Pre-appello 15 giugno 2011

nome: cognome:

appello II compitino

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $(C \rightarrow \neg A) \vee \neg B \vdash \neg B \rightarrow \neg C \vee \neg A$

  - 5 punti
    $\vdash \neg(\exists y\ C(y) \ \rightarrow\ \exists y\ D(y)) \ \rightarrow\ \exists y\ (\neg C(y) \ \vee\ D(y))$

  - 5 punti
    $\exists x\ \exists y\ (C(x) \vee A(y)) \vdash \neg \forall x\ (\neg A(x) \& \neg C(x))$

  - 5 punti
    $\vdash \neg \exists x\ (\neg B(x) \rightarrow C(x))$

  - 5 punti (II comp.)
    $\vdash \forall y\, \forall z\, (z = y \vee y = y) \rightarrow \exists x\ \exists y\ x \neq y$

  - 5 punti (II comp.)
    $\vdash \exists x\ \exists y\ \exists z\ (x \neq z \vee x \neq y) \rightarrow \exists z\ \exists y\ z \neq y$

• Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI, ovvero hanno un modello che li rende validi, o INSODDISFACIBILI, ovvero nessun modello li rende validi, motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato di 2 punti)

  - (3 punti)

    Non si dà il caso che i prezzi non siano aumentati solo se l'inflazione non è diminuita.
    I prezzi sono aumentati.

    L'inflazione è diminuita.

    si consiglia di usare:
    P ="I prezzi sono aumentati"
    D ="L'inflazione è diminuita"

- (5 punti)

  Nulla accade per caso.

  Ciò che capita non accade per caso.

  si consiglia di usare:
  A(x) =“x accade per caso”
  C(x)= “x capita”

- (5 punti)

  Nessun essere vivente è perfetto.

  Non si dà il caso che soltanto gli esseri viventi non siano perfetti.

  si consiglia di usare:
  E(x) =“x è essere vivente”
  P(x)= “x è perfetto”

- (5 punti)

  Non tutti ballano bene sia il tango che la salsa.

  Qualcuno sa ballare bene il tango e qualcuno la salsa ma non entrambe.

  si consiglia di usare:
  B(x,y) = x balla bene y
  t=tango
  s=salsa

- (7 punti - II comp.)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  L’appello del 10 gennaio è un appello invernale ed è l’unico.
  L’appello del 10 gennaio è il quinto appello.

  Il quinto appello è un appello invernale.

  si consiglia di usare:
  I(x)= x è appello invernale
  o=appello del 10 gennaio
  q=quinto appello

  corretto in $LC_=$ sì no

- (7 punti -II comp.)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:
  L’appello del 10 gennaio è l’ unico appello invernale.
  L’appello del 10 gennaio NON è il terzo appello.

  Esiste un appello invernale e il terzo appello non è invernale.

  si consiglia di usare:
  I(x)= x è appello invernale
  o=appello del 10 gennaio
  t=terzo appello

- (5 punti II comp.) Stabilire se il sequente è valido in $\mathrm{LC}_=$

$$u \neq z \to w \neq u \vdash (\, u = v \,\&\, w = v \,) \,\&\, w = t \;\to\; t = u$$

- (12 punti II comp.) Sia T^{cla}_{sc} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Paolo sciopera solo se tutti scioperano.
  - Se Claudio sciopera allora Elena non sciopera e Paolo sì.
  - Solo se Elena sciopera Claudio non sciopera.

  Si consiglia di usare:
  S(x)= x sciopera, c=Claudio, p=Paolo, e=Elena.

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione in T^{cla}_{sc}:

  - Claudio non sciopera.
  - Paolo non sciopera.
  - Elena sciopera.

