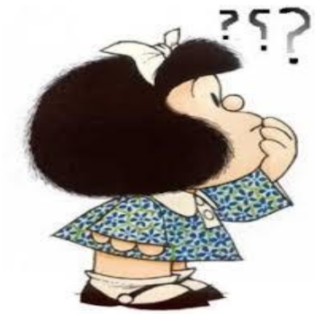
Se "*Ciascuno possiede ciò che NON ha perduto*"

e se "*tu NON hai perduto un miliardo*"

allora "*possiedi un miliardo*"!!

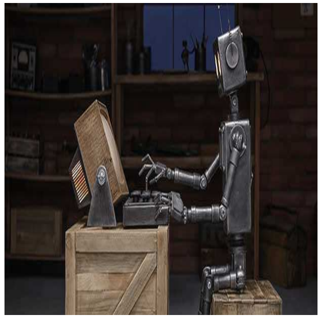


19. Lezione Corso di Logica 2020/2021

17 dicembre 2020

Maria Emilia Maietti

email: maietti@math.unipd.it



SIMULAZIONE **appello**

venerdi' 18 dicembre 2020 (teorie)

+

giovedi' 7 gennaio 2021 (classificazione)

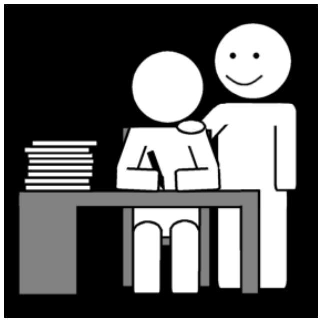
10.30-12.30

CORREZIONE SIMULAZIONE

venerdi' 8 gennaio

giovedi' 14 gennaio

ore 10.30-12.30



Formalizzare e CLASSIFICARE

Ciascuno possiede ciò che non ha perduto.

Nessuno ha perduto un miliardo.

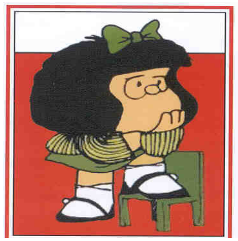
Tutti possiedono un miliardo.

usando

$P(x, y)$**="x** *possiede* **y"**

$E(x, y)$**= "x** *ha perduto* **y"**

m**="***un miliardo***"**



Esempio di formalizzazione

Ciascuno possiede ciò che non ha perduto.

Nessuno ha perduto un miliardo.

Tutti possiedono un miliardo.

usando

$P(x, y)$="x *possiede* y"

$E(x, y)$= "x *ha perduto* y"

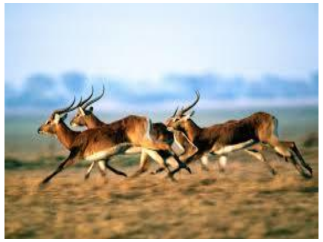
m="*un miliardo*"

si può formalizzare in tal modo

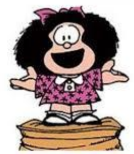
$$\forall x \, \forall y \; (\, \neg E(x, y) \to P(x, y) \,) \; , \; \neg \exists x \; E(x, m) \vdash \forall x \; P(x, m)$$

Esempio di applicazione regole derivate + indebolimento in $\mathbf{LC}_=$

derivazione con uso di regole veloci e derivate:



$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash \neg E(w,m)\ ,\ E(w,m)\ ,\ P(w,m)}\ \neg\text{-ax}_{dx2} \qquad \cfrac{}{P(w,m) \vdash\ E(w,m)\ ,\ P(w,m)}\ \text{ax-id}}{\neg E(w,m) \to P(w,m)\ )\ \vdash\ E(w,m)\ ,\ P(w,m)}\ \to\!-\mathrm{S}}{\neg E(w,m) \to P(w,m)\ )\ \vdash \exists x\, E(x,m)\ ,\ P(w,m)}\ \exists\!-\mathrm{D}_v}{\forall y\ (\ \neg E(w,y) \to P(w,y)\ )\ \vdash\ \exists x\, E(x,m)\ ,\ P(w,m)}\ \forall\!-\mathrm{S}_v}{\forall x\, \forall y\ (\ \neg E(x,y) \to P(x,y)\ )\ \vdash\ \exists x\, E(x,m)\ ,\ P(w,m)}\ \forall\!-\mathrm{S}_v}{\forall x\, \forall y\ (\ \neg E(x,y) \to P(x,y)\ )\ ,\ \neg\exists x\, E(x,m)\ \vdash\ P(w,m)}\ \neg\!-\mathrm{S}}{\forall x\, \forall y\ (\ \neg E(x,y) \to P(x,y)\ )\ ,\ \neg\exists x\, E(x,m) \vdash \forall x\, P(x,m)}\ \forall\!-\mathrm{D}}{}
$$



ove $\forall\!-\mathrm{D}$ è corretta perchè w non compare libera nel sequente radice.

