PER ISTRUIRE UN ROBOT

ovvero, come costruirsi una logica

Giovanni Sambin
sambin@math.unipd.it

Capitolo secondo - seconda parte

1. Tavole di verità.

La differenza tra logica intuizionistica e logica classica, che dal punto di vista concettuale sembra ed in effetti è enorme, dal punto di vista del sistema formale della logica è minima: basta aggiungere i contesti a destra per avere il principio del terzo escluso. Ovvero: il calcolo dei sequenti **LK** si ottiene dal calcolo **LJ** aggiungendo i contesti a destra (di solito indicati con Δ), ed estendendo ad essi le regole di indebolimento e contrazione.

Nella logica intuizionistica una proposizione è vera quando se ne ha una verifica. Le equazioni definitorie ci dicono come costruire verifiche di proposizioni complesse: ad esempio, $A\&B$ è vero quando si ha una verifica di A e una verifica di B, perché $\Gamma \vdash A\&B$ equivale a $\Gamma \vdash A \quad \underline{e} \quad \Gamma \vdash B$. Nella logica classica, non si parla di verifiche ma solo di verità. Siccome una proposizione non puó essere che vera oppure falsa, dire che A è vera equivale a dire che A non è falsa, cioè la verità è mancanza di falsità. Diciamo che A ha valore 1 se è vera e 0 se è falsa; 1 e 0 sono dunque i soli valori di verità possibili per ogni A. Talvolta si scrive anche $V(A) = 1$ oppure $V(A) = 0$.

Ridotta a valori di verità, la logica non ha più bisogno di regole di deduzione perché basta fare i conti con i valori 0 e 1. Ad esempio, il fatto che valga $A\ vera \vdash B\ vera$ equivale esattamente a dire che $V(A) \leq V(B)$ (dove l'ordine $\leq$ naturalmente dice che $0 \leq 0, 0 \leq 1$ e $1 \leq 1$). E la definizione dei connettivi è data semplicemente dalla lora tavola di verità. Ad esempio, per dire chi è $A\&B$ basta dire in quale caso $A\&B$ è vera, rispetto alla verità di A e di B. Quindi *la verità di una proposizione composta è semplicemente una combinazione della verità delle sue componenti, ottenuta applicando per ciascun connettivo una tavola di verità.*

Dato che comunemente si parla solo della logica classica, un qualsiasi corso di logica di solito inizia da qui, cioè dalle famigerate tavole di verità. Sicuramente ne avrete sentito parlare. Ora vediamo cosa sono. E vediamo anche che esse sono un caso particolare della teoria che stiamo svolgendo. Infatti, le possiamo ottenere facilmente dalle equazioni definitorie dei vari connettivi, senza nemmeno passare per le loro regole di inferenza.

Rammentiamo l'equazione definitoria e prendiamo ad esempio il connettivo &. A questo livello, l'asserzione è una asserzione di verità, quindi l'equazione definitoria è (con contesti Δ nel caso classico):

$$\Gamma \vdash A\&B\ vera, \Delta \quad sse \quad \Gamma \vdash A\ vera, \Delta\ \underline{e}\ \Gamma \vdash B\ vera,\ \Delta$$

Se prendiamo $\Delta = \emptyset$, $\Gamma = \top$ (ricordiamo che $\top \equiv \mathit{true}$ indica una qualunque proposizione sicuramente vera, ad esempio, $\bot \to \bot$), abbiamo:

$$\top\ vera \vdash A\&B\ vera \quad sse \quad \top\ vera \vdash A\ vera\ \underline{e}\ \top\ vera \vdash B\ vera$$

Dato che $V(\top) = 1$ (per definizione), questo equivale a

$$1 \leq V(A\&B) \quad sse \quad 1 \leq V(A)\ \underline{e}\ 1 \leq V(B)$$

ovvero $V(A\&B) = 1$ sse $V(A) = V(B) = 1$. Dato che quando $V(A)$ non è 1, deve essere 0, da questo possiamo costruirci una tavola, o tabella, che dà il valore di $A\&B$ in funzione del valore di verità di A e del valore di verità di B in tutte le possibili combinazioni:

A	B	A&B
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	0

In altri termini, affinchè l'equivalenza dell'equazione definitoria possa esser mantenuta, l'unico caso in cui vale $A\&B$ *vera* è solo il primo.

Nello stesso modo si trovano le tavole di verità di tutti gli altri connettivi. NB: qui stiamo deducendo le tavole di verità, non le stiamo assumendo, come si fa di solito!!

Vediamo "$\vee$". L'equazione definitoria è

$$\Gamma, A \vee B\ vera \vdash \Delta \quad sse \quad A\ vera, \Gamma \vdash \Delta\ \underline{e}\ B\ vera, \Gamma \vdash \Delta$$

Procediamo in modo analogo, e questa volta poniamo $\Delta = \bot$, $\Gamma = \emptyset$; otteniamo:

$$A \vee B\ vera \vdash \bot\ vera\ \ sse\ \ A\ vera \vdash \bot\ vera\ \ \underline{e}\ \ B\ vera \vdash \bot\ vera$$

cioè $V(A \vee B) \leq 0$ sse $V(A) \leq 0$ e $V(B) \leq 0$. Quindi nella tabella che vogliamo costruire per $\vee$, $A \vee B$ avrà valore 0 soltanto nella riga in cui sia A che B hanno valore 0. La tabella di $\vee$ è quindi:

A	B	$A \vee B$
0	1	1
0	0	0
1	1	1
1	0	1

In particolare, $A \vee B$ vera non dice se è vera A o se è vera B; questa disgiunzione è come il latino *vel* (da cui il segno $\vee$) e non come il latino *aut*. Si noti che tutto ciò lo stiamo semplicemente ricavando da quello che abbiamo visto finora, senza aggiungere nient'altro, né assunzioni né concetti, ma semplicemente "facendo conti" a partire dalle equazioni definitorie, o dalle regole viste. In altre parole quello che si vuol dire è che la tabella per $\vee$, come tutte le altre, è stata dedotta dall'equazione definitoria, senza alcuna assunzione ulteriore.

Ultima tabella per $\to$:

$$\Gamma \vdash A \to B, \Delta \quad sse \quad \Gamma, A \vdash B, \Delta$$

Poniamo $\Gamma = \top, \Delta = \emptyset$ e otteniamo:

$$\top\ vera \vdash A \to B\ vera \quad sse \quad \top\ vera, A\ vera \vdash B\ vera$$

Dato che in generale $C, D \vdash E$ equivale a $C\&D \vdash E$ (si derivano facilmente uno dall'altro), si ha che $\top\ vera, A\ vera \vdash B\ vera$ equivale a $\top\&A\ vera \vdash B\ vera$, e quindi si ha

$$1 \leq V(A \to B) \quad sse \quad V(A) \leq V(B)$$

e la tavola di verità di $\to$ sarà:

A	B	$A \to B$
0	1	1
0	0	1
1	1	1
1	0	0

Qui ci viene detto che è vera in tre casi, l'unico falso è il secondo.

Per ora osserviamo solo che, considerando anche le tabelle di $\vee$, di $\to$ e di $\neg$ (ovvia) si ha:

A	B	$A \vee B$	$A \to B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0

Cioè, per la tavola di "$\vee$" che abbiamo visto, $A \to B$ è vera esattamente quando $\neg A \vee B$ è vera, anche se A, B che non c'entrano niente tra loro. Questo fatto porta a conseguenze strane, paradossali. Per esempio: "Se la luna fosse blu (LB), la terra sarebbe coperta di verde (TV)", è vera sia se TV è vera sia se è falsa, soltanto perché LB è falsa.

Oppure: "Io sono Napoleone implica che ho 50 miliardi" è vera secondo la tabella. Le due asserzioni non sono legate tra loro eppure la nuova proposizione vale in LK. Un altro caso è per esempio: "Io sono Napoleone, quindi ho scoperto l'America" è vera perchè "io sono Napoleone" è falso, "ho scoperto l'America" è falso e falso $\to$ falso è vero.

Il senso di "assurdo" che si ha è dato dal fatto che nella vita di tutti i giorni l'implicazione si legge come un legame fra A e B, mentre qui risulta vera (e quindi sensata) anche se questo legame è mancante. Ci sono state infinite discussioni sulla tavola di verità di $\to$, a partire dagli stoici. L'implicazione definita in questo modo dà un sacco di problemi. A questi è dedicato un paragrafo intero, il prossimo.

Introduciamo ora le convenzioni sulle precedenze dei connettivi:

$\forall$, $\exists$, $\neg$ legano piú di tutti,
$\vee, \&$ sono intermedi,
$\to$ lega meno degli altri.

Per questo non servono le parentesi nell'espressione $\neg A \vee B$, ma si legge $(\neg A) \vee B$.

