7. Perchè la procedura di decisione per LC$_p$ è corretta?

Il motivo è che

in un albero fatto SOLO di regole di LC$_p$
(con foglie che non sono necessariamente assiomi)

la **VERITÀ** su una riga della tabella di verità dei sequenti presenti
SCENDE $\Downarrow$ dall'ALTO verso il BASSO
da **TUTTE** le **foglie**
ed anche **SALE** $\Uparrow$ dal **basso** verso l'**alto**
dalla radice $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{\Delta}$ verso ogni **SINGOLA foglia**.

Quindi

in un albero fatto SOLO di regole di LC$_p$
(con foglie che non sono necessariamente assiomi)

la **FALSITÀ** su una riga **SCENDE** $\Downarrow$
da UNA **SINGOLA foglia**
fino alla **RADICE** $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{\Delta}$

NOZIONE di regola VALIDA

idea generale:
una regola di inferenza di sequenti è **valida**
sse
CONSERVA la **verità** dei sequenti su ogni riga
(della loro tabella di verità)
dall'**ALTO verso il BASSO** $\Downarrow$
ovvero
sse **TRASFORMA sequenti premessa** *veri su una riga*
in un **sequente conclusione** *vero sulla stessa riga*

Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \qquad \text{è } \textbf{valida}$$

sse

$$(\ \Gamma_1^{\&} \ \rightarrow \ \Delta_1^{\vee}\ ) \quad \rightarrow \quad (\ \Gamma_2^{\&} \ \rightarrow \ \Delta_2^{\vee}\ ) \text{ è una tautologia.}$$

Quindi osserva

$\boldsymbol{\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}}$	$\boldsymbol{\Gamma_2^{\&}}$	$\boldsymbol{\Delta_2^{\vee}}$	$(\ \boldsymbol{\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}}\ ) \rightarrow (\ \boldsymbol{\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}}\ )$
0	-	-	1
-	0	-	1
1	1	1??	1???
1	1	0??	0???

Come DIMOSTRARE che una regola ad una premessa è VALIDA!!

Per mostrare che una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\mathbf{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}}{\mathbf{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}} \qquad \text{è } \textbf{valida}$$

BASTA dimostrare la *condizione scorciatoia1*
ovvero che
su una qualsiasi riga r

$$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Delta_1^{\vee} = 1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{\Gamma_2^{\&} = 1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{\Delta_2^{\vee} = 1}$$

se INVECE non si riesce, allora SOLO SE si soddisfa la *condizione scorciatoia1bis*
ovvero
si trova una riga in cui

$$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Delta_1^{\vee} = 1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{\Gamma_2^{\&} = 1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{\Delta_2^{\vee} = 0}$$

anche solo per **particolari liste di proposizioni messe al posto di** $\mathbf{\Gamma_1}$, $\mathbf{\Gamma_2}$ e $\mathbf{\Delta_1}$, $\mathbf{\Delta_2}$

la regola NON è valida

Una regola di inferenza di sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\mathbf{\Gamma_1} \vdash \mathbf{\Delta_1} \qquad\qquad \mathbf{\Gamma_2} \vdash \mathbf{\Delta_2}}{\mathbf{\Gamma_3} \vdash \mathbf{\Delta_3}} \qquad \text{è } \textbf{valida}$$

sse

$$(\ \mathbf{\Gamma_1^{\&}} \ \rightarrow\ \mathbf{\Delta_1^{\vee}}\ ) \ \&\ (\ \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \ \rightarrow\ \mathbf{\Delta_2^{\vee}}\ ) \ \rightarrow\ (\ \mathbf{\Gamma_3^{\&}} \ \rightarrow\ \mathbf{\Delta_3^{\vee}}\ ) \text{ è una tautologia.}$$

Quindi osserva

$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \rightarrow \mathbf{\Delta_1^{\vee}}$	$\mathbf{\Gamma_2^{\&}} \rightarrow \mathbf{\Delta_2^{\vee}}$	$\mathbf{\Gamma_3^{\&}}$	$\mathbf{\Delta_3^{\vee}}$	$(\ \mathbf{\Gamma_1^{\&}} \rightarrow \mathbf{\Delta_1^{\vee}}\ ) \ \&\ (\ \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \rightarrow \mathbf{\Delta_2^{\vee}}\ ) \rightarrow (\ \mathbf{\Gamma_3^{\&}} \rightarrow \mathbf{\Delta_3^{\vee}}\ )$
0	-	-	-	1
-	0	-	-	1
-	-	0	-	1
1	1	1	1??	1???
1	1	1	0??	0???

