Correzione del primo appello di logica del 19/12/21

Andrea Rezzi

February 9, 2022

1 Esercizio 1

Mostrare se i sequenti elencati sono tautologie, opinioni o paradossi in logica classica con ugualianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello.

1.1 $B \vee C \vdash \neg(C \to C)\&B$

$$\dfrac{B \vee C \vdash \neg(C \to C) \qquad \dfrac{\dfrac{ax\text{-}id}{B \vdash B} \qquad C \vdash B}{B \vee C \vdash B}\ \vee - S}{B \vee C \vdash \neg(C \to C)\&B}\ \& - D$$

Ci accorgiamo che la foglia $C \vdash B$ rende falso il sequente per $C = 1$ e $B = 0$. Procediamo derivandone la negazione.

$$\dfrac{\dfrac{\neg(C \to C)\&B \vdash \qquad \dfrac{\vdash B, C}{\vdash B \vee C}\ \vee - D}{B \vee C \to \neg(C \to C)\&B \vdash}\ \to -S}{\vdash \neg(B \vee C \to \neg(C \to C)\&B)}\ \neg - D$$

La foglia $\vdash B, C$ rende falsa la negazione del sequente, e quindi vero il sequente di partenza, per $B = 0$, $C = 0$, quindi il sequente di partenza è un'opinione.

1.2 $\exists y\, y \neq b\&\forall x\, x = a$

$$\dfrac{\vdash \exists y\, y \neq b \qquad \dfrac{\vdash x = a}{\vdash \forall x\, x = a}\ \forall - D(x \notin VL)}{\vdash \exists y\, y \neq b\&\forall x\, x = a}\ \& - D$$

Il sequente è falso per $x \neq a$. Deriviamo la negazione del sequente.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax\text{-}id}{b = a, y = b \vdash y = b}}{y = a, b = a \vdash y = b}\ = -S}{y = a, \forall x\, x = a \vdash y = b}\ \forall - Sv}{\forall x\, x = a, y = a \vdash y = b}\ sc_{sx}}{\forall x\, x = a \vdash y = b}\ \forall - S}{\forall x\, x = a, y \neq b \vdash}\ \neg - S}{\forall x\, x = a, \exists y\, y \neq b \vdash}\ \exists - S(y \notin VL)}{\exists y\, y \neq b, \forall x\, x = a \vdash}\ sc_{sx}}{\exists y\, y \neq b\&\forall x\, x = a \vdash}\ \& - S}{\vdash \neg(\exists y\, y \neq b\&\forall x\, x = a)}\ \neg - D$$

La negazione del sequente di partenza è derivabile, quindi quest'ultimo è paradosso.

1.3 $\neg\exists z B(z), \forall z\, C(z) \vdash \forall y\, \neg B(y)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg ax_{dx1}}{\forall z\, C(z) \vdash B(y), \neg B(y)}}{\forall z\, C(z) \vdash \exists z\, B(z), \neg B(y)}\ \exists - D_v}{\forall z\, C(z) \vdash \neg B(y), \exists z\, B(z)}\ sc_{dx}}{\forall z\, C(z) \vdash \forall y\, \neg B(y), \exists z\, B(z)}\ \xleftarrow{\forall - D(y \notin VL)}}{\forall z\, C(z) \vdash \exists z B(z), \forall y\, \neg B(y)}\ sc_{dx}}{\forall z\, C(z), \neg\exists z B(z) \vdash \forall y\, \neg B(y)}\ \neg - S}{\neg\exists z B(z), \forall z\, C(z) \vdash \forall y\, \neg B(y)}\ sc_{sx}$$

Dato che il sequente è derivabile, è una tautologia.

2 Esercizio 2

Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi nella logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello.