2. I paradossi dell'implicazione materiale.

Abbiamo visto che se si accetta la logica classica, la tavola di verità per implica è obbligatoria, ma questo porta ad una serie di conseguenze strane. Ad esempio: sappiamo che da un mese e mezzo a questa parte piove tantissimo: possiamo dimostrare che c'è assolutamente un legame tra la pioggia e l'eccessiva emissione di CO_2, e lo si può fare in modo incontrovertibile se adotto la logica classica. Dobbiamo mostrare che, ponendo $C =$ l'emissione di CO_2 è eccessiva e $P =$ da un mese e mezzo piove tantissimo, si ha che $(C \to P) \vee (P \to C)$ è vera. Il fatto è che classicamente si ha che per ogni C e P, indipendentemente dal loro contenuto vale che $(C \to P) \vee (P \to C)$ è vera. Infatti $(\neg C \vee C) \vee (\neg P \vee P)$ vale sempre, e da questa, per la proprietà associativa e commutativa di $\vee$, si ha $(\neg C \vee \ P) \vee (\neg P \vee C)$, e cioè una disgiunzione in cui tutti e due i disgiunti sono veri, e che quindi è vera. Volendo, nello stesso modo si puó dimostrare qualunque cosa: ad esempio, che a me faccia male l'alluce destro è legato al fatto che quel tale non ha prenotato il ristorante per la cena: se mi fa male il piede egli non prenota, oppure se lui non prenota a me fa male il piede. E vale sempre! Classicamente si dimostra che per ogni P e C vale $(C \to P) \vee (P \to C)$ e questo mi sembra un motivo sufficiente per dire che la logica che esprime una cosa del genere non è una logica affidabile.

Un esempio di quanto sia strano il fatto che $A \to B$ equivalga a $\neg a \vee B$ si ha se si pone

$A =$	Bush ha subito un trauma
$B =$	Bush ha dichiarato guerra all'Iraq

In LK le seguenti due affermazioni sono indistinguibili:

o Bush non ha subito un trauma o ha dichiarato guerra all'Iraq	$(\neg A \vee B)$
se Bush ha subito un trauma allora ha dichiarato guerra all'Iraq	$(A \to B)$

Ma allora si vede che per ogni A, B vale

$$(A \to B) \vee (B \to A)$$

perché equivale a

$$(\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)$$

che per le proprietà associativa e commutativa di $\vee$ equivale a

$$(\neg A \vee A) \vee (B \vee \neg B)$$

che è (classicamente) sempre vera! Nell'esempio, si avrebbe che: *Bush ha subito un trauma e quindi ha dichiarato guerra all'Iraq oppure Bush ha dichiarato guerra all'Iraq e quindi ha subito un trauma* è vera! Cioè la logica classica instaura un legame anche tra due proposizioni tra loro scollegate. Questo vuol dire che date due **qualunque** proposizioni si ha sempre che una implica l'altra. Il significato di $\to$ è allora molto strano e sicuramente astratto e forse sarebbe più onesto dire che non c'è in LK una vera nozione di implicazione, sostituirlo direttamente con la combinazione di $\neg$ e $\vee$.

Altro esempio, forse peggiore dei precedenti: $(A\&B \to C) \to ((A \to C) \vee (B \to C))$. Sembra voler dire che se C segue da $A\&B$, allora uno dei due tra A e B, da solo, basta per ottenere C; questo naturalmente non è un buon modo di ragionare. Se consideriamo il caso particolare in cui C è $\perp$, abbiamo che $(A\&B \to \perp) \to ((A \to \perp) \vee (B \to \perp))$, ovvero $\neg(A\&B) \to \neg A \vee \neg B$. Questa è una vecchia legge nota come *legge di De Morgan* che solitamente viene espressa nella forma: $\neg(A\&B) = \neg A \vee B$.

Per dimostrare che $(A\&B \to C) \to ((A \to C) \vee (B \to C))$ è sempre vera, dato che non c'è altra scelta tra 0 e 1 basta mostrare che non può mai essere falsa, cioè non può mai valere 0. (Questo metodo è più veloce che compilare tutta la tavola di verità, e si applica in generale.) Proviamo a falsificarla: vogliamo vedere se riusciamo a farle assumere valore 0, rendendo cioè 1 l'antecedente $A\&B \to C$ e 0 il conseguente $(A \to C) \vee (B \to C)$ dell'implicazione principale. Perché $(A \to C) \vee (B \to C)$ abbia valore 0, devono avere valore 0 sia $A \to C$ sia $B \to C$, e questo significa che A e B valgono 1 e C vale 0. Ma in tal caso anche $A\&B$ vale 1, e quindi anche $A\&B \to C$ vale 0. Cosicché $(A\&B \to C) \to ((A \to C) \vee (B \to C))$ non può essere falsificata. E per mancanza di vie di mezzo questo significa che è vera, sempre.

Tutto ciò vale nella concezione classica. Non sembra un modo particolarmente sensato di ragionare, anche se è stato considerato il paradigma da Aristotele fino al secolo scorso.

In **LJ** invece non possono esistere tabelle di verità perché bisogna verificare ogni asserzione di volta in volta. Dire che il principio del terzo escluso vale (come in LK) vuol dire che vale **sempre**. Dire che non vale (come in **LJ**) vuol dire che funziona "in certi casi". Non si puó da una parte scegliere i vantaggi della logica classica, cioè la semplicità concettuale, e dall'altra rifiutarne le conseguenze. Si devono accettare anche le conseguenze (cosa che a volte non succede!!).

Il problema della tabella di verità è un problema su cui si è discusso per oltre 2000 anni. La mia posizione è abbastanza semplice: soltanto la tabella vista sopra ha senso, innanzitutto perché l'abbiamo dedotta dal nostro significato di implicazione, e inoltre perché se proponiamo una diversa tabella con altri valori (per esempio per A falsa e B vera implicazione falsa; falsa vuol dire che non può mai essere vera) si hanno risultati ancora più insensati. I problemi dell'implicazione materiale non sono quindi dovuti alla scelta di una tabella, ma vengono dall'aver deciso che un connettivo è determinato dalla sua tabella di verità e cioè a monte aver deciso che ogni proposizione è vera o falsa senza la possibilità di astenersi.

In altri termini, si vede che a logica classica è una logica del non falso, non è una logica della verità (come è invece la logica intuizionistica). E questo si manifesta necessariamente nella definizione di implicazione, che non può essere diversa da quella data.

A mio avviso il problema non è risolvibile, anche se nel corso della storia si è cercato di farlo, ma invano. Questi sono i cosiddetti "paradossi dell'implicazione materiale". C'è solo da notare che questa tavola di verità è indissolubilmente legata alla concezione classica. Non possiamo sperare di risolvere questi paradossi dell'implicazione materiale se vogliamo mantenere la logica classica. Sono assolutamente legati in quanto noi siamo partiti da **LK** con una certa concezione di verità, abbiamo capito che ogni proposizione deve avere valore di verità o 0 o 1, e dalle regole ottenute abbiamo concluso che non c'è assolutamente modo di evitarlo se lasciamo **LK** così. E questo secondo me è uno dei motivi più forti per guardare ad altre logiche, come quella intuizionistica.

Per un intuizionista, il concetto di verità classico si può ricostruire all'interno di una visione costruttiva dicendo che la verità di un classico c'è quando semplicemente qualcosa non è falso. Proprio perché le uniche cose false sono quelle che non potranno mai essere vere, e appena non sono false devono per un classico essere vere, si comprende come per lui vi sia una spaccatura del mondo in due: *vero* da una parte e *falso* dall'altra e non si scappa!

Dal mio punto di vista, questa spaccatura in due è simile a quella dei bambini piccoli che dividono tutto in due, buono da una parte e cattivo dall'altra, quando, invece, sappiamo bene che così non è.

3. Algebre di Boole e di Heyting.

George Boole, algebrista, a metà dell'Ottocento, in un periodo in cui in Inghilterra ferveva lo sviluppo dell'algebra (è del 1847 il suo libro sulle leggi del pensiero), vide la possibilità di far conti con la verità e falsità delle proposizioni complesse, per seguire lo stile matematico. Possiamo raccontare la sua scoperta come se fossero operazioni in un campo piccolo fatto di due elementi, come un'operazione binaria su un insieme di due elementi.

&	0	1
0	0	0
1	0	1

Questo è un modo abbreviato per dire i valori di $A\&B$ in funzione di quelli di A e di B. Similmente per gli altri connettivi:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

A	$\neg$**A**
0	1
1	0

Sia P una qualunque proposizione formata tramite i connettivi &, $\vee$, $\rightarrow$ a partire da proposizioni A, B, C,... (tra cui naturalmente può comparire anche $\perp$). Per definizione, P si dice una **tautologia** *se il il suo valore di verità risulta* 1 *qualunque sia il valore di verità,* 0 *o* 1*, delle proposizioni* A*,* B*,* C*, ... che la compongono.* Le variabili A, B, C, ... qualche volta si chiamano variabili proposizionali, nel senso che sono segni per proposizioni. In **LK**, per conoscere la verità di una proposizione complessa, ci basta sapere la verità delle proposizioni componenti, se sono 0 o 1, non è rilevante andare a vedere cosa c'è dentro.

