5. Calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$ della Logica classica proposizionale

Il calcolo LC_p è composto dai seguenti schemi di assiomi e regole:

$$\textbf{ax-id} \quad \mathbf{\Gamma}, \mathtt{pr}_1, \mathbf{\Gamma}' \vdash \mathbf{\Delta}, \mathtt{pr}_1, \mathbf{\Delta}' \qquad \textbf{ax-}\bot \quad \mathbf{\Gamma}, \bot, \mathbf{\Gamma}' \vdash \nabla \qquad \text{ax-}\top \quad \mathbf{\Gamma} \vdash \nabla, \top, \nabla'$$

$$\frac{\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Gamma}', \mathbf{\Delta} \vdash \mathbf{\Sigma}'}{\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma}', \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Delta} \vdash \mathbf{\Sigma}'}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Delta}', \nabla}{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Delta}', \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Delta}, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathtt{pr}_1, \mathbf{\Delta} \quad \mathbf{\Gamma} \vdash \mathtt{pr}_2, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash (\mathtt{pr}_1) \& (\mathtt{pr}_2), \mathbf{\Delta}}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\mathbf{\Gamma}, \mathtt{pr}_1, \mathtt{pr}_2 \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, (\mathtt{pr}_1) \& (\mathtt{pr}_2) \vdash \mathbf{\Delta}}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathtt{pr}_1, \mathtt{pr}_2, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash (\mathtt{pr}_1) \vee (\mathtt{pr}_2), \mathbf{\Delta}}\ \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\mathbf{\Gamma}, \mathtt{pr}_1 \vdash \mathbf{\Delta} \quad \mathbf{\Gamma}, \mathtt{pr}_2 \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, (\mathtt{pr}_1) \vee (\mathtt{pr}_2) \vdash \mathbf{\Delta}}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathtt{pr}_1 \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \neg(\mathtt{pr}_1), \mathbf{\Delta}}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathtt{pr}_1, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \neg(\mathtt{pr}_1) \vdash \mathbf{\Delta}}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathtt{pr}_1 \vdash \mathtt{pr}_2, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash (\mathtt{pr}_1) \to (\mathtt{pr}_2), \mathbf{\Delta}}\ \to-\mathrm{D} \qquad \frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathtt{pr}_1, \mathbf{\Delta} \quad \mathbf{\Gamma}, \mathtt{pr}_2 \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, (\mathtt{pr}_1) \to (\mathtt{pr}_2) \vdash \mathbf{\Delta}}\ \to-\mathrm{S}$$

A che serve il calcolo dei sequenti? per costruire derivazioni

Il calcolo dei sequenti serve a costruire **alberi** che occasionalmente sono **alberi di derivazione**

ove

> **ALBERO di DERIVAZIONE per $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$**
> =
> albero con radice $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$
> ottenuto con regole del calcolo
> e le cui foglie terminanti sono TUTTE ASSIOMI.

> un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$
> è **derivabile** nel calcolo dei sequenti
> sse
> è **radice di un albero di derivazione**

Esempio di albero di derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{\mathbf{P}, \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}}}{\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}}\ \&-\mathrm{S} \qquad \dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{\mathbf{P}, \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}}}{\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}}\ \&-\mathrm{S}}{\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \& \mathbf{P}}\ \&-\mathrm{D}$$

in cui $\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \& \mathbf{P}$ è la RADICE mentre $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}$ e $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}$ sono rispettivamente FOGLIE (che sono ASSIOMI) del ramo di sinistra e di quello di destra.

ATTENZIONE:

> Nelle regole dei sequenti
> le METAvariabili date da lettere greche MAIUSCOLE Γ e Δ, Σ..
> indicano LISTE DI PROPOSIZIONI anche VUOTE
> mentre $\mathtt{pr}$ e $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$ indicano proposizioni qualsiasi.
>
> Quindi tali meta-variabili NON compariranno mai in un sequente ottenuto da una TRADUZIONE in linguaggio formale di un enunciato in linguaggio naturale!!!!

Per esempio

$$\frac{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P} \quad \mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{C}\vee\mathbf{P}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash(\mathbf{Q}\&\mathbf{P})\&(\mathbf{C}\vee\mathbf{P})}\ \&-\mathrm{D}$$

è una corretta istanza della regola &−D, detta anche *applicazione (dello schema) della regola* &−D

$$\frac{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathtt{pr}_1,\mathbf{\Delta} \quad \mathbf{\Gamma}\vdash\mathtt{pr}_2,\mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}\vdash(\mathtt{pr}_1)\&(\mathtt{pr}_2),\mathbf{\Delta}}\ \&-\mathrm{D}$$

ove al posto di $\mathtt{pr}_1$ c'è $\mathbf{Q}\&\mathbf{P}$ e al posto di $\mathtt{pr}_2$ c'è $\mathbf{C}\vee\mathbf{P}$ e al posto di $\mathbf{\Gamma}$ c'è la lista di una sola proposizione $\mathbf{P}\&\mathbf{Q}$ e al posto di $\mathbf{\Delta}$ c'è la lista vuota.