2.1

Traduzione:

$$\forall x(\neg C(x) \rightarrow \neg T(x)), \forall x(\neg T(x) \rightarrow C(x)) \vdash \forall x\, C(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\neg C(x) \rightarrow \neg T(x), C(x) \vdash C(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg - ax_{sx1}}{T(x), \neg T(x) \vdash C(x)} \qquad \overset{\neg - ax_{dx2}}{T(x) \vdash \neg C(x), C(x)}}{T(x), \neg C(x) \rightarrow \neg T(x) \vdash C(x)}\ \rightarrow -D}{\neg C(x) \rightarrow \neg T(x), T(x) \vdash C(x)}\ sc_{sx}}{\neg C(x) \rightarrow \neg T(x) \vdash \neg T(x), C(x)}\ \neg - D}{\neg C(x) \rightarrow \neg T(x), \neg T(x) \rightarrow C(x) \vdash C(x)}\ \rightarrow -D}{\neg T(x) \rightarrow C(x), \neg C(x) \rightarrow \neg T(x) \vdash C(x)}\ sc_{sx}}{\neg T(x) \rightarrow C(x), \forall x(\neg C(x) \rightarrow \neg T(x)) \vdash C(x)}\ \forall - Sv}{\forall x(\neg C(x) \rightarrow \neg T(x)), \neg T(x) \rightarrow C(x) \vdash C(x)}\ sc_{sx}}{\forall x(\neg C(x) \rightarrow \neg T(x)), \forall x(\neg T(x) \rightarrow C(x)) \vdash C(x)}\ \forall - Sv}{\forall x(\neg C(x) \rightarrow \neg T(x)), \forall x(\neg T(x) \rightarrow C(x)) \vdash \forall x\, C(x)}\ \xleftarrow{\forall - D(x \notin VL)}$$

Il sequente è derivabile, quindi il sequente radice è tautologia.

2.2

Traduzione:

$$\forall x\, C(x) \vdash \exists x\, C(x) \& \forall x\, T(x)$$

$$\dfrac{\forall x\, C(x) \vdash \exists x\, C(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{loop}{\forall x\, C(x), C(x) \vdash T(x)}}{\forall x\, C(x) \vdash T(x)}\ \forall - S}{\forall x\, C(x) \vdash \forall x\, T(x)}\ \xleftarrow{\forall - D(x \notin VL)}}{\forall x\, C(x) \vdash \exists x\, C(x) \& \forall x\, T(x)}\ \& - D$$

Troviamo un contromodello del sequente radice usando la foglia che va in loop.
$D = \{Minni\}$
$C(x)^D(d) = 1$ per ogni $d \in D$
$T(x)^D(d) = 0$ per ogni $d \in D$
Il sequente radice non vale in tale modello perché:
$(\forall x C(x))^D = 1$
$(\forall x T(x))^D = 0$
Quindi per ogni d,
$\forall x\, C(x) \rightarrow \exists x\, C(x) \& \forall x\, T(x) = 1 \rightarrow 1 \& 0 = 0.$
Proviamo ora a derivare la negazione del sequente.

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\, C(x)\&\forall x\, T(x)\vdash \qquad \dfrac{\vdash C(x)}{\vdash \forall x\, C(x)}\;\xleftarrow{\forall-D(x\notin VL)}}{\forall x\, C(x)\to \exists x\, C(x)\&\forall x\, T(x)\vdash}\;\to-D}{\vdash \neg(\forall x\, C(x)\to \exists x\, C(x)\&\forall x\, T(x))}\;\neg-D$$

Cerchiamo di falsificare la foglia a destra che costruendo un contromodello del sequente radice come segue:
$D=\{Minni\}$
$C(x)^D(d)=0$ per ogni $d\in D$
$T(x)^D(d)=$ a piacere
Il sequente radice non vale in questo modello perché: $(\forall x C(x)=0)^D=0$
$\neg(\forall x C(x)\to\exists C(x)\&\forall x T(x))^D=\neg(0\to ?)=\neg(1)=0$
Quindi questo contromodello è un modello del sequente di partenza che avendo un modello e un contromodello risulta essere un'opinione.