- (24 punti II comp) Sia T^{cla}_{ba} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Non si dà il caso che qualcuno non abbia visto la balena.
  - Gianni avrebbe visto la foca soltanto se non avesse visto la balena.
  - Solo quelli che hanno visto la foca hanno visto l'albatros.

  suggerimento: si consiglia di usare:
  V(x,y)= x ha visto y
  a=albatros, b=balena, f= foca

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria T^{cla}_{im}:

  - Tutti hanno visto la balena.
  - Se Gianni non avesse visto la balena sarebbe stato l'unico a non vederla.
  - Gianni non ha visto la foca.
  - Non tutti hanno visto sia la balena che la foca.
  - Gianni non ha visto l'albatros.
  - Nessuno ha visto l'albatros senza vedere la foca e la balena.
  - Non c'è nessuno che non abbia visto quello che ha visto Gianni.

- (II comp.) Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (5 punti) $\vdash \exists x \, \exists z \; (\; s(x) = s(z) \to z = y \;)$
  2. (5 punti) $\vdash \exists y \, \exists z \; z + y = s(z)$
  3. (5 punti) $\vdash \neg \exists x \; x = x + x$

4. (5 punti) $\vdash \forall y\ \exists x (\ x = y \rightarrow s(x) = s(7)\ )$
5. (6 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ x \cdot s(y) = 2$
6. (8 punti) $\vdash (7 + 1) \cdot 1 = 8$
7. (10 punti) $\vdash \forall x\ 1 \cdot x = x$

- (II comp.) Stabilire quali delle seguenti regole sono valide e in caso positivo anche sicure: (8 punti ciascuna)

$$\frac{\Gamma \vdash x = c, \Delta}{\Gamma \vdash B\ \rightarrow\ \forall x\ x = c, \Delta}\ 1$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg x = y}{\Gamma, y = x \vdash \neg C}\ 2$$

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla\end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&{-}\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee{-}\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg{-}\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg{-}\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to{-}\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to{-}\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall{-}\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall{-}\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists{-}\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists{-}\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = {-}\mathrm{S} \qquad \begin{array}{c} = {-}\mathrm{ax}\\ \Gamma \vdash t = t, \Delta\end{array}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $LC_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx}, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$\begin{aligned}
&Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0\\
&Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )\\
&Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x\\
&Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)\\
&Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0\\
&Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x\\
&Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)
\end{aligned}$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \;\equiv\; \neg t = s$

$$\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx1}\\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx2}\\ \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx1}\\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx2}\\ \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''\end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \mathrm{in}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{in}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A}\ \mathrm{cn}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \mathrm{cn}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{re}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\mathrm{re} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists-\mathrm{re}$$

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

$$\begin{array}{c}\mathrm{rf}^*\\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\mathrm{sm}^*\\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\mathrm{tra}^*\\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathrm{cf}^*\\ \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\mathrm{cp}^*\\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta\end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\mathrm{LC}_= + \mathrm{comp}_{sx} + \mathrm{comp}_{dx}$ si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \mathrm{ind}$$

PRE-APPELLO 15 GIUGNO

OK

(7)

Ax 1. $\neg \exists_x \neg V(x,b)$

Ax 2. $V(g,F) \rightarrow \neg V(g,b)$

Ax 3. $\forall_x \left(V(x,a) \rightarrow V(x,F)\right)$

4. $\forall_x\ V(x,b)$

¬-ax-dx2

$$\dfrac{\dfrac{\vdash Ax1 \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash \neg V(x,b), V(x,b)}{\vdash \exists_x \neg V(x,b),\ V(x,b)}\ \exists\text{-re}}{\neg\exists_x \neg V(x,b) \vdash V(x,b)}\ \neg\text{-S}}{\vdash V(x,b)}\ \text{Comp\_sx}}{\vdash \forall_x\ V(x,b)}\ \forall\text{-D} \quad x \text{ non libera}$$

5. $\neg V(g,b) \rightarrow \neg V(g,b)\ \&\ \forall_{\cancel{y}}\left(\neg V(\cancel{x},b) \rightarrow x=g\right)$