Esercizi:

1. il sequente
$$\mathbf{C}\ ,\ \mathbf{A}\&(\mathbf{B}\to\mathbf{C})\ ,\ \mathbf{M}\ \vdash\ \mathbf{H}\&\mathbf{C}\ ,\ \mathbf{A}\&(\mathbf{B}\to\mathbf{C})$$
è un assioma identità?

2. la seguente è una derivazione in logica classica proposizionale LC_p
$$\frac{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q} \quad \mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}}$$
???

3. la scrittura sotto è un pezzo di albero costruito con un'istanza di una regola del calcolo LC_p
$$\frac{\mathbf{P}\ \&\ \mathbf{Q}\vdash\mathbf{C} \qquad \mathbf{P}\ \&\ \mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\ \vee\ \mathbf{P}}{\mathbf{P}\ \&\ \mathbf{Q}\vdash(\mathbf{C}\ \&\ \mathbf{Q})\vee\mathbf{P}}$$
???

4. Derivare in LC_p
$$\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}\ \vdash\ \mathbf{B}\ \&\ \mathbf{A}$$

5. Derivare in LC_p
$$(\mathbf{A}\&\mathbf{B})\ \&\mathbf{C}\vdash\mathbf{A}\&\ (\mathbf{B}\&\mathbf{C})$$

6. Derivare in LC_p
$$\mathbf{A}\ \&\ (\mathbf{P}\to\mathbf{C})\ \vdash\ (\mathbf{P}\to\mathbf{C})\ \&\ \mathbf{A}$$
È possibile ottenere una derivazione di questo sequente a partire da quella di $\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}\ \vdash\ \mathbf{B}\ \&\ \mathbf{A}$? Come?

7. Si derivino in LC_p i sequenti $\vdash\mathtt{pr}$ ottenuti sostituendo $\mathtt{pr}$ con le proposizioni indicanti le leggi della logica classica elencate sotto.
Si ricorda che la scrittura $\mathtt{pr}_1\leftrightarrow\mathtt{pr}_2$, che si legge "$\mathtt{pr}_1$ è **equivalente** a "$\mathtt{pr}_2$", è la scrittura abbreviata della proposizione scritta a sinistra del segno di ≡:
$$\mathtt{pr}_1\leftrightarrow\mathtt{pr}_2\ \equiv\ (\,\mathtt{pr}_1\to\mathtt{pr}_2\,)\ \&\ (\,\mathtt{pr}_2\to\mathtt{pr}_1\,)$$

associatività $\vee$	$(A \vee B) \vee C$	$\leftrightarrow$	$A \vee (B \vee C)$
associatività &	$(A \& B) \& C$	$\leftrightarrow$	$A \& (B \& C)$
commutatività $\vee$	$A \vee B$	$\leftrightarrow$	$B \vee A$
commutatività &	$A \& B$	$\leftrightarrow$	$B \& A$
distributività $\vee$ su &	$A \vee (B \& C)$	$\leftrightarrow$	$(A \vee B) \& (A \vee C)$
distributività & su $\vee$	$A \& (B \vee C)$	$\leftrightarrow$	$(A \& B) \vee (A \& C)$
idempotenza $\vee$	$A \vee A$	$\leftrightarrow$	A
idempotenza &	$A \& A$	$\leftrightarrow$	A
leggi di De Morgan	$\neg(B \vee C)$	$\leftrightarrow$	$\neg B \& \neg C$
	$\neg(B \& C)$	$\leftrightarrow$	$\neg B \vee \neg C$
legge della doppia negazione	$\neg\neg A$	$\leftrightarrow$	A
implicazione classica	$(A \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$\neg A \vee C$
disgiunzione come antecendente	$(A \vee B \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)$
congiunzione come antecendente	$(A \& B \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$
legge della contrapposizione	$(A \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(\neg C \rightarrow \neg A)$
legge del modus ponens	$A \& (A \rightarrow C)$	$\rightarrow$	C
legge della NON contraddizione	$\neg(A \& \neg A)$		
legge del terzo escluso	$A \vee \neg A$		

8. Si provi a derivare in LC_p i sequenti $\vdash$ `pr` ottenuti sostituendo `pr` con le proposizioni elencate sotto.

   (a) $\neg((A \rightarrow B) \vee A)$
   (b) $(A \rightarrow B) \& \neg A$
   (c) $P \& Q \rightarrow P \vee R$
   (d) $P \rightarrow P$
   (e) $P \& \neg P$
   (f) $P \vee Q \rightarrow Q$
   (g) $Q \rightarrow (P \& Q) \vee C$
   (h) $P \vee Q \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$
   (i) $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$
   (j) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$
   (k) $P \rightarrow ((Q \vee R) \rightarrow (P \& Q) \vee (P \& R))$

   Provando e riprovando a trovare derivazioni per i sequenti sopra riesci a vedere un legame tra il fatto che il sequente $\vdash$ `pr` ha una derivazione e il fatto che `pr` è una tautologia o un'opinione o un paradosso??