III appello 4 settembre 2013

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $\vdash \neg((((B \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow A) \vee C)$

  - 5 punti
    $\exists z \, (a = z \,\&\, z = b) \vdash b = a$

  - 5 punti
    $C(w) \rightarrow \forall w \, C(w) \vdash \neg \forall y \, \neg C(y)$

  - 5 punti
    $\vdash \exists z \, \forall w \, (\neg w \neq b \rightarrow z = w)$

  - 5 punti
    $\vdash \forall y \, C(y) \vee \neg \forall y \, \neg\neg C(y)$

  - 5 punti
    $\exists y \, A(y) \vee \neg C(y) \vdash \forall y \, (\neg\neg A(y) \vee \neg A(y))$

  - 6 punti
    $\exists z \, \exists x \, \exists y \, (z \neq x \,\&\, x \neq y) \vdash \exists x \, \exists y \, \exists z \, (y \neq x \,\&\, (z \neq y \,\&\, (x \neq z \vee z = x)))$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

  - (3 punti)
    È meglio ammainare le vele se il mare è in tempesta.

    Soltanto se il mare non è in tempesta ed è calmo, non è meglio ammainare le vele.

si consiglia di usare:
T=“il mare è in tempesta”
M =“è meglio ammainare le vele”
C=“il mare è calmo”

- (6 punti)

  Non soltanto gli italiani vorrebbero visitare New York.

  Qualcuno non italiano vorrebbe visitare New York.

  si consiglia di usare:
  I(x)=“x è italiano”
  V(x,y)= “x vorrebbe visitare y ”
  n =“New York”

- (6 punti)

  New York è una città che tutti vorrebbero visitare.

  Qualcuno non italiano vorrebbe visitare New York.

  si consiglia di usare:
  I(x)=“x è italiano”
  V(x,y)= “x vorrebbe visitare y ”
  C(x)=“x è una città”
  n =“New York”

- (7 punti)

  L’unico avvocato del paese di Cantù è in ferie.
  Gigi è un avvocato del paese di Cantù.

  Gigi è in ferie.

  si consiglia di usare:
  A(x,y)=“x è un avvocato del paese y”
  F(x)= “x è in ferie”
  c =“Cantù”
  g=“Gigi”

- (6 punti)

  La fortuna aiuta gli audaci ma non i pigri.

  Chi è aiutato dalla fortuna non è pigro.

  si consiglia di usare:
  F(y) =“la fortuna aiuta y”
  A(x)= “x è audace”
  P(x)= “x è pigro”

- (5 punti)

  Chi legge stimola la mente e migliora la memoria.
  Quelli che migliorano la memoria aumentano le loro conoscenze.

  Tutti quelli che leggono aumentano le loro conoscenze.

  si consiglia di usare:
  L(y) =“y legge”
  S(x)= “x stimola la mente”
  M(x)= “x migliora la memoria”
  A(x)=“x aumenta le sue conoscenze”

- (22 punti) Sia T_{tor} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
  - Pippo sale sulla torre se Laura non ci sale.
  - Solo se Pippo non sale sulla torre, Laura ci sale oppure ci sale Gloria.
  - Laura non sale sulla torre solo se Gloria ci sale.
  - Se Clara sale sulla torre allora tutti ci salgono.

  Si consiglia di usare:

  T(x)="x sale sulla torre"
  p="Pippo"
  g="Gloria"
  l="Laura"
  c="Clara"

  Dedurre poi in T_{tor} le seguenti affermazioni:
  - Pippo sale sulla torre se e solo se non ci sale Laura.
  - Gloria non sale sulla torre se Pippo ci sale.
  - Laura sale sulla torre.
  - Pippo non sale sulla torre.
  - Clara non sale sulla torre.

- (30 punti) Sia T_{am} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
  - Clara ama Gino.
  - Se uno ama uno diverso da sè allora quest'altro ama il primo.
  - Tutti amano se stessi.
  - Filippo ama solo se stesso.
  - Filippo è diverso da Clara.

  Si consiglia di usare:
  A(x,y)= "x ama y"
  f="Filippo"
  c="Clara"
  g="Gino"
  b="Barbara"

  Dedurre poi in T_{am} le seguenti affermazioni:
  - Gino ama Clara se Clara non è Gino.
  - Barbara ama se stessa.
  - Tutti amano qualcuno.
  - Filippo non ama Clara.
  - Clara non ama Filippo.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (5 punti) $\vdash \forall y\ \exists w\ (\ s(w) \neq s(y)\ \rightarrow\ y \neq w\ )$
2. (5 punti) $\vdash \exists w\ \exists z\ w = z \cdot z$
3. (5 punti) $\vdash \forall y\ (\ s(y) = 95\ \rightarrow\ y = 94\ )$
4. (5 punti) $\vdash \forall x\ x \neq 8$
5. (6 punti) $\vdash \exists w\ \forall y\ y = w + 2$
6. (5 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ (\ 3 \neq x\ \vee\ x \neq y\ )$
7. (7 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ x = y \cdot 1$
8. (9 punti) $\vdash \forall x\ \forall y\ (\ (y + x) + y \neq 0\ \rightarrow\ y \neq 0\ )$
9. (11 punti) $\vdash \forall w\ \forall z\ (\ w \cdot z \neq 0\ \rightarrow\ 0 \neq w\ \&\ z \neq 0\ )$

- Stabilire se le seguenti regole sono valide e anche sicure rispetto alla semantica classica:

(8 punti)

$$\frac{A(x) \vdash \Delta \qquad\qquad B \vdash \Delta}{\forall x\ A(x)\ \&\ B \vdash \Delta}\ 1$$

(5 punti)

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad\qquad \vdash B, \Delta}{\Gamma, A \rightarrow \neg B \vdash \Delta}\ 2$$

- (10 punti) Stabilire se la formalizzazione di

$$\frac{\text{Carlo ride}\ \vdash\ \text{La barzelletta è piaciuta a Carlo}}{\text{Tutti ridono}\ \vdash \text{La barzelletta è piaciuta a qualcuno}}\ 3$$

è istanza di una regola valida, assieme alla sua inversa, rispetto alla semantica classica, ove
$B(x)$=“la barzelletta è piaciuta ad x”
$R(x)$=“x ride”
c=“Carlo”

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\overset{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla} \qquad \overset{\text{ax-}\top}{\Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\mathrm{S} \qquad \overset{=-\mathrm{ax}}{\Gamma \vdash t = t, \Delta}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC$_=$ + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$

$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$

$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$

$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$

$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$

$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$

$$Ax7. \vdash A(0)\ \&\ \forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ )\ \to\ \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n\ \equiv\ \underbrace{s(s\ldots(0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1\ \equiv\ s(0)$$

$$2\ \equiv\ s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C}$$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{''} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{''} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{''}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{''}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–D}_v$$

$$\overset{\text{rf}^*}{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'}$$

$$\overset{\text{sm}^*}{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta}$$

$$\overset{\text{tra}^*}{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta} \qquad \overset{\text{cf}^*}{\Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta}$$

$$\overset{\text{cp}^*}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$