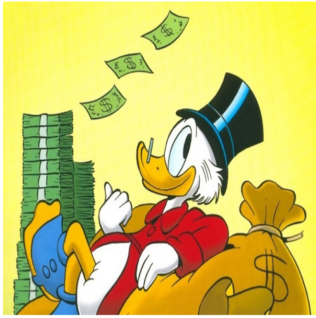
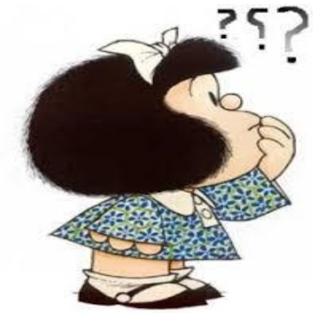
Se “*Ciascuno possiede ciò che NON ha perduto*”



e se “*tu NON hai perduto un miliardo*”

allora “*possiedi un miliardo*”!!

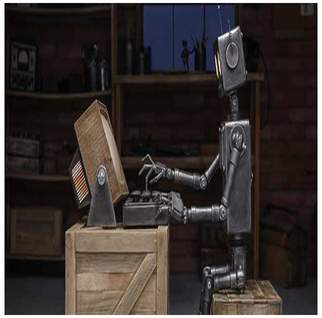


15. Lezione Corso di Logica 2020/2021

3 dicembre 2020

Maria Emilia Maietti

email: maietti@math.unipd.it



SIMULAZIONE **appello**

venerdi’ 18 dicembre 2020 (teorie)

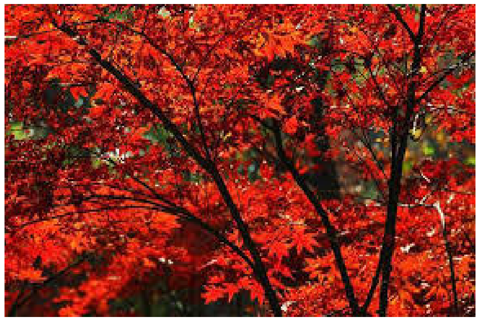
+

giovedi’ 7 gennaio 2021 (classificazione)

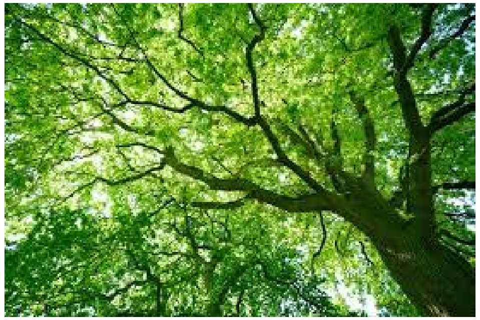
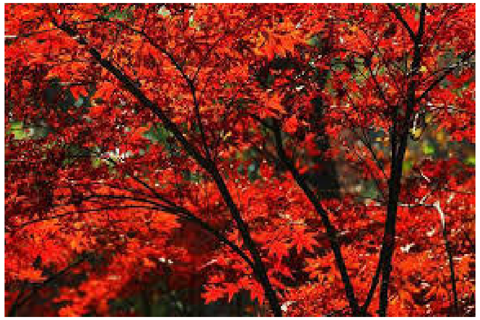
10.30-12.30

A che serve il calcolo dei sequenti predicativo con uguaglianza?

data una formula $\texttt{fr}$ nel linguaggio predicativo con uguaglianza

il **sequente** $\vdash \texttt{fr}$ derivabile in $LC_=$	il **sequente** $\vdash \neg\texttt{fr}$ derivabile in $LC_=$
sse	sse
$\texttt{fr}$ è **TAUTOLOGIA**	$\texttt{fr}$ è **PARADOSSO** sse $\neg\, \texttt{fr}$ è **TAUTOLOGIA**
	

A che serve il calcolo dei sequenti predicativo con uguaglianza?

il **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$ derivabile in $LC_=$ sse $\Gamma \vdash \Delta$ è **TAUTOLOGIA** 	il **sequente** $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ derivabile in $LC_=$ sse $\Gamma \vdash \Delta$ è **PARADOSSO** sse $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ è **TAUTOLOGIA** 

