Caro Babbo Natale

per il prossimo anno vorrei passare tutti gli esami

SENZA frequentare e studiare!

Ps: **ATTENTO a NON invertire il secondo o il terzo verbo all'infinito**

con il primo, come è successo finora!!!

18. Lezione Corso di Logica 2020/2021

11 dicembre 2020

Maria Emilia Maietti

email: maietti@math.unipd.it

SIMULAZIONE **appello**

venerdi' 18 dicembre 2020 (teorie)

$+$

giovedi' 7 gennaio 2021 (classificazione)

10.30-12.30

CORREZIONE SIMULAZIONE

venerdi’ 8 gennaio

giovedi’ 14 gennaio

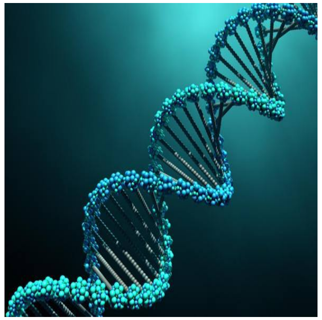
ore 10.30-12.30

Dalla Logica predicativa alla scienza...

Come si formalizza al computer 

una teoria scientifica?





Nozione di teoria predicativa

Teoria predicativa = calcolo logico per $LC_{=}$

+

assiomi (extralogici)

Ax.1, Ax.2,... Ax.k

+

regola di composizione

$$\frac{\vdash \mathtt{fr} \qquad\qquad \Gamma, \mathtt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

sequente derivabile in una teoria $\mathcal{T}$

Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice derivabile nella **teoria proposizionale** $\mathcal{T}$

se esiste un albero avente:

1. $\Gamma \vdash \Delta$ come radice;

2. ogni foglia è istanza di un assioma di $\mathcal{T}$

(= o di un **assioma logico di LC$_=$** o di un **assioma extralogico specifico** di $\mathcal{T}$);

3. l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di $\mathcal{T}$

(= delle regole di LC$_=$ + regole di composizione)

def. di teorema in una teoria $\mathcal{T}$

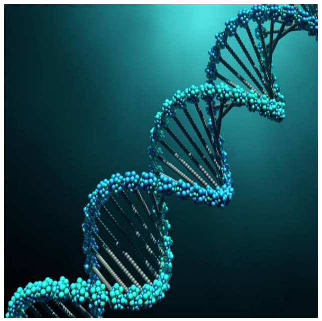
Una formula **fr** è detta **teorema di una teoria** $\mathcal{T}$

se il sequente $\vdash \texttt{fr}$ è *derivabile in* $\mathcal{T}$

(con l'uso degli assiomi e delle regole di composizione!!)

Tutte le tautologie PREDICATIVE classiche `pr`

sono teoremi (**tautologici**!) di OGNI teoria scientifica!!!



NON contraddittorietà del calcolo $\mathbf{LC}_=$

Teorema di **NON contraddizione** del calcolo $\mathbf{LC}_=$:

il calcolo logico $\mathbf{LC}_=$ **NON è contraddittorio** 

ovvero nel calcolo $\mathbf{LC}_=$ **NON si può derivare** $\vdash \perp$

(si possono applicare solo scambi a vuoto! senza arrivare ad assiomi)

(inoltre permette di derivare soltanto **tautologie classiche**!!)

come usare la regola comp: I modo DERIVAZIONE con assiomi

in una teoria $\mathcal{T}$

data una derivazione π ottenuta con due assiomi di $\mathcal{T}$

$$\frac{\pi}{\mathsf{Ax}.i_1\,,\,\mathsf{Ax}.i_2 \vdash \mathtt{fr}}$$

si può comporre questa derivazione con **CIASCUN assioma**

fino a trovare una derivazione di $\vdash \mathtt{fr}$ nella teoria $\mathcal{T}$ in tal modo

$$\dfrac{\vdash \mathsf{Ax}.i_1 \qquad \dfrac{\vdash \mathsf{Ax}.i_2 \qquad \dfrac{\pi}{\mathsf{Ax}.i_1\,,\,\mathsf{Ax}.i_2 \vdash \mathtt{fr}}}{\mathsf{Ax}.i_1 \vdash \mathtt{fr}}\ \mathrm{comp}}{\vdash \mathtt{fr}}\ \mathrm{comp}$$

$\Rightarrow$ **fr** diventa **teorema della teoria** $\mathcal{T}$.

come usare la regola comp: Il modo con TEOREMI GIÀ NOTI

in una TEORIA la CONOSCENZA si ACCUMULA con la regola comp:

