4. Esercitazione 10 giugno 2011

Si ricorda che con *teoria* si intende un'*estensione del calcolo della logica classica con uguaglianza* $LC_=$ *CON degli assiomi extralogici e regole di composizione a dx e a sx.*
Nel seguito identificheremo una teoria designando i SOLI assiomi extralogici.

- il sequente $\vdash \forall\ x\ x \neq s(x)$ è valido in PA?
- il sequente $\vdash \exists x\ \forall y\ x = y$ è valido in $\mathrm{LC}_=$? è soddisfacibile se non è valido?
- il sequente $\vdash \exists x\ \forall y\ x = y$ è valido in PA ? è soddisfacibile se non è valido?
- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. $\vdash \forall x\ \exists y\ x \neq y$
  2. $\vdash \forall x\ \forall y\ x = y$
  3. $\vdash \forall x\ (\ s(x) = 0 \rightarrow 7 = x\ )$
  4. $\vdash 0 = 100$
  5. $\vdash \exists y\ \forall x\ x = x + y$
  6. $\vdash \forall y\ \exists x(\ x = s(y) \rightarrow y = 4\ )$
  7. $\vdash \exists x\ \exists y\ x \cdot y = 2$
  8. $\vdash (7 + 1) + 1 = 9$
  9. $\vdash \forall x\ 1 + x = s(x)$

- Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $\mathrm{LC}_=$:

  Mirko è uno studente nell'aula 1A150.
  Non c'è nessun studente diverso da Mirko nell'aula 1A 150.

  Nell'aula 1A150 c'è un'unico studente.

  si consiglia di usare:
  S(x)= x è uno studente nell'aula 1A150
  m="Mirko"

  corretto in $\mathrm{LC}_=$ sì no

- Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $\mathrm{LC}_=$:

  Tutte le amiche di Carla sono venete.
  Gianna è amica di Carla.
  Carla ha un'unica amica.

  Gianna è veneta.

  si consiglia di usare:
  A(x)= x è amica di Carla
  V(x)= x è veneta
  g='Gianna"

  corretto in $\mathrm{LC}_=$ sì no

- Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  Qualche amica di Carla è veneta.
  Gianna è amica di Carla.
  Carla ha un'unica amica.
  ―――――――――――――――
  Gianna è veneta.

  si consiglia di usare:
  A(x)= x è amica di Carla
  V(x)= x è veneta
  g='Gianna"

  corretto in $LC_=$ sì no

- Stabilire se il sequente è valido in $LC_=$

$$\neg a = b \vdash \neg(\ c = a \& b = c\ )$$

  corretto in $LC_=$ sì no

- Stabilire se il sequente è valido in $LC_=$

$$u = v \to v = w \vdash u = w \lor u \neq v$$

  corretto in $LC_=$ sì no

- Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE rispetto alla semantica classica e nel caso di NON validità dire se sono SODDISFACIBILI o INSODDISFACIBILI:

  $\models \exists y\ (\ \neg B(x) \to (\ B(y) \to \neg C(x)\ )\ )$
  $\models \exists x\ (\ \neg B(x) \to B(x) \& \perp\ )$
  $\models \neg \exists y\ \forall z\ (\ z = y \to y = z\ )$

- Sia T^c_{vot} la teoria ottenuta dalla formalizzazione dei seguenti assiomi:
  - Ax1 Filippo non è andato a votare alle ultime elezioni europee.
  - Ax2. Carla non è andata a votare alle ultime elezioni europee se e solo se ci è andato Filippo.

