IV appello 6 luglio 2015

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Derivare in LJ:
  - 3 punti
    $A \to \neg\neg C \vdash A \to \neg(\neg A \,\&\, \neg C)$
  - 4 punti
    $\vdash \neg(\neg\neg\neg A \,\&\, \neg(\neg A \vee C))$
  - 6 punti
    $\vdash \exists y\, \forall z\, B(y) \;\to\; \forall z\, \exists w\, \neg\neg B(w)$
  - 7 punti
    $\neg\neg C \to \neg\neg\forall z\, B(z) \vdash \neg\neg(C \to \forall y\, B(y))$
  - 6 punti
    $\vdash \exists x\; \exists y\, C(x, y) \;\to\; \exists w\, \neg\, \forall z\; \neg C(w, z)$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e derivare i sequenti ottenuti nella logica indicata
  - (7 punti) in LJ

    Non si dà il caso che i pini non siano sempreverdi.
    Nessun pino perde le foglie.

    Gli alberi che perdono le foglie o non sono sempreverdi o non sono pini.

    si consiglia di usare:
    S(x) = “x è un sempreverde”
    P(x) = “x è un pino”
    A(x) = “x è un albero”
    F(x)=x perde le foglie

  - (6 punti) in LJ

    Qualcuno ama il calcio.
    Nicola non ama il calcio.

    Non si dà il caso che tutti amino il calcio.

si consiglia di usare:
A(x,y) = “x ama y”
c = il calcio
n=Nicola

- (41 punti) Siano ${T_{su}}^i$ e ${T_{su}}^c$ le teorie ottenute estendendo rispettivamente LJ e LK con composizioni e con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Se Noemi canta, Ludovico non suona.
  - Fiorella non canta se è tarda notte.
  - Fiorella non canta solo se è tarda notte.
  - Se Ludovico non suona allora Noemi e Fiorella cantano.
  - Ludovico suona se Fiorella canta o non è tarda notte.

  Si consiglia di usare:
  S(x)= x suona
  C(x)= x canta
  T= è tarda notte
  n=Noemi, l=Ludovico, f=Fiorella.

  Dedurre poi le seguenti affermazioni nella teoria indicata:

  - Se non è tarda notte non si dà il caso che Fiorella non canti. (in ${T_{su}}^i$)
  - Se non è tarda notte Fiorella canta. (in ${T_{su}}^c$)
  - Ludovico suona se Fiorella canta e se non è tarda notte. (in ${T_{su}}^i$)
  - Se non è tarda notte Ludovico suona. (in ${T_{su}}^i$)
  - Se Ludovico non suona allora Fiorella canta. (in ${T_{su}}^i$)
  - Se Fiorella canta Ludovico suona. (in ${T_{su}}^i$)
  - Non si dà il caso che Ludovico non suoni. (in ${T_{su}}^i$)
  - Se Ludovico suona Noemi non canta. (in ${T_{su}}^i$)
  - Se non si dà il caso che Ludovico non suoni, Noemi non canta. (in ${T_{su}}^i$)
  - Ludovico suona. (in ${T_{su}}^c$)
  - Fiorella non canta o Noemi non canta. (in ${T_{su}}^i$)
  - Fiorella non canta o Noemi non canta. (in ${T_{su}}^c$)
  - Qualcuno non canta. (in ${T_{su}}^i$)

- (36 punti) Siano ${T_{la}}^i$ e ${T_{la}}^c$ le teorie ottenute estendendo rispettivamente LJ e LK con composizioni e con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Gigliola non è collega di Carlo.
  - Alcuni che lavorano con Alice non sono suoi colleghi.
  - Tutti quelli che lavorano con Alice sono suoi colleghi o colleghi di Carlo.
  - Mara non è nè collega di Alice nè di Carlo.
  - Gigliola lavora con Alice.

Si consiglia di usare:
L(x,y)= x lavora con y
C(x,y)= x è collega di y
F(x)= x è felice
c=Carlo a=Alice, g= Gigliola, m=Mara

Dopo aver formalizzato le frasi seguenti seguendo i suggerimenti sopra mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

- Se nessuno lavorasse con Alice, Alice sarebbe felice. (in ${T_{la}}^{i}$)
- Mara non lavora con Alice. (in ${T_{la}}^{i}$)
- Non tutti lavorano con tutti. (in ${T_{la}}^{i}$)
- Gigliola è collega di Alice. (in ${T_{la}}^{i}$)
- Qualcuno lavora con Alice ed è collega di Carlo. (in ${T_{la}}^{i}$)
- Non tutti quelli che lavorano con Alice sono colleghi di Carlo. (in ${T_{la}}^{i}$)

Logica intuizionistica LJ

$$\text{ax-id} \quad A \vdash A \qquad\qquad \text{ax-}\bot \quad \bot\vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash C}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, C, C \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta}\ \text{cn}_{\text{sx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}\ \&-\text{f} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{f} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\ \rightarrow-\text{f} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B, \Gamma' \vdash \Delta}\ \rightarrow-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(z)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)}\ \forall-\text{f}\ (\Gamma, \forall x\ A(x) \text{ non dipendono da } z) \qquad\qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma, A(z) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta}\ \exists-\text{f}\ (\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta \text{ non dipendono da } z) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x)}\ \exists-\text{re}$$

Logica classica predicativa LK

$$\text{ax-id} \quad A \vdash A \qquad\qquad \text{ax-}\bot \quad \bot\vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash C, \Delta}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, C, C \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash C, C, \Delta}{\Gamma \vdash C, \Delta}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta}\ \&-\text{f} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{f} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \rightarrow-\text{f} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad B, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, A \rightarrow B, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \rightarrow-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(z), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta}\ \forall-\text{f}\ (\Gamma, \forall x A(x), \Delta \text{ non dipendono da } z) \qquad\qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma, A(z) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta}\ \exists-\text{f}\ (\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta \text{ non dipendono da } z) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists-\text{re}$$

Regole di composizione (ovvero cut)

in **LJ**:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}\ \text{cut}$$

in **LK**:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{cut}$$

Si ricorda che sia in **LJ** che in **LK** la negazione è definita in tal modo

$$\neg\mathbf{C} \equiv \mathbf{C} \rightarrow \perp$$

Regole ammissibili in LJ

$$\overset{\text{ax-id}}{\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\Gamma}' \vdash \mathbf{A}}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \mathbf{A}}{\boldsymbol{\Gamma}, \neg\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}\ \neg\text{−re} \qquad \frac{\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \neg\mathbf{A}}\ \neg\text{−f}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}}$$

Regole ammissibili in LK

$$\overset{\text{ax-id}}{\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\Gamma}' \vdash \mathbf{A}}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \mathbf{A}, \boldsymbol{\Delta}}{\boldsymbol{\Gamma}, \neg\mathbf{A} \vdash \boldsymbol{\Delta}}\ \neg\text{−re} \qquad \frac{\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \boldsymbol{\Delta}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \neg\mathbf{A}, \boldsymbol{\Delta}}\ \neg\text{−f}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$