Il paradosso dell'uguaglianza

Si mostri che traducendo *letteramente*

Siamo tutti diversi

con

$$\forall x\ \forall y\ \neg x{=}y$$

si ottiene un **paradosso** in $\mathrm{LC}_{=}$

ALTRA TRADUZIONE

Se invece traduciamo

Siamo tutti diversi

con

$$\forall x\ \forall y\ (\ \neg x{=}y \rightarrow \neg x{=}y\ )$$

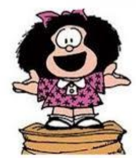
si ottiene un'**ovvia tautologia** in $\mathrm{LC}_{=}$

Derivazione in LC$_=$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{\neg w{=}z \vdash \neg w{=}z}}{\vdash \neg w{=}z \rightarrow \neg w{=}z}\ \rightarrow-\mathrm{D}}{\vdash \forall y\,(\neg w{=}y \rightarrow \neg w{=}y)}\ \forall-\mathrm{D}}{\vdash \forall x\,\forall y\,(\neg x{=}y \rightarrow \neg x{=}y)}\ \forall-\mathrm{D}
$$

ove le applicazioni di $\forall-\mathrm{D}$ sono entrambe lecite

perchè le variabili w e z non compaiono nei rispettivi sequenti radice sotto.



cosa NON è lecito sostituire

dati t_{ter} e $\mathtt{pr}(x)$

NON possiamo SEMPRE scrivere

$$\mathtt{pr}(x)[x/t_{ter}] \;\equiv\; \mathtt{pr}(t_{ter})$$

VIETATO

$\mathtt{pr}(x)[x/w] \;\equiv\; \mathtt{pr}(w)$ **NOOO!!!**

sostituire variabile w

se DIVENTA VINCOLATA in $\mathtt{pr}(w)$

Errore di sostituzione

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\ \forall y \neg x{=}y\ ,\ \forall y \neg y{=}y \vdash}{\forall x\ \forall y\ \neg x{=}y \vdash}\ \forall\text{–S}\mathbf{NOOOOO}!}{\vdash \neg \forall x\ \forall y\ \neg x{=}y}\ \neg\text{–D}$$

perchè si è sostituita x con la variabile y

AUMENTANDO

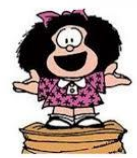
da 1 y vincolata da $\forall$ in $\forall y \neg x{=}y$

(senza contare quella del $\forall$!!)

a 2 y vincolata da $\forall$ in $\forall y \neg y{=}y$

Derivazione corretta in $\mathbf{LC}_{=}$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, \forall y \neg x = y \;,\; \forall y\, \neg z = y \vdash z = z}\ = -\mathrm{ax}}{\forall x\, \forall y\, \neg x = y \;,\; \forall y\, \neg z = y, \neg z = z \vdash}\ \neg-\mathrm{D}}{\forall x\, \forall y\, \neg x = y \;,\; \forall y\, \neg z = y \vdash}\ \forall-\mathrm{S} \quad \textbf{SI}'!}{\forall x\, \forall y\, \neg x = y \vdash}\ \forall-\mathrm{S} \quad \textbf{SI}'!}{\vdash \neg \forall x\, \forall y\, \neg x = y}\ \neg-\mathrm{D}
$$



controllo correttezza sostituzione

È lecita la seguente applicazione di $\forall$-S

$$\frac{\forall \mathbf{y}\ \exists\, \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}\,, \qquad \exists \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \vdash \nabla}{\forall \mathbf{y}\ \exists\, \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \vdash \nabla}\ \forall\!-\!\mathrm{S}$$

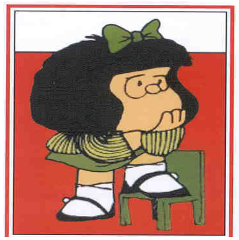
??

ove con $y + z$ si intende un termine

ottenuto aggiungendo al linguaggio formale il simbolo della funzione somma $+$

in modo tale che

$\mathbf{t_1} + \mathbf{t_2}$ è un termine dati $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$ termini



controllo correttezza sostituzione

È lecita la seguente applicazione di $\forall$-S

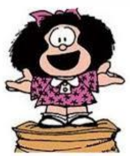
$$\frac{\forall \mathbf{y}\ \exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}\ , \qquad \exists \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \vdash \nabla}{\forall \mathbf{y}\ \exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \vdash \nabla}\ \forall\!-\!\mathrm{S}$$

??

