I appello 22 gennaio 2018

nome: cognome:

- Scrivere in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Si ricorda di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Si ricorda di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Si esplicitino le eventuali regole derivate usate che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti elencati sotto sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero mostrare se sono validi o meno e soddisfacibili o insoddisfacibili in logica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso)

  - 3 punti
    $\vdash (\, B \,\&\neg(B \vee C)\,) \,\&\, (\, B \vee C\,)$

  - 5 punti
    $\vdash \forall x \,(\, B(x) \;\vee\; \neg C(x)\,)$

  - 6 punti
    $\neg\forall x \forall w\; x = w \vdash \forall z\; \exists y\; z \neq y$

  - 5 punti
    $\exists x\; \exists w\; (\, C(x) \,\&\, B(w)\,) \vdash \exists y\; (\, \neg C(y) \;\vee\; y \neq c \rightarrow\; B(y)\,)$

• Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità i punti aumentano della metà arrotondata per eccesso)

  - (4 punti)

    Non si dà il caso che inizi la festa e non sia già buio.
    ___
    Solo se piove la festa inizia.

    si consiglia di usare:
    P = "piove"
    B = "è già buio"
    F= "la festa inizia"

- (6 punti)

$$\frac{\text{Non inizia la festa se non tutti sono presenti.}}{\text{Se inizia la festa qualcuno è presente.}}$$

si consiglia di usare:
$P(x)$ =“x è presente”
$I(x)$=“x inizia”
f= la festa

- (6 punti)

$$\frac{\text{Qualcuno non è presente all'evento.}}{\text{Tutti sono stati invitati all'evento ma non tutti sono presenti.}}$$

si consiglia di usare:
$P(x)$ =“x è presente all’evento”
$I(x)$=“x è stato invitato all’evento”

- (9 punti)

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Adolfo ha un'unica cugina.}\\ \text{Rosaria è diversa da Beatrice.}\end{array}}{\text{Se Beatrice è cugina di Adolfo allora Rosaria non è cugina di Adolfo oppure tutti sono cugini di tutti.}}$$

si consiglia di usare:
C(x,y)=“x è una cugina di y”
a=“Adolfo”
r=“Rosaria”
b=“Beatrice”

- (14 punti)
“Nessuno lavora per se stesso e lavora soltanto per quelli che non lavorano per se stessi.”

si consiglia di usare:
L(x,y)= “x lavora per y”

- (14 punti)
“Non esiste alcuno che, o dorme o se lui non dorme allora tutti non dormono. ”

si consiglia di usare:
$D(x)$= x dorme

- Sia T_{esc} la teoria ottenuta estendendo LC$_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
  - Walter va in escursione se e solo se, o Dino ci va oppure Beatrice non ci va.
  - Sia Celeste che Dino vanno in escursione se qualcuno non ci va.
  - Beatrice va in escursione solo se non ci va Celeste.
  - Sia Celeste che Beatrice non vanno a far l’escursione se Walter non ci va.

Si consiglia di usare:
$V(x)= x$ va in escursione, c=Celeste, d=Dino, b=Beatrice, $\overline{w}$=Walter.

Formalizzare le seguenti affermazioni e dedurne la validità in T_{esc}:

- (3 punti) Se Beatrice va in escursione anche Walter ci va.
- (3 punti) Se qualcuno non va in escursione allora Celeste ci va.
- (5 punti) Celeste va in escursione.
- (4 punti) Beatrice non va in escursione.
- (5 punti) Dino e Walter vanno in escursione.
- (4 punti) Qualcuno va in escursione e qualcuno non ci va.

- Sia T_{frat} la teoria ottenuta estendendo $\mathrm{LC}_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi (4 punti se non diversamente indicato):
  - Se uno è fratello di un altro e quest'altro è fratello di un terzo, il primo è fratello del terzo.
  - Se uno è fratello di un'altro allora quest'ultimo è diverso dal primo.
  - Toni ha un'unico fratello.
  - Non si dà il caso che Carlo non sia fratello di Toni.
  - Se uno è fratello di un'altro, quest'altro è fratello del primo.

  si consiglia di usare:
  $F(x, y)= x$ è fratello di y
  d=Dino, p= Pietro, c= Carlo, t=Toni

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria in T_{frat}:

  - (6 punti) Qualcuno è fratello di un altro.
  - (8 punti) Pietro non è fratello di Pietro.
  - (8 punti) Toni è fratello di Carlo.
  - (8 punti) Se Pietro è diverso da Carlo allora Pietro non è fratello di Toni.
  - (10 punti) Se uno è fratello di Dino e anche di Toni allora Dino è uguale a Carlo.

