I appello 18 gennaio 2021

`Nome:` `Cognome:`

`Bonus:` si' no

- Scrivere in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Si ricorda di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Si ricorda di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Si esplicitino le eventuali regole derivate usate che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- ATTENZIONE: se si risolvono correttamente TUTTI gli esercizi con il segno ++ si prende il voto 30 independentemente dall'avere o meno un bonus accumulato.
- non si supera l'appello operando solo formalizzazioni a meno che non sia siano completati correttamete il primo e terzo esercizio qui di seguito.

- Per chi NON ha bonus il I e III esercizio sono obbligatori.

• Mostrare se i sequenti elencati sotto sono tautologie, opinioni o paradossi in logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità si assegna il doppio dei punti indicati).

  - (`obbligatorio per chi NON ha bonus`)

    3 punti
    $\neg C \vdash \neg(\ B\ \vee\ C\ )\ \&\neg B$

  - (++)
    6 punti
    $\forall x\ b = x \vdash \forall y\ y = c$

  - (`obbligatorio per chi NON ha bonus`)

    5 punti
    $\neg\forall x\ A(x) \vdash \forall y\ \neg A(x)\ \vee\ \exists y\ \neg A(y)$

• Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi nella logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità si assegna il doppio dei punti indicati).

- (6 punti)

$$\frac{\text{Se uno cerca bene allora trova.}}{\text{Coloro che non trovano non cercano bene.}}$$

si consiglia di usare:
$C(y)$ =“y cerca bene”
$T(x)$ = “x trova”

- (++) (6 punti)

$$\frac{\text{Qualcuno trova.}}{\text{Nessuno cerca.}}$$

si consiglia di usare:
$C(y)$ =“y cerca”
$T(x)$ = “x trova”

- (8 punti)

$$\frac{\text{Beppe ha un'unica sorella.}}{\text{Se Eva non è Ruth, allora o Eva non è sorella di Beppe o Ruth non è sorella di Beppe.}}$$

si consiglia di usare:
$S(x, y)$= x è sorella di y
B=Beppe, e=Eva r=Ruth

- (++) (14 punti)

“Non esiste alcuno che se lui ammira se stesso allora ognuno ammira se stesso.”

si consiglia di usare:
$A(x, y)$=x ammira y

- (29 punti) Sia T_{dan} la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Eleonora danza solo se Alice non danza.
  - Se Eleonora danza oppure il primo ballerino danza allora Alice danza.
  - Se Alice non danza, allora pure il primo ballerino non danza ma Gertrude danza.
  - Eleonora oppure il primo ballerino danzano, se Alice danza.
  - Se il primo ballerino non danza allora pure Gertrude non danza.

  Si consiglia di usare:
  D(x)= x danza,
  e=Eleonora   p=il primo ballerino   a=Alice   g=Gertrude

  Formalizzare le seguenti affermazioni e dedurne la validità in T_{dan}:

  - (6 punti) Alice danza.
  - (4 punti) Eleonora non danza.
  - (5 punti) Il primo ballerino danza.
  - (4 punti) Se Gertrude danza anche Alice danza.
  - (5 punti) Qualcuno danza ma non tutti.

- (++ 49 punti) Sia T_{ch} la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - (2 punti) Piero non chiama nessuno.
  - (2 punti) Nessuno chiama se stesso.
  - (3 punti) Se uno chiama un'altro, quest'altro chiama il primo.
  - (4 punti) Veronica chiama Mila e soltanto lei.
  - (2 punti) Non si dà il caso che esista qualcuno che Luca non chiami.

  si consiglia di usare:
  $C(x, y)$= x chiama y
  l=Luca   p= Piero,   v= Veronica,   m= Mila

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria in T_{ch}:

  - (6 punti) Piero non chiama Luca.
  - (6 punti) Luca chiama Piero.
  - (12 punti) Mila chiama Veronica.
  - (12 punti) Mila è diversa da Veronica.

- (++) : Dall'affermazione

Ip D'inverno non tutti vanno a sciare.

si dica quali delle seguenti affermazioni si possono dedurre (la classificazione di ciascuna vale 8 punti se è deducibile e 14 punti se NON lo è):

A **Se nessuno va a sciare allora non è inverno.**
B **Se è inverno qualcuno non va a sciare oppure qualcuno ci va.**
C **Se tutti vanno a sciare non è inverno.**

Si giustifichi la risposta corretta producendo una sua derivazione nella teoria predicativa

$$\mathbf{T_{Ip}} = \mathbf{LC_{=}} + \mathbf{Ip}$$

dopo aver formalizzato ciascuna affermazione utilizzando:
S(x)= x va a sciare
I=è inverno
Inoltre si giustifichi le risposte "affermazione X" non corrette classificando in $\mathbf{LC_{=}}$ il sequente **Ip** $\vdash$ "affermazione X" .