VALIDA

¬-ax-sx2

$$\dfrac{\vdash 4 \qquad \dfrac{\neg V(g,b), V(g,b) \vdash \neg V(g,b)\ \&\ \forall_x(\neg V(x,b) \rightarrow x=g)}{\neg V(g,b), \forall_x V(x,b) \vdash \neg V(a,b)\ \&\ \forall_x(\neg V(x,b) \rightarrow x=g)}\ \forall\text{-re}}{\neg V(g,b) \vdash \neg V(g,b)\ \&\ \forall_x\left(\neg V(x,b) \rightarrow x=g\right)}\ \text{Comp-sx}$$

6. $\neg V(g,F)$

VALIDA

¬-ax sx1 ¬ax dx1

$$\dfrac{\vdash 4 \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash Ax2 \qquad \dfrac{V(g,b), \neg V(g,b) \vdash \neg V(g,F) \qquad V(g,b) \vdash V(g,F), \neg V(g,F)}{V(g,b), V(g,F) \rightarrow \neg V(g,b) \vdash \neg V(g,F)}\ \rightarrow\text{S}}{V(g,b) \vdash \neg V(g,F)}\ \text{Comp-sx}}{\forall_x V(x,b) \vdash \neg V(g,F)}\ \forall\text{-re}}{\vdash \neg V(g,F)}\ \text{Comp-sx}$$

7. $\neg \forall_x \left(V(x,b)\ \&\ V(x,F)\right)$

VALIDA

¬-ax-sx1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash 6 \qquad V(g,b), V(g,F), \neg V(g,F) \vdash}{V(g,b), V(g,F) \vdash}\ \text{Comp-sx}}{V(g,b)\ \&\ V(g,F) \vdash}\ \&\text{-S}}{\forall_x \left(V(x,b)\ \&\ V(x,F)\right) \vdash}\ \forall\text{-re}}{\vdash \neg \forall_x \left(V(x,b)\ \&\ V(x,F)\right)}\ \neg\text{-S}$$

8. $\neg V(g,a)$ VALIDA

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\neg\text{-ax dx 1}}{\vdash V(g,a), \neg V(g,a)} \qquad \dfrac{\vdash \neg V(g,F) \qquad \overset{\neg\text{-ax sx 1}}{V(g,F), \neg V(g,F) \vdash \neg V(g,a)}}{V(g,F) \vdash \neg V(g,a)}\ \text{Comp-sx}}{\dfrac{V(g,a) \to V(g,F) \vdash \neg V(g,a)}{\forall x (V(x,a) \to V(x,F)) \vdash \neg V(g,a)}\ \forall\text{-re}}\ \to\text{S} \qquad \vdash Ax\,3$$

$$\dfrac{\vdash Ax\,3 \qquad \forall x (V(x,a) \to V(x,F)) \vdash \neg V(g,a)}{\vdash \neg V(g,a)}\ \text{Comp-sx}$$

9. $\neg \exists x (V(x,a) \ \&\ \neg V(x,F) \ \&\ \neg V(x,b))$

$$\dfrac{\overset{\neg\text{-ax sx 2}}{V(x,a) \ \&\ \neg V(x,F), \neg V(x,b), V(x,b) \vdash}}{V(x,a) \ \&\ \neg V(x,F), \neg V(x,b), \forall x V(x,b) \vdash}\ \forall\text{-re}$$

$$\dfrac{\vdash Ax\,1 \qquad V(x,a) \ \&\ \neg V(x,F), \neg V(x,b), \forall x V(x,b) \vdash}{\dfrac{V(x,a) \ \&\ \neg V(x,F), \neg V(x,b) \vdash}{\dfrac{V(x,a) \ \&\ \neg V(x,F) \ \&\ \neg V(x,b) \vdash}{\dfrac{\exists x (V(x,a) \ \&\ \neg V(x,F) \ \&\ \neg V(x,b)) \vdash}{\vdash \neg \exists x (V(x,a) \ \&\ \neg V(x,F) \ \&\ \neg V(x,b))}\ \neg\text{-S}}\ \exists\text{-S } x \text{ non libera}}\ \&\text{-S}}\ \text{Comp-sx}$$

