SIMULAZIONE I appello 20 dicembre 2018

nome: cognome:

- Scrivere in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Si ricorda di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Si ricorda di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Si esplicitino le eventuali regole derivate usate che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- ATTENZIONE: se si risolvono correttamente TUTTI gli esercizi con il segno ++ si prende il voto 30 independentemente dall'avere o meno un bonus accumulato.

- Mostrare se i sequenti elencati sotto sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero mostrare se sono validi o meno e soddisfacibili o insoddisfacibili in logica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso)

  - 3 punti
    $\neg B \vdash \neg(B \rightarrow \neg\neg A)$

  - (++) 6 punti
    $\exists w \; (c = w \; \& \; w \neq d \;) \vdash \forall z \; \exists y \; z \neq y$

  - 5 punti
    $\exists x \; (M(x) \; \vee \; A(x) \;) \vdash \exists x \; (\neg M(x) \; \rightarrow \; A(x) \;)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla logica classica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso)

  - (6 punti)

    Nessuno essere vivente si trova su Marte.

    Quelli che si trovano su Marte non sono esseri viventi.

    si consiglia di usare:
    $V(y)$ ="y è un essere vivente"
    $A(x, y)$ = "x si trova su y"
    m= "Marte"

- (++) (6 punti)

  I ricchi non sono poveri.

  Esiste un ricco che non è povero.

  si consiglia di usare:
  R(x)="x è ricco"
  P(x)= "x è povero"

- (8 punti)

  Mario beve un'unica bevanda.
  Mario beve tè.
  Il tè non è caffè.

  Mario non beve caffè.

  si consiglia di usare:
  B(x,y)="x beve y"
  t=tè
  c=caffè
  m=Mario

- (++) (14 punti)

  "Qualcuno loda solo se stesso e loda quelli e soltanto quelli che non si lodano."

  si consiglia di usare:
  L(x,y)= x loda y

- Sia T_{rec} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se Beppe recita, Dario non fa la comparsa.
  - Luisa non recita se c'è un suggeritore.
  - Luisa non recita solo se c'è un suggeritore.
  - Se Dario non fa la comparsa allora Beppe e Luisa recitano.
  - Dario fa la comparsa se Luisa recita o non c'è un suggeritore.

  Si consiglia di usare:
  C(x)= x fa la comparsa
  R(x)= x recita
  S(x)= x un suggeritore
  b=Beppe, d=Dario, l=Luisa.

  Dedurre poi le seguenti affermazioni nella teoria indicata (ciascuna vale 4 punti quando non altrimenti indicato):

  - Non c'è un suggeritore se Luisa recita.
  - Se Luisa recita Dario fa la comparsa.
  - (6 punti) Dario fa la comparsa.
  - Luisa non recita o Beppe non recita.
  - Qualcuno non recita.

- (++) Sia T_{mon} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Per ciascuna montagna esiste una montagna più alta di lei.
  - Se una montagna è più alta di un'altra montagna, e quest'altra è più alta di una terza montagna, allora la prima montagna è più alta della terza montagna.
  - Il Monte Bianco, il Monte Rosa, il Civetta e l'Everest sono montagne.
  - Il Monte Rosa è più alto del Civetta.
  - Date due montagne o la prima è più alta della seconda o la seconda è più alta della prima.
  - Nessuna montagna è più alta di se stessa.
  - Non c'è montagna più alta dell'Everest.
  - Il Monte Bianco è più alto del Monte Rosa.

  Si consiglia di usare:
  A(x,y)= "x è più alto di y"
  M(x)="x è una montagna"
  b="Monte Bianco" r="Monte Rosa" c="Civetta" e="Everest"

  Dedurre poi in T_{am} le seguenti affermazioni (ciascuna vale 8 punti):

  - Il Monte Bianco non è più alto dell'Everest.
  - Il Monte Bianco è più alto del Civetta.
  - L'Everest è più alto del Monte Rosa.
  - L'Everest è più alto di tutte le montagne eccetto se stesso.
  - Il Monte Rosa non è più alto del Monte Bianco.

- Stabilire se la seguente regola e le sue inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

  - (6 punti)

$$\frac{D \vdash F \qquad\qquad\qquad \vdash \neg F \ \&\ C}{\vdash \neg D \ \&\ C}\ 1$$

- (facoltativo)

  Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (7 punti) $\vdash \forall y\ \exists z\ \exists w\ y + w = z$
  2. (7 punti) $\vdash \exists w\ \exists y\ w \cdot y = 0$

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\overset{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla} \qquad \overset{\text{ax-}\mathtt{tt}}{\Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\text{S} \qquad \overset{= -\text{ax}}{\Gamma \vdash t = t, \Delta}$$

TAUTOLOGIE CLASSICHE

associatività $\vee$	$(A \vee B) \vee C$	$\leftrightarrow$	$A \vee (B \vee C)$
associatività &	$(A\&B)\&C$	$\leftrightarrow$	$A\&(B\&C)$
commutatività $\vee$	$A \vee B$	$\leftrightarrow$	$B \vee A$
commutatività &	$A\&B$	$\leftrightarrow$	$B\&A$
distributività $\vee$ su &	$A \vee (B\&C)$	$\leftrightarrow$	$(A \vee B)\&(A \vee C)$
distributività & su $\vee$	$A\&(B \vee C)$	$\leftrightarrow$	$(A\&B) \vee (A\&C)$
idempotenza $\vee$	$A \vee A$	$\leftrightarrow$	A
idempotenza &	$A\&A$	$\leftrightarrow$	A
leggi di De Morgan	$\neg(B \vee C)$	$\leftrightarrow$	$\neg B\&\neg C$
	$\neg(B\&C)$	$\leftrightarrow$	$\neg B \vee \neg C$
legge della doppia negazione	$\neg\neg A$	$\leftrightarrow$	A
implicazione classica	$(A \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$\neg A \vee C$
disgiunzione come antecendente	$(A \vee B \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)$
congiunzione come antecendente	$(A\&B \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$
legge della contrapposizione	$(A \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(\neg C \rightarrow \neg A)$
legge del modus ponens	$A \& (A \rightarrow C)$	$\rightarrow$	C
legge della NON contraddizione	$\neg(A\&\neg A)$		
legge del terzo escluso	$A \vee \neg A$		
leggi di De Morgan	$\neg(\exists x\ A(x))$	$\leftrightarrow$	$\forall x\ \neg A(x)$
	$\neg(\forall x\ A(x))$	$\leftrightarrow$	$\exists x\ \neg A(x)$

Regola di composizione

$$\frac{\vdash \mathtt{fr} \qquad \Gamma, \mathtt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

Regole derivate o ammissibili per $\mathbf{LC}_=$

si ricorda che $t \neq s \ \equiv \ \neg t = s$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C}$$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{"}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{"}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–D}_v$$

$$\overset{\text{rf}^*}{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'}$$

$$\overset{\text{sm}^*}{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta}$$

$$\overset{\text{tra}^*}{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta} \qquad \overset{\text{cf}^*}{\Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta}$$

$$\overset{\text{cp}^*}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

Aritmetica di Peano PA

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $\mathrm{LC}_=$ la regola di composizione

$$\frac{\vdash \mathtt{fr} \qquad\qquad \Gamma, \mathtt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

e i seguenti assiomi:

$$
\begin{aligned}
&Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0\\
&Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )\\
&Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x\\
&Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)\\
&Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0\\
&Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x\\
&Ax7. \vdash A(0) \& \forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)
\end{aligned}
$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$