II appello 13 luglio 2012

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $(A \to (A \to B)) \to A \vdash \neg(B \to C \vee B)$

  - 5 punti
    $\vdash \neg (A(w) \vee \neg A(w) \to \forall y ((\neg C(y) \to \neg\neg C(y)) \vee \neg C(y)))$

  - 5 punti
    $\exists x\ A(x) \vdash \exists y\ A(y) \vee A(x)$

  - 5 punti
    $\neg \exists y \neg A(y) \to C \vdash \forall x\ A(x) \to C$

  - 5 punti
    $\vdash \neg\exists w \forall z (z = w \,\&\, a = z \to a = w)$

  - 7 punti
    $\vdash a \neq b \to \forall x\, \exists y\ x \neq y$

  - 5 punti
    $\vdash \forall y\, \forall z\ (z \neq y \vee (y = z \vee y = a))$

  - 5 punti
    $\vdash \exists x\, \exists y\ (x \neq a \,\&\, x \neq b)$

• Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

- (3 punti)

  Spengo la luce solo se esco oppure dormo.
  ———————————————
  Non spengo la luce se non esco.

  si consiglia di usare:
  S = "Spengo la luce"
  E = "Esco"
  D= "Dormo"

- (6 punti)

  Soltanto chi ama il calcio va allo stadio.
  ———————————————
  Chi ama il calcio va allo stadio.

  si consiglia di usare:
  A(x) = "x ama il calcio"
  S(x)= "x va allo stadio"

- (6 punti)

  Non si dà il caso che qualcuno non ami il calcio e vada allo stadio.
  ———————————————
  Non tutti quelli che vanno allo stadio amano il calcio.

  si consiglia di usare:
  A(x) = "x ama il calcio"
  S(x)= "x va allo stadio"

- (7 punti)

  Tutti amano qualcuno.
  ———————————————
  Nessuno non ama nessuno.

  si consiglia di usare:
  A(x,y)=x ama y

- (5 punti)

  Quelli che non amano lavorare si stancano in fretta.
  Quelli che si stancano in fretta non sono molto produttivi.
  ———————————————
  Chi non ama lavorare non è molto produttivo.

  si consiglia di usare:
  L(x) = x ama lavorare
  S(x)= x si stanca in fretta
  R(x)= x è molto produttivo

- (7 punti)

  Beppe ha un unico figlio.
  Gianni è figlio di Beppe.
  ———————————————
  Se Carlo non è Gianni allora Carlo non è figlio di Beppe.

  si consiglia di usare:
  F(x,y)= x è figlio di y
  g=Gianni
  c=Carlo
  b=Beppe

- (18 punti) Sia T_{fe} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se Luca è felice allora Chiara non lo è ma Silvia si'.
  - Luca è felice solo se Chiara lo è.
  - Se Chiara è felice allora Luca lo è.
  - Se Elio è felice lo è pure Luca.
  - Soltanto se Luca è felice Barbara è felice.

  Si consiglia di usare:
  F(x)="x è felice"
  l="Luca"
  c="Chiara"
  e="Elio"
  b="Barbara"
  s="Silvia"

  Dedurre poi in T_{fe} le seguenti affermazioni:

  - Se Silvia non è felice allora anche Luca non lo è.
  - Luca non è felice.
  - Elio non è felice.
  - Chiara non è felice.
  - Quelli che sono felici sono diversi da Elio e da Luca.
  - Barbara non è felice.

- (25 punti) Sia T_{gi} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Gino gioca con Carlo.
  - Se qualcuno gioca con Pippo o con Carlo allora gioca anche con Fabio.
  - Tutti giocano con Pippo.
  - Se uno gioca con Pippo allora anche Pippo gioca con lui.

  Si consiglia di usare:
  G(x,y)= "x gioca con y"
  t="Toni"
  p="Pippo"
  f="Fabio"
  c= "Carlo"
  g="Gino"

  Dedurre poi in T_{gi} le seguenti affermazioni:

  - Non si dà il caso che Gino non giochi con Pippo.
  - Non si dà il caso che Gino non giochi con nessuno.
  - Gino gioca con Fabio.
  - Tutti giocano con Fabio.
  - Pippo gioca con Gino e Fabio.

- Pippo gioca con tutti.
- Non si dà il caso che nessuno giochi a calcio con Toni.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (5 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ x = 6 + y$
  2. (5 punti) $\vdash \forall x\ \exists y\ (\ s(x) \neq s(6)\ \rightarrow\ x \neq y\ )$
  3. (5 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ \exists z\ (\ x = y \cdot z\ )$
  4. (5 punti) $\vdash \exists y\ \exists x\ \exists z\ z + x = y \cdot x$
  5. (5 punti) $\vdash 0 + 0 = 4$
  6. (5 punti) $\vdash \forall x\ x \neq 3$
  7. (7 punti) $\vdash \exists x\ x = x + 1$
  8. (10 punti) $\vdash \forall x\ (\ x = 0\ \vee\ \exists y\ s(y) = x\ )$
  9. (10 punti) $\vdash \forall x\ \forall y\ (\ x \cdot y \neq 0\ \rightarrow\ x \neq 0\ )$
  10. (13 punti) $\vdash 2 = 4 \vee\ 1 = 2$

- Stabilire se le seguenti regole sono valide e anche sicure rispetto alla semantica classica:

  (8 punti)
  $$\frac{\Gamma, x = c \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ x = c \vdash \Delta}\ 1$$
  (5 punti)
  $$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg(A \vee B) \vdash \Delta}\ 2$$

- (6 punti) Stabilire se la formalizzazione di

$$\frac{\text{Qualcuno sta passando vicino a casa } \vdash \text{ Ringo abbaia}}{\text{Qualcuno sta passando vicino a casa } \vdash \text{Qualcuno abbaia}}\ 3$$

è istanza di una regola valida assieme alla sua inversa rispetto alla semantica classica, ove
$A(x)$="x abbaia"
$P(x)$="x sta passando vicino a casa"
r="Ringo"

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\overline{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'}\ \text{ax-id} \qquad \overline{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{ax-}\bot \qquad \overline{\Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'}\ \text{ax-}\top$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\text{S} \qquad \overline{\Gamma \vdash t = t, \Delta}\ =-\text{ax}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $LC_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx}, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \text{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \;\equiv\; \neg t = s$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C}$$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{"}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{"}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\text{S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists-\text{D}_v$$

$$\overset{\text{rf}^*}{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'}$$

$$\overset{\text{sm}^*}{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta}$$

$$\overset{\text{tra}^*}{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta} \qquad \overset{\text{cf}^*}{\Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta}$$

$$\overset{\text{cp}^*}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\, P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$