

Manuale pratico per il corso di Logica

Maria Emilia Maietti
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Università di Padova
via Trieste n. 63 - 35121 Padova, Italy
maietti@math.unipd.it

3 ottobre 2019

Indice

1	A che cosa serve un corso di logica?	6
1.1	Esempio di codifica in linguaggio formale.	9
1.2	Esempio di derivazione formale	9
1.3	Scopi del corso	9
1.4	Cosa imparerà il lettore nel corso?	11
1.4.1	Esempi di verità logiche	12
1.4.2	Esempi di verità extra-logiche	12
1.4.3	Procedure formali del corso	13
1.4.4	Verifica formale delle verità dell'aritmetica di Peano	13
1.4.5	Esempio di paradosso (o contraddizione) con stessa forma esercizio 9. del test	13
1.5	Utilità dello studio della logica per lo sviluppo delle scienze	14
1.5.1	Una possibile obiezione allo studio di un corso di logica	14
1.6	Come affrontare l'esame di logica	15
1.6.1	Difficoltà del corso	15
1.7	Appendice: Soluzione all'ultimo quesito del test	16
2	Prerequisiti del corso: saper ragionare (ovvero nessuno!)	20
3	Genesi e utilità dei paradossi logici	21
3.1	Superiorità dell'uomo sulla macchina	22
3.2	Quale è la causa del paradosso di Russell?	22
3.3	Esempio di paradosso in pittura	23
3.4	Paradosso del mentitore e i livelli di astrazione	23
3.5	Il caso giudiziario Protagora-Evatlo	24
3.5.1	Conclusione del caso giudiziario Protagora-Evatlo	25
3.5.2	Quale è la causa del paradosso giudiziario Protagora-Evatlo?	26
3.6	Utilità dei paradossi per le scienze	26
3.7	Come costruire paradossi?	26
4	La Logica come base di ogni scienza	27
5	Alla ricerca della forma logica	27
5.1	Necessità di un linguaggio formale	28
5.1.1	Livelli di riferimento in un programma	28
5.2	Livelli di riferimento nel corso	29

5.3	UNIVERSALITÀ del linguaggio logico formale	29
5.4	Spiegazione del carattere ASTRATTO della LOGICA	29
6	Linguaggio formale proposizionale	30
6.1	Grammatica delle proposizioni formali	30
6.1.1	Convenzione per eliminare parentesi nella scrittura di proposizioni formali	31
6.2	Cosa traducono & ed \rightarrow	32
6.3	Esempi di proposizioni simboliche	34
6.4	Formalizzazione di enunciati con premesse e conclusioni	35
6.5	Alla ricerca della verità	38
6.5.1	Nel corso di logica studiamo solo giudizi assertivi	38
6.6	Verità classica di una proposizione	39
6.6.1	Come si costruisce la tabella di verità di una proposizione?	39
6.6.2	Tabella di verità di \neg	39
6.6.3	Tabella di verità di &	39
6.6.4	Tabella di verità di \vee	40
6.6.5	Tabella di verità di \rightarrow	40
6.6.6	Tabelle di verità delle proposizioni costante vero e falso	40
6.6.7	Come costruire la tabella di una proposizione complessa arbitraria . .	40
6.6.8	VALIDITÀ CLASSICA di una proposizione	42
6.7	TAUTOLOGIE, OPINIONI, CONTRADDIZIONI	42
6.7.1	Esempi di analisi della validità di proposizioni	44
6.8	UGUAGLIANZA tra proposizioni	45
6.8.1	Connettivo equivalenza	46
6.8.2	Precisazione sull'identità sintattica	46
6.9	Tautologie classiche	47
6.10	Proprietà utili sull'equivalenza	48
7	Approfondimento sulle tabelle di verità	49
7.1	Ogni tabella a valori in 0 e 1 è tabella di una proposizione?	49
7.1.1	Esempio di uso di forma normale disgiuntiva	50
7.1.2	Esempio di uso di forma normale congiuntiva: il connettivo NAND . .	52
7.1.3	Raffinamento del teorema di completezza delle tabelle di verità	52
7.1.4	Quante sono le tabelle di verità ad n entrate?	53
8	Due strategie per verificare una tautologia	54
8.0.1	Altro esempio di verità classica	55
8.0.2	Esempio su validità e soddisfacibilità e i loro NON	55
8.0.3	In logica classica non c'è implicazione causale	56
8.0.4	Verità atemporali della logica classica proposizionale	57
8.0.5	Esercizi su Validità e soddisfacibilità e loro negazioni	59
9	Calcolo dei sequenti LC_p	61
9.1	Cosa è un sequente?	61
9.1.1	Che proposizione rappresenta un sequente?	63
9.2	Calcolo dei sequenti della Logica classica proposizionale	64
9.2.1	Regole del calcolo dei sequenti LC_p	65
9.2.2	Definizione di albero e albero di derivazione in LC_p	66
9.2.3	Quali sono gli assiomi in LC_p	68
9.2.4	Esempio di derivazione in LC_p	68
9.2.5	Come si sarebbe potuto scrivere il calcolo LC_p	69
9.2.6	Idea intuitiva di sequente e sue derivazioni	70
9.2.7	Test sulla comprensione del concetto di derivazione	70
9.3	Classificazione della verità di un sequente in logica classica	72

9.3.1	Alla ricerca della validità con il calcolo dei sequenti	73
9.3.2	Soddisfacibilità di un sequente su una riga	74
9.4	Procedura di decisione per proposizioni classiche e sequenti in LC_p	74
9.4.1	Procedura di decisione su derivabilità di sequenti in LC_p	75
9.4.2	Come trovare riga in cui un sequente NON valido è falso	75
9.4.3	Esempio di applicazione della procedura di decisione	76
9.4.4	Esempio di applicazione della procedura di decisione di una proposizione	77
9.4.5	Esempio di applicazione della procedura di decisione	77
9.5	Relazione tra una proposizione e la sua negazione	78
9.6	Procedura per decidere se una proposizione è tautologia/opinione/paradosso in LC_p	79
9.6.1	Esempi di applicazione della procedura di decisione di una proposizione	80
9.6.2	Esempi di applicazione della procedura di decisione di una proposizione	80
9.7	Come rappresentare la negazione di un sequente?	81
9.8	PROCEDURA per DECIDERE se un sequente è tautologia o opinione o un paradosso	83
9.8.1	Esempio di applicazione della procedura di decisione	83
9.8.2	Test di comprensione	84
9.8.3	MEMO su come falsificare un sequente proposizionale	84
9.9	Perchè le procedure di decisioni per sequenti in logica classica proposizionale sono corrette?	86
9.9.1	Definizione di validità in logica classica proposizionale di una regola del calcolo dei sequenti	86
9.9.2	Significato di validità di una regola ad una premessa	88
9.9.3	Significato di validità di una regola a due premesse	89
9.10	Validità delle regole di LC_p	91
9.10.1	Validità assioma identità	91
9.10.2	Validità dell'assioma per il falso	92
9.10.3	Validità di sc_{sx}	92
9.10.4	Validità di sc_{dx}	93
9.10.5	Validità di $\&-D$	93
9.10.6	Validità di $\&-S$	94
9.10.7	Validità di $\vee-S$	95
9.10.8	Validità di $\vee-D$	95
9.10.9	Validità di $\neg-D$	95
9.10.10	Validità di $\neg-S$	96
9.10.11	Validità di $\rightarrow-D$	96
9.10.12	Validità per di $\rightarrow-S$	97
9.11	Esercizi sulla validità delle regole	98
9.12	Esercizi su formalizzazione in sequente e come regola e loro validità	100
9.13	Correttezza della procedura di decisione per sequenti in LC_p	101
9.13.1	Validità della regola inversa di $\rightarrow-D$	102
9.13.2	Validità delle regole inverse di $\rightarrow-S$	102
9.13.3	Sicurezza delle regole di LC_p	103
9.13.4	Esercizi su validità e sicurezza delle regole dei sequenti	104
9.13.5	Perchè la procedura di decisione derivabilità/validità di un sequente è corretta?	106
9.13.6	Cosa rappresenta in pratica una derivazione?	107
9.13.7	Significato della derivazione con regole sicure in termini di proposizioni	108
9.13.8	Metodo alternativo per decidere se un sequente è una tautologia o un'opinione o un paradosso	109
9.13.9	Completezza calcolo dei sequenti	110
9.13.10	Decidibilità del calcolo LC_p	110
9.13.11	NON esiste procedura di decisione con regole NON sicure	111

9.13.12 Esempi curiosi di regole valide	112
10 Spiegazione della forma delle regole del calcolo LC_p	115
11 Nozione di teoria proposizionale ed esempi	123
11.1 Come derivare in una teoria	124
11.2 Esempi di teorie proposizionali con esercizi	125
12 Logica classica predicativa	130
12.1 Linguaggio predicativo	130
12.1.1 Grammatica termini simbolici	131
12.1.2 Grammatica formule simboliche	132
12.1.3 Come mettere le parentesi	133
12.1.4 A cosa servono i predicati?	133
12.1.5 Esempi di formalizzazione di predicati	135
12.1.6 Nozione di variabile LIBERA in termini e formule	136
12.2 Calcolo dei sequenti LC per la Logica classica predicativa	138
12.2.1 Come si sarebbe potuto scrivere il calcolo LC	138
12.2.2 Attenzione alle condizioni su variabili	139
12.2.3 Esempi di derivazione: uso delle regole \forall -S e \exists -D	140
12.3 Come formalizzare l'unicità in logica predicativa? aggiungiamo il predicato di uguaglianza!	142
12.3.1 Grammatica predicati con uguaglianza	144
12.3.2 Il calcolo dei sequenti $LC_=$	144
12.3.3 Come usare le regole di uguaglianza?	145
12.4 Sostituzione di una variabile	147
12.5 Semantica classica dei predicati	150
12.5.1 Casi speciali di interpretazione di quantificatori	155
12.5.2 Interpretazione della SOSTITUZIONE con costante	156
12.5.3 Interpretazione SOSTITUZIONE con termine generico	157
12.5.4 Modo semplice per definire un modello	158
12.5.5 Notazione per indicare un modello	159
12.5.6 Come falsificare una formula in un modello	161
12.5.7 Classificazione di verità di una formula predicativa	163
12.5.8 Idea intuitiva di validità di un predicato e tabelle di verità	164
12.5.9 Esempi di classificazione di formule	165
12.5.10 Validità di un sequente in logica predicativa classica	171
12.5.11 Come falsificare un sequente predicativo	172
12.6 Come classificare la verità di un sequente predicativo	174
12.6.1 Procedura per stabilire validità, insoddisfacibilità, soddisfacibilità di sequenti in LC	174
12.6.2 Precisazione sull'interpretazione di predicati	176
12.6.3 Esempi di classificazione della verità di un sequente	179
12.6.4 Su formalizzazioni con "solo", "soltanto"	184
12.7 Validità regole per sequenti in logica predicativa classica	188
12.7.1 Validità delle regole di $LC_=$ e loro inverse.	191
12.7.2 Regola dell'uguaglianza veloce	199
12.7.3 Esempi per chiarire il concetto di regola valida	200
12.8 Regole derivate	202
12.8.1 Per velocizzare derivazioni: regole di indebolimento	203
12.9 Validità = derivabilità in $LC_=$	203
12.9.1 ATTENZIONE: NON Esiste procedura di decisione per LC o $LC_=$	203
12.9.2 Perché modelli con dominio non vuoto	204
12.10 Consigli su come cercare una derivazione o contromodello	204

12.10.1	Esercizi svolti seguendo i consigli dati	205
12.10.2	Soluzioni di esercizi su regole valide	209
13	Spiegazione delle regole dei quantificatori in logica classica	213
13.1	Spiegazione alternativa delle regole dei quantificatori	218
14	Linguaggi predicativi con simboli di funzione	224
14.1	Calcolo dei sequenti $LC_{=}$ per la logica classica predicativa con uguaglianza e simboli di funzione	224
15	Nozione di teoria ed esempi	226
15.1	Come derivare in una teoria	227
15.2	Attenzione alla consistenza di una teoria	228
15.2.1	L'aggiunta delle regole di composizione NON cambia i teoremi di $LC_{=}$	229
15.3	Esempio di teoria informatica: la teoria di Hoare	230
15.4	Altro esempio di teoria matematica: teoria dei monoidi commutativi	231
15.5	Esercizi su teorie concrete	232
15.6	Ulteriore esempio di Teoria: l'Aritmetica di Peano	237
15.6.1	Cosa è derivabile in PA...	238
15.6.2	Esercizi	239
15.6.3	Induzione in aritmetica	240
15.6.4	Esempio del prigioniero	241
15.6.5	Esempio della valigia	242
15.6.6	Esempio: quale definizione di mucchio?	242
15.7	Conclusione dello studio	244
15.8	Verità scientifiche	244
15.8.1	Esempio "controintuitivo" di tautologia classica predicativa	245
15.8.2	Paradosso del mentitore	245
15.9	Approfondimento su logica classica	245
15.9.1	Attenzione agli scambi	245
16	Esercizi risolti su aritmetica di Peano	246

1 A che cosa serve un corso di logica?

Nei nostri discorsi quotidiani ci è certamente capitato di usare il sostantivo “logica” o l’aggettivo “logico”. Un tipico uso è in frasi del tipo: “Ti pare logico che uno si comporti in quel modo?”, “Ma con che logica ragiona quella persona?”. Probabilmente negli studi pre-universitari avete incontrato un uso più formale di queste parole, in particolare se avete fatto dei test di “logica” oppure se avete imparato a fare l’ “analisi logica” delle frasi italiane.

In questo corso faremo un uso molto specifico della parola “logica” completamente nuovo rispetto agli usi comuni. In particolare, la parola denoterà un *sistema formale* di regole fissate per poter *dedurre* la verità di certe asserzioni, scritte come *formule*, a partire dall’assumere come vere eventuali altre assunzioni.

L’attività del dedurre è simile all’attività del programmare. Il linguaggio di una logica, o sistema formale, può essere proprio pensato come un linguaggio di programmazione ove i programmi sono le deduzioni della verità di formule a partire dalla verità di un insieme (anche vuoto) di formule assunte come vere.

Con il presente corso di logica il lettore imparerà a programmare (o calcolare) *deduzioni* per *verificare* la *correttezza* di certe affermazioni in una certa logica.

Perchè un informatico dovrebbe essere interessato a studiare un linguaggio per dedurre? Prima di rispondere a questa domanda, proponiamo al lettore il seguente test di logica.

Valuta la validità delle seguenti affermazioni e rispondi alle eventuali domande:

1. “Il programma

```
y = 1;
z = 0;
while (z ≠ x) {
    z = z + 1
    y = y * z;
}
```

non termina su input $x = 0$ ”

corretto **sì** **no**

2. “Il programma

```
y = 1;
z = 0;
while (z ≠ x) {
    z = z + 1
    y = y * z;
}
```

calcola in y il fattoriale $x!$ su input x numero naturale”

corretto **sì** **no**

3. Ammesso che

“se la radice quadrata canta alla Scala di Milano allora il tuo vicino di banco è Napoleone”

allora è vero che

“se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano”.

corretto sì no

4. per ogni numero naturale n esiste un numero naturale m tale che

$$n + m = n$$

corretto sì no

chi è questo m ?

5. per ogni numero naturale n

$$2 + n = 1 + n$$

corretto sì no

6. Ammesso che

“ non si dia il caso che non esista input su cui il programma X si ferma”

allora è vero che

“ il programma X si ferma su qualche input”.

corretto sì no

7. “ Dio esiste”.

corretto sì no

8. Ammesso che “ **non tutti i programmi siano utili e corretti**” allora è vero che “ **esiste un programma non utile o esiste un programma non corretto.**”

corretto sì no

9. “Ogni bravo informatico, e ce ne sono di informatici bravi, può costruire un programma che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sè”

corretto sì no

10. Supponi che le seguenti affermazioni siano valide

- “ Se Carla non va in gita allora Giovanni ci va.”
- “ Beppe non va in gita se e solo se ci va Giovanni.”
- “ Beppe va in gita se Carla non va in gita.”
- “ Non tutti vanno in gita.”

allora è vero che

- “ Qualcuno non va in gita.”

corretto sì no

- “ Se Giovanni non va in gita allora Beppe ci va.”

corretto sì no

- “ Se Carla non va in gita allora Beppe non ci va.”

corretto sì no

- “ Carla va in gita.”

corretto sì no

- “ Non si dà il caso che nessuno vada in gita.”

corretto sì no

Pensate che un robot, ovvero un computer (ovvero un programma) sarebbe in grado di risolvere il test di logica che avete appena eseguito in modo corretto e automatico (o semiautomatico/interattivo con il vostro aiuto)?

Il presente corso di logica pone le basi affinché ciò possa realizzarsi, ovvero pone le basi per l'*intelligenza artificiale*.

Ma, allora, come si istruisce un robot a rispondere al test di logica?

L'idea di base è di istruirlo costruendo un *linguaggio formale* in cui poter *codificare* le asserzioni e provarne la *verità* tramite *derivazioni/deduzioni formali* che rappresentano la spiegazione *logica* del perchè certe asserzioni sono vere.

Anticipiamo qualche esempio di quel che faremo nel corso.

1.1 Esempio di codifica in linguaggio formale.

L'asserzione

Ammesso che
 “ **non si dia il caso che non esista input su cui il programma X si ferma**”
 allora è vero che
 “ **il programma X si ferma su qualche input**”.

si potrà formalizzare in tal modo nel sistema formale che useremo

$$\neg\neg(\exists x F(x)) \vdash \exists x F(x)$$

posto che:

$F(x) \stackrel{def}{=} \text{“ il programma si ferma sull'input } x \text{”}$

1.2 Esempio di derivazione formale

Una *derivazione* formale è un albero del tipo

$$\begin{array}{c}
 \text{ax-id} \\
 \frac{B(x) \vdash B(x)}{B(x) \vdash B(x)} \\
 \frac{C(x) \vdash C(x)}{C(x) \vdash \exists y C(y)} \text{ax-id} \\
 \frac{B(x), B(x) \rightarrow C(x) \vdash \exists y C(y)}{B(x) \rightarrow C(x), B(x) \vdash \exists y C(y)} \exists\text{-D}_v \\
 \frac{B(x) \rightarrow C(x), B(x) \vdash \exists y C(y)}{B(x) \rightarrow C(x), \forall x B(x) \vdash \exists y C(y)} \rightarrow\text{-S} \\
 \frac{B(x) \rightarrow C(x), \forall x B(x) \vdash \exists y C(y)}{B(x) \rightarrow C(x) \vdash \forall x B(x) \rightarrow \exists y C(y)} \text{sc}_{sx} \\
 \frac{B(x) \rightarrow C(x) \vdash \forall x B(x) \rightarrow \exists y C(y)}{\exists x (B(x) \rightarrow C(x)) \vdash \forall x B(x) \rightarrow \exists y C(y)} \forall\text{-S}_v \\
 \frac{}{\exists x (B(x) \rightarrow C(x)) \vdash \forall x B(x) \rightarrow \exists y C(y)} \rightarrow\text{-D} \\
 \frac{}{\exists x (B(x) \rightarrow C(x)) \vdash \forall x B(x) \rightarrow \exists y C(y)} \exists\text{-S}
 \end{array}$$

1.3 Scopi del corso

Gli scopi principali del corso sono

- imparare a *codificare asserzioni* in *linguaggio formale*
- imparare a *dedurre asserzioni* come *conseguenza logica* di altre *asserzioni* (tramite *alberi di derivazione*)

Ovvero il corso intende essere un'introduzione alla *deduzione formale/automatica*. Oltre a pensare all'arte del dedurre in modo analogico come un particolare tipo di *programmazione*, il nostro corso ha anche un aggancio concreto e specifico con il mondo della programmazione. Infatti lo studio della deduzione logico-formale pone le basi per la *verifica formale dei programmi*, ovvero per *formalizzare* la *correttezza (parziale)* di *programmi* rispetto ad una specifica, in modo *automatico/semiautomatico*.

In poche parole vogliamo costruire calcolatori sempre più intelligenti!

Consideriamo il seguente programma ad esempio

```

y = 1;
z = 0;
while (z ≠ x) {
    z = z + 1;
    y = y * z;
}

```

Questo programma calcola in y il fattoriale di x .

Per verificare questo programma, o qualsiasi altro, in letteratura esiste un calcolo che mostriamo di seguito solo per dare l'idea della parte che noi tratteremo nel corso:

Esempio di calcolo *formale* per correttezza programmi

$$\frac{(\phi) C_1 (\eta) \quad (\eta) C_2 (\psi)}{(\phi) C_1; C_2 (\psi)} \text{Composition}$$

$$\frac{}{(\psi[E/x]) x = E (\psi)} \text{Assignment}$$

$$\frac{(\phi \wedge B) C_1 (\psi) \quad (\phi \wedge \neg B) C_2 (\psi)}{(\phi) \text{if } B \{C_1\} \text{ else } \{C_2\} (\psi)} \text{If-statement}$$

$$\frac{(\psi \wedge B) C (\psi)}{(\psi) \text{while } B \{C\} (\psi \wedge \neg B)} \text{Partial-while}$$

$$\frac{\vdash_{\text{AR}} \phi' \rightarrow \phi \quad (\phi) C (\psi) \quad \vdash_{\text{AR}} \psi \rightarrow \psi'}{(\phi') C (\psi')} \text{Implied}$$

Figure 4.1. Proof rules for partial correctness of Hoare triples.

IMPARERETE A DERIVARE FORMALMENTE
QUESTE PARTI LOGICHE NEL CORSO

Michael Huth and Mark Ryan

Second Edition / **Logic in Computer Science**
Modelling and Reasoning about Systems

CAMBRIDGE

Imparerà il concetto di **verità formale** (o **validità formale**), la quale può essere:

- 11

Infatti esistono **molte logiche**. Per esempio nella letteratura corrente si trovano le seguenti logiche: **logica classica**, **logica intuizionista**, **logica quantistica**, **logica lineare**, **logica modale**, **logica temporale**....

Noi, in questo corso, studieremo solo la **logica classica** e le sue teorie.

- una **verità relativa** ad una **teoria**, per cui si parla di **verità extra-logica** in quanto una teoria è un'estensione di una logica con assiomi specifici ovvero

$$\boxed{\text{teoria} = \text{logica} + \text{assiomi}}$$

Esistono molte **teorie** in ogni campo del sapere. Per esempio: **teoria della computabilità (in informatica)**, **teoria dell'aritmetica (in matematica)**, **teoria relativistica (in fisica)**, **teoria dell'evoluzione (in biologia)**, ...

1.4.1 Esempi di verità logiche

Ad esempio l'asserzione complessa

AmMESSo che
 “ **non si dia il caso che non esista input su cui il programma X si ferma** ”
 allora è vero che
 “ **il programma X si ferma su qualche input** ”.

è corretta in logica classica (ma non in logiche alternative come quella intuizionista). Per approfondimenti si veda il libro di G. Sambin “**Per Istruire Un Robot: (ovvero, come costruirsi una logica)**”.

Altro esempio è l'asserzione

AmMESSo che
 “ **se la radice quadrata canta alla Scala di Milano allora il tuo vicino di banco è Napoleone** ”
 allora è vero che
 “**se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano**”.

che è corretta formalmente ma senza significato perchè la proposizione “la radice quadrata canta alla Scala di Milano” non ha senso semanticamente (a meno di ulteriori specifiche come il fatto che “radice quadrata” è un nome per un cantante o gruppo di cantanti, ma allora dovrebbe andare con la maiuscola “Radice quadrata”..).

1.4.2 Esempi di verità extra-logiche

L'asserzione

per ogni numero naturale n esiste un numero naturale m tale che $n + m = n$

è corretta nella teoria dell'aritmetica, ma non è verità logica.

L'asserzione

“Dio esiste”

è corretta nella teoria della dottrina cristiana ma non è una verità logica.

Lo stesso dicasi per l'asserzione

“L’esistenza di Dio è certa”.

1.4.3 Procedure formali del corso

Nel corso verrà fornita una **procedura di verifica formale** per classificare le **asserzioni formalizzate** in **logica classica** come:

- **verità logiche:**
per es. esercizio 3. o 6. o 8. del test
- **falsità logiche, ovvero paradossi logici:**
per es. esercizio 9. del test
- **opinioni logiche, cioè asserzioni nè vere, nè false per la logica:**
per es. esercizio 7. del test

1.4.4 Verifica formale delle verità dell’aritmetica di Peano

Nel corso imparerete anche a verificare *formalmente* le **verità** della **teoria dell’aritmetica di Peano** come ad esempio che vale

$$5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5$$

con un albero del tipo

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5 \vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5}}{\forall y (5 \cdot s(y) = 5 \cdot y + 5) \vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5} \forall\text{-S}_v}{\frac{\frac{\forall x \forall y (x \cdot s(y) = x \cdot y + x) \vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5}{\vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5} \forall\text{-S}_v}{\vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5} \text{comp}_{sx} \text{Ax 6.}}$$

Si noterà che $5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5$ NON è una verità della logica classica (serve infatti l’assioma 6. dell’aritmetica di Peano per derivarlo).

1.4.5 Esempio di paradosso (o contraddizione) con stessa forma esercizio 9. del test

L’asserzione dell’esercizio 9. del test precedente ha la stessa forma logica del famoso Paradosso di Russell:

“Nel villaggio di Cantù c’è un unico barbiere che rade tutti e soli gli uomini che non si radono da sè.”

Si vede che questa affermazione è un paradosso in quanto afferma una contraddizione: l’**esistenza** di tale barbiere. Questo barbiere, infatti, deve radersi ma non può farlo.

il barbiere di Cantù rade se stesso sse non si rade da sè

⇒ l’**esistenza** di un tal barbiere porta ad una **CONTRADDIZIONE**

Analogamente l’esistenza del programma dell’esercizio 9. del test che verifica la seguente proprietà:

il programma dell’esercizio 9. del test attiva se stesso sse non si attiva da sè

porta ad una **contraddizione** con lo stesso tipo logico di ragionamento (o meglio *forma logica*) del paradosso del barbiere.

Spieghiamo qui di seguito in dettaglio la contraddittorietà dell'enunciato nell'esercizio 9. del test.

Se, come dice il testo dell'esercizio 9. del test, il bravo informatico esistente *riuscisse a costruire un programma, che chiamiamo **ATT**, che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sè* allora da quanto assunto ne seguirebbe che per ogni programma, che indichiamo con la lettera **P**, il programma **ATT**, per come è costruito, verifica la proprietà

$$\text{proprietà } (+++) \quad \boxed{\begin{array}{c} \text{il programma } \mathbf{ATT} \text{ attiva } \mathbf{P} \\ \text{sse} \\ \mathbf{P} \text{ NON attiva } \mathbf{P} \end{array}}$$

Ora, dato che **ATT** stesso è un programma, nella proprietà (+++) possiamo sostituire al posto di **P** il programma **ATT** stesso ottenendo che vale per **ATT** la proprietà

$$\text{proprietà } (***) \quad \boxed{\begin{array}{c} \text{il programma } \mathbf{ATT} \text{ attiva } \mathbf{ATT} \\ \text{sse} \\ \mathbf{ATT} \text{ NON attiva } \mathbf{ATT} \end{array}}$$

Poi osserviamo che si possono verificare solo due casi: o **ATT attiva ATT** oppure **ATT NON attiva ATT**.

Caso (1): si verifica che **ATT attiva ATT**.

In tal caso dalla proprietà (***) segue che pure **ATT NON attiva ATT** ovvero vale che

$$\mathbf{ATT} \text{ attiva } \mathbf{ATT} \quad \text{e} \quad \mathbf{ATT} \text{ NON attiva } \mathbf{ATT}$$

che è una contraddizione!! Quindi questo caso non può verificarsi.

Caso (2): si verifica che **ATT NON attiva ATT**.

Pure in tal caso dalla proprietà (***) segue che vale anche che **ATT attiva ATT** ovvero vale che

$$\mathbf{ATT} \text{ NON attiva } \mathbf{ATT} \quad \text{e} \quad \mathbf{ATT} \text{ attiva } \mathbf{ATT}$$

che è una contraddizione!! Quindi anche questo caso non può verificarsi.

Conclusione: siccome NON si può verificare nè il caso (1) e nè il caso (2) che sono gli UNICI casi possibili riguardo all'esistenza di **ATT** - che per costituzione deve soddisfare la proprietà (***) - allora non possiamo che concludere che *tal programma ATT NON può esistere!!!*

Ora il lettore provi ad inventare paradossi con la stessa forma... Durante il corso avrà modo di studiare la forma logica precisa di questi paradossi.

1.5 Utilità dello studio della logica per lo sviluppo delle scienze

Diamo di seguito delle motivazioni sull'utilità dello studio della logica per uno scienziato o per un amante della conoscenza.

1.5.1 Una possibile obiezione allo studio di un corso di logica

Una possibile obiezione allo studio della logica è il suo carattere astratto e lontano dai saperi scientifici. Una prova a supporto di ciò può apparire il fatto che non compare come materia di studio negli insegnamenti pre-universitari.

Uno quindi potrebbe dire: “**a me interessano solo le verità di alcune teorie scientifiche particolari**” come

- la **teoria dei sistemi operativi e delle reti** (in informatica)
- la **teoria delle equazioni differenziali** (in matematica)
- la **teoria delle stringhe** (in fisica)
- la **teoria della dottrina cristiana** (in teologia)
- etc....

e “mi interessano eventuali applicazioni di queste teorie all’intelligenza artificiale”!

Ma allora: *ha senso studiare logica pura oltrechè teorie?* Sì per questi motivi

- I **paradossi logici** sono **falsi** in **ogni** teoria scientifica.
- le scienze devono dare per scontato le **VERITÀ LOGICHE**.

In altre parole nel momento in cui uno scienziato studia una certa teoria è bene che abbia presente le verità logiche e i paradossi in modo da non perdere tempo a verificarli, in quanto le verità logiche sono valide a priori (e basta la logica per riconoscerle) e i paradossi sono falsi a priori. Quindi, ha senso che uno scienziato verifichi la validità di asserzioni tramite **DEDUZIONI LOGICHE** all’interno della sua teoria solo se queste asserzioni rientrano tra le **opinioni logiche** (quindi nè verità logiche, nè paradossi).

Ad esempio, non ha senso che un informatico provi a **costruire un programma che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sè**.

Concludiamo dicendo che il corso di logica che tratteremo dà pure un contributo scientifico concreto e specifico alla scienza dell’informazione perchè *offre le basi per rendere la logica applicabile all’intelligenza artificiale*.

1.6 Come affrontare l’esame di logica

È *indispensabile* fare molti esercizi, poichè l’esame si basa soprattutto sul **ragionamento** e non sulla **memoria**.

1.6.1 Difficoltà del corso

Lo studio della logica è molto astratto come quello della matematica

In **logica**, come in **matematica**
non si sa **di cosa si parla**
nè se **ciò di cui si parla** sia **vero**.
(Russell)

1.7 Appendice: Soluzione all'ultimo quesito del test

Diamo qui la soluzione del seguente quesito:

Supponendo che le seguenti affermazioni siano valide

- *“Giovanni va in gita se Carla non ci va.”*
- *“Beppe non va in gita se e solo se ci va Giovanni.”*
- *“Beppe va in gita se Carla non va in gita.”*
- *“Non tutti vanno in gita.”*

allora è vero che

- *“Qualcuno non va in gita.”*

corretto sì no

- *“Se Giovanni non va in gita allora Beppe ci va.”*

corretto sì no

- *“Se Carla non va in gita allora Beppe non ci va.”*

corretto sì no

- *“Carla va in gita.”*

corretto sì no

- *“Non si dà il caso che nessuno vada in gita.”*

corretto sì no

Innanzitutto riscriviamo le supposizioni usando il segno di implicazione \Rightarrow e le seguenti lettere

C B G

pensando che siano abbreviazioni con questo significato

C= Carla va in gita

B= Beppe va in gita

G=Giovanni va in gita

e in aggiunta le numeriamo con “Ax n” abbreviazione di *assioma n*:

Ax.1 **non C \Rightarrow G**

Ax.2 **(non B \Rightarrow G) e (G \Rightarrow non B)**

Ax.3 **non C \Rightarrow B**

Ax.4 **“Non tutti vanno in gita.”**

Andiamo ad analizzare le varie conclusioni che numeriamo chiamandole “T.n” abbreviazione di *Teorema n* e le riscriviamo per quanto possibile utilizzando i simboli sopra e l'implicazione:

T.1 *“Qualcuno non va in gita.”*

T.2 **non G \Rightarrow B**

T.3 **non C \Rightarrow non B**

T.4 **C**

T.5 *“Non si dà il caso che nessuno vada in gita.”*

Osserviamo che ASSUMENDO come VERE TUTTE le asserzioni Ax1, Ax2, Ax3 e Ax.4

1. la prima conclusione è corretta e in particolare

T.1 è corretta grazie ad Ax.4

perchè se non tutti vanno in gita vuol dire appunto che qualcuno non ci va!

2. Pure la seconda conclusione è corretta e in particolare

T.2 è corretta grazie ad Ax.2.

Infatti da Ax.2 segue che *SE Giovanni NON va in gita* allora per forza Beppe ci va in quanto se non ci andasse per Ax.2 ci dovrebbe andare Giovanni ma abbiamo supposto che Giovanni non ci va.

Logicamente c'è una legge logica classica della **contrapposizione** che afferma che per ogni proposizione **P, Q** vale

$$(P \Rightarrow Q) \quad \text{sse} \quad (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$$

Ora siccome da Ax.2 sappiamo che vale

$$(\text{non } B \Rightarrow G)$$

usando la legge logica della contrapposizione applicata alle nostre proposizioni otteniamo che vale

$$(\text{non } G \Rightarrow \text{non non } B)$$

Notando poi che secondo il ragionamento classico vale anche questa legge logica detta della **doppia negazione** ovvero che

$$\text{non non } P \quad \text{sse} \quad P$$

da

$$(\text{non } G \Rightarrow \text{non non } B)$$

otteniamo che vale

$$(\text{non } G \Rightarrow B)$$

ovvero il teorema T.2.

3. Pure la terza conclusione è corretta e in particolare

T.3 è corretta grazie a Ax.1, Ax.2

Infatti da Ax.1 e da Ax.2 otteniamo che valgono

$$\text{non } C \Rightarrow G \text{ e } G \Rightarrow \text{non } B$$

da cui si conclude che vale

$$\text{non } C \Rightarrow \text{non } B$$

4. Pure la quarta conclusione è corretta e in particolare

T.4 è corretta in quanto segue dalla correttezza di Ax.3 e T.3 e quindi sapendo che T.3 segue da Ax.1, Ax.2, allora T.4 segue complessivamente da Ax.1, Ax.2, Ax.3.

Per convincerci della correttezza di T.4 ragioniamo per casi su **C**.

Sappiamo che o **C** vale e quindi abbiamo T.4 oppure **C** NON vale ovvero vale **non C**.

In questo secondo caso in cui si assume che Carla non vada in gita, ovvero che valga **non C**, per la correttezza di Ax.3 segue che **B** vale, ma otteniamo pure dalla validità di T.3, che segue a sua volta da Ax.1 e Ax.2, che anche **non B** vale e dunque il caso che **non C** valga NON è possibile perchè Beppe dovrebbe andare in gita e nello stesso tempo non andarci.

Concludiamo che l'unico caso possibile è che valga **C** e dunque T.4 è corretta se valgono Ax.1, Ax.2 e Ax.3.

5. la quinta conclusione è corretta e in particolare

T.5 è corretta grazie alla correttezza di T.4 che segue da Ax.1, Ax.2 e Ax.3.

Infatti siccome per T.4 Carla va in gita ne segue che qualcuno va in gita e che quindi non si dà il caso che nessuno vada in gita.

Per curiosità possiamo chiederci se dalle assunzioni Ax.1, Ax.2, Ax.3 e Ax.4 riusciamo a ricavare qualche informazione su **B** o su **G**, ovvero se tali assunzioni ci permettano di dedurre se Beppe e Giovanni vanno in gita o non ci vanno.

Innanzitutto si noti che affinché tutte le supposizioni e quindi tutti i teoremi siano validi, tra cui T.4, deve per forza valere **C**. Ora per avere ulteriori informazioni su **B** o su **G** Ax.1 e Ax.3 sono irrilevanti in quanto sappiamo che Carla va in gita mentre Ax.1 e Ax.3 danno informazioni nel caso non ci andasse!

Ci concentriamo quindi solo sulla validità di Ax.2 e Ax.4 per esempio il caso in cui valga **B** per vedere se questo potrebbe verificarsi.

Poi si osservi che affinché valga Ax.2 deve per forza valere **non G**, in quanto se valesse **G** dovrebbe valere **non B** per Ax.2 mentre siamo nel caso in cui vale **B**.

Quindi se Beppe va in gita allora abbiamo completa informazione su cosa facciano tutti: ovvero si verifica **C** e **B** e **non G** dalla validità di Ax.1, Ax.2 e Ax.3. Però non siamo certi che questo caso possa verificarsi se non verifichiamo che vale pure Ax.4. Ora Ax.4 in tal caso vale ovvero non tutti vanno in gita in quanto vale **non G** vale ovvero Giovanni non va in gita.

Per esercizio si osservi che pure la combinazione **C** e **non B** e **G** verifica le supposizioni Ax.1, Ax.2, Ax.3. e Ax.4. e quindi anche le conclusioni.

Si conclude quindi che *le assunzioni Ax.1, Ax.2, Ax.3. e Ax.4 permettono di dedurre che Carla va in gita ma NON permettono di dedurre cosa facciano Beppe e Giovanni ma solo che UNO dei due va in gita e che l'altro NON ci va!!!*.

2 Prerequisiti del corso: saper ragionare (ovvero nessuno!)

Questo corso propone una riflessione sul modo di ragionare e quindi il solo prerequisito per seguirlo è di essere dotati di raziocinio. L'assunzione filosofica da cui partiamo è che in quanto essere umani **siamo già logici per natura**.

La **prova** psicologica che **la logica in quanto capacità di dedurre è un esercizio specifico del nostro essere animali razionali** è data dai seguenti fatti:

- **ridiamo delle barzellette**: se non si sa usare la logica o se non si sanno fare deduzioni, non si può ridere di certe barzellette;
- **riconosciamo i paradossi**: se non si usa la logica, non si riesce a riconoscere che certe affermazioni sono contraddittorie.

Mettiamoci dunque alla prova con una barzelletta ...

Esempio di barzelletta “deduttiva”.

Ci sono due compagni, Bepi e Toni. Sono al bar, e passano al tempo a guardare la gente.

Son lì che bevono. Entra un signore, e Bepi dice:

“Io non sono proprio capace di capire che mestiere fa quello lì.”

“Ah, dice Toni, nemmeno io.”

Questo signore ad un certo punto dopo essersi bevuto qualcosa va al bagno ma c'è la fila. Allora Bepi dice:

“Beh, aspetta che lo seguo, così mentre aspetta mi permetto di domandarglielo.”

Così fa, e gli domanda: “Mi scusi, lei, che mestiere fa?”

E quello: “Io sono un logico.”

“Ah sì? E che cosa vuol dire?”

“Ah guardi, è una cosa complicata da spiegare, ci vuole un intero corso universitario per capirlo, oppure bisognerebbe leggere un libro intero. Anzi, le consiglio *Istruzioni per un robot* di un certo Giovanni Sabin. Si pensi che è così divertente che vi si raccontano barzellette sui logici. Ma se lei desidera, posso comunque darle un'idea con un esempio.”

“Ah, comprerò certamente il libro, ma sono così curioso che voglio sentire anche l'esempio.”

“Bene. Lei ce l'ha un acquario?”

“Beh, in effetti sì, capita che io abbia un acquario.”

“Vede, da questo, con la logica, io **deduco** che le piacciono i pesci.”

“Ah, caspita, è proprio vero.”

“Vede, io allora **deduco** con la logica che lei ama la natura.”

“Ah, è proprio vero, certamente io amo la natura.”

“Vede, e da questo, sempre con la logica, io **deduco** che lei ama le donne.”

“Ah, è proprio pazzesco ... Allora ho capito.”

Esce, torna da Toni che gli chiede “Ti ha detto che mestiere fa?”

“Sì, fa il logico.”

“Ah sì, e che cosa vuol dire che fa il logico?”

“È difficilissimo, bisogna leggere un libro sulle barzellette, però ti posso spiegare con un esempio.”

“Va beh, fammi l'esempio.”

“Tu ce l'hai un acquario? ”

“Io? no.”

“Beh, allora ti piacciono solo i maschi!”

Nella precedente barzelletta l'eventuale risata dell'ascoltatore è provocata dal riconoscimento del fatto che l'**assumere valide le seguenti affermazioni**

Aq \Rightarrow **Ps**

“Ad un uomo che ha un'acquario piacciono i pesci”

Ps \Rightarrow **Nt**

“Ad un uomo a cui piacciono i pesci piace la natura”

Nt \Rightarrow **Dn**

“Ad un uomo a cui piace la natura allora piacciono le donne”

non comporta che è pure valida l'affermazione

non Aq \Rightarrow **non Dn**

“Ad un uomo che non ha l'acquario non piacciono le donne”

che poi nella barzelletta è espresso dicendo che ad un uomo che non ha l'acquario piacciono solo gli uomini!

3 Genesi e utilità dei paradossi logici

I **paradossi logici** sono **contraddizioni** ovvero affermazioni sempre **false** per motivi puramente logici.

Ad esempio se asseriamo

“Napoleone è morto il 4 maggio 1821.”

diciamo una falsità storica (perché Napoleone è morto il 5 maggio dello stesso anno secondo le fonti storiche) ma non una falsità logica.

Invece se diciamo

“Napoleone lodava tutte le persone che non lodavano se stesse e soltanto loro.”

diciamo una falsità logica visto che questa asserzione è una variante del paradosso dell'esercizio 9. Per capirlo basta chiedendosi: Napoleone lodava o no se stesso?

Risposta: se rispondiamo che Napoleone lodava se stesso allora, siccome lodava soltanto le persone che non si lodavano, dobbiamo concludere che non si lodava, contraddizione; dall'altro canto se rispondiamo che Napoleone non lodava se stesso allora ne segue che si lodava e quindi di nuovo troviamo una contraddizione. Questi ragionamenti ci portano a concludere che l'asserzione

“Napoleone lodava tutte le persone che non lodavano se stesse e soltanto loro.”

è falsa perché contraddittoria ed è pure una falsità logica in quanto la contraddittorietà dell'asserzione rimane sia che l'affermiamo di Napoleone o di chiunque altro.

Invece se diciamo

“Posto che **Napoleone è nato nel 1769 e morto nel 1821** allora **ha vissuto più di 53 anni.**”

diciamo una falsità extra-logica (in particolare aritmetica e storica) che NON è una falsità logica perchè sebbene la premessa sia vera storicamente, ovvero che Napoleone sia nato nel 1769 e morto nel 1821, poi occorre fare un calcolo con i numeri naturali per sapere se *ha vissuto più di 53 anni* e ciò non è vero in quanto 1821 meno 1769 fa 52 (qui che sia Napoleone soggetto della premessa o chiunque altro poco importa perchè l'affermazione è scorretta per un conto aritmetico!) e quindi al massimo ha vissuto 52 anni.

Di contro l'asserzione

“Posto che **Napoleone è nato nel 1769 e morto nel 1821** allora **ha vissuto almeno 51 anni.**”

è una verità extra-logica aritmetica (anche qui che sia Napoleone soggetto della premessa o chiunque altro poco importa, perchè l'affermazione è corretta per un conto aritmetico!).

Infine l'asserzione

“Posto che **Napoleone è nato nel 1769 e morto nel 1821** allora **ha vissuto più di 52 anni.**”

potrebbe essere una verità extra-logica ma non puramente aritmetica perchè per decidere la sua verità occorre sapere in che giorni Napoleone è nato e morto dato che la premessa non dice se Napoleone è morto prima o dopo aver compiuto 52 anni. Siccome da fonti storiche sappiamo che Napoleone è nato in agosto e morto in maggio di conseguenza l'asserzione è una falsità extra-logica (storico e aritmetica).

Ora vogliamo analizzare meglio alcuni paradossi: vedremo che essi nascono dal tentativo di identificare livelli diversi di riferimento della nostra attività raziocinante che invece devono essere tenuti distinti per evitare contraddizioni.

Infine accenneremo al fatto che i paradossi sono molto utili nello studio della logica e delle teorie scientifiche per capire cosa una teoria NON può dimostrare.

3.1 Superiorità dell'uomo sulla macchina

Abbiamo già constatato che l'enunciato “**Ogni bravo informatico può costruire un programma che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sè**” è una falsità logica in quanto un'attenta analisi logica di quel che afferma porta a concludere che non esiste un tal programma che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sè. La constatazione che **esistono dei limiti rispetto ai programmi che si possono costruire** induce a concludere che non si può ridurre la nostra attività raziocinante ad un unico livello, che nell'asserzione menzionata è quello del programmare (in quanto l'attivazione di tutti e soli i programmi che NON si attivano da sè può essere compiuta solo da un qualcosa di diverso da un programma, per esempio dall'intervento umano...), ovvero porta a concludere la **superiorità del razioicinio umano sul concetto di macchina/programma come attualmente concepito.**

3.2 Quale è la causa del paradosso di Russell?

Ora notiamo che la causa del paradosso di Russell

“**Nel villaggio di Cantù c'è un unico barbiere che rade tutti e soli gli uomini che non si radono da sè.**”

è simile a quella dell'esercizio 9. e consiste nell'identificazione di due livelli:

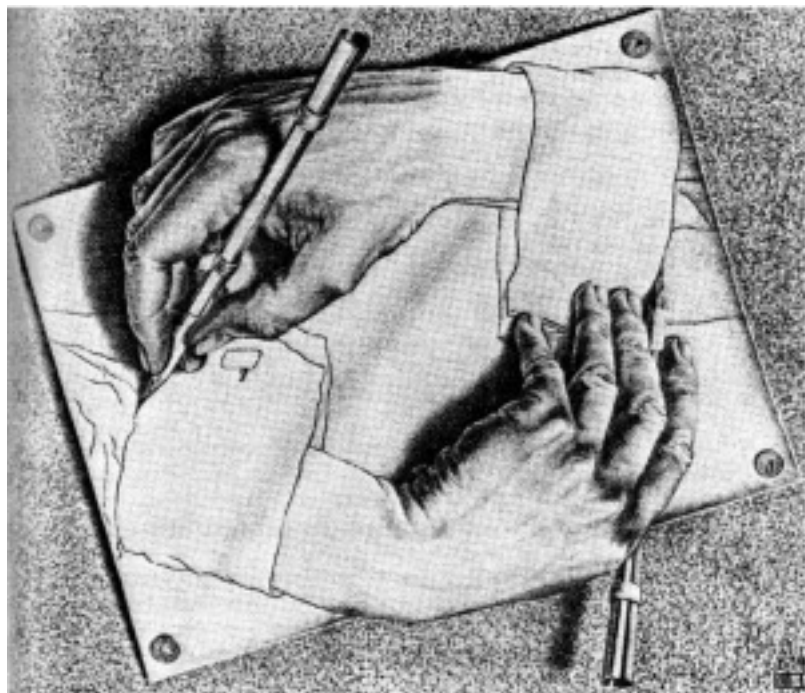
livello 1 — **barbiere soggetto** dell'azione “radere” quelli che “non si radono” (che a posteriori non può essere anche oggetto)

livello 2 — **cliente oggetto** dell'azione “radere” (che a posteriori non può coincidere con il barbiere!)

Ovvero: **barbiere** = **cliente** dà contraddizione.

3.3 Esempio di paradosso in pittura

L'opera “Mani che disegnano” di Escher (1948)



rappresenta un paradosso la cui causa è pure l'identificazione di due livelli:

livello 1 — **mano** solo **soggetto** dell'azione “disegnare”

livello 2 — **disegno** solo **oggetto** dell'azione “disegnare”.

3.4 Paradosso del mentitore e i livelli di astrazione

Il famoso paradosso del mentitore ci insegna che quando ragioniamo ci sono sempre vari **livelli** di **riferimento**.

Prima di introdurre il paradosso, il lettore risponda a questa domanda

“Questa proposizione è falsa.”

può essere vera?

Vediamo un pò cosa rispondere...

1. La proposizione “**Questa proposizione è falsa.**” è **vera** se e solo se quel che dice è vero, ossia che essa è **falsa**, e quindi non può essere **vera**.
2. La proposizione “**Questa proposizione è falsa.**” è **falsa** dunque quel che dice è vero e risulta quindi vera, da cui si conclude che non può essere nemmeno **falsa**.

Quindi concludiamo che la proposizione “**Questa proposizione è falsa.**” non può essere nè **vera**, nè **falsa**. Dunque di fronte alla domanda:

“*La proposizione: “**Questa proposizione è falsa.**” può essere vera o falsa.*”

corretto sì no

la risposta è NO perchè l’asserzione “*La proposizione: “**Questa proposizione è falsa.**” può essere vera o falsa.*” è contraddittoria, ovvero un paradosso.

Tale paradosso nasce dall’identificazione di questi livelli:

- livello 1: valutazione di **vero** o **falso** da parte nostra (**livello metalinguistico**)
- livello 2: valutazione di **vero** o **falso** da parte della proposizione stessa come suo contenuto semantico (**livello linguistico**)

3.5 Il caso giudiziario Protagora-Evatlo

Riportiamo qui il celebre caso giudiziario avente come protagonisti Protagora ed Evatlo.

Il celebre sofista Protagora aveva accolto come discepolo Evatlo convenendo con lui che gli avrebbe pagato le lezioni quando avesse vinto la prima causa in tribunale.

Terminato il corso di studi, Evatlo non si decideva ad intraprendere l’attività forense e Protagora stanco di attendere il suo onorario, intentò causa al suo ex allievo il quale decise, apparentemente in modo avventato, di assumere personalmente la propria difesa.

Dilemma di Protagora.

Protagora disse

Se Evatlo perde questa causa allora dovrò pagarmi in forza della sentenza del tribunale. Se invece Evatlo vince questa causa allora dovrò pagarmi ugualmente, in forza del nostro accordo. Ora, o Evatlo perderà o vincerà. Dunque, finalmente, Evatlo dovrà pagarmi.
--

Controdilemma di Evatlo.

Evatlo replicò al maestro con un controdilemma:

Se io vinco questa causa allora non ti dovrò pagare in forza della sentenza del tribunale. Se invece la perdo allora non ti dovrò pagare in forza del nostro accordo. Ora le possibilità sono due: o vinco o perdo questa causa. Dunque, non ti dovrò pagare.

Chi ha ragione? Evatlo o Protagora? Per rispondere consideriamo i 2 casi possibili, ovvero che sia Evatlo a vincere la causa o che sia Protagora a vincerla.

Caso 1: Evatlo vince la causa (prima lettura):

Nel caso **Evatlo vincessse la causa**, allora Evatlo dovrebbe pagare in virtù dell'**accordo**, ma non dovrebbe pagare in virtù della **sentenza**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo non vince la causa** ovvero **il caso 1 non è possibile**.

caso 2: Evatlo non vince la causa (prima lettura):

Nel caso **Evatlo perdesse la causa**, allora Evatlo deve pagare in virtù della **sentenza**, ma non deve pagare in virtù dell'**accordo**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo vince la causa**. Ma ciò non è possibile perchè ci riporta al caso 1 che abbiamo detto non essere verificabile. Dunque concludiamo che **Evatlo nè vince nè perde** la causa. Dove sta l'errore?

Caso 1: Evatlo vince la causa (ad una lettura più attenta):

Nel caso **Evatlo vincessse la causa** e *l'accordo tra Protagora ed Evatlo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria*, allora Evatlo dovrebbe pagare in virtù dell'**accordo**, ma non dovrebbe pagare in virtù della **sentenza**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo non vince la causa**, però assumendo che *l'accordo tra Protagora ed Evatlo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria*.

Caso 2: Evatlo non vince la causa (ad una lettura più attenta):

Nel caso **Evatlo non vincessse la causa** e *l'accordo tra Protagora ed Evatlo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria*, allora Evatlo deve pagare in virtù della **sentenza**, ma non deve pagare in virtù dell'**accordo**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo vince la causa**. Ma sappiamo che se **Evatlo vince la causa**, si ricade nel caso 1 e allora di nuovo troviamo una **contraddizione!**

Cosa concludiamo?

3.5.1 Conclusione del caso giudiziario Protagora-Evatlo

(ad una lettura più attenta):

Nel caso *l'accordo tra Protagora ed Evatlo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria*, **sia che Evatlo vinca la causa sia che la perda**, si arriva ad una **contraddizione**.

Dunque, dando per scontato che il giudice emetta una sentenza, allora *l'accordo tra Protagora ed Evatlo non può essere rispettato dopo la sua emissione*.

In altre parole, nessuno dei due ha ragione, se si suppone che l'accordo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria.

Ora per verificare la comprensione di quanto sopra, si esegua questo test di comprensione:

Nel caso giudiziario Evatlo/Protagora l'accordo tra Protagora ed Evatlo può essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria.

corretto sì no

Chiaramente ora la risposta è "no" perchè l'asserzione

Nel caso giudiziario Protagora-Evatlo l'accordo tra Protagora ed Evatlo può essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria.

è una affermazione contraddittoria, ed è quindi una **falsità logica**.

3.5.2 Quale è la causa del paradosso giudiziario Protagora-Evatlo?

La contraddizione del paradosso giudiziario nasce dall'assumere che **il rispetto dell'accordo Protagora/Evatlo** permanga dopo l'emissione della **sentenza** ovvero che entrambi i livelli:

livello 1 — **rispetto accordo**

livello 2 — **sentenza**

siano **entrambi validi**.

Invece, se si assume valido il livello **sentenza** senza assumere come valido anche il livello **rispetto dell'accordo**, si **elimina la contraddizione**.

3.6 Utilità dei paradossi per le scienze

Nello studio delle teorie scientifiche i paradossi sono molto utili per scoprire ciò che una teoria (formale) **non** può dire... Ad esempio ragionando come segue: se una certa assunzione all'interno di una teoria porta ad un paradosso, allora nella teoria in questione l'assunzione risulta falsa.

Per esempio, oltre all'esercizio 9. del test iniziale esistono altre **istanze del paradosso di Russell** che forniscono interessanti risultati per l'**informatica**: usando la forma logica del **paradosso di Russell** si dimostra che è **irrisolubile** il famoso **problema della fermata di un programma** (che lo studente di informatica studierà nel corso di computabilità), ovvero che **“non esiste un programma che sappia decidere se ogni programma (compreso sè stesso) termina o no su un dato input”**.

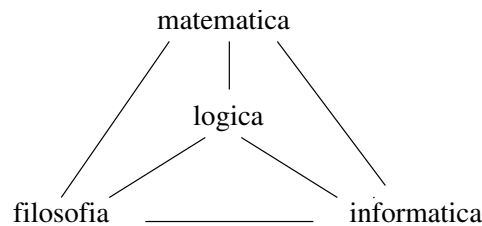
Possiamo accennare anche ad un'applicazione in **matematica** dell'uso dei paradossi: usando la forma logica del **paradosso del mentitore** si dimostra che la **teoria dell'aritmetica di Peano non può dimostrare che lei stessa non è contraddittoria**, ovvero che non deduce come vere delle falsità (secondo teorema di incompletezza di Gödel).

3.7 Come costruire paradossi?

Una volta scoperta la **forma logica** di un paradosso, se ne possono costruire di simili cambiando i costituenti senza cambiare la forma.... Quindi, per riconoscere i paradossi, è conveniente iniziare a studiare la **forma logica** delle frasi che sarà il primo argomento del nostro corso di logica.

4 La Logica come base di ogni scienza

La **Logica** è alla **base di ogni scienza (o teoria)** in quanto è **fondamento di ogni scienza** non tanto per i contenuti specifici ma per la loro articolazione **deduttiva**.



Infatti la logica si occupa di riconoscere la verità di un enunciato non tanto in quanto corrisponde ad uno stato del mondo (come avviene per le scienze) quanto di stabilire le **condizioni di verità** di un enunciato a partire da altri basandoci solo sulla sua **forma logica** espressa in un *LINGUAGGIO FORMALE*.

Prima di introdurre il linguaggio formale cerchiamo di capire cosa sia una forma logica di un enunciato intuitivamente.

5 Alla ricerca della forma logica

Intuitivamente la forma logica di una proposizione è la struttura astratta dei legami logici delle proposizioni semplici che la compongono.

Ad esempio la proposizione dell’asserzione

Ammesso che
“**se piove, i canali interni vengono chiusi**”,
allora, è vero che
“**se i canali interni non vengono chiusi, allora non piove**”

è complessa ed è composta dalle seguenti proposizioni semplici: “**piove**” e “**i canali interni vengono chiusi**” legate logicamente tramite “ammesso che”, e “allora è vero che”.

La proposizione della seguente asserzione ha la stessa forma logica della precedente

È vero che
“**se il tuo vicino di banco non è Napoleone
ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano**”
ammesso che
“**se la radice quadrata canta alla Scala di Milano
allora il tuo vicino di banco è Napoleone**”.

e ha pure la stessa forma e contenuto dell’ **esercizio 3. del test**.

Mentre l’asserzione

“È vero che **c’è silenzio**
se **tutti dormono**
ed se è vero che
se tutti dormono c’è silenzio.”

ha la stessa forma di

“Ammesso che **Tizio ama Caio**
e che **se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio.**
ne segue che **Caio ama Tizio**”.

Ora introduciamo un modo più semplice per fare asserzioni complesse come quelle sopra.

Si noti che nelle asserzioni sopra, c'è sempre una *conclusione* (per esempio **Caio ama Tizio** nell'asserzione immediatamente sopra) che segue da delle proposizioni assunte come vere, dette *premesse*, (nell'asserzione immediatamente sopra le premesse sono **Tizio ama Caio** e **se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio**).

Ora indichiamo tali asserzioni complesse mettendo le premesse in lista sopra una linea che separa la conclusione come segue: scriviamo

Tizio ama Caio.
Se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio.

Caio ama Tizio.

come forma concisa per

“Ammesso che **Tizio ama Caio** e che **se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio** ne segue che **Caio ama Tizio**”.

Altro esempio: scriviamo

Tutti dormono.
Se tutti dormono c'è silenzio.

C'è silenzio.

come forma concisa per

“È vero che “**c'è silenzio**” se **tutti dormono** ed se è vero che **se tutti dormono c'è silenzio.**”

5.1 Necessità di un linguaggio formale

Per descrivere la **forma logica** di una frase si definisce un **linguaggio formale** (o **linguaggio simbolico**).

Ogni *linguaggio di programmazione* è un *esempio* di *linguaggio formale*.

Prima di introdurre il concetto di linguaggio formale torniamo sulla distinzione tra livelli di riferimento (per approfondimento il lettore legga il capitolo 1 del libro di Sambin “**Per Istruire Un Robot: (ovvero, come costruirsi una logica)**”).

5.1.1 Livelli di riferimento in un programma

Nel programma

```

y = 1;
z = 0;
while (z ≠ x) {
    z = z + 1
    y = y * z;
}

```

quanti **livelli di astrazione** o **riferimento** ci sono?

1. **codice del programma**, \Rightarrow livello del “**linguaggio**” cioè **sintassi**;

2. **commento/verifica** di ciò che fa, \Rightarrow livello del **metalinguaggio** cioè **SEMANTICA**.

5.2 Livelli di riferimento nel corso

Nel nostro corso parleremo di almeno 2 livelli di riferimento in relazione ai linguaggi formali:

1. livello del **linguaggio formale** — **sintassi**
2. livello del **metalinguaggio/nostro linguaggio naturale** — **semantica**

Il livello del **linguaggio formale** è costituito da simboli ed espressioni del linguaggio che possiamo associare in modo specifico ad una **MACCHINA** o **ROBOT**.

Invece il livello del **metalinguaggio** è dato dal significato dei simboli ed espressioni del precedente livello che è assegnato da NOI in modo specifico.

Ricordiamo che dobbiamo operare una netta distinzione tra tali livelli di riferimento per non incorrere in paradossi.

5.3 UNIVERSALITÀ del linguaggio logico formale

Il linguaggio formale utilizzato per rappresentare le formule logiche è **UNIVERSALE** nel senso che non fa riferimento a nessun lingua parlata ma anzi potrebbe essere utilizzato per costruire traduttori automatici tra lingue diverse.

5.4 Spiegazione del carattere ASTRATTO della LOGICA

Ora possiamo capire meglio la citazione di Russell

In **logica**, come in **matematica**
non si sa di cosa si parla
nè se ciò di cui si parla sia vero.

ricordando che lo scopo della logica è di introdurre un **linguaggio simbolico** per studiare la **FORMA** degli enunciati **SENZA RIFERIMENTO** al contenuto semantico specifico dei loro componenti atomici.

Ad esempio l'argomentazione

Nessun falipo è goloso e Giove è un falipo.
Giove non è goloso.

è valida logicamente, come l'esercizio 3. del test anche se la parola "falipo" non compare nel vocabolario italiano, nè sappiamo se abbia senso attribuirgli l'aggettivo "goloso".

6 Linguaggio formale proposizionale

Costituenti delle nostre asserzioni sono le proposizioni, ove con proposizione si intende un enunciato in un determinato linguaggio, non solo dotato di senso ma anche di valore di verità (per approfondimento si rimanda al capitolo 1. del libro di Sambin). La logica formale studia le forme logiche delle proposizioni e la loro validità.

Ora introduciamo un linguaggio formale contenente segni per denotare le **PROPOSIZIONI** che si distinguono in atomiche e composte.

A tal fine usiamo le lettere dell'alfabeto

A, B, C . . . , Z

come NOMI per indicare proposizioni ATOMICHE qualsiasi in modo **ASTRATTO**. Nel gergo formale **A, B, C . . . , Z** si dicono **VARIABILI PROPOSIZIONALI**.

A partire dalle **variabili proposizionali**

A, B, C . . . , Z

costruiamo proposizioni composte usando i segni di
connettivo unario della **negazione**

\neg

connettivo binario dell' **implicazione**

\rightarrow

connettivo binario della **coniunzione**

$\&$

connettivo binario della **disgiunzione**

\vee

le parentesi (e)

la proposizione costante atomica **falso** \perp

la proposizione costante atomica **vero** **tt**.

6.1 Grammatica delle proposizioni formali

Una proposizione formale

pr

(che è una META-variabile per indicare una proposizione formale generica)

è una stringa di simboli ottenuti in tal modo:

pr \equiv **A** oppure **pr** \equiv **B** oppure una qualsiasi variabile proposizionale, detta **proposizione atomica**, che noi abbiamo fissato essere una lettera maiuscola dell'alfabeto inglese;

oppure **pr** coincide con la proposizione costante falso \perp o la proposizione costante vero **tt**

oppure **pr** coincide con una delle seguenti proposizioni ottenute da altre due generiche proposizioni **pr**₁ e **pr**₂ come segue:

(**pr**₁) $\&$ (**pr**₂) che sta per **pr**₁ e **pr**₂

(**pr**₁) \vee (**pr**₂) che sta per **pr**₁ o **pr**₂

(**pr**₁) \rightarrow (**pr**₂) che sta per se **pr**₁ allora **pr**₂

ovvero **pr**₁ **implica** **pr**₂

\neg (**pr**₁) che sta per **NON** si dà il caso che **pr**₁

6.1.1 Convenzione per eliminare parentesi nella scrittura di proposizioni formali

Conveniamo di adottare la seguente opzione:

Nello scrivere le proposizioni simboliche **possiamo eliminare le parentesi dalle variabili proposizionali**, dette **proposizioni atomiche**, e dalle **proposizioni composte** CONVENENDO che \neg si lega alla proposizione atomica più vicina più di ogni altro connettivo senza bisogno di parentesi, seguito a pari merito da \vee , $\&$, che a loro volta sono legate alle formule più di \rightarrow .

Ovvero

\neg lega più di $\vee, \&$ legano più di \rightarrow

In altre parole

possiamo togliere le parentesi se
il connettivo più esterno *lega meno* di quello o quelli immediatamente **più interni**
rispetto alla convenzione sopra.



Esempi:

“(negazione di A) e B”

si scrive

$$\neg A \& B$$

“negazione di (A e B)”

si scrive

$$\neg(A \& B)$$

“la (negazione di A) implica (B e C)”

si scrive

$$\neg A \rightarrow B \& C$$

“la negazione di ((A implica B) e C) ”

si scrive

$$\neg((A \rightarrow B) \& C)$$

Si osservi che

$$(A \text{ e } B) \text{ e } C$$

si scrive

$$(A \& B) \& C$$

che NON si può semplificare in

$$A \& B \& C$$

perchè il connettivo di congiunzione è solo binario!!

Inoltre

$$(A \text{ e } B) \text{ o } C$$

si scrive

$$(A \& B) \vee C$$

ove non si può togliere altre parentesi perchè sia la congiunzione che la disgiunzione sono connettivi binari.

6.2 Cosa traducono & ed \rightarrow

Si noti che la congiunzione $\mathbf{pr_1 \& pr_2}$ traduce legami tra $\mathbf{pr_1}$ e $\mathbf{pr_2}$ del tipo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{pr_1 \text{ e } pr_2} & \mathbf{pr_1 \text{ perchè } pr_2} & \mathbf{pr_1 \text{ mentre } pr_2} \\ \mathbf{pr_1 \text{ però } pr_2} & \mathbf{pr_1 \text{ quindi } pr_2} & \mathbf{pr_1 \text{ ma } pr_2} \end{array}$$

mentre l' *implicazione* $\mathbf{pr_1 \rightarrow pr_2}$ traduce legami del tipo

$$\begin{array}{cc} \mathbf{se \ pr_1 \text{ allora } pr_2} & \mathbf{pr_1 \text{ solo se } pr_2} \\ \mathbf{pr_2 \text{ se } pr_1} & \mathbf{solo \ se \ pr_2 \text{ vale } pr_1} \end{array}$$

Trucco per tradurre il solo se

- riscrivere la frase *togliendo* il “solo”
- tradurre la frase ottenuta usando l'implicazione
- se la frase ottenuta è $\mathbf{pr_1 \rightarrow pr_2}$ allora la traduzione della frase iniziale si trova *SCAMBIANDO antecedente con conseguente*, ovvero scrivendo $\mathbf{pr_2 \rightarrow pr_1}$

Osservazione sull'uso dell'uso del “solo se” nell'uso comune e in matematica.

Nel linguaggio parlato spesso l'espressione “solo se” viene usata come SINONIMO dell'espressione “se e solo se”.

Ad *esempio* quando affermiamo:

“Prendo l’ombrello solo se piove”

sottointendiamo che:

“Prendo l’ombrello se e solo se piove”

ovvero

“Se piove prendo l’ombrello e se prendo l’ombrello di sicuro piove”

La formalizzazione di

“Prendo l’ombrello solo se piove”

è

$$O \rightarrow P$$

posto

O = prendo l’ombrello

P = piove

mentre

la formalizzazione di

“Prendo l’ombrello se e solo se piove”

coincide con quella di

“Se piove prendo l’ombrello e se prendo l’ombrello di sicuro piove”

che è

$$(P \rightarrow O) \ \& \ (O \rightarrow P)$$

Invece l’uso dell’espressione **“solo se”** negli enunciati espressi in matematica e nella scienza per evitare ambiguità NON sottointendono un **se e solo se** e quindi quando affermiamo:

“Vale il teorema 1 solo se vale il teorema 2”

intendiamo che:

“Se vale il teorema 1 allora vale necessariamente il teorema 2”

oppure equivalentemente che:

“È sufficiente che valga il teorema 1 affinché valga il teorema 2”

Infatti spesso si parlano di condizioni *necessarie e sufficienti* affinché valga un certo enunciato di cui non si sa se è un teorema!

Esempio di uso appropriato di “solo se”: Posso affermare il seguente enunciato, *sempre vero anche se sembra controintuitivo (!)*,

“Sono a Padova solo se sono in Italia.”

che si formalizza in

$$P \rightarrow I$$

con

P = sono a Padova

I = sono in Italia

E con tal affermazione NON intendo dire assolutamente

“Sono a Padova se solo se sono in Italia.”

ma invece che

“Se sono a Padova allora necessariamente sono in Italia”

ovvero

“L’essere in Italia è una condizione necessaria affinché io sia Padova”

oppure equivalentemente che

“L’essere a Padova è una condizione sufficiente affinché io sia in Italia.”

Per concludere

In un’implicazione	
$\mathbf{Pr}_1 \rightarrow \mathbf{Pr}_2$	
l’ antecedente dell’implicazione \mathbf{Pr}_1 si dice condizione SUFFICIENTE affinchè si verifichi il conseguente dell’implicazione \mathbf{Pr}_2	il conseguente dell’implicazione \mathbf{Pr}_2 si dice condizione NECESSARIA affinchè si verifichi l’ antecedente dell’implicazione \mathbf{Pr}_1

6.3 Esempi di proposizioni simboliche

1. La proposizione

“Oggi è venerdì e domani è sabato”

ha la forma logica di congiunzione di due proposizioni

V&S

ove

$V = \text{“Oggi è venerdì”}$

$S = \text{“domani è sabato”}$

2. “Oggi è venerdì e domani è sabato, mentre dopodomani è domenica” si può formalizzare così

$(V \& S) \& D$

ove

$V = \text{“Oggi è venerdì”}$

$S = \text{“domani è sabato”}$

$D = \text{“dopodomani è domenica”}$

(si noti che “mentre” ha lo stesso significato di una &)

3. “Solo se piove prendo l’ombrello”

si può formalizzare così

$O \rightarrow P$

ove

$O = \text{prendo l’ombrello}$ e $P = \text{piove}$.

(Si noti che il fatto che “piova” è la condizione NECESSARIA affinché io porti l’ombrello...).

4. “Il programma fattoriale termina sull’input 5 perchè ad un certo punto la condizione del **while** diventa falsa.”

si può formalizzare così

$$F \& T$$

ove

F = “ad un certo punto la condizione del **while** diventa falsa”

T = “Il programma fattoriale termina sull’input 5”

5. “Solo se ad un certo punto la condizione del **while** diventa falsa allora il programma fattoriale termina sull’input 5.”

si può formalizzare così

$$T \rightarrow F$$

6. “Se ad un certo punto la condizione del **while** diventa falsa allora il programma fattoriale termina sull’input 5.”

si può formalizzare così

$$F \rightarrow T$$

7. “Se e solo se ad un certo punto la condizione del **while** diventa falsa allora il programma fattoriale termina sull’input 5.”

si può formalizzare così

$$(F \rightarrow T) \& (T \rightarrow F)$$

8. “Ad un certo punto la condizione del **while** diventa falsa e quindi il programma fattoriale termina sull’input 5.”

si può formalizzare così

$$F \& T$$

(si noti che la frase sopra esprime non solo che vale $F \& T$ ma anche c’è un legame causale tra T ed F , ovvero che F implica T , ovvero che vale $F \rightarrow T$ oltrechè F da cui segue T).

Si noti che da 5) in poi le lettere F e T stanno ad indicare le proposizioni come in 3).

6.4 Formalizzazione di enunciati con premesse e conclusioni

Diamo ora la formalizzazione logica di enunciati più complessi come quelli in sezione 5 ove una conclusione segue da una o più premesse.

