Manuale pratico per il corso di Logica

Maria Emilia Maietti
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Università di Padova
via Trieste n. 63 - 35121 Padova, Italy
maietti@math.unipd.it

4 ottobre 2018

Indice

1 A che cosa serve un corso di logica?

Nei nostri discorsi quotidiani ci è certamente capitato di usare il sostantivo “logica” o l’aggettivo “logico”. Un tipico uso è in frasi del tipo: “Ti pare logico che uno si comporti in quel modo?”, “Ma con che logica ragiona quella persona?”. Probabilmente negli studi pre-universitari avete incontrato un uso più formale di queste parole, in particolare se avete fatto dei test di “logica” oppure se avete imparato a fare l’ “analisi logica” delle frasi italiane.

In questo corso faremo un uso molto specifico della parola “logica” completamente nuovo rispetto agli usi comuni. In particolare, la parola denoterà un *sistema formale* di regole fissate per poter *dedurre* la verità di certe asserzioni, scritte come *formule*, a partire dall’assumere come vere eventuali altre assunzioni.

L’attività del dedurre è simile all’attività del programmare. Il linguaggio di una logica, o sistema formale, può essere proprio pensato come un linguaggio di programmazione ove i programmi sono le deduzioni della verità di formule a partire dalla verità di un insieme (anche vuoto) di formule assunte come vere.

Con il presente corso di logica il lettore imparerà a programmare (o calcolare) *deduzioni* per *verificare* la *correttezza* di certe affermazioni in una certa logica.

Perchè un informatico dovrebbe essere interessato a studiare un linguaggio per dedurre? Prima di rispondere a questa domanda, proponiamo al lettore il seguente test di logica.

Valuta la validità delle seguenti affermazioni e rispondi alle eventuali domande:

1. “Il programma

$$
\begin{array}{l}
y = 1; \\
z = 0; \\
\texttt{while} \quad (z \neq x) \quad \{ \\
\qquad\qquad z = z + 1 \\
\qquad\qquad y = y * z; \\
\quad \}
\end{array}
$$

non termina su input $x = 0$”

corretto **sì** **no**

2. “Il programma

$$
\begin{array}{l}
y = 1; \\
z = 0; \\
\texttt{while} \quad (z \neq x) \quad \{ \\
\qquad\qquad z = z + 1 \\
\qquad\qquad y = y * z; \\
\quad \}
\end{array}
$$

calcola in y il fattoriale $x!$ su input x numero naturale”

corretto **sì** **no**

3. Ammesso che

   “se la radice quadrata canta alla Scala di Milano allora il tuo vicino di banco è Napoleone”

   allora è vero che

   “se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano”.

   corretto **sì** **no**

4. **per ogni numero naturale n esiste un numero naturale m tale che**

$$\mathbf{n + m = n}$$

   corretto **sì** **no**

   chi è questo m?

5. **per ogni numero naturale n**

$$\mathbf{2 + n = 1 + n}$$

   corretto **sì** **no**

6. Ammesso che

   “ **non si dia il caso che non esista input su cui il programma X si ferma**”

   allora è vero che

   “ **il programma X si ferma su qualche input**”.

   corretto **sì** **no**

7. “ **Dio esiste**”.

   corretto **sì** **no**

8. Ammesso che " **non tutti i programmi siano utili e corretti**" allora è vero che " **esiste un programma non utile o esiste un programma non corretto.**"

corretto **sì** **no**

9. "**Ogni bravo informatico, e ce ne sono di informatici bravi, può costruire un programma che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sè**"

corretto **sì** **no**

10. Supponi che le seguenti affermazioni siano valide

    - " **Se Carla non va in gita allora Giovanni ci va.**"
    - " **Beppe non va in gita se e solo se ci va Giovanni.**"
    - " **Beppe va in gita se Carla non va in gita.**"
    - " **Non tutti vanno in gita.**"

    allora è vero che

    - " **Qualcuno non va in gita.**"

      corretto **sì** **no**

    - " **Se Giovanni non va in gita allora Beppe ci va.**"

      corretto **sì** **no**

    - " **Se Carla non va in gita allora Beppe non ci va.**"

      corretto **sì** **no**

    - " **Carla va in gita.**"

      corretto **sì** **no**

    - " **Non si dà il caso che nessuno vada in gita.**"

      corretto **sì** **no**

Pensate che un robot, ovvero un computer (ovvero un programma) sarebbe in grado di risolvere il test di logica che avete appena eseguito in modo corretto e automatico (o semiautomatico/interattivo con il vostro aiuto)?

Il presente corso di logica pone le basi affinchè ciò possa realizzarsi, ovvero pone le basi per l'*intelligenza artificiale*.

Ma, allora, come si istruisce un robot a rispondere al test di logica?

L'idea di base è di istruirlo costruendo un *linguaggio formale* in cui poter *codificare* le asserzioni e provarne la *verità* tramite *derivazioni/deduzioni formali* che rappresentano la spiegazione *logica* del perchè certe asserzioni sono vere.

Anticipiamo qualche esempio di quel che faremo nel corso.

1.1 Esempio di codifica in linguaggio formale.

L'asserzione

Ammesso che " **non si dia il caso che non esista input su cui il programma X si ferma**" allora è vero che " **il programma X si ferma su qualche input**".

si potrà formalizzare in tal modo nel sistema formale che useremo

$$\boxed{\neg\neg(\exists x\ F(x)) \vdash \exists x\ F(x)}$$

posto che:

$\mathbf{F(x)} \stackrel{def}{=}$ " **il programma si ferma sull'input x**"

1.2 Esempio di derivazione formale

Una *derivazione* formale è un albero del tipo

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\textbf{ax-id}$}
\noLine
\UnaryInfC{$B(x) \vdash B(x)$}
\AxiomC{$\textbf{ax-id}$}
\noLine
\UnaryInfC{$C(x) \vdash C(x)$}
\RightLabel{$\exists\text{-D}_{\text{v}}$}
\UnaryInfC{$C(x) \vdash \exists y\, C(y)$}
\RightLabel{$\rightarrow -S$}
\BinaryInfC{$B(x), B(x) \rightarrow C(x) \vdash \exists y\, C(y)$}
\RightLabel{sc_{sx}}
\UnaryInfC{$B(x) \rightarrow C(x), B(x) \vdash \exists y\, C(y)$}
\RightLabel{$\forall\text{-S}_{\text{v}}$}
\UnaryInfC{$B(x) \rightarrow C(x), \forall x\, B(x) \vdash \exists y\, C(y)$}
\RightLabel{$\rightarrow \text{-D}$}
\UnaryInfC{$B(x) \rightarrow C(x) \vdash \forall x\, B(x) \ \rightarrow\ \exists y\, C(y)$}
\RightLabel{$\exists\text{-S}$}
\UnaryInfC{$\exists x(\, B(x) \rightarrow C(x)\,) \vdash \forall x\, B(x) \ \rightarrow\ \exists y\, C(y)$}
\end{prooftree}
$$

1.3 Scopi del corso

Gli scopi principali del corso sono

- imparare a *codificare asserzioni* in *linguaggio formale*
- imparare a *dedurre asserzioni* come *conseguenza logica* di altre *asserzioni* (tramite *alberi di derivazione*)

Ovvero il corso intende essere un'introduzione alla *deduzione formale/automatica.* Oltre a pensare all'arte del dedurre in modo analogico come un particolare tipo di *programmazione*, il nostro corso ha anche un aggancio concreto e specifico con il mondo della programmazione. Infatti lo studio della deduzione logico-formale pone le basi per la *verifica formale dei programmi*, ovvero per *formalizzare* la *correttezza (parziale)* di *programmi* rispetto ad una specifica, in modo *automatico/semiautomatico.*

In poche parole vogliamo costruire calcolatori sempre più intelligenti!

Consideriamo il seguente programma ad esempio

```
y = 1;
z = 0;
while  (z ≠ x)  {
         z  =  z + 1
         y  =  y * z;
  }
```

Questo programma calcola in y il fattoriale di x.

Per verificare questo programma, o qualsiasi altro, in letteratura esiste un calcolo che mostriamo di seguito solo per dare l'idea della parte che noi tratteremo nel corso:

Esempio di calcolo *formale* per correttezza programmi

$$\frac{(\!|\phi|\!)\ C_1\ (\!|\eta|\!) \qquad (\!|\eta|\!)\ C_2\ (\!|\psi|\!)}{(\!|\phi|\!)\ C_1; C_2\ (\!|\psi|\!)}\ \text{Composition}$$

$$\frac{}{(\!|\psi[E/x]|\!)\ x = E\ (\!|\psi|\!)}\ \text{Assignment}$$

$$\frac{(\!|\phi \wedge B|\!)\ C_1\ (\!|\psi|\!) \qquad (\!|\phi \wedge \neg B|\!)\ C_2\ (\!|\psi|\!)}{(\!|\phi|\!)\ \texttt{if}\ B\ \{C_1\}\ \texttt{else}\ \{C_2\}\ (\!|\psi|\!)}\ \text{If-statement}$$

$$\frac{(\!|\psi \wedge B|\!)\ C\ (\!|\psi|\!)}{(\!|\psi|\!)\ \texttt{while}\ B\ \{C\}\ (\!|\psi \wedge \neg B|\!)}\ \text{Partial-while}$$

$$\frac{\vdash_{\mathrm{AR}} \phi' \to \phi \qquad (\!|\phi|\!)\ C\ (\!|\psi|\!) \qquad \vdash_{\mathrm{AR}} \psi \to \psi'}{(\!|\phi'|\!)\ C\ (\!|\psi'|\!)}\ \text{Implied}$$

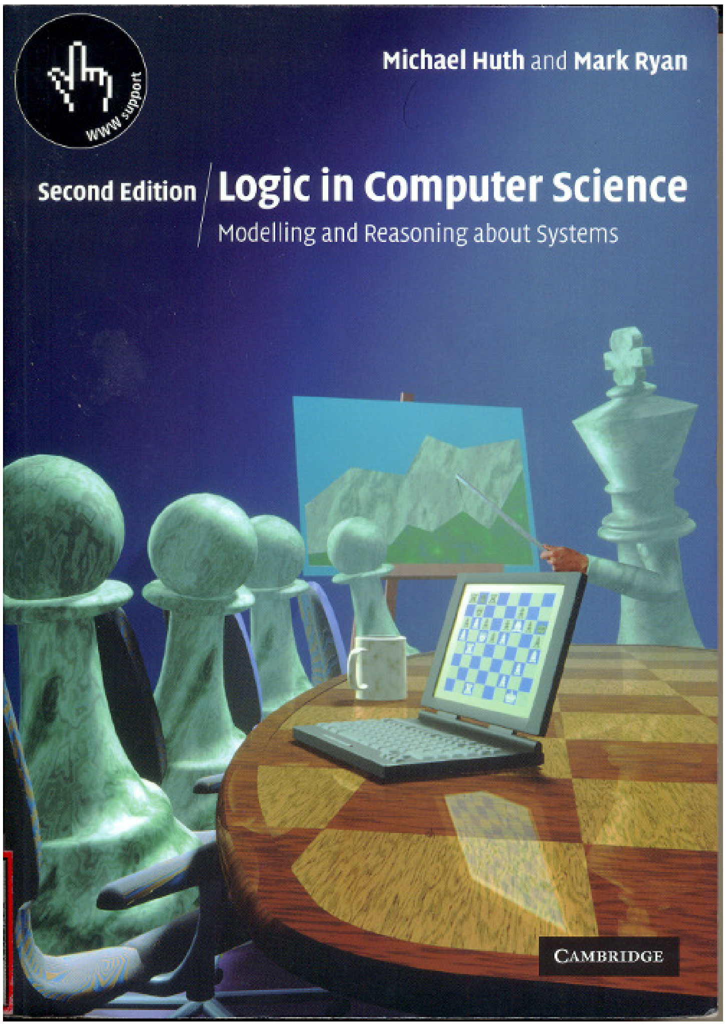
Figure 4.1. Proof rules for partial correctness of Hoare triples.

IMPARERETE A DERIVARE FORMALMENTE
QUESTE PARTI LOGICHE NEL CORSO

Esempio di verifica *formale* del programma fattoriale

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{(\!|1=1|\!)\ \texttt{y = 1}\ (\!|y=1|\!)}{(\!|\top|\!)\ \texttt{y = 1}\ (\!|y=1|\!)}\,i
\quad
\dfrac{(\!|y=1\wedge 0=0|\!)\ \texttt{z = 0}\ (\!|y=1\wedge z=0|\!)}{(\!|y=1|\!)\ \texttt{z = 0}\ (\!|y=1\wedge z=0|\!)}\,i
}{(\!|\top|\!)\ \texttt{y = 1; z = 0}\ (\!|y=1\wedge z=0|\!)}\,c
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{(\!|y\cdot(z+1)=(z+1)!|\!)\ \texttt{z = z+1}\ (\!|y\cdot z=z!|\!)}{(\!|y=z!\wedge z\neq x|\!)\ \texttt{z = z+1}\ (\!|y\cdot z=z!|\!)}\,i
\quad
(\!|y\cdot z=z!|\!)\ \texttt{y = y*z}\ (\!|y=z!|\!)
}{(\!|y=z!\wedge z\neq x|\!)\ \texttt{z = z+1; y = y*z}\ (\!|y=z!|\!)}\,c
}{(\!|y=z!|\!)\ \texttt{while (z != x) \{z = z+1; y = y*z\}}\ (\!|y=z!\wedge z=x|\!)}\,w
}{(\!|y=1\wedge z=0|\!)\ \texttt{while (z != x) \{z = z+1; y = y*z\}}\ (\!|y=x!|\!)}\,i
}{(\!|\top|\!)\ \texttt{y = 1; z = 0; while (z != x) \{z = z+1; y = y*z\}}\ (\!|y=x!|\!)}\,c
$$

Riferimento bibliografico per la verifica dei programmi



1.4 Cosa imparerà il lettore nel corso?

Imparerà il concetto di **verità formale** (o **validità formale**), la quale può essere:

- una **verità** *relativa* ad una **logica**, per cui si parla di **verità logica**.

Infatti esistono **molte logiche**. Per esempio nella letteratura corrente si trovano le seguenti logiche: **logica classica, logica intuzionista, logica quantistica, logica lineare, logica modale, logica temporale.....**

Noi, in questo corso, studieremo solo la **logica classica** e le sue teorie.

- una **verità** *relativa* ad una **teoria**, per cui si parla di **verità extra-logica** in quanto una teoria è un'estensione di una logica con assiomi specifici ovvero

teoria = logica + assiomi

  Esistono molte **teorie** in ogni campo del sapere. Per esempio: **teoria della computabilità (in informatica), teoria dell'aritmetica (in matematica), teoria relativistica (in fisica), teoria dell'evoluzione (in biologia), ...**

1.4.1 Esempi di verità logiche

Ad esempio l'asserzione complessa

Ammesso che " **non si dia il caso che non esista input su cui il programma X si ferma**" allora è vero che " **il programma X si ferma su qualche input**".

è corretta in logica classica (ma non in logiche alternative come quella intuizionista). Per approfondimenti si veda il libro di G. Sambin "**Per Istruire Un Robot**: **(ovvero, come costruirsi una logica)**".

Altro esempio è l'asserzione

Ammesso che " **se la radice quadrata canta alla Scala di Milano allora il tuo vicino di banco è Napoleone** " allora è vero che "**se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che la radice quadrata** **non canta alla Scala di Milano**".

che è corretta formalmente ma senza significato perchè la proposizione "la radice quadrata canta alla Scala di Milano" non ha senso semanticamente (a meno di ulteriori specifiche come il fatto che "radice quadrata" è un nome per un cantante o gruppo di cantanti, ma allora dovrebbe andare con la maiuscola "Radice quadrata"..).

1.4.2 Esempi di verità extra-logiche

L'asserzione

per ogni numero naturale n esiste un numero naturale m tale che n + m = n

è corretta nella teoria dell'aritmetica, ma non è verità logica.

L'asserzione

"**Dio esiste**"

è corretta nella teoria della dottrina cristiana ma non è una verità logica.

Lo stesso dicasi per l'asserzione

"L'esistenza di Dio è certa".

1.4.3 Procedure formali del corso

Nel corso verrà fornita una **procedura di verifica formale** per classificare le **asserzioni formalizzate** in **logica classica** come:

- **verità logiche**:
  per es. esercizio 3. o 6. o 8. del test
- **falsità logiche, ovvero paradossi logici**:
  per es. esercizio 9. del test
- **opinioni logiche, cioè asserzioni nè vere, nè false per la logica**:
  per es. esercizio 7. del test

1.4.4 Verifica formale delle verità dell'aritmetica di Peano

Nel corso imparerete anche a verificare *formalmente* le **verità** della **teoria dell'aritmetica di Peano** come ad esempio che vale

$$\mathbf{5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5}$$

con un albero del tipo

$$\dfrac{\vdash \textbf{Ax 6.} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{5\cdot 1 = 5\cdot 0+5 \vdash 5\cdot 1 = 5\cdot 0+5}}{\forall y\ (\,5\cdot s(y) = 5\cdot y+5\,) \vdash 5\cdot 1 = 5\cdot 0+5}\ \forall\text{−S}_{\text{v}}}{\forall x\ \forall y\ (\,x\cdot s(y) = x\cdot y+x\,) \vdash 5\cdot 1 = 5\cdot 0+5}\ \forall\text{−S}_{\text{v}}}{\vdash 5\cdot 1 = 5\cdot 0+5}\ \text{comp}_{sx}$$

Si noterà che $\mathbf{5{\cdot}1} = \mathbf{5{\cdot}0{+}5}$ NON è una verità della logica classica (serve infatti l'assioma 6. dell'aritmetica di Peano per derivarlo).

1.4.5 Esempio di paradosso (o contraddizione) con stessa forma esercizio 9. del test

L'asserzione dell'esercizio 9. del test precedente ha la stessa forma logica del famoso Paradosso di Russell:

"**Nel villaggio di Cantù c'è un unico barbiere che rade tutti e soli gli uomini che non si radono da sè**."

Si vede che questa affermazione è un paradosso in quanto afferma una contraddizione: l'**esistenza** di tale barbiere. Questo barbiere, infatti, deve radersi ma non può farlo.

il barbiere di Cantù rade se stesso sse **non si rade da sè**

$\Rightarrow$ l'**esistenza** di un tal barbiere porta ad una **CONTRADDIZIONE**

e analogamente

l'esistenza del programma dell'esercizio 9. del test che **attiva se stesso** sse **non si attiva da sè**

porta ad una **contraddizione** con lo stesso tipo logico di ragionamento (o meglio *forma logica*) del paradosso del barbiere.

Ora il lettore provi ad inventare paradossi con la stessa forma... Durante il corso avrà modo di studiare la forma logica precisa di questi paradossi.

1.5 Utilità dello studio della logica per lo sviluppo delle scienze

Diamo di seguito delle motivazioni sull'utilità dello studio della logica per uno scienziato o per un amante della conoscenza.

1.5.1 Una possibile obiezione allo studio di un corso di logica

Una possibile obiezione allo studio della logica è il suo carattare astratto e lontano dai saperi scientifici. Una prova a supporto di ciò può apparire il fatto che non compare come materia di studio negli insegnamenti pre-universitari.

Uno quindi potrebbe può dire: "**a me interessano solo le verità di alcune teorie scientifiche particolari**" come

- la **teoria dei sistemi operativi e delle reti** (in informatica)
- la **teoria delle equazioni differenziali** (in matematica)
- la **teoria delle stringhe** (in fisica)
- la **teoria della dottrina cristiana** (in teologia)
- etc....

e "mi interessano eventuali applicazioni di queste teorie all'intelligenza artificiale"!

Ma allora: *ha senso studiare logica pura oltrechè teorie?* Sì per questi motivi

- I **paradossi logici** sono **falsi** in **ogni** teoria scientifica.
- le scienze devono dare per scontato le **VERITÀ LOGICHE**.

In altre parole nel momento in cui uno scienziato studia una certa teoria è bene che abbia presente le verità logiche e i paradossi in modo da non perdere tempo a verificarli, in quanto le verità logiche sono valide a priori (e basta la logica per riconoscerle) e i paradossi sono falsi a priori. Quindi, ha senso che uno scienziato verifichi la validità di asserzioni tramite **DEDUZIONI LOGICHE** all'interno della sua teoria solo se queste asserzioni rientrano tra le **opinioni logiche** (quindi nè verità logiche, nè paradossi).

Ad esempio, non ha senso che un informatico provi a **costruire un programma che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sè**.

Concludiamo dicendo che il corso di logica che tratteremo dà pure un contributo scientifico concreto e specifico alla scienza dell'informazione perchè *offre le basi per rendere la logica applicabile all'intelligenza artificiale*.

1.6 Come affrontare l'esame di logica

È *indispensabile* fare molti esercizi, poichè l'esame si basa soprattutto sul **ragionamento** e non sulla **memoria**.

1.6.1 Difficoltà del corso

Lo studio della logica è molto astratto, più della matematica ....

In **logica**, come in **matematica**
non si sa **di cosa si parla**
nè se **ciò di cui si parla** sia **vero**.
(Russell)

2 Prerequisiti del corso: saper ragionare (ovvero nessuno!)

Questo corso propone una riflessione sul modo di ragionare e quindi il solo prerequisito per seguirlo è di essere dotati di raziocinio. L'assunzione filosofica da cui partiamo è che in quanto essere umani **siamo già logici per natura**.

La **prova** psicologica che **la logica in quanto capacità di dedurre è un esercizio specifico del nostro essere animali razionali** è data dai seguenti fatti:

- **ridiamo delle barzellette**: se non si sa usare la logica o se non si sanno fare deduzioni, non si può ridere di certe barzellette;
- **riconosciamo i paradossi**: se non si usa la logica, non si riesce a riconoscere che certe affermazioni sono contraddittorie.

Mettiamoci dunque alla prova con una barzelletta ...

Esempio di barzelletta "deduttiva".

Ci sono due compagni, Bepi e Toni. Sono al bar, e passano al tempo a guardare la gente.

Son li che bevono. Entra un signore, e Bepi dice:

"Io non sono proprio capace di capire che mestiere fa quello lì."

"Ah, dice Toni, nemmeno io."

Questo signore ad un certo punto dopo essersi bevuto qualcosa va al bagno ma c'e' la fila. Allora Bepi dice:

"Beh, aspetta che lo seguo, così mentre aspetta mi permetto di domandarglielo."

Così fa, e gli domanda: "Mi scusi, lei, che mestiere fa?"

E quello: "Io sono un logico."

"Ah sì? E che cosa vuol dire?"

"Ah guardi, è una cosa complicata da spiegare, ci vuole un intero corso universitario per capirlo, oppure bisognerebbe leggere un libro intero. Anzi, le consiglio *Istruzioni per un robot* di un certo Giovanni Sambin. Si pensi che è così divertente che vi si raccontano barzellette sui logici. Ma se lei desidera, posso comunque darle un'idea con un esempio."

"Ah, comprerò certamente il libro, ma sono così curioso che voglio sentire anche l'esempio."

"Bene. Lei ce l'ha un acquario?"

"Beh, in effetti sì, capita che io abbia un acquario."

"Vede, da questo, con la logica, io **deduco** che le piacciono i pesci."

"Ah, caspita, è proprio vero."

"Vede, io allora **deduco** con la logica che lei ama la natura."

"Ah, è proprio vero, certamente io amo la natura."

"Vede, e da questo, sempre con la logica, io **deduco** che lei ama le donne."

"Ah, è proprio pazzesco ... Allora ho capito."

Esce, torna da Toni che gli chiede "Ti ha detto che mestiere fa?"

"Sì, fa il logico."

"Ah sì, e che cosa vuol dire che fa il logico?"

"È difficilissimo, bisogna leggere un libro sulle barzellette, però ti posso spiegare con un esempio."

"Va beh, fammi l'esempio."

"Tu ce l'hai un acquario? "

"Io? no."

"Beh, allora ti piacciono solo i maschi!"

Nella precedente barzelletta l'eventuale risata dell'ascoltatore è provocata dal riconoscimento del fatto che l'**assumere valide le seguenti affermazioni**

Aq $\Rightarrow$ **Ps**
"Ad un uomo che ha un'acquario piacciono i pesci"

Ps $\Rightarrow$ **Nt**
"Ad un uomo a cui piacciono i pesci piace la natura"

Nt $\Rightarrow$ **Dn**
"Ad un uomo a cui piace la natura allora piacciono le donne"

non comporta che è pure valida l'affermazione

non Aq $\Rightarrow$ **non Dn**
"Ad un uomo che non ha l'acquario non piacciono le donne"

che poi nella barzelletta è espresso dicendo che ad un uomo che non ha l'acquario piacciono solo gli uomini!

3 Genesi e utilità dei paradossi logici

I **paradossi logici** sono **contraddizioni** ovvero affermazioni sempre **false** per motivi puramente logici.

Ad esempio se asseriamo

"**Napoleone è morto il 4 maggio 1821.**"

diciamo una falsità storica (perchè Napoleone è morto il 5 maggio dello stesso anno secondo le fonti storiche) ma non una falsità logica.

Invece se diciamo

"**Napoleone lodava tutte le persone che non lodavano se stesse e soltanto loro.**"

diciamo una falsità logica visto che questa asserzione è una variante del paradosso dell'esercizio 9. Per capirlo basta chiedendersi: Napoleone lodava o no se stesso?

Risposta: se rispondiamo che Napoleone lodava se stesso allora, siccome lodava soltanto le persone che non si lodavano, dobbiamo concludere che non si lodava, contraddizione; dall'altro canto se rispondiamo che Napoleone non lodava se stesso allora ne segue che si lodava e quindi di nuovo troviamo una contraddizione. Questi ragionamenti ci portano a concludere che l'asserzione

"**Napoleone lodava tutte le persone che non lodavano se stesse e soltanto loro.**"

è falsa perchè contraddittoria ed è pure una falsità logica in quanto la contraddittorietà dell'asserzione rimane sia che l'affermiamo di Napoleone o di chiunque altro.

Invece se diciamo

"Posto che **Napoleone è nato nel 1769 e morto nel 1821** allora **ha vissuto piú di 53 anni**."

diciamo una falsità extra-logica (in particolare aritmetica e storica) che NON è una falsità logica perchè sebbene la premessa sia vera storicamente, ovvero che Napoleone sia nato nel 1769 e morto nel 1821, poi occorre fare un calcolo con i numeri naturali per sapere se *ha vissuto piú di 53 anni* e ciò non è vero in quanto 1821 meno 1769 fa 52 (qui che sia Napoleone soggetto della premessa o chiunque altro poco importa perchè l'affermazione é scorretta per un conto aritmetico!) e quindi al massimo ha vissuto 52 anni.

Di contro l'asserzione

"Posto che **Napoleone è nato nel 1769 e morto nel 1821** allora **ha vissuto almeno 51 anni**."

è una verità extra-logica aritmetica (anche qui che sia Napoleone soggetto della premessa o chiunque altro poco importa, perchè l'affermazione é corretta per un conto aritmetico!).

Infine l'asserzione

"Posto che **Napoleone è nato nel 1769 e morto nel 1821** allora **ha vissuto più di 52 anni**."

potrebbe essere una verità extra-logica ma non puramente aritmetica perchè per decidere la sua verità occorre sapere in che giorni Napoleone è nato e morto dato che la premessa non dice se Napoleone è morto prima o dopo aver compiuto 52 anni. Siccome da fonti storiche sappiamo che Napoleone è nato in agosto e morto in maggio di conseguenza l'asserzione è una falsità extra-logica (storico e aritmetica).

Ora vogliamo analizzare meglio alcuni paradossi: vedremo che essi nascono dal tentativo di identificare livelli diversi di riferimento della nostra attività raziocinante che invece devono essere tenuti distinti per evitare contraddizioni.

Infine accenneremo al fatto che i paradossi sono molto utili nello studio della logica e delle teorie scientifiche per capire cosa una teoria NON può dimostrare.

3.1 Superiorità dell'uomo sulla macchina

Un'attenta analisi dell'asserzione paradossale "**Ogni bravo informatico può costruire un programma che attiva tutti e soli i programmi che non si attivano da sè**" porta a concludere che non si può ridurre la nostra attività del dedurre ad un unico livello, che nell'asserzione menzionata è quello del programmare, ovvero porta a concludere la **superiorità del raziocinio umano sul concetto di macchina/programma come attualmente concepito**.

3.2 Quale è la causa del paradosso di Russell?

Ora notiamo che la causa del paradosso di Russell

"**Nel villaggio di Cantù c'è un unico barbiere che rade tutti e soli gli uomini che non si radono da sè**."

è simile a quella dell'esercizio 9. e consiste nell'identificazione di due livelli:

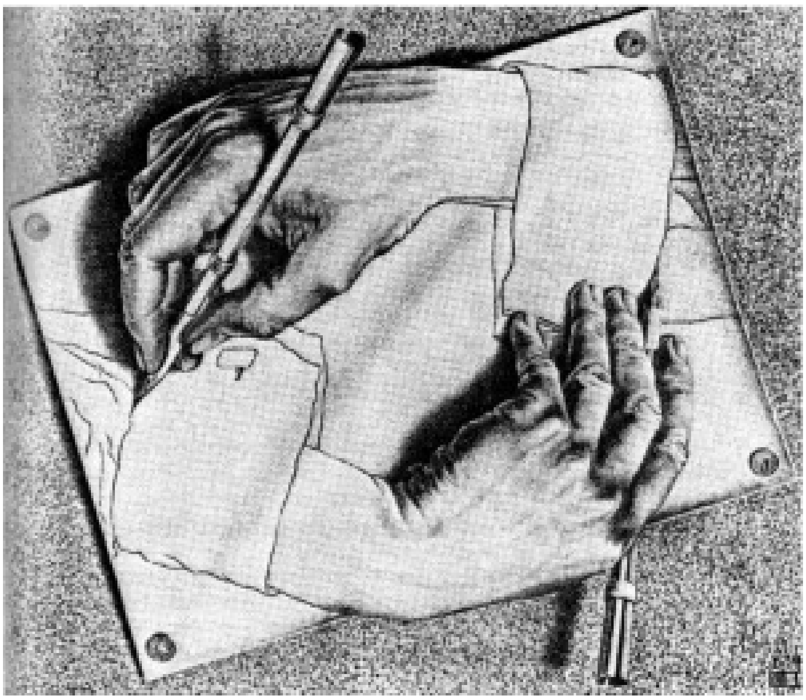
livello 1 — **barbiere soggetto** dell'azione "radere" quelli che "non si radono" (che a posteriori non può essere anche oggetto)

livello 2 — **cliente oggetto** dell'azione "radere" (che a posteriori non può coincidere con il barbiere!)

Ovvero: **barbiere** = **cliente** dà contraddizione.

3.3 Esempio di paradosso in pittura

L'opera "Mani che disegnano" di Escher (1948)



rappresenta un paradosso la cui causa è pure l'identificazione di due livelli:

livello 1 — **mano** solo **soggetto** dell'azione "disegnare"

livello 2 — **disegno** solo **oggetto** dell'azione "disegnare".

3.4 Paradosso del mentitore e i livelli di astrazione

Il famoso paradosso del mentitore ci insegna che quando ragioniamo ci sono sempre vari **livelli** di **riferimento**.

Prima di introdurre il paradosso, il lettore risponda a questa domanda

"*Questa proposizione è falsa.*"

può essere vera?

Vediamo un pò cosa rispondere...

1. La proposizione "**Questa proposizione è falsa.**" è **vera** se e solo se quel che dice è vero, ossia che essa è **falsa**, e quindi non può essere **vera**.
2. La proposizione "**Questa proposizione è falsa.**" è **falsa** dunque quel che dice è vero e risulta quindi vera, da cui si conclude che non può essere nemmeno **falsa**.

Quindi concludiamo che la proposizione "**Questa proposizione è falsa.**" non può essere nè **vera**, nè **falsa**. Dunque di fronte alla domanda:

"*La proposizione:* "**Questa proposizione è falsa.**" *puó essere* **vera** *o* **falsa**."		
corretto	**sì**	**no**

la risposta è NO perchè l'asserzione "*La proposizione:* "**Questa proposizione è falsa.**" *puó essere* **vera** *o* **falsa**." è contraddittoria, ovvero un paradosso.

Tale paradosso nasce dall'identificazione di questi livelli:

– livello 1: valutazione di **vero** o **falso** da parte nostra (**livello metalinguistico**)

– livello 2: valutazione di **vero** o **falso** da parte della proposizione stessa come suo contenuto semantico (**livello linguistico**)

3.5 Il caso giudiziario Protagora-Evatlo

Riportiamo qui il celebre caso giudiziario avente come protagonisti Protagora ed Evatlo.

Il celebre sofista Protagora aveva accolto come discepolo Evatlo convenendo con lui che gli avrebbe pagato le lezioni quando avesse vinto la prima causa in tribunale.

Terminato il corso di studi, Evatlo non si decideva ad intraprendere l'attività forense e Protagora stanco di attendere il suo onorario, intentò causa al suo ex allievo il quale decise, apparentemente in modo avventato, di assumere personalmente la propria difesa.

Dilemma di Protagora.

Protagora disse

Se Evatlo perde questa causa **allora dovrà pagarmi in forza della sentenza del tribunale.** **Se invece Evatlo vince questa causa** **allora dovrà pagarmi ugualmente, in forza del nostro accordo.** **Ora, o Evatlo perderà o vincerà.**
Dunque, finalmente, Evatlo dovrà pagarmi.

Controdilemma di Evatlo.

Evatlo replicò al maestro con un controdilemma:

Se io vinco questa causa **allora non ti dovrò pagare in forza della sentenza del tribunale.** **Se invece la perdo** **allora non ti dovrò pagare in forza del nostro accordo.** **Ora le possibilità sono due:** **o vinco o perdo questa causa.**
Dunque, non ti dovrò pagare.

Chi ha ragione? Evatlo o Protagora? Per rispondere consideriamo i 2 casi possibili, ovvero che sia Evatlo a vincere la causa o che sia Protagora a vincerla.

Caso 1: Evatlo vince la causa (`prima lettura`):

Nel caso **Evatlo vincesse la causa**, allora Evatlo dovrebbe pagare in virtù dell'**accordo**, ma non dovrebbe pagare in virtù della **sentenza**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo non vince la causa** ovvero **il caso 1 non è possibile**.

caso 2: Evatlo non vince la causa (`prima lettura`):

Nel caso **Evatlo perdesse la causa**, allora Evatlo deve pagare in virtù della **sentenza**, ma non deve pagare in virtù dell'**accordo**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo vince la causa**. Ma ciò non è possibile perchè ci riporta al caso 1 che abbiamo detto non essere verificabile. Dunque concludiamo che **Evatlo nè vince nè perde** la causa. Dove sta l'errore?

Caso 1: Evatlo vince la causa (`ad una lettura più attenta`):

Nel caso **Evatlo vincesse la causa** e *l'accordo tra Protagora ed Evatlo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria*, allora Evatlo dovrebbe pagare in virtù dell'**accordo**, ma non dovrebbe pagare in virtù della **sentenza**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo non vince la causa**, però **assumendo** che **l'accordo tra Protagora ed Evatlo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria**.

Caso 2: Evatlo non vince la causa (`ad una lettura più attenta`):

Nel caso **Evatlo non vincesse la causa** e *l'accordo tra Protagora ed Evatlo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria*, allora Evatlo deve pagare in virtù della **sentenza**, ma non deve pagare in virtù dell'**accordo**. **Contraddizione!**

Quindi **Evatlo vince la causa**. Ma sappiamo che se **Evatlo vince la causa**, si ricade nel caso 1 e allora di nuovo troviamo una **contraddizione!**

Cosa concludiamo?

3.5.1 Conclusione del caso giudiziario Protagora-Evatlo

(`ad una lettura più attenta`):

Nel caso *l'accordo tra Protagora ed Evatlo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria*, **sia che Evatlo vinca la causa sia che la perda**, si arriva ad una **contraddizione**.

Dunque, dando per scontato che il giudice emetta una sentenza, allora *l'accordo tra Protagora ed Evatlo* **non** *può essere rispettato dopo la sua emissione.*

In altre parole, nessuno dei due ha ragione, se si suppone che l'accordo possa essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria.

Ora per verificare la comprensione di quanto sopra, si esegua questo test di comprensione:

> *Nel caso giudiziario Evatlo/Protagora l'accordo tra Protagora ed Evatlo può essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria.*
>
> corretto sì no

Chiaramente ora la risposta è "no" perchè l'asserzione

Nel caso giudiziario Protagora-Evatlo l'accordo tra Protagora ed Evatlo può essere rispettato dopo che è stata emessa la sentenza giudiziaria.

è una affermazione contraddittoria, ed è quindi una **falsità logica**.

3.5.2 Quale è la causa del paradosso giudiziario Protagora-Evatlo?

La contraddizione del paradosso giudiziario nasce dall'assumere che **il rispetto dell'accordo Protagora/Evatlo** permanga dopo l'emissione della **sentenza** ovvero che entrambi i livelli:

livello 1 — **rispetto accordo**

livello 2 — **sentenza**

siano **entrambi validi**.

Invece, se si assume valido il livello **sentenza** senza assumere come valido anche il livello **rispetto dell'accordo**, si **elimina la contraddizione**.

3.6 Utilità dei paradossi per le scienze

Nello studio delle teorie scientifiche i paradossi sono molto utili per scoprire ciò che una teoria (formale) **non** può dire... Ad esempio ragionando come segue: se una certa assunzione all'interno di una teoria porta ad un paradosso, allora nella teoria in questione l'assunzione risulta falsa.

Per esempio, oltre all'esercizio 9. del test iniziale esistono altre **istanze del paradosso di Russell** che forniscono interessanti risultati per l'**informatica**: usando la forma logica del **paradosso di Russell** si dimostra che è **irrisolubile** il famoso **problema della fermata di un programma** (che lo studente di informatica studierà nel corso di computabilità), ovvero che "**non esiste un programma che sappia decidere se ogni programma (compreso sè stesso) termina o no su un dato input**".

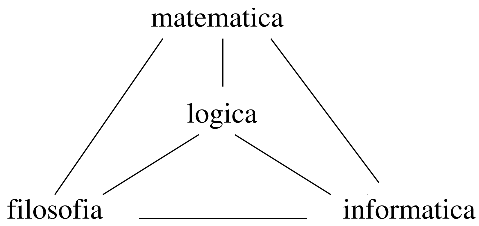
Possiamo accennare anche ad un'applicazione in **matematica** dell'uso dei paradossi: usando la forma logica del **paradosso del mentitore** si dimostra che la **teoria dell'aritmetica di Peano non può dimostrare** che **lei stessa non è contraddittoria**, ovvero che non deduce come vere delle falsità (secondo teorema di incompletezza di Goëdel).

3.7 Come costruire paradossi?

Una volta scoperta la **forma logica** di un paradosso, se ne possono costruire di simili cambiando i costituenti senza cambiare la forma.... Quindi, per riconoscere i paradossi, è conveniente iniziare a studiare la **forma logica** delle frasi che sarà il primo argomento del nostro corso di logica.

4 La Logica come base di ogni scienza

La **Logica** è alla **base di ogni scienza (o teoria)** in quanto è **fondamento di ogni scienza** non tanto per i contenuti specifici ma per la loro articolazione **deduttiva**.



Infatti la logica si occupa di riconoscere la verità di un enunciato non tanto in quanto corrisponde ad uno stato del mondo (come avviene per le scienze) quanto di stabilire le **condizioni di verità** di un enunciato a partire da altri basandoci solo sulla sua **forma logica** espressa in un *LINGUAGGIO FORMALE*.

Prima di introdurre il linguaggio formale cerchiamo di capire cosa sia una forma logica di un enunciato intuitivamente.

5 Alla ricerca della forma logica

Intuitivamente la forma logica di una proposizione è la struttura astratta dei legami logici delle proposizioni semplici che la compongono.

Ad esempio la proposizione dell'asserzione

Ammesso che
"**se piove, i canali interni vengono chiusi**",
allora, è vero che
"**se i canali interni non vengono chiusi, allora non piove**"

è complessa ed è composta dalle seguenti proposizioni semplici: "**piove**" e "**i canali interni vengono chiusi**" legate logicamente tramite "ammesso che", e "allora è vero che".

La proposizione della seguente asserzione ha la stessa forma logica della precedente

È vero che
"**se il tuo vicino di banco non è Napoleone**
ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano"
ammesso che
"**se la radice quadrata canta alla Scala di Milano**
allora il tuo vicino di banco è Napoleone".

e ha pure la stessa forma e contenuto dell' **esercizio 3. del test**.

Mentre l'asserzione

"È vero che **c'è silenzio**
se **tutti dormono**
ed se è vero che
se tutti dormono c'è silenzio."

ha la stessa forma di

"Ammesso che **Tizio ama Caio**
e che **se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio.**
ne segue che **Caio ama Tizio**".

Ora introduciamo un modo più semplice per fare asserzioni complesse come quelle sopra.

Si noti che nelle asserzioni sopra, c'è sempre una *conclusione* (per esempio **Caio ama Tizio** nell'asserzione immediatamente sopra) che segue da delle proposizioni assunte come vere, dette *premesse*, (nell'asserzione immediatamente sopra le premesse sono **Tizio ama Caio** e **se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio**).

Ora indichiamo tali asserzioni complesse mettendo le premesse in lista sopra una linea che separa la conclusione come segue: scriviamo

$$\frac{\begin{array}{l}\textbf{Tizio ama Caio.}\\ \textbf{Se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio.}\end{array}}{\textbf{Caio ama Tizio.}}$$

come forma concisa per

"Ammesso che **Tizio ama Caio** e che **se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio** ne segue che **Caio ama Tizio**".

Altro esempio: scriviamo

$$\frac{\begin{array}{l}\textbf{Tutti dormono.}\\ \textbf{Se tutti dormono c'è silenzio.}\end{array}}{\textbf{C'è silenzio.}}$$

come forma concisa per

" È vero che "**c'è silenzio**" se **tutti dormono** ed se è vero che **se tutti dormono c'è silenzio.**"

5.1 Necessità di un linguaggio formale

Per descrivere la **forma logica** di una frase si definisce un **linguaggio formale** (o **linguaggio simbolico**).

Ogni *linguaggio di programmazione* è un *esempio* di *linguaggio formale.*

Prima di introdurre il concetto di linguaggio formale torniamo sulla distinzione tra livelli di riferimento (per approfondimento il lettore legga il capitolo 1 del libro di Sambin "**Per Istruire Un Robot**: **(ovvero, come costruirsi una logica)**.").

5.1.1 Livelli di riferimento in un programma

Nel programma

$$\begin{array}{l} y = 1; \\ z = 0; \\ \texttt{while} \quad (z \neq x) \quad \{ \\ \qquad\qquad z \;=\; z+1 \\ \qquad\qquad y \;=\; y*z; \\ \quad \} \end{array}$$

quanti **livelli** di **astrazione** o **riferimento** ci sono?

1. **codice del programma**, ⇒ livello del "**linguaggio**" cioè **sintassi**;

2. **commento/verifica** di ciò che fa, $\Rightarrow$ livello del **metalinguaggio** cioè **SEMANTICA**.

5.2 Livelli di riferimento nel corso

Nel nostro corso parleremo di almeno 2 livelli di riferimento in relazione ai linguaggi formali:

1. livello del **linguaggio formale — sintassi**
2. livello del **metalinguaggio/nostro linguaggio naturale — semantica**

Il livello del **linguaggio formale** è costituito da simboli ed espressioni del linguaggio che possiamo associare in modo specifico ad una MACCHINA o ROBOT.

Invece il livello del **metalinguaggio** è dato dal significato dei simboli ed espressioni del precedente livello che è assegnato da NOI in modo specifico.

Ricordiamo che dobbiamo operare una netta distinzione tra tali livelli di riferimento per non incorrere in paradossi.

5.3 UNIVERSALITÀ del linguaggio logico formale

Il linguaggio formale utilizzato per rappresentare le formule logiche è **UNIVERSALE** nel senso che non fa riferimento a nessun lingua parlata ma anzi potrebbe essere utilizzato per costruire traduttori automatici tra lingue diverse.

5.4 Spiegazione del carattere ASTRATTO della LOGICA

Ora possiamo capire meglio la citazione di Russell

In **logica**, come in **matematica**
non si sa **di cosa si parla**
nè se **ciò di cui si parla** sia **vero**.

ricordando che lo scopo della logica è di introdurre un **linguaggio simbolico** per studiare la **FORMA** degli enunciati **SENZA RIFERIMENTO** al contenuto semantico specifico dei loro componenti atomici.

Ad esempio l'argomentazione

$$\frac{\textbf{Nessun falipo è goloso e Giove è un falipo.}}{\textbf{Giove non è goloso.}}$$

è valida logicamente, come l'esercizio 3. del test anche se la parola "falipo" non compare nel vocabolario italiano, nè sappiamo se abbia senso attribuirgli l'aggettivo "goloso".

6 Linguaggio formale proposizionale

Costituenti delle nostre asserzioni sono le proposizioni, ove con proposizione si intende un enunciato in un determinato linguaggio, non solo dotato di senso ma anche di valore di verità (per approfondimento si rimanda al capitolo 1. del libro di Sambin). La logica formale studia le forme logiche delle proposizioni e la loro validità.

Ora introduciamo un linguaggio formale contenente segni per denotare le **PROPOSIZIONI** che si distinguono in atomiche e composte.

A tal fine usiamo le lettere dell'alfabeto

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \ldots, \mathbf{Z}$$

come NOMI per indicare proposizioni ATOMICHE qualsiasi in modo **ASTRATTO**. Nel gergo formale $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \ldots, \mathbf{Z}$ si dicono **VARIABILI PROPOSIZIONALI**.

A partire dalle **variabili proposizionali**

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \ldots, \mathbf{Z}$$

costruiamo proposizioni composte usando i segni di
connettivo unario della **negazione**

$$\neg$$

connettivo binario dell' **implicazione**

$$\rightarrow$$

connettivo binario della **congiunzione**

$$\&$$

connettivo binario della **disgiunzione**

$$\vee$$

6.1 Grammatica delle proposizioni formali

Una proposizione formale

$$\mathtt{pr}$$

(che è una META-variabile per indicare una proposizione formale generica)

è una stringa di simboli ottenuti in tal modo:
$\mathbf{pr} \equiv \mathbf{A}$ oppure $\mathbf{pr} \equiv \mathbf{B}$ oppure una qualsiasi variabile proposizionale, che noi abbiamo fissato essere una lettera dell'alfabeto;
oppure **pr** coincide con una delle seguenti proposizioni ottenute da altre due generiche proposizioni $\mathbf{pr_1}$ e $\mathbf{pr_2}$ come segue:

$(\mathbf{pr_1})\&(\mathbf{pr_2})$ che sta per $\mathbf{pr_1}$ **e** $\mathbf{pr_2}$
$(\mathbf{pr_1})\vee(\mathbf{pr_2})$ che sta per $\mathbf{pr_1}$ **o** $\mathbf{pr_2}$
$(\mathbf{pr_1})\rightarrow(\mathbf{pr_2})$ che sta per **se** $\mathbf{pr_1}$ **allora** $\mathbf{pr_2}$
ovvero $\mathbf{pr_1}$ **implica** $\mathbf{pr_2}$
$\neg(\mathbf{pr_1})$ che sta per **NON si dà il caso che** $\mathbf{pr_1}$

6.2 ATTENZIONE: come mettere il minimo numero di parentesi

Nello scrivere le proposizioni simboliche *possiamo eliminare le parentesi* dalle *variabili proposizionali* e dalle rimanenti formule CONVENENDO che $\neg$ si lega alla formula più vicina più di ogni altro connettivo senza bisogno di parentesi, seguito a pari merito da $\vee, \&$, che a loro volta sono legate alle formule più di $\rightarrow$.
Ovvero

$\neg$ **lega più di** $\vee, \&$ **legano più di** $\rightarrow$

Esempi:

"**(negazione** di **A) e B**"
si scrive

$$\neg\mathbf{A}\&\mathbf{B}$$

"**negazione** di **(A e B)**"
si scrive

$$\neg(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$$

"la **(negazione** di A **) implica (** B **e** C **)**"
si scrive

$$\neg\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\&\mathbf{C}$$

"la **negazione** di **((** A **implica** B **) e** C **)** "
si scrive

$$\neg(\,(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\&\mathbf{C}\,)$$

6.3 Cosa traducono & ed $\rightarrow$

Si noti che la congiunzione $\mathbf{pr_1}\&\mathbf{pr_2}$ traduce legami tra $\mathbf{pr_1}$ e $\mathbf{pr_2}$ del tipo

$\mathbf{pr_1}$ *e* $\mathbf{pr_2}$	$\mathbf{pr_1}$ *perchè* $\mathbf{pr_2}$	$\mathbf{pr_1}$ *mentre* $\mathbf{pr_2}$
$\mathbf{pr_1}$ *però* $\mathbf{pr_2}$	$\mathbf{pr_1}$ *quindi* $\mathbf{pr_2}$	$\mathbf{pr_1}$ *ma* $\mathbf{pr_2}$

mentre l' *implicazione* $\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2}$ traduce legami del tipo

se $\mathbf{pr_1}$ *allora* $\mathbf{pr_2}$	$\mathbf{pr_1}$ *solo se* $\mathbf{pr_2}$
$\mathbf{pr_2}$ *se* $\mathbf{pr_1}$	*solo se* $\mathbf{pr_2}$ *vale* $\mathbf{pr_1}$

Trucco *per tradurre il* **solo se**

- riscrivere la frase *togliendo* il *"solo"*

- tradurre la frase ottenuta usando l'implicazione

- se la frase ottenuta è $\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2}$ allora la traduzione della frase iniziale si trova *SCAMBIANDO antecedente* con *conseguente*, ovvero scrivendo $\mathbf{pr_2} \rightarrow \mathbf{pr_1}$

6.4 Esempi di proposizioni simboliche

1. La proposizione
   "**Oggi è venerdì e domani è sabato**"
   ha la forma logica di congiunzione di due proposizioni

   $$\mathbf{V} \& \mathbf{S}$$

   ove
   V="**Oggi è venerdì**"
   S= "**domani è sabato**"

2. "Oggi è venerdì e domani è sabato, mentre dopodomani è domenica" si può formalizzare così

   $$(V \& S) \& D$$

   ove
   V="Oggi è venerdì"
   S="domani è sabato"
   D="dopodomani è domenica"

   (si noti che "mentre" ha lo stesso significato di una &)

3. "Solo se piove prendo l'ombrello"

   si può formalizzare così

   $$O \rightarrow P$$

   ove
   O = prendo l'ombrello e P = piove.

   (Si noti che il fatto che "piova" è la condizione NECESSARIA affinchè io porti l'ombrello...).

4. "Il programma fattoriale termina sull'input 5 perchè ad un certo punto la condizione del `while` diventa falsa."

   si può formalizzare così

   $$F \& T$$

   ove
   F="ad un certo punto la condizione del `while` diventa falsa"
   T="Il programma fattoriale termina sull'input 5"

5. “Solo se ad un certo punto la condizione del `while` diventa falsa allora il programma fattoriale termina sull’input 5.”

   si può formalizzare così
$$T \to F$$

6. “Se ad un certo punto la condizione del `while` diventa falsa allora il programma fattoriale termina sull’input 5.”

   si può formalizzare così
$$F \to T$$

7. “Se e solo se ad un certo punto la condizione del `while` diventa falsa allora il programma fattoriale termina sull’input 5.”

   si può formalizzare così
$$(F \to T)\ \&\ (T \to F)$$

8. “Ad un certo punto la condizione del `while` diventa falsa e quindi il programma fattoriale termina sull’input 5.”

   si può formalizzare così
$$F \& T$$

   (si noti che la frase sopra esprime non solo che vale $F\&T$ ma anche c‘è un legame causale tra T ed F, ovvero che F implica T, ovvero che vale $F \to T$ oltrechè F da cui segue T).

   Si noti che da 5) in poi le lettere F e T stanno ad indicare le proposizioni come in 3).

6.5 Formalizzazione di enunciati con premesse e conclusioni

Diamo ora la formalizzazione logica di enunciati più complessi come quelli in sezione 5 ove una conclusione segue da una o più premesse.

Ad esempio l’asserzione

“È vero che **se il treno è in ritardo i viaggiatori non sono contenti** se si assume che **se i viaggiatori son contenti allora il treno non è in ritardo**”.

si può formalizzare come UNICO enunciato formale in

$$(V \to \neg R) \to (R \to \neg V)$$

ove
V=”**i viaggiatori sono contenti**”
R=“**il treno è in ritardo**”

ma grazie alla convenzione nella sezione 5 possiamo anche più semplicemente formalizzarlo in tal modo

$$\frac{V \to \neg R}{R \to \neg V}$$

Diamo di seguito la formalizzazione di altre asserzioni:

1. L'asserzione

   "È vero che **non si dà il caso che non ci sia silenzio** se **tutti dormono** e se è vero che **se tutti dormono c'è silenzio**."

   si può formalizzare in

   $$D\&(D \rightarrow S) \ \rightarrow \ \neg\neg S$$

   e secondo la convenzione in sezione 5 in

   $$\begin{array}{l} D \\ D \rightarrow S \\ \hline \neg\neg S \end{array}$$

   ove

   $D=$ "**tutti dormono**"
   $S=$"**c'è silenzio**"

2. L'asserzione

   "Ammesso che **Tizio ama Caio** e che **se Tizio ama Caio allora Caio ama Tizio** ne segue che **Caio ama Tizio**".

   si può formalizzare in

   $$T\&(T \rightarrow C) \ \rightarrow \ C$$

   e secondo la convenzione in sezione 5 in

   $$\begin{array}{l} T \\ T \rightarrow C \\ \hline C \end{array}$$

   ove
   $T=$ "**Tizio ama Caio**"
   $C=$"**Caio ama Tizio**"

3. L'asserzione

   "Ammesso che **se piove, i canali interni vengono chiusi**, allora, è vero che **se i canali interni non vengono chiusi, allora non piove**".

   si può formalizzare in

   $$(P \rightarrow C) \ \rightarrow \ (\neg C \rightarrow \neg P)$$

   e secondo la convenzione in sezione 5 in

   $$\begin{array}{l} P \rightarrow C \\ \hline \neg C \rightarrow \neg P \end{array}$$

   ove
   $P=$ "**piove**"
   $C=$"**i canali interni vengono chiusi**"

4. L'asserzione

   "È vero che **c'è silenzio** se **tutti dormono** e se è vero che **se tutti dormono c'è silenzio**."

   si può formalizzare in

   $$D\&(D \rightarrow S) \ \rightarrow \ S$$

   e secondo la convenzione in sezione 5 in

   $$\begin{array}{l} D \\ D \rightarrow S \\ \hline S \end{array}$$

   ove

   $D=$ "**tutti dormono**"
   $S=$"**c'è silenzio**"

5. l'asserzione

   "È vero che **se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano** se si suppone che **se la radice quadrata canta alla Scala di Milano allora il tuo vicino di banco è Napoleone**"

   si può formalizzare in

   $$(C \rightarrow N) \ \rightarrow \ (\neg N \rightarrow \neg C)$$

   e secondo la convenzione in sezione 5 in

   $$\begin{array}{l} C \rightarrow N \\ \hline \neg N \rightarrow \neg C \end{array}$$

   ove
   $N=$ "**il tuo vicino di banco è Napoleone**"
   $C=$"**la radice quadrata canta alla Scala di Milano**"

Come si vede sopra le proposizioni in 3) e 5) hanno la stessa forma logica (a meno di variabili proposizionali), e così pure 2) e 4).

6.6 Alla ricerca della verità

Ricordando che la **Logica** si occupa di studiare la **verità** di un'argomentazione o proposizione **SOLTANTO** in base alla sua **forma logica** definiamo allora la **verità** di una **proposizione**.

Precisiamo inoltre che propriamente una **proposizione** è tale se oltre ad essere una successione di segni dotati di significato abbiamo anche un *criterio* per *stabilire se la proposizione è* **vera** *o* **falsa**.

Ricordiamo ad esempio che

"**Questa proposizione è falsa**"

NON è una proposizione propriamente, in quanto non può essere nè vera nè falsa come argomentato in sezione 3.4.

Altri esempi e controesempi di proposizioni sono i seguenti:

"**In biblioteca al piano interrato c'è l'ultimo numero di Topolino**"
è una proposizione perchè posso verificare la sua verità andando in biblioteca.

"**La radice quadrata canta alla Scala di Milano.**"
non è una proposizione perchè non ha senso e non posso quindi stabilire il suo valore di verità.

6.6.1 Nel corso di logica studiamo solo giudizi assertivi

Un **giudizio** è l'atto di dichiarare una proposizione e vi sono DIVERSI tipi di giudizio:

assertivo= la proposizione è asserita vera
ad es. "**Mario studia.**"

interrogativo= s'interroga sulla verità della proposizione
ad es."**Mario studia?**"

direttivo= la proposizione esprime un'ordine da eseguire
ad es. "**Studia, Mario!**"

esclamativo= la proposizione esprime un'esclamazione.
ad es. "**Mario studia!**"

Nel corso di logica studiamo soltanto i **giudizi assertivi** in cui **asseriamo certe proposizioni** come **VERE**.

Altro esempio di giudizio assertivo: affermo che "**il numero 3 è dispari**" oppure semplicemente "**il numero 3 è dispari**"

6.7 Verità classica di una proposizione

Per stabilire quando una proposizione formale è vera ci serviamo delle **tabelle di verità**. A tal scopo ad ogni proposizione formale **pr** costruita tramite COMPOSIZIONE di connettivi logici

$$\mathbf{pr} \equiv \mathbf{comp}(\mathbf{V_1}, \ldots, \mathbf{V_n})$$

a partire dalle proposizione atomiche $\mathbf{V_1}, \ldots \mathbf{V_n}$ associamo una funzione

$$\mathtt{Tab}_{\mathbf{comp}(\mathbf{V_1},\ldots,\mathbf{V_n})} \ : \ \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$$

rappresentata dalla tabella di verità

V_1	V_2	$\ldots$	V_n	$\mathbf{comp}(\mathbf{V_1}, \ldots, \mathbf{V_n})$
0	1	$\ldots$	$\ldots$	$\mathbf{c_1}$
0	0	$\ldots$	$\ldots$	$\mathbf{c_2}$
1	1	$\ldots$	$\ldots$	$\mathbf{c_3}$
1	0	$\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

che associa a $\mathbf{comp}(\mathbf{V_1}, \ldots, \mathbf{V_n})$ un valore IN USCITA $\mathbf{c_i}$ che può solo essere **1** (per **vero**) oppure **0** (per **falso**) al variare delle combinazioni di valori **0** e **1** associate alle proposizioni atomiche $\mathbf{V_i}$ per $\mathbf{i = 1, \ldots, n}$.

6.7.1 Come si costruisce la tabella di verità di una proposizione?

La tabella di ogni **proposizione formale pr** si costruisce **componendo** (come funzioni) le tabelle dei connettivi

$$\neg\,,\ \vee\,,\ \&\,,\ \rightarrow$$

che compongono **pr** e che definiamo di seguito.

6.7.2 Tabella di verità di ¬

si ottiene considerando che

$$\neg\mathbf{A} \quad \textbf{è vero} \qquad \textbf{sse} \qquad \mathbf{A} \quad \textbf{è falso}$$

ed è la funzione unaria

A	$\neg\mathbf{A}$
0	1
1	0

6.7.3 Tabella di verità di &

si ottiene considerando che

$$\mathbf{A\&B} \quad \textbf{è vero} \quad \textbf{sse} \qquad \mathbf{A} \quad \textbf{è vero} \quad \textbf{e} \quad \mathbf{B} \quad \textbf{è vero}$$

ed è la funzione binaria

A	B	$A\&B$
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	0

6.7.4 Tabella di verità di $\vee$

si ottiene considerando che

A$\vee$B **è vero** **sse** **A** **è vero** **o** **B** **è vero**
o **sono veri entrambi**

ed è la funzione binaria

A	**B**	**A$\vee$B**
0	1	1
0	0	0
1	1	1
1	0	1

6.7.5 Tabella di verità di $\rightarrow$

si ottiene considerando che

A$\rightarrow$B **è vero** **sse** **$\neg$A$\vee$B** **è vero**

ed è la funzione binaria

A	**B**	**$\neg$A**	**A$\rightarrow$B**
0	1	1	1
0	0	1	1
1	1	0	1
1	0	0	0

6.7.6 VALIDITÀ CLASSICA di una proposizione

Una proposizione `pr` è **vera classicamente** sse **la tabella di verità di `pr` dà sempre** 1 **in uscita** e sinonimi di "`pr` è **vera classicamente**" sono i seguenti:

- "`pr` è **TAUTOLOGIA classica**"
- "`pr` è **VALIDA classicamente**"
- la scrittura simbolica $\models$ `pr` che si legge "`pr` **vale classicamente**".

6.7.7 Esempio di tabella di verità

La tabella di verità di (**A**$\rightarrow$**B**)$\vee$**A** si ottiene costruendo dapprima la tabella di $A \rightarrow B$ e poi combinandola con la disgiunzione con A come segue

A	B	A→B	(A→B)∨A
0	1	1	1
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	1

6.8 Proposizioni VALIDE, OPINIONI, CONTRADDIZIONI

Una proposizione `pr` si dice

VALIDA o TAUTOLOGIA in logica classica se sono 1 TUTTI i valori in uscita nella sua tabella di verità

OPINIONE in logica classica se ha ALMENO un valore 1 e ALMENO un valore 0 tra le uscite della sua tabella di verità

SODDISFACIBILE se è 1 QUALCHE valore in uscita nella sua tabella di verità

NON VALIDA se è 0 QUALCHE valore in uscita nella sua tabella di verità

CONTRADDIZIONE o **PARADOSSO** o **INSODDISFACIBILE** se sono 0 TUTTI i valori in uscita nella sua tabella di verità.

Esempi:

esempio di proposizione VALIDA: $\neg\neg(\mathbf{P}\vee\neg\mathbf{P})$.

esempio di proposizione OPINIONE: $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ visto che nella sua tabella di verità per $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ha 1 in uscita e che per $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ ha 0 in uscita

esempio di proposizione SODDISFACIBILE: $\neg\mathbf{P}$ visto che nella sua tabella di verità per $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ha 1 in uscita.

esempio di proposizione NON VALIDA: $\mathbf{P}\rightarrow\neg\mathbf{P}$ visto che nella sua tabella di verità per $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ ha 0 in uscita.

esempio di proposizione CONTRADDITTORIA: $\mathbf{P}\&\neg\mathbf{P}$

Grazie alla definizioni date classificheremo le proposizioni in tre gruppi distinti:

`pr` **TAUTOLOGIA:** =**VALIDA** = TUTTE le righe della sua tabella danno valore **1**
`pr` **OPINIONE:** = **SODDISFACIBILE**= QUALCHE riga della sua tabella dà valore **1** + **NON VALIDA**= QUALCHE riga della sua tabella dà valore **0**
`pr` **CONTRADDIZIONE/PARADOSSO:** =**INSODDISFACIBILE**= TUTTE le righe della sua tabella danno valore **0**

Si osservi che valgono le seguenti relazioni tra una proposizione e la sua negazione:

`pr` **TAUTOLOGIA**	sse	¬`pr` **PARADOSSO**
`pr` **PARADOSSO**	sse	¬`pr` **TAUTOLOGIA**
`pr` **OPINIONE**	sse	¬`pr` **OPINIONE**
`pr` **NON VALIDA**	sse	¬`pr` **SODDISFACIBILE**
`pr` **SODDISFACIBILE**	sse	¬`pr` **NON VALIDA**

ATTENZIONE che se ¬`pr` è soddisfacibile NON implica che `pr` sia insoddisfacibile come pure se `pr` è NON valida non implica che ¬`pr` sia valida.

6.8.1 Esempi di analisi della validità di proposizioni

1. (**A**→**B**)&**A** è una tautologia? Ovvero vale $\models$ (**A**→**B**)&**A** ?

   Se facciamo la tabella di verità per (**A**→**B**)&**A** otteniamo

A	**B**	**A**→**B**	(**A**→**B**)&**A**
0	1	1	0
0	0	1	0
1	1	1	1
1	0	0	0

e concludiamo che è NON VALIDA (per esempio per $A = B = 0$) $\Rightarrow$ NON è tautologia $\Rightarrow$ NON vale $\models$ $(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\&\mathbf{A}$
Concludiamo però che è soddisfacibile per $A = B = 1$.

2. Guardando la tabella di $(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\&\mathbf{A}$ concludete che $\models \neg(\ (\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\&\mathbf{A}\ )$ vale ???

   Chiaramente $\neg(\ (\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\&\mathbf{A}\ )$ è NON VALIDA (per i valori $A = B = 1$ ad esempio) e SODDISFACIBILE (per i valori $A = B = 0$).

3. vale
$$\models (\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\vee\mathbf{A} \quad ?$$

   Se facciamo la tabella di verità

A	**B**	**A→B**	**(A→B)∨A**
0	1	1	1
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	1

   otteniamo che la formula $(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\vee\mathbf{A}$ è **VERA classicamente**, $\Rightarrow$ è una **tautologia classica** $\Rightarrow$ vale $\models (\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\vee\mathbf{A}$. Chiaramente la sua negazione $\neg(\ (\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\vee\mathbf{A}\ )$ è INSODDISFACIBILE.

6.9 UGUAGLIANZA tra proposizioni

L'identità sintattica NON è il concetto più rilevante di uguaglianza tra proposizioni. L'uguaglianza tra proposizioni che ci interessa è quella che *identifica due proposizioni come* **uguali** *se hanno la stessa tabella di verità.* E quindi ci chiediamo:

quando due proposizioni formali $\mathbf{pr_1}$ *e* $\mathbf{pr_2}$ *hanno la STESSA tabella di verità?*

Innanzittutto notiamo che proposizioni sintatticamente diverse possono avere la stessa tabella di verità: per esempio

A	$\neg\mathbf{A}$
0	1
1	0

è anche la tabella di verità per $\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}$

A	$\neg A\&\neg A$
0	1
1	0

e anche per $(\ \neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}\ )\&\neg\mathbf{A}$ e per $(\ (\ \neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{A}\ )\&\neg\mathbf{A}\ )\&\neg\mathbf{A}$.

Per capire come sono relazionate tale proposizioni introduciamo il connettivo di equivalenza (o equiprovabilità).

6.9.1 Connettivo equivalenza

Indichiamo con il segno
$$\leftrightarrow$$
il connettivo **equivalenza** che è definito in tal modo: date due proposizioni formali $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$

$$\mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2 \ \equiv\ (\,\mathtt{pr}_1\rightarrow\mathtt{pr}_2\,)\ \&\ (\,\mathtt{pr}_2\rightarrow\mathtt{pr}_1\,)$$

che si legge "$\mathtt{pr}_1$ è **equivalente** a "$\mathtt{pr}_2$".

Il connettivo "equivalenza" ha quindi la seguente tabella di verità

A	**B**	**A↔B**
0	1	0
0	0	1
1	1	1
1	0	0

Questo connettivo è importante perchè cattura esattamente l'uguaglianza semantica delle tabelle di verità (ove con "sse" s'intende "se e solo se"):

Theorem 6.1 *Date proposizioni* $\mathtt{pr}_1$ *e* $\mathtt{pr}_2$*, allora*

$\mathtt{pr}_1$ *e* $\mathtt{pr}_2$ *hanno la* **stessa tabella di verità** *(contenente tutte le variabili che compaiono in entrambe)*

sse

vale $\models \mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$

e in tal caso si dice che la proposizione $\mathtt{pr}_1$ è *uguale semanticamente* a $\mathtt{pr}_2$, ovvero l'**uguaglianza semantica** di proposizioni è l' **equivalenza** di proposizioni.

6.9.2 Precisazione sull'identità sintattica

Precisiamo che consideriamo il connettivo dell'equivalenza $\mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$ come **ABBREVIAZIONE** di

$$(\,\mathtt{pr}_1 \rightarrow \mathtt{pr}_2\,)\ \&\ (\,\mathtt{pr}_2 \rightarrow \mathtt{pr}_1\,)$$

Di conseguenza diciamo che la proposizione $\mathbf{pr_1}$ è **uguale sintatticamente** a $\mathbf{pr_2}$ se le due proposizioni soddisfano una delle seguenti condizioni:

- sono proprio scritte nello stesso modo;
- oppure $\mathbf{pr_1}$ è ottenuta da $\mathbf{pr_2}$ sostituendo i nomi abbreviati con il loro significato.

Per esempio

$$A\&(B \leftrightarrow C) \text{ è uguale sintatticamente a } A\&(\ (B \rightarrow C)\ \&\ (C \rightarrow B)\ )$$

Ovviamente proposizioni *sintatticamente uguali* sono anche *semanticamente uguali*, ovvero *hanno la stessa tabella di verità* perchè la scrittura $B \leftrightarrow C$ è solo un'abbreviazione per $(B \rightarrow C)\ \&\ (C \rightarrow B)$.

6.10 Tautologie classiche

Di seguito diamo una lista di proposizioni valide classicamente e lasciamo al lettore verificare che la loro tabella di verità ha TUTTI 1 in uscita:

associatività $\vee$	$(A \vee B) \vee C$	$\leftrightarrow$	$A \vee (B \vee C)$
associatività &	$(A \& B) \& C$	$\leftrightarrow$	$A \& (B \& C)$
commutatività $\vee$	$A \vee B$	$\leftrightarrow$	$B \vee A$
commutatività &	$A \& B$	$\leftrightarrow$	$B \& A$
distributività $\vee$ su &	$A \vee (B \& C)$	$\leftrightarrow$	$(A \vee B) \& (A \vee C)$
distributività & su $\vee$	$A \& (B \vee C)$	$\leftrightarrow$	$(A \& B) \vee (A \& C)$
idempotenza $\vee$	$A \vee A$	$\leftrightarrow$	A
idempotenza &	$A \& A$	$\leftrightarrow$	A
leggi di De Morgan	$\neg(B \vee C)$	$\leftrightarrow$	$\neg B \& \neg C$
	$\neg(B \& C)$	$\leftrightarrow$	$\neg B \vee \neg C$
legge della doppia negazione	$\neg\neg A$	$\leftrightarrow$	A
implicazione classica	$(A \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$\neg A \vee C$
disgiunzione come antecendente	$(A \vee B \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)$
congiunzione come antecendente	$(A \& B \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$
legge della contrapposizione	$(A \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(\neg C \rightarrow \neg A)$
legge del modus ponens	$A \& (A \rightarrow C)$	$\rightarrow$	C
legge della NON contraddizione	$\neg(A \& \neg A)$		
legge del terzo escluso	$A \vee \neg A$		

La verità classica di una proposizione, ossia il suo essere tautologia, si mantiene anche dopo aver sostituito le sue variabili proposizionali con altre proposizioni a piacere. In termini più formali, le tautologie sono chiuse per sostituzione delle loro variabili proposizionali.

Infatti in ogni tautologia descritta sopra

$$\mathtt{pr}_1(A, B, C)$$

con variabili A, B, C... si ottiene una nuova tautologia

$$\mathtt{pr}_1(\mathtt{pr}_2, \mathtt{pr}_3, \mathtt{pr}_4)$$

se si sostituiscono A, B, C in $\mathtt{pr}_1(A, B, C)$ con proposizioni arbibrarie rispettivamente $\mathtt{pr}_2, \mathtt{pr}_3, \mathtt{pr}_4$.

Una prova di ciò è costituita dal fatto che la tabella finale della proposizione $\mathtt{pr}_1(\mathtt{pr}_2, \mathtt{pr}_3, \mathtt{pr}_4)$ è composizione di una tabella di una tautologia, che è funzione costante 1, con le tabelle delle proposizioni sostituite, ma siccome comporre con una funzione costante 1 dà luogo ancora ad una funzione costante 1, ne segue che la proposizione $\mathtt{pr}_1(\mathtt{pr}_2, \mathtt{pr}_3, \mathtt{pr}_4)$ è pure tautologia.

Ad esempio è pure tautologia classica

$$\models \mathtt{pr} \vee \neg \mathtt{pr}$$

ove **pr** è una qualsiasi altra proposizione.

La chiusura per sostituzione delle tautologie si può esprimere in tal modo:

Theorem 6.2 (sostituzione semplice) *Date le proposizioni* $\mathtt{pr}_1(\mathtt{A})$ *e* $\mathtt{pr}_2$

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{Se} \models \mathtt{pr}_1(\mathtt{A}) \\[1em] \textit{allora} \models \mathtt{pr}_1(\mathtt{pr}_2). \end{array}}$$

6.11 Proprietà utili sull'equivalenza

Ricordando che **proposizioni equivalenti** hanno **stessa tabella di verità** si ottiene che se è una vera pure l'altra lo è:

Proposition 6.3 (verità di equivalenti) *Date* $\mathtt{pr_1}$ *e* $\mathtt{pr_2}$ *proposizioni*

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{se} \quad \models \mathtt{pr_1} \leftrightarrow \mathtt{pr_2} \\ \textit{allora} \\ \textit{vale } (\quad \models \mathtt{pr_1} \quad \textit{sse} \quad \models \mathtt{pr_2} \quad) \end{array}}$$

L'equivalenza di proposizioni è una relazione simmetrica e transitiva:

Lemma 6.4 (simmetria equivalenti) *Date* $\mathtt{pr_1}$ *e* $\mathtt{pr_2}$ *proposizioni*

$$\boxed{\textit{se} \quad \models \mathtt{pr_1} \leftrightarrow \mathtt{pr_2} \quad \textit{allora} \quad \models \mathtt{pr_2} \leftrightarrow \mathtt{pr_1}}$$

Esempio: per dedurre che $\models A \leftrightarrow A\&A$ vale basta usare la simmetria dell'equivalenza sopra a partire dall'idempotenza della & in sezione 6.10.

Lemma 6.5 (transitività equivalenti) *Date* $\mathtt{pr_1}$, $\mathtt{pr_2}$ *e* $\mathtt{pr_3}$ *proposizioni*

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{se} \quad \models \mathtt{pr_1} \leftrightarrow \mathtt{pr_2} \quad \textit{e} \quad \models \mathtt{pr_2} \leftrightarrow \mathtt{pr_3} \\ \quad \textit{allora} \quad \models \mathtt{pr_1} \leftrightarrow \mathtt{pr_3} \end{array}}$$

Esempio: per dedurre che $\models A \vee A \leftrightarrow A\&A$ vale basta usare la transitività dell'equivalenza a partire dalla simmetrica dell'idempotenza della & in sezione 6.10 ovvero $A \leftrightarrow A\&A$ e dall'idempotenza della $\vee$.