Per un teorema (il teorema di completezza) che vedremo più avanti, in logica classica essere tautologia equivale ad essere dimostrabile. Quindi, in logica classica, tutto si riduce a tautologie, e cioè al calcolo dei valori di verità con le tavole di verità. In particolare, da questo segue che in **LK** è dimostrabile

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

Ma similmente anche $A\&B$ si riduce a una combinazione:

$$(A\&B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

Risultato: *tutti i connettivi si possono ridurre in modo equivalente, in logica classica, ad una combinazione di* $\vee$ *e* $\neg$*:* $\vee$ si riduce a $\vee$ e $\neg$ si riduce a $\neg$, tutti gli altri connettivi $\&, \to$ sono riducibili a quei due. In termini tecnici, questo risultato si chiama *completezza funzionale.*

George Boole si rese conto di come potesse essere matematizzato questo primo calcolo sulle proposizioni e in questo modo ebbe inizio quel che portò alla definizione d'oggi di **Algebra di Boole**: una struttura algebrica con operazioni corrispondenti ai connettivi e che soddisfano tutte le leggi della logica classica. Un esempio sarà naturalmente dato dai soli elementi 0 e 1 con le operazioni descritte dalle tavole di verità. Ma la definizione è molto più generale, e il modo più semplice per giustificarla passa per le equazioni definitorie. Infatti, sia B un insieme, con un ordine parziale $\leq$ e con operazioni $\cdot, +, \to$ corrispondenti ai connettivi $\&, \vee, \to$ rispettivamente. Abbiamo visto che tutte le proprietà di & seguono dalla equazione definitoria

$$\Gamma \vdash A\&B \quad sse \quad \Gamma \vdash A \ \underline{e}\ \Gamma \vdash B$$

Ci è più comodo qui pensare alla logica classica come ottenuta da **LJ** aggiungendo la legge della doppia negazione $\neg\neg A \vdash A$ (vedi seguito), cosicché non ci sono contesti a destra. Inoltre sappiamo che se $\Gamma = C_1, \ldots, C_n$ allora quando valgono indebolimento e contrazione si ha che

$$\Gamma \vdash A \quad sse \quad C_1\& \ldots \&C_n \vdash A$$

Quindi tutta la forza dell'equazione definitoria per & è espressa anche da

$$C \vdash A\&B \quad sse \quad C \vdash A \ \underline{e}\ C \vdash B$$

per C proposizione arbitraria. Quindi, se le proposizioni corrispondono agli elementi di B, l'ordine $\leq$ corrisponde a $\vdash$, e se & corrisponde a $\cdot$, allora per avere che $\cdot$ soddisfa le stesse proprietà di & basta richiedere che

per ogni $a, b, c \in B$, $c \leq a \cdot b \quad sse \quad c \leq a \ e\ c \leq b$

È immediato vedere (esercizio) che questo significa esattamente che $a \cdot b$ è l'infimo della coppia $\{a, b\}$, rispetto all'ordine $\leq$:
Del tutto analogamente, partendo dall'equazione definitoria per $\vee$ si arriva a vedere che le proprietà di $+$ sono tutte epresse da

per ogni $a, b, c \in B$, $a + b \leq c \quad sse \quad a \leq c \ e\ b \leq c$

che caratterizza $a + b$ come il supremo di $\{a, b\}$:
Questo dice che $(B, \leq, \cdot, +)$ è un *reticolo.*

L'equazione definitoria di $\to$ (assieme al fatto che il segno, può essere sostituito con &, vedi sopra) porta a chiedere che

per ogni $a, b, c \in B$, $c \leq a \to b \quad sse \quad c \cdot a \leq b$

Infine, è conveniente assumere che B contenga un elemento distinto dagli altri, che chiamiamo 0, che corrisponda alla proposizione $\perp$ e che quindi soddisfi:

per ogni $a \in B$, $\quad 0 \leq a$

Non dobbiamo dimenticare che fin qui abbiamo trattato solo delle proprietà dei connettivi in **LJ**. Dobbiamo trovare a che cosa corrisponde $\neg\neg A \vdash A$. La definizione di $\neg$ ci porta a porre

$$-a \equiv a \to 0$$

e quindi a richiedere che

per ogni $a \in B$, $- - a \leq a$

(da cui naturalmente seguirà anche $a = --a$, esercizio). La definizione formale in definitiva è: *un'algebra di Boole è una struttura* $(B, \leq, \cdot, +, \rightarrow, 0)$ *in cui*

B *è un insieme*
$\leq$ *un ordine parziale su* B
$\cdot, +, \rightarrow$ *sono operazioni binarie che soddisfano*
$c \leq a \cdot b \quad \text{sse} \quad c \leq a \,\text{e}\, c \leq b$
$a + b \leq c \quad \text{sse} \quad a \leq c \,\text{e}\, b \leq c$
$c \leq a \rightarrow b \quad \text{sse} \quad c \cdot a \leq b$
0 *è un elemento che soddisfa* $0 \leq a$
e infine $\rightarrow$ *e* 0 *sono legati da:* $(a \rightarrow 0) \rightarrow 0 \leq a$

Un esempio di algebra di Boole è naturalmente $(\{0, 1\}, \leq, \&, \vee, \rightarrow, 0)$, dove $0 \leq 1$ e dove $\&, \vee, \rightarrow$ sono le operazioni binarie su $\{0, 1\}$ con le tabelle viste sopra. Un altro esempio di cruciale importanza è dato dai sottoinsiemi di un insieme fissato X, con le usuali operazioni insiemistiche; vedi paragrafo seguente.

4. Funzioni proposizionali e sottoinsiemi

Ricordiamo qui brevemente come si introducono insiemi, sottoinsiemi e operazioni su sottoinsiemi da un punto di vista costruttivo. Un insieme X costruttivamente è dato specificando con quali regole si formano gli elementi, per così dire "dal basso". Si scrive $a \in X$ per dire che a è un elemento di X. A partire da X, c'è un modo per definire qualcosa "dall'alto", cioè i sottoinsiemi di X. Per noi, un sottoinsieme di X è la stessa cosa che una proprietà definita sugli elementi di X, ovvero una funzione proposizionale $A(x)$ $prop(x \in X)$.

Una funzione proposizionale è un'espressione che è una proposizione al variare di x in un certo dominio D.

Esempio 1. `Maria è bella`,

capiamo perfettamente cosa vuol dire; è una cosa vaga perché ognuno ha i suoi gusti, ma comprensibile.

Possiamo semplicemente dire

`...è bella`,

anche così capiamo cosa vuol dire perfettamente, sappiamo che non possiamo dire se è vero oppure no, finchè non ci dicono cosa ci sta al posto dei puntini. Sappiamo benissimo cosa vuol dire applicare il predicato "essere bella", ma riusciamo benissimo a cogliere anche il predicato senza che sia già applicato.

Questa è semplicemente una funzione proposizionale; invece di usare i puntini, possiamo dire x è bella o introdurre una lettera B, come sempre per le proposizioni, anzi $B(x)$ per indicare x è bella oppure, l'essere bella si addice ad x. In questo modo è diventata una funzione proposizionale, nel senso che preso un argomento specifico (e non più una variabile), ovvero preso un individuo in un certo dominio (nel caso di essere bella gli essere umani o i quadri o altre cose), e sostituito al posto di x si ottiene una proposizione.

Nella vita reale, la differenza tra una funzione proposizionale come

`x è bella`

e la stessa applicata ad un individuo, come

`Maria è bella`

è del tutto chiara. Della prima non sappiamo dire se è vera oppure no, perchè non conosco x, invece se x la chiamiamo Maria sappiamo decidere se è vera oppure no.

Questa distinzione si usa in continuazione anche nella vita di tutti i giorni, e si usano anche le variabili.

Cerchiamo di vedere cosa significa che x è una variabile. Nella lingua italiana il segno x come variabile non si usa, ma il concetto di variabile c'è lo stesso, solo che non si indica nello stesso modo.

Per esempio

`Chi è quel tizio che ti ha prestato questo libro?`

L'uso della parola "tizio" in quel momento è semplicemente: "chi è quell'x, tale che x ti ha prestato quel libro?". Oppure in

`Chi dorme non piglia pesci`

è sempre un generico x tale che se x dorme, x non piglia pesci. Due piccoli esempi per far vedere che anche nella lingua italiana si usa il concetto di variabile. Può essere espresso con un nome generico come "Tizio", o con un pronome come "chi"; in ogni caso, l'idea è che può essere sostituito con un elemento (o individuo) specifico.

Nel nostro linguaggio formale che differenza c'è tra un segno come x e un segno come $3, 5, 7, \ldots$; perchè chiamiamo x, y, z variabili e $3, 5, 7$ non variabili?

Noi potremmo chiamare x, y, z anche a, b, c oppure con altri segni, che cosa distingue queste che supponiamo chiamare variabili da $3, 5, 7, \ldots$ che non sono segni di variabili? La differenza è che x, y, z le intendiamo pronte ad essere sostituite da qualcos'altro.

Nella funzione proposizionale $B(x)$,

`x è bella`

la differenza tra B ed x è che B intendo tenerla fissa ed intendo sostituire al posto di x quello che voglio, purché abbia senso.