Data una derivazione π_1

$$\frac{\pi_1}{\vdash \mathtt{T}_1}$$

allora si può usare il teorema già noto $\mathtt{T}_1$ come premessa per derivare un'altra formula $\mathtt{T}_2$

$$\frac{\pi_2}{\mathtt{T}_1 \vdash \mathtt{T}_2}$$

e poi **componendo le derivazioni π_1 e π_2 con comp**

in tal modo

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\vdash \mathtt{T}_1} \qquad \dfrac{\pi_2}{\mathtt{T}_1 \vdash \mathtt{T}_2}}{\vdash \mathtt{T}_2}\ \mathrm{comp}$$

si trova che $\mathtt{T}_2$ è pure un teorema di $\mathcal{T}$

ovvero

in una **teoria** *si possono derivare* **nuovi teoremi componendo** con derivazioni di **teoremi già noti** (*in libreria!*)

Attenzione alle teorie contraddittorie

in una teoria con assiomi contraddittori, come ad esempio:

Sia T_{contra} la teoria con assiomi:

$Ax.1$	è	$\vdash \mathtt{fr}$
$Ax.2$	è	$\vdash \neg\mathtt{fr}$

possiamo derivare il sequente $\vdash \perp$ in due modi!!

I modo: derivazione del falso in T_{contra}

direttamente con gli assiomi

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{Ax.}_1\\ \vdash \mathtt{fr}\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{Ax.}_2\\ \vdash \neg\mathtt{fr}\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathtt{fr} \vdash \mathtt{fr}, \bot\end{array}}{\mathtt{fr}, \neg\mathtt{fr} \vdash \bot}\ \neg-\mathrm{D}}{\mathtt{fr} \vdash \bot}\ \mathrm{comp}}{\vdash \bot}\ \mathrm{comp}$$

II modo: derivazione del falso in T_{contra}

con teorema intermedio + derivazione solo logica

$$\cfrac{\cfrac{\overset{\text{Ax.}_1}{\vdash \mathtt{fr}} \qquad \overset{\text{Ax.}_2}{\vdash \neg\mathtt{fr}}}{\vdash \mathtt{fr}\&\neg\mathtt{fr}}\ \text{comp} \qquad \cfrac{\cfrac{\overset{\text{ax-id}}{\mathtt{fr} \vdash \mathtt{fr}, \perp}}{\mathtt{fr}, \neg\mathtt{fr} \vdash \perp}\ \neg\text{-S}}{\mathtt{fr}\&\neg\mathtt{fr} \vdash \perp}\ \&\text{-S}}{\vdash \perp}\ \text{comp}$$

Nelle teorie contraddittorie OGNI enunciato è vero!!

In una teoria $\mathcal{T}$ in cui si deriva il falso $\vdash \perp$

OGNI formula predicativa $\mathtt{pr}$ risulta vera

in quanto si deriva in tal modo

$$\dfrac{\dfrac{\text{derivazione del falso}}{\vdash \perp} \qquad \dfrac{}{\perp \vdash \mathtt{pr}}\ \text{ax-}\perp}{\vdash \mathtt{pr}}\ \text{comp}$$

esempio di teoria informatica: teoria di Hoare

si aggiungono all'**aritmetica classica** di **Peano PA** le regole seguenti

per derivare **correttezza parziale dei programmi**

$$\frac{(\!|\phi|\!)\ C_1\ (\!|\eta|\!) \qquad (\!|\eta|\!)\ C_2\ (\!|\psi|\!)}{(\!|\phi|\!)\ C_1; C_2\ (\!|\psi|\!)}\ \text{Composition}$$

$$\frac{}{(\!|\psi[E/x]|\!)\ x = E\ (\!|\psi|\!)}\ \text{Assignment}$$

$$\frac{(\!|\phi \wedge B|\!)\ C_1\ (\!|\psi|\!) \qquad (\!|\phi \wedge \neg B|\!)\ C_2\ (\!|\psi|\!)}{(\!|\phi|\!)\ \texttt{if}\ B\ \{C_1\}\ \texttt{else}\ \{C_2\}\ (\!|\psi|\!)}\ \text{If-statement}$$

$$\frac{(\!|\psi \wedge B|\!)\ C\ (\!|\psi|\!)}{(\!|\psi|\!)\ \texttt{while}\ B\ \{C\}\ (\!|\psi \wedge \neg B|\!)}\ \text{Partial-while}$$

$$\frac{\vdash_{\mathrm{AR}} \phi' \to \phi \qquad (\!|\phi|\!)\ C\ (\!|\psi|\!) \qquad \vdash_{\mathrm{AR}} \psi \to \psi'}{(\!|\phi'|\!)\ C\ (\!|\psi'|\!)}\ \text{Implied}$$

Figure 4.1. Proof rules for partial correctness of Hoare triples.