Ora si noti che se due proposizioni sono uguali a meno di un loro pezzo e i due pezzi diversi sono equivalenti, allora le due proposizioni iniziali sono equivalenti. Per esempio le proposizioni

$$(C \rightarrow D)\&B \qquad\qquad (\neg C \vee D)\&B$$

hanno i pezzi $C \rightarrow D$ e $\neg C \vee D$ che sono equivalenti per l'essenza della implicazione in sezione 6.10 e quindi loro sono equivalenti. Questa è un'istanza del seguente teorema:

Theorem 6.6 (equivalenza per pezzi) *Se vale* $\models \mathtt{pr_1} \leftrightarrow \mathtt{pr_2}$, *ovvero* $\mathtt{pr_1}$ *è equivalente a* $\mathtt{pr_2}$

presa un'altra proposizione $\mathbf{pr_3(A)}$, *che è una scrittura per indicare che nella proposizione* $\mathbf{pr_3(A)}$ *compare la variabile* $\mathbf{A}$, *allora vale*

$$\models \mathbf{pr_3(pr_1)} \;\leftrightarrow \mathbf{pr_3(pr_2)}$$

Per applicare questo teorema al fine di dedurre che $(C \rightarrow D)\&B$ è equivalente a $(\neg C \vee D)\&B$ basta considerare la proposizione

$$A\&B$$

e sostituire A una volta con $C \rightarrow D$ e si ottiene (dopo aver messo le parentesi) $(C \rightarrow D)\&B$ e un'altra volta sostituire A con $\neg C \vee D$ e si ottiene $(\neg C \vee D)\&B$ che è equivalente a $(C \rightarrow D)\&B$ per il teorema enunciato.

Dal teorema 6.6 e teorema 6.1 segue come corollario che se in una proposizione $\mathtt{pr_3}$ (A) si sostituisce A una volta con $\mathtt{pr_1}$ e un'altra volta con un suo equivalente $\mathtt{pr_2}$ si ottengono due proposizioni che hanno la proprietà che una è una tautologia sse lo è anche l'altra:

Corollary 6.7 (verità su equivalenza per pezzi) *Se vale* $\models \mathtt{pr_1} \leftrightarrow \mathtt{pr_2}$*, ovvero* $\mathtt{pr_1}$ *è equivalente a* $\mathtt{pr_2}$

presa un'altra proposizione $\mathbf{pr_3(A)}$*, che è una scrittura per indicare che nella proposizione* $\mathbf{pr_3(A)}$ *compare la variabile* $\mathbf{A}$*, allora vale*

$$\models \mathbf{pr_3(pr_1)} \qquad \text{sse} \ \models \mathbf{pr_3(pr_2)}$$

7 Approfondimento sulle tabelle di verità

Di seguito riportiamo alcuni fatti interessanti relativi alle tabelle di verità.

7.1 Ogni tabella a valori in 0 e 1 è tabella di una proposizione?

Abbiamo visto come ogni proposizione formale possegga una tabella di verità. Ora ci chiediamo:

è anche vero che `ogni` **funzione a valori in** $\{0,1\}$ **con dominio** $\{0,1\}^n$ **rappresentata da una tabella ad** n **entrate**, per $n \geq 1$, (ove le righe sono pari a tutte le possibili combinazioni n-arie di 0 e 1) del tipo

V_1	V_2	...	V_n	???
0	1	...	...	$\mathbf{c_1}$
0	0	...	...	$\mathbf{c_2}$
1	1	...	...	$\mathbf{c_3}$
1	0	......	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

(ove $\mathbf{c_i}$ può essere solo 0 o 1)

corrisponde ad una **proposizione formale** *con (al più) n variabili proposizionali? Se sì dobbiamo forse aggiungere qualche connettivo a quelli già definiti per rappresentarla?*

La risposta è che OGNI TABELLA a n entrate, con $n \geq 1$, CORRISPONDE alla TABELLA di VERITÀ di una PROPOSIZIONE formale con al più n variabili proposizionali e che NON abbiamo bisogno di aggiungere nuove proposizioni per rappresentare tutte le tabelle di verità.

Il motivo è che vale il seguente teorema:

Theorem 7.1 (Completezza delle tabelle rispetto a $\neg, \vee, \&$**)** *Ogni tabella con* $\mathbf{n}$*-entrate, con* $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$*, denota un connettivo* $\mathbf{n}$*-ario che si può scrivere con solo* $\vee, \&$ *ed* $\neg$*.*

Questo teorema è in verità il corollario di altri due teoremi:

Theorem 7.2 (forma normale disgiuntiva) *Ogni tabella con* $\mathbf{n}$*-entrate, con* $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$*, denota un connettivo* $\mathbf{n}$*-ario che si può scrivere in forma normale* **disgiuntiva**

$$\bigvee_{\mathbf{i}\ \textit{indice riga con risultato 1}} \mathbf{riga_i}$$

ove

$$\mathbf{riga_i} \equiv (((\,\mathbf{C_{i,1}} \& \mathbf{C_{i,2}}\,) \ldots \& \mathbf{C_{i,n}}$$

è congiunzione di variabili o loro negazioni e

$$\bigvee_{\mathbf{i} \textit{ indice riga con risultato 1}} \mathbf{riga_i} \equiv (\,(\,\mathbf{riga_{i_1}} \vee \mathbf{riga_{i_2}}\,) \vee \mathbf{riga_{i_3}} \ldots\,) \vee \mathbf{riga_{i_n}}$$

La procedura per scrivere la forma normale disgiuntiva di una tabella di verità a n entrate è la seguente:

- considero la tabella di verità di $\mathbf{conn}(\mathbf{V_1}, \ldots, \mathbf{V_n})$
- se **NON ESISTE almeno una riga con risultato 1** poni

$$\mathbf{V_1} \& \neg \mathbf{V_1}$$

- se **ESISTE almeno una riga con risultato 1** faccio la disgiunzione

$$\bigvee_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato 1}} \mathbf{riga_i}$$

ove

$$\mathbf{riga_i} \equiv (((\,\mathbf{C_{i,1}} \& \mathbf{C_{i,2}}\,) \ldots \& \mathbf{C_{i,n}}$$

è multipla congiunzione di $\mathbf{C_{i,k}}$ definiti come segue

$$\mathbf{C_{i,k}} \equiv \begin{cases} \mathbf{V_k} & \text{se } \mathbf{1} \text{ è il valore di } \mathbf{V_k} \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \\ \neg \mathbf{V_k} & \text{se } \mathbf{0} \text{ è il valore di } \mathbf{V_k} \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \end{cases}$$

- si dimostra che

$$\models \mathbf{conn}(\mathbf{V_1}, \ldots, \mathbf{V_n}) \;\leftrightarrow\; \bigvee_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato 1}} \mathbf{riga_i}$$

7.1.1 Esempio di uso di forma normale disgiuntiva

Data la tabella di verità

A	B	$\mathbf{conn}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$
0	1	0
0	0	1
1	1	0
1	0	0

per scoprire che proposizione è $\mathbf{conn}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ usiamo il teorema **forma normale disgiuntiva** e scriviamo dunque le righe uscenti con 1

$$\neg \mathbf{A} \& \neg \mathbf{B}$$

e dal teorema deduciamo che possiamo definire

$$\mathbf{conn}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \neg \mathbf{A} \& \neg \mathbf{B}$$

perchè connettivi equivalenti hanno la stessa tabella di verità.

Se prendiamo invece questa tabella di verità

A	B	$\mathbf{conn(A,B)}$
0	1	1
0	0	1
1	1	0
1	0	1

chi è $\mathbf{conn(A,B)}$? Per stabilirlo di nuovo usiamo il teorema di forma normale disgiuntiva e scriviamo dunque le righe uscenti con 1:

$$(\, (\, \neg\mathbf{A}\&\mathbf{B} \,)\vee(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}) \,)\vee(\, \mathbf{A}\&\neg\mathbf{B} \,)$$

dal teorema sappiamo che possiamo definire

$$\mathbf{conn(A,B)} \;\equiv\; (\, (\, \neg\mathbf{A}\&\mathbf{B} \,)\vee(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B}) \,)\vee(\, \mathbf{A}\&\neg\mathbf{B} \,)$$

Però la scrittura del connettivo è molto complessa... Vediamo allora un'altro modo di scrivere il connettivo corrispondente ad una tabella di verità nel caso ci siano pochi 0 in uscita. A tal fine enunciamo il seguente teorema:

Theorem 7.3 (forma normale congiuntiva) *Ogni tabella con* $\mathbf{n}$*-entrate, con* $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$*, denota un connettivo* $\mathbf{n}$*-ario che si può scrivere in forma normale* **congiuntiva**

$$\&_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato } 0} \; \overline{\mathbf{riga_i}}$$

ove

$$\overline{\mathbf{riga_i}} \equiv (((\, \mathbf{C_{i,1}}\vee\mathbf{C_{i,2}} \,) \ldots \vee\mathbf{C_{i,n}}$$

è disgiunzione di variabili o loro negazioni e

$$\&_{\mathbf{i} \text{ riga con risultato } 0} \; \overline{\mathbf{riga_i}} \;\equiv\; (\, (\, \overline{\mathbf{riga}}_{\mathbf{i_1}}\&\overline{\mathbf{riga}}_{\mathbf{i_2}} \,)\&\overline{\mathbf{riga}}_{\mathbf{i_3}} \ldots \,)\&\overline{\mathbf{riga}}_{\mathbf{i_n}}$$

La procedura per scrivere la forma normale congiuntiva di una tabella di verità ad n entrate è la seguente:

- considero la tabella di verità del connettivo **n-ario** $\mathbf{conn(V_1, \ldots, V_n)}$
- se **NON ESISTE almeno una riga con risultato 0** poni

$$\mathbf{V_1}\vee\neg\mathbf{V_1}$$

- se **ESISTE almeno una riga con risultato 0** faccio la congiunzione

$$\&_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato } 0} \quad \overline{\mathbf{riga_i}}$$

  ove

$$\overline{\mathbf{riga_i}} \;\equiv\; (((\, \mathbf{C_{i,1}}\vee\mathbf{C_{i,2}} \,) \ldots \vee\mathbf{C_{i,n}}$$

  è multipla disgiunzione di $\mathbf{C_i}$ definiti come segue

$$\mathbf{C_{i,k}} \equiv \begin{cases} \mathbf{V_k} & \text{se } \mathbf{0} \text{ è il valore di } \mathbf{V_k} \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \\ \neg\mathbf{V_k} & \text{se } \mathbf{1} \text{ è il valore di } \mathbf{V_k} \text{ nella riga } \mathbf{i}\text{-esima} \end{cases}$$

- si dimostra che

$$\models \mathbf{conn(V_1, \ldots, V_n)} \;\; \leftrightarrow \;\; \&_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato } 0} \quad \overline{\mathbf{riga_i}}$$

7.1.2 Esempio di uso di forma normale congiuntiva: il connettivo NAND

Quindi ora data la tabella

A	B	$\mathbf{conn(A,B)}$
0	1	1
0	0	1
1	1	0
1	0	1

usiamo il teorema di forma normale congiuntiva e scriviamo le righe uscenti con 0: $\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$ e deduciamo dal teorema che possiamo definire

$$\mathbf{conn(A,B)} \equiv \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$$

perchè connettivi equivalenti hanno la stessa tabella di verità.

Inoltre per simmetria dell'equivalenza e per la legge di de Morgan in sezione 6.10 otteniamo che

$$\models\mathbf{conn(A,B)} \leftrightarrow \neg(\ \mathbf{A}\&\mathbf{B}\ )$$

e quindi la tabella di verità rappresenta il connettivo NAND.

7.1.3 Raffinamento del teorema di completezza delle tabelle di verità

Theorem 7.4 **($\&+\neg$)** *Ogni tabella con* **n***-entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo* **n***-ario che si può scrivere con solo* $\&$ *e* $\neg$.

Dim. Segue per il teorema di forma normale congiuntiva, dopo aver notato che la disgiunzione tramite la legge di De Morgan e quella della doppia negazione in sezione 6.10 si può definire come segue

$$\mathbf{A}\vee\mathbf{B} \ \equiv\ \neg(\neg\mathbf{A}\&\neg\mathbf{B})$$

In particolare, si noti che l'implicazione tramite la sua essenza in sezione 6.10 si può definire in tal modo

$$\mathbf{A}\to\mathbf{B} \ \equiv\ \neg\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$$

Theorem 7.5 **($\vee+\neg$)** *Ogni tabella con* **n***-entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo* **n***-ario che si può scrivere con solo* $\vee$ *e* $\neg$.

Dim: Segue per il teorema di forma normale disgiuntiva dopo aver notato che la congiunzione tramite le leggi di De Morgan e quella della doppia negazione si può definire come segue

$$\mathbf{A}\&\mathbf{B} \ \equiv\ \neg(\ \neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}\ )$$

Theorem 7.6 **($\to+\neg$)** *Ogni tabella con* **n***-entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo* **n***-ario che si può scrivere con solo* $\to$ *e* $\neg$.

Dim: Basta notare che si può definire la disgiunzione in tal modo

$$\mathbf{A}\vee\mathbf{B} \ \equiv\ \neg\mathbf{A}\to\mathbf{B}$$

grazie alla legge della doppia negazione in sezione 6.10 e poi si applica il teorema 7.5.

Theorem 7.7 (solo NAND) *Ogni connettivo* **n-ario** *si può scrivere con solo NAND.*

Dim: Basta notare che tramite **NAND** si può definire sia la negazione che la disgiunzione come segue

$$\neg\mathbf{A} \ \equiv\ \mathbf{NAND(A,A)} \qquad\qquad \mathbf{A}\vee\mathbf{B} \ \equiv\ \mathbf{NAND}(\neg A,\neg B)$$

ove nel secondo si usa ovviamente la definizione di negazione data nella definizione di sinistra. Poi si conclude per il teorema 7.5.

7.1.4 Quante sono le tabelle di verità ad n entrate?

Le possibili tabelle di verità con **n** entrate, con $n \geq 1$, sono

$$\mathbf{2^{2^n}}$$

ovvero tante quante le funzioni da $\{0,1\}^{\mathbf{n}} \rightarrow \{0,1\}$ e quindi i connettivi **n**-ari **a meno di equivalenza proposizionale** sono $\mathbf{2^{2^n}}$

Per esempio le tabelle di verità **unarie** sono $\mathbf{4} = \mathbf{2^{2^1}}$ e sono:

identità

A	A
0	0
1	1

negazione

A	$\neg A$
0	1
1	0

costante falso

$\perp$
0

costante vero

tt
1

ove $\perp$ è il nome alla costante "falso" che è da aggiungere alle proposizioni, tt è il nome alla costante "vero" che è da aggiungere alle proposizioni.

Si noti che per i teoremi di completezza delle tabelle con i vari linguaggi si deduce che:

$$\models \perp \ \leftrightarrow \ \mathbf{A} \ \& \ \neg\mathbf{A} \qquad\qquad \models \mathtt{tt} \ \leftrightarrow \ \mathbf{A} \ \vee \ \neg\mathbf{A}$$

8 Due strategie per verificare una tautologia

Per quanto spiegato finora per vedere se vale

$$\models \texttt{pr}$$

abbiamo almeno due possibilità:

1. **strategia tabella**: *fai la tabella di verità* di `pr`
   vantaggio: strategia sicura e automatica
   svantaggio: la tabella può essere molto complessa

2. **strategia riduzione**: *riduci* `pr` *tramite equivalenze note ad una tautologia nota*
   vantaggio: strategia veloce, se termina
   svantaggio: strategia non automatica e non sempre terminante in una proposizione nota

Suggerimento: combinate le due strategie sopra!!

Esempio di verifica di validitá di una proposizione. Abbiamo giá visto che l'asserzione

"È vero che **se il tuo vicino di banco non è Napoleone ne segue che la radice quadrata non canta alla Scala di Milano** se si suppone che **se la radice quadrata canta alla Scala di Milano allora il tuo vicino di banco è Napoleone**"

si può formalizzare in

$$(C \to N) \ \to \ (\neg N \to \neg C)$$

ove
$N=$ "**il tuo vicino di banco è Napoleone**"
$C=$"**la radice quadrata canta alla Scala di Milano**"

Ora verifichiamo se $(C \to N) \ \to \ (\neg N \to \neg C)$ è una tautologia o non è valida e quindi soddisfacibile o insoddisfacibile.

Usando il teorema 6.6 sull'essenza dell'implicazione nell'antecedente dell'implicazione piú esterna otteniamo che

$$\models (\ (C \to N) \to (\neg N \to \neg C)\ ) \ \leftrightarrow \ (\ \neg C \vee N \to (\ \neg N \to \neg C\ )\ )$$

Poi usando il teorema 6.6 sull'essenza dell'implicazione nel conseguente dell'implicazione piú esterna otteniamo che

$$\models (\ \neg C \vee N \to (\ \neg N \to \neg C\ )\ ) \ \leftrightarrow \ (\ \neg C \vee N \to \neg\neg N \vee \neg C\ )$$

Di nuovo usando il teorema 6.6 sulla legge della doppia negazione otteniamo che

$$\models (\ \neg C \vee N \to \neg\neg N \vee \neg C\ ) \ \leftrightarrow \ (\ \neg C \vee N \to N \vee \neg C\ )$$

Infine usando il teorema 6.6 sulla commutativitá di $\vee$ otteniamo che

$$\models (\ \neg C \vee N \to N \vee \neg C\ ) \ \leftrightarrow \ (\ N \vee \neg C \to N \vee \neg C\ )$$

e per transitività dell'equivalenza di proposizioni si ottiene che vale

$$\models (\ (C \to N) \to (\neg N \to \neg C)\ ) \ \leftrightarrow \ (\ N \vee \neg C \to N \vee \neg C\ )$$

Ora chiaramente vale

$$\models \ N \vee \neg C \to N \vee \neg C$$

per il teorema di sostituzione semplice sapendo che $A \to A$ è una tautologia (si sostituisca A con $N \vee \neg C$).

Concludiamo quindi per la proposizione 6.3 sulla veritá di equivalenti che vale PURE

$$\models (C \to N) \to (\neg N \to \neg C)$$

ossia ($(C \to N) \to (\neg N \to \neg C)$) è tautologia, quindi è una proposizione VALIDA.

8.0.1 Altro esempio di verità classica

Per vedere se vale

$$\models(\mathbf{A}{\to}\mathbf{B}) \vee (\mathbf{B}{\to}\mathbf{A})$$

si usa due volte

$$\text{essenza} \to \qquad \models(\mathbf{A}{\to}\mathbf{B}) \leftrightarrow (\neg\mathbf{A}{\vee}\mathbf{B})$$

e si ottiene

$$\models(\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee (\neg\mathbf{B} \vee \mathbf{A})$$

Infine per associatività e commutatività di $\vee$ si ottiene

$$\models(\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A}) \vee (\neg\mathbf{B} \vee \mathbf{B})$$

e ora si conclude facilmente che la proposizione è una tautologia in quanto la sua tabella di verità risulta facile da costruire e dà sempre valore 1 perchè i disgiunti sono entrambe tautologie (la prima compare in sezione 6.10 e la seconda segue per commutatività di $\vee$ dalla legge del terzo escluso).

8.0.2 Esempio su validità e soddisfacibilità e i loro NON

Esempio: formalizzare in un unica proposizione l'asserzione

"È vero che **se i viaggiatori non sono contenti allora il treno è in ritardo** se si assume che **se i viaggiatori son contenti allora il treno non è in ritardo**."

usando
V="**i viaggiatori sono contenti**"
R="**il treno è in ritardo**"
e mostrare se la proposizione ottenuta è tautologia classica e in caso contrario dire per quali valori delle variabili non è valida e se è soddisfacibile (e per quali valori delle variabili lo è) o insoddisfacibile.

La sua formalizzazione come UNICO enunciato è

$$(V \to \neg R) \to (\neg V \to R)$$

Usando il teorema 6.6 sull'essenza dell'implicazione due volte otteniamo che

$$\models (\ (V \to \neg R) \to (\neg V \to R)\ ) \ \leftrightarrow\ (\ \neg V \vee \neg R \to \neg\neg V \vee R\ )$$

Di nuovo usando il teorema 6.6 sulla legge della doppia negazione otteniamo che

$$\models (\ \neg V \vee \neg R \to \neg\neg V \vee R\ ) \ \leftrightarrow\ (\ \neg V \vee \neg R \to V \vee R\ )$$

e per transitività si deduce

$$\models (\ (V \to \neg R) \to (\neg V \to R)\ ) \ \leftrightarrow\ (\ \neg V \vee \neg R \to V \vee R\ )$$

Ora si puó procedere in vari modi per concludere.

1. (primo modo) Si prova a vedere se $\neg V \vee \neg R \to V \vee R$ è NON VALIDO trovando valori per V e R tali per cui la conseguenza $V \vee R$ risulti falsa mentre sia vera la premessa $\neg V \vee \neg R$ dell'implicazione. Si osservi che i valori per cui $V \vee R$ risulta falsa sono $V = R = 0$ e per questi la premessa $\neg V \vee \neg R$ risulta 1. Perciò l'implicazione
$$\neg V \vee \neg R \to V \vee R$$
risulta falsa per $V = R = 0$ e dunque $\neg V \vee \neg R \to V \vee R$ NON è VALIDO.

   Si prova a vedere poi se $\neg V \vee \neg R \to V \vee R$ è SODDISFACIBILE. A tal scopo basta trovare dei valori per cui risulta 0 l'antecedente (ovvero risulta $\neg V \vee \neg R = 0$) e si osserva che a tal fine basta porre $V = R = 1$. Per tali valori l'implicazione $\neg V \vee \neg R \to V \vee R$ risulta vera. Quindi $\neg V \vee \neg R \to V \vee R$ risulta SODDISFACIBILE.

   Dal fatto che vale $\models$ ($(V \to \neg R) \to (\neg V \to R)$) $\leftrightarrow$ ($\neg V \vee \neg R \to V \vee R$) ovvero che $(V \to \neg R) \to (\neg V \to R)$ ha la stessa tabella di verità di $\neg V \vee \neg R \to V \vee R$, i risultati su NON validità e soddisfacibilità ottenuti per il secondo membro dell'equivalenza sopra valgono pure per il primo membro $(V \to \neg R) \to (\neg V \to R)$.

2. (altro modo) Si continua a trovare equivalenti di $\neg V \vee \neg R \to V \vee R$. Infatti usando il teorema 6.6 sull'essenza dell'implicazione si trova che
$$\models (\neg V \vee \neg R \to V \vee R) \leftrightarrow \ \neg(\neg V \vee \neg R) \vee (V \vee R)$$
   Poi di nuovo usando il teorema 6.6 su una legge di De Morgan si ottiene
$$\models \neg(\neg V \vee \neg R) \vee (V \vee R) \ \leftrightarrow \ (\neg\neg V \& \neg\neg R) \vee (V \vee R)$$
   e di nuovo usando il teorema 6.6 due volte sulla doppia negazione si conclude
$$\models (\neg\neg V \& \neg\neg R) \vee (V \vee R) \ \leftrightarrow \ (V \& R) \vee (V \vee R)$$
   Ora per transitività si deduce
$$\models (\ (V \to \neg R) \to (\neg V \to R)\ ) \ \leftrightarrow \ (V \& R) \vee (V \vee R)$$
   ovvero che $(V \to \neg R) \to (\neg V \to R)$ ha la stessa tabella di verità di $(V \& R) \vee (V \vee R)$. Ora $(V \& R) \vee (V \vee R)$ è chiaramente NON valido se troviamo valori che falsificano sia $V \& R$ che $V \vee R$ e a tal scopo basta porre $V = R = 0$. Inoltre $(V \& R) \vee (V \vee R)$ è chiaramente SODDISFACIBILE ponendo $V = R = 1$ perchè $V \vee R$ diventa 1. Concludiamo che pure $(V \to \neg R) \to (\neg V \to R)$ è NON valido e SODDISFACIBILE sugli stessi valori.

8.0.3 In logica classica non c'è implicazione causale

La tautologia
$$\models(\ \mathbf{A} \to \mathbf{B}\ ) \vee (\ \mathbf{B} \to \mathbf{A}\ )$$
mostra con il seguente esempio che l'implicazione della logica classica NON è causale in quanto si trovano delle verità controintuitive riguardanti le implicazioni. Infatti ponendo
A="Voi passerete l'esame di logica"
B="Avete una zia con i calli"
si ottiene che

"**Se voi passerete l'esame di logica allora avete una zia con i calli, oppure se avete una zia con i calli allora passerete l'esame di logica**"

è vera logicamente secondo la logica classica.

8.0.4 Verità atemporali della logica classica proposizionale

È vero che

"**Non si dà il caso che se sono a Londra io sia a Padova**"?

La risposta è che ovviamente sì non si dà questo caso.

Però una sua formalizzazione potrebbe essere

$$\neg(\, \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{P}\,)$$

con

L = "**Sono a Londra**"
P = "**Sono a Padova**"

ma si noti che la proposizione sopra è equivalente a

$$\models \neg(\, \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{P}\,) \qquad \leftrightarrow \qquad \neg(\, \neg \mathbf{L} \vee \mathbf{P}\,)$$

e per leggi di De Morgan

$$\models \neg(\, \neg \mathbf{L} \vee \mathbf{P}\,) \qquad \leftrightarrow \qquad \neg\neg \mathbf{L} \,\&\, \neg \mathbf{P}$$

e infine concludiamo

$$\models \neg\neg \mathbf{L} \,\&\, \neg \mathbf{P} \qquad \leftrightarrow \qquad \mathbf{L} \& \neg \mathbf{P}$$

ovvero l'affermazione di partenza risulta equivalente a

"**Io sono a Londra e NON sono a Padova**"

il che non è sempre vero...!

Spiegazione della apparente paradossalità: il valore di verità della frase sopra formalizzata in $\neg(\, \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{P}\,)$ dipende da dove sono in questo momento: se NON sono a Londra la proposizione $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{P}$ diventa vera classicamente, e la sua negata falsa classicamente, altrimenti se sono a Londra $\neg(\, \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{P}\,)$ risulta vera. Siccome la logica classica proposizionale tratta di verità atemporali, o vere o false senza dipendenza dal tempo, questa logica non risulta adatta per formalizzare la proposizione "**Non si dà il caso che se sono a Londra io sia a Padova**" che sarebbe invece meglio formalizzare includendo la nozione del tempo e nella forma più precisa "non si dà il caso che se in un qualsiasi momento io sono a Londra allora sia pure nello stesso momento anche a Padova".

8.0.5 Esercizi su Validità e soddisfacibilità e loro negazioni

Formalizzare in un UNICA proposizione le seguenti asserzioni (secondo i suggerimenti indicati) e mostrare se la proposizione ottenuta è **valida** o in caso contrario dire per quali valori delle variabili **non è valida** e se è **soddisfacibile** (e per quali valori delle variabili lo è) o **insoddisfacibile**.

Ricordiamo che nel seguito adottiamo la convenzione della sezione 5, ovvero che quando scriviamo

$$\frac{\begin{array}{c}\textbf{frase}_1\\ \textbf{frase}_2\\ \dots\\ \textbf{frase}_n\end{array}}{\textbf{frase}}$$

intendiamo

"Ammesso che valga sia **frase**$_1$ che **frase**$_2$, che ... **frase**$_n$, allora vale **frase**"

1. $\dfrac{\text{Non si dà il caso che l'affare non sia conveniente o non sicuro.}}{\text{L'affare è conveniente e sicuro.}}$

   A =l'affare è conveniente
   S = l'affare è sicuro

   Soluzione: una formalizzazione dell'asserzione è

   $$\neg(\ \neg A \vee \neg S) \ \rightarrow\ A\&S$$

   e questa per il teorema 6.6 applicato con la simmetrica della legge di De Morgan su $\neg A \vee \neg S$ è equivalente a

   $$\neg\neg(A\&S) \ \rightarrow\ A\&S$$

   che per il teorema 6.6 applicato con la legge della doppia negazione è equivalente a

   $$A\&S \ \rightarrow\ A\&S$$

   che è chiaramente valida. Siccome proposizioni equivalenti hanno la stessa tabella di verità allora la proposizione di partenza è valida.

2. $\dfrac{\text{Non si dà il caso che l'affare non sia conveniente o sia sicuro.}}{\text{L'affare non è conveniente nè sicuro.}}$

   A =l'affare è conveniente
   S =l'affare è sicuro

   Soluzione: Una formalizzazione dell'asserzione è

   $$\neg(\ \neg A \vee S) \ \rightarrow\ \neg A\&\neg S$$

   che per il teorema 6.6 applicato con la legge di De Morgan su $\neg(\ \neg A \vee S)$ è equivalente a

   $$\neg\neg A\&\neg S \ \rightarrow\ \neg A\&\neg S$$

   che sempre per il teorema 6.6 applicato con la legge della doppia negazione è equivalente a

   $$A\&\neg S \ \rightarrow\ \neg A\&\neg S$$

Ora chiaramente questa implicazione è NON valida se si trovano valori per cui $A\&\neg S$=1 e $\neg A\&\neg S$=0. Ora i valori che rendono vero l'antecedente dell'implicazione sono A=1 e S=0 da cui segue che il conseguente $\neg A\&\neg S$=0. Perciò la proposizione $A\&\neg S \rightarrow \neg A\&\neg S$ è NON VALIDA per i valori A=1 e S=0.

Inoltre per rendere soddisfacibile $A\&\neg S \rightarrow \neg A\&\neg S$ basta trovare dei valori per cui $A\&\neg S$=0 (oppure $\neg A\&\neg S$=1). E si vede chiaramente che per A=0, e S con valore qualsiasi, allora $A\&\neg S$=0 e quindi $A\&\neg S \rightarrow \neg A\&\neg S$=1. In conclusione $A\&\neg S \rightarrow \neg A\&\neg S$ risulta SODDISFACIBILE per A=0, e S con valore qualsiasi. Infine siccome proposizioni equivalenti hanno la stessa tabella di verità allora la proposizione di partenza $\neg(\ \neg A \vee S) \rightarrow \neg A\&\neg S$ è NON VALIDA e SODDISFACIBILE sugli stessi valori trovati per $A\&\neg S \rightarrow \neg A\&\neg S$.

3. $$\frac{\text{Prima di consegnare rileggo il compito solo se riesco a scrivere qualcosa.}}{\text{Se non riesco a scrivere qualcosa, prima di consegnare non rileggo il compito.}}$$

si consiglia di usare:
R =prima di consegnare rileggo il compito
S = riesco a scrivere qualcosa

4. $$\frac{\text{Mario è scontento solo se non programma bene.}}{\text{Se Mario è contento allora programma bene.}}$$

C=Mario è contento
P=Mario programma bene

5. $$\frac{\text{Le lezioni tacciono se c'è un assemblea studentesca o è giorno festivo.}}{\text{Non c'è un assemblea studentesca e non è giorno festivo, quindi le lezioni non tacciono.}}$$

L=le lezioni tacciono
A=c'è un assemblea studentesca
F=è giorno festivo

6. $$\begin{array}{l}\text{Non si dà il caso che il fattoriale termini e non si esca dal ciclo.}\\ \text{Si esce dal ciclo.}\\ \hline \text{Non si dà il caso che se si esce dal ciclo il fattoriale non termini.}\end{array}$$

F= il fattoriale termina
C=si esce dal ciclo

7. $$\begin{array}{l}\text{Solo se non prendo l'ombrello non piove.}\\ \text{Non piove.}\\ \hline \text{Non prendo l'ombrello.}\end{array}$$

P=piove
O=prendo l'ombrello

9 Calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$

In questa sezione mostriamo un metodo più elegante, semplice e soprattutto **AUTOMATICO** per stabilire se una proposizione è valida o meno e soddisfacibile o meno.

Tale metodo è **MENO COMPLESSO** di quello delle tabelle di verità e consiste in una procedura algoritmica che **TERMINA SEMPRE** con una risposta. Questa procedura fa uso di un **calcolo dei sequenti** per la logica classica proposizionale. Anticipiamo soltanto che per verificare la validità (e soddisfacibilità) per esempio di

$$(V \to \neg R) \to (\neg V \to R)$$

costruiremo un **albero di derivazione...** in tale calcolo.

9.1 Cosa è un sequente?

Un **sequente** nel linguaggio delle proposizioni formali è una scrittura che può essere di quattro tipi diversi:

1. un primo tipo di sequente è la scrittura

   $$\mathsf{pr}_\mathbf{1}, \mathsf{pr}_\mathbf{2}, \ldots \mathsf{pr}_\mathbf{n} \quad \vdash \quad \mathsf{cl}_\mathbf{1}, \mathsf{cl}_\mathbf{2}, \ldots \mathsf{cl}_\mathbf{m}$$

   che rappresenta *un'asserzione* del tipo

   "**se** $\mathsf{pr}_\mathbf{1}$ è *vero* **e** $\mathsf{pr}_\mathbf{2}$ è *vero*... **e** pr_n è *vero* **allora** **o** $\mathsf{cl}_\mathbf{1}$ è *vero* **oppure** $\mathsf{cl}_\mathbf{2}$ è *vero*... **oppure** $\mathsf{cl}_\mathbf{m}$ è *vero*"

   o equivalentemente che la proposizione formale

   $$(\,\mathsf{pr}_\mathbf{1} \& \mathsf{pr}_\mathbf{2}\,) \ldots \& \mathsf{pr}_\mathbf{n} \quad \longrightarrow \quad (\,\mathsf{cl}_\mathbf{1} \vee \mathsf{cl}_\mathbf{2}\,) \ldots \vee \mathsf{cl}_\mathbf{m} \qquad \text{\textit{è vera}}$$

   posto che tutte le pr_i per $i = 1, \ldots, n$ (dette *premesse*) e le cl_i per $i = 1, \ldots, m$ (dette *conclusioni*) siano proposizioni formali.

2. un altro tipo di sequente è la scrittura

   $$\vdash \quad \mathsf{cl}_\mathbf{1}, \mathsf{cl}_\mathbf{2}, \ldots \mathsf{cl}_\mathbf{m}$$

   che rappresenta *un'asserzione* del tipo

   "**o** $\mathsf{cl}_\mathbf{1}$ è *vero* **oppure** $\mathsf{cl}_\mathbf{2}$ è *vero*...**oppure** $\mathsf{cl}_\mathbf{m}$ è *vero*"

   o equivalentemente che la proposizione

   $$(\,\mathsf{cl}_\mathbf{1} \vee \mathsf{cl}_\mathbf{2}\,) \ldots \vee \mathsf{cl}_\mathbf{m} \qquad \text{\textit{è vera}}$$

   o anche equivalentemente che la proposizione

   $$\mathtt{tt} \ \to \ (\,\mathsf{cl}_\mathbf{1} \vee \mathsf{cl}_\mathbf{2}\,) \ldots \vee \mathsf{cl}_\mathbf{m} \qquad \text{è vera}$$

   posto che tutte le cl_i per $i = 1, \ldots, m$ (dette *conclusioni*) siano proposizioni formali.

3. un altro tipo di sequente è la scrittura

   $$\mathsf{pr}_\mathbf{1}, \mathsf{pr}_\mathbf{2}, \ldots \mathsf{pr}_\mathbf{n} \quad \vdash$$

   che rappresenta *un'asserzione* del tipo "**se** $\mathsf{pr_1}$ è *vero* **e** $\mathsf{pr_2}$ è **vero**... **e** $\mathsf{pr_n}$ *è vero* **allora** la costante **falso** *è vera*"

o equivalentemente la proposizione

$$(\mathsf{pr_1}\&\mathsf{pr_2})\ldots\&\mathsf{pr_n} \quad\longrightarrow\quad \perp \text{ è } \textit{vera}$$

posto che tutte le pr_i per $i = 1, \ldots, n$ (dette *premesse*) siano proposizioni formali.

"**se** $\mathsf{pr_1}$ è *vero* **e** $\mathsf{pr_2}$ è **vero**... **e** $\mathsf{pr_n}$ *è vero* **allora** la costante **falso** *è vera*"

4. infine un sequente è anche la scrittura

$$\vdash$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

"la costante **falso** è vera"

o equivalentemente che la proposizione

$$\perp \qquad \text{è } \textit{vera}$$

o anche equivalentemente che la proposizione

$$\mathtt{tt} \rightarrow \perp \qquad \text{è } \textit{vera}$$

Per rappresentare con un'unica scrittura i quattro tipi di sequenti illustrati usiamo lettere greche maiuscole del tipo

$$\mathbf{\Gamma}, \qquad \mathbf{\Delta}, \qquad \mathbf{\Sigma}\ldots$$

come META-VARIABILI per indicare una generica **LISTA** di **PROPOSIZIONI** anche vuota.

Per esempio, possiamo pensare che una variabile Γ denoti $\mathbf{\Gamma} \equiv [\,]$ la lista vuota oppure

$$\mathbf{\Gamma} \equiv \mathsf{pr_1}, \mathbf{pr_2}, \ldots \mathbf{pr_n}$$

E poi indichiamo con

$$\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$$

un *generico sequente* ove Γ e Δ rappresentano liste anche vuote di proposizioni.

Esempio di sequente.

Ora mostriamo un esempio di formalizzazione in sequente.

L'asserzione

Ammesso che **il programma termina e dà risultato 1**, *allora* **il programma è corretto.**

che secondo la convenzione della sezione 5 si può rappresentare anche in tal modo

$$\frac{\textbf{Il programma termina e dà risultato 1.}}{\textbf{Il programma è corretto.}}$$

si può formalizzare con il sequente

$$\mathbf{P\&U} \vdash \mathbf{C}$$

ponendo:
P="Il programma termina"
U="Il programma dà risultato 1"
C="Il programma è corretto"

In verità però l'asserzione

Ammesso che **il programma termina e dà risultato 1**, *allora* **il programma è corretto.**

si può anche equivalentemente formalizzare nello stesso linguaggio formale con lo stesso significato associato alle proposizioni atomiche tramite il sequente

$$\vdash \mathbf{P\&U} \ \rightarrow\ \mathbf{C}$$

o addirittura anche tramite il sequente

$$\mathbf{P}, \mathbf{U} \vdash \mathbf{C}$$

per come si intende il significato della virgola tra due proposizioni a sinistra del segno di sequente $\vdash$.

9.1.1 Che proposizione rappresenta un sequente?

Coerentemente con quanto già espresso all'inizio sul significato di un sequente diciamo che il sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ rappresenta la proposizione

$$\mathbf{\Gamma}^{\&} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Delta}^{\vee}$$

ove le notazioni $\mathbf{\Gamma}^{\&}$ e $\mathbf{\Delta}^{\vee}$ sono definite a loro volta come segue:

$\Gamma^{\&} \equiv (\mathtt{pr_1}\&\mathtt{pr_2})\ldots\&\mathtt{pr_n}$ è la congiunzione delle proposizioni in Γ se $\Gamma \equiv \mathtt{pr_1}, \mathtt{pr_2}, \ldots \mathtt{pr_n}$ con $n > 1$ oppure $\Gamma^{\&} \equiv \mathtt{tt}$ (costante vero) se Γ è la lista vuota oppure $\Gamma^{\&} \equiv \mathtt{pr_1}$ se $\Gamma \equiv \mathtt{pr_1}$
$\Delta^{\vee} \equiv (\mathtt{pr_1}\vee\mathtt{pr_2})\ldots\vee\mathtt{pr_n}$ è la disgiunzione delle proposizioni in Δ se $\Delta \equiv \mathtt{pr_1}, \mathtt{pr_2}, \ldots \mathtt{pr_n}$ con $n > 1$ oppure $\Delta^{\vee} \equiv \perp$ (costante falso) se Δ è la lista vuota oppure $\Delta^{\vee} \equiv \mathtt{pr_1}$ se $\Delta \equiv \mathtt{pr_1}$

Queste notazioni servono quindi per interpretare una lista di proposizioni Γ *a sinistra* del segno $\vdash$ come un'unica proposizione $\Gamma^{\&}$ che è la congiunzione (associata a sinistra) *delle proposizioni nella lista* Γ e per interpretare una lista di proposizioni Δ *a destra* del segno $\vdash$ come un'unica proposizione $\Delta^{\vee}$ che è la *disgiunzione* (associata a sinistra) *delle proposizioni nella lista* Δ.

In particolare

il contesto vuoto a sinistra del segno $\vdash$ rappresenta la costante *vero*

il contesto vuoto a destra del segno $\vdash$ rappresenta la costante *falso*.

Il motivo di ciò è il seguente. Si noti che data una lista di proposizioni $\Gamma \equiv \mathsf{pr_1}, \mathsf{pr_2}, \dots \mathsf{pr_n}$ allora la concatenazione della lista Γ con la lista vuota [ ] che indichiamo con una virgola

$$\Gamma, [\ ]$$

è uguale alla lista Γ ovvero

$$\Gamma, [\ ] = \Gamma \qquad\qquad [\ ], \Gamma = \Gamma$$

e questo succede per le liste sia a destra che a sinistra del sequente. Ma allora dovremmo avere che

$$(\Gamma, [\ ])^{\&} = \Gamma^{\&} = ([\ ], \Gamma)^{\&}$$

come pure

$$(\Delta, [\ ])^{\vee} = \Delta^{\vee} = ([\ ], \Delta)^{\vee}$$

e siccome il simbolo $\Gamma^{\&}$ esprime la congiunzione delle proposizioni in Γ si ha che

$$(\Gamma, [\ ])^{\&} = \Gamma^{\&} \& ([\ ])^{\&} \qquad ([\ ], \Gamma)^{\&} = ([\ ])^{\&} \& \Gamma^{\&}$$

ovvero $[\ ]^{\&}$ deve soddisfare

$$\Gamma^{\&} \& ([\ ])^{\&} = \Gamma^{\&}$$

e quindi $([\ ])^{\&}$ deve essere per forza $([\ ])^{\&} = \mathtt{tt}$ in quanto congiunto ad una proposizione non ne altera la tabella di verità.

Analogamente siccome il simbolo $\Delta^{\vee}$ esprime la disgiunzione delle proposizioni in Δ si ha che

$$(\Delta, [\ ])^{\vee} = \Delta^{\vee} \vee ([\ ])^{\vee} \qquad ([\ ], \Delta)^{\vee} = ([\ ])^{\vee} \vee \Delta^{\vee}$$

ovvero $[\ ]^{\vee}$ deve soddisfare

$$\Delta^{\vee} \vee ([\ ])^{\vee} = \Gamma^{\vee}$$

e quindi deve essere per forza $([\ ])^{\vee} = \perp$ in quanto messo in disgiunzione con una proposizione non ne altera la tabella di verità.

9.2 Calcolo dei sequenti della Logica classica proposizionale

Il calcolo dei sequenti è composto da assiomi e da delle regole con cui operiamo *trasformazioni di sequenti* secondo lo schema

se VALE QUESTO SEQUENTE (o QUESTI due SEQUENTI) *allora* VALE QUEST'ALTRO SEQUENTE

dette anche *regola di inferenza di sequenti*.

Un esempio di tale trasformazione utilizzando la convenzione di sezione 5 è la scrittura

$$\frac{\mathbf{P}\&\mathbf{U} \vdash \mathbf{C}}{\mathbf{P}\&\mathbf{U} \vdash \mathbf{C}\vee\neg\mathbf{P}}$$

il cui significato è il seguente:
"**se** vale $\mathbf{P}\&\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{C}$ **allora** vale pure $\mathbf{P}\&\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{C}\vee\neg\mathbf{P}$"

In particolare presenteremo un calcolo con due tipi di regole: quelle ad una premessa della forma

$$\frac{\mathbf{\Gamma'}\vdash\mathbf{\Delta'}}{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}}\ \textbf{regola1}$$

e quelle a due premesse della forma

$$\frac{\mathbf{\Gamma''}\vdash\mathbf{\Delta''}\quad \mathbf{\Gamma}\text{"}''\vdash\mathbf{\Delta}\text{"}''}{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}}\ \textbf{regola2}$$

In entrambe le regole i sequenti sopra la sbarra $\mathbf{\Gamma'}\vdash\mathbf{\Delta'}$ nella regola 1 e i sequenti $\mathbf{\Gamma''}\vdash\mathbf{\Delta''}$ e $\mathbf{\Gamma}\text{"}''\vdash\mathbf{\Delta}\text{"}''$ nella regola 2 si dicono **premesse**, mentre il sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ in entrambi i casi si dice **conclusione**.

Poi nei nostri calcoli dei sequenti avremo anche regole a zero premesse che chiamiamo **assiomi**. Per esempio nel calcolo dei sequenti per la logica classica metteremo come assioma uno della forma

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{\Gamma_1},\mathbf{A},\mathbf{\Gamma_2}\vdash\mathbf{\Delta_1},\mathbf{A},\mathbf{\Delta_2}\end{array}$$

e un'altro della forma

$$\begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \mathbf{\Gamma},\bot,\mathbf{\Gamma'}\vdash\nabla\end{array}$$

L'idea è di usare le regole per trasformare sequenti a partire dagli assiomi in modo da *conservare il loro valore di verità dall'ALTO verso il BASSO.*

9.2.1 Regole del calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$

Ora presentiamo il calcolo dei sequenti LC_p per la Logica Classica Proposizionale che contiene regole per i connettivi $\bot$, &, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ assieme all' **assioma identità** e alle regole di **scambio a destra e a sinistra** in forma di *schemi di assiomi*

$$\begin{array}{ccc}
\text{ax-id} & \text{ax-}\bot & \text{ax-}\mathtt{tt}\\
\Gamma,A,\Gamma'\vdash\Delta,A,\Delta' & \Gamma,\bot,\Gamma'\vdash\nabla & \Gamma\vdash\nabla,\mathtt{tt},\nabla'
\end{array}$$

$$\frac{\Sigma,\Gamma,\Theta,\Gamma',\Delta\vdash\Sigma'}{\Sigma,\Gamma',\Theta,\Gamma,\Delta\vdash\Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}}\qquad \frac{\Gamma\vdash\Sigma,\Delta,\Theta,\Delta',\nabla}{\Gamma\vdash\Sigma,\Delta',\Theta,\Delta,\nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma\vdash A,\Delta\quad \Gamma\vdash B,\Delta}{\Gamma\vdash A\&B,\Delta}\ \&-\mathrm{D}\qquad \frac{\Gamma,A,B\vdash\Delta}{\Gamma,A\&B\vdash\Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma\vdash A,B,\Delta}{\Gamma\vdash A\vee B,\Delta}\ \vee-\mathrm{D}\qquad \frac{\Gamma,A\vdash\Delta\quad \Gamma,B\vdash\Delta}{\Gamma,A\vee B\vdash\Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma,A\vdash\Delta}{\Gamma\vdash\neg A,\Delta}\ \neg-\mathrm{D}\qquad \frac{\Gamma\vdash A,\Delta}{\Gamma,\neg A\vdash\Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma,A\vdash B,\Delta}{\Gamma\vdash A\rightarrow B,\Delta}\ \rightarrow-\mathrm{D}\qquad \frac{\Gamma\vdash A,\Delta\quad \Gamma,B\vdash\Delta}{\Gamma,A\rightarrow B\vdash\Delta}\ \rightarrow-\mathrm{S}$$

ovvero il calcolo contiene *TUTTE le istanze di assiomi e regole ottenute da quelle sopra istanziando le variabili* **A** *e* **B** *con proposizioni arbitrarie e i contesti denotati con lettere greche* $\mathbf{\Gamma},\mathbf{\Delta},\mathbf{\Sigma},\mathbf{etc.}$ *con liste arbitrarie di proposizioni (anche vuote).*

Per esempio l'assioma identità è uno *schema* di assiomi uno per ogni sostituzione delle lettere greche $\mathbf{\Gamma},\mathbf{\Delta},\mathbf{\Sigma},\mathbf{etc.}$ con liste precise di proposizioni e le lettere **A** e **B** con proposizioni qualsiasi come l'assioma

$$\mathbf{B\&C}\vdash\mathbf{B\&C}$$

che è l'istanza dell'assioma identità **ax-id** con $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma'}$, $\mathbf{\Delta}$ e $\mathbf{\Delta'}$ tutte liste vuote e con al posto di A la proposizione $B\&C$.

Un esempio di regola del calcolo ottenuta per istanziazione di uno schema sopra è

$$\frac{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P} \quad \mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{C}\vee\mathbf{P}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash(\mathbf{Q}\&\mathbf{P})\&(\mathbf{C}\vee\mathbf{P})}\ \&-\mathrm{D}$$

che è una corretta istanza della regola $\&-$D, detta anche *applicazione (dello schema) della regola* $\&-$D

$$\frac{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{A},\mathbf{\Delta} \quad \mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{B},\mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{A}\&\mathbf{B},\mathbf{\Delta}}\ \&-\mathrm{D}$$

ove al posto di $\mathbf{A}$ c'è $\mathbf{Q}\&\mathbf{P}$ e al posto di $\mathbf{B}$ c'è $\mathbf{C}\vee\mathbf{P}$ e al posto di $\mathbf{\Gamma}$ c'è la lista di una sola proposizione $\mathbf{P}\&\mathbf{Q}$ e al posto di $\mathbf{\Delta}$ c'è la lista vuota.

9.2.2 Definizione di albero e albero di derivazione in $\mathbf{LC}_p$

Il nostro calcolo $\mathbf{LC}_p$ serve a costruire **alberi di derivazione**.

Intuitivamente un'albero è ottenuto a partire da un sequente $\Gamma\vdash\Delta$, detto *radice*, applicando le regole del calcolo *dal basso verso l'alto* al fine di costruire oggetti della forma

$$\cfrac{\mathbf{\Gamma_1}\vdash\mathbf{\Delta_1} \qquad \cfrac{\cfrac{\mathbf{\Gamma_5}\vdash\mathbf{\Delta_5}}{\Gamma_3\vdash\Delta_3}\ \textbf{regola1} \quad \cfrac{\mathbf{\Gamma_6}\vdash\mathbf{\Delta_6}}{\Gamma_4\vdash\Delta_4}\ \textbf{regola1}}{\Gamma_2\vdash\Delta_2}\ \textbf{regola2}}{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}}\ \textbf{regola2}$$

all'interno dei quali chiameremo *foglie* i sequenti premesse di regole che non sono conclusioni di altre regole, che nella costruzione sopra sono $\mathbf{\Gamma_1}\vdash\mathbf{\Delta_1}$, $\mathbf{\Gamma_5}\vdash\mathbf{\Delta_5}$, $\mathbf{\Gamma_6}\vdash\mathbf{\Delta_6}$.

Si noti che siccome considereremo solo regole con al più due premesse allora ogni albero di derivazione avrà nodi con al più due predecessori.

Per esempio nell'albero

$$\cfrac{\Gamma_1\vdash\Delta_1 \qquad \cfrac{\cfrac{\Gamma_5\vdash\Delta_5}{\Gamma_3\vdash\Delta_3}\ \textbf{regola1} \quad \cfrac{\Gamma_6\vdash\Delta_6}{\Gamma_4\vdash\Delta_4}\ \textbf{regola1}}{\Gamma_2\vdash\Delta_2}\ \textbf{regola2}}{\Gamma\vdash\Delta}\ \textbf{regola2}$$

la radice $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ ha due predecessori $\mathbf{\Gamma_1}\vdash\mathbf{\Delta_1}$ e $\mathbf{\Gamma_2}\vdash\mathbf{\Delta_2}$ ed è stata ottenuta applicando la **regola 2**.

Introduciamo la definizione precisa di albero nel calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$:

Def. 9.1 (albero nel calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$) Un albero π nel calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$ nel linguaggio $\mathcal{L}$ è definito per induzione come segue.

1. Ogni sequente

$$\Gamma\vdash\mathbf{\Delta}$$

   nel linguaggio $\mathcal{L}$ è un albero nel calcolo $\mathbf{LC}_p$ avente il sequente $\Gamma\vdash\mathbf{\Delta}$ sia come *radice* che come *unica foglia*.

2. Dato un albero nel calcolo $\mathbf{LC}_p$

$$\cfrac{\pi_1}{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}}$$

   allora

$$\cfrac{\cfrac{\pi_1}{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}}}{\mathbf{\Gamma'}\vdash\mathbf{\Delta'}}\ reg*$$

   ottenuto estendendo π con una regola $reg*$ del calcolo $\mathbf{LC}_p$ è un albero nel calcolo $\mathbf{LC}_p$ con *radice* $\Gamma'\vdash\mathbf{\Delta'}$ e con *foglie quelle di* π_1.

3. Dati due alberi nel calcolo $\mathbf{LC}_p$

$$\frac{\pi_1}{\mathbf{\Gamma_1} \vdash \mathbf{\Delta_1}} \qquad\qquad \frac{\pi_2}{\mathbf{\Gamma_2} \vdash \mathbf{\Delta_2}}$$

allora

$$\cfrac{\cfrac{\pi_1}{\mathbf{\Gamma_1} \vdash \mathbf{\Delta_1}} \quad \cfrac{\pi_2}{\mathbf{\Gamma_2} \vdash \mathbf{\Delta_2}}}{\mathbf{\Gamma_3} \vdash \mathbf{\Delta_3}}\ reg*$$

ottenuto estendendo π_1 e π_2 con una regola di di $\mathbf{LC}_p$ è un albero nel calcolo $\mathbf{LC}_p$ con *radice* $\Gamma_3 \vdash \mathbf{\Delta_3}$ e con *foglie l'unione di quelle di* π_1 *e quelle di* π_2.

Poi chiaremo *albero di derivazione* di un sequente un albero avente tal sequente come radice e TUTTE le foglie come assiomi.

Def. 9.2 (derivazione di un sequente) Una **derivazione** del sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ nel calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$ in un linguaggio $\mathcal{L}$ è un albero π del calcolo $\mathbf{LC}_p$ avente

- $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ come radice;

- ogni foglia di π è istanza di un assioma di $\mathbf{LC}_p$.

Def. 9.3 (sequente derivabile) Un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ si dice `derivabile` nel calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$ se esiste un *albero di derivazione* avente come *radice* $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$

In altri termini un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è `derivabile` nel calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$ se esiste un albero in cui

- $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è la radice;

- ogni foglia è istanza di un assioma di $\mathbf{LC}_p$
ottenuto **sostituendo** le variabili $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ con arbitrarie proposizioni $\mathtt{pr_1}$ e $\mathtt{pr_2}$
e le variabili $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Delta}$, ∇, $\mathbf{\Sigma}$ con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).

- l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di $\mathbf{LC}_p$
ottenute **sostituendo** le variabili $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ con arbitrarie proposizioni $\mathtt{pr_1}$ e $\mathtt{pr_2}$
e le variabili $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Delta}$, ∇, $\mathbf{\Sigma}$ con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).

9.2.3 Quali sono gli assiomi in $\mathbf{LC_p}$

Gli assiomi in $\mathbf{LC_p}$ sono di tre tipi: gli assiomi identità, gli assiomi del falso e quelli del vero

ax-id	**ax-**$\bot$	ax-$\mathtt{tt}$
$\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'$	$\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla$	$\Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'$

Quindi un albero costruito a partire da un sequente è una derivazione se e solo se le sue foglie sono istanze degli assiomi sopra.

Si noti che è *assioma identità OGNI sequente* che ha *ALMENO UNA PROPOSIZIONE (o ATOMICA o COMPOSTA) che compare a sx e a dx del segno di sequente* $\vdash$.

Ad esempio si noti che il sequente

$$\mathbf{A}\vdash\mathbf{A}$$

è un'istanza dell'assioma identità **ax-id** con $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma'}$, $\mathbf{\Delta}$ e $\mathbf{\Delta'}$ tutte liste vuote.

Pure una qualsiasi proposizione pr dà luogo con

$$\mathbf{\Gamma}, \mathtt{pr}, \mathbf{\Gamma'} \vdash \mathbf{\Delta}, \mathtt{pr}, \mathbf{\Delta'}$$

ad un'istanza dell'assioma identità **ax-id** dopo aver sostituito proprio pr al posto di $\mathbf{A}$.

Ad esempio il sequente

$$\mathbf{C}, \mathbf{P}, \mathbf{A}\&(\mathbf{B} \to \mathbf{C}), \mathbf{M} \ \vdash \mathbf{H}\&\mathbf{C}, \mathbf{A}\&(\mathbf{B} \to \mathbf{C})$$

è *assioma identità* ove al posto di $\mathbf{\Gamma}$ c'è $\mathbf{C}, \mathbf{P}$, al posto di $\mathbf{A}$ c'è $\mathbf{A}\&(\mathbf{B} \to \mathbf{C})$, al posto di $\mathbf{\Gamma'}$ c'è $\mathbf{M}$, al posto $\mathbf{\Delta}$ c'è $\mathbf{H}\&\mathbf{C}$ e al posto di $\mathbf{\Delta'}$ c'è la lista vuota.

Si noti che uno stesso sequente può essere riconosciuto assioma identità con diverse sostituzioni delle variabili di contesto che compaiono nello schema dell'assioma identità

$$\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{\Gamma'} \vdash \mathbf{\Delta}, \mathbf{A}, \mathbf{\Delta'}$$

Ad esempio il sequente

$$\mathbf{B}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S} \vdash \mathbf{H}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S}, \mathbf{M}$$

è un'istanza dell'assioma identità **ax-id** dopo aver sostituito nello schema sopra $\mathbf{A}$ con $\mathbf{S}$ e aver posto $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{B}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}$, la lista vuota al posto di $\mathbf{\Gamma'}$ e aver posto $\mathbf{\Delta} \equiv \mathbf{H}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}$ e infine $\mathbf{\Delta'} \equiv \mathbf{M}$.

Però lo stesso sequente

$$\mathbf{B}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S} \vdash \mathbf{H}, \mathbf{D} \vee \mathbf{C}, \mathbf{S}, \mathbf{M}$$

è ANCHE istanza dello schema assioma identità

$$\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{\Gamma'} \vdash \mathbf{\Delta}, \mathbf{A}, \mathbf{\Delta'}$$

in altro modo sostituendo $\mathbf{A}$ con $\mathbf{D} \vee \mathbf{C}$ e ponendo $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{B}$, poi $\mathbf{\Gamma'} \equiv \mathbf{S}$ e $\mathbf{\Delta} \equiv \mathbf{H}$ e infine $\mathbf{\Delta'} \equiv \mathbf{S}, \mathbf{M}$.

In sostanza un sequente è un assioma identità se compare ALMENO una *stessa proposizione* a sinistra e a destra del segno $\vdash$ e quindi a maggior ragione nei casi in cui compaiono più proposizioni sia a dx che a sx del segno $\vdash$.

9.2.4 Esempio di derivazione in $\mathbf{LC_p}$

Se ad esempio vogliamo costruire un albero di derivazione per il sequente

$$\mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}\&\mathbf{P}$$

dobbiamo scrivere il sequente come radice dell'albero e quindi costruire l'albero di derivazione dal BASSO verso l'ALTO applicando le regole, per esempio la $\&-\mathrm{D}$ come segue

$$\frac{\mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \quad \mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}\&\mathbf{P}}$$

Il lettore noti che questa regola è un'istanza della regola $\&-\mathrm{D}$ del calcolo ottenuta ponendo: $\mathbf{Q}$ al posto di $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ al posto di $\mathbf{B}$ e la lista vuota al posto di $\mathbf{\Delta}$ e $\mathbf{P}\&\mathbf{Q}$ al posto di $\mathbf{\Gamma}$.

Si noti che il pezzo di derivazione

$$\frac{\mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \quad \mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{P}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}\&\mathbf{P}}\ \&-\mathrm{D}$$

NON è albero di derivazione completo perchè le sue foglie non sono assiomi!

Invece applicando altre regole arriviamo a questo albero di derivazione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{\mathbf{P},\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}}\;\&-\mathrm{S} \qquad \dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{\mathbf{P},\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}}\;\&-\mathrm{S}}{\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}}\;\&-\mathrm{D}$$

ove $\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}$ è la RADICE mentre $\mathbf{P},\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}$ e $\mathbf{P},\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}$ sono rispettivamente foglie del ramo di sinistra e di quello di destra.

ATTENZIONE: nelle regole dei sequenti le METAvariabili date da lettere greche MAIUSCOLE Γ e Δ, Σ.. stanno per LISTE DI PROPOSIZIONI anche VUOTE
e quindi NON compaiono mai in un sequente ottenuto da una TRADUZIONE in linguaggio formale di un enunciato in linguaggio naturale.

Inoltre nel tradurre enunciati nel linguaggio naturale in sequenti, di solito faremo uso solo di alcune forme di sequenti e in particolare quelli della forma

$$\vdash \mathtt{pr}$$

oppure

$$\mathsf{pr}_{\mathbf{1}}, \mathsf{pr}_{\mathbf{2}}, \ldots \mathsf{pr}_{\mathbf{n}} \quad \vdash \quad \mathtt{cl}$$

e gli altri tipi di sequenti, eccetto l'ultimo, compariranno eventualmente nei possibili alberi avente i sequenti sopra come radice e ottenuti applicando regole del calcolo che dal basso verso l'alto diminuiscono il numero dei connettivi presenti nelle proposizioni che compaiono nei sequenti conclusioni delle regole applicate.

9.2.5 Come si sarebbe potuto scrivere il calcolo $\mathbf{LC}_p$

Dopo la descrizione delle regole del calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$ in 9.2 abbiamo precisato che le regole si possono applicare anche a sequenti ottenuti sostituendo le variabili proposizionali $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ con arbitrarie proposizioni $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$. Per rendere più esplicita ed evidente questa proprietà possiamo descrivere il calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$ in modo equivalente scrivendo le regole con $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$, che chiamiamo META-variabili per proposizioni complesse arbitrarie, al posto di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ (la differenza tra le variabili proposizionali $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e le META-variabili $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$ è che le prime sono i costituenti di base della grammatica delle proposizioni per formare proposizioni complesse, ad esempio $\mathbf{A}\&(\mathbf{B}\vee\mathbf{C}) \to \mathbf{D}$, mentre le seconde sono solo variabili di più alto livello per indicare una proposizione complessa):

$$\begin{array}{ccc}
\textbf{ax-id} & \textbf{ax-}\bot & \text{ax-}\top \\
\Gamma,\mathtt{pr}_1,\Gamma'\vdash\Delta,\mathtt{pr}_1,\Delta' & \Gamma,\bot,\Gamma'\vdash\nabla & \Gamma\vdash\nabla,\top,\nabla'
\end{array}$$

$$\dfrac{\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Gamma},\mathbf{\Theta},\mathbf{\Gamma}',\mathbf{\Delta}\vdash\mathbf{\Sigma}'}{\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Gamma}',\mathbf{\Theta},\mathbf{\Gamma},\mathbf{\Delta}\vdash\mathbf{\Sigma}'}\;\mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \dfrac{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Delta},\mathbf{\Theta},\mathbf{\Delta}',\nabla}{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Delta}',\mathbf{\Theta},\mathbf{\Delta},\nabla}\;\mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\dfrac{\Gamma\vdash\mathtt{pr}_1,\Delta \quad \Gamma\vdash\mathtt{pr}_2,\Delta}{\Gamma\vdash(\mathtt{pr}_1)\&(\mathtt{pr}_2),\Delta}\;\&-\mathrm{D} \qquad \dfrac{\Gamma,\mathtt{pr}_1,\mathtt{pr}_2\vdash\Delta}{\Gamma,(\mathtt{pr}_1)\&(\mathtt{pr}_2)\vdash\Delta}\;\&\mathrm{S}$$

$$\dfrac{\Gamma\vdash\mathtt{pr}_1,\mathtt{pr}_2,\Delta}{\Gamma\vdash(\mathtt{pr}_1)\vee(\mathtt{pr}_2),\Delta}\;\vee\mathrm{D} \qquad \dfrac{\Gamma,\mathtt{pr}_1\vdash\Delta \quad \Gamma,\mathtt{pr}_2\vdash\Delta}{\Gamma,(\mathtt{pr}_1)\vee(\mathtt{pr}_2)\vdash\Delta}\;\vee-\mathrm{S}$$

$$\dfrac{\Gamma,\mathtt{pr}_1\vdash\Delta}{\Gamma\vdash\neg(\mathtt{pr}_1),\Delta}\;\neg-\mathrm{D} \qquad \dfrac{\Gamma\vdash\mathtt{pr}_1,\Delta}{\Gamma,\neg(\mathtt{pr}_1)\vdash\Delta}\;\neg-\mathrm{S}$$

$$\dfrac{\Gamma,\mathtt{pr}_1\vdash\mathtt{pr}_2,\Delta}{\Gamma\vdash(\mathtt{pr}_1)\to(\mathtt{pr}_2),\Delta}\;\to-\mathrm{D} \qquad \dfrac{\Gamma\vdash\mathtt{pr}_1,\Delta \quad \Gamma,\mathtt{pr}_2\vdash\Delta}{\Gamma,(\mathtt{pr}_1)\to(\mathtt{pr}_2)\vdash\Delta}\;\to-\mathrm{S}$$

9.2.6 Idea intuitiva di sequente e sue derivazioni

Dal punto di vista logico un *sequente* è un *giudizio assertivo* mentre una derivazione di un sequente rappresenta un'*argomentazione* che ne prova la validità. Possiamo inoltre pensare la **deduzione di un sequente** come la *scrittura di un programma* ove il *linguaggio di programmazione* è il **calcolo dei sequenti**.

9.2.7 Test sulla comprensione del concetto di derivazione

1. La seguente è una derivazione in logica classica proposizionale LC_p

$$\dfrac{\mathbf{P\&Q\vdash Q} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{P,Q\vdash P}\end{array}}{\mathbf{P\&Q\vdash P}}\ \&-\mathrm{S}}{\mathbf{P\&Q\vdash Q\&P}}$$

   ?

   Risposta: NO, perchè la sua foglia di sinistra è $\mathbf{P\&Q\vdash Q}$ che NON è un'istanza di un'assioma.

2. la scrittura sotto è un pezzo di albero costruito con un'istanza di una regola del calcolo LC_p

$$\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ A,B,C\vdash A\end{array}}{A\&B,C\vdash A}\ \&-\mathrm{S}$$

   ?

   NO, perchè l'applicazione $\&-\mathrm{S}$ è scorretta, OCCORRE operare uno scambio prima di applicarla! Una corretta applicazione di $\&-\mathrm{S}$ è nel seguente albero

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ C,A,B\vdash A\end{array}}{C,A\&B\vdash A}\ \&-\mathrm{S}}{A\&B,C\vdash A}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}$$

   che è una corretta derivazione.

   MORALE: occorre RICORDARE di operare gli SCAMBI necessari!

3. Derivare in LC_p

$$A\&B \vdash B\&A$$

   Basta prendere la derivazione di $\mathbf{P\&Q} \vdash \mathbf{Q\&P}$ in sezione 9.2.4 e sostituire P con A e Q con B.

4. Derivare in LC_p

$$(\mathbf{A}\&\mathbf{B})\&\mathbf{C}\vdash\mathbf{A}\&(\mathbf{B}\&\mathbf{C})$$

   Esistono derivazioni diverse di uno stesso sequente?

   Sì generalmente vi sono diverse derivazioni avente come radice uno stesso sequente. Ecco qui una per $(A\&B)\&C\vdash A\&(B\&C)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ C,A,B\vdash A\end{array}}{C,A\&B\vdash A}\,\&-\mathrm{S}}{A\&B,C\vdash A}\,\mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}}{(A\&B)\&C\vdash A}\,\&-\mathrm{S}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ C,A,B\vdash B\end{array}\quad\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ C,A,B\vdash C\end{array}}{C,A,B\vdash B\&C}\,\&-\mathrm{D}}{C,A\&B\vdash B\&C}\,\&-\mathrm{S}}{A\&B,C\vdash B\&C}\,\mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}}{(A\&B)\&C\vdash B\&C}\,\&-\mathrm{S}}{(A\&B)\&C\vdash A\&(B\&C)}\,\&-\mathrm{D}
$$

Ma questa derivazione NON è la più corta. Una più corta si ottiene applicando la regola &−D il più tardi possibile.

5. Si noti che per derivare in LC_p

$$\mathbf{A}\&(\mathbf{P}\to\mathbf{C})\vdash(\mathbf{P}\to\mathbf{C})\&\mathbf{A}$$

basta prendere la derivazione sopra di $\mathbf{P}\&\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\&\mathbf{P}$ in sezione 9.2.4 e sostituire $\mathbf{P}$ con $\mathbf{A}$ e $\mathbf{Q}$ con $\mathbf{P}\to\mathbf{C}$. ottenendo

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{A},\mathbf{P}\to\mathbf{C}\vdash\mathbf{P}\to\mathbf{C}\end{array}}{\mathbf{A}\&(\mathbf{P}\to\mathbf{C})\vdash\mathbf{P}\to\mathbf{C}}\,\&-\mathrm{S}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{A},\mathbf{P}\to\mathbf{C}\vdash\mathbf{A}\end{array}}{\mathbf{A}\&(\mathbf{P}\to\mathbf{C})\vdash\mathbf{A}}\,\&-\mathrm{S}}{\mathbf{A}\&(\mathbf{P}\to\mathbf{C})\vdash(\mathbf{P}\to\mathbf{C})\&\mathbf{A}}\,\&-\mathrm{D}
$$

In particolare si noti che *il sequente foglia* $\mathbf{A},\mathbf{P}\to\mathbf{C}\vdash\mathbf{P}\to\mathbf{C}$ *è un assioma identità ove vi è una proposizione complessa a destra e a sinistra del segno* $\vdash$ *e quindi non c'è bisogno di continuare a derivare fino ad ottenere sequenti senza proposizioni complesse*!!

In conclusioni questo esempio mostra che le derivazioni sono chiuse per sostituzioni delle loro variabili proposizionali, ossia le proposizioni atomiche, con generiche proposizioni:

una derivazione di un sequente **rimane derivazione** *anche dopo aver* **sostituito TUTTE LE OCCORRENZE** *di alcune delle sue variabili proposizionali* *con PROPOSIZIONI ARBITRARIE*

9.3 Classificazione della verità di un sequente in logica classica

Possiamo trasferire ai sequenti la classificazione della verità di una proposiizione formale in logica classica riferendola alla proposizione che i sequenti rappresentano.

Def. 9.4 La **tabella di verità di un sequente**

$$\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$$

è la tabella di verità della proposizione

$$\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$$

che rappresenta il suo significato secondo la logica classica.

Quindi diciamo che un sequente è valido se lo è la proposizione implicativa che lo rappresenta come segue:

un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è una **tautologia classica** o è (**valido classicamente**) sse $\mathbf{\Gamma}^{\&} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è una **tautologia**

un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è **NON valido classicamente** sse $\mathbf{\Gamma}^{\&} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **NON valido classicamente**

un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è **soddisfacibile classicamente** sse $\mathbf{\Gamma}^{\&} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **soddisfacibile classicamente**

un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è **insoddisfacibile** o **contraddittorio** o **paradossale** sse $\Gamma^{\&} \quad \rightarrow \quad \Delta^{\vee}$ è **insoddisfacibile** o **contraddittorio** o **paradossale**

Con queste definizioni dovrebbe risultare ancora più chiaro che il motivo per cui il contesto vuoto a sinistra del sequente si interpreta come la costante vero $\mathtt{tt}$ è per indicare che

$$\vdash \mathsf{p}r \quad \text{è valido} \qquad \text{sse} \qquad \mathtt{tt} \rightarrow \mathsf{p}r \text{ è tautologia}$$

e siccome

$$(\mathtt{tt} \rightarrow \mathsf{p}r) \; \leftrightarrow \; \mathsf{p}r$$

è una tautologia si deduce che

$$\vdash \mathsf{p}r \quad \text{è valido} \qquad \text{sse} \qquad \mathsf{p}r \text{ è tautologia}$$

Inoltre anche

$$\mathtt{tt}\ \&\ \mathsf{p}r \leftrightarrow \mathsf{p}r$$

è una tautologia ovvero la costante vero è elemento neutro per la congiunzione e può essere sempre aggiunta ad un congiunto senza alterarne il valore di veritá (come d'altra parte la lista vuota aggiunta ad una lista è uguale alla lista stessa).

Similmente il motivo per cui il contesto vuoto a destra del sequente si interpreta come la costante falso $\perp$ è per indicare che

$$\mathsf{p}r\ \vdash \quad \text{è valido} \quad \text{sse} \quad \mathsf{p}r \to \perp \ \text{è tautologia}$$

e siccome pure

$$(\mathsf{p}r \to \perp)\ \leftrightarrow\ \neg\mathsf{p}r$$

è una tautologia si deduce che

$$\mathsf{p}r \vdash \quad \text{è valido} \qquad \text{sse} \qquad \neg\mathsf{p}r \ \text{è tautologia}$$

Inoltre pure

$$\perp\ \vee\ \mathsf{p}r\ \leftrightarrow\ \mathsf{p}r$$

è una tautologia ovvero il falso è elemento neutro per la disgiunzione e può essere sempre aggiunto ad un disgiunto senza alterarne il valore di verità.

9.3.1 Alla ricerca della validità con il calcolo dei sequenti

Useremo il calcolo dei sequenti per stabilire la verità di una proposizione formale e di un sequente per il fatto che vale la seguente identificazione del concetto di derivabilità e quello di validità:

$\vdash \mathtt{pr}$ è *radice di una derivazione* in $\mathbf{LC}_p$
sse
$\mathtt{pr}$ è una *tautologia*
ovvero la sua **tabella di verità** ha **1** in ogni uscita

e più in generale

$\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è radice di una derivazione in $\mathbf{LC}_p$
sse
$\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è TAUTOLOGIA
ovvero
$\mathbf{\Gamma}^{\&} \to \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è TAUTOLOGIA

Nel seguito andiamo a dimostrare il motivo per cui il concetto di **sequente derivabile** coincide con quello di **sequente valido**. Innanzitutto mostreremo che gli *assiomi sono sequenti validi.* Se poi riusciamo a mostrare che anche *le regole del calcolo sono valide*, e in particolare che conservano la VERITÀ dall'ALTO verso il BASSO allora ne risulta che una derivazione avente come radice un sequente del tipo $\vdash \mathtt{pr}$ rende tale sequente valido perchè la validità SCENDE dalle foglie con assiomi validi fino alla radice come esemplificato in questa derivazione di un verso dell'associatività della congiunzione

$$
\cfrac{
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\textbf{valido}\\ C,A,B\vdash A\end{array}}{C,A\&B\vdash A}\Downarrow\textbf{valido}}{A\&B,C\vdash A}\Downarrow\textbf{valido}}{(A\&B)\&C\vdash A}\Downarrow\textbf{valido}
\quad \textbf{e} \quad
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\textbf{valido}\\ C,A,B\vdash B\end{array}\quad\textbf{e}\quad\begin{array}{c}\textbf{valido}\\ C,A,B\vdash C\end{array}}{C,A,B\vdash B\&C}\Downarrow\textbf{valido}}{C,A\&B\vdash B\&C}\Downarrow\textbf{valido}}{A\&B,C\vdash B\&C}\Downarrow\textbf{valido}}{(A\&B)\&C\vdash B\&C}\Downarrow\textbf{valido}
}{(A\&B)\&C\vdash A\&(B\&C)}\Downarrow\textbf{valido}
$$

9.3.2 Soddisfacibilità di un sequente su una riga

Diciamo che un sequente è vero su una riga se lo è la proposizione implicativa che lo rappresenta:

Def. 9.5 (sequente vero su una riga) Un sequente $\Gamma\vdash\Delta$ è *vero su una riga* contenente le variabili proposizioni del sequente sse la proposizione

$$\Gamma^{\&} \;\rightarrow\; \Delta^{\vee}$$

è vera sulla riga considerata.