Ad esempio l’asserzione

“È vero che **se il treno è in ritardo i viaggiatori non sono contenti** se si assume che **se i viaggiatori son contenti allora il treno non è in ritardo**”.

si può formalizzare come UNICO enunciato formale in

$$(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (R \rightarrow \neg V)$$

ove

V = “i viaggiatori sono contenti”

$R = \text{"il treno è in ritardo"}$

ma grazie alla convenzione nella sezione 5 possiamo anche più semplicemente formalizzarlo in tal modo

$$\frac{V \rightarrow \neg R}{R \rightarrow \neg V}$$

Diamo di seguito la formalizzazione di altre asserzioni:

1. L'asserzione

"È vero che non si dà il caso che non ci sia silenzio se tutti dormono e se è vero che se tutti dormono c'è silenzio."

si può formalizzare in

$$D \& (D \rightarrow S) \rightarrow \neg \neg S$$

e secondo la convenzione in sezione 5 in

$$\frac{D}{\frac{D \rightarrow S}{\neg \neg S}}$$

ove

$D = \text{"tutti dormono"}$

$S = \text{"c'è silenzio"}$

2. L'asserzione

"AmMESSo che Tizio ama Caio e che se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio ne segue che Caio ama Tizio".

si può formalizzare in

$$T \& (T \rightarrow C) \rightarrow C$$

e secondo la convenzione in sezione 5 in

$$\frac{T}{\frac{T \rightarrow C}{C}}$$

ove

$T = \text{"Tizio ama Caio"}$

$C = \text{"Caio ama Tizio"}$

3. L'asserzione

"AmMESSo che se piove, i canali interni vengono chiusi, allora, è vero che se i canali interni non vengono chiusi, allora non piove".

si può formalizzare in

$$(P \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg P)$$

e secondo la convenzione in sezione 5 in

$$\frac{P \rightarrow C}{\neg C \rightarrow \neg P}$$

ove

$P =$ “piove”

$C =$ “i canali interni vengono chiusi”

4. L’asserzione

“È vero che **c’è silenzio** se **tutti dormono** e se è vero che **se tutti dormono c’è silenzio.**”

si può formalizzare in

$$D \& (D \rightarrow S) \rightarrow S$$

e secondo la convenzione in sezione 5 in

$$\frac{\frac{D}{D \rightarrow S}}{S}$$

ove

$D =$ “tutti dormono”

$S =$ “c’è silenzio”

5. l’asserzione

“È vero che **se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano** se si suppone che **se la radice quadrata canta alla Scala di Milano allora il tuo vicino di banco è Napoleone**”

si può formalizzare in

$$(C \rightarrow N) \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C)$$

e secondo la convenzione in sezione 5 in

$$\frac{C \rightarrow N}{\neg N \rightarrow \neg C}$$

ove

$N =$ “il tuo vicino di banco è Napoleone”

$C =$ “la radice quadrata canta alla Scala di Milano”

Come si vede sopra le proposizioni in 3) e 5) hanno la stessa forma logica (a meno di variabili proposizionali), e così pure 2) e 4).

6.5 Alla ricerca della verità

Ricordando che la **Logica** si occupa di studiare la **verità** di un'argomentazione o proposizione **SOLTANTO** in base alla sua **forma logica** definiamo allora la **verità** di una **proposizione**.

Precisiamo inoltre che propriamente una **proposizione** è tale se oltre ad essere una successione di segni dotati di significato abbiamo anche un *criterio* per *stabilire se la proposizione è vera o falsa*.

Ricordiamo ad esempio che

“Questa proposizione è falsa”

NON è una proposizione propriamente, in quanto non può essere nè vera nè falsa come argomentato in sezione 3.4.

Altri esempi e controesempi di proposizioni sono i seguenti:

“In biblioteca al piano interrato c'è l'ultimo numero di Topolino”

è una proposizione perchè posso verificare la sua verità andando in biblioteca.

“La radice quadrata canta alla Scala di Milano.”

non è una proposizione perchè non ha senso e non posso quindi stabilire il suo valore di verità.

6.5.1 Nel corso di logica studiamo solo giudizi assertivi

Un **giudizio** è l'atto di dichiarare una proposizione e vi sono DIVERSI tipi di giudizio:

assertivo= la proposizione è asserita vera

ad es. **“Mario studia.”**

interrogativo= s'interroga sulla verità della proposizione

ad es. **“Mario studia?”**

direttivo= la proposizione esprime un'ordine da eseguire

ad es. **“Studia, Mario!”**

esclamativo= la proposizione esprime un'esclamazione.

ad es. **“Mario studia!”**

Nel corso di logica studiamo soltanto i **giudizi assertivi** in cui **asseriamo certe proposizioni** come **VERE**.

Altro esempio di giudizio assertivo: affermo che **“il numero 3 è dispari”** oppure semplicemente **“il numero 3 è dispari”**

6.6 Verità classica di una proposizione

Per stabilire quando una proposizione formale è vera ci serviamo delle **tabelle di verità**. A tal scopo ad ogni proposizione formale **pr** costruita tramite COMPOSIZIONE di connettivi logici

$$\mathbf{pr} \equiv \mathbf{comp}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n)$$

a partire dalle proposizioni atomiche $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ associamo una funzione

$$\text{Tab}_{\mathbf{comp}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n)} : \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

rappresentata dalla tabella di verità

V_1	V_2	\dots	V_n	$\mathbf{comp}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n)$
0	1	\dots	\dots	\mathbf{c}_1
0	0	\dots	\dots	\mathbf{c}_2
1	1	\dots	\dots	\mathbf{c}_3
1	0	$\dots\dots\dots$	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

che associa a $\mathbf{comp}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n)$ un valore IN USCITA \mathbf{c}_i che può solo essere **1** (per **vero**) oppure **0** (per **falso**) al variare delle combinazioni di valori **0** e **1** associate alle proposizioni atomiche \mathbf{V}_i per $i = 1, \dots, n$.

6.6.1 Come si costruisce la tabella di verità di una proposizione?

La tabella di ogni **proposizione formale pr** si costruisce **componendo** (come funzioni) le tabelle dei connettivi

$$\neg, \vee, \&, \rightarrow$$

che compongono **pr** e che definiamo di seguito.

6.6.2 Tabella di verità di \neg

si ottiene considerando che

$$\neg \mathbf{A} \quad \text{è vero} \quad \text{sse} \quad \mathbf{A} \quad \text{è falso}$$

ed è la funzione unaria

A	$\neg A$
0	1
1	0

6.6.3 Tabella di verità di $\&$

si ottiene considerando che

$$\mathbf{A} \& \mathbf{B} \quad \text{è vero} \quad \text{sse} \quad \mathbf{A} \quad \text{è vero} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} \quad \text{è vero}$$

ed è la funzione binaria

A	B	A&B
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	0

6.6.4 Tabella di verità di \vee

si ottiene considerando che

$A \vee B$ è vero sse A è vero o B è vero
o sono veri entrambi

ed è la funzione binaria

A	B	A \vee B
0	1	1
0	0	0
1	1	1
1	0	1

6.6.5 Tabella di verità di \rightarrow

si ottiene considerando che

$A \rightarrow B$ è vero sse $\neg A \vee B$ è vero

ed è la funzione binaria

A	B	A \rightarrow B
0	1	1
0	0	1
1	1	1
1	0	0

ottenuta costruendo la tabella di $\neg A \vee B$.

6.6.6 Tabelle di verità delle proposizioni costante vero e falso

Le tabelle di verità della proposizione costante **vero** tt e della proposizione costante **falso** \perp sono le seguenti:

\perp	tt
0	1

6.6.7 Come costruire la tabella di una proposizione complessa arbitraria

La costruzione della tabella di una proposizione complessa arbitraria pr si ottiene *applicando* la tabella del suo connettivo *più esterno* alle *uscite* delle tabelle di verità delle proposizioni *più interne* che compongono pr, che chiamiamo *sottoproposizioni*.

Ad esempio le sottoproposizioni di

$$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$$

sono $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ mentre le sottoproposizioni di $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ sono le variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Quindi, ad esempio, per costruire la tabella di

$$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$$

a partire dalle sue variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} si costruisce una tabella *allargata* inserendo prima della colonna di uscita in corrispondenza di $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$, le colonne di uscite delle sue sottoproposizioni più interne $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ come segue

\mathbf{A}	\mathbf{B}	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$	$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$
0	1	?	?	?
0	0	?	?	?
1	1	?	?	?
1	0	?	?	?

e si completano le colonne delle sue sottoproposizioni, cominciando da quella più vicina

\mathbf{A}	\mathbf{B}	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$	$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$
0	1	1	?	?
0	0	1	?	?
1	1	1	?	?
1	0	0	?	?

e poi si prosegue compilando la successiva colonna (notando che la compilazione della colonna di $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ non fa uso di quella di $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$!)

\mathbf{A}	\mathbf{B}	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$	$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$
0	1	1	0	?
0	0	1	1	?
1	1	1	1	?
1	0	0	1	?

Infine si compila la colonna delle uscite di $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$ secondo la tabella di verità della disgiunzione applicata alle uscite delle ultime due colonne come segue

\mathbf{A}	\mathbf{B}	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$	$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1

La tabella di verità di $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$ è infine ottenuta *cancellando le colonne delle sue sottoproposizioni* ed è:

\mathbf{A}	\mathbf{B}	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$
0	1	1
0	0	1
1	1	1
1	0	1

Ad esempio la tabella di verità di

$$\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$$

che coincide con quella di $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ si ottiene aggiungendo la colonna per $\neg \mathbf{A}$ e combinando le uscite di questa colonna con quelle di \mathbf{B} secondo la tabella della disgiunzione per ottenere la colonna delle uscite di $\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ come segue:

\mathbf{A}	\mathbf{B}	$\neg \mathbf{A}$	$\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$
0	1	1	1
0	0	1	1
1	1	0	1
1	0	0	0

e la sua tabella finale è

\mathbf{A}	\mathbf{B}	$\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$
0	1	1
0	0	1
1	1	1
1	0	0

Come altro esempio costruiamo la tabella di verità di $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$ che si ottiene costruendo dapprima la tabella di $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ e poi combinandola con la congiunzione con \mathbf{A} come segue

\mathbf{A}	\mathbf{B}	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$
0	1	1	0
0	0	1	0
1	1	1	1
1	0	0	0

ottenendo come tabella finale

\mathbf{A}	\mathbf{B}	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	0

6.6.8 VALIDITÀ CLASSICA di una proposizione

Una proposizione pr è **vera classicamente** sse la **tabella di verità di pr dà sempre 1 in uscita** e sinonimi di “ pr è vera classicamente” sono i seguenti:

- “ pr è **TAUTOLOGIA classica**”
- “ pr è **VALIDA classicamente**”
- la scrittura simbolica $\models \text{pr}$ che si legge “ pr vale classicamente”.

6.7 TAUTOLOGIE, OPINIONI, CONTRADDIZIONI

Una proposizione pr si dice

TAUTOLOGIA in logica classica, o semplicemente **VALIDA** se sono **TUTTI 1** i valori in uscita nella sua tabella di verità.

OPINIONE in logica classica se ha **ALMENO un 1** e **ALMENO uno 0** come valori in uscita nella sua tabella di verità.

CONTRADDIZIONE o **PARADOSSO** o **INSODDISFACIBILE** se sono **TUTTI 0** i valori in uscita nella sua tabella di verità.

SODDISFACIBILE se è **1 QUALCHE** valore in uscita nella sua tabella di verità.

NON VALIDA se è **0 QUALCHE** valore in uscita nella sua tabella di verità.

Esempi:

esempio di TAUTOLOGIA o proposizione VALIDA: $\neg\neg(\mathbf{P}\vee\neg\mathbf{P})$.

esempio di proposizione OPINIONE: $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ visto che nella sua tabella di verità per $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ha **1** in uscita e che per $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ ha **0** in uscita

esempio di proposizione CONTRADDITTORIA: $\mathbf{P}\&\neg\mathbf{P}$

esempio di proposizione SODDISFACIBILE: $\neg\mathbf{P}$ visto che nella sua tabella di verità per $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ha **1** in uscita.

esempio di proposizione NON VALIDA: $\mathbf{P}\rightarrow\neg\mathbf{P}$ visto che nella sua tabella di verità per $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ ha **0** in uscita.

Grazie alla definizioni date classificheremo le proposizioni in tre gruppi distinti con riferimento alle loro tabelle: Per ogni proposizione formale **pr** definiamo

pr TAUTOLOGIA	pr OPINIONE	pr PARADOSSO
TUTTE le uscite 1 nella tabella di pr	ALMENO un'uscita 1 + ALMENO un'uscita 0 nella tabella di pr	TUTTE le uscite 0 nella tabella di pr



Si noti che una proposizione che NON è una tautologia, ovvero NON è valida, ha almeno un'uscita **0** e può essere un'opinione o paradosso:

pr TAUTOLOGIA tutte le uscite 1 nella tabella di pr	pr NON TAUTOLOGIA = NON VALIDA almeno un'uscita 0 nella tabella di pr
	OPINIONE oppure PARADOSSO

pr PARADOSSO = INSODDISFACIBILE tutte le uscite = 0 nella tabella di pr	pr NON PARADOSSO = SODDISFACIBILE almeno un'uscita = 1 nella tabella di pr
	pr OPINIONE oppure pr TAUTOLOGIA

Si osservi che valgono le seguenti relazioni tra una proposizione e la sua negazione:

pr TAUTOLOGIA	sse	¬pr PARADOSSO
pr PARADOSSO	sse	¬pr TAUTOLOGIA
pr OPINIONE	sse	¬pr OPINIONE
pr NON VALIDA	sse	¬pr SODDISFACIBILE
pr SODDISFACIBILE	sse	¬pr NON VALIDA



ATTENZIONE che se $\neg \text{pr}$ è soddisfacibile NON implica che **pr** sia insoddisfacibile come pure se **pr** è NON valida non implica che $\neg \text{pr}$ sia valida.

6.7.1 Esempi di analisi della validità di proposizioni

1. $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$ è una tautologia?

Se facciamo la tabella di verità per $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$ otteniamo

A	B	A→B	(A→B)&A
0	1	1	0
0	0	1	0
1	1	1	1
1	0	0	0

e concludiamo che è NON VALIDA (per esempio per $A = B = 0$) \Rightarrow NON è tautologia \Rightarrow NON vale $\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$

Concludiamo però che è soddisfacibile per $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 1$.

2. Guardando la tabella di $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$ concludete che $\neg((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A})$ è una tautologia???

Chiaramente $\neg((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A})$ è NON VALIDA (per i valori $A = B = 1$ ad esempio) e SODDISFACIBILE (per i valori $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 0$).

3. $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{A}$ è una tautologia?

Se facciamo la tabella di verità

A	B	A→B	(A→B)∨A
0	1	1	1
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	1

otteniamo che la formula $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{A}$ è **VERA classicamente**, \Rightarrow è una **tautologia classica** \Rightarrow vale $\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{A}$. Chiaramente la sua negazione $\neg((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{A})$ è INSODDISFACIBILE.

6.8 UGUAGLIANZA tra proposizioni

L'identità sintattica NON è il concetto più rilevante di uguaglianza tra proposizioni. L'uguaglianza tra proposizioni che ci interessa è quella che *identifica due proposizioni come uguali se hanno la stessa tabella di verità*. E quindi ci chiediamo:

quando due proposizioni formali \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 hanno la STESSA tabella di verità?

Innanzitutto notiamo che proposizioni sintatticamente diverse possono avere la stessa tabella di verità: per esempio

A	$\neg A$
0	1
1	0

è anche la tabella di verità per $\neg A \& \neg A$

A	$\neg A \& \neg A$
0	1
1	0

e anche per $(\neg A \& \neg A) \& \neg A$ e per $((\neg A \& \neg A) \& \neg A) \& \neg A$.

Per capire come sono relazionate tale proposizioni introduciamo il connettivo di equivalenza (o equiprobabilità).

6.8.1 Connettivo equivalenza

Indichiamo con il segno

$$\leftrightarrow$$

il connettivo **equivalenza** che è definito in tal modo: date due proposizioni formali \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2

$$\mathbf{pr}_1 \leftrightarrow \mathbf{pr}_2 \equiv (\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) \& (\mathbf{pr}_2 \rightarrow \mathbf{pr}_1)$$

che si legge “ \mathbf{pr}_1 è **equivalente** a “ \mathbf{pr}_2 ”.

Il connettivo “equivalenza” ha quindi la seguente tabella di verità

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	1	0
0	0	1
1	1	1
1	0	0

Questo connettivo è importante perchè cattura esattamente l’uguaglianza semantica delle tabelle di verità (ove con “sse” s’intende “se e solo se”):

Theorem 6.1 *Date proposizioni \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 , allora*

\mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 hanno la **stessa tabella di verità** (contenente tutte le variabili che compaiono in entrambe)

sse

$\mathbf{pr}_1 \leftrightarrow \mathbf{pr}_2$ è una **tautologia**

ovvero vale $\models \mathbf{pr}_1 \leftrightarrow \mathbf{pr}_2$

e in tal caso si dice che la proposizione \mathbf{pr}_1 è *uguale semanticamente* a \mathbf{pr}_2 , ovvero l’**uguaglianza semantica** di proposizioni è l’ **equivalenza** di proposizioni nel senso della seguente definizione:

Def. 6.2 Date due proposizioni formali \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 , la proposizione \mathbf{pr}_1 si dice **equivalente** a \mathbf{pr}_2 e se e solo se $\mathbf{pr}_1 \leftrightarrow \mathbf{pr}_2$ è una tautologia, ovvero vale $\models \mathbf{pr}_1 \leftrightarrow \mathbf{pr}_2$.

6.8.2 Precisazione sull’identità sintattica

Precisiamo che consideriamo il connettivo dell’equivalenza $\mathbf{pr}_1 \leftrightarrow \mathbf{pr}_2$ come **ABBREVIAZIONE** di

$$(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) \& (\mathbf{pr}_2 \rightarrow \mathbf{pr}_1)$$

Di conseguenza diciamo che la proposizione \mathbf{pr}_1 è **uguale sintatticamente** a \mathbf{pr}_2 se le due proposizioni soddisfano una delle seguenti condizioni:

- sono proprio scritte nello stesso modo;
- oppure \mathbf{pr}_1 è ottenuta da \mathbf{pr}_2 sostituendo i nomi abbreviati con il loro significato.

Per esempio

$$\mathbf{A} \& (\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{C}) \text{ è uguale sintatticamente a } \mathbf{A} \& ((\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) \& (\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}))$$

Ovviamente proposizioni *sintatticamente uguali* sono anche *semanticamente uguali*, ovvero *hanno la stessa tabella di verità* perchè la scrittura $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{C}$ è solo un'abbreviazione per $(\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) \& (\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B})$.

6.9 Tautologie classiche

Di seguito diamo una lista di proposizioni valide classicamente e lasciamo al lettore verificare che la loro tabella di verità ha TUTTI 1 in uscita:

associatività \vee	$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$
associatività $\&$	$(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \& \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{A} \& (\mathbf{B} \& \mathbf{C})$
commutatività \vee	$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$
commutatività $\&$	$\mathbf{A} \& \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B} \& \mathbf{A}$
distributività \vee su $\&$	$\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \& \mathbf{C}) \leftrightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \& (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})$
distributività $\&$ su \vee	$\mathbf{A} \& (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \leftrightarrow (\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \& \mathbf{C})$
idempotenza \vee	$\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$
idempotenza $\&$	$\mathbf{A} \& \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$
leggi di De Morgan	$\neg(\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \leftrightarrow \neg\mathbf{B} \& \neg\mathbf{C}$ $\neg(\mathbf{B} \& \mathbf{C}) \leftrightarrow \neg\mathbf{B} \vee \neg\mathbf{C}$
legge della doppia negazione	$\neg\neg\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$
implicazione classica	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$
disgiunzione come antecedente	$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) \leftrightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}) \& (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C})$
congiunzione come antecedente	$(\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) \leftrightarrow (\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}))$
legge della contrapposizione	$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}) \leftrightarrow (\neg\mathbf{C} \rightarrow \neg\mathbf{A})$
legge del modus ponens	$\mathbf{A} \& (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$
legge della NON contraddizione	$\neg(\mathbf{A} \& \neg\mathbf{A})$
legge del terzo escluso	$\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$

La verità classica di una proposizione, ossia il suo essere tautologia, si mantiene anche dopo aver sostituito le sue variabili proposizionali con altre proposizioni a piacere. In termini più formali, le tautologie sono chiuse per sostituzione delle loro variabili proposizionali.

Infatti in ogni tautologia descritta sopra

$$\mathbf{pr}_1(A, B, C)$$

con variabili $A, B, C \dots$ si ottiene una nuova tautologia

$$\mathbf{pr}_1(\mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3, \mathbf{pr}_4)$$

se si sostituiscono A, B, C in $\mathbf{pr}_1(A, B, C)$ con proposizioni arbitrarie rispettivamente $\mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3, \mathbf{pr}_4$.

Una prova di ciò è costituita dal fatto che la tabella finale della proposizione $\mathbf{pr}_1(\mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3, \mathbf{pr}_4)$ è composizione di una tabella di una tautologia, che è funzione costante 1, con le tabelle delle proposizioni sostituite, ma siccome comporre con una funzione costante 1 dà luogo ancora ad una funzione costante 1, ne segue che la proposizione $\mathbf{pr}_1(\mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3, \mathbf{pr}_4)$ è pure tautologia.

Ad esempio è pure tautologia classica la proposizione

$$\mathbf{pr} \vee \neg\mathbf{pr}$$

ove \mathbf{pr} è una qualsiasi altra proposizione.

La chiusura per sostituzione delle tautologie si può esprimere in tal modo:

Theorem 6.3 (sostituzione semplice) *Date le proposizioni $\text{pr}_1(\mathbf{A})$ e pr_2*

$$\begin{array}{l} \text{Se } \models \text{pr}_1(\mathbf{A}) \\ \text{allora } \models \text{pr}_1(\text{pr}_2). \end{array}$$

6.10 Proprietà utili sull'equivalenza

Ricordando che **proposizioni equivalenti** hanno **stessa tabella di verità** si ottiene che se è una vera pure l'altra lo è:

Proposition 6.4 (verità di equivalenti) *Date pr_1 e pr_2 proposizioni*

$$\begin{array}{l} \text{se } \models \text{pr}_1 \leftrightarrow \text{pr}_2 \\ \text{allora} \\ \text{vale } (\models \text{pr}_1 \quad \text{sse} \quad \models \text{pr}_2) \end{array}$$

L'equivalenza di proposizioni è una relazione simmetrica e transitiva:

Lemma 6.5 (simmetria equivalenti) *Date pr_1 e pr_2 proposizioni*

$$\text{se } \models \text{pr}_1 \leftrightarrow \text{pr}_2 \quad \text{allora} \quad \models \text{pr}_2 \leftrightarrow \text{pr}_1$$

Esempio: per dedurre che $\models A \leftrightarrow A \& A$ vale basta usare la simmetria dell'equivalenza sopra a partire dall'idempotenza della $\&$ in sezione 6.9.

Lemma 6.6 (transitività equivalenti) *Date pr_1 , pr_2 e pr_3 proposizioni*

$$\begin{array}{l} \text{se } \models \text{pr}_1 \leftrightarrow \text{pr}_2 \quad \text{e} \quad \models \text{pr}_2 \leftrightarrow \text{pr}_3 \\ \text{allora} \quad \models \text{pr}_1 \leftrightarrow \text{pr}_3 \end{array}$$

Esempio: per dedurre che $\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{A}$ è una tautologia basta usare la transitività dell'equivalenza a partire dalla simmetria dell'idempotenza della $\&$ in sezione 6.9 ovvero $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{A}$ e dall'idempotenza della \vee .

Ora si noti che se due proposizioni sono uguali a meno di un loro pezzo e i due pezzi diversi sono equivalenti, allora le due proposizioni iniziali sono equivalenti. Per esempio le proposizioni

$$(\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}) \& \mathbf{B} \quad (\neg \mathbf{C} \vee \mathbf{D}) \& \mathbf{B}$$

hanno i pezzi $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ e $\neg \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$ che sono equivalenti per l'essenza della implicazione in sezione 6.9 e quindi loro sono equivalenti. Questa è un'istanza del seguente teorema:

Theorem 6.7 (equivalenza per pezzi) *Se vale $\models \text{pr}_1 \leftrightarrow \text{pr}_2$, ovvero pr_1 è equivalente a pr_2*

presa un'altra proposizione $\text{pr}_3(\mathbf{A})$, che è una scrittura per indicare che nella proposizione $\text{pr}_3(\mathbf{A})$ compare la variabile \mathbf{A} , allora vale

$$\models \mathbf{pr}_3(\mathbf{pr}_1) \leftrightarrow \mathbf{pr}_3(\mathbf{pr}_2)$$

Per applicare questo teorema al fine di dedurre che $(C \rightarrow D) \& B$ è equivalente a $(\neg C \vee D) \& B$ basta considerare la proposizione

$$A \& B$$

e sostituire A una volta con $C \rightarrow D$ e si ottiene (dopo aver messo le parentesi) $(C \rightarrow D) \& B$ e un'altra volta sostituire A con $\neg C \vee D$ e si ottiene $(\neg C \vee D) \& B$ che è equivalente a $(C \rightarrow D) \& B$ per il teorema enunciato.

Dal teorema 6.7 e teorema 6.1 segue come corollario che se in una proposizione $\mathbf{pr}_3(A)$ si sostituisce A una volta con \mathbf{pr}_1 e un'altra volta con un suo equivalente \mathbf{pr}_2 si ottengono due proposizioni che hanno la proprietà che una è una tautologia sse lo è anche l'altra:

Corollary 6.8 (verità su equivalenza per pezzi) *Se vale $\models \mathbf{pr}_1 \leftrightarrow \mathbf{pr}_2$, ovvero \mathbf{pr}_1 è equivalente a \mathbf{pr}_2*

presa un'altra proposizione $\mathbf{pr}_3(\mathbf{A})$, che è una scrittura per indicare che nella proposizione $\mathbf{pr}_3(\mathbf{A})$ compare la variabile \mathbf{A} , allora vale

$$\models \mathbf{pr}_3(\mathbf{pr}_1) \quad \text{sse} \quad \models \mathbf{pr}_3(\mathbf{pr}_2)$$

7 Approfondimento sulle tabelle di verità

Di seguito riportiamo alcuni fatti interessanti relativi alle tabelle di verità.

7.1 Ogni tabella a valori in 0 e 1 è tabella di una proposizione?

Abbiamo visto come ogni proposizione formale possegga una tabella di verità. Ora ci chiediamo:

è anche vero che ogni funzione a valori in $\{0, 1\}$ con dominio $\{0, 1\}^n$ rappresentata da una tabella ad n entrate, per $n \geq 1$, (ove le righe sono pari a tutte le possibili combinazioni n -arie di 0 e 1) del tipo

V_1	V_2	...	V_n	???
0	1	\mathbf{c}_1
0	0	\mathbf{c}_2
1	1	\mathbf{c}_3
1	0
...
...

(ove \mathbf{c}_i può essere solo 0 o 1)

*corrisponde ad una **proposizione formale** con (al più) n variabili proposizionali? Se sì dobbiamo forse aggiungere qualche connettivo a quelli già definiti per rappresentarla?*

La risposta è che OGNI TABELLA a n entrate, con $n \geq 1$, CORRISPONDE alla TABELLA di VERITÀ di una PROPOSIZIONE formale con al più n variabili proposizionali e che NON abbiamo bisogno di aggiungere nuove proposizioni per rappresentare tutte le tabelle di verità.

Il motivo è che vale il seguente teorema:

Theorem 7.1 (Completezza delle tabelle rispetto a $\neg, \vee, \&$) *Ogni tabella con \mathbf{n} -entrate, con $\mathbf{n} \geq 1$, denota un connettivo \mathbf{n} -ario che si può scrivere con solo $\vee, \&$ ed \neg .*

Questo teorema è in verità il corollario di altri due teoremi:

Theorem 7.2 (forma normale disgiuntiva) Ogni tabella con n -entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n -ario che si può scrivere in forma normale **disgiuntiva**

$$\bigvee_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato } 1} \mathbf{riga}_{\mathbf{i}}$$

ove

$$\mathbf{riga}_{\mathbf{i}} \equiv (((\mathbf{C}_{i,1} \& \mathbf{C}_{i,2}) \dots \& \mathbf{C}_{i,n})$$

è congiunzione di variabili o loro negazioni e

$$\bigvee_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato } 1} \mathbf{riga}_{\mathbf{i}} \equiv ((\mathbf{riga}_{i_1} \vee \mathbf{riga}_{i_2}) \vee \mathbf{riga}_{i_3} \dots) \vee \mathbf{riga}_{i_n}$$

La procedura per scrivere la forma normale disgiuntiva di una tabella di verità a n entrate è la seguente:

- considero la tabella di verità di $\mathbf{conn}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n)$
- se **NON ESISTE** almeno una riga con risultato 1 poni

$$\mathbf{V}_1 \& \neg \mathbf{V}_1$$

- se **ESISTE** almeno una riga con risultato 1 faccio la disgiunzione

$$\bigvee_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato } 1} \mathbf{riga}_{\mathbf{i}}$$

ove

$$\mathbf{riga}_{\mathbf{i}} \equiv (((\mathbf{C}_{i,1} \& \mathbf{C}_{i,2}) \dots \& \mathbf{C}_{i,n})$$

è multipla congiunzione di $\mathbf{C}_{i,k}$ definiti come segue

$$\mathbf{C}_{i,k} \equiv \begin{cases} \mathbf{V}_k & \text{se } 1 \text{ è il valore di } \mathbf{V}_k \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \\ \neg \mathbf{V}_k & \text{se } 0 \text{ è il valore di } \mathbf{V}_k \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \end{cases}$$

- si dimostra che

$$\models \mathbf{conn}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n) \leftrightarrow \bigvee_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato } 1} \mathbf{riga}_{\mathbf{i}}$$

7.1.1 Esempio di uso di forma normale disgiuntiva

Data la tabella di verità

A	B	$\mathbf{conn}(A, B)$
0	1	0
0	0	1
1	1	0
1	0	0

per scoprire che proposizione è $\mathbf{conn}(A, B)$ usiamo il teorema **forma normale disgiuntiva** e scriviamo dunque le righe uscenti con 1

$$\neg A \& \neg B$$

e dal teorema deduciamo che possiamo definire

$$\mathbf{conn}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \neg \mathbf{A} \& \neg \mathbf{B}$$

perchè connettivi equivalenti hanno la stessa tabella di verità.

Se prendiamo invece questa tabella di verità

A	B	$\mathbf{conn}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$
0	1	1
0	0	1
1	1	0
1	0	1

chi è $\mathbf{conn}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$? Per stabilirlo di nuovo usiamo il teorema di forma normale disgiuntiva e scriviamo dunque le righe uscenti con 1:

$$((\neg \mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vee (\neg \mathbf{A} \& \neg \mathbf{B})) \vee (\mathbf{A} \& \neg \mathbf{B})$$

dal teorema sappiamo che possiamo definire

$$\mathbf{conn}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv ((\neg \mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vee (\neg \mathbf{A} \& \neg \mathbf{B})) \vee (\mathbf{A} \& \neg \mathbf{B})$$

Però la scrittura del connettivo è molto complessa... Vediamo allora un'altro modo di scrivere il connettivo corrispondente ad una tabella di verità nel caso ci siano pochi 0 in uscita. A tal fine enunciamo il seguente teorema:

Theorem 7.3 (forma normale congiuntiva) Ogni tabella con \mathbf{n} -entrate, con $\mathbf{n} \geq 1$, denota un connettivo \mathbf{n} -ario che si può scrivere in forma normale **congiuntiva**

$$\&_{\mathbf{i}} \text{ indice riga con risultato } 0 \quad \overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}}}$$

ove

$$\overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}}} \equiv (((\mathbf{C}_{\mathbf{i},1} \vee \mathbf{C}_{\mathbf{i},2}) \dots \vee \mathbf{C}_{\mathbf{i},n})$$

è disgiunzione di variabili o loro negazioni e

$$\&_{\mathbf{i}} \text{ riga con risultato } 0 \quad \overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}}} \equiv ((\overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}_1}} \& \overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}_2}}) \& \overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}_3}} \dots) \& \overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}_n}}$$

La procedura per scrivere la forma normale congiuntiva di una tabella di verità ad n entrate è la seguente:

- considero la tabella di verità del connettivo \mathbf{n} -ario $\mathbf{conn}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n)$

- se **NON ESISTE** almeno una riga con risultato 0 poni

$$\mathbf{V}_1 \vee \neg \mathbf{V}_1$$

- se **ESISTE** almeno una riga con risultato 0 faccio la congiunzione

$$\&_{\mathbf{i}} \text{ indice riga con risultato } 0 \quad \overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}}}$$

ove

$$\overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}}} \equiv (((\mathbf{C}_{\mathbf{i},1} \vee \mathbf{C}_{\mathbf{i},2}) \dots \vee \mathbf{C}_{\mathbf{i},n})$$

è multipla disgiunzione di $\mathbf{C}_{\mathbf{i}}$ definiti come segue

$$\mathbf{C}_{\mathbf{i},k} \equiv \begin{cases} \mathbf{V}_k & \text{se } 0 \text{ è il valore di } \mathbf{V}_k \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \\ \neg \mathbf{V}_k & \text{se } 1 \text{ è il valore di } \mathbf{V}_k \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \end{cases}$$

- si dimostra che

$$\models \mathbf{conn}(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n) \leftrightarrow \&_{\mathbf{i}} \text{ indice riga con risultato } 0 \quad \overline{\mathbf{riga}_{\mathbf{i}}}$$

7.1.2 Esempio di uso di forma normale congiuntiva: il connettivo NAND

Quindi ora data la tabella

A	B	$\text{conn}(A, B)$
0	1	1
0	0	1
1	1	0
1	0	1

usiamo il teorema di forma normale congiuntiva e scriviamo le righe uscenti con 0: $\neg A \vee \neg B$ e deduciamo dal teorema che possiamo definire

$$\text{conn}(A, B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

perchè connettivi equivalenti hanno la stessa tabella di verità.

Inoltre per simmetria dell'equivalenza e per la legge di de Morgan in sezione 6.9 otteniamo che

$$\models \text{conn}(A, B) \leftrightarrow \neg(A \& B)$$

e quindi la tabella di verità rappresenta il connettivo NAND.

7.1.3 Raffinamento del teorema di completezza delle tabelle di verità

Theorem 7.4 ($\& + \neg$) *Ogni tabella con n -entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n -ario che si può scrivere con solo $\&$ e \neg .*

Dim. Segue per il teorema di forma normale congiuntiva, dopo aver notato che la disgiunzione tramite la legge di De Morgan e quella della doppia negazione in sezione 6.9 si può definire come segue

$$A \vee B \equiv \neg(\neg A \& \neg B)$$

In particolare, si noti che l'implicazione tramite la sua essenza in sezione 6.9 si può definire in tal modo

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

Theorem 7.5 ($\vee + \neg$) *Ogni tabella con n -entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n -ario che si può scrivere con solo \vee e \neg .*

Dim: Segue per il teorema di forma normale disgiuntiva dopo aver notato che la congiunzione tramite le leggi di De Morgan e quella della doppia negazione si può definire come segue

$$A \& B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$$

Theorem 7.6 ($\rightarrow + \neg$) *Ogni tabella con n -entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n -ario che si può scrivere con solo \rightarrow e \neg .*

Dim: Basta notare che si può definire la disgiunzione in tal modo

$$A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B$$

grazie alla legge della doppia negazione in sezione 6.9 e poi si applica il teorema 7.5.

Theorem 7.7 (solo NAND) *Ogni connettivo n -ario si può scrivere con solo NAND.*

Dim: Basta notare che tramite **NAND** si può definire sia la negazione che la disgiunzione come segue

$$\neg A \equiv \text{NAND}(A, A) \qquad A \vee B \equiv \text{NAND}(\neg A, \neg B)$$

ove nel secondo si usa ovviamente la definizione di negazione data nella definizione di sinistra. Poi si conclude per il teorema 7.5.

7.1.4 Quante sono le tabelle di verità ad n entrate?

Le possibili tabelle di verità con n entrate, con $n \geq 1$, sono

$$2^{2^n}$$

ovvero tante quante le funzioni da $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ e quindi i connettivi n -ari **a meno di equivalenza proposizionale** sono 2^{2^n}

Per esempio le tabelle di verità **unarie** sono $4 = 2^{2^1}$ e sono:

identità		negazione	
A	A	A	$\neg A$
0	0	0	1
1	1	1	0

costante falso		costante vero	
	\perp		\mathbf{tt}
	0		1

Si noti che per i teoremi di completezza delle tabelle con i vari linguaggi si deduce che:

$$\models \perp \leftrightarrow \mathbf{A} \ \& \ \neg \mathbf{A} \qquad \models \mathbf{tt} \leftrightarrow \mathbf{A} \ \vee \ \neg \mathbf{A}$$

8 Due strategie per verificare una tautologia

Per quanto spiegato finora per vedere se vale

$$\models \text{pr}$$

abbiamo almeno due possibilità:

1. **strategia tabella:** *fai la tabella di verità di pr*
vantaggio: strategia sicura e automatica
svantaggio: la tabella può essere molto complessa
2. **strategia riduzione:** *riduci pr tramite equivalenze note ad una tautologia nota*
vantaggio: strategia veloce, se termina
svantaggio: strategia non automatica e non sempre terminante in una proposizione nota

Suggerimento: combinate le due strategie sopra!!

Esempio di verifica di validità di una proposizione. Abbiamo già visto che l'asserzione

“È vero che se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano se si suppone che se la radice quadrata canta alla Scala di Milano allora il tuo vicino di banco è Napoleone”

si può formalizzare in

$$(C \rightarrow N) \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C)$$

ove

N = “il tuo vicino di banco è Napoleone”

C = “la radice quadrata canta alla Scala di Milano”

Ora verifichiamo se $(C \rightarrow N) \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C)$ è una tautologia o non è valida e quindi soddisfacibile o insoddisfacibile.

Usando il teorema 6.7 sull'essenza dell'implicazione nell'antecedente dell'implicazione più esterna otteniamo che

$$\models ((C \rightarrow N) \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C)) \leftrightarrow (\neg C \vee N \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C))$$

Poi usando il teorema 6.7 sull'essenza dell'implicazione nel conseguente dell'implicazione più esterna otteniamo che

$$\models (\neg C \vee N \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C)) \leftrightarrow (\neg C \vee N \rightarrow \neg \neg N \vee \neg C)$$

Di nuovo usando il teorema 6.7 sulla legge della doppia negazione otteniamo che

$$\models (\neg C \vee N \rightarrow \neg \neg N \vee \neg C) \leftrightarrow (\neg C \vee N \rightarrow N \vee \neg C)$$

Infine usando il teorema 6.7 sulla commutatività di \vee otteniamo che

$$\models (\neg C \vee N \rightarrow N \vee \neg C) \leftrightarrow (N \vee \neg C \rightarrow N \vee \neg C)$$

e per transitività dell'equivalenza di proposizioni si ottiene che vale

$$\models ((C \rightarrow N) \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C)) \leftrightarrow (N \vee \neg C \rightarrow N \vee \neg C)$$

Ora chiaramente vale

$$\models N \vee \neg C \rightarrow N \vee \neg C$$

per il teorema di sostituzione semplice sapendo che $A \rightarrow A$ è una tautologia (si sostituisca A con $N \vee \neg C$).

Concludiamo quindi per la proposizione 6.4 sulla verità di equivalenti che vale PURE

$$\models (C \rightarrow N) \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C)$$

ossia $((C \rightarrow N) \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg C))$ è tautologia, quindi è una proposizione VALIDA.

8.0.1 Altro esempio di verità classica

Per vedere se vale

$$\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$$

si usa due volte

$$\text{essenza} \rightarrow \models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \leftrightarrow (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B})$$

e si ottiene

$$\models (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee (\neg \mathbf{B} \vee \mathbf{A})$$

Infine per associatività e commutatività di \vee si ottiene

$$\models (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{A}) \vee (\neg \mathbf{B} \vee \mathbf{B})$$

e ora si conclude facilmente che la proposizione è una tautologia in quanto la sua tabella di verità risulta facile da costruire e dà sempre valore 1 perchè i disgiunti sono entrambe tautologie (la prima compare in sezione 6.9 e la seconda segue per commutatività di \vee dalla legge del terzo escluso).

8.0.2 Esempio su validità e soddisfacibilità e i loro NON

Esempio: formalizzare in un'unica proposizione l'asserzione

“È vero che se i viaggiatori non sono contenti allora il treno è in ritardo se si assume che se i viaggiatori son contenti allora il treno non è in ritardo.”

usando

$V =$ “i viaggiatori sono contenti”

$R =$ “il treno è in ritardo”

e mostrare se la proposizione ottenuta è tautologia classica e in caso contrario dire per quali valori delle variabili non è valida e se è soddisfacibile (e per quali valori delle variabili lo è) o insoddisfacibile.

La sua formalizzazione come UNICO enunciato è

$$(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$$

Usando il teorema 6.7 sull'essenza dell'implicazione due volte otteniamo che

$$\models ((V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)) \leftrightarrow (\neg V \vee \neg R \rightarrow \neg \neg V \vee R)$$

Di nuovo usando il teorema 6.7 sulla legge della doppia negazione otteniamo che

$$\models (\neg V \vee \neg R \rightarrow \neg \neg V \vee R) \leftrightarrow (\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R)$$

e per transitività si deduce

$$\models ((V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)) \leftrightarrow (\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R)$$

Ora si può procedere in vari modi per concludere.

1. (primo modo) Si prova a vedere se $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ è NON VALIDO trovando valori per V e R tali per cui la conseguenza $V \vee R$ risulti falsa mentre sia vera la premessa $\neg V \vee \neg R$ dell'implicazione. Si osservi che i valori per cui $V \vee R$ risulta falsa sono $V = R = 0$ e per questi la premessa $\neg V \vee \neg R$ risulta 1. Perciò l'implicazione

$$\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$$

risulta falsa per $V = R = 0$ e dunque $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ NON è VALIDO.

Si prova a vedere poi se $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ è SODDISFACIBILE. A tal scopo basta trovare dei valori per cui risulta 0 l'antecedente (ovvero risulta $\neg V \vee \neg R = 0$) e si osserva che a tal fine basta porre $V = R = 1$. Per tali valori l'implicazione $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ risulta vera. Quindi $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$ risulta SODDISFACIBILE.

Dal fatto che vale $\models ((V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)) \leftrightarrow (\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R)$ ovvero che $(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$ ha la stessa tabella di verità di $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$, i risultati su NON validità e soddisfacibilità ottenuti per il secondo membro dell'equivalenza sopra valgono pure per il primo membro $(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$.

2. (altro modo) Si continua a trovare equivalenti di $\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R$. Infatti usando il teorema 6.7 sull'essenza dell'implicazione si trova che

$$\models (\neg V \vee \neg R \rightarrow V \vee R) \leftrightarrow \neg(\neg V \vee \neg R) \vee (V \vee R)$$

Poi di nuovo usando il teorema 6.7 su una legge di De Morgan si ottiene

$$\models \neg(\neg V \vee \neg R) \vee (V \vee R) \leftrightarrow (\neg\neg V \& \neg\neg R) \vee (V \vee R)$$

e di nuovo usando il teorema 6.7 due volte sulla doppia negazione si conclude

$$\models (\neg\neg V \& \neg\neg R) \vee (V \vee R) \leftrightarrow (V \& R) \vee (V \vee R)$$

Ora per transitività si deduce

$$\models ((V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)) \leftrightarrow (V \& R) \vee (V \vee R)$$

ovvero che $(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$ ha la stessa tabella di verità di $(V \& R) \vee (V \vee R)$. Ora $(V \& R) \vee (V \vee R)$ è chiaramente NON valido se troviamo valori che falsificano sia $V \& R$ che $V \vee R$ e a tal scopo basta porre $V = R = 0$. Inoltre $(V \& R) \vee (V \vee R)$ è chiaramente SODDISFACIBILE ponendo $V = R = 1$ perchè $V \vee R$ diventa 1. Concludiamo che pure $(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$ è NON valido e SODDISFACIBILE sugli stessi valori.

8.0.3 In logica classica non c'è implicazione causale

La tautologia

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

mostra con il seguente esempio che l'implicazione della logica classica NON è causale in quanto si trovano delle verità controintuitive riguardanti le implicazioni. Infatti ponendo

A=“Voi passerete l'esame di logica”

B=“Avete una zia con i calli”

si ottiene che l'enunciato

“Se voi passerete l'esame di logica allora avete una zia con i calli, oppure se avete una zia con i calli allora passerete l'esame di logica”

è vero logicamente secondo la logica classica.

Ciò risulta comprensibile se si pensa che in realtà l'implicazione della logica classica coincide con la disgiunzione ovvero

$$\mathbf{pr_1 \rightarrow pr_2} \quad \text{è equivalente a} \quad \neg(\mathbf{pr_1}) \vee (\mathbf{pr_2})$$

Quindi la proposizione $(\mathbf{A \rightarrow B}) \vee (\mathbf{B \rightarrow A})$ ha lo stesso significato logico della proposizione

$$(\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee (\neg \mathbf{B} \vee \mathbf{A})$$

che è evidentemente sempre vera come lo è l'enunciato

“O voi non passerete l'esame di logica oppure avete una zia con i calli, oppure non avete una zia con i calli oppure passerete l'esame di logica.”

8.0.4 Verità atemporalì della logica classica proposizionale

È vero che

“Non si dà il caso che se sono a Londra io sia a Padova”?

La risposta è che ovviamente sì non si dà questo caso.

Però una sua formalizzazione potrebbe essere

$$\neg(\mathbf{L \rightarrow P})$$

con

L = “Sono a Londra”

P = “Sono a Padova”

ma si noti che la proposizione sopra è equivalente a

$$\neg(\mathbf{L \rightarrow P}) \quad \leftrightarrow \quad \neg(\neg \mathbf{L} \vee \mathbf{P})$$

e per leggi di De Morgan

$$\neg(\neg \mathbf{L} \vee \mathbf{P}) \quad \leftrightarrow \quad \neg \neg \mathbf{L} \ \& \ \neg \mathbf{P}$$

e infine concludiamo

$$\neg \neg \mathbf{L} \ \& \ \neg \mathbf{P} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{L} \ \& \ \neg \mathbf{P}$$

ovvero l'affermazione di partenza risulta equivalente a

“Io sono a Londra e NON sono a Padova”

il che non è sempre vero...!

Spiegazione della apparente paradossalità: il valore di verità della frase sopra formalizzata in $\neg(\mathbf{L \rightarrow P})$ dipende da dove sono in questo momento: se NON sono a Londra la proposizione $\mathbf{L \rightarrow P}$ diventa vera classicamente, e la sua negata falsa classicamente, altrimenti se sono a Londra $\neg(\mathbf{L \rightarrow P})$ risulta vera. Siccome la logica classica proposizionale tratta di verità atemporalì, o vere o false senza dipendenza dal tempo, questa logica non risulta adatta per formalizzare la proposizione **“Non si dà il**

caso che se sono a Londra io sia a Padova” che sarebbe invece meglio formalizzare includendo la nozione del tempo e nella forma più precisa “non si dà il caso che se in un qualsiasi momento io sono a Londra allora sia pure nello stesso momento anche a Padova”.

8.0.5 Esercizi su Validità e soddisfacibilità e loro negazioni

Formalizzare in un UNICA proposizione le seguenti asserzioni (secondo i suggerimenti indicati) e mostrare se la proposizione ottenuta è **valida** o in caso contrario dire per quali valori delle variabili **non è valida** e se è **soddisfacibile** (e per quali valori delle variabili lo è) o **insoddisfacibile**.

Ricordiamo che nel seguito adottiamo la convenzione della sezione 5, ovvero che quando scriviamo

$$\frac{\begin{array}{c} \text{frase}_1 \\ \text{frase}_2 \\ \dots \\ \text{frase}_n \end{array}}{\text{frase}}$$

intendiamo

“AmMESSO che valga sia **frase**₁ che **frase**₂, che ... **frase**_n, allora vale **frase**”

1. $\frac{\text{Non si dà il caso che l'affare non sia conveniente o non sicuro.}}{\text{L'affare è conveniente e sicuro.}}$

A = l'affare è conveniente
S = l'affare è sicuro

Soluzione: una formalizzazione dell'asserzione è

$$\neg(\neg A \vee \neg S) \rightarrow A \& S$$

e questa per il teorema 6.7 applicato con la simmetrica della legge di De Morgan su $\neg A \vee \neg S$ è equivalente a

$$\neg\neg(A \& S) \rightarrow A \& S$$

che per il teorema 6.7 applicato con la legge della doppia negazione è equivalente a

$$A \& S \rightarrow A \& S$$

che è chiaramente valida. Siccome proposizioni equivalenti hanno la stessa tabella di verità allora la proposizione di partenza è valida.

2. $\frac{\text{Non si dà il caso che l'affare non sia conveniente o sia sicuro.}}{\text{L'affare non è conveniente nè sicuro.}}$

A = l'affare è conveniente
S = l'affare è sicuro

Soluzione: Una formalizzazione dell'asserzione è

$$\neg(\neg A \vee S) \rightarrow \neg A \& \neg S$$

che per il teorema 6.7 applicato con la legge di De Morgan su $\neg(\neg A \vee S)$ è equivalente a

$$\neg\neg A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S$$

che sempre per il teorema 6.7 applicato con la legge della doppia negazione è equivalente a

$$A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S$$

Ora chiaramente questa implicazione è NON valida se si trovano valori per cui $A \& \neg S = 1$ e $\neg A \& \neg S = 0$. Ora i valori che rendono vero l'antecedente dell'implicazione sono $A=1$ e $S=0$ da cui segue che il conseguente $\neg A \& \neg S = 0$. Perciò la proposizione $A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S$ è NON VALIDA per i valori $A=1$ e $S=0$.

Inoltre per rendere soddisfacibile $A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S$ basta trovare dei valori per cui $A \& \neg S = 0$ (oppure $\neg A \& \neg S = 1$). E si vede chiaramente che per $A=0$, e S con valore qualsiasi, allora $A \& \neg S = 0$ e quindi $A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S = 1$. In conclusione $A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S$ risulta SODDISFACIBILE per $A=0$, e S con valore qualsiasi. Infine siccome proposizioni equivalenti hanno la stessa tabella di verità allora la proposizione di partenza $\neg(\neg A \vee S) \rightarrow \neg A \& \neg S$ è NON VALIDA e SODDISFACIBILE sugli stessi valori trovati per $A \& \neg S \rightarrow \neg A \& \neg S$.

3. $\frac{\text{Prima di consegnare rileggo il compito solo se riesco a scrivere qualcosa.}}{\text{Se non riesco a scrivere qualcosa, prima di consegnare non rileggo il compito.}}$

si consiglia di usare:

R = prima di consegnare rileggo il compito

S = riesco a scrivere qualcosa

4. $\frac{\text{Mario è scontento solo se non programma bene.}}{\text{Se Mario è contento allora programma bene.}}$

C = Mario è contento

P = Mario programma bene

5. $\frac{\text{Le lezioni tacciono se c'è un'assemblea studentesca o è giorno festivo.}}{\text{Non c'è un'assemblea studentesca e non è giorno festivo, quindi le lezioni non tacciono.}}$

L = le lezioni tacciono

A = c'è un'assemblea studentesca

F = è giorno festivo

6. $\frac{\begin{array}{l} \text{Non si dà il caso che il fattoriale termini e non si esca dal ciclo.} \\ \text{Si esce dal ciclo.} \end{array}}{\text{Non si dà il caso che se si esce dal ciclo il fattoriale non termini.}}$

F = il fattoriale termina

C = si esce dal ciclo

7. $\frac{\begin{array}{l} \text{Solo se non prendo l'ombrello non piove.} \\ \text{Non piove.} \end{array}}{\text{Non prendo l'ombrello.}}$

P = piove

O = prendo l'ombrello

9 Calcolo dei sequenti LC_p

In questa sezione mostriamo un metodo più elegante, semplice e soprattutto **AUTOMATICO** per stabilire se una proposizione è valida o meno e soddisfacibile o meno.

Tale metodo è **MENO COMPLESSO** di quello delle tabelle di verità e consiste in una procedura algoritmica che **TERMINA SEMPRE** con una risposta. Questa procedura fa uso di un **calcolo dei sequenti** per la logica classica proposizionale. Anticipiamo soltanto che per verificare la validità (e soddisfacibilità) per esempio di

$$(V \rightarrow \neg R) \rightarrow (\neg V \rightarrow R)$$

costruiremo un **albero di derivazione...** in tale calcolo.

9.1 Cosa è un sequente?

Un **sequente** nel linguaggio delle proposizioni formali è una scrittura che può essere di quattro tipi diversi:

1. un primo tipo di sequente è la scrittura

$$pr_1, pr_2, \dots, pr_n \vdash cl_1, cl_2, \dots, cl_m$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

“se pr_1 è vero e pr_2 è vero... e pr_n è vero allora o cl_1 è vero oppure cl_2 è vero... oppure cl_m è vero”

o equivalentemente che la proposizione formale

$$(pr_1 \& pr_2) \dots \& pr_n \longrightarrow (cl_1 \vee cl_2) \dots \vee cl_m \quad \text{è vera}$$

posto che tutte le pr_i per $i = 1, \dots, n$ (dette *premesse*) e le cl_i per $i = 1, \dots, m$ (dette *conclusioni*) siano proposizioni formali.

2. un altro tipo di sequente è la scrittura

$$\vdash cl_1, cl_2, \dots, cl_m$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

“o cl_1 è vero oppure cl_2 è vero... oppure cl_m è vero”

o equivalentemente che la proposizione

$$(cl_1 \vee cl_2) \dots \vee cl_m \quad \text{è vera}$$

o anche equivalentemente che la proposizione

$$tt \longrightarrow (cl_1 \vee cl_2) \dots \vee cl_m \quad \text{è vera}$$

posto che tutte le cl_i per $i = 1, \dots, m$ (dette *conclusioni*) siano proposizioni formali.

3. un altro tipo di sequente è la scrittura

$$pr_1, pr_2, \dots, pr_n \vdash$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

“se pr_1 è vero e pr_2 è vero... e pr_n è vero allora la costante **falso** è vera”

o equivalentemente la proposizione

$$(pr_1 \& pr_2) \dots \& pr_n \longrightarrow \perp \text{ è vera}$$

posto che tutte le pr_i per $i = 1, \dots, n$ (dette *premesse*) siano proposizioni formali.

“se pr_1 è vero e pr_2 è vero... e pr_n è vero allora la costante **falso** è vera”

4. infine un sequente è anche la scrittura

\vdash

che rappresenta *un’asserzione* del tipo

“la costante **falso** è vera”

o equivalentemente che la proposizione

$$\perp \text{ è vera}$$

o anche equivalentemente che la proposizione

$$tt \rightarrow \perp \text{ è vera}$$

Per rappresentare con un’unica scrittura i quattro tipi di sequenti illustrati usiamo lettere greche maiuscole del tipo

$$\Gamma, \Delta, \Sigma \dots$$

come META-VARIABILI per indicare una generica **LISTA** di **PROPOSIZIONI** anche vuota.

Per esempio, possiamo pensare che una variabile Γ denoti $\Gamma \equiv []$ la lista vuota oppure

$$\Gamma \equiv pr_1, pr_2, \dots pr_n$$

E poi indichiamo con

$$\Gamma \vdash \Delta$$

un *generico sequente* ove Γ e Δ rappresentano liste anche vuote di proposizioni.

Esempio di sequente.

Ora mostriamo un esempio di formalizzazione in sequente.

L’asserzione

Ammesso che il programma termina e dà risultato 1, allora il programma è corretto.

che secondo la convenzione della sezione 5 si può rappresentare anche in tal modo

$$\frac{\text{Il programma termina e dà risultato 1.}}{\text{Il programma è corretto.}}$$

si può formalizzare con il sequente

$$P \& U \vdash C$$

ponendo:

P="Il programma termina"

U="Il programma dà risultato 1"

C="Il programma è corretto"

In verità però l'asserzione

Ammesso che il programma termina e dà risultato 1, allora il programma è corretto.

si può anche equivalentemente formalizzare nello stesso linguaggio formale con lo stesso significato associato alle proposizioni atomiche tramite il sequente

$$\vdash \mathbf{P} \& \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{C}$$

o addirittura anche tramite il sequente

$$\mathbf{P}, \mathbf{U} \vdash \mathbf{C}$$

per come si intende il significato della virgola tra due proposizioni a sinistra del segno di sequente \vdash .

9.1.1 Che proposizione rappresenta un sequente?

Coerentemente con quanto già espresso all'inizio sul significato di un sequente diciamo che il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ rappresenta la proposizione

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$$

ove le notazioni $\Gamma^{\&}$ e Δ^{\vee} sono definite a loro volta come segue:

$\Gamma^{\&} \equiv (\mathbf{pr}_1 \& \mathbf{pr}_2) \dots \& \mathbf{pr}_n$ è la congiunzione delle proposizioni in Γ
se $\Gamma \equiv \mathbf{pr}_1, \mathbf{pr}_2, \dots \mathbf{pr}_n$ con $n > 1$

oppure

$\Gamma^{\&} \equiv \mathbf{tt}$ (costante vero)

se Γ è la lista vuota

oppure

$\Gamma^{\&} \equiv \mathbf{pr}_1$

se $\Gamma \equiv \mathbf{pr}_1$

$\Delta^{\vee} \equiv (\mathbf{pr}_1 \vee \mathbf{pr}_2) \dots \vee \mathbf{pr}_n$ è la disgiunzione delle proposizioni in Δ

se $\Delta \equiv \mathbf{pr}_1, \mathbf{pr}_2, \dots \mathbf{pr}_n$ con $n > 1$

oppure

$\Delta^{\vee} \equiv \perp$ (costante falso)

se Δ è la lista vuota

oppure

$\Delta^{\vee} \equiv \mathbf{pr}_1$

se $\Delta \equiv \mathbf{pr}_1$

Queste notazioni servono quindi per interpretare una lista di proposizioni Γ a sinistra del segno \vdash come un'unica proposizione $\Gamma^{\&}$ che è la congiunzione (associata a sinistra) delle proposizioni nella lista Γ e

per interpretare una lista di proposizioni Δ a destra del segno \vdash come un'unica proposizione Δ^\vee che è la *disgiunzione* (associata a sinistra) *delle proposizioni nella lista* Δ .

In particolare

il contesto vuoto a sinistra del segno \vdash rappresenta la costante vero

il contesto vuoto a destra del segno \vdash rappresenta la costante falso.

Il motivo di ciò è il seguente. Si noti che data una lista di proposizioni $\Gamma \equiv \text{pr}_1, \text{pr}_2, \dots, \text{pr}_n$ allora la concatenazione della lista Γ con la lista vuota $[]$ che indichiamo con una virgola

$$\Gamma, []$$

è uguale alla lista Γ ovvero

$$\Gamma, [] = \Gamma \quad [], \Gamma = \Gamma$$

e questo succede per le liste sia a destra che a sinistra del sequente. Ma allora dovremmo avere che

$$(\Gamma, [])^\& = \Gamma^\& = ([], \Gamma)^\&$$

come pure

$$(\Delta, [])^\vee = \Delta^\vee = ([], \Delta)^\vee$$

e siccome il simbolo $\Gamma^\&$ esprime la congiunzione delle proposizioni in Γ si ha che

$$(\Gamma, [])^\& = \Gamma^\& \& ([])^\& \quad ([], \Gamma)^\& = ([])^\& \& \Gamma^\&$$

ovvero $[]^\&$ deve soddisfare

$$\Gamma^\& \& ([])^\& = \Gamma^\&$$

e quindi $([])^\&$ deve essere per forza $([])^\& = \mathbf{tt}$ in quanto congiunto ad una proposizione non ne altera la tabella di verità.

Analogamente siccome il simbolo Δ^\vee esprime la disgiunzione delle proposizioni in Δ si ha che

$$(\Delta, [])^\vee = \Delta^\vee \vee ([])^\vee \quad ([], \Delta)^\vee = ([])^\vee \vee \Delta^\vee$$

ovvero $[]^\vee$ deve soddisfare

$$\Delta^\vee \vee ([])^\vee = \Delta^\vee$$

e quindi deve essere per forza $([])^\vee = \perp$ in quanto messo in disgiunzione con una proposizione non ne altera la tabella di verità.

9.2 Calcolo dei sequenti della Logica classica proposizionale

Il calcolo dei sequenti è composto da assiomi e da delle regole con cui operiamo *trasformazioni di sequenti* secondo lo schema

se VALE QUESTO SEQUENTE (o QUESTI due SEQUENTI) allora VALE QUEST'ALTRO SEQUENTE

dette anche *regola di inferenza di sequenti*.

Un esempio di tale trasformazione utilizzando la convenzione di sezione 5 è la scrittura

$$\frac{\mathbf{P \& U \vdash C}}{\mathbf{P \& U \vdash C \vee \neg P}}$$

il cui significato è il seguente:

“se vale $\mathbf{P \& U \rightarrow C}$ allora vale pure $\mathbf{P \& U \rightarrow C \vee \neg P}$ ”

In particolare presenteremo un calcolo con due tipi di regole: quelle ad una premessa della forma

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta} \text{ regola1}$$

e quelle a due premesse della forma

$$\frac{\Gamma'' \vdash \Delta'' \quad \Gamma''' \vdash \Delta'''}{\Gamma \vdash \Delta} \text{ regola2}$$

In entrambe le regole i sequenti sopra la sbarra $\Gamma' \vdash \Delta'$ nella regola 1 e i sequenti $\Gamma'' \vdash \Delta''$ e $\Gamma''' \vdash \Delta'''$ nella regola 2 si dicono **premesse**, mentre il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ in entrambi i casi si dice **conclusione**.

Poi nei nostri calcoli dei sequenti avremo anche regole a zero premesse che chiamiamo **assiomi**. Per esempio nel calcolo dei sequenti per la logica classica metteremo come assioma uno della forma

$$\frac{\text{ax-id}}{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, A, \Delta_2}$$

e un'altro della forma

$$\frac{\text{ax-}\perp}{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla}$$

L'idea è di usare le regole per trasformare sequenti a partire dagli assiomi in modo da *conservare il loro valore di verità dall'ALTO verso il BASSO*.

9.2.1 Regole del calcolo dei sequenti LC_p

Ora presentiamo il calcolo dei sequenti LC_p per la Logica Classica Proposizionale che contiene regole per i connettivi \perp , $\&$, \vee , \neg , \rightarrow assieme all' **assioma identità** e alle regole di **scambio a destra e a sinistra** in forma di *schemi di assiomi*

Il calcolo LC_p è composto dai seguenti schemi di assiomi e regole:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\text{ax-id}}{\Gamma, \text{pr}, \Gamma' \vdash \Delta, \text{pr}, \Delta'} & \frac{\text{ax-}\perp}{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla} & \frac{\text{ax-}\top}{\Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'} \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \text{pr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \text{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\text{pr}_1) \& (\text{pr}_2), \Delta} \&-D \qquad \frac{\Gamma, \text{pr}_1, \text{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\text{pr}_1) \& (\text{pr}_2) \vdash \Delta} \&-S$$

$$\frac{\Gamma \vdash \text{pr}_1, \text{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\text{pr}_1) \vee (\text{pr}_2), \Delta} \vee-D \qquad \frac{\Gamma, \text{pr}_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \text{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\text{pr}_1) \vee (\text{pr}_2) \vdash \Delta} \vee-S$$

$$\frac{\Gamma, \text{pr}_1 \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg(\text{pr}_1), \Delta} \neg\text{-D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \text{pr}_1, \Delta}{\Gamma, \neg(\text{pr}_1) \vdash \Delta} \neg\text{-S}$$

$$\frac{\Gamma, \text{pr}_1 \vdash \text{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\text{pr}_1) \rightarrow (\text{pr}_2), \Delta} \rightarrow\text{-D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \text{pr}_1, \Delta \quad \Gamma, \text{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\text{pr}_1) \rightarrow (\text{pr}_2) \vdash \Delta} \rightarrow\text{-S}$$

Un esempio di regola del calcolo ottenuta per istanziazione di uno schema sopra è

$$\frac{\text{P} \& \text{Q} \vdash \text{Q} \& \text{P} \quad \text{P} \& \text{Q} \vdash \text{C} \vee \text{P}}{\text{P} \& \text{Q} \vdash (\text{Q} \& \text{P}) \& (\text{C} \vee \text{P})} \&\text{-D}$$

è una corretta istanza della regola $\&\text{-D}$, detta anche *applicazione (dello schema) della regola $\&\text{-D}$*

$$\frac{\Gamma \vdash \text{pr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \text{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\text{pr}_1) \& (\text{pr}_2), \Delta} \&\text{-D}$$

ove al posto di pr_1 c'è $\text{Q} \& \text{P}$ e al posto di pr_2 c'è $\text{C} \vee \text{P}$ e al posto di Γ c'è la lista di una sola proposizione $\text{P} \& \text{Q}$ e al posto di Δ c'è la lista vuota.

9.2.2 Definizione di albero e albero di derivazione in LC_p

Il nostro calcolo LC_p serve a costruire **alberi di derivazione**.

Intuitivamente un'albero è ottenuto a partire da un sequente $\Gamma \vdash \Delta$, detto *radice*, applicando le regole del calcolo *dal basso verso l'alto* al fine di costruire oggetti della forma

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \frac{\frac{\Gamma_5 \vdash \Delta_5}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \text{regola1} \quad \frac{\Gamma_6 \vdash \Delta_6}{\Gamma_4 \vdash \Delta_4} \text{regola1}}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \text{regola2}}{\Gamma \vdash \Delta} \text{regola2}$$

all'interno dei quali chiameremo *foglie* i sequenti premesse di regole che non sono conclusioni di altre regole, che nella costruzione sopra sono $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$, $\Gamma_5 \vdash \Delta_5$, $\Gamma_6 \vdash \Delta_6$.

Si noti che siccome considereremo solo regole con al più due premesse allora ogni albero di derivazione avrà nodi con al più due predecessori.

Per esempio nell'albero

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \frac{\frac{\Gamma_5 \vdash \Delta_5}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \text{regola1} \quad \frac{\Gamma_6 \vdash \Delta_6}{\Gamma_4 \vdash \Delta_4} \text{regola1}}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \text{regola2}}{\Gamma \vdash \Delta} \text{regola2}$$

la radice $\Gamma \vdash \Delta$ ha due predecessori $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$ e $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$ ed è stata ottenuta applicando la **regola 2**.

Introduciamo la definizione precisa di albero nel calcolo dei sequenti LC_p :

Def. 9.1 (albero nel calcolo dei sequenti \mathbf{LC}_p) Un albero π nel calcolo dei sequenti \mathbf{LC}_p nel linguaggio \mathcal{L} è definito per induzione come segue.

1. Ogni sequente

$$\Gamma \vdash \Delta$$

nel linguaggio \mathcal{L} è un albero nel calcolo \mathbf{LC}_p avente il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ sia come *radice* che come *unica foglia*.

2. Dato un albero nel calcolo \mathbf{LC}_p

$$\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \Delta}$$

allora

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \Delta}}{\Gamma' \vdash \Delta'} \text{ reg*}$$

ottenuto estendendo π con una regola *reg** del calcolo \mathbf{LC}_p è un albero nel calcolo \mathbf{LC}_p con *radice* $\Gamma' \vdash \Delta'$ e con *foglie* quelle di π_1 .

3. Dati due alberi nel calcolo \mathbf{LC}_p

$$\frac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

allora

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \text{ reg*}$$

ottenuto estendendo π_1 e π_2 con una regola di \mathbf{LC}_p è un albero nel calcolo \mathbf{LC}_p con *radice* $\Gamma_3 \vdash \Delta_3$ e con *foglie* l'unione di quelle di π_1 e quelle di π_2 .

Poi chiameremo *albero di derivazione* di un sequente un albero avente tal sequente come radice e TUTTE le foglie come assiomi.

Def. 9.2 (derivazione di un sequente) Una **derivazione** del sequente $\Gamma \vdash \Delta$ nel calcolo dei sequenti \mathbf{LC}_p in un linguaggio \mathcal{L} è un albero π del calcolo \mathbf{LC}_p avente

- $\Gamma \vdash \Delta$ come radice;
- ogni foglia di π è istanza di un assioma di \mathbf{LC}_p .

Def. 9.3 (sequente derivabile) Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice **derivabile** nel calcolo dei sequenti \mathbf{LC}_p se esiste un *albero di derivazione* avente come *radice* $\Gamma \vdash \Delta$

In altri termini un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **derivabile** nel calcolo dei sequenti \mathbf{LC}_p se esiste un albero in cui

- $\Gamma \vdash \Delta$ è la radice;
- ogni foglia è istanza di un assioma di \mathbf{LC}_p ottenuto **sostituendo** le variabili **A, B** con arbitrarie proposizioni **pr₁** e **pr₂** e le variabili $\Gamma, \Delta, \nabla, \Sigma$ con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).
- l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di \mathbf{LC}_p ottenute **sostituendo** le variabili **A, B** con arbitrarie proposizioni **pr₁** e **pr₂** e le variabili $\Gamma, \Delta, \nabla, \Sigma$ con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).

9.2.3 Quali sono gli assiomi in LC_p

Gli assiomi in LC_p sono di tre tipi: gli assiomi identità, gli assiomi del falso e quelli del vero

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\perp & \text{ax-}\top \\ \Gamma, \text{pr}, \Gamma' \vdash \Delta, \text{pr}, \Delta' & \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla' \end{array}$$

Quindi un albero costruito a partire da un sequente è una derivazione se e solo se le sue foglie sono istanze degli assiomi sopra.

Si noti che è *assioma identità* *OGNI sequente* che ha *ALMENO UNA PROPOSIZIONE* (o *ATOMICA* o *COMPOSTA*) che compare a *sx* e a *dx* del segno di sequente \vdash .

Ad esempio si noti che il sequente

$$\mathbf{A} \vdash \mathbf{A}$$

è un'istanza dell'assioma identità **ax-id** con Γ , Γ' , Δ e Δ' tutte liste vuote e \mathbf{A} come proposizione pr presente a destra e a sinistra di \vdash .

Allo stesso modo il sequente

$$\mathbf{C}, \mathbf{P}, \mathbf{A} \& (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}), \mathbf{M} \vdash \mathbf{H} \& \mathbf{C}, \mathbf{A} \& (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C})$$

è *assioma identità* ove al posto di Γ c'è \mathbf{C}, \mathbf{P} , al posto di pr c'è $\mathbf{A} \& (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C})$, al posto di Γ' c'è \mathbf{M} , al posto Δ c'è $\mathbf{H} \& \mathbf{C}$ e al posto di Δ' c'è la lista vuota.

Si noti che uno stesso sequente può essere riconosciuto assioma identità con diverse sostituzioni delle variabili di contesto che compaiono nello schema dell'assioma identità

$$\Gamma, \text{pr}, \Gamma' \vdash \Delta, \text{pr}, \Delta'$$

Ad esempio il sequente

$$\mathbf{B}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S} \vdash \mathbf{H}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S}, \mathbf{M}$$

è un'istanza dell'assioma identità **ax-id** dopo aver posto \mathbf{S} come pr e aver posto $\Gamma \equiv \mathbf{B}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}$, la lista vuota al posto di Γ' e aver posto $\Delta \equiv \mathbf{H}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}$ e infine $\Delta' \equiv \mathbf{M}$.

Però lo stesso sequente

$$\mathbf{B}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S} \vdash \mathbf{H}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S}, \mathbf{M}$$

è ANCHE istanza dello schema assioma identità

$$\Gamma, \text{pr}, \Gamma' \vdash \Delta, \text{pr}, \Delta'$$

in altro modo ponendo $\mathbf{D} \vee \mathbf{C}$ come pr e poi $\Gamma \equiv \mathbf{B}$ e $\Gamma' \equiv \mathbf{S}$ e $\Delta \equiv \mathbf{H}$ e infine $\Delta' \equiv \mathbf{S}, \mathbf{M}$.

In sostanza un sequente è un assioma identità se compare *ALMENO una stessa proposizione* a sinistra e a destra del segno \vdash e quindi a maggior ragione nei casi in cui compaiono più proposizioni sia a dx che a sx del segno \vdash .

9.2.4 Esempio di derivazione in LC_p

Se ad esempio vogliamo costruire un albero di derivazione per il sequente

$$\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \& \mathbf{P}$$

dobbiamo scrivere il sequente come radice dell'albero e quindi costruire l'albero di derivazione dal BASSO verso l'ALTO applicando le regole, per esempio la $\&-D$ come segue

$$\frac{\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \quad \mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}}{\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \& \mathbf{P}}$$

Il lettore noti che questa regola è un'istanza della regola $\&-D$ del calcolo ottenuta ponendo: \mathbf{Q} al posto di \mathbf{pr}_1 , \mathbf{P} al posto di \mathbf{pr}_2 e la lista vuota al posto di Δ e $\mathbf{P}\&\mathbf{Q}$ al posto di Γ .

Si noti che il pezzo di derivazione

$$\frac{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q} \quad \mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}} \&-D$$

NON è albero di derivazione completo perchè le sue foglie non sono assiomi!

Invece applicando altre regole arriviamo a questo albero di derivazione:

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{P}, \mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}} \&-S \quad \frac{\text{ax-id}}{\mathbf{P}, \mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}} \&-S}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}} \&-D$$

ove $\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}$ è la RADICE mentre $\mathbf{P}, \mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}$ e $\mathbf{P}, \mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}$ sono rispettivamente foglie del ramo di sinistra e di quello di destra.

ATTENZIONE: nelle regole dei sequenti le METAvariabili date da lettere greche MAIUSCOLE Γ e Δ , Σ .. stanno per LISTE DI PROPOSIZIONI anche VUOTE

e quindi NON compaiono mai in un sequente ottenuto da una TRADUZIONE in linguaggio formale di un enunciato in linguaggio naturale.

