12 Esercizi risolti su aritmetica di Peano

1. $\vdash 0 = 0 + 0$ è valido in PA in quanto si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax } 3. \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0+0=0 \vdash 0+0=0\end{array}}{\forall x\ (\, x+0=x\,) \vdash 0+0=0}\ \forall\text{−S}_v}{\text{Ax } 3. \vdash 0 = 0+0}\ \text{sy}-\text{r}}{\vdash 0 = 0+0}\ \text{comp}_{sx}$$

2. $\vdash \forall x\ (\, s(x) = s(2) \to x = 2\,)$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\dfrac{\vdash \text{Ax } 2. \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ s(x)=s(2)\to x=2 \vdash s(x)=s(2)\to x=2\end{array}}{\forall y\ (\, s(x)=s(y)\to x=y\,) \vdash s(x)=s(2)\to x=2}\ \forall\text{−S}_v}{\forall x\ \forall y\ (\, s(x)=s(y)\to x=y\,) \vdash s(x)=s(2)\to x=2}\ \forall\text{−S}_v}{\text{Ax } 2. \vdash \forall x\ (\, s(x)=s(2)\to x=2\,)}\ \forall\text{−D}}{\vdash \forall x\ (\, s(x)=s(2)\to x=2\,)}\ \text{comp}_{sx}$$

l'applicazione di $\forall-$D è possibile perchè x non compare libera nella premessa.

3. $\vdash 0 \cdot 0 = 0 + 0$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi\\ \vdash 0\cdot 0 = 0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_8\\ \vdash 0 = 0+0\end{array}}{\vdash 0\cdot 0 = 0+0}\ \text{tr}-\text{r}$$

ove π_8 è la derivazione sopra di $\vdash 0 = 0 + 0$ mentre π è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax } 5. \quad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0\cdot 0=0 \vdash 0\cdot 0=0\end{array}}{\forall x\ (\, x\cdot 0=0\,) \vdash 0\cdot 0=0}\ \forall\text{−S}_v}{\vdash 0\cdot 0=0}\ \text{comp}_{sx}$$

4. $\vdash \forall x\ (\, x = 0 \to s(x) = s(0)\,)$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{cf}^{*}\\ x=0 \vdash s(x)=s(0)\end{array}}{\vdash x=0 \to s(x)=s(0)}\ \to-\text{D}}{\vdash \forall x\ (\, x=0\to s(x)=s(0)\,)}\ \forall\text{−D}$$

ove l'applicazione di $\forall-$D è lecita perchè x non compare libera nel sequente radice.

5. $\vdash 2 + 1 = 3$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\cfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \pi_1 & \pi_2\\ \vdash 2+1=s(2+0) & \vdash s(2+0)=s(2)\end{array}}{\vdash 2+1=3}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\cfrac{\vdash \text{Ax 4.} \quad \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 2+1=s(2+0)\vdash 2+1=s(2+0)\end{array}}{\forall y\ (\,2+s(y)=s(2+y)\,)\vdash 2+1=s(2+0)}\ \forall\text{–S}_v}{\forall x\ \forall y\ (\,x+s(y)=s(x+y)\,)\vdash 2+1=s(2+0)}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash 2+1=s(2+0)}\ \text{comp}_{sx}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\cfrac{\vdash \text{Ax 3.} \quad \cfrac{\begin{array}{c}\text{cf}^*\\ 2+0=2\vdash s(2+0)=s(2)\end{array}}{\vdash \forall x\ (\,x+0=x\,)\vdash s(2+0)=s(2)}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash s(2+0)=s(2)}\ \text{comp}_{sx}$$

6. $\vdash 0\cdot 2=0$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\cfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \pi_1 & \pi_2\\ \vdash 0\cdot 2=0\cdot 1+0 & \vdash 0\cdot 1+0=0\end{array}}{\vdash 0\cdot 2=0}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\cfrac{\vdash \text{Ax 6.} \quad \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0\cdot 2=0\cdot 1+0\vdash 0\cdot 2=0\cdot 1+0\end{array}}{\forall y\ (\,0\cdot s(y)=0\cdot y+0\,)\vdash 0\cdot 2=0\cdot 1+0}\ \forall\text{–S}_v}{\forall x\ \forall y\ (\,x\cdot s(y)=x\cdot y+x\,)\vdash 0\cdot 2=0\cdot 1+0}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash 0\cdot 2=0\cdot 1+0}\ \text{comp}_{sx}$$

