ e nell'ultimo passaggio sopra si è sostituito $\mathbf{s(5)}$ con $\mathbf{s(5+0)}$.

   II soluzione

   Il sequente si può derivare anche in tal modo usando la regola valida tr-r

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_1\\ \vdash 5+1 = s(5+0)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_2\\ \vdash s(5+0) = s(5)\end{array}}{\vdash 5+1 = 6}\,\mathrm{tr}-\mathrm{r}$$

   ove π_1 è la derivazione seguente:

$$
\cfrac{\vdash \text{Ax } 4. \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\text{ax-id}}{5+1=s(5+0)\vdash 5+1=s(5+0)}}{\forall y\ 5+s(y)=s(5+y)\vdash 5+1=s(5+0)}\ \forall-\mathrm{S}_v}{\forall x\ \forall y\ x+s(y)=s(x+y)\vdash 5+1=s(5+0)}\ \forall-\mathrm{S}_v}{\vdash 5+1=s(5+0)}\ \mathrm{comp}_{sx}
$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$
\cfrac{\vdash \text{Ax } 3. \qquad \cfrac{\cfrac{\text{cf}^*}{5+0=5\vdash s(5+0)=s(5)}}{\forall x\ x+0=x\ \vdash s(5+0)=s(5)}\ \forall-\mathrm{S}_v}{\vdash s(5+0)=s(5)}\ \mathrm{comp}_{sx}
$$

(f) $\vdash \forall x\ (\ s(x)=s(5) \rightarrow x=5\ )$

(g) $\vdash 0=4\cdot 0$

(h) $\vdash \forall x\ (\ x=7 \rightarrow s(x)=s(7)\ )$

(i) $\vdash 1+2=3$

(j) $\vdash 5\cdot 1=5$

(k) $\vdash \exists x\ \exists y\ x\neq y$

(l) $\vdash \forall x\ 0\neq s(x)$

(m) $\vdash \forall x\ 0+x=x$ (difficile..!)

11.9 Induzione in aritmetica

L'assioma $Ax7$. dell'aritmetica di Peano PA si chiama **principio di induzione**. L'induzione è un principio proprio del concetto astratto dell'insieme dei numeri naturali. Questo insieme colleziona POTENZIALMENTE i **numeri** costruibili con tali regole

$$
0\in Nat \qquad \cfrac{n\in Nat}{\mathbf{s}(n)\in Nat}
$$

ove $\mathbf{s}(\mathbf{n})$ si dice "successore di $\mathbf{n}$". Queste sono regole da intendersi come **istruzioni per costruire numeri naturali**. L'esecuzione completa di tali istruzioni non si dà nella realtà. Esiste solo nel nostro pensiero (si legga il capitolo 4 del libro di Sambin per approfondimento).

Ora per dimostrare la validità di una proprietà su TUTTI gli infiniti numeri naturali basta provare che **le regole di costruzione dei numeri CONSERVANO tale proprietà** secondo il **Principio di induzione** che afferma:

Sia $\mathbf{P}(\mathbf{n})$ *una proprietà definita sui numeri naturali. Se vale* $\mathbf{P}(\mathbf{0})$ *(*`caso zero`*) e, qualunque sia* $\mathbf{n}$*, se dal fatto che* $\mathbf{P}(\mathbf{n})$ *vale segue che anche* $\mathbf{P}(\,\mathbf{s}(\mathbf{n})\,)$ *vale (*`caso induttivo`*) , allora per ogni naturale* $\mathbf{n}$ *si ha che* $\mathbf{P}(\mathbf{n})$ *vale.*

Nelle derivazioni conviene usare l'induzione nella forma della seguente regola **ind**

$$
\cfrac{\Gamma\vdash P(0) \qquad \Gamma'\vdash \forall x\ (\ P(x)\rightarrow P(s(x))\ )}{\Gamma,\Gamma'\vdash \forall x\ P(x)}\ \textbf{ind}
$$

che è regola derivata in PA grazie proprio all'assioma $Ax7$. ad esempio come segue

