6. bis Esercizi di formalizzazione e validità dei sequenti

Formalizzare in sequenti le seguenti asserzioni e mostrare se la proposizione ottenuta è valida tramite derivazione nel calcolo dei sequenti classico.

1.

<u>Solo se mi sento stanco rimango a casa.</u>
Non rimango a casa se non mi sento stanco.

R = rimango a casa.
S = mi sento stanco.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax-id$}
\UnaryInfC{$\neg S, R \vdash , R$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$\neg S \vdash \neg R, R$}
\RightLabel{$\rightarrow - D$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg S \rightarrow \neg R, R$}
\RightLabel{$Sc - Dx$}
\UnaryInfC{$\vdash R, \neg S \rightarrow \neg R$}
\AxiomC{$ax-id$}
\UnaryInfC{$S \vdash S, \neg R$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$S, \neg S \vdash \neg R$}
\RightLabel{$\rightarrow - D$}
\UnaryInfC{$S \vdash \neg S \rightarrow \neg R$}
\RightLabel{$\rightarrow - S$}
\BinaryInfC{$R \rightarrow S \vdash \neg S \rightarrow \neg R$}
\end{prooftree}
$$

TAUTOLOGIA

2.

<u>Non si da il caso che l'affare sia non sicuro o non conveniente.</u>
L'affare è conveniente e sicuro.

A = l'affare è conveniente.
S = l'affare è sicuro.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax-id$}
\UnaryInfC{$A \vdash \neg S, A$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A, \neg S, A$}
\RightLabel{$Sc - Dx$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg S, \neg A, A$}
\RightLabel{$\vee - D$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg S \vee \neg A, A$}
\RightLabel{$Sc - Dx$}
\UnaryInfC{$\vdash A, \neg S \vee \neg A$}
\AxiomC{$ax-id$}
\UnaryInfC{$S \vdash S, \neg A$}
\RightLabel{$Sc - Dx$}
\UnaryInfC{$S \vdash \neg A, S$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg S, \neg A, S$}
\RightLabel{$\vee - D$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg S \vee \neg A, S$}
\RightLabel{$Sc - Dx$}
\UnaryInfC{$\vdash S, \neg S \vee \neg A$}
\RightLabel{$\& - D$}
\BinaryInfC{$\vdash A \& S, \neg S \vee \neg A$}
\RightLabel{$Sc - Dx$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg S \vee \neg A, A \& S$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$\neg(\neg S \vee \neg A) \vdash A \& S$}
\end{prooftree}
$$

TAUTOLOGIA

3.

Non si da il caso che l'affare non sia conveniente o sicuro.
L'affare non è conveniente né sicuro.

A = l'affare è conveniente.
S = l'affare è sicuro.

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\textit{Non Derivabile}}{A, A \vdash S}}{A \vdash \neg A, S}\,\neg-D}{A \vdash S, \neg A}\,Sc-Dx}{\vdash \neg A, S, \neg A}\,\neg-D}{\vdash \neg A \vee S, \neg A}\,\vee-D}{\neg(\neg A \vee S) \vdash \neg A}\,\neg-S
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{S \vdash S, \neg A}}{\vdash \neg S, S, \neg A}\,\neg-D}{\vdash \neg A, S, \neg S}\,Sc-Dx}{\vdash \neg A \vee S, \neg S}\,\vee-D}{\neg(\neg A \vee S) \vdash \neg S}\,\neg-S
}{\neg(\neg A \vee S) \vdash \neg A \,\&\, \neg S}\,\&-D
$$

Sequente non valido, falso sulla riga A=1 o S=0.

$$
\dfrac{\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\textit{Non derivabile}}{\vdash A}}{\neg A \vdash}\,\neg-S \qquad \overset{\textit{Non derivabile}}{S \vdash}}{\neg A \vee S \vdash}\,\vee-S}{\vdash \neg(\neg A \vee S)}\,\neg-D
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\textit{Non derivabile}}{\vdash A, S}}{\neg A \vdash S}\,\neg-S}{\neg A, \neg S \vdash}\,\neg-S}{\neg A \,\&\, \neg S \vdash}\,\&-S
}{\neg(\neg A \vee S) \to (\neg A \,\&\, \neg S) \vdash}\,\to-S}{\vdash \neg(\neg(\neg A \vee S) \to (\neg A \,\&\, \neg S))}\,\neg-D
$$

OPINIONE

4.

Se Mario è scontento non programma bene.
Mario è contento solo se programma bene.

C = Mario è contento.
P = Mario programma bene.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{P, C \vdash C}}{P \vdash \neg C, C}\,\neg-D \qquad \dfrac{\overset{ax-id}{P \vdash P, C}}{P, \neg P \vdash C}\,\neg-S}{P, \neg C \to \neg P \vdash C}\,\to-S}{\neg C \to \neg P, P \vdash C}\,Sc-Sx}{\neg C \to \neg P \vdash P \to C}\,\to-D
$$

Tautologia

5.

