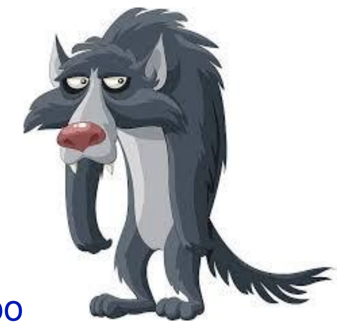
il Lupo a Cappuccetto Rosso: 

“Se e solo se NON indovini subito cosa sto per far

ti mangio in un boccone!”

Cappuccetto Rosso al Lupo: “Mi mangi in un boccone!”

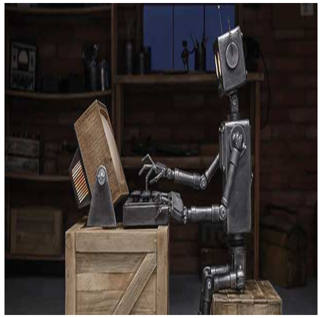
e il Lupo  se ne andò triste...

5. Lezione Corso di Logica 2020/2021

15 ottobre 2020

Maria Emilia Maietti

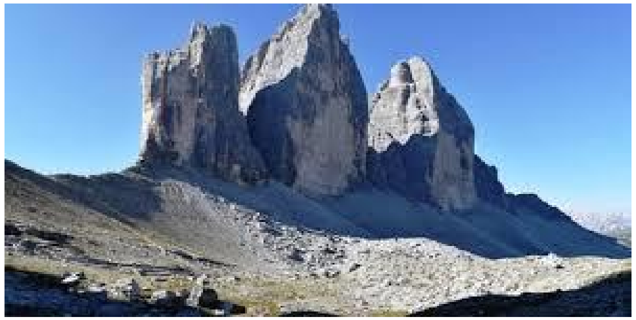
email: maietti@math.unipd.it



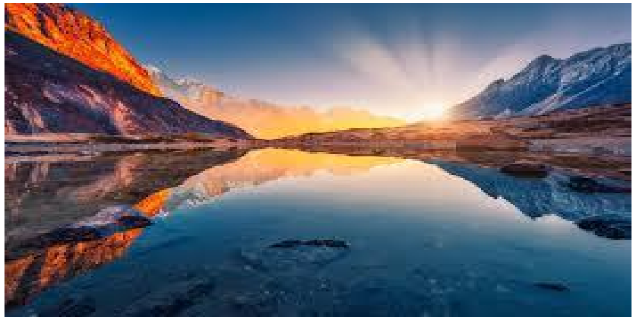
classificazione in logica classica delle proposizioni formali

Per ogni proposizione formale pr definiamo

pr **TAUTOLOGIA**	pr **OPINIONE**	pr PARADOSSO
TUTTE le uscite 1 nella tabella di pr	ALMENO un'uscita 1 + ALMENO un'uscita 0 nella tabella di pr	TUTTE le uscite 0 nella tabella di pr



pr	**TAUTOLOGIA**	sse	¬pr	**PARADOSSO**
pr	**PARADOSSO**	sse	¬pr	**TAUTOLOGIA**
pr	**OPINIONE**	sse	¬pr	**OPINIONE**



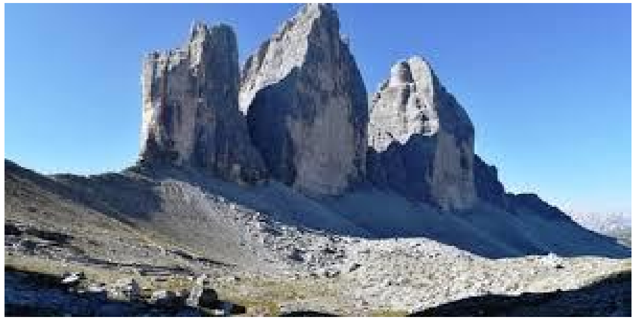
metodo **AUTOMATICO** per **classificare proposizioni formali**