Si osservi che possiamo associare ad una proposizione `pr` INFINITE TABELLE di VERITÀ, una per OGNI lista finita di variabili proposizionali che INCLUDANO le variabili effettivamente presenti in `pr`.

Ad esempio alla proposizione **A&B** e ad una lista arbitraria di variabili proposizionali contenenti **A** e **B** possiamo associare una tabella di verità il cui valore in uscita è però determinato solo dai valori su **A** e **B**:

A	B	...	V_n	$A\&B$
0	1	...	...	**0**
0	0	...	...	**0**
1	1	...	...	**1**
1	0	......	...	**0**
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

9.4 Procedura di decisione per proposizioni classiche e sequenti in $\mathbf{LC}_p$

Come già anticipato una caratteristica importante delle regole del calcolo $\mathbf{LC}_p$ è che il concetto di DERIVABILITÀ di un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ nel calcolo COINCIDE con il suo essere una TAUTOLOGIA. E non solo...perchè addirittura esiste una PROCEDURA di decisione per **decidere** se un sequente è **derivabile** o meno e quindi **valido** o meno in $\mathbf{LC}_p$. Tale procedura induce una PROCEDURA di DECISIONE della VALIDITÀ di una proposizione `pr` qualsiasi, semplicemente perchè si applica la procedura di decisione di derivazione di un sequente al sequente $\vdash$ `pr` ricordando che la validità del sequente $\vdash$ `pr` coincide con la validità di `tt` $\rightarrow$ **pr** e quindi di **pr**.

L'esistenza di tali procedure si basa essenzialmente su due fatti:

- le regole di $\mathbf{LC}_p$ conservano la verità su ogni riga di variabili proposizionali (che include quelle presenti nei sequenti coinvolti nella regola) sia dall'ALTO delle premesse verso il BASSO della conclusione ma anche anche dalla conclusione in BASSO verso ciascuna premessa in ALTO;
- tutte le regole di $\mathbf{LC}_p$ eccetto quelle degli scambi a sx e a dx, DIMINUISCONO di COMPLESSITÀ dal BASSO verso l'ALTO.

In pratica dato un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ andiamo a costruire un albero applicando innanzittutto tutte le regole di $\mathbf{LC}_p$ relative ai connettivi occorrenti nelle proposizioni composte del sequente, aiutati dalle regole di scambio quando necessario, fino ad ottenere delle foglie che o sono costituite da assiomi oppure sono costituite da sole variabili proposizionali senza alcuna proposizioni composta.

9.4.1 Procedura di decisione su derivabilità di sequenti in $\mathbf{LC}_p$

Per stabilire se $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è una **tautologia classica** basta cercare una sua derivazione secondo la procedura che segue:

$$\text{1. } \mathbf{\Gamma}\vdash\nabla \text{ è assioma?} \quad \begin{cases} \text{sì} & \text{vai in } 5. \\ \text{no} & \text{vai in } 2. \\ & \text{se in } \mathbf{\Gamma} \text{ o in } \nabla \text{ c'è una proposizione composta} \\ & \text{altrimenti STOP} \end{cases}$$

2. Scegli in $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ una proposizione composta, diciamo $\mathtt{pr_1}\circ\mathtt{pr_2}$ per esempio (includendo anche il caso $\mathtt{pr_1}\circ\mathtt{pr_2} \equiv \neg\mathtt{pr_1}$).
$\mathtt{pr_1}\circ\mathtt{pr_2}$ è in posizione buona per applicare ad essa una SUA regola (a dx se $\mathtt{pr_1} \circ \mathtt{pr_2}$ sta a dx di $\vdash$ nel sequente, a sx se $\mathtt{pr_1}\circ\mathtt{pr_2}$ sta a sx di $\vdash$)? $\begin{cases} \text{sì} & \text{vai in } 4. \text{ operando su } \mathtt{pr_1}\circ\mathtt{pr_2} \\ \text{no} & \text{vai in } 3. \text{ operando su } \mathtt{pr_1}\circ\mathtt{pr_2} \end{cases}$

3. se operi su $\mathtt{pr_1}\circ\mathtt{pr_2}$ fai uno scambio per portarla in posizione buona da poter applicare la sua regola e vai in 4. operando su $\mathtt{pr_1}\circ\mathtt{pr_2}$.

4. se operi su $\mathtt{pr_1}\circ\mathtt{pr_2}$ applica la sua regola. Quante premesse ha la regola?

$$\begin{cases} \text{una} & \text{vai in } 1. \text{ operando sulla premessa} \\ \text{due} & \text{scegli la prima premessa e vai in } 1. \text{ operando su di essa} \end{cases}$$

5. nell'albero ottenuto c'è foglia che NON è assioma con almeno una proposizione composta?

$$\begin{cases} \text{sì} & \text{scegli la foglia NON assioma e vai in } 2. \\ & \text{operando su di lei} \\ \text{no} & \text{STOP} \end{cases}$$

CONCLUSIONE:
1. se nell'albero ottenuto tutte le foglie sono assiomi, allora $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ è derivabile in $\mathbf{LC}_p$
e quindi $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ è una **tautologia** e quindi un sequente **valido classicamente**
oppure
2. se nell'albero ottenuto qualche foglia NON è assioma, allora $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ NON è DERIVABILE in $\mathbf{LC}_p$,
e quindi $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ è **NON valido** in logica classica.

9.4.2 Come trovare riga in cui un sequente NON valido è falso

Se l'algoritmo sopra per $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ si ferma con una foglia

$$\mathbf{\Gamma}' \vdash \nabla'$$

che NON è un assioma allora

UNA riga della tabella di verità del sequente di partenza $\Gamma\vdash\nabla$ che lo rende **falso** si ottiene ponendo

- $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ per ogni variabile $\mathbf{A}$ in $\mathbf{\Gamma}'$
- $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ per ogni variabile $\mathbf{B}$ in ∇'

e tutte le altre variabili proposizionali in $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ con valori A PIACERE.

In particolare

1. se la foglia NON assioma è del tipo

$$\mathbf{A_{i_1}}, \ldots \mathbf{A_{i_n}} \vdash \mathbf{V_{k_1}}, \ldots \mathbf{V_{k_m}}$$

e quindi

$$\{\mathbf{A_{i_1}}, \ldots \mathbf{A_{i_n}}\} \bigcap \{\mathbf{V_{k_1}}, \ldots \mathbf{V_{k_m}}\} = \emptyset$$

allora
OGNI riga della tabella di $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ con

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A_{i_j}} \ = \ \mathbf{1} & \qquad & \mathbf{V_{k_j}} \ = \ \mathbf{0} \\ \text{per } j = 1, \ldots, n & & \text{per } j = 1, \ldots, m \end{array}$$

dà valore **0** alla proposizione $\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\nabla^{\vee}$.

2. se la foglia NON assioma è del tipo

$$\vdash \mathbf{V_{k_1}}, \ldots \mathbf{V_{k_m}}$$

allora
OGNI riga della tabella di $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ con

$$\begin{array}{c} \mathbf{V_{k_j}} \ = \ \mathbf{0} \\ \text{per } j = 1, \ldots, m \end{array}$$

dà valore **0** al sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ ovvero alla proposizione $\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\nabla^{\vee}$.

3. se la foglia NON assioma è del tipo

$$\mathbf{A_{i_1}}, \ldots \mathbf{A_{i_n}} \vdash$$

allora
OGNI riga della tabella di $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ con

$$\begin{array}{c} \mathbf{A_{i_j}} \ = \ \mathbf{1} \\ \text{per } j = 1, \ldots, n \end{array}$$

dà valore **0** alla proposizione $\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\nabla^{\vee}$.

9.4.3 Esempio di applicazione della procedura di decisione

Il sequente

$$\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{A}\&\mathbf{B}\vdash(\ \mathbf{A}\&\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{R}\ )\ \&\ (\mathbf{D}\vee\mathbf{M})$$

è una tautologia?

NO, non è una tautologia in quanto applicando la procedura di decisione al sequente possiamo costruire un albero del tipo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{A},\mathbf{B}\vdash\mathbf{P},\mathbf{R}}{\mathbf{A}\&\mathbf{B}\vdash\mathbf{P},\mathbf{R}}\,\&-\mathrm{S} \qquad \mathbf{A}\&\mathbf{B},\mathbf{A}\&\mathbf{B}\vdash\mathbf{R}}{\mathbf{A}\&\mathbf{B},\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{A}\&\mathbf{B}\vdash\mathbf{R}}\,\rightarrow-\mathrm{S}}{\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{A}\&\mathbf{B},\mathbf{A}\&\mathbf{B}\vdash\mathbf{R}}\,\mathrm{sc_{sx}}}{\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{A}\&\mathbf{B}\vdash\mathbf{A}\&\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{R}}\,\rightarrow-\mathrm{D} \qquad \mathbf{P}\rightarrow\mathbf{A}\&\mathbf{B}\vdash\ \mathbf{D}\vee\mathbf{M}}{\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{A}\&\mathbf{B}\vdash(\ \mathbf{A}\&\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{R}\ )\ \&\ (\mathbf{D}\vee\mathbf{M})}\,\&-\mathrm{D}$$

che ha una foglia $\mathbf{A},\mathbf{B}\vdash\mathbf{P},\mathbf{R}$ senza proposizioni composte che NON è un assioma e che ci dice che su ogni riga della tabella di verità del sequente radice in cui si pone $\mathbf{A} = \mathbf{1}$, $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ e poi $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ (non importa quale siano i valori di $\mathbf{D}$ e di $\mathbf{M}$) il sequente $\mathbf{P}\to\mathbf{A}\&\mathbf{B}\vdash(\ \mathbf{A}\&\mathbf{B}\to\mathbf{R}\ )\ \&\ (\mathbf{D}\vee\mathbf{M})$ risulta falso.

9.4.4 Esempio di applicazione della procedura di decisione di una proposizione

Domanda: la proposizione $\mathbf{Q}\to\neg\neg\mathbf{Q}$ è una tautologia?

Invece di fare la tabella di verità applichiamo la procedura di decisione sopra al sequente $\vdash\mathbf{Q}\to\neg\neg\mathbf{Q}$ ottenendo

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\end{array}}{\mathbf{Q},\neg\mathbf{Q}\vdash}\ \neg-\mathrm{S}}{\mathbf{Q}\vdash\neg\neg\mathbf{Q}}\ \neg-\mathrm{D}}{\vdash\mathbf{Q}\to\neg\neg\mathbf{Q}}\ \to-\mathrm{D}$$

che è albero di derivazione e quindi la proposizione $\mathbf{Q}\to\neg\neg\mathbf{Q}$ è **valida** ovvero è una **tautologia**.

9.4.5 Esempio di applicazione della procedura di decisione

Domanda: la proposizione $(\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})$ è una tautologia?

Abbiamo già risposto in sezione 8.0.2 ma ora rispondiamo applicando la procedura di decisione sopra al sequente

$$\vdash(\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})$$

e otteniamo

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdash\mathbf{V},\mathbf{V},\mathbf{R}\qquad\neg\mathbf{R}\vdash\mathbf{V},\mathbf{R}}{\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R}\vdash\mathbf{V},\mathbf{R}}\ \to-\mathrm{S}}{\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R},\neg\mathbf{V}\vdash\mathbf{R}}\ \neg-\mathrm{S}}{\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R}\vdash\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R}}\ \to-\mathrm{D}}{\vdash(\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})}\ \to-\mathrm{D}$$

ove si noti che in $\to-$S NON abbiamo continuato a derivare la seconda premessa in quanto seguendo la procedura di decisione sulla prima premessa finiamo in una foglia NON assioma da cui deduciamo che la proposizione $(\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})$ NON è una tautologia ovvero è **NON valida** ed è falsa sulla riga $\mathbf{V} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Test di comprensione:

- È vero che un albero di derivazione di un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ ottenuto secondo la procedura sopra ha foglie senza proposizioni composte??

  NO, perchè gli assiomi identità possono essere riconosciuti tali per la presenza di una stessa proposizione ANCHE COMPOSTA a sx e a dx del sequente come nella seguente derivazione

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{A},\mathbf{P}\to\mathbf{C}\vdash\mathbf{P}\to\mathbf{C}\end{array}}{\mathbf{A}\&(\mathbf{P}\to\mathbf{C})\vdash\mathbf{P}\to\mathbf{C}}\ \&-\mathrm{S}\quad\cfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{A},\mathbf{P}\to\mathbf{C}\vdash\mathbf{A}\end{array}}{\mathbf{A}\&(\mathbf{P}\to\mathbf{C})\vdash\mathbf{A}}\ \&-\mathrm{S}}{\mathbf{A}\&(\mathbf{P}\to\mathbf{C})\vdash(\mathbf{P}\to\mathbf{C})\&\mathbf{A}}\ \&-\mathrm{D}$$

- È vero che per stabilire se un sequente NON è derivabile, ovvero NON è valido devo avere un albero le cui foglie NON hanno proposizioni COMPOSTE?

  NO, perchè basta fermarsi quando ALMENO UNA FOGLIA è SENZA PROPOSIZIONI COMPOSTE e SENZA PROPOSIZIONI ATOMICHE a dx e a sx del segno $\vdash$. Vedi esempio in sezioni **??** e 9.4.5.

- Se un albero ha una foglia del tipo
  $$\vdash \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$$
  quale è la riga della sua tabella che va a zero?

  Secondo la procedura sopra la riga ottenuta ponendo $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ manda a zero il sequente in quanto NON ci sono lettere a sx di $\vdash$.

  Questo si capisce ricordando che il sequente $\vdash \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ è una tautologia solo se lo è la proposizione
  $$\mathtt{tt} \to (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \vee \mathbf{R}$$
  che risulta falsa appunto sulla riga della sua tabella ottenuta ponendo $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

- Se un albero ha una foglia del tipo
  $$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R} \vdash$$
  quale è la riga della sua tabella che va a zero?

  Secondo la procedura sopra la riga ottenuta ponendo $\mathbf{P} = \mathbf{1}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{1}$ manda a zero il sequente in quanto NON ci sono lettere a dx di $\vdash$.

  Questo si capisce ricordando che il sequente $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R} \vdash$ è una tautologia solo se lo è la proposizione
  $$(\mathbf{P} \& \mathbf{Q}) \& \mathbf{R} \to \perp$$
  che risulta falsa appunto sulla riga della sua tabella ottenuta ponendo $\mathbf{P} = \mathbf{1}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{1}$.

Per approfondimento: Si costruisca un albero per il sequente

$$\mathbf{P} \to \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash (\ \mathbf{A} \& \mathbf{B} \to \mathbf{R}\ )\ \&\ (\mathbf{D} \vee \mathbf{M})$$

in cui le foglie sono senza proposizione composte. Si noti che ogni foglia senza proposizioni composte che NON è un assioma suggerisce una riga in cui il sequente radice risulta falso.

Dunque si potrebbe modificare la procedura di decisione 9.4.1 lasciando la possibilità al punto 4., nel caso che la regola di $\mathtt{pr}_1 \circ \mathtt{pr}_2$ su cui si è operato abbia due premesse, di scegliere anche la seconda premessa e di andare poi in 1. !!!

9.5 Relazione tra una proposizione e la sua negazione

Si noti che la negazione di una proposizione si comporta nel seguente modo rispetto alla validità:

$\mathtt{pr}$ **TAUTOLOGIA**	sse	$\neg\mathtt{pr}$ **PARADOSSO**
$\mathtt{pr}$ **OPINIONE**	sse	$\neg\mathtt{pr}$ **OPINIONE**
$\mathtt{pr}$ **NON VALIDA**	sse	$\neg\mathtt{pr}$ **SODDISFACIBILE**
$\mathtt{pr}$ **SODDISFACIBILE**	sse	$\neg\mathtt{pr}$ **NON VALIDA**

Questa relazione suggerisce come applicare la procedura di decisione in sezione 9.4.1 per sapere se un sequente o una proposizione NON valida sia anche soddisfacibile su una qualche riga. Infatti, nel caso una proposizione $\mathtt{pr}$ risulti NON valida, ovvero non sia una tautologia, possiamo sapere se $\mathtt{pr}$ è un' **opinione** o un **paradosso** *applicando la procedura di decisione* in sezione 9.4.1 alla *sua negazione* ovvero al sequente

$$\vdash \neg\mathtt{pr}$$

Infatti *se* $\vdash \neg\mathtt{pr}$ *risulta una* **tautologia** ne segue che $\vdash \mathtt{pr}$ è **insoddisfacibile** e quindi la proposizione $\mathtt{pr}$ è un **paradosso**. Altrimenti *se* $\vdash \neg\mathtt{pr}$ **NON risulta una tautologia** allora *una riga* su cui il sequente $\vdash \neg\mathtt{pr}$ è **falso** dà *una riga* su cui $\vdash \mathtt{pr}$ è **vero**, ovvero $\mathtt{pr}$ è vero su questa riga, e dunque risulta **soddisfacibile** e quindi è un'**opinione**.

9.6 Procedura per decidere se una proposizione è tautologia/opinione/paradosso in $\mathbf{LC}_p$

Data una proposizione $\mathtt{pr}$

`passo 1`: si applichi la procedura di decisione provando a derivare $\vdash \mathtt{pr}$ in LC_p

se si deriva	$\Rightarrow$ $\mathtt{pr}$ è una **tautologia**
se la procedura termina con un NON derivabile	vai al passo 2

`passo 2`: la proposizione $\mathtt{pr}$ **NON è una tautologia** e la riga su cui la tabella di $\mathtt{pr}$ va a **0** si ottiene in tal modo:
prendi una foglia non assioma di sole variabili proposizionali
(per es. quella che ha fatto sì che la procedura termini con un NO)
e poni a **1** le variabili a sx del sequente e a **0** quelle a dx
$\Rightarrow$ ogni riga che contiene tale assegnazione di variabili proposizionali manda a **0** la proposizione $\mathtt{pr}$
poi vai al passo 3

`passo 3`: prova a derivare $\vdash \neg\mathtt{pr}$ in $\mathbf{LC}_p$ applicando la procedura di decisione

se $\vdash \neg\mathtt{pr}$ si deriva	$\Rightarrow$ $\vdash \mathtt{pr}$ è **insoddisfacibile**, ovvero un **paradosso**
se la procedura termina con $\vdash \neg\mathtt{pr}$ NON derivabile	applica il passo 2 a $\vdash \neg\mathtt{pr}$ e la riga trovata assegna **1** a $\mathtt{pr}$ $\Rightarrow$ $\mathtt{pr}$ è **vera** su di essa, dunque è $\mathtt{pr}$ **soddisfacibile** e quindi è un' **opinione**.

9.6.1 Esempi di applicazione della procedura di decisione di una proposizione

Domanda: la proposizione $\mathbf{Q}\to\neg\neg\mathbf{Q}$ è una tautologia?

Invece di fare la tabella di verità applichiamo la procedura di decisione sopra al sequente $\vdash \mathbf{Q}\to\neg\neg\mathbf{Q}$ ottenendo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\end{array}}{\mathbf{Q},\neg\mathbf{Q}\vdash}\;\neg\text{−S}}{\mathbf{Q}\vdash\neg\neg\mathbf{Q}}\;\neg\text{−D}}{\vdash\mathbf{Q}\to\neg\neg\mathbf{Q}}\;\to\text{−D}$$

che è albero di derivazione e quindi la proposizione $\mathbf{Q}\to\neg\neg\mathbf{Q}$ è una **tautologia**.

9.6.2 Esempi di applicazione della procedura di decisione di una proposizione

Domanda: la proposizione $(\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})$ è una tautologia?

Abbiamo già risposto in sezione 8.0.2 ma ora rispondiamo applicando la procedura di decisione sopra al sequente

$$\vdash (\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})$$

e otteniamo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash\mathbf{V},\mathbf{V},\mathbf{R}\qquad\neg\mathbf{R}\vdash\mathbf{V},\mathbf{R}}{\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R}\vdash\mathbf{V},\mathbf{R}}\;\to\text{−S}}{\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R},\neg\mathbf{V}\vdash\mathbf{R}}\;\neg\text{−S}}{\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R}\vdash\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R}}\;\to\text{−D}}{\vdash(\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})}\;\to\text{−D}$$

ove si noti che in $\to$−S NON abbiamo continuato a derivare la seconda premessa in quanto seguendo la procedura di decisione sulla prima premessa finiamo in una foglia NON assioma da cui deduciamo che la proposizione $(\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})$ è **falsa** sulla riga $\mathbf{V}=\mathbf{R}=\mathbf{0}$ e dunque **NON è una tautologia**.

Per stabilire se è un'opinione o un paradosso andiamo a derivare

$$\vdash\neg(\ (\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})\ )$$

ottenendo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{V},\mathbf{R}\vdash}{\mathbf{V}\vdash\neg\mathbf{R}}\;\neg\text{−D}}{\vdash\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R}}\;\to\text{−D}\qquad\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R}\vdash}{(\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})\vdash}\;\to\text{−S}}{\vdash\neg(\ (\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})\ )}\;\neg\text{−D}$$

ove si noti che in $\to$−S NON abbiamo continuato a derivare la seconda premessa in quanto seguendo la procedura di decisione sulla prima premessa finiamo in una foglia NON assioma che ci permette di concludere che $\neg(\ (\mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})\ )$ è **falsa** su $\mathbf{V}=\mathbf{R}=\mathbf{1}$. Quindi concludiamo che la proposizione $(\ \mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})$ è **soddisfacibile** su $\mathbf{V}=\mathbf{R}=\mathbf{1}$.

Dunque la *risposta finale* alla domanda sopra è che $(\ \mathbf{V}\to\neg\mathbf{R})\to(\neg\mathbf{V}\to\mathbf{R})$ è un'**OPINIONE** perchè **falsa** sulla riga $\mathbf{V}=\mathbf{R}=\mathbf{0}$ e **vera** sulla riga $\mathbf{V}=\mathbf{R}=\mathbf{1}$.

9.7 Come rappresentare la negazione di un sequente?

Sopra abbiamo visto una procedura di decisione della verità di una proposizione formale `pr`, andando ad analizzare anche la sua negazione $\neg$`pr` nel caso `pr` NON risulti una tautologia.

Ora vorremmo applicare la procedura sopra per decidere la verità di un sequente in termini di tautologia/opinione/paradosso.

Però occorre sapere che sequente rappresenta la sua "negazione". Dunque ci chiediamo:

Come possiamo rappresentare la negazione di un sequente?

Per rispondere si ricordi che la classificazione della verità di un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è stata definita in termini della proposizione $\mathbf{\Gamma}^{\&} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta}^{\vee}$ che esso rappresenta.

Infatti vale la seguente proposizione

Proposition 9.6 Un sequente è derivabile in $\mathbf{LC}_P$ se e solo se è derivabile in $\mathbf{LC}_P$ la proposizione formale che esso rappresenta, ovvero

il sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è *derivabile* in $\mathbf{LC}_P$ sse il sequente $\vdash \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è *derivabile* in $\mathbf{LC}_P$

Dim. Operiamo per casi sul fatto che $\mathbf{\Gamma}$ e $\mathbf{\Delta}$ siano o non siano la lista vuota.

1. Il caso in cui *sia* $\mathbf{\Gamma}$ *che* $\mathbf{\Delta}$ *sono la lista vuota* è il caso del sequente

   $$\vdash$$

   che chiaramente **NON è derivabile** in $\mathbf{LC}_P$ in quanto NON è un assioma e non vi è alcuna regola che si può applicare dal basso verso l'alto per ottenere una derivazione eccetto per gli scambi a destra o a sinistra con liste vuote!!

2. Caso in cui sia $\mathbf{\Gamma}$ *che* $\mathbf{\Delta}$ *sono entrambe liste di proposizioni NON vuote.*

   Partendo a cercare una derivazione di $\vdash \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ dal basso verso l'alto, dopo l'applicazione della regola di implicazione a destra ed eventualmente di un pò di applicazioni delle regole di disgiunzione a destra e di congiunzione a sinistra, ci troviamo a derivare il sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ e dunque una tal derivazione di $\vdash \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ deve contienere una derivazione di $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ e quindi sono entrambe tautologie oppure entrambe non lo sono.

3. Caso in cui $\mathbf{\Gamma}$ *è la lista vuota* ma $\mathbf{\Delta}$ *non lo è.* Qui basta osservare che partendo a cercare una derivazione di

   $$\vdash \mathtt{tt} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta}^{\vee}$$

   dal basso verso l'alto, dopo l'applicazione della regola di implicazione a destra ed eventuali varie applicazione della regola di disgiunzione a destra ci troviamo a derivare il sequente $\mathtt{tt} \vdash \mathbf{\Delta}$. Ora si osservi che da una derivazione π di $\mathtt{tt} \vdash \mathbf{\Delta}$ si ottiene una derivazione di

   $$\vdash \mathbf{\Delta}$$

   togliendo dalle applicazioni delle regole della derivazione π il simbolo della costante vero come premessa in quanto non esiste regola specifica della costante vero a sinistra.

   Ovviamente vale anche che da una derivazione π di $\vdash \mathbf{\Delta}$ se ne ricava una di $\mathtt{tt} \vdash \mathbf{\Delta}$ aggiungendo il simbolo di costante vero come premessa alle regole di π. Poi da una derivazione π' di $\mathtt{tt} \vdash \mathbf{\Delta}$ si ottiene una derivazione di

   $$\vdash \mathtt{tt} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta}^{\vee}$$

   proseguendo a derivare da π' dall'alto verso il basso applicando se necessario la regola di disgiunzione a destra più volte seguita da un'applicazione della regola di implicazione a destra.

4. Caso in cui $\mathbf{\Delta}$ è la lista vuota ma $\mathbf{\Gamma}$ *non lo è*. Qui basta osservare che partendo a cercare una derivazione
$$\vdash \mathbf{\Gamma}^{\&} \ \rightarrow \bot$$
dal basso verso l'alto, dopo l'applicazione della regola di implicazione a destra ed eventuali varie applicazione della regola di congiunzione a sinistra ci troviamo a derivare il sequente
$$\mathbf{\Gamma} \vdash \bot$$
Ora si osservi che da una derivazione π di $\mathbf{\Gamma} \vdash \bot$ si ottiene una derivazione di
$$\mathbf{\Gamma} \vdash$$
togliendo dalle applicazioni delle regole della derivazione π il simbolo della costante falso come conclusione in quanto non esiste regola specifica della costante falso a destra.

   Ovviamente vale anche che da una derivazione π di $\mathbf{\Gamma} \vdash$ se ne ricava una di $\mathbf{\Gamma} \vdash \bot$ aggiungendo il simbolo della costante falso come conclusione alle regole di π. Infine da una derivazione π' di $\mathbf{\Gamma} \vdash \bot$ si ottiene una derivazione di $\vdash \mathbf{\Gamma}^{\&} \ \rightarrow \bot$ proseguendo a derivare da π' dall'alto verso il basso applicando se necessario la regola di congiunzione a sinistra più volte seguita da un'applicazione della regola di implicazione a destra.

Ora per decidere se un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è una **tautologia/opinione/paradosso** basta applicare il processo sopra in sezione 9.6 alla proposizione $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ con l'avvertenza che per decidere se è derivabile, ovvero è una tautologia, basta derivare $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ visto quanto osservato in proposizione 9.6.

In particolare possiamo concludere che *la negazione del sequente*
$$\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$$
si può rappresentare con il sequente
$$\vdash \neg(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee} \ )$$
Infatti un sequente si comporta con la sua negazione in modo analogo a quanto notato per una proposizione e la sua negazione in sezione 9.5:

$\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è una **tautologia**	sse	$\vdash \neg(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta}^{\vee} \ )$ è un **paradosso/insoddisfacibile**
$\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è un **paradosso**	sse	$\vdash \neg(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta}^{\vee} \ )$ è una **tautologia**

$\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ **NON valido/falso** sulla riga r	sse	$\vdash \neg(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta}^{\vee} \ )$ **soddisfacibile/vero** sulla riga r
$\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ **soddisfacibile/vero** sulla riga r	sse	$\vdash \neg(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta}^{\vee} \ )$ **NON valido/falso** sulla riga r

9.8 PROCEDURA per DECIDERE se un sequente è tautologia o opinione o un paradosso

Passo 1: Per decidere se un **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$ è una **tautologia** o meno
si applichi a tal sequente la procedura 7. di decisione della sua derivabilità
Si hanno due casi:
I caso: il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **derivabile**, dunque è una **tautologia** e quindi STOP.
II caso: il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **NON derivabile** e quindi **NON è una tautologa** ossia **NON è valido**.
Una riga su cui il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è falso si trova secondo la procedura 8. Si vada poi al passo 2.

Passo 2: per decidere se il **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$ è **soddisfacibile** o meno
si applichi la procedura 7. al sequente $\vdash \neg(\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee})$
Ora si hanno due sottocasi:
I sottocaso: $\vdash \neg(\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee})$ risulta **NON derivabile** e quindi **NON è una tautologa** ossia **NON è valido**.
e quindi $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **soddisfacibile** (oltrechè **NON valido**)
e poi si applichi la procedura 8. per trovare una riga su cui il sequente $\vdash \neg(\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee})$ è falso
e la riga ottenuta rende il sequente di partenza $\Gamma \vdash \Delta$ vero, e dunque **soddisfacibile**.
Ne segue che il sequente di partenza $\Gamma \vdash \Delta$ è un'**opinione** e quindi STOP.
II sottocaso: $\vdash \neg(\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee})$ risulta una **tautologia**
quindi il sequente di partenza $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **INsoddisfacibile**,
ovvero è una **contraddizione/paradosso** e dunque STOP.

9.8.1 Esempio di applicazione della procedura di decisione

Il sequente $\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{P}$ è una tautologia oppure un'opinione o un paradosso?

Applichiamo la procedura di decisione di derivabilità di un sequente in sezione 9.4.1 e otteniamo il seguente albero:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P},\mathbf{P} \qquad \mathbf{Q},\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}}{\mathbf{Q},\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}}\ \rightarrow\!-\mathrm{S}}{\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q},\mathbf{Q}\vdash\mathbf{P}}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}}{\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{P}}\ \rightarrow\!-\mathrm{D}$$

in cui la foglia a sinistra NON è un assioma e dunque $\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{P}$ è **NON è una tautologia**, ovvero **NON è valido**.

Una riga su cui il sequente è falso è data dall'eseguire quanto descritto in sezione 9.4.2 sulla foglia a sinistra e quindi **una riga che falsifica il sequente è data da $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{P} = \mathbf{0}$**.

Per vedere se il sequente è soddisfacibile e quindi un'opinione oppure è un paradosso applichiamo la procedura di derivazione di un sequente in sezione 9.4.1 al sequente

$$\vdash \neg(\,(\,\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}\,)\rightarrow(\,\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{P}\,)\,)$$

e otteniamo

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{P}\vdash\mathbf{Q}}{\vdash\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}}\ \rightarrow -\mathrm{D} \qquad \mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{P}\vdash}{(\,\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}\,)\rightarrow(\,\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{P}\,)\vdash}\ \rightarrow -\mathrm{S}}{\vdash \neg(\,(\,\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}\,)\rightarrow(\,\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{P}\,)\,)}\ \neg\!-\mathrm{D}$$

che dice che il sequente negato **NON è una tautologia** ed è **NON valido** ovvero **falso** sulla riga $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$. Quindi il sequente di partenza

$$\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{P}$$

è **vero sulla stessa riga** e dunque è **soddisfacibile**.

La *risposta finale* è che il sequente

$$\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{P}$$

è un'**opinione** perchè **falso** sulla riga $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ e **vero** sulla riga $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

9.8.2 Test di comprensione

1. Se una proposizione `pr` è falsa su una certa riga della sua tabella cosa possiamo dire della sua negazione ¬`pr`?

   Possiamo solo dire che ¬`pr` è vera sulla riga in cui `pr` è NON valida. Dunque la proposizione `pr` **NON è una tautologia** e sappiamo solo che ¬`pr` è una proposizione **soddisfacibile** e quindi di sicuro ¬`pr` NON è un paradosso ma potrebbe essere una tautologia e quindi `pr` è un paradosso, oppure ¬`pr` potrebbe essere un'opinione e in tal caso lo sarebbe pure `pr`.

2. Se una proposizione è una tautologia cosa possiamo dire della sua negazione ¬`pr`?

   La proposizione ¬`pr` risulta INsoddisfacibile ovvero un paradosso.

3. Come possiamo decidere che $\Gamma \vdash \Delta$ è una tautologia?

   Con la procedura di decisione applicata al sequente in sezione 9.4.1.

4. Come possiamo decidere che $\Gamma \vdash \Delta$ è un'opinione?

   Con la procedura ottimale in sezione 9.8 descritta sopra.

9.8.3 MEMO su come falsificare un sequente proposizionale

- per **falsificare** un **sequente PROPOSIZIONALE** del tipo

  $$\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_n} \vdash \mathbf{B_1}, \ldots, \mathbf{B_m}$$

  è sufficiente considerare la riga

  $$\mathbf{A_i} = \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{i} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B_j} = \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{j} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{m}$$

  in quanto la *negazione del sequente* $\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_n} \vdash \mathbf{B_1}, \ldots, \mathbf{B_m}$ è

  $$\neg(\ (\mathbf{A_1} \quad \& \quad \ldots) \quad \& \quad \mathbf{A_n} \ \rightarrow\ (\mathbf{B_1} \vee \mathbf{B_2}) \vee \cdots \vee \mathbf{B_m}\ )$$

  che equivale a

  $$(\ \mathbf{A_1} \quad \& \quad \ldots) \quad \& \quad \mathbf{A_n}\ ) \quad \& \quad (\ (\neg\mathbf{B_1} \quad \& \quad \neg\mathbf{B_2}) \quad \& \quad \ldots \quad \& \quad \neg\mathbf{B_m})$$

  e questa negazione risulta infatti *vera* sulla riga

  $$\mathbf{A_i} = \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{i} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B_j} = \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{j} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{m}$$

- per **falsificare** un **sequente PROPOSIZIONALE** del tipo

$$\vdash \mathbf{B_1}, \ldots, \mathbf{B_m}$$

è sufficiente considerare la riga

$$\mathbf{B_j} = \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{j} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{m}$$

in quanto *la negazione del sequente* $\vdash \mathbf{B_1}, \ldots, \mathbf{B_m}$ è

$$\neg(\ \mathtt{tt} \rightarrow\ (\mathbf{B_1} \vee \mathbf{B_2}) \vee \cdots \vee \mathbf{B_m}\ )$$

che equivale a

$$(\ (\neg\mathbf{B_1} \quad \& \quad \neg\mathbf{B_2}) \quad \& \quad \ldots \quad \& \quad \neg\mathbf{B_m})$$

e questa negazione risulta infatti *vera* sulla riga

$$\mathbf{B_j} = \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{j} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{m}$$

- per **falsificare** un **sequente PROPOSIZIONALE**

$$\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_n} \vdash$$

è sufficiente considerare la riga

$$\mathbf{A_i} = \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{i} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}$$

in quanto la negazione del sequente $\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_n} \vdash$ è

$$\neg(\ (\mathbf{A_1} \quad \& \quad \ldots) \quad \& \quad \mathbf{A_n}\ \rightarrow \perp\ )$$

che equivale a

$$(\ \mathbf{A_1} \quad \& \quad \ldots) \quad \& \quad \mathbf{A_n}$$

e questa negazione risulta difatti *vera* sulla riga

$$\mathbf{A_i} = \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{i} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}$$

9.9 Perchè le procedure di decisioni per sequenti in logica classica proposizionale sono corrette?

Scopo di questa sezione è di dimostrare la correttezza delle procedure di decisione descritte nelle sezioni precedenti al fine di stabilire in modo *automatico*, ovvero eseguibile da un calcolatore, se un sequente è una tautologia o un'opinione o un paradosso.

A tal scopo introduciamo il concetto di *regola valida in logica classica proposizionale* e poi vedremo pure il concetto di *regola sicura in logica classica proposizionale.*

9.9.1 Definizione di validità in logica classica proposizionale di una regola del calcolo dei sequenti

Introduciamo qui la nozione di *regola valida* per regole di inferenza di sequenti. L'idea è che una regola si dice *valida* se trasforma dall'ALTO verso il BASSO *sequenti veri su una fissata riga r* in *sequenti veri sulla riga r* posto che la riga r contenga TUTTE le variabili proposizionali che compaiono in ALMENO una delle proposizioni dei sequenti nella regola. In altre parole una regola è valida *se supposto* che **TUTTI** i suoi **sequenti premessa** siano **veri su una riga** *allora* il **sequente conclusione** della regola è pure **vero sulla STESSA RIGA**.

Diremo pure informalmente che una regola è **valida** se **conserva la verità dei sequenti su ogni riga dall'ALTO verso il BASSO**.

Enunciamo qui in dettaglio la definizione di validità di una regola del calcolo di sequenti distinguendo tra regole ad una premessa e regole a due premesse.

Def. 9.7 (validità regola ad una premessa) Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\mathbf{\Gamma_1} \vdash \mathbf{\Delta_1}}{\mathbf{\Gamma_2} \vdash \mathbf{\Delta_2}}$$

si dice **valida rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità** se *supposto che* il sequente **premessa**

$$\mathbf{\Gamma_1} \quad \vdash \quad \mathbf{\Delta_1}$$

sia **vero su una riga r** della sua tabella di verità eventualmente estesa a contenere tutte le variabili proposizionali che compaiono in qualche sequente nella regola (inclusa la conclusione!), *allora* il sequente **conclusione**

$$\mathbf{\Gamma_2} \quad \vdash \quad \mathbf{\Delta_2}$$

è **vero sulla stessa riga** r.

Def. 9.8 (validità regola ad due premesse) Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\mathbf{\Gamma_1} \vdash \mathbf{\Delta_1} \qquad\qquad \mathbf{\Gamma_2} \vdash \mathbf{\Delta_2}}{\mathbf{\Gamma_3} \vdash \mathbf{\Delta_3}}$$

si dice **valida rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità**)
se *supposto che* i sequenti **premessa**

$$\mathbf{\Gamma_1} \quad \vdash \quad \mathbf{\Delta_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma_2} \quad \vdash \quad \mathbf{\Delta_2}$$

siano **ENTRAMBI veri su una riga** r della loro tabella di verità eventualmente estesa a contenere tutte le variabili proposizionali che compaiono nei sequenti della regola, *allora* il sequente **conclusione**

$$\mathbf{\Gamma_3} \quad \vdash \quad \mathbf{\Delta_3}$$

è **vero sulla stessa riga** r.

Nel seguito mostriamo come il segno di inferenza di una regola corrisponde ad un'implicazione formale.

A tal scopo poniamo l'attenzione sul semplice fatto che per rendere vera su una riga un'implicazione $\mathtt{pr} \rightarrow \mathtt{pr}'$ basta controllare che se l'antecedente $\mathtt{pr}$ è vero sulla riga allora lo è pure il conseguente $\mathtt{pr}'$.

Lemma 9.9 (implicazione-veloce) Vale il seguente fatto:

> Data una proposizione $\mathtt{pr} \rightarrow \mathtt{pr}'$,
> e una qualsiasi riga r della tabella di $\mathtt{pr} \rightarrow \mathtt{pr}'$,
> allora per sapere che vale $\mathtt{pr} \rightarrow \mathtt{pr}' = \mathbf{1}$ su r basta controllare che
> se $\mathtt{pr} = \mathbf{1}$ su r allora vale pure $\mathtt{pr}' = \mathbf{1}$ su r.

Dim. Infatti o $\mathtt{pr}$ è $\mathbf{0}$ sulla riga in questione, e in tal caso l'implicazione $\mathtt{pr} \rightarrow \mathtt{pr}'$ è vera sulla riga in questione, oppure $\mathtt{pr}$ è $\mathbf{1}$ e allora per l'ipotesi $\mathtt{pr}' = \mathtt{1}$ e di nuovo $\mathtt{pr} \rightarrow \mathtt{pr}'$ è vera sulla riga in questione.

Grazie a questo lemma possiamo notare immediatamente i seguenti fatti:

Proposition 9.10 Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\mathbf{\Gamma_1} \vdash \mathbf{\Delta_1}}{\mathbf{\Gamma_2} \vdash \mathbf{\Delta_2}}$$

è *valida* sse la proposizione

$$(\ \mathbf{\Gamma_1}^{\&} \ \rightarrow\ \mathbf{\Delta_1}^{\vee}\ )\quad \rightarrow \quad (\ \mathbf{\Gamma_2}^{\&}\ \rightarrow\ \mathbf{\Delta_2}^{\vee}\ )$$

è una **tautologia**.

Proposition 9.11 Una regola del calcolo dei sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\mathbf{\Gamma_1} \vdash \mathbf{\Delta_1} \qquad\qquad \mathbf{\Gamma_2} \vdash \mathbf{\Delta_2}}{\mathbf{\Gamma_3} \vdash \mathbf{\Delta_3}}$$

è *valida* sse la proposizione

$$(\ \mathbf{\Gamma_1}^{\&}\ \rightarrow\ \mathbf{\Delta_1}^{\vee}\ )\ \&\ \ (\ \mathbf{\Gamma_2}^{\&}\ \rightarrow\ \mathbf{\Delta_2}^{\vee}\ )\quad \rightarrow\quad (\ \mathbf{\Gamma_3}^{\&}\ \rightarrow\ \mathbf{\Delta_3}^{\vee}\ )$$

è una **tautologia**.

Nel seguito mostreremo che TUTTE le regole del calcolo dei sequenti della Logica Classica Proposizionale $\mathbf{LC}_p$ sono valide.

Si noti che vale pure che le regole del calcolo conservano la validità dei sequenti:

Proposition 9.12 Vale la seguente proprietà:

> Se una regola di inferenza di sequenti nel linguaggio proposizionale è **valida**,
> allora **conserva la validità tautologica** dei sequenti,
> nel senso che
> *se* i suoi **sequenti premessa** sono **tautologie**
> *allora* anche il **sequente conclusione** è una **tautologia**.

Dim. Sia fissata una regola valida nel linguaggio proposizionale e supponiamo che TUTTI i suoi sequenti premessa siano tautologie. Ne segue che fissata una riga arbitraria r contenente le variabili di tutti i sequenti nella regola TUTTI i sequenti premessa sono veri su questa riga essendo delle tautologie.

Ora per la validità della regola ne segue che anche il sequente conclusione è vero sulla stessa riga r. Ma siccome i sequenti premessa sono veri su ogni riga, facendo lo stesso ragionamento ne segue che pure il sequente conclusione è vero su ogni riga e dunque il sequente conclusione è una tautologia come si voleva dimostrare.

9.9.2 Significato di validità di una regola ad una premessa

Grazie alla proposizione 9.10 una regola ad una premessa è valida

$$\frac{\mathbf{\Gamma_1} \vdash \mathbf{\Delta_1}}{\mathbf{\Gamma_2} \vdash \mathbf{\Delta_2}}$$

sse la proposizione

$$(\ \mathbf{\Gamma_1^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_1^{\vee}}\ ) \quad \rightarrow \quad (\ \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_2^{\vee}}\ )$$

è una tautologia.

Ora osserviamo la sua tabella di verità confrontandola con i valori che su una riga fissata assumono la proposizione $\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \rightarrow \mathbf{\Delta_1^{\vee}}$ che rappresenta la premessa della regola, la proposizione $\mathbf{\Gamma_2^{\&}}$ che rappresentano la premessa del sequente conclusione della regola, e la proposizione $\mathbf{\Delta_2^{\vee}}$ che rappresenta la conclusione del sequente conclusione della regola:

$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \rightarrow \mathbf{\Delta_1^{\vee}}$	$\mathbf{\Gamma_2^{\&}}$	$\mathbf{\Delta_2^{\vee}}$	$(\ \mathbf{\Gamma_1^{\&}} \rightarrow \mathbf{\Delta_1^{\vee}}\ ) \rightarrow (\ \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \rightarrow \mathbf{\Delta_2^{\vee}}\ )$
0	-	-	1
-	0	-	1
1	1	1??	1???
1	1	0??	0???

Si osservi che *le righe in cui* $\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \rightarrow \mathbf{\Delta_1^{\vee}} = \mathbf{0}$ *oppure* $\mathbf{\Gamma_2^{\&}} = \mathbf{0}$ rendono vera la proposizione

$$(\ \mathbf{\Gamma_1^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_1^{\vee}}\ ) \quad \rightarrow \quad (\ \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_2^{\vee}}\ )$$

senza ulteriori controlli e quindi la regola conserva la verità su queste righe.

In pratica le **uniche righe da controllare** per sapere se

$$(\ \mathbf{\Gamma_1^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_1^{\vee}}\ ) \quad \rightarrow \quad (\ \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_2^{\vee}}\ )$$

è **tautologia** (ovvero la sua tabella è fatta solo di **1** in uscita!) **sono le righe** in cui si ha

$$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \rightarrow \mathbf{\Delta_1^{\vee}} = \mathbf{1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{\Gamma_2^{\&}} = \mathbf{1}$$

e su queste righe dobbiamo controllare **SE risulta pure** $\mathbf{\Delta_2^{\vee}} = \mathbf{1}$. Se ciò accade la regola è **valida**.

In caso contrario **una riga** su cui accade che

$$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \rightarrow \mathbf{\Delta_1^{\vee}} = \mathbf{1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{\Gamma_2^{\&}} = \mathbf{1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{\Delta_2^{\vee}} = \mathbf{0}$$

anche solo per **particolari liste di proposizioni messe al posto di $\mathbf{\Gamma_1}$, $\mathbf{\Gamma_2}$ e $\mathbf{\Delta_1}$, $\mathbf{\Delta_2}$** produce un **controesempio** alla validità della regola e quindi la regola risulta **NON valida**.

Quanto qui esposto costituisce una dimostrazione del seguente lemma:

Lemma 9.13 (scorciatoia1) Valgono le seguenti proprietà:

Una regola di inferenza di sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \qquad \text{è } \textbf{valida}$$

se e solo se

vale la seguente *condizione scorciatoia1*:
su OGNI riga r

$$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \;\to\; \mathbf{\Delta_1^{\vee} = 1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{\Gamma_2^{\&} = 1} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{\Delta_2^{\vee} = 1}$$

Una regola di inferenza di sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \qquad \textbf{NON} \text{ è } \textbf{valida}$$

se e solo se

vale la seguente *condizione scorciatoia1bis*:
esiste una riga r tale che

$$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \;\to\; \mathbf{\Delta_1^{\vee} = 1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{\Gamma_2^{\&} = 1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{\Delta_2^{\vee} = 0}$$

anche solo per **particolari liste di proposizioni messe al posto di** $\mathbf{\Gamma_1}$, $\mathbf{\Gamma_2}$ e $\mathbf{\Delta_1}$, $\mathbf{\Delta_2}$

Nel seguito useremo spesso questo lemma per verificare se una regola di inferenza di sequenti ad una premessa è valida o meno.

9.9.3 Significato di validità di una regola a due premesse

Grazie alla proposizione 9.10 una regola a due premessa è valida

$$\frac{\mathbf{\Gamma_1 \vdash \Delta_1} \qquad\qquad \mathbf{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}}{\mathbf{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}}$$

sse la proposizione

$$(\, \mathbf{\Gamma_1^{\&}} \;\to\; \mathbf{\Delta_1^{\vee}} \,)\ \&\ \ (\, \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \;\to\; \mathbf{\Delta_2^{\vee}} \,) \quad \to \quad (\, \mathbf{\Gamma_3^{\&}} \;\to\; \mathbf{\Delta_3^{\vee}} \,)$$

è una **tautologia**.

Ora osserviamo la sua tabella di verità confrontandola con i valori che su una riga fissata assumono le proposizioni $\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \to \mathbf{\Delta_1^{\vee}}$ e $\mathbf{\Gamma_2^{\&}} \to \mathbf{\Delta_2^{\vee}}$ che rappresentano i sequenti premessa della regola, la proposizione $\mathbf{\Gamma_3^{\&}}$ che rappresenta la premessa del sequente conclusione della regola e la proposizione $\mathbf{\Delta_3^{\vee}}$ che rappresenta la conclusione del sequente conclusione della regola:

$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_1^{\vee}}$	$\mathbf{\Gamma_2^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_2^{\vee}}$	$\mathbf{\Gamma_3^{\&}}$	$\mathbf{\Delta_3^{\vee}}$	$(\ \mathbf{\Gamma_1^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_1^{\vee}}\ )\ \&\ \ (\ \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_2^{\vee}}\ ) \ \rightarrow \ (\ \mathbf{\Gamma_3^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_3^{\vee}}\ )$
0	-	-	-	1
-	0	-	-	1
-	-	0	-	1
1	1	1	1??	1???
1	1	1	0??	0???

Si osservi che *le righe in cui* $\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_1^{\vee}} = \mathbf{0}$ *oppure* $\mathbf{\Gamma_2^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_2^{\vee}} = \mathbf{0}$ *oppure* $\mathbf{\Gamma_3^{\&}} = \mathbf{0}$ rendono vera la proposizione

$$(\ \mathbf{\Gamma_1^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_1^{\vee}}\ )\ \&\ \ (\ \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_2^{\vee}}\ ) \ \rightarrow \ (\ \mathbf{\Gamma_3^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_3^{\vee}}\ )$$

senza ulteriori controlli e quindi la regola conserva la verità su queste righe.

In pratica le **uniche righe da controllare** per sapere se

$$(\ \mathbf{\Gamma_1^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_1^{\vee}}\ )\ \&\ \ (\ \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_2^{\vee}}\ ) \ \rightarrow \ (\ \mathbf{\Gamma_3^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_3^{\vee}}\ )$$

è **tautologia** (ovvero la sua tabella è fatta solo di **1** in uscita!) **sono le righe** in cui si ha

$$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_1^{\vee}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_2^{\vee}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma_3^{\&}} = \mathbf{1}$$

e dobbiamo controllare **SE su tali righe risulta** $\mathbf{\Delta_3^{\vee}} = \mathbf{1}$. Se ciò accade la regola è **valida**.

In caso contrario **una riga** su cui

$$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_1^{\vee}} = \mathbf{1} \ \text{ e } \ \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_2^{\vee}} = \mathbf{1} \ \text{ e } \ \mathbf{\Gamma_3^{\&}} = \mathbf{1} \qquad \text{ma } \mathbf{\Delta_3^{\vee}} = \mathbf{0}$$

anche solo per **particolari liste di proposizioni messe al posto di $\mathbf{\Gamma_1}$, $\mathbf{\Gamma_2}$, $\mathbf{\Gamma_3}$ e $\mathbf{\Delta_1}$, $\mathbf{\Delta_2}$ e $\mathbf{\Delta_3}$** dà un **controesempio** alla validità della regola e quindi la regola risulta **NON valida**.

L'argomentazione sopra è una dimostrazione di questo lemma

Lemma 9.14 (scorciatoia2) Valgono le seguenti proprietà:

Una regola di inferenza di sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \qquad \text{è } \textbf{valida}$$

se e solo se

vale la seguente *condizione scorciatoia2*:
su OGNI riga r

$$\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_1^{\vee}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma_2^{\&}} \ \rightarrow \ \mathbf{\Delta_2^{\vee}} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma_3^{\&}} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Delta_3^{\vee}} = \mathbf{1}$$

Una regola di inferenza di sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \qquad \textbf{NON è valida}$$

se e solo se

vale la seguente *condizione scorciatoia2bis*:
esiste una riga r su cui

$$\boldsymbol{\Gamma_1^{\&}} \ \rightarrow \ \boldsymbol{\Delta_1^{\vee}} = \mathbf{1} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\Gamma_2^{\&}} \ \rightarrow \ \boldsymbol{\Delta_2^{\vee}} = \mathbf{1} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\Gamma_3^{\&}} = \mathbf{1} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\Delta_3^{\vee}} = \mathbf{0}$$

anche solo per **particolari liste di proposizioni messe al posto di** $\boldsymbol{\Gamma_1}$, $\boldsymbol{\Gamma_2}$, $\boldsymbol{\Gamma_3}$ e $\boldsymbol{\Delta_1}$, $\boldsymbol{\Delta_2}$, $\boldsymbol{\Delta_3}$

Nel seguito useremo spesso questo lemma per verificare se una regola di inferenza di sequenti a due premesse è valida o meno.

9.10 Validità delle regole di LC$_p$

Proseguiamo ora con il mostrare che tutti gli assiomi e tutte le regole del calcolo **LC**$_p$ sono valide. Questo significa che nell'esempio della derivazione di un verso dell'associatività la verità su una qualsiasi riga si conserva dall'alto verso il basso perchè tutte le foglie essendo assiomi sono senza dubbio vere sulla riga in questione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{vero}-\textbf{su}-\textbf{riga r}\\ C, A, B \vdash A\end{array}}{C, A\&B \vdash A}\Downarrow_{\textbf{vero-su-riga r}}}{A\&B, C \vdash A}\Downarrow_{\textbf{vero-su-riga r}}}{(A\&B)\&C \vdash A}\Downarrow_{\textbf{vero-su-riga r}} \quad \textbf{e} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{vero}-\textbf{su}-\textbf{riga r}\\ C, A, B \vdash B\end{array} \quad \textbf{e} \quad \begin{array}{c}\textbf{vero}-\textbf{su}-\textbf{riga r}\\ C, A, B \vdash C\end{array}}{C, A, B \vdash B\&C}\Downarrow_{\textbf{vero-su-riga r}}}{C, A\&B \vdash B\&C}\Downarrow_{\textbf{vero-su-riga r}}}{A\&B, C \vdash B\&C}\Downarrow_{\textbf{vero-su-riga r}}}{(A\&B)\&C \vdash B\&C}\Downarrow_{\textbf{vero-su-riga r}}}{(A\&B)\&C \vdash A\&(B\&C)}\Downarrow_{\textbf{vero-su-riga r}}$$

Theorem 9.15 (validità regole LC$_p$) Gli assiomi di **LC**$_p$ sono tutti **tautologie** e **TUTTE** le **regole** di **LC**$_p$ sono **valide**.

Procediamo ora a dimostrare per ciascun assioma e ciascuna regola quanto affermato nell'enunciato del teorema.

9.10.1 Validità assioma identità

L'assioma identità

$$\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \Gamma_{\mathbf{1}}, A, \Gamma_{\mathbf{2}} \vdash \Delta_{\mathbf{1}}, A, \Delta_{\mathbf{2}}\end{array}$$

è una **tautologia** perchè lo è la proposizione

$$(\boldsymbol{\Gamma_1^{\&}} \& \mathbf{A})\, \& \boldsymbol{\Gamma_2^{\&}} \rightarrow (\boldsymbol{\Delta_1^{\vee}} \vee \mathbf{A})\, \vee \boldsymbol{\Delta_2^{\vee}}$$

Infatti se $(\boldsymbol{\Gamma_1^{\&}} \& \mathbf{A})\, \& \boldsymbol{\Gamma_2^{\&}}$ vale **1** in una certa riga r della tabella allora $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ e quindi pure $(\boldsymbol{\Delta_1^{\vee}} \vee \mathbf{A})\, \vee \boldsymbol{\Delta_2^{\vee}}$ vale **1** sulla stessa riga r e dunque per il lemma implicazione-veloce 9.9 l'assioma è vero sulla riga considerata. Siccome questo vale per una riga generica allora il sequente è vero su ogni riga e quindi è una tautologia.

9.10.2 Validità dell'assioma per il falso

L'assioma

$$\frac{\textbf{ax-}\perp}{\mathbf{\Gamma_1}, \perp, \mathbf{\Gamma_2} \vdash \nabla}$$

è una tautologia perchè ogni riga della tabella di

$$(\,\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \& \perp)\&\mathbf{\Gamma_2^{\&}} \rightarrow \nabla^{\vee}$$

assegna **0** a $(\,\mathbf{\Gamma_1^{\&}} \& \perp)\&\mathbf{\Gamma_2^{\&}}$ e quindi **1** alla proposizione implicativa.

Ad esempio l'affermazione seguente

"**Se fossi Superman, sarei in grado di volare**"

si può formalizzare in

$$\perp \vdash \mathbf{V}$$

assumendo che

$\perp =$ **Sono Superman (che è una falsità)**
$\mathbf{V} =$ **Sono in grado di volare**

Ora la proposizione $\perp \vdash \mathbf{V}$ è una tautologia per le stesse ragioni della validità tautologica dell'assioma del falso.

Curiosamente si osservi che pure la proposizione

$$\perp \vdash \neg \mathbf{V}$$

che traduce secondo le assunzioni sopra

"**Se fossi Superman, non sarei in grado di volare**"

è pure una tautologia sempre perchè la premessa "**Sono Superman**" tradotta con $\perp$ è falsa.

9.10.3 Validità di $\mathbf{sc}_{sx}$

La validità della regola di **scambio a sinistra**

$$\frac{\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Gamma_2}, \mathbf{\Delta} \vdash \nabla}{\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma_2}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Delta} \vdash \nabla}\ \mathrm{sc_{sx}}$$

si riconosce facilmente in quanto il fatto che $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Gamma_2}, \mathbf{\Delta})^{\&} = \mathbf{1}$ **su una certa riga** è **indipendente** dall'ordine delle proposizioni in $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Gamma_2}, \mathbf{\Delta}$.

Però per esercizio lo dimostriamo per bene usando il lemma scorciatoia1 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione:

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Gamma_2}, \mathbf{\Delta})^{\&} \rightarrow \nabla^{\vee} = \mathbf{1}$ su r
(2) $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma_2}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Delta})^{\&} = \mathbf{1}$ su r
Tesi
$\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r.

dim. Dall'ipotesi (2) sappiamo che ogni congiunto ha valore $\mathbf{1}$ e così pure anche $(((\mathbf{\Sigma}^{\&}\&\mathbf{\Gamma_1^{\&}})\,\&\mathbf{\Theta}^{\&})\&\mathbf{\Gamma_2^{\&}})\&\mathbf{\Delta}^{\&}$ su r e quindi per l'ipotesi (2), ovvero la **verità** della **premessa** della regola si conclude che $\nabla^{\vee}$ ha valore $\mathbf{1}$ su r.

Quindi il lemma scorciatoia1 9.13 è verificato e la regola è valida.

9.10.4 Validità di $\mathbf{sc}_{dx}$

La validità della regola di **scambio a destra**

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Delta_2}, \nabla}{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Delta_2}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Delta_1}, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

segue anche lei facilmente in quanto il fatto che $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Delta_2}, \nabla)^{\vee} = \mathbf{1}$ è **indipendente** dall'ordine delle proposizioni in $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Delta_2}, \nabla$.

Però per esercizio lo dimostriamo per bene usando il lemma scorciatoia1 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia1 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione:

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow (\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Delta_2}, \nabla)^{\vee} = \mathbf{1}$ su r
(2) $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ su r
Tesi
$(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Delta_2}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Delta_1}, \nabla)^{\vee}$ su r.

dim. Dall'ipotesi (2) e dall'ipotesi (1) per la definizione di verità dell'implicazione ne segue che $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Delta_2}, \nabla)^{\vee} = \mathbf{1}$ su r. Ora dal fatto che qualche disgiunto in $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Delta_2}, \nabla)^{\vee}$ ha valore $\mathbf{1}$ su r ne segue che pure qualche proposizione in $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Delta_2}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Delta_1}, \nabla$ (che si differenzia dalla lista $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Delta_2}, \nabla$ solo per scambi di proposizioni) ha valore $\mathbf{1}$ su r e dunque $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Delta_2}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Delta_1}, \nabla)^{\vee} = \mathbf{1}$ su r.

Quindi la condizione del lemma scorciatoia1 9.13 è dimostrata e concludiamo concludiamo per tale lemma che la regola è valida.

9.10.5 Validità di $\&-\mathrm{D}$

Per mostrare la validità della regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{\Delta} \quad \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}\&\mathbf{B}, \mathbf{\Delta}}\ \&-\mathrm{D}$$

usiamo il il lemma scorciatoia2 9.14 verificando che vale la condizione scorciatoia2 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow (\mathbf{A}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r
(2)$\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow (\mathbf{B}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r
(3) $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ su r
Tesi
$(\mathbf{A}\&\mathbf{B}, \mathbf{\Delta})^{\vee}$ su r.

dim.

Dall'ipotesi (3) e (1) segue per la definizione di verità dell'implicazione che su r

$$(\mathbf{A}, \boldsymbol{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$$

e poi dall'ipotesi (3) e (2) segue sempre per la definizione di verità dell'implicazione che su r

$$(\mathbf{B}, \boldsymbol{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$$

Qui si presentano *due casi*: sulla riga r accade che o $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ oppure $\boldsymbol{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ in quanto uno delle proposizioni di $\mathbf{A}, \boldsymbol{\Delta}$ è vera ed è o $\mathbf{A}$ stesso oppure una proposizione in $\boldsymbol{\Delta}$ e quindi $\Delta^{\vee} = 1$ su r.

I caso $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ su r. In tal caso si consideri che per (2) si ottiene che una proposizione in $\mathbf{B}, \boldsymbol{\Delta}$ è vera su r ed è o $\mathbf{B}$ stesso oppure una proposizione in $\boldsymbol{\Delta}$, e quindi $\Delta^{\vee} = 1$ su r. Quindi si presentano *due sottocasi* su r o $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ oppure $\Delta^{\vee} = 1$.

Nel *sottocaso* $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ *su* r, assieme all'ipotesi $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ si conclude $\mathbf{A}\&\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r e dunque $(\mathbf{A}\&\mathbf{B}, \boldsymbol{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Nel *sottocaso* $\boldsymbol{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ *su* r si conclude lo stesso che $(\mathbf{A}\&\mathbf{B}), \boldsymbol{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Infine nel *caso* $\boldsymbol{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ *su* r si conclude come nel sottocaso analogo descritto qui sopra.

Quindi la condizione scorciatoia2 nel lemma scorciatoria2 9.14 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

9.10.6 Validità di &-S

La validità

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \boldsymbol{\Delta}}{\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{A}\&\mathbf{B} \vdash \boldsymbol{\Delta}}\ \&\text{−S}$$

segue banalmente in quanto la virgola a sinistra è proprio interpretata come una & (e la differenza dell'interpretazione delle ipotesi del sequente sopra rispetto alle premesse di quello sotto sono solo di associatività diversa dei vari congiunti..).

Però per esercizio dimostriamo per bene la validità della regola usando il il lemma scorciatoia1 9.13 di cui verifichiamo che vale la condizione scorciatoia1 scrivendo ipotesi e tesi e una dimostrazione qui di seguito.

> **Ipotesi**
> sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
> (1) $(\boldsymbol{\Gamma}\, \mathbf{A}, \mathbf{B})^{\&} \rightarrow \boldsymbol{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r
> (2) $(\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{A}\&\mathbf{B})^{\&} = \mathbf{1}$ su r
> **Tesi**
> $\boldsymbol{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r.

dim. Dall'ipotesi (1) per la definizione di verità della congiunzione segue che su r ogni proposizione in $\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{A}\&\mathbf{B}$ è vera su r e dunque valgono sia $\boldsymbol{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ che $\mathbf{A}\&\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r e di conseguenza su r valgono anche $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ da cui si conclude che vale $(\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{1}$ su r per definizione dell'operazione $(\ )^{\&}$. Da ciò grazie all'ipotesi (1) per la definizione di verità dell'implicazione ne segue che $\boldsymbol{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Quindi la condizione scorciatoia1 è verificata e per il lemma scorciatoia 9.13 la regola è valida.

9.10.7 Validità di $\vee$-S

Per mostrare la validità della regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta} \quad \mathbf{\Gamma}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}} \ \vee\!-\!\mathrm{S}$$

usiamo il il lemma scorciatoia2 9.14 verificando che vale la condizione scorciatoia2 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A})^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r
(2)$(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{B})^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r
(3) $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{1}$ su r
Tesi
$\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r.

dim. Dall'ipotesi (3) sappiamo che su r ogni proposizione in $\mathbf{\Gamma}$ è vera, ossia $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ e cosi pure $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \mathbf{1}$.

Qui abbiamo *2 casi*: o $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r.

Caso $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ *su* r. Ricordando che su r vale $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ su r ne segue che vale $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A})^{\&} = \mathbf{1}$ su r e per l'ipotesi (1) e la verità dell'implicazione si ottiene che $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r e dunque la tesi è verificata in questo caso.

Caso $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ *su* r. Ricordando che su r vale $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ ne segue che $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{1}$ su r e per l'ipotesi (2) e la verità dell'implicazione si ottiene che $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r e dunque la tesi è verificata anche in questo caso.

Quindi la condizione scorciatoia2 nel lemma scorciatoria2 9.14 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

9.10.8 Validità di $\vee\!-\!\mathrm{D}$

La validità della regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}} \ \vee\!-\!\mathrm{D}$$

segue banalmente in quanto per definizione

$$((\mathbf{A}, \mathbf{B}), \mathbf{\Delta})^{\vee} = ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}), \mathbf{\Delta})^{\vee}$$

e quindi sequenti premessa e conclusione rappresentano esattamente la stessa proposizione

$$\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}), \mathbf{\Delta})^{\vee}$$

9.10.9 Validità di $\neg\!-\!\mathrm{D}$

Per mostrare la validità della regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \neg \mathbf{A}, \mathbf{\Delta}} \ \neg\!-\!\mathrm{D}$$

usiamo il il lemma scorciatoia1 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia1 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A})^{\&} \to \mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r
(2) $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ su r
Tesi
$(\neg \mathbf{A}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r.

dim. Ragioniamo subito per casi visto che su r vale $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Caso $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ *sur* r. Per l'ipotesi (2) in questo caso sappiamo che su r vale $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A})^{\&} = \mathbf{1}$ e dunque per l'ipotesi (1) e la definizione di verità dell'implicazione segue che si ottiene che $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r e dunque $(\neg \mathbf{A}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r per la definizione di verità della disgiunzione e quindi la tesi è verificata.

Caso $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ *su* r. In tal caso $\neg \mathbf{A} = \mathbf{1}$ e quindi di nuovo $\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r e quindi pure in questa caso la tesi è verificata.

Quindi la condizione scorciatoia1 nel lemma scorciatoria1 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

9.10.10 Validità di ¬-S

Per mostrare la validità della regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}}\ \neg\text{–S}$$

usiamo il il lemma scorciatoia1 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia1 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $\mathbf{\Gamma}^{\&} \to (\mathbf{A}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r
(2) $(\mathbf{\Gamma}, \neg \mathbf{A})^{\&} = \mathbf{1}$ su r
Tesi
$\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r.

dim. Dall'ipotesi (2) segue che ogni proposizione di $\mathbf{\Gamma}, \neg \mathbf{A}$ è vera su r e dunque in particolare $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ e $\neg \mathbf{A} = \mathbf{1}$su r e per la definizione di verità della negazione sappiamo che $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ su r. Ora dall'ipotesi (3) per la definizione di verità dell'implicazione segue che $(\mathbf{A}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r ovvero o $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ su r oppure un disgiunto di $\mathbf{\Delta}$ è vero su r ossia $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r. Ora siccome da quanto dedotto dall'ipotesi (2) non può essere che valga $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ perchè vale $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ su r ne segue che necessariamente vale $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ che è la nostra tesi.

Quindi la condizione scorciatoia1 nel lemma scorciatoria1 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

9.10.11 Validità di →-D

Per mostrare la validità della regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}}\ \to\text{–D}$$

usiamo il il lemma scorciatoia1 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia1 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A})^{\&} \to (\mathbf{B}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r
(2) $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ su r
Tesi
$(\mathbf{A} \to \mathbf{B}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r.

dim. Procediamo subito per casi sul fatto che valga $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ su r.

Caso $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ *su* r. In tal caso per l'ipotesi (2) ne segue che ogni proposizione di $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}$ è vera su r e dunque per l'ipotesi (1) si ha che $(\mathbf{B}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r e quindi o $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r oppure una delle proposizioni di $\mathbf{\Delta}$ è vera e abbiamo dunque due *sottocasi* da analizzare.

I sottocaso $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ *su* r. In tal sottocaso si ottiene per la definizione di verità dell'implicazione che $\mathbf{A} \to \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r e di conseguenza per la definizione di verità della disgiunzione vale $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

II sottocaso $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ *su* r. In tal sottocaso per la definizione di verità della disgiunzione vale pure che $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

II caso $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ *su* r. In tal caso $\neg\mathbf{A} = \mathbf{1}$ su r e quindi $\mathbf{A} \to \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r e di conseguenza per la definizione di verità della disgiunzione vale $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ che è la tesi.

Quindi la condizione scorciatoia1 nel lemma scorciatoria1 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

9.10.12 Validità per di $\to$-S

Per mostrare la validità della regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{\Delta} \quad \mathbf{\Gamma}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}} \to -\mathrm{S}$$

usiamo il lemma scorciatoia2 9.14 verificando che vale la condizione scorciatoia2 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $\mathbf{\Gamma}^{\&} \to (\mathbf{A}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r
(2)$(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{B})^{\&} \to \mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r
(3) $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \to \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{1}$ su r
Tesi
$\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r.

dim. Dall'ipotesi (3) sappiamo che ogni proposizione di $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ è vera su r e dunque per la definizione di verità della congiunzione in particolare vale $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ e pure $\mathbf{A} \to \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r. Poi dall'ipotesi (1) sappiamo anche per la definizione di verità dell'implicazione che $(\mathbf{A}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r.

Da $\mathbf{A} \to \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r per la definizione di verità dell'implicazione abbiamo *2 casi*: o $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r.

Caso $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ *su* r. Sapendo che $(\mathbf{A}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{1}$ su r e che quindi una delle proposizioni di $\mathbf{A}, \mathbf{\Delta}$ è vera, ne segue che una delle proposizioni di $\mathbf{\Delta}$ è vera su r perchè $\mathbf{A}$ non lo è. Dunque $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Caso $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ *su* r. Dal fatto che pure $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ su r ne segue per definizione della verità della congiunzione sappiamo che $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{1}$ su r da cui per l'ipotesi (2) e per la definizione di verità dell'implicazione segue che $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Quindi la condizione scorciatoia2 nel lemma scorciatoria2 9.14 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

Abbiamo qui concluso di dimostrare il teorema 9.15 di validità delle regole del calcolo per i sequenti della Logica Classica Proposizionale $\mathbf{LC}_p$.

Da questo teorema concludiamo che se un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è **derivabile** allora è **valido** perchè la VALIDITÀ SCENDE $\Downarrow$ dalle foglie di assiomi validi fino alla radice $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$:

Theorem 9.16 (VALIDITÀ sequenti) Se il sequente

$$\mathtt{pr}_1, \ldots, \mathtt{pr}_\mathtt{n} \vdash \mathtt{pr}_\mathtt{k}, \ldots, \mathtt{pr}_\mathtt{m}$$

è *derivabile in* $\mathbf{LC}_p$, ovvero ammette una derivazione, allora

$$(((\mathtt{pr}_1 \& \mathtt{pr}_2 \& \ldots \& \mathtt{pr}_\mathtt{n} \to (((\mathtt{pr}_\mathtt{k} \vee \mathtt{pr}_{\mathtt{k}+1}) \ldots \vee \mathtt{pr}_\mathtt{m}$$

è *una tautologia.*

9.11 Esercizi relativi alla validità delle regole

1. la regola

$$\frac{\mathbf{C} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{\Delta} \quad \mathbf{C}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{D}}{\mathbf{C}, \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vdash \mathbf{D}} \to *$$

è valida ??

Vedremo che la regola **NON è valida** usando la condizione scorciatoia2bis del lemma scorciatoia2 9.14.

Il primo passo da compiere per capire se la regola è valida è tentare di dimostrare la sua validità usando il lemma scorciatoia2 9.14 e verificando se vale la condizione scorciatoia2 di cui scriviamo ipotesi e tesi e un tentativo di dimostrazione.

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $\mathbf{C} \to \mathbf{\Delta}^\vee = \mathbf{1}$ su r
(2)$(\mathbf{C}, \mathbf{B})^\& \to \mathbf{D} = \mathbf{C} \& \mathbf{B} \ \to \ \mathbf{D} = \mathbf{1}$ su r
(3) $(\mathbf{C}, \mathbf{A} \to \mathbf{B})^\& = \mathbf{C} \ \& (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) = \mathbf{1}$ su r
Tesi
$\mathbf{D} = \mathbf{1}$ su r.

dim. Dall'ipotesi (3) sappiamo per la definizione di verità della congiunzione che vale $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ e pure $\mathbf{A} \to \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r. Poi dall'ipotesi (1) sappiamo per la definizione di verità dell'implicazione che vale $\mathbf{\Delta}^\vee = \mathbf{1}$ su r. A questo punto però per usare l'ipotesi (2) conviene procedere per casi sul fatto che valga $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r oppure $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ su r.

Caso $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ *su* r. In tal caso per la definizione di verità della congiunzione con il fatto che $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ su r concludiamo che $(\mathbf{C}, \mathbf{B})^\& = \mathbf{C} \& \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r e poi dall'ipotesi (1) per la definizione di verità dell'implicazione concludiamo che vale $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ su r che è la nostra tesi.

Caso $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ *su* r. In tal caso per la definizione di verità dell'implicazione dal fatto che vale $\mathbf{A} \to \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r ne segue che $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ su r. A questo punto però non sappiamo se vale $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ su r. Anzi nel caso in cui su r valga

$$\mathbf{D} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

e si ponga al posto di $\mathbf{\Delta}$ una proposizione atomica $\mathbf{H}$ per cui vale $\mathbf{H} = \mathbf{1}$ allora abbiamo che $\mathbf{A} \to \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r per la definizione di verità dell'implicazione e quindi per la definizione di verità della congiunzione risulta

$$(\mathbf{C}, \mathbf{A} \to \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{C} \,\&(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) = \mathbf{1} \qquad\qquad \text{su } r$$

ma anche che vale su r per la definizione di verità dell'implicazione

$$\mathbf{C}{\to}(\mathbf{A}, \mathbf{\Delta})^{\vee} = \mathbf{C}{\to}\mathbf{A} \vee \mathbf{H} = \mathbf{1}$$

Inoltre dato che $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ne segue che $(\mathbf{C}, \mathbf{B})^{\vee} = \mathbf{0}$ per la definizione di verità della congiunzione vale pure

$$\mathbf{C}\&\mathbf{B}{\to}\ \mathbf{D} = \mathbf{1}$$

In sostanza ogni riga r per cui vale

$$\mathbf{D} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{1}$$

soddisfa

$$\mathbf{C}{\to}\ \mathbf{A} \vee \mathbf{H} = \mathbf{1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{C}\&\mathbf{B}{\to}\ \mathbf{D} = \mathbf{1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{C}\&(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) = \mathbf{1} \qquad \text{ma } \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

ovvero *la condizione scorciatoia2bis in 9.14 è verificata* e quindi per il lemma scorciatoria2 9.14 concludiamo che *la regola* $\to *$ **NON è valida.**

Però per alcune sostituzione di $\mathbf{\Delta}$ *si trovano istanze della regola* che sono **valide**.

