I appello 23 gennaio 2017

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti di seguito sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero mostrare se sono validi o meno e soddisfacibili o insoddisfacibili in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di opinioni o paradossi i punti vanno raddoppiati):

- 3 punti
  $A \vee B \vdash \neg(B \rightarrow A)$

- 5 punti
  $\vdash \exists w\ (F(w) \vee \bot) \rightarrow \exists z\ (B(z) \,\&\, F(z))$

- 5 punti
  $\exists z\ F(z) \rightarrow \exists z\ \neg\neg A(z) \vdash \exists x\ (F(x) \,\&\, G(x) \rightarrow A(x))$

- 6 punti

  $\neg\forall x\ \exists y\ x = y \vdash \neg\neg\forall x\ (x = c \,\&\, c = d)$

- 6 punti
  $\vdash \forall x\ \forall y\ (\neg A(x) \rightarrow A(y)) \,\&\, \forall y\ \forall x\ (A(y) \rightarrow \neg A(x))$

- 7 punti

  $\exists w\ w \neq c \vdash \neg\forall x\ \forall y\ (x = y \,\&\, a = x)$

• Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla logica classica con uguaglianza motivando la risposta. Inoltre nel caso di opinioni o paradossi il punteggio è raddoppiato e la sola traduzione in formula proposizionale conta 1 punto mentre quella in formula predicativa 2 punti.

- (4 punti)

  Solo se si è in forma conviene correre.

  Se non si è in forma non conviene correre e solo se non si è in forma non conviene correre.

  si consiglia di usare:
  F="Si è in forma"
  C="Conviene correre"

- (6 punti)

  Non si dà il caso che le rose non abbiano le spine.
  Nessuna rosa non punge.

  I fiori che non pungono non sono rose.

  si consiglia di usare:
  S(x) = "x ha le spine"
  R(x) = "x è una rosa"
  P(x) = "x punge"
  F(x)="x è un fiore"

- (6 punti)

  Nessuno parla se tutti sono attenti.
  Mimmo è attento.

  Non si dà il caso che Mimmo parli.

  si consiglia di usare:
  P(x) = "x parla"
  A(x)="x è attento"
  m=Mimmo

- (6 punti)

  Qualche italiano emigrato negli Stati Uniti è anche cittadino americano.

  Non si dà il caso che nessun cittadino americano sia italiano.

  si consiglia di usare:
  I(x)="x è italiano"
  E(x)="x è emigrato negli Stati Uniti"
  A(x)= "x è un cittadino americano"

- (7 punti)

  Sia la E11 che la E12 sono strade forestali.
  La E12 è diversa dalla E12.

  Non esiste un'unica strada forestale.

  si consiglia di usare:
  F(y)="y è una strada forestale"
  e="E11"
  p="E12"

- (8 punti)

  C'è un'unica strada forestale che consente di arrivare al rifugio.
  La E11 è una strada forestale che consente di arrivare al rifugio.
  La F12 è diversa dalla E11.

  La F12 non è una strada forestale che consente di arrivare al rifugio.

  si consiglia di usare:
  F(y)="y è una strada forestale"
  R(x)= "x consente di arrivare al rifugio"
  e="E11"
  f="F12"

- (14 punti)

  "Non si dà il caso che non ci sia nessuno che non dorma oppure esista qualcuno che se lui non dorme allora tutti non dormono. "

  si consiglia di usare:
  D(x)= x dorme

- (14 punti)

  "C'è uno che ha una Ferrari che prova lui e provano questa Ferrari tutti quelli che non hanno una Ferrari e soltanto quelli che non hanno una Ferrari."

  si consiglia di usare:
  H(x,y)= x ha un y
  f=Ferrari
  P(x,y)= x prova y

- Sia T_{cas} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Soltanto se la madre e il padre non stanno a casa Alice non esce con il cane.
  - Alice esce con il cane se il padre non sta a casa o non è mattina.
  - Se la madre non sta a casa Alice non esce con il cane.
  - Il padre sta a casa se e solo se è mattina.
  - Qualcuno non sta a casa.
  - Qualcuno esce con il cane.