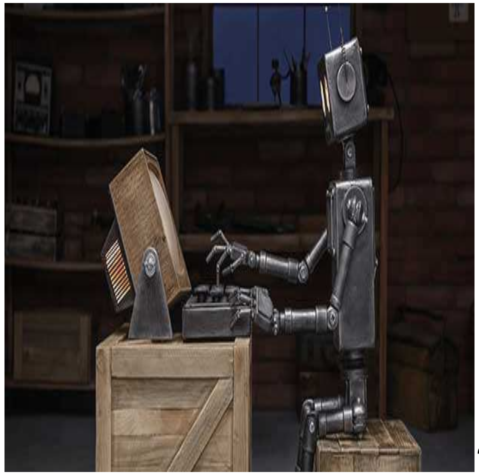
Come **stabilire** se una proposizione $\mathtt{pr}$

è **tautologia**

oppure un' **opinione**

oppure un **paradosso**

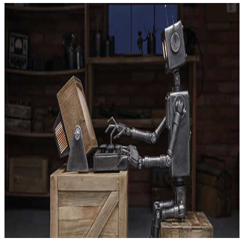


in modo **automatico**, ovvero **robotizzabile**  ??

per classificare una proposizione `pr`

Basta avere una procedura $\mathcal{P}$ per stabilire

se `pr` è una **tautologia** o **NON lo è**



Procedura per classificare una proposizione `pr`

supposto di avere una **procedura** $\mathcal{P}$ per stabilre se $\mathtt{pr}$ è **tautologia** o **NON** lo è

si trova la seguente

Procedura per classificare una proposizione $\mathtt{pr}$

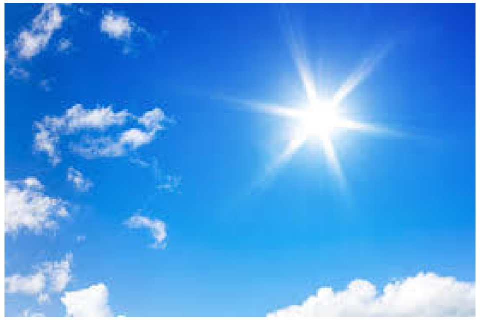
passo 1: si applichi la procedura $\mathcal{P}$ per stabilire

se $\mathtt{pr}$ è **tautologia** o **NON** lo è

Vi sono due casi:

caso I : $\mathcal{P}$ dice che $\mathtt{pr}$ è **tautologia** (e $\neg\mathtt{pr}$ è **paradosso**)

caso II : $\mathcal{P}$ dice che $\mathtt{pr}$ **NON** è **tautologia** vai al passo 2



passo 2: si applichi la procedura $\mathcal{P}$ per stabilire

se $\neg\mathtt{pr}$ è **tautologia** o **NON** lo è

Vi sono due casi:

caso III : $\mathcal{P}$ dice che $\neg\mathtt{pr}$ è **tautologia** quindi $\mathtt{pr}$ è **paradosso**

caso IV : $\mathcal{P}$ dice che $\neg\mathtt{pr}$ **NON** è **tautologia** quindi $\mathtt{pr}$ è **opinione** e pure $\neg\mathtt{pr}$ è **opinione**

alcune **Tautologie classiche**

essenza $\rightarrow$ $(\ A\rightarrow B\ ) \leftrightarrow \neg A\vee B$

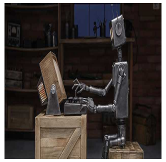
associatività $\vee$	$(\ A\vee B\ )\vee C \leftrightarrow A\vee(\ B\vee C\ )$
associatività $\&$	$(\ A\&B\ )\&C \leftrightarrow A\&(\ B\&C\ )$
commutatività $\vee$	$A\vee B \leftrightarrow B\vee A$
commutatività $\&$	$A\&B \leftrightarrow B\&A$
distributività $\vee$ su $\&$	$A\vee(\ B\&C\ ) \leftrightarrow (\ A\vee B\ )\&(\ A\vee C\ )$
distributività $\&$ su $\vee$	$A\&(\ B\vee C\ ) \leftrightarrow (\ A\&B\ )\vee(\ A\&C\ )$