<u>C'è un'assemblea studentesca o è un giorno festivo solo se le lezioni tacciono.</u>
Non è un giorno festivo e non c'è un'assemblea studentesca, perciò le lezioni non tacciono.

L = le lezioni tacciono.
A = c'è un assemblea studentesca.
F = è un giorno festivo

$$
\dfrac{(A\vee F)\rightarrow L \vdash \neg F \,\&\, \neg A \qquad \dfrac{\vdash A\vee F, \neg L \qquad \dfrac{\overset{\textit{Non derivabile}}{L, L \vdash}}{L \vdash \neg L}\,\neg-D}{(A\vee F)\rightarrow L \vdash \neg L}\,\rightarrow -S}{(A\vee F)\rightarrow L \vdash (\neg F \,\&\, \neg A) \,\&\, \neg L}\,\& -D
$$

Sequente non valido, falso sulla riga L=1.

$$
\dfrac{\dfrac{\vdash (A\vee F)\rightarrow L \rightarrow (\neg F \,\&\, \neg A) \qquad \dfrac{\overset{\textit{Non derivabile}}{L \vdash}}{\vdash \neg L}\,\neg-D}{(A\vee F)\rightarrow L \rightarrow (\neg F \,\&\, \neg A) \,\&\, \neg L \vdash}\,\rightarrow -S}{\vdash \neg((A\vee F)\rightarrow L \rightarrow (\neg F \,\&\, \neg A) \,\&\, \neg L)}\,\neg-D
$$

Opinione

6.
<u>Non si da il caso che il fattoriale termini mentre non si esce dal ciclo. Si esce dal ciclo.</u>
Non si da il caso che si esca dal ciclo solo se il fattoriale non termina.

F = il fattoriale termina.
C = si esce dal ciclo.

$$
\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\neg(F \,\&\, \neg C), C \vdash C} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\textit{Non derivabile}}{C \vdash F, F \qquad C \vdash \neg C, F}}{C \vdash F \,\&\, \neg C, F}\,\& -D}{C, \neg(F \,\&\, \neg C) \vdash F}\,\neg-S}{\neg(F \,\&\, \neg C), C \vdash F}\,Sc-Sx}{\neg(F \,\&\, \neg C), C, \neg F \vdash}\,\neg-S}{\neg(F \,\&\, \neg C), C, C \rightarrow \neg F \vdash}\,\rightarrow -S}{\neg(F \,\&\, \neg C), C \vdash \neg(C \rightarrow \neg F)}\,\neg-D
$$

Sequente non valido, falso sulla riga C=1 o F=0.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash F,C \qquad \vdash \neg C,C}{\vdash F \,\&\, \neg C, C}\;\&-D}{\neg(F \,\&\, \neg C)\vdash C}\;\neg-S \qquad \neg(F \,\&\, \neg C),\neg(C\to\neg F)\vdash}{\neg(F \,\&\, \neg C), C\to(\neg(C\to\neg F))\vdash}\;\to-S}{\vdash\neg(\neg(F \,\&\, \neg C), C\to(\neg(C\to\neg F)))}\;\neg-D$$

OPINIONE

7.

<u>Non prendo l'ombrello se non piove. Non piove.</u>
Non prendo l'ombrello.

P = piove.
O = prendo l'ombrello.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{P\vdash P,\neg O}}{\vdash\neg P,P,\neg O}\;\neg-D}{\vdash P,\neg P,\neg O}\;Sc-Dx}{\neg P\vdash\neg P,\neg O}\;\neg-S \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\neg P,O\vdash O}}{\neg P,O,\neg O\vdash}\;\neg-S}{\neg P,\neg O,O\vdash}\;Sc-Sx}{\neg P,\neg O\vdash\neg O}\;\neg-D}{\neg P,\neg P\to\neg O\vdash\neg O}\;\to-S}{\neg P\to\neg O,\neg P\vdash\neg O}\;Sc-Sx$$

TAUTOLOGIA

8.

<u>Se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che lui non canta alla Scala di Milano.</u>
Se il tuo vicino di banco canta alla Scala di Milano allora lui è Napoleone.

V = il tuo vicino di banco è Napoleone.
S = il tuo vicino di banco canta alla Scala di Milano.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{S,V\vdash V}}{S,\vdash\neg V,V}\;\neg-D \qquad \dfrac{\overset{ax-id}{S\vdash S,V}}{S,\neg S\vdash V}\;\neg-S}{S,\neg V\to\neg S\vdash V}\;\to-S}{\neg V\to\neg S,S\vdash V}\;Sc-Sx}{\neg V\to\neg S\vdash S\to V}\;\to-D$$

TAUTOLOGIA

9.

