

preI-Compitino 12 maggio 2010

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- Non si contano le brutte copie.
- Specificate la logica in cui fate le derivazioni.
- Specificate le regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Mostrare se i sequenti di seguito sono derivabili o meno in logica classica, e nel caso negativo, se si tratta di proposizione dire la riga della tabella in cui risulta falsa e nel caso di sequenti con formule fornire un contromodello della validità del sequente:

2 punti

$$(A \& B) \rightarrow (A \& C) \vdash A \& B \rightarrow C \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva così'} \\ \text{no in LC} & \text{poichè} \end{array} \right.$$

2 punti

$$(A \& B) \rightarrow (A \vee C) \vdash A \& B \rightarrow C \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva così'} \\ \text{no in LC} & \text{poichè} \end{array} \right.$$

3 punti

$$A \& \forall x B(x) \vdash \forall x (A \& B(x)) \quad (x \notin FV(A)) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva così'} \\ \text{no in LC} & \text{poichè} \end{array} \right.$$

3 punti

$$\exists x (A(x) \& B(x)) \vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva così'} \\ \text{no in LC} & \text{poichè} \end{array} \right.$$

- Formalizzare in sequente le argomentazioni di seguito. Si provi se il sequente ottenuto è valido rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta:

1. (6 punti)

Solo se un programma termina allora funziona.

Par è un programma che non termina.

Par è un programma che non funziona

si consiglia di usare:

P(x) = x è un programma

T(x) = x termina

$F(x) = x$ funziona
 $p = \text{Par}$

corretto in LC sì no

2. (3 punti)

Solo se piove o sono stanco allora rimango a casa.
Non rimango a casa.

Non piove e non sono stanco.

si consiglia di usare:

$P =$ piove

$S =$ sono stanco

$C =$ rimango a casa

corretto in LC sì no

3. (6 punti)

Nessuno è più bravo di Giorgio

Se qualcuno è più bravo di Giorgio allora tutti sono più bravi di Giorgio.

si consiglia di usare:

$B(x,y) = x$ è più bravo di y

$g =$ Giorgio

corretto in LC sì no

4. (6 punti)

Tutti quelli che commettono un'ingiustizia sono moralmente colpevoli.

Tutti quelli che evadono il fisco commettono un'ingiustizia.

Tutti quelli che evadono il fisco sono moralmente colpevoli.

si consiglia di usare:

$C(x) = x$ commette un'ingiustizia

$M(x) = x$ è moralmente colpevole

$E(x) = x$ evade il fisco

corretto in LC sì no

5. (6 punti)

Sui numeri pari il programma scritto da Mario si ferma.

3 non è un numero pari.

Su 3 il programma scritto da Mario si ferma.

si consiglia di usare:

$p =$ programma scritto da Mario

$F(y,x) =$ il programma y su x si ferma

$P(x) = x$ è un numero pari

$\overline{3} = 3$

corretto in LC sì no

6. (6 punti)

C' è qualcuno che scherza.

Tutti ridono.

Quelli che non scherzano allora ridono.

si consiglia di usare:

S(x)= x scherza

R(x)= x ride

corretto in LC

sì

no

7. (6 punti)

Se gli studenti hanno coscienza di rispettare il silenzio allora ogni richiamo è superfluo.

Se non si dà il caso che gli studenti abbiano coscienza di rispettare il silenzio

allora non si dà il caso che ogni richiamo sia efficace.

Ogni richiamo è superfluo o non ogni richiamo è efficace.

si consiglia di usare:

C= gli studenti hanno coscienza di rispettare il silenzio

S=ogni richiamo è superfluo

E= ogni richiamo è efficace

corretto in LC

sì

no

- Stabilire quali delle seguenti formule sono VALIDE e nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI o INSODDISFACIBILI motivando la risposta: (ciascuna vale 3 punti)

1. $\forall x (\perp \vee A(x))$

2. $\forall x (A(x) \rightarrow A(x) \& C)$
con $x \notin VL(C)$

3. $\exists x (A(x) \& \perp) \rightarrow \forall x A(x)$

4. $\exists x A(x) \rightarrow \forall x A(x) \vee \perp$

- Stabilire quali delle seguenti regole sono valide mostrando la prova o un controesempio. Nel caso siano valide stabilire pure se sono sicure, ovvero la loro inversa è pure valida. (ciascuno vale 6 punti)

1.