Il concetto di variabile è semplicemente un modo di ricordarci che quel segno può essere sostituito con altri segni in un certo dominio, anche se il dominio non è specificato; "x è bella", bella è un predicato che ha un'enorme estensione, quindi il dominio è difficile da determinare ma certamente se scrivo $B(x)$ intendo dire che poi lo specificherò e che $B(m)$, $B(s)$ abbia senso e voglia dire che m=Maria è bella, s=Silvia è bella.

Ad esempio: sia il dominio D le persone che sono adesso in aula, e sia $A(x) =$"x ha le scarpe da tennis". Questo può essere vero o meno, per accertarlo si guarda che scarpe ha ciascuno.

Con una notazione più compatta si scrive

$$A(x)\, prop(x \in D)$$

per intendere $A(x)$ è una proposizione al variare di x nel dominio D.

Cosa ci può stare al posto di D? D è quello che di solito si chiama "set", insieme, però dipende dal concetto che si ha di insieme, ovvero si possono avere vari concetti di insieme.

Da un punto di vista costruttivo, dire che D è un insieme richiede di conoscere le regole con cui si formano tutti gli elementi. Quindi per poter dire che d è un elemento dell'insieme D si deve sapere come ottenere d applicando soltanto le regole previste nel momento in cui si dice che D è un insieme.

L'esempio più tipico è quello dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Le regole sono

$$0 \in \mathbb{N} \qquad \frac{a \in \mathbb{N}}{a' \in \mathbb{N}}$$

e dicono che tutti i numeri naturali sono ottenuti partendo da 0 e applicando l'operazione $'$ di successore in numero finito di volte. E poi si intende che $\mathbb{N}$ sia formato *soltanto* da elementi di questo tipo, e quindi che sia giustificato il principio di induzione (cfr. capitolo IV).

Torniamo all'esempio. Possiamo concepire che le persone presenti in quest'aula siano un insieme, perché le indico una alla volta ed ho una lista finita di tutte le persone. Quindi ho le regole per formare gli elementi. Ora possiamo pensare alla proprietà A di avere le scarpe da tennis come ad un sottoinsieme di D, e di solito si scrive

$$\{x \in D : A(x)\} \subseteq D$$

($\{x \in D : A(x)\}$ si legge: il sottoinsieme degli x in D per cui $A(x)$ è vera). Il sottoinsieme $\{x \in D : A(x)\}$ è formato da tutte le persone di quest'aula che hanno le scarpe da tennis. In realtà non è così chiaramente determinato, perché per esempio, io posso avere un concetto di scarpe da tennis diverso da quello di un'altra generazione, quindi non è così determinato al di fuori di noi. Allora un po' per questo motivo un po' per altri, ci conviene dire che il sottoinsieme non è un certo stock di elementi, ma è la proprietà che lo determina. Tra $A(x)$ e A c'è la stessa differenza che tra " x è una mucca" e "l'essere mucca".

Allora la scrittura $A \subseteq D$ diventa semplicemente un'abbreviazione per $A(x) prop (x \in D)$.

Se si sa che Mariella è in aula, dire che

m=`Mariella ha le scarpe da tennis`

è la stessa cosa che dire che $A(m)$ è vera, ovvero che

$$m \epsilon \{x \in D : A(x)\}$$

Scrivo ϵ invece del solito $\in$ perché *non* sono la stessa cosa.

$m \in D$ significa che m è un elemento dell'insieme D; quando $A \subseteq D$, dire che $m \epsilon A$ significa che $m \in D$ e che m soddisfa la proprietà A, cioè che $A(m)$ è vera. Quindi :

- `Mariella è in aula e ha le scarpe da tennis`;
- $m \in D$ e $A(m)$ vera;
- $A \subseteq D$ e $m \epsilon A$;
- $m \epsilon \{x \in D : A(x)\}$

sono tutti sinonimi.

Alcuni elementari esempi di funzioni proposizionali che si incontrano in matematica sono: x è pari, $x = 7$, $x^2 + 2x - 3 = 27$. Altri meno banali ne vedremo più avanti.

La distinzione tra sottoinsieme e insieme è necessaria perché così si può mantenere la caratteristica che gli elementi di un insieme siano generati da regole prefissate. Infatti, si può sapere che A è una proprietà sull'insieme D, cioè $A \subseteq D$, anche senza avere le regole per generare tutti gli elementi di A. Mentre gli insiemi sono generati da regole, i sottoinsiemi non lo sono necessariamente, sono solo proprietà sopra ad un insieme. Questa definizione del concetto di sottoinsieme permette di vedere molto bene che le varie operazioni su sottoinsiemi hanno una spiegazione chiara nei termini della logica.

Ad esempio: quali sono le persone che hanno scarpe da tennis e la barba in quest'aula.

$A(x) prop(x \in D)$ avere le scarpe da tennis.

$B(x) prop(x \in D)$ avere la barba.

La proprietà di avere le scarpe da tennis e la barba è semplicemente $A(x)\&B(x)$ dove & è nella logica intuizionistica, quella di conoscenza astratta.

$$A \cap B \equiv \{x \in D \,:\, A(x)\&B(x)\}$$

detto in altri termini

$$(A \cap B)(x) \equiv A(x)\&B(x)$$

l'intersezione è semplicemente la funzione proposizionale che si ottiene facendo la congiunzione delle due proprietà. Similmente, se

$$S(x) prop(x \in D)$$

è avere i sandali, allora

$$B \cup S \equiv \{x \in D \,:\, B(x) \vee S(x)\}$$

è il sottoinsieme unione, cioè semplicemente la funzione proposizionale che si ottiene prendendo la disgiunzione: avere la barba o i sandali.

È facile vedere che le operazioni di intersezione e unione di due sottoinsiemi A e B sono semplicemente l'astrazione dei connettivi & e $\vee$ applicati ad $A(x)$ e $B(x)$.

È ora facile aggiungere una operazione su sottoinsiemi meno comune:

$$A \dot{\rightarrow} B \equiv \{x \in D : A(x) \rightarrow B(x)\}$$

(spesso si tralascia il puntino sopra $\rightarrow$) e si ha allora

$$x \,\epsilon\, A \dot{\rightarrow} B \text{ se e solo se } x \,\epsilon\, A \quad\rightarrow\quad x \,\epsilon\, B$$

Il connettivo di negazione dà luogo all'opposto di un sottoinsieme:

$$-A \equiv A \rightarrow \perp \equiv \{x \in D \,:\, \neg A(x)\}$$

$-A$ si chiama opposto di A. Nell'approccio classico si chiama complemento di A, ma conviene usare qui una parola diversa in quanto $-A$ non soddisfa le stesse proprietà del complemento, in quanto la nostra logica è quella intuizionistica.

In particolare, nella logica classica il principio del terzo escluso ci porta a dire che deve valere

$$D = A \cup -A$$

per ogni sottoinsieme A. Per noi invece oltre ad A e al suo opposto $-A$ c'è una terza zona di D in cui non vale né A né la sua negazione. Quindi $D = A \cup -A$ non vale.

Con il concetto di sottoinsieme che abbiamo illustrato, è facile dare una definizione rigorosa di inclusione e di uguaglianza tra sottoinsiemi. Dati due sottoinsiemi A e B dello stesso insieme D, cioè date due funzioni proposizionali $A(x)prop(x \in D)$ e $B(x)prop(x \in D)$, si dice che "*A è incluso in B*", scritto come al solito $A \subseteq B$, quando ogni elemento di D che soddisfa A, soddisfa anche B. In simboli:

$$A \subseteq B \;\equiv\; (\forall x \in D)(A(x)) \rightarrow B(x)$$

dove ho usato il nuovo segno $\forall$, che spiegheremo nella prossima lezione.

Data la nozione di inclusione $\subseteq$, quella di uguaglianza tra due sottoinsiemi è definita facilmente stipulando che $A = B$ vale quando valgono sia $A \subseteq B$ sia $B \subseteq A$:

$$A = B \;\equiv A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$$

Attenzione. $A \subseteq B$ non è da confondere con $A \dot{\rightarrow} B$: il primo è un'asserzione definita nel modo visto, la seconda è un sottoinsieme cioè un oggetto. Il legame comunque c'è ed è restituito dalla seguente equivalenza

$$A \dot{\rightarrow} B = X \text{ sse } A \subseteq B$$

Infatti $A \dot{\rightarrow} B = X$ è un'asserzione in tanto in quanto l'uguaglianza $=$ tra insiemi esprime una relazione tra due oggetti: $A \dot{\rightarrow} B$ e X.