$$\dfrac{\vdash Ax7. \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash P(0)}{\Gamma,\Gamma'\vdash P(0)}\,\text{in}_{sx} \quad \dfrac{\Gamma'\vdash \forall x\ (P(x)\to P(s(x)))}{\Gamma,\Gamma'\vdash \forall x\ (P(x)\to P(s(x)))}\,\text{in}_{sx}}{\Gamma,\Gamma'\vdash P(0)\&\forall x\ (P(x)\to P(s(x)))}\,\&-\text{D} \qquad \overset{\text{ax-id}}{\Gamma,\Gamma',\forall x\ P(x)\vdash \forall x\ P(x)}}{\Gamma,\Gamma',\ P(0)\,\&\,\forall x\ (P(x)\to P(s(x)))\to\forall x\ P(x)\ \vdash \forall x\ P(x)}\,\to-\text{S}}{\Gamma,\Gamma'\vdash\forall x\ P(x)}\,\text{comp}_{\mathbf{sx}}$$

Nella regola **ind** le premesse rappresentano i seguenti casi:
caso zero: $\mathbf{\Gamma\vdash P(0)}$
caso induttivo: $\mathbf{\Gamma'\vdash \forall x\ (\ P(x) \to P(s(x))\ )}$

Per capire il principio di induzione riflettiamo su alcuni esempi in cui serve usarlo.

11.9.1 Esempio del prigioniero

Riflettiamo e cerchiamo di rispondere al seguente quesito:

Durante la guerra venne detto ad un prigioniero: *"Tu sarai ucciso la settimana prossima in un* giorno a sorpresa *che non potrai predire* neppure la mattina del giorno stesso" *Quando verrà ucciso il prigioniero?*

Si dimostra che l'affermazione è una contraddizione, ovvero che

"NON esiste **n** *numero di giorni entro cui il prigioniero può essere ucciso a sorpresa."*

perchè per induzione sull' **n**-esimo giorno della settimana si dimostra che

$$\mathbf{P(n)} \equiv \textit{il prigioniero non può essere ucciso il giorno } \mathbf{n} \textit{ della settimana}$$
$$\textit{assegnando ai giorni della settimana un numero contando a ritroso}$$
$$\mathbf{0} = \text{domenica}$$
$$\mathbf{1} = \text{sabato}$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{6} = \text{lunedì}$$

Vediamo che valgono le ipotesi del principio di induzione:

$\mathbf{P(0)} \equiv$ il prigioniero non può essere ucciso entro il giorno **0** della settimana, ovvero *la domenica* vale perchè se fosse ucciso di domenica, lui giunto alla mattina della domenica saprebbe di venir ucciso in giornata, quindi **senza sorpresa**.

Se vale $\mathbf{P(n)}$ allora vale anche $\mathbf{P(s(n))}$: infatti, se vale $\mathbf{P(n)}$ allora non può essere ucciso dal giorno **0** fino al giorno **n** ma a questo punto non può essere ucciso nemmeno il giorno prima che è $\mathbf{s(n)}$ perchè giunto alla mattina del giorno $\mathbf{s(n)}$ lo prevederebbe, sapendo che vale $\mathbf{P(n)}$ ovvero che non può essere ucciso i giorni dopo da **n** fino a **0**.

Quindi concludiamo che per il principio di induzione $\mathbf{P(n)}$ vale `per ogni` **n**, ovvero che

"Non esiste n numero di giorni entro cui il prigioniero può essere ucciso a sorpresa."

11.9.2 Esempio della valigia

Mario afferma: **"In una una valigia è sempre possibile aggiungere un fazzoletto di carta"**

È corretto quanto dice Mario?

No, **non è corretto**, perchè possiamo dimostrare che

"Se in una valigia è sempre possibile aggiungere un fazzoletto di carta allora la valigia contiene un'INFINITÀ di fazzoletti di carta"

il che non è possibile.

dim. `caso zero`: Se la valigia è vuota aggiungiamo un fazzoletto.
`caso induttivo`: Se nella valigia ci sono $\mathbf{n}$ fazzoletti, siccome è sempre possibile aggiungere un fazzoletto allora ci stanno $\mathbf{s(n)} \equiv \mathbf{n+1}$ fazzoletti. Quindi per il principio di induzione ci stanno $\mathbf{k}$ fazzoletti per $\mathbf{k}$ grande a piacere!!!

11.9.3 Esempio: quale definizione di mucchio?

"Se $\mathbf{n}$ chicchi di grano non sono un mucchio, allora $\mathbf{n+1}$ chicchi di grano non sono un mucchio"?

sembrerebbe di sì ....