Inoltre nel tradurre enunciati nel linguaggio naturale in sequenti, di solito faremo uso solo di alcune forme di sequenti e in particolare quelli della forma

$$\vdash \mathbf{pr}$$

oppure

$$\mathbf{pr}_1, \mathbf{pr}_2, \dots \mathbf{pr}_n \vdash \mathbf{cl}$$

e gli altri tipi di sequenti, eccetto l'ultimo, compariranno eventualmente nei possibili alberi avente i sequenti sopra come radice e ottenuti applicando regole del calcolo che dal basso verso l'alto diminuiscono il numero dei connettivi presenti nelle proposizioni che compaiono nei sequenti conclusioni delle regole applicate.

9.2.5 Come si sarebbe potuto scrivere il calcolo \mathbf{LC}_p

Un'altra formulazione del calcolo dei sequenti della logica proposizionale è quella contenente gli assiomi e le regole che seguono assieme a *TUTTE le istanze di assiomi e regole ottenute istanziando le variabili proposizionali A e B utilizzate nella scrittura degli assiomi e regole con proposizioni arbitrarie* e i contesti denotati con lettere greche Γ, Δ, Σ , etc. con liste arbitrarie di proposizioni (anche vuote).

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \quad \text{ax-}\perp \quad \text{ax-tt} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \quad \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla \quad \Gamma \vdash \nabla, \mathbf{tt}, \nabla' \\ \frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{sc}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{dx} \\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta} \&-D \quad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta} \&-S \\ \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee-D \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee-S \\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg-D \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg-S \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow -D \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow -S$$

In altre parole il calcolo definito da queste regole è **chiuso per sostituzione** dei suoi assiomi e regole con arbitrarie proposizioni \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 , che chiamiamo META-variabili per proposizioni complesse arbitrarie, al posto delle variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} (la differenza tra le variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} e le META-variabili \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 è che le prime sono i costituenti di base della grammatica delle proposizioni per formare proposizioni complesse, ad esempio $\mathbf{A} \& (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$, mentre le seconde sono solo variabili di più alto livello per indicare una proposizione complessa).

Per esempio l'assioma identità è uno *schema* di assiomi uno per ogni sostituzione delle lettere greche Γ, Δ, Σ , etc. con liste precise di proposizioni e le lettere \mathbf{A} e \mathbf{B} con proposizioni qualsiasi come l'assioma

$$\mathbf{B} \& \mathbf{C} \vdash \mathbf{B} \& \mathbf{C}$$

che è l'istanza dell'assioma identità **ax-id** con Γ, Γ', Δ e Δ' tutte liste vuote e con al posto di A la proposizione $\mathbf{B} \& \mathbf{C}$.

9.2.6 Idea intuitiva di sequente e sue derivazioni

Dal punto di vista logico un *sequente* è un *giudizio assertivo* mentre una derivazione di un sequente rappresenta un'*argomentazione* che ne prova la validità. Possiamo inoltre pensare la **deduzione di un sequente** come la *scrittura di un programma* ove il *linguaggio di programmazione* è il **calcolo dei sequenti**.

9.2.7 Test sulla comprensione del concetto di derivazione

1. La seguente è una derivazione in logica classica proposizionale LC_p

$$\frac{\frac{\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \quad \frac{\mathbf{P}, \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}}{\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}} \&-S}{\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \& \mathbf{P}} \text{ ax-id}$$

?

Risposta: NO, perchè la sua foglia di sinistra è $\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}$ che NON è un'istanza di un'assioma.

2. la scrittura sotto è un pezzo di albero costruito con un'istanza di una regola del calcolo LC_p

$$\frac{\frac{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \vdash \mathbf{A}}{\mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{C} \vdash \mathbf{A}} \text{ ax-id}}{\mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{C} \vdash \mathbf{A}} \&-S$$

?

NO, perchè l'applicazione $\&-S$ è scorretta, OCCORRE operare uno scambio prima di applicarla!
Una corretta applicazione di $\&-S$ è nel seguente albero

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}}{\mathbf{C}, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}} \text{ ax-id}}{\mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{C} \vdash \mathbf{A}} \&-S}{\mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{C} \vdash \mathbf{A}} \text{ sc}_{sx}$$

che è una corretta derivazione.

MORALE: occorre RICORDARE di operare gli SCAMBI necessari!

3. Derivare in LC_p

$$A \& B \vdash B \& A$$

Basta prendere la derivazione di $\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \& \mathbf{P}$ in sezione 9.2.4 e sostituire P con A e Q con B .

4. Derivare in LC_p

$$(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \& \mathbf{C} \vdash \mathbf{A} \& (\mathbf{B} \& \mathbf{C})$$

Esistono derivazioni diverse di uno stesso sequente?

Sì generalmente vi sono diverse derivazioni avente come radice uno stesso sequente. Ecco qui una per $(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)$

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{C, A, B \vdash A} \quad \&-S}{C, A \& B \vdash A} \quad \text{sc}_{sx}}{\frac{A \& B, C \vdash A}{(A \& B) \& C \vdash A} \quad \&-S} \quad \&-D \quad \frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{C, A, B \vdash B} \quad \text{ax-id}}{C, A, B \vdash C} \quad \&-S}{C, A \& B \vdash B \& C} \quad \text{sc}_{sx}}{\frac{A \& B, C \vdash B \& C}{(A \& B) \& C \vdash B \& C} \quad \&-S} \quad \&-D$$

Ma questa derivazione NON è la più corta. Una più corta si ottiene applicando la regola $\&-D$ il più tardi possibile.

5. Si noti che per derivare in LC_p

$$\mathbf{A} \& (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \vdash (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \& \mathbf{A}$$

basta prendere la derivazione sopra di $\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \& \mathbf{P}$ in sezione 9.2.4 e sostituire \mathbf{P} con \mathbf{A} e \mathbf{Q} con $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}$. ottenendo

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{A}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C} \vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}} \quad \&-S}{\mathbf{A} \& (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}} \quad \&-S}{\mathbf{A} \& (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \vdash (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \& \mathbf{A}} \quad \&-D \quad \frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{A}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C} \vdash \mathbf{A}} \quad \&-S}{\mathbf{A} \& (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \vdash \mathbf{A}} \quad \&-S}{\mathbf{A} \& (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \vdash (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \& \mathbf{A}} \quad \&-D$$

In particolare si noti che *il sequente foglia $\mathbf{A}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C} \vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}$ è un assioma identità ove vi è una proposizione complessa a destra e a sinistra del segno \vdash e quindi non c'è bisogno di continuare a derivare fino ad ottenere sequenti senza proposizioni complesse!!*

In conclusioni questo esempio mostra che **le derivazioni sono chiuse per sostituzioni delle loro variabili proposizionali** con generiche proposizioni:

Tutti gli alberi ottenuti da una **derivazione** per **sostituzione di TUTTE LE OCCORRENZE** di una *variabile proposizionale* con una *PROPOSIZIONE ARBITRARIA* sono **pure derivazioni**

9.3 Classificazione della verità di un sequente in logica classica

Possiamo trasferire ai sequenti la classificazione della verità di una proposizione formale in logica classica riferendola alla proposizione che i sequenti rappresentano.

Def. 9.4 La **tabella di verità di un sequente**

$$\Gamma \vdash \Delta$$

è la tabella di verità della proposizione

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$$

che rappresenta il suo significato secondo la logica classica.

Quindi diciamo che un sequente è valido se lo è la proposizione implicativa che lo rappresenta come segue:

un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è una **tautologia classica** o è (**valido classicamente**)

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} \text{ è una tautologia}$$

un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **NON valido classicamente**

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} \text{ è NON valido classicamente}$$

un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **soddisfacibile classicamente**

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} \text{ è soddisfacibile classicamente}$$

un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **insoddisfacibile o contraddittorio o paradossale**

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} \text{ è insoddisfacibile o contraddittorio o paradossale}$$

Con queste definizioni dovrebbe risultare ancora più chiaro che il motivo per cui il contesto vuoto a sinistra del sequente si interpreta come la costante vero **tt** è per indicare che

$$\vdash pr \text{ è valido} \quad \text{sse} \quad tt \rightarrow pr \text{ è tautologia}$$

e siccome

$$(tt \rightarrow pr) \leftrightarrow pr$$

è una tautologia si deduce che

$$\vdash pr \text{ è valido} \quad \text{sse} \quad pr \text{ è tautologia}$$

Inoltre anche

$$\mathbf{tt} \ \& \ pr \leftrightarrow pr$$

è una tautologia ovvero la costante vero è elemento neutro per la congiunzione e può essere sempre aggiunta ad un congiunto senza alterarne il valore di verità (come d'altra parte la lista vuota aggiunta ad una lista è uguale alla lista stessa).

Similmente il motivo per cui il contesto vuoto a destra del sequente si interpreta come la costante falso \perp è per indicare che

$$pr \vdash \quad \text{è valido} \quad \text{sse} \quad pr \rightarrow \perp \text{ è tautologia}$$

e siccome pure

$$(pr \rightarrow \perp) \leftrightarrow \neg pr$$

è una tautologia si deduce che

$$pr \vdash \quad \text{è valido} \quad \text{sse} \quad \neg pr \text{ è tautologia}$$

Inoltre pure

$$\perp \vee pr \leftrightarrow pr$$

è una tautologia ovvero il falso è elemento neutro per la disgiunzione e può essere sempre aggiunto ad un disgiunto senza alterarne il valore di verità.

9.3.1 Alla ricerca della validità con il calcolo dei sequenti

Useremo il calcolo dei sequenti per stabilire la verità di una proposizione formale e di un sequente per il fatto che vale la seguente identificazione del concetto di derivabilità e quello di validità:

$\vdash pr$ è radice di una derivazione in \mathbf{LC}_p sse pr è una <i>tautologia</i> ovvero la sua tabella di verità ha 1 in ogni uscita
--

e più in generale

$\Gamma \vdash \Delta$ è radice di una derivazione in \mathbf{LC}_p sse $\Gamma \vdash \Delta$ è TAUTOLOGIA ovvero $\Gamma \& \rightarrow \Delta^\vee$ è TAUTOLOGIA

Nel seguito andiamo a dimostrare il motivo per cui il concetto di **sequente derivabile** coincide con quello di **sequente valido**. Innanzitutto mostreremo che gli *assiomi sono sequenti validi*. Se poi riusciamo a mostrare che anche *le regole del calcolo sono valide*, e in particolare che conservano la VERITÀ dall'ALTO verso il BASSO allora ne risulta che una derivazione avente come radice un sequente del tipo $\vdash pr$ rende tale sequente valido perchè la validità SCENDE dalle foglie con assiomi validi fino alla radice come esemplificato in questa derivazione di un verso dell'associatività della congiunzione

$$\begin{array}{c}
\text{valido} \\
\frac{C, A, B \vdash A}{C, A \& B \vdash A} \Downarrow \text{valido} \\
\frac{C, A \& B \vdash A}{A \& B, C \vdash A} \Downarrow \text{valido} \\
\frac{A \& B, C \vdash A}{(A \& B) \& C \vdash A} \Downarrow \text{valido} \\
\hline
(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\text{valido} \quad e \quad \text{valido} \\
\frac{C, A, B \vdash B \quad C, A, B \vdash C}{C, A, B \vdash B \& C} \Downarrow \text{valido} \\
\frac{C, A \& B \vdash B \& C}{C, A \& B \vdash B \& C} \Downarrow \text{valido} \\
\frac{A \& B, C \vdash B \& C}{(A \& B) \& C \vdash B \& C} \Downarrow \text{valido} \\
\hline
(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)
\end{array}$$

9.3.2 Soddisfacibilità di un sequente su una riga

Diciamo che un sequente è vero su una riga se lo è la proposizione implicativa che lo rappresenta:

Def. 9.5 (sequente vero su una riga) Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è *vero su una riga* contenente le variabili proposizioni del sequente sse la proposizione

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$$

è vera sulla riga considerata.

Si osservi che possiamo associare ad una proposizione **pr** INFINITE TABELLE di VERITÀ, una per OGNI lista finita di variabili proposizionali che INCLUDANO le variabili effettivamente presenti in **pr**.

Ad esempio alla proposizione **A&B** e ad una lista arbitraria di variabili proposizionali contenenti **A** e **B** possiamo associare una tabella di verità il cui valore in uscita è però determinato solo dai valori su **A** e **B**:

<i>A</i>	<i>B</i>	...	<i>V_n</i>	<i>A&B</i>
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	0
...
...

9.4 Procedura di decisione per proposizioni classiche e sequenti in \mathbf{LC}_p

Come già anticipato una caratteristica importante delle regole del calcolo \mathbf{LC}_p è che il concetto di DERIVABILITÀ di un sequente $\Gamma \vdash \nabla$ nel calcolo COINCIDE con il suo essere una TAUTOLOGIA. E non solo...perchè addirittura esiste una PROCEDURA di decisione per **decidere** se un sequente è **derivabile** o meno e quindi **valido** o meno in \mathbf{LC}_p . Tale procedura induce una PROCEDURA di DECISIONE della VALIDITÀ di una proposizione **pr** qualsiasi, semplicemente perchè si applica la procedura di decisione di derivazione di un sequente al sequente $\vdash \mathbf{pr}$ ricordando che la validità del sequente $\vdash \mathbf{pr}$ coincide con la validità di $\mathbf{tt} \rightarrow \mathbf{pr}$ e quindi di **pr**.

L'esistenza di tali procedure si basa essenzialmente su due fatti:

- le regole di \mathbf{LC}_p conservano la verità su ogni riga di variabili proposizionali (che include quelle presenti nei sequenti coinvolti nella regola) sia dall'ALTO delle premesse verso il BASSO della conclusione ma anche anche dalla conclusione in BASSO verso ciascuna premessa in ALTO;
- tutte le regole di \mathbf{LC}_p eccetto quelle degli scambi a sx e a dx, DIMINUISCONO di COMPLESSITÀ dal BASSO verso l'ALTO.

In pratica dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ andiamo a costruire un albero applicando innanzitutto tutte le regole di \mathbf{LC}_p relative ai connettivi occorrenti nelle proposizioni composte del sequente, aiutati dalle regole di scambio quando necessario, fino ad ottenere delle foglie che o sono costituite da assiomi oppure sono costituite da sole variabili proposizionali senza alcuna proposizioni composta.

9.4.1 Procedura di decisione su derivabilità di sequenti in \mathbf{LC}_p

Per stabilire se $\Gamma \vdash \Delta$ è una **tautologia classica** basta cercare una sua derivazione secondo la procedura che segue:

1. $\Gamma \vdash \nabla$ è assioma? $\left\{ \begin{array}{ll} \text{sì} & \text{vai in 5.} \\ \text{no} & \text{vai in 2.} \\ & \text{se in } \Gamma \text{ o in } \nabla \text{ c'è una proposizione composta} \\ & \text{altrimenti STOP} \end{array} \right.$
2. Scegli in $\Gamma \vdash \nabla$ una proposizione composta, diciamo $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2$ per esempio (incluso anche il caso $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2 \equiv \neg \mathbf{pr}_1$).
 $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2$ è in posizione buona per applicare ad essa una SUA regola (a dx se $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2$ sta a dx di \vdash nel sequente, a sx se $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2$ sta a sx di \vdash)? $\left\{ \begin{array}{ll} \text{sì} & \text{vai in 4. operando su } \mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2 \\ \text{no} & \text{vai in 3. operando su } \mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2 \end{array} \right.$
3. se operi su $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2$ fai uno scambio per portarla in posizione buona da poter applicare la sua regola e vai in 4. operando su $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2$.
4. se operi su $\mathbf{pr}_1 \circ \mathbf{pr}_2$ applica la sua regola. Quante premesse ha la regola?
 $\left\{ \begin{array}{ll} \text{una} & \text{vai in 1. operando sulla premessa} \\ \text{due} & \text{scegli la prima premessa e vai in 1. operando su di essa} \end{array} \right.$
5. nell'albero ottenuto c'è foglia che NON è assioma con almeno una proposizione composta?
 $\left\{ \begin{array}{ll} \text{sì} & \text{scegli la foglia NON assioma e vai in 2.} \\ & \text{operando su di lei} \\ \text{no} & \text{STOP} \end{array} \right.$

CONCLUSIONE:

1. se nell'albero ottenuto tutte le foglie sono assiomi, allora $\Gamma \vdash \nabla$ è derivabile in \mathbf{LC}_p e quindi $\Gamma \vdash \nabla$ è una **tautologia** e quindi un sequente **valido classicamente** oppure
2. se nell'albero ottenuto qualche foglia NON è assioma, allora $\Gamma \vdash \nabla$ NON è DERIVABILE in \mathbf{LC}_p , e quindi $\Gamma \vdash \nabla$ è **NON valido** in logica classica.

9.4.2 Come trovare riga in cui un sequente NON valido è falso

Se l'algoritmo sopra per $\Gamma \vdash \nabla$ si ferma con una foglia

$$\Gamma' \vdash \nabla'$$

che NON è un assioma allora

UNA riga della tabella di verità del sequente di partenza $\Gamma \vdash \nabla$ che lo rende **falso** si ottiene ponendo

- $\mathbf{A} = 1$ per ogni variabile \mathbf{A} in Γ'
- $\mathbf{B} = 0$ per ogni variabile \mathbf{B} in ∇'

e tutte le altre variabili proposizionali in $\Gamma \vdash \nabla$ con valori A PIACERE.

In particolare

1. se la foglia NON assioma è del tipo

$$\mathbf{A}_{i_1}, \dots, \mathbf{A}_{i_n} \vdash \mathbf{V}_{k_1}, \dots, \mathbf{V}_{k_m}$$

e quindi

$$\{\mathbf{A}_{i_1}, \dots, \mathbf{A}_{i_n}\} \cap \{\mathbf{V}_{k_1}, \dots, \mathbf{V}_{k_m}\} = \emptyset$$

allora

OGNI riga della tabella di $\Gamma \vdash \nabla$ con

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}_{i_j} = \mathbf{1} & \mathbf{V}_{k_j} = \mathbf{0} \\ \text{per } j = 1, \dots, n & \text{per } j = 1, \dots, m \end{array}$$

dà valore $\mathbf{0}$ alla proposizione $\Gamma^{\&} \rightarrow \nabla^{\vee}$.

2. se la foglia NON assioma è del tipo

$$\vdash \mathbf{V}_{k_1}, \dots, \mathbf{V}_{k_m}$$

allora

OGNI riga della tabella di $\Gamma \vdash \nabla$ con

$$\begin{array}{l} \mathbf{V}_{k_j} = \mathbf{0} \\ \text{per } j = 1, \dots, m \end{array}$$

dà valore $\mathbf{0}$ al sequente $\Gamma \vdash \nabla$ ovvero alla proposizione $\Gamma^{\&} \rightarrow \nabla^{\vee}$.

3. se la foglia NON assioma è del tipo

$$\mathbf{A}_{i_1}, \dots, \mathbf{A}_{i_n} \vdash$$

allora

OGNI riga della tabella di $\Gamma \vdash \nabla$ con

$$\begin{array}{l} \mathbf{A}_{i_j} = \mathbf{1} \\ \text{per } j = 1, \dots, n \end{array}$$

dà valore $\mathbf{0}$ alla proposizione $\Gamma^{\&} \rightarrow \nabla^{\vee}$.

9.4.3 Esempio di applicazione della procedura di decisione

Il sequente

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash (\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}) \& (\mathbf{D} \vee \mathbf{M})$$

è una tautologia?

NO, non è una tautologia in quanto applicando la procedura di decisione al sequente possiamo costruire un albero del tipo

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{P}, \mathbf{R}}{\mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{P}, \mathbf{R}} \&-S \quad \mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{R}}{\mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{R}} \rightarrow-S \quad \frac{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{R}}{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}} \text{sc}_{sx}}{\frac{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}}{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash (\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R})} \rightarrow-D \quad \frac{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{M}}{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash (\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}) \& (\mathbf{D} \vee \mathbf{M})} \&-D} \&-D$$

che ha una foglia $\mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{P}, \mathbf{R}$ senza proposizioni composte che NON è un assioma e che ci dice che su ogni riga della tabella di verità del sequente radice in cui si pone $\mathbf{A} = \mathbf{1}, \mathbf{B} = \mathbf{1}$ e poi $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ (non importa quale siano i valori di \mathbf{D} e di \mathbf{M}) il sequente $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash (\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}) \& (\mathbf{D} \vee \mathbf{M})$ risulta falso.

9.4.4 Esempio di applicazione della procedura di decisione di una proposizione

Domanda: la proposizione $\mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}$ è una tautologia?

Invece di fare la tabella di verità applichiamo la procedura di decisione sopra al sequente $\vdash \mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}$ ottenendo

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}}}{\mathbf{Q}, \neg \mathbf{Q} \vdash} \neg\text{-S}}{\mathbf{Q} \vdash \neg \neg \mathbf{Q}} \neg\text{-D} \quad \frac{\mathbf{Q} \vdash \neg \neg \mathbf{Q}}{\vdash \mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}} \rightarrow\text{-D}$$

che è albero di derivazione e quindi la proposizione $\mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}$ è **valida** ovvero è una **tautologia**.

9.4.5 Esempio di applicazione della procedura di decisione

Domanda: la proposizione $(\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$ è una tautologia?

Abbiamo già risposto in sezione 8.0.2 ma ora rispondiamo applicando la procedura di decisione sopra al sequente

$$\vdash (\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$$

e otteniamo

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{R} \quad \neg \mathbf{R} \vdash \mathbf{V}, \mathbf{R}}{\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R} \vdash \mathbf{V}, \mathbf{R}} \rightarrow\text{-S}}{\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}, \neg \mathbf{V} \vdash \mathbf{R}} \neg\text{-S}}{\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R} \vdash \neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}} \rightarrow\text{-D} \quad \frac{\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R} \vdash \neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}}{\vdash (\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})} \rightarrow\text{-D}$$

ove si noti che in $\rightarrow\text{-S}$ NON abbiamo continuato a derivare la seconda premessa in quanto seguendo la procedura di decisione sulla prima premessa finiamo in una foglia NON assioma da cui deduciamo che la proposizione $(\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$ NON è una tautologia ovvero è **NON valida** ed è falsa sulla riga $\mathbf{V} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Test di comprensione:

- È vero che un albero di derivazione di un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ ottenuto secondo la procedura sopra ha foglie senza proposizioni composte??

NO, perchè gli assiomi identità possono essere riconosciuti tali per la presenza di una stessa proposizione ANCHE COMPOSTA a sx e a dx del sequente come nella seguente derivazione

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{A}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C} \vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}}}{\mathbf{A} \& (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}} \&\text{-S} \quad \frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{A}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C} \vdash \mathbf{A}}}{\mathbf{A} \& (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \vdash \mathbf{A}} \&\text{-S} \quad \frac{\mathbf{A} \& (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C} \quad \mathbf{A} \& (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \vdash \mathbf{A}}{\mathbf{A} \& (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \vdash (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}) \& \mathbf{A}} \&\text{-D}$$

- È vero che per stabilire se un sequente NON è derivabile, ovvero NON è valido devo avere un albero le cui foglie NON hanno proposizioni COMPOSTE?

NO, perchè basta fermarsi quando ALMENO UNA FOGLIA è SENZA PROPOSIZIONI COMPOSTE e SENZA PROPOSIZIONI ATOMICHE a dx e a sx del segno \vdash . Vedi esempio in sezioni ?? e 9.4.5.

- Se un albero ha una foglia del tipo

$$\vdash \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$$

quale è la riga della sua tabella che va a zero?

Secondo la procedura sopra la riga ottenuta ponendo $\mathbf{P} = 0$, $\mathbf{Q} = 0$ e $\mathbf{R} = 0$ manda a zero il sequente in quanto NON ci sono lettere a sx di \vdash .

Questo si capisce ricordando che il sequente $\vdash \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ è una tautologia solo se lo è la proposizione

$$\mathbf{tt} \rightarrow (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vee \mathbf{R}$$

che risulta falsa appunto sulla riga della sua tabella ottenuta ponendo $\mathbf{P} = 0$, $\mathbf{Q} = 0$ e $\mathbf{R} = 0$.

- Se un albero ha una foglia del tipo

$$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R} \vdash$$

quale è la riga della sua tabella che va a zero?

Secondo la procedura sopra la riga ottenuta ponendo $\mathbf{P} = 1$, $\mathbf{Q} = 1$ e $\mathbf{R} = 1$ manda a zero il sequente in quanto NON ci sono lettere a dx di \vdash .

Questo si capisce ricordando che il sequente $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R} \vdash$ è una tautologia solo se lo è la proposizione

$$(\mathbf{P} \& \mathbf{Q}) \& \mathbf{R} \rightarrow \perp$$

che risulta falsa appunto sulla riga della sua tabella ottenuta ponendo $\mathbf{P} = 1$, $\mathbf{Q} = 1$ e $\mathbf{R} = 1$.

Per approfondimento: Si costruisca un albero per il sequente

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash (\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}) \& (\mathbf{D} \vee \mathbf{M})$$

in cui le foglie sono senza proposizione composte. Si noti che ogni foglia senza proposizioni composte che NON è un assioma suggerisce una riga in cui il sequente radice risulta falso.

Dunque si potrebbe modificare la procedura di decisione 9.4.1 lasciando la possibilità al punto 4., nel caso che la regola di $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ su cui si è operato abbia due premesse, di scegliere anche la seconda premessa e di andare poi in 1. !!!

9.5 Relazione tra una proposizione e la sua negazione

Si noti che la negazione di una proposizione si comporta nel seguente modo rispetto alla validità:

pr TAUTOLOGIA	sse	\negpr PARADOSSO
pr OPINIONE	sse	\negpr OPINIONE
pr NON VALIDA	sse	\negpr SODDISFACIBILE
pr SODDISFACIBILE	sse	\negpr NON VALIDA

Questa relazione suggerisce come applicare la procedura di decisione in sezione 9.4.1 per sapere se un sequente o una proposizione NON valida sia anche soddisfacibile su una qualche riga. Infatti, nel caso una proposizione **pr** risulti NON valida, ovvero non sia una tautologia, possiamo sapere se **pr** è un' **opinione** o un **paradosso** applicando la procedura di decisione in sezione 9.4.1 alla sua negazione ovvero al sequente

$$\vdash \neg \text{pr}$$

Infatti se $\vdash \neg \text{pr}$ risulta una **tautologia** ne segue che $\vdash \text{pr}$ è **insoddisfacibile** e quindi la proposizione **pr** è un **paradosso**. Altrimenti se $\vdash \neg \text{pr}$ NON risulta una tautologia allora una riga su cui il sequente $\vdash \neg \text{pr}$ è falso dà una riga su cui $\vdash \text{pr}$ è vero, ovvero **pr** è vero su questa riga, e dunque risulta **soddisfacibile** e quindi è un' **opinione**.

9.6 Procedura per decidere se una proposizione è tautologia/opinione/paradosso in LC_p

Data una proposizione **pr**

passo 1: si applichi la procedura di decisione provando a derivare $\vdash \text{pr}$ in LC_p

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{se si deriva} & \Rightarrow \text{pr è una tautologia} \\ \text{se la procedura termina con un NON derivabile} & \text{vai al passo 2} \end{array} \right.$

passo 2: la proposizione **pr** NON è una tautologia e la riga su cui la tabella di **pr** va a **0** si ottiene in tal modo:

prendi una foglia non assioma di sole variabili proposizionali

(per es. quella che ha fatto sì che la procedura termini con un NO)

e poni a **1** le variabili a sx del sequente e a **0** quelle a dx

\Rightarrow ogni riga che contiene tale assegnazione di variabili proposizionali manda a **0** la proposizione **pr**

poi vai al passo 3

passo 3: prova a derivare $\vdash \neg \text{pr}$ in LC_p applicando la procedura di decisione

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{se } \vdash \neg \text{pr} \text{ si deriva} & \Rightarrow \vdash \text{pr} \\ & \text{è insoddisfacibile, ovvero un paradosso} \\ \text{se la procedura termina con } \vdash \neg \text{pr} \text{ NON derivabile} & \text{applica il passo 2} \\ & \text{a } \vdash \neg \text{pr} \\ & \text{e la riga trovata assegna 1} \\ & \text{a pr} \\ & \Rightarrow \text{pr è vera su di essa,} \\ & \text{dunque è pr soddisfacibile e quindi è un' opinione.} \end{array} \right.$

9.6.1 Esempi di applicazione della procedura di decisione di una proposizione

Domanda: la proposizione $\mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}$ è una tautologia?

Invece di fare la tabella di verità applichiamo la procedura di decisione sopra al sequente $\vdash \mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}$ ottenendo

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}}}{\mathbf{Q}, \neg \mathbf{Q} \vdash} \neg\text{-S}}{\mathbf{Q} \vdash \neg \neg \mathbf{Q}} \neg\text{-D} \quad \frac{}{\vdash \mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}} \rightarrow\text{-D}$$

che è albero di derivazione e quindi la proposizione $\mathbf{Q} \rightarrow \neg \neg \mathbf{Q}$ è una **tautologia**.

9.6.2 Esempi di applicazione della procedura di decisione di una proposizione

Domanda: la proposizione $(\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$ è una tautologia?

Abbiamo già risposto in sezione 8.0.2 ma ora rispondiamo applicando la procedura di decisione sopra al sequente

$$\vdash (\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$$

e otteniamo

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{R} \quad \neg \mathbf{R} \vdash \mathbf{V}, \mathbf{R}}{\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R} \vdash \mathbf{V}, \mathbf{R}} \rightarrow\text{-S}}{\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}, \neg \mathbf{V} \vdash \mathbf{R}} \neg\text{-S}}{\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R} \vdash \neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}} \rightarrow\text{-D} \quad \frac{}{\vdash (\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})} \rightarrow\text{-D}$$

ove si noti che in $\rightarrow\text{-S}$ NON abbiamo continuato a derivare la seconda premessa in quanto seguendo la procedura di decisione sulla prima premessa finiamo in una foglia NON assioma da cui deduciamo che la proposizione $(\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$ è **falsa** sulla riga $\mathbf{V} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$ e dunque **NON** è una **tautologia**.

Per stabilire se è un'opinione o un paradosso andiamo a derivare

$$\vdash \neg ((\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}))$$

ottenendo

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{V}, \mathbf{R} \vdash}{\mathbf{V} \vdash \neg \mathbf{R}} \neg\text{-D}}{\vdash \mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}} \rightarrow\text{-D} \quad \frac{\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R} \vdash}{(\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}) \vdash} \rightarrow\text{-S}}{\vdash \neg ((\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}))} \neg\text{-D}$$

ove si noti che in $\rightarrow\text{-S}$ NON abbiamo continuato a derivare la seconda premessa in quanto seguendo la procedura di decisione sulla prima premessa finiamo in una foglia NON assioma che ci permette di concludere che $\neg ((\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}))$ è **falsa** su $\mathbf{V} = \mathbf{R} = \mathbf{1}$. Quindi concludiamo che la proposizione $(\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$ è **soddisfacibile** su $\mathbf{V} = \mathbf{R} = \mathbf{1}$.

Dunque la *risposta finale* alla domanda sopra è che $(\mathbf{V} \rightarrow \neg \mathbf{R}) \rightarrow (\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R})$ è un'**OPINIONE** perchè **falsa** sulla riga $\mathbf{V} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$ e **vera** sulla riga $\mathbf{V} = \mathbf{R} = \mathbf{1}$.

9.7 Come rappresentare la negazione di un sequente?

Sopra abbiamo visto una procedura di decisione della verità di una proposizione formale \mathbf{pr} , andando ad analizzare anche la sua negazione $\neg \mathbf{pr}$ nel caso \mathbf{pr} NON risulti una tautologia.

Ora vorremmo applicare la procedura sopra per decidere la verità di un sequente in termini di tautologia/opinione/paradosso.

Però occorre sapere che sequente rappresenta la sua “negazione”. Dunque ci chiediamo:

Come possiamo rappresentare la negazione di un sequente?

Per rispondere si ricordi che la classificazione della verità di un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è stata definita in termini della proposizione $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ che esso rappresenta.

Infatti vale la seguente proposizione

Proposition 9.6 Un sequente è derivabile in \mathbf{LC}_P se e solo se è derivabile in \mathbf{LC}_P la proposizione formale che esso rappresenta, ovvero

$$\begin{array}{c} \text{il sequente } \Gamma \vdash \Delta \text{ è derivabile in } \mathbf{LC}_P \\ \text{sse} \\ \text{il sequente } \vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} \text{ è derivabile in } \mathbf{LC}_P \end{array}$$

Dim. Operiamo per casi sul fatto che Γ e Δ siano o non siano la lista vuota.

1. Il caso in cui *sia Γ che Δ sono la lista vuota* è il caso del sequente

$$\vdash$$

che chiaramente **NON è derivabile** in \mathbf{LC}_P in quanto NON è un assioma e non vi è alcuna regola che si può applicare dal basso verso l’alto per ottenere una derivazione eccetto per gli scambi a destra o a sinistra con liste vuote!!

2. Caso in cui *sia Γ che Δ sono entrambe liste di proposizioni NON vuote*.

Partendo a cercare una derivazione di $\vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ dal basso verso l’alto, dopo l’applicazione della regola di implicazione a destra ed eventualmente di un pò di applicazioni delle regole di disgiunzione a destra e di congiunzione a sinistra, ci troviamo a derivare il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ e dunque una tal derivazione di $\vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ deve contenere una derivazione di $\Gamma \vdash \Delta$ e quindi sono entrambe tautologie oppure entrambe non lo sono.

3. Caso in cui *Γ è la lista vuota ma Δ non lo è*. Qui basta osservare che partendo a cercare una derivazione di

$$\vdash \mathbf{tt} \rightarrow \Delta^{\vee}$$

dal basso verso l’alto, dopo l’applicazione della regola di implicazione a destra ed eventuali varie applicazioni della regola di disgiunzione a destra ci troviamo a derivare il sequente $\mathbf{tt} \vdash \Delta$. Ora si osservi che da una derivazione π di $\mathbf{tt} \vdash \Delta$ si ottiene una derivazione di

$$\vdash \Delta$$

togliendo dalle applicazioni delle regole della derivazione π il simbolo della costante vero come premessa in quanto non esiste regola specifica della costante vero a sinistra.

Ovviamente vale anche che da una derivazione π di $\vdash \Delta$ se ne ricava una di $\mathbf{tt} \vdash \Delta$ aggiungendo il simbolo di costante vero come premessa alle regole di π . Poi da una derivazione π' di $\mathbf{tt} \vdash \Delta$ si ottiene una derivazione di

$$\vdash \mathbf{tt} \rightarrow \Delta^{\vee}$$

proseguendo a derivare da π' dall’alto verso il basso applicando se necessario la regola di disgiunzione a destra più volte seguita da un’applicazione della regola di implicazione a destra.

4. Caso in cui Δ è la lista vuota ma Γ *non lo è*. Qui basta osservare che partendo a cercare una derivazione

$$\vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \perp$$

dal basso verso l'alto, dopo l'applicazione della regola di implicazione a destra ed eventuali varie applicazioni della regola di congiunzione a sinistra ci troviamo a derivare il sequente

$$\Gamma \vdash \perp$$

Ora si osservi che da una derivazione π di $\Gamma \vdash \perp$ si ottiene una derivazione di

$$\Gamma \vdash$$

togliendo dalle applicazioni delle regole della derivazione π il simbolo della costante falso come conclusione in quanto non esiste regola specifica della costante falso a destra.

Ovviamente vale anche che da una derivazione π di $\Gamma \vdash$ se ne ricava una di $\Gamma \vdash \perp$ aggiungendo il simbolo della costante falso come conclusione alle regole di π . Infine da una derivazione π' di $\Gamma \vdash \perp$ si ottiene una derivazione di $\vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \perp$ proseguendo a derivare da π' dall'alto verso il basso applicando se necessario la regola di congiunzione a sinistra più volte seguita da un'applicazione della regola di implicazione a destra.

Ora per decidere se un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è una **tautologia/opinione/paradosso** basta applicare il processo sopra in sezione 9.6 alla proposizione $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ con l'avvertenza che per decidere se è derivabile, ovvero è una tautologia, basta derivare $\Gamma \vdash \Delta$ visto quanto osservato in proposizione 9.6.

In particolare possiamo concludere che *la negazione del sequente*

$$\Gamma \vdash \Delta$$

si può rappresentare con il sequente

$$\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$$

Infatti un sequente si comporta con la sua negazione in modo analogo a quanto notato per una proposizione e la sua negazione in sezione 9.5:

$\Gamma \vdash \Delta$ è una tautologia	sse	$\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ è un paradosso/insoddisfacibile
$\Gamma \vdash \Delta$ è un paradosso	sse	$\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ è una tautologia
$\Gamma \vdash \Delta$ NON valido/falso sulla riga r	sse	$\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ soddisfacibile/vero sulla riga r
$\Gamma \vdash \Delta$ soddisfacibile/vero sulla riga r	sse	$\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ NON valido/falso sulla riga r

9.8 PROCEDURA per DECIDERE se un sequente è tautologia o opinione o un paradosso

Passo 1: Per decidere se un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è una **tautologia** o meno si applichi a tal sequente la procedura 9.4.1. di decisione della sua derivabilità. Si hanno due casi:
I caso: il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **derivabile**, dunque è una **tautologia** e quindi STOP.
II caso: il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **NON derivabile** e quindi **NON è una tautologia** ossia **NON è valido**. Una riga su cui il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è falso si trova secondo la procedura 9.4.1. Si vada poi al passo 2.

Passo 2: per decidere se il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **soddisfacibile** o meno si applichi la procedura 7. al sequente $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$
Ora si hanno due sottocasi:
I sottocaso: $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ risulta **NON derivabile** e quindi **NON è una tautologia** ossia **NON è valido**. e quindi $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **soddisfacibile** (oltrechè **NON valido**)
e poi si applichi la procedura 8. per trovare una riga su cui il sequente $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ è falso e la riga ottenuta rende il sequente di partenza $\Gamma \vdash \Delta$ vero, e dunque **soddisfacibile**.
Ne segue che il sequente di partenza $\Gamma \vdash \Delta$ è un'**opinione** e quindi STOP.
II sottocaso: $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ risulta una **tautologia**
quindi il sequente di partenza $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **INSoddisfacibile**, ovvero è una **contraddizione/paradosso** e dunque STOP.

9.8.1 Esempio di applicazione della procedura di decisione

Il sequente $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$ è una tautologia oppure un'opinione o un paradosso?

Applichiamo la procedura di decisione di derivabilità di un sequente in sezione 9.4.1 e otteniamo il seguente albero:

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}, \mathbf{P} \quad \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}}{\mathbf{Q}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}} \rightarrow -S}{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}} \text{SC}_{sx}}{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}} \rightarrow -D$$

in cui la foglia a sinistra NON è un assioma e dunque $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$ è **NON è una tautologia**, ovvero **NON è valido**.

Una riga su cui il sequente è falso è data dall'eseguire quanto descritto in sezione 9.4.2 sulla foglia a sinistra e quindi **una riga che falsifica il sequente è data da $\mathbf{Q} = 1$ e $\mathbf{P} = 0$** .

Per vedere se il sequente è soddisfacibile e quindi un'opinione oppure è un paradosso applichiamo la procedura di derivazione di un sequente in sezione 9.4.1 al sequente

$$\vdash \neg((\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}))$$

e otteniamo

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{P} \vdash \mathbf{Q}}{\vdash \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}} \rightarrow -D \quad \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P} \vdash}{(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}) \vdash} \rightarrow -S}{\vdash \neg((\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}))} \neg -D$$

che dice che il sequente negato **NON è una tautologia** ed è **NON valido** ovvero **falso** sulla riga **P = 1 e Q = 0**. Quindi il sequente di partenza

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$$

è **vero sulla stessa riga** e dunque è **soddisfacibile**.

La *risposta finale* è che il sequente

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$$

è un'opinione perchè **falso** sulla riga **Q = 1 e P = 0** e **vero** sulla riga **P = 1 e Q = 0**.

9.8.2 Test di comprensione

1. Se una proposizione **pr** è falsa su una certa riga della sua tabella cosa possiamo dire della sua negazione $\neg \mathbf{pr}$?

Possiamo solo dire che $\neg \mathbf{pr}$ è vera sulla riga in cui **pr** è NON valida. Dunque la proposizione **pr** **NON è una tautologia** e sappiamo solo che $\neg \mathbf{pr}$ è una proposizione **soddisfacibile** e quindi di sicuro $\neg \mathbf{pr}$ NON è un paradosso ma potrebbe essere una tautologia e quindi **pr** è un paradosso, oppure $\neg \mathbf{pr}$ potrebbe essere un'opinione e in tal caso lo sarebbe pure **pr**.

2. Se una proposizione è una tautologia cosa possiamo dire della sua negazione $\neg \mathbf{pr}$?

La proposizione $\neg \mathbf{pr}$ risulta **INSoddisfacibile** ovvero un paradosso.

3. Come possiamo decidere che $\Gamma \vdash \Delta$ è una tautologia?

Con la procedura di decisione applicata al sequente in sezione 9.4.1.

4. Come possiamo decidere che $\Gamma \vdash \Delta$ è un'opinione?

Con la procedura ottimale in sezione 9.8 descritta sopra.

9.8.3 MEMO su come falsificare un sequente proposizionale

- per falsificare un sequente **PROPOSIZIONALE** del tipo

$$\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$$

è sufficiente considerare la riga

$$\mathbf{A}_i = 1 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_j = 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, m$$

in quanto la *negazione del sequente* $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$ è

$$\neg ((\mathbf{A}_1 \ \& \ \dots) \ \& \ \mathbf{A}_n \rightarrow (\mathbf{B}_1 \vee \mathbf{B}_2) \vee \dots \vee \mathbf{B}_m)$$

che equivale a

$$(\mathbf{A}_1 \ \& \ \dots) \ \& \ \mathbf{A}_n) \ \& \ (\neg \mathbf{B}_1 \ \& \ \neg \mathbf{B}_2) \ \& \ \dots \ \& \ \neg \mathbf{B}_m)$$

e questa negazione risulta infatti *vera* sulla riga

$$\mathbf{A}_i = 1 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_j = 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, m$$

- per falsificare un sequente PROPOSIZIONALE del tipo

$$\vdash \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$$

è sufficiente considerare la riga

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{0} \text{ per ogni } j = 1, \dots, m$$

in quanto la negazione del sequente $\vdash \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$ è

$$\neg(\mathbf{t} \mathbf{t} \rightarrow (\mathbf{B}_1 \vee \mathbf{B}_2) \vee \dots \vee \mathbf{B}_m)$$

che equivale a

$$((\neg \mathbf{B}_1 \ \& \ \neg \mathbf{B}_2) \ \& \ \dots \ \& \ \neg \mathbf{B}_m)$$

e questa negazione risulta infatti *vera* sulla riga

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{0} \text{ per ogni } j = 1, \dots, m$$

- per falsificare un sequente PROPOSIZIONALE

$$\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \vdash$$

è sufficiente considerare la riga

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{1} \text{ per ogni } i = 1, \dots, n$$

in quanto la negazione del sequente $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \vdash$ è

$$\neg((\mathbf{A}_1 \ \& \ \dots) \ \& \ \mathbf{A}_n \rightarrow \perp)$$

che equivale a

$$(\mathbf{A}_1 \ \& \ \dots) \ \& \ \mathbf{A}_n$$

e questa negazione risulta difatti *vera* sulla riga

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{1} \text{ per ogni } i = 1, \dots, n$$

9.9 Perchè le procedure di decisioni per sequenti in logica classica proposizionale sono corrette?

Scopo di questa sezione è di dimostrare la correttezza delle procedure di decisione descritte nelle sezioni precedenti al fine di stabilire in modo *automatico*, ovvero eseguibile da un calcolatore, se un sequente è una tautologia o un'opinione o un paradosso.

A tal scopo introduciamo il concetto di *regola valida in logica classica proposizionale* e poi vedremo pure il concetto di *regola sicura in logica classica proposizionale*.

9.9.1 Definizione di validità in logica classica proposizionale di una regola del calcolo dei sequenti

Introduciamo qui la nozione di *regola valida* per regole di inferenza di sequenti. L'idea è che una regola si dice *valida* se trasforma dall'ALTO verso il BASSO *sequenti veri su una fissata riga r* in *sequenti veri sulla riga r* posto che la riga *r* contenga TUTTE le variabili proposizionali che compaiono in ALMENO una delle proposizioni dei sequenti nella regola. In altre parole una regola è valida *se supposto* che **TUTTI** i suoi **sequenti premessa** siano **veri su una riga** allora il **sequente conclusione** della regola è pure **vero sulla STESSA RIGA**.

Diremo pure informalmente che una regola è **valida** se **conserva la verità dei sequenti su ogni riga dall'ALTO verso il BASSO**.

Enunciamo qui in dettaglio la definizione di validità di una regola del calcolo di sequenti distinguendo tra regole ad una premessa e regole a due premesse.

Def. 9.7 (validità regola ad una premessa) Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

si dice **valida rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità** se *supposto che* il sequente **premissa**

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1$$

sia **vero su una riga r** della sua tabella di verità eventualmente estesa a contenere tutte le variabili proposizionali che compaiono in qualche sequente nella regola (inclusa la conclusione!), *allora* il sequente **conclusione**

$$\Gamma_2 \vdash \Delta_2$$

è **vero sulla stessa riga r**.

Def. 9.8 (validità regola ad due premesse) Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

si dice **valida rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità** se *supposto che* i sequenti **premissa**

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2$$

siano **ENTRAMBI veri su una riga r** della loro tabella di verità eventualmente estesa a contenere tutte le variabili proposizionali che compaiono nei sequenti della regola, *allora* il sequente **conclusione**

$$\Gamma_3 \vdash \Delta_3$$

è **vero sulla stessa riga r**.

Nel seguito mostriamo come il segno di inferenza di una regola corrisponde ad un'implicazione formale.

A tal scopo poniamo l'attenzione sul semplice fatto che per rendere vera su una riga un'implicazione $\mathbf{pr} \rightarrow \mathbf{pr}'$ basta controllare che se l'antecedente \mathbf{pr} è vero sulla riga allora lo è pure il conseguente \mathbf{pr}' .

Lemma 9.9 (implicazione-veloce) Vale il seguente fatto:

Data una proposizione $\mathbf{pr} \rightarrow \mathbf{pr}'$,
 e una qualsiasi riga r della tabella di $\mathbf{pr} \rightarrow \mathbf{pr}'$,
 allora per sapere che vale $\mathbf{pr} \rightarrow \mathbf{pr}' = \mathbf{1}$ su r basta controllare che
 se $\mathbf{pr} = \mathbf{1}$ su r allora vale pure $\mathbf{pr}' = \mathbf{1}$ su r .

Dim. Infatti o \mathbf{pr} è $\mathbf{0}$ sulla riga in questione, e in tal caso l'implicazione $\mathbf{pr} \rightarrow \mathbf{pr}'$ è vera sulla riga in questione, oppure \mathbf{pr} è $\mathbf{1}$ e allora per l'ipotesi $\mathbf{pr}' = \mathbf{1}$ e di nuovo $\mathbf{pr} \rightarrow \mathbf{pr}'$ è vera sulla riga in questione.

Grazie a questo lemma possiamo notare immediatamente i seguenti fatti:

Proposition 9.10 Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

è *valida* sse la proposizione

$$(\Gamma_1 \ \& \ \rightarrow \ \Delta_1^\vee) \ \rightarrow \ (\Gamma_2^\& \ \rightarrow \ \Delta_2^\vee)$$

è una **tautologia**.

Proposition 9.11 Una regola del calcolo dei sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

è *valida* sse la proposizione

$$(\Gamma_1^\& \ \rightarrow \ \Delta_1^\vee) \ \& \ (\Gamma_2^\& \ \rightarrow \ \Delta_2^\vee) \ \rightarrow \ (\Gamma_3^\& \ \rightarrow \ \Delta_3^\vee)$$

è una **tautologia**.

Nel seguito mostreremo che TUTTE le regole del calcolo dei sequenti della Logica Classica Proporzionale \mathbf{LC}_p sono valide.

Si noti che vale pure che le regole del calcolo conservano la validità dei sequenti:

Proposition 9.12 Vale la seguente proprietà:

Se una regola di inferenza di sequenti nel linguaggio proposizionale è **valida**,
 allora **conserva la validità tautologica** dei sequenti,
 nel senso che
se i suoi sequenti premessa sono tautologie
allora anche il sequente conclusione è una tautologia.

Dim. Sia fissata una regola valida nel linguaggio proposizionale e supponiamo che TUTTI i suoi sequenti premessa siano tautologie. Ne segue che fissata una riga arbitraria r contenente le variabili di tutti i sequenti nella regola TUTTI i sequenti premessa sono veri su questa riga essendo delle tautologie.

Ora per la validità della regola ne segue che anche il sequente conclusione è vero sulla stessa riga r . Ma siccome i sequenti premessa sono veri su ogni riga, facendo lo stesso ragionamento ne segue che pure il sequente conclusione è vero su ogni riga e dunque il sequente conclusione è una tautologia come si voleva dimostrare.

9.9.2 Significato di validità di una regola ad una premessa

Grazie alla proposizione 9.10 una regola ad una premessa è valida

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

sse la proposizione

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$$

è una tautologia.

Ora osserviamo la sua tabella di verità confrontandola con i valori che su una riga fissata assumono la proposizione $\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}$ che rappresenta la premessa della regola, la proposizione $\Gamma_2^{\&}$ che rappresentano la premessa del sequente conclusione della regola, e la proposizione Δ_2^{\vee} che rappresenta la conclusione del sequente conclusione della regola:

$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}$	$\Gamma_2^{\&}$	Δ_2^{\vee}	$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$
0	-	-	1
-	0	-	1
1	1	1??	1???
1	1	0??	0???

Si osservi che *le righe in cui $\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} = 0$ oppure $\Gamma_2^{\&} = 0$* rendono vera la proposizione

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$$

senza ulteriori controlli e quindi la regola conserva la verità su queste righe.

In pratica le **uniche righe da controllare** per sapere se

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$$

è **tautologia** (ovvero la sua tabella è fatta solo di 1 in uscita!) **sono le righe** in cui si ha

$$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2^{\&} = 1$$

e su queste righe dobbiamo controllare **SE risulta pure $\Delta_2^{\vee} = 1$** . Se ciò accade la regola è **valida**.

In caso contrario **una riga** su cui accade che

$$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2^{\&} = 1 \quad \text{e} \quad \Delta_2^{\vee} = 0$$

anche solo per **particolari liste di proposizioni messe al posto di Γ_1, Γ_2 e Δ_1, Δ_2** produce un **controesempio** alla validità della regola e quindi la regola risulta **NON valida**.

Quanto qui esposto costituisce una dimostrazione del seguente lemma:

Lemma 9.13 (scorciatoia1) Valgono le seguenti proprietà:

Una regola di inferenza di sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \quad \text{è valida}$$

se e solo se

vale la seguente *condizione scorciatoia1*:
su OGNI riga r

$$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2^{\&} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta_2^{\vee} = 1$$

Una regola di inferenza di sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \quad \text{NON è valida}$$

se e solo se

vale la seguente *condizione scorciatoia1bis*:
esiste una riga r tale che

$$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2^{\&} = 1 \quad \text{e} \quad \Delta_2^{\vee} = 0$$

anche solo per **particolari liste di proposizioni messe al posto di**
 Γ_1, Γ_2 e Δ_1, Δ_2

Nel seguito useremo spesso questo lemma per verificare se una regola di inferenza di sequenti ad una premessa è valida o meno.

9.9.3 Significato di validità di una regola a due premesse

Grazie alla proposizione 9.10 una regola a due premesse è valida

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

sse la proposizione

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \& (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})$$

è una **tautologia**.

Ora osserviamo la sua tabella di verità confrontandola con i valori che su una riga fissata assumono le proposizioni $\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}$ e $\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}$ che rappresentano i sequenti premessa della regola, la proposizione $\Gamma_3^{\&}$ che rappresenta la premessa del sequente conclusione della regola e la proposizione Δ_3^{\vee} che rappresenta la conclusione del sequente conclusione della regola:

$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}$	$\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}$	$\Gamma_3^{\&}$	Δ_3^{\vee}	$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \& (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})$
0	-	-	-	1
-	0	-	-	1
-	-	0	-	1
1	1	1	1??	1???
1	1	1	0??	0???

Si osservi che *le righe in cui* $\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} = 0$ *oppure* $\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee} = 0$ *oppure* $\Gamma_3^{\&} = 0$ rendono vera la proposizione

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \& (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})$$

senza ulteriori controlli e quindi la regola conserva la verità su queste righe.

In pratica le **uniche righe da controllare** per sapere se

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \& (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})$$

è **tautologia** (ovvero la sua tabella è fatta solo di **1** in uscita!) **sono le righe** in cui si ha

$$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_3^{\&} = 1$$

e dobbiamo controllare **SE su tali righe risulta** $\Delta_3^{\vee} = 1$. Se ciò accade la regola è **valida**.

In caso contrario **una riga** su cui

$$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_3^{\&} = 1 \quad \text{ma} \quad \Delta_3^{\vee} = 0$$

anche solo per **particolari liste di proposizioni messe al posto di** $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ **e** Δ_1, Δ_2 **e** Δ_3 dà un **controesempio** alla validità della regola e quindi la regola risulta **NON valida**.

L'argomentazione sopra è una dimostrazione di questo lemma

Lemma 9.14 (scorciatoia2) Valgono le seguenti proprietà:

Una regola di inferenza di sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \quad \text{è valida}$$

se e solo se

vale la seguente *condizione scorciatoia2*:
su OGNI riga r

$$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_3^{\&} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta_3^{\vee} = 1$$

Una regola di inferenza di sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \quad \text{NON è valida}$$

se e solo se

vale la seguente *condizione scorciatoia2bis*:
esiste una riga r su cui

$$\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee} = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_3^{\&} = 1 \quad \text{e} \quad \Delta_3^{\vee} = 0$$

anche solo per **particolari liste di proposizioni messe al posto di**
 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ e $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

Nel seguito useremo spesso questo lemma per verificare se una regola di inferenza di sequenti a due premesse è valida o meno.

9.10 Validità delle regole di \mathbf{LC}_p

Proseguiamo ora con il mostrare che tutti gli assiomi e tutte le regole del calcolo \mathbf{LC}_p sono valide. Questo significa che nell'esempio della derivazione di un verso dell'associatività la verità su una qualsiasi riga si conserva dall'alto verso il basso perchè tutte le foglie essendo assiomi sono senza dubbio vere sulla riga in questione:

$$\begin{array}{c} \text{vero - su - riga } r \\ \hline C, A, B \vdash A \\ \downarrow \text{vero-su-riga } r \\ C, A \& B \vdash A \\ \downarrow \text{vero-su-riga } r \\ A \& B, C \vdash A \\ \downarrow \text{vero-su-riga } r \\ (A \& B) \& C \vdash A \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \text{vero - su - riga } r \\ \hline C, A, B \vdash B \\ \downarrow \text{vero-su-riga } r \\ C, A, B \vdash B \& C \\ \downarrow \text{vero-su-riga } r \\ C, A \& B \vdash B \& C \\ \downarrow \text{vero-su-riga } r \\ A \& B, C \vdash B \& C \\ \downarrow \text{vero-su-riga } r \\ (A \& B) \& C \vdash B \& C \\ \downarrow \text{vero-su-riga } r \\ (A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C) \\ \hline \end{array}$$

Theorem 9.15 (validità regole \mathbf{LC}_p) Gli assiomi di \mathbf{LC}_p sono tutti **tautologie** e **TUTTE** le **regole** di \mathbf{LC}_p sono **valide**.

Procediamo ora a dimostrare per ciascun assioma e ciascuna regola quanto affermato nell'enunciato del teorema.

9.10.1 Validità assioma identità

L'assioma identità

$$\text{ax-id} \\ \Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, A, \Delta_2$$

è una **tautologia** perchè lo è la proposizione

$$(\Gamma_1^{\&} \& \mathbf{A}) \& \Gamma_2^{\&} \rightarrow (\Delta_1^{\vee} \vee \mathbf{A}) \vee \Delta_2^{\vee}$$

Infatti se $(\Gamma_1^{\&} \& \mathbf{A}) \& \Gamma_2^{\&}$ vale **1** in una certa riga r della tabella allora $\mathbf{A} = 1$ e quindi pure $(\Delta_1^{\vee} \vee \mathbf{A}) \vee \Delta_2^{\vee}$ vale **1** sulla stessa riga r e dunque per il lemma implicazione-veloce 9.9 l'assioma è vero sulla riga

considerata. Siccome questo vale per una riga generica allora il seguente è vero su ogni riga e quindi è una tautologia.

9.10.2 Validità dell'assioma per il falso

L'assioma

$$\frac{\mathbf{ax}\text{-}\perp}{\Gamma_1, \perp, \Gamma_2 \vdash \nabla}$$

è una tautologia perchè ogni riga della tabella di

$$(\Gamma_1^{\&} \& \perp) \& \Gamma_2^{\&} \rightarrow \nabla^{\vee}$$

assegna **0** a $(\Gamma_1^{\&} \& \perp) \& \Gamma_2^{\&}$ e quindi **1** alla proposizione implicativa.

Ad esempio l'affermazione seguente

“Se fossi Superman, sarei in grado di volare”

si può formalizzare in

$$\perp \vdash \mathbf{V}$$

assumendo che

$\perp =$ **Sono Superman (che è una falsità)**

$\mathbf{V} =$ **Sono in grado di volare**

Ora la proposizione $\perp \vdash \mathbf{V}$ è una tautologia per le stesse ragioni della validità tautologica dell'assioma del falso.

Curiosamente si osservi che pure la proposizione

$$\perp \vdash \neg \mathbf{V}$$

che traduce secondo le assunzioni sopra

“Se fossi Superman, non sarei in grado di volare”

è pure una tautologia sempre perchè la premessa **“Sono Superman”** tradotta con \perp è falsa.

9.10.3 Validità di \mathbf{sc}_{sx}

La validità della regola di **scambio a sinistra**

$$\frac{\Sigma, \Gamma_1, \Theta, \Gamma_2, \Delta \vdash \nabla}{\Sigma, \Gamma_2, \Theta, \Gamma_1, \Delta \vdash \nabla} \mathbf{sc}_{sx}$$

si riconosce facilmente in quanto il fatto che $(\Sigma, \Gamma_1, \Theta, \Gamma_2, \Delta)^{\&} = \mathbf{1}$ su una certa riga è indipendente dall'ordine delle proposizioni in $\Sigma, \Gamma_1, \Theta, \Gamma_2, \Delta$.

Però per esercizio lo dimostriamo per bene usando il lemma scorciatoia 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione:

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

$$(1) (\Sigma, \Gamma_1, \Theta, \Gamma_2, \Delta)^{\&} \rightarrow \nabla^\vee = 1 \text{ su } r$$

$$(2) (\Sigma, \Gamma_2, \Theta, \Gamma_1, \Delta)^{\&} = 1 \text{ su } r$$

Tesi

$$\Delta^\vee = 1 \text{ su } r.$$

dim. Dall'ipotesi (2) sappiamo che ogni congiunto ha valore **1** e così pure anche $((\Sigma^{\&} \& \Gamma_1^{\&}) \& \Theta^{\&}) \& \Gamma_2^{\&}) \& \Delta^{\&}$ su r e quindi per l'ipotesi (2), ovvero la **verità** della **premessa** della regola si conclude che ∇^\vee ha valore **1** su r .

Quindi il lemma scorciatoia 9.13 è verificato e la regola è valida.

9.10.4 Validità di sc_{dx}

La validità della regola di **scambio a destra**

$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta_2, \Theta, \Delta_1, \nabla} sc_{dx}$$

segue anche lei facilmente in quanto il fatto che $(\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla)^\vee = 1$ è **indipendente** dall'ordine delle proposizioni in $\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla$.

Però per esercizio lo dimostriamo per bene usando il lemma scorciatoia 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione:

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

$$(1) \Gamma^{\&} \rightarrow (\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla)^\vee = 1 \text{ su } r$$

$$(2) \Gamma^{\&} = 1 \text{ su } r$$

Tesi

$$(\Sigma, \Delta_2, \Theta, \Delta_1, \nabla)^\vee \text{ su } r.$$

dim. Dall'ipotesi (2) e dall'ipotesi (1) per la definizione di verità dell'implicazione ne segue che $(\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla)^\vee = 1$ su r . Ora dal fatto che qualche disgiunto in $(\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla)^\vee$ ha valore **1** su r ne segue che pure qualche proposizione in $\Sigma, \Delta_2, \Theta, \Delta_1, \nabla$ (che si differenzia dalla lista $\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla$ solo per scambi di proposizioni) ha valore **1** su r e dunque $(\Sigma, \Delta_2, \Theta, \Delta_1, \nabla)^\vee = 1$ su r .

Quindi la condizione del lemma scorciatoia 9.13 è dimostrata e concludiamo concludiamo per tale lemma che la regola è valida.

9.10.5 Validità di $\&-D$

Per mostrare la validità della regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-D$$

usiamo il lemma scorciatoia 9.14 verificando che vale la condizione scorciatoia di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

$$(1) \Gamma^{\&} \rightarrow (A, \Delta)^\vee = 1 \text{ su } r$$

$$(2) \Gamma^{\&} \rightarrow (B, \Delta)^\vee = 1 \text{ su } r$$

$$(3) \Gamma^{\&} = 1 \text{ su } r$$

Tesi

$$(A \& B, \Delta)^\vee \text{ su } r.$$

dim.

Dall'ipotesi (3) e (1) segue per la definizione di verità dell'implicazione che su r

$$(\mathbf{A}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1}$$

e poi dall'ipotesi (3) e (2) segue sempre per la definizione di verità dell'implicazione che su r

$$(\mathbf{B}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1}$$

Qui si presentano *due casi*: sulla riga r accade che o $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ oppure $\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ in quanto uno delle proposizioni di \mathbf{A}, Δ è vera ed è o \mathbf{A} stesso oppure una proposizione in Δ e quindi $\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ su r .

I caso $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ su r . In tal caso si consideri che per (2) si ottiene che una proposizione in \mathbf{B}, Δ è vera su r ed è o \mathbf{B} stesso oppure una proposizione in Δ , e quindi $\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ su r . Quindi si presentano *due sottocasi* su r o $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ oppure $\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$.

Nel *sottocaso $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r* , assieme all'ipotesi $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ si conclude $\mathbf{A} \& \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r e dunque $(\mathbf{A} \& \mathbf{B}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Nel *sottocaso $\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ su r* si conclude lo stesso che $(\mathbf{A} \& \mathbf{B}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Infine nel *caso $\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ su r* si conclude come nel sottocaso analogo descritto qui sopra.

Quindi la condizione scorciatoia2 nel lemma scorciatoia2 9.14 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

9.10.6 Validità di $\&$ -S

La validità

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \Delta} \&-S$$

segue banalmente in quanto la virgola a sinistra è proprio interpretata come una $\&$ (e la differenza dell'interpretazione delle ipotesi del sequente sopra rispetto alle premesse di quello sotto sono solo di associatività diversa dei vari congiunti..).

Però per esercizio dimostriamo per bene la validità della regola usando il lemma scorciatoia1 9.13 di cui verifichiamo che vale la condizione scorciatoia1 scrivendo ipotesi e tesi e una dimostrazione qui di seguito.

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

(1) $(\Gamma \mathbf{A}, \mathbf{B})^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ su r

(2) $(\Gamma, \mathbf{A} \& \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{1}$ su r

Tesi

$\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ su r .

dim. Dall'ipotesi (1) per la definizione di verità della congiunzione segue che su r ogni proposizione in $\Gamma, \mathbf{A} \& \mathbf{B}$ è vera su r e dunque valgono sia $\Gamma^{\&} = \mathbf{1}$ che $\mathbf{A} \& \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r e di conseguenza su r valgono anche $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ da cui si conclude che vale $(\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{1}$ su r per definizione dell'operazione $()^{\&}$. Da ciò grazie all'ipotesi (1) per la definizione di verità dell'implicazione ne segue che $\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Quindi la condizione scorciatoia1 è verificata e per il lemma scorciatoia 9.13 la regola è valida.

9.10.7 Validità di \vee -S

Per mostrare la validità della regola

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \Delta} \vee\text{-S}$$

usiamo il lemma scorciatoia2 9.14 verificando che vale la condizione scorciatoia2 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

$$(1) (\Gamma, \mathbf{A})^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} = \mathbf{1} \text{ su } r$$

$$(2) (\Gamma, \mathbf{B})^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} = \mathbf{1} \text{ su } r$$

$$(3) (\Gamma, \mathbf{A} \vee \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{1} \text{ su } r$$

Tesi

$$\Delta^{\vee} = \mathbf{1} \text{ su } r.$$

dim. Dall'ipotesi (3) sappiamo che su r ogni proposizione in Γ è vera, ossia $\Gamma^{\&} = \mathbf{1}$ e così pure $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \mathbf{1}$.

Qui abbiamo 2 casi: o $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r .

Caso $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ su r . Ricordando che su r vale $\Gamma^{\&} = \mathbf{1}$ su r ne segue che vale $(\Gamma, \mathbf{A})^{\&} = \mathbf{1}$ su r e per l'ipotesi (1) e la verità dell'implicazione si ottiene che $\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ su r e dunque la tesi è verificata in questo caso.

Caso $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r . Ricordando che su r vale $\Gamma^{\&} = \mathbf{1}$ ne segue che $(\Gamma, \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{1}$ su r e per l'ipotesi (2) e la verità dell'implicazione si ottiene che $\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ su r e dunque la tesi è verificata anche in questo caso.

Quindi la condizione scorciatoia2 nel lemma scorciatoia2 9.14 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

9.10.8 Validità di \vee -D

La validità della regola

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \Delta} \vee\text{-D}$$

segue banalmente in quanto per definizione

$$((\mathbf{A}, \mathbf{B}), \Delta)^{\vee} = ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}), \Delta)^{\vee}$$

e quindi sequenti premessa e conclusione rappresentano esattamente la stessa proposizione

$$\Gamma^{\&} \rightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}), \Delta)^{\vee}$$

9.10.9 Validità di \neg -D

Per mostrare la validità della regola

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{A}, \Delta} \neg\text{-D}$$

usiamo il lemma scorciatoia1 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia1 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

$$(1) (\Gamma, \mathbf{A})^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} = \mathbf{1} \text{ su } r$$

$$(2) \Gamma^{\&} = \mathbf{1} \text{ su } r$$

Tesi

$$(\neg \mathbf{A}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1} \text{ su } r.$$

dim. Ragioniamo subito per casi visto che su r vale $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Caso $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ su r . Per l'ipotesi (2) in questo caso sappiamo che su r vale $(\Gamma, \mathbf{A})^{\&} = \mathbf{1}$ e dunque per l'ipotesi (1) e la definizione di verità dell'implicazione segue che si ottiene che $\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ su r e dunque $(\neg \mathbf{A}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1}$ su r per la definizione di verità della disgiunzione e quindi la tesi è verificata.

Caso $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ su r . In tal caso $\neg \mathbf{A} = \mathbf{1}$ e quindi di nuovo $\neg \mathbf{A} \vee \Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ su r e quindi pure in questo caso la tesi è verificata.

Quindi la condizione scorciatoia nel lemma scorciatoia 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

9.10.10 Validità di \neg -S

Per mostrare la validità della regola

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \Delta} \neg\text{-S}$$

usiamo il lemma scorciatoia 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

$$(1) \Gamma^{\&} \rightarrow (\mathbf{A}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1} \text{ su } r$$

$$(2) (\Gamma, \neg \mathbf{A})^{\&} = \mathbf{1} \text{ su } r$$

Tesi

$$\Delta^{\vee} = \mathbf{1} \text{ su } r.$$

dim. Dall'ipotesi (2) segue che ogni proposizione di $\Gamma, \neg \mathbf{A}$ è vera su r e dunque in particolare $\Gamma^{\&} = \mathbf{1}$ e $\neg \mathbf{A} = \mathbf{1}$ su r e per la definizione di verità della negazione sappiamo che $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ su r . Ora dall'ipotesi (1) per la definizione di verità dell'implicazione segue che $(\mathbf{A}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1}$ su r ovvero o $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ su r oppure un disgiunto di Δ è vero su r ossia $\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ su r . Ora siccome da quanto dedotto dall'ipotesi (2) non può essere che valga $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ perchè vale $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ su r ne segue che necessariamente vale $\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ che è la nostra tesi.

Quindi la condizione scorciatoia nel lemma scorciatoia 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

9.10.11 Validità di \rightarrow -D

Per mostrare la validità della regola

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \Delta} \rightarrow\text{-D}$$

usiamo il lemma scorciatoia 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

$$(1) (\Gamma, \mathbf{A})^\& \rightarrow (\mathbf{B}, \Delta)^\vee = 1 \text{ su } r$$

$$(2) \Gamma^\& = 1 \text{ su } r$$

Tesi

$$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \Delta)^\vee = 1 \text{ su } r.$$

dim. Procediamo subito per casi sul fatto che valga $\mathbf{A} = 1$ oppure $\mathbf{A} = 0$ su r .

Caso $\mathbf{A} = 1$ su r . In tal caso per l'ipotesi (2) ne segue che ogni proposizione di Γ, \mathbf{A} è vera su r e dunque per l'ipotesi (1) si ha che $(\mathbf{B}, \Delta)^\vee = 1$ su r e quindi o $\mathbf{B} = 1$ su r oppure una delle proposizioni di Δ è vera e abbiamo dunque due *sottocasi* da analizzare.

I sottocaso $\mathbf{B} = 1$ su r . In tal sottocaso si ottiene per la definizione di verità dell'implicazione che $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = 1$ su r e di conseguenza per la definizione di verità della disgiunzione vale $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \Delta)^\vee = 1$ su r che è la tesi.

II sottocaso $\Delta^\vee = 1$ su r . In tal sottocaso per la definizione di verità della disgiunzione vale pure che $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \Delta)^\vee = 1$ su r che è la tesi.

II caso $\mathbf{A} = 0$ su r . In tal caso $\neg \mathbf{A} = 1$ su r e quindi $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = 1$ su r e di conseguenza per la definizione di verità della disgiunzione vale $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \Delta)^\vee = 1$ che è la tesi.

Quindi la condizione scorciatoia1 nel lemma scorciatoia1 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

9.10.12 Validità per di \rightarrow -S

Per mostrare la validità della regola

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \Delta} \rightarrow -S$$

usiamo il lemma scorciatoia2 9.14 verificando che vale la condizione scorciatoia2 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

$$(1) \Gamma^\& \rightarrow (\mathbf{A}, \Delta)^\vee = 1 \text{ su } r$$

$$(2) (\Gamma, \mathbf{B})^\& \rightarrow \Delta^\vee = 1 \text{ su } r$$

$$(3) (\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^\& = 1 \text{ su } r$$

Tesi

$$\Delta^\vee = 1 \text{ su } r.$$

dim. Dall'ipotesi (3) sappiamo che ogni proposizione di $\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ è vera su r e dunque per la definizione di verità della congiunzione in particolare vale $\Gamma^\& = 1$ e pure $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = 1$ su r . Poi dall'ipotesi (1) sappiamo anche per la definizione di verità dell'implicazione che $(\mathbf{A}, \Delta)^\vee = 1$ su r .

Da $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = 1$ su r per la definizione di verità dell'implicazione abbiamo 2 casi: o $\mathbf{A} = 0$ oppure $\mathbf{B} = 1$ su r .

Caso $\mathbf{A} = 0$ su r . Sapendo che $(\mathbf{A}, \Delta)^\vee = 1$ su r e che quindi una delle proposizioni di \mathbf{A}, Δ è vera, ne segue che una delle proposizioni di Δ è vera su r perchè \mathbf{A} non lo è. Dunque $\Delta^\vee = 1$ su r che è la tesi.

Caso $\mathbf{B} = 1$ su r . Dal fatto che pure $\Gamma^\& = 1$ su r ne segue per definizione della verità della congiunzione sappiamo che $(\Gamma, \mathbf{B})^\& = 1$ su r da cui per l'ipotesi (2) e per la definizione di verità dell'implicazione segue che $\Delta^\vee = 1$ su r che è la tesi.

Quindi la condizione scorciatoia2 nel lemma scorciatoia2 9.14 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

Abbiamo qui concluso di dimostrare il teorema 9.15 di validità delle regole del calcolo per i sequenti della Logica Classica Proposizionale \mathbf{LC}_p .

Da questo teorema concludiamo che se un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **derivabile** allora è **valido** perchè la VALIDITÀ SCENDE \Downarrow dalle foglie di assiomi validi fino alla radice $\Gamma \vdash \Delta$:

Theorem 9.16 (VALIDITÀ sequenti) Se il sequente

$$pr_1, \dots, pr_n \vdash pr_k, \dots, pr_m$$

è *derivabile in \mathbf{LC}_p* , ovvero ammette una derivazione, allora

$$(((pr_1 \& pr_2 \& \dots \& pr_n \rightarrow (((pr_k \vee pr_{k+1}) \dots \vee pr_m$$

è una *tautologia*.

