III appello 1 settembre 2010

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- Non si contano le brutte copie.

- Specificate le regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)

- Mostrare se i sequenti di seguito sono validi in LC e nel caso non lo siano mostrare un contromodello: **solo appello**

  3 punti

  $\neg A \to \neg(C \to B) \vdash \neg B \& \neg C \to \neg A$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

  5 punti

  $\exists x\ (\ \perp \&(\ C(x) \& A(x)\ )\ ) \vdash \forall x\ \neg C(x)$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

  5 punti

  $\neg \forall x\ C(x) \vdash \neg\neg \exists x\ \neg C(x)$ $\begin{cases} \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$

- Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI, ovvero hanno un modello che li rende validi, o INSODDISFACIBILI, ovvero nessun modello li rende validi, motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato di 2 punti)

  - (3 punti)

    $$\frac{\text{Prima di consegnare rileggo questo compito solo se riesco a scrivere qualcosa.}}{\text{Se non riesco a scrivere qualcosa, prima di consegnare non rileggo questo compito.}}$$

    si consiglia di usare:
    R =prima di consegnare rileggo questo compito
    S = riesco a scrivere qualcosa

    corretto in LC sì no

- (5 punti)

  Non si dà il caso che Carlo sia agitato e non commetta errori nel programmare.

  Qualcuno commette errori nel programmare oppure non è agitato.

  si consiglia di usare:
  C(x) = x commette errori nel programmare
  A(x)= x è agitato
  c=Carlo

  corretto in LC sì no

- (5 punti)

  Non tutti i programmi in web sono aggiornati e funzionanti.

  Qualche programma in web non è aggiornato o qualche programma in web non è funzionante.

  si consiglia di usare:
  P(x) = x è programma in web
  A(x) = x è aggiornato
  F(x)= x è funzionante

  corretto in LC sì no

- (6 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  Tutte le amiche di Carla sono venete.
  Gianna è amica di Carla.
  Carla ha un'unica amica.

  Gianna è veneta.

  si consiglia di usare:
  A(x)= x è amica di Carla
  V(x)= x è veneta
  g="Gianna"

  corretto in $LC_=$ sì no

- (7 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  Qualche amica di Carla è veneta.
  Gianna è amica di Carla.
  Carla ha un'unica amica.

  Gianna è veneta.

  si consiglia di usare:
  A(x)= x è amica di Carla

V(x)= x è veneta
g="Gianna"

corretto in $LC_=$ sì no

- (5 punti) Stabilire se il sequente è valido in $LC_=$

$$a \neq b \vdash \neg(\ c = a \& b = c\ )$$

corretto in $LC_=$ sì no

- Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE rispetto alla semantica classica e nel caso di NON validità dire se sono SODDISFACIBILI o INSODDISFACIBILI: ciascuna vale 5 punti (+ 1 punto se non valida)

  – $\models \exists x\ (\ C(x) \& B(x) \rightarrow \neg B(x)\ )$
  – $\models \exists y\ \exists x\ (\ x \neq y\ \&\ \exists w\ (\ x = w \& w = y\ )\ )$
  – $\models \forall z\ \exists y\ (\ y = z \vee z \neq y\ )$

- (20 punti) Sia T^{cla}_{ri} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se Claudia ride allora tutti ridono.
  - Paolo non ride.
  - Se Giorgio ridesse allora Paolo riderebbe oppure Emma riderebbe.
  - Giorgio ride o Emma ride.

  Si consiglia di usare:
  R(x)= x ride, c=Claudia, g=Giorgio, e=Emma, p=Paolo.

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione in T^{cla}_{ri}:

  - Claudia non ride.
  - Non si dà il caso che tutti non ridano.
  - Se Emma non ride allora Giorgio non ride.
  - Emma ride.

- (23 punti) Sia T^{cla}_{pen} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Qualcuno pensa a tutti.
  - Gianni non pensa a nessuno.
  - Flora pensa a qualcuno.
  - Flora pensa a quelli che non la pensano.

suggerimento: si consiglia di usare:
P(x,y)= x pensa ad y
g=Gianni, f=Flora

Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria T^{cla}_{pen}:

- Gianni non pensa a Flora.
- Qualcuno pensa a Flora.
- Flora pensa a Gianni.
- Non si dà il caso che tutti quelli che Flora pensa questi non la pensino.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (5 punti) $\vdash \forall x\ \exists y\ \exists z\ (\ s(x) = z \rightarrow z = s(y)\ )$
2. (5 punti) $1 = 0 \vdash 2 = 3$
3. (5 punti) $\vdash \exists y\ \forall x\ y = x \cdot y$
4. (5 punti) $\vdash \forall y\ (\ s(y) = 9 \rightarrow y = 8\ )$
5. (8 punti) $\vdash \exists z\ \exists y\ z + y = s(z)$
6. (10 punti) $\vdash 7 \cdot 1 = 7$
7. (10 punti) $\vdash \forall y\ \exists x\ s(y) \neq x$

- Stabilire quali delle seguenti regole sono valide e in caso positivo anche sicure: (8 punti ciascuna)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, s = e}{\Gamma \vdash \Delta}\ 1$$

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, A\&\neg A \vdash D}\ 2$$

Logica classica con uguaglianza- calcolo abbreviato $\mathrm{LC}^{abbr}_{=}$

$$\begin{array}{cc}
\text{ax-id} & \text{ax-}\bot \\
\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla
\end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \to -\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \forall\!-\!\mathrm{D}\ (x \notin VL(\Gamma, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla} \forall\!-\!\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla} \exists\!-\!\mathrm{S}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla} \exists\!-\!\mathrm{D}$$

$$\begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \Sigma \vdash t = t, \Delta \end{array} \qquad \frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S}_f$$

Logica classica predicativa $\mathbf{LC}_=$ con uguaglianza

questa versione contiene le regole nel libro di Sambin

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ A \vdash A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{ax-}\bot \\ \bot \vdash \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma} \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma} \mathrm{in}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \mathrm{in}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A} \mathrm{cn}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla} \mathrm{cn}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-\mathrm{F} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&-\mathrm{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&-\mathrm{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee-\mathrm{F} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee-\mathrm{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee-\mathrm{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to -\mathrm{F} \qquad \frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta} \to -\mathrm{re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta}\ \forall\!-\!\mathrm{D}\ (x \notin VL(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\!-\!\mathrm{re}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta}\ \exists\!-\!\mathrm{S}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists\!-\!\mathrm{re}$$

$$\begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \vdash t = t \end{array} \qquad \frac{\Sigma, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC + comp_{sx}+ comp_{dx}

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$\begin{aligned}
&Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0 \\
&Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ ) \\
&Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x \\
&Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y) \\
&Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0 \\
&Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x \\
&Ax7. \vdash A(0) \& \forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)
\end{aligned}$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\ s(0)\ )$$

Regole derivate per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \;\equiv\; \neg t = s$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash \Delta} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash \Delta}$$

$$\overset{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \qquad \overset{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\overset{\text{rf}^*}{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'}$$

$$\overset{\text{sm}^*}{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta}$$

$$\overset{\text{tra}^*}{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta} \qquad \overset{\text{cf}^*}{\Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta}$$

$$\overset{\text{cp}^*}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $LC_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\ P(x) \to P(s(x))\ )}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$