Ma se ciò fosse vero allora per il principio di induzione applicato a

$$\mathbf{P(n)} \equiv \textbf{n chicchi non sono un mucchio}$$

dimostreremmo che **NESSUN** numero di chicchi di grano formano un mucchio in tal modo:
0 chicchi non sono un mucchio
Se $\mathbf{n}$ chicchi non sono un mucchio, allora per quanto detto sopra $\mathbf{s(n)} \equiv \mathbf{n+1}$ chicchi non sono un mucchio. Dunque per il principio di induzione, ogni numero naturale $\mathbf{n}$ arbitrario di chicchi non sono un mucchio!!!

Dall'altra parte dire che

"**ad un certo punto si ha che n chicchi di grano NON sono un mucchio, ma n + 1 chicchi di grano sono un mucchio**"

neppure sembra sensato...

Infine dire che

" **se n chicchi di grano sono un mucchio allora pure n − 1 chicchi di grano sono un mucchio**"

sembrerebbe sensato, ma di nuovo se ciò fosse vero allora per il principio di induzione applicato all'incontrario avremmo che $\mathbf{n-2}$ chicchi di grano formano un mucchio.. e quindi pure $\mathbf{n-3}$ e così via per induzione fino a dire "**1 chicco di grano forma un mucchio"** che NON appare sensato...così come dire che "**0 chicchi di grano formano un mucchio**"!!

In conclusione *Non si può dare la definizione di mucchio tramite un numero naturale!!.*

Esercizi

1. come mostrare che NON è valido in PA $\vdash 0+1=0$??

   Derivando $\vdash 0+1 \neq 0$ (esercizio ulteriore). In tal caso se $\vdash 0+1=0$ fosse derivabile, allora sarebbe pure valido $\vdash 0+1=0 \;\&\; 0+1 \neq 0$ ove $0+1=0 \;\&\; 0+1 \neq 0$ è un'istanza del principio di contraddizione $A\&\neg A$ che è quindi una falsità logica. Dunque supposto che PA è consistente, si deduce che $\vdash 0+1=0$ NON è valido in PA.

2. come mostrare che NON è valido in PA $\vdash 1+0=0$??

3. Mostrare che $\vdash \forall x\ 0+x=x$ è valido in PA. A tal scopo applichiamo la regola di induzione per derivare

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_1\\ \vdash 0{+}0{=}0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_2\\ \vdash\ \forall x\ (\,0{+}x{=}x \to 0{+}s(x){=}s(x)\,)\end{array}}{\vdash \forall x\ (\,0{+}x{=}x\,)}\ \text{ind}$$

ove π_1 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \textbf{Ax 3.} \qquad \dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{0{+}0{=}0 \vdash 0{+}0{=}0}}{\textbf{Ax 3.} \vdash 0{+}0{=}0}\ \forall-\text{re}}{\vdash 0{+}0{=}0}\ \text{comp}_{\mathbf{sx}}$$

e π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \textbf{Ax 4.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{0{+}s(x){=}s(0{+}x) \vdash 0{+}s(x){=}s(0{+}x)}}{\forall y\ 0{+}s(y){=}s(0{+}y) \vdash 0{+}s(x){=}s(0{+}x)}\ \forall-\text{S}_{\mathbf{v}}}{\textbf{Ax 4.} \vdash 0{+}s(x){=}s(0{+}x)}\ \forall-\text{S}_{\mathbf{v}}}{\vdash 0{+}s(x){=}s(0{+}x)}\ \text{comp}_{sx} \qquad \dfrac{\dfrac{\textbf{=-ax}}{0{+}x{=}x \vdash s(0{+}x){=}s(0{+}x)}}{0{+}x{=}x \vdash s(0{+}x){=}s(x)}\ {=}-\text{S}}{0{+}x{=}x \vdash 0{+}s(x){=}s(x)}\ \text{tr-r}}{\vdash\ 0{+}x{=}x \to 0{+}s(x){=}s(x)}\ \to-\text{D}}{\vdash \forall x\ (\,0{+}x{=}x \to 0{+}s(x){=}s(x)\,)}\ \forall-\text{D}$$

ove l'applicazione di $\forall-$D è possibile perchè $\mathbf{x}$ non compare libera nella premessa.

4. il sequente $\vdash \exists y\ \exists x\ x \neq y$ è valido in $\text{LC}_=$? è soddisfacibile se non è valido?

