6. Esercitazione 26 maggio 2010

Si ricorda che di seguito con teoria si intende un calcolo ottenuto estendendo con gli assiomi extralogici (dell'aritmetica o quelli di seguito indicati) il calcolo della logica classica con uguaglianza che può essere scelto tra:

1. la logica classica abbreviata con uguaglianza $\mathrm{LC}_{=}^{abbr}$ CON COMPOSIZIONI e regole di indebolimento e contrazione sia a destra che a sinistra.
2. la logica classica con uguaglianza $\mathrm{LC}_{=}$ con le regole dei connettivi e quantificatori come nel testo di Sambin adottato nel corso e CON COMPOSIZIONI sia a destra che a sinistra.

1. Mostrare che nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (si vedano lezioni 16-17 al riguardo):

   (a) (4 punti) $\vdash \forall x\ (\ s(x) = s(5) \rightarrow x = 5\ )$

   (b) (4 punti) $\vdash 0 = 4 \cdot 0$

   (c) (4 punti) $\vdash \forall x\ (\ x = 7 \rightarrow s(x) = s(7)\ )$

   (d) (7 punti) $\vdash 1 + 2 = 3$

   (e) (7 punti) $\vdash 5 \cdot 1 = 5$

   (f) (10 punti) $\vdash \forall x\ s(x) \neq x$

   (g) (10 punti) $\vdash \forall x \exists y\ x \neq y$

2. dando per scontato che l'aritmetica è consistente, ovvero che non deriva $\vdash \perp$

   è vero che si deriva in Pa

   $$\vdash \forall x \forall y\ x = y$$

   (10 punti) ??

3. mostrare che in logica classica con uguaglianza sono validi i sequenti seguenti:

   $$\text{cf}^{*}$$
   $$\Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u)$$

   $$\text{cp}^{*}$$
   $$\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u)$$

4. **Teoria dei monoidi commutativi**

   $$\mathrm{Mon}_{cl} \equiv \ \mathrm{LC}_{=} + \ \text{Ax 1.} \ + \ \text{Ax 2.} \ + \ \text{Ax 3.} + \ \mathrm{comp}_{sx} \ + \ \mathrm{comp}_{dx}$$

   ove x, y, z sono supposti elementi del monoide

   $Ax1.\vdash \forall x \quad x + 0 = x$
   "zero è elemento neutro"

   $Ax2.\vdash \forall x\ \forall y \quad x + y = y + x$
   "somma è commutativa"

   $Ax3.\vdash \forall x \quad \forall y \quad \forall z \quad (x + y) + z = x + (y + z)$
   "somma è associativa"

   Provare che in Mon_{cl} si deriva

(a) $\vdash \forall x \ \ 0 + x = x$.

(b) $\vdash \forall y \ \exists x \ y + (y + x) = y + y$

5. Sia T_{nuoto} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

   (a) Ax. Se Paolo va a fare una nuotata allora Carlo ci va.

   (b) Ax. Barbara va a fare una nuotata solo se ci va Paolo.

   (c) Ax. Se Mario va a fare una nuotata allora Paolo non ci va.

   (d) Ax. Se qualcuno va a fare una nuotata allora Paolo non ci va.

   (e) Ax. Se Carlo non va a fare una nuotata allora Barbara ci va.

   (f) Ax. Anna va a fare una nuotata.

   Suggerimento: usare N(x)= x va a fare una nuotata, p=Paolo, c=Carlo, m=Mario
   Derivare in T_{nuoto} le seguenti frasi opportunamente formalizzate supposto che questa teoria sia consistente (ovvero non derivi $\vdash\perp$:

   (g) Paolo non va a fare una nuotata.

   (h) Barbara non va a fare una nuotata.

   (i) Carlo va a fare una nuotata.

6. Sia $T_{squadre}$ la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

   (a) (2 punti) Ogni persona tifosa di una squadra di calcio è tifosa di una sola squadra.

   (b) (1 punto) Non tutti sono tifosi di una squadra di calcio.

   (c) (1 punto) Esistono persone tifose di una squadra di calcio diversa dalla Juventus.

   (d) (1 punto) Carlo non è tifoso dell'Inter ma è un tifoso della Juventus o del Milan.

   (e) (1 punto) la Juventus è diversa dal Milan.
   suggerimento: si usi $T(x, y)$= x è persona tifosa della squadra di calcio y.

   Derivare in $T_{squadre}$ supposta consistente:

   (f) (9 punti) Se Carlo non è tifoso della Juventus allora è tifoso del Milan.

   (g) (9 punti) Esistono tifosi di una squadra di calcio.

   (h) (9 punti) Se tutti fossero tifosi allora tutti sarebbero tifosi della Juventus.

   (i) (9 punti) Se qualcuno è tifoso della Juventus allora non è tifoso del Milan.

   È derivabile in $T_{squadre}$

   (j) (9 punti) "Tutti sono tifosi" ???

Spunti per approfondimento personale fuori programma:
Quali domini danno luogo ad un modello degli assiomi di Peano?

Posto di interpretare zero, successore, somma e prodotto come nel modello standard dei naturali, se si sceglie come dominio i numeri interi si ottiene un modello degli assiomi di Peano?

Sempre sotto le stesse ipotesi, se si sceglie come dominio i numeri razionali si ottiene un modello degli assiomi di Peano?

Sempre sotto le stesse ipotesi, se si sceglie come dominio i numeri naturali $\{x \in Nat \ \mid \ x \leq 7\}$ si ottiene un modello degli assiomi di Peano?

Logica classica con uguaglianza- calcolo abbreviato $\mathbf{LC}_{=}^{abbr}$

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{ax-}\bot \\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow -\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (x \notin VL(\Gamma, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\begin{array}{c} = -\text{ax} \\ \Sigma \vdash t = t, \Delta \end{array} \qquad \frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S}_f$$

Logica classica predicativa $\mathbf{LC}_{=}$ con uguaglianza

questa versione contiene le regole nel libro di Sambin

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ A \vdash A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{ax-}\bot \\ \bot \vdash \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \mathrm{in_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{in_{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A}\ \mathrm{cn_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \mathrm{cn_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \,\&-\mathrm{F} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \,\&-\mathrm{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \,\&-\mathrm{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \,\vee-\mathrm{F} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \,\vee-\mathrm{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \,\vee-\mathrm{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow -\mathrm{F} \qquad \frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B, \Gamma' \vdash \Delta} \rightarrow -\mathrm{re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta} \,\forall-\mathrm{D}\ (x \notin VL(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta} \,\forall-\mathrm{re}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta} \,\exists-\mathrm{re}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta} \,\exists-\mathrm{D}$$

$$\begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \vdash t = t \end{array} \qquad \frac{\Sigma, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC + comp_{sx}+ comp_{dx}

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla} \,\mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"} \,\mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$

$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \rightarrow x = y\ )$

$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$

$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$

$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$

$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$

$Ax7. \vdash A(0) \& \forall x\ (\ A(x) \rightarrow A(s(x))\ ) \rightarrow \forall x\ A(x)$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s\ldots(0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate per LC con uguaglianza

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{tra}^* & \text{cf}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u) \end{array}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash u = t}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma \vdash t = v \quad \Gamma' \vdash v = u}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u}\ \text{tr-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$