  Si consiglia di usare:
  P(x)="x stanno a casa"
  E(x)="x esce con il cane"
  a="Alice"
  p="il padre"
  m="la madre"
  M="è mattina"

  Dedurre poi in T_{cas} le seguenti affermazioni (ciascuna vale 4 punti):

  - Il padre non sta a casa se non è mattina.

- Se il padre sta in casa Alice esce con il cane.
- Se non è mattina Alice esce con il cane.
- Se è mattina Alice esce con il cane.
- Se Alice non esce con il cane allora è mattina e il padre sta in casa.
- Il padre non sta in casa se Alice non esce con il cane.
- Alice esce con il cane.
- La madre sta in casa.
- Qualcuno sta a casa e qualcuno esce con il cane.

• Sia T_{film} la teoria ottenuta estendendo $\mathbf{LC}_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Non si dà il caso che il regista sia Marylin.
  - Gloria è diversa da Marylin e dal regista.
  - Gloria non filma il regista.
  - Il regista filma qualcuno e solo lui.
  - Quelli che il registra non filma filmano il regista.
  - Per ognuno c'e' qualcuno che lo filma.
  - Soltanto quelli che il regista non filma filmano il regista.
  - Marylin non filma nessuno.

  si consiglia di usare:
  S(x,y)= x filma y
  m=Marylin,
  g=Gloria
  r=il regista

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata :

  - (8 punti) Marylin non filma il regista.
  - (10 punti) Il regista filma quelli che non lo filmano.
  - (10 punti) Il regista filma soltanto quelli che non lo filmano.
  - (10 punti) Il regista filma Gloria.
  - (8 punti) Non si dà il caso che tutti filmino il regista.
  - (10 punti) C'è qualcuno che il regista non filma.
  - (10 punti) Il registra filma Marylin.
  - (10 punti) Non si dà il caso che tutti quelli che il regista filma filmino il regista.

• Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (5 punti) $5 = 0 \vdash$
  2. (6 punti) $\vdash \exists w\ \exists y\ \exists z\ w \cdot y = z$
  3. (8 punti) $\vdash \exists z\ y = (z + 0) + 0$

4. (10 punti) $\vdash \exists x\ (\ x+2 = (x+1)+1)$
5. (10 punti) $\vdash\ \forall x\ x = 3$
6. (10 punti) $\vdash \forall w\ \exists z\ \ s(z+0) = w+1$
7. (20 punti) $\vdash \forall x\ s(x) = s(0)\ \vee\ \exists y\ \ x = s(y)$

- Stabilire se le seguenti regole, formalizzate dove occorre, e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

  - (10 punti)

$$\frac{H \vdash \neg D\ \&\ C \qquad\qquad C \vdash M}{H \vdash M}\ 1$$

  - (16 punti)

$$\frac{\text{Qualcuno balla o canta.}\ \vdash\ \text{Tutti applaudono.}}{\text{Lucia balla.}\ \vdash\ \text{Gino applaude.}}\ 2$$

ove
$B(x)$=“x balla”
$C(x)$=“x canta”
$A(x)$=“x applaude”
l=Lucia
g=Gino

  - (20 punti)

$$\frac{\text{Sono tutti in vacanza}\ \vdash \text{Nessuno lavora}}{\text{Elisabetta lavora} \vdash \text{Elisabetta non è in vacanza.}}\ 3$$

ove
$L(x)$=“x è al lavoro”
$V(x)$=“x è in vacanza”
e=“Elisabetta”

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot & \text{ax-}\mathtt{tt} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\mathrm{S} \qquad \begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \Gamma \vdash t = t, \Delta \end{array}$$

Aritmetica di Peano PA

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $LC_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx}, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{''} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{''} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{''}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{''}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–D}_v$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{tra}^* & \text{cf}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_= + \text{comp}_{sx} + \text{comp}_{dx}$ si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$