- Stabilire se la seguente regola è sicura rispetto alla semantica classica (nel caso di regola non sicura si analizzi entrambe le inverse):

  - (++ solo sicurezza della regola) (15 punti)

$$\frac{F \vdash C \;\&\; M \qquad\qquad \neg C \vdash \neg M}{\neg\neg M \;\vee\; F \vdash C}\ 1$$

- (++) (32 punti) (*Esercizio facoltativo*)

In un gioco due amiche fanno un'affermazione, che è vera o falsa.
Un'affermazione è mancante e l'altra è riportata sotto:
Celeste: ....
Morgana: **almeno una di noi afferma il vero**.

Si può dedurre, anche se non si conosce l'affermazione di Celeste, quante affermazioni sono vere?

a) No, ma se Celeste dice il vero anche Morgana dice il vero.
a') No, ma se Morgana dice il vero anche Celeste dice il vero.
b) Sì, sono vere tutte e due le affermazioni.
c) Sì, è vera solo l'affermazione di Morgana.
d) Sì, è vera solo l'affermazione di Celeste.
e) Nessuna affermazione è vera.

Si analizzino le varie affermazioni nella teoria proposizionale $T_{Morgana}$ ottenuta estendendo $\mathbf{LC}_p$ con la formalizzazione di ciò che dice Morgana (formalizzazione 2 punti) tramite:
M= l'affermazione di Morgana è vera
C= l'affermazione di Celeste è vera

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\text{ax-id}\quad \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \qquad \text{ax-}\bot\quad \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla \qquad \text{ax-}\mathtt{tt}\quad \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma\ ,\ t_{ter} = s_{ter}\ ,\ \Gamma(t_{ter})\ \vdash\ \Delta(t_{ter})\ ,\ \nabla}{\Sigma\ ,\ \Gamma(s_{ter})\ ,\ t_{ter} = s_{ter}\ \vdash\ \Delta(s_{ter})\ ,\ \nabla}\ = -\mathrm{S} \qquad = -\mathrm{ax}\quad \Gamma \vdash t_{ter} = t_{ter}\ ,\ \Delta$$

TAUTOLOGIE CLASSICHE

associatività $\vee$	$(A \vee B) \vee C$	$\leftrightarrow$	$A \vee (B \vee C)$
associatività &	$(A \& B) \& C$	$\leftrightarrow$	$A \& (B \& C)$
commutatività $\vee$	$A \vee B$	$\leftrightarrow$	$B \vee A$
commutatività &	$A \& B$	$\leftrightarrow$	$B \& A$
distributività $\vee$ su &	$A \vee (B \& C)$	$\leftrightarrow$	$(A \vee B) \& (A \vee C)$
distributività & su $\vee$	$A \& (B \vee C)$	$\leftrightarrow$	$(A \& B) \vee (A \& C)$
idempotenza $\vee$	$A \vee A$	$\leftrightarrow$	A
idempotenza &	$A \& A$	$\leftrightarrow$	A
leggi di De Morgan	$\neg(B \vee C)$	$\leftrightarrow$	$\neg B \& \neg C$
	$\neg(B \& C)$	$\leftrightarrow$	$\neg B \vee \neg C$
legge della doppia negazione	$\neg\neg A$	$\leftrightarrow$	A
implicazione classica	$(A \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$\neg A \vee C$
disgiunzione come antecendente	$(A \vee B \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)$
congiunzione come antecendente	$(A \& B \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$
legge della contrapposizione	$(A \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(\neg C \rightarrow \neg A)$
legge del modus ponens	$A \& (A \rightarrow C)$	$\rightarrow$	C
legge della NON contraddizione	$\neg(A \& \neg A)$		
legge del terzo escluso	$A \vee \neg A$		
leggi di De Morgan	$\neg(\exists x\, A(x))$	$\leftrightarrow$	$\forall x\, \neg A(x)$
	$\neg(\forall x\, A(x))$	$\leftrightarrow$	$\exists x\, \neg A(x)$

Regola di composizione

$$\frac{\vdash \texttt{fr} \qquad\qquad \Gamma, \texttt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

Regole derivate o ammissibili per $\mathbf{LC}_=$

si ricorda che $t \neq s \ \equiv \ \neg t = s$

$$\begin{array}{cc}
\overset{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} & \overset{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C} \\[2ex]
\overset{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} & \overset{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''} \\[2ex]
\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg{-}\text{S} & \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg{-}\text{D} \\[2ex]
\dfrac{\Gamma, \Gamma\text{”} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{”} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} & \dfrac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{”}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{”}}\ \text{in}_{\text{dx}} \\[2ex]
\dfrac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall{-}\text{S}_v & \dfrac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists{-}\text{D}_v
\end{array}$$