ricordando che $2 \equiv s(1)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\cfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \pi_3 & \pi_4\\ \vdash 0\cdot 1+0=0\cdot 1 & \vdash 0\cdot 1=0\end{array}}{\vdash 0\cdot 1+0=0}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove π_3 è la derivazione seguente:

$$\cfrac{\vdash \text{Ax 3.} \quad \cfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0\cdot 1+0=0\cdot 1\vdash 0\cdot 1+0=0\cdot 1\end{array}}{\forall x\ (\,x+0=x\,)\vdash 0\cdot 1+0=0\cdot 1}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash 0\cdot 1+0=0\cdot 1}\ \text{comp}_{sx}$$

mentre π_4 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_5\\ \vdash 0\cdot 1 = 0\cdot 0+0\end{array}\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_6\\ \vdash 0\cdot 0+0=0\end{array}}{\vdash 0\cdot 1=0}\ \mathrm{tr-r}$$

ove π_5 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 6.}\quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0\cdot 1=0\cdot 0+0\vdash 0\cdot 1=0\cdot 0+0\end{array}}{\forall y\ (\,0\cdot s(y)=0\cdot y+0\,)\vdash 0\cdot 1=0\cdot 0+0}\ \forall\text{–S}_v}{\forall x\ \forall y\ (\,x\cdot s(y)=x\cdot y+x\,)\vdash 0\cdot 1=0\cdot 0+0}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash 0\cdot 1=0\cdot 0+0}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

ricordando che $1\ \equiv\ s(0)$, mentre π_6 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_7\\ \vdash 0\cdot 0+0=0\cdot 0\end{array}\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi\\ \vdash 0\cdot 0=0\end{array}}{\vdash 0\cdot 0+0=0}\ \mathrm{tr-r}$$

ove π è la derivazione iniziale e infine π_7 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.}\quad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0\cdot 0+0=0\cdot 0\vdash 0\cdot 0+0=0\cdot 0\end{array}}{\forall x\ (\,x+0=x\,)\vdash 0\cdot 0+0=0\cdot 0}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash 0\cdot 0+0=0\cdot 0}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

7. $\vdash 5\cdot 1=5$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \vdash 5\cdot 1 = 5\cdot 0+5\end{array}\qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \vdash 5\cdot 0+5=5\end{array}}{\vdash 5\cdot 1=5}\ \mathrm{tr-r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 6.}\quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 5\cdot 1=5\cdot 0+5\vdash 5\cdot 1=5\cdot 0+5\end{array}}{\forall y\ (\,5\cdot s(y)=5\cdot y+5\,)\vdash 5\cdot 1=5\cdot 0+5}\ \forall\text{–S}_v}{\forall x\ \forall y\ (\,x\cdot s(y)=x\cdot y+x\,)\vdash 5\cdot 1=5\cdot 0+5}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash 5\cdot 1=5\cdot 0+5}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

ricordando che $1\ \equiv\ s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_3\\ \vdots\\ \vdash 5\cdot 0+5=0+5\end{array}\qquad \begin{array}{c}\pi_4\\ \vdots\\ \vdash 0+5=5\end{array}}{\vdash 5\cdot 0+5=5}\ \mathrm{tr-r}$$

ove π_3 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 5.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{sym}^*}{5\cdot 0 = 0 \vdash 0 = 5\cdot 0} \qquad \dfrac{\dfrac{= \text{-ax}}{\vdash 0+5 = 0+5}}{0 = 5\cdot 0 \vdash 5\cdot 0 + 5 = 0+5}\ {=}{-}\mathrm{S}}{5\cdot 0 = 0 \vdash 5\cdot 0+5 = 0+5}\ \mathrm{comp}_{sx}}{\forall x\ (\,x\cdot 0 = 0\,) \vdash 5\cdot 0 + 5 = 0+5}\ \forall{-}\mathrm{S}_v}{\vdash 5\cdot 0 + 5 = 0+5}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

mentre π_4 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_5\\ \vdots\\ \vdash \forall x\ 0+x = x\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_6\\ \vdots\\ \forall x\ (\,0+x = x\,) \vdash 0+5 = 5\end{array}}{\vdash 0+5 = 5}\ \mathrm{tr}-\mathrm{r}$$

ove π_6 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{0+5 = 5 \vdash 0+5 = 5}}{\forall x\ (\,0+x = x\,) \vdash 0+5 = 5}\ \forall{-}\mathrm{D}$$

mentre π_5 è la derivazione in sezione 11.12.3.

