preappello 1 giugno 2010

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- Non si contano le brutte copie.

- Specificate le regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)

- Mostrare se i sequenti di seguito sono validi in LC e nel caso non lo siano mostrare un contromodello: **solo appello**

  3 punti

  $\neg(\ A \vee B\ ) \vdash \neg\neg A \rightarrow B$ $\quad\left\{\begin{array}{ll} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{array}\right.$

  5 punti

  $\exists x\ (\ C(x) \& \perp\ ) \vdash \exists x A(x) \vee \forall x\ C(x)$ $\quad\left\{\begin{array}{ll} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{array}\right.$

  5 punti

  $A \rightarrow (\forall x\ B(x)) \vdash \forall x\ (\ A \rightarrow B(x)\ ) \qquad (\ x \notin VL(A)\ )$ $\quad\left\{\begin{array}{ll} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{array}\right.$

- Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI, ovvero hanno un modello che li rende validi, o INSODDISFACIBILI, ovvero nessun modello li rende validi, motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato di 2 punti)

  - (4 punti - **solo appello**)

    Mario è scontento solo se non programma bene.

    Se Mario è contento allora programma bene.

    si consiglia di usare:
    P(x) = x programma bene
    C(x) = x è contento
    m=Mario

    corretto in LC sì no

- (5 punti - **solo appello**)

  Chi programma male è non volonteroso o irrazionale.
  Esistono persone volonterose.
  Qualcuno programma male.

  Esistono persone irrazionali.

  si consiglia di usare:
  M(x) = x programma male
  V(x) = x è volonteroso
  I(x) = x è irrazionale

  corretto in LC sì no

- (5 punti- **solo appello**)

  Un programma efficiente è difficile da scrivere.
  Un programma non efficiente è difficile da vendere.

  Un programma è difficile da scrivere o difficile da vendere.

  si consiglia di usare:
  P(x)=x è un programma
  E(x) = x è efficiente
  S(x) = x è difficile da scrivere
  V(x) = x è difficile da vendere

  corretto in LC sì no

- (5 punti- **solo appello**)

  Non esistono automobilisti prudenti che non mantengono le distanze di sicurezza.
  Giorgio è un automobilista prudente.

  Giorgio mantiene le distanze di sicurezza.

  si consiglia di usare:
  A(x)=x è automobilista,
  D(x)=x mantiene le distanze di sicurezza,
  P(x)=x è prudente,
  g=Giorgio.

  corretto in LC sì no

- (7 punti **appello + II compitino**)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e derivare quest'ultimo in $LI^{c}_{=}$:

  Fac 1 è una versione del programma fattoriale.
  Fac 2 è una versione del programma fattoriale.
  Fac 2 è diversa da Fac 1.

  Non esiste un'unica versione del programma fattoriale.

  si consiglia di usare:
  T(x,y)= x è una versione del programma y

f="programma fattoriale "
p="Fac 1"
s="Fac 2"

corretto in $LC_=$ sì no

- (5 punti **appello + II compitino**)

$$t \neq h, t = s, s = h \vdash h = e$$

corretto in $LC_=$ sì no

- (10 punti **appello**)
  "Non esiste nulla che crei tutti e soli quelli che non si creano da soli"
  si consiglia di usare:
  C(x,y)= x crea y

corretto in $LC_=$ sì no

- Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE rispetto alla semantica classica e nel caso di NON validità dire se sono SODDISFACIBILI o INSODDISFACIBILI: ciascuna vale 4 punti (+ 2 punti se non valida)

  - $\models \forall x\ B(x) \rightarrow \forall x\ \neg B(x)$ (**solo appello**)?
  - $\models \exists y\ \exists x\ x \neq y$ (**appello + II compitino**)?
  - $\models \neg\exists y\ \forall x\ (\ x = y \rightarrow z = y\ )$ (**appello + II compitino**) ?

- (18 punti **- appello + II compitino**) Sia T^{cla}_{cin} classico la teoria classica che estende $LC^{abbr}_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se Paolo non va al cinema Barbara non ci va.
  - Paolo non va al cinema se non ci va Barbara.
  - Carlo va al cinema solo se ci va Paolo e non ci va Barbara.
  - Barbara non va al cinema solo se ci va Carlo.

  Si consiglia di usare:
  V(x)= x va al cinema,
  c=Carlo,
  p=Paolo,
  b=Barbara.

  Dedurre poi le seguenti affermazioni:

- Carlo non va al cinema.
- Barbara va al al cinema.
- Paolo va al cinema.
- Se nessuno andasse al cinema, Carlo ci andrebbe.