- Ax3. Se uno ha espresso un voto valido alle ultime elezioni europee allora è andato a votare alle ultime elezioni europee.
- Ax4. Marco ha espresso un voto valido alle ultime elezioni europee.
- Ax5. Marco ha votato un partito che difende gli interessi di tutti alle ultime elezioni europee.
- Ax 6. Il "partito degli intelligenti" è un partito che difende gli interessi di tutti.
- Ax 7. C'e' un unico partito che difende gli interessi di tutti.
- Ax 8. Ogni partito che difende solo gli interessi del più potente di turno non è un partito che difende gli interessi di tutti.

si consiglia di usare:
$E(x)= x$ è andato a votare alle ultime elezioni europee
$V(x)= x$ ha espresso un voto valido alle ultime elezioni europee
$P(x,y)=x$ ha votato il partito y alle ultime elezioni europee
$I(x,y)=x$ è un partito che difende gli interessi di y
i=il partito degli intelligenti
f=Filippo
c=Carla
m=Marco
p=il più potente di turno

Derivare nella teoria T^{c}_{vot}:

- 6. Carla è andata a votare alle ultime elezioni.
- 7. Non tutti sono andati a votare alle ultime elezioni.
- 8. Marco è andato a votare alle ultime elezioni.
- 9. Marco ha votato il "partito degli intelligenti".
- 10. Il "partito degli intelligenti" non difende solo gli interessi del più potente di turno.

- Sia T_{nuoto} la teoria ottenuta dalla formalizzazione dei seguenti assiomi:

1. Ax. Se Paolo va a fare una nuotata allora Carlo ci va.
2. Ax. Barbara va a fare una nuotata solo se ci va Paolo.
3. Ax. Se Mario va a fare una nuotata allora Paolo non ci va.
4. Ax. Se qualcuno va a fare una nuotata allora Paolo non ci va.
5. Ax. Se Carlo non va a fare una nuotata allora Barbara ci va.
6. Ax. Anna va a fare una nuotata.

   Suggerimento: usare
   N(x)= x va a fare una nuotata
   p=Paolo, c=Carlo, m=Mario

   Derivare in T_{nuoto} le seguenti frasi opportunamente formalizzate supposto che questa teoria sia consistente:

7. Paolo non va a fare una nuotata.
8. Barbara non va a fare una nuotata.
9. Carlo va a fare una nuotata.

- Sia $T_{squadre}$ la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

1. Ogni persona tifosa di una squadra di calcio è tifosa di una sola squadra.
2. Non tutti sono tifosi di una squadra di calcio.

3. Esistono persone tifose di una squadra di calcio diversa dalla Juventus.
4. Carlo non è tifoso dell'Inter ma è un tifoso della Juventus o del Milan.
5. la Juventus è diversa dal Milan.
   suggerimento: si usi $T(x, y)=$ x è persona tifosa della squadra di calcio y.

   Derivare in $T_{squadre}$ supposta consistente:
6. Se Carlo non è tifoso della Juventus allora è tifoso del Milan.
7. Esistono tifosi di una squadra di calcio.
8. Se tutti fossero tifosi allora tutti sarebbero tifosi della Juventus.
9. Se qualcuno è tifoso della Juventus allora non è tifoso del Milan.

   È derivabile in $T_{squadre}$
10. "Tutti sono tifosi" ???

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\overline{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'}\ \text{ax-id} \qquad \overline{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{ax-}\perp$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\text{S} \qquad \overline{\Gamma \vdash t = t, \Delta}\ = -\text{ax}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC$_=$ + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \text{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{sx1} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{dx1} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{−S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{−D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{−re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{−re}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{−re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{−re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{−re} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{−re}$$

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{comp}_{dx}$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{tra}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{cf}^* \\ \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\mathrm{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\ P(x) \rightarrow P(s(x))\ )}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$

ESERCITAZIONE 10 GIUGNO 2011

ok ?

4

1. $\forall x\, \exists y\; x \neq y$

VALIDA

$$
\dfrac{\dfrac{\vdash Ax1 \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{S(x)\neq 0 \vdash S(x)\neq 0}}{\forall x\, S(x)\neq 0 \vdash S(x)\neq 0}\ \forall\text{-re}}{\dfrac{\vdash S(x)\neq 0}{\vdash \exists y\, S(x)\neq y}\ \exists\text{-re}}\ \text{Comp-s}}{\vdash \forall x\, \exists y\; x\neq y}\ \forall\text{-D}\ x \text{ non libera}
$$

2. $\vdash \forall x\, \forall y\; x=y$ non è possibile! Derivo la negazione

insoddisfacibile!