idempotenza $\vee$	$A \vee A \leftrightarrow A$
idempotenza $\&$	$A \& A \leftrightarrow A$
leggi di De Morgan	$\neg(\ B \vee C\ ) \leftrightarrow \neg B \& \neg C$
	$\neg(\ B \& C\ ) \leftrightarrow \neg B \vee \neg C$
legge della doppia negazione	$\neg\neg A \leftrightarrow A$
legge della NON contraddizione	$\neg(\ A \& \neg A\ )$
legge del terzo escluso	$A \vee \neg A$

3 strategie per classificare `pr`

1. strategia delle **tabella di verità**:

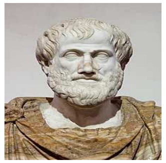
fai la tabella di verità di `pr`

vantaggio: **automatica**/**robotizzabile** 

svantaggio: COSTOSO in tempo

---

2. strategia MATEMATICA: *riduci* `pr` *tramite equivalenze note ad una tautologia classica nota*

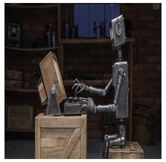
vantaggio: strategia veloce, COMPRENSIBILE, se termina 

svantaggio: **NON automatica**/**NON robotizzabile** e non sempre terminante in una proposizione nota

---

3. strategia dei **sequenti**: *DERIVA* `pr` *come sequente*

nel calcolo dei sequenti **LC**$_P$

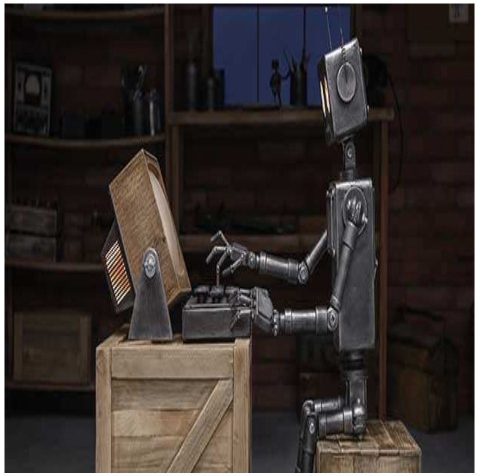
vantaggio: **automatico**/**robotizzabile** 

e meno costosa di 1.

nostra strategia per classificare `pr`

utilizziamo

il calcolo dei sequenti

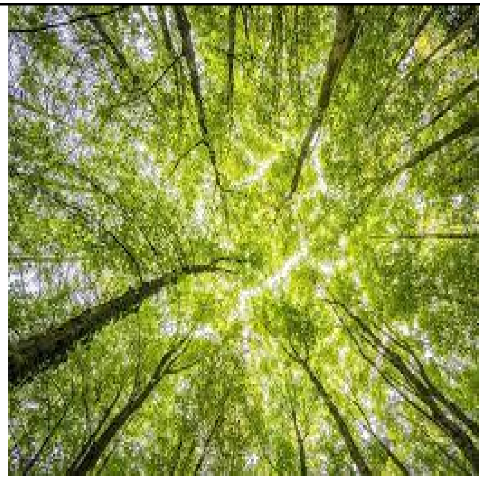


a che serve il calcolo dei sequenti?

a costruire alberi di derivazione

con SEQUENTI

come nodi



ADDENDUM al linguaggio formale: la proposizione costante falso

Per motivi tecnici, aggiungiamo al linguaggio formale

la proposizione costante falso

$\perp$

con tabella

$\perp$
0

ADDENDUM al linguaggio formale: la proposizione costante vero

Per motivi tecnici, aggiungiamo al linguaggio formale

la proposizione costante vero

`tt`

con tabella

`tt`
1

cosa è un sequente?

