III appello ZOOM 15 giugno 2020

nome: cognome:

- Scrivere in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Si ricorda di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Si ricorda di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Si esplicitino le eventuali regole derivate usate che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- ATTENZIONE: se si risolvono correttamente TUTTI gli esercizi con il segno ++ si prende il voto 30 independentemente dall'avere o meno un bonus accumulato (previa convalida con orale).

- Mostrare se i sequenti elencati sotto sono tautologie, opinioni o paradossi in logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso).
  - (2 punti)
    $A \vdash \neg\neg(\ A \ \&\ B\ )$
  - (6 punti) (++)
    $\exists y\ \forall z\ y = z \vdash \exists x\ (\ (\ a = x\ \rightarrow\ x = c\ )$
  - (5 punti)
    $\exists x\ \neg M(x) \vdash \neg\forall x\ M(x)\ \vee\ \exists x\ \neg\neg M(x)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi nella logica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso).
  - (6 punti)
    $$\frac{\text{Chiunque non trova non cerca.}}{\text{Chiunque cerca trova.}}$$
    si consiglia di usare:
    $C(y) =$"y cerca"
    $T(x) =$ "x trova"
  - (5 punti)
    $$\frac{\text{Pippo cerca ma Toni non cerca.}}{\text{Non tutti cercano.}}$$
    si consiglia di usare:
    $C(y) =$"y cerca"
    $p =$ Pippo t=Toni

- (++) (6 punti)

$$\frac{\text{Se tutti cercano allora tutti trovano.}}{\text{Nessuno trova e nessuno cerca.}}$$

si consiglia di usare:
$C(y)$ =“y cerca” $T(x)$ = “x trova”

- (8 punti)

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Abele ha una zia.}\\ \text{Abele ha un'unica zia.}\\ \text{Eva è diversa da Ruth.}\end{array}}{\text{Non si dà il caso che sia Eva che Ruth siano zie di Abele.}}$$

si consiglia di usare:
$Z(x, y)$= x è zia di y
a=Abele,   e=Eva   r=Ruth

- (++) (14 punti)
‘Ciascuno giudica tutti eccetto se stesso e non esiste alcuno che se lui giudica tutti allora tutti giudicano tutti.”

si consiglia di usare:
$G(x, y)$=x giudica y

- (++) Sia T_{in} la teoria ottenuta estendendo LC$_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
  - (2 punti) Non si dà il caso che qualcuno ami se stesso.
  - (1 punti) Felice ama Bianca.
  - (2 punti) Non si dà il caso che esista qualcuno che non ami la principessa.
  - (2 punti) Il re non ama nessuno.
  - (4 punti) Chiunque ama un'altro diverso da lui, è amato da lui.
  - (1 punto) Bianca è diversa da Felice.

si consiglia di usare:
$A(x, y)$= x ama y
r= Il re,   p=la principessa,   f= Felice,   b= Bianca

Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria in T_{in}: (ciascuna conta 10 punti quando non indicato espressamente)

- (5 punti) Il re non ama la principessa.
- Bianca ama Felice oppure il re.
- (2 punti sola formalizzazione) Chiunque tranne la principessa stessa ama la principessa.
- Se Felice non è il re allora Felice non ama il re.

- Stabilire se la seguente regola e le sue inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

  - (6 punti)

$$\frac{\neg\neg F \vdash C}{\neg\neg C \vdash F \vee \perp}\ 1$$

- (++) (*Esercizio facoltativo*)

  In un gioco due amiche fanno un'affermazione, che è vera o falsa.
  Un'affermazione è mancanta e l'altra è riportata sotto:
  Morgana: ....
  Celeste: **io affermo il falso solo se Morgana afferma il vero**.

  Si può dedurre, anche se non si conosce l'affermazione di Celeste, quante affermazioni sono vere?

  a) No
  b) Sì, sono vere tutte e due le affermazioni.
  c) Sì, è vera solo l'affermazione di Morgana.
  d) Sì, è vera solo l'affermazione di Celeste.
  e) Nessuna affermazione è vera.