IMPARERETE A DERIVARE FORMALMENTE QUESTE PARTI LOGICHE NEL CORSO esempio di derivazione di correttezza

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{(\!|1=1|\!)\ \texttt{y = 1}\ (\!|y=1|\!)}{(\!|\top|\!)\ \texttt{y = 1}\ (\!|y=1|\!)}\,i
\qquad
\dfrac{(\!|y=1\wedge 0=0|\!)\ \texttt{z = 0}\ (\!|y=1\wedge z=0|\!)}{(\!|y=1|\!)\ \texttt{z = 0}\ (\!|y=1\wedge z=0|\!)}\,i
}{(\!|\top|\!)\ \texttt{y = 1; z = 0}\ (\!|y=1\wedge z=0|\!)}\,c
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{(\!|y\cdot(z+1)=(z+1)!|\!)\ \texttt{z = z+1}\ (\!|y\cdot z=z!|\!)}{(\!|y=z!\wedge z\neq x|\!)\ \texttt{z = z+1}\ (\!|y\cdot z=z!|\!)}\,i
\qquad
(\!|y\cdot z=z!|\!)\ \texttt{y = y*z}\ (\!|y=z!|\!)
}{(\!|y=z!\wedge z\neq x|\!)\ \texttt{z = z+1; y = y*z}\ (\!|y=z!|\!)}\,c
}{(\!|y=z!|\!)\ \texttt{while (z != x) \{z = z+1; y = y*z\}}\ (\!|y=z!\wedge z=x|\!)}\,w
}{(\!|y=1\wedge z=0|\!)\ \texttt{while (z != x) \{z = z+1; y = y*z\}}\ (\!|y=x!|\!)}\,i
}{(\!|\top|\!)\ \texttt{y = 1; z = 0; while (z != x) \{z = z+1; y = y*z\}}\ (\!|y=x!|\!)}\,c
$$