8. $\vdash \forall x\ (\,x+0 = x\cdot 0\,)$ NON è valido in PA, ovvero NON è derivabile perchè in PA è derivabile

$$\forall x\ (\,x+0 = x\cdot 0\,) \vdash \perp$$

Chiamiamo π una sua derivazione che poi descriveremo più sotto.

Ora se esistesse una derivazione π_0 di $\vdash \forall x\ (\,x+0 = x\cdot 0\,)$ in PA otterremmo che in PA è derivabile il falso ad esempio come segue

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_0\\ \vdots\\ \vdash \forall x\ (\,x+0 = x\cdot 0\,)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \forall x\ (\,x+0 = x\cdot 0\,) \vdash \perp\end{array}}{\vdash \perp}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

Ma se PA è assunta consistente, ovvero non deriva il falso, allora abbiamo trovato una contraddizione dalla supposta esistenza di π_0 e si conclude che la derivazione π_0 NON esiste e dunque $\vdash \forall x\ (\,x+0 = x\cdot 0\,)$ NON è valido in PA.

Ora mostriamo una derivazione di

$$\forall x\ (\,x+0 = x\cdot 0\,) \vdash \perp$$

che possiamo scegliere come la derivazione π menzionata sopra. Essa è la seguente

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ 1+0 = 1\cdot 0 \vdash 1 = 0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ 1 = 0 \vdash \perp\end{array}}{1+0 = 1\cdot 0 \vdash \perp}\ \mathrm{comp}_{sx}}{\forall x\ (\,x+0 = x\cdot 0\,) \vdash \perp}\ \forall{-}\mathrm{S}_v$$

ove π_1 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 1.} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\text{-ax}_{sx1}}{1=0, s(0)\neq 0 \vdash \bot}}{1=0, \forall x\,(\, s(x)\neq 0\,)\vdash\bot}\ \forall\text{−S}_v}{1=0\vdash\bot}\ \text{comp}_{sx}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$ e π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_3\\ \vdots\\ \vdash 1=1+0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_4\\ \vdots\\ 1+0=1\cdot 0\vdash 1+0=0\end{array}}{1+0=1\cdot 0\vdash 1=0}\ \text{tr}-\text{r}$$

e π_3 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{1+0=1\vdash 1+0=1}}{\forall x\ (\,x+0=x\,)\vdash 1+0=1}\ \forall\text{−S}_v}{\text{Ax 3.}\vdash 1=1+0}\ \text{sy}-\text{r}}{\vdash 1=1+0}\ \text{comp}_{sx}$$

mentre π_4 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{1+0=1\cdot 0\vdash 1+0=1\cdot 0} \qquad \begin{array}{c}\pi_5\\ \vdots\\ \vdash 1\cdot 0=0\end{array}}{1+0=1\cdot 0\vdash 1+0=0}\ \text{tr}-\text{r}$$

ove π_5 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 5.} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{1\cdot 0=0\vdash 1\cdot 0=0}}{\forall x\ (\,x\cdot 0=0\,)\vdash 1\cdot 0=0}\ \forall\text{−S}_v}{\vdash 1\cdot 0=0}\ \text{comp}_{sx}$$

9. $\vdash 0=4+0$ NON è valido in PA perchè NON è derivabile in PA in quanto in PA è derivabile

$$0=4+0\vdash\bot$$

Chiamiamo π una sua derivazione che descriveremo più sotto.

Ora se esistesse una derivazione π_0 di $\vdash 0=4+0$ in PA otterremmo che in PA è derivabile il falso ad esempio come segue

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_0\\ \vdots\\ \vdash 0=4+0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ 0=4+0\vdash\bot\end{array}}{\vdash\bot}\ \text{comp}_{sx}$$

Ma se assumiamo PA consistente, ovvero che non deriva il falso, avendo trovato una contraddizione dalla supposta esistenza di π_0 si conclude che la derivazione π_0 NON esiste e dunque $\vdash 0 = 4 + 0$ NON è valido in PA.