   $\vdash \exists y\ \exists x\ x \neq y$ è **NON valido** in **logica classica con uguaglianza** ma valido in **PA** (ovvero risulta soddisfacibile con il modello dei numeri naturali!)

   Infatti, dopo aver provato a derivare il sequente in $\mathbf{LC}_=$, si noti che la formula $\exists \mathbf{y}\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ è **NON valida** in $\mathbf{LC}_=$ perchè c'é un contromodello definito in tal modo:
   $\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{1}\}$ falsifica $\exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{x}{\neq}\mathbf{y}$ poichè altrimenti per rendere valido il sequente il dominio dovrebbe avere $\mathbf{d}$ e $\mathbf{d'}$ tali che
   $$(\mathbf{x}{=}\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d'}) = \mathbf{0}$$
   ovvero dovrebbe valere $\mathbf{d} \neq \mathbf{d'}$ in $\mathcal{D}$. Ma tali elementi non ci sono in $\mathbf{D}$.

   Per provare la soddisfacibilità del sequente si veda il punto successivo.

5. il sequente $\vdash \exists y\ \exists x\ x \neq y$ è valido in PA??

   Sì, una derivazione in **PA** del sequente è la seguente

$$\dfrac{\vdash \textbf{Ax 1.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{s(x){\neq}0 {\vdash} s(x){\neq}0}}{s(x){\neq}0 {\vdash} \exists y\ s(x){\neq}y}\ \exists-\text{D}_{\mathbf{v}}}{s(x){\neq}0 {\vdash} \exists x\ \exists y\ x{\neq}y}\ \exists-\text{D}_{\mathbf{v}}}{\textbf{Ax 1.}{\vdash}\exists x\ \exists y\ x{\neq}y}\ \forall-\text{re}}{\vdash\exists x\ \exists y\ x{\neq}y}\ \text{comp}_{\mathbf{sx}}$$

   Quindi il sequente $\vdash \exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{x}{\neq}\mathbf{y}$ è **soddisfacibile** in $\mathbf{LC}_=$ nel modello $\mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat}$.

6. Mostrare che $\vdash \forall x\ s(x) \neq x$ è valido in PA

11.10 Esercizi su teorie concrete

Diamo di seguiti esempi di teorie concrete e come esercizio deriviamo alcune verità su di esse.

1. Sia T_{bi} la teoria che estende $\mathrm{LC}_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
   - Sia Chiara che Pina vanno in bici.
   - Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va
   - Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.
   - Chiara non va in bici se Elia non ci va.

   Si consiglia di usare:
   V(x)= x va in bici,
   c=Chiara, p=Pina, e=Elia, g=Giorgio, f=Fabio.

   Dedurre poi le seguenti affermazioni in T_{bi}:
   - Fabio non va in bici.
   - Giorgio va in bici.
   - Se Fabio va in bici allora Chiara non ci va.
   - Elia va in bici.
   - Qualcuno va in bici e qualcuno non ci va.

   Soluzione
   - Ax. 1 Sia Chiara che Pina vanno in bici.
   $$V(c)\,\&\,V(p)$$
   - Ax. 2 Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va.
   $$V(p) \rightarrow V(g) \vee V(f)$$
   - Ax. 3 Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.
   $$V(f) \rightarrow \neg V(c)$$
   - Ax. 4 Chiara non va in bici se Elia non ci va.
   $$\neg V(e) \rightarrow \neg V(c)$$
   - 5. Fabio non va in bici.
   $$\vdash \neg V(f)$$
   si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\text{-ax}_{dx_1}}{\vdash V(f), \neg V(f)} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash \text{Ax 1.} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{V(c), V(p) \vdash V(c), \neg V(f)}}{V(c)\,\&\,V(p) \vdash V(c), \neg V(f)}\,\&\text{S}}{\vdash V(c), \neg V(f)}\,\text{comp}_{sx}}{\neg V(c) \vdash \neg V(f)}\,\neg\text{S}}{V(f) \rightarrow \neg V(c) \vdash \neg V(f)}\,\rightarrow\text{-S}}{\vdash \neg V(f)}\,\text{comp}_{sx}$$

- 6. Giorgio va in bici.