10. $\neg \exists x (\forall y (V(g,y) \to \neg V(x,y)))$

VALIDA

$$\dfrac{\vdash 4 \qquad \dfrac{\overset{\text{ax-id}}{V(g,b) \vdash V(g,b)}}{\forall x V(x,b) \vdash V(g,b)}\ \forall\text{-re}}{\vdash V(g,b)}\ \text{Comp sx}$$

$$\dfrac{\vdash 4 \qquad \dfrac{\overset{\neg\text{-ax sx 2}}{\neg V(x,b), V(x,b) \vdash}}{\neg V(x,b), \forall x V(x,b) \vdash}\ \forall\text{-re}}{\neg V(x,b) \vdash}\ \text{Comp-sx}$$

$$\dfrac{\vdash V(g,b) \qquad \neg V(x,b) \vdash}{\dfrac{V(g,b) \to \neg V(x,b) \vdash}{\dfrac{\forall y (V(g,y) \to \neg V(x,y)) \vdash}{\dfrac{\exists x (\forall y (V(g,y) \to \neg V(x,y))) \vdash}{\vdash \neg \exists x (\forall y (V(g,y) \to \neg V(x,y)))}\ \neg\text{-S}}\ \exists\text{-S } x \text{ non libera}}\ \forall\text{-re}}\ \to\text{-S}$$

(1)

5. $\forall y \forall z (z=y \lor y=y) \to \exists x \exists y \ x \neq y$

$y=y$ rende vera la premessa.

Contro modello

$\mathcal{D}$ $\{1\}$ $\qquad (\exists x \exists y \ x \neq y)^{\mathcal{D}} = 0 \quad \to$ non valida

Modello

$\mathcal{D}$ Nat $\qquad (\exists x \exists y \ x \neq y)^{\mathcal{D}} = 1 \quad \to$ soddisfacibile

(2)

8

1 -

VALIDA

ax-id $\qquad\qquad$ sm*

$S(y)=S(x),\ x=y \vdash x=y \qquad S(y)=S(x) \vdash S(x)=S(y),\ x=y$ $\quad \to S$

$S(y)=S(x),\ S(x)=S(y) \to x=y \vdash x=y$ $\quad \forall$-re

$S(y)=S(x),\ \forall y(S(x)=S(y) \to x=y) \vdash x=y$ $\quad \forall$-re

$\vdash Ax2 \qquad S(y)=S(x),\ \forall x \forall y (S(x)=S(y) \to x=y) \vdash x=y$ $\quad$ Comp-sx

$S(y)=S(x) \vdash x=y$ $\quad \to D$

$\vdash S(y)=S(x) \to x=y$ $\quad \exists$-re

$\vdash \exists z (S(y)=S(z) \to z=y)$ $\quad \exists$-re

$\vdash \exists x \exists z (S(x)=S(z) \to z=y)$

2 -

VALIDA

ax-id

$z+0=z,\ z+S(0)=S(z) \vdash z+S(0)=S(z)$ $\quad \to S$

$z+S(0)=S(z+0),\ z+0=z \vdash z+S(0)=S(z)$ $\quad \forall$-re

$\vdash Ax3 \qquad z+S(0)=S(z+0),\ \forall x(x+0=x) \vdash z+S(0)=S(z)$ $\quad$ Comp-sx

$z+S(0)=S(z+0) \vdash z+S(0)=S(z)$ $\quad \forall$-re

$\forall y\ z+S(y)=S(z+y) \vdash z+S(0)=S(z)$ $\quad \forall$-re

$\vdash Ax4 \qquad \forall x \forall y\ x+S(y)=S(x+y) \vdash z+S(0)=S(z)$ $\quad$ Comp-sx

$\vdash z+S(0)=S(z)$ $\quad \exists$-re

$\vdash \exists z\ z+S(0)=S(z)$ $\quad \exists$-re

$\vdash \exists y \exists z\ z+y=S(z)$

3 $\quad \neg\exists x\ x=x+x$ $\dashrightarrow$ e' falso! Ø lorende vero! Studio la negazione