NOO! perchè la sostituzione di $\mathbf{y}$ con $\mathbf{x}$ NON è lecita

(dal basso verso l'alto)

perchè *aumenta il numero di* $\mathbf{x}$ sotto potere di azione di $\exists\mathbf{x}$

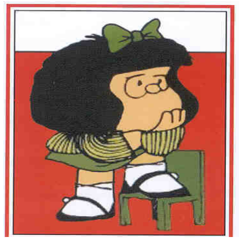


controllo correttezza sostituzione

È lecita la seguente applicazione di ∀-S

$$\frac{\forall \mathbf{y}\ \exists\, \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}\ , \qquad \exists\, \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{z} \vdash \nabla}{\forall \mathbf{y}\ \exists\, \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \vdash \nabla}\ \forall\!-\!\mathrm{S}$$

??



controllo correttezza sostituzione

È lecita la seguente applicazione di $\forall$-S

$$\frac{\forall \mathbf{y}\ \exists\, \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}\,, \qquad \exists\, \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{z} \vdash \nabla}{\forall \mathbf{y}\ \exists\, \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}$$

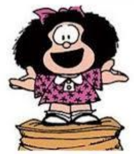
??

SÌ perchè la sostituzione di $\mathbf{y}$ con $\mathbf{z}$ è corretta

($\mathbf{z}$ è libera nel sequente conclusione!)

in quanto $\forall$-S **NON ha limitazione di sostituzioni**

a patto che queste siano **lecite**!!

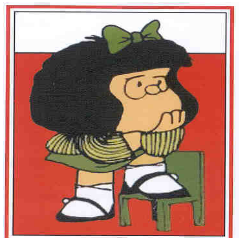


controllo correttezza sostituzione

È lecita la seguente applicazione di ∀-D

$$\frac{\Gamma \vdash \exists\, x\; x = z + z}{\Gamma \vdash \forall y\, \exists\, x\; x = y + z}\ \forall\text{–D}$$

??



controllo correttezza sostituzione

È lecita la seguente applicazione di $\forall$-D

$$\dfrac{\Gamma \vdash \exists\, x\; x = z + z}{\Gamma \vdash \forall y\, \exists\, x\; x = y + z}\ \forall-D$$

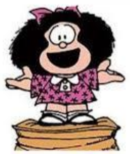
??

NOO!! ma per **VIOLAZIONE della condizione** sull'applicazione di $\forall-D$

(e NON per errori di sostituzione!)

perchè z è libera nel sequente conclusione di partenza

$$\Gamma \vdash \forall y\, \exists\, x\; x = y + z$$

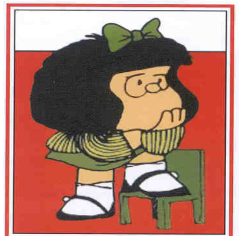


controllo correttezza sostituzione

È lecita la seguente applicazione di $\forall$-D

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\, x = x + z}{\Gamma \vdash \forall y\, \exists x\, x = y + z}\ \forall\text{-D}$$

??



controllo correttezza sostituzione

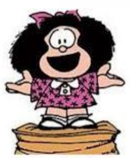
È lecita la seguente applicazione di $\forall$-D

$$\frac{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{z}}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{y}\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}}\ \forall\text{−D}$$

??

NOO! perchè la sostituzione di $\mathbf{y}$ con $\mathbf{x}$ NON è lecita

in quanto *aumenta il numero di* $\mathbf{x}$ sotto il potere di azione dell' $\exists\ \mathbf{x}$.