9.11 Esercizi sulla validità delle regole

1. la regola

$$\frac{C \vdash A, \Delta \quad C, B \vdash D}{C, A \rightarrow B \vdash D} \rightarrow *$$

è valida ??

Vedremo che la regola **NON** è **valida** usando la condizione scorciatoia2bis del lemma scorciatoia2 9.14.

Il primo passo da compiere per capire se la regola è valida è tentare di dimostrare la sua validità usando il lemma scorciatoia2 9.14 e verificando se vale la condizione scorciatoia2 di cui scriviamo ipotesi e tesi e un tentativo di dimostrazione.

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

(1) $C \rightarrow \Delta^\vee = 1$ su r

(2) $(C, B)^\& \rightarrow D = C \& B \rightarrow D = 1$ su r

(3) $(C, A \rightarrow B)^\& = C \& (A \rightarrow B) = 1$ su r

Tesi

$D = 1$ su r .

dim. Dall'ipotesi (3) sappiamo per la definizione di verità della congiunzione che vale $C = 1$ e pure $A \rightarrow B = 1$ su r . Poi dall'ipotesi (1) sappiamo per la definizione di verità dell'implicazione che vale $\Delta^\vee = 1$ su r . A questo punto però per usare l'ipotesi (2) conviene procedere per casi sul fatto che valga $B = 1$ su r oppure $B = 0$ su r .

Caso $B = 1$ su r . In tal caso per la definizione di verità della congiunzione con il fatto che $C = 1$ su r concludiamo che $(C, B)^\& = C \& B = 1$ su r e poi dall'ipotesi (1) per la definizione di verità dell'implicazione concludiamo che vale $D = 1$ su r che è la nostra tesi.

Caso $B = 0$ su r . In tal caso per la definizione di verità dell'implicazione dal fatto che vale $A \rightarrow B = 1$ su r ne segue che $A = 0$ su r . A questo punto però non sappiamo se vale $D = 1$ oppure $D = 0$ su r . Anzi nel caso in cui su r valga

$$D = 0 \quad C = 1 \quad A = 0 \quad B = 0$$

e si ponga al posto di Δ una proposizione atomica \mathbf{H} per cui vale $\mathbf{H} = \mathbf{1}$ allora abbiamo che $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r per la definizione di verità dell'implicazione e quindi per la definizione di verità della congiunzione risulta

$$(\mathbf{C}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{C} \& (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{1} \quad \text{su } r$$

ma anche che vale su r per la definizione di verità dell'implicazione

$$\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{H} = \mathbf{1}$$

Inoltre dato che $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ne segue che $(\mathbf{C}, \mathbf{B})^{\vee} = \mathbf{0}$ per la definizione di verità della congiunzione vale pure

$$\mathbf{C} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{1}$$

In sostanza ogni riga r per cui vale

$$\mathbf{D} = \mathbf{0} \quad \mathbf{C} = \mathbf{1} \quad \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \mathbf{H} = \mathbf{1}$$

soddisfa

$$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{H} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} \& (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{1} \quad \text{ma } \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

ovvero la condizione scorciatoia2bis in 9.14 è verificata e quindi per il lemma scorciatoia2 9.14 concludiamo che la regola $\rightarrow *$ **NON** è valida.

Però per alcune sostituzioni di Δ si trovano istanze della regola che sono valide.

Per esempio se $\Delta \equiv D$ si trova un'istanza della regola $\rightarrow -S$ che è valida.

Pure nel caso che Δ sia la lista vuota ovvero nel caso

$$\frac{\mathbf{C} \vdash \mathbf{A} \quad \mathbf{C}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{D}}{\mathbf{C}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \mathbf{D}} \rightarrow *1$$

troviamo una regola valida e possiamo dimostrare la sua validità usando il lemma scorciatoia2 9.14 verificando che vale la condizione scorciatoia2 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

(1) $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{1}$ su r

(2) $\mathbf{C}, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{1}$ su r

(3) $(\mathbf{C}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{C} \& (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{1}$ su r

Tesi

$\mathbf{D} = \mathbf{1}$ su r .

dim. Dall'ipotesi (3) sappiamo per la definizione di verità della congiunzione che vale $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ e pure $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r . Poi dall'ipotesi (1) sappiamo anche per la definizione di verità dell'implicazione che $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ su r e quindi dal fatto che $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r concludiamo subito che $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r . Da $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r per la definizione di verità della congiunzione segue che $\mathbf{C} \& \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r e per l'ipotesi (2) e per la definizione di verità dell'implicazione segue anche che $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Quindi la condizione scorciatoia2 nel lemma scorciatoia2 9.14 è verificata e per il lemma si conclude che la regola $\rightarrow *$ avente al posto di Δ la lista vuota 'è valida.

2. la regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee -D_1$$

è valida ??

9.12 Esercizi su formalizzazione in sequente e come regola e loro validità

1. Formalizzare in sequente

Non mangio gli spinaci.
Se mi piacessero gli spinaci li mangerei.
 Non mi piacciono gli spinaci.

utilizzando:

M=mangio gli spinaci

P=mi piacciono gli spinaci

e provare se è derivabile in LC_p il sequente ottenuto.

Nel caso positivo il sequente è una tautologia, perchè??

Soluzione:

L'asserzione si formalizza ad esempio nel sequente

$$\neg M, P \rightarrow M \vdash \neg P$$

che è una tautologia per il teorema 9.16 perchè si deriva ad esempio in tal modo

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{\neg M, P \vdash P} \quad \frac{\neg M \vdash \neg P, P}{\neg M \vdash \neg P, P} \neg\text{-D} \quad \frac{\frac{\text{ax-id}}{M \vdash M, \neg P} \quad \frac{M, \neg M \vdash \neg P}{M, \neg M \vdash \neg P} \neg\text{-S}}{\neg M \vdash P, \neg P} \text{sc}_{dx} \quad \frac{M, \neg M \vdash \neg P}{\neg M, M \vdash \neg P} \text{sc}_{sx}}{\neg M, P \rightarrow M \vdash \neg P} \rightarrow\text{-S}$$

2. Formalizzare in regola la seguente

Ad Alice piacciono gli spinaci \vdash Alice mangia gli spinaci
 Alice non mangia gli spinaci \vdash Ad Alice non piacciono gli spinaci

utilizzando:

S= Alice mangia gli spinaci

P=Ad Alice piacciono gli spinaci

e stabilire quale è la regola e la proposizione formale corrispondente alla validità della regola e infine stabilire se la regola è valida.

Soluzioni:

- (a) la proposizione corrispondente alla validità della regola è

$$(P \rightarrow S) \rightarrow (\neg S \rightarrow \neg P)$$

- (b) la regola ottenuta è:

$$\frac{P \vdash S}{\neg S \vdash \neg P}$$

Per mostrare la validità della regola usiamo il lemma scorciatoia 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

(1) $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{S} = \mathbf{1}$ su r

(2) $\neg \mathbf{S} = \mathbf{1}$ su r

Tesi

$\neg \mathbf{P} = \mathbf{1}$ su r .

Dall'ipotesi (2) ne segue che $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ su r e da ciò unito all'ipotesi (1) per la definizione di verità dell'implicazione ne segue che $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ su r e quindi $\neg \mathbf{P} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Dunque la condizione scorciatoia nel lemma scorciatoia 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

9.13 Correttezza della procedura di decisione per sequenti in \mathbf{LC}_p

Mostriamo qui per bene come mai le procedure di decisione in sezione 9.8 e quella in sezione 9.4.1 sono corrette.

L'esistenza delle procedure di decisione si basa essenzialmente su due fatti:

- le regole di \mathbf{LC}_p sono regole SICURE, ovvero oltre ad essere valide, le loro regole INVERSE sono pure valide;
- tutte le regole di \mathbf{LC}_p eccetto quelle degli scambi a sx e a dx, DIMINUISCONO di COMPLESSITÀ dal BASSO verso l'ALTO.

Procediamo quindi ad enunciare la nozione di regola inversa e poi di regola sicura.

Def. 9.17 (regola inversa ad una premessa) La regola **inversa** di una regola del tipo

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \Delta'} *$$

è la seguente

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta} * - \mathbf{inv}$$

Def. 9.18 (regola inversa ad due premesse) Le regole **inverse** di una regola del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma' \vdash \Delta'} *$$

sono DUE e sono le seguenti

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1} * - \mathbf{inv1} \quad \frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} * - \mathbf{inv2}$$

Def. 9.19 (regola SICURA) Una regola si dice **SICURA** se sia lei che tutte le sue inverse sono valide rispetto alla semantica delle tabelle di verità.

Ora osserviamo che tutte le regole di \mathbf{LC}_p sono sicure ovvero le loro inverse sono valide:

Theorem 9.20 (validità inverse di \mathbf{LC}_p) TUTTE le INVERSE delle regole di \mathbf{LC}_p sono valide.

Diamo ora di seguito solo la dimostrazione di validità delle inverse delle regole dell'implicazione lasciando di dimostrare per esercizio la validità delle inverse delle altre regole di \mathbf{LC}_p .

9.13.1 Validità della regola inversa di \rightarrow -D

La regola inversa della regola \rightarrow -D è la regola

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, \Delta} \rightarrow\text{-D} - \text{inv}$$

e per mostrare la sua validità usiamo il lemma scorciatoia 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

(1) $\Gamma^{\&} \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1}$ su r

(2) $(\Gamma, \mathbf{A})^{\&} = \mathbf{1}$ su r

Tesi

$(\mathbf{B}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1}$ su r .

dim. Dall'ipotesi (2) per la verità della congiunzione sappiamo che vale sia $\Gamma^{\&} = \mathbf{1}$ che $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ su r . Poi da $\Gamma^{\&} = \mathbf{1}$ su r e l'ipotesi (1) per la definizione di verità dell'implicazione otteniamo che vale $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1}$. Qui abbiamo 2 casi: su r o vale $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ oppure $\Delta = \mathbf{1}$.

Caso $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r . In questo caso dal fatto che vale $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ su r si ottiene per la definizione di verità dell'implicazione che vale $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r e dunque ne segue per la definizione di verità della disgiunzione che vale pure $(\mathbf{B}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la nostra tesi.

Caso $\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ su r . In tal caso risulta subito per la definizione di verità della disgiunzione che vale pure $(\mathbf{B}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la nostra tesi.

Quindi la condizione scorciatoia nel lemma scorciatoia 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che l'inversa della regola \rightarrow -D è **valida**.

9.13.2 Validità delle regole inverse di \rightarrow -S

Una inversa della regola \rightarrow -S è la regola

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta} \rightarrow\text{-S} - \text{inv}_1$$

e per mostrare la sua validità usiamo il lemma scorciatoia 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

(1) $(\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ su r

(2) $\Gamma^{\&} = \mathbf{1}$ su r

Tesi

$(\mathbf{A}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1}$ su r .

dim. Procediamo subito per casi sul fatto che su r valga o $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Caso $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ su r . Per la definizione di verità della disgiunzione vale $(\mathbf{A}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Caso $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ su r . Per la definizione di verità della implicazione vale $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r e con ciò unito all'ipotesi (2) per la definizione di verità della congiunzione otteniamo che vale $(\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{1}$ su r e da questo unito all'ipotesi (1) per la definizione di verità della implicazione concludiamo che vale $\Delta^{\vee} = \mathbf{1}$ da cui per la definizione di verità della disgiunzione segue che vale $(\mathbf{A}, \Delta)^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Quindi la condizione scorciatoia nel lemma scorciatoia 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che la regola \rightarrow -S - **inv**₁ è **valida**.

L'altra inversa della regola $\rightarrow -S$ è la regola

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{B} \vdash \Delta} \rightarrow -S - \text{inv}_2$$

e per mostrare la sua validità usiamo il lemma scorciatoia 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

(1) $(\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^\& \rightarrow \Delta^\vee = \mathbf{1}$ su r

(2) $(\Gamma, \mathbf{B})^\& = \mathbf{1}$ su r

Tesi

$\Delta^\vee = \mathbf{1}$ su r .

dim. Dall'ipotesi (2) per la definizione di verità della congiunzione otteniamo che vale sia $\Gamma^\& = \mathbf{1}$ che $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r . Ora da $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r per la definizione di verità della implicazione otteniamo che vale pure $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r che assieme a $\Gamma^\& = \mathbf{1}$ ci permette di concludere che vale $(\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^\& = \mathbf{1}$ su r per la definizione di verità della congiunzione. Ora da ciò e dall'ipotesi (1) per la definizione di verità della implicazione otteniamo che vale $\Delta^\vee = \mathbf{1}$ che è la nostra tesi.

Quindi la condizione scorciatoia nel lemma scorciatoia 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che la regola $\rightarrow -S - \text{inv}_2$ è valida.

9.13.3 Sicurezza delle regole di \mathbf{LC}_p

Dalla proposizione 9.12 assieme ai teoremi 9.15 e 9.20 deduciamo che le regole di \mathbf{LC}_p sono tutte sicure:

Corollary 9.21 (sicurezza regole \mathbf{LC}_p) **TUTTE** le regole di \mathbf{LC}_p e le loro **INVERSE** sono **valide** rispetto alla semantica delle tabelle di verità, ovvero sono regole **SICURE**.

Concludiamo quindi che

nelle regole del calcolo \mathbf{LC}_p la **VERITÀ** su una **RIGA SCENDE** \Downarrow dall'alto verso il basso al seguente radice se **TUTTE** le FOGLIE sono **VERE** sulla riga e la **VERITÀ** anche **SALE** \Uparrow su una riga dal basso verso l'alto dal seguente radice verso ogni **SINGOLA FOGLIA**.

Inoltre dal fatto che in un albero la verità per riga scende fino alla radice se tutte le foglie sono vere sulla riga, e dal fatto che la verità su una riga sale dalla radice fino a ciascuna foglia concludiamo che:

Proposition 9.22 (comportamento della falsità) Vale la seguente proprietà sugli alberi costruiti con regole di \mathbf{LC}_p ma anche di sole regole sicure:

in un albero fatto SOLO di regole di \mathbf{LC}_p
(con foglie che non sono necessariamente assiomi)

la **FALSITÀ** su una riga **SCENDE** \Downarrow da UNA **SINGOLA** foglia
fino alla RADICE $\Gamma \vdash \Delta$

Dim. Se dato un albero di regole di \mathbf{LC}_p una foglia è falsa una riga r allora anche il sequente radice lo deve essere perchè, se invece il sequente radice fosse vero su tal riga, allora per il fatto che le inverse delle regole sono valide la verità sulla riga r sale verso ciascuna foglia compresa quella che si sa essere falsa su r , il che è assurdo e dunque si conclude che pure il sequente radice è falso su r senza dubbio. Quindi la falsità su una riga scende da una foglia alla radice.

9.13.4 Esercizi su validità e sicurezza delle regole dei sequenti

1. La regola

$$\frac{\Gamma, A, \Sigma \vdash \Delta \quad \Gamma, B, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B, \Sigma \vdash \Delta} \vee-S$$

è sicura?

ovvero lei è valida assieme alle sue inverse

$$\frac{\Gamma, A \vee B, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, A, \Sigma \vdash \Delta} \vee-S - inv_1 \quad \frac{\Gamma, A \vee B, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, B, \Sigma \vdash \Delta} \vee-S - inv_2$$

?

2. La regola

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&-re_1$$

è sicura?

Soluzione: la regola è valida e la sua dimostrazione è analoga a quella della validità per la regola $\&-S$.

Invece la sua inversa

$$\frac{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \&-re_1 - inv$$

NON è valida.

Il primo passo da compiere per capire se la regola è valida è tentare di dimostrare la sua validità usando il lemma scorciatoia 9.13 e verificando che vale la condizione scorciatoia di cui scriviamo ipotesi e tesi e un tentativo di dimostrazione.

Ipotesi

sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono

(1) $(\Gamma, A \& B) \&\rightarrow \Delta^\vee = 1$ su r

(2) $(\Gamma, A) \& = 1$ su r

Tesi

$\Delta^\vee = 1$ su r .

dim. Dall'ipotesi (2) per la definizione di verità della congiunzione sappiamo che valgono sia $\Gamma^{\&} = 1$ su r che $A = 1$ su r .

A questo punto procediamo per casi sul fatto che su r valga o $B = 1$ oppure $B = 0$ su r .

Caso $B = 1$ su r . In tal caso per la definizione di verità della congiunzione sappiamo che vale $A \& B = 1$ su r e dunque dal fatto che vale $\Gamma^{\&} = 1$ su r otteniamo che vale $(\Gamma, A \& B)^{\&} = 1$ su r e infine da questo e dall'ipotesi (1) per la definizione di verità dell'implicazione ne segue che $\Delta^{\vee} = 1$ su r che è la nostra tesi.

$B = 0$ su r . In tal caso si osservi che $A \& B = 0$ su r e pure che $(\Gamma, A \& B)^{\&} = 0$ su r per la definizione di verità della congiunzione. Dunque per la definizione di verità dell'implicazione ne segue che su r

$$(\Gamma, A \& B)^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} = 1$$

A questo punto però non riusciamo a dedurre nulla del fatto che valga $\Delta^{\vee} = 1$ o meno. Anzi potrebbe proprio accadere che valga $\Delta^{\vee} = 0$ su r .

A questo punto conviene osservare che sostituendo Γ con G e Δ con H si ottiene l'istanza della regola

$$\frac{G, A \& B \vdash H}{G, A \vdash H} \&-re_1 - inv$$

e ora sulla riga $G = A = 1$ e $B = H = 0$ si osserva che per la definizione di verità della congiunzione

$$G \& A = 1 \quad e \quad A \& B = 0$$

Dunque sempre per la definizione di verità della congiunzione vale $(G, A \& B)^{\&} = 0$ su tale riga e quindi si ottiene che

$$(G, A \& B)^{\&} \rightarrow H = G \& (A \& B) \rightarrow H = 1$$

su tale riga per la definizione di verità della congiunzione.

In sostanza ogni riga r per cui vale

$$G = A = 1 \quad e \quad B = H = 0$$

soddisfa

$$(G, A \& B)^{\&} \rightarrow H = 1 \quad e \quad G \& A = 1 \quad \text{ma } H = 0$$

ovvero soddisfa la condizione scorciatoia1bis in 9.13 e quindi per il lemma scorciatoia1 9.13 concludiamo che la regola $\&-re_1 - inv$ **NON è valida**.

La riga che falsifica l'istanza della regola $\&-re_1 - inv$ sopra suggerisce che anche l'istanza della regola $\&-re_1 - inv$

$$\frac{tt \& \perp \vdash \perp}{tt \vdash \perp} \&-re_1 - inv$$

NON è valida perchè ha la premessa $tt \& \perp \rightarrow \perp$ che è una tautologia mentre la conclusione $tt \rightarrow \perp$ NON è chiaramente una tautologia. Dunque la regola non conserva l'essere tautologia della sua premessa e per la proposizione 9.12 la regola $\&-re_1 - inv$ NON è valida e quindi la regola $\&-re_1$ è **valida ma NON sicura**.

3. La regola

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \rightarrow -D$$

è sicura?

9.13.5 Perchè la procedura di decisione derivabilità/validità di un sequente è corretta?

Abbiamo già anticipato che la correttezza della procedura di decisione 9.4.1 della validità tautologica di un sequente proposizionale è conseguenza del fatto che le regole di \mathbf{LC}_p sono sicure, oltrechè del fatto che tali regole (escluso gli scambi a sx e a dx) DIMINUISCONO strettamente di COMPLESSITÀ dal BASSO verso l'ALTO. Vediamo in dettaglio perchè la procedura è corretta.

Se la procedura di sezione 9.4.1 applicata al sequente $\Gamma \vdash \nabla$ dice che questo è una **tautologia** è perchè è **derivabile** ovvero abbiamo costruito un albero di derivazione con radice $\Gamma \vdash \nabla$. Ora avendo a disposizione un'albero di derivazione, il sequente è certamente una **tautologia** ovvero la proposizione che lo rappresenta

$$\Gamma \& \rightarrow \nabla \vee$$

è una **tautologia** per il teorema ?? di validità degli assiomi e regole di \mathbf{LC}_p in quanto la validità scende dalle foglie che sono assiomi, e quindi tautologie, fino alla radice $\Gamma \vdash \nabla$.

Se la procedura invece dice che $\Gamma \vdash \nabla$ **NON** è una **tautologia** è perchè si trova un albero con il sequente come radice in cui vi è una foglia, ad esempio

$$\mathbf{V}_{i_1}, \dots, \mathbf{V}_{i_n} \vdash \mathbf{V}_{k_1}, \dots, \mathbf{V}_{k_m}$$

(o degli altri tipi elencati in 9.4.2) che NON è assioma e fatta solo di variabili proposizionali con nessuna variabile che compare sia a destra del segno \vdash che a sinistra (altrimenti la foglia sarebbe un assioma!). Dunque mettendo a **1** tutte le variabili **premesse** e a **0** tutte le **conclusioni** si trova che la tabella di verità di

$$(\mathbf{V}_{i_1} \& \mathbf{V}_{i_2}) \dots \& \mathbf{V}_{i_n} \rightarrow (\mathbf{V}_{k_1} \vee \mathbf{V}_{k_2}) \dots \vee \mathbf{V}_{k_m}$$

risulta **0** in corrispondenza di ogni riga con tali valori alle variabili proposizionali indicate. Ora, sicuramente il sequente radice $\Gamma \vdash \nabla$ è pure falso sulla riga scelta per la proposizione 9.22. Ripetendo in questo caso la dimostrazione della proposizione si avrebbe che se $\Gamma \vdash \nabla$ fosse **vero** sulla riga scelta per **conservazione della VERITÀ su una riga** delle **regole INVERSE** sarebbero veri sulla riga in questione TUTTI i sequenti lungo il ramo che finisce nella foglia $\mathbf{V}_{i_1}, \dots, \mathbf{V}_{i_n} \vdash \mathbf{V}_{k_1}, \dots, \mathbf{V}_{k_m}$ compresa lei che invece NON lo è. Dunque, il sequente $\Gamma \vdash \nabla$ **falso sulla riga scelta** e quindi **NON** è una **tautologia**.

Si noti inoltre che in questo caso il sequente **NON** è certamente **derivabile** con altra derivazione perchè se lo fosse per la validità delle regole ovvero per il teorema 9.16 sarebbe invece una tautologia mentre abbiamo stabilito che non lo è.

Si osservi infine che la procedura di decisione 9.4.1 **TERMINA SEMPRE** su ogni sequente se applichiamo le regole di scambio solo quando è necessario per poter poi applicare la regola di un connettivo in quanto le regole dei connettivi DIMINUISCONO la COMPLESSITÀ dei sequenti coinvolti e si arriva ad un punto in cui non abbiamo più proposizioni composte e quindi non possiamo più applicare regole di connettivi (eventualmente precedute dall'applicazione di regole di scambio).

Esempio per verificare correttezza procedura decisione

Nell'esempio di sezione 9.8.1 abbiamo applicato la procedura di decisione 9.4.1 al sequente $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ e costruito il seguente albero che NON è di derivazione

$$\frac{\frac{\frac{Q \vdash P, R \quad Q, Q \vdash R}{Q, P \rightarrow Q \vdash R} \rightarrow -S}{P \rightarrow Q, Q \vdash R} \text{sc}_{sx}}{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow R} \rightarrow -D$$

Secondo la procedura basta trovare una riga per cui una foglia risulti falsa perchè il sequente radice risulti falso sulla stessa riga. Nell'esempio abbiamo scelto di falsificare la foglia di sinistra ponendo

$\mathbf{Q} = 1$ e $\mathbf{P} = \mathbf{R} = 0$ e possiamo osservare che la falsità scende da questa foglia fino alla radice attraverso tutti i sequenti del ramo che parte dalla radice fino alla foglia considerata:

$$\frac{\text{fals.su riga } \mathbf{Q} = 1 \quad \mathbf{P} = \mathbf{R} = 0}{\frac{Q \vdash P, R \quad Q, Q \vdash R}{\frac{Q, P \rightarrow Q \vdash R}{P \rightarrow Q, Q \vdash R} \downarrow \text{fals.su riga}} \downarrow \text{fals.su riga} \downarrow \text{fals.su riga}$$

Analogamente possiamo falsificare la foglia di destra per far scendere la falsità sulla riga

$$\frac{\text{fals.su riga } \mathbf{Q} = 1 \quad \mathbf{R} = 0 \quad \mathbf{P} = \text{a piacere}}{Q \vdash P, R \quad Q, Q \vdash R} \downarrow \text{fals.su riga} \downarrow \text{fals.su riga} \downarrow \text{fals.su riga}$$

Si noti che $\mathbf{Q} = 1$ e $\mathbf{R} = 0$ falsifica la foglia di sinistra ed anche la radice (oltrechè tutte i sequenti del ramo che parte dalla radice fino alla foglia considerata).

Si osservi inoltre che se poniamo $\mathbf{P} = 1$ e $\mathbf{R} = 1$ e \mathbf{Q} con valore a piacere si ottiene che il sequente radice è vero su tale riga perchè sono vere entrambe le foglie dell'albero sopra ricordando che le regole del calcolo \mathbf{LC}_p sono tutte valide.

9.13.6 Cosa rappresenta in pratica una derivazione?

Ora vediamo in alcuni esempi il significato di un'albero di derivazione esplicitando la semantica dei suoi sequenti e delle sue regole.

Significato della derivazione rispetto a validità dei sequenti coinvolti. Ricopiamo qui l'albero di derivazione dell'esempio in sezione 9.6.1

$$\frac{\text{ax-id}}{Q \vdash Q} \frac{}{Q, \neg Q \vdash} \neg\text{-S} \frac{}{Q \vdash \neg\neg Q} \neg\text{-D} \frac{}{\vdash Q \rightarrow \neg\neg Q} \rightarrow\text{-D}$$

Grazie a questo albero di derivazione abbiamo concluso che la proposizione $\vdash Q \rightarrow \neg\neg Q$ è **valida**.

Notiamo ora come la VALIDITÀ dei sequenti coinvolti SCENDA \downarrow dall'assioma identità fino al sequente radice.

Infatti osserviamo che

$$Q \rightarrow \neg\neg Q$$

è una tautologia per la **validità delle regole all'ingiù** \downarrow stabilita nel teorema di validità delle regole 9.15 assieme al fatto che regole valide conservano la validità tautologica dei sequenti come osservato in proposizione 9.12.

Quindi sapendo che

$$Q \rightarrow Q$$

è banalmente una tautologia, dalla validità della regola $\neg\text{-S}$ sappiamo che pure

$$Q \& \neg Q \rightarrow \perp$$

è una tautologia e dalla validità della regola $\neg\text{-D}$ otteniamo che pure

$$\mathbf{Q} \rightarrow \neg\neg\mathbf{Q}$$

è una tautologia e infine per la validità della regola $\rightarrow\text{-D}$ concludiamo che pure

$$\mathbf{tt} \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \neg\neg\mathbf{Q})$$

è una tautologia.

9.13.7 Significato della derivazione con regole sicure in termini di proposizioni

Si noti che applicando la proposizione 9.10 al significato di regola sicura ad una premessa si ottiene la seguente caratterizzazione:

Proposition 9.23 Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

è *sicura* sse la proposizione

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \leftrightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$$

è vera su ogni riga della sua tabella, e quindi è una tautologia.

Analogamente applicando la proposizione 9.11 al significato di regola sicura a due premesse si ottiene la seguente caratterizzazione:

Proposition 9.24 Una regola del calcolo dei sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

è *sicura* sse la proposizione

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \& (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) \leftrightarrow (\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})$$

è vera su ogni riga della sua tabella, e quindi è una tautologia.

Ora applichiamo questa caratterizzazione delle regole sicure per analizzare una derivazione con regole di \mathbf{LC}_p concentrandoci sul fatto che sono sicure e vedendo in concreto cos'è una derivazione rispetto alla semantica dei sequenti coinvolti.

Riprendiamo l'esempio di sezione 8, ovvero il problema di stabilire se

$$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$$

è una tautologia. A tal scopo applichiamo la procedura di decisione al sequente

$$\vdash (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$$

e otteniamo la seguente derivazione

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ \hline \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{A} \vdash \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}, \mathbf{B} \quad \rightarrow\text{-D} \\ \hline \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \quad \text{sc}_{\text{sx}} \\ \hline \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \quad \rightarrow\text{-D} \\ \hline \vdash (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}) \quad \vee\text{-D} \end{array}$$

Siccome sappiamo che le regole adoperate nella derivazione sopra sono sicure, ovvero conservano la verità dei sequenti su una riga sia da TUTTE le foglie fino alla radice ma anche dalla radice fino a CIASCUNA foglia, esplicitiamo il significato delle regole e dei sequenti coinvolti tramite la caratterizzazione delle regole sicure in proposizione 9.23.

Concludiamo che la derivazione sopra non fa altro che operare le seguenti equivalenze di proposizioni implicative

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{A} \ \& \ \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \\
 & \quad \Updownarrow \\
 & \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}) \vee \mathbf{B} \\
 & \quad \Updownarrow \\
 & \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}) \\
 & \quad \Updownarrow \\
 & \mathbf{tt} \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})
 \end{aligned}$$

e l'ultima proposizione è equivalente ad $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$ sapendo che la proposizione $(\mathbf{tt} \rightarrow \mathbf{pr})$ è equivalente a \mathbf{pr} per una qualsiasi proposizione formale, ovvero

$$(\mathbf{tt} \rightarrow \mathbf{pr}) \leftrightarrow \mathbf{pr}$$

è una tautologia.

In pratica la derivazione mostrata di $\vdash (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$, come ogni altra derivazione di tal sequente, opera una STRATEGIA di RIDUZIONE ad una tautologia a partire dagli assiomi attraverso una serie di equivalenze tra proposizioni che risultano tutte tautologie per il fatto che le regole del calcolo sono valide. Questa strategia che consente di decidere la validità di una proposizione attraverso la costruzione di una derivazione è migliore rispetto a quelle in sezione 8 perchè termina sempre con una risposta ed è eseguibile in modo automatico da un computer!

9.13.8 Metodo alternativo per decidere se un sequente è una tautologia o un'opinione o un paradosso

Illustriamo qui un **modo alternativo** per vedere se un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è una tautologia o un'opinione o un paradosso. Questo metodo consiste nel procedere come segue.

1. Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si costruisce un albero di regole dal basso verso l'alto ponendo il sequente come radice fino ad arrivare ad avere foglie che sono o assiomi del calcolo \mathbf{LC}_P oppure sono sequenti che non sono assiomi e sono senza proposizioni composte;
2. se l'albero ottenuto è di derivazione allora il sequente è una tautologia altrimenti è NON valido;
3. se il sequente è NON valido per stabilire se è un'opinione si cerchi *un'assegnazione delle variabili proposizionali del sequente, ovvero una riga della tabella del sequente radice, che rende TUTTE VERE le FOGLIE dell'albero*. Se **una tal riga esiste** allora il sequente di partenza è un'opinione. Se invece **si dimostra che una tal riga non esiste** allora il sequente di partenza è un **paradosso**.

Per mostrare un esempio di uso di tale procedura riprendiamo l'esempio in sezione 9.8.1 dove abbiamo concluso che il sequente $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$ NON è valido. In quell'esempio abbiamo stabilito anche una riga in cui il sequente è falso e abbiamo concluso che è pure soddisfacibile mostrando una riga su cui è vero dopo aver applicato l'intera procedura 9.4.1.

Ora riproduciamo l'albero (che non è di derivazione!) costruito per decidere la NON validità del sequente che è pure fatto di foglie con sole variabili proposizionali

$$\begin{array}{c}
 \frac{Q \vdash P, P \quad Q, Q \vdash P}{Q, P \rightarrow Q \vdash P} \rightarrow -S \\
 \frac{P \rightarrow Q, Q \vdash P}{P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P} \text{sc}_{sx} \rightarrow -D
 \end{array}$$

ove vi sono presenti due foglie NON assiomi. Si vede che su una riga in cui $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ (con P designato a piacere) le due foglie diventano soddisfacibili e quindi per il teorema di conservazione della verità per riga 9.15 il sequente radice $P \rightarrow Q \vdash Q \rightarrow P$ diventa **soddisfacibile** perchè vero su ogni riga con $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

9.13.9 Completezza calcolo dei sequenti

La **correttezza** della procedura di decisione per sequenti in \mathbf{LC}_p implica il seguente teorema di **completezza del calcolo \mathbf{LC}_p** rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità:

Theorem 9.25 (validità e completezza classica) *Il concetto di DERIVABILITÀ in \mathbf{LC}_p coincide con quello di VALIDITÀ CLASSICA delle tabelle di verità, ovvero il sequente $\mathbf{pr}_1, \dots, \mathbf{pr}_n \vdash \mathbf{pr}_k, \dots, \mathbf{pr}_m$ è derivabile in \mathbf{LC}_p sse $((\mathbf{pr}_1 \& \mathbf{pr}_2 \& \dots) \& \mathbf{pr}_n \rightarrow (((\mathbf{pr}_k \vee \mathbf{pr}_{k+1}) \dots) \vee \mathbf{pr}_m)$ è una tautologia.*

Dimostrazione: Per il teorema di validità dei sequenti 9.16 se il sequente è derivabile allora è valido. Per mostrare il viceversa procediamo come segue: se $((\mathbf{pr}_1 \& \mathbf{pr}_2) \& \dots \mathbf{pr}_n \rightarrow (((\mathbf{pr}_k \vee \mathbf{pr}_{k+1}) \dots) \vee \mathbf{pr}_m)$ è una tautologia allora applichiamo la procedura di decisione 9.8 al sequente

$$\mathbf{pr}_1, \dots, \mathbf{pr}_n \vdash \mathbf{pr}_k, \dots, \mathbf{pr}_m$$

che sappiamo rappresentare la proposizione sopra. Tra l'altro per la proposizione 9.6 è indifferente derivare il sequente $\mathbf{pr}_1, \dots, \mathbf{pr}_n \vdash \mathbf{pr}_k, \dots, \mathbf{pr}_m$ oppure il sequente

$$\vdash (((\mathbf{pr}_1 \& \mathbf{pr}_2) \& \dots \mathbf{pr}_n \rightarrow (((\mathbf{pr}_k \vee \mathbf{pr}_{k+1}) \dots) \vee \mathbf{pr}_m)$$

Ora il sequente $\mathbf{pr}_1, \dots, \mathbf{pr}_n \vdash \mathbf{pr}_k, \dots, \mathbf{pr}_m$ deve risultare derivabile perchè se non lo fosse e fosse NON valido otterremo per la procedura 9.8 una riga che assegna $\mathbf{0}$ al sequente sopra e quindi alla proposizione $((\mathbf{pr}_1 \& \mathbf{pr}_2) \& \dots \mathbf{pr}_n \rightarrow (((\mathbf{pr}_k \vee \mathbf{pr}_{k+1}) \dots) \vee \mathbf{pr}_m)$ che lui rappresenta contro l'ipotesi che questa sia una tautologia.

Ora diamo la definizione di teorema all'interno del calcolo dei sequenti \mathbf{LC}_p :

Def. Una proposizione \mathbf{pr} si dice *teorema* della logica classica proposizionale \mathbf{LC}_p se $\vdash \mathbf{pr}$ è derivabile nel calcolo \mathbf{LC}_p .

Quindi, dal teorema 9.25 deduciamo che:

teoremi in \mathbf{LC}_p $=$ tautologie classiche
--

Infine osserviamo che il calcolo \mathbf{LC}_p NON può derivare il falso ovvero è, come si dice usualmente, *consistente*:

Theorem 9.26 (consistenza calcolo proposizionale classico) Il calcolo \mathbf{LC}_p NON può derivare il falso ovvero $\vdash \perp$ NON è derivabile in \mathbf{LC}_p .

Dim.: se $\vdash \perp$ fosse derivabile in \mathbf{LC}_p allora sarebbe una **tautologia** per il teorema di validità dei sequenti derivabili in sezione 9.16 mentre la tabella di \perp è la funzione costante $\mathbf{0}$ e quindi $\vdash \perp$ NON è derivabile.

9.13.10 Decidibilità del calcolo \mathbf{LC}_p

Def. Un calcolo si dice **DECIDIBILE** se esiste un **programma** (=algoritmo) che permette di decidere se una proposizione \mathbf{pr} è **teorema del calcolo** (ovvero $\vdash \mathbf{pr}$ è derivabile nel calcolo)

Il calcolo dei sequenti per la Logica Classica Proposizionale \mathbf{LC}_p è DECIDIBILE perchè esiste una procedura di decisione per le sue proposizioni descritta in sezione 9.6, che ricordiamo dipende ESSENZIALMENTE dal fatto che

1. il calcolo \mathbf{LC}_p ha tutte REGOLE SICURE;
2. le regole di \mathbf{LC}_p (escluso gli scambi) **diminuiscono in COMPLESSITÀ** \uparrow dal BASSO verso l'ALTO;
3. gli scambi sono applicati solo quando necessario.

In particolare la diminuzione della complessità dei sequenti dal basso verso l'alto nelle regole dei connettivi di \mathbf{LC}_p garantisce la terminazione della procedura di decisione della derivabilità di un sequente in sezione 9.8 per ogni sequente a cui si applica. Invece la presenza di regole sicure garantisce la correttezza della procedura.

Concludiamo osservando che, grazie al fatto che tutte regole di \mathbf{LC}_p sono sicure *nel cercare una derivazione di un sequente in \mathbf{LC}_p si può procedere scegliendo a piacere le regole dei connettivi da applicare*, usando le regole di scambio solo se necessario per poter poi applicare la regola di un connettivo, fino ad arrivare a foglie che sono assiomi oppure sequenti che non sono assiomi e hanno sole variabili proposizionali. Il fatto che la complessità diminuisce strettamente ad ogni applicazione di una regola di un connettivo garantisce che tale processo di ricerca termina sempre in un albero che è o di derivazione oppure consente di stabilire che il sequente è NON valido producendo una riga che falsifica una foglia non assioma e quindi il sequente radice per il fatto che le regole del calcolo \mathbf{LC}_p sono tutte sicure.

9.13.11 NON esiste procedura di decisione con regole NON sicure

Se al posto di

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&-S$$

adottassimo le regole del libro del prof. Sambin

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&-re_1 \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&-re_2$$

potremmo costruire alberi che *NON sono alberi di derivazione* con foglie contenente solo variabili proposizionali e NON assiomi che però hanno *come radice un sequente che è una tautologia*. Ciò significa che con regole NON sicure *non possiamo necessariamente avere una procedura di decisione come quella di sezione 9.4.1* che ci permette di concludere che un sequente NON è valido semplicemente dal fatto che NON abbiamo costruito un albero di derivazione una volta che siamo arrivati a delle foglie con solo variabili proposizionali e che NON sono assiomi. Vediamo bene perchè con un esempio.

Ora sappiamo che $A \& (B \vee C) \vdash B \vee C$ è certamente una tautologia rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità (nel dubbio si applichi la procedura di sezione 9.4.1!). Ma se usiamo il calcolo in cui abbiamo rimpiazziamo la regola $\&-re_1$ e $\&-re_2$ al posto di $\&-S$ per costruire alberi, possiamo costruire questo albero

$$\frac{\frac{A \vdash B, C}{A \vdash B \vee C} \&-re_1}{A \& (B \vee C) \vdash B \vee C} \&-re_1$$

con una foglia non assioma e fatta solo di variabili proposizionali. Però NON possiamo concludere che la radice $A \& (B \vee C) \vdash B \vee C$ NON è valida!

In realtà in questo calcolo modificato con regole NON sicure possiamo derivare il sequente se applichiamo $\&-re_2$ come segue

$$\frac{\text{ax-id} \quad \mathbf{B} \vee \mathbf{C} \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{C}}{\mathbf{A} \& (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{C}} \&-re_2$$

La morale è che in un calcolo con regole NON sicure si *può sbagliare strategia di derivazione* andando a costruire alberi che non sono alberi di derivazione pur avendo come radice un sequente che è una tautologia perchè si scelgono regole non utili a trovare la derivazione che NON conservano la verità per riga dal basso verso l'alto.

Invece con la regola sicura $\&-S$ non c'è strategia sbagliata perchè *ogni applicazione di regola è ok* e al più uno può allungare la derivazione ad esempio come segue

$$\frac{\frac{\text{ax-id} \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{B}, \mathbf{C} \quad \text{ax-id} \quad \mathbf{A}, \mathbf{C} \vdash \mathbf{B}, \mathbf{C}}{\mathbf{A}, \mathbf{B} \vee \mathbf{C} \vdash \mathbf{B}, \mathbf{C}} \vee-S \quad \frac{\mathbf{A}, \mathbf{B} \vee \mathbf{C} \vdash \mathbf{B}, \mathbf{C}}{\mathbf{A}, \mathbf{B} \vee \mathbf{C} \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{C}} \vee-D}{\mathbf{A} \& (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{C}} \&-S$$

senza accorgersi che già alla prima applicazione di $\vee-S$ si è ottenuta una derivazione che è difatti

$$\frac{\text{ax-id} \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \vee \mathbf{C} \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{C}}{\mathbf{A} \& (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \vdash \mathbf{B} \vee \mathbf{C}} \&-S$$

Memo. Ricordare di evitare di derivare ulteriormente assiomi identità ottenuti con la ripetizione a dx e a sx di una proposizione composta!!

9.13.12 Esempi curiosi di regole valide

Mostriamo alcuni esempi di regole valide in modo *curioso* per il semplice fatto che un'implicazione classica è vera se il suo antecedente è falso e quindi soddisfano sostanzialmente a vuoto le relative condizioni “scorciatoia”.

1. La regola

$$\frac{\vdash \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}}{\Gamma \vdash \Delta} \text{par1}$$

è valida in quanto il suo sequente premessa

$$\vdash \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}$$

è un paradosso, ovvero falso su ogni riga della sua tabella di verità e dunque la verità scende banalmente, ovvero la regola formalizza l'implicazione

$$(\mathbf{tt} \rightarrow \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$$

che è una tautologia perchè il suo antecedente è falso su ogni riga della sua tabella di verità, ovvero vale

$$(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0}) \rightarrow (? \rightarrow ?) = \mathbf{0} \rightarrow (? \rightarrow ?) = \mathbf{1} \text{ su ogni riga della sua tabella di verità.}$$

Si noti inoltre che la sua inversa

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\vdash \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}} \text{inv-par1}$$

NON è valida. Infatti se poniamo la lista vuota al posto di Γ e \mathbf{tt} al posto di Δ otteniamo la seguente regola come istanza particolare

$$\frac{\vdash \mathbf{tt}}{\vdash \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}} \text{ inv} - \text{par1}$$

che corrisponde alla formula

$$(\mathbf{tt} \rightarrow \mathbf{tt}) \rightarrow (\mathbf{tt} \rightarrow \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A})$$

che NON è una tautologia essendo falsa su ogni riga della sua tabella di verità ovvero vale

$$(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1}) \rightarrow (\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0}) = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0} \text{ su ogni riga della sua tabella di verità.}$$

2. Le regole

$$\frac{\vdash \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A} \quad \Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \text{ par2} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \vdash \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \text{ par2*}$$

sono entrambe valide perchè una delle loro premesse è

$$\vdash \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}$$

che è un paradosso, ovvero falso su ogni riga della sua tabella di verità e dunque la verità scende banalmente. In particolare la regola *par2* è valida in quanto formalizza l'implicazione

$$(\mathbf{tt} \rightarrow \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}) \& (\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$$

che è una tautologia perchè il suo antecedente è falso su ogni riga della sua tabella di verità essendo una congiunzione di cui il primo congiunto è falso su ogni riga della sua tabella di verità, ovvero vale

$$(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0}) \& (? \rightarrow ?) \rightarrow (? \rightarrow ?) = \mathbf{0} \& (? \rightarrow ?) \rightarrow (? \rightarrow ?) = \mathbf{0} \rightarrow (? \rightarrow ?) = \mathbf{1} \text{ su ogni riga della sua tabella di verità.}$$

Allo stesso modo si mostra che la regola *par2ast* è valida in quanto formalizza la tautologia

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \& (\mathbf{tt} \rightarrow \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}) \rightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$$

Si noti che nessuna delle regole *par2* e *par2** è sicura poichè entrambe le inverse non sono valide. In particolare una loro inversa è della forma

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\vdash \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}} \text{ inv} - \text{par2*}$$

che NON è valida come mostrato per la regola *par1*. Si lascia al lettore come esercizio di dimostrare la non validità dell'altra inversa.

3. La regola

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2, \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A} \vdash \Delta_2} \text{ par3}$$

è valida perchè la premessa della conclusione è sempre falsa su ogni riga della sua tabella di verità rendendo la conclusione sempre vera, ovvero essa rappresenta la proposizione

$$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_2^{\&} \& (\mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}) \rightarrow \Delta_2^{\vee})$$

che è una tautologia in quanto su ogni riga della tabella di verità risulta

$$(? \rightarrow ?) \rightarrow (? \& \mathbf{0} \rightarrow ?) = (? \rightarrow ?) \rightarrow (\mathbf{0} \rightarrow ?) = (? \rightarrow ?) \rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Si noti che la regola NON è sicura in quanto l'inversa della regola

$$\frac{\Gamma_2, \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A} \vdash \Delta_2}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1} \text{ inv-par3}$$

NON è valida. Infatti ponendo la lista vuota al posto di Γ_1 e \perp al posto di Δ_1 si ottiene la seguente istanza della regola

$$\frac{\Gamma_2, \mathbf{A} \& \neg \mathbf{A} \vdash \Delta_2}{\vdash \perp} \text{ inv-par3}$$

che formalizza la proposizione

$$(\Gamma_2^{\&} \& (\mathbf{A} \& \neg \mathbf{A}) \rightarrow \Delta_2^{\vee}) \rightarrow (\mathbf{tt} \rightarrow \perp)$$

che è falsa su ogni riga della sua tabella di verità in quanto vale

$$(\text{?} \& \mathbf{0} \rightarrow \text{?}) \rightarrow (\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0}) = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

10 Spiegazione della forma delle regole del calcolo LC_p

Proviamo a spiegare un pò come mai le regole di LC_p sono accettabili avvalendosi di tautologie classiche che riconosciamo grazie all'utilizzo delle tabelle di verità.

- Le regole di sinistra della congiunzione e di destra della disgiunzione di LC_p sono accettabili perchè rappresentano una *risrittura della virgola* a sinistra e a destra del segno di sequente secondo il significato del sequente, ricordando che il sequente

$$\Gamma \vdash \Delta \text{ rappresenta la proposizione } \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$$

- Gli assiomi identità

$$\frac{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'}$$

seguono dalla tautologia classica

$$(\mathbf{G}_1 \& \mathbf{A}) \& \mathbf{G}_2 \rightarrow (\mathbf{D}_1 \vee \mathbf{A}) \vee \mathbf{D}_2$$

- L'assioma del falso

$$\frac{\text{ax-}\perp}{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla}$$

segue dalla tautologia classica

$$(\mathbf{G}_1 \& \perp) \& \mathbf{G}_2 \rightarrow \mathbf{D}$$

ponendo \mathbf{G}_1 al posto di Γ , \mathbf{G}_2 al posto di Γ' e \mathbf{D} al posto di ∇ .

- La regola di scambio a sx

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \nabla}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \nabla} \text{sc}_{\text{sx}}$$

segue dalla seguente tautologia classica, supponendo di mettere \mathbf{E} al posto di Σ , \mathbf{G}_1 al posto di Γ , \mathbf{G}_2 al posto di Γ' , \mathbf{P} al posto di Θ , \mathbf{D} al posto di Δ , \mathbf{N} al posto di ∇ e un'implicazione al posto della sbarra che separa i sequenti premessa e conclusione

$$((\mathbf{E} \& \mathbf{G}_1) \& \mathbf{P}) \& \mathbf{G}_2 \rightarrow \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{N} \rightarrow ((\mathbf{E} \& \mathbf{G}_2) \& \mathbf{P}) \& \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{N}$$

che in sostanza segue dalla commutatività della congiunzione.

- La regola di scambio a dx

$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}}$$

segue dalla seguente tautologia classica, supponendo di mettere \mathbf{G} al posto di Γ , \mathbf{E} al posto di Σ , \mathbf{D}_1 al posto di Δ , \mathbf{D}_2 al posto di Δ' , \mathbf{P} al posto di Θ , \mathbf{N} al posto di ∇ e un'implicazione al posto della sbarra che separa i sequenti premessa e conclusione

$$\mathbf{G} \rightarrow ((\mathbf{E}_1 \vee \mathbf{G}_1) \vee \mathbf{P}) \vee \mathbf{G}_2 \rightarrow \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{G} \rightarrow ((\mathbf{E}_1 \vee \mathbf{G}_2) \vee \mathbf{P}) \vee \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{N}$$

che in sostanza segue dalla commutatività della disgiunzione.

- La regola di destra della congiunzione

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B}, \Delta} \&-D$$

segue dalla seguente tautologia classica, supponendo di mettere \mathbf{G} e \mathbf{D} al posto di $\Gamma^{\&}$ e Δ^{\vee} e un'implicazione al posto della sbarra che separa i sequenti premessa e conclusione

$$(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{D}) \& (\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{B} \vee \mathbf{D}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow (\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vee \mathbf{D})$$

In particolare il caso in cui Γ è la lista vuota e Δ è semplicemente \mathbf{D} ovvero la seguente istanza della regola

$$\frac{\vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \vdash \mathbf{B}, \mathbf{D}}{\vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{D}} \&-D$$

segue dalla tautologia classica

$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{D}) \& (\mathbf{B} \vee \mathbf{D}) \rightarrow (\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vee \mathbf{D}$$

che è un verso della *distributività della disgiunzione sulla congiunzione*

- La regola di sinistra della disgiunzione

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \Delta} \vee-S$$

segue dalla seguente tautologia classica supponendo di mettere \mathbf{G} e \mathbf{D} al posto di $\Gamma^{\&}$ e Δ^{\vee} e un'implicazione al posto della sbarra che separa i sequenti premessa e conclusione

$$(\mathbf{G} \& \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}) \& (\mathbf{G} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}) \rightarrow (\mathbf{G} \& (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{D})$$

In particolare il caso in cui Γ è la lista vuota e Δ è semplicemente \mathbf{D} ovvero la seguente istanza della regola

$$\frac{\mathbf{A} \vdash \mathbf{D} \quad \mathbf{B} \vdash \mathbf{D}}{\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{D}} \vee-S$$

segue dalla tautologia

$$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}) \& (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}) \rightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{D})$$

che è un verso di una tautologia già nota come *disgiunzione come antecedente*

Esempio:

Ponendo \mathbf{A} = Mario va al cinema

\mathbf{B} = Mario va a mangiare la pizza

\mathbf{D} = Mario si diverte

la regola formalizza

“Dal fatto che,

se Mario va al cinema allora si diverte

e

se Mario va a mangiare la pizza allora si diverte

ne segue che
se Mario o va al cinema o va a mangiare la pizza allora si diverte.”

- La regola di destra della negazione

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{A}, \Delta} \neg\text{-D}$$

segue dalla seguente tautologia classica supponendo di mettere **G** e **D** al posto di $\Gamma^{\&}$ e Δ^{\vee} e un’implicazione al posto della sbarra che separa i sequenti premessa e conclusione

$$(\mathbf{G} \& \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}) \rightarrow (\mathbf{G} \rightarrow \neg \mathbf{A} \vee \mathbf{D})$$

Esempio:

Ponendo

G= Mario ha fame

A= Mario ha qualcosa da mangiare

D= Mario mangia

la regola formalizza

“Dal fatto che,
se Mario ha fame e ha qualcosa da mangiare allora mangia
 ne segue che
se Mario ha fame o non ha qualcosa da mangiare oppure mangia.”

- La regola di sinistra della negazione

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \Delta} \neg\text{-S}$$

segue dalla seguente tautologia classica supponendo di mettere **G** e **D** al posto di $\Gamma^{\&}$ e Δ^{\vee} e un’implicazione al posto della sbarra che separa i sequenti premessa e conclusione

$$(\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{D}) \rightarrow (\mathbf{G} \& \neg \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D})$$

Esempio:

Ponendo

G=Piove

A= Mario prende l’ombrello

D= Mario prende la mantella impermeabile

la regola formalizza

“Dal fatto che,
se piove allora Mario prende l’ombrello oppure la mantella impermeabile
 ne segue che
se piove e Mario non prende l’ombrello allora prende la mantella impermeabile.”

- La regola di destra dell’implicazione

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \Delta} \rightarrow\text{-D}$$

segue dalla seguente tautologia classica supponendo di mettere **G** e **D** al posto di $\Gamma^{\&}$ e Δ^{\vee} e un’implicazione al posto della sbarra che separa i sequenti premessa e conclusione

$$(G \& A \rightarrow B \vee D) \rightarrow (G \rightarrow (A \rightarrow B) \vee D)$$

Esempio:

Ponendo

G=Mario era sul luogo del delitto

A= Mario non ha alibi

B= Mario è colpevole

D= Mario è innocente

la regola formalizza

“Assumendo che ,

se Mario era sul luogo del delitto e non ha alibi allora è colpevole oppure innocente

ne segue che

se Mario era sul luogo del delitto allora è vero o che se Mario non ha alibi allora lui è colpevole oppure che Mario è innocente.”

In verità si comprende bene la regola ponendo

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

e si vede che la regola di destra dell'implicazione è il risultato dell'applicazione di due regole

$$\frac{\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, B, \Delta} \neg\text{-D}}{\Gamma \vdash \neg A \vee B, \Delta} \vee\text{-D}$$

- La regola di sinistra dell'implicazione

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow\text{-S}$$

segue dalla seguente tautologia classica

$$(G \rightarrow A \vee D) \& (G \& B \rightarrow D) \rightarrow (G \& (A \rightarrow B) \rightarrow D)$$

Esempio:

Ponendo

G=È mezzogiorno

A= Mario ha fame

B= Mario mangia

D= Mario è a posto

la regola formalizza

“Assumendo che ,

se è mezzogiorno allora o Mario ha fame oppure è a posto

e assumendo che

se è mezzogiorno e Mario mangia allora è a posto

ne segue che

se è mezzogiorno e se è vero che se Mario ha fame allora mangia, ne segue che Mario è a posto.

Ma la regola in verità si comprende bene la regola ponendo

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \equiv \neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$$

e si vede che la regola di destra dell'implicazione è il risultato dell'applicazione di due regole relative alla congiunzione e negazione

$$\frac{\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{A}, \Delta} \neg\text{-S} \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \Delta} \vee\text{-S}$$

Esercizi di vario tipo

Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie o opinioni o paradossi motivando la risposta:

1.
$$\frac{\text{O esco la sera e quindi mi diverto, oppure mi riposo se non esco la sera.}}{\text{O mi diverto o mi riposo.}}$$

si consiglia di usare:

E=esco la sera

D=mi diverto

R= mi riposo

Soluzione: l'asserzione si può formalizzare in tal modo

$$(\mathbf{E} \& \mathbf{D}) \vee (\neg \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$$

Applicando la procedura di decisione in sezione 9.4.1 si ottiene

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{E, D \vdash D, R} \quad \frac{\frac{E \vdash D, R}{\vdash \neg E, D, R} \quad \neg \neg D \quad \text{ax-id}}{R \vdash D, R} \quad \rightarrow \neg S}{\frac{E \& D \vdash D, R}{(E \& D) \vee (\neg E \rightarrow R) \vdash D, R} \quad \& \neg S \quad \vee \neg S} \rightarrow \neg S$$

$$\frac{(E \& D) \vee (\neg E \rightarrow R) \vdash D, R}{(E \& D) \vee (\neg E \rightarrow R) \vdash D \vee R} \vee \neg D$$

Dalla foglia che non si chiude $\mathbf{E} \vdash \mathbf{D}, \mathbf{R}$ deduciamo che il sequente di partenza è NON valido perchè falso sulla riga che assegna $\mathbf{E} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{D} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Si poi vede facilmente che per $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ ove i valori di \mathbf{E}, \mathbf{R} sono assegnati a piacere, si ha $\mathbf{D} \vee \mathbf{R} = \mathbf{1}$ ovvero la foglia $\mathbf{E} \vdash \mathbf{D}, \mathbf{R}$ risulta vera su ogni riga con $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ e dunque per la validità delle regole di \mathbf{LC}_p usate nell'albero sopra, il sequente radice $(\mathbf{E} \& \mathbf{D}) \vee (\neg \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$ risulta vero su tali righe e si conclude che esso è **soddisfacibile**.

La risposta finale è che il sequente

$$(\mathbf{E} \& \mathbf{D}) \vee (\neg \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$$

è un'**opinione** perchè è falso sulla riga $\mathbf{E} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{D} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$ ed è vero su ogni riga con $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ e con i valori di \mathbf{E}, \mathbf{R} assegnati a piacere.

Alternativamente, si può applicare la procedura in sezione 9.4.1 al sequente

$$\vdash \neg((\mathbf{E} \& \mathbf{D}) \vee (\neg \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{D} \vee \mathbf{R})$$

per trovare che NON è valido e la riga su cui è falso è una riga su cui è vero il sequente $(\mathbf{E} \& \mathbf{D}) \vee (\neg \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$ e dunque concludiamo che tal sequente è un'opinione.

2. (1 appello bis)

Solo se cadono le foglie è autunno.

Se e solo se non cadono le foglie, non è autunno ma inverno.

si consiglia di usare:

C = "cadono le foglie"

I = "è inverno"

A = "è autunno"

3. (I appello)

Se ho tempo rileggo il compito.

Se e soltanto se ho tempo rileggo il compito.

si consiglia di usare:
R = "Rileggo il compito"
H = "Ho tempo"

4. (II appello)

Sono all'estero se non sono a Padova.

Non si dà il caso che sia a Padova e non sia all'estero.

si consiglia di usare:
E = "Sono all'estero"
P = "Sono a Padova"

5. (III appello)

Non si dà il caso che, se c'è vita sulla Luna, ci sia vita su Marte o su Saturno, o su Giove.

Se c'è vita sulla Luna e non su Giove allora c'è pure su Marte e Saturno.

si consiglia di usare:
L = "C'è vita sulla Luna"
M = "C'è vita su Marte"
S = "C'è vita su Saturno"
G = "C'è vita su Giove"

6. (IV appello)

Non c'è vita su Giove ma c'è su Marte e Saturno.

Non si dà il caso che, se c'è vita sulla Luna e non su Giove, allora ci sia pure su Marte.

si consiglia di usare le variabili dell'asserzione precedente.

7. $\frac{\text{È meglio ammainare le vele se il mare è in tempesta.}}{\text{Soltanto se il mare non è in tempesta ed è calmo, non è meglio ammainare le vele.}}$

si consiglia di usare:
T = "il mare è in tempesta"
M = "è meglio ammainare le vele"
C = "il mare è calmo"

8. $\frac{\text{Lo Scirocco non soffia né da nord né da ovest se c'è afa.}}{\text{Non si dà il caso che soltanto se c'è afa lo Scirocco soffi da nord.}}$

si consiglia di usare:
N = "Scirocco soffia da nord"
O = "Scirocco soffia da ovest"
A = "C'è afa"

Mostrare se i sequenti elencati di seguito sono tautologie o opinioni o paradossi:

$$1. (B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow C) \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow A$$

$$2. \neg(A \rightarrow \neg B \vee \neg A) \leftrightarrow \neg(B \& A) \vdash \neg B \leftrightarrow B$$

Stabilire se le seguenti regole sono valide e anche sicure rispetto alla semantica classica:

1.

$$\frac{\vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \quad 1$$

2.

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \rightarrow A \vdash \Delta} \quad 2$$

11 Nozione di teoria proposizionale ed esempi

Ora applichiamo quanto appreso precedentemente sulla logica classica proposizionale allo studio di alcune sue teorie. Lo scopo è di comprendere come applicare lo studio della logica a quello della scienza, ovvero di una teoria scientifica a partire da alcuni assiomi extra-logici.

Def. 11.1 (teoria proposizionale) Con il termine **teoria proposizionale** si intende un'estensione del calcolo della logica classica proposizionale LC_p con un numero finito di **assiomi extralogici** indicati in una lista

- Ax.1
- Ax.2
- Ax.3
- Ax.4
- ...
- Ax.k

e le seguenti **regole di composizione** a sinistra

$$\frac{\vdash \mathbf{fr} \quad \Gamma, \mathbf{fr}, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla} \text{ comp}$$

ove \mathbf{fr} è una proposizione (o più genericamente “formula”) del linguaggio proposizionale della teoria

Ovvero in breve

TEORIA proposizionale = LOGICA proposizionale + regole composizione + assiomi EXTRALOGICI

Def. 11.2 (sequente derivabile in una teoria \mathcal{T}) Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice **derivabile** nella **teoria proposizionale \mathcal{T}**

se esiste un albero avente

- $\Gamma \vdash \Delta$ come radice;
- ogni foglia è istanza di un assioma di \mathcal{T}
ossia o di un assioma logico di LC_p o di un **assioma extralogico specifico** di \mathcal{T} ;
- l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di T ovvero delle regole di LC_p e delle regole di composizione.

Def. 11.3 Una formula \mathbf{fr} si dice **teorema** di una specifica teoria \mathcal{T} se è *derivabile nella teoria \mathcal{T}* (ovvero è una “*tautologia di \mathcal{T}* ”).

Osservazione: Tutte le tautologie classiche sono teoremi di ogni teoria proposizionale!!!

Nel seguito identificheremo una teoria proposizionale designando i SOLI assiomi extralogici.

11.1 Come derivare in una teoria

Se la teoria \mathcal{T} è fatta da assiomi extralogici

- Ax.1
- ...
- Ax.k

la regola di composizione si può usare in due modi:

1. Uso della regola di composizione su assiomi:

Le formule **fr** che si ottengono da una derivazione in \mathbf{LC}_p di **fr** con l'uso di assiomi extralogici $\text{Ax.i}_1, \text{Ax.i}_2 \dots$ come premesse diventano *teoremi della teoria* \mathcal{T} componendo con gli assiomi.

Infatti, per esempio se abbiamo una *derivazione* π *ottenuta con due assiomi*

$$\frac{\pi}{\text{Ax.i}_1, \text{Ax.i}_2 \vdash \mathbf{fr}}$$

si può comporre questa derivazione con la regola di composizione fino a trovare una derivazione di $\vdash \mathbf{fr}$ nella teoria \mathcal{T} in tal modo

$$\frac{\vdash \text{Ax.i}_1 \quad \frac{\vdash \text{Ax.i}_2 \quad \frac{\pi}{\text{Ax.i}_1, \text{Ax.i}_2 \vdash \mathbf{fr}} \text{comp}}{\text{Ax.i}_1 \vdash \mathbf{fr}} \text{comp}}{\vdash \mathbf{fr}}$$

\Rightarrow **fr** diventa **teorema della teoria T**.

2. Uso della regola di composizione su teoremi già noti:

IN UNA TEORIA LA CONOSCENZA SI ACCUMULA con la regola comp:

Se in una teoria si è *già dimostrato il teorema* $\vdash T_1$ ovvero si è già trovata una derivazione π_1

$$\frac{\pi_1}{\vdash T_1}$$

allora *si può usare la formula* T_1 *come premessa per derivare un'altra formula* T_2 .

Se ci si riesce trovando una derivazione nella teoria del tipo

$$\frac{\pi_2}{T_1 \vdash T_2}$$

allora **si può comporre le derivazioni π_1 e π_2 con comp**

per ottenere una derivazione di $\vdash T_2$ (senza premesse)!! nella teoria in tal modo

$$\frac{\frac{\pi_1}{\vdash T_1} \quad \frac{\pi_2}{T_1 \vdash T_2}}{\vdash T_2} \text{ comp}$$

ovvero

*in una **teoria** si possono derivare **nuovi teoremi componendo** con derivazioni di **teoremi già noti***

11.2 Esempi di teorie proposizionali con esercizi

1. Sia T_{bi} la teoria che estende $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Sia Chiara che Pina vanno in bici.
- Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va
- Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.
- Chiara non va in bici se Elia non ci va.

utilizzando:

C=Chiara va in bici

P=Pina va in bici

G=Giorgio va in bici

F= Fabio va in bici

E= Elia va in bici

Dedurre poi le seguenti affermazioni in T_{bi} :

- Se Fabio va in bici allora Chiara non ci va.
- Fabio non va in bici.
- Giorgio va in bici.
- Elia va in bici.

Soluzione

- Ax. 1 Sia Chiara che Pina vanno in bici.

$$C \& P$$

- Ax. 2 Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va.

$$P \rightarrow G \vee F$$

- Ax. 3 Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.

$$F \rightarrow \neg C$$

- Ax. 4 Chiara non va in bici se Elia non ci va.

$$\neg E \rightarrow \neg C$$

- T5. Fabio non va in bici.

$$\vdash \neg F$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{F \vdash F} \quad \frac{\vdash \neg F, F}{\vdash F, \neg F} \text{scsx} \quad \frac{\vdash \neg F, F}{\vdash \neg F, F} \neg\text{-D}}{\vdash \text{Ax 3.}} \quad \frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{C, P \vdash C, \neg F} \quad \frac{C \& P \vdash C, \neg F}{\vdash C, \neg F} \&\text{S}}{\vdash C, \neg F} \text{comp} \quad \frac{\frac{\vdash C, \neg F}{\neg C \vdash \neg F} \neg\text{S}}{\rightarrow \neg S}}{\frac{F \rightarrow \neg C \vdash \neg F}{\vdash \neg F} \text{comp}}$$

- T6. Giorgio va in bici.

$$\vdash G$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\frac{\frac{\frac{\pi_1}{\vdash P, G} \quad \frac{\frac{\pi_2}{G \vee F \vdash G}}{P \rightarrow G \vee F \vdash G} \rightarrow \neg S}{\vdash G} \text{comp} \quad \frac{\vdash \text{Ax 2.}}{\vdash G}$$

dove π_1 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{C, P \vdash P, G} \quad \frac{C \& P \vdash P, G}{\vdash P, G} \&\text{-S}}{\vdash P, G} \text{comp}$$

e dove π_2 è la seguente derivazione

- Carla va in gita.
- Solo se Carla va in gita allora ci vanno sia Toni che Giovanni.
- Se Carla non va in gita ci va Ester.
- Non si dà il caso che Carla non vada in gita e che ci vada Beppe.

Soluzione (un cenno):

- **Ax.1** è $\neg C \rightarrow G$
- **Ax.2** è $(\neg B \rightarrow G) \& (G \rightarrow \neg B)$
- **Ax.3** è $\neg C \rightarrow B$
- **Ax.4** è $T \rightarrow C$

Poi

- **T₅** è $\neg G \rightarrow B$ che si deriva usando **Ax₂** come segue

$$\frac{\vdash \text{Ax.2} \quad \frac{\pi}{(\neg B \rightarrow G) \& (G \rightarrow \neg B) \vdash \neg G \rightarrow B}}{\vdash \neg G \rightarrow B} \text{ comp}$$

ove π è una qualche derivazione nella teoria (qui basta in **LC_p**) del sequente

$$(\neg B \rightarrow G) \& (G \rightarrow \neg B) \vdash \neg G \rightarrow B$$

che si lascia da fare per esercizio al lettore.

- **T₆** è $\neg C \rightarrow \neg B$ che si deriva componendo una derivazione di

$$\text{Ax.1, Ax.2} \vdash T_6$$

con gli assiomi nelle premesse.

- **T₇** è C che si deriva componendo una derivazione di

$$T_6, \text{Ax.3} \vdash T_7$$

con l'assioma e il teorema già noto nelle premesse.

- **T₈** è $T \& G \rightarrow C$ che si deriva componendo una derivazione di

$$\text{Ax.4} \vdash T_8$$

con l'assioma nelle premesse.

- T_9 è $\neg \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$ che si deriva componendo una derivazione di

$$T_7 \vdash T_9$$

con il teorema già noto nelle premesse.

- T_{10} è $\neg(\neg \mathbf{C} \ \& \ \mathbf{B})$ che si deriva componendo una derivazione di

$$T_7 \vdash T_{10}$$

con il teorema già noto nelle premesse.

12 Logica classica predicativa

Dopo aver studiato la logica classica proposizionale, ovvero la logica delle proposizioni classiche, passiamo a studiare la logica classica predicativa, ovvero quella dei *predicati classici*.

In questa sezione introduciamo il linguaggio della logica classica predicativa, la nozione di validità dei suoi predicati, chiamati anche genericamente “formule”, e il relativo calcolo dei sequenti. Vedremo che useremo anche per i predicati un calcolo con tutte regole sicure ma siccome la loro complessità non diminuisce strettamente dal basso verso l’alto non avremo una procedura per decidere automaticamente la validità dei predicati. Comunque studieremo una procedura semi-automatica per stabilire tale validità.

12.1 Linguaggio predicativo

Un **linguaggio predicativo** ha 2 classi di **simboli**:

1. simboli chiamati **TERMINI** per indicare **enti**
esempi: x variabile, \bar{s} per nome “**Socrate**”
2. simboli chiamati **PREDICATI** per indicare **proprietà logiche degli enti**
esempi: $U(x)$ per “**x è un uomo**”, $U(\bar{s})$ per “**Socrate è un uomo**”
e i predicati sono chiusi sui **CONNETTIVI PROPOSIZIONALI** e **QUANTIFICAZIONI universali ed esistenziali**
esempi: $U(x) \& M(x)$ per “**x è un uomo ed è mortale**”, $U(x) \rightarrow M(x)$ per “**se x è un uomo allora è mortale**”, $\forall x M(x)$ sta per “**tutti sono mortali**”, $\exists x M(x)$ sta per “**esiste qualcuno di mortale**”

D’ora in poi usiamo il termine **FORMULA** per indicare un predicato che può essere:

- predicato (o formula) **atomico** ovvero dato come primitivo
- predicato (o formula) **composta** ovvero costruito con connettivi proposizionali o quantificazioni da quelli primitivi che sono chiusi sia su **quantificazione universale** “per ogni” che sulla **quantificazione esistenziale** “esiste..”.

Inoltre useremo il simbolo **fr** come meta-variabile per una *formula generica* e la meta-variabile **t_{ter}**, oppure **s_{ter}** oppure **u_{ter}** per indicare un *termine generico*.

Diamo qui la definizione di linguaggio predicativo formale:

Def. 12.1 Un linguaggio \mathcal{L} predicativo è individuato da

- un insieme di **COSTANTI**:
 a, b, \dots, h
più generalmente indicate con la scrittura
 $(c_j)_{j \in J}$ ovvero una famiglia di costanti
indiciate su un insieme **J** grande
a piacere
- un insieme di **PREDICATI atomici**
dipendenti da un numero **FINITO** qualsiasi di variabili oppure variabili proposizionali (non dipendenti da nessuna variabile):

$A(x_1, \dots, x_n), \dots, B, C(x_1, \dots, x_m), \dots, M(x), \dots, L, E, \dots$
più generalmente indicati con la scrittura

$$(P_k(x_1, \dots, x_m))_{k \in K}$$

ovvero una famiglia di predicati
con un numero finito di variabili
indicate su un insieme K grande
a piacere oppure vuoto

Queste costanti e questi predicati atomici costituiscono l'alfabeto di \mathcal{L} e sono utilizzati per generare i termini e le formule del linguaggio \mathcal{L} come segue nelle prossime sezioni.

Si osservi che sopra tra i predicati del linguaggio predicativo abbiamo *incluso le variabili proposizionali* A, B, C, \dots del linguaggio proposizionale pensandole come *predicati senza variabili libere*.

12.1.1 Grammatica termini simbolici

Nel linguaggio \mathcal{L} un **TERMINE** può essere costruito in tal modo:

- una variabile è un **termine** e assumiamo che ci sia un numero grande a piacere di variabili indicate con le ultime lettere MINUSCOLE dell'alfabeto inglese w, x, y, z , rese infinite tramite indicizzazione $x_1, \dots, x_n, \dots, y_1, \dots, y_n, \dots, w_1, \dots, w_n, \dots, z_1, \dots, z_n, \dots$
- una costante in \mathcal{L} è un **termine** e indichiamo le costanti con una lettera MINUSCOLA preferibilmente tra le prime dell'alfabeto italiano a, b, c, \dots , evitando le lettere usate come variabili.

Sui vari simboli per termini. Le costanti a, b, c, d servono per indicare dei nomi propri nelle traduzioni e rappresentano *un termine specifico*

ad esempio

$$a = x$$

significa che il termine di nome proprio a è uguale alla variabile x .