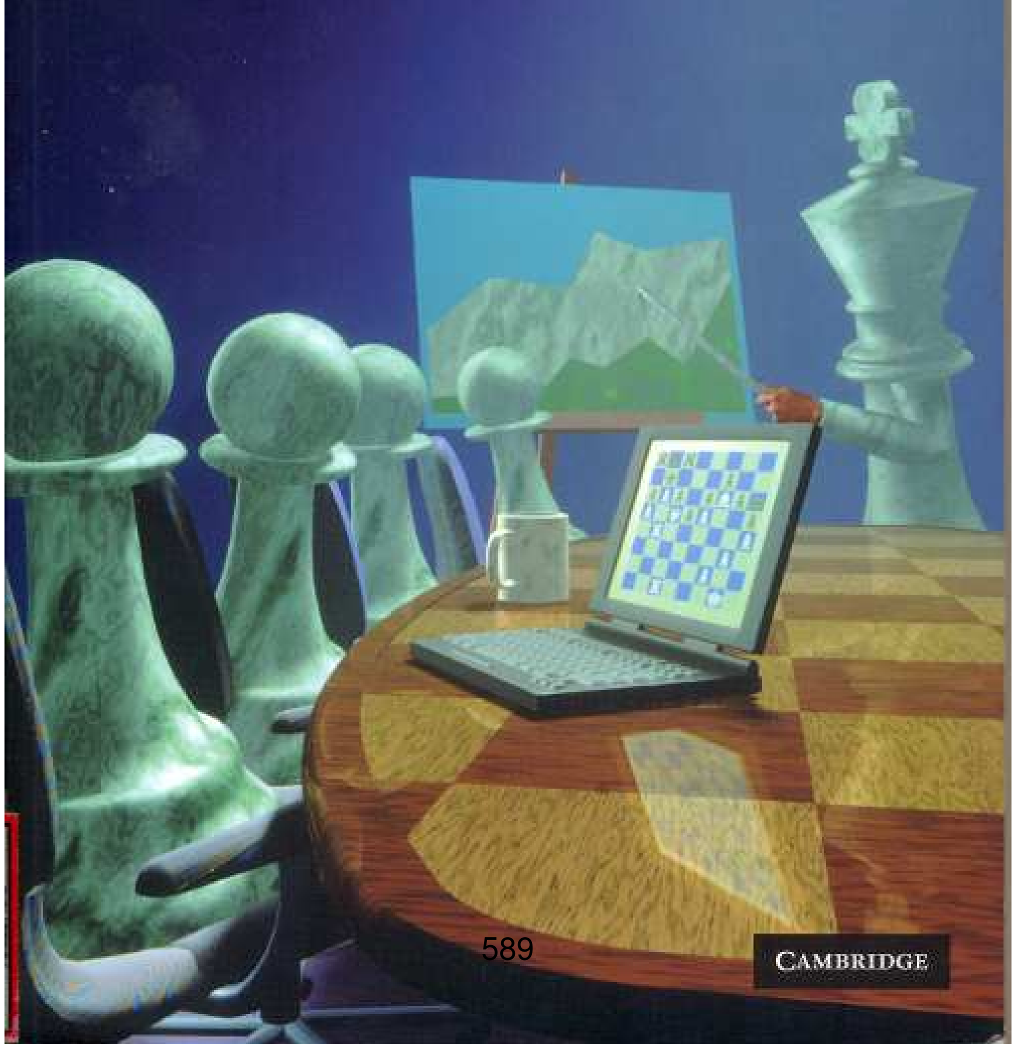
testo di riferimento

Michael Huth and Mark Ryan

Second Edition

Logic in Computer Science

Modelling and Reasoning about Systems



CAMBRIDGE

applicazione della logica predicativa

si può scrivere un programma

che **certifica la correttezza di un altro programma**

all'interno della teoria di **Hoare**

chiamata in letteratura "logica di Hoare"

perchè è pensata come un calcolo che estende $\mathrm{LC}_{=}$

l’ Aritmetica di Peano PA come teoria della logica classica predicativa

$$\mathbf{PA} \equiv \mathbf{LC}_{=} + \mathbf{Ax\ 1.} + \ldots + \mathbf{Ax\ 7.} + \mathbf{comp}$$

Linguaggio predicativo dell' aritmetica $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$

si aggiungono solo simboli per nuovi termini

(e nessun nuovo predicato!):

costanti

0 $\equiv$ "il numero zero"

funzioni tra termini:

$s(x)$ $\equiv$ "il successore $x+1$ di x"

$x+y$ $\equiv$ "la somma di x con y"

$x \cdot y$ $\equiv$ "la moltiplicazione di x con y"

ove x, y, z variano su numeri naturali

$Ax1. \vdash \forall \mathbf{x} \quad \mathbf{s}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$

"ogni numero successore è diverso da zero"

$Ax2. \vdash \forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y} \quad (\ \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}\ )$

"la funzione successore è iniettiva"

$Ax3. \vdash \forall \mathbf{x} \quad \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$

"lo zero è elemento neutro della somma"

$Ax4. \vdash \forall \mathbf{x}\ \ \forall \mathbf{y} \quad \mathbf{x} + \mathbf{s}(\mathbf{y}) = \mathbf{s}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$

"definizione di somma"

$Ax5. \vdash \forall \mathbf{x} \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$

"zero è annullatore del prodotto"

$Ax6. \vdash \forall \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y} \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{s}(\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}$

"definizione di prodotto"

$Ax7. \vdash \mathbf{A}(\mathbf{0})\ \&\ \forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{s}(\mathbf{x}))\ ) \ \rightarrow\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$

"principio di induzione"

Modello standard per aritmetica PA

$D \equiv Nat$ insieme dei numeri naturali

$0^{\mathcal{D}} \equiv 0$

$$s(x)^{\mathcal{D}}(-) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$s(x)^{\mathcal{D}}(n) \equiv n + 1$$

$$x{+}y^{\mathcal{D}}(-,-) : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$x{+}y^{\mathcal{D}}(n, m) \equiv n + m$$

$$x{\cdot}y^{\mathcal{D}}(-,-) : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$x{\cdot}y^{\mathcal{D}}(n, m) \equiv n \cdot m$$

Esempio di derivazione in **PA**

in **PA** si deriva

$$\vdash \mathbf{1+0=1}$$

ove $\mathrm{n} \equiv \underbrace{s(s\ldots(0)))}_{\text{n-volte}}$ derivandolo così

$$\dfrac{\vdash Ax.3 \qquad \dfrac{\overset{\text{ax-id}}{\mathbf{Ax.3,\ 1+0=1 \vdash 1+0=1}}}{\mathbf{\forall x\ x+0=x \vdash 1+0=1}}\ \forall\text{−S}}{\vdash \mathbf{1+0=1}}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