INSODDISFACIBILE

sm*

$0+0=0 \vdash 0=0+0$ $\quad \forall$-re

$\vdash Ax3 \qquad \forall x(x+0=x) \vdash 0=0+0$ $\quad$ Comp-sx

$\vdash 0=0+0$ $\quad \exists$-re

$\vdash \exists x\ x=x+x$ $\quad \neg\neg$-D

$\vdash \neg\neg\exists x\ x=x+x$

4- $\forall y \exists x (x=y \to S(x) = S(7))$

non riesco a chiudere ... deve essere vera!

ax-id $\quad$ -ax $\quad$ ax-id

$x=7 \vdash x=7$ $\qquad$ $x=7 \vdash S(7)=S(7)$ -S $\qquad$ $S(x)=S(7) \vdash S(x)=S(7)$ $\to$S

$x=7 \vdash S(x)=S(7)$ $\to$S $\qquad$ $\vdash x=7, S(x)=S(7)$

$x=7 \to S(x)=S(7), x=7 \vdash$ $\qquad$ $x=7 \to S(x)=S(7) \vdash S(x)=S(7)$ $\to$S

$x=7 \to S(x)=S(7), S(x)=S(7) \to x=7 \vdash$ $\forall$-re

$x=7 \to S(x)=S(7), \forall y (S(x)=S(y) \to x=y) \vdash$ $\forall$-re

$\vdash Ax2$ $\qquad$ $x=7 \to S(x)=S(7), \forall x \forall y (S(x)=S(y) \to x=y) \vdash$ Comp-sx

$x=7 \to S(x)=S(7) \vdash$ $\exists$-S x non libera

$\exists x (x=7 \to S(x)=S(7)) \vdash$ $\forall$-re

$\forall y \exists x (x=y \to S(x)=S(7)) \vdash$ $\neg$-S

$\vdash \neg \forall y \exists x (x=y \to S(x)=S(7))$

Riprove

VALIDA ?? !!

-ax

$7=y \vdash S(7)=S(7)$ $\to$D

$\vdash 7=y \to S(7)=S(7)$ $\exists$-re

$\vdash \exists x (x=y \to S(x)=S(7))$ $\forall$-D y non libera

$\vdash \forall y \exists x (x=y \to S(x)=S(7))$

5_

slide 651, esercizi 16

$\vdash \forall x (0+x=x)$

ax-id

$0+2=2, 2\cdot S(0)=2 \vdash 2\cdot S(0)=2$ -S

$2\cdot S(0)=0+2, 0+2=2 \vdash 2\cdot S(0)=2$ $\forall$-re

$2\cdot S(0)=0+2, \forall x (0+x=x) \vdash 2\cdot S(0)=2$ Comp-sx

$2\cdot S(0)=0+2 \vdash 2\cdot S(0)=2$ in-sx

$2\cdot 0=0, 2\cdot S(0)=0+2 \vdash 2\cdot S(0)=2$ -S

$2\cdot S(0)=2\cdot 0+2, 2\cdot 0=0 \vdash 2\cdot S(0)=2$ $\forall$-re

$\vdash Ax5$ $\qquad$ $2\cdot S(0)=2\cdot 0+2, Ax5 \vdash 2\cdot S(0)=2$ Comp-sx

$2\cdot S(0)=2\cdot 0+2 \vdash 2\cdot S(0)=2$ $\forall$-re

$\forall y\, 2\cdot S(y)=2\cdot y+2 \vdash 2\cdot S(0)=2$ $\forall$-re

$\vdash Ax6$ $\qquad$ $Ax6 \vdash 2\cdot S(0)=2$ Comp-sx

$\vdash 2\cdot S(0)=2$ $\exists$-re

$\vdash \exists y\, 2\cdot S(y)=2$ $\exists$-re

$\vdash \exists x \exists y\, x\cdot S(y)=2$

6. $(7+1)\cdot 1=8$

ax-id

$S(7)\cdot 0=0,\ 0+S(7)=S(7),\ S(7)\cdot S(0)=S(7) \vdash S(7)\cdot S(0)=S(7)$

$S(7)\cdot 0=0,\ S(7)\cdot S(0)=0+S(7),\ 0+S(7)=S(7) \vdash S(7)\cdot S(0)=S(7)$ — -S