Per esempio se $\Delta \equiv D$ si trova un'istanza della regola $\to$ −S che è valida.

Pure nel caso che Δ sia la lista vuota ovvero nel caso

$$\frac{\mathbf{C} \vdash \mathbf{A} \quad \mathbf{C}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{D}}{\mathbf{C}, \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vdash \mathbf{D}} \to *1$$

troviamo una regola valida e possiamo dimostrare la sua validità usando il lemma scorciatoia2 9.14 verificando che vale la condizione scorciatoia2 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $\mathbf{C}{\to}\ \mathbf{D} = \mathbf{1}$ su r
(2)$\mathbf{C}, \mathbf{B}{\to}\ \mathbf{D} = \mathbf{1}$ su r
(3) $(\mathbf{C}, \mathbf{A} \to \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{C} \,\&(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) = \mathbf{1}$ su r
Tesi
$\mathbf{D} = \mathbf{1}$ su r.

dim. Dall'ipotesi (3) sappiamo per la definizione di verità della congiunzione che vale $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ e pure $\mathbf{A} \to \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r. Poi dall'ipotesi (1) sappiamo anche per la definizione di verità dell'implicazione che $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ su r e quindi dal fatto che $\mathbf{A} \to \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r concludiamo subito che $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r. Da $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r per la definizione di verità della congiunzione segue che $\mathbf{C}\&\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r e per l'ipotesi (2) e per la definizione di verità dell'implicazione segue anche che $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Quindi la condizione scorciatoia2 nel lemma scorciatoria2 9.14 è verificata e per il lemma si conclude che la regola $\to *$ avente al posto di $\mathbf{\Delta}$ la lista vuota 'e valida.

2. la regola

$$\frac{\Gamma{\vdash}A, \Delta}{\mathbf{\Gamma}{\vdash}\mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}} \vee{-}\mathrm{D}_1$$

è valida ??

9.12 Esercizi su formalizzazione in sequente e come regola e loro validità

1. Formalizzare in sequente

$$\frac{\text{Non mangio gli spinaci.} \quad \text{Se mi piacessero gli spinaci li mangerei.}}{\text{Non mi piacciono gli spinaci.}}$$

utilizzando:
M=mangio gli spinaci
P=mi piacciono gli spinaci

e provare se è derivabile in LC_p il sequente ottenuto.

Nel caso positivo il sequente è una tautologia, perchè??

Soluzione:
L'asserzione si formalizza ad esempio nel sequente

$$\neg M, P \rightarrow M \vdash \neg P$$

che è una tautologia per il teorema 9.16 perchè si deriva ad esempio in tal modo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{\neg M, P \vdash P}}{\neg M \vdash \neg P, P}\ \neg\text{–D}}{\neg M \vdash P, \neg P}\ \text{sc}_{\text{dx}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{M \vdash M, \neg P}}{M, \neg M \vdash \neg P}\ \neg\text{–S}}{\neg M, M \vdash \neg P}\ \text{sc}_{\text{sx}}}{\neg M, P \rightarrow M \vdash \neg P}\ \rightarrow\text{–D}$$

2. Formalizzare in regola la seguente

$$\frac{\textbf{Ad Alice piacciono gli spinaci} \vdash \textbf{Alice mangia gli spinaci}}{\textbf{Alice non mangia gli spinaci} \vdash \textbf{Ad Alice non piacciono gli spinaci}}$$

utilizzando:
S= **Alice mangia gli spinaci**
P=**Ad Alice piacciono gli spinaci**

e stabilire quale è la regola e la proposizione formale corrispondente alla validità della regola e infine stabilire se la regola è valida.

Soluzioni:

(a) la proposizione corrispondente alla validità della regola è

$$(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{S}) \ \rightarrow \ (\neg\mathbf{S} \rightarrow \neg\mathbf{P})$$

(b) la regola ottenuta è:

$$\frac{\mathbf{P} \vdash \mathbf{S}}{\neg\mathbf{S} \vdash \neg\mathbf{P}}$$

Per mostrare la validità della regola usiamo il il lemma scorciatoia1 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia1 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $\mathbf{P} \to \mathbf{S} = \mathbf{1}$ su r
(2) $\neg\mathbf{S} = \mathbf{1}$ su r
Tesi
$\neg\mathbf{P} = \mathbf{1}$ su r.

Dall'ipotesi (2) ne segue che $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ su r e da ciò unito all'ipotesi (1) per la definizione di verità dell'implicazione ne segue che $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ su r e quindi $\neg\mathbf{P} = \mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Dunque la condizione scorciatoia1 nel lemma scorciatoria1 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che la regola è valida.

9.13 Correttezza della procedura di decisione per sequenti in $\mathbf{LC}_p$

Mostriamo qui per bene come mai le procedura di decisione in sezione 9.8 e quella in sezione 9.4.1 sono corrette.

L'esistenza delle procedure di decisione si basa essenzialmente su due fatti:

- le regole di $\mathbf{LC}_p$ sono regole SICURE, ovvero oltre ad essere valide, le loro regole INVERSE sono pure valide;
- tutte le regole di $\mathbf{LC}_p$ eccetto quelle degli scambi a sx e a dx, DIMINUISCONO di COMPLESSITÀ dal BASSO verso l'ALTO.

Procediamo quindi ad enunciare la nozione di regola inversa e poi di regola sicura.

Def. 9.17 (regola inversa ad una premessa) La regola **inversa** di una regola del tipo

$$\frac{\Gamma\vdash\Delta}{\Gamma'\vdash\Delta'}\ *$$

è la seguente

$$\frac{\Gamma'\vdash\Delta'}{\Gamma\vdash\Delta}\ * - \mathbf{inv}$$

Def. 9.18 (regola inversa ad due premesse) Le regole **inverse** di una regola del tipo

$$\frac{\Gamma_1\vdash\Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2\vdash\Delta_2}{\Gamma'\vdash\Delta'}\ *$$

sono DUE e sono le seguenti

$$\frac{\Gamma'\vdash\Delta'}{\Gamma_1\vdash\Delta_1}\ * - \mathbf{inv1} \qquad\qquad \frac{\Gamma'\vdash\Delta'}{\Gamma_2\vdash\Delta_2}\ * - \mathbf{inv2}$$

Def. 9.19 (regola SICURA) Una regola si dice **SICURA** se sia lei che tutte le sue inverse sono **valide** rispetto alla semantica delle tabelle di verità.

Ora osserviamo che tutte le regole di $\mathbf{LC}_p$ sono sicure ovvero le loro inverse sono valide:

Theorem 9.20 (validità inverse di $\mathbf{LC}_p$) **TUTTE** le **INVERSE** delle regole di $\mathbf{LC}_p$ sono valide.

Diamo ora di seguito solo la dimostrazione di validità delle inverse delle regole dell' implicazione lasciando di dimostrare per esercizio la validità delle inverse delle altre regole di $\mathbf{LC}_p$.

9.13.1 Validità della regola inversa di $\rightarrow$-D

La regola inversa della regola $\rightarrow$**-D** è la regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B},\mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma},\mathbf{A}\vdash\mathbf{B},\mathbf{\Delta}}\ \rightarrow\!-\mathrm{D}-\mathbf{inv}$$

e per mostrare la sua validità usiamo il il lemma scorciatoia1 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia1 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B},\mathbf{\Delta})^{\vee}=\mathbf{1}$ su r
(2) $(\mathbf{\Gamma},\mathbf{A})^{\&}=\mathbf{1}$ su r
Tesi
$(\mathbf{B},\mathbf{\Delta})^{\vee}=\mathbf{1}$ su r.

dim. Dall'ipotesi (2) per la verità della congiunzione sappiamo che vale sia $\mathbf{\Gamma}^{\&}=\mathbf{1}$ che $\mathbf{A}=\mathbf{1}$ su r. Poi da $\mathbf{\Gamma}^{\&}=\mathbf{1}$ su r e l'ipotesi (1) per la definizione di verità dell'implicazione otteniamo che vale $(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B},\mathbf{\Delta})^{\vee}=\mathbf{1}$. Qui abbiamo 2 casi: su r o vale $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}=\mathbf{1}$ oppure $\mathbf{\Delta}=\mathbf{1}$.

Caso $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}=\mathbf{1}$ *su* r. In questo caso dal fatto che vale $\mathbf{A}=\mathbf{1}$ su r si ottiene per la definizione di verità dell'implicazione che vale $\mathbf{B}=\mathbf{1}$ su r e dunque ne segue per la definizione di verità della disgiunzione che vale pure $(\mathbf{B},\mathbf{\Delta})^{\vee}=\mathbf{1}$ su r che è la nostra tesi.

Caso $\mathbf{\Delta}^{\vee}=\mathbf{1}$ *su* r. In tal caso risulta subito per la definizione di verità della disgiunzione che vale pure $(\mathbf{B},\mathbf{\Delta})^{\vee}=\mathbf{1}$ su r che è la nostra tesi.

Quindi la condizione scorciatoia1 nel lemma scorciatoria1 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che l'inversa della regola $\rightarrow$**-D è valida**.

9.13.2 Validità delle regole inverse di $\rightarrow$-S

Una inversa della regola $\rightarrow-$S è la regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma},\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\vdash\mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{A},\mathbf{\Delta}}\ \rightarrow-\mathrm{S}-\mathbf{inv_1}$$

e per mostrare la sua validità usiamo il il lemma scorciatoia1 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia1 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $(\mathbf{\Gamma},\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})^{\&}\rightarrow\mathbf{\Delta}^{\vee}=\mathbf{1}$ su r
(2) $\mathbf{\Gamma}^{\&}=\mathbf{1}$ su r
Tesi
$(\mathbf{A},\mathbf{\Delta})^{\vee}=\mathbf{1}$ su r.

dim. Procediamo subito per casi sul fatto che su r valga o $\mathbf{A}=\mathbf{1}$ oppure $\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

Caso $\mathbf{A}=\mathbf{1}$ *su* r. Per la definizione di verità della disgiunzione vale $(\mathbf{A},\mathbf{\Delta})^{\vee}=\mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Caso $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ *su* r. Per la definizione di verità della implicazione vale $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}=\mathbf{1}$ su r e con ciò unito all'ipotesi (2) per la definizione di verità della congiunzione otteniamo che vale $(\mathbf{\Gamma},\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})^{\&}=\mathbf{1}$ su r e da questo unito all'ipotesi (1) per la definizione di verità della implicazione concludiamo che vale $\mathbf{\Delta}^{\vee}=\mathbf{1}$ da cui per la definizione di verità della disgiunzione segue che vale $(\mathbf{A},\mathbf{\Delta})^{\vee}=\mathbf{1}$ su r che è la tesi.

Quindi la condizione scorciatoia1 nel lemma scorciatoria1 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che la regola $\rightarrow-\mathrm{S}-\mathbf{inv_1}$ è valida.

L'altra inversa della regola $\rightarrow -\mathrm{S}$ è la regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}} \rightarrow -\mathrm{S} - \mathbf{inv_2}$$

e per mostrare la sua validità usiamo il il lemma scorciatoia1 9.13 verificando che vale la condizione scorciatoia1 di cui scriviamo ipotesi e tesi e una dimostrazione.

Ipotesi
sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
(1) $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r
(2) $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{1}$ su r
Tesi
$\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r.

dim. Dall'ipotesi (2) per la definizione di verità della congiunzione otteniamo che vale sia $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ che $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r. Ora da $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r per la definizione di verità della implicazione otteniamo che vale pure $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r che assieme a $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ ci permette di concludere che vale $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^{\&} = \mathbf{1}$ su r per la definizione di verità della congiunzione. Ora da ciò e dall'ipotesi (1) per la definizione di verità della implicazione otteniamo che vale $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ che è la nostra tesi.

Quindi la condizione scorciatoia1 nel lemma scorciatoria1 9.13 è verificata e per il lemma si conclude che la regola $\rightarrow -\mathrm{S} - \mathbf{inv_2}$ è valida.

9.13.3 Sicurezza delle regole di $\mathbf{LC}_p$

Dalla proposizione 9.12 assieme ai teoremi 9.15 e 9.20 deduciamo che le regole di $\mathbf{LC}_p$ sono tutte sicure:

Corollary 9.21 (sicurezza regole $\mathbf{LC}_p$) **TUTTE** le regole di $\mathbf{LC}_p$ e le loro **INVERSE** sono **valide** rispetto alla semantica delle tabelle di verità, ovvero sono regole **SICURE**.

Concludiamo quindi che

> nelle regole del calcolo $\mathbf{LC}_p$ la **VERITÀ su una RIGA SCENDE** $\Downarrow$ dall'**alto** verso il **basso**
> al sequente radice se **TUTTE** le FOGLIE sono **VERE sulla riga**
> e la **VERITÀ** anche **SALE** $\Uparrow$ **su una riga**
> dal **basso** verso l'**alto** dal sequente radice
> verso ogni **SINGOLA** FOGLIA.

Inoltre dal fatto che in un albero la verità per riga scende fino alla radice se tutte le foglie sono vere sulla riga, e dal fatto che la verità su una riga sale dalla radice fino a ciascuna foglia concludiamo che:

Proposition 9.22 (comportamento della falsità) Vale la seguente proprietà sugli alberi costruiti con regole di $\mathbf{LC}_p$ ma anche di sole regole sicure:

in un albero fatto SOLO di regole di $\mathbf{LC}_p$
(con foglie che non sono necessariamente assiomi)

la **FALSITÀ** su una riga **SCENDE** $\Downarrow$ da UNA **SINGOLA foglia** fino alla RADICE $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$

Dim. Se dato un albero di regole di $\mathbf{LC}_p$ una foglia è falsa una riga r allora anche il sequente radice lo deve essere perchè, se invece il sequente radice fosse vero su tal riga, allora per il fatto che le inverse delle regole sono valide la verità sulla riga r sale verso ciascuna foglia compresa quella che si sa essere falsa su r, il che è assurdo e dunque si conclude che pure il sequente radice è falso su r senza dubbio. Quindi la falsità su una riga scende da una foglia alla radice.

9.13.4 Esercizi su validità e sicurezza delle regole dei sequenti

1. La regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{\Sigma} \vdash \mathbf{\Delta} \quad \mathbf{\Gamma}, \mathbf{B}, \mathbf{\Sigma} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{\Sigma} \vdash \mathbf{\Delta}} \; \vee\!-\mathrm{S}$$

   è sicura?

   ovvero lei è valida assieme alle sue inverse

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{\Sigma} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{\Sigma} \vdash \mathbf{\Delta}} \; \vee\!-\mathrm{S} - inv_1 \qquad \frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{\Sigma} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{B}, \mathbf{\Sigma} \vdash \mathbf{\Delta}} \; \vee\!-\mathrm{S} - inv_2$$

   ?

2. La regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}} \; \&\!-\mathrm{re}_1$$

   è sicura?

   Soluzione: la regola è valida e la sua dimostrazione è analoga a quella della validità per la regola $\&-$S.

   Invece la sua inversa

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}} \; \&\!-\mathrm{re}_1 - \mathrm{inv}$$

   NON è valida.

   Il primo passo da compiere per capire se la regola è valida è tentare di dimostrare la sua validità usando il lemma scorciatoia1 9.13 e verificando che vale la condizione scorciatoia1 di cui scriviamo ipotesi e tesi e un tentativo di dimostrazione.

   Ipotesi
   sia r una riga fissata della tabella di verità dei sequenti coinvolti nella regola per cui valgono
   (1) $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \& \mathbf{B})^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r
   (2)$(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A})^{\&} = \mathbf{1}$ su r
   Tesi
   $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r.

dim. Dall'ipotesi (2) per la definizione di verità della congiunzione sappiamo che valgono sia $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ su r che $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ su r.

A questo punto procediamo per casi sul fatto che su r valga o $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ su r.

Caso $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ *su* r. In tal caso per la definizione di verità della congiunzione sappiamo che vale $\mathbf{A}\&\mathbf{B} = \mathbf{1}$ su r e dunque dal fatto che vale $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{1}$ su r otteniamo che vale $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}\&\mathbf{B})^{\&} = \mathbf{1}$ su r e infine da questo e dall'ipotesi (1) per la definizione di verità dell'implicazione ne segue che $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ su r che è la nostra tesi.

$\mathbf{B} = \mathbf{0}$ *su* r. In tal caso si osservi che $\mathbf{A}\&\mathbf{B} = \mathbf{0}$ su r e pure che $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}\&\mathbf{B})^{\&} = \mathbf{0}$ su r per la definizione di verità della congiunzione. Dunque per la definizione di verità dell'implicazione ne segue che su r

$$(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}\&\mathbf{B})^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$$

A questo punto però non riusciamo a dedurre nulla del fatto che valga $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{1}$ o meno. Anzi potrebbe proprio accadere che valga $\mathbf{\Delta}^{\vee} = \mathbf{0}$ su r.

A questo punto conviene osservare che sostituendo $\mathbf{\Gamma}$ con $\mathbf{G}$ e $\mathbf{\Delta}$ con $\mathbf{H}$ si ottiene l'istanza della regola

$$\frac{\mathbf{G}, \mathbf{A}\&\mathbf{B} \vdash \mathbf{H}}{\mathbf{G}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{H}}\ \&{-}\mathrm{re}_1 - \mathrm{inv}$$

e ora sulla riga $\mathbf{G} = \mathbf{A} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{0}$ si osserva che per la definizione di verità della congiunzione

$$\mathbf{G}\&\mathbf{A} = \mathbf{1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{A}\&\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Dunque sempre per la definizione di verità della congiunzione vale $(\mathbf{G}, \mathbf{A}\&\mathbf{B})^{\&} = \mathbf{0}$ su tale riga e quindi si ottiene che

$$(\mathbf{G}, \mathbf{A}\&\mathbf{B})^{\&} \rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{G}\&(\mathbf{A}\&\mathbf{B}) \ \rightarrow\ \mathbf{H} = \mathbf{1}$$

su tale riga per la definizione di verità della congiunzione.

In sostanza ogni riga r per cui vale

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} = \mathbf{1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{0}$$

soddisfa

$$(\mathbf{G}, \mathbf{A}\&\mathbf{B})^{\&} \rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{G}\&\mathbf{A} = \mathbf{1} \qquad \text{ma } \mathbf{H} = \mathbf{0}$$

ovvero soddisfa la condizione scorciatoia1bis in 9.13 e quindi per il lemma scorciatoria1 9.13 concludiamo che *la regola* $\&{-}\mathrm{re}_1 - \mathrm{inv}$ **NON è valida.**

La riga che falsifica l'istanza della regola $\&{-}\mathrm{re}_1 - \mathrm{inv}$ sopra suggerisce che anche l'istanza della regola $\&{-}\mathrm{re}_1 - \mathrm{inv}$

$$\frac{\mathtt{tt}\& \perp \vdash \perp}{\mathtt{tt} \vdash \perp}\ \&{-}\mathrm{re}_1 - \mathrm{inv}$$

NON è valida perchè ha la premessa $\mathtt{tt}\& \perp \rightarrow \perp$ che è una tautologia mentre la conclusione $\mathtt{tt} \rightarrow \perp$ NON è chiaramente una tautologia. Dunque la regola non conserva l'essere tautologia della sua premessa e per la proposizione 9.12 la regola $\& - {-}\mathrm{re}_1 - \mathrm{inv}$ NON è valida e quindi la regola $\&{-}\mathrm{re}_1$ è **valida ma NON sicura**.

3. La regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}}\ \rightarrow{-}\mathrm{D}$$

è sicura?

9.13.5 Perchè la procedura di decisione derivabilità/validità di un sequente è corretta?

Abbiamo già anticipato che la correttezza della procedura di decisione 9.4.1 della validità tautologica di un sequente proposizionale è conseguenza del fatto che le regole di $\mathbf{LC}_p$ sono sicure, oltrechè del fatto che tali regole (escluso gli scambi a sx e a dx) DIMINUISCONO strettamente di COMPLESSITÀ dal BASSO verso l'ALTO. Vediamo in dettaglio perchè la procedura è corretta.

Se la procedura di sezione 9.4.1 applicata al sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ dice che questo è una **tautologia** è perchè è **derivabile** ovvero abbiamo costruito un albero di derivazione con radice $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$. Ora avendo a disposizione un'albero di derivazione, il sequente è certamente una **tautologia** ovvero la proposizione che lo rappresenta

$$\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\nabla^{\vee}$$

è una **tautologia** per il teorema **??** di validità degli assiomi e regole di $\mathbf{LC}_p$ in quanto la validità scende dalle foglie che sono assiomi, e quindi tautologie, fino alla radice $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$.

Se la procedura invece dice che $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ **NON è una tautologia** è perchè si trova un albero con il sequente come radice in cui vi è una foglia, ad esempio

$$\mathbf{V_{i_1}},\ldots\mathbf{V_{i_n}}\vdash\mathbf{V_{k_1}},\ldots\mathbf{V_{k_m}}$$

(o degli altri tipi elencati in 9.4.2) che NON è assioma e fatta solo di variabili proposizionali con nessuna variabile che compare sia a destra del segno $\vdash$ che a sinistra (altrimenti la foglia sarebbe un assioma!). Dunque mettendo a **1** tutte le variabili **premesse** e a **0** tutte le **conclusioni** si trova che la tabella di verità di

$$(\mathbf{V_{i_1}}\&\mathbf{V_{i_2}})\ldots\&\mathbf{V_{i_n}}\rightarrow(\mathbf{V_{k_1}}\vee\mathbf{V_{k_2}})\ldots\vee\mathbf{V_{k_m}}$$

risulta **0** in corrispondenza di ogni riga con tali valori alle variabili proposizionali indicate. Ora, sicuramente il sequente radice $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ è pure falso sulla riga scelta per la proposizione 9.22. Ripetendo in questo caso la dimostrazione della proposizione si avrebbe che se $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ fosse **vero** sulla riga scelta per **conservazione della VERITÀ su una riga** delle **regole INVERSE** sarebbero veri sulla riga in questione TUTTI i sequenti lungo il ramo che finisce nella foglia $\mathbf{V_{i_1}},\ldots\mathbf{V_{i_n}}\vdash\mathbf{V_{k_1}},\ldots\mathbf{V_{k_m}}$ compresa lei che invece NON lo è. Dunque, il sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\nabla$ **falso sulla riga scelta** e quindi **NON è una tautologia**.

Si noti inolte che in questo caso il sequente **NON è certamente derivabile** con altra derivazione perchè se lo fosse per la validità delle regole ovvero per il teorema 9.16 sarebbe invece una tautologia mentre abbiamo stabilito che non lo è.

Si osservi infine che la procedura di decisione 9.4.1 **TERMINA SEMPRE** su ogni sequente se applichiamo le regole di scambio solo quando è necessario per poter poi applicare la regola di un connettivo in quanto le regole dei connettivi DIMINUISCONO la COMPLESSITÀ dei sequenti coinvolti e si arriva ad un punto in cui non abbiamo più proposizioni composte e quindi non possiamo più applicare regole di connettivi (eventualmente precedute dall'applicazione di regole di scambio).

Esempio per verificare correttezza procedura decisione

Nell'esempio di sezione 9.8.1 abbiamo applicato la procedura di decisione 9.4.1 al sequente $\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{R}$ e costruito il seguente albero che NON è di derivazione

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{Q\vdash P,R \quad Q,Q\vdash R}{Q,P\rightarrow Q\vdash R}\ \rightarrow\text{-S}}{P\rightarrow Q,Q\vdash R}\ \text{sc}_{\text{sx}}}{P\rightarrow Q\vdash Q\rightarrow R}\ \rightarrow\text{-D}$$

Secondo la procedura basta trovare una riga per cui una foglia risulti falsa perchè il sequente radice risulti falso sulla stessa riga. Nell'esempio abbiamo scelto di falsificare la foglia di sinistra ponendo

$\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{P} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$ e possiamo osservare che la falsità scende da questa foglia fino alla radice attraverso tutti i sequenti del ramo che parte dalla radice fino alla foglia considerata:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{cc}\textbf{fals.su riga } \mathbf{Q = 1}\quad \mathbf{P = R = 0} & \\ Q\vdash P, R & Q, Q\vdash R\end{array}}{Q, P\rightarrow Q\vdash R}\ \Downarrow_{\textbf{fals.su riga}}}{P\rightarrow Q, Q\vdash R}\ \Downarrow_{\textbf{fals.su riga}}}{P\rightarrow Q\vdash Q\rightarrow R}\ \Downarrow_{\textbf{fals.su riga}}$$

Analogamente possiamo falsificare la foglia di destra per far scendere la falsità sulla riga

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{cc} & \textbf{fals.su riga } \mathbf{Q = 1}\quad \mathbf{R = 0}\qquad \mathbf{P} = \text{ a piacere} \\ Q\vdash P, R & Q, Q\vdash R\end{array}}{Q, P\rightarrow Q\vdash R}\ \Downarrow_{\textbf{fals.su riga}}}{P\rightarrow Q, Q\vdash R}\ \Downarrow_{\textbf{fals.su riga}}}{P\rightarrow Q\vdash Q\rightarrow R}\ \Downarrow_{\textbf{fals.su riga}}$$

Si noti che $\mathbf{Q} = 1$ e $\mathbf{R} = 0$ falsifica la foglia di sinistra ed anche la radice (oltrechè tutte i sequenti del ramo che parte dalla radice fino alla foglia considerata).

Si osservi inoltre che se poniamo $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{Q}$ con valore a piacere si ottiene che il sequente radice è vero su tale riga perchè sono vere entrambe le foglie dell'albero sopra ricordando che le regole del calcolo $\mathbf{LC}_p$ sono tutte valide.

9.13.6 Cosa rappresenta in pratica una derivazione?

Ora vediamo in alcuni esempi il significato di un'albero di derivazione esplicitando la semantica dei suoi sequenti e delle sue regole.

Significato della derivazione rispetto a validità dei sequenti coinvolti. Ricopiamo qui l'albero di derivazione dell'esempio in sezione 9.6.1

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ Q\vdash Q\end{array}}{Q, \neg Q\vdash}\ \neg\text{−S}}{Q\vdash \neg\neg Q}\ \neg\text{−D}}{\vdash Q\rightarrow\neg\neg Q}\ \rightarrow\text{−D}$$

Grazie a questo albero di derivazione abbiamo concluso che la proposizione $\vdash \mathbf{Q}\rightarrow\neg\neg\mathbf{Q}$ è **valida**.

Notiamo ora come la VALIDITÀ dei sequenti coinvolti SCENDA $\Downarrow$ dall'assioma identità fino al sequente radice.
Infatti osserviamo che

$$\mathbf{Q}\rightarrow\neg\neg\mathbf{Q}$$

è una tautologia per la **validità delle regole all'ingiù** $\Downarrow$ stabilita nel teorema di validità delle regole 9.15 assieme al fatto che regole valide conservano la validità tautologica dei sequenti come osservato in proposizione 9.12.

Quindi sapendo che

$$\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{Q}$$

è banalmente una tautologia, dalla validità della regola $\neg$**-S** sappiamo che pure

$$\mathbf{Q}\&\neg\mathbf{Q}\rightarrow\perp$$

è una tautologia e dalla validità della regola **¬-D** otteniamo che pure

$$\mathbf{Q}\rightarrow\neg\neg\mathbf{Q}$$

è una tautologia e infine per la validità della regola **→-D** concludiamo che pure

$$\mathtt{tt}\rightarrow(\ \mathbf{Q}\rightarrow\neg\neg\mathbf{Q}\ )$$

è una tautologia.

9.13.7 Significato della derivazione con regole sicure in termini di proposizioni

Si noti che applicando la proposizione 9.10 al significato di regola sicura ad una premessa si ottiene la seguente caratterizzazione:

Proposition 9.23 Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\mathbf{\Gamma_1}\vdash\mathbf{\Delta_1}}{\mathbf{\Gamma_2}\vdash\mathbf{\Delta_2}}$$

è *sicura* sse la proposizione

$$(\ \mathbf{\Gamma_1^{\&}}\ \rightarrow\ \mathbf{\Delta_1^{\vee}}\ )\quad\leftrightarrow\quad(\ \mathbf{\Gamma_2^{\&}}\ \rightarrow\ \mathbf{\Delta_2^{\vee}}\ )$$

è vera su ogni riga della sua tabella, e quindi è una tautologia.

Analogamente applicando la proposizione 9.11 al significato di regola sicura a due premesse si ottiene la seguente caratterizzazione:

Proposition 9.24 Una regola del calcolo dei sequenti a due premesse del tipo

$$\frac{\mathbf{\Gamma_1}\vdash\mathbf{\Delta_1}\qquad\qquad\mathbf{\Gamma_2}\vdash\mathbf{\Delta_2}}{\mathbf{\Gamma_3}\vdash\mathbf{\Delta_3}}$$

è *sicura* sse la proposizione

$$(\ \mathbf{\Gamma_1^{\&}}\ \rightarrow\ \mathbf{\Delta_1^{\vee}}\ )\ \&\ \ (\ \mathbf{\Gamma_2^{\&}}\ \rightarrow\ \mathbf{\Delta_2^{\vee}}\ )\quad\leftrightarrow\quad(\ \mathbf{\Gamma_3^{\&}}\ \rightarrow\ \mathbf{\Delta_3^{\vee}}\ )$$

è vera su ogni riga della sua tabella, e quindi è una tautologia.

Ora applichiamo questa caratterizzazione delle regole sicure per analizzare una derivazione con regole di $\mathbf{LC}_p$ concentrandoci sul fatto che sono sicure e vedendo in concreto cos'è una derivazione rispetto alla semantica dei sequenti coinvolti.

Riprendiamo l'esempio di sezione 8, ovvero il problema di stabilire se

$$(\ \mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\ )\vee(\ \mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}\ )$$

è una tautologia. A tal scopo applichiamo la procedura di decisione al sequente

$$\vdash(\ \mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\ )\vee(\ \mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}\ )$$

e otteniamo la seguente derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{A},\mathbf{B}\vdash\mathbf{A},\mathbf{B}\end{array}}{\mathbf{A}\vdash\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A},\mathbf{B}}\ \rightarrow\!-\mathrm{D}}{\mathbf{A}\vdash\mathbf{B},\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}}\ \mathrm{sc_{sx}}}{\vdash\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B},\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}}\ \rightarrow\!-\mathrm{D}}{\vdash(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})\vee(\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A})}\ \vee\!-\mathrm{D}$$

Siccome sappiamo che le regole adoperate nella derivazione sopra sono sicure, ovvero conservano la verità dei sequenti su una riga sia da TUTTE le foglie fino alla radice ma anche dalla radice fino a CIASCUNA foglia, esplicitiamo il significato delle regole e dei sequenti coinvolti tramite la caratterizzazione delle regole sicure in proposizione 9.23.

Concludiamo che la derivazione sopra non fa altro che operare le seguenti equivalenze di proposizioni implicative

$$\begin{array}{c} \mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}) \vee \mathbf{B} \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}\ \vee (\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}) \\ \Updownarrow \\ \mathtt{tt}\ \rightarrow\ (\ \mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\ ) \vee (\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A}) \end{array}$$

e l'ultima proposizione è equivalente ad $(\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\ ) \vee (\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A})$ sapendo che la proposizione $(\mathtt{tt} \rightarrow \mathtt{pr})$ è equivalente a $\mathtt{pr}$ per una qualsiasi proposizione formale, ovvero

$$(\mathtt{tt} \rightarrow \mathtt{pr})\ \leftrightarrow\ \mathtt{pr}$$

è una tautologia.

In pratica la derivazione mostrata di $\vdash (\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\ ) \vee (\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{A})$, come ogni altra derivazione di tal sequente, opera una STRATEGIA di RIDUZIONE ad una tautologia a partire dagli assiomi attraverso una serie di equivalenze tra proposizioni che risultano tutte tautologie per il fatto che le regole del calcolo sono valide. Questa strategia che consente di decidere la validità di una proposizione attraverso la costruzione di una derivazione è migliore rispetto a quelle in sezione 8 perchè termina sempre con una risposta ed è eseguibile in modo automatico da un computer!

9.13.8 Metodo alternativo per decidere se un sequente è una tautologia o un'opinione o un paradosso

Illustriamo qui un **modo alternativo** per vedere se un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è una tautologia o un'opinione o un paradosso. Questo metodo consiste nel procedere come segue.

1. Dato un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ si costruisce un albero di regole dal basso verso l'alto ponendo il sequente come radice fino ad arrivare ad avere foglie che sono o assiomi del calcolo $\mathbf{LC}_P$ oppure sono sequenti che non sono assiomi e sono senza proposizioni composte;
2. se l'albero ottenuto è di derivazione allora il sequente è una tautologia altrimenti è NON valido;
3. se il sequente è NON valido per stabilire se è un'opinione si cerchi *un'assegnazione delle variabili proposizionali del sequente, ovvero una riga della tabella del sequente radice, che rende TUTTE VERE le FOGLIE dell'albero.* Se **una tal riga esiste** allora il sequente di partenza è **un'opinione**. Se invece **si dimostra che una tal riga non esiste** allora il sequente di partenza è un **paradosso**.

Per mostrare un esempio di uso di tale procedura riprendiamo l'esempio in sezione 9.8.1 dove abbiamo concluso che il sequente $\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}\vdash\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{P}$ NON è valido. In quell'esempio abbiamo stabilito anche una riga in cui il sequente è falso e abbiamo concluso che è pure soddisfacibile mostrando una riga su cui è vero dopo aver applicato l'intera procedura 9.4.1.

Ora riproduciamo l'albero (che non è di derivazione!) costruito per decidere la NON validità del sequente che è pure fatto di foglie con sole variabili proposizionali

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q\vdash P, P \quad Q, Q\vdash P}{Q, P\rightarrow Q\vdash P}\ \rightarrow\text{-S}}{P\rightarrow Q, Q\vdash P}\ \text{sc}_{\text{sx}}}{P\rightarrow Q\vdash Q\rightarrow P}\ \rightarrow\text{-D}$$

ove vi sono presenti due foglie NON assiomi. Si vede che su una riga in cui $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ (con P designato a piacere) le due foglie diventano soddisfacibili e quindi per il teorema di conservazione della verità per riga 9.15 il sequente radice $P{\rightarrow}Q{\vdash}Q{\rightarrow}P$ diventa **soddisfacibile** perchè vero su ogni riga con $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

9.13.9 Completezza calcolo dei sequenti

La **correttezza** della procedura di decisione per sequenti in $\mathbf{LC}_p$ implica il seguente teorema di **completezza del calcolo** $\mathbf{LC}_p$ rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità:

Theorem 9.25 (validità e completezza classica) *Il concetto di DERIVABILITÀ in* $\mathbf{LC}_p$ *coincide con quello di VALIDITÀ CLASSICA delle tabelle di verità, ovvero il sequente* $\mathtt{pr_1}, \ldots, \mathtt{pr_n} \vdash \mathtt{pr_k}, \ldots, \mathtt{pr_m}$ *è derivabile in* $\mathbf{LC}_p$ *sse* $(((\mathtt{pr_1} \& \mathtt{pr_2} \& \ldots) \& \mathtt{pr_n} \rightarrow (((\mathtt{pr_k} \vee \mathtt{pr_{k+1}}) \ldots) \vee \mathtt{pr_m}$ *è una tautologia.*

Dimostrazione: Per il teorema di validità dei sequenti 9.16 se il sequente è derivabile allora è valido. Per mostrare il viceversa procediamo come segue: se $(((\mathtt{pr_1} \& \mathtt{pr_2}) \& \ldots \mathtt{pr_n} \rightarrow (((\mathtt{pr_k} \vee \mathtt{pr_{k+1}}) \ldots \vee \mathtt{pr_m}$ è una tautologia allora applichiamo la procedura di decisione 9.8 al sequente

$$\mathtt{pr_1}, \ldots, \mathtt{pr_n} \vdash \mathtt{pr_k}, \ldots, \mathtt{pr_m}$$

che sappiamo rappresentare la proposizione sopra. Tra l'altro per la proposizione 9.6 è indifferente derivare il sequente $\mathtt{pr_1}, \ldots, \mathtt{pr_n} \vdash \mathtt{pr_k}, \ldots, \mathtt{pr_m}$ oppure il sequente

$$\vdash (((\mathtt{pr_1} \& \mathtt{pr_2}) \& \ldots \mathtt{pr_n} \rightarrow (((\mathtt{pr_k} \vee \mathtt{pr_{k+1}}) \ldots \vee \mathtt{pr_m}$$

Ora il sequente $\mathtt{pr_1}, \ldots, \mathtt{pr_n} \vdash \mathtt{pr_k}, \ldots, \mathtt{pr_m}$ deve risultare derivabile perchè se non lo fosse e fosse NON valido otterremo per la procedura 9.8 una riga che assegna $\mathbf{0}$ al sequente sopra e quindi alla proposizione $(((\mathtt{pr_1} \& \mathtt{pr_2}) \& \ldots \mathtt{pr_n} \rightarrow (((\mathtt{pr_k} \vee \mathtt{pr_{k+1}}) \ldots \vee \mathtt{pr_m}$ che lui rappresenta contro l'ipotesi che questa sia una tautologia.

Ora diamo la definizione di teorema all'interno del calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_p$:

Def. Una proposizione $\mathtt{pr}$ si dice *teorema* della logica classica proposizionale $\mathbf{LC}_p$ se $\vdash \mathtt{pr}$ è derivabile nel calcolo $\mathbf{LC}_p$.

Quindi, dal teorema 9.25 deduciamo che:

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{teoremi in } \mathbf{LC}_p \\ = \\ \textbf{tautologie classiche}\end{array}}$$

Infine osserviamo che il calcolo $\mathbf{LC}_p$ NON può derivare il falso ovvero è, come si dice usualmente, *consistente*:

Theorem 9.26 (consistenza calcolo proposizionale classico) Il calcolo $\mathbf{LC}_p$ NON può derivare il falso ovvero $\vdash \perp$ *NON è derivabile* in $\mathbf{LC}_p$.

Dim.: se $\vdash \perp$ fosse derivabile in $\mathbf{LC}_p$ allora sarebbe una **tautologia** per il teorema di validità dei sequenti derivabili in sezione 9.16 mentre la tabella di $\perp$ è la funzione costante $\mathbf{0}$ e quindi $\vdash \perp$ NON è derivabile.

9.13.10 Decidibilità del calcolo $\mathbf{LC}_p$

Def. Un calcolo si dice **DECIDIBILE** se *esiste un* **programma***(=algoritmo) che permette di* **decidere** *se una proposizione* $\mathtt{pr}$ *è* **teorema del calcolo** *(ovvero* $\vdash \mathtt{pr}$ *è derivabile nel calcolo)*

Il calcolo dei sequenti per la Logica Classica Proposizionale $\mathbf{LC}_p$ è DECIDIBILE perchè esiste una procedura di decisione per le sue proposizioni descritta in sezione 9.6, che ricordiamo dipende ESSENZIALMENTE dal fatto che

1. il calcolo $\mathbf{LC}_p$ ha tutte REGOLE SICURE;
2. le regole di $\mathbf{LC}_p$ (escluso gli scambi) **diminuiscono in COMPLESSITÀ $\Uparrow$ dal BASSO verso l'ALTO**;
3. gli scambi sono applicati solo quando necessario.

In particolare la diminuzione della complessità dei sequenti dal basso verso l'alto nelle regole dei connettivi di $\mathbf{LC}_p$ garantisce la terminazione della procedura di decisione della derivabilità di un sequente in sezione 9.8 per ogni sequente a cui si applica. Invece la presenza di regole sicure garantisce la correttezza della procedura.

Concludiamo osservando che, grazie al fatto che tutte regole di $\mathbf{LC}_p$ sono sicure *nel cercare una derivazione di un sequente in* $\mathbf{LC}_p$ *si può procedere scegliendo* **a piacere le regole dei connettivi da applicare**, usando le regole di scambio solo se necessario per poter poi applicare la regola di un connettivo, fino ad arrivare a foglie che sono assiomi oppure sequenti che non sono assiomi e hanno sole variabili proposizionali. Il fatto che la complessità diminuisce strettamente ad ogni applicazione di una regola di un connettivo garantisce che tale processo di ricerca termina sempre in un albero che è o di derivazione oppure consente di stabilire che il sequente è NON valido producendo una riga che falsifica una foglia non assioma e quindi il sequente radice per il fatto che le regole del calcolo $\mathbf{LC}_p$ sono tutte sicure.

9.13.11 NON esiste procedura di decisione con regole NON sicure

Se al posto di

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}\&\mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}}\ \&-\mathrm{S}$$

adottassimo le regole del libro del prof. Sambin

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}\&\mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}}\ \&-\mathrm{re}_{\mathbf{1}} \qquad \frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}\&\mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}}\ \&-\mathrm{re}_{\mathbf{2}}$$

potremmo costruire alberi che *NON sono alberi di derivazione* con foglie contenente solo variabili proposizionali e NON assiomi che però hanno *come radice un sequente che è una tautologia.* Ciò significa che con regole NON sicure *non possiamo necessariamente avere una procedura di decisione come quella di sezione 9.4.1* che ci permette di concludere che un sequente NON è valido semplicemente dal fatto che NON abbiamo costruito un albero di derivazione una volta che siamo arrivati a delle foglie con solo variabili proposizionali e che NON sono assiomi. Vediamo bene perchè con un esempio.

Ora sappiamo che $\mathbf{A}\&(\mathbf{B}\vee\mathbf{C}) \vdash \mathbf{B}\vee\mathbf{C}$ è certamente una tautologia rispetto alla semantica classica delle tabelle di verità (nel dubbio si applichi la procedura di sezione 9.4.1!). Ma se usiamo il calcolo in cui abbiamo rimpiazziamo la regola $\&-\mathrm{re}_{\mathbf{1}}$ e $\&-\mathrm{re}_{\mathbf{2}}$ al posto di $\&-\mathrm{S}$ per costruire alberi, possiamo costruire questo albero

$$\cfrac{\cfrac{\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, \mathbf{C}}{\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}\vee\mathbf{C}}\ \&-\mathrm{re}_{\mathbf{1}}}{\mathbf{A}\&(\mathbf{B}\vee\mathbf{C}) \vdash \mathbf{B}\vee\mathbf{C}}\ \&-\mathrm{re}_{\mathbf{1}}$$

con una foglia non assioma e fatta solo di variabili proposizionali. Però NON possiamo concludere che la radice $\mathbf{A}\&(\mathbf{B}\vee\mathbf{C}) \vdash \mathbf{B}\vee\mathbf{C}$ NON è valida!

In realtà in questo calcolo modificato con regole NON sicure possiamo derivare il sequente se applichiamo $\&-\text{re}_{\mathbf{2}}$ come segue

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{B}\vee\mathbf{C}\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\end{array}}{\mathbf{A}\&(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}}\ \&-\text{re}_{\mathbf{2}}$$

La morale è che in un calcolo con regole NON sicure si *può sbagliare strategia di derivazione* andando a costruire alberi che non sono alberi di derivazione pur avendo come radice un sequente che è una tautologia perchè si scelgono regole non utili a trovare la derivazione che NON conservano la verità per riga dal basso verso l'alto.

Invece con la regola sicura $\&-$S non c'è strategia sbagliata perchè *ogni applicazione di regola è ok* e al più uno può allungare la derivazione ad esempio come segue

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{A},\mathbf{B}\vdash\mathbf{B},\mathbf{C}\end{array}\qquad\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{A},\mathbf{C}\vdash\mathbf{B},\mathbf{C}\end{array}}{\mathbf{A},\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\vdash\mathbf{B},\mathbf{C}}\ \vee-\text{S}}{\mathbf{A},\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}}\ \vee-\text{D}}{\mathbf{A}\&(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}}\ \&-\text{S}$$

senza accorgersi che già alla prima applicazione di $\vee-$S si è ottenuta una derivazione che è difatti

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{A},\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}\end{array}}{\mathbf{A}\&(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})\vdash\mathbf{B}\vee\mathbf{C}}\ \&\text{S}$$

Memo. Ricordare di evitare di derivare ulteriormente assiomi identità ottenuti con la ripetizione a dx e a sx di una proposizione composta!!

Esercizi

Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie o opinioni o paradossi motivando la risposta:

1. $\dfrac{\text{O esco la sera e quindi mi diverto, oppure mi riposo se non esco la sera.}}{\text{O mi diverto o mi riposo.}}$

   si consiglia di usare:
   E=esco la sera
   D=mi diverto
   R= mi riposo

   Soluzione: l'asserzione si può formalizzare in tal modo

   $$(\mathbf{E}\&\mathbf{D})\vee(\neg\mathbf{E}\rightarrow\mathbf{R})\vdash\mathbf{D}\vee\mathbf{R}$$

   Applicando la procedura di decisione in sezione 9.4.1 si ottiene

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\textbf{ax-id}}{E, D \vdash D, R}}{E\&D \vdash D, R}\;\&-\text{S} \qquad \dfrac{\dfrac{E \vdash D, R}{\vdash \neg E, D, R}\;\neg-\text{D} \qquad \overset{\textbf{ax-id}}{R \vdash D, R}}{\neg E \to R \vdash D, R}\;\to-\text{S}}{(E\&D) \vee (\neg E \to R) \vdash D, R}\;\vee-\text{S}}{(E\&D) \vee (\neg E \to R) \vdash D \vee R}\;\vee-\text{D}
$$

Dalla foglia che non si chiude $\mathbf{E} \vdash \mathbf{D}, \mathbf{R}$ deduciamo che il sequente di partenza è NON valido perchè falso sulla riga che assegna $\mathbf{E} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{D} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Si poi vede facilmente che per $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ ove i valori di $\mathbf{E}, \mathbf{R}$ sono assegnati a piacere, si ha $\mathbf{D} \vee \mathbf{R} = \mathbf{1}$ ovvero la foglia $\mathbf{E} \vdash \mathbf{D}, \mathbf{R}$ risulta vera su ogni riga con $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ e dunque per la validità delle regole di $\mathbf{LC}_p$ usate nell'albero sopra, il sequente radice $(\mathbf{E}\&\mathbf{D}) \vee (\neg\mathbf{E} \to \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$ risulta vero su tali righe e si conclude che esso è **soddisfacibile**.

La risposta finale è che il sequente

$$(\mathbf{E}\&\mathbf{D}) \vee (\neg\mathbf{E} \to \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$$

è un'**opinione** perchè è falso sulla riga $\mathbf{E} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{D} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$ ed è vero su ogni riga con $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ e con i valori di $\mathbf{E}, \mathbf{R}$ assegnati a piacere.

Alternativamente, si può applicare la procedura in sezione 9.4.1 al sequente

$$\vdash \neg(\,(\mathbf{E}\&\mathbf{D}) \vee (\neg\mathbf{E} \to \mathbf{R}) \to \mathbf{D} \vee \mathbf{R}\,)$$

per trovare che NON è valido e la riga su cui è falso è una riga su cui è vero il sequente $(\mathbf{E}\&\mathbf{D}) \vee (\neg\mathbf{E} \to \mathbf{R}) \vdash \mathbf{D} \vee \mathbf{R}$ e dunque concludiamo che tal sequente è un'opinione.

2. (1 appello bis)

   Solo se cadono le foglie è autunno.
   ___
   Se e solo se non cadono le foglie, non è autunno ma inverno.

   si consiglia di usare:
   C = "cadono le foglie"
   I = "è inverno"
   A= "è autunno"

3. (I appello)

   Se ho tempo rileggo il compito.
   ___
   Se e soltanto se ho tempo rileggo il compito.

   si consiglia di usare:
   R = "Rileggo il compito"
   H = "Ho tempo"

4. (II appello)

   Sono all'estero se non sono a Padova.
   ___
   Non si dà il caso che sia a Padova e non sia all'estero.

   si consiglia di usare:
   E = "Sono all'estero"
   P = "Sono a Padova"

5. (III appello)

$$\frac{\text{Non si dà il caso che, se c'è vita sulla Luna, ci sia vita su Marte o su Saturno, o su Giove.}}{\text{Se c'è vita sulla Luna e non su Giove allora c'è pure su Marte e Saturno.}}$$

si consiglia di usare:
L =“C'è vita sulla Luna”
M =“C'è vita su Marte”
S=“C'è vita su Saturno”
G=“C'è vita su Giove”

6. (IV appello)

$$\frac{\text{Non c'è vita su Giove ma c'è su Marte e Saturno.}}{\text{Non si dà il caso che, se c'è vita sulla Luna e non su Giove, allora ci sia pure su Marte.}}$$

si consiglia di usare le variabili dell'asserzione precedente.

7. $$\frac{\text{È meglio ammainare le vele se il mare è in tempesta.}}{\text{Soltanto se il mare non è in tempesta ed è calmo, non è meglio ammainare le vele.}}$$

si consiglia di usare:
T=“il mare è in tempesta”
M =“è meglio ammainare le vele”
C=“il mare è calmo”

8. $$\frac{\text{Lo Scirocco non soffia né da nord né da ovest se c'è afa.}}{\text{Non si dà il caso che soltanto se c'é afa lo Scirocco soffi da nord.}}$$

si consiglia di usare:
N=“Scirocco soffia da nord”
O =“Scirocco soffia da ovest”
A=“C'é afa”

Mostrare se i sequenti elencati di seguito sono tautologie o opinioni o paradossi:

1. $(B \to A) \to (A \to C) \vdash (B \to C) \to A$

2. $\neg(A \to \neg B \vee \neg A) \leftrightarrow \neg(B\&A) \vdash \neg B \leftrightarrow B$

Stabilire se le seguenti regole sono valide e anche sicure rispetto alla semantica classica:

1. $$\frac{\vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ 1$$

2. $$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \to A \vdash \Delta}\ 2$$

10 Nozione di teoria proposizionale ed esempi

Ora applichiamo quanto appreso precedentemente sulla logica classica proposizionale allo studio di alcune sue teorie. Lo scopo è di comprendere come applicare lo studio della logica a quello della scienza, ovvero di una teoria scientifica a partire da alcuni assiomi extra-logici.

Def. 10.1 (teoria proposizionale) Con il termine **teoria proposizionale** si intende un'*estensione* del calcolo della logica classica proposizionale LC_p con un numero finito di **assiomi extralogici** indicati in una lista

- Ax.1
- Ax.2
- Ax.3
- Ax.4
- ...
- Ax.k

e le seguenti **regole di composizione** a sinistra

$$\frac{\vdash \mathtt{fr} \quad \mathbf{\Gamma}, \mathtt{fr}, \mathbf{\Gamma}" \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma}', \mathbf{\Gamma}' \vdash \nabla} \text{ comp}$$

ove $\mathtt{fr}$ è una proposizione (o più genericamente "formula") del linguaggio proposizionale della teoria

Ovvero in breve

TEORIA proposizionale = LOGICA proposizionale + regole composizione + assiomi EXTRALOGICI

Def. 10.2 (sequente derivabile in una teoria $\mathcal{T}$) Un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ si dice **derivabile** nella **teoria proposizionale $\mathcal{T}$**
se esiste un albero avente

- $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ come radice;
- ogni foglia è istanza di un assioma di $\mathcal{T}$
  ossia o di un assioma logico di $\mathbf{LC}p$ o di un **assioma extralogico specifico** di $\mathcal{T}$;
- l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di T ovvero delle regole di $\mathbf{LC}_p$ e delle regole di composizione.

Def. 10.3 Una formula $\mathtt{fr}$ si dice **teorema** di una specifica teoria $\mathcal{T}$ se è *derivabile nella teoria $\mathcal{T}$* (ovvero è una "*tautologia di $\mathcal{T}$*").

Osservazione: Tutte le tautologie classiche sono teoremi di ogni teoria proposizionale!!!

Nel seguito identificheremo una teoria proposizionale designando i SOLI assiomi extralogici.

10.1 Come derivare in una teoria

Se la teoria $\mathcal{T}$ è fatta da assiomi extralogici

- Ax.1
- ...
- Ax.k

la regola di composizione si può usare in due modi:

1. **Uso della regola di composizione su assiomi**:

   Le formule $\mathtt{fr}$ che si ottengono da una derivazione in $\mathbf{LC}_p$ di $\mathtt{fr}$ con l'uso di assiomi extralogici $\mathrm{Ax.}\mathbf{i_1}, \mathrm{Ax.}\mathbf{i_2} \dots$ come premesse diventano *teoremi della teoria* $\mathcal{T}$ componendo con gli assiomi.

   Infatti, per esempio se abbiamo una *derivazione* π *ottenuta con due assiomi*

$$\frac{\pi}{\mathrm{Ax.}\mathbf{i_1}, \mathrm{Ax.}\mathbf{i_2} \vdash \mathtt{fr}}$$

   si può comporre questa derivazione con la regola di composizione *fino a trovare una derivazione di* $\vdash \mathtt{fr}$ *nella teoria* $\mathcal{T}$ *in tal modo*

$$\dfrac{\vdash \mathrm{Ax.}\mathbf{i_1} \qquad \dfrac{\vdash \mathrm{Ax.}\mathbf{i_2} \qquad \dfrac{\pi}{\mathrm{Ax.}\mathbf{i_1}, \mathrm{Ax.}\mathbf{i_2} \vdash \mathtt{fr}}}{\mathrm{Ax.}\mathbf{i_1} \vdash \mathtt{fr}}\ \mathrm{comp}}{\vdash \mathtt{fr}}\ \mathrm{comp}$$

   $\Rightarrow$ $\mathtt{fr}$ diventa **teorema della teoria T**.

2. **Uso della regola di composizione su teoremi già noti**:

IN UNA TEORIA LA CONOSCENZA SI ACCUMULA con la regola comp:

Se in una teoria si è *già dimostrato il teorema* $\vdash \mathtt{T_1}$ ovvero si è già trovata una derivazione π_1

$$\frac{\pi_1}{\vdash \mathtt{T_1}}$$

allora *si può usare la formula* $\mathtt{T_1}$ *come premessa per derivare un'altra formula* T_2.
Se ci si riesce trovando una derivazione nella teoria del tipo

$$\frac{\pi_2}{\mathtt{T_1} \vdash \mathtt{T_2}}$$

allora **si può comporre le derivazioni** π_1 **e** π_2 **con comp**
per ottenere una derivazione di $\vdash \mathtt{T_2}$ (senza premesse)!! nella teoria
in tal modo

$$\frac{\dfrac{\pi_1}{\vdash \mathtt{T_1}} \qquad \dfrac{\pi_2}{\mathtt{T_1} \vdash \mathtt{T_2}}}{\vdash \mathtt{T_2}}\ \text{comp}$$

ovvero
in una **teoria** *si possono derivare* **nuovi teoremi componendo** con derivazioni di **teoremi già noti**

10.2 Esempi di teorie proposizionali con esercizi

1. Sia T_{bi} la teoria che estende $\mathrm{LC}_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
   - Sia Chiara che Pina vanno in bici.
   - Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va
   - Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.
   - Chiara non va in bici se Elia non ci va.

   utilizzando:
   C=Chiara va in bici
   P=Pina va in bici
   G=Giorgio va in bici
   F= Fabio va in bici
   E= Elia va in bici

   Dedurre poi le seguenti affermazioni in T_{bi}:
   - Se Fabio va in bici allora Chiara non ci va.
   - Fabio non va in bici.
   - Giorgio va in bici.
   - Elia va in bici.

Soluzione

- Ax. 1 Sia Chiara che Pina vanno in bici.

$$C \,\&\, P$$

- Ax. 2 Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va.

$$P \rightarrow G \vee F$$

- Ax. 3 Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.

$$F \rightarrow \neg C$$

- Ax. 4 Chiara non va in bici se Elia non ci va.

$$\neg E \rightarrow \neg C$$

- T5. Fabio non va in bici.

$$\vdash \neg F$$

  si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash$ Ax 3.}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$F \vdash F$}
\RightLabel{$\neg$–D}
\UnaryInfC{$\vdash \neg F , F$}
\RightLabel{sc_{sx}}
\UnaryInfC{$\vdash F , \neg F$}
\AxiomC{$\vdash$ Ax 1.}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$C , P \vdash C , \neg F$}
\RightLabel{&S}
\UnaryInfC{$C \,\&\, P \vdash C , \neg F$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\vdash C , \neg F$}
\RightLabel{$\neg$S}
\UnaryInfC{$\neg C \vdash \neg F$}
\RightLabel{$\rightarrow$–S}
\BinaryInfC{$F \rightarrow \neg C \vdash \neg F$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\vdash \neg F$}
\end{prooftree}
$$

- T6. Giorgio va in bici.

$$\vdash G$$

  si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash$ Ax 2.}
\AxiomC{π_1}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash P, G$}
\AxiomC{π_2}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$G \vee F \vdash G$}
\RightLabel{$\rightarrow$–S}
\BinaryInfC{$P \rightarrow G \vee F \vdash G$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\vdash G$}
\end{prooftree}
$$

  dove π_1 è la seguente derivazione

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash$ Ax 1.}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$C , P \vdash P, G$}
\RightLabel{&–S}
\UnaryInfC{$C \,\&\, P \vdash P, G$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\vdash P, G$}
\end{prooftree}
$$

  e dove π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ G \vdash G\end{array} \qquad \dfrac{\vdash \text{T5.} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ F \vdash F\,,\ G\end{array}}{F\,,\ \neg F \vdash G}\ \neg\text{–S}}{F \vdash G}\ \text{comp}}{G \vee F \vdash G}\ \vee\text{–S}$$

- T7. Se Fabio va in bici allora Chiara non va

$$\vdash \mathbf{F} \rightarrow \neg\mathbf{C}$$

che è l'assioma 3. e dunque

$$\begin{array}{c}\textbf{Ax.3}\\ \vdash \mathbf{F} \rightarrow \neg\mathbf{C}\end{array}$$

è già una derivazione!!

- T8. Elia va in bici.

$$\vdash \mathbf{E}$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax.4} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ E \vdash E\end{array}}{\vdash \neg E\,,\ E}\ \neg\text{–S} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash \text{Ax.1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ C\,,\ P \vdash C\,,\ E\end{array}}{C\,\&\,P \vdash C\,,\ E}\ \&\text{–S}}{\vdash C\,,\ E}\ \text{comp}}{\neg C \vdash E}\ \neg\text{–S}}{\neg E \rightarrow \neg C \vdash E}\ \rightarrow\text{–S}}{\vdash \mathbf{E}}\ \text{comp}$$

2. Sia T_{gi} la teoria proposizionale ottenuta dalla formalizzazione dei seguenti assiomi:
   - Giovanni va in gita se Carla non ci va.
   - Beppe non va in gita se e solo se ci va Giovanni.
   - Beppe va in gita se Carla non va in gita.
   - Toni va in gita solo se ci va Claudia.

   utilizzando:
   C= Carla va in gita
   B= Beppe va in gita
   G=Giovanni va in gita
   T=Toni va in gita
   E=Ester va in gita

   Dedurre poi le seguenti affermazioni in T_{gi}:
   - Se Giovanni non va in gita allora Beppe ci va.
   - Se Carla non va in gita allora Beppe non ci va.

- Carla va in gita.
- Solo se Claudia va in gita allora ci vanno sia Toni che Giovanni.
- Se Claudia non va in gita ci va Ester.
- Non si dà il caso che Claudia non vada in gita e che ci vada Beppe.

Soluzione (un cenno):

- **Ax.1** è $\neg\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{G}$
- **Ax.2** è $(\neg\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{G}) \,\&\, (\mathbf{G} \rightarrow \neg\mathbf{B})$
- **Ax.3** è $\neg\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}$
- **Ax.4** è $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{C}$

Poi

- $\mathtt{T}_{\mathbf{5}}$ è $\neg\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{B}$ che si deriva usando $\mathbf{Ax_2}$ come segue

$$\dfrac{\vdash \mathrm{Ax}.\mathbf{2} \qquad \dfrac{\pi}{(\neg\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{G}) \,\&\, (\mathbf{G} \rightarrow \neg\mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{B}}}{\vdash \neg\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{B}}\ \text{comp}$$

ove π è una qualche derivazione nella teoria (qui basta in $\mathbf{LC}_p$) del sequente

$$(\neg\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{G}) \,\&\, (\mathbf{G} \rightarrow \neg\mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{B}$$

che si lascia da fare per esercizio al lettore.

- $\mathtt{T}_6$ è $\neg\mathbf{C} \rightarrow \neg\mathbf{B}$ che si deriva componendo una derivazione di

$$\mathbf{Ax.1}, \mathbf{Ax.2} \vdash \mathtt{T}_6$$

con gli assiomi nelle premesse.

- $\mathtt{T}_7$ è $\mathbf{C}$ che si deriva componendo una derivazione di

$$\mathtt{T}_6, \mathbf{Ax.3} \vdash \mathtt{T}_7$$

con l'assioma e il teorema già noto nelle premesse.

- $\mathtt{T}_8$ è $\mathbf{T}\&\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{C}$ che si deriva componendo una derivazione di

$$\mathbf{Ax.4} \vdash \mathtt{T}_{\mathbf{8}}$$

con l'assioma nelle premesse.

- $\mathtt{T}_9$ è $\neg\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$ che si deriva componendo una derivazione di

$$\mathtt{T}_{\mathbf{7}} \vdash \mathbf{T_9}$$

con il teorema già noto nelle premesse.

- $\mathtt{T}_{10}$ è $\neg(\neg\mathbf{C}\ \&\ \mathbf{B})$ che si deriva componendo una derivazione di

$$\mathtt{T}_7 \vdash \mathtt{T}_{\mathbf{10}}$$

con il teorema già noto nelle premesse.

11 Logica classica predicativa

Dopo aver studiato la logica classica proposizionale, ovvero la logica delle proposizioni classiche, passiamo a studiare la logica classica predicativa, ovvero quella dei *predicati classici.*

In questa sezione introduciamo il linguaggio della logica classica predicativa, la nozione di validità dei suoi predicati, chiamati anche genericamente "formule", e il relativo calcolo dei sequenti. Vedremo che useremo anche per i predicati un calcolo con tutte regole sicure ma siccome la loro complessità non diminuisce strettamente dal basso verso l'alto non avremo una procedura per decidere automaticamente la validità dei predicati. Comunque studieremo una procedura semi-automatica per stabilire tale validità.

11.1 Linguaggio predicativo

Un **linguaggio predicativo** ha 2 classi di **simboli**:

1. simboli chiamati **TERMINI** per indicare **enti**
   esempi: **x** variabile, $\overline{\mathbf{s}}$ per nome "**Socrate**"

2. simboli chiamati **PREDICATI** per indicare **proprietà logiche degli enti**
   esempi: **U**(**x**) per "**x è un uomo**'", **U**($\overline{\mathbf{s}}$) per "**Socrate è un uomo**'"
   e i predicati sono chiusi sui **CONNETTIVI PROPOSIZIONALI** e **QUANTIFICAZIONI universali ed esistenziali**
   esempi: **U**(**x**)&**M**(**x**) per "**x è un uomo ed è mortale**'", **U**(**x**)→**M**(**x**) per "**se x è un uomo allora è mortale**'", ∀**xM**(**x**) sta per "**tutti sono mortali**'", ∃**xM**(**x**) sta per "**esiste qualcuno di mortale**'"

D'ora in poi usiamo il termine **FORMULA** per indicare un predicato
esso può essere:

- predicato (o formula) **atomico** ovvero dato come primitivo
- predicato (o formula) **composta** ovvero costruito con connettivi proposizionali o quantificazioni da quelli primitivi che sono chiusi sia su **quantificazione universale "per ogni"** che sulla **quantificazione esistenziale "esiste.."**.

Inoltre useremo il simbolo **fr** come meta-variabile per una *formula generica*
e la meta-variabile **t**, oppure **s** oppure **u** per indicare un *termine generico.*

Diamo qui la definizione di linguaggio predicativo formale:

Def. 11.1 *Un linguaggio $\mathcal{L}$ predicativo è individuato da*

- *un insieme di* **COSTANTI***:*
  a*,* **b***,...* **h**
  più generalmente indicate con la scrittura

  $(\mathbf{c_j})_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}}$ — *ovvero una famiglia di costanti indiciate su un insieme* **J** *grande a piacere*

- *un insieme di* **PREDICATI atomici**
  dipendenti da un numero FINITO qualsiasi di variabili oppure variabili proposizionali (non dipendenti da nessuna variabile):

$\mathbf{A(x_1,\dots,x_n)}$, ... , $\mathbf{B}$, $\mathbf{C(x_1,\dots,x_m)}$, ... $\mathbf{M(x)}$, ..., $\mathbf{L}$, $\mathbf{E}$, ...
più generalmente indicati con la scrittura

$$(\mathbf{P_k(x_1,\dots,x_m)})_{\mathbf{k\in K}}$$

ovvero una famiglia di predicati con un numero finito di variabili indiciate su un insieme $\mathbf{K}$ *grande a piacere oppure vuoto*

Queste costanti e questi predicati atomici costituiscono l'alfabeto di $\mathcal{L}$ *e sono utilizzati per generare i termini e le formule del linguaggio* $\mathcal{L}$ *come segue nelle prossime sezioni.*

Si osservi che sopra tra i predicati del linguaggio predicativo abbiamo *incluso le variabili proposizionali* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$ del linguaggio proposizionale pensandole come *predicati senza variabili libere.*

11.1.1 Grammatica termini simbolici

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ un **TERMINE t** può essere costruito in tal modo:

- una variabile è un **termine** e assumiamo che ci sia un numero grande a piacere di variabili indicate con le ultime lettere MINUSCOLE dell'alfabeto inglese **w**, **x**, **y**, **z**, rese infinite tramite indicizzazione $x_1, \dots, x_n \dots$, $y_1, \dots, y_n \dots$, $w_1, \dots, w_n \dots$, $z_1, \dots, z_n \dots$.
- una costante in $\mathcal{L}$ è un **termine** e indichiamo le costanti con una lettera MINUSCOLA preferibilmente tra le prime dell'alfabeto italiano $a, b, c \dots$, evitando le lettere usate come variabili.

Sulle vari simboli per termini. Le costanti a, b, c, d servono per indicare dei nomi propri nelle traduzioni e rappresentano *un termine specifico*

ad esempio

$a = x$

significa che il termine di nome proprio a è uguale alla variabile x.

Le meta-variabili u, v, t, s servono per scrivere formule arbitrarie ad esempio

$$t = s \ \& \ \forall x \ x = s$$

indica una "quantita infinita" di formule dove al posto di t si può mettere sia una variabile, ad esempio $x, y, w, ..$ etc.., oppure una costante $a, b, c...$ e lo stesso vale per s che indica che al suo posto si può mettere una variabile o una costante.

Inoltre abbiamo reso infinite le variabili con la scrittura

$x_1, x_2, ...x_n, ...$

oppure

$w_1, w_2, ...w_n, ...$

indicizzando con numeri le lettere usate per le variabili x, y, w.

Allo stesso modo possiamo rendere infinite le costanti indicizzandole con numeri

$a_1, a_2, ...a_n, \dots$

e analogamente anche le meta-variabili (che sono le lettere per includere in un colpo solo tutti gli insiemi di termini..) possono essere rese infinite indicizzando i t e gli s in tal modo

$t_1, t_2, ...t_n$.

In conclusione per formalizzare in formule le nostre frasi in linguaggio corrente e descrivere le regole del calcolo per manipolare tali formule abbiamo a disposizione simboli per costanti per indicare i nomi propri e una quantità infinita di simboli di variabili di termine per quantificare su predicati che variano su un numero grande a piacere di variabili. Poi abbiamo anche bisogno di scrivere meta-variabili per descrivere le regole dei quantificatori.

Qui per semplicità di scrittura abbiamo optato per una divisione (che può essere ambigua...!) tra l'uso delle prime lettere minuscole dell'alfabeto per costanti, le ultime lettere dell'alfabeto italiano (eccetto la z) per indicare le meta-variabili di termine, e le lettere dell'alfabeto inglese non presenti in quello italiano (con eventuali indici) per indicare le variabili di termini.

11.1.2 Grammatica formule simboliche

Una *formula* `fr` nel linguaggio di $\mathcal{L}$ si può costruire in tal modo:

- sono **formule** i predicati **atomici** $\mathbf{P_k(t_1, \ldots, t_m)}$ ottenuti dal predicato atomico $\mathbf{P_k(x_1, \ldots, x_m)}$ di $\mathcal{L}$ sostituendo le variabili con termini $\mathbf{t_i}$ per $\mathbf{i = 1, \ldots, m}$
- $\forall \mathbf{x}$ (`fr`) (che si legge "per ogni x `fr`") è una **formula** se `fr` lo è
- $\exists \mathbf{x}$ (`fr`) (che si legge "esiste un x tale che `fr`") è una **formula** se `fr` lo è
- la costante "falso" $\perp$ è una **formula**
- la costante "vero" `tt` è una **formula**
- ($\mathtt{fr}_1$) & ($\mathtt{fr}_2$) è una **formula** se $\mathtt{fr}_1$ e $\mathtt{fr}_2$ lo sono
- ($\mathtt{fr}_1$) $\vee$ ($\mathtt{fr}_2$) è una **formula** se $\mathtt{fr}_1$ e $\mathtt{fr}_2$ lo sono
- ($\mathtt{fr}_1$) $\rightarrow$ ($\mathtt{fr}_2$) è una **formula** se $\mathtt{fr}_1$ e $\mathtt{fr}_2$ lo sono
- $\neg$(`fr`) è una **formula** se `fr` lo è.

Esempi di linguaggi: Il linguaggio

$$\mathcal{L} \equiv (\ \bar{\mathbf{s}}, \mathbf{U(x)}, \mathbf{M(x)} \ )$$

è costituito dalla costante $\bar{\mathbf{s}}$ assieme ai predicati unari $\mathbf{U(x)}$ e $\mathbf{M(x)}$ e le sue formule sono solo quelle generate con questi predicati e costanti: ad esempio $\mathbf{U(x)} \rightarrow \mathbf{M(x)}$ è una formula di questo linguaggio, come pure $\mathbf{U(\bar{s})} \& \mathbf{M(\bar{s})}$ mentre NON è formula di questo linguaggio $\mathbf{M(a)}$ oppure $\mathbf{C(x, b)}$.

Si noti che ogni variabile proposizionale $\mathbf{A}$ può essere vista come *predicato* 0-*ario* ovvero senza variabili. Per esempio il linguaggio predicativo più piccolo che contiene la formula $\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ è un linguaggio predicativo senza costanti e con i soli predicati 0-ari $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$
ovvero

$$\mathcal{L}' \equiv (\ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \ )$$

Infine il linguaggio predicativo più piccolo che contiene la formula $\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C(c, y)}$ è il linguaggio predicativo

$$\mathcal{L}'' \equiv (\ \mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C(x, y)} \ )$$

ove il predicato atomico è $\mathbf{C(x, y)}$ (che si scrive con due variabili libere qualsiasi).

11.1.3 Come mettere le parentesi

Nello scrivere i predicati $\forall$ o $\exists$ si lega alla formula più vicina più di ogni altro connettivo come la negazione $\neg$, seguito a pari merito da $\vee, \&$, che a loro volta sono legate alle formule più di $\rightarrow$.

Ovvero

$$\neg, \forall, \exists \quad \textbf{lega più di} \quad \vee, \& \quad \textbf{lega più di} \quad \rightarrow$$

Esempi:

- "**(tutti** gli **x** tale che **A**(**x**) **) o B**"

  si scrive

  $$\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}$$

- "**tutti** gli **x** tale che **(** **A**(**x**) **o B)**"

  si scrive

  $$\forall \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B})$$

- "**(esiste un x tale che** $A(x)$ **) implica (** B **o** C **)**"

  si scrive

  $$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$$

- "**(esiste** un **x** tale che **(** $A(x)$ **implica** B **)) o** C "

  si scrive

  $$\exists \mathbf{x} (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{B}\ ) \vee \mathbf{C}$$

11.1.4 A cosa servono i predicati?

I predicati servono per formalizzare asserzione del tipo

Tutti gli uomini sono mortali
Socrate è un uomo
―――――――――――――――
Socrate è mortale

ove si è adottato la convenzione (con la sbarra) in sezione 5. A tal scopo usiamo i seguenti predicati

M(**x**)=**"x è mortale"**
U(**x**)=**"x è un uomo"**
e introduciamo la costante $\overline{\mathbf{s}}$ per esprimere il nome "**Socrate**":

Poi per esprimere il "**tutti**" usiamo il simbolo di **quantificazione universale** "**per ogni**" davanti a un predicato e formalizziamo la frase "Tutti gli uomini sono mortali" in tal modo

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\ )$$

mentre "Socrate è un uomo" e "Socrate è mortale" si formalizzano rispettivamente in $\mathbf{U}(\overline{\mathbf{s}})$ e in $\mathbf{M}(\overline{\mathbf{s}})$ perchè *al posto della variabile x possiamo sostituire la costante* $\overline{\mathbf{s}}$.

Infine l'intera asserzione sopra si formalizza nel sequente

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\ ), \mathbf{U}(\overline{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{M}(\overline{\mathbf{s}})$$

Mentre per formalizzare l'asserzione

Qualche antenato di Mario è nobile.

ci avvaliamo delle seguenti funzioni proposizionali o predicati

$\mathbf{A(x,y)}$ = **"x è antenato di y"**
$\mathbf{N(x)}$ = **"x è nobile"**
e un nome, ovvero una costante, per indicare il nome di Mario

$\overline{\mathbf{m}}$=**"Mario"**.

Poi per esprimere "**qualche**" usiamo il simbolo di **quantificazione esistenziale** "**esiste**" davanti a un predicato

$$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{P}(\mathbf{x})$$

L'asserzione quindi si può esprimere così:

$$\exists \mathbf{x}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{x})\,)$$

$\forall \mathbf{x}(\ \mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{x})\,)$ traduce

Tutti i P(x) sono Q(x)
Chi è P(x) è pure Q(x)
Quelli che sono P(x)... sono Q(x)
I P(x) sono Q(x)
Un P(x) è un Q(x)
Chiunque è P(x), è pure Q(x)
Ogni P(x) è Q(x)
Soltanto i Q(x) sono P(x)
Se uno è P(x) allora è pure Q(x)
Solo se uno è Q(x) allora è pure P(x)

$\exists \mathbf{x}(\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\,\&\mathbf{Q}(\mathbf{x})\,)$ traduce

C'è un P(x) che è Q(x)
esiste un P(x) che è Q(x)
qualche P(x) è Q(x)
esistono dei P(x) che sono Q(x)

$\neg\exists \mathbf{x}(\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\,\&\mathbf{Q}(\mathbf{x})\,)$ traduce

nessun P(x) è un Q(x)
non esiste un P(x) che è Q(x)
non esistono P(x) che sono Q(x)

Trucco *per tradurre* **soltanto quelli**, **solo quelli che**

- riscrivere la frase *togliendo* il *"soltanto", o "solo"*

- tradurre la frase ottenuta usando la quantificazione universale e l'implicazione

- se la frase ottenuta è $\forall x\ (\ \mathbf{fr_1}(x)\ \rightarrow\ \mathbf{fr_2}(x)\ )$ allora la traduzione della frase iniziale si ricava *SCAMBIANDO antecedente* con *conseguente*, ovvero scrivendo $\forall x\ (\ \mathbf{fr_2}(x)\ \rightarrow\ \mathbf{fr_1}(x)\ )$

11.1.5 Esempi di formalizzazione di predicati

Ogni volta che formalizziamo un'asserzione usiamo un particolare linguaggio predicativo dato dalle costanti $\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_n}$, e da dei predicati atomici $\mathbf{P_1(x_1, \ldots, x_m)}$, $\mathbf{P_2(x_1, \ldots, x_k)}, \ldots$.