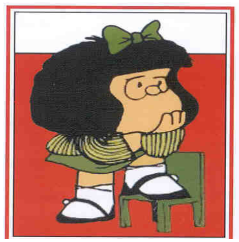


controllo correttezza sostituzione

È lecita la seguente applicazione di $\forall$-D

$$\frac{\forall y\, C(y) \vdash \exists x\, x = y + z}{\forall y\, C(y) \vdash \forall w\, \exists x\, x = w + z}\ \forall\text{–D}$$

??



controllo correttezza sostituzione

È lecita la seguente applicazione di $\forall$-D

$$\frac{\forall y\, C(y) \vdash \exists x\, x = y + z}{\forall y\, C(y) \vdash \forall w\, \exists x\, x = w + z}\ \forall\!-\!\mathrm{D}$$

??

SÌ perchè è lecita la sostituzione + è rispettata la condizione sulle variabili
in quanto y è vincolata nel sequente conclusione $\forall y\, C(y) \vdash \forall w\, \exists x\, x = w + z$
ma **NON si consiglia** questo tipo di applicazione di $\forall$-D

SI CONSIGLIA di applicare **SEMPRE** $\forall$-D

con **variabili NUOVE**

nel caso sopra

che **NON compaiono** in $\forall y\, C(y) \vdash \forall w\, \exists x\, x = w + z$

Nozione di sostituzione di un termine in predicato

la formula $\mathtt{pr}[x/t_{ter}]$ è definita in tal modo:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathtt{tt}[x/t_{ter}] & \equiv & \mathtt{tt} \\
\perp[x/t_{ter}] & \equiv & \perp \\
P_k(t_1,\ldots,t_m)[x/t_{ter}] & \equiv & P_k(t_1[x/t_{ter}],\ldots,t_m[x/t_{ter}]) \\
(t_1{=}t_2)[x/t_{ter}] & \equiv & t_1[x/t_{ter}] = t_2[x/t_{ter}] \\
(\forall y_i\ \mathtt{pr})[x/t_{ter}] & \equiv & \begin{cases} \forall y_i\ \mathtt{pr}[x/t_{ter}] & \text{se } x \text{ compare in } \mathtt{pr} \\ & \text{e } y_i \text{ NON compare libera in } t_{ter} \\ \forall y_i\ \mathtt{pr} & \text{se } x \text{ non compare in } \mathtt{pr} \end{cases} \\
(\exists y_i\ \mathtt{pr})[x/t_{ter}] & \equiv & \begin{cases} \exists y_i\ \mathtt{pr}[x/t_{ter}] & \text{se } x \text{ compare in } \mathtt{pr} \\ & \text{e } y_i \text{ NON compare libera in } t_{ter} \\ \exists y_i\ \mathtt{pr} & \text{se } x \text{ non compare in } \mathtt{pr} \end{cases} \\
(\mathtt{pr}_1\ \&\ \mathtt{pr}_2)[x/t_{ter}] & \equiv & \mathtt{pr}_1[x/t_{ter}]\ \&\ \mathtt{pr}_2[x/t_{ter}] \\
(\mathtt{pr}_1 \vee \mathtt{pr}_2)[x/t_{ter}] & \equiv & \mathtt{pr}_1[x/t_{ter}] \vee \mathtt{pr}_2[x/t_{ter}] \\
(\mathtt{pr}_1 \rightarrow \mathtt{pr}_2)[x/t_{ter}] & \equiv & \mathtt{pr}_1[x/t_{ter}] \rightarrow \mathtt{pr}_2[x/t_{ter}] \\
(\neg\mathtt{pr}_1)[x/t_{ter}] & \equiv & \neg\mathtt{pr}_1[x/t_{ter}]
\end{array}
$$

primo Vademecum per derivare

applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e ∀-D e ∃-S

con **variabili NUOVE**

applicare le regole ∀-S e ∃-D

con TERMINI **già presenti** nelle formule del sequente

(se ce ne sono)

Esempio

Si derivi in LC$_=$ il sequente

$$\forall x\ A(x) \vdash \forall z\ A(z)$$

che **NON** è *assioma identità*

perchè compaiono variabili diverse

(e lo sarebbe solo se identificassimo i nomi delle variabili vincolate

con la cosiddetta α-conversione....!!)