Ora è facile riconoscere che il principio logico di non contraddizione nel linguaggio dei sottoinsiemi diventa: per ogni sottoinsieme A, vale

$$A \cap -A = \emptyset$$

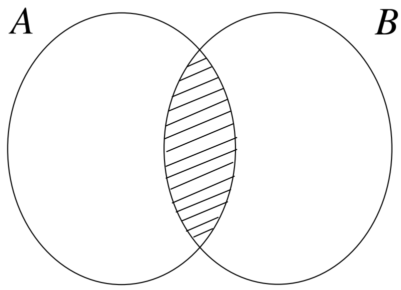
e $A \vdash \neg\neg A$ che vale anche in **LJ** diventa

$$A \subseteq - - A$$

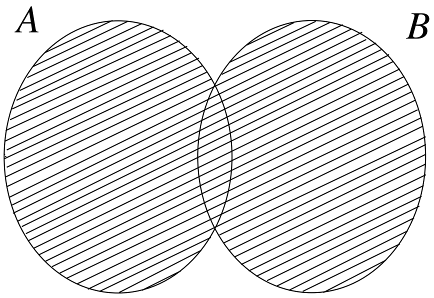
$\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$, il principio del terzo escluso $\vdash A \vee \neg A$ e la doppia negazione $\neg\neg A \vdash A$ validi in logica classica, nel linguaggio dei sottoinsiemi diventano $A \dot{\rightarrow} B = -A \cup B$, $-A \cup A = X$, $- - A \subseteq A$, ecc.

Si chiama $\mathcal{P}(X)$ la collezione di tutti i sottoinsiemi. Ora, è chiaro che la struttura $(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \dot{\rightarrow}, \emptyset)$ è un'algebra di Boole, se si assume la logica classica.

Continua con: si possono disegnare i sottoinsiemi con quelli che vengono chiamati diagrammi di Venn. Si può dimostrare che i diagrammi di Venn, ovvero la interpretazione dei valori di verità nell'algebra $\mathcal{P}(X)$, sono completi, e cioè permettono di controllare se una proposizione è una tautologia o no. Infatti, assegnati alle variabili proposizionali A, B, C,... dei sottoinsiemi arbitrari (quelli che si disegnano mediante "cerchi"; attenzione: devono davvero essere arbitrari, cioè non deve essere che il disegno implicitamente assuma relazioni tra le variabili), e facendo corrispondere i connettivi con le operazioni su sottoinsiemi come visto sopra, una tautologia viene a corrispondere alla totalità dell'insieme X.



$$A \cap B \equiv \{x : A(x) \,\&\, B(x)\}$$



$$A \cup B \equiv \{x : A(x) \vee B(x)\}$$

La struttura algebrica corrispondente alla logica intuizionistica è quella di una **Algebra di Heyting** (Arend Heyting fu il principale allievo di Brouwer, ed intorno al 1930 introdusse un sistema formale per la logica intuizionistica, equivalente al calcolo **LJ** da noi adottato). Le algebre di Heyting sono in tutto analoghe alle algebre di Boole, nel senso che hanno le stesse operazioni e soddisfano le stesse leggi, salvo l'identità $- - a \leq a$. Tuttavia non corrispondono a $\mathcal{P}(X)$, bensì agli aperti di uno spazio topologico, dove, naturalmente, le operazioni corrispondenti a & e $\vee$ sono ancora intersezione e unione, perché intersezione (finita) e unione di aperti è un aperto, mentre l'operazione $A \dot{\rightarrow} B$ corrispondente a $\rightarrow$ non dà il sottoinsieme $-A \cup B$, bensì l'interno di $-A \cup B$. E similmente, $-A$ stesso non è il complemento classico (che in generale non è aperto), ma l'interno del complemento.

Come con le algebre del tipo $\mathcal{P}(X)$ in logica classica, così utilizzando gli spazi topologici si ha una interpretazione completa per logica intuizionistica. In altri termini, se interpretiamo le variabili $A, B, C \ldots$ in aperti generici di uno spazio topologico generico, una qualunque proposizione P costruita con quelle variabili è dimostrabile in logica intuizionistica se e solo se la proposizione P viene a corrispondere a tutto lo spazio. Si può anche dimostrare che ci si può limitare al piano cartesiano visto come spazio topologico $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la usuale topologia.

Ad esempio, si può subito controllare nuovamente che $A \vee \neg A$ non è dimostrabile in logica intuizionistica. Infatti, se prendiamo uno spazio topologico e un generico aperto U corrispondente ad A, a chi corrisponde $\neg A$? Non è il complementare di U perché il complementare non è necessariamente un aperto e noi vogliamo interpretare le proposizioni con gli aperti di uno spazio topologico. Quindi $\neg A$ corrisponde all'interno del complementare di U, e perciò $A \vee \neg A$ corrisponde a $U \cup int(-U)$. Ma il bordo, la frontiera non è incluso nell'unione di un aperto U e dell'interno del suo complementare, e quindi $U \cup int(-U)$ non è necessariamente tutto lo spazio. Ecco perché non vale $A \vee \neg A$: nella frontiera né vale A né vale $\neg A$.

Aggiungo ora una mia esperienza vissuta, che può aiutare ad illustrare il concetto di sottoinsieme e le operazioni su sottoinsiemi. Quando mia figlia era alle scuole elementari, mi pare in terza, la sua maestra era fiera del fatto che aveva insegnato ai bambini "la logica" tramite giochi in classe. Mi ha talmente pregato di andare a vedere con i miei occhi in classe, che un giorno sono andato. La maestra tutta soddisfatta mi ha fatto vedere qualche esempio. Lei diceva: "Si alzi chi questa mattina è venuto a scuola a piedi!" e –sblam!– dieci bambini si alzavano in piedi. Oppure: "Ora si sieda chi ha gli occhi azzurri, e si alzino quelli che hanno una camicia azzurra!" E così via. Poi mi ha detto: "provi anche lei stesso". All'inizio ero imbarazzato, mi sembrava quasi di essere un dittatore in piccolo. L'algebra dei sottoinsiemi funzionava a meraviglia, una specie di macchina: unioni (si alzi chi ha i capelli biondi e anche chi ha una sorella piccola), intersezioni (si alzi solo chi ha mangiato minestra ieri sera e ha una bicicletta), complementi relativi (ora si abbassi chi ha mal di pancia), ecc. filavano via lisce senza alcun errore (da quel che potevo vedere). Poi presi un po' di confidenza, e proposi cose trasgressive–seduttive del tipo: "Si alzi chi ha picchiato la sorellina ieri", "si abbassi chi ha anche rubato la marmellata". Ancora bravissimi, magari con qualche sorriso. Non riuscivo proprio a farli sbagliare. Allora ho usato tutto il mio mestiere, e mi sono inventato lì per lì la seguente: "Si alzi chi crede di non doversi alzare!". Nel primo secondo, qualcuno si è alzato, e qualcuno no. Dopo qualche secondo, qualcuno si è abbassato, e qualcun altro si è alzato. Il panico cominciava a diffondersi, nessun sorriso, fino a quando han visto che io ridevo apertamente: li avevo battuti! Ancor oggi mi domando se aver usato il paradosso di Russell per metterli in imbarazzo sia stato onesto o no. Ma moralismo a parte, la storiella esemplifica molte cose, tra cui ad esempio il fatto che l'unione può essere data tramite una congiunzione (si alzi chi soddisfa A e chi soddisfa B è come dire $A \cup B$). E, come ho accennato, se si analizza la richiesta che li ha messi in crisi, si vede come essa sia sostanzialmente la definizione che porta al paradosso di Russell: un circolo tra linguaggio e metalinguaggio che non è virtuoso, come il principio di riflessione, ma inverso (o perverso, o vizioso).

5. I quantificatori.

Il primo a parlare di logica in modo specifico e sistematico, fu Aristotele al quale attribuiscono una tipica forma di deduzione, la seguente:

$$\frac{\text{Socrate è un uomo} \qquad \text{Ogni uomo è mortale}}{\text{Socrate è mortale}}$$

In realtà pare che non questo esempio di deduzione si incontri in Aristotele, bensì quest'altro:

$$\frac{\text{Ogni ateniese è un uomo} \qquad \text{Ogni uomo è mortale}}{\text{Ogni ateniese è mortale}}$$

Qual è la differenza?

Proviamo a “tradurre” in simboli questo secondo. Un modo che possiamo adottare è prendere l’insieme degli ateniesi, A, e dire che gli ateniesi sono tutti uomini, e allora, se U è l’insieme degli uomini, vuol dire che A è contenuto in U. Ogni uomo è mortale: possiamo dire che l’insieme degli uomini è contenuto nell’insieme delle cose mortali, M. Ora sto usando un linguaggio moderno quando dico “l’insieme di” ma non credo di distaccarmi molto dalle intenzioni di Aristotele. Ne segue che A è contenuto in M.

$A = \{\text{ateniesi}\}$, $U = \{\text{uomini}\}$, $M = \{\text{cose mortali}\}$

$$\frac{A \subseteq U \quad U \subseteq M}{A \subseteq M} \; (**)$$

Come trascrivere invece la prima deduzione? Dobbiamo adottare una notazione del tipo: $s = \text{Socrate}$,

$$\frac{s \in U \quad U \subseteq M}{s \in M} \; (*)$$

che è diverso, cioè fa intervenire due tipi di relazioni, la cui distinzione per noi adesso è banale, fra insiemi e individui: una è *“un insieme è contenuto in un altro”*, e un’altra è *“un elemento sta in un insieme”*.

Per noi adesso questa è una banalità, ma a suo tempo non lo era affatto.