Le meta-variabili $u_{ter}, v_{ter}, t_{ter}, s_{ter}$ servono per scrivere formule arbitrarie ad esempio

$$t_{ter} = s_{ter} \ \& \ \forall x \ x = s_{ter}$$

indica una "quantità infinita" di formule dove al posto di t_{ter} si può mettere sia una variabile, ad esempio x, y, w, \dots etc., oppure una costante a, b, c, \dots e lo stesso vale per s che indica che al suo posto si può mettere una variabile o una costante.

Inoltre abbiamo reso infinite le variabili con la scrittura

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

oppure

$$w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$$

indicizzando con numeri le lettere usate per le variabili x, y, w .

Allo stesso modo possiamo rendere infinite le costanti indicizzandole con numeri

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

e analogamente anche le meta-variabili (che sono le lettere per includere in un colpo solo tutti gli insiemi di termini..) possono essere rese infinite indicizzando i t_{ter} e gli s_{ter} in tal modo

t_1, t_2, \dots, t_n .

In conclusione per formalizzare in formule le nostre frasi in linguaggio corrente e descrivere le regole del calcolo per manipolare tali formule abbiamo a disposizione simboli per costanti per indicare i nomi propri e una quantità infinita di simboli di variabili di termine per quantificare su predicati che variano su un numero grande a piacere di variabili. Poi abbiamo anche bisogno di scrivere meta-variabili per descrivere le regole dei quantificatori.

Qui per semplicità di scrittura abbiamo optato per una divisione (che può essere ambigua...!) tra l'uso delle prime lettere minuscole dell'alfabeto per costanti, le ultime lettere dell'alfabeto italiano (eccetto la z) per indicare le meta-variabili di termine, e le lettere dell'alfabeto inglese non presenti in quello italiano (con eventuali indici) per indicare le variabili di termini.

12.1.2 Grammatica formule simboliche

Una *formula* \mathbf{fr} nel linguaggio di \mathcal{L} si può costruire in tal modo:

- sono **formule** i predicati **atomici** $\mathbf{P}_k(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_m)$ ottenuti dal predicato atomico $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ di \mathcal{L} sostituendo le variabili con termini \mathbf{t}_i per $i = 1, \dots, m$
- $\forall \mathbf{x} (\mathbf{fr})$ (che si legge “per ogni \mathbf{x} \mathbf{fr} ”) è una **formula** se \mathbf{fr} lo è, e in tal caso sono formule pure $\forall \mathbf{x}_i (\mathbf{fr})$ per ogni variabile \mathbf{x}_i o ogni altra variabile;
- $\exists \mathbf{x} (\mathbf{fr})$ (che si legge “esiste un \mathbf{x} tale che \mathbf{fr} ”) è una **formula** se \mathbf{fr} lo è, e in tal caso sono formule pure $\exists \mathbf{x}_i (\mathbf{fr})$ per ogni variabile \mathbf{x}_i o ogni altra variabile;
- la costante “falso” \perp è una **formula**
- la costante “vero” \mathbf{tt} è una **formula**
- $(\mathbf{fr}_1) \& (\mathbf{fr}_2)$ è una **formula** se \mathbf{fr}_1 e \mathbf{fr}_2 lo sono
- $(\mathbf{fr}_1) \vee (\mathbf{fr}_2)$ è una **formula** se \mathbf{fr}_1 e \mathbf{fr}_2 lo sono
- $(\mathbf{fr}_1) \rightarrow (\mathbf{fr}_2)$ è una **formula** se \mathbf{fr}_1 e \mathbf{fr}_2 lo sono
- $\neg(\mathbf{fr})$ è una **formula** se \mathbf{fr} lo è.

Esempi di linguaggi: Il linguaggio

$$\mathcal{L} \equiv (\bar{s}, \mathbf{U}(\mathbf{x}), \mathbf{M}(\mathbf{x}))$$

è costituito dalla costante \bar{s} assieme ai predicati unari $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ e le sue formule sono solo quelle generate con questi predicati e costanti: ad esempio $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})$ è una formula di questo linguaggio, come pure $\mathbf{U}(\bar{s}) \& \mathbf{M}(\bar{s})$ mentre NON è formula di questo linguaggio $\mathbf{M}(\mathbf{a})$ oppure $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$.

Si noti che ogni variabile proposizionale \mathbf{A} può essere vista come *predicato 0-ario* ovvero senza variabili. Per esempio il linguaggio predicativo più piccolo che contiene la formula $\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ è un linguaggio predicativo senza costanti e con i soli predicati 0-ari $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ovvero

$$\mathcal{L}' \equiv (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$$

Infine il linguaggio predicativo più piccolo che contiene la formula $\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{c}, \mathbf{y})$ è il linguaggio predicativo

$$\mathcal{L}'' \equiv (\mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

ove il predicato atomico è $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (che si scrive con due variabili libere qualsiasi).

12.1.3 Come mettere le parentesi

Nello scrivere i predicati \forall o \exists si lega alla formula più vicina più di ogni altro connettivo come la negazione \neg , seguito a pari merito da \vee , $\&$, che a loro volta sono legate alle formule più di \rightarrow .

Ovvero

$$\neg, \forall, \exists \quad \text{lega più di} \quad \vee, \& \quad \text{lega più di} \quad \rightarrow$$

Esempi:

- “(tutti gli x tale che $A(x)$) o B ”

si scrive

$$\forall x A(x) \vee B$$

- “tutti gli x tale che ($A(x)$ o B)”

si scrive

$$\forall x (A(x) \vee B)$$

- “ (esiste un x tale che $A(x)$) implica (B o C)”

si scrive

$$\exists x A(x) \rightarrow B \vee C$$

- “(esiste un x tale che ($A(x)$ implica B)) o C ”

si scrive

$$\exists x (A(x) \rightarrow B) \vee C$$

12.1.4 A cosa servono i predicati?

I predicati servono per formalizzare asserzione del tipo

Tutti gli uomini sono mortali

Socrate è un uomo

Socrate è mortale

ove si è adottato la convenzione (con la sbarra) in sezione 5. A tal scopo usiamo i seguenti predicati

$M(x)$ = “ x è mortale”

$U(x)$ = “ x è un uomo”

e introduciamo la costante \bar{s} per esprimere il nome “**Socrate**”:

Poi per esprimere il “**tutti**” usiamo il simbolo di **quantificazione universale** “**per ogni**” davanti a un predicato e formalizziamo la frase “Tutti gli uomini sono mortali” in tal modo

$$\forall x (U(x) \rightarrow M(x))$$

mentre “Socrate è un uomo” e “Socrate è mortale” si formalizzano rispettivamente in $U(\bar{s})$ e in $M(\bar{s})$ perchè *al posto della variabile x possiamo sostituire la costante \bar{s}* .

Infine l’intera asserzione sopra si formalizza nel seguente

$$\forall x (U(x) \rightarrow M(x)), U(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})$$

Mentre per formalizzare l'asserzione

Qualche antenato di Mario è nobile.

ci avvaliamo delle seguenti funzioni proposizionali o predicati

$A(x, y)$ = “ x è antenato di y ”

$N(x)$ = “ x è nobile”

e un nome, ovvero una costante, per indicare il nome di Mario

\overline{m} = “Mario”.

Poi per esprimere “qualche” usiamo il simbolo di **quantificazione esistenziale** “esiste” davanti a un predicato

$$\exists x P(x)$$

L'asserzione quindi si può esprimere così:

$$\exists x (A(x, \overline{m}) \ \& \ N(x))$$

$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ traduce

Tutti i $P(x)$ sono $Q(x)$

Chi è $P(x)$ è pure $Q(x)$

Quelli che sono $P(x)$... sono $Q(x)$

I $P(x)$ sono $Q(x)$

Un $P(x)$ è un $Q(x)$

Chiunque è $P(x)$, è pure $Q(x)$

Ogni $P(x)$ è $Q(x)$

Soltanto i $Q(x)$ sono $P(x)$

Se uno è $P(x)$ allora è pure $Q(x)$

Solo se uno è $Q(x)$ allora è pure $P(x)$

$\exists x (P(x) \ \& \ Q(x))$ traduce

C'è un $P(x)$ che è $Q(x)$

esiste un $P(x)$ che è $Q(x)$

qualche $P(x)$ è $Q(x)$

esistono dei $P(x)$ che sono $Q(x)$

$\neg \exists x (P(x) \ \& \ Q(x))$ traduce

nessun $P(x)$ è un $Q(x)$

non esiste un $P(x)$ che è $Q(x)$

non esistono $P(x)$ che sono $Q(x)$

Trucco per tradurre soltanto quelli, solo quelli che

- riscrivere la frase *togliendo* il “soltanto”, o “solo”

- tradurre la frase ottenuta usando la quantificazione universale e l'implicazione

- se la frase ottenuta è $\forall x (\mathbf{fr}_1(x) \rightarrow \mathbf{fr}_2(x))$ allora la traduzione della frase iniziale si ricava *SCAMBIANDO antecedente con conseguente*, ovvero scrivendo $\forall x (\mathbf{fr}_2(x) \rightarrow \mathbf{fr}_1(x))$

12.1.5 Esempi di formalizzazione di predicati

Ogni volta che formalizziamo un'asserzione usiamo un particolare linguaggio predicativo dato dalle costanti c_1, \dots, c_n , e da dei predicati atomici $P_1(x_1, \dots, x_m), P_2(x_1, \dots, x_k), \dots$.

1. L'asserzione

“x più cinque è minore od uguale a sei”

si può scrivere formalmente

$$x + 5 \leq 6$$

ove $x + 5 \leq y$ è simbolo di predicato per “x +5 minore o uguale ad y”
e ovviamente 6 è il numero sei.

2. l'asserzione **“il quadrato di x più il quadrato di y è uguale ad uno”**

si può scrivere formalmente

$$x^2 + y^2 = 1$$

3. L'asserzione

“esiste un numero x tale che x è minore o uguale di 6”

si può formalizzare così

$$\exists x (N(x) \ \& \ x \leq 6)$$

ove

$x \leq y$ è simbolo di predicato di minore o uguale ovvero “x è minore od uguale ad y”
 $N(x)$ = “x è un numero”

4. L'asserzione **“Se Mario non mangia allora non sta in piedi”**

si può formalizzare così

$$\neg M(\bar{m}) \rightarrow \neg P(\bar{m})$$

ove

$M(x)$ =“x mangia”

$P(x)$ = “x sta in piedi”

\bar{m} =“Mario”

5. L'asserzione

“Chi non mangia non sta in piedi”

è formalizzabile così

$$\forall x (\neg M(x) \rightarrow \neg P(x))$$

ponendo

$M(x)$ =“x mangia”

$P(x)$ = “x sta in piedi”

6. L'asserzione

“Solo quelli che hanno il biglietto salgono sull'aereo.”

si può formalizzare così

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x}))$$

con

$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \text{“ x ha il biglietto”}$

$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \text{“x sale sull’aereo”}$

7. l’asserzione

“Non si dà il caso che nessun programma termini.”

si può formalizzare in

$$\neg \neg \exists \mathbf{x} (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \ \& \ \mathbf{T}(\mathbf{x}))$$

con

$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \text{“x è programma”}$

$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \text{“x termina”}$

8. l’asserzione

“Nessun programma con un ciclo infinito termina.”

si può formalizzare così

$$\neg \exists \mathbf{x} ((\mathbf{P}(\mathbf{x}) \ \& \ \exists \mathbf{y} \ \mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \ \& \ \mathbf{T}(\mathbf{x}))$$

ove

$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \text{“x è programma”}$

$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \text{“x termina”}$

$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{“y è ciclo di x ”}$

9. **“Un programma che non ha cicli termina.”**

si può formalizzare in

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \ \& \ \neg \exists \mathbf{y} \ \mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{x}))$$

con

$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \text{“x è programma”}$

$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \text{“x termina”}$

$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{“y è ciclo di x ”}$

12.1.6 Nozione di variabile LIBERA in termini e formule

L’introduzione dei quantificatori universale ed esistenziale nel linguaggio predicativo comporta la presenza di due tipi di variabili: le *variabili libere*, che sono variabili all’interno di una formula senza quantificatori legati ad esse, e le *variabili vincolate*, che sono variabili che cadono nel raggio di azione di un quantificatore.

Prima di definire le variabili libere di una formula precisiamo la ovvia definizione di variabile libera in un termine considerando che al momento i termini sono solo o variabili o costanti:

$\mathbf{VL}(\mathbf{c}) \equiv \emptyset$ se \mathbf{c} costante

$\mathbf{VL}(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{x}\}$

Poi definiamo la nozione di variabile libera di una formula come segue:

x si dice **LIBERA** in fr sse $x \in \mathbf{VL}(fr)$ ove

$$\mathbf{VL}(\perp) \equiv \emptyset$$

$$\mathbf{VL}(\mathbf{P}_k(t_1, \dots, t_m)) \equiv \mathbf{VL}(t_1) \cup \dots \cup \mathbf{VL}(t_m)$$

$$\mathbf{VL}(\forall y (fr)) \equiv \mathbf{VL}(fr) \setminus \{y\} \text{ ovvero } y \text{ appare VINCOLATA in } \forall y (fr)$$

$$\mathbf{VL}(\exists y (fr)) \equiv \mathbf{VL}(fr) \setminus \{y\} \text{ ovvero } y \text{ appare VINCOLATA in } \exists y (fr)$$

$$\mathbf{VL}(fr_1 \ \& \ fr_2) \equiv \mathbf{VL}(fr_1) \cup \mathbf{VL}(fr_2)$$

$$\mathbf{VL}(fr_1 \vee fr_2) \equiv \mathbf{VL}(fr_1) \cup \mathbf{VL}(fr_2)$$

$$\mathbf{VL}(fr_1 \rightarrow fr_2) \equiv \mathbf{VL}(fr_1) \cup \mathbf{VL}(fr_2)$$

$$\mathbf{VL}(\neg(fr)) \equiv \mathbf{VL}(fr)$$

Esempi

$$\mathbf{VL}(A(x) \rightarrow \forall z B(z, y)) = \{x, y\}$$

$\mathbf{VL}(A(x) \rightarrow \forall x B(x, y)) = \{x, y\}$
poichè x è libera in $A(x)$ anche se vincolata in $\forall x B(x, y)$

$$\mathbf{VL}(A(z) \rightarrow \forall x A(x)) = \{z\}$$

$\mathbf{VL}(\forall z B(z) \vee A(z, x)) = \{z, x\}$
poichè z è libera nel secondo disgiunto $A(z, x)$ perchè il $\forall z$ lega solo l'occorrenza di z in $B(z)$.

$\mathbf{VL}(\forall z (B(z) \vee A(z, x))) = \{x\}$
perchè il $\forall z$ lega entrambe le occorrenze di z per la convenzione sulle parentesi.

Si osservi che dire che *una variabile w è NON LIBERA in una formula fr* significa due cose:

- o w NON compare per nulla in fr ,
- oppure w compare vincolata in fr , ovvero nel raggio di azione di un quantificatore.

12.2 Calcolo dei sequenti LC per la Logica classica predicativa

Il calcolo dei sequenti **LC** include le regole sotto ove

- i simboli \mathbf{fr}_1 e \mathbf{fr}_2 sono META-variabili che indicano formule complesse arbitrarie;
- la scrittura $\mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\mathbf{ter}}]$ indica la formula ottenuta sostituendo TUTTE le occorrenze libere della variabile \mathbf{x} in \mathbf{fr} con il termine $\mathbf{t}_{\mathbf{ter}}$ (si veda la definizione formale di sostituzione in sezione 12.5.3);
- la scrittura $\mathbf{\Gamma}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\mathbf{ter}}]$ indica la lista di formule ottenuta dalla lista $\mathbf{\Gamma}$ sostituendo in ogni formula di tal lista la variabile \mathbf{x} con il termine $\mathbf{t}_{\mathbf{ter}}$;
- Il simbolo $\mathbf{t}_{\mathbf{ter}}$ è una META-variabile che indica un termine qualsiasi del linguaggio che può essere una delle variabili x, y, z, \dots oppure una delle costanti a, b, c, \dots ;
- le regole di quantificazioni sotto si intendono chiuse sulla sostituzione della variabili x, w che appaiono sotto con QUALSIASI altra variabile purchè vengano rispettate le condizioni indicate.

$\frac{}{\Gamma, \mathbf{fr}_1, \Gamma' \vdash \Delta, \mathbf{fr}_1, \Delta'} \text{ ax-id}$	$\frac{}{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla} \text{ ax-}\perp$	$\frac{}{\Gamma \vdash \nabla, \mathbf{tt}, \nabla'} \text{ ax-tt}$
$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{ sc}_{\text{sx}}$	$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{ sc}_{\text{dx}}$	
$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathbf{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2, \Delta} \&-D$	$\frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1, \mathbf{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2 \vdash \Delta} \&-S$	
$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1, \mathbf{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2, \Delta} \vee-D$	$\frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathbf{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2 \vdash \Delta} \vee-S$	
$\frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{fr}_1, \Delta} \neg-D$	$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1, \Delta}{\Gamma, \neg \mathbf{fr}_1 \vdash \Delta} \neg-S$	
$\frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vdash \mathbf{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2, \Delta} \rightarrow-D$	$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1, \Delta \quad \Gamma, \mathbf{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2 \vdash \Delta} \rightarrow-S$	
$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}, \nabla} \forall-D \text{ (} \mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}, \nabla) \text{)}$	$\frac{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}, \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\mathbf{ter}}] \vdash \nabla}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr} \vdash \nabla} \forall-S$	
$\frac{\Gamma, \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}] \vdash \nabla}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{fr} \vdash \nabla} \exists-S \text{ (} \mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}, \Delta) \text{)}$	$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\mathbf{ter}}], \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}, \nabla}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}, \nabla} \exists-D$	

Poi diciamo che un **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$ è **derivabile nel calcolo LC** se tal sequente ammette una derivazione nel senso di definizione 15.2 applicata a **LC**.

12.2.1 Come si sarebbe potuto scrivere il calcolo LC

Presentiamo qui le regole del calcolo dei sequenti **LC** in modo alternativo a quella dato in 12.2. La novità è che le regole qui sotto presentate agiscono su quantificatori e connettivi applicati rispettivamente a predicatori atomici $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} (la differenza tra le variabili $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e \mathbf{B} e le META-variabili \mathbf{fr}_1 e \mathbf{fr}_2 è che le prime sono i costituenti di base della grammatica delle formule per

formare formule complesse, ad esempio $A \& (B(x) \vee C) \rightarrow \exists x D(x, y)$, mentre le seconde sono solo variabili di più alto livello per indicare una formula complessa). Ma per completezza il calcolo deve contenere *anche TUTTE le applicazioni delle regole ottenute mettendo al posto delle variabili \mathbf{A}, \mathbf{B} e dei predicati $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ delle formule qualsiasi e al posto di \mathbf{w} nelle regole $\exists\text{--S}$ e $\forall\text{--D}$ una qualsiasi altra variabile purchè rispetti le condizioni dettate dalle regole.*

Inoltre si ricorda che con \mathbf{t}_{ter} si intende una meta-variabile per un termine che può essere una delle variabili x, y, z, \dots oppure una delle costanti a, b, c, \dots .

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ax-}\perp \\ \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ax-tt} \\ \Gamma \vdash \nabla, \mathbf{tt}, \nabla' \end{array} \\
\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{sc}_{\text{sx}} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}} \\
\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&\text{--S} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&\text{--D} \\
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee\text{--S} \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee\text{--D} \\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg\text{--S} \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg\text{--D} \\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow\text{--S} \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow\text{--D} \\
\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(\mathbf{t}_{\text{ter}}) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall\text{--S} \quad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \forall\text{--D} \ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla)) \\
\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \nabla} \exists\text{--S} \ (w \notin VL(\Gamma, \exists x A(x), \nabla)) \quad \frac{\Gamma \vdash A(\mathbf{t}_{\text{ter}}), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists\text{--D}
\end{array}$$

Def. 12.2 (sequente derivabile in LC) *Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice derivabile nel calcolo dei sequenti LC*

se esiste un albero avente

- $\Gamma \vdash \Delta$ come radice;
- ogni foglia è istanza di un assioma di LC
ottenuto **sostituendo** le variabili \mathbf{A}, \mathbf{B} con arbitrarie proposizioni \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2
e le variabili $\Gamma, \Delta, \nabla, \Sigma$ con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).
- l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di LC
ottenute **sostituendo** le variabili \mathbf{A}, \mathbf{B} con arbitrarie proposizioni \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2
e le variabili $\Gamma, \Delta, \nabla, \Sigma$ con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).

12.2.2 Attenzione alle condizioni su variabili

Quando si applica $\forall\text{--D}$ o $\exists\text{--S}$ controllare le **condizioni su variabili**:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z}) \end{array} \quad \frac{\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \forall\text{--D} \text{ NO!!!} \\
\frac{\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \exists\text{--S}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z}) \end{array} \quad \frac{\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})} \exists\text{--S} \text{ NO!!!} \\
\frac{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \forall\text{--D}
\end{array}$$

NON sono derivazioni corrette: nella prima NON si può applicare \forall -D perchè \mathbf{z} è libera nel contesto a \mathbf{sx} di \vdash ovvero in $\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$
e nella seconda NON si può applicare \exists -S perchè \mathbf{z} è libera nel contesto a \mathbf{dx} di \vdash ovvero in $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})$.

12.2.3 Esempi di derivazione: uso delle regole \forall -S e \exists -D

Nel calcolo **LC** possiamo derivare il seguente

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})), \mathbf{U}(\bar{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{M}(\bar{\mathbf{s}})$$

in tal modo

$$\frac{\frac{\frac{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash U(\bar{s}), M(\bar{s})}{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})} \text{ax-id} \quad \frac{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)), M(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})}{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})} \text{ax-id}}{\frac{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})}{\forall x (U(x) \rightarrow M(x)), U(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})} \text{sc}_{sx}} \forall\text{-S} \rightarrow\text{-S}$$

Si noti che conviene applicare la regola \forall -S mettendo al posto della metavariable \mathbf{t} il termine (costante o variabile) che si spera possa condurre a trovare una derivazione, ovvero non ha senso applicare prima la regola \forall -S per esempio con la variabile \mathbf{x}

$$\frac{\frac{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)), U(x) \rightarrow M(x) \vdash M(\bar{s})}{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})} \forall\text{-S}}{\frac{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})}{\forall x (U(x) \rightarrow M(x)), U(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})} \text{sc}_{sx}}$$

Anche se grazie al fatto che la regola \forall -S è sicura si può recuperare la sostituzione giusta al secondo colpo così

$$\frac{\frac{\frac{U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash U(\bar{s}), M(\bar{s})}{U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})} \text{ax-id} \quad \frac{U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)), M(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})}{U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})} \text{ax-id}}{\frac{U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})}{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})} \text{sc}_{sx}} \forall\text{-S} \rightarrow\text{-S}$$

Inoltre l'asserzione composta

Il conte Augusto è un'antenato di Mario ed è nobile
Qualche antenato di Mario è nobile

si può formalizzare nel seguente

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{c}) \vdash \exists \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{x}))$$

ove si pone

$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{“x è antenato di y”}$

$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \text{“x è nobile”}$

$\bar{\mathbf{m}} = \text{“Mario”}$

$\mathbf{c} = \text{“Il conte Augusto”}$

Possiamo derivare il seguente in LC in tal modo:

$$\frac{\text{ax-id} \quad \mathbf{A}(\mathbf{c}, \overline{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{c}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{c}, \overline{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{c}), \exists \mathbf{x} \ (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{x}))}{\mathbf{A}(\mathbf{c}, \overline{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{c}) \vdash \exists \mathbf{x} \ (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{x}))} \exists\text{-D}$$

Si noti che conviene applicare la regola $\exists\text{-D}$ mettendo al posto della metavariable \mathbf{t} un termine (costante o variabile) che *compare nel resto del seguente* e che si spera possa condurre a trovare una derivazione.

12.3 Come formalizzare l'unicità in logica predicativa? aggiungiamo il predicato di uguaglianza!

In sezione 12.1.2 abbiamo visto che per definire un linguaggio predicativo occorre avere come base di partenza dei predicati atomici $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ che negli esempi in sezione 12.1.4 sono ad esempio $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ o $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ etc. Ora ci concentriamo su linguaggi predicativi dove c'è senz'altro come predicato atomico il predicato binario dell'uguaglianza $\mathbf{t}_{\text{ter}} = \mathbf{s}_{\text{ter}}$ che indica che il termine \mathbf{t}_{ter} è uguale al termine \mathbf{s}_{ter} ove \mathbf{t}_{ter} e \mathbf{s}_{ter} indicano entrambi *termini qualsiasi* o variabili o costanti.

Anche qui come in precedenza usiamo i simboli \mathbf{t}_{ter} e \mathbf{s}_{ter} come meta-variabili per termini che possono denotare sia costanti (indicate con le lettere dell'alfabeto fino alla lettera \mathbf{u}_{ter}) che variabili (indicate con le ultime lettere dell'alfabeto inglese \mathbf{x} , \mathbf{w} , \mathbf{y} o \mathbf{z} eventualmente indicate da numeri).

La novità è che questo predicato atomico di uguaglianza $\mathbf{t} = \mathbf{s}$ avrà *sue proprie regole* che saranno aggiunte al calcolo dei sequenti **LC** formando un nuovo calcolo **LC₌**.

In questo modo l'enunciato

“Tutti sono uguali a se stessi”

formalizzato con la formula

$$\forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

che NON è derivabile nel calcolo **LC** diventa *DERIVABILE* nel calcolo **LC₌** e quindi diventa una *TAUTOLOGIA classica*.

I linguaggi predicativi con l'aggiunta dell'uguaglianza si chiamano **linguaggi predicativi con uguaglianza** e la logica predicativa con le regole dell'uguaglianza si chiama **LOGICA PREDICATIVA con UGUAGLIANZA**.

Vediamo a che serve l'uguaglianza con degli esempi.

Esempio 0: come formalizzare in logica classica

“c”e un \mathbf{x} uguale a cinque”

?

Con la formula

$$\exists \mathbf{x} \mathbf{x} = 5$$

Esempio 1: come formalizzare in logica classica

“Il programma fattoriale su input 2 dà un'unico output.”

con

$O(x, y, z)$ = “il programma y su input z dà output il numero x ”

f = “il programma fattoriale”

2= “due”

?

Una possibile formalizzazione è la seguente:

$$\exists x \text{ O}(x, f, 2) \ \& \ \forall y_1 \ \forall y_2 \ (\text{O}(y_1, f, 2) \ \& \ \text{O}(y_2, f, 2) \rightarrow y_1=y_2)$$

Un'altra possibile formalizzazione (meno conveniente però per derivare) è la seguente:

$$\exists x \ (\text{O}(x, f, 2) \ \& \ \forall y \ (\text{O}(y, f, 2) \rightarrow y=x))$$

Esempio 2: come formalizzare in logica classica

“Il programma fattoriale assegna ad ogni input un’unico output.”

con

$O(x, y, z)$ = “il programma y su input z dà output il numero x ”

f =“il programma fattoriale”

?

Una possibile formalizzazione è la seguente:

$$\forall z \ (\ \exists x \text{ O}(x, f, z) \ \& \ \forall y_1 \ \forall y_2 \ (\text{O}(y_1, f, z) \ \& \ \text{O}(y_2, f, z) \rightarrow y_1=y_2))$$

Un'altra possibile formalizzazione (meno conveniente però per derivare) è la seguente:

$$\forall z \ \exists x \ (\text{O}(x, f, z) \ \& \ \forall y \ (\text{O}(y, f, z) \rightarrow y=x))$$

Esempio 4: come formalizzare in logica classica

“Certi potenti pensano a se stessi e soltanto a se stessi”

con

$O(x)$ = “ x è potente”

$P(x, y)$ =“ x pensa a y ”

?

Una possibile formalizzazione è la seguente:

$$\exists x \ (\ (\text{O}(x) \ \& \ \text{P}(x, x)) \ \& \ \forall y \ (\text{P}(x, y) \rightarrow y=x))$$

Esempio 4: come formalizzare in logica classica

“Certi potenti pensano solo a se stessi”

con

$O(x)$ = “x è potente”

$P(x, y)$ = “x pensa a y”

?

Una possibile formalizzazione LETTERALE è la seguente:

$$\exists x (O(x) \ \& \ \forall y (P(x, y) \rightarrow y=x))$$

In realtà la frase sopra è affermata per intendere che “Certi potenti pensano a se stessi e soltanto a se stessi” la cui formalizzazione è nell’esempio sopra.

12.3.1 Grammatica predicatori con uguaglianza

Descriviamo qui come si costruiscono le formule all’interno di un linguaggio predicativo con uguaglianza. La differenza rispetto a quanto descritto in definizione 12.6.1 è che tra i predicatori di base c’è pure l’uguaglianza:

Def. 12.3 La grammatica delle *formule del linguaggio predicativo con l’aggiunta dell’uguaglianza* diventa:

- il predicator $t_{\text{ter}} = s_{\text{ter}}$ è una **formula** se t_{ter} ed s_{ter} sono **termini**.
- i predicatori atomici $P_k(t_1, \dots, t_m)$ sono **formule** se t_i sono **termini** per $i = 1, \dots, m$.
- $\forall x \text{ fr}$ è una **formula** se fr lo è.
- $\exists x \text{ fr}$ è una **formula** se fr lo è.
- la proposizione \perp è una **formula**.
- $\text{fr} \& \text{fr}_2$ è una **formula** se fr e fr_2 lo sono.
- $\text{fr} \vee \text{fr}_2$ è una **formula** se fr e fr_2 lo sono.
- $\text{fr} \rightarrow \text{fr}_2$ è una **formula** se fr e fr_2 lo sono.
- $\neg \text{fr}$ è una **formula** se fr lo è.

Notazione “diverso”: Nel seguito usiamo l’abbreviazione

$$t_{\text{ter}} \neq s_{\text{ter}} \equiv \neg t_{\text{ter}} = s_{\text{ter}}$$

per indicare il predicator che il termine t_{ter} è diverso dal termine s_{ter} .

12.3.2 Il calcolo dei sequenti $LC_{=}$

Il calcolo $LC_{=}$ è il calcolo della logica classica con uguaglianza ovvero il calcolo LC con le regole dell’uguaglianza

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\perp & \text{ax-tt} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \text{tt}, \nabla' \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma} \text{sc}_{\text{sx}} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}} \\
\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&\text{S} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&\text{-D} \\
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee\text{-S} \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee\text{D} \\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg\text{-S} \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg\text{-D} \\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow\text{-S} \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow\text{-D} \\
\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t_{\text{ter}}) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall\text{-S} \quad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \forall\text{-D} \ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla)) \\
\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \nabla} \exists\text{-S} \ (w \notin VL(\Gamma, \exists x A(x), \nabla)) \quad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists\text{-D} \\
\frac{\Sigma, t_{\text{ter}} = s_{\text{ter}}, \Gamma(t_{\text{ter}}) \vdash \Delta(t_{\text{ter}}), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s_{\text{ter}}), t_{\text{ter}} = s_{\text{ter}} \vdash \Delta(s_{\text{ter}}), \nabla} =\text{-S} \quad \frac{}{\Gamma \vdash t_{\text{ter}} = t_{\text{ter}}, \Delta} =\text{-ax}
\end{array}$$

ove con $\Gamma(\mathbf{t}_{\text{ter}})$ si intende che il termine \mathbf{t}_{ter} può comparire nelle formule in $\Gamma(t_{\text{ter}})$.

12.3.3 Come usare le regole di uguaglianza?

Nella regola

$$\frac{\Sigma, t_{\text{ter}} = s_{\text{ter}}, \Gamma(t_{\text{ter}}) \vdash \Delta(t_{\text{ter}}), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s_{\text{ter}}), t_{\text{ter}} = s_{\text{ter}} \vdash \Delta(s_{\text{ter}}), \nabla} =\text{-S}$$

dall'alto verso il basso: NON TUTTE le occorrenze di t_{ter} DEVONO essere rimpiazzate con s_{ter}
dal basso verso l'alto: NON TUTTE le occorrenze di s_{ter} DEVONO essere rimpiazzate con t_{ter} .

Ad esempio nella derivazione

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\mathbf{t}=\mathbf{s} \vdash \mathbf{t}=\mathbf{t}, \mathbf{f}=\mathbf{t}} =\text{-ax} \\
\frac{t=\mathbf{s} \vdash s=t, f=t}{t=\mathbf{s} \vdash f=t, s=t} \text{sc}_{\text{sx}} \\
\frac{t=\mathbf{s} \vdash f=t, s=t}{t=\mathbf{s} \vdash f=s, s=t} =\text{-S}
\end{array}$$

nella prima applicazione non abbiamo sostituito tutte le occorrenze di \mathbf{s} con \mathbf{t} ma solo alcune.

Esempio 0: Vediamo che l'enunciato

“Tutti sono uguali a se stessi”

formalizzato con la formula

$$\forall \mathbf{x} \ \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

è derivabile in $\mathbf{LC}_{=}$, e quindi è una tautologia rispetto alla logica classica con uguaglianza

$$\frac{\begin{array}{c} = -\text{ax} \\ \vdash w = w \end{array}}{\vdash \forall x \, x = x} \forall\text{-D}$$

ove l'applicazione di $\forall\text{-D}$ è lecita perchè la variabile \mathbf{w} non compare proprio nel sequente radice.

Esempio 1: Se vogliamo derivare la simmetria dell'uguaglianza

$$t = s \vdash s = t$$

in $\text{LC}_=$ occorre applicare la regola $= -\text{S}$ in tal modo:
si identifichi

$$\Sigma \equiv \emptyset \quad \Gamma(x) \equiv \emptyset \quad \Delta(x) \equiv x = t \quad \nabla \equiv \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(t) \equiv t = t \quad \Delta(s) \equiv s = t$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\frac{\begin{array}{c} = -\text{ax} \\ t = s \vdash t = t \end{array}}{t = s \vdash s = t} = -\text{S}$$

Esempio 2: Se vogliamo derivare la transitività dell'uguaglianza

$$t = u, u = s \vdash t = s$$

in $\text{LC}_=$ occorre applicare la regola $= -\text{S}$ in tal modo:
si identifichi

$$\Sigma \equiv \emptyset \quad \Gamma(x) \equiv t = u \quad \Delta(x) \equiv t = x \quad \nabla \equiv \emptyset$$

(si noti che in $\Gamma(x)$ non compare proprio x !!) e quindi si ha che

$$\Delta(u) \equiv t = u \quad \Delta(s) \equiv t = s$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\frac{\begin{array}{c} \text{ax} - \text{id} \\ u = s, t = u \vdash t = u \end{array}}{t = u, u = s \vdash t = s} = -\text{S}$$

Alternativamente possiamo usare la regola $= -\text{S}$ con

$$\Sigma \equiv t = u \quad \Gamma(x) \equiv \emptyset \quad \Delta(x) \equiv t = x \quad \nabla \equiv \emptyset$$

e quindi ottenere la seguente derivazione:

$$\frac{\begin{array}{c} \text{ax} - \text{id} \\ t = u, u = s \vdash t = u \end{array}}{t = u, u = s \vdash t = s} = -\text{S}$$

12.4 Sostituzione di una variabile

La sostituzione di un termine \mathbf{t}_{ter} al posto di una variabile \mathbf{x} in una formula

$$\mathbf{fr}(x)$$

per ottenere $\mathbf{fr}(t_{\text{ter}})$ NON è sempre lecita. Il motivo è che una sostituzione deve per forza conservare la validità in quanto in ogni modello \mathcal{D} vale

$$\mathbf{fr}(\mathbf{x}) \text{ è vera} \quad \text{sse} \quad \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}(\mathbf{x}) \text{ è vera}$$

e dunque se $\mathbf{fr}(x)$ è vera in un modello allora lo deve essere pure $\mathbf{fr}(t_{\text{ter}})$. Ma allora vediamo con questo esempio che NON ogni sostituzione funziona in tal senso e che dobbiamo proibire certe sostituzioni. Per esempio se pensiamo che

$$\mathbf{fr}(x) \equiv \exists \mathbf{y} \mathbf{y} \text{ è madre di } \mathbf{x}$$

allora sappiamo che vale pure

$$\forall \mathbf{x} \mathbf{fr}(\mathbf{x}) \equiv \forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{y} \text{ è madre di } \mathbf{x}$$

ovvero “*ciascuno ha una madre*” il che è vero nel modello in cui il dominio è costituito dagli uomini e il predicato è interpretato come sopra. Ora se sostituiamo in questo $\mathbf{fr}(x)$ un'altra variabile \mathbf{w} o costante \mathbf{c} continua a valere $\mathbf{fr}(t)$ nel modello assegnato. Invece se sostituiamo \mathbf{x} con \mathbf{y} otteniamo

$$\mathbf{fr}(y) \equiv \exists \mathbf{y} \mathbf{y} \text{ è madre di } \mathbf{y}$$

il che è falso nel modello. Da questo esempio concludiamo che non possiamo sostituire in una variabile libera di una formula una variabile che è vincolata nella sottoformula che contiene la variabile libera.

Diamo di seguito la definizione di sostituzione di un termine \mathbf{t}_{ter} al posto di \mathbf{x} in una formula $\mathbf{fr}(\mathbf{x})$ di un linguaggio predicativo che indichiamo con la scrittura $\mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}]$:

Def. 12.4 Dato un termine \mathbf{t}_{ter} e una formula $\mathbf{fr}(\mathbf{x})$ di un linguaggio predicativo definiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_m)[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] &\equiv \mathbf{P}_k(\mathbf{t}_1[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \dots, \mathbf{t}_m[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}]) \\ (\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2)[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] &\equiv \mathbf{t}_1[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] = \mathbf{t}_2[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \\ (\forall \mathbf{y}_i \mathbf{fr})[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] &\equiv \begin{cases} \forall \mathbf{y}_i \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] & \mathbf{x} \text{ compare in } \mathbf{fr} \\ & \text{e } \mathbf{y}_i \text{ NON compare libera in } \mathbf{t}_{\text{ter}} \\ \forall \mathbf{y}_i \mathbf{fr} & \text{se } \mathbf{x} \text{ non compare in } \mathbf{fr} \end{cases} \\ (\forall \mathbf{x} \mathbf{fr})[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] &\equiv (\forall \mathbf{x} \mathbf{fr}) \\ (\exists \mathbf{y}_i \mathbf{fr})[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] &\equiv \begin{cases} \exists \mathbf{y}_i \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] & \text{se } \mathbf{x} \text{ compare in } \mathbf{fr} \\ & \text{e } \mathbf{y}_i \text{ NON compare libera in } \mathbf{t}_{\text{ter}} \\ \exists \mathbf{y}_i \mathbf{fr} & \text{se } \mathbf{x} \text{ non compare in } \mathbf{fr} \end{cases} \\ (\exists \mathbf{x} \mathbf{fr})[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] &\equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{fr} \\ (\mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2)[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] &\equiv \mathbf{fr}_1[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \& \mathbf{fr}_2[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \\ (\mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2)[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] &\equiv \mathbf{fr}_1[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \vee \mathbf{fr}_2[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \\ (\mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2)[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] &\equiv \mathbf{fr}_1[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \rightarrow \mathbf{fr}_2[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \\ (\neg \mathbf{fr}_1)[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] &\equiv \neg \mathbf{fr}_1[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \end{aligned}$$

MORALE

Quando sostituisci una variabile y al posto di x in un predicato $\text{pr}(x)$ controlla che - SE compare $\forall y$ o $\exists y$ in $\text{pr}(x)$ - la sostituzione di x con y NON faccia cadere il nuovo y sotto il POTERE di $\forall y$ o $\exists y$ ovvero aumenti il numero di occorrenze di y in loro potere!

$$\frac{\exists y \ y < y \vdash \nabla}{\forall x \ \exists y \ x < y \vdash \nabla} \forall\text{-S}_v \quad \text{NOOOOO!!!!}$$

$$\frac{\forall y \ y = a \vdash y = z}{\forall y \ y = a \vdash \forall x \ x = z} \forall\text{-D} \quad \text{SI!!!!}$$

Stabilire quali delle seguenti applicazioni di $\forall\text{-S}$ o $\exists\text{-D}$ sono lecite

1. È lecita la seguente applicazione di $\forall\text{-S}$

$$\frac{\forall y \ \exists x \ x = y + z, \quad \exists x \ x = x + z \vdash \nabla}{\forall y \ \exists x \ x = y + z \vdash \nabla} \forall\text{-S}$$

??

NO, perchè la sostituzione di y con x NON è lecita (dal basso verso l'alto) perchè aumenta il potere di azione di $\exists x$

2. È lecita la seguente applicazione di $\forall\text{-S}$

$$\frac{\forall y \ \exists x \ x = y + z, \quad \exists x \ x = z + z \vdash \nabla}{\forall y \ \exists x \ x = y + z \vdash \nabla} \forall\text{-S}$$

??

SÌ perchè è lecita la sostituzione in quanto z è libera nel sequente conclusione.

3. È lecita la seguente applicazione di $\forall\text{-D}$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \ x = z + z}{\Gamma \vdash \forall y \ \exists x \ x = y + z} \forall\text{-D}$$

??

NO ma per la condizione sull'applicazione di $\forall\text{-D}$ (e non per errori di sostituzione!) perchè z è libera nel sequente conclusione.

4. È lecita la seguente applicazione di $\forall\text{-D}$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \ x = x + z}{\Gamma \vdash \forall y \ \exists x \ x = y + z} \forall\text{-D}$$

??

NO perchè la sostituzione di y con x NON è lecita in quanto aumenta il potere di azione dell' $\exists x$.

5. È lecita la seguente applicazione di \forall -D

$$\frac{\forall y \ C(y) \vdash \exists x \ x = y + z}{\forall y \ C(y) \vdash \forall w \ \exists x \ x = w + z} \ \forall\text{-D}$$

??

Sì perchè la variabile **y** NON è libera nel sequente conclusione e la sostituzione è lecita visto che non aumenta il potere della quantificazione di **y** nel sequente conclusione.

12.5 Semantica classica dei predicati

Per dire quando $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è **vera** OCCORRE avere un dominio \mathbf{D} su cui far variare \mathbf{x} e occorre definire una funzione

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D} \longrightarrow \{0, 1\}$$

ovvero dire se per un generico $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1 \quad \text{o} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 0$$

Def. 12.5 (modello) Dato linguaggio predicativo \mathcal{L} con costanti \mathbf{c}_j e predicati atomici $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ un modello per \mathcal{L} è dato da

- un dominio (=insieme NON VUOTO) \mathbf{D}
- un'interpretazione delle costanti come elementi di \mathbf{D} e di predicati atomici diversi dall'uguaglianza come funzioni come segue

costante \mathbf{c}_j	\rightsquigarrow	elemento di dominio $\mathbf{c}_j^{\mathcal{D}} \in \mathbf{D}$
predicato atomico $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$	\rightsquigarrow	funzione $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D}^n \longrightarrow \{0, 1\}$ se $n \geq 1$ è il suo numero di variabili libere
variabile proposizionale \mathbf{B} ovvero predicato atomico senza variabili libere	\rightsquigarrow	$\mathbf{B}^{\mathcal{D}} \in \{0, 1\}$

Vedremo poi che l'interpretazione del predicato di uguaglianza in un modello è la stessa in tutti i modelli e corrisponde all'uguaglianza di elementi nel modello.

Ad esempio se consideriamo il linguaggio predicativo arricchito della sola costante \mathbf{c} allora

$\mathbf{D} \equiv$ numeri naturali

$\mathbf{c}^{\mathcal{D}} \equiv 5$

definisce un modello ove l'interpretazione dell'uguaglianza risulta la funzione seguente:

$$(\mathbf{x} = \mathbf{c})^{\mathcal{D}} : \mathbf{D} \longrightarrow \{0, 1\}$$

ove per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$$(\mathbf{x} = \mathbf{c})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \equiv 1 \quad \text{sse} \quad \mathbf{d} = \mathbf{c}^{\mathcal{D}} \quad \text{sse} \quad \mathbf{d} = 5$$

Possiamo inoltre costruire un modello per rendere vera l'argomentazione considerata all'inizio di sezione 12.1.4

Tutti gli uomini sono mortali

Socrate è un uomo

Socrate è mortale

mantenendo il significato dei simboli formali

$\mathbf{M}(\mathbf{x}) =$ “ \mathbf{x} è mortale”

$\mathbf{U}(\mathbf{x}) =$ “ \mathbf{x} è un uomo”

$\bar{s} =$ “Socrate”.

definendolo in tal modo:

$\mathbf{D} =$ L'insieme degli esseri viventi esistiti ed esistenti sulla terra.

$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse “ \mathbf{d} è mortale” per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse “ \mathbf{d} è un uomo” per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$\bar{s}^D = \text{"Socrate"}$.

Però per lo stesso linguaggio predicativo con $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ e \bar{s}^D potremmo definire un altro modello come segue

$\mathbf{D} = \{\text{Pippo, Topolino, Minni}\}$
 $\mathbf{M}(\mathbf{x})^D(\mathbf{d}) = 1$ sse \mathbf{d} è maschio
 $\mathbf{U}(\mathbf{x})^D(\mathbf{d}) = 1$ sse \mathbf{d} è femmina
 $\bar{s}^D = \text{Minni}$.

Invece porre

$\mathbf{D} \equiv$ I sogni del mio vicino di banco.
 $\mathbf{A}(\mathbf{x})^D(\mathbf{d}) = 1$ sse il sogno \mathbf{d} fa paura
 $\mathbf{A}(\mathbf{x})^D(\mathbf{d}) = 0$ sse il sogno \mathbf{d} NON fa paura
 $\mathbf{c}^D =$ il sogno più brutto

NON dà luogo ad un MODELLO BEN DEFINITO perchè non so se il mio vicino di banco sogna e poi neppure quando un sogno fa paura o meno... ovvero NON so stabilire se per ogni \mathbf{d} nel modello vale $\mathbf{A}(\mathbf{x})^D(\mathbf{d}) = 1$ o meno.

Def. 12.6 [INTERPRETAZIONE FORMULE in un modello] Dato linguaggio predicativo \mathcal{L} con costanti \mathbf{c}_j e **predicati atomici** $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ dipendenti da \mathbf{n} variabili libere e variabili proposizionali \mathbf{B} , e fissato un modello per \mathcal{L} con un dominio \mathbf{D} e interpretazione per costanti $\mathbf{c}_j^D \in \mathbf{D}$ e interpretazione per **predicati atomici** dipendenti da \mathbf{n} variabili

$$\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^D(-) : \mathbf{D}^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

e variabili proposizionali $\mathbf{B}^D \in \{0, 1\}$,

il predicato atomico di uguaglianza $\mathbf{t}_{\text{ter}} = \mathbf{s}_{\text{ter}}$ per termini generici \mathbf{t}_{ter} e \mathbf{s}_{ter} è interpretato in tal modo distinguendo vari casi come segue:

1. se $\mathbf{t}_{\text{ter}} \equiv \mathbf{x}$ e $\mathbf{s}_{\text{ter}} \equiv \mathbf{y}$ sono variabili:

$$(\mathbf{x} = \mathbf{y})^D(-) : \mathbf{D}^2 \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}^D(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 \\ 0 & \text{se } \mathbf{d}_1 \neq \mathbf{d}_2 \end{cases}$$

2. se $\mathbf{t}_{\text{ter}} \equiv \mathbf{c}_1$ e $\mathbf{s}_{\text{ter}} \equiv \mathbf{c}_2$ sono costanti

$$(\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2)^D \in \{0, 1\}$$

$$(\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2)^D \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{c}_1^D = \mathbf{c}_2^D \\ 0 & \text{se } \mathbf{c}_1^D \neq \mathbf{c}_2^D \end{cases}$$

3. se $\mathbf{t}_{\text{ter}} \equiv \mathbf{x}$ è variabile e $\mathbf{s}_{\text{ter}} \equiv \mathbf{c}$ costante

$$(\mathbf{x} = \mathbf{c})^D(-) : D \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$(\mathbf{x} = \mathbf{c})^D(\mathbf{d}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{d} = \mathbf{c}^D \\ 0 & \text{se } \mathbf{d} \neq \mathbf{c}^D \end{cases}$$

4. se \mathbf{t}_{ter} è costante e \mathbf{s}_{ter} variabile

$$(\mathbf{c} = \mathbf{x})^D(-) : D \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$(\mathbf{c} = \mathbf{x})^D(\mathbf{d}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{c}^D = \mathbf{d} \\ 0 & \text{se } \mathbf{c}^D \neq \mathbf{d} \end{cases}$$

Inoltre per interpretare predicati composti dall'uguaglianza con altri predicati contenenti altre variabili libere diverse da quelle che compaiono nell'uguaglianza, occorre anche definire l'interpretazione di $\mathbf{t}_{\text{ter}} = \mathbf{s}_{\text{ter}}$ come una funzione su un numero finito arbitrario di variabili $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ basta che contenga quelle di \mathbf{t}_{ter} ed \mathbf{s}_{ter} semplicemente *dimenticando gli elementi del dominio associato alle variabili in più* ovvero di nuovo per casi come segue:

1. se $\mathbf{t}_{\text{ter}} \equiv \mathbf{x}_i$ e $\mathbf{s}_{\text{ter}} \equiv \mathbf{x}_j$ sono variabili

$$(\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j)_{[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]}^D(-) : \mathbf{D}^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$(\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j)_{[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]}^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{d}_i = \mathbf{d}_j \\ 0 & \text{se } \mathbf{d}_i \neq \mathbf{d}_j \end{cases}$$

2. se $\mathbf{t}_{\text{ter}} \equiv \mathbf{c}_1$ e $\mathbf{s}_{\text{ter}} \equiv \mathbf{c}_2$ sono costanti

$$(\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2)_{[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]}^D(-) : \mathbf{D}^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$(\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2)_{[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]}^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{c}_1^D = \mathbf{c}_2^D \\ 0 & \text{se } \mathbf{c}_1^D \neq \mathbf{c}_2^D \end{cases}$$

3. se $\mathbf{t}_{\text{ter}} \equiv \mathbf{x}_i$ è variabile e $\mathbf{s}_{\text{ter}} \equiv \mathbf{c}$ costante

$$(\mathbf{x}_i = \mathbf{c})^D(-) : D \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$(\mathbf{x}_i = \mathbf{c})^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{d}_i = \mathbf{c}^D \\ 0 & \text{se } \mathbf{d}_i \neq \mathbf{c}^D \end{cases}$$

4. se $\mathbf{t}_{\text{ter}} \equiv \mathbf{c}$ è costante e $\mathbf{s}_{\text{ter}} \equiv \mathbf{x}_i$ variabile

$$(\mathbf{c} = \mathbf{x}_i)^D(-) : D \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$(\mathbf{c} = \mathbf{x}_i)^D(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{c}^D = \mathbf{d}_i \\ 0 & \text{se } \mathbf{c}^D \neq \mathbf{d}_i \end{cases}$$

Allo stesso modo al fine di interpretare formule del tipo

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \ \& \ \mathbf{S}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l) \ \rightarrow \ \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

composte dal *predicato atomico*

$$\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

assieme ad altri predicati contenenti variabili libere diverse da $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, che nell'esempio sopra sono

$$\mathbf{S}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l) \quad \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

è necessario fornire l'interpretazione del predicato atomico $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ su una lista arbitraria di variabili libere EXTRA che contenga però le sue variabili libere. Questo significa che se supponiamo di indicare una lista arbitraria di variabili con la notazione

$$\mathbf{var}_1, \dots, \mathbf{var}_m$$

e supponiamo pure che questa lista contenga le variabili di $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ ovvero vale

$$\{ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \} \subseteq \{ \mathbf{var}_1, \dots, \mathbf{var}_m \}$$

con $m \geq n+1$ allora possiamo pensare di interpretare $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ come predicato sulla lista *allargata* $\mathbf{var}_1, \dots, \mathbf{var}_m$ che indichiamo con la notazione

$$\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)_{[\mathbf{var}_1, \dots, \mathbf{var}_m]}$$

come segue

$$\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^D(-)_{[\mathbf{var}_1, \dots, \mathbf{var}_m]} : \mathbf{D}^m \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^D_{[\mathbf{var}_1, \dots, \mathbf{var}_m]}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m) \equiv \mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^D(\mathbf{d}_{\mathbf{p}(1)}, \dots, \mathbf{d}_{\mathbf{p}(n)})$$

a patto però di sapere che la variabile \mathbf{x}_j sta al posto $\mathbf{v}_{\mathbf{p}(j)}$ nella lista allargata!!!

Quindi dati due o più predicati atomici

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \quad \mathbf{S}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l) \quad \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

possiamo tutti pensarli come predicati sulla lista *comuni* di variabili SENZA RIPETIZIONI

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l, \mathbf{z}$$

secondo quanto spiegato sopra e questo ci permetterà di interpretare predicati composti, come ad esempio

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \ \& \ \mathbf{S}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l) \ \rightarrow \ \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

come definito nel seguito (si veda pure sezione 12.6.2).

Nel seguito adottiamo le seguenti convenzioni:

Conveniamo che con la scrittura

$\text{fr}(x_1, \dots, x_n)$ si intende una formula α ovvero $\text{fr}(x_1, \dots, x_n) \equiv \alpha$
 con **variabili libere** incluse nella lista x_1, \dots, x_n
 ovvero $\mathbf{VL}(\alpha) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$



ed inoltre conveniamo che

se una variabile x_n **NON compare proprio** in $\text{fr}(x_1, \dots, x_n) \equiv \alpha$
 ovvero $x_n \notin \mathbf{VL}(\alpha)$
 allora per ogni n -upla $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n)$ in \mathbf{D}^n

$$\begin{array}{ll} \text{lista di } n\text{-elementi con } \mathbf{d}_n & \text{lista di } n-1\text{-elementi SENZA } \mathbf{d}_n \\ \text{fr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}_n) & = \quad \alpha^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}) \end{array}$$

se $\text{fr}(x_1, \dots, x_n) \equiv \alpha$ è formula **SENZA** variabili libere

allora per ogni n -upla $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n)$ in \mathbf{D}^n



$$\begin{array}{ll} \text{lista di } n\text{-elementi con } \mathbf{d}_n & \text{costante proposizionale} \\ \text{fr}(x_1, \dots, x_n)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}_n) & = \quad \text{fr}(x_1, \dots, x_n)^{\mathbf{D}} = \alpha^{\mathbf{D}} \end{array}$$

Ora siamo pronti a definire l'interpretazione di predicati generici.

L'interpretazione di un **predicato composto** $\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ in \mathcal{L} è una FUNZIONE del tipo

$$\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathbf{D}}(-, \dots, -) : \mathbf{D}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

definita per induzione come segue: fissati $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n)$ in \mathbf{D}^n

$$\begin{array}{l} (\neg \text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \\ \text{sse} \\ \text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (\text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \& \text{pr}_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \\ \text{sse} \\ \text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \quad \text{E} \quad \text{pr}_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (\text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \vee \text{pr}_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \\ \text{sse} \\ \text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \quad \text{OPPURRE} \quad \text{pr}_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \end{array}$$

$$(\text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \rightarrow \text{pr}_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n))^\mathcal{D}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1$$

sse

$$\text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^\mathcal{D}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 0$$

OPPURE vale che

$$\text{SE } \text{pr}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^\mathcal{D}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \quad \text{ALLORA} \quad \text{pr}_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^\mathcal{D}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1$$

$$(\forall \mathbf{x}_n \text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n))^\mathcal{D}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}) = 1$$

sse

$$\text{PER OGNI } \mathbf{d} \quad \text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)^\mathcal{D}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}) = 1$$

$$(\exists \mathbf{x}_n \text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n))^\mathcal{D}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}) = 1$$

sse

$$\text{ESISTE } \mathbf{d} \quad \text{tale che} \quad \text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)^\mathcal{D}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}) = 1$$

e un tal \mathbf{d} è detto **TESTIMONE** della verità di $(\exists \mathbf{x}_n \text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n))^\mathcal{D}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1})$

Si noti che l'interpretazione di un predicato atomico \mathbf{B} senza variabili libere, ovvero di una variabile proposizionale, risulta

$$\mathbf{B}^\mathcal{D} = 0 \text{ oppure } \mathbf{B}^\mathcal{D} = 1$$

Allo stesso modo l'interpretazione di una proposizione pr , ovvero di un predicato i cui predicati atomici sono variabili proposizionali, ovvero predicati senza variabili libere, risulta

$$\text{pr}^\mathcal{D} = 0 \text{ oppure } \text{pr}^\mathcal{D} = 1$$

Quindi *ciascun modello per la proposizione pr nel linguaggio predicativo esteso con le sue variabili proposizionali è in corrispondenza con una riga della tabella di verità della proposizione pr* , e viceversa, *ciascuna riga della tabella di verità di pr determina un modello predicativo del linguaggio predicativo esteso con le variabili proposizionali di pr .*

12.5.1 Casi speciali di interpretazione di quantificatori

Le quantificazioni su un predicato $\text{pr}(\mathbf{x})$ ad una variabile risultano interpretate in tale modo

$$(\forall \mathbf{x} \text{pr}(\mathbf{x}))^\mathcal{D} = 1$$

sse

$$\text{PER OGNI } \mathbf{d} \quad \text{pr}(\mathbf{x})^\mathcal{D}(\mathbf{d}) = 1$$

$$\begin{array}{c}
(\exists \mathbf{x} \text{ pr}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 1 \\
\text{sse} \\
\text{ESISTE un } \mathbf{d} \quad \text{pr}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1 \\
\text{ovvero} \\
\text{ESISTE un testimone } \mathbf{d} \text{ della verit  di } \exists \mathbf{x} \text{ pr}(\mathbf{x})
\end{array}$$

12.5.2 Interpretazione della SOSTITUZIONE con costante

L'interpretazione del predicato

$$\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \quad \mathbf{c}, \quad \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$$

ottenuto sostituendo in $\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \quad \mathbf{x}_j, \quad \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$ la variabile \mathbf{x}_j con la costante \mathbf{c} si interpreta cos :

$$\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \quad \mathbf{c}, \quad \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D}^{n-1} \rightarrow \{0, 1\}$$

ove

$$\begin{array}{c}
\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \quad \mathbf{c}, \quad \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{j-1}, \quad \mathbf{d}_{j+1}, \dots, \mathbf{d}_n) \\
\equiv \\
\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \quad \mathbf{x}_j, \quad \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{j-1}, \quad \mathbf{c}^{\mathcal{D}}, \quad \mathbf{d}_{j+1}, \dots, \mathbf{d}_n)
\end{array}$$

Caso speciale di predicati con una variabile. Dato un predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e una costante \mathbf{c} e un modello con dominio \mathbf{D} con interpretazione della costante $\mathbf{c}^{\mathcal{D}} \in \mathbf{D}$ e interpretazione del predicato

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D} \rightarrow \{0, 1\}$$

allora

$$\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}})$$

Esempio:

Nel modello $D = \{\text{Pippo}, \text{Topolino}, \text{Minni}\}$

$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse \mathbf{d}   maschio

$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse \mathbf{d}   femmina

$\bar{\mathbf{s}}^{\mathcal{D}} = \text{Minni}$

risulta che

$$\mathbf{U}(\bar{\mathbf{s}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\bar{\mathbf{s}}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 1$$

mentre

$$\mathbf{M}(\bar{\mathbf{s}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\bar{\mathbf{s}}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 0$$

12.5.3 Interpretazione SOSTITUZIONE con termine generico

L'interpretazione del predicato

$$\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \quad \mathbf{t}, \quad \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$$

ottenuto sostituendo in $\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \quad \mathbf{x}_j, \quad \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$ il termine \mathbf{t} (le cui variabili libere sono comprese tra $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \quad \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n$) si interpreta così:

$$\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \quad \mathbf{t}, \quad \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D}^{n-1} \rightarrow \{0, 1\}$$

ove

$$\begin{aligned} & \text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \quad \mathbf{t}, \quad \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{j-1}, \quad \mathbf{d}_{j+1}, \dots, \mathbf{d}_n) \\ & \quad \equiv \\ & \text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \quad \mathbf{x}_j, \quad \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{j-1}, \quad \mathbf{t}^{\mathcal{D}}, \quad \mathbf{d}_{j+1}, \dots, \mathbf{d}_n) \end{aligned}$$

Def. 12.7 (verità di un predicato senza variabili libere in un modello) *Dato un modello \mathcal{D} con domino \mathbf{D} un predicato senza variabili libere pr è vero nel modello \mathcal{D} se e solo se la sua interpretazione nel modello è 1 ovvero*

$$(\text{pr})^{\mathcal{D}} = 1$$

Def. 12.8 (verità di un predicato con una sola variabile libera in un modello) *Dato un modello \mathcal{D} con domino \mathbf{D} un predicato senza variabili libere $\text{pr}(\mathbf{x})$ è vero nel modello \mathcal{D} se e solo se la sua interpretazione nel modello è 1 su ogni elemento \mathbf{d} ovvero*

$\begin{aligned} & \text{pr}(\mathbf{x}) \text{ è vero nel modello } \mathcal{D} \\ & \quad \text{sse} \\ & \text{PER OGNI } \mathbf{d} \in \mathcal{D} \quad \text{pr}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1 \end{aligned}$
--

Def. 12.9 (verità di un predicato generico in un modello) *Dato un modello \mathcal{D} con domino \mathbf{D} un predicato senza variabili libere $\text{pr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ è vero nel modello \mathcal{D} se e solo se la sua interpretazione nel modello è 1 su ogni enupla di elementi $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n)$ ovvero*

<p><i>una formula</i></p> <p>$\text{fr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ è VERA in un modello \mathcal{D}</p> <p><i>se e solo se</i></p> <p>PER OGNI $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n \quad \text{fr}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1$</p> <p><i>se e solo se</i></p> <p>$(\forall \mathbf{x}_1 \forall \mathbf{x}_2 \dots \forall \mathbf{x}_n \quad \text{fr}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n))^{\mathcal{D}} = 1$</p>

y

12.5.4 Modo semplice per definire un modello

Presentiamo un modo più semplice per costruire un modello di un linguaggio predicativo dato mostrandolo con un esempio.

Dato linguaggio predicativo \mathcal{L} con costanti \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 e **predicati atomici** $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e un dominio

$$\mathbf{D}$$

consideriamo il linguaggio esteso $\mathcal{L}^{\mathbf{D}}$ con nuove costanti

$$\tilde{\mathbf{d}}$$

che sono i nomi degli elementi di $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ e quindi definiamo un **modello**

$$(\mathbf{D}, \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}, \mathbf{c}_1^{\mathbf{D}}, \mathbf{c}_2^{\mathbf{D}}, (\tilde{\mathbf{d}}^{\mathbf{D}})_{\mathbf{d} \in \mathbf{D}})$$

ponendo SEMPRE

$$\tilde{\mathbf{d}}^{\mathbf{D}} = \mathbf{d} \in \mathbf{D}$$

e poi definiamo a piacere l'interpretazione delle costanti

$$\mathbf{c}_1^{\mathbf{D}} \in \mathbf{D} \quad \mathbf{c}_2^{\mathbf{D}} \in \mathbf{D}$$

e dei predicati **atomico** USANDO i nomi degli elementi di \mathbf{D}

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(-) \quad \mathbf{D} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ \mathbf{d} &\mapsto \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{d}})^{\mathbf{D}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(-) \quad \mathbf{D} \times \mathbf{D} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) &\mapsto \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{d}}_1, \tilde{\mathbf{d}}_2)^{\mathbf{D}} \end{aligned}$$

Così facendo otteniamo che

$\forall \mathbf{x} \, \mathbf{pr}(\mathbf{x})$ è **vero** in un modello \mathcal{D} con dominio \mathbf{D}

sse

$$PER \ OGNI \ d \in \mathbf{D} \quad \mathbf{pr}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(d) = 1$$

sse

$$PER \ OGNI \ d \in \mathbf{D} \quad \mathbf{pr}(\tilde{\mathbf{d}})^{\mathbf{D}} = 1$$

$\exists \mathbf{x} \text{ pr}(\mathbf{x})$ è **vero** in un modello \mathcal{D} con dominio \mathbf{D}

sse
 $ESISTE d \in \mathcal{D}$ tale che $\text{pr}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(d) = 1$

sse
 $ESISTE d \in \mathcal{D}$ tale che $\text{pr}(\tilde{\mathbf{d}})^{\mathcal{D}} = 1$

Inoltre per quanto riguarda l'interpretazione dell'uguaglianza

12.5.5 Notazione per indicare un modello

A rigore per indicare un modello con dominio \mathbf{D} dobbiamo scrivere

$$\mathcal{D} \equiv (\mathbf{D}, \mathbf{c}_j^{\mathcal{D}}, \mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}})$$

ma più spesso indicheremo un modello semplicemente con

$$\mathcal{D}$$

quando sarà chiaro dal contesto in cui siamo quali sono le interpretazioni delle costanti e predicati atomici.

Inoltre per semplificare il calcolo dell'interpretazione di un predicato in un modello \mathcal{D} con dominio \mathbf{D} , supposto che $\text{pr}(\mathbf{x})$ sia un predicato dipendente da \mathbf{x} e che $\mathbf{d}, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ siano elementi di \mathbf{D}

$$(\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2)^{\mathcal{D}} \equiv \mathbf{t}_1^{\mathcal{D}} =_{\mathcal{D}} \mathbf{t}_2^{\mathcal{D}}$$

ove \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 sono costanti

$$\mathbf{t}_1^{\mathcal{D}} =_{\mathcal{D}} \mathbf{t}_2^{\mathcal{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{t}_1^{\mathcal{D}} = \mathbf{t}_2^{\mathcal{D}} \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{t}_1^{\mathcal{D}} \neq \mathbf{t}_2^{\mathcal{D}} \end{cases}$$

$$(\neg \text{pr}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = (\neg \text{pr}(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}}$$

$$\text{ove } (\neg \text{pr}(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } (\text{pr}(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti ovvero se } (\text{pr}(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \end{cases}$$

$$(\text{pr}_1(\mathbf{x}) \& \text{pr}_2(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = (\text{pr}_1(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \& (\text{pr}_2(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = (\text{pr}_1(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} \& (\text{pr}_2(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}}$$

$$\text{ove } (\text{pr}_1(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} \& (\text{pr}_2(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } (\text{pr}_1(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \quad \text{E} \quad (\text{pr}_2(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti ovvero se } (\text{pr}_1(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \quad \text{oppure} \quad (\text{pr}_2(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$(\text{pr}_1(\mathbf{x}) \vee \text{pr}_2(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = (\text{pr}_1(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee (\text{pr}_2(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = (\text{pr}_1(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} \vee (\text{pr}_2(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}}$$

$$\text{ove } (\text{pr}_1(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} \vee (\text{pr}_2(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } (\text{pr}_1(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \quad \text{oppure} \quad (\text{pr}_2(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti ovvero se } (\text{pr}_1(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \quad \text{E} \quad (\text{pr}_2(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$(\text{pr}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \text{pr}_2(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = (\text{pr}_1(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \rightarrow (\text{pr}_2(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = (\text{pr}_1(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} \rightarrow (\text{pr}_2(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}}$$

$$\text{ove } (\text{pr}_1(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} \rightarrow (\text{pr}_2(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } (\text{pr}_1(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \quad \text{oppure} \quad (\text{pr}_2(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti ovvero se } (\text{pr}_1(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \quad \text{E} \quad (\text{pr}_2(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$(\forall \mathbf{x} \text{pr}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \forall \mathbf{d} \in \mathbf{D} \quad (\text{pr}(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}}$$

$$\text{ove } \forall \mathbf{d} \in \mathbf{D} \quad (\text{pr}(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se} \quad \text{PER OGNI } \mathbf{d} \quad (\text{pr}(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{se} \quad \text{esiste un } \mathbf{d} \quad (\text{falsario!}) \text{ tale che } (\text{pr}(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$(\exists \mathbf{x} \text{pr}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \exists \mathbf{d} \in \mathbf{D} \quad (\text{pr}(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}}$$

$$\text{ove } \exists \mathbf{d} \in \mathbf{D} \quad (\text{pr}(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se} \quad \text{ESISTE } \mathbf{d} \quad (\text{pr}(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{se} \quad \text{OGNI } \mathbf{d} \quad \text{è (un falsario!) tale che } (\text{pr}(\tilde{\mathbf{d}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

12.5.6 Come falsificare una formula in un modello

Dato che una formula con variabili libere è vera in un modello se e solo se lo è la formula ottenuta quantificando con “per ogni” tutte le sue variabili libere, ne segue quanto qui esposto:

per **falsificare** una formula con una variabile libera $\text{pr}(\mathbf{x})$ in un modello \mathcal{D}
BASTA TROVARE un FALSARIO d
 tale che

$$\text{pr}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

ovvero

$$\text{pr}(\tilde{\mathbf{d}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

se il modello ha tutti i nomi degli elementi del dominio

e quindi **NON c'è bisogno che TUTTI gli elementi d del dominio D**
 risultino **falsari** della funzione che interpreta $\text{pr}(\mathbf{x})$!!!.

Esempi:

1. La formula

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

è **falsa** in tal modello che diventa un suo
contromodello:

$$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \quad \text{sse} \quad \mathbf{d} \text{ è maschio}$$

In tal modello \mathcal{D} si ha che

$$(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \forall \mathbf{d} \in \{\text{Minni}, \text{Topolino}\} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{d}}) = \mathbf{0}$$

perchè

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\text{Minni}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

ovvero Minni è un **falsario** del predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

Inoltre

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) &= (\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) \rightarrow (\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} \\ &= (\mathbf{A}(\widetilde{\text{Topolino}}))^{\mathcal{D}} \rightarrow \forall \mathbf{d} \in \{\text{Minni}, \text{Topolino}\} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{d}}) \\ &= \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

perchè

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\text{Topolino}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

mentre $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$, ovvero Topolino è un **falsario** del predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

2. Nel modello

$\mathbf{D} =$ *Gli esseri viventi esistiti ed esistenti sulla terra.*

$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse “ \mathbf{d} è mortale” per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse “ \mathbf{d} è un uomo” per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$\bar{s}^{\mathcal{D}} =$ “Socrate”.

risulta che

$$\mathbf{M}(\bar{s})^{\mathcal{D}} = \mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\bar{s}^{\mathcal{D}}) = 1$$

e questo basta per concludere che l’implicazione

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})) \& \mathbf{U}(\bar{s}) \rightarrow \mathbf{M}(\bar{s}) \quad \text{è vera nel modello}$$

ossia vale

$$\begin{aligned} (\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})) \& \mathbf{U}(\bar{s}) \rightarrow \mathbf{M}(\bar{s}))^{\mathcal{D}} &= (\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} \& (\mathbf{U}(\bar{s}))^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{M}(\bar{s})^{\mathcal{D}} \\ &= (\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} \& (\mathbf{U}(\bar{s}))^{\mathcal{D}} \rightarrow 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Inoltre in tal modello vale

$$(\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})))^{\mathcal{D}} = 1$$

perchè tutti gli uomini sono appunto mortali in quanto:

per ogni \mathbf{d} essere vivente vale

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$$

e quindi vale

$$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$$

ovvero

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$$

3. Un altro modello per il linguaggio predicativo con $\mathbf{M}(\mathbf{x}), \mathbf{U}(\mathbf{x}), \bar{s}$ è si ottiene prendendo come dominio

$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$

$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse \mathbf{d} è maschio

$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse \mathbf{d} è femmina

$\bar{s}^{\mathcal{D}} = \text{Minni}$.

In tal modello si ha

$$(\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})))^{\mathcal{D}} = 0$$

perchè esiste un *falsario* \mathbf{d} per cui vale $(\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 0$ e questo individuo esiste ponendo $\mathbf{d} = \text{Minni}$, dato che $\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 0$ e $\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 1$.

e nel modello associato con i nomi degli elementi del dominio

$$D = \{\text{Pippo}, \text{Minni}\}$$

$$\begin{aligned} \bar{s}^D &= \text{Minni}. \\ \widetilde{\text{Minni}}^D &= \text{Minni} \\ \widetilde{\text{Pippo}}^D &= \text{Pippo} \end{aligned}$$

potremmo semplicemente dire:

chi è $M(x)^D$ ponendo

$$M(\widetilde{\text{Minni}})^D = 0 \quad M(\widetilde{\text{Pippo}})^D = 1$$

chi è $U(x)^D$ ponendo

$$U(\widetilde{\text{Minni}})^D = 1 \quad U(\widetilde{\text{Pippo}})^D = 0$$

visto che informalmente

$$\begin{aligned} M(x) &= x \text{ è una femmina} \\ U(x) &= x \text{ è un maschio} \end{aligned}$$

Quindi in tal modello si ha $(\forall x (U(x) \rightarrow M(x)))^D = 0$
perchè esiste un **falsario** che è Minni per cui vale

$$(U(\widetilde{\text{Minni}}) \rightarrow M(\widetilde{\text{Minni}}))^D = 1 \rightarrow 0 = 0$$

dato che

$$M(\widetilde{\text{Minni}})^D = 0 \quad U(\widetilde{\text{Minni}})^D = 1$$

12.5.7 Classificazione di verità di una formula predicativa

Ora diamo la nozione di **tautologia/opinione/paradosso** di un predicato, o formula, in **logica classica**:

Def. 12.10 Una formula **fr** in un linguaggio \mathcal{L} è una **TAUTOLOGIA** (o è **VALIDA**) rispetto alla **semantica classica** se è **VERA in OGNI** modello per \mathcal{L} .

