SIMULAZIONE I appello 12 gennaio 2017

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Mostrare se i sequenti di seguito sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero mostrare se sono validi o meno e soddisfacibili o insoddisfacibili in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $A \rightarrow B \vdash \neg(B \rightarrow A) \& B$
  - 5 punti
    $\exists x\ (\ M(x)\ \vee\ A(x)\ ) \vdash \exists z\ \neg\neg M(z)\ \vee\ \exists z\ \neg\neg A(z)$
  - 6 punti
    $\forall w\ (\ c = w \ \&\ w \neq d\ ) \vdash \neg\exists y\ (\ y \neq c \ \&\ (\ y = b \ \&\ b = c\ )\ )$
  - 7 punti
    $\exists x\ \exists w\ (\ C(x)\ \vee\ B(w)\ ) \vdash \exists y\ (\ C(y)\ \&\ B(y)\ )$
  - 7 punti
    $\vdash \neg\forall w\ (\ w \neq a\ \rightarrow\ a \neq w)\ \rightarrow\ x = w$
  - 6 punti
    $\vdash C(w)\ \rightarrow\ \neg\exists w\ \perp\ \vee\ \exists x\ \exists y\ (x = y\ \rightarrow \perp)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla logica classica classica con uguaglianza motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

  - (4 punti)

    Non è domenica nè sabato, se l'autostrada è libera dal traffico.

    Soltanto se l'autostrada è libera dal traffico non è domenica.

    si consiglia di usare:
    S="È sabato"

A =“L’autostrada è libera dal traffico”
D=“È domenica”

- (6 punti)

  Chi ascolta non parla troppo.
  Qualcuno parla troppo.

  Qualcuno non ascolta o medita.

  si consiglia di usare:
  M(x)=“x medita”
  A(x)= “x ascolta ”
  P(x) =“x parla troppo”

- (6 punti)

  Chi parla troppo non ascolta.
  Nessuno parla troppo.

  Tutti ascoltano.

  si consiglia di usare i simboli nell’esercizio precedente

- (7 punti)

  Un desiderio di Giulio è diventare un cantante rock.
  Diventare un cantate rock è diverso che diventare un cantante di jazz.
  Giulio ha un unico desiderio.

  Non si dà il caso che Giulio non abbia un desiderio.

  si consiglia di usare:
  D(x,y)=x è un desiderio di y
  r=diventare un cantante rock
  j=diventare un cantante di jazz
  l=diventare un cantante lirico
  g=Giulio

- (8 punti)

  Un desiderio di Giulio è diventare un cantante rock.
  Diventare un cantate rock è diverso che diventare un cantante di jazz.
  Diventare un cantate rock è diverso che diventare un cantante lirico.
  Giulio ha un unico desiderio.

  Non è un desiderio di Giulio diventare un cantante di jazz e neppure diventare un cantante lirico.

  si consiglia di usare i simboli nell’esercizio precedente

- (6 punti)

  In Africa ci sono degli elefanti.
  Gli elefanti sono animali a rischio di estinzione.

  In Africa c’è qualche animale a rischio di estinzione.

  si consiglia di usare:
  E(x)=“x è elefante”
  R(x)=“x è un animale a rischio di estinzione”
  A(x)=“x è in Africa”

- (14 punti)
  “Qualcuno loda solo se stesso e loda quelli e soltanto quelli che non si lodano.”

  si consiglia di usare:
  L(x,y)= x loda y

- (14 punti)
  “Non si dà il caso che ci sia qualcuno che se lui passa l’esame di logica allora tutti passano l’esame di logica. ”

  si consiglia di usare:
  B(x)= x passa l’esame di logica

- Sia T_{rec} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se Beppe recita, Dario non fa la comparsa.
  - Luisa non recita se c’è un suggeritore.
  - Luisa non recita solo se c’è un suggeritore.
  - Se Dario non fa la comparsa allora Beppe e Luisa recitano.
  - Dario fa la comparsa se Luisa recita o non c’è un suggeritore.

  Si consiglia di usare:
  C(x)= x fa la comparsa
  R(x)= x recita
  S(x)= x un suggeritore
  b=Beppe, d=Dario, l=Luisa.