Che differenza c’è? Qui si potrebbe ridurre questa prima forma alla seconda scrivendo come insieme il singoletto *Socrate*

$$\frac{\{s\} \subseteq U \quad U \subseteq M}{\{s\} \subseteq M}$$

e cioè pensare all’insieme estensione della proprietà *essere Socrate*, ma la cosa si farebbe un po’ innaturale; più naturale è dire che Socrate è un individuo, un elemento dell’insieme U.

La scoperta di Frege nel 1879. Gottlob Frege scrisse nel 1879 un testo fondamentale cui dobbiamo riconoscere il merito d’aver dato inizio alla logica matematica moderna; il suo libro *Ideografia...*[1] si può considerare il primo testo di logica moderna, in cui vengono trattati esplicitamente quelli che oggi si chiamano i quantificatori. Questo fu un primo, autentico passo avanti rispetto ad Aristotele, perché i quantificatori ci permettono di scrivere per bene sia la prima, sia la seconda forma di deduzione e spiegarle, farne una trattazione, nonché ridurre tutte le forme di sillogismo a due regole per ogni quantificatore come per tutti i connettivi. Questo è un balzo concettuale non da poco, è uno scoprire che i predicati, anche su insiemi infiniti, e tutto ciò che serve per trattarli, per descrivere il loro comportamento, è deducibile da poche regole, due per il quantificatore universale, due per il quantificatore esistenziale.

L’idea è questa, di leggere A non come insieme ma come predicato, scriverlo $A(x)$ e leggerlo come *x è ateniese*, U leggerlo come $U(x)$, *x è uomo*, e $M(x)$, *x è mortale*; s è Socrate, l’abbiamo già scritto. Quella seconda forma

[1] Titolo originale: *Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.*

$(**)$ che abbiamo visto più sopra si scriverebbe, allora, in questo modo:

$$\frac{\forall x(A(x) \to U(x)) \quad \forall x(U(x) \to M(x))}{\forall x(A(x) \to M(x))}$$

Il segno $\forall$, che si legge "per ogni" è esattamente una A rovesciata, che sta per l'inglese "all", cioè tutti; similmente, la E rovesciata $\exists$ si leggerà "esiste", e sta per "exists".

La prima forma $(*)$ si trascrive con:

$$\frac{U(s) \quad \forall x(U(x) \to M(x))}{M(s)}$$

dove con $U(s)$ indichiamo la proposizione ottenuta applicando il predicato U all'individuo s (cioè, sostituendo la x in $U(x)$ con s). Come si vede, l'uso dei predicati e dei quantificatori permette di scrivere tutte e due le forme. In generale, consente di ridurre tutte le forme corrette di ragionamento ad applicazioni di regole sui connettivi e sui quantificatori.

Le scritture $A(x), U(x), M(x)$, e simili sono quelle che vengono chiamate predicati, e piú in generale "funzioni proposizionali", perché si tratta di proposizioni una volta che si specifichi l'argomento, come per una funzione. Non è un caso che siano state chiamate così. *"Funzione proposizionale" è una funzione che ha per argomento individui, in un qualche insieme, e come valore una proposizione.* $A(x)$, *x è ateniese*, è una funzione proposizionale. Nella lingua non si scrive *x è ateniese*, si scrive "essere ateniese", o semplicemente si sta zitti, e si specifica di volta in volta a chi o a cosa si vuol applicare il predicato, senza mai usare la x. Quello che noi facciamo con la x è una espressione formale, è una espressione simbolica di qualcosa che comunque sta nella lingua. Ad esempio, "Andrea è ateniese": questo corrisponde alla scrittura $A(a)$, dove a significa Andrea.
Noi indichiamo il predicato "essere ateniese" con la x semplicemente per riuscire a formalizzare, a scrivere formalmente certe cose, che nella logica altrimenti non possiamo scrivere, come "ogni ateniese è un uomo".

Si osservi che una funzione proposizionale non necessariamente ha un solo argomento. Quando abbiamo un solo argomento come nel caso di "essere ateniese" ciò lo chiamiamo "predicato". Ma potrebbe essere più complicato: per esempio se dicessimo "Ogni figlio di emigrante indiano nato in Inghilterra è cittadino inglese" dentro la frase abbiamo una funzione proposizionale $F(x, y)$, "x è figlio di y". Per capire questa frase abbiamo bisogno di capire la funzione proposizionale "essere figlio di" con due argomenti. Se si specificano x e y nel dominio degli esseri umani dicendo ad esempio che x è Antonio Rossi e y è Bruno Bianchi, quella diventa una proposizione, che sarà quasi sempre falsa. Se prendete x e y a caso, è qualche volta vera se x è davvero il figlio di y; e "ogni figlio di emigrante indiano nato in Inghilterra è cittadino inglese" diventa abbastanza complicato da esprimere nel nostro formalismo perchè in questo caso avremmo bisogno di due quantificazioni. Questo, solo per dire che ci sono funzioni proposizionali con piú di un argomento. Sarebbe stato giusto dire "con piú di una variabile"? Sì che sarebbe stato giusto, basta chiarire che cosa intendiamo quando diciamo che x e y sono variabili. Possiamo dire che 22 è una variabile? No, mentre possiamo dire che x o anche f è una variabile. "Una variabile è elemento che varia in un insieme". Sì, come idea può andare. Solo, chiariamo meglio, perché un elemento non varia. Ed allora *la x sarà un qualsiasi elemento all'interno di un insieme che chiameremo X. La x è un qualsiasi elemento.* Solo che x non è un elemento ma è *un segno che sta per* un elemento. x è un segno del nostro alfabeto che usiamo in un modo particolare. *È un segno pronto ad essere sostituito da un altro.* Di solito quando si dice x si dice anche dove si intende che vari, cioè *in che insieme possiamo prendere elementi pronti ad essere sostituiti al posto di quella x.* Ad esempio, per gli ateniesi si tratterà dell'insieme degli "esseri viventi". Oppure, se diciamo $x \cdot x = y$, intenderemo che x sia un qualche tipo di numero che potremo ulteriormente specificare, ma comunque certamente non un essere umano. L'importante è dire che x è un segno dell'alfabeto, che può essere sostituito con elementi in un certo insieme. Notate che da questo punto di vista, l'uso di x, y, z è totalmente indifferente: può essere a, b, c, qualche volta lo è ma potrebbe essere qualunque altro segno; si potrebbe anche dire *, $\bigcirc$, $\odot$; qualunque stock di segni che conveniamo di trattare in un certo modo, cioè come segni che possono essere sostituiti con elementi di un certo dominio.

Una piccola osservazione è che il concetto di variabile esiste in natura, nel senso che la usiamo costantemente nella nostra lingua ad esempio quando diciamo "Un tizio che guidi la macchina in questo modo dimostra la sua arroganza"; oppure, "Chi dorme non piglia pesci", o "Chi si veste in modo colorato dà allegria." Quel "chi" che cos'è se non un x? Ogni x che si vesta in modo colorato implica che x...

Assumiamo di aver capito che cos'è una funzione proposizionale, che cos'è una variabile, che cos'è un dominio D in cui una variabile varia.

Il quantificatore universale $\forall$ e il principio di riflessione

Lo scopo è giustificare le regole di inferenza per $\forall$ e l'idea guida è di farlo con l'aiuto, ancora una volta, del principio di riflessione.

L'asserzione composta che vogliamo portare a linguaggio oggetto è

$$\text{per ogni } d \in D,\ \Gamma \vdash A(d)$$

dove:

1 D è un insieme, nel senso costruttivo di conoscere con quali regole sono formati gli elementi di D. Quindi, d'ora in poi, ogni volta che si parlerà di D, si dovrà supporre di conoscere quali sono le sue regole, e di conoscere quando $d \in D$ e cioè d appartiene all'insieme D per un d specifico, e di sapere cosa significa l'assunzione $z \in D$, e cioè precisamente che z è di una delle forme previste dalle regole di D;

2 con la scrittura $A(d)$ si intende la proposizione ottenuta applicando la funzione proposizionale $A(z) prop (z \in D)$ allo specifico elemento $d \in D$. Se avessimo specificato per bene le espressioni, qui potremmo dire che $A(d)$ è abbreviazione di $A(x := d)$, la sostituzione di x con d in A.

La novità con il "per ogni" è che non tutti possono essere d'accordo su che cosa vuole dire. Mentre sulla <u>e</u> sostanzialmwente si poteva più o meno arrivare ad un accordo, mettendoci un po' d'accordo per esempio trascurando l'ordine; con il "per ogni" è un po' difficile, soprattutto se il D set è infinito. In questo caso compaiono subito delle opinioni su che cosa voglia dire. Per quanto riguarda il caso D finito, per esempio “gli individui in questa aula”, dire: “Ogni individuo in quest’aula ha almeno un euro in tasca”, vuol dire che “io ho almeno un euro in tasca” e “chi mi sta davanti ha un euro in tasca” e “chi gli sta di fianco ha almeno un euro in tasca” e... etc, la proposizione è una congiunzione di tante proposizioni quanti sono quelli che stanno dentro quest’aula. Il significato è facile e abbastanza universale. Il problema è se invece il dominio D è infinito. Che cosa significa quel *per ogni* $d \in D, \Gamma \vdash A(d)$? Nella spiegazione classica, del concetto di “per ogni” formalizzato, si presume che questo concetto: “per ogni d in D” sia chiaro, e quindi non si dice nulla, praticamente. Ci si immagina che gli infiniti esistano in quanto “infiniti attuali”, cioè enti in sè, e che si capisca che cosa significa “per ogni” elemento d un certo dominio infinito D. Nella visione costruttiva si può spiegare un po’ meglio “per ogni d in D” dicendo che per dare il dominio D si devono dare esplicitamente le regole con cui sono costruiti tutti i suoi elementi. Cioè si chiede che D sia definito per induzione, come vedremo.