Esempio secondo vademecum

seguendo il **vademecum**

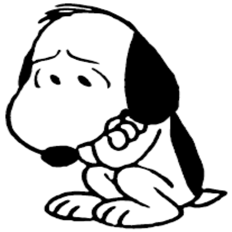
occorre *applicare prima* $\forall-\mathrm{D}$ di $\forall-\mathrm{S}$

ottenendo questa derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{\forall x\ A(x), A(w) \vdash A(w)}}{\forall x\ A(x) \vdash A(w)}\ \forall-\mathrm{S}}{\forall x\ A(x) \vdash \forall z\ A(z)}\ \forall-\mathrm{D}$$

ove l'applicazione di $\forall-\mathrm{D}$ è corretta perchè w non compare libera nel sequente radice.

Esempio che viola vademecum



contrariamente al **vademecum**

applichiamo prima $\forall - \mathrm{S}$ di $\forall - \mathrm{D}$

ottenendo questa derivazione

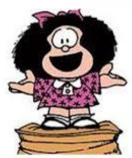
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{\mathbf{A}(\mathbf{z}),\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}),\ \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w})}}{\mathbf{A}(\mathbf{z}),\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w})}\ \forall - \mathrm{S}}{\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}),\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w})}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}}{\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}),\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})}\ \forall - \mathrm{D}}{\forall x\ A(x) \vdash \forall z\ A(z)}\ \forall - \mathrm{S}$$

ove l'applicazione di $\forall - \mathrm{D}$ è corretta perchè w

non compare libera nel sequente sopra il sequente radice

ma *la prima applicazione di* $\forall - \mathrm{S}$ *è* **stata inutile**!!

perchè è il $\forall - \mathrm{D}$ che **decide** la variabile libera con cui finire la derivazione!!



ALTRO Esempio secondo vademecum

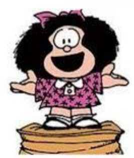
seguendo il **vademecum**

occorre *applicare prima* $\exists-\mathrm{S}$ di $\exists-\mathrm{D}$

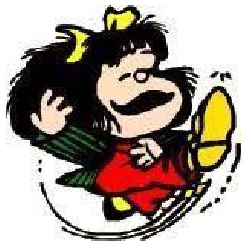
ottenendo questa derivazione

$$\cfrac{\cfrac{\mathsf{ax\text{-}id}}{A(w)\vdash A(w),\exists z\ A(z)}}{\cfrac{A(w)\vdash\exists z\ A(z)}{\exists x\ A(x)\vdash\exists z\ A(z)}\ \exists-\mathrm{S}}\ \exists-\mathrm{D}$$

ove $\exists-\mathrm{S}$ è corretta perchè w non compare libera nel sequente radice.

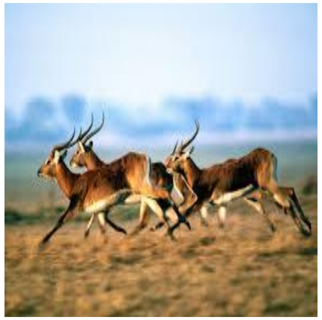


Velocizziamo le derivazioni



quando CHI DERIVA è **sicuro** di poter derivare il sequente

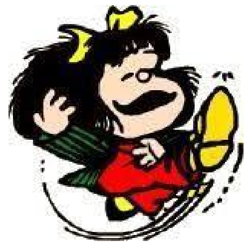
può USARE le seguenti regole **VELOCI**



$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists\text{−D}v \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall\text{−S}v$$

ATTENZIONE: NON sono sicure!

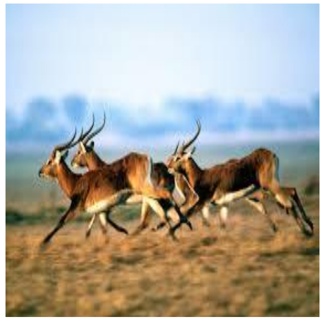
per velocizzare: Regole di indebolimento



quando CHI DERIVA è sicuro di poter derivare il sequente

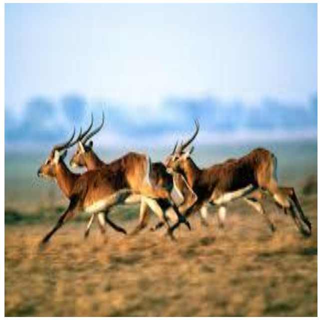
può USARE le seguenti regole **VELOCI** di indebolimento

