IV appello ZOOM 29 giugno 2020

nome: cognome:

- Scrivere in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Si ricorda di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Si ricorda di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Si esplicitino le eventuali regole derivate usate che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- ATTENZIONE: se si risolvono correttamente TUTTI gli esercizi con il segno ++ si prende il voto 30 independentemente dall'avere o meno un bonus accumulato (previa convalida con orale).

- La dicitura **OB** indica un esercizio che deve essere svolto obbligatoriamente per il superamento dell'appello.

- Mostrare se i sequenti elencati sotto sono tautologie, opinioni o paradossi in logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso).

  - (2 punti) **OB**

    $\neg \perp \vdash \neg\neg(A \vee B)$

  - (6 punti) (++)

    $\forall z\ z = a \vdash \forall x\ \exists y\ x = y\ \&\ \ c = d$

  - (5 punti) **OB**

    $\exists x A(x) \vdash \neg\forall z\ (\ A(z) \ \rightarrow\ \neg A(z)\ )$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi nella logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso).

  - (5 punti **OB**)

    Vania parla e Pippo ascolta.

    Qualcuno parla e qualcuno ascolta.

    si consiglia di usare:
    $P(y)$ ="y parla"
    $A(x)$="x ascolta"
    p = Pippo v=Vania

- (7 punti)

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Chi ascolta impara.}\\ \text{Tutti ascoltano.}\end{array}}{\text{Quelli che non ascoltano non sono contenti o non imparano.}}$$

  si consiglia di usare:
  $A(y)$ =“y ascolta”
  $I(x)$ = “x impara”
  $C(x)$=‘x è contento”

- (++) (6 punti)

$$\frac{\text{Se qualcuno cerca allora qualcuno trova.}}{\text{Nessuno cerca ma non trova.}}$$

  si consiglia di usare:
  $C(y)$ =“y cerca” $T(x)$ = “x trova”

- (8 punti)

$$\frac{\text{Abele non ha una zia.}}{\text{Non si dà il caso che Abele abbia un'unica zia.}}$$

  si consiglia di usare:
  $Z(x, y)$= x è zia di y
  a=Abele

- (++) (14 punti)
  ‘Ciascuno ama tutti quelli che lo amano e soltanto loro.”

  si consiglia di usare:
  $A(x, y)$=x ama y

- Stabilire se la seguente regola e le sue inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l’analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

  - (6 punti)

$$\frac{F \vdash C \vee \bot \qquad F \vdash M \vee F}{C \vdash \neg\neg F}\ 1$$

- (++)

  Sia T_{dan} la teoria ottenuta estendendo LC$_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - (2 punti) Nessuno danza con Noemi.
  - (2 punti) Se uno danza con un altro, quest'altro danza con il primo.
  - (1 punto) Elton danza con Monica.
  - (2 punti) Elton danza soltanto con Monica.
  - (1 punto) Monica non è Anna.

  noindent Si consiglia di usare:
  $D(x, y)$= x danza con y
  n="Noemi"
  a="Anna"
  m="Monica"
  e="Elton"

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria in T_{dan}: (ciascuna conta 10 punti quando non indicato espressamente)

  - (3 punti) Elton danza con qualcuno.
  - (6 punti) Monica danza con Elton.
  - (3 punti) Monica danza con qualcuno.
  - Noemi non danza con nessuno.
  - Elton non danza con Anna.
  - Qualcuno e soltanto lui danza con Elton.

- (++) (*Esercizio facoltativo*)

  In un gioco due amiche fanno un'affermazione, che è vera o falsa.
  Un'affermazione è mancanta e l'altra è riportata sotto:
  Morgana: ....
  Celeste: **io affermo il vero solo se Morgana afferma il vero**.

  Si può dedurre, anche se non si conosce l'affermazione di Celeste, quante affermazioni sono vere?

  a) No
  b) Sì, sono vere tutte e due le affermazioni.
  c) Sì, è vera solo l'affermazione di Morgana.
  d) Sì, è vera solo l'affermazione di Celeste.
  e) Nessuna affermazione è vera.