  Dedurre poi le seguenti affermazioni nella teoria indicata (ciascuna vale 4 punti):

  - Se non c’è un suggeritore non si dà il caso che Luisa non reciti.
  - Non c’è un suggeritore se Luisa recita.
  - Dario fa la comparsa se Luisa recita e c’è un suggeritore.
  - Se non c’è un suggeritore Dario fa la comparsa.
  - Se Dario non fa la comparsa allora Luisa recita.
  - Se Luisa recita Dario fa la comparsa.
  - Dario fa la comparsa.
  - Se Dario fa la comparsa Beppe non recita.
  - Luisa non recita o Beppe non recita.
  - Qualcuno non recita.

- Sia T_{mon} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Per ciascuna montagna esiste una montagna più alta di lei.
  - Se una montagna è più alta di un’altra montagna, e quest’altra è più alta di una terza montagna, allora la prima montagna è più alta della terza montagna.
  - Il Monte Bianco, il Monte Rosa, il Civetta e l’Everest sono montagne.

- Il Monte Rosa è più alto del Civetta.
- Date due montagne o la prima è più alta della seconda o la seconda è più alta della prima.
- Nessuna montagna è più alta di se stessa.
- Non c'è montagna più alta dell'Everest.
- Il Monte Bianco è più alto del Monte Rosa.

Si consiglia di usare:
A(x,y)= "x è più alto di y"
M(x)="x è una montagna"
b="Monte Bianco"
r="Monte Rosa"
c="Civetta"
e="Everest"

Dedurre poi in T_{am} le seguenti affermazioni (ciascuna vale 8 punti):

- Il Monte Bianco non è più alto dell'Everest.
- Il Monte Bianco è più alto del Civetta.
- L'Everest è più alto del Monte Rosa.
- L'Everest è più alto di tutte le montagne eccetto se stesso.
- Il Monte Rosa non è più alto del Monte Bianco.

• Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (7 punti) $\vdash \forall y\ \exists z\ \exists w\ y + w = z + 0$
2. (7 punti) $\vdash \exists w\ \exists y\ w \cdot y = 1$
3. (7 punti) $\vdash \forall x\ (\ x + 2 = (x + 1) + 1)$
4. (7 punti) $\vdash \exists w\ \exists y\ \exists z\ (1 + y) + z = (w + y) + 1$
5. (8 punti) $\vdash \exists x\ (\ 0 \neq x\ \rightarrow\ \forall w\ 5 \neq w\ )$
6. (8 punti) $\vdash \forall w\ (\ s(s(w)) \neq s(4) + 0\ \vee\ s(w) = s(3)\ )$
7. (8 punti) $\vdash \forall y\ s(s(3)) \neq s(s(y)) + 1$
8. (10 punti) $\vdash\ \exists x\ 5 + 0 \neq x \cdot x$
9. (10 punti) $\vdash \forall w\ \forall y\ s(s(s(y))) = w + 1$
10. (14 punti) $\vdash \forall x\ \exists y\ \ s(x) \neq (x + y)$

• Stabilire se le seguenti regole, formalizzate dove occorre, e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

- (17 punti)

$$\frac{\text{John sa suonare.} \ \vdash\ \text{John sa cantare.}}{\text{Chiunque sa suonare.} \ \vdash\ \text{Chiunque sa cantare.}}\ 1$$

ove
$S(x)$="x sa suonare"
$C(x)$="x sa cantare"
j="John"

- (10 punti)

$$\frac{D \vdash C}{\neg(\ C \vee \neg C\ ) \vdash \neg D\ \&\ C}\ 2$$

- (16 punti)

$$\frac{\text{Non tutti hanno voglia di dormire.}\ \vdash \text{Monica non sbadiglia.}}{\text{Qualcuno sbadiglia.} \vdash \text{Tutti hanno voglia di dormire.}}\ 3$$

ove
$D(x)$="x ha voglia di dormire"
$S(x)$="x sbadiglia"
m="Monica"

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\texttt{tt}\\ \Gamma \vdash \nabla, \texttt{tt}, \nabla'\end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\text{S} \qquad \begin{array}{c}=-\text{ax}\\ \Gamma \vdash t = t, \Delta\end{array}$$

Aritmetica di Peano PA

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC$_=$ + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \text{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–D}_v$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{tra}^* & \text{cf}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\, P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$