un sequente nel linguaggio delle **proposizioni formali** è una scrittura che può essere di 4 tipi diversi:

1. un primo tipo di sequente è la scrittura

$$\mathsf{pr}_1, \mathsf{pr}_2, \ldots \mathsf{pr}_n \quad \vdash \quad \mathsf{cl}_1, \mathsf{cl}_2, \ldots \mathsf{cl}_m$$

che significa

"se pr_1 è *vero* e pr_2 è *vero*... e pr_n è *vero*

allora

o cl_1 è *vero* oppure cl_2 è *vero*... oppure cl_m è *vero*"

o equivalentemente

$$\mathsf{pr}_1, \mathsf{pr}_2, \ldots \mathsf{pr}_n \quad \vdash \quad \mathsf{cl}_1, \mathsf{cl}_2, \ldots \mathsf{cl}_m$$

significa $\quad (\,\mathsf{pr}_1 \& \mathsf{pr}_2\,) \ldots \& \mathsf{pr}_n \quad \longrightarrow \quad (\,\mathsf{cl}_1 \vee \mathsf{cl}_2\,) \ldots \vee \mathsf{cl}_m \qquad$ *è vera*

ove le pr_i per $i = 1, \ldots, n$ sono premesse

e le cl_i per $i = 1, \ldots, m$ sono conclusioni

2. un altro tipo di sequente è la scrittura

$$\vdash \quad \mathsf{cl}_1, \mathsf{cl}_2, \ldots \mathsf{cl}_m$$

che significa

"o cl_1 è *vero* oppure cl_2 è *vero*...oppure cl_m è *vero*"

o equivalentemente

$$(\mathsf{cl}_1 \vee \mathsf{cl}_2) \ldots \vee \mathsf{cl}_m \qquad \textit{è vera}$$

o anche equivalentemente

$$\mathtt{tt} \rightarrow (\mathsf{cl}_1 \vee \mathsf{cl}_2) \ldots \vee \mathsf{cl}_m \qquad \text{è vera}$$

ove le cl_i per $i = 1, \ldots, m$ sono conclusioni

3. un altro tipo di sequente è la scrittura

$$\mathsf{pr}_1, \mathsf{pr}_2, \ldots \mathsf{pr}_n \quad \vdash$$

che significa

"se pr_1 è *vero* e pr_2 è vero... e pr_n *è vero*

allora la costante falso *è vera*"

o equivalentemente

$$(\, \mathsf{pr}_1 \& \mathsf{pr}_2 \,) \ldots \& \mathsf{pr}_n \quad \longrightarrow \quad \perp \textit{ è vera}$$

e le pr_i per $i = 1, \ldots, n$ sono premesse

4. infine un sequente è anche la scrittura

$$\vdash$$

che significa

"la costante falso è vera"

o equivalentemente

$$\perp \quad \textit{è vera}$$

o anche equivalentemente $\quad \mathtt{tt} \rightarrow \perp \quad$ *è vera*

Notazione generica per un sequente

$$\Gamma \vdash \Delta$$

ove

Γ= lista (anche vuota) di proposizioni arbitrarie

Δ= lista (anche vuota) di proposizioni arbitrarie

Significato di sequente

il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ rappresenta la proposizione

$$\Gamma^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta^{\vee}$$

$\Gamma^{\&} \equiv (\mathtt{pr}_1 \& \mathtt{pr}_2) \ldots \& \mathtt{pr}_n$

è la congiunzione delle proposizioni

se $\quad \Gamma \equiv \mathtt{pr}_1, \mathtt{pr}_2, \ldots \mathtt{pr}_n$

oppure

$\Gamma^{\&} \equiv \mathtt{tt}$ (costante vero) se Γ è la lista vuota

oppure

$\Gamma^{\&} \equiv \mathtt{pr}_1$ se $\Gamma \equiv \mathtt{pr}_1$

$\Delta^{\vee} \equiv (\mathtt{pr}_1 \vee \mathtt{pr}_2) \ldots \vee \mathtt{pr}_n$