2.3

Traduzione:

$$A(l,a)\&A(l,g),g\neq a,\neg\exists x A(x,x)\vdash l\neq a\&\neg\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\to y=x))$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{A(l,a),A(l,g),l=a\vdash A(l,a),g=a}}{A(l,a),A(l,g),l=a\vdash A(l,l),g=a}\;=-S}{A(l,a),A(l,g),l=a\vdash \exists x A(x,x),g=a}\;\exists-D_v}{A(l,a),A(l,g),l=a\vdash g=a,\exists x A(x,x)}\;sc_{dx}}{A(l,a),A(l,g)\vdash l\neq a,g=a,\exists x A(x,x)}\;\neg-S \qquad \dfrac{\text{Continua sotto}}{A(l,a),A(l,g)\vdash \neg\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\to y=x)),g=a,\exists x A(x,x)}}{A(l,a),A(l,g)\vdash l\neq a\&\neg\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\to y=x)),g=a,\exists x A(x,x)}\;\&-D}{A(l,a),A(l,g)\vdash g=a,\exists x A(x,x),l\neq a\&\neg\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\to y=x))}\;sc_{dx}}{A(l,a)\&A(l,g)\vdash g=a,\exists x A(x,x),l\neq a\&\neg\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\to y=x))}\;\&-S}{A(l,a)\&A(l,g),g\neq a\vdash \exists x A(x,x),l\neq a\&\neg\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\to y=x))}\;\neg-S}{A(l,a)\&A(l,g),g\neq a,\neg\exists x A(x,x)\vdash l\neq a\&\neg\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\to y=x))}\;\neg-S$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(l,a),A(l,g),A(x,l),\forall y(A(y,l)\to y=x),l=x\vdash g=a,\exists x A(x,x) \qquad A(l,a),A(l,g),A(x,l),\forall y(A(y,l)\overset{loop}{\to} y=x),\vdash A(l,l),g=a,\exists x A(x,x)}{A(l,a),A(l,g),A(x,l),\forall y(A(y,l)\to y=x),A(l,l)\to l=x\vdash g=a,\exists x A(x,x)}\;\to-S}{A(l,a),A(l,g),A(x,l),\forall y(A(y,l)\to y=x)\vdash g=a,\exists x A(x,x)}\;\forall-S}{A(l,a),A(l,g),A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\to y=x)\vdash g=a,\exists x A(x,x)}\;\&-S}{A(l,a),A(l,g),\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\to y=x))\vdash g=a,\exists x A(x,x)}\;\xleftarrow{\exists-S(x\notin VL)}}{A(l,a),A(l,g)\vdash \neg\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\to y=x)),g=a,\exists x A(x,x)}\;\neg-S$$

Troviamo un contromodello del sequente radice usando la foglia che va in loop.
$D=\{Minni,Lea,Alice,Giulia\}$
$(A(x,y))^D(Lea,Alice)=1$
$(A(x,y))^D(Lea,Giulia)=1$
$(A(x,y))^D(Minni,Lea)=1$
$(A(x,y))^D(d,d)=0\ \forall d\in D$
$(A(x,y))^D(d,Lea)=0\ \forall d\neq Minni\in D$
$(A(x,y))^D(d_1,d_2)=0$ in tutti gli altri casi
Questo è un contromodello del sequente radice perché:
$(\neg\exists x A(x,x))^D=1$
$(\neg\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\to y=x)))=0$
Quindi il sequente radice diventa
$((A(l,a)\&A(l,g))\&g\neq a)\&(\neg\exists x A(x,x))\to l\neq a\&\neg\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\to y=x))=(1\&1)\&1\to ?\&0=1\to 0=0$
Ora deriviamo la negazione

$$
\dfrac{
l \neq a \& \neg\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\rightarrow y=x)) \vdash
\qquad
\dfrac{
\vdash (A(l,a)\&A(l,g))\&g\neq a
\qquad
\dfrac{
\dfrac{A(x,x)\vdash}{\exists x A(x,x)\vdash}\ \exists\!-\!S(x\notin VL)
}{\vdash \neg\exists x A(x,x)}\ \neg-D
}{\vdash ((A(l,a)\&A(l,g))\&g\neq a)\&(\neg\exists x A(x,x))}\ \&-D
}{
\dfrac{((A(l,a)\&A(l,g))\&g\neq a)\&(\neg\exists x A(x,x)) \rightarrow l\neq a\&\neg\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\rightarrow y=x))\vdash}{\vdash \neg(((A(l,a)\&A(l,g))\&g\neq a)\&(\neg\exists x A(x,x)) \rightarrow l\neq a\&\neg\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\rightarrow y=x)))}\ \neg-D
}\ \rightarrow -S
$$

Troviamo un contromodello del sequente negato usando la foglia non derivabile.
$D = \{Minni\}$
$(A(Minni, Minni))^D = 1$
Questo è un contromodello del sequente negato, e quindi un modello del sequente di partenza perché:

$\neg(((A(l,a)\&A(l,g))\&g\neq a)\&(\neg\exists x A(x,x)) \rightarrow l\neq a\&\neg\exists x(A(x,l)\&\forall y(A(y,l)\rightarrow y=x))) = \neg(((?\&?)\&?)\&0) \rightarrow ? = 0 \rightarrow ? = 1$

Dato che il sequente di partenza ha un modello e un contromodello, è un opinione.