Allora adesso facciamo il solito conto per risolvere quella equazione definitoria. Dobbiamo prima analizzare che cosa vuol dire questo *per ogni* $d \in D, \Gamma \vdash A(d)$, ed esprimerlo nel linguaggio formale che abbiamo. Alla luce del fatto che devo avere le regole per generare gli elementi di D, significa che mi convinco del fatto che $\Gamma \vdash A(d)$ vale su tutti gli elementi semplicemente sapendo che una certa cosa d è un elemento.

Quindi il punto da capire adesso è che l’equazione definitoria, espressa in un modo più formale nel linguaggio che stiamo costruendo, è ottenuta rimpiazzando *per ogni* $d \in D, \Gamma \vdash A(d)$ con l’altra asserzione, cioè che $A(z)$ vale avendo come sole assunzioni Γ e il solo fatto di sapere che $z \in D$, cioè $\Gamma, z \in D \vdash A(z)$. Perchè questo? La spiegazione è che D è un insieme nel senso che abbiamo le regole, quindi l’informazione $z \in D$ vorrà dire che so con che regola è stato ottenuto, e solo con quello devo essere in grado di dire che vale anche $A(z)$. Allora dico che quando sono in questa situazione voglio che il robot introduca un $\forall$ (simbolo che userò per il “per ogni” spiegato fin’ora), cioè chiedo che $\forall$ sia definito dalla equazione:

$$\Gamma \vdash (\forall x \in D)A(x) \text{ sse } \Gamma, z \in D \vdash A(z)$$

Attenzione: si deve subito esplicitare una condizione formale che è necessaria qui per raccontare il significato che ho in mente: è necessario che Γ non dipenda da z. Se Γ dipendesse da z, potrei scegliere come Γ $A(z)$ stesso, allora è chiaro che asserisco $A(z)$ avendo come ipotesi $A(z)$, ma questo non mi dice nulla sul fatto che $A(z)$ valga per ogni z; mi dice semplicemente che ho scritto una tautologia. Io, invece, voglio che veramente si sappia che vale $A(z)$, senza assunzioni che parlino di z. Detto in altri termini voglio che da questo $\Gamma, z \in D \vdash A(z)$ segua qualunque sia $d \in D$, che $\Gamma \vdash A(d)$ dove notate che questo Γ è sempre lo stesso. Allora come faccio ad ottenere la prima versione dalla seconda? Immaginiamo che mi diano un d, prendo questa versione compatta, sostituisco d, ed ottengo che da $d \in D, \Gamma$ segue $A(d)$. Ma $d \in D$ lo sapevo, quindi segue che da Γ segue $A(d)$. Quindi, semplicemente facendo una sostituzione al posto di z metto l’elemento che mi interessa, e ottengo che ho $A(d)$ per ogni d. Però per avere questo devo avere che Γ è lo stesso, quindi devo fare la sostituzione senza che Γ cambi, il che vuol dire che Γ non dipende da z. Quindi questa regola è a condizione che Γ non dipenda da z. Poi, più avanti vedremo formalmente cosa vuol dire, avremo descrizioni più precise, tipo da computer. Per adesso ci basta questo.

Consideriamo ora l'altro verso per arrivare alla $\forall$-riflessione esplicita. Analizziamo ed otteniamo una cosa molto sensata. Otteniamo l'assioma banalizzando:

$$z \in D, (\forall x \in D)A(x) \vdash A(z)$$

Ovvio. Adesso, tagliando abbiamo la $\forall$-riflessione esplicita:

$$\frac{\Gamma \vdash z \in D \quad \Gamma', A(z) \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma', (\forall x \in D)A(x) \vdash \Delta}$$

Lasciamo al lettore di verificare, come al solito, che dalla rilfessione esplicita si deduce l'assioma (banalizzando) e dall'assioma si deduce la riflessione implicita (componendo).

Passiamo subito all'$\exists$ (esiste). L'equazione definitoria ci fa vedere subito che

$$\exists : \forall = \vee : \&$$

L'equazione definitoria di $\exists$ è:

$$(\exists x \in D)A(x) \vdash \Delta \quad \mathit{sse} \quad \mathit{per} \quad \mathit{ogni} \quad d \in D, A(d) \vdash \Delta$$

Notiamo che il *per ogni* $d \in D$ viene riflesso a sinistra dall'$\exists$. Qual è l'intuizione? È che per poter dire che dall'esistenza di un elemento per cui valga A concludo Δ devo sapere che posso concludere Δ dal fatto che A valga su qualunque elemento. Dalla pura esistenza di un elemento su cui A vale, voglio concludere Δ. Questo vuol dire che lo devo poter concludere da qualunque elemento mi diano. Supponiamo che sia un gioco tra il lettore e me: io dico che dalla pura esistenza si ottiene Δ. Il lettore non mi crederà. Come fa a provare a vedere se io mi sto sbagliando? Sceglierà l'individuo che esiste ed io gli farò vedere che da quello segue comunque Δ, ed il lettore è libero di scegliere qualunque individuo. In questo modo dimostriamo una direzione. Viceversa, se qualunque individuo scelga, io dimostrerò che da quell'individuo segue Δ, vuol dire che Δ segue dalla pura esistenza. Per esempio supponiamo che io dica una cosa del genere: "Chiunque abbia un antenato irlandese ha i capelli rossi." Vuol dire: "Esiste un tuo antenato che è irlandese" $\underline{\mathit{comp}}$ "Hai i capelli rossi" .

Quindi esiste x che è tuo antenato ed è irlandese comporta che tu abbia i capelli rossi. Per convincermi di questo l'equazione definitoria ci dice che in questo caso io dovrei far vedere che qualunque individuo sia il mio antenato io ho i capelli rossi. Nell'equazione definitoria uso due lettere diverse (x e d), ma in realtà sono entrambe variabili. Siamo noi che scegliamo l'elemento di D; mentre qui lo diamo scritto nel linguaggio formale che useremo. Solo per questo uso x o d, ma sono entrambe variabili. In matematica questo è chiarissimo. Il punto è che non molti enunciati hanno una premessa di tipo esistenziale, però ci sono. Per esempio un enunciato potrebbe essere: "se un certo polinomio ammette una soluzione positiva, allora succede una certa cosa, C". Il dire se ammette una soluzione positiva, (cioè se esiste un numero che è positivo e che è soluzione del polinomio) equivale a dire che qualunque sia la soluzione, se me la danno io devo tirar fuori C. Fatelo come sfida, come gioco tra due persone, allora vedrete subito: se io voglio vincere, io dico questo e mi viene chiesto di metterlo in atto. Allora mi si domanda: "Se quello che esiste è d, tu lo sai fare?" io per essere pronto a rispondere, devo sapere che *per ogni* $d \in D, A(d) \vdash \Delta$, perché non so quale d verrà scelto a testimoniare il fatto che A vale su d. Proviamolo. Noi non sappiamo bene cosa voglia dire "esiste", abbiamo spiegato il "per ogni", e non è un caso, l'abbiamo spiegato tramite le regole che generano D, cioè tramite l'induzione. L'"esiste" è come la $\underline{e}$ e la "oppure". Il concetto di "oppure" noi non l'abbiamo al metalinguaggio, l'abbiamo solo come connettivo al linguaggio. Pensateci: per poter dire una "oppure" in realtà siamo passati attraverso una $\underline{e}$, perché l'immagine di tutti e due c'è comunque. Quindi per spiegare una "oppure" dobbiamo comunque passare attraverso una $\underline{e}$, quindi tanto vale avere solo la $\underline{e}$ e definire i connettivi come abbiamo fatto, e lo stesso adesso. Il "per ogni" dobbiamo comunque spiegarlo, e siccome basta per spiegare sia il quantificatore $\forall$ che il quantificatore $\exists$, facciamo così.