Def. 12.11 Una formula **fr** in un linguaggio \mathcal{L} è **SODDISFACIBILE** rispetto alla **semantica classica** se è **VERA in ALMENO UN** modello per \mathcal{L} .

Def. 12.12 una formula **fr** in un linguaggio \mathcal{L} è **NON VALIDA** rispetto alla **semantica classica** se è **FALSA in ALMENO UN** modello per \mathcal{L} , che è chiamato **CONTROMODELLO** di **fr**.

Def. 12.13 Una formula **fr** in un linguaggio \mathcal{L} è un' **OPINIONE** rispetto alla **semantica classica** se **esiste un modello**, detto **contromodello di fr**, in cui **fr** è **FALSA** ed **esiste un modello** in cui **fr** è **VERA**.

Def. 12.14 Una formula **fr** in un linguaggio \mathcal{L} è **INSODDISFACIBILE** o **PARADOSSO** rispetto alla **semantica classica** se è **FALSA** in **OGNI** modello per \mathcal{L} , ovvero la sua negazione $\neg \text{fr}$ è **VALIDA** o **TAUTOLOGIA** rispetto alla semantica classica.

Abbiamo quindi questo parallelismo tra concetti per il linguaggio proposizionale e predicativo:

	Linguaggio proposizionale	Linguaggio predicativo
sintassi	proposizione	predicati
Variabili	A, B, C, \dots	$K, A(x), B(y), C(x,y), \dots$
verità globale	tabella di verità	I modelli
verità locale	riga di tabella	UN modello
validità	proposizione valida tautologia =sua tabella con TUTTI 1	predicato valido tautologia = vero in TUTTI i modelli
NON validità	proposizione NON valida = sua tabella con UNA riga 0	predicato NON valido = falso in UN modello detto CONTROMODELLO
soddisfacibilità	proposizione soddisfacibile = sua tabella con UNA riga 1	predicato soddisfacibile = vero in UN modello
INSoddisfacibilità	proposizione INSoddisfacibile paradosso =sua tabella con TUTTI 0	predicato INSoddisfacibile paradosso =falso in TUTTI i modelli

Concludiamo aggiungendo pure che

un **predicato**, chiamato anche **formula**, **fr** è **OPINIONE** nella semantica classica se **fr** è **NON VALIDO** e **SODDISFACIBILE** ovvero **fr** è **falso** in **UN** modello ed è **vero** in un **ALTRO** modello.

12.5.8 Idea intuitiva di validità di un predicato e tabelle di verità

Le tabelle di verità non sono più sufficienti per catturare la nozione di validità di un predicato in quanto occorre verificare controllare la sua validità in **OGNI** MODELLO. Ora osserviamo che se fissiamo un dominio \mathbf{D} e ci restringiamo a considerare la validità di una formula come $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ in *modelli con lo stesso dominio* \mathbf{D} rispetto ad un linguaggio predicativo con un solo predicato atomico $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, per provare se è valido $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ in tali modelli con lo stesso dominio \mathbf{D} possiamo costruire una tabella per $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ con tante colonne quanti sono gli elementi in \mathbf{D} , ove ogni funzione $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(-)$ che interpreta il predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (e determina uno specifico modello con \mathbf{D} dominio) è rappresentata da una riga della tabella le

cui colonne sono in corrispondenza con gli elementi di \mathbf{D} :

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1)$	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2)$...	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_n)$...	$\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$
1	1	1111111111	1	11111111	1
0	1	0
1	1	0	0
1	0	0
...	0
0	0	0000000000	0	00000000	0

Ora $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vero relativamente a \mathbf{D} e $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ solo se

$$\text{per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D} \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$$

(questo caso è rappresentato dalla prima riga nella tabella sopra- si osservi che la riga può avere infinite entrate se infiniti sono gli elementi in \mathbf{D}!!!)

Analogamente, per rappresentare la validità di un predicato in modelli con un fissato dominio \mathbf{D} , possiamo costruire una tabella per $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ con tante colonne quanti gli elementi in \mathbf{D} , ove ogni funzione $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(-)$ che interpreta il predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (e determina uno specifico modello con \mathbf{D} dominio) è rappresentata da una sua riga (che quindi fa riferimento ad un modello su \mathbf{D}):

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1)$	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2)$...	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_n)$...	$\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$
0	0	0000000000	0	0000000000	0
0	1	1
1	1	0	1
1	0	1
...	1
1	1	1111111111	1	1111111111	1

Ora $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vero relativamente a \mathbf{D} e $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ solo se **esiste un $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ tale che $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$** (questo caso è rappresentato da tutte le righe fuorchè la prima!!!)

In pratica un modello per una formula corrisponde ad una riga della tabella di verità per una proposizione.

12.5.9 Esempi di classificazione di formule

1. Nel seguente modello associato con i nomi degli elementi del dominio

$\mathbf{D} = \{\text{Pippo}, \text{Minni}, \text{Topolino}\}$
 $a^{\mathcal{D}} = \text{Minni}$
 $b^{\mathcal{D}} = \text{Minni}$
 $\widetilde{\text{Minni}}^{\mathcal{D}} = \text{Minni}$
 $\widetilde{\text{Pippo}}^{\mathcal{D}} = \text{Pippo}$
 $\widetilde{\text{Topolino}}^{\mathcal{D}} = \text{Topolino}$

la formula

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

è **vera**.

Infatti

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b})^{\mathcal{D}} = (\widetilde{\text{Minni}} = \widetilde{\text{Minni}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

perchè $\mathbf{a}^{\mathcal{D}} = \text{Minni} = \mathbf{b}^{\mathcal{D}}$

Ma invece

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

è **falsa** nel modello

$\mathbf{D} = \{\text{Pippo}, \text{Minni}, \text{Topolino}\}$

$\mathbf{b}^{\mathcal{D}} = \text{Pippo}$

$\mathbf{a}^{\mathcal{D}} = \text{Minni}$.

$\widetilde{\text{Minni}}^{\mathcal{D}} = \text{Minni}$

$\widetilde{\text{Pippo}}^{\mathcal{D}} = \text{Pippo}$

$\widetilde{\text{Topolino}}^{\mathcal{D}} = \text{Topolino}$

dato che

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b})^{\mathcal{D}} = (\widetilde{\text{Minni}} = \widetilde{\text{Pippo}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

perchè $\mathbf{a}^{\mathcal{D}} = \text{Minni} \neq \mathbf{b}^{\mathcal{D}} = \text{Pippo}$.

Quindi la formula $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ o analogamente il seguente

$$\vdash \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

è un' **opinione** perchè c'è un modello in cui è falso (il secondo) e un modello in cui è vero (il primo).

2. La formula

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

o il seguente

$$\vdash \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

NON è una tautologia perchè è **falso** in tal modello che diventa un suo **contromodello**:

$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse \mathbf{d} è maschio

In tal modello \mathcal{D} si ha che

$$(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \forall \mathbf{d} \in \{\text{Minni}, \text{Topolino}\} \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \mathbf{0}$$

perchè

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\text{Minni}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

ovvero Minni è un falsario del predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

Inoltre

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) &= (\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) \rightarrow (\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} \\ &= (\mathbf{A}(\widetilde{\text{Minni}}))^{\mathcal{D}} \rightarrow \forall \mathbf{d} \in \{\text{Minni}, \text{Topolino}\} \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}}) \\ &= \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

perchè

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\text{Topolino}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

mentre $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$, ovvero **Topolino** è un **falsario** del predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

Però la formula $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è **vera** nel modello

$\mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sempre

$\mathbf{c}^{\mathcal{D}} = \text{Minni}$.

Infatti per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$, ovvero per $\mathbf{d} = \text{Minni}$, si ha

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\text{Minni}}))^{\mathcal{D}} \rightarrow (\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

poichè $(\mathbf{A}(\widetilde{\text{Minni}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = \mathbf{1}$ e pure $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \forall \mathbf{d} \in \{\text{Minni}\} \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$.

Un altro modello in cui $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vera è il seguente

$\mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d}) \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{sempre} \\ \mathbf{0} & \text{mai} \end{cases}$$

In questo modello $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ per definizione e quindi a maggior ragione PER OGNI $d \in D$ si ha $(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$

In conclusione la formula

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

è un' **opinione** perchè vera in un modello e falsa in un altro!

3. La formula

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}))$$

è **vera** nel modello

$\mathbf{D} = \text{Esseri viventi (esistiti ed esistenti)}$

$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \text{"x è mortale"}$

$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \text{"x è un uomo"}$

dove vale $\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ perchè tutti gli uomini sono appunto mortali.

Mentre $\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}))$ è **falsa** nel modello

$\mathbf{D} = \{\text{Pippo}, \text{Topolino}, \text{Minni}\}$

$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse \mathbf{d} è *maschio*

$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse \mathbf{d} è *femmina*

in quanto si ha $\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$

perchè esiste un **falsario** che è $d = \text{Minni}$ per cui vale $(\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ dato che $\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = \mathbf{1}$ e quindi

$$\begin{aligned}
(\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}(\text{Minni})} &= \mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}(\text{Minni})} \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}(\text{Minni})} \\
&= U(\widetilde{\text{Minni}})^{\mathcal{D}} \rightarrow U(\widetilde{\text{Minni}})^{\mathcal{D}} \\
&= \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Concludiamo quindi che pure $\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}))$ è un' **opinione**.

4. $\mathbf{A}(\mathbf{c})$

Questa formula *NON* è *valida*.

Un modello che falsifica $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ è il seguente

$\mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$
 $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ sempre
 $\mathbf{c}^{\mathcal{D}} = \text{Minni}$.

Infatti in questo modello \mathcal{D} si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = \mathbf{0}$$

Un altro modello che falsifica $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ è il seguente:

$\mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat}$
 $\mathbf{c}^{\mathcal{D}} \equiv \mathbf{5} \in \mathbf{Nat}$
 $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d}) \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{d} \leq \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti} \end{cases}$

Infatti $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{5}) = \mathbf{0}$ perchè NON è vero che $\mathbf{5} \leq \mathbf{2}$. In pratica $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ in questo modello formalizza $\mathbf{5} \leq \mathbf{2}$.

Però $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ è anche *soddisfacibile* perchè vera nel modello

$\mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$
 $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sempre
 $\mathbf{c}^{\mathcal{D}} = \text{Minni}$.

Infatti per questo modello \mathcal{D} si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = \mathbf{1}$$

Dunque anche la formula $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ è un' **opinione**.

5. $\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$

Questa formula *NON* è *valida*. Un modello che la **falsifica** è il seguente:

$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$
 $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse \mathbf{d} è maschio
 $\mathbf{c}^{\mathcal{D}} = \text{Topolino}$.

In tal modello \mathcal{D} si ha che $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 0$. Inoltre

$$(\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} \rightarrow (\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

perchè $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = \mathbf{A}(\widetilde{\text{Topolino}})^{\mathcal{D}} \mathbf{1}$ mentre $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$.

La formula $\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è anche *soddisfacibile* perchè vera nel modello

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \{\text{Minni}\} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= 1 \text{ sempre} \\ \mathbf{c}^{\mathcal{D}} &= \text{Minni}. \end{aligned}$$

Infatti per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$, ovvero per $d = \text{Minni}$, si ha

$$(\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 1$$

poichè $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 1$ vale.

Dunque anche la formula $\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è un' **opinione**.

6. $\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$

Questa formula è **una tautologia** poichè vera in ogni modello. Infatti considerato un modello \mathcal{D} qualsiasi, allora o $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = 0$ e quindi l'implicazione è vera senza analizzare il conseguente, ovvero

$$(\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} \rightarrow (\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \rightarrow (\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

oppure $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = 1$. Ora nel caso $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = 1$ si ha che per definizione di interpretazione di sostituzione $\mathbf{1} = \mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}})$ da cui esiste un $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ (che è $\mathbf{c}^{\mathcal{D}}$) tale che $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, ovvero $(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 1$ e dunque l'implicazione $\mathbf{A}(\mathbf{c}) \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vera anche nel caso $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = 1$.

7. $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$

Questa formula *NON è valida*. Un modello che la **falsifica** è il seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \{\text{Topolino}, \text{Minni}\} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= 1 \text{ sse } \mathbf{d} \text{ è maschio} \end{aligned}$$

In tal modello \mathcal{D} si ha che $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 0$. Inoltre

$$(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

perchè $(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ in quanto esiste un **testimone** \mathbf{d} , che è $\mathbf{d} = \text{Topolino}$ tale che $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$.

Infatti

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\text{Topolino}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

mentre $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ e dunque

$$(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = (\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} \rightarrow (\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

La formula $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è però *soddisfacibile* perchè **vera** nel modello

$\mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sempre

Infatti per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$, ovvero per $\mathbf{d} = \text{Minni}$ si ha

$$(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = (\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} \rightarrow (\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = (\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} \rightarrow 1 = 1$$

poichè $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 1$ vale.

Quindi la formula $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è un' **opinione**.

8. $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

La formula *NON* è *valida*. Un modello che la **falsifica** $\forall x \exists y B(x, y)$ è il seguente

$\mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{d}_1 > \mathbf{d}_2 \\ 0 & \text{se } \mathbf{d}_1 \leq \mathbf{d}_2 \end{cases}$$

Nel modello sopra la formula $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ diviene una formalizzazione di “**per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che $x > y$** ” che è falso nel modello per $x = 0$ (lo si dimostri per bene).

La formula $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è però *soddisfacibile* perchè **vera** nel modello seguente

$\mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{d}_1 < \mathbf{d}_2 \\ 0 & \text{se } \mathbf{d}_1 \geq \mathbf{d}_2 \end{cases}$$

per $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \mathbf{D}$.

Nel modello sopra la formula $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ diviene una formalizzazione di “**per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che $x < y$** ” che è una proprietà dei numeri naturali.

Quindi la formula $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è un' **opinione**.

9. $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})$

Questa formula *NON* è *valida* perchè **falsa** nel seguente modello

$\mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 0$ sempre

$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = 1$ sempre

per $\mathbf{d}, \mathbf{d}' \in \mathbf{D}$, ove i valori $(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$ vanno assegnati alle variabili secondo l'ordine alfabetico, ovvero \mathbf{d} va messo al posto di \mathbf{x} , mentre \mathbf{d}' al posto di \mathbf{y} .

Infatti $(\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = \mathbf{0}$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ sempre mentre $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = \mathbf{1}$ sempre.

La formula $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è però *soddisfacibile* perchè **vera** nel modello seguente

$\mathbf{D} = \{\text{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sempre

$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}$ definito a piacere

Infatti in tal modello per ogni $\mathbf{d}, \mathbf{d}' \in \mathbf{D}$, che poi è solo $\mathbf{d} = \mathbf{d}' = \text{Minni}$, si ha $(\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = \mathbf{1}$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sempre e quindi non importa sapere quale è il valore di $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$.

12.5.10 Validità di un sequente in logica predicativa classica

Di seguito riportiamo la nozione di validità e soddisfacibilità per un sequente rispetto alla semantica classica. Come in logica proposizionale un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ viene definito valido o meno, e soddisfacibile o meno se lo è la proposizione che lo rappresenta

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$$

Comunque riportiamo le definizioni precise:

Def. un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **vero in modello** \mathcal{D} se $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **vero nel modello** \mathcal{D} .

Def. un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **TAUTOLOGIA** o **VALIDO** nella semantica classica, se $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **valido** ovvero **tautologia** nella semantica classica, ovvero $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **vero** in **OGNI modello**

Def. un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **SODDISFACIBILE** nella semantica classica se $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **soddisfacibile** nella semantica classica, ovvero **esiste un modello** in cui $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **vero**.

Def. un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **NON VALIDO** nella semantica classica se $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **NON valido** rispetto alla semantica classica, ovvero **esiste un modello** in cui $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **falso** che è chiamato **contromodello** di $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$.

Def. un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **INSODDISFACIBILE**, ovvero **PARADOSSALE** nella semantica classica se $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **insoddisfacibile**, ovvero **paradosso** rispetto alla semantica classica, ovvero $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **falso** in **TUTTI i modelli**.

Concludiamo aggiungendo pure che

Def. un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **OPINIONE** nella semantica classica se $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **opinione** rispetto alla semantica classica, ovvero $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **NON valido** e **soddisfacibile** ovvero $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è **falso** in **UN modello** ed è **vero** in **un ALTRO modello**.

12.5.11 Come falsificare un sequente predicativo

- per falsificare un sequente predicativo *SENZA* variabili libere

$$\text{pm}_1, \dots, \text{pm}_n \vdash \text{cl}_1, \dots, \text{cl}_m$$

ove pm_i sono formule predicative poste come **premesse** e cl_i sono formule predicative poste come **conclusioni**

significa trovare un modello

$$\mathcal{D}$$

in cui risulta

$$(\text{pm}_i)^{\mathcal{D}} = 1 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad (\text{cl}_j)^{\mathcal{D}} = 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, m$$

in quanto la *negazione del sequente* $\text{pm}_1, \dots, \text{pm}_n \vdash \text{cl}_1, \dots, \text{cl}_m$ è

$$\neg((\text{pm}_1 \ \& \ \dots) \ \& \ \text{pm}_n \rightarrow (\text{cl}_1 \ \vee \ \text{cl}_2) \ \vee \ \dots \ \vee \ \text{cl}_m)$$

che equivale a

$$(\text{pm}_1 \ \& \ \dots) \ \& \ \text{pm}_n) \ \& \ ((\neg \text{cl}_1 \ \& \ \neg \text{cl}_2) \ \& \ \dots \ \& \ \neg \text{cl}_m)$$

e questa negazione nel modello \mathcal{D} risulta difatti VERA solo se

$$(\text{pm}_i)^{\mathcal{D}} = 1 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad (\text{cl}_j)^{\mathcal{D}} = 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, m$$

- per falsificare un sequente predicativo *SENZA* variabili libere

$$\vdash \text{cl}_1, \dots, \text{cl}_m$$

si procede come nel caso di un sequente proposizionale con lista vuota di premesse.

- per falsificare un sequente predicativo *SENZA* variabili libere

$$\text{pm}_1, \dots, \text{pm}_n \vdash$$

si procede come nel caso di un sequente proposizionale con lista vuota di conclusioni.

- per **falsificare un sequente predicativo con VARIABILI LIBERE** ove $\text{pm}_i(\bar{y})$ sono formule predicative poste come **premesse** e $\text{cl}_i(\bar{y})$ sono formule predicative poste come **conclusioni** -

$$\text{pm}_1(\bar{y}), \dots, \text{pm}_n(\bar{y}) \vdash \text{cl}_1(\bar{y}), \dots, \text{cl}_m(\bar{y})$$

ove $\bar{y} \equiv \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$ è la lista che contiene tutte le variabili libere del sequente, significa trovare un modello

$$\mathcal{D}$$

in cui **vi sono dei cosiddetti “falsari”** $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k$ che sono **testimoni** degli antecedenti

$$(\text{pm}_i(\bar{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = 1 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n$$

e

$$(\text{cl}_j(\bar{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, m$$

in quanto la *negazione del sequente* $\text{pm}_1(\bar{y}), \dots, \text{pm}_n(\bar{y}) \vdash \text{cl}_1(\bar{y}), \dots, \text{cl}_m(\bar{y})$ è

$$\neg \forall \mathbf{y}_1 \dots \forall \mathbf{y}_n ((\text{pm}_1(\bar{y}) \ \& \ \dots) \ \& \ \text{pm}_n(\bar{y}) \rightarrow (\text{cl}_1(\bar{y}) \ \vee \ \text{cl}_2(\bar{y})) \ \vee \ \dots \ \vee \ \text{cl}_m(\bar{y}))$$

che equivale a

$$\exists \mathbf{y}_1 \dots \exists \mathbf{y}_n \neg ((\text{pm}_1(\bar{y}) \ \& \ \dots) \ \& \ \text{pm}_n(\bar{y}) \rightarrow (\text{cl}_1(\bar{y}) \ \vee \ \text{cl}_2(\bar{y})) \ \vee \ \dots \ \vee \ \text{cl}_m(\bar{y}))$$

che a sua volta equivale a

$$\exists \mathbf{y}_1 \dots \exists \mathbf{y}_n (\text{pm}_1(\bar{y}) \ \& \ \dots \ \& \ \text{pm}_n(\bar{y})) \ \& \ ((\neg \text{cl}_1(\bar{y}) \ \& \ \neg \text{cl}_2(\bar{y})) \ \& \ \dots \ \& \ \neg \text{cl}_m(\bar{y}))$$

e tale negazione nel modello \mathcal{D} è VERA solo se risulta che esistono **degli elementi** $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k$ **FALSARI dei conseguenti e TESTIMONI degli antecedenti**

$$(\text{pm}_i(\bar{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = 1 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad (\text{cl}_j(\bar{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, m$$

- per **falsificare un sequente predicativo con VARIABILI LIBERE** ove $\text{cl}_i(\bar{y})$ sono formule predicative poste come CONCLUSIONI -

$$\vdash \text{cl}_1(\bar{y}), \dots, \text{cl}_m(\bar{y})$$

ove $\bar{y} \equiv \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$ è la lista che contiene tutte le variabili libere del sequente, significa trovare un modello

$$\mathcal{D}$$

in cui **vi sono dei FALSARI** $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k$ tali che

$$(\text{cl}_j(\bar{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, m$$

in quanto la *negazione del sequente* $\vdash \text{cl}_1(\bar{y}), \dots, \text{cl}_m(\bar{y})$ è

$$\neg \forall \mathbf{y}_1 \dots \forall \mathbf{y}_n (\text{tt} \rightarrow (\text{cl}_1(\bar{y}) \ \vee \ \text{cl}_2(\bar{y})) \ \vee \ \dots \ \vee \ \text{cl}_m(\bar{y}))$$

che equivale a

$$\exists \mathbf{y}_1 \dots \exists \mathbf{y}_n \neg ((\text{cl}_1(\bar{y}) \ \vee \ \text{cl}_2(\bar{y})) \ \vee \ \dots \ \vee \ \text{cl}_m(\bar{y}))$$

che a sua volta equivale a

$$\exists \mathbf{y}_1 \dots \exists \mathbf{y}_n (\neg \text{cl}_1(\bar{y}) \ \& \ \neg \text{cl}_2(\bar{y})) \ \& \ \dots \ \& \ \neg \text{cl}_m(\bar{y})$$

e tale negazione nel modello \mathcal{D} è VERA solo se risulta che esistono **dei testimoni** $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k$ **dell'esistenziale** ovvero dei **FALSARI** dei vari \mathbf{cl}_j

$$(\mathbf{cl}_j(\bar{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, m$$

- per **falsificare un sequente predicativo** *con* **VARIABILI LIBERE** ove $\mathbf{pm}_i(\bar{\mathbf{y}})$ sono formule predicative poste come PREMESSE e $\mathbf{cl}_i(\bar{\mathbf{y}})$ sono formule predicative poste come CONCLUSIONI

$$\mathbf{pm}_1(\bar{\mathbf{y}}), \dots, \mathbf{pm}_n(\bar{\mathbf{y}}) \vdash$$

ove $\bar{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$ è la lista che contiene tutte le variabili libere del sequente, significa trovare un modello

$$\mathcal{D}$$

in cui **vi sono dei FALSARI** $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k$ tali che

$$(\mathbf{pm}_i(\bar{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = 1 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n$$

in quanto la *negazione del sequente* $\mathbf{pm}_1(\bar{\mathbf{y}}), \dots, \mathbf{pm}_n(\bar{\mathbf{y}}) \vdash$ è

$$\neg \forall \mathbf{y}_1 \dots \forall \mathbf{y}_n ((\mathbf{pm}_1(\bar{\mathbf{y}}) \ \& \ \dots) \ \& \ \mathbf{pm}_n(\bar{\mathbf{y}}) \rightarrow \perp)$$

che equivale a

$$\exists \mathbf{y}_1 \dots \exists \mathbf{y}_n \neg ((\mathbf{pm}_1(\bar{\mathbf{y}}) \ \& \ \dots) \ \& \ \mathbf{pm}_n(\bar{\mathbf{y}}) \rightarrow \perp)$$

che a sua volta equivale a

$$\exists \mathbf{y}_1 \dots \exists \mathbf{y}_n (\mathbf{pm}_1(\bar{\mathbf{y}}) \ \& \ \dots \ \& \ \mathbf{pm}_n(\bar{\mathbf{y}}))$$

e tale negazione nel modello \mathcal{D} è VERA solo se risulta che esistono **dei TESTIMONI** $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k$

$$(\mathbf{pm}_i(\bar{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = 1 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n$$

12.6 Come classificare la verità di un sequente predicativo

Al contrario della logica classica proposizionale, per la **logica classica predicativa** **NON** esiste una **procedura AUTOMATICA** per decidere la validità di arbitrarie formule o sequenti.

Esiste però una **procedura SEMI-automatica** che si avvale del calcolo dei sequenti LC e richiede la costruzione di contro-modelli nel caso di non validità.

12.6.1 Procedura per stabilire validità, insoddisfacibilità, soddisfacibilità di sequenti in LC

Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$

passo 1: si prova a derivarlo in **LC₌**

$$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow \text{è valido ovvero è tautologia} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{vai al passo 2} \end{cases}$$

passo 2: costruisci contromodello con foglia di albero che NON si chiude

se esiste contromodello \Rightarrow il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **NON valido**

e vai al passo 3

passo 3: prova a derivare la negazione di $\Gamma \vdash \Delta$ in **LC**₌

che è $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ se non ci sono variabili libere

oppure è $\vdash \neg \forall \bar{y} (\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ se \bar{y} è la lista che contiene tutte le variabili libere del sequente $\Gamma \vdash \Delta$

{	se si deriva	$\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ è insoddisfacibile ovvero è paradossale
	se NON si riesce a derivare	applica il passo 2 alla negazione di $\Gamma \vdash \Delta$
		se trovi contromodello di $\neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ (oppure di $\vdash \neg \forall \bar{y} (\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$)
		questo è modello di $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$
		che è quindi anche modello di $\Gamma \vdash \Delta$
	$\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ è soddisfacibile	
	e siccome è pure non valido allora $\Gamma \vdash \Delta$ risulta OPINIONE	

Consigli su come derivare

Nell'intento di cercare una derivazione è meglio:

applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e \forall -D e \exists -S con VARIABILI NUOVE
applicare le regole \forall -S e \exists -D con TERMINI presenti nelle formule del sequente
se non si riesce a derivare il sequente a causa di una foglia non assioma che non si riesce a chiudere (ovvero non si riesce a farla diventare nodo di un ramo con assiomi come foglie), conviene costruire il contromodello falsificando il sequente che si trova lungo il ramo che finisce nella foglia non assioma PRIMA di una seconda applicazione di \forall -S o \exists -D

Esempio Cerchiamo una derivazione di

$$\forall z (A(z) \& B(z)) \vdash \forall z A(z)$$

Applicando prima \forall -D di \forall -S troviamo ad esempio questa derivazione

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{\forall z (A(z) \& B(z)), A(w), B(w) \vdash A(w)}{\forall z (A(z) \& B(z)), A(z) \& B(z) \vdash A(w)} \&-S}{\forall z (A(z) \& B(z)) \vdash A(w)} \forall-S}{\forall z (A(z) \& B(z)) \vdash \forall z A(z)} \forall-D$$

ove il primo \forall -D è corretto perchè **w** non compare libera nel sequente radice.

Se invece avessimo applicato prima \forall -S avremmo ottenuto una derivazione del genere ad esempio

$$\begin{array}{c}
 \text{ax-id} \\
 \frac{\mathbf{A(z) \& B(z), \forall z (A(z) \& B(z)), A(w), B(w) \vdash A(w)}}{\mathbf{A(z) \& B(z), \forall z (A(z) \& B(z)), A(w) \& B(w) \vdash A(w)}} \&-S \\
 \frac{\mathbf{A(z) \& B(z), \forall z (A(z) \& B(z)) \vdash A(w)}}{\mathbf{A(z) \& B(z), \forall z (A(z) \& B(z)), A(z) \& B(z) \vdash A(w)}} \forall-S \\
 \frac{\mathbf{A(z) \& B(z), \forall z (A(z) \& B(z)) \vdash A(w)}}{\mathbf{\forall z (A(z) \& B(z)), A(z) \& B(z) \vdash A(w)}} \text{sc}_{sx} \\
 \frac{\mathbf{\forall z (A(z) \& B(z)), A(z) \& B(z) \vdash A(w)}}{\mathbf{\forall z (A(z) \& B(z)), A(z) \& B(z) \vdash \forall z A(z)}} \forall-D \\
 \frac{\mathbf{\forall z (A(z) \& B(z)), A(z) \& B(z) \vdash \forall z A(z)}}{\mathbf{\forall z (A(z) \& B(z)) \vdash \forall z A(z)}} \forall-S
 \end{array}$$

ove l'applicazione di \forall -D è corretta perchè w non compare libera nel sequente sopra il sequente radice.

In questa derivazione si vede che la prima applicazione di \forall -S è stata inutile perchè è il \forall -D che sceglie la variabile libera con cui finire la derivazione, per via del fatto che lo si applica solo se la variabile liberata dal quantificatore non compare libera nel sequente conclusione della regola.

12.6.2 Precisazione sull'interpretazione di predicati

Abbiamo definito in definizione 12.6 l'interpretazione di un predicato $\mathbf{A(x)}$ in un modello \mathbf{D} come una funzione

$$\mathbf{A(x)^D(-) : D \longrightarrow \{0, 1\}}$$

visto che c'è SOLO x come variabile libera in $\mathbf{A(x)}$.

Ora precisiamo che l'interpretazione di un predicato NON dipende dal NOME delle variabili ma dipende solo dal numero e ordine delle variabili che compaiono nel predicato ovvero per esempio il predicato $\mathbf{A(z)^D(-) : D \longrightarrow \{0, 1\}}$ si interpreta nello stesso modo sia che dipenda da z come unica variabile che da x , ovvero

$$\mathbf{A(z)^D(d) = A(x)^D(d) \quad \text{per } d \in D}$$

in quanto l'interpretazione di un predicato NON dipende dal nome della variabile libera ma solo dal fatto che ce ne è una! e lo si vede bene all'interno di un modello di un linguaggio con i nomi per tutti gli elementi del suo dominio \mathbf{D} in quanto si ha

$$\mathbf{A(z)^D(d) = A(\tilde{d})^D = A(x)^D(d) \quad \text{per ogni } d \in D}$$

Però se dobbiamo interpretare $\mathbf{A(z) \& A(x)}$ dobbiamo pensare sia $\mathbf{A(z)}$ che $\mathbf{A(x)}$ come *funzione binarie nel contesto delle variabili*

$$[\mathbf{x}, \mathbf{z}]$$

in quanto la formula $\mathbf{A(z) \& A(x)}$ si interpreta come una funzione binaria

$$(\mathbf{A(z) \& A(x)})^D(-) : D \times D \longrightarrow \{0, 1\}$$

ovvero dobbiamo specificare quale sia l'interpretazione sia di $\mathbf{A(z)}$ che $\mathbf{A(x)}$ sotto contesto $[\mathbf{x}, \mathbf{z}]$, ovvero dobbiamo specificare

$$(\mathbf{A(z)}_{[\mathbf{x}, \mathbf{z}]})^D(-) : D \times D \longrightarrow \{0, 1\} \quad (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}, \mathbf{z}]})^D(-) : D \times D \longrightarrow \{0, 1\}$$

a partire dall'interpretazione con un'unica variabile libera

$$\mathbf{A(z)}_{[\mathbf{z}]}^D(d) = \mathbf{A(\tilde{d})}^D = \mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}]}^D(d) \quad \text{per ogni } d \in D$$

A tal scopo ASSUMIAMO che il contesto delle variabili sia sempre interpretato *secondo l'ordine alfabetico*, ovvero dato $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \in \mathbf{D} \times \mathbf{D}$ l'elemento da sostituire alla variabile \mathbf{x} varia sul PRIMO dominio, ovvero su \mathbf{d}_1 , mentre quello per la variabile \mathbf{z} (che nell'alfabeto viene dopo ad \mathbf{x}) varia sul SECONDO dominio ovvero su \mathbf{d}_2 . Poi se c'è pure la variabile \mathbf{w} questa varierebbe sul PRIMO dominio perchè nell'ordine alfabetico inglese \mathbf{w} è prima di \mathbf{x} .

Per esempio

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{y}))^{\mathbf{D}}(-, -) : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{0, 1\}$$

risulta definito in tal modo

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{y})_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \\ & \equiv (\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{y})_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)) \\ & = (\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{x}]}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1) \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{y})_{[\mathbf{y}]}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_2)) \\ & = (\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{x}]}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1) \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{x}]}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_2)) \\ & = \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}_1})^{\mathbf{D}} \rightarrow \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}_2})^{\mathbf{D}} \end{aligned}$$

Mentre ad esempio

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A}(\mathbf{z}) \& \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}]}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \\ & \equiv (\mathbf{A}(\mathbf{z})_{[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}]}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \& (\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}]}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}]}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)) \\ & = (\mathbf{A}(\mathbf{z})_{[\mathbf{z}]}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_3) \& (\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{x}]}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_2) \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}]}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1)) \\ & = \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}_3})^{\mathbf{D}} \& \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}_2})^{\mathbf{D}} \rightarrow \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}_1})^{\mathbf{D}} \end{aligned}$$

Inoltre nel seguente modello

$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$
 $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse \mathbf{d} è maschio

$$(\mathbf{A}(\mathbf{z}) \& \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}]}^{\mathbf{D}}(\text{Minni}, \text{Topolino}, \text{Topolino}) = 0$$

perchè

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A}(\mathbf{z}) \& \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}]}^{\mathbf{D}}(\text{Minni}, \text{Topolino}, \text{Topolino})) \\ & = (\mathbf{A}(\mathbf{z})_{[\mathbf{z}]}^{\mathbf{D}}(\text{Topolino}) \& (\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{x}]}^{\mathbf{D}}(\text{Topolino}) \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}]}^{\mathbf{D}}(\text{Minni})) \\ & = (\mathbf{A}(\text{Topolino}))^{\mathbf{D}} \& (\mathbf{A}(\text{Topolino}))^{\mathbf{D}} \rightarrow (\mathbf{A}(\text{Minni}))^{\mathbf{D}} = 1 \rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

Quindi $\mathbf{A}(\mathbf{z}) \& \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})$ NON è vero nel modello.

Invece nel modello $\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sempre

chiaramente $\mathbf{A}(\mathbf{z}) \& \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})$ è vera perchè per ogni $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \in \mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \mathbf{D}$ si ha

$$(\mathbf{A}(\mathbf{z}) \& \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}]}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = 1$$

Esercizio di chiarimento: Si stabilisca la validità e soddisfacibilità o meno del seguente

$$\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

Proviamo ad applicare la procedura 12.6.1 e quindi procediamo a derivare

$$\frac{\frac{\mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})} \exists\text{-D}}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \forall\text{-D}$$

ove la prima applicazione di $\forall\text{-D}$ è corretta poichè \mathbf{z} non appare libera in $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$ e così pure l'ultima applicazione di $\exists\text{-D}$ è pure corretta perchè \mathbf{w} non appare libera (perchè NON compare proprio) in $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})$.

L'ultima foglia suggerisce di costruire un contromodello falsificando il sequente

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

ovvero la formula $\mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{z})$. A tal scopo basta trovare un modello \mathbf{D} tale che

$$(\mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{z}))^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{0, 1\}$$

(ove \mathbf{w} varia sulla prima componente \mathbf{D} del prodotto $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$ e \mathbf{z} sulla seconda componente secondo l'ordine alfabetico inglese delle lettere rappresentanti le variabili visto che \mathbf{w} viene prima di \mathbf{z}) NON sia la funzione costante $\mathbf{1}$, ovvero esista una coppia $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ in $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$ tale che

$$(\mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{z}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}_1})^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}_2})^{\mathcal{D}} = 0$$

Quindi basta che risulti $\mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}_1})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}_2})^{\mathcal{D}} = 0$.

Un tal contromodello è il seguente:

$\mathbf{D} \equiv \{\text{Minni}, \text{Pippo}\}$ con

$$\mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = \mathbf{A}(\widetilde{\text{Minni}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \quad \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\text{Pippo}) = \mathbf{A}(\widetilde{\text{Pippo}})^{\mathcal{D}} = 0$$

e si noti che per quanto esposto sopra vale pure

$$\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = \mathbf{A}(\widetilde{\text{Minni}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\text{Pippo}) = \mathbf{A}(\widetilde{\text{Pippo}})^{\mathcal{D}} = 0$$

Quindi in tal modello risulta che

$$\mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}, \text{Pippo}) = \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\text{Pippo}) = \mathbf{A}(\widetilde{\text{Pippo}})^{\mathcal{D}} = 0$$

mentre

$$\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}, \text{Pippo}) = \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = \mathbf{A}(\widetilde{\text{Minni}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Dunque il sequente $\mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{z})$ è **falso** in tal modello e per la sicurezza delle regole del calcolo predicativo $\mathbf{LC}_=$, che mostreremo nel seguito, tale modello **falsifica** pure

$$\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

che risulta quindi *NON* è *valido*.

Ora per provare se il sequente $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$ è **soddisfacibile** proviamo a derivare la sua negazione ovvero

$$\vdash \neg(\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}))$$

e nel tentativo di derivarlo otteniamo

$$\frac{\frac{\vdash \exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash} \rightarrow\text{-S}}{\vdash \neg(\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}))} \neg\text{-D}$$

Ora consideriamo la foglia a sx. Si vede che se si prova a continuare a derivare con $\exists - \mathbf{D}$ non si arriva che a ripetere l'esistenziale assieme a delle formule del tipo $\mathbf{A}(\mathbf{t})$. **Conviene fermarsi prima di un'applicazione di $\exists - \mathbf{D}$ (o al più dopo una sola applicazione)** e procedere a trovare un contromodello **falsificando**

$$\vdash \exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

(si ricordi che il contesto vuoto a sx si interpreta sempre come vero..) ovvero basta costruire un modello \mathcal{D} in cui vale $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$.

Per esempio possiamo definire \mathcal{D} ponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\equiv \mathbf{Nat} \\ \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{0} \text{ per ogni naturale } \mathbf{d} \end{aligned}$$

Infatti in questo modello chiaramente $(\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ e dunque per la sicurezza delle regole del calcolo predicativo $\mathbf{LC}_=$ tal modello rende falso

$$\vdash \neg(\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}))$$

e dunque rende vero il sequente di partenza $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$, da cui segue che il sequente $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$ risulta **soddisfacibile**.

Alternativamente invece di analizzare la foglia a sx potevamo proseguire la derivazione con la foglia a dx

$$\forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash$$

Anche qui si può notare che se si prova a continuare a derivare con $\forall - \mathbf{S}$ non si arriva che a ripetere la formula universale assieme a delle formule del tipo $\mathbf{A}(\mathbf{t})$. **Conviene fermarsi prima di ogni applicazione di $\forall - \mathbf{S}$ (o al più dopo una sola applicazione)** e procedere a trovare un contromodello **falsificando**:

$$\forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash$$

(si ricordi che il contesto vuoto a dx si interpreta sempre come falso..) ovvero basta costruire un modello \mathcal{D} in cui vale $\forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Per esempio possiamo definire

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\equiv \mathbf{Nat} \\ \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{1} \text{ sempre} \end{aligned}$$

Questo modello è contromodello per il sequente

$$\vdash \neg(\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}))$$

e dunque rende vero il sequente di partenza $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$. Abbiamo concluso dunque con un altro tipo di modello che il sequente $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$ risulta **soddisfacibile**.

In conclusione il sequente $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$ è un' **opinione** avendo trovato un modello in cui è falso e uno in cui è vero.

12.6.3 Esempi di classificazione della verità di un sequente

1. L'argomentazione

Se uno è mite e gentile allora è amabile.

Se uno non è gentile allora non è amabile e neppure mite.

si formalizza nel seguente

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})) \vdash \forall \mathbf{x} (\neg \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \& \neg \mathbf{M}(\mathbf{x}))$$

usando:

$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ è mite

$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ è gentile

$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ è amabile

che proviamo a vedere se si deriva seguendo lo schema in sezione 12.6.1.

$$\frac{\frac{\frac{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), A(x) \vdash G(x)}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \neg A(x), G(x)} \neg\text{-D} \quad \frac{\frac{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), M(x) \vdash G(x)}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), \vdash \neg M(x), G(x)} \neg\text{-D}}{\frac{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \neg A(x) \& \neg M(x), G(x)}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash G(x), \neg A(x) \& \neg M(x)} \&\text{-D}} \text{sc}_{dx} \quad \frac{\frac{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), \neg G(x) \vdash \neg A(x) \& \neg M(x)}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \neg G(x) \rightarrow \neg A(x) \& \neg M(x)} \neg\text{-S}}{\frac{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \neg G(x) \rightarrow \neg A(x) \& \neg M(x)}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \forall x (\neg G(x) \rightarrow \neg A(x) \& \neg M(x))} \rightarrow\text{-D}} \forall\text{-D}$$

ove il primo $\forall\text{-D}$ si applica perchè \mathbf{x} NON compare libera nel resto del sequente. E poi ci accorgiamo che non ha senso continuare... Infatti continuando a derivare la seconda foglia dell'albero precedente otteniamo

$$\frac{\frac{\text{ax-id} \quad M(x), \forall x (\dots) \vdash M(x) \quad M(x), \forall x (\dots) \vdash G(x), G(x)}{M(x), \forall x (\dots) \vdash M(x) \& G(x), G(x)} \&\text{-D} \quad \frac{M(x), \forall x (\dots), A(x) \vdash G(x)}{M(x), \forall x (\dots), M(x) \& G(x) \rightarrow A(x) \vdash G(x)} \rightarrow\text{-S}}{\frac{\frac{M(x), \forall x (\dots), M(x) \& G(x) \rightarrow A(x) \vdash G(x)}{M(x), \forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash G(x)} \forall\text{-S} \quad \frac{M(x), \forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), M(x) \vdash G(x)}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), M(x) \vdash G(x)} \text{sc}_{dx}} \forall\text{-S}$$

e ci accorgiamo che la foglia

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} (\dots) \vdash \mathbf{G}(\mathbf{x}), \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

in alto a dx risulta equivalente al sequente dell'albero prima di $\forall\text{-S}$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})) \vdash \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

a meno di una ripetizione di $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ nelle conclusioni. E analogamente continuando a derivare l'albero sopra con $\forall\text{-S}$ dopo uno scambio non otteniamo nulla di nuovo... e quindi ci conviene falsificare il sequente dell'albero prima di applicare $\forall\text{-S}$, ovvero

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})) \vdash \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

A tal scopo prendiamo un dominio \mathbf{D} non vuoto qualsiasi e poniamo:

$\mathbf{G}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ per ogni \mathbf{d} in \mathbf{D} ,

$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ per ogni \mathbf{d} in \mathbf{D}

e $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ è definito a piacere. Poi si noti che

$$(\forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

poichè per ogni \mathbf{d} in \mathbf{D} si ha $(\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ e quindi tale modello risulta un *contromodello* del sequente

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})), \mathbf{M}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

(ovvero lo falsifica) perchè su un elemento del dominio (in realtà su ogni elemento del dominio) le **premesse** sono **vere** mentre le **conclusioni** sono **false**, da cui il sequente di partenza

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})) \vdash \forall \mathbf{x} (\neg \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \& \neg \mathbf{M}(\mathbf{x}))$$

risulta **non valido** perchè abbiamo adottato solo regole (che mostreremo essere) sicure per arrivare alla foglia

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})), \mathbf{M}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

MORALE= abbiamo costruito un contromodello pensando ad un dominio in cui **TUTTI gli individui d NON sono gentili** ma **tutti sono miti** senza considerare se sono amabili o meno.

In questo modo NON è vero che **se uno non è gentile NON è neppure mite** senza per questo contraddire il fatto che **se uno è gentile e mite allora è amabile** che vale perchè l'antecedente di questa implicazione non si verifica mai nel modello (non ci sono infatti nel nostro dominio individui gentili!!).

Poi procediamo a studiare la soddisfacibilità del sequente di partenza che per comodità abbreviamo come segue

$$\vdash \mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2$$

ove $\mathbf{pr}_1 \equiv \forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}))$

$\mathbf{pr}_2 \equiv \forall \mathbf{x} (\neg \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \& \neg \mathbf{M}(\mathbf{x}))$.

A tal scopo proviamo a derivare la negazione della formula che rappresenta il sequente ovvero

$$\vdash \neg (\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2)$$

e si ottiene (sviluppando l'albero nel modo ottimale, ovvero senza applicare \forall -S inutilmente..)

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}), \mathbf{G}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{x})} \&-D}{\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})} \rightarrow -D}{\vdash \mathbf{pr}_1} \forall -D \quad \frac{\mathbf{pr}_2 \vdash}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2 \vdash} \rightarrow -D$$

$$\frac{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2 \vdash}{\vdash \neg (\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2)} \neg -D$$

ove l'applicazione di \forall -D è lecita perchè la variabile x non appare libera nel sequente conclusione. Ora per ottenere un contromodello della negazione del sequente di partenza, e quindi un modello del sequente di partenza basta falsificare la foglia

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}), \mathbf{G}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

mandando sempre a **1** l'interpretazione di $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ e a **0** quella di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$: ovvero dato un dominio \mathbf{D} non vuoto si definisce

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) &= \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D} \end{aligned}$$

In tal modello si verifica che **per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$**

$$(\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \& \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

ovvero si è trovato un contromodello per la negazione del sequente di partenza

$$\vdash \neg(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2)$$

e dunque un modello per il sequente di partenza.

In conclusione, il sequente di partenza $\vdash \mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2$ sopra risulta **non valido** ma **soddisfacibile**, visto che esiste un modello in cui è falso e uno in cui è vero ed è quindi un' **opinione**.

2. Il sequente $\vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{x}$ è una **tautologia** perchè si deriva in tal modo

$$\frac{\begin{array}{c} = -ax \\ \vdash \mathbf{x} = \mathbf{x} \end{array}}{\vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{x}} \forall -D$$

ove l'applicazione di $\forall -D$ è lecita perchè \mathbf{x} non è libera nel sequente radice.

3. Il sequente $\vdash \neg \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{x}$ è **insoddisfacibile** perchè una derivazione non si trova (provarci per crederci!) e passiamo subito a derivare la negazione della sua conclusione ovvero $\vdash \neg \neg \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{x}$

$$\frac{\begin{array}{c} = -ax \\ \vdash \mathbf{x} = \mathbf{x} \\ \hline \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{x} \end{array} \forall -D}{\begin{array}{c} \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{x} \vdash \neg \neg \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{x} \end{array} \neg -S} \neg -D$$

4. Il sequente $\vdash \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ **NON** è *valido*.

Infatti provando a derivarlo si trova

$$\frac{\begin{array}{c} \vdash \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ \hline \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{array} \forall -D}{\vdash \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{y}} \forall -D$$

ove la prima applicazione di $\forall -D$ è corretta perchè \mathbf{y} non appare libera nel sequente radice, ed anche la seconda applicazione di $\forall -D$ è corretta perchè \mathbf{x} non appare libera nel suo sequente conclusione.

Non trovando una derivazione proviamo a costruire un contromodello di $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. A tal scopo consideriamo il seguente modello

$$\mathbf{D} \equiv \{1, 2\}$$

ove vale $(\mathbf{x} = \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(1, 2) \equiv \mathbf{0}$ perchè $1 \neq 2$ e quindi concludiamo che

$$\vdash \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

NON è **valido** perchè falso nel modello costruito. Dato che le regole del calcolo **LC**₌ sono sicure ne deduciamo che pure il sequente $\vdash \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ **NON** è **valido**.

Poi per vedere se $\vdash \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{y}$ è soddisfacibile si prova a derivare la sua negazione e si trova ad esempio

$$\frac{\frac{\frac{\forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{y}, \forall \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{y}, \mathbf{x}=\mathbf{y} \vdash}{\forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{y}, \forall \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{y} \vdash} \forall\text{-S}}{\forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{y} \vdash} \forall\text{-S}}{\vdash \neg \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{y}} \neg\text{-D}$$

e si prova a costruire contromodello di $\forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{y}, \forall \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{y}, \mathbf{x}=\mathbf{y} \vdash$.

A tal scopo basta considerare un modello con dominio $\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{1}\}$ ove si trova che per ogni $\mathbf{d}, \mathbf{d}' \in \mathbf{D}$ si ha $(\mathbf{x}=\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = \mathbf{1}$ e così pure $(\forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{y})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e similmente $(\forall \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}') = \mathbf{1}$. Concludiamo quindi che $\vdash \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{y}$ è **soddisfacibile**, appunto in questo modello il cui dominio ha un unico elemento!!

5. Il sequente $\vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{c}$ è una **tautologia** in quanto una sua derivazione è

$$\frac{\frac{\frac{}{\vdash \mathbf{c}=\mathbf{c}} \text{-ax}}{\vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{c}} \exists\text{-Dv}}$$

6. Il sequente $\vdash \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x} (\mathbf{y} = \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{z})$ *NON* è *valido* perchè provando a derivarlo si trova

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{y} = \mathbf{z} \vdash \mathbf{x} = \mathbf{z}}{\vdash \mathbf{y} = \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{z}} \rightarrow\text{-D}}{\vdash \forall \mathbf{x} (\mathbf{y} = \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{z})} \forall\text{-D}}{\vdash \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x} (\mathbf{y} = \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{z})} \forall\text{-D}$$

ove la prima applicazione di $\forall\text{-D}$ è corretta perchè \mathbf{y} non appare libera nel sequente radice, ed anche la seconda applicazione di $\forall\text{-D}$ è corretta perchè \mathbf{x} non appare libera nel suo sequente conclusione.

Ora si trova un contromodello della foglia $\mathbf{y} = \mathbf{z} \vdash \mathbf{x} = \mathbf{z}$

Basta prendere

$$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$$

e in questo modello

$$(\mathbf{y} = \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}, \text{Topolino}, \text{Topolino}) = \mathbf{0}$$

perchè $\mathbf{y} = \mathbf{z}^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}, \text{Topolino}) = \mathbf{1}$ mentre $\mathbf{x} = \mathbf{z}^{\mathcal{D}}(\text{Minni}, \text{Topolino}) = \mathbf{0}$ (si ricordi che \mathbf{x} corrisponde al primo elemento della tripla, \mathbf{y} al secondo e \mathbf{z} al terzo). Dunque il sequente di partenza è NON valido.

Chiaramente $\forall \mathbf{y} \forall \mathbf{x} (\mathbf{y} = \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{z})$ è soddisfacibile. Basta prendere un modello con un unico elemento

$$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}\}$$

perchè in tal caso per ogni $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3 \in \mathbf{D}$ che sono tutti uguali a **Topolino** si ha

$$(\mathbf{y} = \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = (\mathbf{y} = \mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \rightarrow (\mathbf{x} = \mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_3) = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

e dunque il sequente di partenza è vero nel modello, e quindi è soddisfacibile.

Si lascia poi al lettore di svolgere i seguenti esercizi:

7. $\vdash \forall y \forall x \forall z (x = y \ \& \ y = z \rightarrow x = z)$
8. $\vdash \exists x \exists y x = y$
9. $\vdash \forall x \exists y \exists z (x = y \vee y = z)$
10. $\forall w \ w = a \vdash \forall x \forall y x = y$

12.6.4 Su formalizzazioni con “solo”, “soltanto”

Si noti che la frase

“Bracciodiferro mangia soltanto spinaci.”

oppure

“Bracciodiferro mangia solo spinaci.”

letteralmente dovrebbe essere formalizzata in

$$\forall y (M(b, y) \rightarrow y = \bar{s})$$

ponendo

b =Bracciodiferro

\bar{s} =spinaci

$M(x, y)$ = x mangia y

ma *in realtà* con la frase “Bracciodiferro mangia solo spinaci.” intendiamo dire

“Bracciodiferro mangia spinaci e soltanto loro.”

che si formalizza *letteralmente* in

$$M(b, \bar{s}) \ \& \ \forall y (M(b, y) \rightarrow y = \bar{s})$$

ove la formula dopo la $\&$ formalizza appunto il “soltanto....” e basta.

Analogamente quando diciamo

“Se Bracciodiferro mangia qualcosa mangia spinaci.”

intendiamo dire che

“Se Bracciodiferro mangia qualcosa quel qualcosa sono spinaci.”

che si formalizza in

$$\forall y (M(b, y) \rightarrow y = \bar{s})$$

INVECE una formalizzazione *letterale* di

“Se Bracciodiferro mangia qualcosa mangia spinaci.”

è

$$\exists y M(b, y) \rightarrow M(b, \bar{s})$$

oppure anche (perchè equivalente)

$$\forall y (M(b, y) \rightarrow M(b, \bar{s}))$$

Infatti si può dimostrare che

$$\forall \mathbf{y} \ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}} \) \vdash \exists \mathbf{y} \ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})$$
$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y})} \quad \frac{\text{ax-id}}{\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}), \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}} \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y})} \rightarrow -S}{\frac{\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}), \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}} \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})}{\frac{\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})}{\forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}), \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})} \text{sc}_{\text{sx}}}} \forall -S}{\frac{\forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}), \exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})}{\forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}) \vdash \exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})} \rightarrow -D} \rightarrow -S$$
$$\forall \mathbf{y} \ (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})) \vdash \exists \mathbf{y} \ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})$$
$$\exists \mathbf{y} \, \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y} \, (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}))$$
$$\exists \mathbf{y} \, \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y} \, (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})$$

Per dimostrarlo proviamo seguiamo la procedura in sezione 12.6.1 a derivare il sequente in $\mathbf{LC}_{=}$ come segue

$$\frac{\text{ax-id} \quad \frac{\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}), \exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}), \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}}}{\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \vdash \exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}), \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}}} \exists\text{-D} \quad \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}), \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}}}{\frac{\frac{\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}), \exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}}}{\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}), \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \vdash \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}}} \text{sc}_{\text{sx}}}{\frac{\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}}}{\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})} \rightarrow\text{-S} \quad \forall\text{-D}$$

185

Ora si nota che la foglia

$$\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}), \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}}$$

NON è un assioma e ad essa non si può applicare altra regola eccetto che le regole di scambio a $\mathbf{s}\mathbf{x}$ e a $\mathbf{d}\mathbf{x}$ con cui non arriviamo di certo ad un assioma. Dunque conviene cercare un contromodello di tale foglia mandando a **1** le premesse valutate su un elemento **d** da mettere al posto di **w** e mandando a **0** la conclusione valutata sempre sullo stesso elemento **d** da mettere al posto di **w** che risulterà quindi *il falsario* della foglia nel contromodello. In questo caso possiamo semplicemente pensare che TUTTE le coppie di elementi (**d**₁, **d**₂) rendano vero **M(x, y)** (nel significato originale del predicato nel contromodello *tutti si mangiano a vicenda compresi loro stessi!*). Poi per rendere falso **w = s̄** sull'ipotetico falsario dobbiamo per forza mettere nel dominio **D** del contromodello ALMENO DUE elementi: uno per interpretare **s̄** e l'altro per metterlo al posto di **w** come falsario. Si noti che in questo contromodello l'interpretazione di **b** può essere data a piacere perchè non è rilevante per falsificare la foglia.

Ovvero poniamo

$$\mathbf{D} \equiv \{ \text{Pippo}, \text{Minni} \} \quad \bar{\mathbf{s}}^{\mathbf{D}} = \text{Minni}$$

e poi

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1 \quad \text{sempre}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \text{Pippo}) &= 1 \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \text{Minni}) &= 1 \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\text{Minni}, \text{Minni}) &= 1 \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\text{Minni}, \text{Pippo}) &= 1 \end{aligned}$$

Infine poniamo $\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{D}} = \text{Minni}$ (ma la costante **b** potrebbe essere interpretata anche come **Pippo** in quanto la foglia rimane falsa anche nel modello con $\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{D}} = \text{Pippo}$).

Dunque in tal modello **D** l'interpretazione di **M(b, w), M(b, s̄) ⊢ w = s̄** è una funzione

$$(\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \rightarrow \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} : \mathbf{D} \longrightarrow \{0, 1\}$$

che NON è costantemente **1** in quanto c'è un falsario che è **Pippo** ovvero

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \rightarrow \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) &= (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}))^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \rightarrow (\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} \rightarrow (\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \bar{\mathbf{s}}^{\mathbf{D}}) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{D}}) \& \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} \rightarrow (\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \text{Minni}) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \text{Minni}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} \rightarrow 0 \\ &= 1 \& 1 \rightarrow 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si noti che potevamo scrivere direttamente

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \rightarrow \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) &= (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}))^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \rightarrow (\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} \rightarrow (\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \bar{\mathbf{s}}^{\mathbf{D}}) \\ &= 1 \& 1 \rightarrow (\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \text{Minni}) \\ &= 1 \rightarrow 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

sapendo che l'interpretazione di **M(x, y)** è sempre **1** su ogni coppia del dominio.

Secondo la procedura in sezione 12.6.1 concludiamo che il seguente radice

$$\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})$$

NON è **tautologia**, ovvero **NON** è **valido** perchè non lo è una foglia dell'albero ottenuto applicando regole di **LC**₌.

Dunque la traduzione letterale di

“Se Bracciodiferro mangia qualcosa mangia spinaci.”

NON implica la traduzione letterale della frase ad essa equivalente

“Se Bracciodiferro mangia qualcosa quel qualcosa sono spinaci.”

(si ricordi che \vdash si interpreta come implicazione!).

Possiamo proseguire nel vedere se il seguente

$$\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})$$

è opinione o per caso è un paradosso.....

A tal scopo possiamo seguire la procedura in sezione 12.6.1 provando a derivare la negazione

$$\vdash \neg ((\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}))$$

ovvero

$$\frac{\frac{\vdash \exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \quad \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}) \vdash}{(\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}) \vdash} \rightarrow\text{-S}}{\vdash \neg ((\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}))} \neg\text{-D}$$

e qui possiamo vedere che la foglia di destra

$$\forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}) \vdash$$

non porta ad un assioma applicando la regola di $\forall\text{-S}$ più volte ... (il lettore ci provi da sè).
Conviene quindi trovare un contromodello per tale sequente mandando a **1** il predicato

$$\forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})$$

Un semplice contromodello può essere ottenuto mandando a **1** il predicato $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}$ su ogni elemento del dominio e a tal scopo basta considerare il dominio UN SOLO ELEMENTO.

Quindi poniamo

$$\mathbf{D} \equiv \{ \text{Pippo} \} \quad \bar{\mathbf{s}}^{\mathbf{D}} = \text{Pippo}$$

e $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sia una funzione definita A PIACERE. Infatti in tal modello abbiamo che

$$(\forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$$

poichè sull'unico elemento Pippo risulta che

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) &= \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \rightarrow (\mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \rightarrow (\mathbf{y} = \mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{s}}^{\mathbf{D}}, \text{Pippo}) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \rightarrow (\mathbf{y} = \mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}, \text{Pippo}) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\text{Pippo}) \rightarrow \mathbf{1} \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Ora un tal contromodello esteso a piacere con l'interpretazione della costante **b** dà un contromodello per il sequente

$$\vdash \neg ((\exists \mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}))$$

e dunque un modello in cui è vero il sequente

$$\exists \mathbf{y} \, \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y} \, (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}})$$

che risulta perciò **soddisfacibile** e quindi un'**opinione**.

Per esercizio si provi a continuare a derivare la foglia

$$\vdash \exists \mathbf{y} \, \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})$$

e si trovi un suo contromodello che sarà un contromodello per il sequente

$$\vdash \neg((\exists \mathbf{y} \, \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})) \rightarrow \forall \mathbf{y} \, (\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}))$$

di tipo completamente diverso da quello trovato sopra!

12.7 Validità regole per sequenti in logica predicativa classica

Qui diamo il concetto di validità di una regola nel linguaggio dei predicati per la semantica classica. A tal scopo interpretiamo i sequenti, interpretando come al solito il segno di sequente \vdash come implicazione preceduta questa volta però dalla quantificazione universale di tutte le variabili libere presenti.

Dapprima introduciamo il concetto di **regola vera in un modello**. Intuitivamente una regola è vera in un modello \mathcal{D} se trasforma **sequenti premessa veri nel modello \mathcal{D}** in un **sequente conclusione vero sempre in \mathcal{D}** , ovvero una regola è vera in un modello se la **VERITÀ SCENDE** \Downarrow lungo la regola nel modello se **TUTTE** le premesse sono vere nel modello.

Def. Verità in un modello di una regola ad una premessa

Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \quad \text{si dice **vera** in un modello } \mathcal{D}$$

se il sequente **premissa** $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$ è vero in un modello \mathcal{D}

\Downarrow

il sequente **conclusione** $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$ è vero nello stesso modello \mathcal{D}

Def. Verità in un modello di regola a due premesse

Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \quad \text{si dice **vera** in un modello } \mathcal{D}$$

se i sequenti **premissa**

$\Gamma_1 \vdash \Delta_1$ e $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$ sono **ENTRAMBI** veri in un modello \mathcal{D}

\Downarrow

il sequente **conclusione** $\Gamma_3 \vdash \Delta_3$ è vero stesso modello \mathcal{D} .

Al fine di capire meglio quando una regola è vera in un modello vogliamo studiare alcune caratterizzazioni alternative della nozione di verità di una regola in un modello.

A tal scopo osserviamo che vale la seguente caratterizzazione di verità in un modello per una formula con variabili libere:

$$\begin{array}{l} \text{in un modello } \mathcal{D} \text{ vale } \quad \text{fr}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \\ \text{sse} \\ \mathcal{D} \text{ rende vera } \quad \forall \mathbf{y}_1 \forall \mathbf{y}_2 \dots \forall \mathbf{y}_n \text{ fr}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \end{array}$$

Ora osserviamo che la **validità di una regola** equivale alla **validità di una formula** ottenuta interpretando come implicazione il segno di inferenza di un sequente premessa o due sequenti premessa ad un sequente conclusione dopo aver interpretato i sequenti stessi come implicazioni quantificate universalmente.

Prima di far ciò introduciamo le seguenti abbreviazioni per indicare una lista finita di variabili:

$$\bar{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$$

$$\forall \bar{\mathbf{y}} \text{ fr}(\bar{\mathbf{y}}) \equiv \forall \mathbf{y}_1 \forall \mathbf{y}_2 \dots \forall \mathbf{y}_n \text{ fr}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$$

Inoltre utilizziamo la scrittura

$$\Gamma(\bar{\mathbf{y}})$$

per indicare che *le variabili libere occorrenti in $\Gamma(\bar{\mathbf{y}})$ sono incluse nella lista $\bar{\mathbf{y}} \equiv y_1, y_2, \dots, y_n$* (e quindi nella lista potrebbero esserci variabili che non compaiono nella lista di formule $\Gamma(\bar{\mathbf{y}})$).

Ora utilizziamo le abbreviazioni sopra nelle seguenti caratterizzazioni:

Una regola ad una premessa

$$\frac{\Gamma_1(\bar{\mathbf{y}}) \vdash \Delta_1(\bar{\mathbf{y}})}{\Gamma_2(\bar{\mathbf{y}}) \vdash \Delta_2(\bar{\mathbf{y}})}$$

si dice **vera** in un **modello** \mathcal{D}

se e solo se

$$\forall \bar{\mathbf{y}} (\Gamma_1^{\&}(\bar{\mathbf{y}}) \rightarrow \Delta_1^{\vee}(\bar{\mathbf{y}})) \rightarrow \forall \bar{\mathbf{y}} (\Gamma_2^{\&}(\bar{\mathbf{y}}) \rightarrow \Delta_2^{\vee}(\bar{\mathbf{y}}))$$

è **vera** nel modello \mathcal{D} .

Una regola a due premesse

$$\frac{\Gamma_1(\bar{y}) \vdash \Delta_1(\bar{y}) \quad \Gamma_2(\bar{y}) \vdash \Delta_2(\bar{y})}{\Gamma_3(\bar{y}) \vdash \Delta_3(\bar{y})}$$

si dice **vera in un dato modello** \mathcal{D}

se e solo se

$$\forall \bar{y} (\Gamma_1^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_1^{\vee}(\bar{y})) \ \& \ \forall \bar{y} (\Gamma_2^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_2^{\vee}(\bar{y})) \rightarrow \forall \bar{y} (\Gamma_3^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_3^{\vee}(\bar{y}))$$

è **vera nel modello** \mathcal{D} .

Diamo ora una ulteriore caratterizzazione della validità delle regole che utilizza il lemma scorciatoia 9.9 applicato alle formule implicative caratterizzanti la validità di una regola presentate sopra:

Def. Verità in un modello di una regola ad una premessa

Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \quad \text{si dice **vera** in un **modello** } \mathcal{D}$$

se **per ogni** $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbf{D}^n$

$$(\Gamma_1^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_1^{\vee}(\bar{y}))^{\mathcal{D}}(d_1, \dots, d_n) = 1 \text{ nel modello } \mathcal{D}$$

\Downarrow

nel modello \mathcal{D}

$$\text{per ogni } (d_1, \dots, d_n) \in \mathbf{D}^n \quad \text{se} \quad \Gamma_2^{\&}(\bar{y})(d_1, \dots, d_n) = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta_2^{\vee}(\bar{y})(d_1, \dots, d_n) = 1.$$

Def. Verità in un modello di regola a due premesse

Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \quad \text{si dice è \textbf{vera} in un modello } \mathcal{D}$$

se **nel modello** \mathcal{D}

per ogni $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$

$$(\Gamma_1^{\&}(\bar{\mathbf{y}}) \rightarrow \Delta_1^{\vee}(\bar{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1}$$

e

per ogni $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$

$$(\Gamma_2^{\&}(\bar{\mathbf{y}}) \rightarrow \Delta_2^{\vee}(\bar{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1}$$

\Downarrow

nel modello \mathcal{D}

per ogni $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$ se $(\Gamma_3^{\&}(\bar{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1} \Rightarrow \Delta_3^{\vee}(\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1}$

Siamo quindi pronti ad enunciare la definizione di regola valida e sicura per sequenti predicativi:

Def. 12.15 Una regola (ad una o due premessa) per sequenti nel linguaggio predicativo classico si dice **valida** rispetto alla semantica classica dei predicati se è **vera** in **ogni** modello \mathcal{D} .

Def. 12.16 Una regola per sequenti nel linguaggio predicativo classico si dice **SICURA** se lei e le sue inverse sono entrambe **valide** rispetto alla semantica classica.

Con le osservazioni sopra risulta ora chiaro che per vedere se una regola è NON valida basta trovare un modello \mathcal{D} e un'istanza della regola in cui la premessa o le premesse sono vere nel modello mentre NON lo è la conclusione. Dopo aver mostrato la validità delle regole del calcolo per la logica classica predicativa faremo esempi di regole NON valide.

Una **regola** con sequenti predicativi è **NON valida**
se **esiste UN modello** in cui le **premesse** della regola sono **VERE**
mentre è **FALSA la conclusione** della regola

12.7.1 Validità delle regole di $\mathbf{LC}_=$ e loro inverse.

Di seguito mostriamo che le regole di $\mathbf{LC}_=$ sono valide assieme alle loro inverse, ovvero sono **TUTTE SICURE**.

Validità regola \forall -D (caso semplice).

La regola

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w}), \nabla}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla} \quad \forall\text{-D } (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla))$$

è **valida**. Per semplicità supponiamo che sia Γ che ∇ siano liste di proposizioni senza variabili libere. Allora per mostrare la validità della regola possiamo mostrare che in un qualsiasi modello \mathcal{D} vale

$$\forall \mathbf{w} (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

Per provare l'implicazione più esterna usiamo il lemma scorciatoia 9.9. Ora supponiamo che $\forall \mathbf{w} (\Gamma \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla)$ sia vero in \mathcal{D} . Ne segue che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha che

$$(\Gamma \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$$

ovvero che (si ricorda che non compare \mathbf{w} in Γ)

$$(\Gamma^{\&})^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee \nabla^{\mathcal{D}} = 1$$

Mostriamo ora che vale pure

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = 1$$

usando di nuovo il lemma scorciatoia. A tal scopo supponiamo $(\Gamma^{\&})^{\mathcal{D}} = 1$. Allora per ogni $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ si ha per ipotesi $\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee \nabla^{\mathcal{D}} = 1$

ovvero che $\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ oppure $\nabla^{\mathcal{D}} = 1$.

Ora si hanno 2 casi:

caso 1: $\nabla^{\mathcal{D}} = 1$ da cui si conclude $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla)^{\mathcal{D}} = 1$

caso 2: $\nabla^{\mathcal{D}} = 0$ e quindi *per ogni* $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ (perchè l'interpretazione di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e quella $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ sono le stesse in presenza di una sola variabile) da cui

$$(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 1$$

e quindi $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla)^{\mathcal{D}} = 1$.

Dunque il seguente conclusione è valido in \mathcal{D} .

Validità della regola \forall -D (caso generale).

La regola \forall -D è **VALIDA** anche se supponiamo $\Gamma \equiv \mathbf{B}(\mathbf{y})$ e $\nabla \equiv \mathbf{C}(\mathbf{y})$ e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ supponiamo $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})$. Questo è il caso più generale perchè in presenza nel seguente di due o più variabili libere si procede come se ce ne fosse una.

Fissato un modello \mathcal{D} applichiamo il lemma scorciatoia 9.9 per mostrare che in esso vale

$$\forall \mathbf{w} \forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

Dunque se $\forall \mathbf{w} \forall \mathbf{y} (\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))$ è **valido** in \mathcal{D} allora per ogni $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \mathbf{D}$ si ha che

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$$

ovvero che (si ricorda che non compare \mathbf{w} in $\mathbf{B}(\mathbf{y})$)

$$\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = 1$$

Ora mostriamo che per ogni $\mathbf{d}_2 \in \mathbf{D}$ vale

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = 1$$

tramite il lemma scorciatoia. Dunque a tal scopo supponiamo che $\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$. Allora per ogni $\mathbf{d}_1 \in \mathbf{D}$ si ha per ipotesi $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ ovvero che $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$.

Ora si hanno 2 casi:

caso 1: $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ da cui si conclude $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$

caso 2: $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = 0$ e quindi per ogni $\mathbf{d}_1 \in \mathcal{D}$ $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ (perchè l'interpretazione di $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ e quella $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sono le stesse in presenza di due sole variabili) da cui

$$(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$$

e quindi $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$. Dunque abbiamo mostrato che *per ogni* \mathbf{d}_2 vale

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$$

e dunque vale in \mathcal{D}

$$(\forall \mathbf{y} (\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

La regola \forall -D è pure sicura perchè la sua inversa pure conserva la soddisfacibilità in un modello. Lo si provi per esercizio.

Validità della regola \forall -S e \forall -Sv.

Consideriamo questa versione veloce della regola del “per ogni” a sx

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall\text{-Sv}$$

Dimostriamo che è **valida** da cui segue facilmente che anche la regola \forall -S lo è. Lo dimostriamo supponendo Γ, ∇ e $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ senza variabili libere per semplicità (il caso generale segue analogamente). A tal scopo mostriamo che in un modello \mathcal{D} qualsiasi fissato vale

$$(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{t}) \rightarrow \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \& \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})$$

usando il lemma scorciatoia 9.9. Quindi supponiamo che nel modello \mathcal{D} la premessa sia vera, ovvero che valga

$$(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{t}) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Ora per mostrare che pure il sequente conclusione è vero usiamo di nuovo il lemma scorciatoia e supponiamo che $(\Gamma^{\&} \& \forall x A(x))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Dunque $(\Gamma^{\&})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e pure $(\forall x A(x))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Da ciò segue che in particolare per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ e quindi anche che

$$A(t)^{\mathcal{D}} = A(x)^{\mathcal{D}}(t^{\mathcal{D}}) = \mathbf{1}$$

Dunque otteniamo che $(\Gamma^{\&} \& A(t))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e per la validità nel modello del sequente premessa concludiamo che $(\nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Dunque per il lemma scorciatoia abbiamo provato che

$$(\Gamma^{\&} \& \forall x A(x) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

e quindi la regola è valida.

Chiaramente anche la regola

$$\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall\text{-S}$$

è valida (lo si dimostri per esercizio) ma ora in questa versione è anche sicura (lo si dimostri per esercizio).

NON validità della inversa della regola $\forall-Sv$.