$$\vdash V(g)$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax } 2. \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} \pi_1 & \pi_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdash V(p), V(g) & V(g) \vee V(f) \vdash V(g) \end{array}}{V(p) \to V(g) \vee V(f) \vdash V(g)}\ \to\text{-S}}{\vdash V(g)}\ \text{comp}_{sx}$$

dove π_1 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax } 1. \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{V(c), V(p) \vdash V(p), V(g)}}{V(c) \& V(p) \vdash V(p), V(g)}\ \&\text{-S}}{\vdash V(p), V(g)}\ \text{comp}_{sx}$$

e dove π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{V(g) \vdash V(g)} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash 5. \qquad \dfrac{\text{ax-id}}{\neg V(f) \vdash \neg V(f), V(g)}}{\vdash \neg V(f), V(g)}\ \text{comp}_{sx}}{V(f) \vdash V(g)}\ \neg\text{-S}}{V(g) \vee V(f) \vdash V(g)}\ \vee\text{-S}$$

- 7. Se Fabio va in bici allora Chiara non va

$$\vdash V(f) \to \neg V(c)$$

che è l'assioma 3. e dunque

$$\dfrac{\text{Ax.3}}{\vdash V(f) \to \neg V(c)}$$

è già una derivazione!!

- 8. Elia va in bici.

$$\vdash V(e)$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax.4} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\text{-ax}_{dx_2}}{\vdash \neg V(e), V(e)} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash \text{Ax.1} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{V(c), V(p) \vdash V(c), V(e)}}{V(c) \& V(p) \vdash V(c), V(e)}\ \&\text{-S}}{\vdash V(c), V(e)}\ \text{comp}_{sx}}{\neg V(c) \vdash V(e)}\ \neg\text{-S}}{\neg V(e) \to \neg V(c) \vdash V(e)}\ \to\text{-S}}{\vdash V(e)}\ \text{comp}_{sx}$$

- 9. Qualcuno va in bici e qualcuno non ci va.

$$\vdash \exists x\ V(x) \& \exists y\ \neg V(y)$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash 6.\quad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{V(g) \vdash V(g)}}{V(g) \vdash \exists x\ V(x)}\ \begin{matrix}\exists-\mathrm{D}_v \\ \mathrm{comp}_{sx}\end{matrix}}{\vdash \exists x\ V(x)} \quad \dfrac{\vdash 5.\quad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{\neg V(f) \vdash \neg V(f)}}{\neg V(f) \vdash \exists y\ \neg V(y)}\ \begin{matrix}\exists-\mathrm{D}_v \\ \mathrm{comp}_{sx}\end{matrix}}{\vdash \exists y \neg V(y)}$$

$$\dfrac{\vdash \exists x\ V(x) \qquad \vdash \exists y \neg V(y)}{\vdash \exists x\ V(x)\ \&\ \exists y\ \neg V(y)}\ \&-\mathrm{S}$$

2. Sia T_{vec} la teoria ottenuta estendendo $\mathrm{LC}_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

   - Pippo è più vecchio di Ada.
   - Nessuno è più vecchio di Gigi.
   - Chi è più vecchio di Pippo è piú vecchio di Gigi.
   - Ada è più vecchia di Chiara.
   - Non si dà il caso che Chiara non sia più vecchia di Titti.
   - Se uno è più vecchio di un altro e quest'altro è più vecchio di un terzo, il primo è più vecchio del terzo.
   - Chiara non è Titti.

   suggerimento: si consiglia di usare:
   A(x,y)= x è più vecchio di y
   g=Gigi, p= Pippo, a= Ada, c= Chiara, t=Titti
   uno=x, altro =y, terzo=z

   Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

   Derivare

   - Qualcuno è più vecchio di Ada.
   - Nessuno è più vecchio di Pippo.
   - Pippo è più vecchio di Chiara.
   - Qualcuno è piú vecchio di Titti.
   - Ada è più vecchia di qualcuno che non è Chiara.