Solo se non dormo la notte la mattina mi alzo stanco.
La mattina non mi alzo stanco se non si dà il caso che non dorma la notte.

D = dormo la notte.
S = la mattina mi alzo stanco.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\neg\neg D, S \vdash S}}{\neg\neg D \vdash \neg S, S}\,\neg - D}{\vdash \neg\neg D \to \neg S, S}\,\to -D}{\vdash S, \neg\neg D \to \neg S}\,Sc-Dx \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\neg D \vdash \neg D, \neg S}}{\neg D, \neg\neg D \vdash \neg S}\,\neg - S}{\neg D \vdash \neg\neg D \to \neg S}\,\to -D}{S \to \neg D \vdash \neg\neg D \to \neg S}\,\to -S$$

TAUTOLOGIA

Test di comprensione: attenzione all'implicazione classica

In caso di validità specificare per quali valori delle variabili proposizionali la proposizione è falsa, ovvero su quale riga della tabella di verità la proposizione è falsa, poi se la proposizione ottenuta è soddisfacibile e su che valori lo è, oppure se è insoddisfacibile.

1.

Se passerete l'esame di logica al primo appello, allora a giugno farete una vacanza alle Hawaii, e se a giugno farete una vacanza alle Hawaii allora passerete l'esame di logica al primo appello.

L = passerete l'esame di logica al primo appello.
R = a giugno farete una vacanza alle Hawaii.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathit{Non\ derivabile}}{L \vdash R}}{\vdash L \to R}\to D \qquad \vdash R \to L}{\vdash (L \to R)\&(R \to L)}\&-D$$

Sequente non valido, falso sulla riga L=1, R=0.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathit{Non\ derivabile}}{\vdash L, R}}{L \to R \vdash R}\to -S \qquad L \to R, L \vdash}{L \to R, R \to L \vdash}\to -S}{(L \to R)\&(R \to L) \vdash}\&-S}{\vdash \neg((L \to R)\&(R \to L))}\neg-D$$

OPINIONE

2.
Se passerete l'esame di logica al primo appello, allora a giugno farete una vacanza alle Hawaii, oppure se a giugno farete una vacanza alle Hawaii allora passerete l'esame di logica al primo appello.

L = passerete l'esame di logica al primo appello.
R = a giugno farete una vacanza alle Hawaii.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{L,R\vdash L,R}}{L\vdash R\to L,R}\;\to -D}{L\vdash R,R\to L}\;Sc-Dx}{\vdash L\to R,R\to L}\;\to -D}{\vdash (L\to R)\vee(R\to L)}\;\vee -D$$

TAUTOLOGIA

3.

Se non si dà il caso che se sei a Londra allora sei a Padova, allora sei a Londra e non sei a Padova.

L = sei a Londra.
R = sei a Padova.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{L\vdash L,P}\qquad \dfrac{\overset{ax-id}{L,P\vdash P}}{L\vdash \neg P,P}\;\neg -D}{L\vdash L\,\&\,\neg P,P}\;\&-D}{L\vdash P,L\,\&\,\neg P}\;Sc-Dx}{\vdash L\to P,L\,\&\,\neg P}\;\to -D}{\neg(L\to P)\vdash L\,\&\,\neg P}\;\neg -S}{\vdash \neg(L\to P)\to(L\,\&\,\neg P)}\;\to -D$$

TAUTOLOGIA

4.

Se il tuo vicino di banco non è a Londra allora ne segue che se il tuo vicino di banco è a Londra allora il tuo vicino di banco è un acrobata.

V = il tuo vicino di banco è a Londra.
A = il tuo vicino di banco e un acrobata.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{V\vdash V,A}}{V,\neg V\vdash A}\;\neg -S}{\neg V,V\vdash A}\;Sc-Sx}{\neg V\vdash V\to A}\;\to -D}{\vdash \neg V\to(V\to A)}\;\to -D$$

TAUTOLOGIA

Simulazione primo compitino logica

Mostrare se i sequenti di seguito sono tautologie, opinioni o paradossi in logica classica, in altri termini, si mostri se sono validi o non validi, se sono soddisfacibili o insoddisfacibili in logica classica. Nel caso il sequente non sia valido esibire una riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e poi, in caso di soddisfacibilità una riga in cui il sequente è vero.

