18. Teoria predicativa ed esempi

Def. Con il termine **teoria predicativa** si intende un'*estensione* del calcolo della logica classica con uguaglianza $LC_=$ con degli **assiomi extralogici** e le **regole di composizione**

$$\frac{\vdash \mathtt{fr} \qquad \Gamma, \mathtt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

ove $\mathtt{fr}$ è una proposizione (o più genericamente "formula") di un linguaggio predicativo.

TEORIA predicativa = LOGICA predicativa + regola composizione + assiomi EXTRALOGICI

Nel seguito identificheremo una teoria designando i SOLI assiomi extralogici.

Esempi di Teorie generiche con esercizi

1. Sia T_{vec} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

   - Pippo è più vecchio di Ada.
   - Nessuno è più vecchio di Gigi.
   - Chi è più vecchio di Pippo è piú vecchio di Gigi.
   - Ada è più vecchia di Chiara.
   - Non si dà il caso che Chiara non sia più vecchia di Titti.
   - Se uno è più vecchio di un altro e quest'altro è più vecchio di un terzo, il primo è più vecchio del terzo.
   - Chiara non è Titti.

   suggerimento: si consiglia di usare:
   A(x,y)= x è più vecchio di y
   g=Gigi, p= Pippo, a= Ada, c= Chiara, t=Titti
   uno=x, altro =y, terzo=z

   Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

   Derivare

   - Qualcuno è più vecchio di Ada.
   - Nessuno è più vecchio di Pippo.
   - Pippo è più vecchio di Chiara.
   - Qualcuno è piú vecchio di Titti.
   - Ada è più vecchia di qualcuno che non è Chiara.

2. Sia T^{cla}_{am} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

   (a) Se Claudia ammira qualcuno questo qualcuno ammira Claudia.

   (b) Pippo ammira tutti quelli che Gianni non ammira.

   (c) Non c'è nessuno che Pippo ammiri.

   (d) Claudia ammira Fabio.

   suggerimento: si consiglia di usare:
   A(x,y)= x ammira y
   g=Gianni, p= Pippo, f= Fabio, c= Claudia

   Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria T^{cla}_{am}:

   (e) Fabio ammira Claudia.

   (f) Pippo non ammira Claudia.

   (g) Gianni ammira tutti.

   (h) Claudia ammirebbe Pippo se Pippo ammirasse Claudia.

   (i) Gianni ammira Claudia.

16. bis Teoria dell'aritmetica di Peano (parte facoltativa)

L'aritmetica di Peano in breve **PA** è una teoria ottenuta aggiungendo a $LC_=$ le regole di composizione

$$\frac{\vdash \mathtt{fr} \qquad\qquad \Gamma, \mathtt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

ove $\mathtt{fr}$ è una formula del linguaggio predicativo con i simboli specifici di **PA** (vedi alla voce "ATTENZIONE").

Ax1. $\vdash \forall \mathbf{x}\ \mathbf{s(x)} \neq \mathbf{0}$

Ax2. $\vdash \forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{s(x)} = \mathbf{s(y)} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}\ )$

Ax3. $\vdash \forall \mathbf{x}\ \ \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$

Ax4. $\vdash \forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \mathbf{x} + \mathbf{s(y)} = \mathbf{s(x+y)}$

Ax5. $\vdash \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Ax6. $\vdash \forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{s(y)} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}$

Ax7. $\vdash\ \mathbf{A(0)}\ \&\ \forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{A(x)} \rightarrow \mathbf{A(s(x))}\ )\ \rightarrow\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)}$

ATTENZIONE nuovi tipi di simboli!: nel linguaggio dell'aritmetica di Peano oltre alla costante zero 0 vi sono 3 simboli di funzione:

$$\mathbf{s(x)} \qquad\qquad \mathbf{x{+}y} \qquad\qquad \mathbf{x{\cdot}y}$$

quello del successore di **x**, quello della somma e quello del prodotto.

C'è un *modello inteso* per questo linguaggio dell'aritmetica ed è quello con dominio

$$\mathbf{D} \equiv \text{ numeri naturali}$$

ove la funzione successore è la funzione che assegna ad un numero naturale proprio il suo successore:

$$\mathsf{s}(\mathbf{x})^{\mathbf{Nat}}(-) : \mathbf{Nat} \longrightarrow \mathbf{Nat} \qquad\qquad \mathsf{s}(\mathbf{x})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{n}) \equiv \mathbf{n} + \mathbf{1}$$

il simbolo di somma **x+y** interpretato nel modello dei naturali come la somma di due numeri naturali:

$$(\mathbf{x{+}y})^{\mathbf{Nat}}(-,-) : \mathbf{Nat} \times \mathbf{Nat} \longrightarrow \mathbf{Nat} \qquad\qquad (\mathbf{x{+}y})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \equiv \mathbf{n} + \mathbf{m}$$

e il simbolo di moltiplicazione **x·y** interpretato come la moltiplicazione di due numeri naturali:

$$(\mathbf{x{\cdot}y})^{\mathbf{Nat}}(-,-) : \mathbf{Nat} \times \mathbf{Nat} \longrightarrow \mathbf{Nat} \qquad\qquad (\mathbf{x{\cdot}y})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}$$

Nella teoria dell'aritmetica di Peano il numerale n si rappresenta in tal modo
$\mathbf{n} \equiv \underbrace{\mathbf{s}(\mathbf{s} \ldots (\mathbf{0}))}_{\text{n-volte}}$

e quindi per esempio

$\mathbf{1} \equiv \mathbf{s}(\mathbf{0})$

$\mathbf{2} \equiv \mathbf{s}(\,\mathbf{s}(\mathbf{0})\,)$

Esercizi

Mostrare che nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi:

1. $1 + 0 = 1$
2. $0 + 1 = 1$
3. $5 + 1 = 6$
4. $\vdash \forall x \ (\, s(x) = s(5) \to x = 5\,)$
5. $\vdash 0 = 4 \cdot 0$
6. $\vdash \forall x \ (\, x = 7 \to s(x) = s(7)\,)$
7. $\vdash 1 + 2 = 3$
8. $\vdash 5 \cdot 1 = 5$
9. $\vdash \exists x \ \exists y \ x \neq y$
   Questa formula è valida in $\mathrm{LC}_=$??
10. $\vdash \forall x \ 0 \neq s(x)$

Memo: come cercare verità in una teoria

Usare assiomi specifici della teoria di Peano
per provare formule *non valide e soddisfacibili*
di $\mathrm{LC}_=$
ovvero NON usare assiomi extra per provare paradossi e verità logiche

Per velocizzare derivazioni: regole pericolose!

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}\ \mathrm{in}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{"}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{"}}\ \mathrm{in}_{\mathrm{dx}}$$

"per ogni a sx VELOCE"

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma}, \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla}\ \forall\!-\!\mathrm{S}\mathbf{v}$$

"esiste a dx VELOCE"

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t}), \nabla}{\mathbf{\Gamma} \vdash \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla}\ \exists\!-\!\mathrm{D}\mathbf{v}$$

Altre regole utili per abbreviare derivazioni

$$\overset{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C}$$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\!-\!\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\!-\!\mathrm{D}$$

$$\overset{\mathrm{rf}^*}{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'} \qquad \overset{\mathrm{sm}^*}{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta}$$

$$\overset{\mathrm{tra}^*}{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta} \qquad \overset{\mathrm{cp}^*}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

$$\overset{\mathrm{cf}^*}{\Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u)} \qquad \overset{\mathrm{cp}^*}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u)}$$