   Soluzione

   - Ax.1 Pippo è più vecchio di Ada.
   $$A(p,a)$$
   - Ax.2 Nessuno è più vecchio di Gigi.
   $$\neg\exists x A(x,g)$$
   - Ax.3 Chi è più vecchio di Pippo è piú vecchio di Gigi.
   $$\forall x(\ A(x,p) \rightarrow A(x,g))$$

- Ax.4 Non si dà il caso che Chiara non sia più vecchia di Titti.

$$\neg\neg A(\,c, t\,)$$

- Ax.5 Se uno è più vecchio di un altro e quest'altro è più vecchio di un terzo, il primo è più vecchio del terzo.

$$\forall x \forall y \forall z(\,A(\,x, y\,)\,\&\,A(\,y, z\,) \rightarrow A(\,x, z\,)\,)$$

- Ax.6 Ada è più vecchia di Chiara.

$$A(\,a, c\,)$$

- Ax.7 Chiara non è Titti.

$$c \neq t$$

- 8. Non esiste qualcuno più vecchio di Pippo.

$$\neg\exists x A(\,x, p\,)$$

Si può derivare in T_{vec} come segue

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash$ Ax 2.}
\AxiomC{$\vdash$ Ax 3.}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$A(\,x,p\,) \vdash A(\,x,p\,)\,,\,A(\,x,g\,)$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$A(\,x,p\,)\,,\,A(\,x,g\,) \vdash A(\,x,g\,)$}
\RightLabel{$\rightarrow -$S}
\BinaryInfC{$A(\,x,p\,)\,,\,A(\,x,p\,) \rightarrow A(\,x,g\,) \vdash A(\,x,g\,)$}
\RightLabel{$\forall -\mathrm{S}_v$}
\UnaryInfC{$A(\,x,p\,)\,,\,\forall x\ (\,A(\,x,p\,) \rightarrow A(\,x,g\,)) \vdash A(\,x,g\,)$}
\RightLabel{$sc-$S}
\UnaryInfC{$\forall x\ (\,A(\,x,p\,) \rightarrow A(\,x,g\,))\,,\,A(\,x,p\,) \vdash A(\,x,g\,)$}
\RightLabel{$\exists -\mathrm{D}_v$}
\UnaryInfC{$\forall x(\,A(\,x,p\,) \rightarrow A(\,x,g\,))\,,\,A(\,x,p\,) \vdash \exists x\ A(\,x,g\,)$}
\RightLabel{$\exists -$S(vedi sotto)}
\UnaryInfC{$\forall x(\,A(\,x,p\,) \rightarrow A(\,x,g\,))\,,\,\exists x A(\,x,p\,) \vdash \exists x A(\,x,g\,)$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\exists x\ A(\,x,p\,) \vdash \exists x\ A(\,x,g\,)$}
\RightLabel{$\neg -$D}
\UnaryInfC{$\vdash \neg\exists x\ A(\,x,p\,)\,,\,\exists x\ A(\,x,g\,)$}
\RightLabel{$sc-$D}
\UnaryInfC{$\vdash \exists x\ A(\,x,g\,)\,,\,\neg\exists x\ A(\,x,p\,)$}
\RightLabel{$\neg -$S}
\UnaryInfC{$\neg\exists x\ A(\,x,g\,) \vdash \neg\exists x\ A(\,x,p\,)$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash \neg\exists x\ A(\,x,p\,)$}
\end{prooftree}
$$

ove l'applicazione di $\exists -$S è possibile perché x non è libera in $\forall x\ (\,A(\,x,p\,) \rightarrow A(\,x,g\,))\,,\,\exists x\ A(\,x,p\,) \vdash \exists x\ A(\,x,g\,)$.

- 9. Qualcuno è più vecchio di Ada.

$$\exists x\ A(\,x, a\,)$$

Si può derivare in T_{vec} come segue

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash$ Ax 1.}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$A(\,p, a\,) \vdash A(\,p, a\,)$}
\RightLabel{$\exists -\mathrm{D}_v$}
\UnaryInfC{$A(\,p, a\,) \vdash \exists x\ A(\,x, a\,)$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash \exists x\ A(\,x, a\,)$}
\end{prooftree}
$$

- 10. Qualcuno è più vecchio di Titti.

$$\exists x\ A(\,x, t\,)$$

si può derivare come segue:

$$
\dfrac{\vdash \text{Ax } 4. \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A(c,t)\vdash A(c,t)\end{array}}{A(c,t)\vdash \exists x\ A(x,t)}\ \exists\text{-D}_v}{\neg\neg A(c,t)\vdash \exists x\ A(x,t)}\ \neg\neg\text{-S}}{\vdash \exists x\ A(x,t)}\ \text{comp}_{sx}
$$

- 11. Pippo è più vecchio di Chiara.