1.

$$\neg\neg((\neg A \vee \neg D \to \neg(A \& D)) \vee A) \vdash$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \vee \neg D \to \neg(A \& D) \vdash \qquad \overset{Non\ derivabile}{A \vdash}}{(\neg A \vee \neg D \to \neg(A \& D)) \vee A \vdash} \vee -S}{\vdash \neg((\neg A \vee \neg D \to \neg(A \& D)) \vee A)} \neg - D}{\neg\neg((\neg A \vee \neg D \to \neg(A \& D)) \vee A) \vdash \perp} \neg - S$$

Sequente non valido, falso sulla riga **A=1** e gli altri a piacere.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{\neg A \vee \neg D, A, D \vdash A}}{\neg A \vee \neg D, A \& D \vdash A} \& -S}{\neg A \vee \neg D \vdash \neg(A \& D), A} \neg - D}{\vdash \neg A \vee \neg D \to \neg(A \& D), A} \to -D}{\vdash (\neg A \vee \neg D \to \neg(A \& D)) \vee A} \vee -D}{\neg((\neg A \vee \neg D \to \neg(A \& D)) \vee A) \vdash} \neg - S}{\vdash \neg\neg((\neg A \vee \neg D \to \neg(A \& D)) \vee A)} \neg - D \qquad \dfrac{ax-id}{\perp \vdash}}{\neg\neg((\neg A \vee \neg D \to \neg(A \& D)) \vee A) \to \perp \vdash} \to -S}{\vdash \neg(\neg\neg((\neg A \vee \neg D \to \neg(A \& D)) \vee A) \to \perp)} \neg - D$$

Il sequente di partenza è un **PARADOSSO**.

2.

$$\neg((A \to (M \to B)) \to \neg(B \,\&\, M)) \vdash \neg(A \vee \bot)$$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{
            \dfrac{
              \dfrac{
                \overset{Non\ derivabile}{\vdash B, A, A} \quad \overset{Non\ derivabile}{\vdash M, A, A}
              }{\vdash B \,\&\, M, A, A}\,\&-D
            }{\vdash A, B \,\&\, M, A}\,Sc-Dx
            \quad M \to B \vdash B \,\&\, M, A
          }{A \to (M \to B) \vdash \neg(B \,\&\, M), A}\,\to -S
        }{\vdash (A \to (M \to B)) \to \neg(B \,\&\, M), A}\,\to -D
      }{\neg((A \to (M \to B)) \to \neg(B \,\&\, M)) \vdash A}\,\neg - S
      \quad \dfrac{ax-id}{\bot \vdash}
    }{\neg((A \to (M \to B)) \to \neg(B \,\&\, M)), A \vee \bot \vdash}\,\vee -S
  }{\neg((A \to (M \to B)) \to \neg(B \,\&\, M)) \vdash \neg(A \vee \bot)}\,\neg - D
}{}
$$

Sequente non valido, falso sulla riga A=B=M=0.

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \vdash \neg((A \to (M \to B)) \to \neg(B \,\&\, M))
    \quad
    \dfrac{
      \dfrac{
        \overset{Non\ derivabile}{\vdash A, \bot}
      }{\vdash A \vee \bot}\,\vee -D
    }{\neg(A \vee \bot) \vdash}\,\neg - S
  }{\neg((A \to (M \to B)) \to \neg(B \,\&\, M)) \to (\neg(A \vee \bot)) \vdash}\,\to -S
}{\vdash \neg(\neg((A \to (M \to B)) \to \neg(B \,\&\, M)) \to (\neg(A \vee \bot)))}\,\neg - D
$$

Il sequente di partenza è un'OPINIONE.

Vero $\to$ A = 1 Quindi il sequente di partenza è falso.
Falso $\to$ A = 0 Quindi il sequente di partenza è vero.

Formalizzale in sequente le argomentazioni di seguito. Si provi che il sequente ottenuto è tautologia, opinione o paradosso, in altri termini, si mostri se sono validi o non validi, se sono soddisfacibili o insoddisfacibili rispetto alla semantica della logica classica. Nel caso il sequente non sia valido esibire una riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e poi, in caso di soddisfacibilità una riga in cui il sequente è vero.

1.

> Non si da il caso che se l'edificio è antisismico allora non sia isolato termicamente.
> L'edificio non è antisismico ed è a rischio di crollo, se è isolato termicamente.

A = l'edificio è antisismico
I = l'edificio è isolato termicamente
C = l'edificio è a rischio crollo

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Non derivabile}}{I, A, A, I \vdash}}{I, A, A \vdash \neg I}\,\neg\text{-}D}{I, A \vdash A \to \neg I}}{I, A, \neg(A \to \neg I) \vdash}\,\neg\text{-}S}{I, \neg(A \to \neg I), A \vdash}\,Sc\text{-}Sx}{\neg(A \to \neg I), I \vdash \neg A}\,\neg\text{-}D
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax\text{-}id}{A, I \vdash I, C}}{A \vdash \neg I, I, C}\,\neg\text{-}D}{\vdash A \to \neg I, I, C}\,\to\text{-}D}{\neg(A \to \neg I), I \vdash C}\,\neg\text{-}S
}{\neg(A \to \neg I), I \vdash \neg A \,\&\, C}\,\&\text{-}D
}{\neg(A \to \neg I) \vdash I \to (\neg A \,\&\, C)}\,\to\text{-}D
$$