Ora mostriamo una derivazione di

$$0 = 4 + 0 \vdash \bot$$

che possiamo scegliere come la derivazione π menzionata sopra. Essa è la seguente

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ 0 = 4 + 0 \vdash 4 = 0\end{array}\qquad \begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ 4 = 0 \vdash \bot\end{array}}{0 = 4 + 0 \vdash \bot}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

ove π_1 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 1.}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx1}\\ 4 = 0, s(3) \neq 0 \vdash \bot\end{array}}{4 = 0, \forall x\,(\, s(x) \neq 0\,) \vdash \bot}\ \forall\text{–S}_v}{4 = 0 \vdash \bot}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

ricordando che $4 \equiv s(3)$ e π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0 = 4 + 0 \vdash 0 = 4 + 0\end{array}\qquad \begin{array}{c}\pi_3\\ \vdots\\ \vdash 4 + 0 = 4\end{array}}{\dfrac{0 = 4 + 0 \vdash 0 = 4}{0 = 4 + 0 \vdash 4 = 0}\ \mathrm{sy} - \mathrm{r}}\ \mathrm{tr} - \mathrm{r}$$

e π_3 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.}\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 4 + 0 = 4 \vdash 4 + 0 = 4\end{array}}{\forall x\ (\, x + 0 = x\,) \vdash 4 + 0 = 4}\ \forall\text{–S}_v}{\text{Ax 3.} \vdash 4 = 4 + 0}\ \mathrm{sy} - \mathrm{r}}{\vdash 4 = 4 + 0}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

10. $\vdash 3 = 2 + 1$ è valido in pA perchè si può derivare in PA ad esempio come segue:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_1\\ \vdash 2 + 1 = s(2 + 0)\end{array}\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_2\\ \vdash s(2 + 0) = s(2)\end{array}}{\dfrac{\vdash 2 + 1 = 3}{\vdash 3 = 2 + 1}\ \mathrm{sy} - \mathrm{r}}\ \mathrm{tr} - \mathrm{r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 4.}\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 2 + 1 = s(2 + 0) \vdash 2 + 1 = s(2 + 0)\end{array}}{\forall y\ (\, 2 + s(y) = s(2 + y)\,) \vdash 2 + 1 = s(2 + 0)}\ \forall\text{–S}_v}{\forall x\ \forall y\ (\, x + s(y) = s(x + y)\,) \vdash 2 + 1 = s(2 + 0)}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash 2 + 1 = s(2 + 0)}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{cf}^*\\ 2+0=2 \vdash s(2+0)=s(2)\end{array}}{\vdash \forall x\ (\,x+0=x\,) \vdash s(2+0)=s(2)}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash s(2+0)=s(2)}\ \text{comp}_{sx}$$

11. $\vdash \exists y\ \forall x \quad x+y=x$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{Ax 3.}\\ \vdash \forall x \quad x+0=x\end{array}}{\vdash \exists y\ \forall x \quad x+y=x}\ \exists\text{–S}_v$$

12. $\vdash 2+4=s(s(2+2))$

è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_1\\ \vdash 2+4=s(2+3)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_2\\ \vdash s(2+3)=s(s(2+2))\end{array}}{\vdash 2+4=s(s(2+2))}\ \text{tr}-\text{r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 4.} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 2+4=s(2+3) \vdash 2+4=s(2+3)\end{array}}{\forall y\ 2+s(y)=s(2+y) \vdash 2+4=s(2+3)}\ \forall\text{–S}_v}{\forall x\ \forall y\ x+s(y)=s(x+y) \vdash 2+4=s(2+3)}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash 2+4=s(2+3)}\ \text{comp}_{sx}$$

ricordando che $4 \equiv s(3)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 4.} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{cf}^*\\ 2+3=s(2+2) \vdash s(2+3)=s(s(2+2))\end{array}}{\forall y\ 2+s(y)=s(2+y) \vdash s(2+3)=s(s(2+2))}\ \forall\text{–S}_v}{\forall x\ \forall y\ x+s(y)=s(x+y) \vdash s(2+3)=s(s(2+2))}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash s(2+3)=s(s(2+2))}\ \text{comp}_{sx}$$