6. Perchè costruire alberi di derivazione?

$\vdash \mathtt{pr}$ è radice di una derivazione in $\mathbf{LC}_p$

sse

$\mathtt{pr}$ è TAUTOLOGIA

e più in generale

$\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è radice di una derivazione in $\mathbf{LC}_p$

sse

$\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è TAUTOLOGIA

posto

$\mathbf{\Gamma}^{\&} \equiv (\,\mathtt{pr_1}\&\mathtt{pr_2}\,)\ldots\&\mathtt{pr_n}$
è la congiunzione delle proposizioni in $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathtt{pr_1}, \mathtt{pr_2}, \ldots \mathtt{pr_n}$
oppure
$\mathbf{\Gamma}^{\&} \equiv \mathtt{tt}$ (costante vero) se $\mathbf{\Gamma}$ è la lista vuota
oppure
$\mathbf{\Gamma}^{\&} \equiv \mathtt{pr_1}$ se $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathtt{pr_1}$

$\mathbf{\Delta}^{\vee} \equiv (\,\mathtt{pr_1}\vee\mathtt{pr_2}\,)\ldots\vee\mathtt{pr_n}$
è la disgiunzione delle proposizioni in $\mathbf{\Delta} \equiv \mathtt{pr_1}, \mathtt{pr_2}, \ldots \mathtt{pr_n}$
oppure
$\mathbf{\Delta}^{\vee} \equiv \perp$ (costante falso) se $\mathbf{\Delta}$ è la lista vuota
oppure
$\mathbf{\Delta}^{\vee} \equiv \mathtt{pr_1}$ se $\mathbf{\Delta} \equiv \mathtt{pr_1}$

Classificazione di un sequente

Tabella di verità di un sequente:

La tabella di verità di un sequente

$\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$

è la tabella di verità della proposizione
$\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ (che rappresenta il suo significato secondo la logica classica).

Quindi definiamo

un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è **tautologia**
sse
$\mathbf{\Gamma}^{\&} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è una **tautologia**

un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ **NON è tautologia**
sse
$\mathbf{\Gamma}^{\&} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Delta}^{\vee}$ **NON è tautologia**

un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è **opinione**
sse
$\mathbf{\Gamma}^{\&} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **opinione**

un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è **paradosso**
sse
$\Gamma^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta^{\vee}$ è **paradosso**

Come stabilire se un sequente è tautologia? DERIVANDO...

Infatti

Sequenti derivabili = Sequenti tautologici
Motivo: le **regole del calcolo dei sequenti CONSERVANO verità** per ogni riga della tabella dei sequenti **dall'ALTO di tutte le foglie verso il BASSO** e dal **BASSO verso ciascuna foglia**

7. Procedura di decisione su derivabilità di sequenti in $\mathbf{LC}_p$

Per stabilire se $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è una **tautologia classica** basta cercare una sua derivazione secondo la procedura che segue:

$$\text{1. } \Gamma\vdash\nabla \text{ è assioma?} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{sì} & \text{vai in 5.} \\ \text{no} & \text{vai in 2.} \\ & \text{se in } \Gamma \text{ o in } \nabla \text{ c'è una proposizione composta} \\ & \text{altrimenti STOP} \end{array} \right.$$

2. Scegli in $\Gamma\vdash\nabla$ una proposizione composta, diciamo $\mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2$ per esempio (includendo anche il caso $\mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2 \equiv \neg\mathtt{pr}_1$).
$\mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2$ è in posizione buona per applicare ad essa una SUA regola (a dx se $\mathtt{pr}_1 \circ \mathtt{pr}_2$ sta a dx di $\vdash$ nel sequente, a sx se $\mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2$ sta a sx di $\vdash$)?
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{sì} & \text{vai in 4. operando su } \mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2 \\ \text{no} & \text{vai in 3. operando su } \mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2 \end{array} \right.$$

3. se operi su $\mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2$ fai uno scambio per portarla in posizione buona da poter applicare la sua regola e vai in 4. operando su $\mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2$.

4. se operi su $\mathtt{pr}_1\circ\mathtt{pr}_2$ applica la sua regola. Quante premesse ha la regola?
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{una} & \text{vai in 1. operando sulla premessa} \\ \text{due} & \text{scegli la prima premessa e vai in 1. operando su di essa} \end{array} \right.$$

5. nell'albero ottenuto c'è foglia che NON è assioma con almeno una proposizione composta?
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{sì} & \text{scegli la foglia NON assioma e vai in 2.} \\ & \text{operando su di lei} \\ \text{no} & \text{STOP} \end{array} \right.$$

CONCLUSIONE:
1. se nell'albero ottenuto tutte le foglie sono assiomi, allora $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ è derivabile in $\mathbf{LC}_p$
e quindi $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ è **una tautologia** in logica classica
oppure
2. se nell'albero ottenuto qualche foglia NON è assioma, allora $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ NON è DERIVABILE in $\mathbf{LC}_p$,
e quindi $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ **NON è una tautologia** in logica classica.