Sequente non valido, falso sulla riga A=I=1.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\text{Non derivabile}}{\vdash A}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\text{Non derivabile}}{\vdash I}}{\neg I \vdash}\,\neg\text{-}S
}{A \to \neg I \vdash}\,\to\text{-}S
}{\vdash \neg(A \to \neg I)}\,\neg\text{-}D
\qquad I \to (\neg A \,\&\, C) \vdash
}{\neg(A \to \neg I) \to (I \to (\neg A \,\&\, C)) \vdash}\,\to\text{-}S
}{\vdash \neg(\neg(A \to \neg I) \to (I \to (\neg A \,\&\, C)))}\,\neg\text{-}D
$$

Il sequente di partenza è un'**OPINIONE**.

Falso $\to$ A = 0 $\vee$ I=0 Quindi il sequente di partenza è vero.

2.

Solo se piove non nevica.
<u>Non si da il caso che né piova né ci sia vento secco e né nevichi.</u>
Non si da il caso che piova se c'è vento secco.

P = piove
V = c'è vento secco
N = nevica

$$\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\neg N \to P, P, \neg N, \neg V \vdash P}}{\neg N \to P, P, \neg N, \neg V, \neg P \vdash}\,\neg - S}{\quad}\,Sc - .Sx$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\neg P \& \neg V, N \vdash N, V}}{\neg P \& \neg V \vdash \neg N, N, V}\,\neg - D \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{P, \neg V \vdash P, N, V}}{P, \neg V, \neg P \vdash N, V}\,\neg - S}{P, \neg P, \neg V \vdash N, V}\,Sc - Sx}{P, \neg P \& \neg V \vdash N, V}\,\& - S}{\neg P \& \neg V, P \vdash N, V}\,Sc - Sx}{\neg P \& \neg V, \neg N \to P \vdash N, V}\,\to - S}{\neg N \to P, \neg P \& \neg V \vdash N, V}\,Sc - Sx}{\neg N \to P, \neg P \& \neg V, \neg N \vdash V}\,\neg - S}{\neg N \to P, (\neg P \& \neg V) \& \neg N \vdash V}\,\& - S \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg N \to P, P, \neg N, \neg P, \neg V \vdash}{\neg N \to P, P, \neg N, \neg P \& \neg V \vdash}\,\& - S}{\neg N \to P, P, \neg P \& \neg V, \neg N \vdash}\,Sc - Sx}{\neg N \to P, P, (\neg P \& \neg V) \& \neg N \vdash}\,\& - S}{\neg N \to P, (\neg P \& \neg V) \& \neg N, P \vdash}\,Sc - Dx}{\neg N \to P, (\neg P \& \neg V) \& \neg N, V \to P \vdash}\,\to - S}{\neg N \to P, (\neg P \& \neg V) \& \neg N \vdash \neg (V \to P)}\,\neg - D$$

TAUTOLOGIA

Si formalizzino le seguenti affermazioni che chiamiamo premesse.

1. Se è giovedì allora Wilma è a lezione.
2. Non si da il caso che non sia né giovedì e neanche venerdì.
3. Simone non è a lezione se Wilma o Noemi sono a lezione.
4. Solo se Lino e Simone sono a lezione allora è venerdì.
5. Wilma non è a lezione solo se Noemi vi è.
6. Simone è a lezione se Wilma non vi è.
7. Se Noemi non è a lezione allora è giovedì.
8. Se Ilaria è a lezione, non si da il caso che Simone non sia a lezione oppure Wilma non sia a lezione oppure Noemi non sia a lezione.

Formalizzare le seguenti affermazioni, che chiamiamo conclusioni, e dimostrare che ciascuna conclusione è conseguenza logica LC_p di una o più affermazioni della lista delle premesse eventualmente unite a una o più conclusioni che precedono la conclusione considerata nella lista delle conclusioni.

1. Se Simone non è a lezione non si da il caso che Wilma non sia a lezione.
2. Se Simone è a lezione non vi è Wilma.
3. Noemi non è a lezione se Simone è a lezione.
4. Non è a lezione Simone se Wilma non vi è.
5. Wilma è a lezione.
6. Simone non è a lezione.
7. Ilaria non è a lezione.
8. Non è venerdì ma è giovedì.