- (25 punti **- appello + II compitino**) Sia T_{am}^{cla} classico la teoria ottenuta estendendo $\mathrm{LC}^{c}_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Pino è amico di Carlo.
  - Gli amici di Pino sono amici di Fulvio.
  - Se uno è amico di un altro quest'ultimo è amico del primo.
  - Ogni amico di Giorgio è amico di Pino.
  - Non esiste nessuno che sia amico sia di Pino che di Giorgio.

  suggerimento: si consiglia di usare:
  A(x,y)= x è amico di y
  g=Giorgio,
  p= Pino,
  f= Fulvio,
  c= Carlo
  uno=x,
  altro =y

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

  Derivare

  - Carlo è amico di Pino.
  - Qualcuno è amico di Fulvio.
  - Carlo non è amico di Giorgio.
  - Nessuno è amico di Giorgio.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile) (**appello + II compitino**)

  1. (5 punti) $\vdash \exists x\ \forall y\ (\ s(y) = s(x) \to x = y\ )$
  2. (5 punti) $\vdash \forall x \exists y\ y = x \cdot y$
  3. (4 punti) $\vdash \forall x\ \exists y\ (\ y = x \to s(x) = s(y)\ )$
  4. (7 punti) $\vdash \exists x\ x + 1 = 3$
  5. (10 punti) $\vdash 1 \cdot 2 = 2$
  6. (13 punti) $\vdash \neg \forall x\ \exists y\ x \neq y$
  7. (13 punti) $\vdash \forall x\ \forall y\ s(x) + y = s(x + y)$

- Stabilire quali delle seguenti regole sono valide e in caso positivo anche sicure: (8 punti ciascuna)

  (**appello + compitino**)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, t = s \vdash s = t, \Delta}\ 1$$

  (**solo appello**)

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}\ 2$$

Logica classica con uguaglianza- calcolo abbreviato $\mathbf{LC}_{=}^{abbr}$

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla\end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\text{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to -\text{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to -\text{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (x \notin VL(\Gamma, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\begin{array}{c}= -\text{ax}\\ \Sigma \vdash t = t, \Delta\end{array} \qquad \frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\text{S}_f$$

Logica classica predicativa $\mathbf{LC}_{=}$ con uguaglianza

questa versione contiene le regole nel libro di Sambin

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A \vdash A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \bot\vdash\end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{''} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{''} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{''}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{''}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta}\ \&-\mathrm{F} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{F} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to -\mathrm{F} \qquad \frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta}\ \to -\mathrm{re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta}\ \forall-\mathrm{D}\ (x \notin VL(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\mathrm{re}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta}\ \exists-\mathrm{re}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \vdash t = t \end{array} \qquad \frac{\Sigma, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\mathrm{S}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC + comp_{sx}+ comp_{dx}

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$

$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$

$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$

$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$

$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$

$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$

$Ax7. \vdash A(0) \& \forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s\ldots(0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{tra}^* & \text{cf}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u) \end{array}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash u = t}\ \text{sy-r} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash t = v \quad \Gamma' \vdash v = u}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u}\ \text{tr-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \rightarrow P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$

Avvertenze

VIETATO USARE variabili che diventano VINCOLATE dopo la sostituzione

$$\dfrac{\overline{\vdash \forall y \ y = y} \ \mathit{NOOOOOO}!!!}{\vdash \exists x \ \forall y \ x = y} \ \exists\text{–D}$$

però si può operare questa sostituzione

$$0(y) \to \forall x \ O(x) \ [y/x] \ \equiv \ 0(x) \to \forall x \ O(x)$$

perchè la nuova occorrenza di x (al posto di y!!) continua ad essere libera.

La definizione di sostituzione per i quantificatori è :

$$(\forall y \ \alpha)[x/s] \ \equiv \ \forall y \ (\alpha[x/s])$$
se y NON COMPARE in s

$$(\forall x \ \alpha)[x/s] \ \equiv \ \forall x \ \alpha$$

$$(\exists y \ \alpha)[x/s] \ \equiv \ \exists y \ (\alpha[x/s])$$
se y NON COMPARE in s

$$(\exists x \ \alpha)[x/s] \ \equiv \ \exists x \ \alpha$$

Schema riassuntivo su validità, insoddisfacibilità, soddisfacibilità

Dato sequente $\Gamma \vdash \Delta$
`passo 1`: si prova a derivarlo in LC^{abbr} con uguaglianza

$$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow \text{ è valido} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{vai al passo 2} \end{cases}$$

`passo 2`: costruisci contromodello con foglia di albero che NON si chiude
se esiste contromodello $\Rightarrow$ il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è NON valido
e vai al passo 3

`passo 3`: prova a derivare $\vdash \neg(\ \Gamma_{\&} \rightarrow \Delta_{\vee}\ )$ in LC^{abbr} con uguaglianza

$$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow\ \Gamma \vdash \Delta \text{ è insoddisfacibile} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{applica il passo 2 a } \vdash \neg(\ \Gamma_{\&} \rightarrow \Delta_{\vee}\ ) \\ & \text{se trovi contromodello di } \neg(\ \Gamma_{\&} \rightarrow \Delta_{\vee}\ ) \\ & \text{questo è modello di } \Gamma_{\&} \rightarrow \Delta_{\vee} \\ & \text{che è quindi anche modello di } \Gamma \vdash \Delta \\ & \Rightarrow\ \Gamma \vdash \Delta \text{ è soddisfacibile} \end{cases}$$