Come DIMOSTRARE che una regola a due premessa è VALIDA!!

Per mostrare che una regola di inferenza di sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\mathbf{\Gamma_1}\vdash\mathbf{\Delta_1} \qquad \mathbf{\Gamma_2}\vdash\mathbf{\Delta_2}}{\mathbf{\Gamma_3}\vdash\mathbf{\Delta_3}} \qquad \text{è } \textbf{valida}$$

BASTA dimostrare la *condizione scorciatoia2*
ovvero che
su una qualsiasi riga r

$$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \;\rightarrow\; \mathbf{\Delta_1^{\vee}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \;\rightarrow\; \mathbf{\Delta_2^{\vee}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma_3^{\&}} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Delta_3^{\vee}} = \mathbf{1}$$

se INVECE non si riesce, allora SOLO SE si dimostra la *condizione scorciatoia2bis*
ovvero
si trova una riga in cui

$$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \;\rightarrow\; \mathbf{\Delta_1^{\vee}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \;\rightarrow\; \mathbf{\Delta_2^{\vee}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma_3^{\&}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Delta_3^{\vee}} = \mathbf{0}$$

anche solo per **particolari liste di proposizioni messe al posto di**
$\mathbf{\Gamma_1}$, $\mathbf{\Gamma_2}$, $\mathbf{\Gamma_3}$ e $\mathbf{\Delta_1}$, $\mathbf{\Delta_2}$, $\mathbf{\Delta_3}$

la regola **NON è valida**

12. Regole sicure

Diamo di seguito il concetto generale di regola **inversa** e **sicura**:

Regola inversa di regola con una premessa. La regola inversa di una regola del tipo

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \Delta'} *$$

è la seguente

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta} * - inv$$

Regola inversa di regola con due premesse. Le regole inverse di una regola del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma' \vdash \Delta'} *$$

sono le DUE seguenti

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1} * - inv1 \qquad\qquad \frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} * - inv2$$

Una regola si dice **SICURA**
se **sia la regola che le sue inverse** sono regole **valide**.

Le regole sicure rappresentano equivalenze tra sequenti premessa e sequente conclusione!!

Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \qquad \text{è } \textbf{sicura}$$

sse

$$(\ \Gamma_1^{\&} \ \rightarrow \ \Delta_1^{\vee}\ ) \quad \leftrightarrow \quad (\ \Gamma_2^{\&} \ \rightarrow \ \Delta_2^{\vee}\ ) \text{ è una tautologia.}$$

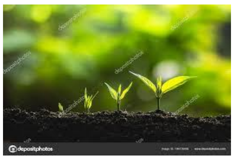
Una regola del calcolo dei sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \qquad \text{è } \textbf{sicura}$$

sse

$$(\ \boldsymbol{\Gamma_1^{\&}} \ \rightarrow \ \boldsymbol{\Delta_1^{\vee}}\ )\ \&\ \ (\ \boldsymbol{\Gamma_2^{\&}} \ \rightarrow \ \boldsymbol{\Delta_2^{\vee}}\ ) \quad \leftrightarrow \quad (\ \boldsymbol{\Gamma_3^{\&}} \ \rightarrow \ \boldsymbol{\Delta_3^{\vee}}\ ) \text{ è una tautologia.}$$

Esercizi su formalizzazione in regole e loro validità/sicurezza




1. Formalizzare in regola le seguenti scritture

$$\frac{\textbf{Ad Alice piacciono gli spinaci.} \vdash \textbf{Alice mangia gli spinaci.}}{\textbf{Alice non mangia gli spinaci.} \vdash \textbf{Ad Alice non piacciono gli spinaci.}}$$

utilizzando:
S= **Alice mangia gli spinaci**
P=**Ad Alice piacciono gli spinaci**

   (a) scrivere la proposizione corrispondente alla validità della regola;
   (b) stabilire se la regola ottenuta è una regola sicura.