Formalizzazione

Premesse	Conclusioni
1. $G \to W$	1. $\neg S \to \neg(\neg W)$
2. $\neg(\neg G \& \neg V)$	2. $S \to \neg W$
3. $(W \vee N) \to \neg S$	3. $S \to \neg N$
4. $V \to (L \& S)$	4. $\neg W \to \neg S$
5. $\neg W \to N$	5. W
6. $\neg W \to S$	6. $\neg S$
7. $\neg N \to G$	7. $\neg I$
8. $I \to \neg(\neg S \vee \neg W) \vee \neg N)$	8. $\neg V \to G$

La Premessa 6 dimostra la Conclusione 1

1. Applico sulla Premessa 6 la Regola 1.

$$\neg W \to S \not\vdash \neg S \to \neg(\neg W)$$

1. $\neg S \to \neg(\neg W) \not\vdash \neg S \to \neg(\neg W)$

La Premessa 3 dimostra la Conclusione 2

1. Applico sulla Premessa 3 la Regola 1.
2. Applico sulla Premessa 3 la Legge della doppia negazione.
3. Applico sulla Premessa 3 la Legge di De Morgan.

$$(W \vee N) \to \neg S \not\vdash S \to \neg W$$

1. $\neg\neg S \to \neg(W \vee N) \not\vdash S \to \neg W$
2. $S \to \neg(W \vee N) \not\vdash S \to \neg W$
3. $S \to (\neg W \mathbin{\&} \neg N) \not\vdash S \to \neg W$

La Premessa 3 dimostra la Conclusione 3

1. Applico sulla Premessa 3 la Regola 1.
2. Applico sulla Premessa 3 la Legge della doppia negazione.
3. Applico sulla Premessa 3 la Legge di De Morgan.

$$(W \vee N) \to \neg S \not\vdash S \to \neg N$$

1. $\neg\neg S \to \neg(W \vee N) \not\vdash S \to \neg N$
2. $S \to \neg(W \vee N) \not\vdash S \to \neg N$
3. $S \to \neg W \mathbin{\&} \neg N \not\vdash S \to \neg N$

La Premessa 3 e 5 dimostrano la Conclusione 4

1. Applico sulle Premessa 3 e 5 e sulla Conclusione 4 la Regola 1.
2. Applico sulla Premessa 3 e 5 e sulla Conclusione 4 la Legge della doppia negazione.
3. Applico sulla Premessa 3 la Legge di De Morgan.
4. Applico sulla premessa 3 la Regola 6, grazie alla Regola 8 posso dire che il sequente è valido.

$$(W \vee N) \to \neg S, \neg W \to N \not\vdash \neg W \to \neg S$$

1. $\neg(\neg S) \to \neg(W \vee N), \neg N \to \neg(\neg W) \not\vdash \neg(\neg S) \to \neg(\neg W)$
2. $S \to \neg(W \vee N), \neg N \to W \not\vdash S \to W$
3. $S \to \neg W \mathbin{\&} \neg N, \neg N \to W \not\vdash S \to W$
4. $S \to \neg N, \neg N \to W \not\vdash S \to W$

La Premessa 6 e la Conclusione 4 dimostrano la Conclusione 5

1. Applico sulla Premessa 6 l'essenza applicazione.
2. Applico sulla Premessa 6 la Legge della doppia negazione.
3. Applico sulla Conclusione 4 la Regola 1.
4. Applico sulla Conclusione 4 la Legge della doppia negazione.
5. Applico sulla Premessa 6 la Regola 4, poi la Regola 3.

6. Applico sulla Premessa 6 la Regola 6
7. Applico sulla Premessa 6 la Legge della doppia negazione, grazie alla Regola 8 posso dire che il sequente è valido.

$$\neg W \to S, \neg W \to \neg S \nvdash W$$

1. $\neg\neg W \vee S, \neg W \to \neg S \nvdash W$
2. $W \vee S, \neg W \to \neg S \nvdash W$
3. $W \vee S, \neg\neg S \to \neg\neg W \nvdash W$
4. $W \vee S, S \to W \nvdash W$
5. $\neg(\neg W \,\&\, \neg S), S \to W \nvdash W$
6. $\neg\neg S, S \to W \nvdash W$
7. $S, S \to W \nvdash W$

La Premessa 3 e 5 dimostrano la Conclusione 6

1. Applico sulla Premessa 5 l'essenza applicazione.
2. Applico sulla Premessa 5 la Regola della doppia negazione.

$$(W \vee N) \to \neg S, \neg W \to N \nvdash \neg S$$

1. $(W \vee N) \to \neg S, \neg\neg W \vee N \nvdash \neg S$
2. $(W \vee N) \to \neg S, W \vee N \nvdash \neg S$

La Premessa 8 e Conclusione 6 dimostrano la Conclusione 7

1. Applico sulla Premessa 8 la Regola 1.
2. Applico sulla Premessa 8 la Legge di De Morgan.
3. Applico sulla Premessa 8 la Legge di De Morgan.
4. Applico sulla Premessa 8 la Legge della doppia negazione.
5. Applico sulla Premessa 8 la Regola 6.
6. Applico sulla Premessa 8 la Regola 6, grazie alla Regola 8 posso dire che il sequente è valido.