2.4

La traduzione è:

$$\vdash \neg\exists x(A(x,x)\rightarrow \forall y(A(y,y)\vee\exists z(A(y,z)\&z\neq y)))$$

Ci accorgiamo che, a meno della negazione, il sequente è una tautologia vista a lezione, quindi per velocizzare possiamo derivare direttamente la negazione.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\overset{ax-id}{A(x,x), A(y,y)\vdash \forall y(A(y,y)\vee\exists z(A(y,z)\&z\neq y))), A(y,y)}}{A(x,x)\vdash A(y,y)\rightarrow\forall y(A(y,y)\vee\exists z(A(y,z)\&z\neq y))), A(y,y)}\ \rightarrow -D
}{A(x,x)\vdash \exists x(A(x,x)\rightarrow\forall y(A(y,y)\vee\exists z(A(y,z)\&z\neq y))), A(y,y)}\ \exists-Dv
}{A(x,x)\vdash A(y,y), \exists x(A(x,x)\rightarrow\forall y(A(y,y)\vee\exists z(A(y,z)\&z\neq y)))}\ sc_{dx}
}{A(x,x)\vdash A(y,y), \exists z(A(y,z)\&z\neq y), \exists x(A(x,x)\rightarrow\forall y(A(y,y)\vee\exists z(A(y,z)\&z\neq y)))}\ in_{dx}
}{A(x,x)\vdash A(y,y)\vee\exists z(A(y,z)\&z\neq y), \exists x(A(x,x)\rightarrow\forall y(A(y,y)\vee\exists z(A(y,z)\&z\neq y)))}\ \vee-D
}{A(x,x)\vdash \forall y(A(y,y)\vee\exists z(A(y,z)\&z\neq y)), \exists x(A(x,x)\rightarrow\forall y(A(y,y)\vee\exists z(A(y,z)\&z\neq y)))}\ \forall\!-\!D(y\notin VL)
}{\vdash A(x,x)\rightarrow\forall y(A(y,y)\vee\exists z(A(y,z)\&z\neq y)), \exists x(A(x,x)\rightarrow\forall y(A(y,y)\vee\exists z(A(y,z)\&z\neq y)))}\ \rightarrow -D
}{\vdash \exists x(A(x,x)\rightarrow\forall y(A(y,y)\vee\exists z(A(y,z)\&z\neq y)))}\ \exists-D
}{\vdash \neg\neg\exists x(A(x,x)\rightarrow\forall y(A(y,y)\vee\exists z(A(y,z)\&z\neq y)))}\ \neg\neg-D
}{}
$$

Dato che la negazione è derivabile, il sequente di partenza è paradosso.

3 Esercizio 3

3.1 Traduzione assiomi

Ax1 $\neg\forall x\, G(x)$

Ax2 $G(l)\rightarrow G(f)$

Ax3 $\neg G(f)\rightarrow\neg G(m)$

Ax4 $\neg G(m)\rightarrow G(p)\&G(l)$

Ax5 $\neg G(m)\rightarrow\neg G(p)\&\neg G(f)$

Ax6 $G(m)\leftrightarrow G(l)\vee\neg G(f)$

3.2 Traduzione affermazioni

T_1 $G(m)$

T_2 $G(f)$

T_3 $G(l)$

T_4 $\neg G(l)\rightarrow G(p)$

T_5 $\neg\exists x\, G(x)\vee\exists x\, G(x)$

3.3 Dimostrazione T_1

$$
\dfrac{\vdash Ax5 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg-ax_{sx1}}{G(p), G(l), \neg G(p), \neg G(f) \vdash G(m)}}{G(p), G(l), \neg G(p) \& \neg G(f) \vdash G(m)}\ \& - S \qquad \overset{\neg-ax_{sx1}}{G(p), G(l) \vdash \neg G(m), G(m)}}{G(p), G(l), \neg G(m) \to \neg G(p) \& \neg G(f) \vdash G(m)}\ \to -S}{G(p), G(l) \vdash G(m)}\ comp}{}
$$