Esempio di derivazione in **PA**

in **PA** si deriva

$$\vdash 5+1=6$$

ad esempio come segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \text{Ax 4.}$}
\AxiomC{$\vdash \text{Ax 3.}$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$5+0=5,\, 5+1=s(5+0) \ \vdash\ s(5+0)=s(5+0)$}
\RightLabel{$=-\mathrm{S}_f$}
\UnaryInfC{$5+1=s(5+0),\, 5+0=5 \ \vdash\ s(5+0)=s(5)$}
\RightLabel{$\mathrm{in}_{\mathrm{sx}}$}
\UnaryInfC{$5+1=s(5+0),\, \text{Ax 3.},\, 5+0=5 \ \vdash\ s(5+0)=s(5)$}
\RightLabel{$\forall-\mathrm{S}$}
\UnaryInfC{$5+1=s(5+0),\, \forall x\ (\ x+0=x\ ) \ \vdash\ s(5+0)=s(5)$}
\RightLabel{comp_{sx}}
\BinaryInfC{$5+1=s(5+0) \ \vdash\ 5+1=6$}
\RightLabel{$\mathrm{in}_{\mathrm{sx}}$}
\UnaryInfC{$\text{Ax 4.},\, \forall y..,\ \ 5+1=s(5+0) \ \vdash\ 5+1=6$}
\RightLabel{$\forall-\mathrm{S}$}
\UnaryInfC{$\text{Ax 4.},\, \forall y\ (\ 5+s(y)=s(5+y)\ ) \ \vdash\ 5+1=6$}
\RightLabel{$\forall-\mathrm{S}$}
\UnaryInfC{$\forall x\, \forall y\ (\ x+s(y)=s(x+y)\ ) \ \vdash\ 5+1=6$}
\RightLabel{comp_{sx}}
\BinaryInfC{$\vdash\ 5+1=6$}
\end{prooftree}
$$

ove si ricorda che $6 \equiv s(5)$ e nell'ultimo passaggio sopra si è sostituito $s(5)$ con $s(5+0)$.

Test di logica **predicativa**

Dall'affermazione

$\mathbf{Ip}$ (In ogni giorno) d'estate c'è qualcuno che è infelice

si dica quali delle seguenti affermazioni si possono dedurre

A Se nessuno è felice allora non è estate.

B (Ogni giorno) qualcuno è infelice.

C (In ogni giorno) non estivo, tutti sono infelici.

D Se tutti sono felici allora non è estate.

E (In ogni giorno) non estivo qualcuno è felice.

Si giustifichi la risposta formalizzando le frasi ponendo:

$F(x)$= "*x è felice*"

E="*è estate*"

e derivando l'affermazione corretta nella teoria predicativa

$$\mathbf{T_{Ip}} = \mathbf{LC}_{=} + \mathbf{Ip}$$

(suggerimento si classifichi ciascun sequente $\mathbf{Ip} \vdash$ affermazione X).

Formalizzazione

Ip (In ogni giorno) d'estate c'è qualcuno che è infelice

$$\mathbf{E} \rightarrow \exists \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

A Se nessuno è felice allora non è estate.

$$\neg \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{E}$$

B (Ogni giorno) qualcuno è infelice.

$$\exists \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

C (In ogni giorno) non estivo, tutti sono infelici.

$$\neg \mathbf{E} \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

D Se tutti sono felici allora non è estate.

$$\forall \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{E}$$

E (In ogni giorno) non estivo qualcuno è felice.

$$\neg \mathbf{E} \rightarrow \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Come procedere?

Un' **affermazione** $Aff.X$ **è deducibile** da **Ip**
se e solo se
$\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.X}$ è *derivabile* in $LC_=$ ovvero $\vdash \mathbf{Aff.X}$ è derivabile in $\mathbf{T_{Ip}} = \mathbf{LC_=} + \mathbf{Ip}$

Un **affermazione** **Aff. X** **NON è deducibile** da **IP**
se e solo se
il sequente $\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.X}$ **NON** è **tautologia** in $LC_=$ ovvero ha un **contromodello** che per forza rende **vera** $\mathbf{Ip}$ e falsa l'affermazione $Aff.X$ ovvero $\vdash Aff.X$ **NON** è derivabile in $\mathbf{T_{Ip}} = \mathbf{LC_=} + \mathbf{Ip}$

proviamo a derivare $\quad \mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.A}$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{dx1} \\ \neg\exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{E}, \neg\mathbf{E} \end{array}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\mathbf{E} \vdash \mathbf{F}(\mathbf{w}) , \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) , \mathbf{F}(\mathbf{w})
}{
\mathbf{E} \vdash \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) , \mathbf{F}(\mathbf{w})
}\ \exists\!-\!\mathrm{D}
}{
\vdash \neg\mathbf{E} , \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) , \mathbf{F}(\mathbf{w})
}\ \neg\!-\!\mathrm{D}
}{
\vdash \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) , \mathbf{F}(\mathbf{w}) , \neg\mathbf{E}
}\ \mathrm{sc}_{sx}
}{
\neg\exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{F}(\mathbf{w}) , \neg\mathbf{E}
}\ \neg\!-\!\mathrm{S}
}{
\neg\exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) , \neg\mathbf{F}(\mathbf{w}) \vdash \neg\mathbf{E}
}\ \neg\!-\!\mathrm{S}
}{
\neg\exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) , \exists \mathbf{x}\, \neg\mathbf{F}(\mathbf{x}) \vdash \neg\mathbf{E}
}\ \exists\!-\!\mathrm{S}
}{
\neg\exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) , \mathbf{E} \rightarrow \exists \mathbf{x}\, \neg\mathbf{F}(\mathbf{x}) \vdash \neg\mathbf{E}
}\ \rightarrow\!-\!\mathrm{S}
}{
\dfrac{
\mathbf{Ip}, \neg\exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \vdash \neg\mathbf{E}
}{
\mathbf{Ip} \vdash \neg\exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg\mathbf{E}
}\ \rightarrow\!-\!\mathrm{D}
}\ \mathrm{sc}_{sx}
$$