$$I \to (\neg(\neg S \vee \neg W) \vee \neg N), \neg S \nvdash \neg I$$

1. $\neg(\neg(\neg S \vee \neg W) \vee \neg N) \to \neg I, \neg S \nvdash \neg I$
2. $\neg(\neg((\neg S \vee \neg W) \,\&\, N)) \to \neg I, \neg S \nvdash \neg I$
3. $\neg(\neg(\neg(S \,\&\, W) \,\&\, N)) \to \neg I, \neg S \nvdash \neg I$
4. $(\neg(S \,\&\, W) \,\&\, N \to \neg I), \neg S \nvdash \neg I$
5. $(\neg S \,\&\, N) \to \neg I, \neg S \nvdash \neg I$
6. $\neg S \to \neg I, \neg S \nvdash \neg I$

La Premessa 2 dimostra la Conclusione 8

1. Applico sulla Premessa 2 la Regola 3, poi la Regola 4.
2. Applico sulla Conclusione 8 l'essenza implicazione.
3. Applico sulla Conclusione 8 la Legge della doppia negazione.
4. Applico sulla Premessa 2 la Commutativa $\vee$.

$\neg(\neg G \,\&\, \neg V) \vdash \neg V \to G$

1. $G \vee V \vdash \neg V \to G$
2. $G \vee V \vdash \neg\neg V \vee G$
3. $G \vee V \vdash V \vee G$
4. $V \vee G \vdash V \vee G$

Premessa 6 dimostra Conclusione 1.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$W \vdash W, S$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$W, \neg W \vdash S$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$W \vdash \neg(\neg W), S$}
\RightLabel{$Sc - Dx$}
\UnaryInfC{$W \vdash S, \neg(\neg W)$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg W, S, \neg(\neg W)$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$S \vdash S, \neg(\neg W)$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$\neg W \to S \vdash S, \neg(\neg W)$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$\neg W \to S, \neg S \vdash \neg(\neg W)$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$\neg W \to S \vdash \neg S \to \neg(\neg W)$}
\end{prooftree}
$$

Ottengo come conclusione ¬S→¬(¬W) .

Premessa 3 dimostra Conclusione 2.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$S, W \vdash W, N$}
\UnaryInfC{$S, W \vdash W \vee N$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$S, W \vdash S$}
\RightLabel{$\neg - S$}
\UnaryInfC{$S, W, \neg S \vdash$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$S, W, (W \vee N) \to \neg S \vdash$}
\RightLabel{$Sc - Sx$}
\UnaryInfC{$(W \vee N) \to \neg S, S, W \vdash$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$(W \vee N) \to \neg S, S \vdash \neg W$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$(W \vee N) \to \neg S \vdash S \to \neg W$}
\end{prooftree}
$$

Ottengo come conclusione S→¬W .

Premessa 3 dimostra Conclusione 3.

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{\overset{ax-id}{S,N \vdash W,N}}{S,N \vdash W \vee N}\;\vee\text{-}D
        \qquad
        \dfrac{\overset{ax-id}{S,N \vdash S}}{S,N,\neg S \vdash}\;\neg\text{-}S
      }{S,N,(W \vee N) \rightarrow \neg S \vdash}\;\rightarrow\text{-}S
    }{(W \vee N) \rightarrow \neg S, S, N \vdash}\;Sc-Sx
  }{(W \vee N) \rightarrow \neg S, S \vdash \neg N}\;\neg\text{-}D
}{(W \vee N) \rightarrow \neg S \vdash S \rightarrow \neg N}\;\rightarrow\text{-}D
$$

Ottengo come conclusione | S→¬N | .

Premessa 3 e 5 dimostrano Conclusione 4.

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \overset{ax-id}{(W \vee N) \rightarrow \neg S, S, \neg W \vdash \neg W}
        \qquad
        \dfrac{
          \dfrac{
            \dfrac{\overset{ax-id}{N,S,\neg W \vdash W,N}}{N,S,\neg W \vdash W \vee N}\;\vee\text{-}D
            \qquad
            \dfrac{\overset{ax-id}{N,S,\neg W \vdash S}}{N,S,\neg W,\neg S \vdash}\;\neg\text{-}S
          }{N,S,\neg W,(W \vee N) \rightarrow \neg S \vdash}\;\rightarrow\text{-}S
        }{(W \vee N) \rightarrow \neg S, S, \neg W, N \vdash}\;Sc-Sx
      }{(W \vee N) \rightarrow \neg S, S, \neg W, \neg W \rightarrow N \vdash}\;\rightarrow\text{-}S
    }{(W \vee N) \rightarrow \neg S, \neg W \rightarrow N, \neg W, S \vdash}\;Sc-Sx
  }{(W \vee N) \rightarrow \neg S, \neg W \rightarrow N, \neg W \vdash \neg S}\;\neg\text{-}D
}{(W \vee N) \rightarrow \neg S, \neg W \rightarrow N \vdash \neg W \rightarrow \neg S}\;\rightarrow\text{-}D
$$

Ottengo come conclusione | ¬W→¬S | .