La regola del “per ogni” veloce

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall-Sv$$

NON è SICURA perchè NON è valida anche all’insù \Uparrow , ovvero la sua inversa

$$\frac{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, A(t) \vdash \nabla} \text{inv} - \forall-Sv$$

NON è valida.

Infatti se si considera il modello

$\mathcal{D} \equiv \mathbf{Nat}$ e $t^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$

$$A(x)^{\mathcal{D}}(n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 7 \\ 0 & \text{se } n > 7 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad A(x)^{\mathcal{D}}(d) = 1 \text{ sse } d \leq 7$$

Dato $A(t)^{\mathcal{D}} = A(x)^{\mathcal{D}}(\mathbf{0}) = 1$ e che $(\forall x A(x))^{\mathbf{Nat}} = \mathbf{0}$ risulta che

$$\frac{A(t) \vdash \perp \quad \text{falso nel modello}}{\forall x A(x) \vdash \perp \quad \text{vero nel modello}} \forall-Sv$$

ovvero otteniamo che l’inversa della regola $\forall-Sv$ NON è valida in quanto

$$\frac{\forall n \in \mathbf{Nat} \ n \leq 7 \vdash \perp \quad \text{vero nel modello}}{\mathbf{0} \leq 7 \vdash \perp \quad \text{falso nel modello}} \forall-Sv - \text{inv}$$

Validità della regola $\exists-S$ (caso semplice).

La regola

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \nabla} \exists-S \ (w \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists x A(x), \nabla))$$

è **valida**. Trattiamo dapprima il caso semplice in cui Γ e ∇ siano proposizioni senza variabili libere. Per mostrare la validità della regola mostriamo che in ogni modello \mathcal{D} vale

$$\forall w \ (\Gamma^{\&} \& A(w) \rightarrow \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \& \exists x A(x) \rightarrow \nabla^{\vee})$$

applicando il lemma scorciatoia 9.9. Dunque supponiamo che nel modello valga

$$(\forall w \ (\Gamma^{\&} \& A(w) \rightarrow \nabla^{\vee}))^{\mathcal{D}} = 1$$

ovvero che per ogni $d \in \mathbf{D}$ si ha

$$(\Gamma^{\&} \& A(w) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}}(d) = 1$$

ovvero che per ogni $d \in \mathcal{D}$ si ha $\Gamma^{\&\mathcal{D}} \& A(w)^{\mathcal{D}}(d) \rightarrow \nabla^{\vee\mathcal{D}} = 1$. Ora mostriamo pure che vale

$$(\Gamma^{\&} \& \exists x A(x) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = 1$$

usando di nuovo il lemma scorciatoia. A tal scopo assumiamo anche che $(\Gamma^{\&} \& \exists x A(x))^{\mathcal{D}} = 1$, ne segue che $\Gamma^{\mathcal{D}} = 1$ e che esiste $\bar{d} \in \mathbf{D}$ tale che $A(w)^{\mathcal{D}}(\bar{d}) = A(x)^{\mathcal{D}}(\bar{d}) = 1$ (si ricorda che l'interpretazione di un predicato con una sola variabile libera è indipendente dal nome della variabile) e dunque $\Gamma^{\&\mathcal{D}} \& A(w)^{\mathcal{D}}(\bar{d}) = 1$. Ora per la validità nel modello del sequente premessa su \bar{d} ovvero

$$(\Gamma^{\&} \& A(w) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}}(\bar{d}) = 1$$

e dalla validità nel modello delle premesse di questa implicazione si conclude $\nabla^{\vee\mathcal{D}} = 1$ e quindi per il lemma scorciatoia il sequente conclusione è **vero** nel modello \mathcal{D} ossia

$$(\Gamma^{\&} \& \exists x A(x) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = 1$$

Concludiamo quindi di nuovo per il lemma scorciatoia che la regola è valida.

Validità della regola \exists -S (caso più generale).

La regola

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \nabla} \exists\text{-S } (w \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists x A(x), \Delta))$$

è **valida**.

Per provarlo ci possiamo limitare al caso in cui $\Gamma \equiv B(y)$ e $\nabla \equiv C(y)$ e al posto di $A(w)$ poniamo $A'(w, y)$. Mostriamo che fissato un modello \mathcal{D} allora vale

$$\forall w \forall y (\Gamma^{\&} \& A(w) \rightarrow \nabla^{\vee}) \rightarrow \forall y (\Gamma^{\&} \& \exists x A(x) \rightarrow \nabla^{\vee})$$

tramite il lemma scorciatoia 9.9. A tal scopo supponiamo pure che $\forall y (B(y) \& A'(w, y) \rightarrow C(y))$ sia **vero** nel modello, il che significa che per ogni $d_1, d_2 \in \mathbf{D}$ si ha $(B(y) \& A'(w, y) \rightarrow C(y))^{\mathcal{D}}(d_1, d_2) = 1$

ovvero che per ogni $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$

$$B(y)^{\mathcal{D}}(d_2) \& A'(w, y)^{\mathcal{D}}(d_1, d_2) \rightarrow C(y)^{\mathcal{D}}(d_2) = 1$$

Ora fissato un arbitrario $d_2 \in \mathcal{D}$, mostriamo che

$$(\Gamma^{\&} \& \exists x A(x) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}}(d_2) = 1$$

con il lemma scorciatoia. A tal scopo assumiamo anche che $(B(y) \& \exists x A'(x, y))^{\mathcal{D}}(d_2) = 1$, ne segue che $B(y)^{\mathcal{D}}(d_2) = 1$ e che esiste $d_1 \in \mathcal{D}$ tale che $A'(w, y)^{\mathcal{D}}(d_1, d_2) = A'(x, y)^{\mathcal{D}}(d_1, d_2) = 1$ (perchè l'interpretazione di $A'(w, y)$ e quella $A'(x, y)$ sono le stesse in presenza di due sole variabili) e dunque $B(y)^{\mathcal{D}}(d_2) \& A'(x, y)^{\mathcal{D}}(d_1, d_2) = 1$ da cui si conclude per la validità del sequente premessa che $C(y)^{\mathcal{D}}(d_2) = 1$. Dunque abbiamo mostrato che *per ogni* $d_2 \in \mathcal{D}$

$$(\Gamma^{\&} \& \exists x A(x) \rightarrow \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}}(d_2) = 1$$

e dunque pure che vale

$$(\forall y (\Gamma^{\&} \& \exists x A(x) \rightarrow \nabla^{\vee}))^{\mathcal{D}} = 1$$

Quindi per il lemma scorciatoia la regola è valida.

Validità regola dell'esiste a dx veloce (caso semplice).

Consideriamo la seguente versione "veloce" della regola dell'esiste a destra

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists\text{-Dv}$$

e mostriamo che è **valida**. Trattiamo il caso semplice in cui Γ , ∇ e $A(t)$ non hanno variabili libere. In particolare supponiamo $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ ovvero sia una costante. Appliciamo il lemma scorciatoia 9.9 per dimostrare che in un modello qualsiasi \mathcal{D} vale

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

Ora fissato un modello \mathcal{D} , supponiamo pure che $(\Gamma \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e dobbiamo mostrare che vale pure

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Applichiamo a tal scopo il lemma scorciatoia 9.9 e assumiamo anche che $\Gamma^{\& \mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Allora per validità sequente premessa otteniamo che $(\mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, ovvero che $\mathbf{A}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ o che $\nabla^{\vee \mathcal{D}} = \mathbf{1}$.

Ora analizziamo i seguenti due casi:

caso 1. $\nabla^{\vee \mathcal{D}} = \mathbf{1}$ da cui concludiamo $(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$.

caso 2. $\nabla^{\vee \mathcal{D}} = \mathbf{0}$ da cui per ipotesi otteniamo $\mathbf{A}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, da cui $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ quindi $(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, da cui concludiamo $(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Dunque per il lemma scorciatoia nel modello \mathcal{D} vale

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Quindi la regola è **valida**.

Validità della regola dell'esiste a dx veloce ed di \exists -D (caso generale).

Se mostriamo che la regola \exists -Dv è valida nel caso generale allora ne segue banalmente che è pure valida la regola \exists -D (lo si dimostri).

La regola \exists -Dv

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists\text{-Dv}$$

è **VALIDA** anche se si assume che $\Gamma \equiv \mathbf{B}(\mathbf{y})$ e $\nabla \equiv \mathbf{C}(\mathbf{y})$ e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ poniamo $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e assumiamo pure che $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ sia una costante. Il caso in cui nei sequenti compaiano più variabili ancora si tratta analogamente.

Per mostrare la validità della regola, verifichiamo che in un modello qualsiasi \mathcal{D} fissato vale

$$\forall y (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow \forall y (\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

applicando il lemma scorciatoia 9.9. Supponiamo dunque che se $\forall y (\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))$ sia **vera nel modello**, e quindi per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha $(\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, ovvero che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee \mathbf{C}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

Ora mostriamo che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ vale

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

usando il lemma scorciatoia. A tal scopo assumiamo dunque che $\Gamma^{\&} = \mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$. Allora per l'ipotesi di validità nel modello del sequente premessa otteniamo che $\mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$.

Ora analizziamo due casi:

caso 1. $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ da cui concludiamo $(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$.

caso 2. $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ da cui per ipotesi otteniamo che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ abbiamo che $\mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, da cui $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}}, \mathbf{d}) = \mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$. Quindi $(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ da cui concludiamo $(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$. Abbiamo quindi mostrato che nel modello \mathcal{D} per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ vale

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

e dunque anche che vale

$$\forall \mathbf{y} \ (\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

La regola è quindi valida.

NON validità dell'inversa della regola $\exists\text{--Dv}$,

La **regola $\exists\text{--Dv}$** è NON SICURA perchè NON conserva la **validità in un modello** all'insù \uparrow .

Un *controesempio* è dato dal seguente esempio.

L'asserzione

$$\frac{\text{È arrivato in stazione il treno per Venezia} \vdash \text{Marco sale sul treno per Venezia.}}{\text{È arrivato in stazione il treno per Venezia} \vdash \text{Qualcuno sale sul treno per Venezia.}}$$

si può formalizzare in

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})}{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}$$

usando

$A(x)$ = “ x è arrivato in stazione”

$S(x, y)$ = “ x sale su y .”

m = “Marco”

v = “treno per Venezia”

Ora

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})}{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}$$

è un'applicazione della regola $\exists\text{--Dv}$ che sappiamo essere valida. Però la sua inversa non è vera nel modello seguente:

$\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{Marco}, \mathbf{trenoVE}, \mathbf{Piero}\}$

$\mathbf{v}^{\mathcal{D}} \equiv \mathbf{trenoVE}$

$\mathbf{m}^{\mathcal{D}} \equiv \mathbf{Marco}$

$\mathbf{p}^{\mathcal{D}} \equiv \mathbf{Piero}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse $\mathbf{d} = \mathbf{trenoVE}$

$\mathbf{S}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$ sse $\mathbf{d}_1 = \mathbf{Piero}$ e $\mathbf{d}_2 = \mathbf{trenoVE}$.

E in tal modello $(\exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v}))^{\mathcal{D}} = 1$ e così pure $\mathbf{A}(\mathbf{v})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{trenoVE}) = 1$ ma $\mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})^{\mathcal{D}} = 0$ (ovvero nel modello, il treno per Venezia è arrivato in stazione, **Piero** sale sul treno per Venezia, e quindi qualcuno ci sale, mentre invece **Marco** non ci sale). In pratica abbiamo trovato un modello in cui vale $\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ ma NON vale $\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})$, ovvero

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})}$$

NON è valida, ed essendo un'istanza della regola inversa dell'esiste veloce $\exists\text{--Dv}$, rende tale inversa $\exists\text{--Dv} - \mathbf{inv}$ NON valida.

Validità della inversa della regola $\exists\text{--D}$.

Quindi per rendere la regola di esiste a dx sicura occorre modificarla ponendo

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists\text{--D}$$

che è ora sicura. Infatti possiamo mostrare che la sua inversa

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla} \text{ inv-}\exists\text{-D}$$

è pure valida. Lo dimostriamo supponendo Γ , ∇ e $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ senza variabili libere per semplicità (il caso generale segue analogamente). A tal scopo mostriamo che in un modello \mathcal{D} qualsiasi fissato vale

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \nabla^{\vee})$$

usando il lemma scorciatoia 9.9. Quindi supponiamo che nel modello \mathcal{D} la premessa sia vera, ovvero che valga

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Ora per mostrare che pure il sequente conclusione è vero nel modello usiamo di nuovo il lemma scorciatoia e supponiamo che $(\Gamma^{\&})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Dunque per l'ipotesi abbiamo che $(\exists x A(x) \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ da cui abbiamo tre casi.

1. $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ da cui segue che vale pure $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e allora anche il sequente conclusione è vero nel modello.

2. $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ allora anche il sequente conclusione è vero nel modello.

3. $(\nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ allora anche il sequente conclusione è vero nel modello.

Dunque nel modello risulta valido il sequente conclusione e quindi per il lemma scorciatoia anche la regola inversa

Validità delle regole dell'uguaglianza Verifichiamo ora che le regole dei sequenti relative al predicato dell'uguaglianza da aggiungere al calcolo della logica predicativa LC sono valide.

L'assioma

$$\frac{}{\Gamma \vdash t=t, \Delta} = -ax$$

è **valido** perchè è vero in OGNI modello:

supponiamo Γ un solo predicato e sia \mathcal{D} un modello. Distinguiamo 2 casi:

1. \mathbf{t} è una costante, ovvero $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ con $\mathbf{c}^{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}$, e quindi si ha chiaramente

$$(\mathbf{c}=\mathbf{c})^{\mathcal{D}} \equiv (\mathbf{x}=\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}}, \mathbf{c}^{\mathcal{D}}) \equiv \mathbf{1}$$

da cui si ha $(\Gamma \rightarrow \mathbf{t}=\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ perchè il conseguente è vero nel modello.

2. \mathbf{t} è una variabile, ovvero $\mathbf{t} \equiv \mathbf{x}$, da cui la validità di $\Gamma \vdash \mathbf{x}=\mathbf{x}$ supposto che in Γ ci siano solo proposizioni con \mathbf{x} variabile libera segue in quanto per ogni \mathbf{d} nel modello $(\Gamma \rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, poichè $(\mathbf{x}=\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ visto che $\mathbf{d} = \mathbf{d}$.

La regola

$$\frac{\Sigma, t=s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t=s \vdash \Delta(s), \nabla} = -S$$

è **valida** e pure sicura (visto che l'inversa ha la stessa struttura della regola solo con \mathbf{s} al posto di \mathbf{t} e uno scambio di premesse).

Ora mostriamo che la regola $=-S$ è valida supponendo tutte le formule nella regola senza variabili libere per semplicità (il caso generale segue analogamente). Dunque supponiamo in particolare $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}_1$ e $\mathbf{s} \equiv \mathbf{c}_2$ ovvero che siano costanti. Poi mostriamo che in ogni modello \mathcal{D} fissato è vera la formula

$$(\Sigma^{\&} \& \mathbf{t}=\mathbf{s} \& \Gamma(\mathbf{t})^{\&} \rightarrow \Delta(\mathbf{t})^{\vee} \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Sigma^{\&} \& \Gamma(\mathbf{s})^{\&} \& t=s \rightarrow \Delta(\mathbf{s})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})$$

A tal scopo applichiamo il lemma scorciatoia 9.9 e supponiamo che nel modello valga

$$(\Sigma^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s} \& \Gamma(\mathbf{t})^{\&} \rightarrow \Delta(\mathbf{t})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = 1$$

Dobbiamo mostrare che in \mathcal{D} vale pure

$$(\Sigma^{\&} \& \Gamma(\mathbf{s})^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s} \rightarrow \Delta(\mathbf{s})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = 1$$

Applichiamo di nuovo il lemma scorciatoia e supponiamo anche che $(\Sigma^{\&} \& \Gamma(\mathbf{s})^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s})^{\mathcal{D}} = 1$.

Quindi dall'ipotesi otteniamo che $(\Sigma^{\&})^{\mathcal{D}} = 1$ con $\Gamma(\mathbf{s})^{\&\mathcal{D}} = 1$ e $(\mathbf{t}=\mathbf{s})^{\mathcal{D}} = 1$ ovvero $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$.
Ma $\Gamma(\mathbf{s})^{\&\mathcal{D}} = \Gamma(\mathbf{x})^{\&\mathcal{D}}(\mathbf{s}^{\mathcal{D}})$ e da $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$ concludiamo

$$\Gamma(\mathbf{s})^{\&\mathcal{D}} = \Gamma(\mathbf{x})^{\&\mathcal{D}}(\mathbf{s}^{\mathcal{D}}) = \Gamma(\mathbf{x})^{\&\mathcal{D}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}}) = \Gamma(\mathbf{t})^{\mathcal{D}}$$

e quindi da $\Gamma(\mathbf{s})^{\&\mathcal{D}} = 1$ otteniamo $\Gamma(\mathbf{t})^{\&\mathcal{D}} = 1$, e mettendo insieme le altre assunzioni si trova che $(\Sigma^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s} \& \Gamma(\mathbf{t})^{\&})^{\mathcal{D}} = 1$. Da cui per l'ipotesi di validità del sequente premessa in \mathcal{D} concludiamo che

$$(\Delta(\mathbf{t})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = 1$$

Ora nel caso $\Delta(\mathbf{t})^{\&\mathcal{D}} = 1$, ragionando come sopra da $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$ concludiamo

$$\Delta(\mathbf{s})^{\vee\mathcal{D}} = \Delta(\mathbf{t})^{\vee\mathcal{D}}$$

e da $\Delta(\mathbf{t})^{\vee\mathcal{D}} = 1$ si conclude pure che $\Delta(\mathbf{s})^{\vee\mathcal{D}} = 1$ e dunque $(\Delta(\mathbf{s})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = 1$. Invece nel caso $(\nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = 1$ si conclude subito $(\Delta(\mathbf{s})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = 1$ e dunque che il sequente conclusione è vero nel modello \mathcal{D} . Per il lemma scorciatoia si deduce che la regola è valida.

12.7.2 Regola dell'uguaglianza veloce

Si noti che la versione veloce della regola $= -S$ ovvero

$$\frac{\Gamma(\mathbf{t}) \vdash \Delta(\mathbf{t})}{\Gamma(\mathbf{s}), \mathbf{t}=\mathbf{s} \vdash \Delta(\mathbf{s})} = -S_v$$

è valida ma non SICURA.

Ad esempio se la applichiamo rimuovendo solo alcune occorrenze come in

$$\frac{\begin{array}{c} \text{????} \\ \vdash f=t, s=t \end{array}}{t=s \vdash f=s, s=t} = -S^*$$

si ottiene una foglia NON valida mentre la radice lo è.

Infatti sopra dovevamo sostituire TUTTE le occorrenze di \mathbf{s} optando per

$$\frac{\begin{array}{c} =-ax \\ \vdash t=t, f=t \end{array}}{\vdash f=t, t=t} \text{ SC}_{sx} \quad \frac{}{t=s \vdash f=s, s=t} = -S^*$$

Invece ripetendo il primo tentativo con $= -S$ anzichè con la sua versione semplificata otteniamo

$$\frac{\frac{\frac{-ax}{t=s \vdash t=t, f=t}}{t=s \vdash s=t, f=t} = -S}{\frac{t=s \vdash f=t, s=t}{t=s \vdash f=s, s=t} = -S} \text{sc}_{sx}$$

ove la prima applicazione di $= -S$ è INUTILE, ma ci si riprende con la seconda....

12.7.3 Esempi per chiarire il concetto di regola valida

1. L'asserzione

$$\frac{x > 0 \vdash \text{se } y > 0 \text{ allora } x \cdot y > 0}{x > 0 \vdash \text{per ogni } y, \text{ se } y > 0 \text{ allora } x \cdot y > 0}$$

formalizzata in

$$\frac{x > 0 \vdash y > 0 \rightarrow x \cdot y > 0}{x > 0 \vdash \forall y (y > 0 \rightarrow x \cdot y > 0)}$$

è un esempio di corretta applicazione della regola $\forall-D$ che è pure sicura, ovvero scambiando la conclusione con la premessa l'asserzione rimane valida.

Invece l'esempio

$$\frac{y > 0 \vdash \text{se } x > 0 \text{ allora } x \cdot y > 0}{y > 0 \vdash \text{per ogni } y, \text{ se } x > 0 \text{ allora } x \cdot y > 0}$$

si formalizza in

$$\frac{y > 0 \vdash x > 0 \rightarrow x \cdot y > 0}{y > 0 \vdash \forall y (x > 0 \rightarrow x \cdot y > 0)}$$

Si noti che questa NON è una corretta applicazione della regola $\forall-D$ in quanto la y è LIBERA nel contesto a sinistra $y > 0$. Difatti nel modello $D \equiv Nat$ dei numeri naturali con $>$ interpretato come "maggiore stretto" e il simbolo \cdot come moltiplicazione, si ha che il sequente premessa è vero mentre il sequente conclusione è falso perchè $\forall y (x > 0 \rightarrow x \cdot y > 0)$ è falso per $y = 0$.

2. L'asserzione

$$\frac{\text{La cometa } x \text{ entra nell'orbita di cattura del Sole } \vdash C \text{ è una scia luminosa nel cielo.}}{\text{Qualche cometa entra nell'orbita di cattura del Sole } \vdash C \text{ è una scia luminosa nel cielo.}}$$

si può formalizzare in

$$\frac{C(x) \& O(x, s) \vdash L}{\exists x (C(x) \& O(x, s)) \vdash L}$$

usando

$C(x) = "x \text{ è una cometa}"$

$O(x, y) = "x \text{ entra nell'orbita di cattura di } y"$

$L = "c'è una scia luminosa nel cielo"$

$s = "Sole"$

che è un esempio di applicazione corretta della regola $\exists-S$ visto che x non compare libera nel sequente conclusione. Quindi l'applicazione della regola è valida con la sua inversa, ovvero anche l'asserzione ottenuta invertendo la conclusione con la premessa è pure valida.

3. l'asserzione

Pippo vede la stella Sirio \vdash Il cielo non è nuvoloso.
 $\frac{\text{Pippo vede la stella Sirio} \vdash \text{Il cielo non è nuvoloso.}}{\text{Pippo vede tutte le stelle} \vdash \text{Il cielo non è nuvoloso.}}$

si formalizza in

$\frac{S(s) \& V(p, s) \vdash \neg L}{\forall x (S(x) \rightarrow V(p, x)) \vdash \neg L}$

usando

$V(x, y) = \text{"}x \text{ vede } y\text{"}$
 $S(x) = \text{"}x \text{ è una stella}\text{"}$
 $L = \text{"Il cielo è nuvoloso"}$
 $p = \text{"Pippo"}$
 $s = \text{"Sirio"}$

A prima vista non è applicazione di una regola come quella del “per ogni” a sx veloce. Allora proviamo a cercare una derivazione della conclusione per capire se la conclusione segue dalla premessa...

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\mathbf{L}, \forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{s}) \quad \mathbf{L}, \forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) , \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \vdash}{\mathbf{L}, \forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) , \mathbf{S}(\mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \vdash} \rightarrow -\mathbf{S}}{\mathbf{L}, \forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \vdash} \forall -\mathbf{S}}{\frac{\mathbf{L}, \forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \vdash}{\forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) , \mathbf{L} \vdash} \text{sc}_{\text{sx}}}}{\forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \vdash \neg \mathbf{L}} \neg -\mathbf{D}} \rightarrow -\mathbf{S}$$

Ora dalla foglia di sx possiamo dedurre che se facciamo un modello

$$\mathbf{D} \equiv \{\text{Sirio}, \text{Pippo}\}$$

in cui poniamo

per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ $\mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$
 $\mathbf{L}^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$
 $\mathbf{s}^{\mathbf{D}} = \text{Sirio}, \mathbf{p}^{\mathbf{D}} = \text{Pippo}$
e infine $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}$ definito a piacere

abbiamo che $(\forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x})))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$ perchè non c'è nessuna stella in \mathbf{D} , ovvero $\mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$, e quindi l'implicazione $(\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$, mentre $(\neg \mathbf{L})^{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$ e dunque nel modello il sequente $\forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \vdash \neg \mathbf{L}$ risulta falso. Invece il sequente $\mathbf{S}(\mathbf{s}) \& \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \vdash \neg \mathbf{L}$ risulta vero nel modello perchè $(\mathbf{S}(\mathbf{s}) \& \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \rightarrow \neg \mathbf{L})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$ in quanto $\mathbf{S}(\mathbf{s})^{\mathbf{D}} = \mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{s}^{\mathbf{D}}) = \mathbf{0}$ e dunque $(\mathbf{S}(\mathbf{s}) \& \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{s}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$, ovvero l'implicazione è vera nel modello scelto.

In conclusione l'asserzione di partenza *NON è valida* perchè abbiamo trovato un modello in cui la premessa è vera ma la conclusione no.

12.8 Regole derivate

Una regola

$$\frac{\Gamma' \vdash D'}{\Gamma \vdash D} \text{ regola*}$$

si dice **regola derivata** nella logica $\text{LC}_=$ se
supposti i suoi sequenti premessa derivabili in $\text{LC}_=$,
ovvero data una derivazione

$$\begin{array}{c} \pi \\ \vdots \\ \Gamma' \vdash D' \end{array}$$

allora la derivazione ottenuta applicando la regola

$$\frac{\begin{array}{c} \pi \\ \vdots \\ \Gamma' \vdash D' \end{array}}{\Gamma \vdash D} \text{ regola*}$$

si può ESPANDERE in una derivazione di $\Gamma \vdash D$ a partire da π in $\text{LC}_=$ SENZA ispezionare le derivazioni dei sequenti premessa.

Ciò significa che una *regola derivata* è localmente trasformabile in un pezzo di albero di derivazione usando interamente regole di $\text{LC}_=$.

Esempi di regole derivate

Il sequente

$$\frac{\neg\neg\text{ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C}$$

è assioma **derivato** perchè abbrevia:

$$\frac{\frac{\Gamma, A, \Gamma', \Gamma'' \vdash A, C}{\Gamma, A, \Gamma', \Gamma'', \neg A \vdash C} \neg\neg\text{S}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \text{sc}_{\text{sx}}$$

Per esercizio si mostri che i seguenti sono tutti assiomi derivati:

$$\frac{\neg\neg\text{ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C}$$

$$\frac{\frac{\neg\neg\text{ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \quad \frac{\neg\neg\text{ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}}{\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta} \neg\neg\text{S} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta} \neg\neg\text{D}}$$

$$\frac{\text{rf}^*}{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'}$$

$$\frac{\text{sm}^*}{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta}$$

$$\frac{}{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta} \text{tra}^*$$

$$\frac{}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta} \text{cp}^*$$

12.8.1 Per velocizzare derivazioni: regole di indebolimento

$$\frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma} \text{in}_{\text{sx}} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{in}_{\text{dx}}$$

Queste regole sono valide, ma non altrettanto le loro inverse, perchè?

12.9 Validità = derivabilità in $\text{LC}_=$

Il fatto che tutte le **regole di $\text{LC}_=$** sono **valide** rispetto alla semantica dei modelli classici ci permette di concludere che i sequenti derivabili sono validi rispetto alla semantica classica dei modelli. Ma vale pure il viceversa:

Theorem 12.17 (validità + completezza di sequenti in LC rispetto a semantica classica)

sequenti derivabili in $\text{LC}_=$ = sequenti validi rispetto alla semantica classica

Come corollario le formule valide sono esattamente i teoremi di $\text{LC}_=$

Theorem 12.18 (validità + completezza di formule in $\text{LC}_=$ rispetto a semantica classica)

teoremi (=formule derivabili) in $\text{LC}_=$ = tautologie predicative classiche

Ovvero tutte le **tautologie** della semantica classica, ovvero tutte le formule **valide** in ogni modello, sono **teoremi** di $\text{LC}_=$, ovvero formule derivabili in $\text{LC}_=$.

12.9.1 ATTENZIONE: NON Esiste procedura di decisione per LC o $\text{LC}_=$

Le regole COLPEVOLI dell' assenza di un processo decisione per LC e per $\text{LC}_=$ sono

$$\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall\text{-S} \quad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists\text{-D}$$

oltrechè la regola $=\text{-S}$, poichè nel cercare una derivazione di un sequente radice dal basso verso l'altro \uparrow con queste regole **aumenta la complessità** dei segni. Si ricorda che non si può fare altrimenti se si vuole avere una procedura anche semi-automatica come in sezione 12.6.1 perchè le versioni veloci di queste regole non sono sicure ovvero non permettono di concludere che se una foglia è falsa in un modello anche la radice lo è.

Per esempio nel cercare una derivazione dalla radice verso l'alto \Uparrow del tipo

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\frac{\Gamma, A(t), A(s), A(u), \forall x A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, A(t), A(s), \forall x A(x), A(u) \vdash \nabla} \text{sc}_{sx} \\
\frac{\Gamma, A(t), A(s), \forall x A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, A(t), \forall x A(x), A(s) \vdash \nabla} \forall-S \\
\frac{\Gamma, A(t), \forall x A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla} \text{sc}_{sx} \\
\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall-S
\end{array}$$

applicando le regole sopra dal basso verso l'alto aggiungiamo sempre più termini, e non è detto che si riesca a capire se si può raggiungere o meno un assioma senza provare a fare un contromodello di un sequente foglia anche se non si sono applicate tutte le regole possibili. In tal caso ci conviene trovare il contromodello del sequente ottenuto PRIMA dell'applicazione di $\forall-S$.

12.9.2 Perchè modelli con dominio non vuoto

Osserviamo che il sequente

$$\vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{x}$$

è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ per esempio in tal modo

$$\begin{array}{c}
= -ax \\
\vdash \mathbf{y}=\mathbf{y} \\
\hline
\vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{x} \quad \exists -re
\end{array}$$

Questa derivazione ci porta a concludere che per dimostrare che in OGNI MODELLO su un dominio \mathbf{D} vale $\exists \mathbf{x} \mathbf{x}=\mathbf{x}$ occorre ASSUMERE che esista almeno un $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$, che poi verifica banalmente che $\mathbf{d} = \mathbf{d}$, e quindi nella definizione di modello dobbiamo richiedere che il dominio sia NON vuoto.

12.10 Consigli su come cercare una derivazione o contromodello

Nell'intento di cercare una derivazione di un sequente è meglio:

applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e \forall -D e \exists -S
se non si riesce a derivare il sequente meglio costruire il contromodello falsificando il sequente che si trova lungo il ramo che non finisce con foglie tutte assiomi PRIMA di una (o una seconda) applicazione di \forall -S o \exists -D
Se si confida di poter derivare il sequente si possono abbreviare le derivazioni con le regole di indebolimento
NON USARE regole NON SICURE per costruire contromodelli (e, sebbene NON sia obbligatorio, controllare che il sequente radice sia falso nel contromodello)
NON USARE regole NON SICURE se non si è sicuri se il sequente è derivabile
usare SOLO le lettere w, x, y, z come VARIABILI nelle regole \exists -S e \forall -D
usare le lettere minuscole a, b, c, d, ... come costanti
le lettere u, v, u, t, s sono usate come METAVARIABILI per termini ovvero sono usate al posto sia di costanti che di variabili

12.10.1 Esercizi svolti seguendo i consigli dati

1. L'asserzione

Il programma fattoriale su 2 dà un'unico output.
Il programma fattoriale su 2 dà output il numero 2.
Il programma fattoriale su 2 dà output il numero x .

Il numero x è uguale 2.

si può formalizzare in

$$\exists y \, O(y, f, 2) \ \& \ \forall y_1 \, \forall y_2 \, (\, O(y_1, f, 2) \ \& \ O(y_2, f, 2) \rightarrow y_1 = y_2 \,) , \, O(2, f, 2), \, O(x, f, 2) \vdash x = 2$$

con

f = “ il fattoriale”

2 = “ il numero due”

$O(x, y, z)$ = “ il programma y su z dà output il numero x ”

ed è una **tautologia** perchè si deriva come segue usando la seguente abbreviazione:

$$\mathbf{Q(x)} \equiv \mathbf{O(x, f, 2)}$$

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{Q(2), Q(x) \vdash Q(2), x = 2} \quad \frac{\text{ax-id}}{Q(2), Q(x) \vdash Q(x), x = 2}}{Q(2), Q(x) \vdash Q(2) \& Q(x), x = 2} \quad \&-D \quad \frac{\frac{\text{ax-}=}{Q(2), Q(x), 2 = x \vdash 2 = 2}}{Q(2), Q(x), 2 = x \vdash x = 2} = -S}{\frac{Q(2), Q(x), Q(2) \& Q(x) \rightarrow 2 = x \vdash x = 2}{Q(2), Q(x), \forall y_2 (Q(2) \& Q(y_2) \rightarrow 2 = y_2) \vdash x = 2} \forall -Sv} \rightarrow -S$$

$$\frac{\frac{Q(2), Q(x), \exists y Q(y), \forall y_2 (Q(2) \& Q(y_2) \rightarrow 2 = y_2) \vdash x = 2}{Q(2), Q(x), \exists y Q(y), \forall y_1 \forall y_2 (Q(y_1) \& Q(y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \vdash x = 2} \forall -Sv}{\frac{Q(2), Q(x), \exists y Q(y) \& \forall y_1 \forall y_2 (Q(y_1) \& Q(y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \vdash x = 2}{\exists y Q(y) \& \forall y_1 \forall y_2 (Q(y_1) \& Q(y_2) \rightarrow y_1 = y_2), Q(2), Q(x) \vdash x = 2} \&-S} \text{sc}_{sx}$$

2. L'asserzione

Franco è venuto ad una sola riunione.

Franco non è venuto all'ultima riunione.

Franco è venuto alla riunione del 10 giugno.

L'ultima riunione non è quella del 10 giugno.

usando

$V(x, y) = x$ è venuto alla riunione y

u = ultima riunione

d = riunione del 10 giugno

f = Franco

si può formalizzare tramite il seguente

$$\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), \neg V(f, u), V(f, d) \vdash u \neq d$$

che è una **tautologia** perchè è derivabile in $LC_=$ ad esempio come segue:

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), u = d, V(f, u) \vdash V(f, u)}}{\frac{\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), V(f, d), u = d \vdash V(f, u)}{\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), V(f, d), u = d, \neg V(f, u) \vdash} \neg -S} = -S$$

$$\frac{\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), \neg V(f, u), V(f, d), u = d \vdash}{\exists y V(f, y) \& \forall y_1 \forall y_2 (V(f, y_1) \& V(f, y_2) \rightarrow y_1 = y_2), \neg V(f, u), V(f, d) \vdash u \neq d} \text{sc}_{sx} \quad \neg -D$$

3. L'argomentazione

Se gli studenti hanno coscienza di rispettare il silenzio allora ogni richiamo è superfluo.

Se gli studenti non hanno coscienza di rispettare il silenzio allora ogni richiamo è inefficace.

Ogni richiamo è superfluo o inefficace.

usando

$\mathbf{S(x)} = x$ è studente

$\mathbf{C(x)} = x$ ha coscienza di rispettare il silenzio

$\mathbf{R(x)} = x$ è un richiamo

$\mathbf{E(x)} = x$ è efficace

$\mathbf{P(x)} = x$ è superfluo

si può formalizzare così:

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{x})) \rightarrow \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x})) , \forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{C}(\mathbf{x})) \rightarrow \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})) \\ \vdash \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}))$$

Poi seguiamo la procedura in sezione 12.6.1 per stabilire la sua validità e iniziamo a cercare una sua derivazione in tal senso usando le seguenti abbreviazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{pr}_1 &\equiv \forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{x})) \\ \mathbf{pr}_2 &\equiv \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x})) \\ \mathbf{pr}_3 &\equiv \forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{C}(\mathbf{x})) \\ \mathbf{pr}_4 &\equiv \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}), \mathbf{S}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{C}(\mathbf{z}), \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{z}), \mathbf{P}(\mathbf{x})} \rightarrow -D}{\mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{pr}_1, \mathbf{P}(\mathbf{x})} \forall -D \quad \frac{\mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}), \mathbf{pr}_2 \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})} \rightarrow -S \\ \frac{\frac{\frac{\mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}), \mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2 \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})} \text{sc}_{sx}}{\frac{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}) \vdash \neg \mathbf{C}(\mathbf{w}), \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{w}) \rightarrow \neg \mathbf{C}(\mathbf{w}), \mathbf{P}(\mathbf{x})} \neg -D} \rightarrow -D \\ \frac{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{w}) \rightarrow \neg \mathbf{C}(\mathbf{w}), \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{pr}_3, \mathbf{P}(\mathbf{x})} \forall -D \quad \frac{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{pr}_3, \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4 \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})} \text{seq} \rightarrow -S \\ \frac{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4 \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})} \text{sc}_{sx} \neg -D \\ \frac{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4, \mathbf{R}(\mathbf{x}) \vdash \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4, \mathbf{R}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x}), \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})} \text{sc}_{dx} \forall -D \\ \frac{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4, \mathbf{R}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4 \vdash \mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})} \rightarrow -D \\ \frac{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4 \vdash \mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})}{\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4 \vdash \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}))} \forall -D$$

ove $\mathbf{seq} \equiv \mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{pr}_4 \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})$

e inoltre il primo $\forall -D$ si può applicare perchè x non è libera nel sequente radice, mentre l'altro $\forall -D$ si può applicare perchè w non è libera nel sequente $\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{C}(\mathbf{x})), \mathbf{P}(\mathbf{x})$ e l'ultimo $\forall -D$ si può applicare perchè z non è libera nel sequente $\mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{pr}_1, \mathbf{P}(\mathbf{x})$.

Ora la foglia più a sinistra non è un assioma e non si può applicare altro. Chiaramente questo dice che il sequente NON è valido perchè abbiamo applicato solo regole sicure.

Quindi costruiamo un modello dove sia falsa la foglia

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{S}(\mathbf{w}), \mathbf{C}(\mathbf{w}), \mathbf{S}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{C}(\mathbf{z}), \mathbf{P}(\mathbf{x})$$

Dato che l'interpretazione di questo sequente foglia in un dominio \mathbf{D} è una funzione

$$(((\mathbf{R}(\mathbf{x}) \ \& \ \mathbf{E}(\mathbf{x})) \ \& \ \mathbf{S}(\mathbf{w})) \ \& \ \mathbf{C}(\mathbf{w})) \ \& \ \mathbf{S}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{z}) \vee \mathbf{P}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{0, 1\}$$

per far sì che non sia la funzione costante $\mathbf{1}$ basta trovare una terna $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ in $\mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \mathbf{D}$ da sostituire al posto di $\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{z}$ che renda falsa l'implicazione, ovvero per cui risulti

$$(((\mathbf{R}(\mathbf{x}) \ \& \ \mathbf{E}(\mathbf{x})) \ \& \ \mathbf{S}(\mathbf{w})) \ \& \ \mathbf{C}(\mathbf{w})) \ \& \ \mathbf{S}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{z}) \vee \mathbf{P}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = 0$$

Basta porre

$$\mathbf{D} = \{\mathbf{Licia}, \mathbf{Mario}, \mathbf{Betti}\}$$

pensando di mettere **Licia** al posto di **w**, poi **Mario** al posto di **x** e infine **Betti** al posto di **z**, mandando a **0** o **1** i predicati su di loro a seconda se si trovino a dx o a sx del sequente.

Possiamo definire la semantica dei vari predicati usando sempre **x** come variabile per ogni predicato sopra (visto che ciascun predicato ha solo una variabile libera e quando si definisce singolarmente la sua interpretazione nel modello non importa il nome della sua variabile!) come segue

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = 0 & \mathbf{R}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = 1 & \mathbf{E}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = 1 \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = 1 & \mathbf{C}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = 1 & \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = 1 & \mathbf{C}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = 0 & \end{array}$$

(questo non dice cosa fa ogni predicato su **Mario**, **Licia** e **Betti** ma queste sono informazioni sufficienti per falsificare il sequente...)

Poi si definisca i rimanenti valori a piacere

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = ?? & \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = ?? \\ \mathbf{R}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = ?? & \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = ?? \\ \mathbf{E}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = ?? & \mathbf{E}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = ?? \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = ?? & \mathbf{C}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = ?? \end{array}$$

ovvero si fissi al posto dei punti di domanda un valore a piacere (in questo modo il modello è completamente determinato!).

Nel modello risulta banalmente che

$$(((\mathbf{R}(\mathbf{x}) \ \& \ \mathbf{E}(\mathbf{x})) \ \& \ \mathbf{S}(\mathbf{w})) \ \& \ \mathbf{C}(\mathbf{w})) \ \& \ \mathbf{S}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{z}) \vee \mathbf{P}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}, \mathbf{Mario}, \mathbf{Betti}) = 0$$

(si ricordi di assegnare gli elementi del dominio secondo l'ordine alfabetico, ovvero di mettere **Licia** al posto di **w**, poi **Mario** al posto di **x** e infine **Betti** al posto di **z**).

Ora si noti che **Mario** è la causa per cui nel modello risulta falso

$$\forall \mathbf{x} \ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}))$$

perchè rende vero **R(x)** ma non **P(x)** e nemmeno $\neg \mathbf{E}(\mathbf{x})$.

Poi si noti che **Licia** è la causa per cui nel modello risulta falso

$$\text{pr}_3 \equiv \forall \mathbf{x} \ (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{C}(\mathbf{x}))$$

in quanto verifica **S(x)** ma non $\neg \mathbf{C}(\mathbf{x})$. Dunque nel modello risulta vera l'implicazione

$$\text{pr}_3 \rightarrow \text{pr}_4$$

essendo l'antecedente dell'implicazione falso nel modello.

Infine si noti che **Betti** è la causa per cui nel modello risulta falso

$$\text{pr}_1 \equiv \forall \mathbf{x} \ (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{x}))$$

in quanto verifica **S(x)** ma non **C(x)**. Dunque nel modello risulta vera l'implicazione

$$\text{pr}_1 \rightarrow \text{pr}_2$$

essendo l'antecedente dell'implicazione falso nel modello.

Dunque il sequente iniziale

$$\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2, \mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4 \vdash \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}))$$

NON è valido.

Per vedere se il sequente di partenza è soddisfacibile, possiamo applicare la procedura 12.6.1 derivando

$$\vdash \neg((\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) \& (\mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4) \rightarrow \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})))$$

e vediamo che

$$\frac{\frac{\vdash (\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) \& (\mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4) \quad \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})) \vdash}{(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) \& (\mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4) \rightarrow \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})) \vdash} \rightarrow -S}{\vdash \neg((\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) \& (\mathbf{pr}_3 \rightarrow \mathbf{pr}_4) \rightarrow \forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})))} \neg -D$$

Consideriamo la foglia di destra e secondi i consigli in 12.10 ci fermiamo senza applicare la regola $\forall -S$ e cerchiamo di trovare un modello in cui $\forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}))$ è vera.

A tal fine, essendo una quantificazione universale basta porre l'interpretazione della funzione

$$(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

come funzione costante **1**. A tal scopo, basta scegliere un dominio **D** non vuoto qualsiasi e porre o la premessa sempre a **0**, o la conclusione sempre a **1**. Scegliamo la prima ovvero poniamo

$$\text{per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D} \quad \mathbf{R}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

e in tal caso per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ $(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ e dunque

$$(\forall \mathbf{x} (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Dunque il sequente è **soddisfacibile** in tal modello.

Concludente il sequente di partenza è un' **opinione** perchè falso in un modello e vero in un altro.

12.10.2 Soluzioni di esercizi su regole valide

1. Si stabilisca se la regola

$$\frac{C \vdash A(x) \vee \perp, \nabla}{C \vdash \forall x A(x), \nabla} \quad 1(VL(C) = \emptyset)$$

è sicura, ovvero valida con la sua inversa.

Questa regola è NON valida perchè permette una quantificazione universale SENZA PROIBIRE l'occorrenza di **x** come variabile libera in ∇ che è invece proibita nella regola $\forall - \mathbf{D}$.

Per provarlo, mostriamo che il suo utilizzo assieme alle regole del calcolo $\mathbf{LC}_=$ permette di derivare un sequente non valido come segue.

$$\frac{\frac{\frac{\neg \mathbf{A}(\mathbf{x}), \perp, \neg \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\vdash \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp, \neg \mathbf{A}(\mathbf{x})} \vee -D}{\vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \neg \mathbf{A}(\mathbf{x})} \mathbf{1}}{\frac{\vdash \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\vdash \forall \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})} \forall -D} \text{sc}_{dx}$$

ove l'applicazione di $\forall -D$ è corretta perchè \mathbf{x} non è libera nel sequente radice.

Ora mostriamo che la radice dell'albero sopra

$$\vdash \forall \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

NON è un sequente valido. Infatti la formula $\forall \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ che interpreta il sequente non è vera ad esempio nel modello

$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse d è maschio

in quanto in tal modello si ha che $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = 0$ e dall'altra parte si ha pure $(\forall \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = 1$ e dunque concludiamo

$$(\forall \mathbf{x} \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$$

Ora vediamo che la *regola inversa* **inv-1** di

$$\frac{C \vdash A(x) \vee \perp, \nabla}{C \vdash \forall x A(x), \nabla} 1(VL(C) = \emptyset)$$

ovvero

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash A(x) \vee \perp, \nabla} \text{inv} - 1(\mathbf{VL}(\mathbf{C}) = \emptyset)$$

è **valida**.

Lo proviamo nel caso in cui ∇ è composta da una sola formula (che è equivalente al caso in cui è composta da più formule perchè è sempre possibile trasformare la virgola a sinistra come $\&$ e quella a destra come \vee) e sia dipendente sia da \mathbf{x} che da \mathbf{y} dato che restringersi alle proposizioni senza variabili potrebbe semplificare un pò troppo. Questo caso rappresenta il caso più generale perchè trattare la presenza di più variabili oltre ad \mathbf{x} è equivalente a trattare un'unica variabile \mathbf{y} oltre ad \mathbf{x} . Dunque supponiamo

$$\nabla \equiv \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Ora mostriamo che la regola è valida verificando che in ogni modello \mathcal{D} fissato vale

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \nabla^{\vee})$$

che con le scelte fatte diventa

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \rightarrow \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

Usiamo il lemma scorciatoia per mostrare questo e supponiamo che nel modello valga

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

ovvero che per ogni $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ in \mathcal{D}

$$(\mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$$

Ora per mostrare che vale nel modello pure

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

ovvero che per ogni $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ in \mathcal{D}

$$(\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$$

usiamo di nuovo il lemma scorciatoia e supponiamo che nel modello \mathcal{D} valga $\mathbf{C}^{\mathcal{D}} = 1$. Dunque per l'ipotesi

$$(\mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$$

si ricava che nel modello

$$(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$$

Ora si hanno due casi:

I caso: $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$ e quindi

$$(\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$$

II caso: $(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 1$ e quindi vale pure $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$ (si noti che la variabile \mathbf{x} corrisponde alla prima componente della funzione in $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$) e dunque

$$(\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(-, -)(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = 1$$

In conclusione avendo ispezionato la verità su una coppia $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ a piacere si conclude che il seguente conclusione

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

è vero nel modello \mathbf{D} .

Ciò significa che la regola inversa della regola **1** è **valida**.

2.

$$\frac{x \text{ parla ad alta voce} \vdash x \text{ disturba}}{\text{Qualcuno parla ad alta voce} \vdash \text{Qualcuno disturba}} \mathbf{3}$$

è istanza di una regola valida assieme alla sua inversa

ove

$P(x) = "x \text{ parla ad alta voce}"$

$D(x) = "x \text{ disturba}"$

La regola **3** si formalizza in

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x})} \mathbf{3}$$

ed è valida perchè risulta una regola derivata, ovvero composizione di regole di $\mathbf{LC}_=$, come segue

$$\frac{\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x})} \exists\text{--D}_v}{\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x})} \exists\text{--S}$$

ove l'applicazione di $\exists\text{--S}$ è corretta perchè \mathbf{x} non è libera nel sequente radice.

Invece l'inversa della regola

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x})} \mathbf{3}$$

ovvero

$$\frac{\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{D}(\mathbf{x})} \text{inv} - \mathbf{3}$$

risulta NON valida ad esempio nel modello

$\mathbf{D} = \{\text{Topolino}, \text{Minni}\}$
 $\mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse \mathbf{d} è maschio
 $\mathbf{D}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 1$ sse \mathbf{d} è femmina

Infatti in tal modello risulta che il sequente premessa $(\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ perchè $(\exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ in quanto $\mathbf{D}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Minni}) = \mathbf{1}$. Però il sequente conclusione è falso nel modello perchè

$$(\mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = \mathbf{0}$$

in quanto $\mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = \mathbf{1}$ mentre $\mathbf{D}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\text{Topolino}) = \mathbf{0}$ ovvero nel modello fissato non vale

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{x}))$$

ovvero abbiamo mostrato un modello in cui la formula che rappresenta la regola inversa

$$(\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{D}(\mathbf{x})) \rightarrow \forall \mathbf{x} (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{x}))$$

NON è valida.

13 Spiegazione delle regole dei quantificatori in logica classica

Qui spieghiamo la forma delle regole della quantificazione universale ed esistenziale.

1. La regola della quantificazione universale a sinistra

$$\frac{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{t}_{\text{ter}}) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla} \forall\text{-S}$$

che formalizza la formula

$$(\Gamma^{\&} \& \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \& \mathbf{A}(\mathbf{t}_{\text{ter}}) \rightarrow \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \& \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})$$

che è una legge logica in quanto è pure una legge logica

$$\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \& \mathbf{A}(\mathbf{t}_{\text{ter}}) \leftrightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

Dunque nella regola la validità logica sale e scende rendendo la regola *sicura* e difatti è una legge logica la formula

$$(\Gamma^{\&} \& \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \& \mathbf{A}(\mathbf{t}_{\text{ter}}) \rightarrow \nabla^{\vee}) \leftrightarrow (\Gamma^{\&} \& \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})$$

Esiste anche una forma NON sicura della regola che permette di abbreviare le derivazioni che è

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A}(\mathbf{t}_{\text{ter}}) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla} \forall\text{-Sv}$$

che formalizza l'enunciato

$$(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{t}_{\text{ter}}) \rightarrow \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \& \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})$$

che è una legge logica.

Per comprendere la sua validità logica consideriamo questo esempio di applicazione della regola di quantificazione universale a sinistra veloce

$$\frac{\mathbf{N}, \mathbf{B}(\mathbf{v}) \vdash \neg \mathbf{T}}{\mathbf{N}, \forall \mathbf{x} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \vdash \neg \mathbf{T}} \forall\text{-Sv}$$

che formalizza

ponendo

\mathbf{N} =È notte

$\mathbf{B}(\mathbf{x})$ = x brilla nel cielo

\mathbf{T} = Il cielo è del tutto coperto di nubi

\mathbf{v} = Venere

“Assumendo che ,

se è notte e Venere brilla nel cielo allora il cielo non è del tutto coperto di nubi

allora ne segue che

se è notte e tutto brilla nel cielo allora il cielo non è del tutto coperto di nubi.”

Chiaramente la regola non è sicura e lo si vede con questo esempio

$$\frac{\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{P}}{\mathbf{A}(\mathbf{m}) \vdash \mathbf{P}} \text{ inv} - \forall - Sv$$

che formalizza

ponendo

$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = x$ ha la cintura allacciata

\mathbf{P} = l'aereo parte

\mathbf{m} = Mario

che formalizza l'argomentazione scorretta

“Assumendo che,

se tutti hanno le cinture allacciate allora l'aereo parte

ne segue che

se Mario ha la cintura allacciata allora l'aereo parte.”

perchè la premessa richiede *tutti* abbiano la cintura allacciata affinché l'aereo parta mentre nella premessa sotto sappiamo solo che Mario ha la cintura allacciata e non che l'abbiano anche gli altri passeggeri dell'aereo.

2. La regola di quantificazione universale a destra

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w}), \nabla}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla} \forall - D \text{ (} \mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla) \text{)}$$

formalizza la formula (associando a sinistra i disgiunti delle conclusioni dei sequenti)

$$\forall \mathbf{w} (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

che è una legge logica proprio perchè la *variabile w NON è libera in $\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla$* .

Per comprendere la sua validità logica consideriamo questo esempio

$$\frac{\mathbf{N} \vdash \mathbf{S}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{w}), \mathbf{C}}{\mathbf{N} \vdash \forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x})), \mathbf{C}} \forall - D \text{ (} \mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{N}, \forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x})), \mathbf{C}) \text{)}$$

che formalizza

ponendo

\mathbf{N} = È notte

$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = x$ brilla nel cielo

$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = x$ è una stella

\mathbf{C} = Il cielo è coperto di nubi

“Assumendo che,

qualsiasi cosa, se è notte allora o, se è una stella brilla nel cielo, oppure il cielo è coperto di nubi

ne segue che

se è notte, allora o tutte le stelle brillano nel cielo oppure il cielo è coperto di nubi.”

Si noti che la regola è *sicura*, ovvero la verità sale e scende nella regola, poichè è una legge logica la formula

$$\forall \mathbf{w} (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla^{\vee}) \leftrightarrow (\Gamma^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

Si osservi che la condizione a lato della regola riguardante il fatto che la variabile \mathbf{w} non deve comparire libera nel sequente conclusione deriva dal fatto che se si ommette tale condizione si potrebbero derivare sequenti palesemente falsi ad esempio, assumendo di aver derivato in aritmetica

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \vdash \mathbf{5} + \mathbf{w} = \mathbf{5}$$

applicando la regola senza condizioni come segue

$$\frac{\mathbf{w} = \mathbf{0} \vdash \quad \mathbf{5} + \mathbf{w} = \mathbf{5}}{\mathbf{w} = \mathbf{0} \vdash \quad \forall \mathbf{w} \mathbf{5} + \mathbf{w} = \mathbf{5}}$$

si vede subito che questa applicazione, *se fosse valida!*, permetterebbe di dedurre in aritmetica il sequente

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \vdash \forall \mathbf{w} \mathbf{5} + \mathbf{w} = \mathbf{5}$$

come conseguenza logica dalla premessa $\mathbf{w} = \mathbf{0} \vdash \mathbf{5} + \mathbf{w} = \mathbf{5}$, e invece il sequente $\mathbf{w} = \mathbf{0} \vdash \forall \mathbf{w} \mathbf{5} + \mathbf{w} = \mathbf{5}$ è falso in aritmetica.

Si noti che l'applicazione sopra NON rispetta la condizione sulle variabili della regola \forall -D in quanto la variabile \mathbf{w} è LIBERA nel contesto a sinistra $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Dunque la regola \forall -D senza condizioni NON può essere una regola valida logicamente ovvero applicabile a tutte le teorie scientifiche comprese l'aritmetica!!!

3. La regola di quantificazione esistenziale a sinistra

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla} \exists\text{-S } (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla))$$

formalizza la formula

$$\forall \mathbf{w} (\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})$$

che è una legge logica proprio perchè la *variabile w NON è libera in* $\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla$.

Per comprendere la sua validità logica consideriamo questo esempio

$$\frac{\mathbf{N}, \mathbf{S}(\mathbf{w}) \& \mathbf{B}(\mathbf{w}) \vdash \neg \mathbf{T}}{\mathbf{N}, \exists \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \& \mathbf{B}(\mathbf{x})) \vdash \neg \mathbf{T}} \exists\text{-S } (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{N}, \exists \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \& \mathbf{B}(\mathbf{x})), \mathbf{T}))$$

che formalizza

ponendo

\mathbf{N} =È notte

$\mathbf{B}(\mathbf{x})$ = x brilla nel cielo

$\mathbf{S}(\mathbf{x})$ = x è una stella

\mathbf{T} = Il cielo è del tutto coperto di nubi

“Assumendo che,
qualsiasi cosa, se è notte ed è una stella che brilla nel cielo allora il cielo non è del tutto coperto di nubi
 ne segue che
se è notte e c'è una stella che brilla nel cielo allora il cielo non è del tutto coperto di nubi.”

Si noti che la regola è *sicura*, ovvero la verità sale e scende nella regola, poichè è una legge logica la formula

$$\forall \mathbf{w} (\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \nabla^{\vee}) \quad \leftrightarrow \quad (\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})$$

4. La regola di quantificazione esistenziale a destra

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t}_{\text{ter}}), \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla} \exists\text{--D}$$

formalizza la formula (a meno di associatività dei disgiunti delle conclusioni di entrambi i sequenti)

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{t}_{\text{ter}}) \vee \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})) \vee \nabla^{\vee}) \quad \rightarrow \quad (\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

che è una legge logica in quanto è pure una legge logica

$$\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{A}(\mathbf{t}_{\text{ter}}) \leftrightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

Dunque nella regola la validità logica sale e scende rendendo la regola *sicura* e difatti è una legge logica la formula

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathbf{t}_{\text{ter}}) \vee \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})) \vee \nabla^{\vee}) \quad \leftrightarrow \quad (\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

Esiste anche una forma NON sicura della regola che permette di abbreviare le derivazioni che è

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t}_{\text{ter}}), \nabla}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla} \exists\text{--Dv}$$

che formalizza l'enunciato (associando a sinistra i disgiunti delle conclusioni dei sequenti)

$$(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{t}_{\text{ter}}) \vee \nabla^{\vee}) \quad \rightarrow \quad (\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

che è una legge logica.

Per comprendere la sua validità logica consideriamo questo esempio di applicazione della regola di quantificazione esistenziale a destra veloce

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v}), \neg \mathbf{P}(\mathbf{v})}{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \neg \mathbf{P}(\mathbf{v})} \exists\text{--Dv}$$

che formalizza

ponendo

$A(x)$ = “ x è arrivato in stazione”

$P(x)$ = “le porte del treno x sono aperte”

$S(x, y)$ = “ x sale su y .”

m = “Marco”

v = “treno per Venezia”

“Assumendo che,

se il treno per Venezia è arrivato in stazione allora o Marco sale sul treno per Venezia oppure le porte del treno per Venezia non sono aperte

ne segue che

se il treno per Venezia è arrivato in stazione allora o qualcuno sale sul treno per Venezia oppure le porte del treno per Venezia non sono aperte.”

Chiaramente la regola non è sicura e lo si vede con questo esempio

$$\frac{A(v) \vdash \exists x S(x, v), \neg P(v)}{A(v) \vdash S(g, v), \neg P(v)} \text{ inv} - \exists - Dv$$

che formalizza

ponendo

$A(x)$ = “ x è arrivato in stazione”

$P(x)$ = “le porte del treno x sono aperte”

$S(x, y)$ = “ x sale su y .”

g = “il giornalaio della stazione”

v = “il treno per Venezia”

che formalizza l’argomentazione scorretta

“Assumendo che,

se il treno per Venezia è arrivato in stazione allora o qualcuno sale sul treno per Venezia oppure le porte del treno per Venezia non sono aperte.”

ne segue che

se il treno per Venezia è arrivato in stazione allora o il giornalaio sale sul treno per Venezia oppure le porte del treno per Venezia non sono aperte.”

Tale argomentazione non è corretta in quanto le porte del treno potrebbero essere aperte e il giornalaio è al suo posto a vendere giornali!

13.1 Spiegazione alternativa delle regole delle quantificatori

È possibile spiegare le regole dei quantificatori della logica classica a partire dalle regole della negazione scritta con formule qualsiasi

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}, \Delta}{\Gamma, \neg \mathbf{fr} \vdash \Delta} \neg\text{-S} \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{fr} \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{fr}, \Delta} \neg\text{-D}$$

e dalle seguenti versioni ristrette delle regole di quantificazione universale ed esistenziale a destra sempre scritte con formule qualsiasi

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}} \forall\text{-D} \ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr})) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}} \exists\text{-D}$$

ove con $\mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}]$ si intende che la variabile \mathbf{x} nella formula \mathbf{fr} è sostituita con il termine \mathbf{t}_{ter} ,

per i seguenti motivi

1. la validità delle regole di quantificazione universale ed esistenziale a destra in forma ristretta è più semplice da riconoscere delle corrispondenti versioni generali e delle corrispondenti regole a sinistra;
2. grazie alla validità delle **regole di negazione e delle loro inverse** già dimostrata per proposizione arbitrarie, le *versioni ristrette delle regole di quantificazione universale ed esistenziali* sono *equivalenti a quelle generali* del calcolo;
3. usando le regole di negazione a destra e a sinistra con le **leggi logiche di De Morgan per i quantificatori** per una qualsiasi formula \mathbf{fr}

$$\neg \exists \mathbf{x} \mathbf{fr} \leftrightarrow \forall \mathbf{x} \neg \mathbf{fr} \qquad \neg \forall \mathbf{x} \mathbf{fr} \leftrightarrow \exists \mathbf{x} \neg \mathbf{fr}$$

e la **legge logica della doppia negazione**

$$\mathbf{fr} \leftrightarrow \neg \neg \mathbf{fr}$$

giustificeremo le regole di sinistra della quantificazione universale ed esistenziale a partire dalle regole di quantificazione universale ed esistenziale a destra.

Andiamo ora a mostrare i singoli punti.

1. Giustificazione della regola ristretta della quantificazione universale a dx.

La forma ristretta della regola di quantificazione universale a destra scritta con formule qualsiasi

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}} \forall\text{-D} \ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}))$$

formalizza semplicemente la formula

$$\forall \mathbf{w} \ (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]) \rightarrow (\Gamma^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{fr})$$

che è una legge logica proprio perchè la *variabile w NON è libera in $\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}$* .

Per comprendere la sua validità logica consideriamo questo esempio

$$\frac{\mathbf{N}, \neg \mathbf{C} \vdash \mathbf{S}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{w})}{\mathbf{N}, \neg \mathbf{C} \vdash \forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x}))} \forall\text{-D} \ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{N}, \neg \mathbf{C}, \forall \mathbf{x} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x}))))$$

che formalizza

ponendo

$\mathbf{N} = \text{È notte}$

$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = x \text{ brilla nel cielo}$

$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = x \text{ è una stella}$

$\mathbf{C} = \text{Il cielo è coperto di nubi}$

“Dal fatto che,

qualsiasi cosa, se è notte e il cielo non è coperto di nubi allora se è una stella brilla,

segue che

se è notte e il cielo non è coperto di nubi, allora tutte le stelle brillano nel cielo.”

Si noti che la regola è *sicura*, ovvero la verità sale e scende nella regola, poichè è una legge logica la formula

$$\forall \mathbf{w} (\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]) \quad \leftrightarrow \quad (\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{fr})$$

Giustificazione della regola ristretta della quantificazione esistenziale a dx

La forma ristretta della regola di quantificazione esistenziale a destra scritta con formule qualsiasi

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}} \quad \exists\text{-D}$$

formalizza la formula

$$(\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \vee \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}) \quad \rightarrow \quad (\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{fr})$$

che è una legge logica in quanto è pure una legge logica

$$\exists \mathbf{x} \mathbf{fr} \vee \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \leftrightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}$$

Dunque nella regola la validità logica sale e scende rendendo la regola *sicura* e difatti è una legge logica la formula

$$(\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \vee \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}) \quad \leftrightarrow \quad (\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{fr})$$

Di fatto la regola sopra è la correzione in forma sicura della seguente regola NON sicura che rappresenta il modo con cui noi introduciamo la quantificazione esistenziale come conclusione di un ragionamento:

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}]}{\mathbf{\Gamma} \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}} \quad \exists\text{-Dv}$$

che formalizza l'enunciato

$$(\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}]) \quad \rightarrow \quad (\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{fr})$$

che è una legge logica come mostrato dal seguente esempio

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{P}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})}{\mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{P}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v})} \exists\text{-D}v$$

che formalizza

ponendo

$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ = “ x è arrivato in stazione”

$\mathbf{P}(\mathbf{x})$ = “le porte del treno x sono aperte”

$\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ = “ x sale su y .”

\mathbf{m} = “Marco”

\mathbf{v} = “treno per Venezia”

“Assumendo che,

se il treno per Venezia è arrivato in stazione e le sue porte sono aperte allora Marco sale su questo treno

ne segue che

se il treno per Venezia è arrivato in stazione e le sue porte sono aperte allora qualcuno sale su questo treno.”

Chiaramente la regola non è sicura e lo si vede con questo esempio

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{P}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{P}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{g}, \mathbf{v})} \text{inv} - \exists\text{-D}v$$

che formalizza

ponendo

$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ = “ x è arrivato in stazione”

$\mathbf{P}(\mathbf{x})$ = “le porte del treno x sono aperte”

$\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ = “ x sale su y .”

\mathbf{g} = “il giornalaio della stazione”

\mathbf{v} = “il treno per Venezia”

che formalizza l’argomentazione scorretta

“Assumendo che,

se il treno per Venezia è arrivato in stazione e le sue porte sono aperte allora qualcuno sale sul treno per Venezia”

ne segue che

se il treno per Venezia è arrivato in stazione e le sue porte sono aperte allora il giornalaio sale sul treno per Venezia.”

Tale argomentazione non è corretta in quanto il giornalaio potrebbe benissimo essere al suo posto a vendere giornali!

2. Ora osserviamo che grazie alle regole di negazione e alla legge della doppia negazione possiamo ricavare le regole della quantificazione universale ed esistenziale a destra in forma generale.

Regola di quantificazione universale a destra in forma generale.

La regola di quantificazione universale a destra scritta con formule qualsiasi

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}] , \nabla}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{fr} , \nabla} \forall\text{-D } (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}, \nabla))$$

si ricava dalla regola

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}} \forall\text{-D } (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}))$$

procedendo in tal modo:

supponiamo per semplicità

$$\nabla \equiv \alpha, \beta$$

allora giustifichiamo il passaggio dalla premessa $\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \alpha, \beta$ alla conclusione $\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{fr} , \alpha, \beta$ come applicazione di una serie di regole valide (e sicure!!!) come segue (si ricordi che le inverse delle regole di negazione sono valide!)

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}] , \alpha, \beta}{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]} \text{-sc}_{\mathbf{dx}} \\ \frac{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}{\Gamma, \neg \alpha \vdash \beta, \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]} \neg\text{-S} \\ \frac{\Gamma, \neg \alpha \vdash \beta, \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}{\Gamma, \neg \alpha, \neg \beta \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]} \neg\text{-S} \\ \frac{\Gamma, \neg \alpha, \neg \beta \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}{\Gamma, \neg \alpha, \neg \beta \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}} \forall\text{-D } (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \neg \alpha, \neg \beta, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr})) \\ \frac{\Gamma, \neg \alpha, \neg \beta \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}}{\Gamma, \neg \alpha \vdash \beta, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}} \text{inv-}\neg\text{-S} \\ \frac{\Gamma, \neg \alpha \vdash \beta, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}}{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}} \text{inv-}\neg\text{-S} \\ \frac{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{fr} , \alpha, \beta} \text{-sc}_{\mathbf{dx}} \end{array}$$

Si osservi inoltre che la condizione sulle variabili per l'applicazione della regola di quantificazione universale a destra operata sopra è soddisfatta in quanto se \mathbf{w} non è libera in $\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr} , \alpha, \beta$ non lo è neppure in $\Gamma, \neg \alpha, \neg \beta, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}$.

Nel caso ∇ contenga una sola formula o più di due formule si procede analogamente a quanto fatto sopra.

Regola di quantificazione esistenziale a destra in forma generale.

La regola di quantificazione esistenziale a destra scritta con formule qualsiasi

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] , \exists \mathbf{x} \mathbf{fr} , \nabla}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{fr} , \nabla} \exists\text{-D}$$

si ricava dalla regola

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] , \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}} \exists\text{-D}$$

procedendo come segue:

supponendo per semplicità

$$\nabla \equiv \alpha, \beta$$

giustificiamo il passaggio dalla premessa $\Gamma \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \alpha, \beta$ alla conclusione $\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \text{ fr}, \alpha, \beta$ come applicazione della seguente serie di regole valide (e sicure!!)

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \exists \mathbf{x} \text{ fr}, \alpha, \beta}{\Gamma, \vdash \alpha, \beta, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \exists \mathbf{x} \text{ fr}} \neg\text{sc}_{\text{dx}} \\
\frac{\Gamma, \vdash \alpha, \beta, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \exists \mathbf{x} \text{ fr}}{\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \exists \mathbf{x} \text{ fr}} \neg\neg\text{S} \\
\frac{\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \exists \mathbf{x} \text{ fr}}{\Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \exists \mathbf{x} \text{ fr}} \neg\neg\text{S} \\
\frac{\Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \exists \mathbf{x} \text{ fr}}{\Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \exists \mathbf{x} \text{ fr}} \exists\text{-D} \\
\frac{\Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \exists \mathbf{x} \text{ fr}}{\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta, \exists \mathbf{x} \text{ fr}} \text{inv-}\neg\neg\text{S} \\
\frac{\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta, \exists \mathbf{x} \text{ fr}}{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \exists \mathbf{x} \text{ fr}} \text{inv-}\neg\neg\text{S} \\
\frac{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \exists \mathbf{x} \text{ fr}}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \text{ fr}, \alpha, \beta} \neg\text{sc}_{\text{dx}}
\end{array}$$

ricordando che le inverse delle regole di negazione sono valide!!

Nel caso ∇ contenga una sola formula o più di due formule si procede analogamente a quanto fatto sopra.

3. Regola di quantificazione universale a sinistra.

La regola di quantificazione universale a sinistra scritta con formule qualsiasi

$$\frac{\Gamma, \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \vdash \nabla}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \text{ fr} \vdash \nabla} \forall\text{-S}$$

si ricava in tal modo *dalla regola di quantificazione esistenziale a destra assieme alle regole di negazione*. Utilizzando la legge logica di De Morgan dei quantificatori

$$\forall \mathbf{x} \neg \text{fr} \quad \leftrightarrow \quad \neg \exists \mathbf{x} \text{ fr}$$

si ottiene che vale

$$\forall \mathbf{x} \neg\neg \text{fr} \quad \leftrightarrow \quad \neg \exists \mathbf{x} \neg \text{fr}$$

e infine

$$\forall \mathbf{x} \text{ fr} \quad \leftrightarrow \quad \neg \exists \mathbf{x} \neg \text{fr}$$

per la legge della doppia negazione

$$\text{fr} \quad \leftrightarrow \quad \neg\neg \text{fr}$$

Dunque la regola di quantificazione universale a sinistra si può equivalentemente riformulare in tal modo

$$\frac{\Gamma, \neg \exists \mathbf{x} \neg \text{fr}, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \vdash \nabla}{\Gamma, \neg \exists \mathbf{x} \neg \text{fr} \vdash \nabla} \forall\text{-S}$$

e giustificare come risultato dell'applicazione di questa serie di regole valide (e sicure!)

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma, \neg \exists \mathbf{x} \neg \text{fr}, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \vdash \nabla}{\Gamma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \neg \exists \mathbf{x} \neg \text{fr} \vdash \nabla} \neg\text{sc}_{\text{sx}} \\
\frac{\Gamma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \neg \exists \mathbf{x} \neg \text{fr} \vdash \nabla}{\Gamma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \vdash \exists \mathbf{x} \neg \text{fr}, \nabla} \text{inv-}\neg\neg\text{D} \\
\frac{\Gamma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}] \vdash \exists \mathbf{x} \neg \text{fr}, \nabla}{\Gamma \vdash \neg \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \exists \mathbf{x} \neg \text{fr}, \nabla} \neg\text{-D} \\
\frac{\Gamma \vdash \neg \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}], \exists \mathbf{x} \neg \text{fr}, \nabla}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \neg \text{fr}, \nabla} \exists\text{-D} \\
\frac{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \neg \text{fr}, \nabla}{\Gamma, \neg \exists \mathbf{x} \neg \text{fr} \vdash \nabla} \neg\neg\text{S}
\end{array}$$

Regola di quantificazione esistenziale a sinistra.

La regola di quantificazione esistenziale a sinistra scritta con formule qualsiasi

$$\frac{\Gamma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}] \vdash \nabla}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \text{ fr} \vdash \nabla} \exists\text{-S } (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla))$$

si ricava in tal modo dalla *regola di quantificazione universale a destra assieme alle regole di negazione*. Utilizzando la legge logica di De Morgan dei quantificatori

$$\exists \mathbf{x} \neg \text{fr} \quad \leftrightarrow \quad \neg \forall \mathbf{x} \text{ fr}$$

si ottiene che vale

$$\exists \mathbf{x} \neg \neg \text{fr} \quad \leftrightarrow \quad \neg \forall \mathbf{x} \neg \text{fr}$$

e infine

$$\exists \mathbf{x} \text{ fr} \quad \leftrightarrow \quad \neg \forall \mathbf{x} \neg \text{fr}$$

per la legge della doppia negazione

$$\text{fr} \quad \leftrightarrow \quad \neg \neg \text{fr}$$

Dunque la nostra regola si può equivalentemente riformulare in tal modo

$$\frac{\Gamma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}] \vdash \nabla}{\Gamma, \neg \forall \mathbf{x} \neg \text{fr} \vdash \nabla} \exists\text{-S } (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \neg \forall \mathbf{x} \neg \text{fr}, \nabla))$$

e giustificare come risultato dell'applicazione di questa serie di regole valide (e sicure!)

$$\frac{\frac{\Gamma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}] \vdash \nabla}{\Gamma \vdash \neg \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla} \neg\text{-D}}{\frac{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \neg \text{fr}, \nabla}{\Gamma, \neg \forall \mathbf{x} \neg \text{fr} \vdash \nabla} \neg\text{-S}} \forall\text{-D } (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} \neg \text{fr}, \nabla))$$

osservando che la condizione sulle variabili relativa all'applicazione della regola di quantificazione universale a destra operata sopra è soddisfatta perchè se \mathbf{w} non è libera in $\Gamma, \neg \forall \mathbf{x} \neg \text{fr}, \nabla$ non lo è neanche in $\Gamma, \forall \mathbf{x} \neg \text{fr}, \nabla$.

