I appello 2 febbraio 2015

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Derivare in LJ:
  - 3 punti
    $\neg(\, A \rightarrow (\, C \rightarrow \neg C \vee A\,)\,) \vdash$
  - 4 punti
    $\neg(\, \neg\neg\neg A \rightarrow \neg B\,) \vdash \neg A \,\&\, \neg\neg B$
  - 7 punti
    $\neg\exists x\ \neg C(x) \vdash \forall y\, \neg\neg C(y)\ \vee\ \exists w\, C(w)$
  - 6 punti
    $\exists y\ \forall x\ C(x,y) \vdash \forall z\, \exists w\ (\ C(z,w)\ \vee\ C(w,z)\ )$
  - 6 punti
    $\forall x\ (\, C(x) \rightarrow \neg C(x)\,) \vdash \forall x\ \neg C(x)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e derivare i sequenti ottenuti nella logica indicata
  - (6 punti) in LJ

    I marsupiali sono dei mammiferi.
    I mammiferi non sono rettili.
    ―――――――――――――――
    I rettili non sono marsupiali.

    si consiglia di usare:
    M(x) = "x è un marsupiale"
    F(x) = "x è un mammifero"
    R(x) = "x è un rettile"

  - (8 punti) in LJ

    Un amico di Mario è iscritto ad informatica.
    Tutti gli amici di Mario sono simpatici e divertenti.
    ―――――――――――――――
    Qualche amico di Mario è iscritto ad informatica ed è simpatico.

    si consiglia di usare:
    A(x,y) = x è amico di y
    m=Mario

I(x)= x è iscritto ad informatica
S(x)=x è simpatico
D(x)=x è divertente

- (44 punti) Siano T^i_{bal} e T^c_{bal} le teorie ottenute estendendo rispettivamente LJ e LK con composizioni e con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se Tamara balla, Sophie non balla.
  - Valentino non balla se la pista da ballo è affollata.
  - Valentino non balla soltanto se la pista da ballo è affollata.
  - Se Sophie non balla allora Tamara e Valentino ballano.
  - Sophie balla se Valentino balla o se la pista da ballo non è affollata.

  Si consiglia di usare:
  B(x)= x balla
  A= la pista da ballo è affollata
  t=Tamara, s=Sophie, g=Valentino.

  Dedurre poi le seguenti affermazioni nella teoria indicata:

  - Sophie balla se Valentino balla e se la pista da ballo non è affollata. (in T^i_{bal})
  - Se la pista da ballo non è affollata Sophie balla oppure Tamara balla. (in T^i_{bal})
  - Tamara non balla se Sophie balla. (in T^i_{bal})
  - Tamara non balla soltanto se Sophie balla. (in T^c_{bal})
  - Soltanto se non si dà il caso che Valentino non balli, la pista da ballo non è affollata. (in T^i_{bal})
  - Valentino balla se la pista da ballo non è affollata. (in T^c_{bal})
  - Se la pista da ballo è affollata non si dà il caso che Sophie non balli. (in T^i_{bal})
  - La pista da ballo è affollata soltanto se Sophie balla. (in T^c_{bal})
  - Sophie balla. (in T^c_{bal})
  - Qualcuno non balla. (in T^c_{bal})

- (42 punti) Siano T^i_{con} e T^c_{con} le teorie ottenute estendendo rispettivamente LJ e LK con composizioni e con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Alcuni sono connessi con Matteo e non sono simpatici a Matteo.
  - Quelli che sono connessi con Matteo sono simpatici a Matteo oppure sono simpatici ad Ernesto.
  - Anna non è simpatica nè a Matteo e nè ad Ernesto.
  - Veronica è connessa con Matteo e non è simpatica ad Ernesto.

  Si consiglia di usare:
  C(x,y)= x è connesso con y
  S(x,y)= x è simpatico ad y
  0(x) = x è contento
  e=Ernesto m=Matteo, v= Veronica, a=Anna

  Dopo aver formalizzato le frasi seguenti seguendo i suggerimenti sopra mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

- Anna non è connessa con Matteo. (in T^i_{con})
- Veronica è simpatica a Matteo. (in T^i_{con})
- Se nessuno fosse connesso con Matteo, Matteo non sarebbe contento. (in T^i_{con})
- Non tutti quelli che sono connessi con Matteo sono simpatici ad Ernesto. (in T^i_{con})
- Qualcuno è connesso con Matteo ed è simpatico ad Ernesto.(in T^i_{con})
- Non tutti sono connessi con tutti. (in T^i_{con})

Logica intuizionistica LJ

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ A \vdash A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{ax-}\bot \\ \bot \vdash \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta} \ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash C} \ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, C, C \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta} \ \text{cn}_{\text{sx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B} \ \&-\text{f} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta} \ \&-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta} \ \&-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \ \vee-\text{f} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \ \vee-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \ \vee-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \ \to-\text{f} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta} \ \to-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(z)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)} \ \forall-\text{f} \ (\Gamma, \forall x\ A(x) \text{ non dipendono da } z) \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta} \ \forall-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma, A(z) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta} \ \exists-\text{f} \ (\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta \text{ non dipendono da } z) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x)} \ \exists-\text{re}$$

Logica classica predicativa LK

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ A \vdash A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{ax-}\bot \\ \bot \vdash \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta} \ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash C, \Delta} \ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, C, C \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta} \ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash C, C, \Delta}{\Gamma \vdash C, \Delta} \ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta} \ \&-\text{f} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta} \ \&-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta} \ \&-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \ \vee-\text{f} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \ \vee-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \ \vee-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \ \to-\text{f} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad B, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \ \to-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(z), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta} \ \forall-\text{f} \ (\Gamma, \forall x A(x), \Delta \text{ non dipendono da } z) \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta} \ \forall-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma, A(z) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta} \ \exists-\text{f} \ (\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta \text{ non dipendono da } z) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta} \ \exists-\text{re}$$

Regole di composizione (ovvero cut)

in **LJ**:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}\ \text{cut}$$

in **LK**:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{cut}$$

Si ricorda che sia in **LJ** che in **LK** la negazione è definita in tal modo

$$\neg\mathbf{C} \equiv \mathbf{C} \rightarrow \perp$$

Regole ammissibili in LJ

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{\Gamma'} \vdash \mathbf{A}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\perp\text{-ax}\\ \mathbf{\Gamma}, \perp, \mathbf{\Gamma'} \vdash \mathbf{A}\end{array}$$

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}}{\mathbf{\Gamma}, \neg\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}\ \neg\text{−re} \qquad \frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash}{\mathbf{\Gamma} \vdash \neg\mathbf{A}}\ \neg\text{−f}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}}$$

Regole ammissibili in LK

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{\Gamma'} \vdash \mathbf{A}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\perp\text{-ax}\\ \mathbf{\Gamma}, \perp, \mathbf{\Gamma'} \vdash \mathbf{\Delta}\end{array}$$

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \neg\mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}}\ \neg\text{−re} \qquad \frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \neg\mathbf{A}, \mathbf{\Delta}}\ \neg\text{−f}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$