Esempio di tautologia controintuitiva

Ciascuno possiede ciò che non ha perduto.

Nessuno ha perduto un miliardo.

Tutti possiedono un miliardo.

usando

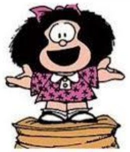
$P(x, y)$="x *possiede* y"

$E(x, y)$= "x *ha perduto* y"

m="*un miliardo*"

si può formalizzare in tal modo

$$\forall x\, \forall y\, (\, \neg E(x, y) \rightarrow P(x, y)\,)\ ,\ \neg\exists x\ E(x, m) \vdash \forall x\ P(x, m)$$

e siccome si deriva in LC$_=$ è una tautologia  !!! 

Formalizzare e classificare il sequente ottenuto...

Ciascuno possiede solo ciò che non ha perduto.

Alberto non ha perduto la Ferrari testa rossa.

Alberto possiede la Ferrari testa rossa.

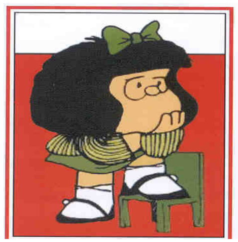
usando

$P(x, y)$**="x** *possiede* **y"**

$E(x, y)$**= "x** *ha perduto* **y"**

a**="***Alberto***"**

f**="***Ferrari testa rossa***"**



forse è questo che volevamo dire...

Formalizzazione

Ciascuno possiede solo ciò che non ha perduto.

Alberto non ha perduto la Ferrari testa rossa.

Alberto possiede la Ferrari testa rossa.

usando

$P(x,y)$**="x** *possiede* **y"**

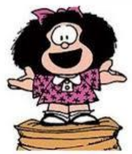
$E(x,y)$**= "x** *ha perduto* **y"**

a**="***Alberto***"**

f**="***Ferrari testa rossa***"**

si può formalizzare in tal modo

$$\forall x\, \forall y\ (\ P(x,y) \rightarrow \neg E(x,y)\ )\ ,\ \neg E(a,f\ ) \vdash P(a,m)$$

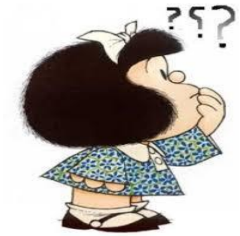


Proviamo a derivare il sequente in LC$_=$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, \forall y\, (\dots)\,, \forall y\, (\dots) \vdash P(a,f)\; E(a,f)\,,\; P(a,f) \qquad \forall x\, \forall y\, (\dots)\,, \forall y\, (\dots)\,,\; \neg E(a,f) \vdash E(a,f)\,,}{\forall x\, \forall y\, (\dots)\,, \forall y\, (\dots)\,,\; P(a,f) \to \neg E(a,f) \vdash E(a,f)\,,\; P(a,f)}\ \forall\!-\!\mathrm{S}}{\forall x\, \forall y\, (\dots)\,,\; \forall y\, (\, P(a,y) \to \neg E(a,y)\,) \vdash E(a,f)\,,\; P(a,f)}\ \forall\!-\!\mathrm{S}}{\forall x\, \forall y\, (\, P(x,y) \to \neg E(x,y)\,) \vdash E(a,f)\,,\; P(a,f)}\ \neg\!-\!\mathrm{D}}{\forall x\, \forall y\, (\, P(x,y) \to \neg E(x,y)\,)\,,\; \neg E(a,f) \vdash P(a,f)}$$

ove **NON** si riesce a derivare la foglia del ramo di sx ...

quindi costruiamo un **contromodello** rendendo sia $\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ che $\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ sempre false !!



contromodello

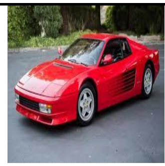
la foglia che **NON** si riesce a derivare

$$\forall \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y}\, (\ldots)\,, \forall \mathbf{y}\, (\ldots) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{a}, \mathbf{f})\ \mathbf{E}(\mathbf{a}, \mathbf{f})\,,\ \mathbf{P}(\mathbf{a}, \mathbf{f})$$

suggerisce il seguente **contromodello** con due elementi

(anche se ne *basterebbe un dominio con un solo elemento* $\mathbf{d} = a^D = f^D$!!!)

