III appello 16 giugno 2015

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Derivare in LJ:
  - 3 punti
    $\neg\neg A \rightarrow B \vdash A \rightarrow \neg\neg B$
  - 4 punti
    $\vdash \neg(\neg A \ \& \ (C \& A))$
  - 6 punti
    $\vdash \forall y \ \exists z \ C(y) \ \rightarrow \ \forall w \ \exists z \ \neg\neg C(w)$
  - 6 punti
    $\vdash \neg\exists x \ \neg\neg C(x) \ \rightarrow \ \forall w \ (\neg C(w) \vee C(z))$
  - 7 punti
    $\neg\neg(A \rightarrow \forall y \ B(y)) \vdash \neg\neg A \rightarrow \neg\neg\forall z \ B(z)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e derivare i sequenti ottenuti nella logica indicata
  - (7 punti) in LJ

    Gli alberi del bosco sono pini.
    Ogni pino è sempreverde.

    Ciò che non è un pino non è sempreverde o non è un albero del bosco.

    si consiglia di usare:
    S(x) = "x è sempreverde"
    P(x) = "x è un pino"
    A(x) = "x è un albero del bosco"

  - (6 punti) in LJ

    Non si dà il caso che i pini non siano sempreverdi.
    Nessun pino perde le foglie.

    Gli alberi che perdono le foglie non sono pini.

    si consiglia di usare:
    S(x) = "x è sempreverde"

P(x) = “x è un pino”
A(x) = “x è un albero”
F(x)=x perde le foglie

- (39 punti) Siano ${T_{gat}}^i$ e ${T_{gat}}^c$ le teorie ottenute estendendo rispettivamente LJ e LK con composizioni e con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Fufi e Noè sono gatti.
  - Ognuno scappa se Fufi scappa.
  - Piove solo se Fufi scappa.
  - Pluto scappa o Vento scappa se Noè scappa.
  - Non si dà il caso che Noè non scappi.
  - Pluto scappa solo se Vento e Noè non scappano.
  - Non si dà il caso che Pluto non sia un cane o che Vento non sia un gatto.

  Si consiglia di usare:
  P=piove
  S(x)= x scappa
  f=Fufi,
  n=Noè,
  v=Vento,
  p=Pluto.
  C(x)=x è un cane
  G(x)= x è gatto

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

  - Noè scappa. (in ${T_{gat}}^c$)
  - Pluto è un cane e Vento è un gatto. (in ${T_{gat}}^c$)
  - Pluto non scappa. (in ${T_{gat}}^i$)
  - Fufi non scappa. (in ${T_{gat}}^i$)
  - Noè non scappa se Pluto scappa. (in ${T_{gat}}^i$)
  - Non piove. (in ${T_{gat}}^i$)
  - Vento scappa. (in ${T_{gat}}^c$)
  - Un cane non scappa. (in ${T_{gat}}^c$)
  - Qualche gatto scappa e qualche gatto non scappa. (in ${T_{gat}}^c$)

- (43 punti) Siano T_s^i e T_s^c le teorie ottenute estendendo rispettivamente LJ e LK con composizioni e con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Non si dà il caso che la pianista non suoni nulla.
  - Quelli che applaudono a qualcuno non suonano nulla.
  - Non si dà il caso che qualcuno applauda a se stesso.
  - Erik applaude a chi suona qualcosa.

Si consiglia di usare:
S(x,y)= “x suona y”
A(x,y)=“x applaude a y”
e=“Erik”
p=“la pianista”

Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

- La pianista suona qualcosa. (in T_s^c)
- Erik non applaude a tutti. (in T_s^i)
- Se qualcuno suona qualcosa allora c’e’ qualcuno che gli applaude. (in T_s^i)
- Non si dà il caso che Erik non applauda alla pianista. (in T_s^c)
- La pianista non applaude a nessuno. (in T_s^i)
- Erik non suona nulla. (in T_s^i)
- Se Erik suona qualcosa la pianista non gli applaude. (in T_s^i)

Logica intuizionistica LJ

$$\text{ax-id} \quad A \vdash A \qquad \text{ax-}\bot \quad \bot \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash C}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, C, C \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta}\ \text{cn}_{\text{sx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B}\ \&-\text{f} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{f} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to -\text{f} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta}\ \to -\text{re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(z)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)}\ \forall-\text{f}\ (\Gamma, \forall x\ A(x) \text{ non dipendono da } z) \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma, A(z) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta}\ \exists-\text{f}\ (\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta \text{ non dipendono da } z) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x)}\ \exists-\text{re}$$

Logica classica predicativa LK

$$\text{ax-id} \quad A \vdash A \qquad \text{ax-}\bot \quad \bot \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash C, \Delta}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, C, C \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash C, C, \Delta}{\Gamma \vdash C, \Delta}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{f} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{f} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to -\text{f} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad B, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \to -\text{re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(z), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta}\ \forall-\text{f}\ (\Gamma, \forall x A(x), \Delta \text{ non dipendono da } z) \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma, A(z) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta}\ \exists-\text{f}\ (\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta \text{ non dipendono da } z) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists-\text{re}$$

Regole di composizione (ovvero cut)

in **LJ**:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta} \text{ cut}$$

in **LK**:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{ cut}$$

Si ricorda che sia in **LJ** che in **LK** la negazione è definita in tal modo

$$\neg \mathbf{C} \equiv \mathbf{C} \rightarrow \perp$$

Regole ammissibili in LJ

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\Gamma}' \vdash \mathbf{A} \end{array}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \mathbf{A}}{\boldsymbol{\Gamma}, \neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}} \neg\text{−re} \qquad \frac{\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \neg \mathbf{A}} \neg\text{−f}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma} \text{sc}_{\text{sx}}$$

Regole ammissibili in LK

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\Gamma}' \vdash \mathbf{A} \end{array}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \mathbf{A}, \boldsymbol{\Delta}}{\boldsymbol{\Gamma}, \neg \mathbf{A} \vdash \boldsymbol{\Delta}} \neg\text{−re} \qquad \frac{\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \boldsymbol{\Delta}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \neg \mathbf{A}, \boldsymbol{\Delta}} \neg\text{−f}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma} \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}}$$