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta}\ \mathrm{in}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_3}{\Gamma \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3}\ \mathrm{in}_{dx}$$



ATTENZIONE: NON sono sicure!

per velocizzare: Regole di contrazione



per **abbreviare** le derivazioni in presenza della **regola composizione**

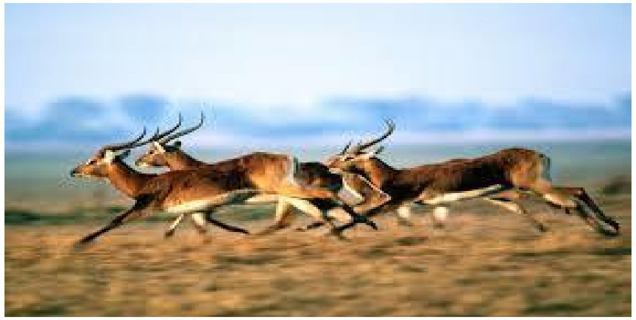
si possono **SEMPRE** usare le regole di **contrazione**

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash \nabla}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash \nabla}\ \mathrm{cn}_{\mathrm{sx}} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Sigma, \nabla}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \nabla}\ \mathrm{cn}_{\mathrm{dx}}$$

in quanto sono **SICURE**

Regola derivata

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}\ regola* $$ si dice regola derivata nella logica LC$_=$



se ABBREVIA un *pezzo di albero di derivazione* con regole di LC$_=$

ovvero

se possiamo ESPANDERLA

in un pezzo di albero di derivazione della **conclusione** $\Gamma \vdash \Delta$

a partire dalla **premessa** $\Gamma' \vdash \Delta'$

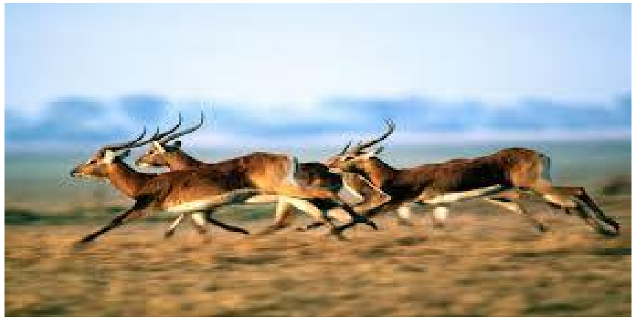
$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma' \vdash \Delta' \\ \pi \\ \vdots\end{array}}{\Gamma \vdash \Delta}$$

usando solo regole di LC$_=$

esempi di regole derivate

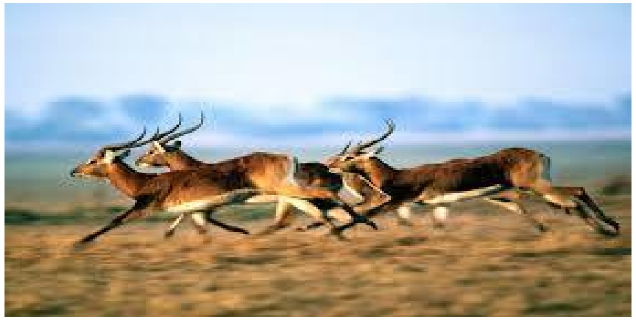
$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg-\mathrm{S} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg-\mathrm{D}$$

sono regole derivate



esempio di regola derivata

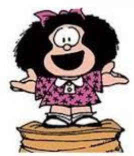
la regola derivata



$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S}$$

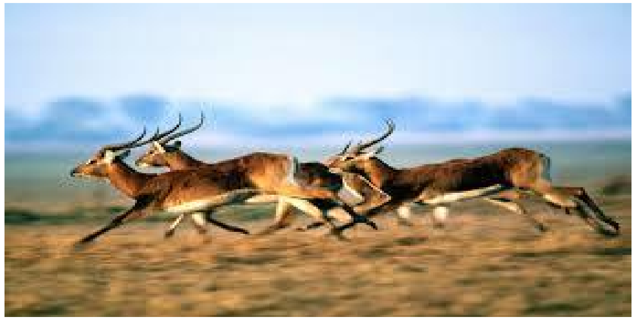
abbrevia:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \vdash \neg A, \Delta}\ \neg\text{–D}}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\text{–S}$$