è la disgiunzione delle proposizioni

se $\quad \Delta \equiv \mathtt{pr}_1, \mathtt{pr}_2, \ldots \mathtt{pr}_n$

oppure

$\Delta^{\vee} \equiv \bot$ (costante falso) se Δ è la lista vuota

oppure

$\Delta^{\vee} \equiv \mathtt{pr}_1$ se $\Delta \equiv \mathtt{pr}_1$

a che servono i sequenti ?

per stabilire se

la proposizione $\mathtt{pr}$ è **TAUTOLOGIA**

seguiremo una procedura **AUTOMATICA**

che opera sul **sequente** $\vdash \mathtt{pr}$

attraverso la costruzione di **alberi di derivazione**

utilizzando le **regole** del **calcolo dei sequenti**

che tipo di regole ha il calcolo dei sequenti?

ha due tipi di regole

$$\frac{\Gamma' \vdash \mathtt{pr}'}{\Gamma \vdash \mathtt{pr}} \; regola1premessa \qquad \frac{\Gamma'' \vdash \mathtt{pr}'' \quad \Gamma''' \vdash \mathtt{pr}'''}{\Gamma \vdash \mathtt{pr}} \; regola2premesse$$

\+ assiomi come per esempio

ax-id

$$\Gamma_1, \mathtt{pr}, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \mathtt{pr}, \Delta_2$$

Calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$

ax-id $\qquad$ ax-$\bot$ $\qquad$ ax-tt

$$\Gamma, \mathtt{pr}, \Gamma' \vdash \Delta, \mathtt{pr}, \Delta' \qquad \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla \qquad \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathtt{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\mathtt{pr}_1) \& (\mathtt{pr}_2), \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, \mathtt{pr}_1, \mathtt{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\mathtt{pr}_1) \& (\mathtt{pr}_2) \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1, \mathtt{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\mathtt{pr}_1) \vee (\mathtt{pr}_2), \Delta}\ \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, \mathtt{pr}_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathtt{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\mathtt{pr}_1) \vee (\mathtt{pr}_2) \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \mathtt{pr}_1 \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg(\mathtt{pr}_1), \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1, \Delta}{\Gamma, \neg(\mathtt{pr}_1) \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \mathtt{pr}_1 \vdash \mathtt{pr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\mathtt{pr}_1) \to (\mathtt{pr}_2), \Delta}\ \to-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathtt{pr}_1, \Delta \quad \Gamma, \mathtt{pr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\mathtt{pr}_1) \to (\mathtt{pr}_2) \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S}$$

Idea di albero nel calcolo

un albero nel calcolo è una sequenza di istanze di regole

$$
\dfrac{\mathtt{pr}_1 \vdash \mathtt{pr}_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\mathtt{pr}_5 \vdash \mathtt{pr}_5}{\Gamma_3 \vdash \mathtt{pr}_3}\ regola1 \qquad \dfrac{\mathtt{pr}_6 \vdash \mathtt{pr}_6}{\Gamma_4 \vdash \mathtt{pr}_4}\ regola1}{\Gamma_2 \vdash \mathtt{pr}_2}\ regola2}{\Gamma \vdash \mathtt{pr}}\ regola2
$$

con **radice** il sequente $\Gamma \vdash \mathtt{pr}$

e con **foglie** i sequenti $\mathtt{pr}_1 \vdash \mathtt{pr}_1$ (nel primo ramo)

$\mathtt{pr}_5 \vdash \mathtt{pr}_5$ (nel secondo ramo)

$\mathtt{pr}_6 \vdash \mathtt{pr}_6$ (nel terzo ramo)

