## SIMULAZIONE - appello 22 dicembre 2021

nome: cognome:

- Scrivere in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Si ricorda di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Si ricorda di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Si esplicitino le eventuali regole derivate usate che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- ATTENZIONE: se si risolvono correttamente TUTTI gli esercizi con il segno ++ si prende il voto 30 independentemente dall'avere o meno un bonus accumulato.
- non si supera l'appello operando solo formalizzazioni a meno che non sia siano completati correttamete il primo e terzo esercizio qui di seguito.

- Mostrare se i sequenti elencati sotto sono tautologie, opinioni o paradossi in logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità si assegna il doppio dei punti indicati).

  - (`obbligatorio per chi NON ha bonus`)

    3 punti
    $B \vdash \neg(\ B\ \&\ \neg B\ )\ \&\neg B$

  - (++)
    6 punti
    $\neg\forall x\ \forall y\ y = x,\ a = b \vdash \forall x\ \exists y\ x \neq y$

  - (`obbligatorio per chi NON ha bonus`)

    5 punti
    $\exists z\ A(z)\ ,\ \neg\forall x\ A(x) \vdash \neg\ \forall y\ \neg\ A(x)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi nella logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità si assegna il doppio dei punti indicati).

  - (6 punti)
    Se uno non cerca bene allora non trova.
    Chi non trova cerca.
    ______________________________
    Dunque tutti cercano.

    si consiglia di usare:
    $C(y) =$"y cerca"

$T(x)$ = “x trova”

- (6 punti)

$$\frac{\text{Nessuno cerca.}}{\text{Qualcuno non cerca e non trova.}}$$

si consiglia di usare:
$C(y)$ =“y cerca”
$T(x)$ = “x trova”

- (++) (12 punti)

$$\frac{\text{Ognuno ha un'unica madre diversa da sè.}}{\begin{array}{l}\text{Se Eva non è Ruth, allora o Eva non è la madre di Leo oppure}\\ \qquad\text{Ruth non è la madre di Leo e Leo non è la madre di Leo.}\end{array}}$$

si consiglia di usare:
$M(x, y)$= $x$ è madre di $y$
l=Leo, e=Eva r=Ruth

- (++) (12 punti)

“Non esiste alcuno che non ammira tutti quelli che ammirano se stessi e soltanto loro, e inoltre non ammira se stesso .”

si consiglia di usare:
$A(x, y)$=$x$ ammira $y$

- (31 punti) Sia $T_{dan}$ la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
  - Eleonora danza solo se Alice non danza.
  - Se Eleonora danza oppure il primo ballerino danza allora Alice danza.
  - Se Alice non danza, allora pure il primo ballerino non danza ma Gertrude danza.
  - Se Gertrude danza allora ciascuno o danza o non danza.
  - Eleonora oppure il primo ballerino danzano, se Alice danza.
  - Se il primo ballerino non danza allora pure Gertrude non danza.

  Si consiglia di usare:
  D(x)= x danza,
  e=Eleonora    p=il primo ballerino    a=Alice    g=Gertrude

  Formalizzare le seguenti affermazioni e dedurne la validità in $T_{dan}$ (nel derivare un teorema della lista sotto si possono utilizzare i teoremi precedenti nella lista):
  - (6 punti) Alice danza.
  - (4 punti) Eleonora non danza.
  - (5 punti) Il primo ballerino danza.
  - (4 punti) Se Gertrude danza anche Alice danza.
  - (5 punti) Qualcuno danza ma non tutti.

- (++ 60 punti) Sia $T_{ch}$ la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
    - (3 punti) Se uno chiama un secondo e questo secondo chiama un terzo allora il primo non chiama il terzo.
    - (2 punti) Piero non chiama nessuno.
    - (2 punti) Se uno chiama un secondo, questo secondo chiama il primo.
    - (3 punti) Veronica chiama Mila e soltanto lei.
    - (2 punti) Non si dà il caso che esista qualcuno che Luca non chiami.

  si consiglia di usare:
  $C(x, y)$= $x$ chiama $y$
  l=Luca    p= Piero,    v= Veronica,    m= Mila

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria in $T_{ch}$ (nel derivare un teorema della lista sotto si possono utilizzare i teoremi precedenti nella lista):
    - (6 punti) Piero non chiama Luca.
    - (6 punti) Luca chiama Piero.
    - (12 punti) Mila chiama Veronica.
    - (12 punti) Nessuno chiama se stesso.
    - (12 punti) Mila è diversa da Veronica.

- (++) : Dall'affermazione

  **Ip    D'inverno non tutti non vanno a sciare.**

  si dica quali delle seguenti affermazioni si possono dedurre (la classificazione di ciascuna vale 8 punti se è deducibile e 14 punti se NON lo è):

  A **Se è inverno qualcuno va a sciare e qualcuno non ci va.**
  B **Se è inverno qualcuno va a sciare oppure qualcuno non ci va.**
  C **Se tutti vanno a sciare non è inverno.**

  Si giustifichi la risposta corretta producendo una sua derivazione nella teoria predicativa

  $$\mathbf{T_{Ip} = LC_= + Ip}$$

  dopo aver formalizzato ciascuna affermazione utilizzando:
  **S(x)= x va a sciare**
  **I=è inverno**
  Inoltre si giustifichi le risposte "affermazione X" non corrette classificando in $\mathbf{LC_=}$ il sequente **Ip** $\vdash$ "affermazione X" .