Assiomi derivati

per abbreviare le derivazioni



$\neg$-**ax**$_{sx1}$

$$\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C$$

$\neg$-**ax**$_{sx2}$

$$\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C$$

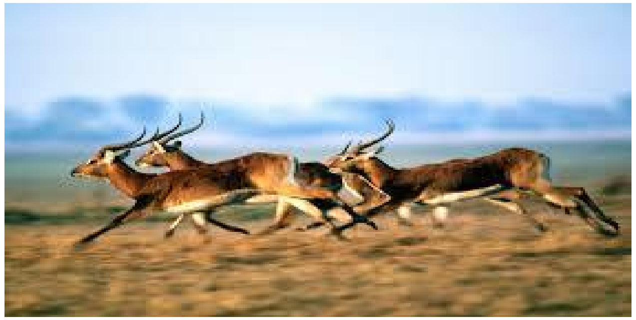
$\neg$-**ax**$_{dx1}$

$$\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''$$

$\neg$-**ax**$_{dx2}$

$$\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''$$

Cosa abbrevia l'assioma derivato

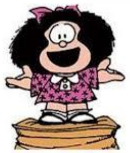


¬-ax$_{sx1}$

$$\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C$$

è assioma derivato perchè abbrevia:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, \Gamma', \Gamma'' \vdash A, C}{\Gamma, A, \Gamma', \Gamma'', \neg A \vdash C}\ \neg-\mathrm{S}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C}\ \mathrm{sc}_{sx}$$



Vademecum completo per derivare

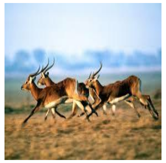
applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e $\forall$-D e $\exists$-S

con **variabili NUOVE**

Se e solo se si confida di poter derivare il sequente

si possono abbreviare le derivazioni

con le regole veloci, come $\exists - \mathrm{D}v$ e $\forall - \mathrm{S}v$

o indebolimento a **sx** e a **dx** 

applicare le regole $\forall$-S e $\exists$-D 

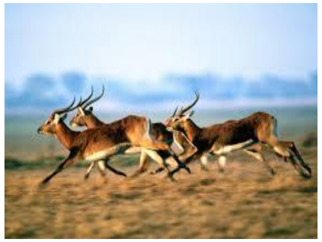
con TERMINI **già presenti** nelle formule del sequente

(se ce ne sono)

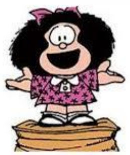
Esempio di applicazione regole derivate + indebolimento

la derivazione **già precedentemente mostrata** in $\mathsf{LC}_=$ del sequente

$$\exists y\, V(f,y)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, V(f,y_1)\ \&\ V(f,y_2) \rightarrow y_1 = y_2\,)\,,\ \neg V(f,u),\ V(f,d) \vdash u \neq d$$

si può abbreviare in tal modo: 

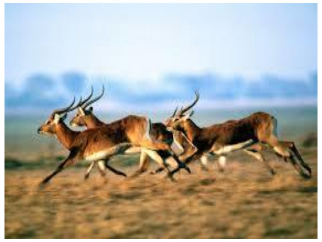
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg V(f,u),\ u=d,\ V(f,u) \vdash}\ \neg\text{-ax}_{dx2}}{\neg V(f,u),\ V(f,d),\ u=d \vdash}\ = -\mathrm{S}}{\neg V(f,u),\ V(f,d) \vdash u \neq d}\ \neg-\mathrm{D}}{\exists y\, V(f,y)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, V(f,y_1)\ \&\ V(f,y_2) \rightarrow y_1 = y_2\,)\,,\ \neg V(f,u),\ V(f,d) \vdash u \neq d}\ \mathrm{in}_{\mathrm{sx}}$$