$$
\dfrac{\dfrac{\vdash Ax1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\text{ax sx2}}{\neg S(x)=0,\ S(x)=0 \vdash}}{\neg S(x)=0,\ \forall y\, S(x)=y \vdash}\ \forall\text{-re}}{\neg S(x)=0,\ \forall x \forall y\; x=y \vdash}\ \forall\text{-re}}{\forall x\forall y\; x=y,\ \neg S(x)=0 \vdash}\ \text{Sc-sx}}{\forall x\forall y\; x=y,\ \forall x\, S(x)\neq 0 \vdash}\ \forall\text{-re}}{\forall x\, \forall y\; x=y \vdash}\ \text{Comp sx}}{\vdash \neg \forall x \forall y\; x=y}\ \neg\text{-D}
$$

3. $\vdash \forall x\, (S(x)=0 \rightarrow 7=x)$ vera sempre! $S(x)=0$ é falso!!! Rende vera l'implicazione

VALIDA

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash Ax1 \qquad \dfrac{\dfrac{-\text{ax-sx1}}{S(x)=0,\ \neg S(x)=0 \vdash 7=x}}{S(x)=0,\ \forall x\, S(x)\neq 0 \vdash 7=x}\ \forall\text{-re}}{S(x)=0 \vdash 7=x}\ \text{Comp-sx}}{\vdash S(x)=0 \rightarrow 7=x}\ \rightarrow\text{-D}}{\vdash \forall x\, (S(x)=0 \rightarrow 7=x)}\ \forall\text{-D}\ x \text{ non libera}
$$

4- $0=100$ e' falsa, dimostro la negazione

VALIDA

sm*

$0=s(99) \vdash s(99)=0$ ¬-S

$0=s(99), \neg s(99)=0 \vdash$ ∀-re

$\vdash Ax\ 1$ $\quad 0=100, \forall x\, s(x)\neq 0 \vdash$ Comp-sx

$0=100 \vdash$ ¬D

$\vdash \neg 0=100$

5. $\exists y \forall x\ x=x+y$

VALIDA

sm*

$x+0=x \vdash x=x+0$ ∀-re

$\vdash Ax\ 3$ $\quad \forall x\,(x+0=x) \vdash x=x+0$ Comp. sx

$\vdash x=x+0$ ∀-D x non libero

$\vdash \forall x\ x=x+0$ ∃-re

$\vdash \exists y \forall x\ x=x+y$

6. $\forall y \exists x\,(x=s(y) \to y=4)$

VALIDA

¬-ax sx 1

$s(y)=0, \neg s(y)=0 \vdash y=4$ ∀-re

$\vdash Ax\ 1$ $\quad s(y)=0, \forall x\, s(x)\neq 0 \vdash y=4$ Comp-sx

$s(y)=0 \vdash y=4$ sy-l

$0=s(y) \vdash y=4$ →-D

$\vdash 0=s(y) \to y=4$ ∃-re

$\vdash \exists x\,(x=s(y) \to y=4)$ ∀-D y non libera

$\vdash \forall y \exists x\,(x=s(y) \to y=4)$

7. $\exists x \exists y\ x \cdot y=2$

ax-id

$2\cdot 0=0, 0+2=2+0, 2+0=2, 2\cdot s(0)=2 \vdash 2\cdot s(0)=2$ ∀-re

$\vdash Ax3$ $\quad 2\cdot 0=0, 0+2=2+0, 2\cdot s(0)=2+0, 2+0=2 \vdash 2\cdot s(0)=2$ Comp sx

$2\cdot 0=0, 0+2=2+0, 2\cdot s(0)=2+0 \vdash 2\cdot s(0)=2$ -S

$\vdash \forall x \forall y\,(x+y=y+x)$ $\quad 2\cdot 0=0, 2\cdot s(0)=0+2, 0+2=2+0 \vdash 2\cdot s(0)=2$ ← 2∀re

$2\cdot 0=0, 2\cdot s(0)=0+2 \vdash 2\cdot s(0)=2$ -S

$2\cdot s(0)=2\cdot 0+2, 2\cdot 0=0 \vdash 2\cdot s(0)=2$ ∀-re

$\vdash Ax5$ $\quad 2\cdot s(0)=2\cdot 0+2, \forall x\ x\cdot 0=0 \vdash 2\cdot s(0)=2$

