5. Proprietà equivalenza e esercizi su validità classica

Il connettivo $\leftrightarrow$ "equivalenza" soddisfa i seguenti teoremi:

Teorema
Date proposizioni $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$, allora

$\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$ hanno la stessa tabella di verità (contente tutte le variabili che compaiono in entrambe)
sse vale
$\models \mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$

Chiaramente se due proposizioni sono equivalenti, allora una è una tautologia sse lo è anche l'altra visto che hanno la stessa tabella di verità:

Corollario
Date proposizioni $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$, allora

se $\models \mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$
allora
$\models \mathtt{pr}_1$ sse $\models \mathtt{pr}_2$

Lemma (simmetria equivalenti)
date $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$
se $\models \mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$ allora $\models \mathtt{pr}_2 \leftrightarrow \mathtt{pr}_1$

Lemma (transitività equivalenti)
date $\mathtt{pr}_1$, $\mathtt{pr}_2$ e $\mathtt{pr}_3$ proposizioni
se $\models \mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$ e $\models \mathtt{pr}_2 \leftrightarrow \mathtt{pr}_3$
allora $\models \mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_3$

Poi, se in una proposizione $\mathtt{pr}_3(A)$ si sostituisce A una volta con $\mathtt{pr}_1$ e un'altra volta con un suo equivalente $\mathtt{pr}_2$ si ottengono proposizioni equivalenti:

Teorema (equivalenza per pezzi)
Se $\models \mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$
allora data una proposizione $\mathtt{pr}_3(A)$
$\models \mathtt{pr}_3(\mathtt{pr}_1) \leftrightarrow \mathtt{pr}_3(\mathtt{pr}_2)$

Infine se in una proposizione $\mathtt{pr}_3(A)$ si sostituisce A una volta con $\mathtt{pr}_1$ e un'altra volta con un suo equivalente $\mathtt{pr}_2$ si ottengono due proposizioni che hanno la proprietà che una è una tautologia sse lo è anche l'altra:

> Teorema (verità su equivalenza per pezzi)
>
> Se $\models \mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$
>
> allora data una proposizione $\mathtt{pr}_3(A)$
>
> $\models \mathtt{pr}_3(\mathtt{pr}_1)$ sse $\models \mathtt{pr}_3(\mathtt{pr}_2)$

1. Verificare che le seguenti sono tautologie classiche:

essenza $\rightarrow$	$\models (A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$
associatività $\vee$	$\models (A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
associatività &	$\models (A \& B) \& C \leftrightarrow A \& (B \& C)$
commutatività $\vee$	$\models A \vee B \leftrightarrow B \vee A$
commutatività &	$\models A \& B \leftrightarrow B \& A$
distributività $\vee$ su &	$\models A \vee (B \& C) \leftrightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$
distributività & su $\vee$	$\models A \& (B \vee C) \leftrightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$
idempotenza $\vee$	$\models A \vee A \leftrightarrow A$
idempotenza &	$\models A \& A \leftrightarrow A$
leggi di De Morgan	$\models \neg(B \vee C) \leftrightarrow \neg B \& \neg C$
	$\models \neg(B \& C) \leftrightarrow \neg B \vee \neg C$
legge della doppia negazione	$\models \neg\neg A \leftrightarrow A$
legge della NON contraddizione	$\models \neg(A \& \neg A)$
legge del terzo escluso	$\models A \vee \neg A$

2. Verificare che sono tautologie anche quelle ottenute dalle precedenti sostituendo A e/o B e/o C con altre proposizioni.

3. data una proposizione `pr` vale

$$\models \texttt{pr} \vee \neg \texttt{pr}$$

??

4. La $(C \to D)\&B$ è equivalente a $(\neg C \vee D)\&B$? ovvero vale

$$\models (C \to D)\&B \ \leftrightarrow \ (\neg C \vee D)\&B$$

??

5. È vero secondo la logica classica che

   "Voi passerete l'esame di logica se avete una zia con i calli, oppure se voi passerete l'esame di logica allora avete una zia con i calli"

   ??

   Formalizzare ponendo

   A= "Voi passerete l'esame di logica"
   B= "Avete una zia con i calli"
   e mostrare se la proposizione ottenuta è tautologia classica.

6. È vero che "se i viaggiatori non sono contenti allora il treno è in ritardo "

   se si assume che "se i viaggiatori son contenti allora il treno non è in ritardo".

   Formalizzare in un UNICA proposizione ponendo

   V=" i viaggiatori sono contenti"
   R=" il treno è in ritardo"

   e mostrare se la proposizione ottenuta è tautologia classica (e quindi rende valida l'asserzione) o in caso contrario dire per quali valori delle variabili non è valida e se è soddisfacibile (e per quali valori delle variabili lo è) o insoddisfacibile.