$$
\dfrac{\vdash Ax4 \qquad \dfrac{\dfrac{G(p), G(l) \vdash G(m)}{G(p) \& G(l) \vdash G(m)}\ \& - S \qquad \overset{\neg-ax_{dx2}}{\vdash \neg G(m), G(m)}}{\neg G(m) \to G(p) \& G(l) \vdash G(m)}\ \to -S}{\vdash G(m)}\ comp
$$

3.4 Dimostrazione T_2

$$
\dfrac{\vdash Ax3 \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash T_1 \qquad \overset{\neg-ax_{sx2}}{\neg G(m), G(m) \vdash G(f)}}{\neg G(m) \vdash G(f)}\ comp \qquad \overset{\neg-ax_{dx2}}{\vdash \neg G(f), G(f)}}{\neg G(f) \to \neg G(m) \vdash G(f)}\ \to -S}{\vdash G(f)}\ comp
$$

3.5 Dimostrazione T_3

$$
\dfrac{\vdash Ax6 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{G(l) \vdash G(l)} \qquad \dfrac{\vdash T_2 \qquad \overset{\neg-ax_{sx2}}{\neg G(f), G(f) \vdash G(l)}}{\neg G(f) \vdash G(l)}\ comp}{G(l) \vee \neg G(f) \vdash G(l)}\ \vee - S \qquad \dfrac{\vdash T_1 \qquad \overset{ax-id}{G(m) \vdash G(m), G(l)}}{\vdash G(m), G(l)}\ comp}{G(m) \to G(l) \vee \neg G(f) \vdash G(l)}\ \to -S}{G(m) \to G(l) \vee \neg G(f), G(l) \vee \neg G(f) \to G(m) \vdash G(l)}\ in_{sx}}{(G(m) \to G(l) \vee \neg G(f)) \& (G(l) \vee \neg G(f) \to G(m)) \vdash G(l)}\ \& - S}{\vdash G(l)}\ comp
$$

3.6 Dimostrazione T_4

$$
\dfrac{\dfrac{\vdash T_3 \qquad \overset{\neg-ax_{sx2}}{\neg G(l), G(l) \vdash G(p)}}{\neg G(l) \vdash G(p)}\ comp}{\vdash \neg G(l) \to G(p)}\ \to -D
$$

3.7 Dimostrazione T_5

$$
\dfrac{\overset{\neg-ax_{dx2}}{\vdash \neg \exists x G(x), \exists x G(x)}}{\vdash \neg \exists x G(x) \vee \exists x G(x)}\ \vee - D
$$