$2\cdot s(0)=2\cdot 0+2 \vdash 2\cdot s(0)=2$ ∀-re

$\forall y\,(2\cdot s(y)=2\cdot y+2) \vdash 2\cdot s(0)=2$ ∀-re

$\vdash Ax\ 6$ $\quad \forall x \forall y\,(x\cdot s(y)=x\cdot y+x) \vdash 2\cdot s(0)=2$ Comp sx

$\vdash 2\cdot s(0)=2$ ∃-re

$\vdash \exists y\ 2\cdot y=2$ ∃-re

$\vdash \exists x \exists y\ x\cdot y=2$

9_ $\forall x\ 1+x = S(x)$

VALIDA

ax-id

$S(0)+0 = S(0) \vdash S(0)+0 = S(0)$ — $\forall$-re

$\vdash Ax3 \qquad \forall x\ x+0 = x \vdash S(0)+0 = S(0)$ — Comp sx

$\vdash S(0)+0 = S(0)$ — $\forall$-D   x non libera

$\vdash \forall x\ 1+x = S(x)$

8_ $(7+1)+1 = 9$

VALIDA

ax-id

$S(7)+0,\ S(7)+S(0) = S(S(7)) \vdash S(7)+S(0) = S(S(7))$ — $=$-S

$S(7)+S(0) = S(S(7)+0),\ S(7)+0 = S(7) \vdash S(7)+S(0) = S(S(7))$ — $\forall$-re

$\vdash Ax3 \qquad S(7)+S(0) = S(S(7)+0),\ Ax3 \vdash S(7)+S(0) = S(S(7))$ — comp-sx

$S(7)+S(0) = S(S(7)+0) \vdash S(7)+S(0) = S(S(7))$ — $\forall$-re

$\forall y(S(7)+S(0) = S(S(7)+0)) \vdash S(7)+S(0) = S(S(7))$ — $\forall$-re

$\vdash Ax4 \qquad \forall x \forall y\ x+S(y) = S(x+y) \vdash S(7)+S(0) = S(S(7))$ — Comp sx

$\vdash S(7)+S(0) = S(S(7))$ — in s

$7+0=7 \vdash S(7)+S(0) = S(S(7))$ — in s

$7+S(0) = S(7),\ 7+0=7 \vdash S(7)+S(0) = S(S(7))$ — $=$-S

$7+0=7,\ 7+S(0) = S(7) \vdash (7+S(0))+S(0) = S(S(7))$ — $=$-S

$7+S(0) = S(7+0),\ 7+0=7 \vdash (7+S(0))+S(0) = S(S(7))$ — $\forall$-re

$\vdash Ax3 \qquad 7+S(0) = S(7+0),\ Ax3 \vdash (7+S(0))+S(0) = S(S(7))$ — Comp sx

$7+S(0) = S(7+0) \vdash (7+S(0))+S(0) = S(S(7))$

$\forall y\ 7+S(y) = S(7+y) \vdash (7+S(0))+S(0) = S(S(7))$ — $\forall$-re

$\vdash Ax4 \qquad Ax4 \vdash (7+1)+1 = 9$ — Comp-sx

$\vdash (7+1)+1 = 9$

5

$S(m),\ \neg\exists x(S(x)\ \&\ x \neq m) \quad \vdash \exists x(S(x)\ \&\ \forall y(S(y) \to x=y))$

VALIDA

$\neg$-ax dx 1

$S(m), S(m) \vdash m=m, \neg m=m$ — $\to$D

$S(m) \vdash S(m) \to m=m,\ m\neq m$ — $\forall$-D   y non libera

ax-id

$S(m) \vdash S(m),\ m\neq m \qquad S(m) \vdash \forall y(S(y) \to m=y),\ m\neq m$ — &-D

