21. Nozione di teoria ed esempi

Def. 0.1 (teoria) *Con il termine* **teoria** *si intende un' estensione del calcolo della logica classica con uguaglianza* $LC_=$ *con degli* **assiomi extralogici** *e* **regole di composizione a dx e a sx**.

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ comp_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ comp_{dx}$$

Esercizio: si provi che le regole di composizioni sono valide: sono anche sicure?
Nel seguito identificheremo una teoria designando i SOLI assiomi extralogici.

Esempio di Teoria: Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è una teoria ottenuta aggiungendo a $\mathrm{LC}_=$ le seguenti regole

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

e i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$

$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$

$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$

$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$

$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$

$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$

$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ATTENZIONE nuovi tipi di simboli!: nel linguaggio dell'aritmetica di Peano oltre alla costante

$$0$$

vi sono 3 simboli di funzione:

$$s(x) \qquad\qquad x{+}y \qquad\qquad x{\cdot}y$$

quello del successore di x, quello della somma e quello del prodotto.

C'è un modello inteso per questo linguaggio ed è quello con dominio

$$D \equiv \text{ numeri naturali}$$

ove la funzione successore è la funzione che assegna ad un numero naturale proprio il suo successore:

$$\mathsf{s}(x)^{Nat}(-) : Nat \longrightarrow Nat \qquad\qquad \mathsf{s}(x)^{Nat}(n) \equiv n + 1$$

il simbolo di somma $x{+}y$ interpretato nel modello dei naturali come la somma di due numeri naturali:

$$(x{+}y)^{Nat}(-,-) : Nat \times Nat \longrightarrow Nat \qquad\qquad (x{+}y)^{Nat}(n,m) \equiv n + m$$

e il simbolo di moltiplicazione $x{\cdot}y$ interpretato come la moltiplicazione di due numeri naturali:

$$(x{\cdot}y)^{Nat}(-,-) : Nat \times Nat \longrightarrow Nat \qquad\qquad (x{\cdot}y)^{Nat}(n,m) \equiv n \cdot m$$

Nella teoria dell'aritmetica di Peano il numerale n si rappresenta in tal modo
$n \equiv \underbrace{s(s\ldots(0))}_{\text{n-volte}}$
e quindi per esempio
$1 \equiv s(0)$
$2 \equiv s(\,s(0)\,)$

Esercizi
Mostrare che nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi:

1. $1 + 0 = 1$
2. $0 + 1 = 1$
3. $5 + 1 = 6$
4. $\vdash \forall x\ (\ s(x) = s(5) \rightarrow x = 5\ )$
5. $\vdash 0 = 4 \cdot 0$
6. $\vdash \forall x\ (\ x = 7 \rightarrow s(x) = s(7)\ )$
7. $\vdash 1 + 2 = 3$
8. $\vdash 5 \cdot 1 = 5$
9. $\vdash \exists x\ \exists y\ x \neq y$
10. $\vdash \forall x\ 0 \neq s(x)$
11. $\vdash \forall x\ 0 + x = x$ (difficile..!)

Linguaggio predicativo con simboli di funzione

Def. 0.2 (linguaggio predicativo (forma generale)) *: Un linguaggio predicativo con uguaglianza risulta $\mathcal{L}$ risulta determinato dai seguenti simboli di base:*

- *costanti per termini : c_j in numero a piacere*
- *funzioni tra termini: $f_k(x_1, \ldots x_n)$ in numero a piacere*
- *predicati atomici : $P_k(x_1, \ldots x_m)$ in numero a piacere*

e per definire un modello $\mathcal{D}$ per $\mathcal{L}$ interpretiamo una funzione tra termini come funzione tra domini

$$f_k(x_1, \ldots, x_n)^{\mathcal{D}}(-, \ldots, -) :\ \mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{D}$$

Altro uso di simboli di funzione: in quali modi possiamo formalizzare

"Ogni uomo ha come antenato suo padre"

??
Una possibilità è usare i seguenti simboli predicativi
$U(x)$= "x è un uomo"
$A(y, x)$= "y è antenato di x"
$P(y, x)$= "y è padre di x"

Ma visto che il padre è unico si può introdurre un simbolo $p(x)$ per la funzione (parziale)

$$p(x) = \text{ padre di } x$$

e in tal caso come si formalizza la frase sopra???

Esercizi

Mostrare che in logica classica con uguaglianza $\mathrm{LC}_=$ sono validi i sequenti seguenti:

$$\begin{array}{c}\mathrm{cf}^* \\ \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u)\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\mathrm{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u)\end{array}$$

Teorie generiche

1. Sia T_{gi}^{cla} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

   (a) Se Claudia non va in gita allora Giovanni ci va.

   (b) Beppe non va in gita se e solo se ci va Giovanni.

   (c) Beppe va in gita se Claudia non va in gita.

   (d) Non tutti vanno in gita.

   Si consiglia di usare:
   G(x)= x va in gita, c=Claudia, g=Giovanni, b=Beppe.

   Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione in T_{gi}^{cla}:

   (e) Qualcuno non va in gita.

   (f) Se Giovanni non va in gita allora Beppe ci va.

   (g) Se Claudia non va in gita allora Beppe non ci va.

   (h) Claudia va in gita.

   (i) Non si dà il caso che nessuno vada in gita.

2. Sia T_{am}^{cla} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

   (a) Se Claudia ammira qualcuno questo qualcuno ammira Claudia.

   (b) Pippo ammira tutti quelli che Gianni non ammira.

   (c) Non c'è nessuno che Pippo ammiri.

   (d) Claudia ammira Fabio.

   suggerimento: si consiglia di usare:
   A(x,y)= x ammira y
   g=Gianni, p= Pippo, f= Fabio, c= Claudia

   Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria T_{am}^{cla}:

   (e) Fabio ammira Claudia.

   (f) Pippo non ammira Claudia.

   (g) Gianni ammira tutti.

   (h) Claudia ammirebbe Pippo se Pippo ammirasse Claudia.

   (i) Gianni ammira Claudia.

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\overline{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'}\ \text{ax-id} \qquad \overline{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{ax-}\bot$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\text{S} \qquad \overline{\Gamma \vdash t = t, \Delta}\ =-\text{ax}$$