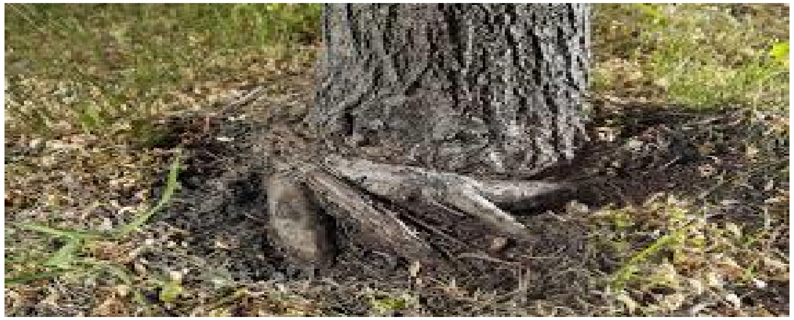
Definizione di albero in un calcolo dei sequenti

Più precisamente

un albero π nel calcolo $\mathcal{C}$ dei sequenti è definito per induzione come segue:

1. Ogni sequente $\Gamma \vdash \psi$ è un albero

avente il sequente sia come radice che come unica foglia.



2. Dato un albero nel calcolo $\mathcal{C}$

$$\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \psi}$$

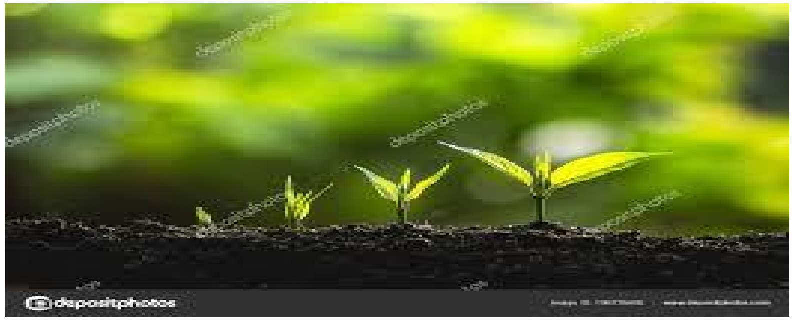
allora

$$\cfrac{\cfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash \psi}}{\Gamma' \vdash \psi'}\ reg*$$

è un albero ottenuto estendendo π con una regola $reg*$ del calcolo $\mathcal{C}$

con *radice* $\Gamma' \vdash \psi'$

e con *foglie* le foglie di π_1



3. Dati due alberi nel calcolo C

$$\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \psi_1} \qquad \qquad \dfrac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash \psi_2}$$

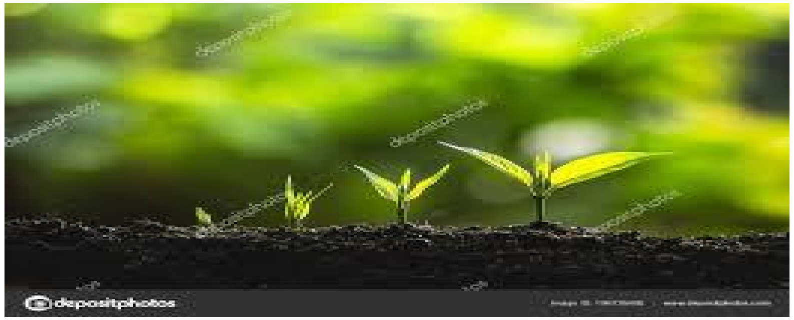
allora

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \psi_1} \quad \dfrac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash \psi_2}}{\Gamma_3 \vdash \psi_3}\ reg*$$

è un albero ottenuto estendendo π_1 e π_2 con una regola di ψ di $\mathcal{C}$

con *radice* $\Gamma_3 \vdash \psi_3$

e con *foglie* l'unione delle foglie di π_1 e di π_2



Definizione di ALBERO di DERIVAZIONE

un ALBERO di DERIVAZIONE per $\Gamma \vdash \Delta$

=

albero con radice $\Gamma \vdash \Delta$

ottenuto con regole del calcolo

avente assiomi come foglie.

