

II appello 9 febbraio 2016

nome:

cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPlicitARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- Mostrare se i sequenti di seguito sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero mostrare se sono validi o meno e soddisfacibili o insoddisfacibili in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

3 punti

- $(A \rightarrow B \& D) \vee (D \rightarrow A) \vdash A \rightarrow D$

6 punti

- $\forall w (C(w) \& \exists y B(y)) \vdash \forall y (C(y) \vee B(y))$

6 punti

- $\neg b = c \vdash \exists z \exists y (\neg c = z \& \neg b = y)$

6 punti

- $\exists y G(y) \vdash \forall z \neg G(z)$

8 punti

- $b \neq c \vdash \forall x \exists z \neg x = z$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla logica classica classica con uguaglianza motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

- (4 punti)

La festa inizia solo se non piove.

Non si dà il caso che, piova e la festa inizi, oppure ci sia il sole.

si consiglia di usare:

P = "piove"

S = "c'è il sole"

F = "la festa inizia"

- (6 punti)

In aula ci sono degli studenti.

Se in aula non ci fosse nessuno potrei chiudere la porta.

si consiglia di usare:

$A(x)$ = x è in aula

$S(x)$ = x è uno studente

C = potrei chiudere la porta

- (9 punti)

Ognuno ha un'unica madre.

Vittoria è madre di Cristian.

Se Vittoria non è la persona qui accanto

allora la persona qui accanto non è madre di Cristian.

si consiglia di usare:

$M(x,y)$ = " x è madre di y "

p = "la persona qui accanto"

c = "Cristian"

v = "Vittoria"

- (8 punti)

A Gigi piace una cosa e soltanto quella.

Andare al cinema è diverso dall'andare a teatro.

Se a Gigi piace andare a teatro allora non gli piace andare al cinema.

si consiglia di usare:

$P(x,y)$ = ad x piace y

t = andare a teatro

c = andare al cinema

g = Gigi

- (7 punti)

Gli animali domestici sono animali da compagnia.

Gli animali selvatici non sono animali da compagnia.

Nessuno è sia animale domestico che animale selvatico.

si consiglia di usare:

$D(x)$ = " x è animale domestico"

$S(x)$ = " x è animale selvatico"

$C(x)$ = " x è animale da compagnia"

- (6 punti)

Gli animali domestici sono animali da compagnia.

Gli animali selvatici non sono animali da compagnia.

Esistono animali da compagnia.

si consiglia di usare:

$D(x)$ = " x è animale domestico"

$S(x)$ = " x è animale selvatico"

$C(x) = "x \text{ è animale da compagnia}"$

- (10 punti)

"Qualcuno discute e qualcuno pensa a coloro che non pensano a se stessi e pensa soltanto a coloro che non pensano a se stessi. "

si consiglia di usare:

$D(x) = x \text{ discute}$

$P(x,y) = x \text{ pensa a } y$

- (9 punti)

"Non esiste nessuno tale che se lui è felice allora tutti sono felici o sereni. "

si consiglia di usare:

$F(x) = x \text{ è felice}$

$S(x) = x \text{ è sereno}$

• (32 punti) Sia T_{suon} la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Ulderico suona il flauto se Noemi suona il clarinetto.
- Ulderico non suona il flauto se Noemi non suona il clarinetto.
- Ottavio non suona il clarinetto.
- Nessuno suona sia flauto che clarinetto.
- Tutti o suonano il clarinetto oppure il flauto.

Si consiglia di usare:

$S(x,y) = "x \text{ suona } y"$

$f = "flauto"$

$c = "clarinetto"$

$u = "Ulderico"$

$o = "Ottavio"$

$n = "Noemi"$

Dedurre poi in T_{suon} le seguenti affermazioni:

- Ottavio suona il clarinetto oppure suona il flauto.
- Ottavio suona il flauto.
- Tutti suonano qualcosa.
- Noemi non suona sia il clarinetto che il flauto.
- Se Noemi non suona il clarinetto allora suona il flauto.
- Se Ulderico suona il clarinetto allora Noemi suona il flauto.
- Se Noemi suona il flauto allora Ulderico suona il clarinetto.

• (33 punti) Sia T_{fot} la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Tutti fotografano se stessi.
- Fortunato fotografa soltanto se stesso.

- Fortunato è diverso da Alice.
- Alice fotografa Silvana.
- Se uno fotografa uno diverso da sè stesso allora da questo lui è fotografato.