  Si analizzino le varie affermazioni (5 punti ciascuna) nella teoria proposizionale $T_{Celeste}$ ottenuta estendendo $\mathbf{LC}_p$ con la formalizzazione di ciò che dice Celeste tramite:
  M= l'affermazione di Morgana è vera
  C= l'affermazione di Celeste è vera

- (++) *Esercizio facoltativo*: Dall'affermazione

  Ip **In autunno non tutti vanno a lezione.**

  si dica quali delle seguenti affermazioni si possono dedurre (la classificazione di ciascuna vale 7 punti se è deducibile e 12 punti se NON lo è):

  A **Se è autunno qualcuno non va a lezione**
  B **Se tutti vanno a lezione oppure non tutti vanno a lezione allora non è autunno.**
  C **Se tutti non vanno a lezione allora non è autunno.**

  Si giustifichi la risposta corretta producendo una sua derivazione nella teoria predicativa

$$\mathbf{T_{Ip}} = \mathbf{LC}_{=} + \mathbf{Ip}$$

  dopo aver formalizzato ciascuna affermazione utilizzando:
  L(x)= x va a lezione
  A=è autunno
  Inoltre si giustifichi le risposte "affermazione X" non corrette classificando in $\mathbf{LC}_{=}$ il sequente **Ip** $\vdash$ "affermazione X" .

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\frac{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \frac{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla} \qquad \frac{\text{ax-}\mathtt{tt}}{\Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to -\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to -\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\frac{\Sigma\ ,\ t_{ter} = s_{ter}\ ,\ \Gamma(t_{ter})\ \vdash\ \Delta(t_{ter})\ ,\ \nabla}{\Sigma\ ,\ \Gamma(s_{ter})\ ,\ t_{ter} = s_{ter}\ \vdash\ \Delta(s_{ter})\ ,\ \nabla}\ = -\text{S} \qquad \frac{= -\text{ax}}{\Gamma \vdash t_{ter} = t_{ter}\ ,\ \Delta}$$

TAUTOLOGIE CLASSICHE

associatività $\vee$	$(A \vee B) \vee C$	$\leftrightarrow$	$A \vee (B \vee C)$
associatività &	$(A \& B) \& C$	$\leftrightarrow$	$A \& (B \& C)$
commutatività $\vee$	$A \vee B$	$\leftrightarrow$	$B \vee A$
commutatività &	$A \& B$	$\leftrightarrow$	$B \& A$
distributività $\vee$ su &	$A \vee (B \& C)$	$\leftrightarrow$	$(A \vee B) \& (A \vee C)$
distributività & su $\vee$	$A \& (B \vee C)$	$\leftrightarrow$	$(A \& B) \vee (A \& C)$
idempotenza $\vee$	$A \vee A$	$\leftrightarrow$	A
idempotenza &	$A \& A$	$\leftrightarrow$	A
leggi di De Morgan	$\neg(B \vee C)$	$\leftrightarrow$	$\neg B \& \neg C$
	$\neg(B \& C)$	$\leftrightarrow$	$\neg B \vee \neg C$
legge della doppia negazione	$\neg\neg A$	$\leftrightarrow$	A
implicazione classica	$(A \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$\neg A \vee C$
disgiunzione come antecendente	$(A \vee B \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)$
congiunzione come antecendente	$(A \& B \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$
legge della contrapposizione	$(A \rightarrow C)$	$\leftrightarrow$	$(\neg C \rightarrow \neg A)$
legge del modus ponens	$A \& (A \rightarrow C)$	$\rightarrow$	C
legge della NON contraddizione	$\neg(A \& \neg A)$		
legge del terzo escluso	$A \vee \neg A$		
leggi di De Morgan	$\neg(\exists x\, A(x))$	$\leftrightarrow$	$\forall x\, \neg A(x)$
	$\neg(\forall x\, A(x))$	$\leftrightarrow$	$\exists x\, \neg A(x)$

Regola di composizione

$$\frac{\vdash \texttt{fr} \qquad\qquad \Gamma, \texttt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

Regole derivate o ammissibili per $\mathbf{LC}_=$

si ricorda che $t \neq s \ \equiv \ \neg t = s$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx1}\\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C\end{array} & \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx2}\\ \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx1}\\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''\end{array} & \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx2}\\ \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''\end{array}
\end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{"}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{"}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–D}_v$$