$\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}$= $\{$ **Alberto** , **Ferrari** $\}$



$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}}(\, \mathbf{d_1}\,,\, \mathbf{d_2}\,) = \mathbf{0}$ per tutti i $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$

$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}}(\, \mathbf{d_1}\,,\, \mathbf{d_2}\,) = \mathbf{0}$ per tutti i $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$

a^D $=$ **Alberto** f^D $=$ **Ferrari**

quindi in tal modello

$$\mathbf{P}(\mathbf{a}, \mathbf{f})^{\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}} = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}}(\, \mathbf{a}^{\mathbf{D}}\,,\, \mathbf{f}^{\mathbf{D}}\,) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}}(\, \mathbf{Alberto}\,,\, \mathbf{Ferrari}\,) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{a}, \mathbf{f})^{\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}}(\, \mathbf{a}^{\mathbf{D}}\,,\, \mathbf{f}^{\mathbf{D}}\,) = \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}}(\, \mathbf{Alberto}\,,\, \mathbf{Ferrari}\,) = \mathbf{0}$$

e dunque $(\, \neg \mathbf{E}(\mathbf{a}, \mathbf{f})\,)^{\mathbf{D}_{\mathbf{contra}}} = \mathbf{1}$

e anche $(\, \forall \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y}\, (\, \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,)\,)^{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$

perchè $(\, \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,)^{\mathbf{D}}(\, \mathbf{d_1}\,,\, \mathbf{d_2}\,) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\, \mathbf{d_1}\,,\, \mathbf{d_2}\,) \rightarrow \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\, \mathbf{d_1}\,,\, \mathbf{d_2}\,)$

$= \mathbf{0} \rightarrow \neg \mathbf{0} = \mathbf{1}$ *per ogni* $\mathbf{d_1}$ *e* $\mathbf{d_2}$

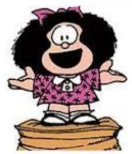
e dunque nel modello D_{contra}

$$(\forall \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow \neg \mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ )\ ,\ \neg \mathbf{E}(\mathbf{a},\mathbf{f})\ \vdash\ \mathbf{P}(\mathbf{a},\mathbf{f}))^{\mathbf{D_{contra}}}\ =$$

$$=\ (\forall \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow \neg \mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ )\ \&\ \neg \mathbf{E}(\mathbf{a},\mathbf{f}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{a},\mathbf{f}))^{\mathbf{D_{contra}}}\ =$$

$$(\forall x\, \forall y\ (\ P(x,y) \rightarrow \neg E(x,y)\ )\ )^{D_{contra}}\ \&\ (\ \neg E(a,f)\ )^{D_{contra}}\ \rightarrow\ (\ P(a,f)\ )^{D_{contra}}\ =$$

$$=\ \mathbf{1}\ \& \neg \mathbf{0} \rightarrow\ \mathbf{0}\ =\ \mathbf{0}$$



ovvero il modello costruito su D^{contra} è un contromodello del sequente

Conclusione

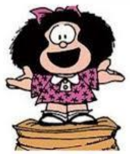
Ciascuno possiede solo ciò che non ha perduto.

Alberto non ha perduto la Ferrari testa rossa.

Alberto possiede la Ferrari testa rossa.

formalizzata in $\forall x\, \forall y\ (\ P(x,y) \rightarrow \neg E(x,y)\ )\ ,\ \neg E(a,f\ ) \vdash P(a,f)$

ha un contromodello e quindi **NON** è una tautologia

(*come ci aspettavamo !!!*) 

Per esercizio si stabilisca che è un'**opinione** costruendo anche un modello...

(*direttamente* o *costruendo un contromodello della sua negazione tramite ricerca della derivazione*!!!)