Def. sequente derivabile

un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice derivabile

in un calcolo dei sequenti $\mathcal{C}$

=

se $\Gamma \vdash \Delta$ è radice

di un albero di derivazione in $\mathcal{C}$.

A che serve il calcolo dei sequenti?

data una proposizione formale `pr`

il **sequente** $\vdash$ `pr`

è radice di una **derivazione** nel calcolo dei sequenti LC_p

sse

`pr` è una TAUTOLOGIA

Esempio di derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{P, Q \vdash Q}}{P \& Q \vdash Q}\ \&-\mathrm{S} \qquad \dfrac{\overset{\text{ax-id}}{P, Q \vdash P}}{P \& Q \vdash P}\ \&-\mathrm{S}}{P \& Q \vdash Q \& P}\ \&-\mathrm{D}$$

esempio di DERIVAZIONE in LC$_p$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{P, Q \vdash Q}}{P \& Q \vdash Q}\ \&{-}\mathrm{S} \qquad \dfrac{\overset{\text{ax-id}}{P, Q \vdash P}}{P \& Q \vdash P}\ \&{-}\mathrm{S}}{P \& Q \vdash Q \& P}\ \&{-}\mathrm{D}$$

$P \& Q \vdash Q \& P$ è RADICE

$P, Q \vdash Q$ foglia sx

$P, Q \vdash P$ foglia dx

e sono entrambe ASSIOMI

Γ e Δ possono essere liste vuote!!!

il sequente

$$A \vdash A$$

è un'assioma identità

con Γ, Γ', Δ e Δ' tutte liste VUOTE

in quanto istanza dell'assioma identità del calcolo

scritto nella forma

ax-id

$$\Gamma, \mathtt{pr}_1, \Gamma' \vdash \Delta, \mathtt{pr}_1, \Delta'$$

anche nelle regole dei sequenti le metavariabili

$$\Gamma \qquad \Delta \qquad \Sigma$$

stanno per LISTE DI PROPOSIZIONI anche VUOTE

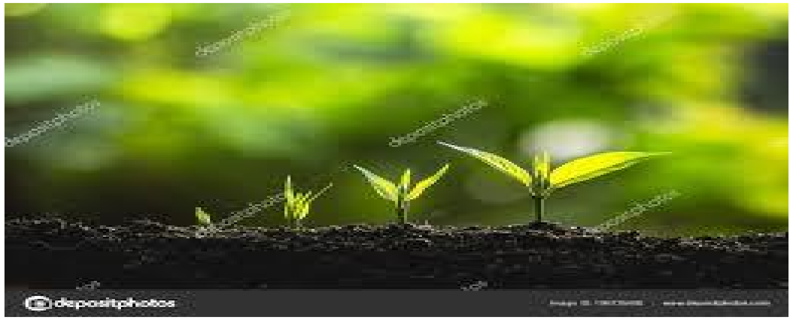
quindi

$$\frac{P\&Q\vdash Q\&P \qquad P\&Q\vdash C\vee P}{P\&Q\vdash(Q\&P)\&(C\vee P)}\ \&-\mathrm{D}$$

è corretta applicazione della regola $\&-\mathrm{D}$

$$\frac{\Gamma\vdash \mathtt{pr}_1,\Delta \quad \Gamma\vdash \mathtt{pr}_2,\Delta}{\Gamma\vdash(\mathtt{pr}_1)\&(\mathtt{pr}_2),\Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

con



$\Gamma\equiv P\&Q$

$\Delta\ \equiv$ lista vuota

$\mathtt{pr}_1\equiv Q\&P$

$\mathtt{pr}_2\equiv C\vee P$

derivazioni con radice=foglia

chi sono gli **alberi di derivazione**

formati da un singolo sequente

che è sia radice che foglia

?