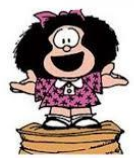
Esempio di applicazione regole derivate + indebolimento

la derivazione **già precedentemente mostrata** in $\mathsf{LC}_{=}$ del sequente

$$\exists x\, O(x)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\,)\, ,\ O(n)\, ,\ \neg n{=}k\ \vdash\ \neg O(m)$$

si può abbreviare in tal modo: 

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$O(n), O(k) \vdash O(n)$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$O(n), O(k) \vdash O(k)$}
\RightLabel{$\&-\mathrm{D}$}
\BinaryInfC{$O(n)\ ,\ O(k)\ \vdash O(n)\ \&\ O(k)$}
\RightLabel{in_{sx}}
\UnaryInfC{$O(n)\ ,\ O(k)\ \vdash O(n)\ \&\ O(k)\ ,\ n{=}k$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$O(n), O(k), n{=}k \vdash n{=}k$}
\RightLabel{$\rightarrow -\mathrm{S}$}
\BinaryInfC{$O(n)\ ,\ O(m)\ ,\ O(n)\ \&\ O(k) \rightarrow n{=}k \vdash n{=}k$}
\RightLabel{in_{sx}}
\UnaryInfC{$O(n)\ ,\ O(m)\ ,\exists x\, O(x)\ ,\ O(n)\ \&\ O(k) \rightarrow n{=}k \vdash n{=}k$}
\RightLabel{$\forall-\mathrm{S}_v$}
\UnaryInfC{$O(n)\ ,\ O(m)\ ,\ \exists x\, O(x)\ ,\ \forall y_2\ (\ O(n)\ \&\ O(y_2) \rightarrow n{=}y_2\ ) \vdash n{=}k$}
\RightLabel{$\forall-\mathrm{S}_v$}
\UnaryInfC{$O(n)\ ,\ O(m)\ ,\ \exists x\, O(x)\ ,\ \forall y_1\, \forall y_2\ (\ O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\ ) \vdash n{=}k$}
\RightLabel{$\&-\mathrm{S}$}
\UnaryInfC{$O(n)\ ,\ O(m)\ ,\ \exists x\, O(x)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\ (\ O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\ ) \vdash n{=}k$}
\RightLabel{sc_{sx}}
\UnaryInfC{$\exists x\, O(x)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\ (\ O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\ )\ ,\ O(n)\ ,\ O(m)\ \vdash n{=}k$}
\RightLabel{$\neg-\mathrm{S}$}
\UnaryInfC{$\exists x\, O(x)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\ (\ O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\ )\ ,\ O(n)\ ,\ O(k)\ ,\ \neg n{=}k\ \vdash$}
\RightLabel{sc_{sx}}
\UnaryInfC{$\exists x\, O(x)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\ (\ O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\ )\ ,\ O(n)\ ,\ \neg n{=}k\ ,\ O(k)\ \vdash$}
\RightLabel{$\neg-\mathrm{D}$}
\UnaryInfC{$\exists x\, O(x)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\ (\ O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\ )\ ,\ O(n)\ ,\ \neg n{=}k\ \vdash\ \neg O(k)$}
\end{prooftree}
$$



Formalizzare e Derivare

Ciascuno possiede ciò che non ha perduto.

Nessuno ha perduto un miliardo.

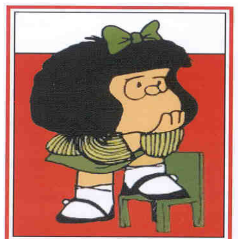
Tutti possiedono un miliardo.

usando

$P(x, y)$**="x** *possiede* **y"**

$E(x, y)$**= "x** *ha perduto* **y"**

m**="***un miliardo***"**



Formalizzare e Derivare

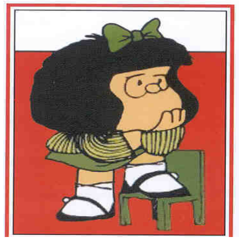
"*Se esiste qualcuno che studia e frequenta i corsi*

allora ci sono alcuni che studiano e alcuni che frequentano i corsi."

usando

$F(x)$="**x** *frequenta i corsi*"

$S(x)$= "**x** *studia*"



Formalizzare e Derivare

"*Se esistono due diversi allora per ciascuno esiste qualcuno diverso da lui.*"