8. Come trovare riga con uscita 0 di sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ NON valido

Se l'algoritmo sopra per $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ si ferma con una foglia

$$\mathbf{\Gamma}' \vdash \nabla'$$

che NON è un assioma allora

UNA riga della tabella di verità del sequente di partenza $\Gamma\vdash\nabla$ che lo rende **falso** si ottiene ponendo

- $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ per ogni variabile $\mathbf{A}$ in $\mathbf{\Gamma}'$
- $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ per ogni variabile $\mathbf{B}$ in ∇'

e tutte le altre variabili proposizionali in $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ con valori A PIACERE.

In particolare

1. se la foglia NON assioma è del tipo

$$\mathbf{A_{i_1}}, \dots \mathbf{A_{i_n}} \vdash \mathbf{V_{k_1}}, \dots \mathbf{V_{k_m}}$$

   e quindi

$$\{\mathbf{A_{i_1}}, \dots \mathbf{A_{i_n}}\} \bigcap \{\mathbf{V_{k_1}}, \dots \mathbf{V_{k_m}}\} = \emptyset$$

   allora
   OGNI riga della tabella di $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ con

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A_{i_j}} \ = \ \mathbf{1} & \mathbf{V_{k_j}} \ = \ \mathbf{0} \\ \text{per } j = 1, \dots, n & \text{per } j = 1, \dots, m \end{array}$$

   dà valore $\mathbf{0}$ alla proposizione $\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\nabla^{\vee}$.

2. se la foglia NON assioma è del tipo

$$\vdash \mathbf{V_{k_1}}, \dots \mathbf{V_{k_m}}$$

   allora
   OGNI riga della tabella di $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ con

$$\begin{array}{c} \mathbf{V_{k_j}} \ = \ \mathbf{0} \\ \text{per } j = 1, \dots, m \end{array}$$

   dà valore $\mathbf{0}$ al sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ ovvero alla proposizione $\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\nabla^{\vee}$.

3. se la foglia NON assioma è del tipo

$$\mathbf{A_{i_1}}, \dots \mathbf{A_{i_n}} \vdash$$

   allora
   OGNI riga della tabella di $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ con

$$\begin{array}{c} \mathbf{A_{i_j}} \ = \ \mathbf{1} \\ \text{per } j = 1, \dots, n \end{array}$$

   dà valore $\mathbf{0}$ alla proposizione $\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\nabla^{\vee}$.

8.bis Relazione tra verità di proposizioni e loro negazioni

Ricordando che

pr **TAUTOLOGIA:** =**VALIDA** = TUTTE le righe della sua tabella danno valore **1**
pr **OPINIONE:** = **SODDISFACIBILE**= QUALCHE riga della sua tabella dà valore **1** + **NON VALIDA**= QUALCHE riga della sua tabella dà valore **0**
pr **PARADOSSO:** =**INSODDISFACIBILE**= TUTTE le righe della sua tabella danno valore **0**

allora ne segue che

Memo

pr **TAUTOLOGIA**	sse	¬pr **PARADOSSO**
pr **PARADOSSO**	sse	¬pr **TAUTOLOGIA**
pr **OPINIONE**	sse	¬pr **OPINIONE**
pr **NON è TAUTOLOGIA**	sse	¬pr **NON è PARADOSSO**
pr **NON è PARADOSSO**	sse	¬pr **NON è TAUTOLOGIA**

9.PROCEDURA per decidere se un sequente è tautologia, opinione o paradosso

Passo 1: Per decidere se un **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$ è **tautologia** o meno
si applichi a tal sequente la procedura 7. di decisione della sua derivabilità
Si hanno due casi:
I caso: il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **derivabile**, dunque è **tautologia** e quindi STOP.
II caso: il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **NON derivabile** e quindi è **NON tautologia**.
Una riga su cui il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è falso si trova secondo la procedura 8. Si vada poi al passo 2.

Passo 2: per decidere se il **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$ è **un paradosso** o meno
si applichi la procedura 7. al sequente $\vdash \neg(\boldsymbol{\Gamma}^{\&} \rightarrow \boldsymbol{\Delta}^{\vee})$
Ora si hanno due sottocasi:
I sottocaso: $\vdash \neg(\boldsymbol{\Gamma}^{\&} \rightarrow \boldsymbol{\Delta}^{\vee})$ risulta **NON derivabile** e quindi **NON è tautologia**
e quindi $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **soddisfacibile** (ovvero **NON è un paradosso**)
e poi si applichi la procedura 8. per trovare una riga su cui il sequente $\vdash \neg(\boldsymbol{\Gamma}^{\&} \rightarrow \boldsymbol{\Delta}^{\vee})$ è falso
e la riga ottenuta rende il sequente di partenza $\Gamma \vdash \Delta$ vero, e dunque **NON è un paradosso**.
Ne segue che il sequente di partenza $\Gamma \vdash \Delta$ è un'**opinione** e quindi STOP.
II sottocaso: $\vdash \neg(\boldsymbol{\Gamma}^{\&} \rightarrow \boldsymbol{\Delta}^{\vee})$ risulta **tautologia**
quindi il sequente di partenza $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **PARADOSSO**
dunque STOP.

