I appello e II compitino 21 giugno 2013

nome: cognome:

Appello II compitino

- A chi fa l'appello verrà valutato ogni esercizio per il superamento dell'esame.
- A chi fa il II compitino verranno valutati soltanto gli esercizi con la dicitura II compitino e i punti segnati VERRANNO AUMENTATI di un terzo per difetto.
- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $\vdash \neg((\neg M \ \to \ (M \to \ (B \ \to \ (M \ \to \ B)))) \ \& \ D \ )$
  - 5 punti
    $\neg C(w) \ \& \ \neg \ \forall w \ C(w) \ \vdash \ \exists y \neg \ C(y)$
  - 5 punti
    $\vdash \forall y \, (C(y) \to \neg(C(y) \ \& \ D(y)) \ )$
  - 5 punti
    $M(y) \vdash \neg \exists x \ (M(x) \ \& \ B(x) \ \to \neg M(x) \ ) \ \vee \ \exists w \ M(w)$
  - 6 punti
    $\vdash \ \exists y \ \forall z \ y \neq z \ \to \neg \exists x \ \forall y \ x = y$
  - 6 punti
    $\vdash \ \forall z \ \exists w \ (w = z \ \to \ \exists y (\ y = w \ \& \ z = y \ ) \ )$
  - 5 punti
    $\vdash \exists w \ w \neq b \ \vee \ \exists w \ \exists y \ w = y$
  - 5 punti
    $\vdash \neg (\forall w \ \forall y \ w = y \ \& \ a = b)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

  - (3 punti)

    Non si dà il caso che se c'è sciopero dei trasporti
    non ci siano problemi per chi prende il treno.

    Non si dà il caso che soltanto se c'è sciopero dei trasporti
    ci siano problemi per chi prende il treno.

    si consiglia di usare:
    S="c'è sciopero dei trasporti"
    P ="ci sono problemi per chi prende il treno"

  - (5 punti)

    Chi prende il treno o l'aereo è un viaggiatore.

    Qualche viaggiatore prende l'aereo.

    si consiglia di usare:
    E(x)="x prende l'aereo"
    T(x)= "x prende il treno"
    G(x) ="x è un viaggiatore"

  - (5 punti)

    Nessun uomo è in grado di volare.

    Se qualche uomo fosse in grado di volare, tutti sarebbero felici.

    si consiglia di usare:
    U(x)="x è un uomo"
    F(x)= "x è felice"
    V(x) ="x è in grado di volare"

  - (6 punti)

    Non si dà il caso che soltanto i cittadini inglesi parlino inglese.

    Qualcuno parla inglese e non è cittadino inglese ma cittadino australiano o neozelandese.

    si consiglia di usare:
    P(x)="x parla inglese"
    I(x)= "x è cittadino inglese"
    A(x) ="x è cittadino australiano"
    N(x)= "x è cittadino neozelandese"

  - (8 punti)

    Non tutti hanno ciò che desiderano.

    Qualcuno ha ciò che desira e qualcuno non ha ciò che desidera.

    si consiglia di usare:
    D(x,y) ="x desidera y"
    H(x,y)= "x ha y"

  - (6 punti)

    I frutti maturi sono buoni da mangiare.
    I frutti acerbi non sono buoni da mangiare.

    I frutti maturi non sono acerbi.

si consiglia di usare:
A(x)="x è acerbo"
F(x)= "x è un frutto"
M(x) ="x è maturo"
B(x)="x è buono da mangiare"

- (7 punti)

  Guido ha un'unico amico.
  Carlo è diverso da Luigi.
  Luigi è amico di Guido.
  ___
  Carlo non è amico di Guido o Guido non è amico di Carlo.

  si consiglia di usare:
  A(x,y)="x è amico di y"
  l="Luigi"
  c="Carlo"
  g="Guido"

- **II comp.** (7 punti) Stabilire se in $\mathrm{LC}_=$ e in PA è valido o meno, e soddisfacibile o meno (nel caso di non validità si aumenta il punteggio come descritto all'inizio):

  Alla lotteria oggi hanno estratto un'unico numero.
  ___
  Oggi alla lotteria non hanno estratto il numero 3 se hanno estratto il numero 1.

  si consiglia di usare:
  1= " 1"
  3= " 3"
  $L(x)$= " alla lotteria oggi hanno estratto il numero x"

- **II comp.** (24 punti) Sia T_{su} la teoria ottenuta estendendo $\mathrm{LC}_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Cecilia suona il clarinetto se Paolo non suona la tromba.
  - Solo se Paolo suona la tromba allora Nino la suona.
  - Cecilia non suona il clarinetto se Nino non suona la tromba.
  - Non si dà il caso che Livia o Cecilia suonino il clarinetto, se Paolo suona la tromba.