Premessa 6 e Conclusione 4 dimostrano Conclusione 5.

$$
\dfrac{
  \dfrac{\overset{ax-id}{\neg W \rightarrow S, W \vdash W}}{\neg W \rightarrow S \vdash \neg W, W}\;\neg\text{-}D
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\overset{ax-id}{\neg S, W \vdash W}}{\neg S \vdash \neg W, W}\;\neg\text{-}D
      \qquad
      \dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{S \vdash S, W}}{S,\neg S \vdash W}\;\neg\text{-}S}{\neg S, S \vdash W}\;Sc-Sx
    }{\neg S, \neg W \rightarrow S \vdash W}\;\rightarrow\text{-}S
  }{\neg W \rightarrow S, \neg S \vdash W}\;Sc-Sx
}{\neg W \rightarrow S, \neg W \rightarrow \neg S \vdash W}\;\rightarrow\text{-}S
$$

Ottengo come conclusione | W | .

Premessa 3 e Conclusione 5 dimostrano Conclusione 6.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}ax-id\\ S,W\vdash W,N\end{array}}{S,W\vdash W\vee N}\vee-D \qquad \dfrac{\begin{array}{c}ax-id\\ S,W\vdash S\end{array}}{S,W,\neg S\vdash}\neg-S}{S,W,(W\vee N)\rightarrow\neg S\vdash}\rightarrow-S}{(W\vee N)\rightarrow\neg S,W,S\vdash}Sc-Sx}{(W\vee N)\rightarrow\neg S,W\vdash\neg S}\neg-D$$

Ottengo come conclusione | ¬S | .

Premessa 3 e Premessa 5 dimostrano Conclusione 6.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}ax-id\\ W\vdash N,W\end{array}}{\vdash\neg W,N,W}}{\vdash W,N,\neg W}}{\vdash W\vee N,\neg W} \qquad \begin{array}{c}ax-id\\ \neg S\vdash\neg S\end{array}}{(W\vee N)\rightarrow\neg S\vdash\neg W,\neg S}\rightarrow-S \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}ax-id\\ N\vdash W,N,S\end{array}}{N\vdash W\vee N,\neg S} \qquad \begin{array}{c}ax-id\\ N,\neg S\vdash\neg S\end{array}}{N,(W\vee N)\rightarrow\neg S\vdash\neg S}\rightarrow-S}{(W\vee N)\rightarrow\neg S,N\vdash\neg S}}{(W\vee N)\rightarrow\neg S,\neg W\rightarrow N\vdash\neg S}\rightarrow-S$$

Ottengo come conclusione | ¬S | .

Premessa 8 e Conclusione 6 dimostrano Conclusione 7.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{I \vdash S, I}}{\vdash \neg I, S, I}\,\neg - D}{\vdash I, S, \neg I}\,Sc-Dx \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{S \vdash \neg W, \neg N, S, \neg I}}{\vdash \neg S, \neg W, \neg N, S, \neg I}\,\neg - D}{\vdash (\neg S, \neg W) \vee \neg N, S, \neg I}\,\vee - D}{\vdash (\neg S \vee \neg W) \vee \neg N, S, \neg I}\,\vee - D}{\neg((\neg S \vee \neg W) \vee \neg N) \vdash S, \neg I}\,\neg - D}{\dfrac{I \rightarrow \neg((\neg S \vee \neg W) \vee \neg N) \vdash S, \neg I}{I \rightarrow \neg((\neg S \vee \neg W) \vee \neg N), \neg S \vdash \neg I}\,\neg - S}\,\rightarrow - S
$$

Ottengo come conclusione | ¬I | .

Premessa 2 dimostra Conclusione 8.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{G \vdash V, G}}{\vdash \neg G, V, G}\,\neg - D \qquad \dfrac{\dfrac{ax-id}{V \vdash V, G}}{\vdash \neg V, V, G}}{\vdash \neg G \,\&\, \neg V, V, G}\,\& - D}{\neg(\neg G \,\&\, \neg V) \vdash V, G}\,\neg - S}{\neg(\neg G \,\&\, \neg V), \neg V \vdash G}\,\neg - S}{\neg(\neg G \,\&\, \neg V) \vdash \neg V \rightarrow G}\,\rightarrow - D
$$

Ottengo come conclusione | ¬V→G | .