Esercizi (alcuni tratti da appelli)

Formalizzare le asserzioni elencate sotto in forma di sequente nel linguaggio formale con le variabili proposizionali suggerite considerando che
con la scrittura

$$\frac{\begin{array}{c}\textbf{frase}_1\\ \textbf{frase}_2\\ \ldots.\\ \textbf{frase}_n\end{array}}{\textbf{frase}}$$

s'intende

''**frase**$_1$,**frase**$_2$, ..., **frase**$_n$ $\vdash$ **frase**''

Dopo aver formalizzato le asserzioni elencate sotto in forma di sequente, si stabilisca se tali sequenti sono **tautologie**, **opinioni** o **contraddizioni/paradossi**. Nel caso un sequente risulti un' opinione si mostri una riga in cui è vero e una in cui è falso.

1. $\dfrac{\text{Solo se mi sento stanco rimango a casa.}}{\text{Non rimango a casa se non mi sento stanco.}}$

   si consiglia di usare:
   R =rimango a casa

S = mi sento stanco

2. $$\begin{array}{l} \text{Non si dà il caso che l'affare sia non sicuro o non sia conveniente.} \\ \hline \text{L'affare è conveniente e sicuro.} \end{array}$$

A =l'affare è conveniente
S = l'affare è sicuro

3. $$\begin{array}{l} \text{Non mangio gli spinaci.} \\ \text{Se mi piacessero gli spinaci li mangerei.} \\ \hline \text{Non mi piacciono gli spinaci.} \end{array}$$

si consiglia di usare:
M=mangio gli spinaci
P=mi piacciono gli spinaci

4. $$\begin{array}{l} \text{Non si dà il caso che l'affare non sia conveniente o sicuro.} \\ \hline \text{L'affare non è conveniente nè sicuro.} \end{array}$$

A =l'affare è conveniente
S =l'affare è sicuro

5. $$\begin{array}{l} \text{Se Mario è scontento non programma bene.} \\ \hline \text{Mario è contento solo se programma bene.} \end{array}$$

C=Mario è contento
P=Mario programma bene

6. $$\begin{array}{l} \text{C'è un assemblea studentesca o è giorno festivo solo se le lezioni tacciono.} \\ \hline \text{Non è giorno festivo e non c'è un assemblea studentesca, perció le lezioni non tacciono.} \end{array}$$

L=le lezioni tacciono
A=c'è un assemblea studentesca
F=è giorno festivo

7. $$\begin{array}{l} \text{Non si dà il caso che il fattoriale termini mentre non si esce dal ciclo.} \\ \text{Si esce dal ciclo.} \\ \hline \text{Non si dà il caso che si esca dal ciclo solo se il fattoriale non termina.} \end{array}$$

F= il fattoriale termina
C=si esce dal ciclo

8. $$\begin{array}{l} \text{Non prendo l'ombrello se non piove.} \\ \text{Non piove.} \\ \hline \text{Non prendo l'ombrello.} \end{array}$$

P=piove
O=prendo l'ombrello

9. (1 appello bis)

   Solo se cadono le foglie è autunno.

   Se e solo se non cadono le foglie, non è autunno ma inverno.

   si consiglia di usare:
   C =“cadono le foglie”
   I =“è inverno”
   A=“è autunno”

10. (I appello)

    Se ho tempo rileggo il compito.

    Se e soltanto se ho tempo rileggo il compito.

    si consiglia di usare:
    R =“Rileggo il compito”
    H =“Ho tempo”

11. (II appello)

    Sono all'estero se non sono a Padova.

    Non si dà il caso che sia a Padova e non sia all'estero.

    si consiglia di usare:
    E =“Sono all'estero”
    P =“Sono a Padova”

12. (III appello)

    Non si dà il caso che, se c'è vita sulla Luna, ci sia vita su Marte o su Saturno, o su Giove.

    Se c'è vita sulla Luna e non su Giove allora c'è pure su Marte e Saturno.

    si consiglia di usare:
    L =“C'è vita sulla Luna”
    M =“C'è vita su Marte”
    S=“C'è vita su Saturno”
    G=“C'è vita su Giove”

13. (IV appello)

    Non c'è vita su Giove ma c'è su Marte e Saturno.

    Non si dà il caso che, se c'è vita sulla Luna e non su Giove, allora ci sia pure su Marte.

    si consiglia di usare le variabili dell'asserzione precedente.