  Si analizzino le varie affermazioni (5 punti ciascuna) nella teoria proposizionale $T_{Celeste}$ ottenuta estendendo $\mathbf{LC}_p$ con la formalizzazione di ciò che dice Celeste tramite:
  M= l'affermazione di Morgana è vera
  C= l'affermazione di Celeste è vera

- (++) *Esercizio facoltativo*: Dall'affermazione

Ip In estate nessuno sta sempre a casa.

si dica quali delle seguenti affermazioni si possono dedurre (la classificazione di ciascuna vale 7 punti se è deducibile e 12 punti se NON lo è):

A **Se è estate o uno sta sempre in casa o non ci sta sempre.**
B **Se qualcuno sta sempre in casa allora non è estate.**
C **Se non è estate qualcuno sta sempre in casa.**

Si giustifichi la risposta corretta producendo una sua derivazione nella teoria predicativa

$$\mathbf{T_{Ip}} = \mathbf{LC}_{=} + \mathbf{Ip}$$

dopo aver formalizzato ciascuna affermazione utilizzando:
R(x)= x sta sempre in casa
E=è estate
Inoltre si giustifichi le risposte "affermazione X" non corrette classificando in $\mathbf{LC}_{=}$ il sequente $\mathbf{Ip} \vdash$ "affermazione X" .

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{ax-}\bot \\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{ax-}\mathtt{tt} \\ \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to -\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to -\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma\ ,\ t_{ter} = s_{ter}\ ,\ \Gamma(t_{ter})\ \vdash\ \Delta(t_{ter})\ ,\ \nabla}{\Sigma\ ,\ \Gamma(s_{ter})\ ,\ t_{ter} = s_{ter}\ \vdash\ \Delta(s_{ter})\ ,\ \nabla}\ = -\mathrm{S} \qquad \begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \Gamma \vdash t_{ter} = t_{ter}\ ,\ \Delta \end{array}$$

TAUTOLOGIE CLASSICHE

associatività $\vee$	$(A \vee B) \vee C$	$\leftrightarrow$	$A \vee (B \vee C)$
associatività &	$(A \& B) \& C$	$\leftrightarrow$	$A \& (B \& C)$
commutatività $\vee$	$A \vee B$	$\leftrightarrow$	$B \vee A$
commutatività &	$A \& B$	$\leftrightarrow$	$B \& A$
distributività $\vee$ su &	$A \vee (B \& C)$	$\leftrightarrow$	$(A \vee B) \& (A \vee C)$
distributività & su $\vee$	$A \& (B \vee C)$	$\leftrightarrow$	$(A \& B) \vee (A \& C)$
idempotenza $\vee$	$A \vee A$	$\leftrightarrow$	A
idempotenza &	$A \& A$	$\leftrightarrow$	A
leggi di De Morgan	$\neg(B \vee C)$	$\leftrightarrow$	$\neg B \& \neg C$
	$\neg(B \& C)$	$\leftrightarrow$	$\neg B \vee \neg C$
legge della doppia negazione	$\neg\neg A$	$\leftrightarrow$	A
implicazione classica	$(A \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$\neg A \vee C$
disgiunzione come antecendente	$(A \vee B \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)$
congiunzione come antecendente	$(A \& B \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$
legge della contrapposizione	$(A \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(\neg C \rightarrow \neg A)$
legge del modus ponens	$A \& (A \rightarrow C)$	$\rightarrow$	C
legge della NON contraddizione	$\neg(A \& \neg A)$		
legge del terzo escluso	$A \vee \neg A$		
leggi di De Morgan	$\neg(\exists x\, A(x))$	$\leftrightarrow$	$\forall x\, \neg A(x)$
	$\neg(\forall x\, A(x))$	$\leftrightarrow$	$\exists x\, \neg A(x)$

Regola di composizione

$$\frac{\vdash \texttt{fr} \qquad\qquad \Gamma, \texttt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

Regole derivate o ammissibili per $\mathbf{LC}_=$

si ricorda che $t \neq s \ \equiv \ \neg t = s$

$$\frac{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \qquad \frac{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C}$$

$$\frac{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \qquad \frac{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{−S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{−D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{"}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{"}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{−S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{−D}_v$$