1. L'asserzione

   "x più cinque è minore od uguale a sei"

   si può scrivere formalmente

   $$\mathbf{x + 5 \leq 6}$$

   ove $\mathbf{x + 5 \leq y}$ è simbolo di predicato per "x +5 minore o uguale ad y"
   e ovviamente 6 è il numero sei.

2. l'asserzione **"il quadrato di x più il quadrato di y è uguale ad uno"**

   si può scrivere formalmente

   $$\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$$

3. L'asserzione

   "esiste un numero x tale che x è minore o uguale di 6"

   si può formalizzare così

   $$\exists \mathbf{x}\ (\ \mathbf{N(x)}\ \&\ \mathbf{x \leq 6}\ )$$

   ove
   $\mathbf{x \leq y}$ è simbolo di predicato di minore o uguale ovvero "x è minore od uguale ad y"
   N(x)= "x è un numero"

4. L'asserzione **"Se Mario non mangia allora non sta in piedi"**

   si può formalizzare così

   $$\neg \mathbf{M}(\overline{\mathbf{m}}) \rightarrow \neg \mathbf{P}(\overline{\mathbf{m}})$$

   ove
   M(x)="x mangia"
   P(x)= "x sta in piedi"
   $\overline{\mathbf{m}}$**="Mario"**

5. L'asserzione

   "Chi non mangia non sta in piedi"

   è formalizzabile così

   $$\forall \mathbf{x}\ (\ \neg \mathbf{M(x)} \rightarrow \neg \mathbf{P(x)}\ )$$

   ponendo

   M(x)="x mangia"
   P(x)= "x sta in piedi"

6. L'asserzione

   "**Solo quelli che hanno il biglietto salgono sull'aereo.**"

   si può formalizzare così

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x})\ )$$

con
B(x)= " x ha il biglietto"
S(x)= "x sale sull'aereo"

7. l'asserzione

   "**Non si dà il caso che nessun programma termini.**"

   si può formalizzare in
   $$\neg\neg\exists \mathbf{x}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\ \&\ \mathbf{T}(\mathbf{x})\ )$$

   con
   P(x)= "x è programma"
   T(x)= "x termina"

8. l'asserzione

   "**Nessun programma con un ciclo infinito termina.**"

   si può formalizzare così
   $$\neg\exists \mathbf{x}\ (\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\ \&\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ )\ \&\ \mathbf{T}(\mathbf{x})\ )$$

   ove
   P(x)= "x è programma"
   T(x)= "x termina"
   C(x, y)= "y è ciclo di x "

9. "**Un programma che non ha cicli termina.**"

   si può formalizzare in

   $$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\ \&\ \neg\exists \mathbf{y}\ \mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{x})\ )$$

   con
   P(x)= "x è programma"
   T(x)= "x termina"
   C(x, y)= "y è ciclo di x "

11.1.6 Nozione di variabile LIBERA in termini e formule

L'introduzione dei quantificatori universale ed esistenziale nel linguaggio predicativo comporta la presenza di due tipi di variabili: le *variabili libere*, che sono variabili all'interno di una formula senza quantificatori legati ad esse, e le *variabili vincolate*, che sono variabili che cadono nel raggio di azione di un quantificatore.

Prima di definire le variabili libere di una formula precisiamo la ovvia definizione di variabile libera in un termine considerando che al momento i termini sono solo o variabili o costanti:

$\mathbf{VL}(\mathbf{c}) \equiv \emptyset$ se **c** costante
$\mathbf{VL}(\mathbf{x}) \equiv \{\mathbf{x}\}$

Poi definiamo la nozione di variabile libera di una formula come segue:

$\mathbf{x}$ si dice **LIBERA** in $\mathtt{fr}$ **sse** $\mathbf{x} \in \mathbf{VL}(\mathtt{fr})$ ove

$$\mathbf{VL}(\perp) \equiv \emptyset$$

$$\mathbf{VL}(\,\mathbf{P_k}(\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_m})\,) \equiv \mathbf{VL}(\,\mathbf{t_1}) \cup \cdots \cup \mathbf{VL}(\mathbf{t_m})$$

$\mathbf{VL}(\ \forall \mathbf{y}\ (\mathtt{fr})\ ) \equiv \mathbf{VL}(\mathtt{fr}) \setminus \{\mathbf{y}\}$ **ovvero y appare VINCOLATA in** $\forall \mathbf{y}\ (\mathtt{fr})$

$\mathbf{VL}(\ \exists \mathbf{y}\ (\mathtt{fr})\ ) \equiv \mathbf{VL}(\mathtt{fr}) \setminus \{\mathbf{y}\}$ **ovvero y appare VINCOLATA in** $\forall \mathbf{y}\ (\mathtt{fr})$

$$\mathbf{VL}(\ (\mathtt{fr}_1)\ \&\ (\mathtt{fr}_2)\ ) \equiv \mathbf{VL}(\mathtt{fr}_1\ ) \cup \mathbf{VL}(\mathtt{fr}_2)$$

$$\mathbf{VL}(\ (\mathtt{fr}_1) \vee (\mathtt{fr}_2)\ ) \equiv \mathbf{VL}(\mathtt{fr}_1) \cup \mathbf{VL}(\mathtt{fr}_2)$$

$$\mathbf{VL}(\ (\mathtt{fr}_1) \rightarrow (\mathtt{fr}_2)\ ) \equiv \mathbf{VL}(\mathtt{fr}_1) \cup \mathbf{VL}(\mathtt{fr}_2)$$

$$\mathbf{VL}(\ \neg(\mathtt{fr})\ ) \equiv \mathbf{VL}(\mathtt{fr})$$

Esempi

$\mathbf{VL}(\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{z}\ \mathbf{B}(\mathbf{z}, \mathbf{y})\ ) = \{\,\mathbf{x}\,,\ \mathbf{y}\,\}$

$\mathbf{VL}(\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x}\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ ) = \{\,\mathbf{x}\,,\ \mathbf{y}\,\}$
poichè $\mathbf{x}$ è libera in $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ anche se vincolata in $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$\mathbf{VL}(\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})\ ) = \{\,\mathbf{z}\,\}$

$\mathbf{VL}(\ \forall \mathbf{z}\ \mathbf{B}(\mathbf{z})\ \vee\ \mathbf{A}(\mathbf{z}, \mathbf{x})\ ) = \{\,\mathbf{z}\,, \mathbf{x}\}$
poichè $\mathbf{z}$ è libera nel secondo disgiunto $\mathbf{A}(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ perchè il $\forall \mathbf{z}$ lega solo l'occorrenza di $\mathbf{z}$ in $\mathbf{B}(\mathbf{z})$

$\mathbf{VL}(\ \forall \mathbf{z}\ (\ \mathbf{B}(\mathbf{z})\ \vee\ \mathbf{A}(\mathbf{z}, \mathbf{x})\ )) = \{\,\mathbf{x}\}$
perchè il $\forall \mathbf{z}$ lega entrambe le occorrenze di $\mathbf{z}$ per la convenzione sulle parentesi.

Si osservi che dire che *una variabile* **w** *è* **NON LIBERA in una formula fr** significa due cose:

- o **w** NON compare per nulla in **fr**,
- oppure **w** compare vincolata in **fr**, ovvero nel raggio di azione di un quantificatore.

11.2 Calcolo dei sequenti LC per la Logica classica predicativa

Il calcolo seguente è chiuso sulle applicazioni delle regole ottenute mettendo al posto delle variabili A, B e dei predicati $A(x)$ delle formule qualsiasi e al posto di w nelle regole $\exists-$S e $\forall-$D una *qualsiasi altra variabile* purchè rispetti le condizioni dettate dalle regole.

Inoltre si ricorda che con $\mathbf{t}$ si intende una meta-variabile per un termine che può essere una delle variabili $x, y, z, \ldots$ oppure una delle costanti $a, b, c, \ldots$.

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot & \text{ax-}\mathtt{tt} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x\ A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

Poi diciamo che un **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$ **è derivabile nel calcolo LC** se tal sequente ammette una derivazione nel senso di definizione 13.2 applicata a **LC**.

11.2.1 Come si sarebbe potuto scrivere il calcolo LC

Prima della descrizione delle regole del calcolo dei sequenti **LC** in 11.2 abbiamo precisato che le regole si possono applicare anche a sequenti ottenuti sostituendo le variabili per predicati atomici $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e le variabili proposizionali $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ con formule qualsiasi. Per rendere più esplicita ed evidente questa proprietà possiamo descrivere il calcolo dei sequenti **LC** in modo equivalente scrivendo le regole con $\mathtt{fr}_1$ e $\mathtt{fr}_2$, che chiamiamo META-variabili per formule complesse arbitrarie, al posto di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (la differenza tra le variabili $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}$ e le META-variabili $\mathtt{fr}_1$ e $\mathtt{fr}_2$ è che le prime sono i costituenti di base della grammatica delle formule per formare formule complesse, ad esempio $A\&(B(x) \vee C) \to \exists x\ \ D(x, y)$, mentre le seconde sono solo variabili di più alto livello per indicare una formula complessa). Si noti che la scrittura $\mathtt{fr}[\mathtt{x}/\mathtt{t}]$ indica la formula ottenuta sostituendo le occorrenze libere della variabile $\mathbf{x}$ in $\mathtt{fr}$ con il termine $\mathbf{t}$ (la definizione formale di sostituzione sarà data in una delle prossime sezioni).

$$\begin{array}{ccc} \textbf{ax-id} & \textbf{ax-}\bot & \text{ax-}\mathtt{tt} \\ \Gamma, \mathtt{fr}_1, \Gamma' \vdash \Delta, \mathtt{fr}_1, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathtt{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1 \& \mathtt{fr}_2, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, \mathtt{fr}_1, \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \& \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr_1}, \mathtt{fr_2}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathtt{fr_1} \vee \mathtt{fr_2}, \Delta} \vee\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, \mathtt{fr_1} \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathtt{fr_2} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathtt{fr_1} \vee \mathtt{fr_2} \vdash \Delta} \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \mathtt{fr_1} \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathtt{fr_1}, \Delta} \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr_1}, \Delta}{\Gamma, \neg \mathtt{fr_1} \vdash \Delta} \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \mathtt{fr_1} \vdash \mathtt{fr_2}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathtt{fr_1} \rightarrow \mathtt{fr_2}, \Delta} \rightarrow-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr_1}, \Delta \quad \Gamma, \mathtt{fr_2} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathtt{fr_1} \rightarrow \mathtt{fr_2} \vdash \Delta} \rightarrow-\mathrm{S}$$

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}] \ , \ \nabla}{\mathbf{\Gamma} \vdash \ \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr} \ , \ \nabla} \forall-\mathrm{D}\ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma}, \ \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr} \ , \ \nabla)) \qquad \frac{\mathbf{\Gamma}, \ \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr} \ , \ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma} \ , \ \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr} \vdash \nabla} \forall-\mathrm{S}$$

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}] \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma}, \ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr} \vdash \nabla} \exists-\mathrm{S}\ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma}, \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}, \mathbf{\Delta})) \qquad \frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \ , \ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr} \ , \nabla}{\mathbf{\Gamma} \vdash \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr} \ , \ \nabla} \exists-\mathrm{D}$$

Def. 11.2 (sequente derivabile in $\mathbf{LC}_=$) *Un sequente* $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ *si dice* `derivabile` *nel calcolo dei sequenti* $\mathbf{LC}_=$
se esiste un albero avente

- $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ *come radice;*

- *ogni foglia è istanza di un assioma di* $\mathbf{LC}_=$
ottenuto **sostituendo** *le variabili* **A**,**B** *con arbitrarie proposizioni* $\mathtt{pr_1}$ *e* $\mathtt{pr_2}$
e le variabili $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Delta}$, ∇, $\mathbf{\Sigma}$ *con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).*

- *l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di* $\mathbf{LC}_=$
ottenute **sostituendo** *le variabili* **A**,**B** *con arbitrarie proposizioni* $\mathtt{pr_1}$ *e* $\mathtt{pr_2}$
e le variabili $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Delta}$, ∇, $\mathbf{\Sigma}$ *con liste di proposizioni arbitrarie (anche con la lista vuota).*

11.2.2 Attenzione alle condizioni su variabili

Quando si applica $\forall-$D o $\exists-$S controllare le **condizioni su variabili**:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\textbf{ax-id}}{\mathbf{A(z)} \vdash \mathbf{A(z)}}}{\mathbf{A(z)} \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}} \forall-\mathrm{D}\ \textbf{NO!!!}}{\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}} \exists-\mathrm{S} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\textbf{ax-id}}{\mathbf{A(z)} \vdash \mathbf{A(z)}}}{\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash \mathbf{A(z)}} \exists-\mathrm{S}\ \textbf{NO!!!}}{\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}} \forall-\mathrm{D}$$

NON sono derivazioni corrette: nella prima NON si può applicare $\forall-$D perchè **z** è libera nel contesto a **sx** di $\vdash$ ovvero in $\mathbf{A(z)} \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}$
e nella seconda NON si può applicare $\exists-$S perchè **z** è libera nel contesto a **dx** di $\vdash$ ovvero in $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A(z)} \vdash \mathbf{A(z)}$.

11.2.3 Esempi di derivazione: uso delle regole $\forall-$S e $\exists-$D

Nel calcolo LC possiamo derivare il sequente

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U(x)} \rightarrow \mathbf{M(x)}\ )\ , \mathbf{U(\overline{s})} \vdash \mathbf{M(\overline{s})}$$

in tal modo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,) \vdash U(\overline{s}), M(\overline{s})} \qquad \overset{\text{ax-id}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,),\ M(\overline{s})\vdash M(\overline{s})}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,)\ U(\overline{s})\to M(\overline{s})\vdash M(\overline{s})}\ \to\!-\mathrm{S}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,) \vdash M(\overline{s})}\ \forall\!-\mathrm{S}}{\forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,), U(\overline{s}) \vdash M(\overline{s})}\ \mathrm{sc_{sx}}$$

Si noti che conviene applicare la regola $\forall-$S mettendo al posto della metavariabile **t** il termine (costante o variabile) che si spera possa condurre a trovare una derivazione, ovvero non ha senso applicare prima la regola $\forall-$S per esempio con la variabile **x**

$$\dfrac{\dfrac{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,)\ U(x)\to M(x)\vdash M(\overline{s})}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,) \vdash M(\overline{s})}\ \forall\!-\mathrm{S}}{\forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,), U(\overline{s}) \vdash M(\overline{s})}\ \mathrm{sc_{sx}}$$

Anche se grazie al fatto che la regola $\forall-$S è sicura si può recuperare la sostituzione giusta al secondo colpo così

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{U(\overline{s}),U(x)\to M(x),\ \forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,) \vdash U(\overline{s}), M(\overline{s})} \qquad \overset{\text{ax-id}}{U(\overline{s}),U(x)\to M(x),\ \forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,),\ M(\overline{s})\vdash M(\overline{s})}}{U(\overline{s}),U(x)\to M(x),\ \forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,)\ ,\ U(\overline{s})\to M(\overline{s})\vdash M(\overline{s})}\ \to\!-\mathrm{S}}{U(\overline{s}),U(x)\to M(x),\forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,)\vdash M(\overline{s})}\ \forall\!-\mathrm{S}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,)\ , U(x)\to M(x)\vdash M(\overline{s})}\ \mathrm{sc_{sx}}}{U(\overline{s}),\ \forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,) \vdash M(\overline{s})}\ \forall\!-\mathrm{S}}{\forall x\ (\,U(x)\to M(x)\,), U(\overline{s}) \vdash M(\overline{s})}\ \mathrm{sc_{sx}}$$

Inoltre l'asserzione composta

$$\dfrac{\textbf{Il conte Augusto è un'antenato di Mario ed è nobile}}{\textbf{Qualche antenato di Mario è nobile}}$$

si può formalizzare nel sequente

$$\mathbf{A}(\mathbf{c},\overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{c})\ \vdash\ \exists\mathbf{x}\ (\,\mathbf{A}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{x})\,)$$

ove si pone
$\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ = **"x è antenato di y"**
$\mathbf{N}(\mathbf{x})$ = **"x è nobile"**
$\overline{\mathbf{m}}$=**"Mario"**
c="Il conte Augusto"

Possiamo derivare il sequente in LC in tal modo:

$$\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{\mathbf{A}(\mathbf{c},\overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{c})\ \vdash\ \mathbf{A}(\mathbf{c},\overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{c}), \exists\mathbf{x}\ (\,\mathbf{A}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{x})\,)}}{\mathbf{A}(\mathbf{c},\overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{c})\ \vdash\ \exists\mathbf{x}\ (\,\mathbf{A}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{m}})\ \&\ \mathbf{N}(\mathbf{x})\,)}\ \exists\!-\mathrm{D}$$

Si noti che conviene applicare la regola $\exists-$D mettendo al posto della metavariabile **t** un termine (costante o variabile) che *compare nel resto del sequente* e che si spera possa condurre a trovare una derivazione.

11.3 Come formalizzare l'unicità in logica predicativa? aggiungiamo il predicato di uguaglianza!

In sezione 11.1.2 abbiamo visto che per definire un linguaggio predicativo occorre avere come base di partenza dei predicati atomici $\mathbf{P_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_m})$ che negli esempi in sezione 11.1.4 sono ad esempio $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ o $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ etc. Ora ci concentriamo su linguaggi predicativi dove c'è senz'altro come predicato atomico il predicato binario dell'uguaglianza $\mathbf{t} = \mathbf{s}$ che indica che il termine $\mathbf{t}$ è uguale al termine $\mathbf{s}$ o meglio

$$\mathtt{ter}_1 = \mathtt{ter}_2$$

ove $\mathtt{ter}_1$ e $\mathtt{ter}_2$ indicano entrambi *termini qualsiasi* o variabili o costanti.

Anche qui come in precedenza usiamo i simboli $\mathbf{t}$ e $\mathbf{s}$ come meta-variabili per termini che possono denotare sia costanti (indicate con le lettere dell'alfabeto fino alla lettera $\mathbf{u}$) che variabili (indicate con le ultime lettere dell'alfabeto inglese $\mathbf{x}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{y}$ o $\mathbf{z}$ eventualmente indiciate da numeri).

La novità è che questo predicato atomico di uguaglianza $\mathbf{t} = \mathbf{s}$ avrà *sue proprie regole* che saranno aggiunte al calcolo dei sequenti **LC** formando un nuovo calcolo $\mathbf{LC}_=$.

In questo modo l'enunciato

"Tutti sono uguali a se stessi"

formalizzato con la formula

$$\forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

che NON è derivabile nel calcolo **LC** *diventa DERIVABILE nel calcolo* $\mathbf{LC}_=$ e quindi *diventa una TAUTOLOGIA classica.*

I linguaggi predicativi con l'aggiunta dell'uguaglianza si chiamano **linguaggi predicativi con uguaglianza** e la logica predicativa con le regole dell'uguaglianza si chiama **LOGICA PREDICATIVA con UGUAGLIANZA**.

Vediamo a che serve l'uguaglianza con degli esempi.

Esempio 0: come formalizzare in logica classica

"**c''e un x uguale a cinque**"

?

Con la formula

$$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{5}$$

Esempio 1: come formalizzare in logica classica

"**Il programma fattoriale su input 2 dà un'unico output.**"

con
$O(x, y, z)$= "il programma y su input z dà output il numero x"
f="il programma fattoriale"
2= "due"

?

Una possibile formalizzazione è la seguente:

$$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{O}(\mathbf{x},\mathbf{f},\mathbf{2})\ \&\ \forall \mathbf{y_1}\ \forall \mathbf{y_2}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{y_1},\mathbf{f},\mathbf{2})\ \&\ \mathbf{O}(\mathbf{y_2},\mathbf{f},\mathbf{2}) \rightarrow \mathbf{y_1}{=}\mathbf{y_2}\ )$$

Un'altra possibile formalizzazione (meno conveniente però per derivare) è la seguente:

$$\exists \mathbf{x}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{x},\mathbf{f},\mathbf{2})\ \&\ \forall \mathbf{y}\ (\mathbf{O}(\mathbf{y},\mathbf{f},\mathbf{2}) \rightarrow \mathbf{y}{=}\mathbf{x}\ )\ )$$

Esempio 2: come formalizzare in logica classica

"**Il programma fattoriale assegna ad ogni input un'unico output.**"

con
$O(x, y, z)$= "il programma y su input z dà output il numero x"
f="il programma fattoriale"

?

Una possibile formalizzazione è la seguente:

$$\forall\ \mathbf{z}\ \ (\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{O}(\mathbf{x},\mathbf{f},\mathbf{z})\ \&\ \forall \mathbf{y_1}\ \forall \mathbf{y_2}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{y_1},\mathbf{f},\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{O}(\mathbf{y_2},\mathbf{f},\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{y_1}{=}\mathbf{y_2}\ )\ )$$

Un'altra possibile formalizzazione (meno conveniente però per derivare) è la seguente:

$$\forall\ \mathbf{z}\ \ \exists \mathbf{x}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{x},\mathbf{f},\mathbf{z})\ \&\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{y},\mathbf{f},\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{y}{=}\mathbf{x}\ )\ )$$

Esempio 4: come formalizzare in logica classica

"**Certi potenti pensano a se stessi e soltanto a se stessi**"

con
$\mathbf{O}(\mathbf{x})$= "x è potente"
$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$="x pensa a y"

?

Una possibile formalizzazione è la seguente:

$$\exists\ \mathbf{x}\ (\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{x})\ \&\ \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{x})\ )\ \&\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y}{=}\mathbf{x}\ )\ )$$

Esempio 4: come formalizzare in logica classica

"**Certi potenti pensano solo a se stessi**"

con
$\mathbf{O}(\mathbf{x})=$ "x è potente"
$\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y})=$"x pensa a y"

?

Una possibile formalizzazione LETTERALE è la seguente:

$$\exists\ \mathbf{x}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{x})\ \&\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{y}{=}\mathbf{x}\ )\ )$$

In realtà la frase sopra è affermata per intendere che "**Certi potenti pensano a se stessi e soltanto a se stessi**" la cui formalizzazione è nell'esempio sopra.

11.3.1 Grammatica predicati con uguaglianza

Descriviamo qui come si costruiscono le formule all'interno di un linguaggio predicativo con uguaglianza. La differenza rispetto a quanto descritto in definizione 11.6.1 è che tra i predicati di base c'è pure l'uguaglianza:

Def. 11.3 La grammatica delle *formule del linguaggio predicativo con l'aggiunta dell'uguaglianza* diventa:

- il predicato $\mathbf{t}{=}\mathbf{s}$ è una **formula** se $\mathbf{t}$ ed $\mathbf{s}$ sono **termini**.
- i predicati atomici $\mathbf{P_k}(\mathbf{t_1},\ldots,\mathbf{t_m})$ sono **formule** se $\mathbf{t_i}$ sono **termini** per $\mathbf{i}=\mathbf{1},\ldots,\mathbf{m}$.
- $\forall\mathbf{x}$ $\mathtt{fr}$ è una **formula** se $\mathtt{fr}$ lo è.
- $\exists\mathbf{x}$ $\mathtt{fr}$ è una **formula** se $\mathtt{fr}$ lo è.
- la proposizione $\perp$ è una **formula**.
- $\mathtt{fr}\&\mathtt{fr}_2$ è una **formula** se $\mathtt{fr}$ e $\mathtt{fr}_2$ lo sono.
- $\mathtt{fr}\vee\mathtt{fr}_2$ è una **formula** se $\mathtt{fr}$ e $\mathtt{fr}_2$ lo sono.
- $\mathtt{fr}\rightarrow\mathtt{fr}_2$ è una **formula** se $\mathtt{fr}$ e $\mathtt{fr}_2$ lo sono.
- $\neg\mathtt{fr}$ è una **formula** se $\mathtt{fr}$ lo è.

Notazione "diverso": Nel seguito usiamo l'abbreviazione

$$\mathbf{t} \neq \mathbf{s}\ \equiv\ \neg t = s$$

per indicare il predicato che il termine $\mathbf{t}$ è diverso dal termine $\mathbf{s}$.

11.3.2 Il calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_=$

Il calcolo $\mathbf{LC}_=$ è il calcolo della `logica classica con uguaglianza` ovvero il calcolo **LC** con le regole dell'uguaglianza

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot & \text{ax-}\mathtt{tt} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\mathrm{S} \qquad \begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \Gamma \vdash t = t, \Delta \end{array}$$

ove con $\mathbf{\Gamma(t)}$ si intende che il termine $\mathbf{t}$ può comparire nelle formule in $\Gamma(t)$.

11.3.3 Come usare le regole di uguaglianza?

Nella regola

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\mathrm{S}$$

dall'alto verso il basso: NON TUTTE le occorrenze di t DEVONO essere rimpiazzate con s
dal basso verso l'alto: NON TUTTE le occorrenze di s DEVONO essere rimpiazzate con t.

Ad esempio nella derivazione

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c} =\text{-ax} \\ \mathbf{t{=}s \vdash t = t, f{=}t} \end{array}}{t{=}s \vdash s{=}t, f{=}t}\ = -\mathrm{S}}{t{=}s \vdash f{=}t, s{=}t}\ \mathrm{sc_{sx}}}{t{=}s \vdash f{=}s, s{=}t}\ = -\mathrm{S}$$

nella prima applicazione non abbiamo sostituito tutte le occorrenze di $\mathbf{s}$ con $\mathbf{t}$ ma solo alcune.

Esempio 0: Vediamo che l'enunciato

"Tutti sono uguali a se stessi"

formalizzato con la formula

$$\forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

è derivabile in $\mathbf{LC}_=$, e quindi è una tautologia rispetto alla logica classica con uguaglianza

$$\cfrac{\cfrac{= -\mathrm{ax}}{\vdash w = w}}{\vdash \forall x\ x = x}\ \forall-\mathrm{D}$$

ove l'applicazione di $\forall-$D è lecita perchè la variabile **w** non compare proprio nel sequente radice.

Esempio 1: Se vogliamo derivare la simmetria dell'uguaglianza

$$t = s \vdash s = t$$

in $\mathrm{LC}_=$ occorre applicare la regola $=-$S in tal modo:
si identifichi

$$\Sigma \equiv \emptyset \qquad \Gamma(x) \equiv \emptyset \qquad \Delta(x) \equiv x = t \qquad \nabla \equiv \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(t) \equiv t = t \qquad \Delta(s) \equiv s = t$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\cfrac{\cfrac{= -\mathrm{ax}}{t = s \vdash t = t}}{t = s \vdash s = t}\ = -\mathrm{S}$$

Esempio 2: Se vogliamo derivare la transitività dell'uguaglianza

$$t = u, u = s \vdash t = s$$

in $\mathrm{LC}_=$ occorre applicare la regola $=-$S in tal modo:
si identifichi

$$\Sigma \equiv \emptyset \qquad \Gamma(x) \equiv t = u \qquad \Delta(x) \equiv t = x \qquad \nabla \equiv \emptyset$$

(si noti che in $\Gamma(x)$ non compare proprio x!!) e quindi si ha che

$$\Delta(u) \equiv t = u \qquad \Delta(s) \equiv t = s$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\cfrac{\cfrac{\mathrm{ax-id}}{u = s, t = u \vdash t = u}}{t = u, u = s \vdash t = s}\ = -\mathrm{S}$$

Alternativamente possiamo usare la regola $= -S$ con

$$\Sigma \equiv t = u \qquad \Gamma(x) \equiv \emptyset \qquad \Delta(x) \equiv t = x \qquad \nabla \equiv \emptyset$$

e quindi ottenere la seguente derivazione:

$$\cfrac{\cfrac{\mathrm{ax-id}}{t = u, u = s \vdash t = u}}{t = u, u = s \vdash t = s}\ = -\mathrm{S}$$

11.4 Sostituzione di una variabile

La sostituzione di un termine $\mathbf{t}$ al posto di una variabile $\mathbf{x}$ in una formula

$$\mathtt{fr}(x)$$

per ottenere $\mathtt{fr}(t)$ NON è sempre lecita. Il motivo è che una sostituzione deve per forza conservare la validità in quanto in ogni modello $\mathcal{D}$ vale

$$\mathtt{fr}(\mathbf{x}) \quad \text{è vera} \qquad \text{sse} \qquad \forall\, \mathbf{x}\, \mathtt{fr}(\mathbf{x}) \quad \text{è vera}$$

e dunque se $\mathtt{fr}(x)$ è vera in un modello allora lo deve essere pure $\mathtt{fr}(t)$. Ma allora vediamo con questo esempio che NON ogni sostituzione funziona in tal senso e che dobbiamo proibire certe sostituzioni. Per esempio se pensiamo che

$$\mathtt{fr}(x) \quad \equiv \quad \exists\, \mathbf{y}\ \mathbf{y} \text{ è madre di } \mathbf{x}$$

allora sappiamo che vale pure

$$\forall\, \mathbf{x}\, \mathtt{fr}(\mathbf{x}) \quad \equiv \quad \forall\, \mathbf{x} \quad \exists\, \mathbf{y}\ \mathbf{y} \text{ è madre di } \mathbf{x}$$

ovvero "*ciascuno ha una madre*" il che è vero nel modello in cui il dominio è costituito dagli uomini e il predicato è interpretato come sopra. Ora se sostituiamo in questo $\mathtt{fr}(x)$ un'altra variabile $\mathbf{w}$ o costante $\mathbf{c}$ continua a valere $\mathtt{fr}(t)$ nel modello assegnato. Invece se sostituiamo $\mathbf{x}$ con $\mathbf{y}$ otteniamo

$$\mathtt{fr}(y) \quad \equiv \quad \exists\, \mathbf{y}\ \mathbf{y} \text{ è madre di } \mathbf{y}$$

il che è falso nel modello. Da questo esempio concludiamo che non possiamo sostituire in una variabile libera di una formula una variabile che è vincolata nella sottoformula che contiene la variabile libera.

Diamo di seguito la definizione di sostituzione di un termine t al posto di x in una formula $\mathtt{fr}(\mathtt{x})$ di un linguaggio predicativo che indichiamo con la scrittura $\mathtt{fr}[x/t]$:

Def. 11.4 Dato un termine t e una formula $\mathtt{fr}(\mathtt{x})$ di un linguaggio predicativo definiamo:

$$\begin{array}{l}
P_k(t_1,\dots,t_m)[x/t] \equiv P_k(t_1[x/t],\dots,t_m[x/t]) \\
(\forall y_i\ \mathtt{fr})[x/t] \equiv \begin{cases} \forall y_i\ \mathtt{fr}[x/t] & \text{se } y_i \neq x \text{ e } x \text{ compare in } \mathtt{fr} \\ & \text{e } y_i \text{ NON compare libera in t} \\ \forall y_i\ \mathtt{fr} & \text{se } y_i \equiv x \quad \text{o} \quad x \text{ non compare in } \mathtt{fr} \end{cases} \\
(\exists y_i\ \mathtt{fr})[x/t] \equiv \begin{cases} \exists y_i\ \mathtt{fr}[x/t] & \text{se } y_i \neq x \text{ e } x \text{ compare in } \mathtt{fr} \\ & \text{e } y_i \text{ NON compare libera in t} \\ \exists y_i\ \mathtt{fr} & \text{se } y_i \equiv x \quad \text{o} \quad x \text{ non compare in } \mathtt{fr} \end{cases} \\
(\mathtt{fr}_1\ \&\ \mathtt{fr}_2)[x/t] \equiv \mathtt{fr}_1[x/t]\ \&\ \mathtt{fr}_2[x/t] \\
(\mathtt{fr}_1 \vee \mathtt{fr}_2)[x/t] \equiv \mathtt{fr}_1[x/t] \vee \mathtt{fr}_2[x/t] \\
(\mathtt{fr}_1 \to \mathtt{fr}_2)[x/t] \equiv \mathtt{fr}_1[x/t] \to \mathtt{fr}_2[x/t] \\
(\neg \mathtt{fr}_1)[x/t] \equiv \neg \mathtt{fr}_1[x/t]
\end{array}$$

MORALE

Quando sostituisci una variabile y al posto di x in un predicato $\texttt{pr}(\texttt{x})$
controlla che - SE compare $\forall y$ o $\exists y$ in $\texttt{pr}(\texttt{x})$ -
la sostituzione di x con y NON faccia cadere il nuovo y
sotto il POTERE di $\forall y$ o $\exists y$
ovvero aumenti il numero di occorrenze di y in loro potere!

$$\frac{\exists y\ y < y \vdash \nabla}{\forall x\ \exists y\ x < y \vdash \nabla}\ \forall\!-\!\mathrm{S} \qquad \text{NOOOOO!!!!}$$

$$\frac{\forall y\ y = a \vdash y = z}{\forall y\ y = a \vdash \forall x\ x = z}\ \forall\!-\!\mathrm{D} \qquad \text{SI!!!!}$$

Stabilire quali delle seguenti applicazioni di $\forall$-S o $\exists$-D sono lecite

1. È lecita la seguente applicazione di $\forall$-S

$$\frac{\forall y\ \exists x\ x = y + z, \qquad \exists x\ x = x + z \vdash \nabla}{\forall y\ \exists x\ x = y + z \vdash \nabla}\ \forall\!-\!\mathrm{S}$$

??

NO, perchè la sostituzione di y con x NON è lecita (dal basso verso l'alto) perchè aumenta il potere di azione di $\exists x$

2. È lecita la seguente applicazione di $\forall$-S

$$\frac{\forall y\ \exists x\ x = y + z, \qquad \exists x\ x = z + z \vdash \nabla}{\forall y\ \exists x\ x = y + z \vdash \nabla}\ \forall\!-\!\mathrm{S}$$

??

SÌ perchè è lecita la sostituzione in quanto z è libera nel sequente conclusione.

3. È lecita la seguente applicazione di $\forall$-D

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ x = z + z}{\Gamma \vdash \forall y\ \exists x\ x = y + z}\ \forall\!-\!\mathrm{D}$$

??

NO ma per la condizione sull'applicazione di $\forall\!-\!\mathrm{D}$ (e non per errori di sostituzione!) perchè z è libera nel sequente conclusione.

4. È lecita la seguente applicazione di $\forall$-D

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ x = x + z}{\Gamma \vdash \forall y\ \exists x\ x = y + z}\ \forall\!-\!\mathrm{D}$$

??

NO perchè la sostituzione di y con x NON è lecita in quanto aumenta il potere di azione dell' $\exists x$.

5. È lecita la seguente applicazione di ∀-D

$$\frac{\forall y\ C(y) \vdash \exists x\ x = y + z}{\forall y\ C(y) \vdash \forall w\ \exists x\ x = w + z}\ \forall\text{−D}$$

??

Sì perchè la variabile **y** NON è libera nel sequente conclusione e la sostituzione è lecita visto che non aumenta il potere della quantificazione di **y** nel sequente conclusione.

11.5 Semantica classica dei predicati

Per dire quando $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è **vera** OCCORRE avere un dominio $\mathbf{D}$ su cui far variare $\mathbf{x}$ e occorre definire una funzione

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

ovvero dire se per un generico $\mathbf{d} \varepsilon \mathcal{D}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

Def. 11.5 (modello) *Dato linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ con costanti* $\mathbf{c_j}$ *e* **predicati atomici** $\mathbf{P_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$ *un modello per $\mathcal{L}$ è dato da*

- *un dominio (=insieme NON VUOTO)* $\mathbf{D}$
- *un'interpretazione delle* **costanti** *come* **elementi** *di* $\mathbf{D}$ *e di* **predicati atomici** *diversi dall'uguaglianza come* **funzioni** *come segue*

costante $\mathbf{c_j}$	$\rightsquigarrow$	*elemento di dominio* $\mathbf{c_j}^{\mathcal{D}} \varepsilon \mathbf{D}$
predicato **atomico** $\mathbf{P_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$	$\rightsquigarrow$	*funzione* $\mathbf{P_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D}^n \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ *se* $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$ *è il suo numero di variabili libere*
variabile proposizionale $\mathbf{B}$ *ovvero predicato* **atomico** *senza variabili libere*	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{B}^{\mathcal{D}} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

Vedremo poi che l'interpretazione del predicato di uguaglianza in un modello è la stessa in tutti i modelli e corrisponde all'uguaglianza di elementi nel modello.

Ad esempio se consideriamo il linguaggio predicativo arricchito della sola costante $\mathbf{c}$ allora

$\mathbf{D} \equiv$ numeri naturali
$\mathbf{c}^{\mathcal{D}} \equiv \mathbf{5}$

definisce un modello ove l'interpretazione dell'uguaglianza risulta la funzione seguente:

$$(\mathbf{x} = \mathbf{c})^{\mathcal{D}} : \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

ove per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$$(\mathbf{x} = \mathbf{c})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \equiv 1 \qquad \text{sse} \qquad \mathbf{d} = \mathbf{c}^{\mathcal{D}} \qquad \text{sse} \qquad \mathbf{d} = \mathbf{5}$$

Possiamo inoltre costruire un modello per rendere vera l'argomentazione considerata all'inizio di sezione 11.1.4

Tutti gli uomini sono mortali
Socrate è un uomo
____
Socrate è mortale

mantenendo il significato dei simboli formali

$\mathbf{M}(\mathbf{x})$= "$\mathbf{x}$ *è mortale*"
$\mathbf{U}(\mathbf{x})$= "$\mathbf{x}$ *è un uomo*"
$\overline{s}$ = "Socrate".

definendolo in tal modo:

$\mathbf{D}$= *L'insieme degli esseri viventi esistiti ed esistenti sulla terra.*
$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(d)$=1 sse "$\mathbf{d}$ *è mortale*" per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$
$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(d)$=1 sse "$\mathbf{d}$ *è un uomo*" per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$\overline{s}^{\mathcal{D}}$ = *"Socrate"*.

Però per lo stesso linguaggio predicativo con $\mathbf{M(x)}$, $\mathbf{M(x)}$ e $\overline{s}^{\mathcal{D}}$ potremmo definire un altro modello come segue

$\mathbf{D}$= {`Pippo`, `Topolino`, `Minni`}
$\mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse $\mathbf{d}$ è maschio
$\mathbf{U(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse $\mathbf{d}$ è femmina
$\overline{s}^{\mathcal{D}}$ =`Minni`.

Invece porre

$\mathbf{D} \equiv$ I sogni del mio vicino di banco.
$\mathbf{A(x)^D(d) = 1}$ sse il sogno $\mathbf{d}$ fa paura
$\mathbf{A(x)^D(d) = 0}$ sse il sogno $\mathbf{d}$ NON fa paura
$\mathbf{c^D}$ = il sogno più brutto

NON dà luogo ad un MODELLO BEN DEFINITO perchè non so se il mio vicino di banco sogna e poi neppure quando un sogno fa paura o meno... ovvero NON so stabilire se per ogni $\mathbf{d}$ nel modello vale $\mathbf{A(x)^D(d) = 1}$ o meno.

Def. 11.6 [**INTERPRETAZIONE FORMULE in un modello**] Dato linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ con costanti $\mathbf{c_j}$ e **predicati atomici** $\mathbf{P_k(x_1, \dots, x_n)}$ dipendenti da $\mathbf{n}$ variabili libere e variabili proposizionali $\mathbf{B}$, e fissato un modello per $\mathcal{L}$ con un dominio $\mathbf{D}$ e interpretazione per costanti $\mathbf{c_j}^{\mathcal{D}} \varepsilon \mathbf{D}$
e interpretazione per **predicati atomici** dipendenti da $\mathbf{n}$ variabili

$$\mathbf{P_k(x_1, \dots, x_n)}^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D}^n \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

e variabili proposizionali $\mathbf{B}^{\mathcal{D}} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$,
il predicato atomico di uguaglianza $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ è interpretato in tal modo

$$(\mathbf{x} = \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D}^2 \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{d}_1 \neq \mathbf{d}_2 \end{cases}$$

e più in generale l'uguaglianza $\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}$ tra termini generici $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$ le cui variabili libere sono (propriamente!) incluse nella lista $\mathbf{x_1, \dots, x_n}$ è interpretato in tal modo

$$(\,\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}_{[\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}]}\,)^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D^n} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

$$(\,\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}_{[\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}]}\,)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1}, \dots, \mathbf{d_n}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{t_1}^{\mathcal{D}} = \mathbf{t_2}^{\mathbf{D}} \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{t}_1^{\mathcal{D}} \neq \mathbf{t}_2^{\mathcal{D}} \end{cases}$$

e l'interpretazione di un **predicato composto** $\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n})$ in $\mathcal{L}$ è una FUNZIONE del tipo

$$\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(-, \dots, -) : \mathbf{D}^n \;\rightarrow\; \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

definita per induzione come segue: fissati $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n)$ in $\mathbf{D}^n$

$$(\neg \mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n) = \mathbf{1}$$
sse
$$\mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n)= \mathbf{0}$$

$$(\mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n}) \,\&\, \mathtt{pr}_2(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n) = \mathbf{1}$$
sse
$$\mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n)= \mathbf{1} \qquad \mathbf{E} \qquad \mathtt{pr}_2(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n)= \mathbf{1}$$

$$(\mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n}) \vee \mathtt{pr}_2(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n) = \mathbf{1}$$
sse
$$\mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n)= \mathbf{1} \qquad \mathbf{OPPURE} \qquad \mathtt{pr}_2(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n)= \mathbf{1}$$

$$(\mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n}) \rightarrow \mathtt{pr}_2(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n) = \mathbf{1}$$
sse

$$\mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n)= \mathbf{0}$$

OPPURE vale che

$$\mathbf{SE}\ \mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n)= \mathbf{1} \quad \mathbf{ALLORA} \quad \mathtt{pr}_2(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1},\ldots,\mathbf{d_n})= \mathbf{1}$$

$$(\forall \mathbf{x_n}\ \mathtt{pr}(\mathbf{x_1},\ldots \mathbf{x_{n-1}},\mathbf{x_n}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_{n-1}) = \mathbf{1}$$
sse
$$\mathbf{PER\ OGNI} \quad \mathbf{d} \qquad \mathtt{pr}(\mathbf{x_1},\ldots \mathbf{x_{n-1}},\mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_{n-1},\mathbf{d})= \mathbf{1}$$

$$(\exists \mathbf{x_n}\ \mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1},\ldots \mathbf{x_{n-1}},\mathbf{x_n}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d_{n-1}}) = \mathbf{1}$$
sse
$$\mathbf{ESISTE} \quad \mathbf{d} \qquad \text{tale che} \qquad \mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1},\ldots \mathbf{x_{n-1}},\mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_{n-1},\mathbf{d})= \mathbf{1}$$
e un tal **d** è detto **TESTIMONE** della verità di $(\exists \mathbf{x_n}\ \mathtt{pr}_1(\mathbf{x_1},\ldots \mathbf{x_{n-1}},\mathbf{x_n}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1},\ldots,\mathbf{d_{n-1}})$

Si noti che l'interpretazione di un predicato atomico **B** senza variabili libere, ovvero di una variabile proposizionale, risulta

$$\mathbf{B}^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \text{ oppure } \mathbf{B}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Allo stesso modo l'interpretazione di una proposizione `pr`, ovvero di un predicato i cui predicati atomici sono variabili proposizionali, ovvero predicati senza variabili libere, risulta

$$\mathtt{pr}^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \text{ oppure } \mathtt{pr}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Quindi *ciascun modello per la proposizione* `pr` *nel linguaggio predicativo esteso con le sue variabili proposizionali è in corrispondenza con* **una riga** *della tabella di verità della proposizione* `pr`, e viceversa, *ciascuna riga della tabella di verità di* `pr` *determina un modello predicativo* del linguaggio predicativo esteso con le variabili proposizionali di `pr`.

11.5.1 Casi speciali di interpretazione di quantificatori

Le quantificazioni su un predicato $\mathtt{pr}(\mathbf{x})$ ad una variabile risultano interpretate in tale modo

$$\begin{array}{c} (\ \forall \mathbf{x}\ \mathtt{pr}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \\ \text{sse} \\ \textbf{PER OGNI}\quad \mathbf{d} \qquad \mathtt{pr}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{pr}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \\ \text{sse} \\ \textbf{ESISTE}\ \text{un}\quad \mathbf{d} \qquad \mathtt{pr}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \end{array}$$

ovvero

ESISTE un testimone **d** della verità di $\exists \mathbf{x}\ \mathtt{pr}(\mathbf{x})$

11.5.2 Interpretazione della SOSTITUZIONE con costante

L'interpretazione del predicato

$$\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \qquad \mathbf{c}, \qquad \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})$$

ottenuto sostituendo in $\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \quad \mathbf{x_j}, \quad \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})$ la variabile $\mathbf{x_j}$ con la costante **c** si interpreta così:

$$\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \qquad \mathbf{c}, \qquad \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D}^{n-1} \rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

ove

$$\begin{array}{c} \mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \qquad \mathbf{c}, \qquad \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{j-1}, \qquad \mathbf{d}_{j+1}, \ldots \mathbf{d}_n) \\ \equiv \\ \mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \qquad \mathbf{x_j}, \qquad \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{j-1}, \qquad \mathbf{c}^{\mathcal{D}}, \qquad \mathbf{d}_{j+1}, \ldots \mathbf{d}_n) \end{array}$$

Caso speciale di predicati con una variabile. Dato un predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e una costante **c** e un modello con dominio **D** con interpretazione della costante $\mathbf{c}^{\mathcal{D}} \varepsilon \mathbf{D}$ e interpretazione del predicato

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

allora

$$\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}})$$

Esempio:

Nel modello $D = \{\mathtt{Pippo}, \mathtt{Topolino}, \mathtt{Minni}\}$
$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse **d** è maschio
$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse **d** è femmina
$\overline{s}^{\mathcal{D}}$ =`Minni`

risulta che

$$\mathbf{U}(\overline{\mathrm{s}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{U}(\mathrm{x})^{\mathcal{D}}(\overline{\mathrm{s}}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{U}(\mathrm{x})^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{1}$$

mentre

$$\mathbf{M}(\overline{\mathrm{s}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{M}(\mathrm{x})^{\mathcal{D}}(\overline{\mathrm{s}}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{M}(\mathrm{x})^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{0}$$

11.5.3 Interpretazione SOSTITUZIONE con termine generico

L'interpretazione del predicato

$$\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \qquad \mathbf{t}, \qquad \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})$$

ottenuto sostituendo in $\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \quad \mathbf{x_j}, \quad \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})$ il termine $\mathbf{t}$ (le cui variabili libere sono comprese tra $\mathbf{x_1}, ..\mathbf{x_{j-1}}, \quad \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n}$) si interpreta così:

$$\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \qquad \mathbf{t}, \qquad \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D}^{n-1} \rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

ove

$$\begin{gathered}\mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \qquad \mathbf{t}, \qquad \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{j-1}, \qquad \mathbf{d}_{j+1}, \ldots \mathbf{d}_n) \\ \equiv \\ \mathtt{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_{j-1}}, \qquad \mathbf{x_j}, \qquad \mathbf{x_{j+1}}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{j-1}, \qquad \mathbf{t}^{\mathcal{D}}, \qquad \mathbf{d}_{j+1}, \ldots \mathbf{d}_n)\end{gathered}$$

Def. 11.7 (verità di un predicato senza variabili libere in un modello) *Dato un modello $\mathcal{D}$ con domino $\mathbf{D}$ un predicato senza variabili libere* $\mathtt{pr}$ *è* **vero nel modello** *$\mathcal{D}$ se e solo se la sua interpretazione nel modello è* $\mathbf{1}$ *ovvero*

$$(\mathtt{pr})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Def. 11.8 (verità di un predicato con una sola variabile libera in un modello) *Dato un modello $\mathcal{D}$ con domino $\mathbf{D}$ un predicato senza variabili libere* $\mathtt{pr}(\mathrm{x})$ *è* **vero nel modello** *$\mathcal{D}$ se e solo se la sua interpretazione nel modello è* $\mathbf{1}$ *su ogni elemento* $\mathbf{d}$ *ovvero*

$$\boxed{\begin{gathered}\mathtt{pr}(\mathrm{x}) \text{ è } \textbf{vero} \textit{ nel modello } \mathcal{D} \\ \textit{sse} \\ \textit{PER OGNI } \mathbf{d} \in \mathcal{D} \qquad \mathtt{pr}(\mathrm{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}\end{gathered}}$$

Def. 11.9 (verità di un predicato generico in un modello) *Dato un modello $\mathcal{D}$ con domino $\mathbf{D}$ un predicato senza variabili libere* $\mathbf{pr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$ *è* **vero nel modello** *$\mathcal{D}$ se e solo se la sua interpretazione nel modello è* $\mathbf{1}$ *su ogni enupla di elementi* $(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n)$ *ovvero* *una* **formula**

$\mathtt{fr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$ *è* **VERA** *in un modello* $\mathcal{D}$

se e solo se

`PER OGNI` $\quad (\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) \varepsilon \mathbf{D}^n \qquad \mathtt{fr}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1}$

se e solo se

$(\ \forall\, \mathbf{x_1}\ \forall\, \mathbf{x_2}\ \ldots \forall\, \mathbf{x_n} \quad \mathtt{fr}(\ \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n})\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$

11.5.4 Modo semplice per definire un modello

Presentiamo un modo più semplice per costruire un modello di un linguaggio predicativo dato mostrandolo con un esempio.

Dato linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ con costanti $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$ e **predicati atomici**
$\mathbf{P}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e un dominio

$$\mathbf{D}$$

consideriamo il linguaggio esteso $\mathcal{L}^{\mathbf{D}}$ con nuove costanti

$$\tilde{\mathbf{d}}$$

che sono i nomi degli elementi di $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ e quindi definiamo un **modello**

$$(\ \mathbf{D}\ ,\ \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}\ ,\ \mathbf{c_1^D}\ ,\ \mathbf{c_2^D}\ ,\ \ (\tilde{\mathbf{d}}^{\mathbf{D}})_{\mathbf{d} \in \mathbf{D}}\ )$$

ponendo SEMPRE

$$\tilde{\mathbf{d}}^{\mathbf{D}} = \mathbf{d} \in \mathbf{D}$$

e poi definiamo a piacere l'interpretazione delle costanti

$$\mathbf{c_1^D} \in \mathbf{D} \qquad \mathbf{c_2^D} \in \mathbf{D}$$

e dei predicati **atomico** USANDO i nomi degli elementi di D

$$\begin{array}{rrcl} \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(-) & \mathbf{D} & \longrightarrow & \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \\ & \mathbf{d} & \mapsto & \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{d}})^{\mathbf{D}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(-) & \mathbf{D} \times \mathbf{D} & \longrightarrow & \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \\ & (\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) & \mapsto & \mathbf{Q}(\ \tilde{\mathbf{d_1}}\ ,\ \tilde{\mathbf{d_2}}\ )^{\mathbf{D}} \end{array}$$

Così facendo otteniamo che

$\forall \mathbf{x}\ \mathtt{pr(x)}$ è **vero** in un modello $\mathcal{D}$ con dominio D

sse

PER OGNI $d \in \mathcal{D}$ $\quad \mathtt{pr(x)}^{\mathcal{D}}(d) = 1$

sse

PER OGNI $d \in \mathcal{D}$ $\quad \mathtt{pr(\tilde{d})}^{\mathcal{D}} = 1$

$\exists \mathbf{x}\ \mathtt{pr(x)}$ è **vero** in un modello $\mathcal{D}$ con dominio $\mathbf{D}$

sse

ESISTE $d \in \mathcal{D}$ tale che $\quad \mathtt{pr(x)}^{D}(d) = 1$

sse

ESISTE $d \in \mathcal{D}$ tale che $\quad \mathtt{pr(\tilde{d})}^{\mathcal{D}} = 1$

11.5.5 Notazione per indicare un modello

A rigore per indicare un modello con dominio $\mathbf{D}$ dobbiamo scrivere

$$\mathcal{D} \equiv (\ \mathbf{D}, \mathbf{c_j}^{\mathcal{D}}, \mathbf{P_k}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})^{\mathcal{D}}\ )$$

ma più spesso indicheremo un modello semplicemente con

$$\mathcal{D}$$

quando sarà chiaro dal contesto in cui siamo quali sono le interpretazioni delle costanti e predicati atomici.

Inoltre per semplificare il calcolo dell'interpretazione di un predicato in un modello $\mathcal{D}$ con dominio $\mathbf{D}$, supposto che $\mathtt{pr(x)}$ sia un predicato dipendente da $\mathbf{x}$ e che $\mathbf{d}, \mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}$ siano elementi di $\mathbf{D}$

$(\mathbf{t_1}{=}\mathbf{t_2})^{\mathcal{D}} \equiv \mathbf{t_1^{\mathcal{D}}} =_{\mathcal{D}} \mathbf{t_2}^{\mathcal{D}}$

ove $\mathbf{t_1}^{\mathbf{D}} =_{\mathcal{D}} \mathbf{t_2}^{\mathbf{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{t_1}^{\mathbf{D}} = \mathbf{t_2}^{\mathbf{D}} \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{t_1}^{\mathbf{D}} \neq \mathbf{t_2}^{\mathcal{D}} \end{cases}$

$(\neg \mathtt{pr}(\mathrm{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = (\neg \mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}}$

ove $(\neg \mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti ovvero se } (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \end{cases}$

$(\mathtt{pr}_1(\mathrm{x}) \,\&\, \mathtt{pr}_2(\mathrm{x})^{\mathbf{D}})(\mathbf{d}) = (\mathtt{pr}_1(\mathrm{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) \,\&\, (\mathtt{pr}_2(\mathrm{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \,\&\, (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}}$

ove $(\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \,\&\, (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \quad \mathbf{E} \quad (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti ovvero se } (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad \text{oppure} \quad (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$

$(\mathtt{pr}_1(\mathrm{x}) \vee \mathtt{pr}_2(\mathrm{x})^{\mathbf{D}})(\mathbf{d}) = (\mathtt{pr}_1(\mathrm{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) \vee (\mathtt{pr}_2(\mathrm{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \vee (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}}$

ove $(\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \vee (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \quad \textbf{oppure} \quad (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti ovvero se } (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad \text{E} \quad (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$

$(\mathtt{pr}_1(\mathrm{x}) \rightarrow \mathtt{pr}_2(\mathrm{x})^{\mathbf{D}})(\mathbf{d}) = (\mathtt{pr}_1(\mathrm{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) \rightarrow (\mathtt{pr}_2(\mathrm{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \rightarrow (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}}$

ove $(\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \rightarrow (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad \textbf{oppure} \quad (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti ovvero se } (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \quad \text{E} \quad (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$

$(\forall \mathbf{x}\ \mathtt{pr}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D}} = \forall\, \mathbf{d} \in \mathbf{D}\ \ \mathtt{pr}(\mathrm{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \forall\, \mathbf{d} \in \mathbf{D}\ \ (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}}$

ove $\forall\, \mathbf{d} \in \mathbf{D}\ \ (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se} \quad \mathtt{PER\ OGNI}\ \mathbf{d} \quad (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{se} \quad \text{esiste un } \mathbf{d} \quad \text{(falsario!) tale che} \quad (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$

$(\exists \mathbf{x}\ \mathtt{pr}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D}} = \exists\, \mathbf{d} \in \mathbf{D}\ \ \mathtt{pr}(\mathrm{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \exists\, \mathbf{d} \in \mathbf{D}\ \ (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}}$

ove $\exists\, \mathbf{d} \in \mathbf{D}\ \ (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se} \quad \mathtt{ESISTE}\ \mathbf{d} \quad (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{se} \quad \text{OGNI } \mathbf{d} \quad \text{è (un falsario!) tale che} \quad (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$

11.5.6 Come falsificare una formula in un modello

Dato che una formula con variabili libere è vera in un modello se e solo se lo è la formula ottenuta quantificando con "per ogni" tutte le sue variabili libere, ne segue quanto qui esposto:

per **falsificare** una formula con una variabile libera $\mathtt{pr}(\mathbf{x})$ in un modello $\mathcal{D}$
BASTA TROVARE un FALSARIO d
tale che

$$\mathtt{pr}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

ovvero

$$\mathtt{pr}(\tilde{\mathbf{d}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

se il modello ha tutti i nomi degli elementi del dominio

e quindi **NON c'è bisogno che TUTTI gli elementi d del dominio D** risultino **falsari** della funzione che interpreta $\mathtt{pr}(\mathbf{x})$!!!.

Esempi:

1. La formula

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

   è **falsa** in tal modello che diventa un suo **contromodello**:

   D$=\{\mathtt{Topolino}, \mathtt{Minni}\}$

   $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=**1** sse **d** è maschio

   In tal modello $\mathcal{D}$ si ha che

$$(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \forall \mathbf{d} \in \{\mathtt{Minni}, \mathtt{Topolino}\}\ \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \mathbf{0}$$

   perchè

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Minni}})\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

   ovvero Minni è un **falsario** del predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

   Inoltre

$$\begin{aligned} (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}}(\mathtt{Topolino}) \ &= (\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathtt{Topolino}) \ \rightarrow \ (\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} \\ &= (A(\widetilde{\mathtt{Topolino}})\,)^{\mathcal{D}} \ \rightarrow \ \forall \mathbf{d} \in \{\mathtt{Minni}, \mathtt{Topolino}\}\ \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}}) \\ &= \mathbf{1} \ \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

   perchè

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathtt{Topolino}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Topolino}})\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

   mentre $(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$, ovvero Topolino è un **falsario** del predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

2. Nel modello

   D= Gli esseri viventi esistiti ed esistenti sulla terra.

   $\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse *"***d** *è mortale"* per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$\mathbf{U(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse "**d** *è un uomo*"   per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$
$\overline{s}^{\mathcal{D}}$ = *"Socrate"*.

risulta che

$$\mathbf{M(\overline{s})}^{\mathbf{D}} = \mathbf{M(x)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{s}^{\mathbf{D}}) = 1$$

e quindi otteniamo che l'implicazione

$$\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{U(x)}\ \rightarrow \mathbf{M(x)}\,)\,\&\,\mathbf{U(\overline{s})}\ \rightarrow\ \mathbf{M(\overline{s})} \qquad \text{è vera nel modello}$$

ossia vale

$$\begin{aligned}(\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{U(x)}\ \rightarrow\ \mathbf{M(x)}\,)\,\&\,\mathbf{U(\overline{s})}\ \rightarrow\ \mathbf{M(\overline{s})}\ )^{\mathcal{D}} &= (\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{U(x)}\ \rightarrow\ \mathbf{M(x)}\,)^{\mathcal{D}}\&\ (\mathbf{U(\overline{s})})^{\mathcal{D}}\ \rightarrow\ \mathbf{M(\overline{s})}^{\mathcal{D}}\\ &= (\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{U(x)}\ \rightarrow\ \mathbf{M(x)}\,)^{\mathcal{D}}\ \&\ (\,\mathbf{U(\overline{s})}\,)^{\mathcal{D}}\ \rightarrow\ \mathbf{1}\\ &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

Inoltre in tal modello vale

$$(\,\forall \mathbf{x}\ (\,\mathbf{U(x)}\ \rightarrow \mathbf{M(x)}\,)\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

perchè tutti gli uomini sono appunto mortali in quanto:

per ogni **d** *essere vivente* vale

$$\mathbf{M(x)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

e quindi vale

$$\mathbf{M(x)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d})\ \rightarrow\ \mathbf{U(x)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

ovvero

$$\mathbf{U(x)}\ \rightarrow\ \mathbf{M(x)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

3. Un altro modello per il linguaggio predicativo con $\mathbf{M(x)}, \mathbf{U(x)}, \overline{\mathbf{s}}$ è si ottiene prendendo come dominio

   $\mathbf{D}$= {`Topolino`, `Minni`}

   $\mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse **d** è maschio
   $\mathbf{U(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse **d** è femmina
   $\overline{s}^{\mathcal{D}}$ =`Minni`.

   In tal modello si ha

   $$(\,\forall \mathbf{x}\ (\,\mathbf{U(x)}\ \rightarrow \mathbf{M(x)}\,)\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

   perchè esiste un *falsario* **d** per cui vale $(\,\mathbf{U(x)}\ \rightarrow\ \mathbf{M(x)}\,)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 0$ e questo individuo esiste ponendo $\mathbf{d} = \texttt{Minni}$, dato che $\mathbf{M(x)}^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni}) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{U(x)}^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni}) = \mathbf{1}$.

   e nel modello associato con i nomi degli elementi del dominio

$\mathbf{D}=\{\mathtt{Pippo}, \mathtt{Minni}\}$

$\overline{s}^{\mathcal{D}}=\mathtt{Minni}$.
$\widetilde{\mathtt{Minni}}^{\mathcal{D}}=\mathtt{Minni}$
$\widetilde{\mathtt{Pippo}}^{\mathcal{D}}=\mathtt{Pippo}$

potremmo semplicemente dire:

chi è $\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ ponendo

$$\mathbf{M}(\widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathcal{D}}=\mathbf{0} \qquad \mathbf{M}(\widetilde{\mathtt{Pippo}})^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}$$

chi è $\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ ponendo

$$\mathbf{U}(\widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathcal{D}}=\mathbf{1} \qquad \mathbf{U}(\widetilde{\mathtt{Pippo}})^{\mathcal{D}}=\mathbf{0}$$

visto che informalmente

$\mathbf{M}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ è una femmina
$\mathbf{U}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ è un maschio

Quindi in tal modello si ha $(\,\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{U}(\mathbf{x}) \;\rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\,)\,)^{\mathcal{D}}=\mathbf{0}$
perchè esiste un **falsario** che è `Minni` per cui vale

$$(\,\mathbf{U}(\widetilde{\mathtt{Minni}}) \;\rightarrow\; \mathbf{M}(\widetilde{\mathtt{Minni}})\,)^{\mathcal{D}}=\mathbf{1} \;\rightarrow\; \mathbf{0}=\mathbf{0}$$

dato che

$$\mathbf{M}(\widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathcal{D}}=\mathbf{0} \qquad \mathbf{U}(\widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}$$

11.5.7 Classificazione di verità di una formula predicativa

Ora diamo la nozione di **tautologia/opinione/paradosso** di un predicato, o formula, in **logica classica**:

Def. 11.10 Una formula **fr** in un linguaggio $\mathcal{L}$ è una **TAUTOLOGIA (o è VALIDA) rispetto alla semantica classica** se è **VERA in OGNI modello per** $\mathcal{L}$.

Def. 11.11 Una formula **fr** in un linguaggio $\mathcal{L}$ è **SODDISFACIBILE rispetto alla semantica classica** se è **VERA in ALMENO UN modello per** $\mathcal{L}$.

Def. 11.12 un formula **fr** in un linguaggio $\mathcal{L}$ è **NON VALIDA rispetto alla semantica classica** se è **FALSA in ALMENO UN modello per** $\mathcal{L}$, che è chiamato **CONTROMODELLO** di `fr`.

Def. 11.13 Una formula **fr** in un linguaggio $\mathcal{L}$ è un' **OPINIONE rispetto alla semantica classica** se **esiste un modello**, detto **contromodello di fr**, in cui **fr** è **FALSA** ed **esiste un modello** in cui **fr** è **VERA**.

Def. 11.14 Una formula **fr** in un linguaggio $\mathcal{L}$ è **INSODDISFACIBILE o PARADOSSO rispetto alla semantica classica** se è **FALSA in OGNI modello per** $\mathcal{L}$, ovvero la sua negazione $\neg$`fr` è VALIDA o TAUTOLOGIA rispetto alla semantica classica.

Abbiamo quindi questo parallelismo tra concetti per il linguaggio proposizionale e predicativo:

	Linguaggio proposizionale	Linguaggio predicativo
sintassi	proposizione	predicati
Variabili	A, B, C, ...	K, A(x), B(y), C(x,y), ...
verità globale	tabella di verità	I modelli
verità locale	riga di tabella	UN modello
validità	proposizione **valida** **tautologia** **=sua tabella con TUTTI 1**	predicato **valido** **tautologia** **= vero in TUTTI i modelli**
NON validità	proposizione **NON valida** **= sua tabella con UNA riga 0**	predicato **NON valido** **= falso in UN modello** detto **CONTROMODELLO**
soddisfacibilità	proposizione **soddisfacibile** **= sua tabella con UNA riga 1**	predicato **soddisfacibile** **=vero in UN modello**
INsoddisfacibilità	proposizione **INsoddisfacibile** **paradosso** **=sua tabella con TUTTI 0**	predicato **INsoddisfacibile** **paradosso** **=falso in TUTTI i modelli**

Concludiamo aggiungendo pure che

un **predicato**, chiamato anche **formula**, `fr` è **OPINIONE** nella semantica classica
se `fr` è **NON VALIDO** e **SODDISFACIBILE**
ovvero `fr` è **falso** in **UN modello** ed è **vero** in **un ALTRO modello**.

11.5.8 Idea intuitiva di validità di un predicato e tabelle di verità

Le tabelle di verità non sono più sufficienti per catturare la nozione di validità di un predicato in quanto occorre verificare controllare la sua validità in OGNI MODELLO. Ora osserviamo che se fissiamo un dominio $\mathbf{D}$ e ci restringiamo a considerare la validità di una formula come $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$ in *modelli con lo stesso dominio* $\mathbf{D}$ rispetto ad un linguaggio predicativo con un solo predicato atomico $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, per provare se è valido $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$ in tali modelli con lo stesso dominio $\mathbf{D}$ possiamo costruire una tabella per $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$ con tante colonne quanti sono gli elementi in $\mathbf{D}$, ove ogni funzione $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(-)$ che interpreta il predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (e determina uno specifico modello con $\mathbf{D}$ dominio) è rappresentata da una riga della tabella le cui colonne sono in corrispondenza con gli elementi di $\mathbf{D}$:

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1})$	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2})$	...	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_n})$	...	$\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$
1	1	1111111111	1	11111111	**1**
0	1	...	...	...	**0**
1	1	0 ...	...	...	**0**
1	0	......	...	...	**0**
...	...	...	...	...	**0**
0	0	0000000000	0	00000000	**0**

Ora $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vero relativamente a $\mathbf{D}$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ solo se

$$\textbf{per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

(questo caso è rappresentato dalla prima riga nella tabella sopra- si osservi che la riga può avere infinite entrate se infiniti sono gli elementi in **D**....!!!)

Analogamente, per rappresentare la validità di un predicato in modelli con un fissato dominio **D**, possiamo costruire una tabella per $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$ con tante colonne quanti gli elementi in **D**, ove ogni funzione $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(-)$ che interpreta il predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (e determina uno specifico modello con **D** dominio) è rappresentata da una sua riga (che quindi fa riferimento ad un modello su **D**):

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1})$	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2})$	...	$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_n})$	...	$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$
0	0	0000000000	0	000000000	**0**
0	1	...	...	...	**1**
1	1	0 ...	...	...	**1**
1	0	......	...	...	**1**
...	...	...	...	...	**1**
1	1	11111111111	1	1111111111	**1**

Ora $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vero relativamente a **D** e $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ solo se **esiste un** $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ **tale che** $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ (questo caso è rappresentato da tutte le righe fuorchè la prima!!!)

In pratica un modello per una formula corrisponde ad una riga della tabella di verità per una proposizione.

11.5.9 Esempi di classificazione di formule

1. Nel seguente modello associato con i nomi degli elementi del dominio

   $\mathbf{D}=\{\texttt{Pippo}, \texttt{Minni}, \texttt{Topolino}\}$
   $a^{\mathcal{D}} = \texttt{Minni}$
   $b^{\mathcal{D}} = \texttt{Minni}.$
   $\widetilde{\texttt{Minni}}^{\mathcal{D}} = \texttt{Minni}$
   $\widetilde{\texttt{Pippo}}^{\mathcal{D}} = \texttt{Pippo}$
   $\widetilde{\texttt{Topolino}}^{\mathcal{D}} = \texttt{Topolino}$

   la formula
   $$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$
   è **vera**.

   Infatti
   $$(\mathbf{a} = \mathbf{b})^{\mathcal{D}} = (\widetilde{\texttt{Minni}} = \widetilde{\texttt{Minni}})^{D} = \mathbf{1}$$
   perchè $\mathbf{a}^{\mathcal{D}} = \texttt{Minni} = \mathbf{b}^{\mathcal{D}}$

   Ma invece
   $$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$
   è **falsa** nel modello

   $\mathbf{D}=\{\texttt{Pippo}, \texttt{Minni}, \texttt{Topolino}\}$
   $b^{\mathcal{D}} = \texttt{Pippo}$

$a^{\mathcal{D}}$ =$\texttt{Minni}$.
$\widetilde{\texttt{Minni}}^{\mathcal{D}} = \texttt{Minni}$
$\widetilde{\texttt{Pippo}}^{\mathcal{D}} = \texttt{Pippo}$
$\widetilde{\texttt{Topolino}}^{\mathcal{D}} = \texttt{Topolino}$
dato che

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b})^{\mathcal{D}} = (\widetilde{\texttt{Minni}} = \widetilde{\texttt{Pippo}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

perchè $\mathbf{a}^{\mathcal{D}} = \texttt{Minni} \neq \mathbf{b}^{\mathcal{D}} = \texttt{Pippo}$.

Quindi la formula $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ o analogamente il sequente

$$\vdash \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

è un' **opinione** perchè c'è un modello in cui è falso (il secondo) e un modello in cui è vero (il primo).

2. La formula

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

o il sequente

$$\vdash \mathbf{A}(\mathbf{x}) \ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

NON è una tautologia perchè è **falso** in tal modello che diventa un suo **contromodello**:

D= $\{\texttt{Topolino}, \texttt{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=$\mathbf{1}$ sse $\mathbf{d}$ è maschio

In tal modello $\mathcal{D}$ si ha che

$$(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \forall \mathbf{d} \in \{\texttt{Minni}, \texttt{Topolino}\}\ \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \mathbf{0}$$

perchè

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\texttt{Minni}})\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

ovvero $\texttt{Minni}$ è un falsario del predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

Inoltre

$$\begin{aligned}
(\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}}(\texttt{Topolino}) \ &= (\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni}) \ \rightarrow \ (\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} \\
&= (A(\widetilde{\texttt{Minni}})\,)^{\mathcal{D}} \ \rightarrow \ \forall \mathbf{d} \in \{\texttt{Minni}, \texttt{Topolino}\}\ \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}}) \\
&= \mathbf{1} \ \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

perchè

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\texttt{Topolino}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\texttt{Topolino}})\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

mentre $(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$, ovvero $\texttt{Topolino}$ è un **falsario** del predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

Però la formula Però $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è **vera** nel modello

$\mathbf{D}= \{\mathtt{Minni}\}$
$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sempre
$\mathbf{c}^{\mathcal{D}} = \mathtt{Minni}$.

Infatti per ogni $\mathbf{d} \varepsilon \mathbf{D}= \{\mathtt{Minni}\}$, ovvero per $\mathbf{d} = \mathtt{Minni}$, si ha

$$(\ \mathbf{A}(\mathbf{x})\ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Minni}}))^{\mathcal{D}}\ \rightarrow\ (\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}\ \rightarrow\ \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

poichè $(A(\widetilde{\mathtt{Minni}}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) = 1$ e pure $(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \forall \mathbf{d} \in \{\mathtt{Minni}\}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$.

Un altro modello in cui $\mathbf{A}(\mathbf{x})\ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vera è il seguente

$\mathbf{D}\ \equiv\ \mathbf{Nat}$
$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d})\ \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{sempre} \\ \mathbf{0} & \text{mai} \end{cases}$

In questo modello $(\ \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} = 1$ per definizione e quindi a maggior ragione PER OGNI $d \in D$ si ha $(\ \mathbf{A}(\mathbf{x})\ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$

In conclusione la formula

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

è un' **opinione** perchè vera in un modello e falsa in un altro!

3. La formula

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U}(\mathbf{x})\ \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\ )$$

è **vera** nel modello

$\mathbf{D}=$ Esseri viventi (esistiti ed esistenti)
$\mathbf{M}(\mathbf{x})=$ "x è mortale"
$\mathbf{U}(\mathbf{x})=$ "x è un uomo"

dove vale $\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U}(\mathbf{x})\ \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ perchè tutti gli uomini sono appunto mortali.

Mentre $\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U}(\mathbf{x})\ \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\ )$ è **falsa** nel modello

$\mathbf{D}= \{\mathtt{Pippo}, \mathtt{Topolino}, \mathtt{Minni}\}$
$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse $\mathbf{d}$ *è maschio*
$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse $\mathbf{d}$ *è femmina*

in quanto si ha $\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U}(\mathbf{x})\ \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$
perchè esiste un **falsario** che è $d = \mathtt{Minni}$ per cui vale $(\ \mathbf{U}(\mathbf{x})\ \ \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ dato che $\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{1}$ e quindi

$$\begin{aligned}(\ \mathbf{U}(\mathbf{x})\ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) &= \mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni})\ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) \\ &= U(\widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathcal{D}}\ \rightarrow\ U(\widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathcal{D}} \\ &= \mathbf{1}\ \rightarrow\ \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Concludiamo quindi che pure $\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U}(\mathbf{x})\ \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\ )$ è un' **opinione**.

4. $\mathbf{A}(\mathbf{c})$

   Questa formula *NON è valida*.

   Un modello che falsifica $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ è il seguente

   $\mathbf{D}= \{\texttt{Minni}\}$
   $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ sempre
   $\mathbf{c}^{\mathcal{D}}$ $=\texttt{Minni}$.

   Infatti in questo modello $\mathcal{D}$ si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni}) = \mathbf{0}$$

   Un altro modello che falsifica $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ è il seguente:

   $\mathbf{D} \ \equiv \ \mathbf{Nat}$
   $\mathbf{c}^{\mathcal{D}} \ \equiv \ \mathbf{5} \ \varepsilon\mathbf{Nat}$
   $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d}) \ \equiv \ \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{d} \leq \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti} \end{cases}$

   Infatti $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{5}) = \mathbf{0}$ perchè NON è vero che $\mathbf{5} \leq \mathbf{2}$. In pratica $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ in questo modello formalizza $\mathbf{5} \leq \mathbf{2}$.