ove $\exists\!-\!\mathrm{S}$ è corretta perchè w non compare libera nel sequente radice

e **NON** si riesce a derivare la foglia del ramo di dx ...

quindi costruiamo un **contromodello** rendendo $\mathbf{E}$ falsa e $\mathbf{F}(\mathbf{w})$ sempre falsa!!

contromodello di $\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.A}$

la foglia che **NON** si riesce a derivare

$$\mathbf{E} \vdash \mathbf{F}(\mathbf{w})\,,\ \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})\,,\ \mathbf{F}(\mathbf{w})$$

suggerisce il seguente **contromodello** con un solo elemento (perchè c'è solo $\mathbf{w}$ come variabile!)

$\mathbf{D_{contra}} = \{\ \mathtt{Minni}\ \}$

$\mathbf{E}^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{w})^{\mathbf{D_{contra}}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{0}$

quindi in tal modello

$$(\ \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})\ )^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{0} \qquad (\ \neg \mathbf{E})^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{0}$$

ma anche $(\ \neg \mathbf{F}(\mathbf{w})\ )^{\mathbf{D_{contra}}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{1}$ e dunque $(\ \exists x\, \neg F(x)\ )^{D_{contra}} = \mathbf{1}$

e dunque

$$(\mathbf{Aff.A})^{\mathbf{D_{contra}}} = (\neg \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D_{contra}}} \to (\ \neg \mathbf{E})^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{1} \to \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

mentre $\mathbf{Ip}^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{E}^{\mathbf{D_{contra}}} \to (\ \exists \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})\ )^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{1} \to \mathbf{1} = \mathbf{1}$

dunque $(\ \mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.A}\ )^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{1} \to \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Aff. A NON è deducibile

l'affermazione $\mathbf{Aff.A}$ **NON** è deducibile da $\mathbf{Ip}$

perchè $\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.A}$ **NON** è tautologia

avendo trovato un contromodello

(e si vede che in realtà è una **opinione**....provarlo per esercizio!)

proviamo a derivare $\quad \mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.B}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{F}(\mathbf{x}) \vdash \exists \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})\, ,\ \mathbf{E}}{\vdash \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})\, ,\ \exists \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})\, ,\ \mathbf{E}}\ \neg\!-\!\mathrm{S}}{\vdash \exists \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})\, ,\ \mathbf{E}}\ \exists\!-\!\mathrm{D}}{\vdash \mathbf{E}\, ,\ \exists \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})}\ \mathrm{sc}_{dx} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \exists x\, \neg F(x) \vdash \exists \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})\end{array}}{\mathbf{E} \to \exists \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x}) \vdash \exists \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})}\ \to\!-\!\mathrm{S}$$

ove **NON** si riesce a derivare la foglia del ramo di sx ...

quindi costruiamo un **contromodello** rendendo $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ sempre vera e invece $\mathbf{E}$ falsa !!

contromodello di $\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.B}$

la foglia che **NON** si riesce a derivare

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \vdash \exists \mathbf{x} \neg \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{E}$$

suggerisce il seguente **contromodello** con un solo elemento (perchè c'è solo $\mathbf{x}$ come variabile!)

$\mathbf{D_{contra}} = \{ \mathtt{Minni} \}$

$\mathbf{E}^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{0}$ $\quad$ $\mathbf{F}(\mathbf{x})^{\mathbf{D_{contra}}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{1}$

quindi in tal modello

$(\neg \mathbf{F}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D_{contra}}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{0}$

e $(\exists x \neg F(x))^{D_{contra}} = \mathbf{0}$ perchè ci sono solo falsari nel dominio essendoci solo $\mathtt{Minni}$

e dunque

$(\mathbf{Aff.B})^{\mathbf{D_{contra}}} = (\exists \mathbf{x} \neg \mathbf{F}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{0}$

mentre $\mathbf{Ip}^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{E}^{\mathbf{D_{contra}}} \rightarrow (\exists \mathbf{x} \neg \mathbf{F}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{1}$

dunque $(\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.B})^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Aff. B NON è deducibile

l'affermazione $\mathbf{Aff.B}$ **NON** è deducibile da $\mathbf{Ip}$

perchè $\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.B}$ **NON** è tautologia

avendo trovato un contromodello

(e si vede che in realtà è una **opinione**....provarlo per esercizio!)

