17. come interpretare unicità? con l'uguaglianza

Problema: vogliamo formalizzare in logica classica

" Il programma fattoriale su input 2 dà un'unico output."

con
$O(x, y, z)$= il programma y su input z dà output il numero x
f=il programma fattoriale
2= due

oppure
" Certi potenti pensano solo a se stessi"

con
O(x)= x è potente
P(x,y)=x pensa a y

soluzione: estendiamo il linguaggio predicativo con il simbolo di uguaglianza fra generici termini t, s

$$t = s$$

la cui interpretazione in un fissato dominio $\mathcal{D}$ è ottenuta per sostituzione da

$$(x = y)^D(-) : D^2 \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x = y^D(d_1, d_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } d_1 = d_2 \\ 0 & \text{se } d_1 \neq d_2 \end{cases}$$

esempio: supposto $t \equiv c_1$ e $s \equiv c_2$ costanti allora

$$(c_1 = c_2)^{\mathcal{D}} \equiv (x = y)^D(c_1^{\mathcal{D}}, c_2^{\mathcal{D}})$$

regole dell'uguaglianza

$$\begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \Gamma \vdash t = t, \Delta \end{array} \qquad\qquad \frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S}$$

Come usare le regole di uguaglianza?

Nella regola

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S}$$

dall'alto verso il basso: NON TUTTE le occorrenze di t DEVONO essere rimpiazzate con s
dal basso verso l'alto: NON TUTTE le occorrenze di s DEVONO essere rimpiazzate con t.

Esempio 1: Se vogliamo derivare la simmetria dell'uguaglianza

$$t = s \vdash s = t$$

in $\mathrm{LC}_=$ occorre applicare la regola $= -\mathrm{S}$ in tal modo:
si identifichi

$$\Sigma \equiv \emptyset \qquad \Gamma(x) \equiv \emptyset \qquad \Delta(x) \equiv x = t \qquad \nabla \equiv \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(t) \equiv t = t \qquad \Delta(s) \equiv s = t$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\dfrac{\dfrac{= -\text{ax}}{t = s \vdash t = t}}{t = s \vdash s = t} = -\text{S}$$

Esempio 2: Se vogliamo derivare la transitività dell'uguaglianza

$$t = u, u = s \vdash t = s$$

in $\mathrm{LC}_=$ occorre applicare la regola $= -\text{S}$ in tal modo:
si identifichi

$$\Sigma \equiv t = u \qquad \Gamma(x) \equiv \emptyset \qquad \Delta(x) \equiv t = x \qquad \nabla \equiv \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(u) \equiv t = u \qquad \Delta(s) \equiv t = s$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\dfrac{\dfrac{\text{ax} - \text{id}}{u = s, t = u \vdash t = u}}{t = u, u = s \vdash t = s} = -\text{S}$$

Esercizi su uguaglianza

- Nell'estensione di LC con uguaglianza stabilire se sono validi o meno, o soddisfacibili o meno i seguenti sequenti:
  1. $\vdash \forall x\ x = x$
  2. $\vdash \exists x\ x = c$
  3. $\vdash \forall y\ \forall x\ (\ y = z \rightarrow x = z\ )$
  4. $\vdash \forall y\ \forall x\ \forall z\ (\ x = y \,\&\, y = z\ \rightarrow\ x = z\ )$
- Formalizzare le frasi seguenti e provare se sono validi o meno, e soddisfacibili o meno:
  1. Il programma fattoriale su 3 dà come unico output 6.
     Il programma fattoriale su 3 dà output il numero x.
     ―――
     Il numero x è uguale a 6.
     con
     f= " il fattoriale"
     3= " il numero tre"
     6= " il numero sei"
     $O(x, y, z)$= " il programma y su z dà output il numero x"
  2. Il programma fattoriale su 2 dà un'`unico` output.
     Il programma fattoriale su 2 dà output il numero 2.
     Il programma fattoriale su 2 dà output il numero x.
     ―――
     Il numero x è uguale 2.
     con
     f= " il fattoriale"
     2= " il numero due"
     3= " il numero tre"
     $O(x, y, z)$= " il programma y su z dà output il numero x"

3. $$\frac{\begin{array}{l}\text{Il programma fattoriale su 2 dà un'}\texttt{unico}\text{ output.}\\ \text{Il programma fattoriale su 2 dà output 2.}\\ \text{2 è diverso da 3}\end{array}}{\text{Il programma fattoriale su 2 non dà output 3.}}$$

con
f= " il fattoriale"
2= " il numero due"
3= " il numero tre"
$O(x, y, z)$= " il programma y su z dà output il numero x"

- Mostrare se le seguenti regole dell'uguaglianza sono valide e sicure:

$$\frac{\Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash s = t}\ 1 \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash t = s \quad \Gamma \vdash s = u}{\Gamma \vdash t = u}\ 2$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash t = u}\ 3$$

Logica classica con uguaglianza- $\mathbf{LC}_=$

$$\overset{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\mathrm{S} \qquad \overset{=-\mathrm{ax}}{\Gamma \vdash t = t, \Delta}$$