- Stabilire se le seguenti regole, formalizzate dove occorre, e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):
  - (6 punti)

$$\frac{E, \neg D \vdash A}{E, B \rightarrow A \vdash D}\ 1$$

  - (6 punti)

$$\frac{\text{Non è sera} \vdash \text{Solo se non è domenica Pietro non è a teatro}}{\text{Piero non è a teatro ed è domenica} \vdash \text{ È sera}}\ 2$$

    ove
    S="è sera"
    P="Piero è a teatro"
    D="è domenica"

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (7 punti) $\vdash \forall y \; \exists z \; \exists w \; (y + w) + z = z$
  2. (7 punti) $\vdash \forall w \; \exists y \; 0 + y = w \cdot 0$

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\overset{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla} \qquad \overset{\text{ax-}\mathtt{tt}}{\Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\mathrm{S} \qquad \overset{= -\mathrm{ax}}{\Gamma \vdash t = t, \Delta}$$

TAUTOLOGIE CLASSICHE

associatività $\vee$	$(A \vee B) \vee C$	$\leftrightarrow$	$A \vee (B \vee C)$
associatività &	$(A \& B) \& C$	$\leftrightarrow$	$A \& (B \& C)$
commutatività $\vee$	$A \vee B$	$\leftrightarrow$	$B \vee A$
commutatività &	$A \& B$	$\leftrightarrow$	$B \& A$
distributività $\vee$ su &	$A \vee (B \& C)$	$\leftrightarrow$	$(A \vee B) \& (A \vee C)$
distributività & su $\vee$	$A \& (B \vee C)$	$\leftrightarrow$	$(A \& B) \vee (A \& C)$
idempotenza $\vee$	$A \vee A$	$\leftrightarrow$	A
idempotenza &	$A \& A$	$\leftrightarrow$	A
leggi di De Morgan	$\neg(B \vee C)$	$\leftrightarrow$	$\neg B \& \neg C$
	$\neg(B \& C)$	$\leftrightarrow$	$\neg B \vee \neg C$
legge della doppia negazione	$\neg\neg A$	$\leftrightarrow$	A
implicazione classica	$(A \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$\neg A \vee C$
disgiunzione come antecendente	$(A \vee B \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)$
congiunzione come antecendente	$(A \& B \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$
legge della contrapposizione	$(A \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(\neg C \rightarrow \neg A)$
legge del modus ponens	$A \& (A \rightarrow C)$	$\rightarrow$	C
legge della NON contraddizione	$\neg(A \& \neg A)$		
legge del terzo escluso	$A \vee \neg A$		
leggi di De Morgan	$\neg(\exists x\, A(x))$	$\leftrightarrow$	$\forall x\, \neg A(x)$
	$\neg(\forall x\, A(x))$	$\leftrightarrow$	$\exists x\, \neg A(x)$

Regola di composizione

$$\frac{\vdash \mathtt{fr} \qquad\qquad \Gamma, \mathtt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

Regole derivate o ammissibili per $\mathbf{LC}_=$

si ricorda che $t \neq s \ \equiv \ \neg t = s$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C}$$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\text{S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists-\text{D}_v$$

$$\overset{\text{rf}^*}{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'}$$

$$\overset{\text{sm}^*}{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta}$$

$$\overset{\text{tra}^*}{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta} \qquad \overset{\text{cf}^*}{\Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta}$$

$$\overset{\text{cp}^*}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

Aritmetica di Peano PA

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $\mathrm{LC}_=$ la regola di composizione

$$\frac{\vdash \mathtt{fr} \qquad\qquad \Gamma, \mathtt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}$$

e i seguenti assiomi:

$$
\begin{aligned}
&Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0\\
&Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \rightarrow x = y\ )\\
&Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x\\
&Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)\\
&Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0\\
&Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x\\
&Ax7. \vdash A(0) \& \forall x\ (\ A(x) \rightarrow A(s(x))\ ) \rightarrow \forall x\ A(x)
\end{aligned}
$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$