## I appello 25 gennaio 2016

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti di seguito sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero mostrare se sono validi o meno e soddisfacibili o insoddisfacibili in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $\neg(\ (\ A \rightarrow B\ )\ \vee\ (\ B \rightarrow A\ )\ )\ \vdash A\&\neg A$
  - 6 punti
    $\forall w\ (\ C(w)\ \rightarrow\ B(w)\ ) \vdash \forall y\ (\ \neg C(y)\ \vee\ B(y)\ )$
  - 5 punti
    $b = w\ \&\ w = a\ \vdash \exists z\ (\ a = z\ \rightarrow\ b = z\ )$
  - 6 punti
    $\exists y\ \neg F(y)\ \vdash \forall y\ D(y)$
  - 7 punti
    $\exists y\ \forall w\ (\ C(y)\ \&\ B(w)\ ) \vdash \forall w\ \exists y\ (\ C(y)\ \vee\ B(w)\ )$

• Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla logica classica classica con uguaglianza motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

  - (4 punti)
    Non si dà il caso che se non dormi tu sia sveglio.
    ———————————————
    Non sei sveglio solo se dormi.

    si consiglia di usare:
    D = "tu dormi"
    S = "sei sveglio"

- (6 punti)

  Tutti sono a teatro.
  Qualcuno si diverte e qualcuno non si diverte.
  ---
  Non tutti si divertono.

  si consiglia di usare:
  T(x)= x è a teatro
  D(x)= x si diverte

- (8 punti)

  Monica ha un unico cane.
  Ringo è diverso da Dino.
  ---
  Se Dino è un cane di Monica allora Ringo non è un cane di Monica.

  si consiglia di usare:
  C(x,y)="x è cane di y"
  m="Monica"
  d="Dino"
  r="Ringo"

- (11 punti)

  Non si dà il caso che ci sia un unico uomo sulla terra.
  ---
  O non esiste uomo sulla terra oppure esistono due uomini diversi.

  si consiglia di usare:
  U(x)="x è uomo sulla terra"

- (7 punti)

  I cani randagi non sono accuditi.
  ---
  Esistono cani randagi molto belli che non sono accuditi.

  si consiglia di usare:
  $C(x)$="$x$ è un cane randagio"
  $A(x)$="$x$ è accudito"
  $B(x)$="$x$ è molto bello"

- (7 punti)

  Non si dà il caso che a tutti piaccia tutto.
  ---
  C'è qualcuno a cui non piace qualcosa.

  si consiglia di usare:
  P(x,y)="$x$ piace a $y$"

- (10 punti)

  "Non c'e' nessuno che non dorme oppure esiste qualcuno che se lui non dorme allora tutti non dormono. "

  si consiglia di usare:
  D(x)= x dorme

- (9 punti)
  "Esiste un cuoco famoso che cucina per tutti quelli che non cucinano per se stessi e cucina soltanto per quelli che non cucinano per se stessi. "

  si consiglia di usare:
  C(x,y)= x cucina per y
  F(x)= x è un cuoco famoso

- (30 punti) Sia $T_{bal}$ la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Giorgio balla se canta.
  - Giorgio non balla se non canta.
  - Barbara canta solo se non balla.
  - Barbara non balla solo se canta.
  - Elvira non canta.
  - Non c'è alcuno che non balli e non canti.

  Si consiglia di usare:
  B(x)="$x$ balla"
  C(x)="$x$ canta"
  b="Barbara"
  g="Giorgio"

  Dedurre poi in $T_{bal}$ le seguenti affermazioni:

  - Giorgio o balla o canta.
  - Tutti o cantano o ballano.
  - Giorgio canta e balla.
  - Qualcuno canta e balla.
  - Elvira balla.
  - Qualcuno balla e non canta.
  - Non si dà il caso che Barbara sia balli che canti.

- (22 punti) Sia $T_{cor}$ la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Nel cortile non c'è un topo se non c'è un gatto.
  - Nel cortile c'è un topo se nel cortile c'è un gatto.
  - Nel cortile non c'è alcun cane se nel cortile c'è un gatto o c'è un topo.
  - Se nel cortile c'è un pollo allora nel cortile non ci sono cani.
  - Nel cortile c'è un pollo oppure c'è un topo.
  - Se nel cortile c'è un pollo allora c'è un cane e c'è un topo.

Si consiglia di usare:
T(x)= "$x$ è un topo nel cortile"
G(x)= "$x$ è una gatto nel cortile"
C(x)= "$x$ è un cane nel cortile"
P(x)="$x$ è un pollo nel cortile"

Dedurre poi in $T_{mer}$ le seguenti affermazioni:

- Nel cortile non ci sono cani.
- Nel cortile non ci sono polli.
- Nel cortile c'è un topo.
- Nel cortile c'è un gatto.

• Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (5 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ (\ x = y\ \vee\ s(x) \neq s(y)\ )$
2. (6 punti) $\vdash\ \exists x\ \exists y\ \exists z\ z \cdot y = 5 \cdot x$
3. (8 punti) $\vdash \forall x\ \forall y\ (\ x = y\ \vee\ s(x) \neq s(y)\ )$
4. (8 punti) $0 = 5\ \&\ x = y \vdash \forall z\ z = 5$
5. (8 punti) $\vdash \forall y\ y = 5 + 0$
6. (20 punti) $\vdash \forall x\ x \cdot 2 = x + x$

• Stabilire se le seguenti regole, formalizzate dove occorre, e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

- (15 punti)

$$\frac{\text{Reinhold è sul monte Civetta } \vdash \text{ Reinhold si arrampica}}{\text{Reinhold è sul monte Civetta } \vdash \text{ Qualcuno si arrampica e qualcuno no.}}\ 1$$

ove
$A(x)$="$x$ si arrampica"
$M(x, y)$="$x$ è su $y$"
$c$="monte Civetta"
$r$="Reinhold"

- (10 punti)

$$\frac{D \vdash C}{B \vdash \neg D \vee C}\ 2$$

- (16 punti)

$$\frac{\text{Qualcuno canta. } \vdash \text{Non c'è silenzio.}}{\text{Tutti cantano. } \vdash \text{Non c'è silenzio.}}\ 3$$

ove
$S$="c'è silenzio"
$C(x)$="$x$ canta"

## Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\top\\ \Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'\end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\text{S} \qquad \begin{array}{c}=-\text{ax}\\ \Gamma \vdash t = t, \Delta\end{array}$$

## Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $LC_=$ + $\text{comp}_{sx}$+ $\text{comp}_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \text{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$

$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$

$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$

$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$

$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$

$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$

$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ove il numerale $n$ si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \dots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

# Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–D}_v$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{tra}^* & \text{cf}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

# 1 Regole derivate in aritmetica

In $LC_{=}$ + $\text{comp}_{sx}$+ $\text{comp}_{dx}$ si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\ P(x) \to P(s(x))\ )}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$