   Però $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ è anche *soddisfacibile* perchè vera nel modello

   $\mathbf{D}= \{\texttt{Minni}\}$
   $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(d)=1$ sempre
   $\mathbf{c}^{\mathcal{D}}$ $=\texttt{Minni}$.

   Infatti per questo modello $\mathcal{D}$ si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}}) = A(x)^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni}) = 1$$

   Dunque anche la formula $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ è un' **opinione**.

5. $\mathbf{A}(\mathbf{c}) \ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$

   Questa formula *NON è valida*. Un modello che la **falsifica** è il seguente:

   $\mathbf{D}= \{\texttt{Topolino}, \texttt{Minni}\}$
   $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=1$ sse $\mathbf{d}$ è maschio
   $\mathbf{c}^{\mathcal{D}}$ $=\texttt{Topolino}$.

   In tal modello $\mathcal{D}$ si ha che $(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni}) = 0$. Inoltre

$$(\ \mathbf{A}(\mathbf{c}) \ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}) \ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} \ \rightarrow \ (\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \ \rightarrow \ \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

   perchè $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\texttt{Topolino}) = \mathbf{A}(\widetilde{\texttt{Topolino}})^{\mathcal{D}} \mathbf{1}$ mentre $(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$.

   La formula $\mathbf{A}(\mathbf{c}) \ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è anche *soddisfacibile* perchè vera nel modello

   $\mathbf{D}= \{\texttt{Minni}\}$
   $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=1$ sempre

$\mathbf{c}^{\mathcal{D}}$ =`Minni`.

Infatti per ogni $\mathbf{d}\varepsilon\mathbf{D}=\{\texttt{Minni}\}$, ovvero per $d=\texttt{Minni}$, si ha

$$(\mathbf{A}(\mathbf{c})\ \rightarrow \forall\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\,)^{\mathcal{D}}=1$$

poichè $(\forall\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}=1$ vale.

Dunque anche la formula $\mathbf{A}(\mathbf{c})\ \rightarrow \forall\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})$ è un' **opinione**.

6. $\mathbf{A}(\mathbf{c})\ \rightarrow \exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})$

   Questa formula è **una tautologia** poichè vera in ogni modello. Infatti considerato un modello $\mathcal{D}$ qualsiasi, allora o $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}}=0$ e quindi l'implicazione è vera senza analizzare il conseguente, ovvero

$$(\ \mathbf{A}(\mathbf{c})\ \rightarrow \exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}}=\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}}\ \rightarrow\ (\exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}=\mathbf{0}\ \rightarrow\ (\exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}$$

   oppure $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}}=1$. Ora nel caso $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}}=1$ si ha che per definizione di interpretazione di sostituzione $\mathbf{1}=\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}}=\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}})$ da cui esiste un $\mathbf{d}\varepsilon\mathbf{D}$ (che è $\mathbf{c}^{\mathcal{D}}$) tale che $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=\mathbf{1}$, ovvero $(\exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}=1$ e dunque l'implicazione $\mathbf{A}(\mathbf{c})\ \rightarrow \exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})$ è vera anche nel caso $\mathbf{A}(\mathbf{c})^{\mathcal{D}}=1$.

7. $\exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\ \rightarrow \forall\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})$

   Questa formula *NON è valida*. Un modello che la **falsifica** è il seguente:

   $\mathbf{D}=\{\texttt{Topolino},\texttt{Minni}\}$
   $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse $\mathbf{d}$ è maschio

   In tal modello $\mathcal{D}$ si ha che $(\forall\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}=0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni})=0$. Inoltre

$$(\ \exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\ \rightarrow \forall\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}}=\mathbf{0}$$

   perchè $(\exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}$ in quanto esiste un **testimone d**, che è $\mathbf{d}=\texttt{Topolino}$ tale che $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(d)=1$.

   Infatti

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\texttt{Topolino})=(\mathbf{A}(\widetilde{\texttt{Topolino}})\,)^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}$$

   mentre $(\forall\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}=\mathbf{0}$ e dunque

$$(\ \exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\ \rightarrow \forall\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}}=(\ \exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}\ \rightarrow\ (\ \forall\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}\ \rightarrow \mathbf{0}=\mathbf{0}$$

   La formula $\exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\ \rightarrow \forall\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})$ è però *soddisfacibile* perchè **vera** nel modello

   $\mathbf{D}=\{\texttt{Minni}\}$
   $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=\mathbf{1}$ sempre

   Infatti per ogni $\mathbf{d}\in\mathbf{D}=\{\texttt{Minni}\}$, ovvero per $\mathbf{d}=\texttt{Minni}$ si ha

$$(\ \exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\ \rightarrow \forall\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\,)^{\mathcal{D}}=(\exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}\ \rightarrow\ (\forall\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\,)^{\mathcal{D}}=(\exists\mathbf{x}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}\ \rightarrow\ \mathbf{1}=\mathbf{1}$$

poichè $(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ vale.

Quindi la formula $\exists \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è un' **opinione**.

8. $\forall \mathbf{x}\, \exists \mathbf{y}\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

   La formula *NON è valida*. Un modello che la **falsifica** $\forall x\, \exists y\ B(x, y)$ è il seguente

   $\mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat}$
   $$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{d}_1 > \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{d}_1 \leq \mathbf{d}_2 \end{cases}$$

   Nel modello sopra la formula $\forall \mathbf{x}\, \exists \mathbf{y}\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ diviene una formalizzazione di "**per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che** $\mathbf{x} > \mathbf{y}$" che è falso nel modello per $x = 0$ (lo si dimostri per bene).

   La formula $\forall \mathbf{x}\, \exists \mathbf{y}\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è però *soddisfacibile* perchè **vera** nel modello seguente

   $\mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat}$
   $$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{d}_1 < \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{d}_1 \geq \mathbf{d}_2 \end{cases}$$
   per $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2} \in \mathbf{D}$.

   Nel modello sopra la formula $\forall \mathbf{x}\, \exists \mathbf{y}\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ diviene una formalizzazione di "**per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che** $\mathbf{x} < \mathbf{y}$" che è una proprietà dei numeri naturali.

   Quindi la formula $\forall \mathbf{x}\, \exists \mathbf{y}\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è un'**opinione**.

9. $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})$

   Questa formula *NON è valida* perchè **falsa** nel seguente modello

   $\mathbf{D} = \{\texttt{Minni}\}$
   $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=0$ sempre
   $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}')=1$ sempre
   per $\mathbf{d}, \mathbf{d}' \in \mathbf{D}$, ove i valori $(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$ vanno assegnati alle variabili secondo l'ordine alfabetico, ovvero $\mathbf{d}$ va messo al posto di $\mathbf{x}$, mentre $\mathbf{d}'$ al posto di $\mathbf{y}$.

   Infatti $(\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = \mathbf{0}$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ sempre mentre $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = \mathbf{1}$ sempre.

   La formula $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è però *soddisfacibile* perchè **vera** nel modello seguente

   $\mathbf{D} = \{\texttt{Minni}\}$
   $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sempre
   $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}$ definito a piacere

   Infatti in tal modello per ogni $\mathbf{d}, \mathbf{d}' \in \mathbf{D}$, che poi è solo $\mathbf{d} = \mathbf{d}' = \texttt{Minni}$, si ha $(\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = \mathbf{1}$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sempre e quindi non importa sapere quale è il valore di $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$.

11.5.10 Validità di un sequente in logica predicativa classica

Di seguito riportiamo la nozione di validità e soddisfacibilità per un sequente rispetto alla semantica classica. Come in logica proposizionale un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ viene definito valido o meno, e soddisfacibile o meno se lo è la proposizione che lo rappresenta

$$\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$$

Comunque riportiamo le definizioni precise:

Def. un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è **vero in modello** $\mathcal{D}$
se $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **vero nel modello** $\mathcal{D}$.

Def. un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è **TAUTOLOGIA** o **VALIDO** nella semantica classica,
se $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **valido** ovvero **tautologia** nella semantica classica,
ovvero $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **vero** in **OGNI modello**

Def. un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è **SODDISFACIBILE** nella semantica classica
se $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **soddisfacibile** nella semantica classica,
ovvero **esiste un modello** in cui $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **vero**.

Def. un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è **NON VALIDO** nella semantica classica
se $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **NON valido** rispetto alla semantica classica,
ovvero **esiste un modello** in cui $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **falso**
che è chiamato **contromodello di** $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$.

Def. un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è **INSODDISFACIBILE**, ovvero **PARADOSSALE** nella semantica classica
se $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **insoddisfacibile**, ovvero **paradosso** rispetto alla semantica classica,
ovvero $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **falso** in **TUTTI i modelli**.

Concludiamo aggiungendo pure che

Def. un sequente $\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{\Delta}$ è **OPINIONE** nella semantica classica
se $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **opinione** rispetto alla semantica classica,
ovvero $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **NON valido** e **soddisfacibile**
ovvero $\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **falso** in **UN modello** ed è **vero** in **un ALTRO modello**.

11.5.11 Come falsificare un sequente predicativo

- per **falsificare un sequente predicativo** *SENZA* **variabili libere**

$$\mathtt{pm_1}, \ldots, \mathtt{pm_n} \vdash \mathtt{cl_1}, \ldots, \mathtt{cl_m}$$

  ove $\mathtt{pm}_i$ sono formule predicative poste come **premesse** e $\mathtt{cl}_i$ sono formule predicative poste come **conclusioni**

  significa trovare un modello

$$\mathcal{D}$$

  in cui risulta

$$(\mathtt{pm_i})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{i} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n} \qquad \text{e} \qquad (\mathtt{cl_j})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{j} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{m}$$

  in quanto la *negazione del sequente* $\mathtt{pm_1}, \ldots, \mathtt{pm_n} \vdash \mathtt{cl_1}, \ldots, \mathtt{cl_m}$ è

$$\neg(\ (\mathtt{pm_1}\ \ \&\ \ \ldots)\ \ \&\ \ \mathtt{pm_n}\ \rightarrow (\mathtt{cl_1}\ \ \vee\ \ \mathtt{cl_2})\ \ \vee\ \ \ldots\ \ \vee\ \ \mathtt{cl_m}\ )$$

  che equivale a

$$(\ \mathtt{pm_1}\ \ \&\ \ \ldots)\ \ \&\ \ \mathtt{pm_n}\ )\ \ \&\ \ (\ (\neg\mathtt{cl_1}\ \ \&\ \ \neg\mathtt{cl_2})\ \ \&\ \ \ldots\ \ \&\ \ \neg\mathtt{cl_m})$$

  e questa negazione nel modello $\mathcal{D}$ risulta difatti VERA solo se

$$(\mathtt{pm_i})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{i} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n} \qquad \text{e} \qquad (\mathtt{cl_j})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{j} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{m}$$

- per **falsificare un sequente predicativo** *SENZA* **variabili libere**

$$\vdash \mathtt{cl_1}, \ldots, \mathtt{cl_m}$$

  si procede come nel caso di un sequente proposizionale con lista vuota di premesse.

- per **falsificare un sequente predicativo** *SENZA* **variabili libere**

$$\mathtt{pm_1}, \ldots, \mathtt{pm_n} \vdash$$

  si procede come nel caso di un sequente proposizionale con lista vuota di conclusioni.

- per **falsificare un sequente predicativo** *con* **VARIABILI LIBERE** ove $\mathtt{pm}_i(\overline{y})$ sono formule predicative poste come **premesse** e $\mathtt{cl}_i(\overline{y})$ sono formule predicative poste come **conclusioni** -

$$\mathtt{pm_1}(\overline{\mathbf{y}}), \ldots, \mathtt{pm_n}(\overline{\mathbf{y}}) \vdash \mathtt{cl_1}(\overline{\mathbf{y}}), \ldots, \mathtt{cl_m}(\overline{\mathbf{y}})$$

  ove $\overline{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{y_1}, \ldots \mathbf{y_k}$ è la lista che contiene tutte le variabili libere del sequente, significa trovare un modello

$$\mathcal{D}$$

  in cui **vi sono dei cosiddetti "falsari"** $\mathbf{d_1}, \ldots, \mathbf{d_k}$ che sono **testimoni** degli antecedenti

$$(\mathtt{pm_i}(\overline{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \ldots \mathbf{d_k}) = \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{i} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}$$

e

$$(\mathtt{cl}_\mathbf{j}(\overline{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1},\dots\mathbf{d_k})=\mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{j}=\mathbf{1},\dots,\mathbf{m}$$

in quanto la *negazione del sequente* $\mathtt{pm}_\mathbf{1}(\overline{\mathbf{y}}),\dots,\mathtt{pm}_\mathbf{n}(\overline{\mathbf{y}})\vdash\mathtt{cl}_\mathbf{1}(\overline{\mathbf{y}}),\dots,\mathtt{cl}_\mathbf{m}(\overline{\mathbf{y}})$ è

$$\neg\,\forall\mathbf{y_1}\dots\forall\mathbf{y_n}\,(\ (\mathtt{pm}_\mathbf{1}(\overline{\mathbf{y}})\ \ \&\ \ \dots)\ \ \&\ \ \mathtt{pm}_\mathbf{n}(\overline{\mathbf{y}})\ \rightarrow\ (\mathtt{cl}_\mathbf{1}(\overline{\mathbf{y}})\ \ \vee\ \ \mathtt{cl}_\mathbf{2}(\overline{\mathbf{y}}))\ \ \vee\ \ \dots\ \ \vee\ \ \mathtt{cl}_\mathbf{m}(\overline{\mathbf{y}})\ )$$

che equivale a

$$\exists\mathbf{y_1}\dots\exists\mathbf{y_n}\,\neg(\ (\mathtt{pm}_\mathbf{1}(\overline{\mathbf{y}})\ \ \&\ \ \dots)\ \ \&\ \ \mathtt{pm}_\mathbf{n}(\overline{\mathbf{y}})\ \rightarrow\ (\mathtt{cl}_\mathbf{1}(\overline{\mathbf{y}})\ \ \vee\ \ \mathtt{cl}_\mathbf{2}(\overline{\mathbf{y}}))\ \ \vee\ \ \dots\ \ \vee\ \ \mathtt{cl}_\mathbf{m}(\overline{\mathbf{y}})\ )$$

che a sua volta equivale a

$$\exists\mathbf{y_1}\dots\exists\mathbf{y_n}\,(\ \mathtt{pm}_\mathbf{1}(\overline{\mathbf{y}})\ \ \&\ \ \dots)\ \ \&\ \ \mathtt{pm}_\mathbf{n}(\overline{\mathbf{y}})\ )\ \ \&\ \ (\ (\neg\mathtt{cl}_\mathbf{1}(\overline{\mathbf{y}})\ \ \&\ \ \neg\mathtt{cl}_\mathbf{2}(\overline{\mathbf{y}}))\ \ \&\ \ \dots\ \ \&\ \ \neg\mathtt{cl}_\mathbf{m}(\overline{\mathbf{y}})\ )$$

e tale negazione nel modello $\mathcal{D}$ è VERA solo se risulta che esistono **degli elementi** $\mathbf{d_1},\dots,\mathbf{d_k}$ **FALSARI dei conseguenti e TESTIMONI degli antecedenti**

$$(\mathtt{pm}_\mathbf{i}(\overline{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1},\dots\mathbf{d_k})=\mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{i}=\mathbf{1},\dots,\mathbf{n} \qquad \text{e} \qquad (\mathtt{cl}_\mathbf{j}(\overline{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1},\dots\mathbf{d_k})=\mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{j}=\mathbf{1},\dots,\mathbf{m}$$

- per **falsificare un sequente predicativo** *con* **VARIABILI LIBERE** ove $\mathtt{cl}_i(\overline{y})$ sono formule predicative poste come CONCLUSIONI -

$$\vdash\mathtt{cl}_\mathbf{1}(\overline{\mathbf{y}}),\dots,\mathtt{cl}_\mathbf{m}(\overline{\mathbf{y}})$$

ove $\overline{\mathbf{y}}\equiv\mathbf{y_1},\dots\mathbf{y_k}$ è la lista che contiene tutte le variabili libere del sequente, significa trovare un modello

$$\mathcal{D}$$

in cui **vi sono dei FALSARI** $\mathbf{d_1},\dots,\mathbf{d_k}$ tali che

$$(\mathtt{cl}_\mathbf{j}(\overline{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1},\dots\mathbf{d_k})=\mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{j}=\mathbf{1},\dots,\mathbf{m}$$

in quanto la *negazione del sequente* $\vdash\mathtt{cl}_\mathbf{1}(\overline{\mathbf{y}}),\dots,\mathtt{cl}_\mathbf{m}(\overline{\mathbf{y}})$ è

$$\neg\,\forall\mathbf{y_1}\dots\forall\mathbf{y_n}\,(\ \mathtt{tt}\ \rightarrow\ (\mathtt{cl}_\mathbf{1}(\overline{\mathbf{y}})\ \ \vee\ \ \mathtt{cl}_\mathbf{2}(\overline{\mathbf{y}}))\ \ \vee\ \ \dots\ \ \vee\ \ \mathtt{cl}_\mathbf{m}(\overline{\mathbf{y}})\ )$$

che equivale a

$$\exists\mathbf{y_1}\dots\exists\mathbf{y_n}\,\neg(\ (\mathtt{cl}_\mathbf{1}(\overline{\mathbf{y}})\ \ \vee\ \ \mathtt{cl}_\mathbf{2}(\overline{\mathbf{y}}))\ \ \vee\ \ \dots\ \ \vee\ \ \mathtt{cl}_\mathbf{m}(\overline{\mathbf{y}})\ )$$

che a sua volta equivale a

$$\exists\mathbf{y_1}\dots\exists\mathbf{y_n}\,(\neg\mathtt{cl}_\mathbf{1}(\overline{\mathbf{y}})\ \ \&\ \ \neg\mathtt{cl}_\mathbf{2}(\overline{\mathbf{y}}))\ \ \&\ \ \dots\ \ \&\ \ \neg\mathtt{cl}_\mathbf{m}(\overline{\mathbf{y}})\ )$$

e tale negazione nel modello $\mathcal{D}$ è VERA solo se risulta che esistono **dei testimoni** $\mathbf{d_1},\dots,\mathbf{d_k}$ **dell'esistenziale** ovvero dei **FALSARI** dei vari $\mathtt{cl}_j$

$$(\mathtt{cl}_\mathbf{j}(\overline{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1},\dots\mathbf{d_k})=\mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{j}=\mathbf{1},\dots,\mathbf{m}$$

- per **falsificare un sequente predicativo** *con* **VARIABILI LIBERE** ove $\mathtt{pm}_i(\overline{y})$ sono formule predicative poste come PREMESSE e $\mathtt{cl}_i(\overline{y})$ sono formule predicative poste come CONCLUSIONI -

$$\mathtt{pm_1}(\overline{\mathbf{y}}), \ldots, \mathtt{pm_n}(\overline{\mathbf{y}}) \vdash$$

ove $\overline{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{y_1}, \ldots \mathbf{y_k}$ è la lista che contiene tutte le variabili libere del sequente, significa trovare un modello

$$\mathcal{D}$$

in cui **vi sono dei FALSARI** $\mathbf{d_1}, \ldots, \mathbf{d_k}$ tali che

$$(\mathtt{pm_i}(\overline{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \ldots \mathbf{d_k}) = \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{i} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}$$

in quanto la *negazione del sequente* $\mathtt{pm_1}(\overline{\mathbf{y}}), \ldots, \mathtt{pm_n}(\overline{\mathbf{y}}) \vdash$ è

$$\neg\ \forall \mathbf{y_1} \ldots \forall \mathbf{y_n}\ (\ \ (\mathtt{pm_1}(\overline{\mathbf{y}})\ \ \&\ \ \ldots)\ \ \&\ \ \mathtt{pm_n}(\overline{\mathbf{y}})\ \to \perp\ )$$

che equivale a

$$\exists \mathbf{y_1} \ldots \exists \mathbf{y_n}\ \neg(\ (\mathtt{pm_1}(\overline{\mathbf{y}})\ \ \&\ \ \ldots)\ \ \&\ \ \mathtt{pm_n}(\overline{\mathbf{y}})\ \to \perp\ )$$

che a sua volta equivale a

$$\exists \mathbf{y_1} \ldots \exists \mathbf{y_n}\ (\ \mathtt{pm_1}(\overline{\mathbf{y}})\ \ \&\ \ \ldots)\ \ \&\ \ \mathtt{pm_n}(\overline{\mathbf{y}})\ )$$

e tale negazione nel modello $\mathcal{D}$ è VERA solo se risulta che esistono **dei TESTIMONI** $\mathbf{d_1}, \ldots, \mathbf{d_k}$

$$(\mathtt{pm_i}(\overline{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \ldots \mathbf{d_k}) = \mathbf{1} \text{ per ogni } \mathbf{i} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}$$

11.6 Come classificare la verità di un sequente predicativo

Al contrario della logica classica proposizionale, per la **logica classica predicativa NON esiste una procedura AUTOMATICA per decidere la validità di arbitrarie formule o sequenti**.

Esiste però una **procedura SEMI-automatica** che si avvale del calcolo dei sequenti LC e richiede la costruzione di contro-modelli nel caso di non validità.

11.6.1 Procedura per stabilire validità, insoddisfacibilità, soddisfacibilità di sequenti in LC

Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$
`passo 1`: si prova a derivarlo in $\mathbf{LC_=}$

$$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow\ \text{è valido ovvero è } \textbf{tautologia} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{vai al passo 2} \end{cases}$$

`passo 2`: costruisci contromodello con foglia di albero che NON si chiude
se esiste contromodello $\Rightarrow$ il sequente $\mathbf{\Gamma \vdash \Delta}$ è **NON valido**
e vai al passo 3
`passo 3`: prova a derivare la negazione di $\Gamma \vdash \Delta$ in $\mathbf{LC_=}$
che è $\vdash \neg(\ \mathbf{\Gamma^{\&}} \to \mathbf{\Delta^{\vee}}\ )$ se non ci sono variabili libere
oppure è $\vdash \neg\forall\overline{\mathbf{y}}(\ \mathbf{\Gamma^{\&}} \to \mathbf{\Delta^{\vee}}\ )$ se $\overline{\mathbf{y}}$ è la lista che contiene tutte le variabili libere del sequente $\mathbf{\Gamma \vdash \Delta}$

$$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow\ \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta} \text{ è insoddisfacibile ovvero è } \textbf{paradossale} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{applica il passo 2 alla negazione di } \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta} \\ & \text{se trovi contromodello di } \neg(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}\ ) \text{ (oppure di } \vdash \neg\forall\overline{\mathbf{y}}(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee}\ )\ ) \\ & \text{questo è modello di } \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\vee} \\ & \text{che è quindi anche modello di } \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta} \\ & \Rightarrow\ \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta} \text{ è } \textbf{soddisfacibile} \\ & \text{e siccome è pure non valido allora } \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta} \text{ risulta } \textbf{OPINIONE} \end{cases}$$

Consigli su come derivare

Nell'intento di cercare una derivazione è meglio:

applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e ∀-D e ∃-S con VARIABILI NUOVE
applicare le regole ∀-S e ∃-D con TERMINI presenti nelle formule del sequente
se non si riesce a derivare il sequente a causa di una foglia non assioma che non si riesce a chiudere (ovvero non si riesce a farla diventare nodo di un ramo con assiomi come foglie), conviene costruire il contromodello falsificando il sequente che si trova lungo il ramo che finisce nella foglia non assioma PRIMA di una seconda applicazione di ∀-S o ∃-D

Esempio Cerchiamo una derivazione di

$$\forall \mathbf{z}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z})\ ) \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

Applicando prima $\forall-$D di $\forall-$S troviamo ad esempio questa derivazione

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\textbf{ax-id}}{\forall \mathbf{z}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z})\ ), \mathbf{A}(\mathbf{z}), \mathbf{B}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}}{\forall \mathbf{z}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z})\ ), \mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}\ \&-\text{S}}{\cfrac{\forall \mathbf{z}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z})\ ) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\forall \mathbf{z}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z})\ ) \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})}\ \forall-\text{D}}\ \forall-\text{S}$$

ove il primo $\forall-$D è corretto perchè $\mathbf{z}$ non compare libera nel sequente radice.

Se invece avessimo applicato prima $\forall-$S avremmo ottenuto una derivazione del genere ad esempio

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\textbf{ax-id}}{\mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z}), \forall \mathbf{z}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z})\ ), \mathbf{A}(\mathbf{w}), \mathbf{B}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w})}}{\mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z}), \forall \mathbf{z}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z})\ ), \mathbf{A}(\mathbf{w})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{w}), \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w})}\ \&-\text{S}}{\mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z}), \forall \mathbf{z}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z})\ ) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w})}\ \forall-\text{S}}{\forall \mathbf{z}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z})\ ), \mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w})}\ \text{sc}_{\text{sx}}}{\forall \mathbf{z}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z})\ ), \mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})}\ \forall-\text{D}}{\forall \mathbf{z}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ \&\ \mathbf{B}(\mathbf{z})\ ) \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})}\ \forall-\text{S}$$

ove l'applicazione di $\forall-$D è corretta perchè $\mathbf{w}$ non compare libera nel sequente sopra il sequente radice.

In questa derivazione si vede che la prima applicazione di $\forall-$S è stata inutile perchè è il $\forall-$D che sceglie la variabile libera con cui finire la derivazione, per via del fatto che lo si applica solo se la variabile liberata dal quantificatore non compare libera nel sequente conclusione della regola.

%

11.6.2 Precisazione sull'interpretazione di predicati

Abbiamo definito in definizione 11.6 l'interpretazione di un predicato $\mathbf{A(x)}$ in un modello $\mathbf{D}$ come una funzione

$$\mathbf{A(x)}^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D} \longrightarrow \{\, \mathbf{0}, \mathbf{1} \,\}$$

visto che c'è SOLO $\mathbf{x}$ *come variabile libera in* $\mathbf{A(x)}$.

Ora precisiamo che l'**interpretazione di un predicato NON dipende dal NOME delle variabili** ma **dipende solo dal numero e ordine delle variabili che compaiono nel predicato** ovvero per esempio il predicato $\mathbf{A(z)}^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D} \longrightarrow \{\, \mathbf{0}, \mathbf{1} \,\}$ si interpreta nello stesso modo sia che dipenda da z come unica variabile che da x, ovvero

$$\mathbf{A(z)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{A(x)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) \qquad \text{per } \mathbf{d} \in \mathbf{D}$$

in quanto l'interpretazione di un predicato *NON dipende dal nome della variabile libera ma solo dal fatto che ce ne è una!* e lo si vede bene all'interno di un modello di un linguaggio con i nomi per tutti gli elementi del suo dominio $\mathbf{D}$ in quanto si ha

$$\mathbf{A(z)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) \qquad = \qquad \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}})^{\mathbf{D}} \qquad = \qquad \mathbf{A(x)}^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) \qquad \text{per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D}$$

Però se dobbiamo interpretare $\mathbf{A(z)} \& \mathbf{A(x)}$ dobbiamo pensare sia $\mathbf{A(z)}$ che $\mathbf{A(x)}$ come *funzione binarie nel contesto delle variabili*

$$[\mathbf{x}, \mathbf{z}]$$

in quanto la formula$\mathbf{A(z)} \& \mathbf{A(x)}$ si interpreta come una funzione binaria

$$(\mathbf{A(z)} \& \mathbf{A(x)})^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{\, \mathbf{0}, \mathbf{1} \,\}$$

ovvero dobbiamo specificare quale sia l'interpretazione sia di $\mathbf{A(z)}$ che $\mathbf{A(x)}$ sotto contesto $[\mathbf{x}, \mathbf{z}]$, ovvero dobbiamo specificare

$$(\mathbf{A(z)}_{[\mathbf{x},\mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{\, \mathbf{0}, \mathbf{1} \,\} \qquad (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x},\mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{\, \mathbf{0}, \mathbf{1} \,\}$$

a partire dall'interpretazione con un'unica variabile libera

$$\mathbf{A(z)}^{\mathbf{D}}_{[\mathbf{z}]}(\mathbf{d}) = \qquad = \qquad \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}})^{\mathbf{D}} \qquad = \qquad \mathbf{A(x)}^{\mathbf{D}}_{[\mathbf{x}]}(\mathbf{d}) \qquad \textbf{per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D}$$

A tal scopo ASSUMIAMO che il contesto delle variabili sia sempre interpretato *secondo l'ordine alfabetico*, ovvero dato $(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) \in \mathbf{D} \times \mathbf{D}$ l'elemento da sostituire alla variabile $\mathbf{x}$ varia sul PRIMO dominio, ovvero su $\mathbf{d_1}$, mentre quello per la variabile $\mathbf{z}$ (che nell'alfabeto viene dopo ad $\mathbf{x}$) varia sul SECONDO dominio ovvero su $\mathbf{d_2}$. Poi se c'è pure la variabile $\mathbf{w}$ questa varierebbe sul PRIMO dominio perchè nell'ordine alfabetico inglese $\mathbf{w}$ è prima di $\mathbf{x}$.

Per esempio

$$(\mathbf{A(x)} \to \mathbf{A(y)})^{\mathbf{D}}(-,-) : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{\, \mathbf{0}, \mathbf{1} \,\}$$

risulta definito in tal modo

$$
\begin{aligned}
&(\,\mathbf{A(x)} \rightarrow \mathbf{A(y)}_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}\,)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2})\\
&\qquad\qquad \equiv\ (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2}) \rightarrow (\mathbf{A(y)}_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2})\\
&\qquad\qquad = (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1}) \rightarrow (\mathbf{A(y)}_{[\mathbf{y}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_2})\\
&\qquad\qquad = (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1}) \rightarrow (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_2})\\
&\qquad\qquad = \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d_1}})^{\mathbf{D}} \rightarrow \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d_2}})^{\mathbf{D}}
\end{aligned}
$$

Mentre ad esempio

$$
\begin{aligned}
&(\,\mathbf{A(z)}\&\mathbf{A(x)} \rightarrow \mathbf{A(w)}_{[\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{z}]}\,)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2},\mathbf{d_3})\\
&\qquad \equiv\ (\mathbf{A(z)}_{[\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2},\mathbf{d_3})\ \&\ (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2},\mathbf{d_3}) \rightarrow (\mathbf{A(w)}_{[\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2},\mathbf{d_3})\\
&\qquad = (\mathbf{A(z)}_{[\mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_3})\ \&\ (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_2}) \rightarrow (\mathbf{A(w)}_{[\mathbf{w}]})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1})\\
&\qquad = \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d_3}})^{\mathbf{D}}\ \&\ \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d_2}})^{\mathbf{D}} \rightarrow \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d_1}})^{\mathbf{D}}
\end{aligned}
$$

Inoltre nel seguente modello

$\mathbf{D}=\{\mathtt{Topolino},\mathtt{Minni}\}$
$\mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse $\mathbf{d}$ è maschio

$$(\mathbf{A(z)}\&\mathbf{A(x)} \rightarrow \mathbf{A(w)}_{[\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{z}]}\,)^{\mathbf{D}}(\mathtt{Minni},\mathtt{Topolino},\mathtt{Topolino}) = \mathbf{0}$$

perchè

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{A(z)}\&\mathbf{A(x)} \rightarrow \mathbf{A(w)}_{[\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{z}]}\,)^{\mathbf{D}}(\mathtt{Minni},\mathtt{Topolino},\mathtt{Topolino})\\
&\qquad = (\mathbf{A(z)}_{[\mathbf{z}]})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Topolino})\ \&\ (\mathbf{A(x)}_{[\mathbf{x}]})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Topolino}) \rightarrow (\mathbf{A(w)}_{[\mathbf{w}]})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Minni})\\
&\qquad = (\mathbf{A}(\mathtt{Topolino}))^{\mathbf{D}}\ \&\ (\mathbf{A}(\mathtt{Topolino}))^{\mathbf{D}} \rightarrow (\mathbf{A}(\mathtt{Minni}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Quindi $\mathbf{A(z)}\&\mathbf{A(x)} \rightarrow \mathbf{A(w)}$ NON è vero nel modello.

Invece nel modello $\mathbf{D}=\{\mathtt{Topolino},\mathtt{Minni}\}$
$\mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sempre
chiaramente $\mathbf{A(z)}\&\mathbf{A(x)} \rightarrow \mathbf{A(w)}$ è vera perchè per ogni $(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2},\mathbf{d_3}) \in \mathbf{D}\times\mathbf{D}\times\mathbf{D}$ si ha

$$(\,\mathbf{A(z)}\&\mathbf{A(x)} \rightarrow \mathbf{A(w)}_{[\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{z}]}\,)^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2},\mathbf{d_3}) = 1$$

Esercizio di chiarimento: Si stabilisca la validità e soddisfacibilità o meno del sequente

$$\exists\mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}\vdash\forall\mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}$$

Proviamo ad applicare la procedura 11.6.1 e quindi procediamo a derivare

$$
\dfrac{\dfrac{\mathbf{A(w)} \vdash \mathbf{A(z)}}{\exists\mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}\vdash\mathbf{A(z)}}\ \exists-\mathrm{D}}{\exists\mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}\vdash\forall\mathbf{z}\ \mathbf{A(z)}}\ \forall-\mathrm{D}
$$

ove la prima applicazione di $\forall-$D è corretta poichè $\mathbf{z}$ non appare libera in $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$ e così pure l'ultima applicazione di $\exists-$D è pure corretta perchè $\mathbf{w}$ non appare libera (perchè NON compare proprio) in $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})$.

L'ultima foglia suggerisce di costruire un contromodello falsificando il sequente

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

ovvero la formula $\mathbf{A}(\mathbf{w}) \to \mathbf{A}(\mathbf{z})$. A tal scopo basta trovare un modello $\mathbf{D}$ tale che

$$(\,\mathbf{A}(\mathbf{w}) \to \mathbf{A}(\mathbf{z})\,)^{\mathcal{D}}(-) : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

(ove $\mathbf{w}$ varia sulla prima componente $\mathbf{D}$ del prodotto $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$ e $\mathbf{z}$ sulla seconda componente secondo l'ordine alfabetico inglese delle lettere rappresentanti le variabili visto che $\mathbf{w}$ viene prima di $\mathbf{z}$) NON sia la funzione costante $\mathbf{1}$, ovvero esista una coppia $(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2})$ in $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$ tale che

$$(\,\mathbf{A}(\mathbf{w}) \to \mathbf{A}(\mathbf{z})\,)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}) \ \to\ \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d_1}})^{\mathcal{D}} \ \to\ \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d_2}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

Quindi basta che risulti $\mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d_1}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d_2}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$.

Un tal contromodello è il seguente:
$\mathbf{D} \equiv \{\mathtt{Minni}, \mathtt{Pippo}\}$ con

$$\mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Pippo}})^{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$$

e si noti che per quanto esposto sopra vale pure

$$\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Pippo}})^{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$$

Quindi in tal modello risulta che

$$\mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}, \mathtt{Pippo}) = \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathtt{Pippo}) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Pippo}})^{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$$

mentre

$$\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}, \mathtt{Pippo}) = \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathtt{Minni}) = \mathbf{A}(\widetilde{\mathtt{Minni}})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$$

Dunque il sequente **myred**$\mathbf{A}(\mathbf{w}) \to \mathbf{A}(\mathbf{z})$ è **falso** in tal modello e per la sicurezza delle regole del calcolo predicativo $\mathbf{LC}_{=}$, che mostreremo nel seguito, tale modello **falsifica** pure

$$\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

che risulta quindi *NON è valido.*

Ora per provare se il sequente $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$ è **soddisfacibile** proviamo a derivare la sua negazione ovvero

$$\vdash \neg(\,\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \to \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\,)$$

e nel tentativo di derivarlo otteniamo

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \qquad\qquad \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash}{\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \to \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash}\ \to -\mathrm{S}}{\vdash \neg(\,\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \to \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\,)}\ \neg-\mathrm{D}$$

Ora consideriamo la foglia a sx. Si vede che se si prova a continuare a derivare con $\exists - \mathbf{D}$ non si arriva che a ripetere l'esistenziale assieme a delle formule del tipo $\mathbf{A}(\mathbf{t})$. **Conviene fermarsi prima**

di un'applicazione di $\exists - \mathbf{D}$ (o al più dopo una sola applicazione) e procedere a trovare un contromodello **falsificando**

$$\vdash \exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$$

(si ricordi che il contesto vuoto a sx si interpreta sempre come vero..) ovvero basta costruire un modello $\mathcal{D}$ in cui vale $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$.

Per esempio possiamo definire $\mathcal{D}$ ponendo

$$\begin{array}{l} \mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat} \\ \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0} \text{ per ogni naturale } \mathbf{d} \end{array}$$

Infatti in questo modello chiaramente $(\ \exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ e dunque per la sicurezza delle regole del calcolo predicativo $\mathbf{LC}_=$ tal modello rende falso

$$\vdash \neg(\ \exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ )$$

e dunque rende vero il sequente di partenza $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$, da cui segue che il sequente $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$ risulta **soddisfacibile**.

Alternativamente invece di analizzare la foglia a sx potevamo proseguire la derivazione con la foglia a dx

$$\forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash$$

Anche qui si può notare che se si prova a continuare a derivare con $\forall - \mathbf{S}$ non si arriva che a ripetere la formula universale assieme a delle formule del tipo $\mathbf{A}(\mathbf{t})$. **Conviene fermarsi prima di ogni applicazione di $\forall - \mathbf{S}$ (o al più dopo una sola applicazione)** e procedere a trovare un contromodello **falsificando**:

$$\forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash$$

(si ricordi che il contesto vuoto a dx si interpreta sempre come falso..) ovvero basta costruire un modello $\mathcal{D}$ in cui vale $\forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Per esempio possiamo definire

$$\begin{array}{l} \mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat} \\ \mathbf{A}(\mathbf{z})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \text{ sempre} \end{array}$$

Questo modello è contromodello per il sequente

$$\vdash \neg(\ \exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \rightarrow \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})\ )$$

e dunque rende vero il sequente di partenza $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$. Abbiamo concluso dunque con un altro tipo di modello che il sequente $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$ risulta **soddisfacibile**.

In conclusione il sequente $\exists \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z}\ \mathbf{A}(\mathbf{z})$ è un' **opinione** avendo trovato un modello in cui è falso e uno in cui è vero.

11.6.3 Esempi di classificazione della verità di un sequente

1. L'argomentazione

$$\frac{\textbf{Se uno è mite e gentile allora è amabile.}}{\textbf{Se uno non è gentile allora non è amabile e neppure mite.}}$$

si formalizza nel sequente

$$\forall \mathbf{x}(\ \mathbf{M}(\mathbf{x})\&\mathbf{G}(\mathbf{x})\rightarrow\mathbf{A}(\mathbf{x})\ )\vdash\forall \mathbf{x}(\ \neg\mathbf{G}(\mathbf{x})\rightarrow\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg\mathbf{M}(\mathbf{x})\ )$$

usando:
M(x)=x è mite
G(x)=x è gentile
A(x)=x è amabile

che proviamo a vedere se si deriva seguendo lo schema in sezione 11.6.1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ ), A(x)\vdash G(x)}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ )\vdash\neg A(x), G(x)}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \dfrac{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ ), M(x)\vdash G(x)}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ ),\vdash\neg M(x), G(x)}\ \neg-\mathrm{D}}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ )\vdash\neg A(x)\&\neg M(x), G(x)}\ \&-\mathrm{D}}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ )\vdash G(x), \neg A(x)\&\neg M(x)}\ \mathrm{sc_{dx}}}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ ), \neg G(x)\vdash\neg A(x)\&\neg M(x)}\ \neg-\mathrm{S}}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x) \rightarrow A(x)\ )\vdash\neg G(x) \rightarrow \neg A(x)\&\neg M(x)}\ \rightarrow-\mathrm{D}}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x) \rightarrow A(x)\ )\vdash\forall x\ (\neg G(x) \rightarrow \neg A(x)\&\neg M(x)\ )}\ \forall-\mathrm{D}}{}$$

ove il primo $\forall-$D si applica perchè $\mathbf{x}$ NON compare libera nel resto del sequente. E poi ci accorgiamo che non ha senso continuare... Infatti continuando a derivare la seconda foglia dell'albero precedente otteniamo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\textbf{ax-id}}{M(x),\ \forall x\ (\dots)\vdash M(x)} \qquad M(x),\ \forall x\ (\dots)\vdash G(x), G(x)}{M(x), \forall x\ (\dots)\vdash M(x)\&G(x), G(x)}\ \&-\mathrm{D} \qquad M(x),\ \forall x\ (\dots), A(x)\vdash G(x)}{M(x), \forall x\ (\dots), M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\vdash G(x)}\ \rightarrow-\mathrm{S}}{M(x), \forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ )\vdash G(x)}\ \forall-\mathrm{S}}{\forall x\ (\ M(x)\&G(x)\rightarrow A(x)\ ), M(x)\vdash G(x)}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

e ci accorgiamo che la foglia

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x}\ (\dots)\vdash\mathbf{G}(\mathbf{x}), \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

in alto a dx risulta equivalente al sequente dell'albero prima di $\forall-$S

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{x})\&\mathbf{G}(\mathbf{x})\rightarrow\mathbf{A}(\mathbf{x})\ )\vdash\mathbf{G}(\mathbf{x})$$

a meno di una ripetizione di $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ nelle conclusioni. E analogamente continuando a derivare l'albero sopra con $\forall-$S dopo uno scambio non otteniamo nulla di nuovo... e quindi ci conviene falsificare il sequente dell'albero prima di applicare $\forall-$S, ovvero

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{x})\&\mathbf{G}(\mathbf{x})\rightarrow\mathbf{A}(\mathbf{x})\ )\vdash\mathbf{G}(\mathbf{x})$$

A tal scopo prendiamo un dominio $\mathbf{D}$ non vuoto qualsiasi e poniamo:
$\mathbf{G}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{d}$ in $\mathbf{D}$,
$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ per ogni $\mathbf{d}$ in $\mathbf{D}$
e $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ è definito a piacere. Poi si noti che

$$(\ \forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{x})\&\mathbf{G}(\mathbf{x})\rightarrow\mathbf{A}(\mathbf{x})\ )\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

poichè per ogni $\mathbf{d}$ in $\mathbf{D}$ si ha $(\ \mathbf{M}(\mathbf{x})\&\mathbf{G}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ e quindi tale modello risulta un *contromodello* del sequente

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{x})\&\mathbf{G}(\mathbf{x})\rightarrow\mathbf{A}(\mathbf{x})\ ), \mathbf{M}(\mathbf{x})\vdash\mathbf{G}(\mathbf{x})$$

(ovvero lo falsifica) perchè su un elemento del dominio (in realtà su ogni elemento del dominio) le **premesse** sono **vere** mentre le **conclusioni** sono **false**, da cui il sequente di partenza

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{x})\&\mathbf{G}(\mathbf{x})\ \to\ \mathbf{A}(\mathbf{x})\ )\vdash\forall \mathbf{x}\ (\ \neg\mathbf{G}(\mathbf{x})\ \to\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg\mathbf{M}(\mathbf{x})\ )$$

risulta **non valido** perchè abbiamo adottato solo regole (che mostreremo essere) sicure per arrivare alla foglia

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{x})\&\mathbf{G}(\mathbf{x})\to\mathbf{A}(\mathbf{x})\ ), \mathbf{M}(\mathbf{x})\vdash\mathbf{G}(\mathbf{x})$$

`MORALE`= abbiamo costruito un contromodello pensando ad un dominio in cui **TUTTI gli individui d NON sono gentili** ma **tutti sono miti** senza considerare se sono amabili o meno.
In questo modo NON è vero che **se uno non è gentile NON è neppure mite** senza per questo contraddire il fatto che **se uno è gentile e mite allora è amabile** che vale perchè l'antecedente di questa implicazione non si verifica mai nel modello (non ci sono infatti nel nostro dominio individui gentili!!).

Poi procediamo a studiare la soddisfacibilità del sequente di partenza che per comodità abbreviamo come segue

$$\vdash \mathbf{pr_1}\to\ \mathbf{pr_2}$$

ove $\mathbf{pr_1}\ \equiv\ \forall\mathbf{x}(\ \mathbf{M}(\mathbf{x})\&\mathbf{G}(\mathbf{x})\to\mathbf{A}(\mathbf{x})\ )$
$\mathbf{pr_2}\ \equiv\ \forall\mathbf{x}(\ \neg\mathbf{G}(\mathbf{x})\to\neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\&\neg\mathbf{M}(\mathbf{x})\ )$.

A tal scopo proviamo a derivare la negazione della formula che rappresenta il sequente ovvero

$$\vdash\ \neg(\ \mathbf{pr_1}\to\ \mathbf{pr_2}\ )$$

e si ottiene (sviluppando l'albero nel modo ottimale, ovvero senza applicare $\forall-$S inutilmente..)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{M}(\mathbf{x}),\mathbf{G}(\mathbf{x})\vdash\mathbf{A}(\mathbf{x})}{\mathbf{M}(\mathbf{x})\&\mathbf{G}(\mathbf{x})\vdash\mathbf{A}(\mathbf{x})}\ \&-\mathrm{D}}{\mathbf{M}(\mathbf{x})\&\mathbf{G}(\mathbf{x})\to\mathbf{A}(\mathbf{x})}\ \to-\mathrm{D}}{\vdash\mathbf{pr_1}}\ \forall-\mathrm{D}\qquad\qquad \mathbf{pr_2}\vdash}{\mathbf{pr_1}\to\ \mathbf{pr_2}\vdash}\ \to-\mathrm{D}}{\vdash\ \neg(\ \mathbf{pr_1}\to\ \mathbf{pr_2}\ )}\ \neg-\mathrm{D}$$

ove l'applicazione di $\forall-$D è lecita perchè la variabile x non appare libera nel sequente conclusione. Ora per ottenere un contromodello della negazione del sequente di partenza, e quindi un modello del sequente di partenza basta falsificare la foglia

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}),\mathbf{G}(\mathbf{x})\vdash\mathbf{A}(\mathbf{x})$$

mandando sempre a $\mathbf{1}$ l'interpretazione di $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ e a $\mathbf{0}$ quella di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$: ovvero
dato un dominio $\mathbf{D}$ non vuoto si definisce

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=\mathbf{1}\text{ per ogni }\mathbf{d}\in\mathbf{D}$$
$$\mathbf{G}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=\mathbf{1}\text{ per ogni }\mathbf{d}\in\mathbf{D}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=\mathbf{0}\text{ per ogni }\mathbf{d}\in\mathbf{D}$$

In tal modello si verifica che **per ogni** $\mathbf{d}\in\mathbf{D}$

$$(\,\mathbf{M}(\mathbf{x})\,\&\,\mathbf{G}(\mathbf{x})\to\mathbf{A}(\mathbf{x})\,)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})\,\&\,\mathbf{G}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})\to\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=\mathbf{1}\&\mathbf{1}\to\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

ovvero si è trovato un contromodello per la negazione del sequente di partenza

$$\vdash\ \neg(\ \mathbf{pr_1}\to\ \mathbf{pr_2}\ )$$

e dunque un modello per il sequente di partenza.

In conclusione, il sequente di partenza $\vdash$ $\mathbf{pr_1}\rightarrow$ $\mathbf{pr_2}$ sopra risulta **non valido** ma **soddisfacibile**, visto che esiste un modello in cui è falso e uno in cui è vero ed è quindi un' **opinione**.

2. Il sequente $\vdash \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x}$ è una **tautologia** perchè si deriva in tal modo

$$\dfrac{\begin{array}{c}= \text{-ax}\\ \vdash \mathbf{x{=}x}\end{array}}{\vdash \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x{=}x}}\ \forall{-}\mathrm{D}$$

ove l'applicazione di $\forall$ -D è lecita perchè $\mathbf{x}$ non è libera nel sequente radice.

3. Il sequente $\vdash\ \neg\forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x}$ è **insoddisfacibile** perchè una derivazione non si trova (provarci per crederci!) e passiamo subito a derivare la negazione della sua conclusione ovvero $\vdash \neg\neg\forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}= \text{-ax}\\ \vdash \mathbf{x} = \mathbf{x}\end{array}}{\vdash \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x}}\ \forall{-}\mathrm{D}}{\neg\forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x} \vdash}\ \neg{-}\mathrm{S}}{\vdash \neg\neg\forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{x}}\ \neg{-}\mathrm{D}$$

4. Il sequente $\vdash\forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}$ *NON è valido.*

   Infatti provando a derivarlo si trova

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \mathbf{x{=}y}}{\vdash\forall \mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}}\ \forall{-}\mathrm{D}}{\vdash\forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}}\ \forall{-}\mathrm{D}$$

   ove la prima applicazione di $\forall{-}$D è corretta perchè $\mathbf{y}$ non appare libera nel sequente radice, ed anche la seconda applicazione di $\forall{-}$D è corretta perchè $\mathbf{x}$ non appare libera nel suo sequente conclusione.

   Non trovando una derivazione proviamo a costruire un contromodello di $\mathbf{x{=}y}$. A tal scopo consideriamo il seguente modello

$$\mathbf{D}\ \equiv\ \{\mathbf{1{,}2}\}$$

   ove vale $(\mathbf{x} = \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{1}, \mathbf{2})\ \equiv\ \mathbf{0}$ perchè $\mathbf{1} \neq \mathbf{2}$ e quindi concludiamo che

$$\vdash \mathbf{x{=}y}$$

   NON è valido perchè falso nel modello costruito. Dato che le regole del calcolo $\mathbf{LC}_=$ sono sicure ne deduciamo che pure il sequente $\vdash\forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}$ **NON è valido**.

   Poi per vedere se $\vdash\forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}$ è soddisfacibile si prova a derivare la sua negazione e si trova ad esempio

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y},\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{y},\ \mathbf{x} = \mathbf{y}\vdash}{\forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}, \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{y}\vdash}\ \forall{-}\mathrm{S}}{\forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}\vdash}\ \forall{-}\mathrm{S}}{\vdash\neg\forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y}}\ \neg{-}\mathrm{D}$$

   e si prova a costruire contromodello di $\forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x{=}y},\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{y},\ \mathbf{x} = \mathbf{y}\vdash$.

A tal scopo basta considerare un modello con dominio $\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{1}\}$ ove si trova che `per ogni` $\mathbf{d}, \mathbf{d'} \in \mathbf{D}$ si ha $(\mathbf{x}{=}\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d'}) = \mathbf{1}$ e così pure $(\forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x}{=}\mathbf{y})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e similmente $(\forall \mathbf{x}\ \mathbf{x}{=}\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d'}) = \mathbf{1}$. Concludiamo quindi che $\vdash \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x}{=}\mathbf{y}$ è **soddisfacibile**, appunto in questo modello il cui dominio ha un unico elemento!!

5. Il sequente $\vdash \exists \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{c}$ è una **tautologia** in quanto una sua derivazione è

$$\dfrac{\begin{array}{c} = \text{-ax} \\ \vdash \mathbf{c}{=}\mathbf{c} \end{array}}{\vdash \exists \mathbf{x}\ \mathbf{x} = \mathbf{c}}\ \exists{-}\mathrm{D}\mathbf{v}$$

6. Il sequente $\vdash \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{y} = \mathbf{z} \to \mathbf{x} = \mathbf{z}\ )$ *NON è valido* perchè provando a derivarlo si trova

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{y} = \mathbf{z} \vdash \mathbf{x} = \mathbf{z}}{\vdash \mathbf{y} = \mathbf{z} \to \mathbf{x} = \mathbf{z}}\ \to{-}\mathrm{D}}{\vdash \forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{y} = \mathbf{z} \to \mathbf{x} = \mathbf{z}\ )}\ \forall{-}\mathrm{D}}{\vdash \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{y} = \mathbf{z} \to \mathbf{x} = \mathbf{z}\ )}\ \forall{-}\mathrm{D}$$

ove la prima applicazione di $\forall{-}\mathrm{D}$ è corretta perchè $\mathbf{y}$ non appare libera nel sequente radice, ed anche la seconda applicazione di $\forall{-}\mathrm{D}$ è corretta perchè $\mathbf{x}$ non appare libera nel suo sequente conclusione.

Ora si trova un contromodello della foglia $\mathbf{y} = \mathbf{z} \vdash \mathbf{x} = \mathbf{z}$

Basta prendere

$$\mathbf{D}\ = \{\texttt{Topolino}, \texttt{Minni}\}$$

e in questo modello

$$(\ \mathbf{y} = \mathbf{z} \to \mathbf{x} = \mathbf{z}\ )^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni}, \texttt{Topolino}, \texttt{Topolino}) = \mathbf{0}$$

perchè $\mathbf{y} = \mathbf{z}^{\mathcal{D}}(\texttt{Topolino}, \texttt{Topolino}) = \mathbf{1}$ mentre $\mathbf{x} = \mathbf{z}^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni}, \texttt{Topolino}) = \mathbf{0}$ (si ricordi che $\mathbf{x}$ corrisponde al primo elemento della tripla, $\mathbf{y}$ al secondo e $\mathbf{z}$ al terzo). Dunque il sequente di partenza è NON valido.

Chiaramente $\forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{y} = \mathbf{z} \to \mathbf{x} = \mathbf{z}\ )$ è soddisfacibile. Basta prendere un modello con un unico elemento

$$\mathbf{D}\ = \{\texttt{Topolino}\}$$

perchè in tal caso per ogni $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}, \mathbf{d_3} \in \mathbf{D}$ che sono tutti uguali a `Topolino` si ha

$$(\ \mathbf{y} = \mathbf{z} \to \mathbf{x} = \mathbf{z}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}, \mathbf{d_3}) = (\ \mathbf{y} = \mathbf{z}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}, \mathbf{d_3})\ \to\ (\ \mathbf{x} = \mathbf{z}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_3}) = \mathbf{1} \to \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

e dunque il sequente di partenza è vero nel modello, e quindi è soddisfacibile.

Si lascia poi al lettore di svolgere i seguenti esercizi:

7. $\vdash \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{z}\ (\ \mathbf{x} = \mathbf{y}\ \&\ \mathbf{y} = \mathbf{z}\ \to\ \mathbf{x} = \mathbf{z}\ )$
8. $\vdash \exists \mathbf{x}\, \exists \mathbf{y}\, \mathbf{x} = \mathbf{y}$
9. $\vdash \forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \exists \mathbf{z}\ (\ \mathbf{x} = \mathbf{y}\ \vee\ \mathbf{y} = \mathbf{z}\ )$
10. $\forall \mathbf{w}\ \ \mathbf{w} = \mathbf{a} \vdash \forall \mathbf{x}\, \forall \mathbf{y}\ \mathbf{x} = \mathbf{y}$

11.6.4 Su formalizzazioni con "solo", "soltanto"

Si noti che la frase

"`Bracciodiferro mangia soltanto spinaci.`"

oppure

"`Bracciodiferro mangia solo spinaci.`"

letteralmente dovrebbe essere formalizzata in

$$\forall \mathbf{y} \ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \ \rightarrow \mathbf{y} = \overline{\mathbf{s}} \ )$$

ponendo

$\mathbf{b}$=Bracciodiferro
$\overline{\mathbf{s}}$=spinaci
$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$= $\mathbf{x}$ mangia $\mathbf{y}$

ma *in realtà con la frase "*`Bracciodiferro mangia solo spinaci.`*" intendiamo dire*

"`Bracciodiferro mangia spinaci e soltanto loro.`"

che si formalizza *letteralmente* in

$$\mathbf{M}(\mathbf{b}, \overline{\mathbf{s}}) \ \& \ \forall \mathbf{y} \ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \ \rightarrow \mathbf{y} = \overline{\mathbf{s}} \ )$$

ove la formula dopo la & formalizza appunto il "soltanto...." e basta.

Analogamente quando diciamo

"`Se Bracciodiferro mangia qualcosa mangia spinaci.`"

intendiamo dire che

"`Se Bracciodiferro mangia qualcosa quel qualcosa sono spinaci.`"

che si formalizza in

$$\forall \mathbf{y} \ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \ \rightarrow \ \mathbf{y} = \overline{\mathbf{s}} \ )$$

INVECE una formalizzazione *letterale* di

"`Se Bracciodiferro mangia qualcosa mangia spinaci.`"

è

$$\exists \mathbf{y} \ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \ \rightarrow \ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \overline{\mathbf{s}})$$

oppure anche (perchè equivalente)

$$\forall \mathbf{y} \ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \ \rightarrow \ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \overline{\mathbf{s}}) \ )$$

Il calcolo dei sequenti ci aiuta a distinguere quali delle formalizzazioni sopra sono equivalenti o meno e a *far chiarezza sul significato delle espressioni* **ambigue** *nel linguaggio naturale.*

Infatti si può dimostrare che

1.

$$\forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ ) \vdash \exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})$$

è valido, cioè è **tautologia**, per esempio con la seguente derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}), \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ ) \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}), \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ ), \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}} \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\end{array}}{\mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}), \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ ), \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}} \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})}\ {=}{-}\text{S}}{\mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}), \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ ),\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}} \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b},)\overline{\mathbf{s}}}\ {\rightarrow}{-}\text{S}}{\mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}), \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ ) \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})}\ \forall{-}\text{S}}{\forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ ),\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})}\ \text{sc}_{\text{sx}}}{\forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ ),\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})}\ \exists{-}\text{S}}{\forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ ) \vdash \exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})}\ {\rightarrow}{-}\text{D}$$

ove la prima applicazione di $\exists-$S è lecita perchè la variabile $\mathbf{y}$ non è libera nel sequente radice.

2.

$$\forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})\ ) \vdash \exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})$$

è tautologia in $\mathbf{LC}_=$ (lo si dimostri per esercizio).

3.

$$\exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})\ )$$

è tautologia in $\mathbf{LC}_=$ (lo si dimostri per esercizio).

4.

$$\exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ )$$

NON è tautologia bensì un'**opinione**.

Per dimostrarlo proviamo seguiamo la procedura in sezione 11.6.1 a derivare il sequente in $\mathbf{LC}_=$ come segue

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{w}) \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{w}),\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}), \mathbf{w}=\overline{\mathbf{s}}\end{array}}{\mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{w}) \vdash \exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}), \mathbf{w}=\overline{\mathbf{s}}}\ \exists{-}\text{D} \qquad \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{w}),\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})\ \vdash \mathbf{w}=\overline{\mathbf{s}}}{\mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{w}),\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})\ \vdash \mathbf{w}=\overline{\mathbf{s}}}\ {\rightarrow}{-}\text{S}}{\exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}}),\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{w})\ \vdash\ \mathbf{w}=\overline{\mathbf{s}}}\ \text{sc}_{\text{sx}}}{\exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{w})\ \rightarrow\ \mathbf{w}=\overline{\mathbf{s}}}\ {\rightarrow}{-}\text{D}}{\exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})\ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ )}\ \forall{-}\text{D}$$

ove la prima applicazione di $\forall-$D è lecita perchè la variabile $\mathbf{w}$ non è libera nel sequente radice in quanto NON CI COMPARE!!!.

Ora si nota che la foglia

$$\mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{w}),\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})\ \vdash \mathbf{w}=\overline{\mathbf{s}}$$

NON è un assioma e ad essa non si può applicare altra regola eccetto che le regole di scambio a sx e a dx con cui non arriviamo di certo ad un assioma. Dunque conviene cercare un contromodello di tale foglia mandando a $\mathbf{1}$ le premesse valutate su un elemento $\mathbf{d}$ da mettere al posto di $\mathbf{w}$ e mandando a $\mathbf{0}$ la conclusione valutata sempre sullo stesso elemento $\mathbf{d}$ da mettere al posto di $\mathbf{w}$ che risulterà quindi *il falsario* della foglia nel contromodello. In questo caso possiamo semplicemente pensare che TUTTE le coppie di elementi $(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2})$ rendano vero $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (nel significato originale del predicato nel contromodello *tutti si mangiano a vicenda compresi loro stessi!*). Poi per rendere falso $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}}$ sull'ipotetico falsario dobbiamo per forza mettere nel dominio $\mathbf{D}$ del contromodello ALMENO DUE elementi: uno per interpretare $\bar{\mathbf{s}}$ e l'altro per metterlo al posto di $\mathbf{w}$ come falsario. Si noti che in questo contromodello l'interpretazione di $\mathbf{b}$ può essere data a piacere perchè non è rilevante per falsificare la foglia.

Ovvero poniamo

$$\mathbf{D} \equiv \{ \ \mathtt{Pippo}, \mathtt{Minni} \ \} \qquad\qquad \bar{s}^{\mathbf{D}} = \mathtt{Minni}$$

e poi

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1} \qquad \text{sempre}$$

ovvero

$$\begin{array}{l} \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}, \mathtt{Pippo}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}, \mathtt{Minni}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Minni}, \mathtt{Minni}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Minni}, \mathtt{Pippo}) = \mathbf{1} \end{array}$$

Infine poniamo $\bar{b}^{\mathbf{D}} = \mathtt{Minni}$ (ma la costante $\mathbf{b}$ potrebbe essere interpretata anche come $\mathtt{Pippo}$ in quanto la foglia rimane falsa anche nel modello con $\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{D}} = \mathtt{Pippo}$).

Dunque in tal modello $\mathcal{D}$ l'interpretazione di $\mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}), \ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \ \vdash \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}}$ è una funzione

$$(\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \ \rightarrow \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}} \ )^{\mathbf{D}} : \ \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

che NON è costantemente $\mathbf{1}$ in quanto c'è un falsario che è $\mathtt{Pippo}$ ovvero

$$\begin{array}{rl} (\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \ \rightarrow \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}} \ )^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}) & = (\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \ \& \ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \ )^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}) \ \rightarrow \ (\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}} \ )^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}) \\ & = \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}) \ \& \ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} \ \rightarrow \ (\mathbf{w} = \mathbf{z} \ )^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}, \bar{\mathbf{s}}^{\mathbf{D}}) \\ & = \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}, \mathbf{b}^{\mathbf{D}}) \ \& \ \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{b}^{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} \ \rightarrow \ (\mathbf{w} = \mathbf{z} \ )^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}, \mathtt{Minni}) \\ & = \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}, \mathtt{Minni}) \ \& \ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} \ \rightarrow \ \mathbf{0} \\ & = \mathbf{1} \& \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} \\ & = \mathbf{0} \end{array}$$

Si noti che potevamo scrivere direttamente

$$\begin{array}{rl} (\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \& \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \ \rightarrow \mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}} \ )^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}) & = (\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w}) \ \& \ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \ )^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}) \ \rightarrow \ (\mathbf{w} = \bar{\mathbf{s}} \ )^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}) \\ & = \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}) \ \& \ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} \ \rightarrow \ (\mathbf{w} = \mathbf{z} \ )^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}, \bar{\mathbf{s}}^{\mathbf{D}}) \\ & = \mathbf{1} \& \mathbf{1} \ \rightarrow \ (\mathbf{w} = \mathbf{z} \ )^{\mathbf{D}}(\mathtt{Pippo}, \mathtt{Minni}) \\ & = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} \\ & = \mathbf{0} \end{array}$$

sapendo che l'interpretazione di $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è sempre $\mathbf{1}$ su ogni coppia del dominio.

Secondo la procedura in sezione 11.6.1 concludiamo che il sequente radice

$$\exists \mathbf{y} \ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \ \rightarrow \ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y} \ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \ \rightarrow \ \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}} \ )$$

NON è tautologia, ovvero **NON è valido** perchè non lo è una foglia dell'albero ottenuto applicando regole di $\mathbf{LC}_=$.

Dunque la traduzione letterale di

"`Se Bracciodiferro mangia qualcosa mangia spinaci.`"

NON implica la traduzione letterale della frase ad essa equivalente

"`Se Bracciodiferro mangia qualcosa quel qualcosa sono spinaci.`"

(si ricordi che $\vdash$ si interpreta come implicazione!).

Possiamo proseguire nel vedere se il sequente

$$\exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ )$$

è opinione o per caso è un paradosso.....

A tal scopo possiamo seguire la procedura in sezione 11.6.1 provando a derivare la negazione

$$\vdash \neg(\ (\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})\ ) \ \rightarrow\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ )\ )$$

ovvero

$$\cfrac{\cfrac{\vdash \exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}}) \qquad\qquad \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ ) \vdash}{(\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})\ ) \ \rightarrow\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ ) \vdash}\ \rightarrow\!-\mathrm{S}}{\vdash \neg(\ (\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})\ ) \ \rightarrow\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ )\ )}\ \neg\!-\mathrm{D}$$

e qui possiamo vedere che la foglia di destra

$$\forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ ) \vdash$$

non porta ad un assioma applicando la regola di $\forall-$S più volte ... (il lettore ci provi da sè). Conviene quindi trovare un contromodello per tale sequente mandando a **1** il predicato

$$\forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ )$$

Un semplice contromodello può essere ottenuto mandando a **1** il predicato $\mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}$ su ogni elemento del dominio e a tal scopo basta considerare il dominio UN SOLO ELEMENTO.

Quindi poniamo

$$\mathbf{D} \equiv \{\ \texttt{Pippo}\} \qquad\qquad \overline{s}^{\mathbf{D}} = \texttt{Pippo}$$

e $\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ sia una funzione definita A PIACERE. Infatti in tal modello abbiamo che

$$(\forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ )\ )^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$$

poichè sull'unico elemento `Pippo` risulta che

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ )^{\mathbf{D}}(\texttt{Pippo}) &= \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\texttt{Pippo}) \ \rightarrow\ (\mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ )^{\mathbf{D}}(\texttt{Pippo})\\ &= \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\texttt{Pippo}) \ \rightarrow\ (\mathbf{y}=\mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\overline{\mathbf{s}}^{\mathbf{D}},\texttt{Pippo})\\ &= \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\texttt{Pippo}) \ \rightarrow\ (\mathbf{y}=\mathbf{w})^{\mathbf{D}}(\texttt{Pippo},\texttt{Pippo})\\ &= \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\texttt{Pippo}) \ \rightarrow\ \mathbf{1}\\ &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

Ora un tal contromodello esteso a piacere con l'interpretazione della costante **b** dà un contromodello per il sequente

$$\vdash \neg(\ (\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}})\ ) \ \rightarrow\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ )\ )$$

e dunque un modello in cui è vero il sequente

$$\exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\overline{\mathbf{s}}) \vdash \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b},\mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{y}=\overline{\mathbf{s}}\ )$$

che risulta perciò **soddisfacibile** e quindi un'**opinione**.

Per esercizio si provi a continuare a derivare la foglia

$$\vdash \exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})$$

e si trovi un suo contromodello che sarà un contromodello per il sequente

$$\vdash \neg(\ (\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{s}})\ ) \ \rightarrow\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{M}(\mathbf{b}, \mathbf{y}) \ \rightarrow\ \mathbf{y} = \bar{\mathbf{s}}\ )\ )$$

di tipo completamente diverso da quello trovato sopra!

11.7 Validità regole per sequenti in logica predicativa classica

Qui diamo il concetto di validità di una regola nel linguaggio dei predicati per la semantica classica. A tal scopo interpretiamo i sequenti, interpretando come al solito il segno di sequente $\vdash$ come implicazione preceduta questa volta però dalla quantificazione universale di tutte le variabili libere presenti.

Dapprima introduciamo il concetto di **regola vera in un modello**. Intuitivamente una regola è vera in un modello $\mathcal{D}$ se trasforma **sequenti premessa veri nel modello** $\mathcal{D}$ in un **sequente conclusione vero sempre in** $\mathcal{D}$, ovvero **una regola è vera in un modello** se **la VERITÀ SCENDE** $\Downarrow$ **lungo la regola nel modello se TUTTE le premesse sono vere nel modello**.

Def. Verità in un modello di una regola ad una premessa

Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo
$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$ si dice **vera** in un **modello** $\mathcal{D}$

se il sequente **premessa** $\Gamma_1 \ \vdash\ \Delta_1$ **è vero in un modello** $\mathcal{D}$

$\Downarrow$

il sequente **conclusione** $\Gamma_2 \ \vdash\ \Delta_2$ **è vero nello stesso modello** $\mathcal{D}$

Def. Verità in un modello di regola a due premesse

Una regola a due premesse del tipo

$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad\qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$ si dice **è vera in un modello** $\mathcal{D}$

se i sequenti **premessa**
$\boldsymbol{\Gamma_1} \ \vdash\ \boldsymbol{\Delta_1}$ e $\boldsymbol{\Gamma_2} \ \vdash\ \boldsymbol{\Delta_2}$ sono **ENTRAMBI veri in un modello** $\mathcal{D}$

$\Downarrow$

il sequente **conclusione** $\boldsymbol{\Gamma_3} \ \vdash\ \boldsymbol{\Delta_3}$ è **vero stesso modello** $\mathcal{D}$.

Al fine di capire meglio quando una regola è vera in un modello vogliamo studiare alcune caratterizzazioni alternative della nozione di verità di una regola in un modello.

A tal scopo osserviamo che vale la seguente caratterizzazione di verità in un modello per una formula con variabili libere:

in un modello $\mathcal{D}$ **vale** $\quad \mathtt{fr}(\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_n})$ sse $\mathcal{D}$ **rende vera** $\forall\, \mathbf{y_1}\, \forall\, \mathbf{y_2}\, \ldots \forall\, \mathbf{y_n}\; \mathtt{fr}(\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_n})$

Ora osserviamo che la **validità di una regola** equivale alla **validità di una formula** ottenuta interpretando come implicazione il segno di inferenza di un sequente premessa o due sequenti premessa ad un sequente conclusione dopo aver interpretato i sequenti stessi come implicazioni quantificate universalmente.

Prima di far ciò introduciamo le seguenti abbreviazioni per indicare una lista finita di variabili:

$$\overline{\mathbf{y}} \;\equiv\; \mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_n}$$

$$\forall\, \overline{\mathbf{y}}\; \mathtt{fr}(\overline{\mathbf{y}}) \;\equiv\; \forall\, \mathbf{y_1}\, \forall\, \mathbf{y_2}\, \ldots \forall\, \mathbf{y_n}\;\; \mathtt{fr}(\, \mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_n})$$

Inoltre utilizziamo la scrittura

$$\Gamma(\overline{\mathbf{y}})$$

per indicare che *le variabili libere occorrenti in* $\Gamma(\overline{\mathbf{y}})$ *sono incluse nella lista* $\overline{\mathbf{y}} \;\equiv\; y_1, y_2, \ldots, y_n$ (e quindi nella lista potrebbero esserci variabili che non compaiono nella lista di formule $\Gamma(\overline{\mathbf{y}})$).

Ora utilizziamo le abbreviazioni sopra nelle seguenti caratterizzazioni:

Una regola ad una premessa $\dfrac{\Gamma_1(\overline{\mathbf{y}}) \vdash \Delta_1(\overline{\mathbf{y}})}{\Gamma_2(\overline{\mathbf{y}}) \vdash \Delta_2(\overline{\mathbf{y}})}$ si dice **vera** in un **modello** $\mathcal{D}$ se e solo se $\forall \overline{\mathbf{y}}\; (\; \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{1}}^{\&}(\overline{\mathbf{y}}) \;\;\rightarrow\;\; \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{1}}^{\vee}(\overline{\mathbf{y}})\;) \qquad \rightarrow \qquad \forall \overline{\mathbf{y}}\; (\; \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{2}}^{\&}(\overline{\mathbf{y}}) \;\;\rightarrow\;\; \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{2}}^{\vee}(\overline{\mathbf{y}})\;)$ è **vera** nel modello $\mathcal{D}$.

Una regola a due premesse $\dfrac{\Gamma_1(\overline{\mathbf{y}}) \vdash \Delta_1(\overline{\mathbf{y}}) \qquad\qquad \Gamma_2(\overline{\mathbf{y}}) \vdash \Delta_2(\overline{\mathbf{y}})}{\Gamma_3(\overline{\mathbf{y}}) \vdash \Delta_3(\overline{\mathbf{y}})}$ si dice **vera in un dato modello** $\mathcal{D}$ se e solo se $\forall \overline{\mathbf{y}}\; (\; \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{1}}^{\&}(\overline{\mathbf{y}}) \;\;\rightarrow\;\; \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{1}}^{\vee}(\overline{\mathbf{y}})\;)\;\&\;\; \forall \overline{\mathbf{y}}\; (\; \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{2}}^{\&}(\overline{\mathbf{y}}) \;\;\rightarrow\;\; \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{2}}^{\vee}\;(\overline{\mathbf{y}})\;) \quad \rightarrow \;\; \forall \overline{\mathbf{y}}\; (\; \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{3}}^{\&}(\overline{\mathbf{y}}) \;\;\rightarrow\;\; \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{3}}^{\vee}(\overline{\mathbf{y}})\;)$ è **vera nel modello** $\mathcal{D}$.

Diamo ora una ulteriore caratterizzazione della validità delle regole che utilizza il lemma scorciatoia 9.9 applicato alle formule implicative caratterizzanti la validità di una regola presentate sopra:

Def. Verità in un modello di una regola ad una premessa

Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$ si dice **vera** in un **modello** $\mathcal{D}$

se **per ogni** $(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$

$(\ \mathbf{\Gamma_1^{\&}}(\overline{\mathbf{y}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Delta_1^{\vee}}(\overline{\mathbf{y}})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1}$ **nel modello** $\mathcal{D}$

$\Downarrow$

nel modello $\mathcal{D}$
per ogni $(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$ se $\mathbf{\Gamma_2^{\&}}(\overline{\mathbf{y}})(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Delta_2^{\vee}}(\overline{\mathbf{y}})(\mathbf{d_1}, \ldots, \mathbf{d_n}) = \mathbf{1}$.

Def. Verità in un modello di regola a due premesse

Una regola a due premesse del tipo

$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$ si dice è **vera** in un **modello** $\mathcal{D}$

se **nel modello** $\mathcal{D}$

per ogni $(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$

$(\ \mathbf{\Gamma_1^{\&}}(\overline{\mathbf{y}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Delta_1^{\vee}}(\overline{\mathbf{y}})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1}$

e

per ogni $(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$

$(\ \mathbf{\Gamma_2^{\&}}(\overline{\mathbf{y}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Delta_2^{\vee}}(\overline{\mathbf{y}})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1}$

$\Downarrow$

nel modello $\mathcal{D}$
per ogni $(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$ se $(\mathbf{\Gamma_3^{\&}}(\overline{\mathbf{y}}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Delta_3^{\vee}}(\overline{\mathbf{y}})(\mathbf{d_1}, \ldots, \mathbf{d_n}) = \mathbf{1}$

Siamo quindi pronti ad enunciare la definizione di regola valida e sicura per sequenti predicativi:

Def. 11.15 *Una regola (ad una o due premessa) per sequenti nel linguaggio predicativo classico si dice* **valida** *rispetto alla semantica classica dei predicati se è* **vera** *in* **ogni modello** $\mathcal{D}$.

Def. 11.16 *Una regola per sequenti nel linguaggio predicativo classico si dice* **SICURA** *se lei e le sue inverse sono entrambe* **valide** *rispetto alla semantica classica.*

Con le osservazioni sopra risulta ora chiaro che per vedere se una regola è NON valida basta trovare un modello $\mathcal{D}$ e un'istanza della regola in cui la premessa o le premesse sono vere nel modello mentre NON lo è la conclusione. Dopo aver mostrato la validità delle regole del calcolo per la logica classica predicativa faremo esempi di regole NON valide.

