IV appello 21 settembre 2010

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- Non si contano le brutte copie.

- Specificate le regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)

• Mostrare se i sequenti di seguito sono validi in LC e nel caso non lo siano mostrare un contromodello:

3 punti

$\neg C \rightarrow A \vee \neg B \vdash \neg A \rightarrow \neg B \vee C$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

5 punti

$\forall x\ C(x) \vdash \forall y\ (\ C(y) \vee D(y)\ )$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

5 punti

$\exists x\ (\ C(x) \rightarrow A(x)\ ) \vdash \neg\forall x\ (\ C(x)\&\neg A(x)\ )$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

• Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI, ovvero hanno un modello che li rende validi, o INSODDISFACIBILI, ovvero nessun modello li rende validi, motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato di 2 punti)

- (3 punti)

  $\dfrac{\text{Se parli a bassa voce non capisco cosa dici.}}{\text{Solo se non parli a bassa voce capisco cosa dici.}}$

  si consiglia di usare:
  B =parli a bassa voce
  C = capisco cosa dici

corretto in LC sì no

- (5 punti)

  Non tutti i triangoli sono isosceli.

  Non si dà il caso che non esista un triangolo non isoscele.

  si consiglia di usare:
  T(x) = x è triangolo
  I(x)= x è isoscele

  corretto in LC sì no

- (5 punti)

  Non esiste un essere vivente immortale.

  Esiste un essere vivente non immortale.

  si consiglia di usare:
  V(x) = x è essere vivente
  I(x)= x è immortale

  corretto in LC sì no

- (7 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  C'è un unico studente nell'aula 1A150.
  C'è uno studente inglese nell'aula 1A150.
  John è uno studente nell'aula 1A150.

  John è inglese.

  si consiglia di usare:
  S(x)= x è uno studente nell'aula 1A150
  I(x)= x è inglese
  j=John

  corretto in $LC_=$ sì no

- (9 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  Mirko è uno studente nell'aula 1A150.
  Non c'è nessun studente diverso da Mirko nell'aula 1A 150.

  Nell'aula 1A150 c'è un'unico studente.

  si consiglia di usare:
  S(x)= x è uno studente nell'aula 1A150
  m="Mirko"

corretto in $LC_=$ sì no

- (5 punti) Stabilire se il sequente è valido in $LC_=$

$$u = v \to v = w \vdash u = w \lor u \neq v$$

corretto in $LC_=$ sì no

- Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE rispetto alla semantica classica e nel caso di NON validità dire se sono SODDISFACIBILI o INSODDISFACIBILI: ciascuna vale 5 punti (+1 punto se non valida)

  $\models \exists y\ (\ \neg B(x) \to (\ B(y) \to \neg C(x)\ )\ )$
  $\models \exists x\ (\ \neg B(x) \to B(x) \& \perp\ )$
  $\models \neg \exists y\ \forall z\ (\ z = y \to y = z\ )$

- (12 punti) Sia T^{cla}_{su} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Elena suona se e solo se Paolo non suona.
  - Claudio suona se Paolo non suona.
  - Se Claudio suona Elena non suona.

  Si consiglia di usare:
  S(x)= x suona, c=Claudio, p=Paolo, e=Elena.

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione in T^{cla}_{su}:

  - Se Claudio suona allora Paolo suona.
  - Paolo suona.
  - Elena non suona.

- (24 punti) Sia T^{cla}_{im} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Carlo non imita nessuno.
  - Se qualcuno imita Flavio Carlo lo imita.
  - Gianni imita quelli che non lo imitano.
  - Gianni imita Flavio o Flavio imita Gianni.

  suggerimento: si consiglia di usare:
  M(x,y)= x imita y
  g=Gianni, f=Flavio, c= Carlo

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria T^{cla}_{im}:

- Qualcuno imita qualcun'altro.
- Gianni imita Carlo.
- Nessuno imita Flavio.
- Gianni non imita Flavio.
- Flavio imita Gianni.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (5 punti) $\vdash \forall x \; (\; s(x) = 0 \to 7 = x \;)$
2. (5 punti) $\vdash 0 = 100$
3. (5 punti) $\vdash \exists y \; \forall x \; x = x + y$
4. (5 punti) $\vdash \forall y \; \exists x (\; x = s(y) \to y = 4 \,)$
5. (8 punti) $\vdash \exists x \; \exists y \; x \cdot y = 2$
6. (8 punti) $\vdash (7 + 1) + 1 = 9$
7. (10 punti) $\vdash \forall x \; 1 + x = s(x)$

- Stabilire quali delle seguenti regole sono valide e in caso positivo anche sicure: (8 punti ciascuna)

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \; 1$$

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash C, A \& \neg A} \; 2$$

Logica classica con uguaglianza- calcolo abbreviato $\mathbf{LC}_{=}^{abbr}$

$$\text{ax-id} \qquad\qquad \text{ax-}\perp$$

$$\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \qquad\qquad \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \; \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \; \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \; \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \; \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \; \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \; \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \; \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \; \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \; \to -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \; \to -\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \; \forall-\mathrm{D} \; (x \notin VL(\Gamma, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma, \forall x \; A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x \; A(x) \vdash \nabla} \; \forall-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists\text{−S}\ (x \notin VL(\Gamma, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists\text{−D}$$

$$\begin{array}{c} = -\text{ax} \\ \Sigma \vdash t = t, \Delta \end{array} \qquad \frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\text{S}_f$$

Logica classica predicativa $\mathbf{LC}_=$ con uguaglianza

questa versione contiene le regole nel libro di Sambin

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ A \vdash A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{ax-}\bot \\ \bot\vdash \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&\text{−F} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{−re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{−re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee\text{−F} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{−re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{−re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to \text{−F} \qquad \frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta} \to \text{−re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta}\ \forall\text{−D}\ (x \notin VL(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{−re}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta}\ \exists\text{−S}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{−re}$$

$$\overline{\vdash t = t}\ {=}\text{-ax} \qquad \frac{\Sigma, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \rightarrow x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0) \& \forall x\ (\ A(x) \rightarrow A(s(x))\ ) \rightarrow \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\overline{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash \Delta}\ \neg\text{-ax}_{sx1} \qquad \overline{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash \Delta}\ \neg\text{-ax}_{sx2}$$

$$\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx1}\\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx2}\\ \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''\end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\begin{array}{c}\text{rf}^*\\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{sm}^*\\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{tra}^*\\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{cf}^*\\ \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{cp}^*\\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta\end{array}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $LC_{=}$ + $comp_{sx}$+ $comp_{dx}$ si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\ P(x) \to P(s(x))\ )}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$