Vediamo le regole. Faccio notare che qui come prima, si ha $A(z)$, con $z \in D$, $A(z) \vdash D$, con D non dipende da z. In realtà abbiamo bisogno anche di un Γ, quindi ci mettiamo subito il contesto Γ. Nè Γ, nè D dipendono da z, analogamente al primo caso descritto in questo paragrafo. A questo punto la regola di <u>$\exists$-formazione</u> sarà la solita direzione da destra sinistra dell'equazione definitoria:

$$\frac{z \in D, A(z), \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x \in D)A(x) \vdash \Delta}$$

La riflessione implicita si ha nel solito modo:

$$\frac{(\exists x \in D)A(x), \Gamma \vdash \Delta}{z \in D, A(z), \Gamma \vdash \Delta}$$

l'assioma si ottiene banalizzando scegliendo $\Gamma = \emptyset$, $D = \exists$,

$$z \in D, A(z) \vdash (\exists x \in D)A(x)$$

Vedete che comincia ad essere il significato usuale di $\exists$, perchè dice che se io ho un elemento d, e so che A vale su quell'elemento, allora qualunque sia l'elemento z, posso concludere che esiste un x di D per cui vale A. Fine: dobbiamo tagliare questi due, quindi abbiamo la <u>$\exists$-riflessione esplicita</u>:

$$\frac{\Gamma \vdash z \in D\Gamma' \vdash A(z)}{\Gamma, \Gamma' \vdash (\exists x \in D)A(x)}$$

E il viceversa pure, perchè se $\Gamma = z \in D$ e $\Gamma' = A(z)$, ottengo esattamente l'assioma e per ottenere la riflessione implicita basta tagliare $(\exists x \in D)A(x)$. I conti sono sempre gli stessi.

Riassumendo le regole sono la $\exists$-formazione e la $\exists$-riflessione esplicita. Nella prima deve essere che nè Γ, nè Δ dipendono da z. Questa condizione è fondamentale, perchè altrimenti si potrebbe avere:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(z) \vdash A(z)}{z \in D, A(z) \vdash A(z)}}{A(z) \vdash (\forall x \in D)A(x)}}{z \in D, A(z) \vdash (\forall x \in D)A(x)}}{\exists x \in D)A(x) \vdash (\forall x \in D)A(x)}$$

È come Berlusconi che dice: "Siccome io sono riuscito a diventare miliardario, allora tutti possono diventare miliardari, e la mia regola è quella giusta". Un ragionamento di questo tipo non funziona, perchè afferma che se esiste un individuo tale che... allora tutti..., che è chiaramente sbagliato. (Inoltre nel caso specifico c'è un vizio logico evidente) comunque in generale se esiste un punto in cui la funzione vale 0 non vuol dire che la funzione è costantemente 0. Quindi un sistema che ci porti a dimostrare che da un "esiste" segue un "per ogni" non è affidabile. Il punto chiave è che non abbiamo obbedito ad una condizione che Γ non dipenda da z.

Avendo introdotto i quantificatori, vorrei riprendere alcuni argomenti che avevo lasciato in sospeso. Uno è l'inclusione tra sottoinsiemi. Si definisce così:

$$U \subseteq V \equiv (\forall x \in D)(U(x) \to V(x))$$

e il suo duale incontra o overlaps:

$$U \between V \equiv (\exists x \in D)(U(x) \& V(x))$$

Costruttivamente questo è diverso da dire $U \cap V \neq \emptyset$; classicamente sono la stessa cosa.

Si possono ora dimostrare le seguenti:

- $(\forall x \in D)\neg A(x) \vdash \neg(\exists x \in D)A(x)$
- $\neg(\exists x \in D)A(x) \vdash (\forall x \in D)\neg A(x)$
- $(\exists x \in D)A(x) \vdash \neg(\forall x \in D)A(x)$
- $\neg(\forall x \in D)A(x) \vdash (\exists x \in D)A(x)$

Si noti che l'ultima vale solo in LK. Che cosa vuol dire $U \cap V \neq \emptyset$? Vuol dire che $\neg(U \cap V = \emptyset)$.Si usa il fatto che per qualunque U

$$\emptyset \cap U$$

La dimostrazione è:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\bot \vdash \bot}{\bot \vdash U(z)}}{z \in D, \bot \vdash U(z)}}{z \in D \vdash \bot \to U(z)}}{\vdash (\forall z \in D)(\bot \to U(z))}$$

Si ha $\neg(\forall x \in D)(U(x)\&V(x) \to \bot)$ che è $\neg\forall x \neg(U(x)\&V(x))$. La differenza tra intersezione non vuota e questo nuovo segno $\between$, è che uno è $\forall$ ed uno è $\exists$. Costruttivamente sono due cose diverse. Un esempio l'abbiamo già fatto: era il caso dell'antenato francese. Quella è una tipica situazione in cui l'"esiste" è diverso dal "per ogni". Un conto è dire "non è escluso che io abbia un antenato francese", ed un conto è dire "ho un antenato francese". Identificare "per ogni" con "esiste" equivale esattamente a indentificare "non è escluso che esista" con "esiste". Qui la logica classica non è in grado di fare la distinzione che dicevo prima tra “non è escluso che io abbia un antenato francese” con “ce l’ho”.

Ora mostro che

$$U \cap -U = \emptyset$$

che è come dimostrare

$$(\forall x \in D)(U(x)\&\neg U(x) \to\perp)$$

Questo vale sempre perchè qualunque sia A vale

$$A\&(A \to\perp) \vdash\perp$$

infatti

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad \perp\vdash\perp}{A, A \to\perp\vdash\perp}}{A\&(A \to\perp) \vdash\perp}}{\perp\ A\&(A \to\perp) \to\perp}$$

Per far questo ho bisogno dell’indebolimento, e contrazione, perchè così si ha $\& = \otimes$ nel senso (forte) che & soddisfa anche le regole di $\otimes$. Quindi qui se ne ha un esempio perchè questo & soddisfa anche le regole di $\otimes$, in quanto se ci fosse $\otimes$, avrei applicato semplicemente la $\otimes$-formazione.

Adesso cominciamo ad avere una quantità di strumenti a disposizione, sia per fare esercizi, sia per far vedere come funziona la logica. Affemare, come si fa in LK,

$$U \cup -U = D$$

è equivalente ad affermare (e dimostrare)

$$U(x) \vee \neg U(x) \quad vale$$

e sappiamo che chiedere che valga $U(x)$ o non $U(x)$, senza sapere chi è U e chi è x, è come avere il terzo escluso valido sempre, ma questo succede solo nella logica classica. Questo ci permette di raccontare un po’ intuitivamente qual è la visione intuizionistica. Potete leggerla anche partendo da una nozione di spazio topologico, intuitivamente. Quando si dice che si ha un certo dominio D, poi si fa il disegno di un sottoinsieme U, ed ogni proposizione, nel nostro caso ogni funzione proposizionale, si racconta in un disegno: i famosi diagrammi di Venn.

Allora, per esempio l’intersezione si racconta come nel disegno (la parte ombreggiata). La novità è questa, che se volete interpretare costruttivamente le cose, l’unica avvertenza, sostanzialmente è stare attenti a quando passiamo al complemento, perchè il complemento intuizionistico è diverso. Il complemento di U non è tutta la parte di D meno U, ma chiede di dare una proprietà che dia “tutto il resto”. Quindi potrebbe essere che ci sono dei casi non decisi, un bordo di indecisione e che riesco a dare come negazione di U un sottoinsieme di quello che non ci sta in U (questo corrisponde alla facoltà di un intuizionista di astenersi). La proprietà “non stare in U” è metalinguistica, mentre noi vogliamo una proprietà del linguaggio.

Vedete che è sempre fondamentale la distinzione tra linguaggio e metalinguaggio. Un altro esempio si ha nella lingua italiana. Un conto è dire “Quella ragazza non è bella”, e un conto è dire “è brutta”, sono due cose molto diverse. “Non è bella” è un modo per dire “non mi impegno”, mentre dire “è brutta” può essere offensivo. Mi scuso se l’esempio della ragazza vi disturba, perchè sembra che sia poco politically correct, e invece è la vita che è proprio così. La morale generale è che la distinzione tra una proprietà e la sua negazione non è così secca come dire 0 (falso) 1 (vero). Ci sono gradazioni. "Non è bella" non vuol dire che è brutta. Potrebbe essere addirittura "carina", quindi lo spaccare il mondo in due è infantile. Da un lato c'è la proprietà, negare la proprietà vuol dire tutto il resto, ma questa è una semplificazione. Noi usiamo le parole in modo diverso e meno rigido, nella lingua queste distinzioni ci sono. La situazione è molto complessa, è molto più complessa anche di quello che sto cercando di raccontarvi della logica intuizionistica. La logica intuizionistica dice semplicemente che il complemento, che chiamiamo "opposto" non è tutto quello che non ci sta, ma è, tra le cose che non ci stanno, quelle che riesco a caratterizzare con una funzione proposizionale, dunque una parte generalmente più piccola di "tutto il resto". Se poi coincidano con quello che non ci sta, è un caso fortunato, particolare. Allora, dal punto di vista matematico, quando passate al complemento dovete togliere la frontiera. Se leggete U come un aperto dovete prendere non il complemento che non è più aperto, ma dovete prendere l'interno del complementare. Questo sarà l'opposto di U. E questa immagine dell'aperto, della frontiera e del complemento di cui si deve prendere l'interno è corretta. C'è anche un teorema che dice che se usate con attenzione questa intuizione, non sbagliate a dire che la logica intuizionistica vale quando interpreto una proposizione come un aperto, e quindi l'opposto come l'interno.