14 Linguaggi predicativi con simboli di funzione

Possiamo aggiungere al linguaggio predicativo L anche simboli di funzioni come segue:

Def. 14.1 (linguaggio predicativo con simboli di funzione) *Un linguaggio predicativo con uguaglianza \mathcal{L} risulta determinato dai seguenti simboli di base*

- costanti per termini : \mathbf{c}_j in numero a piacere
- funzioni tra termini: $\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ in numero a piacere
- predicati atomici : $\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ in numero a piacere

e dunque per definire un modello \mathcal{D} per \mathcal{L} , oltre ad interpretare le costanti $\mathbf{c}_j^{\mathcal{D}} \in \mathbf{D}$ e i predicati

$$\mathbf{P}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)^{\mathcal{D}}(-, \dots, -) : \mathcal{D}^m \longrightarrow \{0, 1\}$$

dobbiamo interpretare le funzioni tra termini come funzioni tra domini

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^{\mathcal{D}}(-, \dots, -) : \mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{D}$$

Nel caso della presenza di simboli di funzioni il calcolo dei sequenti per la logica classica predicativa viene arricchito anche di una regola dell'uguaglianza a sinistra che sostituisce il termine di sinistra con quello di destra ovvero della regola

$$\frac{\Sigma, \mathbf{s} = \mathbf{t}, \Gamma(\mathbf{t}) \vdash \Delta(\mathbf{t}), \nabla}{\Sigma, \Gamma(\mathbf{s}), \mathbf{s} = \mathbf{t} \vdash \Delta(\mathbf{s}), \nabla} = -S_{\text{sym}}$$

in quanto in presenza di simboli di funzioni non basta $=_S$ per catturare TUTTI i sequenti validi nella semantica della logica classica con uguaglianza e simboli di funzioni.

14.1 Calcolo dei sequenti LC_- per la logica classica predicativa con uguaglianza e simboli di funzione

$\frac{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'}{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'} \text{ ax-id} \quad \frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{ sc}_{\text{sx}}$ $\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&S$ $\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee-S$ $\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg-S$ $\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow-S$ $\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall-S$ $\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \nabla} \exists-S \quad (w \notin VL(\Gamma, \exists x A(x), \nabla))$ $\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -S$ $= -\text{ax}$ $\Gamma \vdash t = t, \Delta$	$\frac{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla} \text{ ax-}\perp \quad \frac{\Gamma \vdash \nabla, \mathbf{tt}, \nabla'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla} \text{ ax-}\mathbf{tt}$ $\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{ sc}_{\text{dx}}$ $\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-D$ $\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee D$ $\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg-D$ $\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow-D$ $\frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \forall-D \quad (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$ $\frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists-D$ $\frac{\Sigma, s = t, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), s = t \vdash \Delta(s), \nabla} = -S_{\text{sym}}$
--	--

Uso dei simboli di funzione nella formalizzazione

Problema: in quali modi possiamo formalizzare

“Ogni uomo ha come antenato suo padre”

??

Una possibilità è usare i seguenti simboli predicativi

$\mathbf{U}(\mathbf{x}) =$ “ x è un uomo”

$\mathbf{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) =$ “ y è antenato di x ”

$\mathbf{P}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) =$ “ y è padre di x ”

e formalizzarlo in

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{y} (\mathbf{P}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \ \& \ \mathbf{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x})))$$

Ma visto che il padre è unico si può introdurre un simbolo $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ per la funzione (parziale)

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \textit{padre di } x$$

e in tal caso come si formalizza la frase sopra???

Per esempio in tal modo

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{p}(\mathbf{x}), \mathbf{x}))$$

Poi un modello per il linguaggio predicativo \mathbf{L} con simboli $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ è questo:

$\mathcal{D} =$ insieme degli **uomini**

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = \begin{cases} 1 & \text{se “d è antenato di d’”} \\ 0 & \text{se “d NON è antenato di d’”} \end{cases}$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \textit{padre di } \mathbf{d}$$

ben definita perchè tutti hanno un padre!!!

15 Nozione di teoria ed esempi

Ora applichiamo quanto appreso precedentemente sulla logica classica con uguaglianza allo studio di alcune sue teorie. In senso lato passiamo dallo studio della logica a quello della scienza, ovvero di una teoria scientifica. Ci limiteremo alquanto in questo proposito, perchè ci soffermeremo solo a studiare l'aritmetica di Peano e alcune teorie tratte da contesti di vita comune.

Def. 15.1 (teoria) Con il termine **teoria** si intende un'estensione del calcolo della logica classica con uguaglianza $\mathbf{LC}_=$ con degli **assiomi extralogici** indicati in una lista

- $Ax.1$
- $Ax.2$
- $Ax.3$
- $Ax.4$
- ...
- $Ax.k$

e le seguenti **regole di composizione**

$$\frac{\vdash \mathbf{fr} \quad \Gamma, \mathbf{fr}, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta} \text{ comp}$$

ove \mathbf{fr} è una formula del linguaggio predicativo della teoria.

Ovvero in breve

TEORIA predicativa = **LOGICA predicativa** + **regole composizione** + **assiomi EXTRALOGICI**

Def. 15.2 (sequente derivabile in una teoria \mathcal{T}) Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice **derivabile** nella **teoria predicativa \mathcal{T}**

se esiste un albero avente

- $\Gamma \vdash \Delta$ come radice;
- ogni foglia è istanza di un assioma di \mathcal{T}
ossia o di un assioma logico di $\mathbf{LC}_=$ o di un **assioma extralogico specifico** di \mathcal{T} ;
- l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di \mathbf{T} ovvero delle regole di $\mathbf{LC}_=$ e delle regole di composizione.

Def. 15.3 Una formula \mathbf{fr} si dice **teorema** di una specifica teoria \mathcal{T} se è *derivabile nella teoria \mathcal{T}* (ovvero è una “*tautologia di \mathcal{T}* ”).

Osservazione: Tutte le tautologie classiche sono teoremi di ogni teoria predicativa!!!

15.1 Come derivare in una teoria

Come nel caso delle teorie proposizionali anche per le teorie predicative la regola di composizione si può usare in due modi che qui ripetiamo per comodità del lettore supponendo che \mathcal{T} sia una teoria predicativa determinata dagli assiomi extralogici

- Ax.1
- ...
- Ax.k

1. Uso della regola di composizione su assiomi:

Le formule **fr** che si ottengono da una derivazione in $\mathbf{LC}_=$ di **fr** con l'uso di assiomi extralogici $\text{Ax.i}_1, \text{Ax.i}_2 \dots$ come premesse diventano *teoremi della teoria* \mathcal{T} componendo con gli assiomi.

Infatti, per esempio se si è costruita una *derivazione* π con *due assiomi extralogici come premesse*

$$\frac{\pi}{\text{Ax.i}_1, \text{Ax.i}_2 \vdash \mathbf{fr}}$$

si può comporre questa derivazione con la regola di composizione fino a trovare una derivazione di $\vdash \mathbf{fr}$ nella teoria \mathcal{T} in tal modo

$$\frac{\vdash \text{Ax.i}_1 \quad \frac{\vdash \text{Ax.i}_2 \quad \frac{\pi}{\text{Ax.i}_1, \text{Ax.i}_2 \vdash \mathbf{fr}} \text{ comp}}{\text{Ax.i}_1 \vdash \mathbf{fr}} \text{ comp}}{\vdash \mathbf{fr}} \text{ comp}$$

\Rightarrow e quindi la derivazione finale mostra che **fr** è un **teorema della teoria** \mathcal{T} .

2. Uso della regola di composizione su teoremi già noti:

IN UNA TEORIA LA CONOSCENZA SI ACCUMULA con la regola comp:

Se in una teoria si è già dimostrato il teorema $\vdash T_1$ ovvero si è già trovata una derivazione π_1

$$\frac{\pi_1}{\vdash T_1}$$

allora si può usare la formula T_1 come premessa per derivare un'altra formula T_2 .
Infatti costruita una derivazione π_2 nella teoria del tipo

$$\frac{\pi_2}{T_1 \vdash T_2}$$

allora **si possono comporre le derivazioni π_1 e π_2 con comp**
per ottenere una derivazione di $\vdash T_2$ (senza premesse)!! nella teoria
in tal modo

$$\frac{\frac{\pi_1}{\vdash T_1} \quad \frac{\pi_2}{T_1 \vdash T_2}}{\vdash T_2} \text{ comp}$$

ovvero

in una teoria si possono derivare nuovi teoremi componendo con derivazioni di teoremi già noti

Esercizio: si provi che le regole di composizioni sono valide.

Le regole di composizioni sono anche sicure? NO, le regole di composizioni NON conservano la validità dal basso verso l'alto come si vede da questo controesempio

$$\frac{\vdash A \quad \text{NON Valido} \quad A \vdash C \rightarrow C \quad \text{Valido}}{\vdash C \rightarrow C \quad \text{Valido}} \text{ comp}$$

che funziona per provare che la prima inversa della regola di composizione

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}{\vdash \text{fr}} \text{ inv1-comp}$$

NON è valida.

Nel seguito identificheremo una teoria designando i SOLI assiomi extralogici.

15.2 Attenzione alla consistenza di una teoria

L'aggiunta delle regole di **composizione** e di assiomi extralogici a **LC** per formare una teoria fa sì che NON sia più evidente che la teoria è consistente ovvero NON contraddittoria ovvero che $\vdash \perp$ NON sia derivabile nella teoria.

Il problema è serio in quanto se la teoria deriva il falso allora è una teoria INUTILE in quanto permette di derivare ogni formula:

Proposition 15.4 *Se in una teoria \mathcal{T} si riesce a derivare il falso, ovvero il sequente $\vdash \perp$, allora in \mathcal{T} ogni formula **fr** è teorema ovvero si deriva $\vdash \text{fr}$ per OGNI formula **fr**.*

Dim. Sia

$$\frac{\pi_1}{\vdash \perp}$$

la derivazione del falso che si assume esistere in \mathcal{T} . Allora per ogni formula \mathbf{fr} si trova in \mathcal{T} una derivazione di $\vdash \mathbf{fr}$ del tipo

$$\frac{\frac{\pi_1}{\vdash \perp} \quad \frac{\mathbf{ax-id}}{\perp \vdash \mathbf{fr}}}{\vdash \mathbf{fr}} \text{ comp}$$

Risulta invece evidente che il calcolo della logica predicativa con uguaglianza $\mathbf{LC}_=$ è consistente:

Theorem 15.5 (CONSISTENZA calcolo $\mathbf{LC}_=\mathcal{T}$) *Il calcolo $\mathbf{LC}_=$ NON può derivare il falso, ovvero $\vdash \perp$ NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$, ovvero il calcolo è consistente oppure NON contraddittorio.*

Prova: se $\vdash \perp$ fosse derivabile in $\mathbf{LC}_=$ allora ci sarebbe una derivazione con radice $\vdash \perp$ ma NESSUNA regola di $\mathbf{LC}_=$, eccetto le regole di scambio, è applicabile dal basso verso l'alto a partire da $\vdash \perp$, da cui concludiamo che $\vdash \perp$ NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$.

15.2.1 L'aggiunta delle regole di composizione NON cambia i teoremi di $\mathbf{LC}_=$

Sappiamo dal teorema 9.25 che il calcolo $\mathbf{LC}_=$ è valido e completo rispetto alla semantica classica. Questo significa che se anche aggiungiamo regole valide nella semantica classica ad $\mathbf{LC}_=$ NON aumentiamo il numero dei sequenti derivabili in $\mathbf{LC}_=$, e quindi dei teoremi di $\mathbf{LC}_=$. In particolare si dimostra il cosiddetto *teorema del taglio* ovvero che:

Theorem 15.6 (validità composizioni in $\mathbf{LC}_=$) *Il calcolo formale $\mathbf{LC}_=$ dimostra gli stessi teoremi del calcolo $\mathbf{LC}_+=$ regole di composizione.*

Anzi il calcolo formale $\mathbf{LC}_=$ dimostra gli stessi teoremi del calcolo stesso con l'aggiunta delle seguenti regole di composizione più potenti

$$\frac{\Gamma' \vdash \mathbf{fr} \quad \Gamma, \mathbf{fr}, \Gamma'' \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta} \text{ comp}$$

Il teorema 15.6 non vale in generale anche per una teoria ed è per questo che formuliamo una teoria usando le regole di composizione. Però, proprio grazie al teorema 15.6, anche in una teoria possiamo usare le seguenti regole di composizione potenziate

$$\frac{\Gamma' \vdash \mathbf{fr} \quad \Gamma, \mathbf{fr}, \Gamma'' \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta} \text{ comp}$$

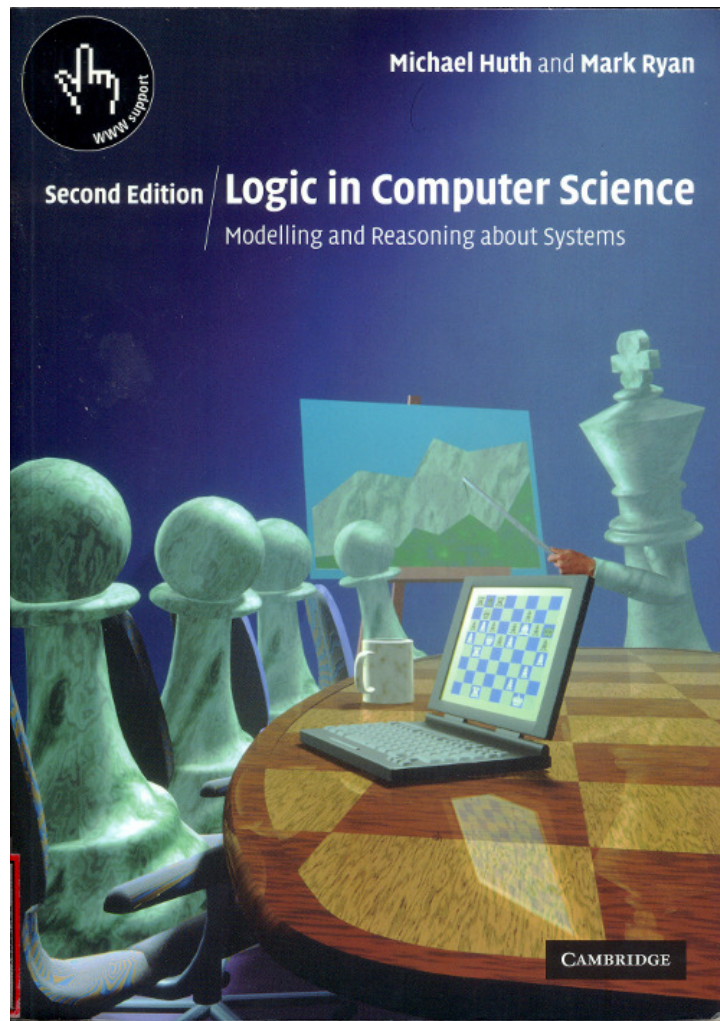
ove \mathbf{fr} è una formula del linguaggio predicativo della teoria, perchè queste regole non aumentano i teoremi derivabili nella teoria stessa ma servono solo per facilitare la loro dimostrazione.

In particolare nelle teorie scientifiche utilizzate comunemente per la correttezza dei programmi queste regole di composizione potenziate sono usate in continuazione. Ad esempio per dimostrare che un certo programma termina su \mathbf{x} quando $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ avendo già dimostrato che il programma termina su ogni input \mathbf{x} maggiore od uguale a zero, si fa uso della regola di composizione in tal modo

$$\frac{\text{" } \mathbf{x} = \mathbf{1} \text{" } \vdash \text{" } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{"} \quad \text{" } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{" } \vdash \text{"Il programma termina su } \mathbf{x} \text{"}}{\text{" } \mathbf{x} = \mathbf{1} \text{" } \vdash \text{"Il programma termina su } \mathbf{x} \text{"}} \text{ comp}$$

ove $\text{" } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{" } \vdash \text{"Il programma termina su } \mathbf{x} \text{"}$ può essere pensato come **lemma** per concludere

$$\text{" } \mathbf{x} = \mathbf{1} \text{" } \vdash \text{"Il programma termina su } \mathbf{x} \text{"}$$



Questa teoria si può usare per costruire un programma che certifica la correttezza dei programmi all'interno della logica di Hoare e il calcolo dei sequenti dell'aritmetica.

15.4 Altro esempio di teoria matematica: teoria dei monoidi commutativi

$$\text{Mon}_{cl} \equiv \text{LC} + \text{Ax 1.} + \text{Ax 2.} + \text{Ax 3.} + \text{comp}$$

ove x, y, z sono supposti **elementi del monoide**

Ax1. $\vdash \forall x \ x + 0 = x$
 "zero è elemento neutro"

Ax2. $\vdash \forall x \ \forall y \ x + y = y + x$
 "somma è commutativa"

Ax3. $\vdash \forall x \ \forall y \ \forall z \ (x + y) + z = x + (y + z)$
 "somma è associativa"

esercizio:

provare che in $\text{Mon}_{\mathbf{c1}}$ si deriva

$$\vdash \forall \mathbf{x} \quad \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

15.5 Esercizi su teorie concrete

Diamo di seguiti esempi di teorie concrete e come esercizio deriviamo alcune verità su di esse.

1. Sia T_{bi} la teoria che estende $\text{LC}_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Sia Chiara che Pina vanno in bici.
- Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va
- Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.
- Chiara non va in bici se Elia non ci va.

Si consiglia di usare:

$V(x)$ = x va in bici,

c =Chiara, p =Pina, e =Elia, g =Giorgio, f =Fabio.

Dedurre poi le seguenti affermazioni in T_{bi} :

- Fabio non va in bici.
- Giorgio va in bici.
- Se Fabio va in bici allora Chiara non ci va.
- Elia va in bici.
- Qualcuno va in bici e qualcuno non ci va.

Soluzione

- Ax. 1 Sia Chiara che Pina vanno in bici.

$$V(c) \& V(p)$$

- Ax. 2 Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va.

$$V(p) \rightarrow V(g) \vee V(f)$$

- Ax. 3 Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.

$$V(f) \rightarrow \neg V(c)$$

- Ax. 4 Chiara non va in bici se Elia non ci va.

$$\neg V(e) \rightarrow \neg V(c)$$

- 5. Fabio non va in bici.

$$\vdash \neg V(f)$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \\
\frac{V(c), V(p) \vdash V(c), \neg V(f)}{V(c) \& V(p) \vdash V(c), \neg V(f)} \&S \\
\vdash \text{Ax 1.} \quad \frac{\quad}{\vdash V(c), \neg V(f)} \text{comp} \\
\frac{\quad}{\neg V(c) \vdash \neg V(f)} \neg S \\
\frac{\neg \text{ax}_{dx1} \quad \vdash V(f), \neg V(f)}{V(f) \rightarrow \neg V(c) \vdash \neg V(f)} \rightarrow -S \\
\vdash \text{Ax 3.} \quad \frac{\quad}{\vdash \neg V(f)} \text{comp}
\end{array}$$

- 6. Giorgio va in bici.

$$\vdash V(g)$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\begin{array}{c}
\pi_1 \quad \pi_2 \\
\vdots \quad \vdots \\
\vdash V(p), V(g) \quad V(g) \vee V(f) \vdash V(g) \\
\vdash \text{Ax 2.} \quad \frac{\quad}{V(p) \rightarrow V(g) \vee V(f) \vdash V(g)} \text{comp} \rightarrow -S \\
\vdash V(g)
\end{array}$$

dove π_1 è la seguente derivazione

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \\
\frac{V(c), V(p) \vdash V(p), V(g)}{V(c) \& V(p) \vdash V(p), V(g)} \&-S \\
\vdash \text{Ax 1.} \quad \frac{\quad}{\vdash V(p), V(g)} \text{comp}
\end{array}$$

e dove π_2 è la seguente derivazione

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \quad \vdash 5. \quad \frac{\neg \text{ax}_{sx1} \quad V(f), \neg V(f) \vdash V(g)}{V(f) \vdash V(g)} \text{comp} \\
\frac{V(g) \vdash V(g) \quad \quad}{V(g) \vee V(f) \vdash V(g)} \vee -S
\end{array}$$

- 7. Se Fabio va in bici allora Chiara non va

$$\vdash V(f) \rightarrow \neg V(c)$$

che è l'assioma 3. e dunque

$$\begin{array}{c}
\text{Ax.3} \\
\vdash V(f) \rightarrow \neg V(c)
\end{array}$$

è già una derivazione!!

- 8. Elia va in bici.

$$\vdash V(e)$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\frac{\vdash \text{Ax.4} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \neg V(e), V(e)}{\neg \text{ax}_{dx_2}}}{\vdash \neg V(e), V(e)}}{\vdash \neg V(e) \rightarrow \neg V(c) \vdash V(e)} \text{comp} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash V(c), V(e)}{\text{ax-id}}}{V(c), V(p) \vdash V(c), V(e)}{V(c) \& V(p) \vdash V(c), V(e)} \&-S}{\vdash V(c), V(e)} \neg-S}{\neg V(c) \vdash V(e)} \neg-S}{\rightarrow -S}}{\vdash V(e)} \text{comp}}{\vdash V(e)} \text{comp}$$

- 9. Qualcuno va in bici e qualcuno non ci va.

$$\vdash \exists x V(x) \& \exists y \neg V(y)$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash 6. \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\vdash V(g) \vdash V(g)}{\text{ax-id}}}{V(g) \vdash \exists x V(x)}{\exists -D_v}}{\vdash \exists x V(x)} \text{comp}}{\vdash \exists x V(x)} \text{comp} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash 5. \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\vdash \neg V(f) \vdash \neg V(f)}{\text{ax-id}}}{\neg V(f) \vdash \exists y \neg V(y)}{\exists -D_v}}{\vdash \exists y \neg V(y)} \text{comp}}{\vdash \exists y \neg V(y)} \text{comp}}{\vdash \exists x V(x) \& \exists y \neg V(y)} \&-S}}{\vdash \exists x V(x) \& \exists y \neg V(y)} \&-S$$

2. Sia T_{vec} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Pippo è più vecchio di Ada.
- Nessuno è più vecchio di Gigi.
- Chi è più vecchio di Pippo è più vecchio di Gigi.
- Ada è più vecchia di Chiara.
- Non si dà il caso che Chiara non sia più vecchia di Titti.
- Se uno è più vecchio di un altro e quest'altro è più vecchio di un terzo, il primo è più vecchio del terzo.
- Chiara non è Titti.

suggerimento: si consiglia di usare:

$A(x,y) = x$ è più vecchio di y

$g=Gigi, p= Pippo, a= Ada, c= Chiara, t=Titti$

$uno=x, altro =y, terzo=z$

Dopo aver formalizzato le frasi seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

Derivare

- Qualcuno è più vecchio di Ada.
- Nessuno è più vecchio di Pippo.

- Soluzione*

- $$A(p, a)$$

- $$\neg \exists x \ A(x, g)$$

- $$\forall x \ (A(x, p) \rightarrow A(x, g))$$

- $$\neg\neg A(c, t)$$

- $$\forall x \, \forall y \, \forall z \, (A(x,y) \, \& \, A(y,z) \rightarrow A(x,z))$$

- $$A(a, c)$$

- $$c \neq t$$

- $$\neg \exists x \ A(x, p)$$

[illegible]

235

- 9. Qualcuno è più vecchio di Ada.

$$\exists x A(x, a)$$

Si può derivare in T_{vec} come segue

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{A(p, a) \vdash A(p, a)} \quad \frac{\vdash \text{Ax 1.} \quad A(p, a) \vdash \exists x A(x, a)}{\vdash \exists x A(x, a)} \quad \text{comp} \quad \exists-D_v}{\vdash \exists x A(x, a)}$$

- 10. Qualcuno è più vecchio di Titti.

$$\exists x A(x, t)$$

si può derivare come segue:

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{A(c, t) \vdash A(c, t)} \quad \frac{A(c, t) \vdash \exists x A(x, t)}{\neg \neg A(c, t) \vdash \exists x A(x, t)} \quad \text{comp} \quad \neg \neg -S}{\vdash \exists x A(x, t)} \quad \exists-D_v$$

- 11. Pippo è più vecchio di Chiara.

$$A(p, c)$$

Si può derivare in T_{vec} come segue

$$\frac{\vdash \text{Ax 1.} \quad \frac{\vdash \text{Ax 6.} \quad \frac{\vdash \text{Ax 5.} \quad \frac{\pi}{\vdots} \quad A(a, c), A(p, a), \forall x \forall y \forall z (A(x, y) \& A(y, z) \rightarrow A(x, z)) \vdash A(p, c)}{A(a, c), A(p, a) \vdash A(p, c)} \quad \text{comp}}{A(p, a) \vdash A(p, c)} \quad \text{comp}$$

dove π è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{A(a, c), A(p, a), A(p, c) \vdash A(p, c)} \quad \frac{\frac{\text{ax-id}}{A(a, c), A(p, a) \vdash A(p, a), A(p, c)} \quad \frac{\text{ax-id}}{A(a, c), A(p, a) \vdash A(a, c), A(p, c)} \quad \&-S}{A(a, c), A(p, a) \vdash A(p, a) \& A(a, c), A(p, c)} \quad \rightarrow -S}{\frac{A(a, c), A(p, a), A(p, a) \& A(a, c) \rightarrow A(p, c) \vdash A(p, c)}{A(a, c), A(p, a), \forall z (A(p, a) \& A(a, z) \rightarrow A(p, z)) \vdash A(p, c)} \quad \forall -S_v} \quad \forall -S_v$$

- 12. Ada è più vecchia di qualcuno che non è Chiara.

$$\exists x (A(a, x) \& x \neq c)$$

si deriva componendo con Ax.6, Ax.4, Ax.7 e Ax.5 e in particolare in quest'ultimo si sale con $\forall -S_v$ ponendo a al posto di x , poi c al posto di y e infine t al posto di z . Per concludere occorre applicare $\exists -D_v$ con t al posto di x .

15.6 Ulteriore esempio di Teoria: l'Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è una teoria ottenuta aggiungendo a $LC_{=}$ le seguenti regole

$$\frac{\vdash \mathbf{fr} \quad \Gamma, \mathbf{fr}, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla} \text{ comp}$$

e i seguenti assiomi:

$$\mathbf{Ax1.} \vdash \forall \mathbf{x} \, \mathbf{s(x) \neq 0}$$

$$\mathbf{Ax2.} \vdash \forall \mathbf{x} \, \forall \mathbf{y} \, (\mathbf{s(x) = s(y) \rightarrow x = y})$$

$$\mathbf{Ax3.} \vdash \forall \mathbf{x} \, \mathbf{x + 0 = x}$$

$$\mathbf{Ax4.} \vdash \forall \mathbf{x} \, \forall \mathbf{y} \, \mathbf{x + s(y) = s(x + y)}$$

$$\mathbf{Ax5.} \vdash \forall \mathbf{x} \, \mathbf{x \cdot 0 = 0}$$

$$\mathbf{Ax6.} \vdash \forall \mathbf{x} \, \forall \mathbf{y} \, \mathbf{x \cdot s(y) = x \cdot y + x}$$

$$\mathbf{Ax7.} \vdash \mathbf{A(0) \& \forall x \, (\, A(x) \rightarrow A(s(x)) \,) \rightarrow \forall x \, A(x)}$$

In tale teoria il numerale \mathbf{n} si rappresenta in tal modo

$$\mathbf{n} \equiv \underbrace{s(s \dots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$\mathbf{1} \equiv \mathbf{s(0)}$$

$$\mathbf{2} \equiv \mathbf{s(s(0))}$$

ATTENZIONE nel linguaggio dell'aritmetica di Peano oltre alla costante

$$0$$

vi sono 3 simboli di funzione sono:

$$\mathbf{s(x)} \qquad \mathbf{x+y} \qquad \mathbf{x \cdot y}$$

quello del successore di \mathbf{x} , quello della somma e quello del prodotto.

C'è un *modello inteso* per questo linguaggio ed è quello con dominio

$$\mathbf{D} \equiv \text{numeri naturali}$$

ove la funzione successore è la funzione che assegna ad un numero naturale proprio il suo successore:

$$\mathbf{s(x)^{Nat}(-) : Nat \longrightarrow Nat} \qquad \mathbf{s(x)^{Nat}(n) \equiv n + 1}$$

il simbolo di somma $\mathbf{x+y}$ interpretato nel modello dei naturali come la somma di due numeri naturali:

$$\mathbf{(x+y)^{Nat}(-, -) : Nat \times Nat \longrightarrow Nat} \qquad \mathbf{(x+y)^{Nat}(n, m) \equiv n + m}$$

e il simbolo di moltiplicazione $\mathbf{x \cdot y}$ interpretato come la moltiplicazione di due numeri naturali:

$$\mathbf{(x \cdot y)^{Nat}(-, -) : Nat \times Nat \longrightarrow Nat} \qquad \mathbf{(x \cdot y)^{Nat}(n, m) \equiv n \cdot m}$$

Vista la presenza di simboli di funzioni di seguito diamo la definizione generale di linguaggio predicativo con simboli di funzione.

15.6.1 Cosa è derivabile in PA...

Abbiamo già fatto notare come nel calcolo dei sequenti della logica classica predicativa $\mathbf{LC}_=$ sia facile dimostrare che il sequente $\vdash \perp$ NON è derivabile, ovvero che la logica classica predicativa è consistente, o NON contraddittoria. Non è invece evidente il fatto che il sequente $\vdash \perp$ NON sia derivabile nell'aritmetica di Peano \mathbf{PA} . Anzi, secondo il teorema di incompletezza di Gödel si può dimostrare che il sequente $\vdash \perp$ NON è derivabile in \mathbf{PA} solo assumendo come veri assiomi più potenti di quelli di \mathbf{PA} (quelli di \mathbf{PA} non bastano a dimostrare la consistenza degli stessi).

Ora si noti il seguente importante proposizione

Proposition 15.7 *Se l'aritmetica di Peano \mathbf{PA} è consistente, ovvero in essa NON si deriva il sequente $\vdash \perp$, allora NON è possibile che in \mathbf{PA} si derivi una formula \mathbf{fr} , ovvero il sequente $\vdash \mathbf{fr}$, e ANCHE la sua negazione, ovvero il sequente $\vdash \neg \mathbf{fr}$.*

Dim. Supponiamo che in \mathbf{PA} esistano una derivazione di $\vdash \mathbf{fr}$ e un'altra per $\vdash \neg \mathbf{fr}$ che indichiamo rispettivamente in tal modo

$$\frac{\pi_1}{\vdash \mathbf{fr}} \qquad \frac{\pi_2}{\vdash \neg \mathbf{fr}}$$

Allora usando la regola di composizione otteniamo una derivazione del falso come segue

$$\frac{\frac{\frac{\pi_1}{\vdash \mathbf{fr}} \quad \frac{\pi_2}{\vdash \neg \mathbf{fr}}}{\vdash \mathbf{fr} \& \neg \mathbf{fr}} \&-D \quad \frac{\frac{\text{ax-id} \quad \mathbf{fr} \vdash \mathbf{fr}, \perp}{\mathbf{fr} \vdash \mathbf{fr}, \perp} \neg-S \quad \frac{\mathbf{fr} \vdash \mathbf{fr}, \perp}{\mathbf{fr} \& \neg \mathbf{fr} \vdash \perp} \&-S}{\vdash \perp} \text{comp}$$

Ma ciò è assurdo perchè contraddice la nostra ipotesi che in \mathbf{PA} il falso NON è derivabile e dunque NON è possibile che esistano entrambe le derivazioni.

Quindi dalla proposizione sopra si deduce che:

- Se \mathbf{PA} è consistente e si deriva una formula \mathbf{fr} , ovvero il sequente $\vdash \mathbf{fr}$, allora NON si deriva in \mathbf{PA} la sua negazione $\vdash \neg \mathbf{fr}$;
- Se \mathbf{PA} è consistente e si deriva una formula negata $\neg \mathbf{fr}$, ovvero il sequente $\vdash \neg \mathbf{fr}$, allora NON si deriva in \mathbf{PA} la formula ovvero il sequente $\vdash \mathbf{fr}$

Esempio Chiaramente $\vdash 1 = 0$ NON è derivabile in \mathbf{PA} se \mathbf{PA} è consistente per la proposizione sopra in quanto in \mathbf{PA} si dimostra che $\vdash 1 \neq 0$ ad esempio in tal modo: si ricordi che $1 \equiv s(0)$

$$\frac{\vdash \mathbf{Ax.1} \quad \frac{\text{ax-id} \quad \mathbf{Ax.1}, s(0) \neq 0 \vdash s(0) \neq 0}{\forall x s(x) \neq 0 \vdash s(0) \neq 0} \forall-S}{\vdash s(0) \neq 0} \text{comp}$$

Infine ricordiamo che le tautologie logiche di $\mathbf{LC}_=$ sono pure derivabili in \mathbf{PA} e quindi i paradossi logici di $\mathbf{LC}_=$ (la cui negazione, ricorda, è tautologia!) sono pure paradossi per \mathbf{PA} .

Approfondimento su consistenza di \mathbf{PA} : Il famoso logico Kurt Gödel ha dimostrato che se l'aritmetica di Peano \mathbf{PA} è consistente, allora esiste una formula \mathbf{fr} SENZA VARIABILI libere nel linguaggio di \mathbf{PA} (che ricordiamo è fatto solo di formule predicative a partire dall'uguaglianza e dai simboli per funzione di successore, somma e prodotto e la costante zero) che per \mathbf{PA} è un'opinione ovvero NON è derivabile in \mathbf{PA} nè $\vdash \mathbf{fr}$ e nè la sua negazione $\vdash \neg \mathbf{fr}$ (questo fatto va sotto il nome di I teorema di incompletezza di Gödel).

Anzi, Gödel ha pure dimostrato che è un'opinione per **PA** la formula **fr** che codifica in aritmetica il fatto che il sequente $\vdash \perp$ NON è derivabile dai suoi assiomi (questo fatto è un caso particolare del II teorema di incompletezza di Gödel) da cui segue che solo degli assiomi più potenti di quelli di **PA** possono provare che **PA** è consistente e quindi non contraddittoria.

15.6.2 Esercizi

- mostrare che in logica classica con uguaglianza sono validi i sequenti o regole che seguono:

$$\begin{array}{c}
 \text{cf}^* \\
 \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u) \\
 \\
 \text{cp}^* \\
 \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u) \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta} \text{ sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta} \text{ sy-l} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'} \text{ tr-r}
 \end{array}$$

- Mostrare se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi:

(a) $1 + 0 = 1$

Soluzione: si può derivare per esempio così

$$\frac{\vdash \mathbf{Ax.3} \quad \frac{\mathbf{ax-id} \quad \frac{\mathbf{Ax.3}, s(0)+0=s(0) \vdash s(0)+0=s(0)}{\forall x \, x+0=x \vdash s(0)+0=s(0)} \forall-S}{\vdash s(0)+0=s(0)} \text{ comp}$$

(b) $0 + 1 = 1$

(c) $5 + 1 = 6$

I soluzione

Il sequente si può derivare anche in tal modo usando la regola valida tr-r

$$\frac{\frac{\vdots}{\pi_1} \vdash 5 + 1 = s(5 + 0) \quad \frac{\vdots}{\pi_2} \vdash s(5 + 0) = s(5)}{\vdash 5 + 1 = 6} \text{ tr-r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \\
\frac{5 + 1 = s(5 + 0) \vdash 5 + 1 = s(5 + 0)}{\forall y \ 5 + s(y) = s(5 + y) \vdash 5 + 1 = s(5 + 0)} \forall\text{-S}_v \\
\frac{\vdash \text{Ax 4.} \quad \frac{\forall x \ \forall y \ x + s(y) = s(x + y) \vdash 5 + 1 = s(5 + 0)}{\vdash 5 + 1 = s(5 + 0)} \forall\text{-S}_v}{\vdash 5 + 1 = s(5 + 0)} \text{comp}
\end{array}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\begin{array}{c}
\text{cf}^* \\
\frac{5 + 0 = 5 \vdash s(5 + 0) = s(5)}{\forall x \ x + 0 = x \vdash s(5 + 0) = s(5)} \forall\text{-S}_v \\
\frac{\vdash \text{Ax 3.} \quad \frac{\forall x \ x + 0 = x \vdash s(5 + 0) = s(5)}{\vdash s(5 + 0) = s(5)} \text{comp}}{\vdash s(5 + 0) = s(5)}
\end{array}$$

II soluzione

$$\begin{array}{c}
\text{=-ax} \\
\vdash \ s(5+0)=s(5+0) \\
\frac{\frac{5+0=5 \quad \vdash \ s(5+0)=s(5)}{\forall x \ x+0=x \quad \vdash \ s(5+0)=s(5)} \forall\text{-S}_v}{\vdash \ s(5+0)=s(5)} \text{comp} \\
\frac{\frac{\frac{s(5+0)=5+1 \quad \vdash \ 5+1=6}{5+1=s(5+0) \quad \vdash \ 5+1=6} \text{sy-l}}{\forall y \ 5+s(y)=s(5+y) \quad \vdash \ 5+1=6} \forall\text{-S}_v}{\vdash \ 5+1=6} \text{comp} \\
\frac{\vdash \text{Ax 4.} \quad \frac{\forall x \ \forall y \ x+s(y)=s(x+y) \quad \vdash \ 5+1=6}{\vdash \ 5+1=6} \forall\text{-S}_v}{\vdash \ 5+1=6}
\end{array}$$

ove si ricorda che $6 \equiv s(5)$ e nell'ultimo passaggio sopra si è sostituito $s(5)$ con $s(5+0)$.

- (d) $\vdash \forall x \ (s(x) = s(5) \rightarrow x = 5)$
- (e) $\vdash 0 = 4 \cdot 0$
- (f) $\vdash \forall x \ (x = 7 \rightarrow s(x) = s(7))$
- (g) $\vdash 1 + 2 = 3$
- (h) $\vdash 5 \cdot 1 = 5$
- (i) $\vdash \exists x \ \exists y \ x \neq y$
- (j) $\vdash \forall x \ 0 \neq s(x)$

15.6.3 Induzione in aritmetica

L'assioma *Ax7*. dell'aritmetica di Peano PA si chiama **principio di induzione**. L'induzione è un principio proprio del concetto astratto dell'insieme dei numeri naturali. Questo insieme colleziona POTENZIALMENTE i **numeri** costruibili con tali regole

$$0 \in Nat \quad \frac{n \in Nat}{s(n) \in Nat}$$

ove $s(n)$ si dice “successore di n ”. Queste sono regole da intendersi come **istruzioni per costruire numeri naturali**. L'esecuzione completa di tali istruzioni non si dà nella realtà. Esiste solo nel nostro pensiero (si legga il capitolo 4 del libro di Sambin per approfondimento).

Ora per dimostrare la validità di una proprietà su TUTTI gli infiniti numeri naturali basta provare che le regole di costruzione dei numeri CONSERVANO tale proprietà secondo il Principio di induzione che afferma:

Sia $\mathbf{P}(\mathbf{n})$ una proprietà definita sui numeri naturali. Se vale $\mathbf{P}(\mathbf{0})$ (caso zero) e, qualunque sia \mathbf{n} , se dal fatto che $\mathbf{P}(\mathbf{n})$ vale segue che anche $\mathbf{P}(\mathbf{s}(\mathbf{n}))$ vale (caso induttivo), allora per ogni naturale \mathbf{n} si ha che $\mathbf{P}(\mathbf{n})$ vale.

Nelle derivazioni conviene usare l'induzione nella forma della seguente regola **ind**

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x (P(x) \rightarrow P(s(x)))}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x P(x)} \text{ ind}$$

che è regola derivata in PA grazie proprio all'assioma Ax7. ad esempio come segue

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash P(0)}{\Gamma, \Gamma' \vdash P(0)} \text{ in} \quad \frac{\Gamma' \vdash \forall x (P(x) \rightarrow P(s(x)))}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x (P(x) \rightarrow P(s(x)))} \text{ in}}{\Gamma, \Gamma' \vdash P(0) \& \forall x (P(x) \rightarrow P(s(x)))} \&-D \quad \frac{\Gamma, \Gamma' \vdash P(0) \& \forall x (P(x) \rightarrow P(s(x))), \forall x P(x)}{\Gamma, \Gamma', \forall x P(x) \vdash \forall x P(x)} \text{ ax-id}}{\frac{\Gamma, \Gamma', P(0) \& \forall x (P(x) \rightarrow P(s(x))) \rightarrow \forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x P(x)} \text{ comp}} \rightarrow-S$$

Nella regola **ind** le premesse rappresentano i seguenti casi:

caso zero: $\Gamma \vdash \mathbf{P}(\mathbf{0})$

caso induttivo: $\Gamma' \vdash \forall \mathbf{x} (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{s}(\mathbf{x})))$

Per capire il principio di induzione riflettiamo su alcuni esempi in cui serve usarlo.

15.6.4 Esempio del prigioniero

Riflettiamo e cerchiamo di rispondere al seguente quesito:

Durante la guerra venne detto ad un prigioniero:
“Tu sarai ucciso la settimana prossima in un giorno a sorpresa che non potrai predire neppure la mattina del giorno stesso”

Quando verrà ucciso il prigioniero?

Si dimostra che l'affermazione sopra è una **contraddizione**, ovvero che

“NON esiste \mathbf{n} numero di giorni entro cui il prigioniero può essere ucciso a sorpresa.”

perchè per induzione sull' \mathbf{n} -esimo giorno della settimana si dimostra che

$\mathbf{P}(\mathbf{n}) \equiv$ *il prigioniero non può essere ucciso il giorno \mathbf{n} della settimana assegnando ai giorni della settimana un numero contando a ritroso*

0 = domenica

1 = sabato

\vdots

6 = lunedì

Vediamo che valgono le ipotesi del principio di induzione:

$P(0) \equiv$ *il prigioniero non può essere ucciso entro il giorno 0 della settimana, ovvero la domenica*, perchè se fosse ucciso di domenica, lui giunto alla mattina della domenica saprebbe di venir ucciso in giornata, quindi **senza sorpresa**.

Se vale $P(n)$ allora vale anche $P(s(n))$: infatti, se vale $P(n)$ allora non può essere ucciso dal giorno 0 fino al giorno n ma a questo punto non può essere ucciso nemmeno il giorno prima che è $s(n)$ perchè giunto alla mattina del giorno $s(n)$ lo prevederebbe, sapendo che vale $P(n)$ ovvero che non può essere ucciso i giorni dopo da n fino a 0.

Quindi concludiamo che per il principio di induzione $P(n)$ vale per ogni n , ovvero che

“Non esiste n numero di giorni entro cui il prigioniero può essere ucciso a sorpresa.”

15.6.5 Esempio della valigia

Mario afferma: **“In una valigia è sempre possibile aggiungere un fazzoletto di carta”**

È corretto quanto dice Mario?

No, **non è corretto**, perchè possiamo dimostrare che

“Se in una valigia è sempre possibile aggiungere un fazzoletto di carta allora la valigia può contenere un’INFINITÀ di fazzoletti di carta”

il che non è possibile.

Per convincerci consideriamo la valigia in cui è sempre possibile aggiungere un fazzoletto di carta e poi mostriamo per induzione su un numero naturale n che vale

“fissato un qualsiasi n naturale, la valigia può contenere $n + 1$ di fazzoletti di carta”

Infatti

caso zero: Se $n = 0$ la valigia è vuota e quindi possiamo aggiungere un fazzoletto e la valigia ne contiene uno.

caso induttivo: Se nella valigia ci sono n fazzoletti, siccome è sempre possibile aggiungere un fazzoletto allora ci stanno $s(n) \equiv n + 1$ fazzoletti.

Conclusione: per il principio di induzione nella valigia ci stanno k fazzoletti per k grande a piacere e quindi un’infinità!!!

15.6.6 Esempio: quale definizione di mucchio?

“Se n chicchi di grano non sono un mucchio, allora neanche $n + 1$ chicchi di grano sono un mucchio”?

Sembra sensato rispondere di sì, dato che l’aggiunta di un solo chicco di grano ad alcuni chicchi di grano non li rende un mucchio se prima non lo erano

Però se questo vale per ogni n allora per il principio di induzione applicato a

$$P(n) \equiv n \text{ chicchi non sono un mucchio}$$

dimostreteremmo che **NESSUN** numero di chicchi di grano formano un mucchio come segue. Prima di tutto 0 chicchi non sono un mucchio. Poi, se n chicchi non sono un mucchio, allora per quanto detto sopra $s(n) \equiv n + 1$ chicchi non sono un mucchio. Dunque per il principio di induzione, ogni numero naturale n arbitrario di chicchi non sono un mucchio il che non è vero!!!

Dall'altra parte dire che

“ad un certo punto si ha che $n + 1$ chicchi di grano sono un mucchio mentre n chicchi di grano non lo sono ”

neppure sembra sensato...

Infine dire che

“ se n chicchi di grano sono un mucchio allora pure $n - 1$ chicchi di grano sono un mucchio”

pare sensato considerando che se togliamo un chicco ad un mucchio di chicchi di grano rimaniamo pur sempre con un mucchio di chicchi.... Ma di nuovo se ciò vale per ogni n allora per il principio di induzione applicato all'incontrario avremmo che $n - 2$ chicchi di grano formano un mucchio.. e quindi pure $n - 3$ e così via per induzione fino a dire **“1 chicco di grano forma un mucchio”** che NON appare sensato...così come dire che **“0 chicchi di grano formano un mucchio”!!**

In conclusione *Non si può dare la definizione di mucchio tramite un numero naturale!!*.

Esercizi

1. come mostrare che NON è valido in $PA \vdash 0 + 1 = 0$??

Basta derivare $\vdash 0 + 1 \neq 0$ (esercizio ulteriore). Poi si ragiona come segue. Se assumiamo $\vdash 0 + 1 = 0$ derivabile in PA, allora sarebbe pure valido $\vdash 0 + 1 = 0 \ \& \ 0 + 1 \neq 0$ ove $0 + 1 = 0 \ \& \ 0 + 1 \neq 0$ è un'istanza del principio di contraddizione $A \ \& \ \neg A$ che è quindi una falsità logica. Ma ciò NON è possibile se si ammette che PA è consistente. Dunque l'assunzione che $\vdash 0 + 1 = 0$ è derivabile risulta assurda e quindi il sequente $\vdash 0 + 1 = 0$ NON è valido in PA.

2. come mostrare che NON è valido in $PA \vdash 1 + 0 = 0$??

3. Mostrare che $\vdash \forall x \ 0 + x = x$ è valido in PA. A tal scopo applichiamo la regola di induzione per derivare

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \pi_1 \\ \vdash 0+0=0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \pi_2 \\ \vdash \forall x (0+x=x \rightarrow 0+s(x)=s(x)) \end{array}}{\vdash \forall x \ 0+x=x} \text{ ind}$$

ove π_1 è la seguente derivazione

$$\frac{\vdash \mathbf{Ax \ 3.} \quad \frac{\mathbf{ax-id} \quad 0+0=0 \vdash 0+0=0}{\mathbf{Ax \ 3.} \vdash 0+0=0} \ \forall-S_v}{\vdash 0+0=0} \text{ comp}$$

e π_2 è la seguente derivazione

$$\frac{\vdash \mathbf{Ax \ 4.} \quad \frac{\mathbf{ax-id} \quad 0+s(x)=s(0+x) \vdash 0+s(x)=s(0+x)}{\forall y \ 0+s(y)=s(0+y) \vdash 0+s(x)=s(0+x)} \ \forall-S_v}{\mathbf{Ax \ 4.} \vdash 0+s(x)=s(0+x)} \ \forall-S_v \quad \frac{\mathbf{=-ax} \quad \vdash s(0+x)=s(0+x)}{0+x=x \vdash s(0+x)=s(x)} \ \text{tr-r}}{\vdash 0+s(x)=s(0+x)} \text{ comp} \quad \frac{\frac{0+x=x \vdash 0+s(x)=s(x)}{\vdash 0+x=x \rightarrow 0+s(x)=s(x)} \rightarrow -D}{\vdash \forall x (0+x=x \rightarrow 0+s(x)=s(x))} \ \forall-D$$

ove l'applicazione di $\forall-D$ è possibile perchè x non compare libera nel sequente radice.

4. il sequente $\vdash \exists y \exists x x \neq y$ è valido in $LC_=$? è soddisfacibile se non è valido?

$\vdash \exists y \exists x x \neq y$ è **NON valido** in **logica classica con uguaglianza** ma valido in **PA** (ovvero risulta soddisfacibile con il modello dei numeri naturali!)

Infatti, dopo aver provato a derivare il sequente in $LC_=$, si noti che la formula $\exists y \exists x x \neq y$ è **NON valida** in $LC_=$ perchè c'è un contromodello definito in tal modo:

$D \equiv \{1\}$ falsifica $\exists x \exists y x \neq y$ poichè altrimenti per rendere valido il sequente il dominio dovrebbe avere d e d' tali che

$$(x=y)^D(d, d') = 0$$

ovvero dovrebbe valere $d \neq d'$ in D . Ma tali elementi non ci sono in D .

Per provare la soddisfacibilità del sequente si veda il punto successivo.

5. il sequente $\vdash \exists y \exists x x \neq y$ è valido in PA??

Sì, una derivazione in **PA** del sequente è la seguente

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{s(x) \neq 0 \vdash s(x) \neq 0} \quad \frac{s(x) \neq 0 \vdash \exists y s(x) \neq y}{\exists-D_v} \quad \frac{s(x) \neq 0 \vdash \exists x \exists y x \neq y}{\exists-D_v} \quad \frac{s(x) \neq 0 \vdash \exists x \exists y x \neq y}{\forall-S_v} \quad \text{Ax 1.} \quad \text{Ax 1.} \vdash \exists x \exists y x \neq y}{\vdash \exists x \exists y x \neq y} \text{comp}$$

Quindi il sequente $\vdash \exists x \exists y x \neq y$ è **soddisfacibile** in $LC_=$ nel modello $D \equiv \text{Nat}$.

6. Mostrare che $\vdash \forall x s(x) \neq x$ è valido in PA

15.7 Conclusione dello studio

Una formula **fr** scritta nel linguaggio predicativo con uguaglianza si può classificare in:

fr formula valida	VERITÀ LOGICA classica o TAUTOLOGIA
fr formula soddisfacibile, NON valida	OPINIONE (sua verità dipende da predicati usati)
fr formula insoddisfacibile	CONTRADDIZIONE o PARADOSSO

15.8 Verità scientifiche

Le **teorie scientifiche** - ad esempio l'**aritmetica di Peano**, che è una **teoria matematica**- si occupano di **DIMOSTRARE** quali formule **fr** **soddisfacibili** DIVENTANO **verità scientifiche** ovvero sono conseguenze **logiche** dei loro **ASSIOMI** (in tal compito è assai utile riconoscere quali sono le verità logiche visto che queste si dimostrano più facilmente senza ricorso ad assiomi extralogici).

Si osservi che le teorie possono variare non solo per l'aggiunta di diversi assiomi extralogici ma anche per il fatto di essere basate su logiche diverse. In altri termini le teorie **DIPENDONO** anche dalla **logica** usata. Nelle sezioni precedenti abbiamo mostrato esempi di **teorie scientifiche** che estendono la **logica classica con uguaglianza** ma esistono anche teorie matematiche basate su logiche diverse. Ad esempio l'**aritmetica di Heyting** ha assiomi di Peano aggiunti però alla **logica intuizionista** (vedi libro di Sambin) e NON a quella classica. L'aritmetica di Heyting serve per formalizzare il frammento aritmetico della matematica costruttiva.

15.8.1 Esempio “controintuitivo” di tautologia classica predicativa

L’asserzione

“Esiste un qualcosa che se è onnipotente allora tutti sono onnipotenti”
si può formalizzare nel seguente

$$\vdash \exists \mathbf{x} (\mathbf{O}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{O}(\mathbf{x}))$$

ove $\mathbf{O}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ è un onnipotente

che è una **tautologia**: si provi a derivare il seguente in $\mathbf{LC}_=$!

Esso rappresenta il cosiddetto “paradosso del bevitore”:

“In ogni bar aperto c’è uno che se lui beve allora tutti bevono.”

Per esercizio si formalizzi l’enunciato

“Esiste uno che se se lui beve allora tutti bevono.”

utilizzando

$B(x) = “x \text{ beve}”$

e poi si dimostri che la formalizzazione ottenuta **fr** è una tautologia classica predicativa sia derivando il seguente associato in $\mathbf{LC}_=$ che mostrando che tal formalizzazione è un predicato vero in tutti i modelli.

15.8.2 Paradosso del mentitore

L’asserzione

“Esiste un qualcosa che crea tutti e soli quelli che non si creano da soli”
si può formalizzare nel seguente

$$\vdash \exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leftrightarrow \neg \mathbf{C}(\mathbf{y}, \mathbf{y}))$$

ove $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = “\mathbf{x} \text{ crea } \mathbf{y}”$

che è **INSODDISFACIBILE** ovvero si deriva in logica classica

$$\vdash \neg \exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leftrightarrow \neg \mathbf{C}(\mathbf{y}, \mathbf{y}))$$

e si provi a derivarlo in \mathbf{LC} !

15.9 Approfondimento su logica classica

Diamo di seguito alcune esempi di formalizzazione che sfuggono alla logica classica.

15.9.1 Attenzione agli scambi

Ecco qui un esempio che sfugge allo scambio a sx:

la **validità** dell’asserzione

“se Mario va diritto in fondo a via Paolotti e Mario gira a sinistra in via Marzolo allora Mario arriva all’istituto di fisica”

formalizzata nel sequente

$$\mathbf{P}, \mathbf{M} \vdash \mathbf{F}$$

ove

P=Mario va diritto in fondo a via Paolotti

M=Mario gira a sinistra in via Marzolo

F=Mario arriva all’istituto di fisica

NON comporta che sia valida pure l’asserzione con le premesse scambiate

“se Mario gira a sinistra in via Marzolo e Mario va diritto in fondo a via Paolotti allora Mario arriva all’istituto di fisica”

che risulta formalizzata in

$$\mathbf{M}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{F}$$

16 Esercizi risolti su aritmetica di Peano

1. $\vdash 0 = 0 + 0$ è valido in PA in quanto si può derivare ad esempio come segue:

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{0 + 0 = 0 \vdash 0 + 0 = 0} \quad \frac{\forall x (x + 0 = x) \vdash 0 + 0 = 0}{\text{sy-r}}}{\vdash \text{Ax 3.} \quad \text{Ax 3.} \vdash 0 = 0 + 0} \text{comp} \quad \frac{}{\vdash 0 = 0 + 0} \text{comp}$$

2. $\vdash \forall x (s(x) = s(2) \rightarrow x = 2)$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{s(x) = s(2) \rightarrow x = 2 \vdash s(x) = s(2) \rightarrow x = 2} \quad \frac{\forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y) \vdash s(x) = s(2) \rightarrow x = 2}{\text{sy-r}}}{\forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y) \vdash s(x) = s(2) \rightarrow x = 2} \text{comp} \quad \frac{}{\vdash \text{Ax 2.} \quad \text{Ax 2.} \vdash \forall x (s(x) = s(2) \rightarrow x = 2)} \text{comp} \quad \frac{}{\vdash \forall x (s(x) = s(2) \rightarrow x = 2)} \text{comp}$$

l’applicazione di $\forall\text{--D}$ è possibile perchè x non compare libera nella premessa.

3. $\vdash 0 \cdot 0 = 0 + 0$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\pi} \quad \frac{\vdots}{\pi_8}}{\vdash 0 \cdot 0 = 0} \quad \vdash 0 = 0 + 0}{\vdash 0 \cdot 0 = 0 + 0} \text{tr-r}$$

ove π_8 è la derivazione sopra di $\vdash 0 = 0 + 0$ mentre π è la seguente derivazione

$$\frac{\text{ax-id} \quad \frac{0 \cdot 0 = 0 \vdash 0 \cdot 0 = 0}{\vdash \text{Ax 5. } \forall x (x \cdot 0 = 0) \vdash 0 \cdot 0 = 0} \quad \forall\text{-S}_v}{\vdash 0 \cdot 0 = 0} \text{comp}$$

4. $\vdash \forall x (x = 0 \rightarrow s(x) = s(0))$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\frac{\text{cf}^* \quad \frac{x = 0 \vdash s(x) = s(0)}{\vdash x = 0 \rightarrow s(x) = s(0)} \rightarrow\text{-D}}{\vdash \forall x (x = 0 \rightarrow s(x) = s(0))} \forall\text{-D}$$

ove l'applicazione di $\forall\text{-D}$ è lecita perchè x non compare libera nel seguente radice.

5. $\vdash 2 + 1 = 3$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \pi_1 \\ \vdash 2 + 1 = s(2 + 0) \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \pi_2 \\ \vdash s(2 + 0) = s(2) \end{array}}{\vdash 2 + 1 = 3} \text{tr - r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\frac{\text{ax-id} \quad \frac{2 + 1 = s(2 + 0) \vdash 2 + 1 = s(2 + 0)}{\forall y (2 + s(y) = s(2 + y)) \vdash 2 + 1 = s(2 + 0)} \quad \forall\text{-S}_v}{\vdash \text{Ax 4. } \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y)) \vdash 2 + 1 = s(2 + 0)} \quad \forall\text{-S}_v \text{comp}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\frac{\text{cf}^* \quad \frac{2 + 0 = 2 \vdash s(2 + 0) = s(2)}{\vdash \forall x (x + 0 = x) \vdash s(2 + 0) = s(2)} \quad \forall\text{-S}_v}{\vdash s(2 + 0) = s(2)} \text{comp}$$

6. $\vdash 0 \cdot 2 = 0$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \pi_1 \\ \vdash 0 \cdot 2 = 0 \cdot 1 + 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \pi_2 \\ \vdash 0 \cdot 1 + 0 = 0 \end{array}}{\vdash 0 \cdot 2 = 0} \text{tr - r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{0 \cdot 2 = 0 \cdot 1 + 0 \vdash 0 \cdot 2 = 0 \cdot 1 + 0}}{\forall y (0 \cdot s(y) = 0 \cdot y + 0) \vdash 0 \cdot 2 = 0 \cdot 1 + 0} \forall\text{-S}_v}{\vdash \text{Ax 6. } \forall x \forall y (x \cdot s(y) = x \cdot y + x) \vdash 0 \cdot 2 = 0 \cdot 1 + 0} \forall\text{-S}_v \text{ comp}$$

$$\frac{}{\vdash 0 \cdot 2 = 0 \cdot 1 + 0}$$

ricordando che $2 \equiv s(1)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\vdots}{\vdash 0 \cdot 1 + 0 = 0 \cdot 1} \pi_3 \quad \frac{\vdots}{\vdash 0 \cdot 1 = 0} \pi_4}{\vdash 0 \cdot 1 + 0 = 0} \text{tr} - \text{r}$$

ove π_3 è la derivazione seguente:

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{0 \cdot 1 + 0 = 0 \cdot 1 \vdash 0 \cdot 1 + 0 = 0 \cdot 1}}{\vdash \text{Ax 3. } \forall x (x + 0 = x) \vdash 0 \cdot 1 + 0 = 0 \cdot 1} \forall\text{-S}_v}{\vdash 0 \cdot 1 + 0 = 0 \cdot 1} \text{comp}$$

mentre π_4 è la derivazione seguente:

$$\frac{\frac{\vdots}{\vdash 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0} \pi_5 \quad \frac{\vdots}{\vdash 0 \cdot 0 + 0 = 0} \pi_6}{\vdash 0 \cdot 1 = 0} \text{tr} - \text{r}$$

ove π_5 è la derivazione seguente:

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0 \vdash 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0}}{\forall y (0 \cdot s(y) = 0 \cdot y + 0) \vdash 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0} \forall\text{-S}_v}{\vdash \text{Ax 6. } \forall x \forall y (x \cdot s(y) = x \cdot y + x) \vdash 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0} \forall\text{-S}_v \text{ comp}$$

$$\frac{}{\vdash 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre π_6 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\vdots}{\vdash 0 \cdot 0 + 0 = 0 \cdot 0} \pi_7 \quad \frac{\vdots}{\vdash 0 \cdot 0 = 0} \pi}{\vdash 0 \cdot 0 + 0 = 0} \text{tr} - \text{r}$$

ove π è la derivazione iniziale e infine π_7 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{0 \cdot 0 + 0 = 0 \cdot 0 \vdash 0 \cdot 0 + 0 = 0 \cdot 0}}{\vdash \text{Ax 3. } \forall x (x + 0 = x) \vdash 0 \cdot 0 + 0 = 0 \cdot 0} \forall\text{-S}_v}{\vdash 0 \cdot 0 + 0 = 0 \cdot 0} \text{comp}$$

7. $\vdash 5 \cdot 1 = 5$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\frac{\begin{array}{c} \pi_1 \\ \vdots \\ \vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi_2 \\ \vdots \\ \vdash 5 \cdot 0 + 5 = 5 \end{array}}{\vdash 5 \cdot 1 = 5} \text{ tr - r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\frac{\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5 \vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5 \\ \hline \forall y (5 \cdot s(y) = 5 \cdot y + 5) \vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5 \quad \forall\text{-S}_v \\ \hline \vdash \text{Ax 6. } \forall x \forall y (x \cdot s(y) = x \cdot y + x) \vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5 \quad \forall\text{-S}_v \\ \hline \vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5 \quad \text{comp} \end{array}}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\frac{\begin{array}{c} \pi_3 \\ \vdots \\ \vdash 5 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi_4 \\ \vdots \\ \vdash 0 + 5 = 5 \end{array}}{\vdash 5 \cdot 0 + 5 = 5} \text{ tr - r}$$

ove π_3 è la derivazione seguente:

$$\frac{\begin{array}{c} \text{sym}^* \\ 5 \cdot 0 = 0 \vdash 0 = 5 \cdot 0 \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} =\text{-ax} \\ \vdash 0 + 5 = 0 + 5 \\ \hline 0 = 5 \cdot 0 \vdash 5 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 \end{array} \quad =\text{-S}}{\vdash 5 \cdot 0 + 5 = 0 + 5} \text{ comp}$$

$$\frac{\vdash \text{Ax 5.} \quad \frac{\begin{array}{c} 5 \cdot 0 = 0 \vdash 5 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 \\ \hline \forall x (x \cdot 0 = 0) \vdash 5 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 \end{array} \quad \forall\text{-S}_v}{\vdash 5 \cdot 0 + 5 = 0 + 5} \text{ comp}$$

mentre π_4 è la derivazione seguente:

$$\frac{\begin{array}{c} \pi_5 \\ \vdots \\ \vdash \forall x 0 + x = x \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi_6 \\ \vdots \\ \forall x (0 + x = x) \vdash 0 + 5 = 5 \end{array}}{\vdash 0 + 5 = 5} \text{ tr - r}$$

ove π_6 è la derivazione seguente:

$$\frac{\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ 0 + 5 = 5 \vdash 0 + 5 = 5 \end{array}}{\forall x (0 + x = x) \vdash 0 + 5 = 5} \forall\text{-D}$$

mentre π_5 è la derivazione in sezione 15.6.6.

8. $\vdash \forall x (x + 0 = x \cdot 0)$ NON è valido in PA, ovvero NON è derivabile perchè in PA è derivabile

$$\forall x (x + 0 = x \cdot 0) \vdash \perp$$

Chiamiamo π una sua derivazione che poi descriveremo più sotto.

Ora se esistesse una derivazione π_0 di $\vdash \forall x (x + 0 = x \cdot 0)$ in PA otterremmo che in PA è derivabile il falso ad esempio come segue

$$\frac{\begin{array}{c} \pi_0 \\ \vdots \\ \vdash \forall x (x + 0 = x \cdot 0) \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi \\ \vdots \\ \forall x (x + 0 = x \cdot 0) \vdash \perp \end{array}}{\vdash \perp} \text{ comp}$$

Ma se PA è assunta consistente, ovvero non deriva il falso, allora abbiamo trovato una contraddizione dalla supposta esistenza di π_0 e si conclude che la derivazione π_0 NON esiste e dunque $\vdash \forall x (x + 0 = x \cdot 0)$ NON è valido in PA.

Ora mostriamo una derivazione di

$$\forall x (x + 0 = x \cdot 0) \vdash \perp$$

che possiamo scegliere come la derivazione π menzionata sopra. Essa è la seguente

$$\frac{\begin{array}{c} \pi_2 \\ \vdots \\ 1 + 0 = 1 \cdot 0 \vdash 1 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi_1 \\ \vdots \\ 1 = 0 \vdash \perp \end{array}}{\frac{1 + 0 = 1 \cdot 0 \vdash \perp}{\forall x (x + 0 = x \cdot 0) \vdash \perp} \forall\text{-S}_v} \text{ comp}$$

ove π_1 è la seguente derivazione

$$\frac{\vdash \text{Ax } 1. \quad \frac{\neg \text{ax}_{sx1} \quad 1 = 0, s(0) \neq 0 \vdash \perp}{1 = 0, \forall x (s(x) \neq 0) \vdash \perp} \forall\text{-S}_v}{1 = 0 \vdash \perp} \text{ comp}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$ e π_2 è la seguente derivazione

$$\frac{\begin{array}{c} \pi_3 \\ \vdots \\ \vdash 1 = 1 + 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi_4 \\ \vdots \\ 1 + 0 = 1 \cdot 0 \vdash 1 + 0 = 0 \end{array}}{1 + 0 = 1 \cdot 0 \vdash 1 = 0} \text{ tr - r}$$

e π_3 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\text{ax-id} \quad 1 + 0 = 1 \vdash 1 + 0 = 1}{\forall x (x + 0 = x) \vdash 1 + 0 = 1} \forall\text{-S}_v}{\vdash \text{Ax } 3. \quad \text{Ax } 3. \vdash 1 = 1 + 0} \text{ sy - r} \text{ comp}$$

mentre π_4 è la seguente derivazione

$$\frac{\text{ax-id} \quad 1 + 0 = 1 \cdot 0 \vdash 1 + 0 = 1 \cdot 0 \quad \begin{array}{c} \pi_5 \\ \vdots \\ \vdash 1 \cdot 0 = 0 \end{array}}{1 + 0 = 1 \cdot 0 \vdash 1 + 0 = 0} \text{ tr - r}$$

ove π_5 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{1 \cdot 0 = 0 \vdash 1 \cdot 0 = 0} \quad \frac{\vdash \text{Ax } 5. \quad \forall x (x \cdot 0 = 0) \vdash 1 \cdot 0 = 0}{\vdash 1 \cdot 0 = 0}}{\vdash 1 \cdot 0 = 0} \text{ } \frac{\forall\text{-S}_v}{\text{comp}}$$

9. $\vdash 0 = 4 + 0$ NON è valido in PA perchè NON è derivabile in PA in quanto in PA è derivabile

$$0 = 4 + 0 \vdash \perp$$

Chiamiamo π una sua derivazione che descriveremo più sotto.

Ora se esistesse una derivazione π_0 di $\vdash 0 = 4 + 0$ in PA otterremmo che in PA è derivabile il falso ad esempio come segue

$$\frac{\frac{\pi_0}{\vdash 0 = 4 + 0} \quad \frac{\pi}{0 = 4 + 0 \vdash \perp}}{\vdash \perp} \text{ comp}$$

Ma se assumiamo PA consistente, ovvero che non deriva il falso, avendo trovato una contraddizione dalla supposta esistenza di π_0 si conclude che la derivazione π_0 NON esiste e dunque $\vdash 0 = 4 + 0$ NON è valido in PA.

Ora mostriamo una derivazione di

$$0 = 4 + 0 \vdash \perp$$

che possiamo scegliere come la derivazione π menzionata sopra. Essa è la seguente

$$\frac{\frac{\pi_2}{0 = 4 + 0 \vdash 4 = 0} \quad \frac{\pi_1}{4 = 0 \vdash \perp}}{0 = 4 + 0 \vdash \perp} \text{ comp}$$

ove π_1 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\neg\text{-ax}_{sx1}}{4 = 0, s(3) \neq 0 \vdash \perp} \quad \frac{\vdash \text{Ax } 1. \quad 4 = 0, \forall x (s(x) \neq 0) \vdash \perp}{4 = 0 \vdash \perp}}{4 = 0 \vdash \perp} \text{ } \frac{\forall\text{-S}_v}{\text{comp}}$$

ricordando che $4 \equiv s(3)$ e π_2 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{0 = 4 + 0 \vdash 0 = 4 + 0} \quad \frac{\pi_3}{\vdash 4 + 0 = 4}}{\frac{0 = 4 + 0 \vdash 0 = 4}{0 = 4 + 0 \vdash 4 = 0} \text{ sy - r}} \text{ tr - r}$$

e π_3 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{4 + 0 = 4 \vdash 4 + 0 = 4} \quad \frac{\frac{\forall x (x + 0 = x) \vdash 4 + 0 = 4}{\vdash \text{Ax 3.} \quad \text{Ax 3.} \vdash 4 = 4 + 0} \quad \frac{\forall -S_v}{\text{sy - r}}}{\vdash 4 = 4 + 0} \text{comp}$$

10. $\vdash 3 = 2 + 1$ è valido in pA perchè si può derivare in PA ad esempio come segue:

$$\frac{\frac{\vdots}{\pi_1} \quad \frac{\vdots}{\pi_2} \quad \frac{\vdash 2 + 1 = s(2 + 0) \quad \vdash s(2 + 0) = s(2)}{\vdash 2 + 1 = 3} \text{tr - r}}{\vdash 3 = 2 + 1} \text{sy - r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{2 + 1 = s(2 + 0) \vdash 2 + 1 = s(2 + 0)} \quad \frac{\frac{\forall y (2 + s(y) = s(2 + y)) \vdash 2 + 1 = s(2 + 0)}{\vdash \text{Ax 4.} \quad \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y)) \vdash 2 + 1 = s(2 + 0)} \quad \frac{\forall -S_v}{\text{comp}}}{\vdash 2 + 1 = s(2 + 0)} \text{sy - r}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\text{cf}^*}{2 + 0 = 2 \vdash s(2 + 0) = s(2)} \quad \frac{\vdash \text{Ax 3.} \quad \vdash \forall x (x + 0 = x) \vdash s(2 + 0) = s(2)}{\vdash s(2 + 0) = s(2)} \quad \frac{\forall -S_v}{\text{comp}}$$

11. $\vdash \exists y \forall x \ x + y = x$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue:

$$\frac{\text{Ax 3.} \quad \vdash \forall x \ x + 0 = x}{\vdash \exists y \forall x \ x + y = x} \exists -S_v$$

12. $\vdash 2 + 4 = s(s(2 + 2))$

è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue:

$$\frac{\frac{\vdots}{\pi_1} \quad \frac{\vdots}{\pi_2} \quad \vdash 2 + 4 = s(2 + 3) \quad \vdash s(2 + 3) = s(s(2 + 2))}{\vdash 2 + 4 = s(s(2 + 2))} \text{tr - r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{2+4=s(2+3) \vdash 2+4=s(2+3)}{\forall y \ 2+s(y)=s(2+y) \vdash 2+4=s(2+3)} \ \forall\text{-S}_v}{\vdash \text{Ax 4.} \quad \forall x \ \forall y \ x+s(y)=s(x+y) \vdash 2+4=s(2+3)} \ \forall\text{-S}_v}{\vdash 2+4=s(2+3)} \text{comp}$$

ricordando che $4 \equiv s(3)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\frac{\text{cf}^*}{2+3=s(2+2) \vdash s(2+3)=s(s(2+2))}}{\forall y \ 2+s(y)=s(2+y) \vdash s(2+3)=s(s(2+2))} \ \forall\text{-S}_v}{\vdash \text{Ax 4.} \quad \forall x \ \forall y \ x+s(y)=s(x+y) \vdash s(2+3)=s(s(2+2))} \ \forall\text{-S}_v}{\vdash s(2+3)=s(s(2+2))} \text{comp}$$