Una **regola** con sequenti predicativi è **NON valida** se **esiste UN modello** in cui le **premesse** della regola sono **VERE** mentre è **FALSA la conclusione** della regola

11.7.1 Validità delle regole di $\mathbf{LC}_=$ e loro inverse.

Di seguito mostriamo che le regole di $\mathbf{LC}_=$ sono valide assieme alle loro inverse, ovvero sono TUTTE SICURE.

Validità regola $\forall-$D **(caso semplice).**

La regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathbf{A(w)},\nabla}{\mathbf{\Gamma}\vdash\forall\mathbf{x}\mathbf{A(x)},\nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (\mathbf{w}\notin\mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma},\forall\mathbf{x}\mathbf{A(x)},\nabla))$$

è **valida**. Per semplicità supponiamo che sia $\mathbf{\Gamma}$ che ∇ siano liste di proposizioni senza variabili libere. Allora per mostrare la validità della regola possiamo mostrare che in un qualsiasi modello $\mathcal{D}$ vale

$$\forall\ \mathbf{w}\ (\ \mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\mathbf{A(w)}\vee\nabla^{\vee}\ )\quad\rightarrow\quad(\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\forall\mathbf{x}\mathbf{A(x)}\vee\nabla^{\vee})$$

Per provare l'implicazione più esterna usiamo il lemma scorciatoia 9.9. Ora supponiamo che $\forall\ \mathbf{w}\ (\ \mathbf{\Gamma}\rightarrow\mathbf{A(w)}\vee\nabla\ )$ sia vero in $\mathcal{D}$. Ne segue che per ogni $\mathbf{d}\in\mathbf{D}$ si ha che

$$(\ \mathbf{\Gamma}\rightarrow\mathbf{A(w)}\vee\nabla\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=\mathbf{1}$$

ovvero che (si ricorda che non compare $\mathbf{w}$ in $\mathbf{\Gamma}$)

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&}\ )^{\mathcal{D}}\rightarrow\mathbf{A(w)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})\vee\nabla^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}$$

Mostriamo ora che vale pure

$$(\mathbf{\Gamma}^{\&}\rightarrow\forall\mathbf{x}\mathbf{A(x)}\vee\nabla^{\vee}\ )^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}$$

usando di nuovo il lemma scorciatoia. A tal scopo supponiamo $(\ \mathbf{\Gamma}^{\&}\ )^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}$. Allora per ogni $\mathbf{d}\in\mathcal{D}$ si ha per ipotesi $\mathbf{A(w)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})\vee\nabla^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}$
ovvero che $\mathbf{A(w)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=\mathbf{1}$ oppure $\nabla^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}$.
Ora sia hanno 2 casi:
caso 1: $\nabla^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}$ da cui si conclude $(\forall\mathbf{x}\mathbf{A(x)}\vee\nabla\ )^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}$
caso 2: $\nabla^{\mathcal{D}}=\mathbf{0}$ e quindi *per ogni* $\mathbf{d}\in\mathcal{D}$ $\mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=\mathbf{A(w)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})=\mathbf{1}$ (perchè l'interpretazione di $\mathbf{A(x)}$ e quella $\mathbf{A(w)}$ sono le stesse in presenza di una sola variabile) da cui

$$(\ \forall\mathbf{x}\,\mathbf{A(x)}\ )^{\mathcal{D}}=\mathbf{1}$$

e quindi $(\ \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$.
Dunque il sequente conclusione è valido in $\mathcal{D}$.

Validità della regola $\forall-$D (caso generale).

La regola $\forall-$D è **VALIDA** anche se supponiamo $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{y})$ e $\nabla \equiv \mathbf{C}(\mathbf{y})$ e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ supponiamo $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})$. Questo è il caso più generale perchè in presenza nel sequente di due o più variabili libere si procede come se ce ne fosse una.

Fissato un modello $\mathcal{D}$ applichiamo il lemma scorciatoia 9.9 per mostrare che in esso vale

$$\forall\ \mathbf{w}\ \forall\ \mathbf{y}\ (\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \to \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla^{\vee}\ ) \quad \to \quad \forall\ \mathbf{y}\ (\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \to \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee}\ )$$

Dunque se $\forall\ \mathbf{w}\ \forall\ \mathbf{y}\ (\ \mathbf{B}(\mathbf{y}) \to \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})\ )$ è **valido in** $\mathcal{D}$ allora per ogni $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2} \in \mathbf{D}$ si ha che

$$(\ \mathbf{B}(\mathbf{y}) \to \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

ovvero che (si ricorda che non compare $\mathbf{w}$ in $\mathbf{B}(\mathbf{y})$)

$$\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) \to \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

Ora mostriamo che per ogni $\mathbf{d_2} \in \mathbf{D}$ vale

$$(\ \mathbf{B}(\mathbf{y}) \to \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = 1$$

tramite il lemma scorciatoia. Dunque a tal scopo supponiamo che $\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$. Allora per ogni $\mathbf{d_1} \in \mathbf{D}$ si ha per ipotesi $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$
ovvero che $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ oppure $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$.
Ora sia hanno 2 casi:
caso 1: $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ da cui si conclude $(\ \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$
caso 2: $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = 0$ e quindi per ogni $\mathbf{d_1} \in \mathcal{D}$ $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ (perchè l'interpretazione di $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ e quella $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sono le stesse in presenza di due sole variabili) da cui

$$(\ \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

e quindi $(\ \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$. Dunque abbiamo mostrato che *per ogni* $\mathbf{d_2}$ vale

$$(\ \mathbf{B}(\mathbf{y}) \to \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = 1$$

e dunque vale in $\mathcal{D}$

$$(\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{B}(\mathbf{y}) \to \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}\ )\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

La regola $\forall-$D è pure sicura perchè la sua inversa pure conserva la soddisfacibilità in un modello. Lo si provi per esercizio.

Validità della regola $\forall-$S e $\forall-$Sv.

Consideriamo questa versione veloce della regola del "per ogni" a sx

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}\mathbf{v}$$

Dimostriamo che è **valida** da cui segue facilmente che anche la regola $\forall-$S lo è. Lo dimostriamo supponendo Γ, ∇ e $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ senza variabili libere per semplicità (il caso generale segue analogamente). A tal scopo mostriamo che in un modello $\mathcal{D}$ qualsiasi fissato vale

$$(\mathbf{\Gamma}^{\&}\ \&\ \mathbf{A}(\mathbf{t}) \to \nabla^{\vee}) \quad \to \quad (\mathbf{\Gamma}^{\&}\ \&\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \to \nabla^{\vee})$$

usando il lemma scorciatoia 9.9. Quindi supponiamo che nel modello $\mathcal{D}$ la premessa sia vera, ovvero che valga

$$(\mathbf{\Gamma}^{\&} \ \& \ \mathbf{A}(\mathbf{t}) \to \nabla^{\vee}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Ora per mostrare che pure il sequente conclusione è vero usiamo di nuovo il lemma scorciatoia e supponiamo che $(\Gamma^{\&} \ \& \ \forall x \ A(x))^{\mathcal{D}} = 1$. Dunque $(\Gamma^{\&})^{\mathcal{D}} = 1$ e pure $(\forall x \ A(x))^{\mathcal{D}} = 1$. Da ciò segue che in particolare per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ e quindi anche che

$$A(t)^{\mathcal{D}} = A(x)^{\mathcal{D}}(t^{\mathcal{D}}) = 1$$

Dunque otteniamo che $(\mathbf{\Gamma}^{\&} \ \& \ A(t))^{\mathcal{D}} = 1$ e per la validità nel modello del sequente premessa concludiamo che $(\nabla^{\vee}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Dunque per il lemma scorciatoia abbiamo provato che

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \ \& \ \forall x \ A(x) \to \nabla^{\vee} \ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

e quindi la regola è valida.

Chiaramente anche la regola

$$\frac{\Gamma, \forall x \ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x \ A(x) \vdash \nabla} \ \forall\text{−S}$$

è valida (lo si dimostri per esercizio) ma ora in questa versione è anche sicura (lo si dimostri per esercizio).

NON validità della inversa della regola $\forall$−Sv.

La regola del "per ogni" veloce

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x \ A(x) \vdash \nabla} \ \forall\text{−S}\mathbf{v}$$

NON è SICURA perchè NON è valida anche all'insù $\Uparrow$, ovvero la sua inversa

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \forall \mathbf{x} \ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vdash \nabla} \ \mathbf{inv} - \forall\text{−S}\mathbf{v}$$

NON è valida.

Infatti se si considera il modello
$\mathcal{D} \equiv \mathbf{Nat}$ e $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{n}) \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{n} \leq \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{n} > \mathbf{7} \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1} \text{ sse } \mathbf{d} \leq \mathbf{7}$$

Dato $\mathbf{A}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$ e che $(\ \forall \mathbf{x} \ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \ )^{\mathbf{Nat}} = \mathbf{0}$ risulta che

$$\frac{A(t) \vdash \perp \qquad \textbf{falso nel modello}}{\forall x \ A(x) \vdash \perp \qquad \textbf{vero nel modello}} \ \forall\text{−S}\mathbf{v}$$

ovvero otteniamo che l'inversa della regola $\forall$−Sv NON è valida in quanto

$$\frac{\forall \mathbf{n} \in \mathbf{Nat} \ \mathbf{n} \leq \mathbf{7} \quad \vdash \perp \qquad \textbf{vero nel modello}}{\mathbf{0} \leq \mathbf{7} \quad \vdash \perp \qquad \textbf{falso nel modello}} \ \forall\text{−S}\mathbf{v} - \mathbf{inv}$$

Validità della regola $\exists$−S (caso semplice).

La regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma}, \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla}\ \exists\text{–S}\ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma}, \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla))$$

è **valida**. Trattiamo dapprima il caso semplice in cui $\mathbf{\Gamma}$ e ∇ siano proposizioni senza variabili libere. Per mostrare la validità della regola mostriamo che in ogni modello $\mathcal{D}$ vale

$$\forall\ \mathbf{w}\ (\ \mathbf{\Gamma}^{\&}\ \&\ \mathbf{A}(\mathbf{w}) \to \nabla^{\vee}\ ) \quad \to \quad (\ \mathbf{\Gamma}^{\&}\ \&\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \to \nabla^{\vee}\ )$$

applicando il lemma scorciatoia 9.9. Dunque supponiamo che nel modello valga

$$(\ \forall \mathbf{w}\ (\ \mathbf{\Gamma}^{\&}\ \&\ \mathbf{A}(\mathbf{w}) \to \nabla^{\vee}\ )\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

ovvero che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&}\ \&\ \mathbf{A}(\mathbf{w}) \to \nabla^{\vee}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

ovvero che per ogni $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ si ha ${\mathbf{\Gamma}^{\&}}^{\mathcal{D}}\ \&\ \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \to {\nabla^{\vee}}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Ora mostriamo pure che vale

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&}\ \&\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \to \nabla^{\vee}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

usando di nuovo il lemma scorciatoia. A tal scopo assumiamo anche che $(\ \mathbf{\Gamma}^{\&}\ \&\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, ne segue che $\mathbf{\Gamma}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e che esiste $\overline{\mathbf{d}} \in \mathbf{D}$ tale che $\mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\overline{\mathbf{d}}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\overline{\mathbf{d}}) = \mathbf{1}$ (si ricorda che l'interpretazione di un predicato con una sola variabile libera è indipendente dal nome della variabile) e dunque ${\mathbf{\Gamma}^{\&}}^{\mathcal{D}}\ \&\ \mathbf{A}(\mathbf{w})^{\mathcal{D}}(\overline{\mathbf{d}}) = \mathbf{1}$. Ora per la validità nel modello del sequente premessa su $\overline{\mathbf{d}}$ ovvero

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&}\ \&\ \mathbf{A}(\mathbf{w}) \to \nabla^{\vee}\ )^{\mathcal{D}}(\overline{\mathbf{d}}) = \mathbf{1}$$

e dalla validità nel modello delle premesse di questa implicazione si conclude ${\nabla^{\vee}}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e quindi per il lemma scorciatoia il sequente conclusione è **vero** nel modello $\mathcal{D}$ ossia

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&}\ \&\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \to \nabla^{\vee}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Concludiamo quindi di nuovo per il lemma scorciatoia che la regola è valida.

Validità della regola $\exists$–S (caso più generale).

La regola

$$\frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma}, \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla}\ \exists\text{–S}\ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma}, \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{\Delta}))$$

è **valida**.

Per provarlo ci possiamo limitare al caso in cui $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{y})$ e $\nabla \equiv \mathbf{C}(\mathbf{y})$ e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ poniamo $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})$. Mostriamo che fissato un modello $\mathcal{D}$ allora vale

$$\forall\ \mathbf{w}\ \forall\ \mathbf{y}\ (\ \mathbf{\Gamma}^{\&}\ \&\ \mathbf{A}(\mathbf{w}) \to \nabla^{\vee}\ ) \quad \to \quad \forall\ \mathbf{y}\ (\ \mathbf{\Gamma}^{\&}\ \&\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \to \nabla^{\vee}\ )$$

tramite il lemma scorciatoia 9.9. A tal scopo supponiamo pure che $\forall\ \mathbf{y}\ (\ \mathbf{B}(\mathbf{y})\ \&\ \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \to \mathbf{C}(\mathbf{y})\ )$ sia **vero** nel modello, il che significa che per ogni $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2} \in \mathbf{D}$ si ha $(\ \mathbf{B}(\mathbf{y})\ \&\ \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \to \mathbf{C}(\mathbf{y})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$
ovvero che per ogni $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2} \in \mathcal{D}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2})\ \&\ \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) \to \mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

Ora fissato un arbitrario $\mathbf{d_2} \in \mathcal{D}$, mostriamo che

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&}\ \&\ \exists x\ A(x) \to \nabla^{\vee}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

con il lemma scorciatoia. A tal scopo assumiamo anche che $(\mathbf{B(y)} \ \& \ \exists \mathbf{x} \ \mathbf{A'(x,y)} \ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$, ne segue che $\mathbf{B(y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ e che esiste $\mathbf{d_1} \in \mathcal{D}$ tale che $\mathbf{A'(w,y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2}) = \mathbf{A'(x,y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ (perchè l'interpretazione di $\mathbf{A'(w,y)}$ e quella $\mathbf{A'(x,y)}$ sono le stesse in presenza di due sole variabili) e dunque $\mathbf{B(y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) \ \& \ \mathbf{A'(x,y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ da cui si conclude per la validità del sequente premessa che $\mathbf{C(y)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$. Dunque abbiamo mostrato che *per ogni* $\mathbf{d_2} \in \mathcal{D}$

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \ \& \ \exists \mathbf{x} \ \mathbf{A(x)} \rightarrow \nabla^{\vee} \ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

e dunque pure che vale

$$(\ \forall \ \mathbf{y} \ (\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \ \& \ \exists \mathbf{x} \ \mathbf{A(x)} \rightarrow \nabla^{\vee} \ ) \ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Quindi per il lemma scorciatoia la regola è valida.

Validità regola dell'esiste *a dx veloce* **(caso semplice).**

Consideriamo la seguente versione "veloce" della regola dell'esiste a destra

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A(t)}, \nabla}{\mathbf{\Gamma} \vdash \exists \mathbf{x} \ \mathbf{A(x)}, \nabla} \ \exists\text{-D}\mathbf{v}$$

e mostriamo che è **valida**. Trattiamo il caso semplice in cui Γ, ∇ e $A(t)$ non hanno variabili libere. In particolare supponiamo $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ ovvero sia una costante. Applichiamo il lemma scorciatoia 9.9 per dimostrare che in un modello qualsiasi $\mathcal{D}$ vale

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{A(t)} \vee \nabla^{\vee} \ ) \quad \rightarrow \quad (\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \ \mathbf{A(x)} \vee \nabla^{\vee} \ )$$

Ora fissato un modello $\mathcal{D}$, supponiamo pure che $(\ \mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{A(t)} \vee \nabla^{\vee} \ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e dobbiamo mostrare che vale pure

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \ \mathbf{A(x)} \vee \nabla^{\vee} \ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Applichiamo a tal scopo il lemma scorciatoia 9.9 e assumiamo anche che $\mathbf{\Gamma}^{\&\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. aAlora per validità sequente premessa otteniamo che $(\ \mathbf{A(t)} \vee \nabla^{\vee} \ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, ovvero che $\mathbf{A(t)}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ o che $\nabla^{\vee\mathcal{D}} = \mathbf{1}$.

Ora analizziamo i seguenti due casi:
caso 1. $\nabla^{\vee\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ da cui concludiamo $(\ \exists \mathbf{x} \ \mathbf{A(x)} \vee \nabla^{\vee} \ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$.
caso 2. $\nabla^{\vee\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ da cui per ipotesi otteniamo $\mathbf{A(t)}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, da cui $\mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{A(t)}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ quindi $(\ \exists \mathbf{x} \ \mathbf{A(x)} \ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, da cui concludiamo $(\ \exists \mathbf{x} \ \mathbf{A(x)} \vee \nabla^{\vee} \ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Dunque per il lemma scorciatoia nel modello $\mathcal{D}$ vale

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \ \mathbf{A(x)} \vee \nabla^{\vee} \ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Quindi la regola è **valida**.

Validità della regola dell'esiste *a dx veloce* **ed di** $\exists$−D **(caso generale).**

Se mostriamo che la regola $\exists$−Dv è valida nel caso generale allora ne segue banalmente che è pure valida la regola $\exists$−D (lo si dimostri).

La regola $\exists$−Dv

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x \ A(x), \nabla} \ \exists\text{-D}\mathbf{v}$$

è **VALIDA** anche se si assume che $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbf{B(y)}$ e $\nabla \equiv \mathbf{C(y)}$ e al posto di $\mathbf{A(x)}$ poniamo $\mathbf{A'(x,y)}$ e assumiamo pure che $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ sia una costante. Il caso in cui nei sequenti compaiano piú variabili ancora si tratta analogamente.

Per mostrare la validità della regola, verifichiamo che in un modello qualsiasi $\mathcal{D}$ fissato vale

$$\forall\, y\ (\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \nabla^{\vee}\ ) \quad \rightarrow \quad \forall\, y\ (\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee}\ )$$

applicando il lemma scorciatoia 9.9. Supponiamo dunque che se $\forall\, y(\ \mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{t},\mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})\ )$ sia **vera nel modello**, e quindi per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha $(\ \mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{t},\mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, ovvero che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{t},\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee \mathbf{C}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

Ora mostriamo che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ vale

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

usando il lemma scorciatoia. A tal scopo assumiamo dunque che $\mathbf{\Gamma}^{\&} = \mathbf{B}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$. Allora per l'ipotesi di validità nel modello del sequente premessa otteniamo che $\mathbf{A}'(\mathbf{t},\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$.
Ora analizziamo due casi:
caso 1. $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ da cui concludiamo $(\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}'(\mathbf{x},\mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$.
caso 2. $\mathbf{C}(\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ da cui per ipotesi otteniamo che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ abbiamo che $\mathbf{A}'(\mathbf{t},\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, da cui $\mathbf{A}'(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}},\mathbf{d}) = \mathbf{A}'(\mathbf{t},\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$. Quindi $(\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}'(\mathbf{x},\mathbf{y})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ da cui concludiamo $(\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}'(\mathbf{x},\mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$. Abbiamo quindi mostrato che nel modello $\mathcal{D}$ per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ vale

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee}\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

e dunque anche che vale

$$\forall\, \mathbf{y}\ (\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee}\ )$$

La regola è quindi valida.

NON validità dell'inversa della regola $\exists-$D$\mathbf{v}$,

La **regola** $\exists-$D**v** è NON SICURA perchè NON conserva la **validità in un modello** all'insù $\Uparrow$.

Un *controesempio* è dato dal seguente esempio.

L'asserzione

$$\frac{\text{È arrivato in stazione il treno per Venezia} \vdash \text{Marco sale sul treno per Venezia.}}{\text{È arrivato in stazione il treno per Venezia} \vdash \text{Qualcuno sale sul treno per Venezia.}}$$

si può formalizzare in

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m},\mathbf{v})}{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x}\ \mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{v})}$$

usando
$A(x)$="x è arrivato in stazione"
$S(x,y)$="x sale su y.
m="Marco"
v="treno per Venezia"

Ora

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m},\mathbf{v})}{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x}\ \mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{v})}$$

è un'applicazione della regola $\exists-$D**v** che sappiamo essere valida. Però la sua inversa non è vera nel modello seguente:

$\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{Marco}, \mathbf{trenoVE}, \mathbf{Piero}\}$
$\mathbf{v}^{\mathcal{D}} \equiv \mathbf{trenoVE}$

$\mathbf{m}^{\mathcal{D}} \equiv$ **Marco**
$\mathbf{p}^{\mathcal{D}} \equiv$ **Piero**
$\mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}\mathbf{(d)} = \mathbf{1}$ sse $\mathbf{d} = \mathbf{trenoVE}$
$\mathbf{S(d_1, d_2)} = \mathbf{1}$ sse $\mathbf{d_1} = \mathbf{Piero}$ e $\mathbf{d_2} = \mathbf{trenoVE}$.

E in tal modello $(\exists \mathbf{x}\ \mathbf{S(x,v)}\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e così pure $\mathbf{A(v)}^{\mathcal{D}} = \mathbf{A(x)}^{\mathcal{D}}\mathbf{(trenoVE)} = \mathbf{1}$ ma $\mathbf{S(m,v)}^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ (ovvero nel modello, il treno per Venezia è arrivato in stazione, **Piero** sale sul treno per Venezia, e quindi qualcuno ci sale, mentre invece **Marco** non ci sale). In pratica abbiamo trovato un modello in cui vale $\mathbf{A(v)} \vdash \exists \mathbf{x}\ \mathbf{S(x,v)}$ ma NON vale $\mathbf{A(v)} \vdash \mathbf{S(m,v)}$, ovvero

$$\frac{\mathbf{A(v)} \vdash \exists \mathbf{x}\ \mathbf{S(x,v)}}{\mathbf{A(v)} \vdash \mathbf{S(m,v)}}$$

NON è valida, ed essendo un'istanza della regola inversa dell'esiste veloce $\exists-\mathrm{D}\mathbf{v}$, rende tale inversa $\exists-\mathrm{D}\mathbf{v} - \mathbf{inv}$ NON valida.

Validità della inversa della regola $\exists-\mathrm{D}$.

Quindi per rendere la regola di esiste a dx sicura occorre modificarla ponendo

$$\frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

che è ora sicura. Infatti possiamo mostrare che la sua inversa

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}\ \mathrm{inv}-\exists-\mathrm{D}$$

è pure valida. Lo dimostriamo supponendo Γ, ∇ e $\mathbf{A(t)}$ senza variabili libere per semplicità (il caso generale segue analogamente). A tal scopo mostriamo che in un modello $\mathcal{D}$ qualsiasi fissato vale

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \to \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)} \vee \nabla^{\vee}\ ) \quad \to \quad (\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \to \mathbf{A(t)} \vee \nabla^{\vee}\ )$$

usando il lemma scorciatoia 9.9. Quindi supponiamo che nel modello $\mathcal{D}$ la premessa sia vera, ovvero che valga

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \to \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)} \vee \nabla^{\vee}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Ora per mostrare che pure il sequente conclusione è vero nel modello usiamo di nuovo il lemma scorciatoia e supponiamo che $(\Gamma^{\&})^{\mathcal{D}} = 1$. Dunque per l'ipotesi abbiamo che $(\exists x\ A(x) \vee \nabla^{\vee})^{\mathbf{D}} = 1$ da cui abbiamo tre casi.

1 $\mathbf{A(x)^{D}(t^{D})} = \mathbf{A(t)^{D}} = \mathbf{1}$ da cui segue che vale pure $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)^{D}} = \mathbf{1}$ e allora anche il sequente conclusione è vero nel modello.

2. $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{A(x)^{D}} = \mathbf{1}$ allora anche il sequente conclusione è vero nel modello.

3. $(\nabla^{\vee})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$ allora anche il sequente conclusione è vero nel modello.

Dunque nel modello risulta valido il sequente conclusione e quindi per il lemma scorciatoia anche la regola inversa

Validità delle regole dell'uguaglianza Verifichiamo ora che le regole dei sequenti relative al predicato dell'uguaglianza da aggiungere al calcolo della logica predicativa LC sono valide.

L'assioma

$$\begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \Gamma \vdash t{=}t, \Delta \end{array}$$

è **valido** perchè è vero in OGNI modello:
supponiamo $\mathbf{\Gamma}$ un solo predicato e sia $\mathcal{D}$ un modello. Distinguiamo 2 casi:
1. $\mathbf{t}$ è una costante, ovvero $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ con $\mathbf{c}^{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}$, e quindi si ha chiaramente

$$(\mathbf{c}{=}\mathbf{c})^{\mathcal{D}} \;\equiv\; (\mathbf{x}{=}\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{c}^{\mathcal{D}}, \mathbf{c}^{\mathcal{D}}) \;\equiv\; \mathbf{1}$$

da cui si ha $(\mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{t}{=}\mathbf{t})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ perchè il conseguente è vero nel modello.
2. $\mathbf{t}$ è una variabile, ovvero $\mathbf{t} \equiv \mathbf{x}$, da cui la validità di $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{x}{=}\mathbf{x}$ supposto che in $\mathbf{\Gamma}$ ci siano solo proposizioni con $\mathbf{x}$ variabile libera segue in quanto per ogni $\mathbf{d}$ nel modello $(\mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{x}{=}\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, poichè $(\mathbf{x}{=}\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ visto che $\mathbf{d} = \mathbf{d}$.

La regola

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S}$$

è **valida** e pure sicura (visto che l'inversa ha la stessa struttura della regola solo con $\mathbf{s}$ al posto di $\mathbf{t}$ e uno scambio di premesse).

Ora mostriamo che la regola =-S è valida supponendo tutte le formule nella regola senza variabili libere per semplicità (il caso generale segue analogamente). Dunque supponiamo in particolare $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c_1}$ e $\mathbf{s} \equiv \mathbf{c_2}$ ovvero che siano costanti. Poi mostriamo che in ogni modello $\mathcal{D}$ fissato è vera la formula

$$(\ \mathbf{\Sigma}^{\&}\ \&\ \mathbf{t} = \mathbf{s}\ \&\ \mathbf{\Gamma}(\mathbf{t})^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}(\mathbf{t})^{\vee}\ \vee\ \nabla^{\vee}\ )\ \rightarrow\ (\ \mathbf{\Sigma}^{\&}\ \&\ \mathbf{\Gamma}(\mathbf{s})^{\&}\ \&\ t = s \rightarrow \mathbf{\Delta}(\mathbf{s})^{\vee}\ \vee\ \nabla^{\vee}\ )$$

A tal scopo applichiamo il lemma scorciatoia 9.9 e supponiamo che nel modello valga

$$(\ \mathbf{\Sigma}^{\&}\ \&\ \mathbf{t} = \mathbf{s}\ \&\ \mathbf{\Gamma}(\mathbf{t})^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}(\mathbf{t})^{\vee}\ \vee\ \nabla^{\vee}\ )^{\mathcal{D}} = 1$$

Dobbiamo mostrare che in $\mathcal{D}$ vale pure

$$(\ \mathbf{\Sigma}^{\&}\ \&\ \mathbf{\Gamma}(\mathbf{s})^{\&}\ \&\ \mathbf{t} = \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{\Delta}(\mathbf{s})^{\vee}\ \vee\ \nabla^{\vee}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Applichiamo di nuovo il lemma scorciatoia e supponiamo anche che $(\ \mathbf{\Sigma}^{\&}\ \&\ \mathbf{\Gamma}(\mathbf{s})^{\&}\ \&\ \mathbf{t} = \mathbf{s}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$.

Quindi dall'ipotesi otteniamo che $(\ \mathbf{\Sigma}^{\&}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ con $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s})^{\&^{\mathcal{D}}} = \mathbf{1}$ e $(\mathbf{t}{=}\mathbf{s})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ ovvero $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$.
Ma $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s})^{\&^{\mathcal{D}}} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})^{\&^{\mathcal{D}}}(\mathbf{s}^{\mathcal{D}})$ e da $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$ concludiamo

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s})^{\&^{\mathcal{D}}} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})^{\&^{\mathcal{D}}}(\mathbf{s}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})^{\&^{\mathcal{D}}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}}) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{t})^{\mathcal{D}}$$

e quindi da $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s})^{\&^{\mathcal{D}}} = \mathbf{1}$ otteniamo $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t})^{\&^{\mathcal{D}}} = \mathbf{1}$, e mettendo insieme le altre assunzioni si trova che $(\ \mathbf{\Sigma}^{\&}\ \&\ \mathbf{t} = \mathbf{s}\ \&\ \mathbf{\Gamma}(\mathbf{t})^{\&}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ Da cui per l'ipotesi di validità del sequente premessa in $\mathcal{D}$ concludiamo che

$$(\mathbf{\Delta}(\mathbf{t})^{\vee}\ \vee \nabla^{\vee}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Ora nel caso $\mathbf{\Delta}(\mathbf{t})^{\&^{\mathcal{D}}} = \mathbf{1}$, ragionando come sopra da $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$ concludiamo

$$\mathbf{\Delta}(\mathbf{s})^{\vee^{\mathcal{D}}} = \mathbf{\Delta}(\mathbf{t})^{\vee^{\mathcal{D}}}$$

e da $\mathbf{\Delta}(\mathbf{t})^{\vee^{\mathcal{D}}} = \mathbf{1}$ si conclude pure che $\mathbf{\Delta}(\mathbf{s})^{\vee^{\mathcal{D}}} = \mathbf{1}$ e dunque $(\ \mathbf{\Delta}(\mathbf{s})^{\vee}\ \vee\ \nabla^{\vee}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Invece nel caso $(\nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ si conclude subito $(\ \mathbf{\Delta}(\mathbf{s})^{\vee}\ \vee\ \nabla^{\vee}\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e dunque che il sequente conclusione è vero nel modello $\mathcal{D}$. Per il lemma scorciatoia si deduce che la regola è valida.

11.7.2 Regola dell'uguaglianza veloce

Si noti che la versione veloce della regola $=-S$ ovvero

$$\frac{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t})\vdash\mathbf{\Delta}(\mathbf{t})}{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s}),\mathbf{t}{=}\mathbf{s}\vdash\mathbf{\Delta}(\mathbf{s})}\ =-\mathrm{S}_{\mathbf{v}}$$

è valida ma non SICURA.

Ad esempio se la applichiamo rimuovendo solo alcune occorrenze come in

$$\cfrac{\cfrac{????}{\vdash f{=}t,\, s{=}t}}{t{=}s\vdash f{=}s,\, s{=}t}\ =-\mathrm{S}^{*}$$

si ottiene una foglia NON valida mentre la radice lo è.

Infatti sopra dovevamo sostituire TUTTE le occorrenze di **s** optando per

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{=\text{-ax}}{\vdash t=t,\, f{=}t}}{\vdash f{=}t,\, t{=}t}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}}{t{=}s\vdash f{=}s,\, s{=}t}\ =-\mathrm{S}^{*}$$

Invece ripetendo il primo tentativo con $=-\mathrm{S}$ anzichè con la sua versione semplificata otteniamo

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{=\text{-ax}}{\mathbf{t}{=}\mathbf{s}\vdash\mathbf{t}=\mathbf{t},\,\mathbf{f}{=}\mathbf{t}}}{t{=}s\vdash s{=}t,\, f{=}t}\ =-\mathrm{S}}{t{=}s\vdash f{=}t,\, s{=}t}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}}{t{=}s\vdash f{=}s,\, s{=}t}\ =-\mathrm{S}$$

ove la prima applicazione di $=-\mathrm{S}$ è INUTILE, ma ci si riprende con la seconda....

11.7.3 Esempi per chiarire il concetto di regola valida

1. L'asserzione

   $$\frac{\mathbf{x}>\mathbf{0}\vdash \text{se } \mathbf{y}>\mathbf{0} \text{ allora } \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}>\mathbf{0}}{\mathbf{x}>\mathbf{0}\vdash \text{per ogni } \mathbf{y}\text{, se } \mathbf{y}>\mathbf{0} \text{ allora } \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}>\mathbf{0}}$$

   formalizzata in

   $$\frac{\mathbf{x}>\mathbf{0}\vdash \mathbf{y}>\mathbf{0}\ \rightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}>\mathbf{0}}{\mathbf{x}>\mathbf{0}\vdash \forall\mathbf{y}(\,\mathbf{y}>\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}>\mathbf{0}\,)}$$

   è un esempio di corretta applicazione della regola $\forall-$D che è pure sicura, ovvero scambiando la conclusione con la premessa l'asserzione rimane valida.

   Invece l'esempio

   $$\frac{\mathbf{y}>\mathbf{0}\vdash \text{se } \mathbf{x}>\mathbf{0} \text{ allora } \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}>\mathbf{0}}{\mathbf{y}>\mathbf{0}\vdash \text{per ogni } \mathbf{y}\text{, se } \mathbf{x}>\mathbf{0} \text{ allora } \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}>\mathbf{0}}$$

   si formalizza in

   $$\frac{\mathbf{y}>\mathbf{0}\vdash \mathbf{x}>\mathbf{0}\ \rightarrow\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}>\mathbf{0}}{\mathbf{y}>\mathbf{0}\vdash \forall\mathbf{y}(\,\mathbf{x}>\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}>\mathbf{0}\,)}$$

Si noti che questa NON è una corretta applicazione della regola $\forall-\mathbf{D}$ in quanto la $\mathbf{y}$ è LIBERA nel contesto a sinistra $\mathbf{y}>\mathbf{0}$ Difatti nel modello $D \equiv Nat$ dei numeri naturali con $>$ interpretato come "maggiore stretto" e il simbolo $\cdot$ come moltiplicazione, si ha che il sequente premessa è vero mentre il sequente conclusione è falso perchè $\forall\,\mathbf{y}(\,\mathbf{x}>\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}>\mathbf{0}\,)$ è falso per $\mathbf{y}=\mathbf{0}$.

2. L'asserzione

$$\frac{\text{La cometa x entra nell'orbita di cattura del Sole} \vdash \text{C'è un scia luminosa nel cielo.}}{\text{Qualche cometa entra nell'orbita di cattura del Sole} \vdash \text{C'è una scia luminosa nel cielo.}}$$

   si può formalizzare in

$$\frac{\mathbf{C}(\mathbf{x})\&\mathbf{O}(\mathbf{x},\mathbf{s})\ \vdash\ \mathbf{L}}{\exists\mathbf{x}\,(\,\mathbf{C}(\mathbf{x})\&\mathbf{O}(\mathbf{x},\mathbf{s})\,)\vdash\mathbf{L}}$$

   usando
   $C(x)$="x è una cometa"
   $O(x,y)$="x entra nell'orbita di cattura di y"
   L="c'è una scia luminosa nel cielo"
   s="Sole"
   che è un esempio di applicazione corretta della regola $\exists-$S visto che $\mathbf{x}$ non compare libera nel sequente conclusione. Quindi l'applicazione della regola è valida con la sua inversa, ovvero anche l'asserzione ottenuta invertendo la conclusione con la premessa è pure valida.

3. l'asserzione

$$\frac{\text{Pippo vede la stella Sirio} \vdash \text{Il cielo non è nuvoloso.}}{\text{Pippo vede tutte le stelle} \vdash \text{Il cielo non è nuvoloso.}}$$

   si formalizza in

$$\frac{S(s)\&V(p,s)\vdash\neg L}{\forall x\,(\,S(x)\rightarrow V(p,x)\,)\vdash\neg L}$$

   usando
   $V(x,y)$="x **vede** y"
   $S(x)$="x **è una stella**"
   L="**Il cielo è nuvoloso**"
   p="**Pippo**"
   s="**Sirio**"

   A prima vista non è applicazione di una regola come quella del "per ogni" a sx veloce. Allora proviamo a cercare una derivazione della conclusione per capire se la conclusione segue dalla premessa...

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{L},\forall\mathbf{x}\,(\mathbf{S}(\mathbf{x})\rightarrow\mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{x})\,)\vdash\mathbf{S}(\mathbf{s})\quad \mathbf{L},\forall\mathbf{x}\,(\mathbf{S}(\mathbf{s})\rightarrow\mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{x})\,)\,,\ \mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{s})\vdash}{\mathbf{L},\forall\mathbf{x}\,(\,\mathbf{S}(\mathbf{x})\rightarrow\mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{x})\,),\mathbf{S}(\mathbf{s})\rightarrow\mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{s})\vdash}\rightarrow-\mathrm{S}}{\mathbf{L},\forall\mathbf{x}\,(\,\mathbf{S}(\mathbf{x})\rightarrow\mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{x})\,)\vdash}\forall-\mathrm{S}}{\forall\mathbf{x}\,(\,\mathbf{S}(\mathbf{x})\rightarrow\mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{x})\,),\mathbf{L}\vdash}\mathrm{sc}_{\mathrm{sx}}}{\forall\mathbf{x}\,(\,\mathbf{S}(\mathbf{x})\rightarrow\mathbf{V}(\mathbf{p},\mathbf{x})\,)\vdash\neg\mathbf{L}}\neg-\mathrm{D}$$

   Ora dalla foglia di sx possiamo dedurre che se facciamo un modello

$$\mathbf{D}\ \equiv\ \{\mathbf{Sirio},\mathbf{Pippo}\}$$

   in cui poniamo

per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ $\mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$
$\mathbf{L}^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$
$\mathbf{s}^{\mathbf{D}} = \mathbf{Sirio}$, $\mathbf{p}^{\mathbf{D}} = \mathbf{Pippo}$
e infine $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathcal{D}}$ definito a piacere

abbiamo che $(\,\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{S}(\mathbf{x}) \to \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x})\,)\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ perchè non c'è nessuna stella in $\mathbf{D}$, ovvero $\mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$, e quindi l'implicazione $(\,\mathbf{S}(\mathbf{x}) \to \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x})\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, mentre $(\neg\mathbf{L})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ e dunque nel modello il sequente $\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{S}(\mathbf{x}) \to \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{x})\,) \vdash \neg\mathbf{L}$ risulta falso. Invece il sequente $\mathbf{S}(\mathbf{s})\&\mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \vdash \neg\mathbf{L}$ risulta vero nel modello perchè $(\,\mathbf{S}(\mathbf{s})\&\mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \to \neg\mathbf{L})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ in quanto $\mathbf{S}(\mathbf{s})^{\mathcal{D}} = \mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{s}^{\mathbf{D}}) = \mathbf{0}$ e dunque $(\mathbf{S}(\mathbf{s})\&\mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{s}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$, ovvero l'implicazione è vera nel modello scelto.

In conclusione l'asserzione di partenza *NON è valida* perchè abbiamo trovato un modello in cui la premessa è vera ma la conclusione no.

11.8 Regole derivate

Una regola

$$\frac{\Gamma' \vdash D'}{\Gamma \vdash D}\ \textit{regola}*$$

si dice **regola derivata** nella logica $\mathrm{LC}_=$ se
supposti i suoi sequenti premessa derivabili in $\mathrm{LC}_=$,
ovvero data una derivazione

$$\begin{array}{c} \pi \\ \vdots \\ \Gamma' \vdash D' \end{array}$$

allora la derivazione ottenuta applicando la regola

$$\frac{\begin{array}{c} \pi \\ \vdots \\ \Gamma' \vdash D' \end{array}}{\Gamma \vdash D}\ \textit{regola}*$$

si può ESPANDERE in una derivazione di $\Gamma \vdash D$ a partire da π in $\mathrm{LC}_=$ SENZA ispezionare le derivazioni dei sequenti premessa.
Ciò significa che una *regola derivata* è localmente trasformabile in un pezzo di albero di derivazione usando interamente regole di $\mathrm{LC}_=$.

Esempi di regole derivate

Il sequente

$$\overset{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C}$$

è assioma **derivato** perchè abbrevia:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \mathbf{A}, \Gamma', \Gamma'' \vdash \mathbf{A}, C}{\Gamma, \mathbf{A}, \Gamma', \Gamma'', \neg\mathbf{A} \vdash C}\ \neg\text{−S}}{\Gamma, \mathbf{A}, \Gamma', \neg\mathbf{A}, \Gamma'' \vdash C}\ \mathrm{sc}_{\mathbf{sx}}$$

Per esercizio si mostri che i seguenti sono tutti assiomi derivati:

$$\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx2}\\ \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx1}\\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx2}\\ \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''\end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\begin{array}{c}\text{rf}^*\\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{sm}^*\\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{tra}^*\\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{cp}^*\\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta\end{array}$$

11.8.1 Per velocizzare derivazioni: regole di indebolimento

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{''} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{''} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{''}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{''}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

Queste regole sono valide, ma non altrettanto le loro inverse, perchè?

11.9 Validità = derivabilità in $\mathbf{LC}_=$

Il fatto che tutte le **regole di $\mathbf{LC}_=$** sono **valide** rispetto alla semantica dei modelli classici ci permette di concludere che i sequenti derivabili sono validi rispetto alla semantica classica dei modelli. Ma vale pure il viceversa:

Theorem 11.17 (validità + completezza di sequenti in LC rispetto a semantica classica)

sequenti derivabili in $\mathbf{LC}_=$
=
sequenti validi rispetto alla semantica classica

Come corollario le formule valide sono esattamente i teoremi di $\mathbf{LC}_=$

Theorem 11.18 (validità + completezza di formule in $\mathbf{LC}_=$ rispetto a semantica classica)

teoremi (=formule derivabili) in $\mathbf{LC}_=$
=
tautologie predicative classiche

Ovvero tutte le **tautologie** della semantica classica, ovvero tutte le formule **valide** in ogni modello, sono **teoremi** di $\mathbf{LC}_=$, ovvero formule derivabili in $\mathbf{LC}_=$.

11.9.1 ATTENZIONE: NON Esiste procedura di decisione per LC o $\mathbf{LC}_=$

Le regole COLPEVOLI dell' assenza di un processo decisione per **LC** e per $\mathbf{LC}_=$ sono

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall\!-\!\mathrm{S} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists\!-\!\mathrm{D}$$

oltrechè la regola $= -$S, poichè nel cercare una derivazione di un sequente radice dal basso verso l'altro $\Uparrow$ con queste regole **aumenta la complessità** dei segni. Si ricorda che non si può fare altrimenti se si vuole avere una procedura anche semi-automatica come in sezione 11.6.1 perchè le versioni veloci di queste regole non sono sicure ovvero non permettono di concludere che se una foglia è falsa in un modello anche la radice lo è.

Per esempio nel cercare una derivazione dalla radice verso l'alto $\Uparrow$ del tipo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, A(t), A(s), A(u), \forall x\ A(x) \vdash \nabla}}{\Gamma, A(t), A(s), \forall x\ A(x), A(u) \vdash \nabla}\ \mathrm{sc_{sx}}}{\Gamma, A(t), A(s), \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall\!-\!\mathrm{S}}{\Gamma, A(t), \forall x\ A(x), A(s) \vdash \nabla}\ \mathrm{sc_{sx}}}{\dfrac{\Gamma, A(t), \forall x\ A(x) \vdash \nabla}{\dfrac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall\!-\!\mathrm{S}}\ \mathrm{sc_{sx}}}\ \forall\!-\!\mathrm{S}$$

applicando le regole sopra dal basso verso l'alto aggiungiamo sempre più termini, e non è detto che si riesca a capire se si può raggiungere o meno un assioma senza provare a fare un contromodello di un sequente foglia anche se non si sono applicate tutte le regole possibili. In tal caso ci conviene trovare il contromodello del sequente ottenuto PRIMA dell'applicazione di $\forall-$S.

11.9.2 Perchè modelli con dominio non vuoto

Osserviamo che il sequente

$$\vdash \exists \mathbf{x}\ \mathbf{x}{=}\mathbf{x}$$

è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ per esempio in tal modo

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \mathbf{y}{=}\mathbf{y}}\ {=}\text{-ax}}{\vdash \exists \mathbf{x}\ \mathbf{x}{=}\mathbf{x}}\ \exists\!-\!\mathrm{re}$$

Questa derivazione ci porta a concludere che per dimostrare che in OGNI MODELLO su un dominio **D** vale $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{x}{=}\mathbf{x}$ occorre ASSUMERE che esista almeno un $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$, che poi verifica banalmente che $\mathbf{d} = \mathbf{d}$, e quindi nella definizione di modello dobbiamo richiedere che il dominio sia NON vuoto.

11.10 Consigli su come cercare una derivazione o contromodello

Nell'intento di cercare una derivazione di un sequente è meglio:

applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e ∀-D e ∃-S
se non si riesce a derivare il sequente meglio costruire il contromodello falsificando il sequente che si trova lungo il ramo che non finisce con foglie tutte assiomi PRIMA di una (o una seconda) applicazione di ∀-S o ∃-D
Se si confida di poter derivare il sequente si possono abbreviare le derivazioni con le regole di indebolimento
NON USARE regole NON SICURE per costruire contromodelli (e, sebbene NON sia obbligatorio, controllare che il sequente radice sia falso nel contromodello)
NON USARE regole NON SICURE se non si è sicuri se il sequente è derivabile
usare SOLO le lettere $\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ come VARIABILI nelle regole ∃-**S** e ∀-**D**
usare le lettere minuscole $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \ldots$ come costanti
le lettere **u**,**v**, **u**, **t**,**s** sono usate come METAVARIABILI per termini ovvero sono usate al posto sia di costanti che di variabili

11.10.1 Esercizi svolti seguendo i consigli dati

1. L'asserzione

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Il programma fattoriale su 2 dà un'}\texttt{unico}\text{ output.}\\ \text{Il programma fattoriale su 2 dà output il numero 2.}\\ \text{Il programma fattoriale su 2 dà output il numero } x.\end{array}}{\text{Il numero x è uguale 2.}}$$

si può formalizzare in

$$\exists \mathbf{y}\ \mathbf{O}(\mathbf{y}, \mathbf{f}, \mathbf{2})\ \&\ \forall \mathbf{y_1}\ \forall \mathbf{y_2}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{y_1}, \mathbf{f}, \mathbf{2})\ \&\ \mathbf{O}(\mathbf{y_2}, \mathbf{f}, \mathbf{2}) \rightarrow \mathbf{y_1}{=}\mathbf{y_2}\ )\ ,\ \mathbf{O}(\mathbf{2}, \mathbf{f}, \mathbf{2}),\ \mathbf{O}(\mathbf{x}, \mathbf{f}, \mathbf{2}) \vdash \mathbf{x} = \mathbf{2}$$

con
f= " il fattoriale"
2= " il numero due"
$O(x, y, z)$= " il programma y su z dà output il numero x"

ed è una **tautologia** perchè si deriva come segue usando la seguente abbreviazione:

$\mathbf{Q(x)} \equiv \mathbf{O(x, f, 2)}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{Q(2),Q(x)\vdash Q(2),x=2} \qquad \dfrac{\text{ax-id}}{Q(2),Q(x)\vdash Q(x),x=2}}{Q(2),Q(x)\vdash Q(2)\&Q(x),x=2}\ \&-\mathrm{D} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-=}}{Q(2),Q(x),2=x\vdash 2=2}}{Q(2),Q(x),2=x\vdash x=2}\ =-\mathrm{S}}{Q(2),Q(x),Q(2)\&Q(x)\to 2=x\vdash x=2}\ \to-\mathrm{S}}{Q(2),Q(x),\forall y_2\ (\,Q(2)\&Q(y_2)\to 2=y_2\,)\vdash x=2}\ \forall-\mathrm{S}v}{Q(2),Q(x),\exists y\ Q(y)\,,\forall y_2\ (\,Q(2)\&Q(y_2)\to 2=y_2\,)\vdash x=2}\ -\mathrm{in}_{sx}}{Q(2),Q(x),\exists y\ Q(y)\,,\forall y_1\ \forall y_2\ (\,Q(y_1)\&Q(y_2)\to y_1=y_2\,)\vdash x=2}\ \forall-\mathrm{S}v}{Q(2),Q(x),\exists y\ Q(y)\,\&\,\forall y_1\ \forall y_2\ (\,Q(y_1)\&Q(y_2)\to y_1=y_2\,)\vdash x=2}\ \&-\mathrm{S}}{\exists y\ Q(y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\,Q(y_1)\&Q(y_2)\to y_1=y_2\,)\,,\ Q(2),\ Q(x)\vdash x=2}\ \mathrm{sc}_{sx}$$

2. L'asserzione

   Franco è venuto ad una sola riunione.
   Franco non è venuto all'ultima riunione.
   Franco è venuto alla riunione del 10 giugno.

   L'ultima riunione non è quella del 10 giugno.

   usando
   $V(x, y)$= x è venuto alla riunione y
   u=ultima riunione
   d=riunione del 10 giugno
   f=Franco

   si può formalizzare tramite il sequente

$$\exists y\ V(f,y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\,V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\,)\,,\ \neg V(f,u),\ V(f,d)\vdash u\neq d$$

   che è una **tautologia** perchè è derivabile in $\mathrm{LC}_=$ ad esempio come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{\exists y\ V(f,y)\,\&\,\forall y_1\ \forall y_2\ (\,V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\,),\ u=d,\ V(f,u)\vdash V(f,u)}}{\exists y\ V(f,y)\,\&\,\forall y_1\ \forall y_2\ (\,V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\,),\ V(f,d),u=d\vdash V(f,u)}\ =-\mathrm{S}}{\exists y\ V(f,y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\,V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\,)\,,\ V(f,d),u=d,\neg V(f,u)\vdash}\ \neg-\mathrm{S}}{\exists y\ V(f,y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\,V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\,)\,,\ \neg V(f,u),\ V(f,d),u=d\vdash}\ \mathrm{sc}_{sx}}{\exists y\ V(f,y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\,V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\,)\,,\ \neg V(f,u),\ V(f,d)\vdash u\neq d}\ \neg-\mathrm{D}$$

3. L'argomentazione

   Se gli studenti hanno coscienza di rispettare il silenzio allora ogni richiamo è superfluo.
   Se gli studenti non hanno coscienza di rispettare il silenzio allora ogni richiamo è inefficace.

   Ogni richiamo è superfluo o inefficace.

   usando
   S(x)=x è studente
   C(x)=x ha coscienza di rispettare il silenzio
   R(x)=x è un richiamo
   E(x)= x è efficace
   P(x)=x è superfluo

si può formalizzare così:

$$\forall \mathbf{x}\,(\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{x})) \rightarrow \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}))\ ,\ \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg\mathbf{C}(\mathbf{x})) \rightarrow \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg\mathbf{E}(\mathbf{x}))$$
$$\vdash \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg\mathbf{E}(\mathbf{x})\ )$$

Poi seguiamo la procedura in sezione 11.6.1 per stabilire la sua validità e iniziamo a cercare una sua derivazione in tal senso usando le seguenti abbreviazioni

$\mathbf{pr_1} \equiv \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{x}))$
$\mathbf{pr_2} \equiv \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}))$
$\mathbf{pr_3} \equiv \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg\mathbf{C}(\mathbf{x}))$
$\mathbf{pr_4} \equiv \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg\mathbf{E}(\mathbf{x}))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{R}(\mathbf{x}),\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{S}(\mathbf{w}),\mathbf{C}(\mathbf{w}),\mathbf{S}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{C}(\mathbf{z}),\mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{R}(\mathbf{x}),\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{S}(\mathbf{w}),\mathbf{C}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{z}),\mathbf{P}(\mathbf{x})}\ \rightarrow\!-\mathrm{D}}{\mathbf{R}(\mathbf{x}),\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{S}(\mathbf{w}),\mathbf{C}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{pr_1},\mathbf{P}(\mathbf{x})}\ \forall\!-\mathrm{D} \qquad \mathbf{R}(\mathbf{x}),\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{S}(\mathbf{w}),\mathbf{C}(\mathbf{w}),\mathbf{pr_2} \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{R}(\mathbf{x}),\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{S}(\mathbf{w}),\mathbf{C}(\mathbf{w}),\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2} \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})}\ \rightarrow\!-\mathrm{S}}{\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2},\mathbf{R}(\mathbf{x}),\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{S}(\mathbf{w}),\mathbf{C}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})}\ \mathrm{sc}_{sx}}{\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2},\mathbf{R}(\mathbf{x}),\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{S}(\mathbf{w}) \vdash \neg\mathbf{C}(\mathbf{w}),\mathbf{P}(\mathbf{x})}\ \neg\!-\mathrm{D}}{\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2},\mathbf{R}(\mathbf{x}),\mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{w}) \rightarrow \neg\mathbf{C}(\mathbf{w}),\mathbf{P}(\mathbf{x})}\ \rightarrow\!-\mathrm{D}}{\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2},\mathbf{R}(\mathbf{x}),\mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{pr_3},\mathbf{P}(\mathbf{x})}\ \forall\!-\mathrm{D} \qquad \mathbf{seq}}{\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2},\mathbf{R}(\mathbf{x}),\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{pr_3} \rightarrow \mathbf{pr_4} \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})}\ \rightarrow\!-\mathrm{S}}{\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2},\mathbf{pr_3} \rightarrow \mathbf{pr_4},\ \mathbf{R}(\mathbf{x}),\mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})}\ \mathrm{sc}_{sx}}{\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2},\mathbf{pr_3} \rightarrow \mathbf{pr_4},\ \mathbf{R}(\mathbf{x}) \vdash \neg\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{P}(\mathbf{x})}\ \neg\!-\mathrm{D}}{\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2},\mathbf{pr_3} \rightarrow \mathbf{pr_4},\ \mathbf{R}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x}),\neg\mathbf{E}(\mathbf{x})}\ \mathrm{sc}_{dx}}{\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2},\mathbf{pr_3} \rightarrow \mathbf{pr_4},\ \mathbf{R}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg\mathbf{E}(\mathbf{x})}\ \vee\!-\mathrm{D}}{\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2},\mathbf{pr_3} \rightarrow \mathbf{pr_4} \vdash \mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg\mathbf{E}(\mathbf{x})}\ \rightarrow\!-\mathrm{D}}{\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2},\mathbf{pr_3} \rightarrow \mathbf{pr_4} \vdash \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg\mathbf{E}(\mathbf{x})\ )}\ \forall\!-\mathrm{D}$$

ove $\mathbf{seq} \equiv \mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2},\mathbf{R}(\mathbf{x})\ ,\ \mathbf{E}(\mathbf{x}),\ \mathbf{pr_4} \vdash \mathbf{P}(\mathbf{x})$
e inoltre il primo $\forall-$D si può applicare perchè x non è libera nel sequente radice, mentre l'altro $\forall-$D si può applicare perchè w non è libera nel sequente $\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2},\mathbf{R}(\mathbf{x}),\mathbf{E}(\mathbf{x}) \vdash \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg\mathbf{C}(\mathbf{x})),\mathbf{P}(\mathbf{x})$ e l'ultimo $\forall-$D si può applicare perchè z non è libera nel sequente $\mathbf{R}(\mathbf{x}),\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{S}(\mathbf{w}),\mathbf{C}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{pr_1},\mathbf{P}(\mathbf{x})$.

Ora la foglia più a sinistra non è un assioma e non si può applicare altro. Chiaramente questo dice che il sequente NON è valido perchè abbiamo applicato solo regole sicure.

Quindi costruiamo un modello dove sia falsa la foglia

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}),\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{S}(\mathbf{w}),\mathbf{C}(\mathbf{w}),\mathbf{S}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{C}(\mathbf{z}),\mathbf{P}(\mathbf{x})$$

Dato che l'interpretazione di questo sequente foglia in un dominio $\mathbf{D}$ è una funzione

$$(((\mathbf{R}(\mathbf{x})\ \&\ \mathbf{E}(\mathbf{x}))\ \&\ \mathbf{S}(\mathbf{w}))\ \&\ \mathbf{C}(\mathbf{w}))\ \&\ \mathbf{S}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{z}) \vee \mathbf{P}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$$

per far sì che non sia la funzione costante $\mathbf{1}$ basta trovare una terna $(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2},\mathbf{d_3})$ in $\mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \mathbf{D}$ da sostituire al posto di $\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{z}$ che renda falsa l'implicazione, ovvero per cui risulti

$$(((\mathbf{R}(\mathbf{x})\ \&\ \mathbf{E}(\mathbf{x}))\ \&\ \mathbf{S}(\mathbf{w}))\ \&\ \mathbf{C}(\mathbf{w}))\ \&\ \mathbf{S}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{z}) \vee \mathbf{P}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1},\mathbf{d_2},\mathbf{d_3}) = \mathbf{0}$$

Basta porre

$$\mathbf{D} = \{\mathbf{Licia}, \mathbf{Mario}, \mathbf{Betti}\}$$

pensando di mettere **Licia** al posto di **w**, poi **Mario** al posto di **x** e infine **Betti** al posto di **z**, mandando a **0** o **1** i predicati su di loro a seconda se si trovino a dx o a sx del sequente.

Possiamo definire la semantica dei vari predicati usando sempre **x** come variabile per ogni predicato sopra (visto che ciascun predicato ha solo una variabile libera e quando si definisce singolarmente la sua interpretazione nel modello non importa il nome della sua variabile!) come segue

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = \mathbf{0} & \mathbf{R}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = \mathbf{1} & \mathbf{E}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = 1 & \mathbf{C}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = 1 & \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = 1 & \mathbf{C}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = 0 & \end{array}$$

(questo non dice cosa fa ogni predicato su **Mario**, **Licia** e **Betti** ma queste sono informazioni sufficienti per falsificare il sequente...)

Poi si definisca i rimanenti valori a piacere

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = ?? & \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = ?? \\ \mathbf{R}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = ?? & \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = ?? \\ \mathbf{E}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}) = ?? & \mathbf{E}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Betti}) = ?? \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = ?? & \mathbf{C}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{Mario}) = ?? \end{array}$$

ovvero si fissi al posto dei punti di domanda un valore a piacere (in questo modo il modello è completamente determinato!).

Nel modello risulta banalmente che

$$(((\mathbf{R}(\mathbf{x}) \ \& \ \mathbf{E}(\mathbf{x})) \ \& \ \mathbf{S}(\mathbf{w})) \ \& \ \mathbf{C}(\mathbf{w})) \ \& \ \mathbf{S}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{z}) \vee \mathbf{P}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{Licia}, \mathbf{Mario}, \mathbf{Betti}) = \mathbf{0}$$

(si ricordi di assegnare gli elementi del dominio secondo l'ordine alfabetico, ovvero di mettere **Licia** al posto di **w**, poi **Mario** al posto di **x** e infine **Betti** al posto di **z**).

Ora si noti che **Mario** è la causa per cui nel modello risulta falso

$$\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )$$

perchè rende vero $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ ma non $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ e nemmeno $\neg\mathbf{E}(\mathbf{x})$.

Poi si noti che **Licia** è la causa per cui nel modello risulta falso

$$\mathtt{pr}_3 \equiv \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{C}(\mathbf{x}))$$

in quanto verifica $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ ma non $\neg\mathbf{C}(\mathbf{x})$. Dunque nel modello risulta vera l'implicazione

$$\mathbf{pr_3} \rightarrow \mathbf{pr_4}$$

essendo l'antecedente dell'implicazione falso nel modello.

Infine si noti che **Betti** è la causa per cui nel modello risulta falso

$$\mathtt{pr}_1 \equiv \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{x}))$$

in quanto verifica $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ ma non $\mathbf{C}(\mathbf{x})$. Dunque nel modello risulta vera l'implicazione

$$\mathbf{pr_1} \rightarrow \mathbf{pr_2}$$

essendo l'antecedente dell'implicazione falso nel modello.

Dunque il sequente iniziale

$$\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2}, \mathbf{pr_3} \to \mathbf{pr_4} \vdash \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \to \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )$$

NON è valido.

Per vedere se il sequente di partenza è soddisfacibile, possiamo applicare la procedura 11.6.1 derivando

$$\vdash \neg(\ (\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2})\ \&\ (\mathbf{pr_3} \to \mathbf{pr_4})\ \to\ \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \to \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )\ )$$

e vediamo che

$$\cfrac{\cfrac{\vdash (\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2})\ \&\ (\mathbf{pr_3} \to \mathbf{pr_4}) \qquad \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \to \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ ) \vdash}{(\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2})\ \&\ (\mathbf{pr_3} \to \mathbf{pr_4})\ \to\ \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \to \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )\ ) \vdash}\ \to -\mathrm{S}}{\vdash \neg(\ (\mathbf{pr_1} \to \mathbf{pr_2})\ \&\ (\mathbf{pr_3} \to \mathbf{pr_4})\ \to\ \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \to \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )\ )}\ \neg-\mathrm{D}$$

Consideriamo la foglia di destra e secondi i consigli in 11.10 ci fermiamo senza applicare la regola $\forall-$S e cerchiamo di trovare un modello in cui $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \to \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )$ è vera.

A tal fine, essendo una quantificazione universale basta porre l'interpretazione della funzione

$$(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \to \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

come funzione costante $\mathbf{1}$. A tal scopo, basta scegliere un dominio $\mathbf{D}$ non vuoto qualsiasi e porre o la premessa sempre a $\mathbf{0}$, o la conclusione sempre a $\mathbf{1}$. Scegliamo la prima ovvero poniamo

$$\textit{per ogni } \mathbf{d} \in \mathbf{D} \qquad \mathbf{R}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

e in tal caso *per ogni* $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ $(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \to \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ e dunque

$$(\ \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{R}(\mathbf{x}) \to \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \neg \mathbf{E}(\mathbf{x})\ )\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Dunque il sequente è **soddisfacibile** in tal modello.

Concludente il sequente di partenza è un' **opinione** perchè falso in un modello e vero in un altro.

11.10.2 Soluzioni di esercizi su regole valide

1. *Si stabilisca se la regola*

$$\frac{C \vdash A(x) \vee \perp, \nabla}{C \vdash \forall x\ A(x), \nabla}\ 1(VL(C) = \emptyset)$$

è sicura, ovvero valida con la sua inversa.

Questa regola è NON valida perchè permette una quantificazione universale SENZA PROIBIRE l'occorrenza di $\mathbf{x}$ come variabile libera in ∇ che è invece proibita nella regola $\forall - \mathbf{D}$.

Per provarlo, mostriamo che il suo utilizzo assieme alle regole del calcolo $\mathbf{LC}_=$ permette di derivare un sequente non valido come segue.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\text{-}\mathbf{ax}_{dx_1}}{\vdash \mathbf{A}(\mathbf{x}), \perp, \neg\mathbf{A}(\mathbf{x})}}{\vdash \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp, \neg\mathbf{A}(\mathbf{x})}\ \vee-\mathrm{D}}{\vdash \forall\mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}), \neg\mathbf{A}(\mathbf{x})}\ \mathbf{1}}{\vdash \neg\mathbf{A}(\mathbf{x}), \forall\mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})}\ \mathrm{sc_{dx}}}{\vdash \forall\mathbf{x}\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{x}), \forall\mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})}\ \forall-\mathrm{D}$$

ove l'applicazione di $\forall-$D è corretta perchè $\mathbf{x}$ non è libera nel sequente radice.

Ora mostriamo che la radice dell'albero sopra

$$\vdash \forall\mathbf{x}\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{x}), \forall\mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

NON è un sequente valido. Infatti la formula $\forall\mathbf{x}\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \forall\mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})$ che interpreta il sequente non è vera ad esempio nel modello

$\mathbf{D}= \{\texttt{Topolino}, \texttt{Minni}\}$
$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse d è maschio
in quanto in tal modello si ha che $(\forall\mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni}) = 0$ e dall'altra parte si ha pure $(\forall\mathbf{x}\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = 0$ perchè $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\texttt{Topolino}) = 1$ e dunque concludiamo

$$(\ \forall\mathbf{x}\ \neg\mathbf{A}(\mathbf{x})\ \vee\ \forall\mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

Ora vediamo che la *regola inversa* **inv-1** di

$$\frac{C \vdash A(x) \vee \perp, \nabla}{C \vdash \forall x\ A(x), \nabla}\ 1(VL(C) = \emptyset)$$

ovvero

$$\frac{\Gamma\vdash \forall x\ A(x), \nabla}{\Gamma\vdash A(x) \vee \perp, \nabla}\ \mathrm{inv}-1(\mathbf{VL}(\mathbf{C}) = \emptyset)$$

è **valida**.

Lo proviamo nel caso in cui ∇ è composta da una sola formula (che è equivalente al caso in cui è composta da più formule perchè è sempre possibile trasformare la virgola a sinistra come & e quella a destra come $\vee$) e sia dipendente sia da $\mathbf{x}$ che da $\mathbf{y}$ dato che restringersi alle proposizioni senza variabili potrebbe semplificare un pò troppo. Questo caso rappresenta il caso più generale perchè trattare la presenza di più variabili oltre ad $\mathbf{x}$ è equivalente a trattare un'unica variabile $\mathbf{y}$ oltre ad $\mathbf{x}$. Dunque supponiamo

$$\nabla\ \equiv\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Ora mostriamo che la regola è valida verificando che in ogni modello $\mathcal{D}$ fissato vale

$$\forall\ \mathbf{x}\ \forall\ \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C} \rightarrow \forall\mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee}\ ) \quad \rightarrow \quad \forall\ \mathbf{x}\ \forall\ \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C} \rightarrow (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee\ \perp\ )\ \vee\ \nabla^{\vee}\ )$$

che con le scelte fatte diventa

$$\forall\ \mathbf{x}\ \forall\ \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C} \rightarrow \forall\mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ ) \quad \rightarrow \quad \forall\ \mathbf{x}\ \forall\ \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C} \rightarrow (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee\ \perp\ )\ \vee\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ )$$

Usiamo il lemma scorciatoia per mostrare questo e supponiamo che nel modello valga

$$\forall\ \mathbf{x}\ \forall\ \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C} \rightarrow \forall\mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ )$$

ovvero che per ogni $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}$ in $\mathcal{D}$

$$(\ \mathbf{C} \rightarrow \forall\mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

Ora per mostrare che vale nel modello pure

$$\forall\, \mathbf{x}\, \forall\, \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C} \rightarrow (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee\ \perp\ )\ \vee\ \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ )$$

ovvero che per ogni $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}$ in $\mathcal{D}$

$$(\ \mathbf{C} \rightarrow (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp)\ \vee\ \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

usiamo di nuovo il lemma scorciatoia e supponiamo che nel modello $\mathcal{D}$ valga $\mathbf{C}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Dunque per l'ipotesi

$$(\ \mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

si ricava che nel modello

$$(\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

Ora si hanno due casi:
I caso: $\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ e quindi

$$(\ \mathbf{C} \rightarrow (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp)\ \vee\ \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ )^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

II caso: $(\forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e quindi vale pure $\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$ (si noti che la variabile $\mathbf{x}$ corrisponde alla prima componente della funzione in $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$) e dunque

$$(\ \mathbf{C} \rightarrow (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ )^{\mathcal{D}}(-,-)(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) = \mathbf{1}$$

In conclusione avendo ispezionato la verità su una coppia $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}$ a piacere si conclude che il sequente conclusione

$$\forall\, \mathbf{x}\, \forall\, \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C} \rightarrow (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee\ \perp\ )\ \vee\ \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ )$$

è vero nel modello **D**.

Ciò significa che la regola inversa della regola **1** è **valida**.

2.

$$\frac{x \text{ parla ad alta voce } \vdash\ x \text{ disturba}}{\text{Qualcuno parla ad alta voce } \vdash \text{Qualcuno disturba}}\ \mathbf{3}$$

è istanza di una regola valida assieme alla sua inversa
ove
$P(x)$="x parla ad alta voce"
$D(x)$="x disturba"

La regola **3** si formalizza in

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{D}(\mathbf{x})}\ \mathbf{3}$$

ed è valida perchè risulta una regola derivata, ovvero composizione di regole di $\mathbf{LC}_=$, come segue

$$\cfrac{\cfrac{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{D}(\mathbf{x})}\ \exists-\mathrm{D}_{\mathbf{v}}}{\exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{D}(\mathbf{x})}\ \exists-\mathrm{S}$$

ove l'applicazione di $\exists-$S è corretta perchè $\mathbf{x}$ non è libera nel sequente radice.

Invece l'inversa della regola

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{D}(\mathbf{x})}\ \mathbf{3}$$

ovvero

$$\frac{\exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{D}(\mathbf{x})}\ \mathbf{inv-3}$$

risulta NON valida ad esempio nel modello

$\mathbf{D}=\{\texttt{Topolino}, \texttt{Minni}\}$
$\mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse **d** è maschio
$\mathbf{D}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse **d** è femmina

Infatti in tal modello risulta che il sequente premessa $(\exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\ \rightarrow\ \exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{D}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ perchè $(\ \exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{D}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ in quanto $\mathbf{D}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni}) = \mathbf{1}$. Però il sequente conclusione è falso nel modello perchè

$$(\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\ \rightarrow\ \mathbf{D}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}}(\texttt{Topolino}) = \mathbf{0}$$

in quanto $\mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\texttt{Topolino}) = \mathbf{1}$ mentre $\mathbf{D}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\texttt{Topolino}) = \mathbf{0}$ ovvero nel modello fissato non vale

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\ \rightarrow\ \mathbf{D}(\mathbf{x})\ )$$

ovvero abbiamo mostrato un modello in cui la formula che rappresenta la regola inversa

$$(\ \exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\ \rightarrow\ \exists\ \mathbf{x}\ \mathbf{D}(\mathbf{x})\ )\ \rightarrow\ \forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{x})\ \rightarrow\ \mathbf{D}(\mathbf{x})\ )$$

NON è valida.

12 Linguaggi predicativi con simboli di funzione

Possiamo aggiungere al linguaggio predicativo L anche simboli di funzioni come segue:

Def. 12.1 (linguaggio predicativo con simboli di funzione) *Un linguaggio predicativo con uguaglianza $\mathcal{L}$ risulta determinato dai seguenti simboli di base*

- *costanti per termini :* $\mathbf{c_j}$ *in numero a piacere*
- *funzioni tra termini:* $\mathbf{f_k(x_1, \dots x_n)}$ *in numero a piacere*
- *predicati atomici :* $\mathbf{P_k(x_1, \dots x_m)}$ *in numero a piacere*

e dunque per definire un modello $\mathcal{D}$ per $\mathcal{L}$, oltre ad interpretare le costanti $\mathbf{c_j^{\mathcal{D}}} \in \mathbf{D}$ *e i predicati*

$$\mathbf{P_k(x_1, \dots, x_m)}^{\mathcal{D}}(-, \dots, -) : \mathcal{D}^{\mathbf{m}} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

dobbiamo interpretare le funzioni tra termini come funzioni tra domini

$$\mathbf{f_k(x_1, \dots, x_n)}^{\mathcal{D}}(-, \dots, -) : \ \mathcal{D}^{\mathbf{n}} \longrightarrow \ \mathcal{D}$$

Nel caso della presenza di simboli di funzioni il calcolo dei sequenti per la logica classica predicativa viene arricchito anche di una regola dell'uguaglianza a sinistra che sostituisce il termine di sinistra con quello di destra ovvero della regola

$$\frac{\mathbf{\Sigma, s = t, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}}{\mathbf{\Sigma, \Gamma(s), s = t \vdash \Delta(s), \nabla}} = -\mathrm{S}_{\mathbf{sym}}$$

in quanto in presenza di simboli di funzioni non basta $=_{\mathbf{S}}$ per catturare TUTTI i sequenti validi nella semantica della logica classica con uguaglianza e simboli di funzioni.

12.1 Calcolo dei sequenti $\mathrm{LC}_=$ per la logica classica predicativa con uguaglianza e simboli di funzione

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot & \text{ax-}\mathtt{tt} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \to -\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to -\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S} \qquad \frac{\Sigma, s = t, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), s = t \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S}_{sym}$$

$$\begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \Gamma \vdash t = t, \Delta \end{array}$$

Uso dei simboli di funzione nella formalizzazione

Problema: in quali modi possiamo formalizzare

"Ogni uomo ha come antenato suo padre"

??

Una possibilità è usare i seguenti simboli predicativi
$\mathbf{U}(\mathbf{x})$= "x è un uomo"
$\mathbf{A}(\mathbf{y},\mathbf{x})$= "$y$ è antenato di x"
$\mathbf{P}(\mathbf{y},\mathbf{x})$= "$y$ è padre di x"

e formalizzarlo in

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U}(\mathbf{x})\ \rightarrow \exists \mathbf{y}\ (\ \mathbf{P}(\mathbf{y},\mathbf{x})\ \&\ \mathbf{A}(\mathbf{y},\mathbf{x})\ )$$

Ma visto che il padre è unico si può introdurre un simbolo $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ per la funzione (parziale)

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \textit{ padre di } x$$

e in tal caso come si formalizza la frase sopra???

Per esempio in tal modo

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{p}(\mathbf{x}),\mathbf{x})\ )$$

Poi un modello per il linguaggio predicativo $\mathbf{L}$ con simboli $\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ e $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ è questo:
$\mathcal{D}$= insieme degli **uomini**

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d},\mathbf{d}') = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \textbf{"d è antenato di d}'\textbf{"} \\ \mathbf{0} & \text{se } \textbf{"d NON è antenato di d}'\textbf{"} \end{cases}$$

$\mathbf{p}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \textit{ padre di } \mathbf{d}$
ben definita perchè tutti hanno un padre!!!

13 Nozione di teoria ed esempi

Ora applichiamo quanto appreso precedentemente sulla logica classica con uguaglianza allo studio di alcune sue teorie. In senso lato passiamo dallo studio della logica a quello della scienza, ovvero di una teoria scientifica. Ci limiteremo alquanto in questo proposito, perchè ci soffermeremo solo a studiare l'aritmetica di Peano e alcune teorie tratte da contesti di vita comune.

Def. 13.1 (teoria) *Con il termine* **teoria** *si intende un'estensione del calcolo della logica classica con uguaglianza* $\mathbf{LC}_=$ *con degli* **assiomi extralogici** *indicati in una lista*

- *Ax.1*
- *Ax.2*
- *Ax.3*
- *Ax.4*
- *...*
- *Ax.k*

e le seguenti **regole di composizione**

$$\frac{\vdash \mathtt{fr} \quad \boldsymbol{\Gamma}, \mathtt{fr}, \boldsymbol{\Gamma}' \vdash \boldsymbol{\Delta}}{\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Gamma}' \vdash \boldsymbol{\Delta}}\ comp$$

ove `fr` *è una formula del linguaggio predicativo della teoria.*

Ovvero in breve

TEORIA predicativa = LOGICA predicativa + regole composizione + assiomi EXTRALOGICI

Def. 13.2 (sequente derivabile in una teoria $\mathcal{T}$) Un sequente $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{\Delta}$ si dice **derivabile** nella **teoria predicativa** $\mathcal{T}$
se esiste un albero avente

- $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{\Delta}$ come radice;
- ogni foglia è istanza di un assioma di $\mathcal{T}$
  ossia o di un assioma logico di $\mathbf{LC}_=$ o di un **assioma extralogico specifico** di $\mathcal{T}$;
- l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di T ovvero delle regole di $\mathbf{LC}_=$ e delle regole di composizione.