slide 651 — $\vdash \forall_x(0+x=x)$ — $S(7)\cdot 0=0,\ S(7)\cdot S(0)=0+S(7),\ \forall_x(0+x=x) \vdash S(7)\cdot S(0)=S(7)$ — ∀-re

$S(7)\cdot 0=0,\ S(7)\cdot S(0)=0+S(7) \vdash S(7)\cdot S(0)=S(7)$ — Comp-sx

$S(7)\cdot S(0)=S(7)\cdot 0+S(7),\ S(7)\cdot 0=0 \vdash S(7)\cdot S(0)=S(7)$ — -S

$\vdash Ax5$ — $S(7)\cdot S(0)=S(7)\cdot 0+S(7),\ Ax5 \vdash S(7)\cdot S(0)=S(7)$ — ∀-re

$S(7)\cdot S(0)=S(7)\cdot 0+S(7) \vdash S(7)\cdot S(0)=S(7)$ — Comp-sx

$\forall_y S(7)\cdot S(y)=S(7)\cdot y+S(7) \vdash S(7)\cdot S(0)=S(7)$ — ∀-re

$\vdash Ax6$ — $Ax6 \vdash S(7)\cdot S(0)=S(7)$ — ∀-re

$\vdash S(7)\cdot S(0)=S(7)$ — Comp.sx

$7+0=7 \vdash S(7)\cdot S(0)=S(7)$ — in-sx

$7+0=7 \vdash S(7+0)\cdot S(0)=S(7)$ — -S

$\vdash Ax3$ — $Ax3 \vdash S(7+0)\cdot S(0)=S(7)$ — ∀-re

$\vdash S(7+0)\cdot S(0)=S(7)$

$7+S(0)=S(7+0) \vdash S(7+0)\cdot S(0)=S(7)$ — in.sx

$7+S(0)=S(7+0) \vdash (7+S(0))\cdot S(0)=S(7)$ — -S

$\forall_y\ 7+S(y)=S(x+y) \vdash 7+S(0)\cdot S(0)=S(7)$ — ∀-re

$\vdash Ax4$ — $Ax4 \vdash (7+S(0))\cdot S(0)=S(7)$ — ∀-re

Comp-sx

$\vdash (7+S(0))\cdot S(0)=S(7)$

VALIDA

7.

Ho allungato! Rifaccio dietro!

$1\cdot x=x,\ S(x)\cdot S(0)=S(x) \vdash S(0)\cdot S(x)=S(x)$ — in sx

$1\cdot x=x,\ 0+S(x)=S(x),\ S(x)\cdot S(0)=S(x) \vdash S(0)\cdot S(x)=S(x)$ — -S

$1\cdot x=x,\ S(x)\cdot S(0)=0+S(x),\ 0+S(x)=S(x) \vdash S(0)\cdot S(x)=S(x)$ — ∀-re

$\vdash \forall_x(0+x=x)$ — $1\cdot x=x,\ S(x)\cdot S(0)=0+S(x),\ \forall_x(0+x=x) \vdash S(0)\cdot S(x)=S(x)$ — Comp-sx

$1\cdot x=x,\ S(x)\cdot S(0)=0+S(x) \vdash S(0)\cdot S(x)=S(x)$ — in-sx

$1\cdot x=x,\ S(x)\cdot 0=0,\ S(x)\cdot S(0)=0+S(x) \vdash S(0)\cdot S(x)=S(x)$ — -S

$1\cdot x=x,\ S(x)\cdot S(0)=S(x)\cdot 0+S(x),\ S(x)\cdot 0=0 \vdash 1\cdot S(x)=S(x)$ — ∀-re

