Soluzione esercizio facoltativo - Simulazione parziale di Logica

Alessio Ferrarini

Novembre 2019

In un gioco due amiche fanno un'affermazione, che è vera o falsa. Un'affermazione è mancante e l'altra è riportata sotto:
Celeste: ....
Morgana: L'affermazione di Celeste è vera come la mia affermazione.

Si può dedurre, anche se non si conosce l'affermazione di Celeste, quante affermazioni sono vere?
a) No, ma ne esiste una che se 'e vera lo 'e anche l'altra
b) Sì, sono vere tutte e due le affermazioni
c) Sì, è vera solo un'affermazione
d) Nessuna affermazione è vera.

1 Traduzione

Il primo passo nella risoluzione di questo tipo di problemi è tradurre nel linguaggio formale della logica tutte le affermazioni.
Nel nostro caso dovremmo tradurre solo quella di Morgana in quanto l'affermazione di Celeste non è data dal testo.

Ax1) $M \leftrightarrow C\&M$ oppure $(C\&M \rightarrow M)\&(M \rightarrow C\&M)$

2 Svolgimento

Scelta del sequente

Decidere quale proposizione derivare è molto importante, nei casi come questo in cui le opzioni sono molteplici la soluzione migliore è eseguire un & tra tutti i possibili atomi. Il perché è molto semplice, lo sviluppo dell'albero ci fornirà alle sue foglie una sorta di tabella di verità, ma molto più potente in quanto eliminerà automaticamente le combinazioni che vanno a negare le premesse.
Quindi nel nostro caso dovremmo derivare: $\vdash C\&M$

Albero di derivazione

$$
\dfrac{\vdash Ax1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash C, C, M \quad \vdash M, C, M}{\vdash C\&M, C, M}\,\text{\&-D}}{\vdash C, M, C\&M}\,\text{sc-dx} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash C, M, M \quad \vdash M, M, M}{\vdash C\&M, M, M}\,\text{\&-D}}{\vdash M, M, C\&M}\,\text{sc-dx}}{\vdash C\&M, M, C\&M}\,\text{\&-D} \qquad \dfrac{\text{Ax-id}}{M \vdash M, C\&M}}{C\&M \to M \vdash M, C\&M}\,\to -S \qquad \dfrac{\text{Ax-id}}{M \to C\&M, C\&M \vdash C\&M}}{C\&M \to M, M \to C\&M \vdash C\&M}\,\to -S}{(C\&M \to M)\&(M \to C\&M) \vdash C\&M}\,\text{\&-S}}{}}{\vdash C\&M}\,\text{comp}
$$

Analisi della derivazione

Ora che abbiamo terminato la derivazione del sequente possiamo notare come l'albero non sia di derivazione e che la falsità scende dal ramo con M confrontare le nostre foglie con le possibili risposte al quesito.

Affermazione a

L'albero non è di derivazione.
La falsità che scende dal ramo $\vdash C, C, M$ ci dice che è possibile rendere vero Ax1 se e solo se la premessa è vera e la conclusione falsa $C = M = 0$ (Ovvero che entrambe dicano il falso).
In più la falsità scende dal solo ramo $\vdash M, M, M$ dice che e' possibile rendendo vero Ax1 che sia M=0 con C=1 ovvero che solo Morgana dica il falso mentre Celeste il vero.
Quindi queste due possibilità dicono che è possibile che nessuna dica il vero oppure che lo dica la sola Celeste quindi "a è l'unica risposta corretta".
Ora non resta altro che provare la nostra intuizione derivando $\vdash M \to C$:

$$
\dfrac{\vdash Ax1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Ax-id}}{C\&M \to M, M \vdash M, C} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Ax-id}}{C\&M \to M, M, C, M \vdash C}}{C\&M \to M, M, C\&M \vdash C}\,\& - S}{C\&M \to M, M, M \to C\&M \vdash C}\,\to -S}{C\&M \to M, M \to C\&M, M \vdash C}\,\text{sc-sx}}{C\&M \to M, M \to C\&M \vdash M \to C}\,\to -D}{(C\&M \to M)\&(M \to C\&M) \vdash M \to C}\,\text{\&-S}}{\vdash M \to C}\,\text{comp}
$$

Come possiamo vedere è una TAUTOLOGIA.

Affermazione b

E' sicuramente la più facile da smentire in quanto abbiamo derivato proprio questa affermazione e in quanto non si è rivelata una tautologia possiamo già smentirla.
Riga di falsità: M = 0, C a piacere

Affermazione c

Come già detto nell'analisi dell'affermazione A si denota come tutte le foglie dipendano da M, ma non si può dire lo stesso per C.
Riga di falsità: C = M = 0

Affermazione d

Questa affermazione implica la presenza di un paradosso che come abbiamo visto nell'analisi dell'affermazione A non è presente. Riga di falsità: C = 1, M = 0

3 Tabella di verità (Non consigliata all'esame!)

Svolgere la tabella di verità può essere una soluzione per risolvere questo tipo di problemi, ma non è conveniente per 2 motivi:

1. Come già preannunciato non rimuove le righe che falsificano la premessa.
2. All'aumentare degli atomi la complessità della tabella cresce in modo esponenziale rendendola poco pratica sia per l'uso da parte di un umano e non automatizzabile.

Tabella di verità di **Ax1**:

M	C	$M \leftrightarrow C\&M$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ecco si nota benissimo come la tabella di verità non escluda le righe che invalidano le premesse. Comunque quando si lavora con pochi atomi può tornare utile come metodo di verifica.