$S(m) \vdash S(m)\ \&\ \forall y(S(y) \to m=y),\ m\neq m$ — sc-sx

ax-id

$S(m) \vdash S(m),\ S(x)\ \&\ \forall y(S(y) \to x=y) \qquad S(m) \vdash m\neq m,\ S(m)\ \&\ \forall y(S(y) \to m=y)$ — &-D

$S(m) \vdash S(m)\ \&\ m\neq m,\ S(m)\ \&\ \forall y(S(y) \to m=y)$ — $\exists$-re

$S(m) \vdash \exists x(S(x)\ \&\ x\neq m),\ S(m)\ \&\ \forall y(S(y) \to m=y)$ — $\neg$-S

$S(m), \neg\exists x(S(x)\ \&\ x\neq m) \vdash S(m)\ \&\ \forall y(S(y) \to m=y)$ — $\exists$-re

$S(m), \neg\exists x(S(x)\ \&\ x\neq m) \vdash \exists x(S(x)\ \&\ \forall y(S(y) \to x=y))$

Rifaccio:

VALIDA

$$\dfrac{\overset{ax\text{-}id}{S(m) \vdash S(m)}, S(m) \,\&\, \forall y(S(y) \to y=m) \qquad \overset{=\text{-}ax}{S(m) \vdash m=m}, S(m) \,\&\, \forall y(S(y) \to y=m)}{S(m) \vdash S(m) \,\&\, m=m,\ S(m) \,\&\, \forall y(S(y) \to y=m)}\ \&\text{-}S$$

posso? ⇒

$$\dfrac{S(m) \vdash S(m) \,\&\, m=m,\ S(m) \,\&\, \forall y(S(y) \to y=m)}{S(m) \vdash \exists x(S(x) \,\&\, x=m),\ S(m) \,\&\, \forall y(S(y) \to y=m)}\ \exists\text{-re}$$

$$\dfrac{S(m) \vdash \exists x(S(x) \,\&\, x=m),\ S(m) \,\&\, \forall y(S(y) \to y=m)}{S(m), \neg\exists x(S(x) \,\&\, x=m) \vdash S(m) \,\&\, \forall y(S(y) \to y=m)}\ \neg\text{-}S$$

$$\dfrac{S(m), \neg\exists x(S(x) \,\&\, x=m) \vdash S(m) \,\&\, \forall y(S(y) \to y=m)}{S(m), \neg\exists x(S(x) \,\&\, x=m) \vdash \exists x\big(S(x) \,\&\, \forall y(S(y) \to y=x)\big)}\ \exists\text{-re}$$

6) $\forall x(A(x) \to V(x)),\ A(z),\ \forall x(A(x) \,\&\, \forall y(A(y) \to x=y)) \vdash V(z)$

VALIDA

$$\dfrac{\overset{ax\text{-}id}{A(z), A(z) \vdash A(z)}, V(z) \qquad \overset{ax\text{-}id}{A(z), A(z), V(z) \vdash V(z)}}{A(z), A(z), A(z) \to V(z) \vdash V(z)}\ \to S$$

$$\dfrac{A(z), A(z), A(z) \to V(z) \vdash V(z)}{A(z), A(z), \forall x(A(x) \to V(x)) \vdash V(z)}\ \forall\text{-re}$$

$$\dfrac{A(z), A(z), \forall x(A(x) \to V(x)) \vdash V(z)}{\forall x(A(x) \to V(x)), A(z), A(z) \vdash V(z)}\ sc\text{-}sx$$

$$\dfrac{\overset{ax\text{-}id}{\forall x(A(x) \to V(x)), A(z), A(z) \vdash A(z)}, V(z) \qquad \forall x(A(x) \to V(x)), A(z), A(z) \vdash V(z)}{\forall x(A(x) \to V(x)), A(z), A(z), A(z) \to z=z \vdash V(z)}\ \to S$$

$$\dfrac{\forall x(A(x) \to V(x)), A(z), A(z), A(z) \to z=z \vdash V(z)}{\forall x(A(x) \to V(x)), A(z), A(z), \forall y(A(y) \to z=y) \vdash V(z)}\ \forall\text{-re}$$

$$\dfrac{\forall x(A(x) \to V(x)), A(z), A(z), \forall y(A(y) \to z=y) \vdash V(z)}{\forall x(A(x) \to V(x)), A(z), A(z) \,\&\, \forall y(A(y) \to z=y) \vdash V(z)}\ \&\text{-}S$$

$$\dfrac{\forall x(A(x) \to V(x)), A(z), A(z) \,\&\, \forall y(A(y) \to z=y) \vdash V(z)}{\forall x(A(x) \to V(x)), A(z), \forall x(A(x) \,\&\, \forall y(A(y) \to x=y)) \vdash V(z)}\ \forall\text{-re}$$