4 Esercizio 4

4.1 Traduzione assiomi

Ax1 $\forall x (\forall y (C(x, y) \to C(y, x)))$

Ax2 $C(e, m) \& \forall x (C(e, x) \to x = m)$

Ax3 $m \neq r$

Ax4 $\forall x\, C(x, r)$

Ax5 $\neg \exists x\, C(x, c)$

Ax6 $\neg \exists x\, \neg \exists y\, C(x, y)$

4.2 Traduzione teorie

T_1 $C(e, r)$

T_2 $\neg C(e, c)$

T_3 $C(m, e)$

T_4 $\forall x\, C(r, x)$

T_5 $\neg \exists x\, C(c, x)$

4.3 Derivazione del falso

Ci accorgiamo che gli assiomi $Ax1$, $Ax4$, $Ax5$ sono contraddittori, quindi procediamo alla derivazione del falso.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash Ax4$}
\AxiomC{$\vdash Ax5$}
\AxiomC{$\vdash Ax1$}
\AxiomC{$\overset{ax-id}{C(c,r), C(r,c) \vdash C(r,c), \perp}$}
\AxiomC{$\overset{ax-id}{C(c,r) \vdash C(c,r), C(r,c), \perp}$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$C(c,r), C(c,r) \to C(r,c) \vdash C(r,c), \perp$}
\RightLabel{$\forall - S_v$}
\UnaryInfC{$C(c,r), \forall y(C(c,y) \to C(y,c)) \vdash C(r,c), \perp$}
\RightLabel{$\forall - S_v$}
\UnaryInfC{$C(c,r), \forall x(\forall y(C(x,y) \to C(y,x))) \vdash C(r,c), \perp$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$C(c,r) \vdash C(r,c), \perp$}
\RightLabel{$\exists - D_v$}
\UnaryInfC{$C(c,r) \vdash \exists x\, C(x,c), \perp$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$C(c,r), \neg\exists x\, C(x,c) \vdash \perp$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$C(c,r) \vdash \perp$}
\RightLabel{$\forall - Sv$}
\UnaryInfC{$\forall x\, C(x,r) \vdash \perp$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash \perp$}
\end{prooftree}
$$

4.4 Derivazione degli altri teoremi

Ora possiamo dimostrare che tutti i teoremi in T_{fot} sono tautologie derivandoli come segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \perp$}
\AxiomC{$\overset{ax-\perp}{\perp \vdash T_i}$}
\RightLabel{$comp$}
\BinaryInfC{$\vdash T_i$}
\end{prooftree}
$$

per i = 1..5

5 Esercizio 5

5.1 Traduzioni

$$Ip : \neg(S \to \forall x E(x))$$

$$A : S \to \exists x \neg E(x)$$

$$B : \neg\exists x E(x) \to \neg S$$

$$C : S \vee \exists x \neg E(x)$$

5.2 Derivazione A

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overset{\neg - ax_{sx-2}}{S, S \vdash \neg E(x), E(x)}$}
\RightLabel{$\exists - D_v$}
\UnaryInfC{$S, S \vdash \exists x \neg E(x), E(x)$}
\RightLabel{sc_{dx}}
\UnaryInfC{$S, S \vdash E(x), \exists x \neg E(x)$}
\RightLabel{$\xleftarrow{\forall - D (x \notin VL)}$}
\UnaryInfC{$S, S \vdash \forall x E(x), \exists x \neg E(x)$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$S \vdash S \to \forall x E(x), \exists x \neg E(x)$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$S, \neg(S \to \forall x E(x)) \vdash \exists x \neg E(x)$}
\RightLabel{sc_{sx}}
\UnaryInfC{$\neg(S \to \forall x E(x)), S \vdash \exists x \neg E(x)$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$\neg(S \to \forall x E(x)) \vdash S \to \exists x, \neg E(x)$}
\end{prooftree}
$$

Dato che il sequente è derivabile, A è un tautologia nella teoria predicativa T_{Ip}.

5.3 Derivazione B

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{loop}{S \vdash E(x), \exists x E(x), \neg S}}{S \vdash \forall x E(x), \exists x E(x), \neg S}\ \forall-D (x \notin VL)}{\vdash S \to \forall x E(x), \exists x E(x), \neg S}\ \to -D}{\neg(S \to \forall x E(x)) \vdash \exists x E(x), \neg S}\ \neg - S}{\neg(S \to \forall x E(x)), \neg\exists x E(x) \vdash \neg S}\ \neg - S}{\neg(S \to \forall x E(x)) \vdash \neg\exists x E(x) \to \neg S}\ \to -D}{}$$

Troviamo un contromodello del sequente radice con la foglia che va in loop in questo modo:
$D = \{Minni\}$
$E(x)^D(d) = 0$ per ogni $d \in D$.
$S^D = 1$
Il sequente radice non è valido in tale modello perché:
$(\forall x E(x))^D = 0$
$(\exists x E(x))^D = 0$
Quindi, per ogni d,
$\neg(S \to \forall x E(x)) \to (\neg\exists x E(x) \to \neg S) = \neg(1 \to 0) \to (1 \to 0) = 1 \to 0 = 0$. L'affermazione B, dunque, non è deducibile dalla ipotesi.