proviamo a derivare $\quad \mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.C}$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{
            \mathbf{F}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{E} , \mathbf{E} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{w}) , \exists \mathbf{x} \, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{E}
          }{
            \mathbf{F}(\mathbf{w}) , , \mathbf{E} \rightarrow \exists \mathbf{x} \, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{E}
          } \; \rightarrow\!-\mathrm{S}
        }{
          \mathbf{F}(\mathbf{w}) , \mathbf{Ip} , \neg \mathbf{E} \vdash
        } \; \neg\!-\mathrm{D}
      }{
        \mathbf{Ip} , \neg \mathbf{E} , \mathbf{F}(\mathbf{w}) \vdash
      } \; \mathrm{sc}_{sx}
    }{
      \mathbf{Ip} , \neg \mathbf{E} \vdash \neg \mathbf{F}(\mathbf{w})
    } \; \neg\!-\mathrm{D}
  }{
    \mathbf{Ip} , \neg \mathbf{E} \vdash \forall \mathbf{x} \, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})
  } \; \forall\!-\mathrm{D}
}{
  \mathbf{Ip} \vdash \neg \mathbf{E} \rightarrow \forall \mathbf{x} \, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})
} \; \rightarrow\!-\mathrm{D}
$$

ove $\forall\!-\mathrm{D}$ è corretta perchè w non compare libera nel sequente radice

e **NON** si riesce a derivare la foglia del ramo di sx perchè NON ci sono più regole da applicare

quindi costruiamo un **contromodello** rendendo $\mathbf{F}(\mathbf{w})$ sempre vera e invece $\mathbf{E}$ falsa !!

contromodello di $\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.C}$

la foglia che **NON** si riesce a derivare

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{E}\ ,\ \mathbf{E}$$

suggerisce il seguente **contromodello** con un solo elemento (perchè c'è solo $\mathbf{w}$ come variabile!)

$\mathbf{D_{contra}}$= { $\mathtt{Minni}$ }

$\mathbf{E}^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{0}$ $\quad$ $\mathbf{F}(\mathbf{w})^{\mathbf{D_{contra}}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{1}$

quindi in tal modello

$(\neg\mathbf{E})^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{1}$ $\quad$ $(\neg\mathbf{F}(\mathbf{w}))^{\mathbf{D_{contra}}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{0}$ e quindi $(\forall x\, \neg F(x))^{D_{contra}} = \mathbf{0}$

ma anche $(\exists x\, \neg F(x))^{D_{contra}} = \mathbf{0}$ perchè ci sono solo falsari nel dominio

e dunque

$$(\mathbf{Aff.C})^{\mathbf{D_{contra}}} = (\neg\mathbf{E})^{\mathbf{D_{contra}}} \rightarrow (\forall \mathbf{x}\, \neg\mathbf{F}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

mentre $\mathbf{Ip}^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{E}^{\mathbf{D_{contra}}} \rightarrow (\exists \mathbf{x}\, \neg\mathbf{F}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{1}$

dunque $(\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.C})^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}$

<u>Aff. C NON è deducibile</u>

l'affermazione $\mathbf{Aff.C}$ **NON** è deducibile da $\mathbf{Ip}$

perchè $\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.C}$ **NON** è tautologia

avendo trovato un contromodello

(e si vede che in realtà è una **opinione**....provarlo per esercizio!)

proviamo a derivare $\quad \mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.D}$

Chiamiamo π questa derivazione in $\text{LC}_{=}$ (con uso regole veloci): 

$$
\cfrac{
  \cfrac{\text{ax-id}}{\forall \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{E} \vdash \mathbf{E}}
  \qquad
  \cfrac{
    \cfrac{
      \cfrac{
        \cfrac{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\mathbf{E},\ \neg\mathbf{F}(\mathbf{w}),\ \mathbf{F}(\mathbf{w}) \vdash}
      }{\mathbf{E},\ \neg\mathbf{F}(\mathbf{w}),\ \forall \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \vdash}\ \forall-\mathrm{S}_v
    }{\forall \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{E},\ \neg\mathbf{F}(\mathbf{w}) \vdash}\ \mathrm{sc}_{sx}
  }{\forall \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{E},\ \exists \mathbf{x}\, \neg\mathbf{F}(\mathbf{x}) \vdash}\ \exists-\mathrm{S}
}{
  \cfrac{
    \cfrac{
      \cfrac{\forall \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{E}\ \mathbf{E} \to \exists \mathbf{x}\, \neg\mathbf{F}(\mathbf{x}) \vdash}{\mathbf{Ip},\ \forall \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{E} \vdash}\ \mathrm{sc}_{sx}
    }{\mathbf{Ip},\ \forall \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \vdash \neg\mathbf{E}}\ \neg-\mathrm{D}
  }{\mathbf{Ip} \vdash \forall \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \to \neg\mathbf{E}}\ \to-\mathrm{D}
}\ \to-\mathrm{S}
$$