8)

Ax 1. $N(p) \to N(c)$

Ax 2 $N(b) \to N(p)$

Ax 3 $N(m) \to \neg N(p)$

Ax 4 $\exists x\, N(x) \to \neg N(p)$

Ax 5 $\neg N(c) \to N(b)$

Ax 6 $N(a)$

7. $\neg N(p)$

VALIDO

$$
\dfrac{\vdash Ax_4 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash N(p), \neg N(p)}\,\text{ax-id}}{\vdash \exists_x N(x), \neg N(p)}\;\exists\text{-re} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash N(p), \neg N(p)}\,\neg\text{ax dx 1}}{\neg N(p) \vdash \neg N(p)}\;\neg\text{-S}}{\exists_x N(x) \to \neg N(p) \vdash \neg N(p)}\;\to S}{\vdash \neg N(p)}\;\text{Comp sx}
$$

8. $\neg N(b)$

VALIDA

$$
\dfrac{\vdash Ax\,2 \qquad \dfrac{\dfrac{7 \qquad \dfrac{}{N(p), \neg N(p) \vdash \neg N(b)}\,\neg\text{-ax sx 1}}{N(p) \vdash \neg N(b)}\;\text{comp-sx} \qquad \dfrac{}{\vdash N(b), \neg N(b)}\,\neg\text{-ax dx 1}}{N(b) \to N(p) \vdash \neg N(b)}\;\to S}{\vdash \neg N(b)}\;\text{Comp-sx}
$$

9. $N(c)$

VALIDA

$$
\dfrac{\vdash Ax\,5 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg N(c), N(c)}\,\neg\text{-ax dx2} \qquad \dfrac{\vdash 8 \qquad \dfrac{}{N(b), \neg N(b) \vdash N(c)}\,\neg\text{ax sx 1}}{N(b) \vdash N(c)}\;\text{comp-sx}}{\neg N(c) \to N(b) \vdash N(c)}\;\to S}{\vdash N(c)}\;\text{Comp-sx}
$$

7

Ax 1 $\forall_x \left(V(x) \to E(x)\right)$

Ax 2 $V(\bar{m})$

Ax 3 $\exists_x \left(P(\bar{m}, x) \,\&\, \forall_y I(x,y)\right)$

Ax 4 $\forall_x\, I(i, x)$

Ax 5 $\exists_x \forall_y I(x,y) \,\&\, \forall_{y_1} \forall_{y_2} \left(\forall_y I(y_1,y) \,\&\, \forall_y I(y_2,y) \to y_1 = y_2\right)$ Altra forma unicità

Ax6 $\forall_x \left(I(x,p) \to \forall_y \neg I(x,y)\right)$

8. $E(m)$ by Caesar

Valida

ax-id

$\vdash Ax2 \qquad V(m) \vdash V(m), E(m)$ Comp-sx

$\vdash V(m), E(m) \qquad$ ax-id $\quad E(m) \vdash E(m)$ $\to$S

$V(m) \to E(m) \vdash E(m)$ $\forall$-re

$\vdash Ax1 \qquad \forall x (V(x) \to E(x)) \vdash E(m)$ comp-sx

$\vdash E(m)$

9. $P(m,i)$

VALIDA !!

ax-id $\qquad$ ¬ ax sx 1

$P(m,x), \exists x(\dots), I(x,p) \vdash I(x,p), I(x,y), P(m,i)$ Sc-sx $\qquad P(m,x), I(x,p), \exists x(\dots), \neg I(x,y) \vdash I(x,y), P(m,i)$ $\forall$-re