5.4 Derivazione C

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{ax-id}{S \vdash \forall x E(x), S, \exists x \neg E(x)}}{\vdash S \to \forall x E(x), S, \exists x \neg E(x)}\ \to -D}{\neg(S \to \forall x E(x)) \vdash S, \exists x \neg E(x)}\ \neg - S}{\neg(S \to \forall x E(x)) \vdash S \vee \exists x \neg E(x)}\ \vee - D$$

Dato che il sequente è derivabile, C è un tautologia nella teoria predicativa T_{Ip}.

6 Esercizio 6

La regola

$$\frac{\neg F \vdash \neg C \& M \qquad C \vdash M \vee F}{C \vdash \neg\neg F \& C}\ 1$$

è valida? Lo sono le sue inverse?

6.1 Validità regola

Ipotesi: Sia r una riga fissata sulla tabella di verità.

1. $\neg F \to \neg C \& M = 1$ su r
2. $C \to M \vee F = 1$ su r
3. $C = 1$ su r

Tesi:
$\neg\neg F \& C = 1$ su r
Dimostrazione:
Dalla ipotesi 3, sappiamo che C=1. Dalla Ipotesi uno, abbiamo che $\neg F \to \neg C \& M = \neg F \to 0 \& 1 = \neg F \to 0$, quindi $\neg F = 0$ e $F = 1$, che dimostra la tesi dato che $\neg\neg F \& C = \neg\neg 1 \& 1 = 1$ quindi la regola è valida.

6.2 Sicurezza regola

Considero la prima regola inversa,

$$\frac{C \vdash \neg\neg F\&C}{\neg F \vdash \neg C\&M}\ 1 - Inv - 1$$

Cerco una riga r tale che:

1. $C \to \neg\neg F\&C = 1$
2. $\neg F = 1$
3. $\neg C\&M = 0$

Considero $C = F = M = 0$. Abbiamo che:

1. $0 \to \neg\neg F\&C = 1$
2. $\neg 0 = 1$
3. $\neg 0\&0 = 0$

Quindi la prima regola inversa non è valida, dunque la regola di partenza non è sicura.
Considero la seconda regola inversa,

$$\frac{C \vdash \neg\neg F\&C}{C \vdash M \vee F}\ 1 - Inv - 2$$

Ipotesi: Sia r una riga fissata sulla tabella di verità.

1. $C \to \neg\neg F\&C = 1$ su r
2. $C = 1$ su r

Tesi:
$M \vee F = 1$ su r
Dimostrazione:
Dalla ipotesi 2, sappiamo che C=1. Dalla Ipotesi uno, abbiamo che $1 \to \neg\neg F\&1$, dunque $\neg\neg F = 1$ e quindi $F = 1$. Questo dimostra la tesi in quanto $M \vee 1 = 1$ e quindi la seconda regola inversa è valida.

7 Esercizio 7

7.1 Traduzione

Morgana: $M \leftrightarrow \neg(C \to M)$

7.2 Verifica risposta a

Verifichiamo la risposta a, cioè entrambe dicono la verità.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{M, C \vdash M, M\&C}}{M \vdash C \to C, M\&C}\ \to -D}{M, \neg(C \to M) \vdash M\&C}\ \neg - S \qquad \overset{ax-id}{M \vdash M, M\&C}}{M, M \to \neg(C \to M) \vdash M\&C}\ \to -S}{M \to \neg(C \to M), M \vdash \&C}\ sc_{sx} \qquad \dfrac{\overset{ax-id}{\neg(C \to M) \vdash \neg(C \to M), M\&C} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{M \vdash M, M\&C} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash M, C, M \qquad \vdash C, C, M}{\vdash M\&C, C, M}\ \& - D}{\vdash C, M, M\&C}\ sc_{dx}}{C \to M \vdash M, M\&C}\ \to -S}{\vdash \neg(C \to M), M, M\&C}\ \neg - D}{\vdash M, \neg(C \to M), M\&C}\ sc_{dx}}{M \to \neg(C \to M) \vdash \neg(C \to M), M\&C}\ \to -S}{\dfrac{M \to \neg(C \to M), \neg(C \to M) \to M \vdash M\&C}{M \to \neg(C \to M)\&\neg(C \to M) \to M \vdash M\&C}\ \& - S}\ \to -S$$

La risposta a non è corretta.
Il sequente radice è falso per $M = 0$ o $C = 0$, quindi la risposta corretta è necessariemente la e, cioè entrambe dicono il falso.