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \perp, \nabla} \quad 1$$

2.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \perp \vdash B, C, \Delta} \quad 2$$

3.

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \perp, \nabla} \quad 3$$

Esercizi da 10 punti:

- Formalizzare le seguenti frasi e stabilire se le formule ottenute sono VALIDE per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI o INSODDISFACIBILI motivando la risposta:

1. (10 punti)

“Esiste un qualcosa che se è onnipotente allora tutti sono onnipotenti”

si consiglia di usare:

$O(x) = x$ è un onnipotente

2. (10 punti)

“Esiste un qualcosa che crea tutti e soli quelli che non si creano da soli”

si consiglia di usare:

$C(x,y) = x$ crea y

- Formalizzare le seguenti argomentazioni in sequente e stabilire il sequente ottenuto è VALIDO per la semantica della logica classica; nel caso negativo mostrare un contromodello. Infine stabilire se c'è un modello che rende valido il sequente (ovvero lo rende soddisfacibile):

1. (10 punti)

Qualsiasi sia la macchina che Mario compra questa è una macchina rossa.

Mario compra una macchina rossa e se una macchina non è rossa allora Mario non la compra.

si consiglia di usare:

$m = \text{Mario}$

$R(x) = x$ è rosso

$C(y,x) = y$ compra x

$M(x) = x$ è una macchina

2. (10 punti)

Se gli studenti hanno coscienza di rispettare il silenzio allora ogni richiamo è superfluo.

Se gli studenti non hanno coscienza di rispettare il silenzio allora ogni richiamo è inefficace.

Ogni richiamo è superfluo o inefficace.

si consiglia di usare:

$S(x) = x$ è studente

$C(x) = x$ ha coscienza di rispettare il silenzio

$R(x) = x$ è un richiamo

$E(x) = x$ è efficace

$P(x) = x$ è superfluo

Logica classica- calcolo abbreviato LC^{abbr}

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\text{ax-id} & \text{ax-}\perp \\
\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla \\
\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma} \text{sc}_{\text{sx}} & \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}} \\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-D & \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&S \\
\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee D & \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee-S \\
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg-D & \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg-S \\
\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow -D & \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow -S \\
\frac{\Gamma \vdash A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \forall -D \ (x \notin VL(\Gamma, \nabla)) & \frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall -S \\
\frac{\Gamma, A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \nabla} \exists -S \ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) & \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists -D
\end{array}
\end{array}$$

Logica classica predicativa LC

$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ A \vdash A \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{ax-}\bot \\ \bot \vdash \end{array}$	
$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Sigma} \text{in}_{\text{sx}}$	$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma'} \text{in}_{\text{dx}}$	
$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \nabla}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \nabla} \text{sc}_{\text{sx}}$	$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}}$	
$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash \nabla}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash \nabla} \text{cn}_{\text{sx}}$	$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla} \text{cn}_{\text{dx}}$	
$\frac{\Gamma \vdash A, \nabla \quad \Gamma \vdash B, \nabla}{\Gamma \vdash A \& B, \nabla} \&-D$	$\frac{\Gamma, A \vdash \nabla}{\Gamma, A \& B \vdash \nabla} \&-re_1$	$\frac{\Gamma, B \vdash \nabla}{\Gamma, A \& B \vdash \nabla} \&-re_2$
$\frac{\Gamma, A \vdash \nabla \quad \Gamma, B \vdash \nabla}{\Gamma, A \vee B \vdash \nabla} \vee-S$	$\frac{\Gamma \vdash A, \nabla}{\Gamma \vdash A \vee B, \nabla} \vee-re_1$	$\frac{\Gamma \vdash B, \nabla}{\Gamma \vdash A \vee B, \nabla} \vee-re_2$
$\frac{\Gamma, A \vdash B, \nabla}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \nabla} \rightarrow -D$	$\frac{\Gamma' \vdash A, \nabla \quad \Gamma, B \vdash \nabla}{\Gamma, A \rightarrow B, \Gamma' \vdash \nabla} \rightarrow -re$	
$\frac{\Gamma \vdash A(x), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta} \forall-D \ (x \notin VL(\Gamma, \Delta))$	$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \Delta} \forall-re$	
$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \Delta} \exists-S \ (x \notin VL(\Gamma, \Delta))$	$\frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \Delta} \exists-re$	