=

gli **assiomi** sono gli unici **alberi di derivazione**

formati da un singolo sequente

che è sia radice che foglia

=

i singoli sequenti

$$\text{ax-}\perp \qquad\qquad \text{ax-}\top$$

$$\perp\vdash \qquad\qquad \vdash \mathtt{tt}$$

sono **assiomi** (rispettivamente del *falso* e del *vero*)

e quindi sono **alberi di derivazione**

che hanno

=

i singoli sequenti

$\vdash \qquad\qquad \vdash\perp \qquad\qquad \mathtt{tt}\vdash$

NON sono **assiomi**

e quindi **NON** sono **alberi di derivazione**

pur avendo

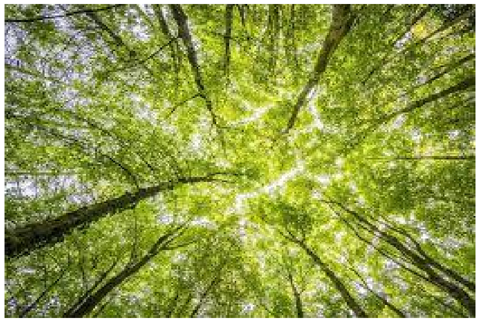
=

Derivare nel calcolo **LC**$_p$

$$(A\&B)\&C \vdash A\&(B\&C)$$

Derivazione associatività in LC$_p$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$C, A, B \vdash A$}
\RightLabel{$\&-\mathrm{S}$}
\UnaryInfC{$C, A\&B \vdash A$}
\RightLabel{$\mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}$}
\UnaryInfC{$A\&B, C \vdash A$}
\RightLabel{$\&-\mathrm{S}$}
\UnaryInfC{$(A\&B)\&C \vdash A$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$C, A, B \vdash B$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$C, A, B \vdash C$}
\RightLabel{$\&-\mathrm{D}$}
\BinaryInfC{$C, A, B \vdash B\&C$}
\RightLabel{$\&-\mathrm{S}$}
\UnaryInfC{$C, A\&B \vdash B\&C$}
\RightLabel{$\mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}$}
\UnaryInfC{$A\&B, C \vdash B\&C$}
\RightLabel{$\&-\mathrm{S}$}
\UnaryInfC{$(A\&B)\&C \vdash B\&C$}
\RightLabel{$\&-\mathrm{D}$}
\BinaryInfC{$(A\&B)\&C \vdash A\&(B\&C)$}
\end{prooftree}
$$



attenzione agli scambi!!!

ax-id

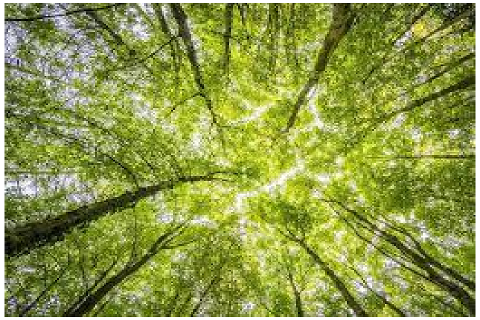
$$\frac{A, B, C \vdash A}{A\&B, C \vdash A}\ \&-\mathrm{S}$$

NON è derivazione per SCORRETTA applicazione di $\&-\mathrm{S}$!!!

una corretta applicazione di $\&-\mathrm{S}$ in LC_p è

ax-id

$$\cfrac{\cfrac{C, A, B \vdash A}{C, A\&B \vdash A}\ \&-\mathrm{S}}{A\&B, C \vdash A}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}$$



Altra presentazione di $\mathbf{LC}_p$

le regole del calcolo includono quelle che seguono

+ TUTTE quelle ottenibili da loro SOSTITUENDO le variabili A e B con proposizioni qualsiasi

$$\text{ax-id} \qquad \Gamma, \mathtt{pr}_1, \Gamma' \vdash \Delta, \mathtt{pr}_1, \Delta'$$

$$\text{ax-}\bot \qquad \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla$$

$$\text{ax-}\mathtt{tt} \qquad \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta}\ \& -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\ \& -\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee -\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg -\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \rightarrow -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \rightarrow -\mathrm{S}$$