III appello 14 giugno 2016

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti di seguito sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero mostrare se sono validi o meno e soddisfacibili o insoddisfacibili in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $(A\&B \ \rightarrow \ C) \ \rightarrow \ (A \ \rightarrow \ (B \ \rightarrow C)) \ \vdash \perp \&\neg \perp$

  - 6 punti
    $\exists x \ (\ \neg C(x) \ \rightarrow \ B(x) \ ) \vdash \exists z \ (\ \neg\neg C(z) \ \vee \ B(z) \ )$

  - 5 punti
    $\forall w \ (\ b = w \ \& \ w = a \ ) \vdash \neg\neg a = b$

  - 7 punti
    $\forall y \ \exists w \ (\ C(y) \ \& \ B(w) \ ) \vdash \exists w \ \forall y \ (\ C(y) \ \rightarrow \ B(w) \ )$

  - 6 punti
    $\neg\forall w \ \neg\neg G(w) \ \vdash \neg\exists y \ D(y)$

• Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla logica classica classica con uguaglianza motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

  - (4 punti)

    Trovi il negozio se prosegui diritto e stai attento.

    Se non prosegui diritto non trovi il negozio.

    si consiglia di usare:
    D = "prosegui diritto"
    A= "stai attento"
    N = "trovi il negozio"

- (6 punti)

$$\frac{\text{Chi viaggia non si annoia.}}{\text{Quelli che si annoiano non viaggiano.}}$$

si consiglia di usare:
V(x)= x viaggia
A(x)= x si annoia

- (7 punti)

$$\frac{\text{Piero ha un'unica bicicletta.}}{\text{Non si dà il caso che Piero non abbia una bicicletta.}}$$

si consiglia di usare:
B(x,y)="x è una bicicletta di y"
p="Piero"

- (11 punti)

Graziano e Paolo sono fratelli di Rosaria.
Paolo è diverso da Graziano.
Rosaria è diversa da Paolo.
Rosaria è diversa da Graziano.
Fernando non ha fratelli.

Fernando e Rosaria non hanno un unico fratello.

si consiglia di usare:
F(x,y)="x è fratello di y"
g=Graziano, p=Paolo
r=Rosaria, f=Fernando

- (7 punti)

$$\frac{\text{C'è chi va in vacanza al mare oppure c'è chi va in vacanza in montagna.}}{\text{Qualcuno va in vacanza al mare oppure in montagna.}}$$

si consiglia di usare:
$A(x)$="x va in vacanza al mare"
$O(x)$="x va in vacanza in montagna"

- (7 punti)

$$\frac{\text{C'è chi va in vacanza al mare e c'è chi va in vacanza in montagna.}}{\text{Qualcuno va in vacanza sia al mare che in montagna.}}$$

si consiglia di usare:
$A(x)$="x va in vacanza al mare"
$O(x)$="x va in vacanza in montagna"

- (9 punti)

"Nessuno ama e onora quelli che non amano o non onorano se stessi, e ama e onora soltanto loro. "

si consiglia di usare:
A(x,y)= x ama y
O(x,y)= x onora y

- (34 punti) Sia T_{can} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Soltanto se abbaia Pluto non è spaventato.
  - Non si dà il caso che Lessie abbai.
  - Nessuno non abbaia e non è spaventato.
  - Se abbaia Gippo allora è spaventato.
  - Gippo non è spaventato se non abbaia.
  - Soltanto se non è spaventato Pluto non abbaia.

  Si consiglia di usare:
  S(x)="x è spaventato"
  A(x)="x abbaia"
  p="Pluto"
  g="Gippo"
  l="Lessie"

  Dedurre poi in T_{can} le seguenti affermazioni:

  - Gippo o è spaventato o abbaia.
  - Gippo abbaia ed è spaventato.
  - Ciascuno o abbaia o è spaventato.
  - C'è qualcuno che abbaia ed è spaventato.
  - Lessie è spaventato.
  - Qualcuno è spaventato e non abbaia.
  - O Pluto non abbaia oppure non si dà il caso che Pluto abbai e sia spaventato.

- (30 punti) Sia T_{alb} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Nell'albergo non c'è un cinese se non c'è un interprete di cinese.
  - Se nell'albergo c'è un interprete di arabo allora c'è un arabo e c'è un cinese.
  - Nell'albergo non ci sono arabi anche se nell'albergo c'è un interprete di arabo.
  - Nell'albergo c'è un interprete di arabo oppure c'è un cinese.
  - Nell'albergo c'è un cinese se nell'albergo c'è un interprete di arabo.
  - Nell'albergo non c'è alcun arabo se nell'albergo c'è un interprete di cinese o c'è un cinese.

  Si consiglia di usare:
  C(x)= "x è un cinese nell'albergo"
  IC(x)= "x è una interprete di cinese nell'albergo"
  A(x)= "x è un arabo nell'albergo"
  IA(x)="x è un interprete di arabo nell'albergo"

  Dedurre poi in T_{alb} le seguenti affermazioni:

- Nell'albergo c'è un cinese.
- Nell'albergo c'è un interprete di cinese.
- Nell'albergo non ci sono arabi.
- Nell'albergo non ci sono interpreti di arabo.
- Se nell'albergo c'è un interprete di arabo allora non c'è nessun cinese.

- Stabilire quali di questi sequenti sono validi nell'aritmetica di Peano **PA** derivandoli, e nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile:

1. (5 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ (\ x = y\ \rightarrow\ \neg s(x) \neq s(y)\ )$
2. (6 punti) $\vdash\ \exists x\ \exists y\ \exists z\ z + y = 5 \cdot x$
3. (8 punti) $\vdash \forall x\ \forall y\ (\ x = y\ \rightarrow \neg\ s(x) \neq s(y)\ )$
4. (8 punti) $4 = 0\ \vdash \forall z\ z = 5$
5. (8 punti) $\vdash \forall y\ y = 0 + 5$
6. (15 punti) $\vdash \forall x\ (\ x\ \neq 3\ \vee\ x \neq 2\ )$

- Stabilire se le seguenti regole, formalizzate dove occorre, e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

  - (15 punti)

$$\frac{\text{Anita è sorella di Giorgio} \ \vdash\ \text{Giorgio è fratello di Anita.}}{\text{Anita è sorella di Giorgio} \ \vdash\ \text{Qualcuno ha una sorella.}}\ 1$$

ove
$S(x, y)$="x è sorella di y"
$F(x, y)$="x è fratello di y"
a="Anita"
g="Giorgio"

  - (10 punti)

$$\frac{D \vdash C \vee B}{\neg B \vdash \neg D\ \vee\ (\ C \vee \neg C\ )}\ 2$$

  - (16 punti)

$$\frac{\text{Qualcuno è attento e partecipa.}\ \vdash \text{Non tutti guardano il telefonino.}}{\text{Tutti guardano il telefonino.}\ \vdash \text{Nessuno è attento.}}\ 3$$

ove
$A(x)$="x è attento"
$P(x)$="x partecipa"
$G(x)$="x guarda il telefonino"

Logica classica con uguaglianza- $\mathrm{LC}_=$

$$\overset{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla} \qquad \overset{\text{ax-}\top}{\Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\mathrm{S} \qquad \overset{= -\mathrm{ax}}{\Gamma \vdash t = t, \Delta}$$

Aritmetica di Peano PA

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $\mathrm{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx}, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{sx1} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{dx1} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{−S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{−D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{"}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{"}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{−S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{−D}_v$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{tra}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{cf}^* \\ \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\mathrm{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\ P(x) \to P(s(x))\ )}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$