Def. 13.3 Una formula `fr` si dice **teorema** di una specifica teoria $\mathcal{T}$ se è *derivabile nella teoria* $\mathcal{T}$ (ovvero è una "*tautologia di* $\mathcal{T}$").

Osservazione: Tutte le tautologie classiche sono teoremi di ogni teoria predicativa!!!

13.1 Come derivare in una teoria

Come nel caso delle teorie proposizionali anche per le teorie predicative la regola di composizione si può usare in due modi che qui ripetiamo per comodità del lettore supponendo che $\mathcal{T}$ sia una teoria predicativa determinata dagli assiomi extralogici

- Ax.1
- ...
- Ax.k

1. **Uso della regola di composizione su assiomi**:

   Le formule $\texttt{fr}$ che si ottengono da una derivazione in $\mathbf{LC}_=$ di $\texttt{fr}$ con l'uso di assiomi extralogici $\mathrm{Ax}.\mathbf{i_1}, \mathrm{Ax}.\mathbf{i_2}\ldots$ come premesse diventano *teoremi della teoria* $\mathcal{T}$ componendo con gli assiomi.

   Infatti, per esempio se si è costruita una *derivazione* π *con due assiomi extralogici come premesse*

$$\dfrac{\pi}{\mathrm{Ax}.\mathbf{i_1}, \mathrm{Ax}.\mathbf{i_2} \vdash \texttt{fr}}$$

   si può comporre questa derivazione con la regola di composizione *fino a trovare una derivazione di* $\vdash \texttt{fr}$ *nella teoria* $\mathcal{T}$ *in tal modo*

$$\dfrac{\vdash \mathrm{Ax}.\mathbf{i_1} \qquad \dfrac{\vdash \mathrm{Ax}.\mathbf{i_2} \qquad \dfrac{\pi}{\mathrm{Ax}.\mathbf{i_1}, \mathrm{Ax}.\mathbf{i_2} \vdash \texttt{fr}}}{\mathrm{Ax}.\mathbf{i_1} \vdash \texttt{fr}}\ \text{comp}}{\vdash \texttt{fr}}\ \text{comp}$$

   $\Rightarrow$ e quindi la derivazione finale mostra che $\texttt{fr}$ è un **teorema della teoria T**.

2. **Uso della regola di composizione su teoremi già noti**:

IN UNA TEORIA LA CONOSCENZA SI ACCUMULA con la regola comp:

Se in una teoria si è *già dimostrato il teorema* $\vdash \mathtt{T}_1$ ovvero si è già trovata una derivazione π_1

$$\frac{\pi_1}{\vdash \mathtt{T}_1}$$

allora *si può usare la formula* $\mathtt{T}_1$ *come premessa per derivare un'altra formula* T_2.
Infatti costruita una derivazione π_2 nella teoria del tipo

$$\frac{\pi_2}{\mathtt{T}_1 \vdash \mathtt{T}_2}$$

allora **si possono comporre le derivazioni** π_1 **e** π_2 **con comp**
per ottenere una derivazione di $\vdash \mathtt{T}_2$ (senza premesse)!! nella teoria
in tal modo

$$\frac{\dfrac{\pi_1}{\vdash \mathtt{T}_1} \qquad \dfrac{\pi_2}{\mathtt{T}_1 \vdash \mathtt{T}_2}}{\vdash \mathtt{T}_2}\ \text{comp}$$

ovvero
in una **teoria** *si possono derivare* **nuovi teoremi componendo** con derivazioni di **teoremi già noti**

Esercizio: si provi che le regole di composizioni sono valide.

Le regole di composizioni sono anche sicure? NO, le regole di composizioni NON conservano la validità dal basso verso l'alto come si vede da questo controesempio

$$\frac{\vdash A \quad \textbf{NON Valido} \qquad\qquad A \vdash C \to C \quad \textbf{Valido}}{\vdash C \to C \quad \textbf{Valido}}\ \text{comp}$$

che funziona per provare che la prima inversa della regola di composizione

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}{\vdash \mathtt{fr}}\ \text{inv1-comp}$$

NON è valida.

Nel seguito identificheremo una teoria designando i SOLI assiomi extralogici.

13.2 Attenzione alla consistenza di una teoria

L'aggiunta delle regole di **composizione** e di assiomi extralogici a $\mathbf{LC}_=$ per formare una teoria fa sì che NON sia più evidente che la teoria è consistente ovvero NON contradditoria ovvero che $\vdash \perp$ NON sia derivabile nella teoria.

Il problema è serio in quanto se la teoria deriva il falso allora è una teoria INUTILE in quanto permette di derivare ogni formula:

Proposition 13.4 *Se in una teoria $\mathcal{T}$ si riesce a derivare il falso, ovvero il sequente $\vdash\perp$, allora in $\mathcal{T}$ ogni formula* $\mathtt{fr}$ *è teorema ovvero si deriva* $\vdash \mathtt{fr}$ *per OGNI formula* $\mathtt{fr}$.

Dim. Sia

$$\frac{\pi_1}{\vdash\perp}$$

la derivazione del falso che si assume esistere in $\mathcal{T}$. Allora per ogni formula $\mathtt{fr}$ si trova in $\mathcal{T}$ una derivazione di $\vdash \mathtt{fr}$ del tipo

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\vdash \perp} \qquad \dfrac{\textbf{ax-id}}{\perp \vdash \mathtt{fr}}}{\vdash \mathtt{fr}}\ \text{comp}$$

Risulta invece evidente che il calcolo della logica predicativa con uguaglianza $\mathbf{LC}_=$ è consistente:

Theorem 13.5 (CONSISTENZA calcolo $\mathbf{LC}_=\mathcal{T}$) *Il calcolo* $\mathbf{LC}_=$ *NON può derivare il falso, ovvero* $\vdash \perp$ *NON è derivabile in* $\mathbf{LC}_=$*, ovvero il calcolo è* **consistente** *oppure* **NON contradditorio**.

Prova: se $\vdash \perp$ fosse derivabile in $\mathbf{LC}_=$ allora ci sarebbe una derivazione con radice $\vdash \perp$ ma NESSUNA regola di $\mathbf{LC}_=$, eccetto le regole di scambio, è applicabile dal basso verso l'alto a partire da $\vdash \perp$, da cui concludiamo che $\vdash \perp$ NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$.

13.2.1 L'aggiunta delle regole di composizione NON cambia i teoremi di $\mathbf{LC}_=$

Sappiamo dal teorema 9.25 che il calcolo $\mathbf{LC}_=$ è valido e completo rispetto alla semantica classica. Questo significa che se anche aggiungiamo regole valide nella semantica classica ad $\mathrm{LC}_=$ NON aumentiamo il numero dei sequenti derivabili in $\mathrm{LC}_=$, e quindi dei teoremi di $\mathrm{LC}_=$. In particolare si dimostra il cosidetto *teorema del taglio* ovvero che:

Theorem 13.6 (validità composizioni in $\mathbf{LC}_=$) *Il calcolo formale* $\mathbf{LC}_=$ *dimostra gli stessi teoremi del calcolo* $\mathbf{LC}_=+$ regole di composizione*.*

Anzi il calcolo formale $\mathbf{LC}_=$ *dimostra gli stessi teoremi del calcolo stesso con l'aggiunta delle seguenti regole di composizione più potenti*

$$\frac{\mathbf{\Gamma}' \vdash \mathtt{fr} \quad \mathbf{\Gamma}, \mathtt{fr}, \mathbf{\Gamma}\text{''} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma}', \mathbf{\Gamma}' \vdash \nabla}\ \textit{comp}$$

Il teorema 13.6 non vale in generale anche per una teoria ed è per questo che formuliamo una teoria usando le regole di composizione. Però, proprio grazie al teorema 13.6, anche in una teoria possiamo usare le seguenti regole di composizione potenziate

$$\frac{\mathbf{\Gamma}' \vdash \mathtt{fr} \quad \mathbf{\Gamma}, \mathtt{fr}, \mathbf{\Gamma}\text{''} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma}', \mathbf{\Gamma}' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

ove $\mathtt{fr}$ è una formula del linguaggio predicativo della teoria, perchè queste regole non aumentano i teoremi derivabili nella teoria stessa ma servono solo per facilitare la loro dimostrazione.

In particolare nelle teorie scientifiche utilizzate comunemente per la correttezza dei programmi queste regole di composizione potenziate sono usate in continuazione. Ad esempio per dimostrare che un certo programma termina su $\mathbf{x}$ quando $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ avendo già dimostrato che il programma termina su ogni input $\mathbf{x}$ maggiore od uguale a zero, si fa uso della regola di composizione in tal modo

$$\frac{\text{" } \mathbf{x} = \mathbf{1}\text{"} \vdash \text{"}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\text{"} \qquad \text{"}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\text{"} \vdash \text{"}\textbf{Il programma termina su x}\text{"}}{\text{"}\mathbf{x} = \mathbf{1}\text{"} \vdash \text{"}\textbf{Il programma termina su x}\text{"}}\ \text{comp}$$

ove "$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$" $\vdash$ "**Il programma termina su x**" può essere pensato come **lemma** per concludere

$$\text{"}\mathbf{x} = \mathbf{1}\text{"} \vdash \text{"}\textbf{Il programma termina su x}\text{"}$$

13.3 Esempio di teoria informatica: la teoria di Hoare

La teoria di Hoare è ottenuta aggiungendo all'**aritmetica di Peano classica** (che descriveremo precisamente in seguito) le seguenti regole per derivare **correttezza parziale dei programmi**

$$\frac{(\!|\phi|\!)\ C_1\ (\!|\eta|\!) \qquad (\!|\eta|\!)\ C_2\ (\!|\psi|\!)}{(\!|\phi|\!)\ C_1; C_2\ (\!|\psi|\!)}\ \text{Composition}$$

$$\frac{}{(\!|\psi[E/x]|\!)\ x = E\ (\!|\psi|\!)}\ \text{Assignment}$$

$$\frac{(\!|\phi \wedge B|\!)\ C_1\ (\!|\psi|\!) \qquad (\!|\phi \wedge \neg B|\!)\ C_2\ (\!|\psi|\!)}{(\!|\phi|\!)\ \texttt{if}\ B\ \{C_1\}\ \texttt{else}\ \{C_2\}\ (\!|\psi|\!)}\ \text{If-statement}$$

$$\frac{(\!|\psi \wedge B|\!)\ C\ (\!|\psi|\!)}{(\!|\psi|\!)\ \texttt{while}\ B\ \{C\}\ (\!|\psi \wedge \neg B|\!)}\ \text{Partial-while}$$

$$\frac{\vdash_{\mathrm{AR}} \phi' \to \phi \qquad (\!|\phi|\!)\ C\ (\!|\psi|\!) \qquad \vdash_{\mathrm{AR}} \psi \to \psi'}{(\!|\phi'|\!)\ C\ (\!|\psi'|\!)}\ \text{Implied}$$

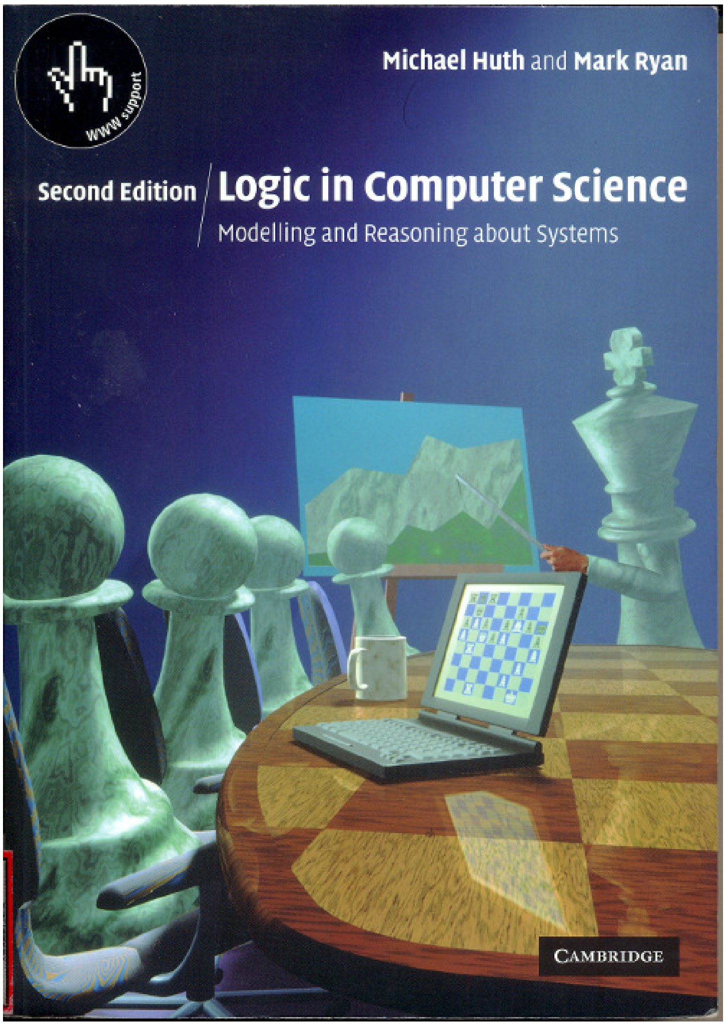
Figure 4.1. Proof rules for partial correctness of Hoare triples.

IMPARERETE A DERIVARE FORMALMENTE
QUESTE PARTI LOGICHE NEL CORSO

esempio di **derivazione** di correttezza

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\!|1=1|\!)\ \texttt{y = 1}\ (\!|y=1|\!)}{(\!|\top|\!)\ \texttt{y = 1}\ (\!|y=1|\!)}\,i \qquad \dfrac{(\!|y=1\wedge 0=0|\!)\ \texttt{z = 0}\ (\!|y=1\wedge z=0|\!)}{(\!|y=1|\!)\ \texttt{z = 0}\ (\!|y=1\wedge z=0|\!)}\,i}{(\!|\top|\!)\ \texttt{y = 1; z = 0}\ (\!|y=1\wedge z=0|\!)}\,c \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\!|y\cdot(z+1)=(z+1)!|\!)\ \texttt{z = z+1}\ (\!|y\cdot z=z!|\!)}{(\!|y=z!\wedge z\neq x|\!)\ \texttt{z = z+1}\ (\!|y\cdot z=z!|\!)}\,i \qquad (\!|y\cdot z=z!|\!)\ \texttt{y = y*z}\ (\!|y=z!|\!)}{(\!|y=z!\wedge z\neq x|\!)\ \texttt{z = z+1; y = y*z}\ (\!|y=z!|\!)}\,c}{(\!|y=z!|\!)\ \texttt{while (z != x) \{z = z+1; y = y*z\}}\ (\!|y=z!\wedge z=x|\!)}\,w}{(\!|y=1\wedge z=0|\!)\ \texttt{while (z != x) \{z = z+1; y = y*z\}}\ (\!|y=x!|\!)}\,i}{(\!|\top|\!)\ \texttt{y = 1; z = 0; while (z != x) \{z = z+1; y = y*z\}}\ (\!|y=x!|\!)}\,c$$

testo di riferimento



Questa teoria si può usare per costruire un programma che certifica la correttezza dei programmi all'interno della logica di Hoare e il calcolo dei sequenti dell'aritmetica.

13.4 Altro esempio di teoria matematica: teoria dei monoidi commutativi

$$\mathrm{Mon}_{\mathbf{cl}} \equiv \mathbf{LC}+ \ \mathbf{Ax\ 1.}\ + \ \mathbf{Ax\ 2.}\ + \ \mathbf{Ax\ 3.}+ \ \mathbf{comp}$$

ove $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono supposti **elementi del monoide**

Ax1.$\vdash\forall$**x x+0=x**
"zero è elemento neutro"

Ax2.$\vdash\forall$**x** $\forall$**y x+y=y+x**
"somma è commutativa"

Ax3.$\vdash\forall$**x** $\forall$**y** $\forall$**z (x+y)+z=x+(y+z)**
"somma è associativa"

esercizio:
provare che in $\mathrm{Mon}_{\mathbf{cl}}$ si deriva

$$\vdash \forall \mathbf{x} \;\; \mathbf{0+x=x}$$

13.5 Esercizi su teorie concrete

Diamo di seguiti esempi di teorie concrete e come esercizio deriviamo alcune verità su di esse.

1. Sia T_{bi} la teoria che estende $\mathrm{LC}_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
   - Sia Chiara che Pina vanno in bici.
   - Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va
   - Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.
   - Chiara non va in bici se Elia non ci va.

   Si consiglia di usare:
   V(x)= x va in bici,
   c=Chiara, p=Pina, e=Elia, g=Giorgio, f=Fabio.

   Dedurre poi le seguenti affermazioni in T_{bi}:
   - Fabio non va in bici.
   - Giorgio va in bici.
   - Se Fabio va in bici allora Chiara non ci va.
   - Elia va in bici.
   - Qualcuno va in bici e qualcuno non ci va.

   Soluzione
   - Ax. 1 Sia Chiara che Pina vanno in bici.

     $$V(c)\,\&\,V(p)$$

   - Ax. 2 Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va.

     $$V(p) \to V(g) \vee V(f)$$

   - Ax. 3 Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.

     $$V(f) \to \neg V(c)$$

   - Ax. 4 Chiara non va in bici se Elia non ci va.

     $$\neg V(e) \to \neg V(c)$$

   - 5. Fabio non va in bici.

     $$\vdash \neg V(f)$$

     si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \text{Ax 3.}$}
\AxiomC{$\neg\text{-ax}_{dx_1}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash V(f), \neg V(f)$}
\AxiomC{$\vdash \text{Ax 1.}$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$V(c), V(p) \vdash V(c), \neg V(f)$}
\RightLabel{\&S}
\UnaryInfC{$V(c) \& V(p) \vdash V(c), \neg V(f)$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\vdash V(c), \neg V(f)$}
\RightLabel{$\neg$S}
\UnaryInfC{$\neg V(c) \vdash \neg V(f)$}
\RightLabel{$\rightarrow$−S}
\BinaryInfC{$V(f) \rightarrow \neg V(c) \vdash \neg V(f)$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\vdash \neg V(f)$}
\end{prooftree}
$$

- 6. Giorgio va in bici.

$$\vdash V(g)$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \text{Ax 2.}$}
\AxiomC{π_1}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash V(p), V(g)$}
\AxiomC{π_2}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$V(g) \vee V(f) \vdash V(g)$}
\RightLabel{$\rightarrow$−S}
\BinaryInfC{$V(p) \rightarrow V(g) \vee V(f) \vdash V(g)$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\vdash V(g)$}
\end{prooftree}
$$

dove π_1 è la seguente derivazione

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \text{Ax 1.}$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$V(c), V(p) \vdash V(p), V(g)$}
\RightLabel{\&−S}
\UnaryInfC{$V(c) \& V(p) \vdash V(p), V(g)$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$\vdash V(p), V(g)$}
\end{prooftree}
$$

e dove π_2 è la seguente derivazione

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$V(g) \vdash V(g)$}
\AxiomC{$\vdash 5.$}
\AxiomC{$\neg\text{-ax}_{sx1}$}
\noLine
\UnaryInfC{$V(f), \neg V(f) \vdash V(g)$}
\RightLabel{comp}
\BinaryInfC{$V(f) \vdash V(g)$}
\RightLabel{$\vee$−S}
\BinaryInfC{$V(g) \vee V(f) \vdash V(g)$}
\end{prooftree}
$$

- 7. Se Fabio va in bici allora Chiara non va

$$\vdash V(f) \rightarrow \neg V(c)$$

che è l'assioma 3. e dunque

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{Ax.3}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash V(f) \rightarrow \neg V(c)$}
\end{prooftree}
$$

è già una derivazione!!

- 8. Elia va in bici.

$$\vdash V(e)$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax.4} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax}_{dx_2}\text{-}\neg}{\vdash \neg V(e), V(e)} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash \text{Ax.1} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{V(c), V(p) \vdash V(c), V(e)}}{V(c) \& V(p) \vdash V(c), V(e)}\,\&\text{–S}}{\vdash V(c), V(e)}\,\text{comp}}{\neg V(c) \vdash V(e)}\,\neg\text{–S}}{\neg V(e) \to \neg V(c) \vdash V(e)}\,\to\text{–S}}{\vdash V(e)}\,\text{comp}$$

- 9. Qualcuno va in bici e qualcuno non ci va.

$$\vdash \exists x\, V(x) \& \exists y\, \neg V(y)$$

si può derivare in T_{bi} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash 6. \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{V(g) \vdash V(g)}}{V(g) \vdash \exists x\, V(x)}\,\exists\text{–D}_v}{\vdash \exists x\, V(x)}\,\text{comp} \qquad \dfrac{\vdash 5. \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{\neg V(f) \vdash \neg V(f)}}{\neg V(f) \vdash \exists y\, \neg V(y)}\,\exists\text{–D}_v}{\vdash \exists y\, \neg V(y)}\,\text{comp}}{\vdash \exists x\, V(x)\ \&\ \exists y\, \neg V(y)}\,\&\text{–S}$$

2. Sia T_{vec} la teoria ottenuta estendendo $\text{LC}_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
   - Pippo è più vecchio di Ada.
   - Nessuno è più vecchio di Gigi.
   - Chi è più vecchio di Pippo è piú vecchio di Gigi.
   - Ada è più vecchia di Chiara.
   - Non si dà il caso che Chiara non sia più vecchia di Titti.
   - Se uno è più vecchio di un altro e quest'altro è più vecchio di un terzo, il primo è più vecchio del terzo.
   - Chiara non è Titti.

   suggerimento: si consiglia di usare:
   A(x,y)= x è più vecchio di y
   g=Gigi, p= Pippo, a= Ada, c= Chiara, t=Titti
   uno=x, altro =y, terzo=z

   Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

   Derivare
   - Qualcuno è più vecchio di Ada.
   - Nessuno è più vecchio di Pippo.

- Pippo è più vecchio di Chiara.
- Qualcuno è piú vecchio di Titti.
- Ada è più vecchia di qualcuno che non è Chiara.

Soluzione

- Ax.1 Pippo è più vecchio di Ada.
$$A(p,a)$$
- Ax.2 Nessuno è più vecchio di Gigi.
$$\neg\exists x\ A(x,g)$$
- Ax.3 Chi è più vecchio di Pippo è piú vecchio di Gigi.
$$\forall x\ (\,A(x,p) \to A(x,g)\,)$$
- Ax.4 Non si dà il caso che Chiara non sia più vecchia di Titti.
$$\neg\neg A(c,t)$$
- Ax.5 Se uno è più vecchio di un altro e quest'altro è più vecchio di un terzo, il primo è più vecchio del terzo.
$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (\,A(x,y)\ \&\ A(y,z)\ \to\ A(x,z)\,)$$
- Ax.6 Ada è più vecchia di Chiara.
$$A(a,c)$$
- Ax.7 Chiara non è Titti.
$$c \neq t$$
- 8. Non esiste qualcuno più vecchio di Pippo.
$$\neg\exists x\ A(x,p)$$

Si può derivare in T_{vec} come segue

$$
\dfrac{\vdash \text{Ax 2.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{A(x,p) \vdash A(x,p),\, A(x,g)} \qquad \overset{\text{ax-id}}{A(x,p),\, A(x,g) \vdash A(x,g)}}{A(x,p),\, A(x,p) \to A(x,g) \vdash A(x,g)}\ \to\text{-S}}{A(x,p),\, \forall x\ (A(x,p) \to A(x,g)) \vdash A(x,g)}\ \forall\text{-S}_v}{\forall x\ (A(x,p) \to A(x,g)),\, A(x,p) \vdash A(x,g)}\ sc\text{-S}}{\forall x(A(x,p) \to A(x,g)),\, A(x,p) \vdash \exists x\ A(x,g)}\ \exists\text{-D}_v}{\forall x(A(x,p) \to A(x,g)),\, \exists x A(x,p) \vdash \exists x A(x,g)}\ \exists\text{-S (vedi sotto)}}{\exists x\ A(x,p) \vdash \exists x\ A(x,g)}\ \text{comp}}{\vdash \neg\exists x\ A(x,p),\, \exists x\ A(x,g)}\ \neg\text{-D}}{\vdash \exists x\ A(x,g),\, \neg\exists x\ A(x,p)}\ sc\text{-D}}{\neg\exists x\ A(x,g) \vdash \neg\exists x\ A(x,p)}\ \neg\text{-S}}{\vdash \neg\exists x\ A(x,p)}\ \text{comp}
$$

ove l'applicazione di $\exists$−S è possibile perchè x non è libera in $\forall x\ (\,A(x,p) \to A(x,g)\,),\ \exists x\ A(x,p) \vdash \exists x\ A(x,g)$.

- 9. Qualcuno è più vecchio di Ada.

$$\exists x\ A(x,a)$$

Si può derivare in T_{vec} come segue

$$\dfrac{\vdash \text{ Ax 1.} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{A(p,a) \vdash A(p,a)}}{A(p,a) \vdash \exists x\ A(x,a)}\ \exists\text{–D}_v}{\vdash \exists x\ A(x,a)}\ \text{comp}$$

- 10. Qualcuno è più vecchio di Titti.

$$\exists x\ A(x,t)$$

si può derivare come segue:

$$\dfrac{\vdash \text{ Ax 4.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{A(c,t) \vdash A(c,t)}}{A(c,t) \vdash \exists x\ A(x,t)}\ \exists\text{–D}_v}{\neg\neg A(c,t) \vdash \exists x\ A(x,t)}\ \neg\neg\text{–S}}{\vdash \exists x\ A(x,t)}\ \text{comp}$$

- 11. Pippo è più vecchio di Chiara.

$$A(p,c)$$

Si può derivare in T_{vec} come segue

$$\dfrac{\vdash \text{ Ax 1.} \qquad \dfrac{\vdash \text{ Ax 6.} \qquad \dfrac{\vdash \text{ Ax 5.} \qquad \begin{matrix} \pi \\ \vdots \\ A(a,c),\ A(p,a),\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (\ A(x,y)\ \&\ A(y,z) \ \rightarrow\ A(x,z)\,) \vdash A(p,c) \end{matrix}}{A(a,c),\ A(p,a) \vdash A(p,c)}\ \text{comp}}{A(p,a) \vdash A(p,c)}\ \text{comp}}{\vdash A(p,c)}\ \text{comp}$$

dove π è la seguente derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{A(a,c),\ A(p,a),\ A(p,c) \vdash A(p,c)} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{A(a,c),\ A(p,a) \vdash A(p,a),\ A(p,c)} \qquad \dfrac{\text{ax-id}}{A(a,c),\ A(p,a) \vdash A(a,c),\ A(p,c)}}{A(a,c),\ A(p,a) \vdash A(p,a)\ \&\ A(a,c),\ A(p,c)}\ \&\text{–S}}{A(a,c),\ A(p,a),\ A(p,a)\ \&\ A(a,c) \ \rightarrow\ A(p,c) \vdash A(p,c)}\ \rightarrow\text{–S}}{A(a,c),\ A(p,a),\ \forall z\ (\ A(p,a)\ \&\ A(a,z) \ \rightarrow\ A(p,z)\,) \vdash A(p,c)}\ \forall\text{–S}_v}{A(a,c),\ A(p,a),\ \forall y\ \forall z\ (\ A(p,y)\ \&\ A(y,z) \ \rightarrow\ A(p,z)\,) \vdash A(p,c)}\ \forall\text{–S}_v}{A(a,c),\ A(p,a),\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (\ A(x,y)\ \&\ A(y,z) \ \rightarrow\ A(x,z)\,) \vdash A(p,c)}\ \forall\text{–S}_v$$

- 12. Ada è più vecchia di qualcuno che non è Chiara.

$$\exists x\ (\ A(a,x)\ \&\ x \neq c\,)$$

si deriva componendo con Ax.6, Ax.4, Ax.7 e Ax.5 e in particolare in quest'ultimo si sale con $\forall\text{–}S_v$ ponendo a al posto di x, poi c al posto di y e infine t al posto di z. Per concludere occorre applicare $\exists\text{–}D_v$ con t al posto di x.

13.6 Ulteriore esempio di Teoria: l'Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è una teoria ottenuta aggiungendo a $LC_{=}$ le seguenti regole

$$\frac{\vdash \mathtt{fr} \quad \Gamma, \mathtt{fr}, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

e i seguenti assiomi:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Ax1.} \vdash\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{s}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \\
&\mathbf{Ax2.} \vdash\ \forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ (\ \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}\ ) \\
&\mathbf{Ax3.} \vdash\ \forall \mathbf{x}\ \ \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \\
&\mathbf{Ax4.} \vdash\ \forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \mathbf{x} + \mathbf{s}(\mathbf{y}) = \mathbf{s}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\
&\mathbf{Ax5.} \vdash\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \\
&\mathbf{Ax6.} \vdash\ \forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{s}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \\
&\mathbf{Ax7.} \vdash\ \mathbf{A}(\mathbf{0})\ \&\ \forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{s}(\mathbf{x}))\ )\ \rightarrow\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

In tale teoria il numerale **n** si rappresenta in tal modo

$$\mathbf{n} \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$\mathbf{1} \equiv \mathbf{s}(\mathbf{0})$$
$$\mathbf{2} \equiv \mathbf{s}(\,\mathbf{s}(\mathbf{0})\,)$$

ATTENZIONE nel linguaggio dell'aritmetica di Peano oltre alla costante

$$0$$

vi sono 3 simboli di funzione sono:

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) \qquad\qquad \mathbf{x}{+}\mathbf{y} \qquad\qquad \mathbf{x}{\cdot}\mathbf{y}$$

quello del successore di **x**, quello della somma e quello del prodotto.

C'è un *modello inteso* per questo linguaggio ed è quello con dominio

$$\mathbf{D} \equiv \text{ numeri naturali}$$

ove la funzione successore è la funzione che assegna ad un numero naturale proprio il suo successore:

$$\mathsf{s}(\mathbf{x})^{\mathbf{Nat}}(-) : \mathbf{Nat} \longrightarrow \mathbf{Nat} \qquad\qquad \mathsf{s}(\mathbf{x})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{n}) \equiv \mathbf{n} + \mathbf{1}$$

il simbolo di somma $x{+}y$ interpretato nel modello dei naturali come la somma di due numeri naturali:

$$(\mathbf{x}{+}\mathbf{y})^{\mathbf{Nat}}(-,-) : \mathbf{Nat} \times \mathbf{Nat} \longrightarrow \mathbf{Nat} \qquad\qquad (\mathbf{x}{+}\mathbf{y})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \equiv \mathbf{n} + \mathbf{m}$$

e il simbolo di moltiplicazione $\mathbf{x}{\cdot}\mathbf{y}$ interpretato come la moltiplicazione di due numeri naturali:

$$(\mathbf{x}{\cdot}\mathbf{y})^{\mathbf{Nat}}(-,-) : \mathbf{Nat} \times \mathbf{Nat} \longrightarrow \mathbf{Nat} \qquad\qquad (\mathbf{x}{\cdot}\mathbf{y})^{\mathbf{Nat}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}$$

Vista la presenza di simboli di funzioni di seguito diamo la definizione generale di linguaggio predicativo con simboli di funzione.

13.6.1 Cosa è derivabile in PA...

Abbiamo già fatto notare come nel calcolo dei sequenti della logica classica predicativa $\mathbf{LC}_{=}$ sia facile dimostrare che il sequente $\vdash\perp$ NON è derivabile, ovvero che la logica classica predicativa è consistente, o NON contradditoria. Non è invece evidente il fatto che il sequente $\vdash\perp$ NON sia derivabile nell'aritmetica di Peano **PA**. Anzi, secondo il teorema di incompletezza di Gödel si può dimostrare che il sequente $\vdash\perp$ NON è derivabile in **PA** solo assumendo come veri assiomi più potenti di quelli di **PA** (quelli di **PA** non bastano a dimostrare la consistenza degli stessi).

Ora si noti il seguente importante proposizione

Proposition 13.7 *Se l'aritmetica di Peano* **PA** *è consistente, ovvero in essa NON si deriva il sequente* $\vdash\perp$*, allora NON è possibile che in* **PA** *si derivi una formula* $\mathtt{fr}$*, ovvero il sequente* $\vdash \mathtt{fr}$*, e ANCHE la sua negazione, ovvero il sequente* $\vdash \neg\mathtt{fr}$.

Dim. Supponiamo che in **PA** esistano una derivazione di $\vdash \mathtt{fr}$ e un'altra per $\vdash \neg\mathtt{fr}$ che indichiamo rispettivamente in tal modo

$$\dfrac{\pi_1}{\vdash \mathtt{fr}} \qquad\qquad \dfrac{\pi_2}{\vdash \neg\mathtt{fr}}$$

Allora usando la regola di composizione otteniamo una derivazione del falso come segue

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\vdash \mathtt{fr}} \quad \dfrac{\pi_2}{\vdash \neg\mathtt{fr}}}{\vdash \mathtt{fr}\,\&\,\neg\mathtt{fr}}\,\&\text{–D} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathtt{fr}\vdash\mathtt{fr},\perp\end{array}}{\mathtt{fr}\,,\neg\mathtt{fr}\vdash\perp}\,\neg\text{–S}}{\mathtt{fr}\,\&\,\neg\mathtt{fr}\vdash\perp}\,\&\text{–S}}{\vdash\perp}\,\text{comp}$$

Ma ció è assurdo perchè contraddice la nostra ipotesi che in **PA** il falso NON è derivabile e dunque NON è possibile che esistano entrambe le derivazioni.

Quindi dalla proposizione sopra si deduce che:

- Se **PA** è consistente e si deriva una formula $\mathtt{fr}$, ovvero il sequente $\vdash \mathtt{fr}$, allora NON si deriva in **PA** la sua negazione $\vdash \neg\mathtt{fr}$;
- Se **PA** è consistente e si deriva una formula negata $\neg\mathtt{fr}$, ovvero il sequente $\vdash \neg\mathtt{fr}$, allora NON si deriva in **PA** la formula ovvero il sequente $\vdash \mathtt{fr}$

Esempio Chiaramente $\vdash \mathbf{1}=\mathbf{0}$ NON è derivabile in **PA** se **PA** è consistente per la proposizione sopra in quanto in **PA** si dimostra che $\vdash \mathbf{1}\neq\mathbf{0}$ ad esempio in tal modo: si ricordi che $\mathbf{1} \equiv \mathbf{s}(\mathbf{0})$

$$\dfrac{\vdash \mathbf{Ax}.1 \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ \mathbf{Ax.1}\,,\mathbf{s}(\mathbf{0})\neq\mathbf{0}\vdash\mathbf{s}(\mathbf{0})\neq\mathbf{0}\end{array}}{\forall\mathbf{x}\;\mathbf{s}(\mathbf{x})\neq\mathbf{0}\vdash\mathbf{s}(\mathbf{0})\neq\mathbf{0}}\,\forall\text{–S}}{\vdash\mathbf{s}(\mathbf{0})\neq\mathbf{0}}\,\text{comp}$$

Infine ricordiamo che *le tautologie logiche di* $\mathbf{LC}_{=}$ *sono pure derivabili in* **PA** *e quindi i paradossi logici di* $\mathbf{LC}_{=}$ *(la cui negazione, ricorda, è tautologia!) sono pure paradossi per* **PA**.

Approfondimento su consistenza di PA*: Il famoso logico Kurt Gödel ha dimostrato che se l'aritmetica di Peano* **PA** *è consistente, allora esiste una formula* $\mathtt{fr}$ *SENZA VARIABILI libere nel linguaggio di* **PA** *(che ricordiamo è fatto solo di formule predicative a partire dall'uguaglianza e dai simboli per funzione di successore, somma e prodotto e la costante zero) che per* **PA** *è un'opinione ovvero NON è derivabile in* **PA** *nè* $\vdash \mathtt{fr}$ *e nè la sua negazione* $\vdash \neg\mathtt{fr}$ *(questo fatto va sotto il nome di* I teorema di incompletezza di Gödel*).*

Anzi, Gödel ha pure dimostrato che è un'opinione per **PA** *la formula* `fr` *che codifica in aritmetica il fatto che il sequente* $\vdash\perp$ *NON è derivabile dai suoi assiomi (questo fatto è un caso particolare del* II teorema di incompletezza di Gödel*) da cui segue che solo degli assiomi più potenti di quelli di* **PA** *possono provare che* **PA** *è consistente e quindi non contraddittoria.*

13.6.2 Esercizi

1. mostrare che in logica classica con uguaglianza sono validi i sequenti o regole che seguono:

$$\begin{array}{l}\text{cf}^* \\ \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u)\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u)\end{array}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \dfrac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \qquad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

2. Mostrare se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi:

   (a) $1 + 0 = 1$

   Soluzione: si può derivare per esempio così

$$\dfrac{\vdash \mathbf{Ax}.3 \qquad \dfrac{\dfrac{\mathbf{ax\text{-}id}}{\mathbf{Ax}.3\,,\ s(0){+}0{=}s(0) \vdash s(0){+}0{=}s(0)}}{\forall x\ x{+}0{=}x \vdash s(0){+}0{=}s(0)}\ \forall\text{–S}}{\vdash s(0){+}0{=}s(0)}\ \text{comp}$$

   (b) $0 + 1 = 1$

   (c) $5 + 1 = 6$

   I soluzione

   Il sequente si può derivare anche in tal modo usando la regola valida tr-r

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_1 \\ \vdash\ 5 + 1 = s(5 + 0)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_2 \\ \vdash\ s(5 + 0) = s(5)\end{array}}{\vdash\ 5 + 1 = 6}\ \text{tr} - \text{r}$$

   ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash\ \text{Ax 4.} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{5+1=s(5+0)\ \vdash\ 5+1=s(5+0)}}{\forall y\ 5+s(y)=s(5+y)\ \vdash\ 5+1=s(5+0)}\ \forall\text{-S}_v}{\forall x\ \forall y\ x+s(y)=s(x+y)\ \vdash\ 5+1=s(5+0)}\ \forall\text{-S}_v}{\vdash\ 5+1=s(5+0)}\ \text{comp}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash\ \text{Ax 3.} \qquad \dfrac{\overset{\text{cf}^*}{5+0=5\ \vdash\ s(5+0)=s(5)}}{\forall x\ x+0=x\ \vdash\ s(5+0)=s(5)}\ \forall\text{-S}_v}{\vdash\ s(5+0)=s(5)}\ \text{comp}$$

II soluzione

$$\dfrac{\vdash \textbf{Ax 4.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \textbf{Ax 3.} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\textbf{=-ax}}{\vdash\ \mathbf{s(5+0)=s(5+0)}}}{\mathbf{5+0=5}\ \vdash\ \mathbf{s(5+0)=s(5)}}\ =\text{-S}_{\mathbf{v}}}{\forall x\ x+0=x\ \vdash\ s(5+0)=s(5)}\ \forall\text{-S}_{\mathbf{v}}}{\vdash\ s(5+0)=s(5)}\ \text{comp}}{\mathbf{s(5+0)=5+1}\ \vdash\ \mathbf{5+1=6}}\ =\text{-S}_{\mathbf{v}}}{\mathbf{5+1=s(5+0)}\ \vdash\ \mathbf{5+1=6}}\ \textbf{sy-l}}{\forall y\ 5+s(y)=s(5+y)\ \vdash\ 5+1=6}\ \forall\text{-S}_{\mathbf{v}}}{\forall x\ \forall y\ x+s(y)=s(x+y)\ \vdash\ 5+1=6}\ \forall\text{-S}_{\mathbf{v}}}{\vdash\ 5+1=6}\ \text{comp}$$

ove si ricorda che $\mathbf{6} \equiv \mathbf{s(5)}$ e nell'ultimo passaggio sopra si è sostituito $\mathbf{s(5)}$ con $\mathbf{s(5+0)}$.

(d) $\vdash \forall x\ (\ s(x)=s(5) \rightarrow x=5\ )$

(e) $\vdash 0=4\cdot 0$

(f) $\vdash \forall x\ (\ x=7 \rightarrow s(x)=s(7)\ )$

(g) $\vdash 1+2=3$

(h) $\vdash 5\cdot 1=5$

(i) $\vdash \exists x\ \exists y\ x \neq y$

(j) $\vdash \forall x\ 0 \neq s(x)$

13.6.3 Induzione in aritmetica

L'assioma *Ax*7. dell'aritmetica di Peano PA si chiama **principio di induzione**. L'induzione è un principio proprio del concetto astratto dell'insieme dei numeri naturali. Questo insieme colleziona POTENZIALMENTE i **numeri** costruibili con tali regole

$$0 \in Nat \qquad \dfrac{n \in Nat}{\mathbf{s}(n) \in Nat}$$

ove $\mathbf{s(n)}$ si dice "successore di $\mathbf{n}$". Queste sono regole da intendersi come **istruzioni per costruire numeri naturali**. L'esecuzione completa di tali istruzioni non si dà nella realtà. Esiste solo nel nostro pensiero (si legga il capitolo 4 del libro di Sambin per approfondimento).

Ora per dimostrare la validità di una proprietà su TUTTI gli infiniti numeri naturali basta provare che **le regole di costruzione dei numeri CONSERVANO tale proprietà** secondo il **Principio di induzione** che afferma:

Sia $\mathbf{P(n)}$ *una proprietà definita sui numeri naturali. Se vale* $\mathbf{P(0)}$ *(*`caso zero`*) e, qualunque sia* $\mathbf{n}$*, se dal fatto che* $\mathbf{P(n)}$ *vale segue che anche* $\mathbf{P(\,s(n)\,)}$ *vale (*`caso induttivo`*) , allora per ogni naturale* $\mathbf{n}$ *si ha che* $\mathbf{P(n)}$ *vale.*

Nelle derivazioni conviene usare l'induzione nella forma della seguente regola **ind**

$$\dfrac{\Gamma\vdash P(0) \qquad \Gamma'\vdash \forall x\ (\ P(x) \to P(s(x))\ )}{\Gamma,\Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \textbf{ind}$$

che è regola derivata in PA grazie proprio all'assioma $Ax7$. ad esempio come segue

$$\dfrac{\vdash Ax7. \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash\ P(0)}{\Gamma,\Gamma' \vdash\ P(0)}\ \text{in} \qquad \dfrac{\Gamma' \vdash\ \forall x\ (\,P(x)\to P(s(x))\,)}{\Gamma,\Gamma' \vdash\ \forall x\ (\,P(x)\to P(s(x))\,)}\ \text{in}}{\Gamma,\Gamma' \vdash\ P(0)\ \&\ \forall x\ (\,P(x)\to P(s(x))\,)}\ \&\text{–D}}{\Gamma,\Gamma' \vdash\ P(0)\ \&\ \forall x\ (\,P(x)\to P(s(x))\,)\,,\ \forall x\ P(x)}\ \text{in}_{dx} \qquad \dfrac{\text{ax-id}}{\Gamma,\Gamma',\forall x\ P(x)\vdash \forall x\ P(x)}}{\Gamma,\Gamma',\ P(0)\ \&\ \forall x\ (\,P(x)\to P(s(x))\,)\to \forall x\ P(x)\ \vdash\ \forall x\ P(x)}\ \to\text{–S}}{\Gamma,\Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{comp}$$

Nella regola **ind** le premesse rappresentano i seguenti casi:
caso zero: $\mathbf{\Gamma\vdash P(0)}$
caso induttivo: $\mathbf{\Gamma'\vdash \forall x\ (\ P(x) \to P(s(x))\ )}$

Per capire il principio di induzione riflettiamo su alcuni esempi in cui serve usarlo.

13.6.4 Esempio del prigioniero

Riflettiamo e cerchiamo di rispondere al seguente quesito:

> Durante la guerra venne detto ad un prigioniero:
> **"Tu sarai ucciso la settimana prossima in un** *giorno a sorpresa* **che** *non potrai predire neppure la mattina del giorno stesso***"**

Quando verrà ucciso il prigioniero?

Si dimostra che l'affermazione sopra **è una contraddizione**, ovvero che

"NON esiste **n** *numero di giorni entro cui il prigioniero può essere ucciso a sorpresa."*

perchè per induzione sull' **n**-esimo giorno della settimana si dimostra che

$\mathbf{P(n)}$ ≡ *il prigioniero non può essere ucciso il giorno* **n** *della settimana*
assegnando ai giorni della settimana un numero contando a ritroso
0 = domenica
1 = sabato
⋮
6 = lunedì

Vediamo che valgono le ipotesi del principio di induzione:

$\mathbf{P(0)}$ $\equiv$ *il prigioniero non può essere ucciso entro il giorno* **0** *della settimana*, ovvero *la domenica*, perchè se fosse ucciso di domenica, lui giunto alla mattina della domenica saprebbe di venir ucciso in giornata, quindi **senza sorpresa**.

Se vale $\mathbf{P(n)}$ allora vale anche $\mathbf{P(s(n))}$: infatti, se vale $\mathbf{P(n)}$ allora non può essere ucciso dal giorno **0** fino al giorno **n** ma a questo punto non può essere ucciso nemmeno il giorno prima che è $\mathbf{s(n)}$ perchè giunto alla mattina del giorno $\mathbf{s(n)}$ lo prevederebbe, sapendo che vale $\mathbf{P(n)}$ ovvero che non può essere ucciso i giorni dopo da **n** fino a **0**.

Quindi concludiamo che per il principio di induzione $\mathbf{P(n)}$ vale `per ogni` **n**, ovvero che

"Non esiste n numero di giorni entro cui il prigioniero può essere ucciso a sorpresa."

13.6.5 Esempio della valigia

Mario afferma: **"In una una valigia è sempre possibile aggiungere un fazzoletto di carta"**

È corretto quanto dice Mario?

No, **non è corretto**, perchè possiamo dimostrare che

"Se in una valigia è sempre possibile aggiungere un fazzoletto di carta allora la valigia può contenere un'INFINITÀ di fazzoletti di carta"

il che non è possibile.

Per convincerci consideriamo la valigia in cui è sempre possibile aggiungere un fazzoletto di carta e poi mostriamo per induzione su un numero naturale n che vale

"fissato un qualsiasi n naturale, la valigia può contenere $n+1$ di fazzoletti di carta"

Infatti

`caso zero`: Se $n = 0$ la valigia è vuota e quindi possiamo aggiungere un fazzoletto e la valigia ne contiene uno.

`caso induttivo`: Se nella valigia ci sono **n** fazzoletti, siccome è sempre possibile aggiungere un fazzoletto allora ci stanno $\mathbf{s(n)} \equiv \mathbf{n+1}$ fazzoletti.

Conclusione: per il principio di induzione nella valigia ci stanno **k** fazzoletti per **k** grande a piacere e quindi un'infinità!!!

13.6.6 Esempio: quale definizione di mucchio?

"Se **n** chicchi di grano non sono un mucchio, allora neanche $\mathbf{n+1}$ chicchi di grano sono un mucchio"?

Sembra sensato rispondere di sì, dato che l'aggiunta di un solo chicco di grano ad alcuni chicchi di grano non li rende un mucchio se prima non lo erano ....

Però se questo vale per ogni **n** allora per il principio di induzione applicato a

$$\mathbf{P(n)} \equiv \textbf{n chicchi non sono un mucchio}$$

dimostreremmo che **NESSUN** numero di chicchi di grano formano un mucchio come segue. Prima di tutto **0** chicchi non sono un mucchio. Poi, se **n** chicchi non sono un mucchio, allora per quanto detto sopra $\mathbf{s(n)} \equiv \mathbf{n+1}$ chicchi non sono un mucchio. Dunque per il principio di induzione, ogni numero naturale **n** arbitrario di chicchi non sono un mucchio il che non è vero!!!

Dall'altra parte dire che

"ad un certo punto si ha che n + 1 chicchi di grano sono un mucchio mentre n chicchi di grano non lo sono "

neppure sembra sensato...

Infine dire che

" **se n chicchi di grano sono un mucchio allora pure n − 1 chicchi di grano sono un mucchio**"

pare sensato considerando che se togliamo un chicco ad un mucchio di chicchi di grano rimaniamo pur sempre con un mucchio di chicchi.... Ma di nuovo se ciò vale per ogni **n** allora per il principio di induzione applicato all'incontrario avremmo che **n − 2** chicchi di grano formano un mucchio.. e quindi pure **n − 3** e così via per induzione fino a dire "**1 chicco di grano forma un mucchio"** che NON appare sensato...così come dire che "**0 chicchi di grano formano un mucchio**"!!

In conclusione *Non si può dare la definizione di mucchio tramite un numero naturale!!.*

Esercizi

1. come mostrare che NON è valido in PA $\vdash 0 + 1 = 0$??

   Basta derivare $\vdash 0{+}1 \neq 0$ (esercizio ulteriore). Poi si ragiona come segue. Se assumiamo $\vdash 0{+}1 = 0$ derivabile in PA, allora sarebbe pure valido $\vdash 0 + 1 = 0 \ \&\ 0 + 1 \neq 0$ ove $0 + 1 = 0 \ \&\ 0 + 1 \neq 0$ è un'istanza del principio di contraddizione $A\&\neg A$ che è quindi una falsità logica. Ma ciò NON è possibile se si ammette che PA è consistente. Dunque l'assunzione che $\vdash 0 + 1 = 0$ è derivabile risulta assurda e quindi il sequente $\vdash 0 + 1 = 0$ NON è valido in PA.

2. come mostrare che NON è valido in PA $\vdash 1 + 0 = 0$??

3. Mostrare che $\vdash \forall x\ 0 + x = x$ è valido in PA. A tal scopo applichiamo la regola di induzione per derivare

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \boldsymbol{\pi_1}\\ \vdash 0{+}0{=}0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \boldsymbol{\pi_2}\\ \vdash\ \forall x\ (\,0{+}x{=}x \rightarrow 0{+}s(x){=}s(x)\,)\end{array}}{\vdash \forall x\ 0{+}x{=}x}\ \text{ind}$$

ove π_1 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \textbf{Ax 3.} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ 0{+}0{=}0 \vdash 0{+}0{=}0\end{array}}{\textbf{Ax 3.} \vdash 0{+}0{=}0}\ \forall{-}\mathrm{S}_{\mathbf{v}}}{\vdash 0{+}0{=}0}\ \text{comp}$$

e π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \textbf{Ax 4.} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ 0{+}s(x){=}s(0{+}x) \vdash 0{+}s(x){=}s(0{+}x)\end{array}}{\forall y\ 0{+}s(y){=}s(0{+}y) \vdash 0{+}s(x){=}s(0{+}x)}\ \forall{-}\mathrm{S}_{\mathbf{v}}}{\textbf{Ax 4.} \vdash 0{+}s(x){=}s(0{+}x)}\ \forall{-}\mathrm{S}_{\mathbf{v}}}{\vdash 0{+}s(x){=}s(0{+}x)}\ \text{comp} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\textbf{=-ax}\\ \vdash s(0{+}x){=}s(0{+}x)\end{array}}{0{+}x{=}x \vdash s(0{+}x){=}s(x)}\ {=}{-}\mathrm{S}_{\mathbf{v}}}{\dfrac{\dfrac{0{+}x{=}x \vdash 0{+}s(x){=}s(x)}{\vdash\ 0{+}x{=}x \rightarrow 0{+}s(x){=}s(x)}\ \rightarrow{-}\mathrm{D}}{\vdash \forall x\ (\,0{+}x{=}x \rightarrow 0{+}s(x){=}s(x)\,)}\ \forall{-}\mathrm{D}}\ \text{tr-r}$$

ove l'applicazione di $\forall{-}\mathrm{D}$ è possibile perchè $\mathbf{x}$ non compare libera nel sequente radice.

4. il sequente $\vdash \exists y\ \exists x\ x \neq y$ è valido in $LC_=$? è soddisfacibile se non è valido?

   $\vdash \exists y\ \exists x\ x \neq y$ è **NON valido** in **logica classica con uguaglianza** ma valido in **PA** (ovvero risulta soddisfacibile con il modello dei numeri naturali!)

   Infatti, dopo aver provato a derivare il sequente in $\mathbf{LC_=}$, si noti che la formula $\exists \mathbf{y}\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ è **NON valida** in $\mathbf{LC_=}$ perchè c'è un contromodello definito in tal modo:
   $\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{1}\}$ falsifica $\exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{x}{\neq}\mathbf{y}$ poichè altrimenti per rendere valido il sequente il dominio dovrebbe avere $\mathbf{d}$ e $\mathbf{d}'$ tali che

   $$(\mathbf{x}{=}\mathbf{y})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \mathbf{d}') = \mathbf{0}$$

   ovvero dovrebbe valere $\mathbf{d} \neq \mathbf{d}'$ in $\mathcal{D}$. Ma tali elementi non ci sono in $\mathbf{D}$.

   Per provare la soddisfacibilità del sequente si veda il punto successivo.

5. il sequente $\vdash \exists y\ \exists x\ x \neq y$ è valido in PA??

   Sì, una derivazione in **PA** del sequente è la seguente

$$\dfrac{\vdash \textbf{Ax 1.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{ax-id}}{s(x){\neq}0 \vdash s(x){\neq}0}}{s(x){\neq}0 \vdash \exists y\ s(x){\neq}y}\ \exists\text{-}\mathrm{D}_{\mathbf{v}}}{s(x){\neq}0 \vdash \exists x\ \exists y\ x{\neq}y}\ \exists\text{-}\mathrm{D}_{\mathbf{v}}}{\textbf{Ax 1.} \vdash \exists x\ \exists y\ x{\neq}y}\ \forall\text{-}\mathrm{S}_{\mathbf{v}}}{\vdash \exists x\ \exists y\ x{\neq}y}\ \text{comp}$$

   Quindi il sequente $\vdash \exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{x}{\neq}\mathbf{y}$ è **soddisfacibile** in $\mathbf{LC_=}$ nel modello $\mathbf{D} \equiv \mathbf{Nat}$.

6. Mostrare che $\vdash\ \forall x\ s(x) \neq x$ è valido in PA

13.7 Conclusione dello studio

Una formula `fr` scritta nel linguaggio predicativo con uguaglianza si può classificare in:

`fr` formula **valida**	**VERITÀ LOGICA classica o TAUTOLOGIA**
`fr` formula **soddisfacibile, NON valida**	**OPINIONE** **(sua verità dipende da predicati usati)**
`fr` formula **insoddisfacibile**	**CONTRADDIZIONE o PARADOSSO**

13.8 Verità scientifiche

Le **teorie scientifiche** - ad esempio l'**aritmetica di Peano**, che è una **teoria matematica-** si occupano di **DIMOSTRARE** quali formule `fr` **soddisfacibili** DIVENTANO **verità scientifiche** ovvero sono conseguenze **logiche** dei loro **ASSIOMI** (in tal compito è assai utile riconoscere quali sono le verità logiche visto che queste si dimostrano più facilmente senza ricorso ad assiomi extralogici).

Si osservi che le teorie possono variare non solo per l'aggiunta di diversi assiomi extralogici ma anche per il fatto di essere basate su logiche diverse. In altri termini le teorie **DIPENDONO** anche dalla **logica** usata. Nelle sezioni precedenti abbiamo mostrato esempi di **teorie scientifiche** che estendono la **logica classica con uguaglianza** ma esistono anche teorie matematiche basate su logiche diverse. Ad esempio l'**aritmetica di Heyting** ha assiomi di Peano aggiunti però alla **logica intuizionista** (vedi libro di Sambin) e NON a quella classica. L'aritmetica di Heyting serve per formalizzare il frammento aritmetico della matematica costruttiva.

13.8.1 Esempio "controintuitivo" di tautologia classica predicativa

L'asserzione

"**Esiste un qualcosa che se è onnipotente allora tutti sono onnipotenti**"
si può formalizzare nel sequente

$$\vdash \exists \mathbf{x}\ (\ \mathbf{O}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x}\ \mathbf{O}(\mathbf{x})\ )$$

ove $\mathbf{O}(\mathbf{x})$= **x è un onnipotente**

che è una **tautologia**: si provi a derivare il sequente in $\mathbf{LC}_{=}$!

Esso rappresenta il cosiddetto "paradosso del bevitore":

"In ogni bar aperto c'è uno che se lui beve allora tutti bevono."

Per esercizio si formalizzi l'enunciato

"Esiste uno che se se lui beve allora tutti bevono."

utilizzando
$B(x)$= *"x beve"*

e poi si dimostri che la formalizzazione ottenuta `fr` è una tautologia classica predicativa sia derivando il sequente associato in $\mathbf{LC}_{=}$ che mostrando che tal formalizzazione è un predicato vero in tutti i modelli.

13.8.2 Paradosso del mentitore

L'asserzione

"**Esiste un qualcosa che crea tutti e soli quelli che non si creano da soli**"
si può formalizzare nel sequente

$$\vdash \exists \mathbf{x}\ \forall\ \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leftrightarrow\ \neg \mathbf{C}(\mathbf{y},\mathbf{y})\ )$$

ove $\mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{y})$=**"x crea y"**

che è **INSODDISFACIBILE** ovvero si deriva in logica classica

$$\vdash \neg\ \exists \mathbf{x}\ \forall\ \mathbf{y}\ (\ \mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leftrightarrow\ \neg \mathbf{C}(\mathbf{y},\mathbf{y})\ )$$

e si provi a derivarlo in LC!

13.9 Approfondimento su logica classica

Diamo di seguito alcune esempi di formalizzazione che sfuggono alla logica classica.

13.9.1 Attenzione agli scambi

Ecco qui un esempio che sfugge allo scambio a sx:

la **validità** dell'asserzione

“se **Mario va diritto in fondo a via Paolotti** e **Mario gira a sinistra in via Marzolo** allora **Mario arriva all’istituto di fisica**”

formalizzata nel sequente

$$\mathbf{P}, \mathbf{M} \vdash \mathbf{F}$$

ove
P=Mario va diritto in fondo a via Paolotti
M=Mario gira a sinistra in via Marzolo
F=Mario arriva all’istituto di fisica

NON comporta che sia valida pure l’asserzione con le premesse scambiate

“se **Mario gira a sinistra in via Marzolo** e **Mario va diritto in fondo a via Paolotti** allora **Mario arriva all’istituto di fisica**”

che risulta formalizzata in

$$\mathbf{M}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{F}$$

14 Esercizi risolti su aritmetica di Peano

1. $\vdash 0 = 0 + 0$ è valido in PA in quanto si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{0+0=0 \vdash 0+0=0}}{\forall x\ (\, x+0=x\,) \vdash 0+0=0}\ \forall\text{–S}_v}{\text{Ax 3.} \vdash 0=0+0}\ \text{sy}-\text{r}}{\vdash 0=0+0}\ \text{comp}$$

2. $\vdash \forall x\ (\, s(x)=s(2) \to x=2\,)$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 2.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{s(x)=s(2)\to x=2 \vdash s(x)=s(2)\to x=2}}{\forall y\ (\, s(x)=s(y)\to x=y\,) \vdash s(x)=s(2)\to x=2}\ \forall\text{–S}_v}{\forall x\ \forall y\ (\, s(x)=s(y)\to x=y\,) \vdash s(x)=s(2)\to x=2}\ \forall\text{–S}_v}{\text{Ax 2.} \vdash \forall x\ (\, s(x)=s(2)\to x=2\,)}\ \forall\text{–D}}{\vdash \forall x\ (\, s(x)=s(2)\to x=2\,)}\ \text{comp}$$

l’applicazione di $\forall$–D è possibile perchè x non compare libera nella premessa.

3. $\vdash 0 \cdot 0 = 0 + 0$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \pi\\ \vdash 0\cdot 0=0\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \pi_8\\ \vdash 0=0+0\end{matrix}}{\vdash 0\cdot 0=0+0}\ \text{tr}-\text{r}$$

ove π_8 è la derivazione sopra di $\vdash 0 = 0 + 0$ mentre π è la seguente derivazione

$$
\cfrac{\vdash \text{Ax } 5. \qquad \cfrac{\cfrac{\text{ax-id}}{0\cdot 0 = 0 \vdash 0 \cdot 0 = 0}}{\forall x\ (\, x \cdot 0 = 0\,) \vdash 0 \cdot 0 = 0}\ \forall\!-\!\mathrm{S}_v}{\vdash 0 \cdot 0 = 0}\ \text{comp}
$$

4. $\vdash \forall x\ (\, x = 0 \rightarrow s(x) = s(0)\,)$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\text{cf}^*}{x = 0 \vdash s(x) = s(0)}}{\vdash x = 0 \rightarrow s(x) = s(0)}\ \rightarrow -\mathrm{D}}{\vdash \forall x\ (\, x = 0 \rightarrow s(x) = s(0)\,)}\ \forall\!-\!\mathrm{D}
$$

ove l'applicazione di $\forall\!-\!\mathrm{D}$ è lecita perchè x non compare libera nel sequente radice.

5. $\vdash 2 + 1 = 3$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$
\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_1\\ \vdash 2 + 1 = s(2+0)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_2\\ \vdash s(2+0) = s(2)\end{array}}{\vdash 2 + 1 = 3}\ \mathrm{tr} - \mathrm{r}
$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$
\cfrac{\vdash \text{Ax } 4. \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\text{ax-id}}{2 + 1 = s(2+0) \vdash 2 + 1 = s(2+0)}}{\forall y\ (\, 2 + s(y) = s(2+y)\,) \vdash 2 + 1 = s(2+0)}\ \forall\!-\!\mathrm{S}_v}{\forall x\ \forall y\ (\, x + s(y) = s(x+y)\,) \vdash 2 + 1 = s(2+0)}\ \forall\!-\!\mathrm{S}_v}{\vdash 2 + 1 = s(2+0)}\ \text{comp}
$$

ricordando che $1\ \equiv\ s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$
\cfrac{\vdash \text{Ax } 3. \qquad \cfrac{\cfrac{\text{cf}^*}{2 + 0 = 2 \vdash s(2+0) = s(2)}}{\vdash \forall x\ (\, x + 0 = x\,) \vdash s(2+0) = s(2)}\ \forall\!-\!\mathrm{S}_v}{\vdash s(2+0) = s(2)}\ \text{comp}
$$

6. $\vdash 0 \cdot 2 = 0$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$
\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_1\\ \vdash 0 \cdot 2 = 0 \cdot 1 + 0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_2\\ \vdash 0 \cdot 1 + 0 = 0\end{array}}{\vdash 0 \cdot 2 = 0}\ \mathrm{tr} - \mathrm{r}
$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 6.} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0\cdot 2 = 0\cdot 1+0 \vdash 0\cdot 2 = 0\cdot 1+0\end{array}}{\forall y\ (\,0\cdot s(y) = 0\cdot y+0\,) \vdash 0\cdot 2 = 0\cdot 1+0}\ \forall\text{–S}_v}{\forall x\ \forall y\ (\,x\cdot s(y) = x\cdot y + x\,) \vdash 0\cdot 2 = 0\cdot 1+0}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash 0\cdot 2 = 0\cdot 1+0}\ \text{comp}$$

ricordando che $2 \equiv s(1)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_3\\ \vdash 0\cdot 1+0 = 0\cdot 1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_4\\ \vdash 0\cdot 1 = 0\end{array}}{\vdash 0\cdot 1+0 = 0}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove π_3 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0\cdot 1+0 = 0\cdot 1 \vdash 0\cdot 1+0 = 0\cdot 1\end{array}}{\forall x\ (\,x+0 = x\,) \vdash 0\cdot 1+0 = 0\cdot 1}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash 0\cdot 1+0 = 0\cdot 1}\ \text{comp}$$

mentre π_4 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_5\\ \vdash 0\cdot 1 = 0\cdot 0+0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_6\\ \vdash 0\cdot 0+0 = 0\end{array}}{\vdash 0\cdot 1 = 0}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove π_5 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 6.} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0\cdot 1 = 0\cdot 0+0 \vdash 0\cdot 1 = 0\cdot 0+0\end{array}}{\forall y\ (\,0\cdot s(y) = 0\cdot y+0\,) \vdash 0\cdot 1 = 0\cdot 0+0}\ \forall\text{–S}_v}{\forall x\ \forall y\ (\,x\cdot s(y) = x\cdot y + x\,) \vdash 0\cdot 1 = 0\cdot 0+0}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash 0\cdot 1 = 0\cdot 0+0}\ \text{comp}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre π_6 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_7\\ \vdash 0\cdot 0+0 = 0\cdot 0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi\\ \vdash 0\cdot 0 = 0\end{array}}{\vdash 0\cdot 0+0 = 0}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove π è la derivazione iniziale e infine π_7 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0\cdot 0+0 = 0\cdot 0 \vdash 0\cdot 0+0 = 0\cdot 0\end{array}}{\forall x\ (\,x+0 = x\,) \vdash 0\cdot 0+0 = 0\cdot 0}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash 0\cdot 0+0 = 0\cdot 0}\ \text{comp}$$

7. $\vdash 5\cdot 1 = 5$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \vdash 5\cdot 1 = 5\cdot 0+5\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \vdash 5\cdot 0+5=5\end{array}}{\vdash 5\cdot 1=5}\ \mathrm{tr}-\mathrm{r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 6.} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 5\cdot 1=5\cdot 0+5\vdash 5\cdot 1=5\cdot 0+5\end{array}}{\forall y\ (\,5\cdot s(y)=5\cdot y+5\,)\vdash 5\cdot 1=5\cdot 0+5}\ \forall\!-\!\mathrm{S}_v}{\forall x\ \forall y\ (\,x\cdot s(y)=x\cdot y+x\,)\vdash 5\cdot 1=5\cdot 0+5}\ \forall\!-\!\mathrm{S}_v}{\vdash 5\cdot 1=5\cdot 0+5}\ \mathrm{comp}$$

ricordando che $1\ \equiv\ s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_3\\ \vdots\\ \vdash 5\cdot 0+5=0+5\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_4\\ \vdots\\ \vdash 0+5=5\end{array}}{\vdash 5\cdot 0+5=5}\ \mathrm{tr}-\mathrm{r}$$

ove π_3 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 5.} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{sym}^*\\ 5\cdot 0=0\vdash 0=5\cdot 0\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}=\text{-ax}\\ \vdash 0+5=0+5\end{array}}{0=5\cdot 0\vdash 5\cdot 0+5=0+5}\ =\!-\mathrm{S}}{5\cdot 0=0\vdash 5\cdot 0+5=0+5}\ \mathrm{comp}}{\forall x\ (\,x\cdot 0=0\,)\vdash 5\cdot 0+5=0+5}\ \forall\!-\!\mathrm{S}_v}{\vdash 5\cdot 0+5=0+5}\ \mathrm{comp}$$

mentre π_4 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_5\\ \vdots\\ \vdash \forall x\ 0+x=x\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_6\\ \vdots\\ \forall x\ (\,0+x=x\,)\vdash 0+5=5\end{array}}{\vdash 0+5=5}\ \mathrm{tr}-\mathrm{r}$$

ove π_6 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0+5=5\vdash 0+5=5\end{array}}{\forall x\ (\,0+x=x\,)\vdash 0+5=5}\ \forall\!-\!\mathrm{D}$$

mentre π_5 è la derivazione in sezione 13.6.6.

8. $\vdash \forall x\ (\,x+0=x\cdot 0\,)$ NON è valido in PA, ovvero NON è derivabile perchè in PA è derivabile

$$\forall x\ (\,x+0=x\cdot 0\,)\vdash\perp$$

Chiamiamo π una sua derivazione che poi descriveremo più sotto.

Ora se esistesse una derivazione π_0 di $\vdash \forall x\ (\, x+0 = x\cdot 0\,)$ in PA otterremmo che in PA è derivabile il falso ad esempio come segue

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_0\\ \vdots\\ \vdash \forall x\ (\, x+0 = x\cdot 0\,)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \forall x\ (\, x+0 = x\cdot 0\,) \vdash \perp\end{array}}{\vdash \perp}\ \text{comp}$$

Ma se PA è assunta consistente, ovvero non deriva il falso, allora abbiamo trovato una contraddizione dalla supposta esistenza di π_0 e si conclude che la derivazione π_0 NON esiste e dunque $\vdash \forall x\ (\, x+0 = x\cdot 0\,)$ NON è valido in PA.

Ora mostriamo una derivazione di

$$\forall x\ (\, x+0 = x\cdot 0\,) \vdash \perp$$

che possiamo scegliere come la derivazione π menzionata sopra. Essa è la seguente

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ 1+0 = 1\cdot 0 \vdash 1 = 0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ 1 = 0 \vdash \perp\end{array}}{1+0 = 1\cdot 0 \vdash \perp}\ \text{comp}}{\forall x\ (\, x+0 = x\cdot 0\,) \vdash \perp}\ \forall\text{−S}_v$$

ove π_1 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 1.} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\text{-ax}_{sx1}}{1 = 0, s(0) \neq 0 \vdash \perp}}{1 = 0, \forall x\,(\, s(x) \neq 0\,) \vdash \perp}\ \forall\text{−S}_v}{1 = 0 \vdash \perp}\ \text{comp}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$ e π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_3\\ \vdots\\ \vdash 1 = 1+0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_4\\ \vdots\\ 1+0 = 1\cdot 0 \vdash 1+0 = 0\end{array}}{1+0 = 1\cdot 0 \vdash 1 = 0}\ \text{tr} - \text{r}$$

e π_3 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 1+0 = 1 \vdash 1+0 = 1\end{array}}{\forall x\ (\, x+0 = x\,) \vdash 1+0 = 1}\ \forall\text{−S}_v}{\text{Ax 3.} \vdash 1 = 1+0}\ \text{sy} - \text{r}}{\vdash 1 = 1+0}\ \text{comp}$$

mentre π_4 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 1+0 = 1\cdot 0 \vdash 1+0 = 1\cdot 0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_5\\ \vdots\\ \vdash 1\cdot 0 = 0\end{array}}{1+0 = 1\cdot 0 \vdash 1+0 = 0}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove π_5 è la seguente derivazione

$$
\dfrac{\vdash \text{Ax 5.} \qquad \dfrac{\dfrac{}{1\cdot 0=0\vdash 1\cdot 0=0}\,\text{ax-id}}{\forall x\,(\,x\cdot 0=0\,)\vdash 1\cdot 0=0}\,\forall\text{−S}_v}{\vdash 1\cdot 0=0}\,\text{comp}
$$

9. $\vdash 0=4+0$ NON è valido in PA perchè NON è derivabile in PA in quanto in PA è derivabile

$$0=4+0\vdash\perp$$

Chiamiamo π una sua derivazione che descriveremo più sotto.

Ora se esistesse una derivazione π_0 di $\vdash 0=4+0$ in PA otterremmo che in PA è derivabile il falso ad esempio come segue

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\pi_0\\ \vdots\\ \vdash 0=4+0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ 0=4+0\vdash\perp\end{array}}{\vdash\perp}\,\text{comp}
$$

Ma se assumiamo PA consistente, ovvero che non deriva il falso, avendo trovato una contraddizione dalla supposta esistenza di π_0 si conclude che la derivazione π_0 NON esiste e dunque $\vdash 0=4+0$ NON è valido in PA.

Ora mostriamo una derivazione di

$$0=4+0\vdash\perp$$

che possiamo scegliere come la derivazione π menzionata sopra. Essa è la seguente

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ 0=4+0\vdash 4=0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ 4=0\vdash\perp\end{array}}{0=4+0\vdash\perp}\,\text{comp}
$$

ove π_1 è la seguente derivazione

$$
\dfrac{\vdash \text{Ax 1.} \qquad \dfrac{\dfrac{}{4=0,s(3)\neq 0\vdash\perp}\,\neg\text{-ax}_{sx1}}{4=0,\forall x\,(\,s(x)\neq 0\,)\vdash\perp}\,\forall\text{−S}_v}{4=0\vdash\perp}\,\text{comp}
$$

ricordando che $4\ \equiv\ s(3)$ e π_2 è la seguente derivazione

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{0=4+0\vdash 0=4+0}\,\text{ax-id} \qquad \begin{array}{c}\pi_3\\ \vdots\\ \vdash 4+0=4\end{array}}{0=4+0\vdash 0=4}\,\text{tr}-\text{r}}{0=4+0\vdash 4=0}\,\text{sy}-\text{r}
$$

e π_3 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{4+0=4 \vdash 4+0=4}}{\forall x\ (x+0=x) \vdash 4+0=4}\ \forall\text{–S}_v}{\text{Ax 3.} \vdash 4=4+0}\ \text{sy}-\text{r}}{\vdash 4=4+0}\ \text{comp}$$

10. $\vdash 3=2+1$ è valido in pA perchè si può derivare in PA ad esempio come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_1\\ \vdash 2+1=s(2+0)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_2\\ \vdash s(2+0)=s(2)\end{array}}{\vdash 2+1=3}\ \text{tr}-\text{r}}{\vdash 3=2+1}\ \text{sy}-\text{r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 4.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{2+1=s(2+0) \vdash 2+1=s(2+0)}}{\forall y\ (2+s(y)=s(2+y)) \vdash 2+1=s(2+0)}\ \forall\text{–S}_v}{\forall x\ \forall y\ (x+s(y)=s(x+y)) \vdash 2+1=s(2+0)}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash 2+1=s(2+0)}\ \text{comp}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{cf}^*}{2+0=2 \vdash s(2+0)=s(2)}}{\vdash \forall x\ (x+0=x) \vdash s(2+0)=s(2)}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash s(2+0)=s(2)}\ \text{comp}$$

11. $\vdash \exists y\ \forall x\ \ x+y=x$ è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\text{Ax 3.}}{\vdash \forall x\ \ x+0=x}}{\vdash \exists y\ \forall x\ \ x+y=x}\ \exists\text{–S}_v$$

12. $\vdash 2+4=s(s(2+2))$

è valido in PA perchè si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_1\\ \vdash 2+4=s(2+3)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_2\\ \vdash s(2+3)=s(s(2+2))\end{array}}{\vdash 2+4=s(s(2+2))}\ \text{tr}-\text{r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$
\cfrac{\vdash \text{Ax 4.} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\text{ax-id}}{2+4=s(2+3)\vdash 2+4=s(2+3)}}{\forall y\ 2+s(y)=s(2+y)\vdash 2+4=s(2+3)}\ \forall\text{–S}_v}{\forall x\ \forall y\ x+s(y)=s(x+y)\vdash 2+4=s(2+3)}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash 2+4=s(2+3)}\ \text{comp}
$$

ricordando che $4 \equiv s(3)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$
\cfrac{\vdash \text{Ax 4.} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\text{cf}^*}{2+3=s(2+2)\vdash s(2+3)=s(s(2+2))}}{\forall y\ 2+s(y)=s(2+y)\vdash s(2+3)=s(s(2+2))}\ \forall\text{–S}_v}{\forall x\ \forall y\ x+s(y)=s(x+y)\vdash s(2+3)=s(s(2+2))}\ \forall\text{–S}_v}{\vdash s(2+3)=s(s(2+2))}\ \text{comp}
$$