  Si consiglia di usare:

  C(x)="x suona il clarinetto"
  T(x)="x suona la tromba"
  p="Paolo"
  n="Nino"
  l="Livia"
  c="Cecilia"

  Dedurre poi in T_{su} le seguenti affermazioni:

  - Se Cecilia non suona il clarinetto allora Paolo suona la tromba.

- Nino suona la tromba se Paolo non la suona.
- Se Paolo non suona la tromba allora non la suona anche Nino.
- Paolo suona la tromba.
- Livia non suona il clarinetto e nemmeno Cecilia.
- Se nessuno suona la tromba o il clarinetto allora Nino suona il clarinetto.

- **II comp.** (30 punti) Sia T_{ba} la teoria ottenuta estendendo LC$_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Nessuno balla con Giorgia.
  - Se uno balla con uno, quest'altro balla con il primo.
  - Loris balla con Vania.
  - Loris balla soltanto con Vania.
  - Vania non è Barbara.
  - Chi non balla con Barbara balla con la sorella di Michele.

  Si consiglia di usare:
  B(x,y)= "x balla con y"
  g="Giorgia"
  b="Barbara"
  v="Vania"
  l="Loris"
  s="sorella di Michele"

  Dedurre poi in T_{ba} le seguenti affermazioni:

  - Loris balla con qualcuno.
  - Vania balla con Loris.
  - Vania balla con qualcuno.
  - Giorgia non balla con nessuno.
  - Loris non balla con Barbara.
  - La sorella di Michele è Vania.
  - Qualcuno e soltanto lui balla con Loris.

- **II comp.** Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (5 punti) $\vdash \forall y \ \ (y \neq w \ \rightarrow \ s(w) \neq s(y))$
  2. (5 punti) $\vdash \exists z \ \exists y \ (s(2) = 3 \ \rightarrow y = z \ )$
  3. (5 punti) $\vdash \exists w \ \exists y \ y = w + 2$
  4. (5 punti) $\vdash \exists w \ \exists z \ w \neq z + z$
  5. (5 punti) $\vdash \exists x \ x \neq 5$
  6. (7 punti) $\vdash 3 \neq 1 \ \vee \ 2 \neq 3$
  7. (7 punti) $\vdash \ 4 = 4 \cdot 1$
  8. (8 punti) $\vdash \forall y \ y + 1 \neq 0$

9. (8 punti) $\vdash \forall w\ \exists y\ s(y) = w + 2$
10. (10 punti) $\vdash \forall w\ \forall z\ (\ w + z \neq 0\ \rightarrow\ 0 \neq z\ )$
11. (10 punti) $\vdash \forall x\ \forall y\ (\ y \cdot x \neq 0 \rightarrow x + x \neq 0\ )$
12. (12 punti) $\vdash \forall w\ \forall x\ \exists y\ (\ (\ y + 1 = x\ \vee\ 0 = x\ )\ \vee\ w \neq w\ )$

- Stabilire se le seguenti regole sono valide e anche sicure rispetto alla semantica classica:

  (8 punti)

$$\frac{M(x) \vdash \Delta \qquad\qquad B \vdash \Delta}{\exists x\ M(x)\ \vee\ B \vdash \Delta}\ 1$$

  (5 punti)

$$\frac{\Gamma \vdash C \qquad\qquad B \vdash \Delta}{\Gamma, \neg C \rightarrow B \vdash \Delta}\ 2$$

- (10 punti) Stabilire se la formalizzazione di

$$\frac{x \text{ applaude } \vdash \text{ Lo spettacolo teatrale è piaciuto a Mario}}{\text{Qualcuno applaude } \vdash \text{Lo spettacolo teatrale è piaciuto a qualcuno}}\ 3$$

  è istanza di una regola valida, assieme alla sua inversa, rispetto alla semantica classica, ove
  $P(x)$="lo spettacolo teatrale è piaciuto ad x"
  $A(x)$="x applaude"
  m="Mario"

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot & \text{ax-}\top \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\mathrm{S} \qquad \begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \Gamma \vdash t = t, \Delta \end{array}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC$_=$ + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \rightarrow x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\ \&\ \forall x\ (\ A(x) \rightarrow A(s(x))\ )\ \rightarrow\ \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \ \equiv \ \neg t = s$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{−S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{−D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{−S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{−D}_v$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{tra}^* & \text{cf}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \rightarrow P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$