IV appello 21 settembre 2012

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $\vdash ((A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow A) \rightarrow \neg A$

  - 5 punti
    $\vdash \forall y \neg(C(y) \vee D(y)) \rightarrow \exists y\, C(y)$

  - 5 punti
    $\forall x\ \neg B(x)\ \&\ A(w) \vdash \neg\exists x\ B(x)$

  - 5 punti
    $\neg\ \forall y\ \neg A(y)\ \&\ C(x) \vdash \exists x\ A(x)\ \&\ \exists x\ C(x)$

  - 5 punti
    $\vdash\ \forall y\ \forall z\ z \neq y\ \&\ \exists x\ x = c$

  - 6 punti
    $\vdash \neg\exists x\, \exists y\, \exists w\ (x \neq y\ \&\ (y \neq w\, \&\, x \neq w))$

  - 5 punti
    $\vdash (a \neq b\ \&\ b \neq c)\ \&\ a \neq c \rightarrow \exists x\ (x \neq a\ \&\ x \neq b)$

  - 5 punti
    $\vdash\ \forall y\ \forall z\ (y \neq z \rightarrow \exists x\, z \neq x)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

- (3 punti)

  Soltanto se va in alta montagna Mario è in pace o è sereno.

  Mario non è nè in pace nè è sereno se non va in alta montagna.

  si consiglia di usare:
  P =“Mario è in pace”
  S =“Mario è sereno”
  A =“Mario va in alta montagna”

- (5 punti)

  Nessun uomo è andato su Marte o Giove.

  Se un uomo fosse andato su Marte la scienza avrebbe compiuto un’enorme progresso.

  si consiglia di usare:
  U(x) =“x è un uomo”
  M(x)= “x è andato su Marte”
  G(x)= “x è andato su Giove”
  S=“ la scienza avrebbe compiuto un’enorme progresso”

- (5 punti)

  Non tutti quelli che vanno allo stadio amano il calcio.

  C’è qualcuno che va allo stadio e non ama il calcio o non è tifoso.

  si consiglia di usare:
  A(x) =“x ama il calcio”
  S(x)= “x va allo stadio”
  T(x)=“x è tifoso”

- (7 punti)

  Quelli che sperano e non agiscono non possono ottenere nulla.

  Solo chi spera e agisce può ottenere qualcosa.

  si consiglia di usare:
  A(x) =“x agisce”
  S(x)= “x spera”
  P(x,y)=“x puó ottenere y”

- (7 punti)

  Tutti i panini nella dispensa sono vecchi.

  Non si dà il caso che i panini nella dispensa non siano vecchi.

  si consiglia di usare:
  P(x) =“x è un panino”
  D(x)= “x è nella dispensa”
  V(x)= “x è vecchio”

- (7 punti)

  Barbara ha un figlio.
  Ciro è figlio di Barbara.
  Chiunque è diverso da Ciro non è figlio di Barbara.

  Barbara ha un unico figlio.

  si consiglia di usare:
  F(x,y)= x è figlio di y

c=Ciro
b=Barbara

- (20 punti) Sia T_{pr} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se qualcuno partecipa al regalo allora ci partecipa anche Livio.
  - Toni partecipa al regalo se ci partecipa Livio.
  - Se Silvia non partecipa al regalo allora non ci partecipa Toni.
  - Toni non partecipa al regalo solo se ci partecipano Silvia e Livio.
  - Qualcuno non partecipa al regalo solo se ci partecipa Barbara.

  Si consiglia di usare:
  P(x)="x partecipa al regalo"
  t="Toni"
  l="Livio"
  b="Barbara"
  s="Silvia"

  Dedurre poi in T_{pr} le seguenti affermazioni:

  - Se qualcuno partecipa al regalo ci partecipa anche Toni.
  - Silvia partecipa al regalo.
  - Livio partecipa al regalo.
  - Toni partecipa al regalo.
  - Se Barbara non partecipa al regalo tutti partecipano al regalo.
  - Barbara partecipa al regalo.

- (25 punti) Sia T_{mg} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Tutti bevono acqua se qualcuno mangia la minestra o la pastasciutta.
  - Se Leo mangia la minestra allora Toni non beve acqua ma vino.
  - La minestra non e' uguale alla pastasciutta.
  - Ciascuno, se mangia, mangia solo una cosa.
  - Tutti mangiano minestra o pastasciutta.

  Si consiglia di usare:
  B(x,y)= "x beve y"
  M(x,y)= "x mangia y"
  m="minestra"
  p="pastasciutta"
  l="Leo"
  t="Toni"
  v="vino"
  a="acqua"

  Dedurre poi in T_{mg} le seguenti affermazioni:

  - Nessuno mangia la minestra se qualcuno non beve acqua.

- Leo non mangia la minestra.
- Leo mangia la pastasciutta.
- Toni beve acqua.
- Nessuno mangia sia minestra che pastasciutta.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (5 punti) $\vdash \exists x\ 2+x = s(s(x))$
  2. (5 punti) $\vdash \forall x\ x+2 = s(s(x))$
  3. (5 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ (\ x \neq y\ \vee\ 0 = 1\ )$
  4. (5 punti) $\vdash \forall x\ \exists y\ (\ x \neq y\ \&\ s(x) = s(y)\ )$
  5. (6 punti) $\vdash \neg\forall x\ \forall w\ (\ x \neq w\ \&\ s(x) = s(w)\ )$
  6. (8 punti) $\vdash \forall x\ x \cdot 2 = x + x$
  7. (10 punti) $\vdash \forall x\ 1 + x = s(x)$
  8. (10 punti) $\vdash \forall x\ 1 \cdot x = x$
  9. (13 punti) $\vdash \forall x\ \forall y\ (\ x \neq 0\ \&\ y \neq 0\ \rightarrow\ x \cdot y \neq 0\ )$

- Stabilire se le seguenti regole sono valide e anche sicure rispetto alla semantica classica:

  (8 punti)

$$\frac{\Gamma \vdash x \neq c, \Delta}{\Gamma, \exists x\ x = c \vdash \Delta}\ 1$$

  (5 punti)

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg(A \rightarrow B), \Delta}\ 2$$

- (10 punti) Stabilire se la formalizzazione di

$$\frac{\text{La festa riesce bene} \vdash \text{Flick canta e danza}}{\text{La festa riesce bene}\ \vdash\ \text{Tutti cantano e danzano}}\ 3$$

  è istanza di una regola valida assieme alla sua inversa rispetto alla semantica classica, ove
  $C(x)$=“x canta”
  $D(x)$=“x danza”
  P=“La festa riesce bene”
  f=“Flick”

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\overline{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'}\ \text{ax-id} \qquad \overline{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{ax-}\perp \qquad \overline{\Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'}\ \text{ax-}\top$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\text{S} \qquad \overline{\Gamma \vdash t = t, \Delta}\ =-\text{ax}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC$_=$ + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \text{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{−S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{−D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{−S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{−D}_v$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{tra}^* & \text{cf}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_{=}$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\ P(x) \to P(s(x))\ )}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$