$$A(p,c)$$

Si può derivare in T_{vec} come segue

$$
\dfrac{\vdash \text{Ax } 1. \qquad \dfrac{\vdash \text{Ax } 6. \qquad \dfrac{\vdash \text{Ax } 5. \qquad \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ A(a,c),\ A(p,a),\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (A(x,y)\ \&\ A(y,z)\rightarrow A(x,z))\vdash A(p,c)\end{array}}{A(a,c),\ A(p,a)\vdash A(p,c)}\ \text{comp}_{sx}}{A(p,a)\vdash A(p,c)}\ \text{comp}_{sx}}{\vdash A(p,c)}\ \text{comp}_{sx}
$$

dove π è la seguente derivazione

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A(a,c),\ A(p,a),\ A(p,c),\ A(p,c)\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A(a,c),\ A(p,a)\vdash A(p,a),\ A(p,c)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A(a,c),\ A(p,a)\vdash A(a,c),\ A(p,c)\end{array}}{A(a,c),\ A(p,a)\vdash A(p,a)\ \&\ A(a,c),\ A(p,c)}\ \&\text{-S}}{A(a,c),\ A(p,a),\ A(p,c),\ A(p,a)\ \&\ A(a,c)\rightarrow A(p,c)\vdash A(p,c)}\ \rightarrow\text{-S}}{A(a,c),\ A(p,a),\ A(p,c),\ \forall z\ (A(p,a)\ \&\ A(a,z)\rightarrow A(p,z))\vdash A(p,c)}\ \forall\text{-S}_v}{A(a,c),\ A(p,a),\ A(p,c),\ \forall y\ \forall z\ (A(p,y)\ \&\ A(y,z)\rightarrow A(p,z))\vdash A(p,c)}\ \forall\text{-S}_v
$$

$$
\dfrac{A(a,c),\ A(p,a),\ A(p,c),\ \forall y\ \forall z\ (A(p,y)\ \&\ A(y,z)\rightarrow A(p,z))\vdash A(p,c)}{A(a,c),\ A(p,a),\ A(p,c),\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (A(x,y)\ \&\ A(y,z)\rightarrow A(x,z))\vdash A(p,c)}\ \forall\text{-S}_v
$$

- 12. Ada è più vecchia di qualcuno che non è Chiara.

$$\exists x\ (A(a,x)\ \&\ x\neq c)$$

si deriva componendo con Ax.6, Ax.4, Ax. 7 e Ax.5 e in particolare in quest'ultimo si sale con $\forall\text{-}S_v$ ponendo a al posto di x, poi c al posto di y e infine t al posto di z.

11.11 Conclusione dello studio

Una formula `fr` scritta nel linguaggio predicativo con uguaglianza si può classificare in:

`fr` formula **valida**	**VERITÀ LOGICA classica o TAUTOLOGIA**
`fr` formula **soddisfacibile, NON valida**	**OPINIONE** **(sua verità dipende da predicati usati)**
`fr` formula **insoddisfacibile**	**CONTRADDIZIONE o PARADOSSO**

11.12 Verità scientifiche

Le **teorie scientifiche** - ad esempio l'**aritmetica di Peano**, che è una **teoria matematica-** si occupano di **DIMOSTRARE** quali formule `fr` **soddisfacibili** DIVENTANO **verità scientifiche** ovvero sono conseguenze **logiche** dei loro **ASSIOMI** (in tal compito è assai utile riconoscere quali sono le verità logiche visto che queste si dimostrano più facilmente senza ricorso ad assiomi extralogici).

Si osserve che le teorie possono variare non solo per l'aggiunta di diversi assiomi extralogici ma anche per il fatto di essere basate su logiche diverse. In altri termini le teorie **DIPENDONO** anche dalla **logica** usata. Nelle sezioni precedenti abbiamo mostrato esempi di **teorie scientifiche** che estendono la **logica classica con uguaglianza** ma esistono anche teorie matematiche basate su logiche diverse. Ad esempio l'**aritmetica di Heyting** ha assiomi di Peano aggiunti però alla **logica intuizionista** (vedi libro di Sambin) e NON a quella classica. L'aritmetica di Heyting serve per formalizzare il frammento aritmetico della matematica costruttiva.