Si consiglia di usare:

$F(x,y)$ = "x fotografa y"

f = "Fortunato"

c = "Alice" s = "Silvana"

Dedurre poi in T_{fot} le seguenti affermazioni:

- Alice fotografa se stessa.
 - Tutti fotografano qualcuno.
 - Silvana fotografa Alice se Alice non è Silvana.
 - Fortunato non fotografa Alice.
 - Alice non fotografa Fortunato.
- Stabilire quali di questi sequenti sono validi nell'aritmetica di Peano **PA** derivandoli, e nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile:

1. (5 punti) $\vdash \exists y \exists z z \neq s(y)$
2. (6 punti) $\vdash \exists x \exists y \exists z z \cdot y = y + x$
3. (8 punti) $\vdash \forall x \forall y (sy = sx \vee ss(x) \neq ss(y))$
4. (8 punti) $\vdash \forall y y \neq 4$
5. (8 punti) $\vdash 4 = 0 \rightarrow \exists z z \neq 5$
6. (12 punti) $\vdash \forall x x \cdot 1 = x$

- Stabilire se le seguenti regole, formalizzate dove occorre, e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

- (15 punti)

$$\frac{\text{Mimmo cucina.} \vdash \text{Alice mangia.}}{\text{Mimmo cucina.} \vdash \text{Tutti mangiano}} 1$$

ove

$C(x)$ = "x cucina"

$M(x)$ = "x mangia"

a = "Alice" m = "Mimmo"

- (10 punti)

$$\frac{D \vdash C}{\neg C \vdash \neg D \vee H} 2$$

- (15 punti)

$$\frac{\text{Qualcuno dorme.} \vdash \text{È notte.}}{\text{Tutti dormono e qualcuno russa.} \vdash \text{È notte.}} 3$$

ove

N = "è notte"

$D(x)$ = "x dorme"

$R(x)$ = "x russa"

Logica classica con uguaglianza- $LC_{=}$

$\frac{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'}$	$\frac{\text{ax-}\perp}{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla}$	$\frac{\text{ax-}\top}{\Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'}$
$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma} \text{sc}_{sx}$	$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{dx}$	
$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&S$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-D$	
$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee-S$	$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee D$	
$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg-S$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg-D$	
$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow-S$	$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow-D$	
$\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall-S$	$\frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \forall-D \ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$	
$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \nabla} \exists-S \ (w \notin VL(\Gamma, \exists x A(x), \nabla))$	$\frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists-D$	
$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} =-S$	$\frac{}{\Gamma \vdash t = t, \Delta} =-ax$	

Aritmetica di Peano PA

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $LC_{=}$ + comp_{sx} + comp_{dx} , ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla} \text{comp}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

- $Ax1. \vdash \forall x \ s(x) \neq 0$
- $Ax2. \vdash \forall x \ \forall y \ (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$
- $Ax3. \vdash \forall x \ x + 0 = x$
- $Ax4. \vdash \forall x \ \forall y \ x + s(y) = s(x + y)$
- $Ax5. \vdash \forall x \ x \cdot 0 = 0$
- $Ax6. \vdash \forall x \ \forall y \ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$
- $Ax7. \vdash A(0) \& \forall x \ (A(x) \rightarrow A(s(x))) \rightarrow \forall x \ A(x)$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \dots (0))}_{n\text{-volte}}$$

e quindi per esempio

$$\begin{aligned} 1 &\equiv s(0) \\ 2 &\equiv s(s(0)) \end{aligned}$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg\text{-aX}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \quad \frac{\neg\text{-aX}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C} \\
 \\
 \frac{\neg\text{-aX}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \quad \frac{\neg\text{-aX}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta} \neg\neg\text{-S} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta} \neg\neg\text{-D} \\
 \\
 \frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma} \text{in}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{in}_{dx} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \Delta} \forall\text{-S}_v \quad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \Delta} \exists\text{-D}_v \\
 \\
 \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'} \text{rf}^* \\
 \\
 \frac{}{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta} \text{sm}^* \\
 \\
 \frac{}{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta} \text{tra}^* \quad \frac{}{\Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta} \text{cf}^* \\
 \\
 \frac{}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta} \text{cp}^* \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta} \text{sy-r} \quad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta} \text{sy-l} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'} \text{tr-r}
 \end{array}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_= + \text{comp}_{sx} + \text{comp}_{dx}$ si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x (P(x) \rightarrow P(s(x)))}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x P(x)} \text{ind}$$