$\vdash Ax5$ — $1\cdot x=x,\ S(x)\cdot S(0)=S(x)\cdot 0+S(x),\ Ax5 \vdash 1\cdot S(x)=S(x)$ — Comp-sx

$1\cdot x=x,\ S(x)\cdot S(0)=S(x)\cdot 0+S(x) \vdash 1\cdot S(x)=S(x)$ — ∀-re

$1\cdot x=x,\ \forall_y S(x)\cdot S(y)=S(x)\cdot y+S(x) \vdash 1\cdot S(x)=S(x)$ — ∀-re

ax-id

$1\cdot 0=0 \vdash 1\cdot 0=0$ — ∀-re — $\vdash Ax6$ — $1\cdot x=x,\ Ax6 \vdash 1\cdot S(x)=S(x)$ — Comp-sx

$\vdash Ax5$ — $\forall_x(x\cdot 0=0) \vdash 1\cdot 0=0$ — Comp sx — $1\cdot x=x \vdash 1\cdot S(x)=S(x)$ — →D

$\vdash 1\cdot x=x \to 1\cdot S(x)=S(x)$ — ∀-D, x non libera

$\vdash 1\cdot 0=0$ — $\vdash \forall_x(1\cdot x=x \to 1\cdot S(x)=S(x))$ — Ind

$\vdash \forall_x\ 1\cdot x=x$

$\forall x\ 1 \cdot x = x$

VALIDA!

$=\text{-}ax$

$1 \cdot x = x, x+0 = x \vdash S(x) = S(x)$ -S

$1 \cdot x = x, x+0 = x \vdash S(x+0) = S(x)$ $\forall$-re

$\vdash Ax3$ $1 \cdot x = x, Ax3 \vdash S(x+0) = S(x)$ Comp-sx

$1 \cdot x = x \vdash S(x+0) = S(x)$ in-sx

$1 \cdot x = x, x+S(0) = S(x+0) \vdash S(x+0) = S(x)$ -S

$1 \cdot x = x, x+S(0) = S(x+0) \vdash x+S(0) = S(x)$ $\forall$-re

$1 \cdot x = x, \forall y\ x+S(y) = S(x+y) \vdash x+S(0) = S(x)$ $\forall$-re

$\vdash Ax4$ $1 \cdot x = x, Ax4 \vdash x+S(0) = S(x)$ Comp-sx

$1 \cdot x = x \vdash x+1 = S(x)$ -S

$1 \cdot x = x \vdash 1 \cdot x + 1 = S(x)$

Scelgo cosa porre in tr-r in modo intelligente in base agli assiomi!

ax-id

$S(0) \cdot S(x) = S(0) \cdot x + S(0) \vdash S(0) \cdot S(x) = S(0) \cdot x + S(0)$ $\forall$-re

$\forall y\ S(0) \cdot S(y) = S(0) \cdot y + S(0) \vdash S(0) \cdot S(x) \vdash S(0) \cdot x + S(0)$ $\forall$-re

$\vdash Ax6$ $Ax6 \vdash S(0) \cdot S(x) = S(0) \cdot x + S(0)$ Comp-sx

$\vdash 1 \cdot S(x) = 1 \cdot x + 1$ tr-r

$1 \cdot x = x \vdash 1 \cdot S(x) = S(x)$ $\rightarrow$D

$\vdash 1 \cdot x = x \rightarrow 1 \cdot S(x) = S(x)$ $\forall$-D x non libera

$\vdash \forall x (1 \cdot x = x \rightarrow 1 \cdot S(x) = S(x))$ Ind

ax-id

$1 \cdot 0 = 0 \vdash 1 \cdot 0 = 0$ $\forall$-re

$\vdash Ax5$ $\forall x (x \cdot 0 = 0) \vdash 1 \cdot 0 = 0$ Comp-sx

$\vdash 1 \cdot 0 = 0$

$\forall x\ 1 \cdot x = x$

Esercizio 5, di Peano $\rightarrow$ dal II° appello 2011 (8 Luglio)