11.12.1 Esempio di VERITÀ LOGICA

L'asserzione

"**Esiste un qualcosa che se è onnipotente allora tutti sono onnipotenti**"
si può formalizzare nel sequente

$$\vdash \exists \mathbf{x}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x}\ \mathbf{O}(\mathbf{x})\ )$$

ove $\mathbf{O}(\mathbf{x})=$ **x è un onnipotente**

che è **valido**: si provi a derivarlo!

11.12.2 Paradosso del mentitore

L'asserzione

"**Esiste un qualcosa che crea tutti e soli quelli che non si creano da soli**"
si può formalizzare nel sequente

$$\vdash \exists \mathbf{x}\ \forall\ \mathbf{y}(\ \mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leftrightarrow\ \neg \mathbf{C}(\mathbf{y},\mathbf{y})\ )$$

ove $\mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{y})=$**"x crea y"**

che è **INSODDISFACIBILE** ovvero si deriva in logica classica

$$\vdash \neg(\ \exists \mathbf{x}\ \forall\ \mathbf{y}(\ \mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leftrightarrow\ \neg \mathbf{C}(\mathbf{y},\mathbf{y})\ )\ )$$

e si provi a derivarlo in LC!

11.13 Approfondimento su logica classica

Diamo di seguito alcune esempi di formalizzazione che sfuggono alla logica classica.

11.13.1 ATTENZIONE AGLI SCAMBI

Ecco qui un esempio che sfugge allo scambio a sx:

la **validità** dell'asserzione

"se **Mario va diritto in fondo a via Paolotti** e **Mario gira a sinistra in via Marzolo** allora **Mario arriva all'istituto di fisica**"

formalizzata nel sequente

$$\mathbf{P}, \mathbf{M} \vdash \mathbf{F}$$

ove

P=Mario va diritto in fondo a via Paolotti
M=Mario gira a sinistra in via Marzolo
F=Mario arriva all'istituto di fisica

NON comporta che sia valida pure l'asserzione con le premesse scambiate

"se **Mario gira a sinistra in via Marzolo** e **Mario va diritto in fondo a via Paolotti** allora **Mario arriva all'istituto di fisica**"

che risulta formalizzata in

$$\mathbf{M}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{F}$$

11.13.2 Verità atemporali della logica classica proposizionale

È vero che

"**Non si dà il caso che se sono a Londra io sia a Padova**"?

La risposta è che ovviamente sì non si dà questo caso.

Però una sua formalizzazione potrebbe essere

$$\neg(\,\mathbf{L}\rightarrow\mathbf{P}\,)$$

con

L = "**Sono a Londra**"
P = "**Sono a Padova**"

ma si noti che la proposizione sopra è equivalente a

$$\models\neg(\,\mathbf{L}\rightarrow\mathbf{P}\,) \qquad \leftrightarrow \qquad \neg(\,\neg\mathbf{L}\vee\mathbf{P}\,)$$

e per leggi di De Morgan

$$\models\neg(\,\neg\mathbf{L}\vee\mathbf{P}\,) \qquad \leftrightarrow \qquad \neg\neg\mathbf{L}\,\&\neg\mathbf{P}$$

e infine concludiamo

$$\models\neg\neg\mathbf{L}\,\&\neg\mathbf{P} \qquad \leftrightarrow \qquad \mathbf{L}\&\neg\mathbf{P}$$

ovvero l'affermazione di partenza risulta equivalente a

"**Io sono a Londra e NON sono a Padova**"

il che non è sempre vero...!

Spiegazione della apparente paradossalità: il valore di verità della frase sopra formalizzata in $\neg(\,\mathbf{L}\rightarrow\mathbf{P}\,)$ dipende da dove sono in questo momento: se NON sono a Londra la proposizione $\mathbf{L}\rightarrow\mathbf{P}$ diventa vera classicamente, e la sua negata falsa classicamente, altrimenti se sono a Londra $\neg(\,\mathbf{L}\rightarrow\mathbf{P}\,)$ risulta vera. Siccome la logica classica proposizionale tratta di verità atemporali, o vere o false senza dipendenza dal tempo, questa logica non risulta adatta per formalizzare la proposizione "**Non si dà il caso che se sono a Londra io sia a Padova**" che sarebbe invece meglio formalizzare includendo la nozione del tempo e nella forma più precisa "non si dà il caso che se in un qualsiasi momento io sono a Londra allora sia pure nello stesso momento anche a Padova".