ove $\exists-\mathrm{S}$ è corretta perchè $\mathbf{w}$ non compare libera nel sequente radice

l' Aff. D è deducibile

l'affermazione $\mathbf{Aff.D}$ è deducibile da $\mathbf{Ip}$

perchè $\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.D}$ è tautologia

avendo trovato una *derivazione*, che chiamiamo π

con cui concludiamo una derivazione di $\mathbf{Aff.D}$ in $\mathbf{T_{Ip}} = \mathbf{LC_=} + \mathbf{Ip}$

$$\dfrac{\dfrac{\text{ax}}{\vdash \mathbf{Ip}} \qquad \dfrac{\pi}{\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.D}}}{\vdash \mathbf{Aff.D}}\ \text{comp}$$

proviamo a derivare $\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.E}$

$$
\dfrac{
\dfrac{\vdash \mathbf{F}(\mathbf{x})\,,\ \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})\,,\ \mathbf{E}\,,\ \mathbf{E}}{\vdash\ \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})\,,\ \mathbf{E}\,,\ \mathbf{E}}\ \exists\text{–D}
\qquad
\dfrac{\text{ax-id}}{\exists \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})\ \vdash\ \mathbf{E}\,,\ \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})}
}{
\dfrac{\dfrac{\vdash \mathbf{E}\,,\ \mathbf{E}\,,\ \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{E} \rightarrow \exists \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})\ \vdash\ \mathbf{E}\,,\ \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})}\ \rightarrow\text{–S}}{\dfrac{\mathbf{Ip}\,,\ \neg \mathbf{E}\ \vdash\ \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{Ip} \vdash \neg \mathbf{E} \rightarrow \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})}\ \rightarrow\text{–D}}\ \neg\text{–S}
}\ \mathrm{sc}_{sx}
$$

ove **NON** si riesce a derivare la foglia del ramo di sx ...

quindi costruiamo un **contromodello** rendendo $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ sempre falsa e $\mathbf{E}$ pure falsa !!

contromodello di $\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.E}$

la foglia che **NON** si riesce a derivare

$$\vdash \mathbf{F}(\mathbf{x}) \,,\, \exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \,,\, \mathbf{E} \,,\, \mathbf{E}$$

suggerisce il seguente **contromodello** con un solo elemento (perchè c'è solo $\mathbf{w}$ come variabile!)

$\mathbf{D_{contra}} = \{ \mathtt{Minni} \}$

$\mathbf{E}^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x})^{\mathbf{D_{contra}}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{0}$

quindi in tal modello

$$(\,\exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x})\,)^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{0} \qquad (\,\neg \mathbf{E})^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{1}$$

ma anche $(\,\neg \mathbf{F}(\mathbf{x})\,)^{\mathbf{D_{contra}}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{1}$ e dunque $(\,\exists \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})\,)^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{1}$

e dunque

$$(\mathbf{Aff.E})^{\mathbf{D_{contra}}} = (\,\neg \mathbf{E})^{\mathbf{D_{contra}}} \rightarrow (\exists \mathbf{x}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

mentre $\mathbf{Ip}^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{E}^{\mathbf{D_{contra}}} \rightarrow (\,\exists \mathbf{x}\, \neg \mathbf{F}(\mathbf{x})\,)^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}$

dunque $(\,\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.E}\,)^{\mathbf{D_{contra}}} = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Aff. E NON è deducibile

l'affermazione $\mathbf{Aff.E}$ **NON** è deducibile da $\mathbf{Ip}$

perchè $\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.E}$ **NON** è tautologia

avendo trovato un contromodello

(e si vede che in realtà è una **opinione**....provarlo per esercizio!)

Conclusione

Nel test di logica

Aff. D è l'*unica affermazione deducibile* da **Ip**

in quanto $\mathbf{Ip} \vdash \mathbf{Aff.D}$ è tautologia in $\mathrm{LC}_{=}$

mentre le altre affermazioni **NON** lo sono

perchè per ciascuna affermazione **Aff. X**

esiste un **contromodello**

in cui **Aff. X** è **falsa** mentre **Ip** è vera!!