$P(m,x), I(x,p), \exists x(\dots) \vdash I(x,p), I(x,y), P(m,i) \qquad P(m,x), I(x,p), \exists x(\dots), \forall y\, \neg I(x,y) \vdash I(x,y), P(m,i)$ $\to$S

$P(m,x), I(x,p), \exists x(\dots), I(x,p) \to \forall y\, \neg I(x,y) \vdash I(x,y), P(m,i)$ $\forall$-D y non libera

$P(m,x), I(x,p), \exists x(\dots), I(x,p) \to \forall y\, \neg I(x,y) \vdash \forall y\, I(x,y), P(m,i)$ $\forall$-re

$\vdash Ax6 \qquad P(m,x), I(x,p), \exists x(\dots), \forall x (I(x,p) \to \forall y\, \neg I(x,y)) \vdash \forall y\, I(x,y), P(m,i)$

ax-id

$P(m,x), I(x,y), \exists x(\dots), I(i,z) \vdash I(i,z), P(m,i)$ $\forall$-re

$\vdash Ax4 \qquad P(m,x), I(x,y), \exists x(\dots), \forall x\, I(i,x) \vdash I(i,z), P(m,i)$ Comp-sx

$P(m,x), I(x,y), \exists x(\dots) \vdash I(i,z), P(m,i)$ $\forall$-D z non libera

$P(m,x), I(x,p), \exists x(\dots) \vdash \forall y\, I(x,y), P(m,i) \qquad P(m,x), I(x,y), \exists x(\dots) \vdash \forall y\, I(i,y), P(m,i)$ &-D

ax-id

$I(x,z), \exists x(\dots), x=i, P(m,i) \vdash P(m,i)$ -S

$P(m,x), I(x,z), \exists x(\dots), x=i \vdash P(m,i)$

$P(m,x), I(x,z), \exists x(\dots) \vdash \forall y\, I(x,y) \& \forall y\, I(i,y), P(m,i)$ $\to$S

$P(m,x), I(x,z), \exists x(\dots), \forall y\, I(x,y) \& \forall y\, I(i,y) \to x=i \vdash P(m,i)$ $\forall$-re

$P(m,x), I(x,z), \exists x(\dots), \forall y_2 (\forall y\, I(x,y) \& \forall y\, I(y_2,y) \to x=y_2) \vdash P(m,i)$ $\forall$-re

$P(m,x), I(x,z), \exists x(\dots), \forall y_1 \forall y_2 (\forall y\, I(y_1,y) \& \forall y\, I(y_2,y) \to y_1=y_2) \vdash P(m,i)$ &-S

$\vdash Ax5 \qquad P(m,x), I(x,z), \exists x \forall y\, I(x,y) \& \forall y_1 \forall y_2 (\forall y\, I(y_1,y) \& \forall y\, I(y_2,y) \to y_1=y_2) \vdash P(m,i)$ Comp-sx

$P(m,x), I(x,z) \vdash P(m,i)$ $\forall$-re

$P(m,x), \forall y\, I(x,y) \vdash P(m,i)$ &-S

$P(m,x) \& \forall y\, I(x,y) \vdash P(m,i)$ $\exists$-S x non libera

$\vdash Ax3 \qquad \exists x (P(m,x) \& \forall y\, I(x,y)) \vdash P(m,i)$ Comp-sx

$\vdash P(m,i)$

10.

VALIDA

¬ ax dx 1

$\vdash I(i,p), \neg I(i,p)$ ¬-S

$\neg I(i,p) \vdash \neg I(i,p)$ $\forall$-re

¬-ax dx 1

$\vdash I(i,p), \neg I(i,p) \qquad \forall y\, \neg I(i,y) \vdash \neg I(i,p)$ $\to$S

$I(i,p) \to \forall y\, \neg I(i,y) \vdash \neg I(i,p)$ $\forall$-re

$\vdash Ax6 \qquad \forall x (I(x,p) \to \forall y\, \neg I(x,y)) \vdash \neg I(i,p)$ Comp-sx

$\vdash \neg I(i,p)$