2. Stabilire se la formalizzazione in regola della seguente

$$\frac{\textbf{Piove.} \vdash \textbf{Alice prende l'ombrello.} \qquad \textbf{Alice prende l'ombrello} \vdash \textbf{Alice non si bagna.}}{\textbf{Piove.} \vdash \textbf{Alice non si bagna.}}$$

utilizzando:
P=**Piove**
O=**Alice prende l'ombrello**
B=**Alice si bagna**

è una regola sicura.

3. Stabilire se la formalizzazione in regola della seguente

$$\frac{\textbf{È mezzogiorno.} \vdash \textbf{Alice ha fame.} \qquad \textbf{É mezzogiorno. Alice mangia gli spinaci.} \vdash \textbf{Alice è contenta.}}{\textbf{È mezzogiorno. Se ad Alice ha fame allora Alice mangia gli spinaci.} \vdash \textbf{Alice è contenta.}}$$

utilizzando:
M=**È mezzogiorno**
S=**Alice mangia gli spinaci**
F=**Alice ha fame**
C=**Alice è contenta**

è una regola sicura.

4. La regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A} \quad \mathbf{\Gamma}, \mathbf{B} \vdash}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vdash} \to -\mathrm{S}*$$

   è sicura?

   Darne una dimostrazione.

5. La regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta} \quad \mathbf{\Gamma}, \mathbf{B} \vdash}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash} \vee-\mathrm{S}*$$

   è valida assieme alle sue inverse

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash} \vee-\mathrm{S}-inv_1 \qquad \frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{B} \vdash} \vee-\mathrm{S}-inv_2$$

   ?

6. La regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}} \&-\mathrm{D}_1$$

   è sicura?

7. La regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}} \vee-\mathrm{D}_1$$

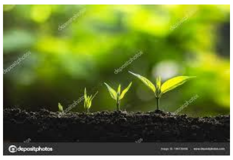
   è sicura?

8. La regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}} \to-\mathrm{D}*$$

   è sicura?

9. Quali regole del calcolo $\mathbf{LC}_p$ sono sicure?

10. Stabilire se le seguenti regole sono sicure esaminando le inverse in ogni caso:

   (a)

$$\frac{\mathbf{C} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{\Delta} \quad \mathbf{C}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{M}}{\mathbf{C}, \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vdash \mathbf{M}} \; 0$$

   (b)

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}} \; 1$$

(c)

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}} \; 2$$

(d)

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}} \; 3$$

(e)

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \neg \mathbf{A} \vdash} \; 4$$

(f)

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \neg \mathbf{A}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{C}} \; 5$$

(g)

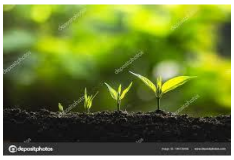
$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \neg \mathbf{A}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \neg \mathbf{A} \vdash} \; 6$$

(h)

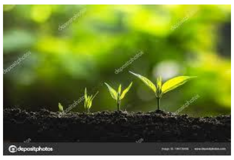
$$\frac{\mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}}{\vdash \neg \mathbf{A}, \mathbf{\Delta}} \; 7$$

(i)

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, \mathbf{D}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} \; 8$$



Attenzione a queste regole!

Si mostri se le seguenti regole sono valide e sicure:

1.

$$\frac{\vdash \mathbf{A}\ \&\ \neg\mathbf{A}}{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}}\ par1$$

2.

$$\frac{\vdash \mathbf{A}\ \&\ \neg\mathbf{A} \qquad \mathbf{\Gamma_1}\vdash\mathbf{\Delta_1}}{\mathbf{\Gamma_2}\vdash\mathbf{\Delta_2}}\ par2$$

3.

$$\frac{\mathbf{\Gamma_1}\vdash\mathbf{\Delta_1} \qquad \vdash \mathbf{A}\ \&\ \neg\mathbf{A}}{\mathbf{\Gamma_2}\vdash\mathbf{\Delta_2}}\ par2*$$

4.

$$\frac{\mathbf{\Gamma_1}\vdash\mathbf{\Delta_1}}{\mathbf{\Gamma_2},\ \mathbf{A}\ \&\ \neg\mathbf{A}\vdash\mathbf{\Delta_2}}\ par3$$