- Stabilire se la seguente regola è sicura rispetto alla semantica classica (nel caso di regola non sicura si analizzi entrambe le inverse):

  - (++ solo sicurezza della regola) (15 punti)

$$\frac{F \vdash \neg C \;\&\; M \qquad\qquad C \vdash \neg M}{\neg\neg M \;\vee\; F \vdash \neg C}\; 1$$

- (++) (32 punti) (*Esercizio facoltativo*)

  In un gioco due amiche fanno un'affermazione, che è vera o falsa.
  Un'affermazione è mancante e l'altra è riportata sotto:
  **Celeste**: ....
  **Morgana**: **almeno una di noi afferma il vero**.

  Si può dedurre, anche se non si conosce l'affermazione di Celeste, quante affermazioni sono vere?

  a) No, ma se Celeste dice il vero anche Morgana dice il vero.
  a') No, ma se Morgana dice il vero anche Celeste dice il vero.
  b) Sì, sono vere tutte e due le affermazioni.
  c) Sì, è vera solo l'affermazione di Morgana.
  d) Sì, è vera solo l'affermazione di Celeste.
  e) Nessuna affermazione è vera.

  Si analizzino le varie affermazioni nella teoria proposizionale $T_{Morgana}$ ottenuta estendendo $\mathbf{LC}_p$ con la formalizzazione di ciò che dice Morgana (formalizzazione 2 punti) tramite:
  $M$= l'affermazione di Morgana è vera
  $C$= l'affermazione di Celeste è vera

## Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\perp & \text{ax-}\mathtt{tt} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma\ ,\ t_{ter} = s_{ter}\ ,\ \Gamma(t_{ter})\ \vdash\ \Delta(t_{ter})\ ,\ \nabla}{\Sigma\ ,\ \Gamma(s_{ter})\ ,\ t_{ter} = s_{ter}\ \vdash\ \Delta(s_{ter})\ ,\ \nabla}\ =-\mathrm{S} \qquad \begin{array}{c} =-\mathrm{ax} \\ \Gamma \vdash t_{ter} = t_{ter}\ ,\ \Delta \end{array}$$

**TAUTOLOGIE CLASSICHE**

| | | | |
|---|---|---|---|
| associatività $\vee$ | $(A \vee B) \vee C$ | $\leftrightarrow$ | $A \vee (B \vee C)$ |
| associatività & | $(A \& B) \& C$ | $\leftrightarrow$ | $A \& (B \& C)$ |
| commutatività $\vee$ | $A \vee B$ | $\leftrightarrow$ | $B \vee A$ |
| commutatività & | $A \& B$ | $\leftrightarrow$ | $B \& A$ |
| distributività $\vee$ su & | $A \vee (B \& C)$ | $\leftrightarrow$ | $(A \vee B) \& (A \vee C)$ |
| distributività & su $\vee$ | $A \& (B \vee C)$ | $\leftrightarrow$ | $(A \& B) \vee (A \& C)$ |
| idempotenza $\vee$ | $A \vee A$ | $\leftrightarrow$ | $A$ |
| idempotenza & | $A \& A$ | $\leftrightarrow$ | $A$ |
| leggi di De Morgan | $\neg(B \vee C)$ | $\leftrightarrow$ | $\neg B \& \neg C$ |
| | $\neg(B \& C)$ | $\leftrightarrow$ | $\neg B \vee \neg C$ |
| legge della doppia negazione | $\neg\neg A$ | $\leftrightarrow$ | $A$ |
| implicazione classica | $(A \rightarrow C)$ | $\leftrightarrow$ | $\neg A \vee C$ |
| disgiunzione come antecendente | $(A \vee B \rightarrow C)$ | $\leftrightarrow$ | $(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)$ |
| congiunzione come antecendente | $(A \& B \rightarrow C)$ | $\leftrightarrow$ | $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$ |
| legge della contrapposizione | $(A \rightarrow C)$ | $\leftrightarrow$ | $(\neg C \rightarrow \neg A)$ |
| legge del modus ponens | $A \& (A \rightarrow C)$ | $\rightarrow$ | $C$ |
| legge della NON contraddizione | $\neg(A \& \neg A)$ | | |
| legge del terzo escluso | $A \vee \neg A$ | | |
| leggi di De Morgan | $\neg(\exists x\, A(x))$ | $\leftrightarrow$ | $\forall x\, \neg A(x)$ |
| | $\neg(\forall x\, A(x))$ | $\leftrightarrow$ | $\exists x\, \neg A(x)$ |

### Regola di composizione

$$\frac{\vdash \mathtt{fr} \qquad\qquad \Gamma, \mathtt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

## Regole per velocizzare derivazioni in $\mathbf{LC}_=$

si ricorda che $t \neq s \ \equiv \ \neg t = s$

$$\frac{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \qquad \frac{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C}$$

$$\frac{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \qquad \frac{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{−S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{−D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{−S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{−D}_v$$