$\vdash \forall y \forall x\ (y \neq 0 \rightarrow y+x \neq 0)$

!! ☹

by Caesar

-Esercizio 5 di Peano dal I° appello 2011 (24 Giugno)

$\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (S(y) = x))$ $\rightarrow$ VALIDO

$=\text{-}ax$

$x \neq 0 \rightarrow \exists y S(y) = x \vdash S(x) = S(x), S(x) = 0$ $\exists$-re

$x \neq 0 \rightarrow \exists y S(y) = x \vdash \exists y\ S(y) = S(x), S(x) = 0$ Sc-sx

$x \neq 0 \rightarrow \exists y S(y) = x \vdash S(x) = 0, \exists y\ S(y) = S(x)$ $\neg$-S

$x \neq 0 \rightarrow \exists y S(y) = x, \neg S(x) = 0 \vdash \exists y\ S(y) = S(x)$ $\rightarrow$D

$x \neq 0 \rightarrow \exists y S(y) = x \vdash S(x) \neq 0 \rightarrow \exists y S(y) = S(x)$ $\rightarrow$D

$\vdash (x \neq 0 \rightarrow \exists y S(y) = x) \rightarrow (S(x) \neq 0 \rightarrow \exists y S(y) = S(x))$ $\forall$-D x non libera

$\vdash \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y S(y) = x \rightarrow S(x) \neq 0 \rightarrow \exists y S(y) = S(x))$ Ind

$=\text{-}ax$

$\vdash 0 = 0, \exists y\ S(y) = 0$ $\neg$-D

$\neg 0 = 0 \vdash \exists y\ S(y) = 0$ $\rightarrow$D

$\vdash 0 \neq 0 \rightarrow \exists y S(y) = 0$

$\vdash \forall x\ (x \neq 0 \rightarrow \exists y S(y) = x)$

REGOLE

ok ? N.B.: Una regola e' valida se porta la verita' dall'alto verso il basso! Cioe' se la premessa e' vera, lo e' anche la conseguenza ? $\frac{\text{premessa}}{\text{conseguenza}}$

- Pre-Appello 15 Giugno

ES (9) 1. (ok)

$$\frac{\Gamma \vdash x=c, \Delta}{\Gamma \vdash B \to \forall x\ x=c, \Delta} \; 1$$

Contromodello:

pongo: $\Gamma = \exists x\ x=c \qquad \Delta = \emptyset$

Da un sequente non valido in tutti i modelli arrivo ad una tautologia $\Rightarrow$ la regola non e' valida! (Lo vedevo dal fatto che e' stato usato un $\forall x$-D senza controllo sulle variabili)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\exists x\text{-id}}{x=c \vdash x=c, \Delta}\; 1}{x=c \vdash B \to \forall x\ x=c}\; \exists\text{-S} \quad x \text{ non libera}}{\exists x\ x=c \vdash B \to \forall x\ x=c}$$

ES (9) 2. By Fabio

$$\frac{\Gamma \vdash \neg x=y}{\Gamma, y=x \vdash \neg C} \; 2$$

Provo a derivarla:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash \neg x=y}{\Gamma, x=y \vdash}\; \neg\text{-D}^{inv}}{\Gamma, y=x \vdash}\; \text{sy-L}}{\Gamma, y=x \vdash \neg C}\; \text{in-dx}$$

Ho derivato la regola con regole valide, quindi e' valida.

in-dx non e' pero' sicura, infatti l'inverso di 2 non e' valida.

Contromodello:

$C = \bot$ & $\Gamma = \emptyset$

$$\frac{y=x \vdash \neg\bot}{\vdash \neg x=y} \; 2^{inv}$$

Qui ho due casi:

$\Rightarrow$ • $x=y$ ---> allora la premessa $y=x \vdash \neg\bot$ e' vera, mentre il sequente $\vdash \neg x=y$ e' falso

• $x \neq y$ ---> $(y=x \vdash \neg\bot) = 1$ e $(\neg x=y) = 1$