8. Derivabilità e validità

1. Formalizzare in sequente

   Non mangio gli spinaci.
   Se mi piacessero gli spinaci li mangerei.

   Non mi piacciono gli spinaci.

   utilizzando:
   M=mangio gli spinaci
   P=mi piacciono gli spinaci

   e provare se è derivabile in LC_p il sequente ottenuto.

   Nel caso positivo è tautologia, perchè??

2. Vale il seguente teorema:

`Teorema` [**SODDISFACIBILITÀ per riga** di regole di LC_p]:   Tutte le regole di LC_p sono soddisfacibili per riga rispetto alla semantica delle tabelle di verità.

   ??

3. Vale il seguente teorema

`Teorema` [**VALIDITÀ** di regole di LC_p]:   Tutte le regole di LC_p sono valide classicamente rispetto alla semantica delle tabelle di verità.

   ?? Se sì da quale teorema segue?

4. Mentre una proposizione se è **valida** è anche **soddisfacibile** INVECE per una regola vale che se **conserva la soddisfacibilità per riga** allora **conserva la validità**.

   Dare esempio di proposizione NON valida ma soddisfacibile e un esempio di regola valida.

5. In che modo il teorema di validità delle regole di LC_p ci aiuta a stabile quando `pr` è una tautologia?

6. Se una proposizione $\vdash \mathtt{pr}$ ha una derivazione cosa significa?

7. È vero che

`Teorema` [**VALIDITÀ** sequenti]:   se il sequente $\mathtt{pr_1}, \ldots, \mathtt{pr_n} \vdash \mathtt{pr_k}, \ldots, \mathtt{pr_m}$ è derivabile in LC_p $\Rightarrow$ vale $\models (((\mathtt{pr_1} \& \mathtt{pr_2} \& \ldots \& \mathtt{pr_n} \rightarrow (((\mathtt{pr_k} \vee \mathtt{pr_{k+1}}) \ldots \vee \mathtt{pr_m}$

   ??? Come si dimostra?

Procedura di decisione per proposizioni classiche

Per sapere se $\Gamma \vdash \nabla$ è derivabile in LC_p procedi in tal modo:

$$1.\ \Gamma \vdash \nabla \text{ è assioma?} \quad \begin{cases} \text{sì} & \text{vai in } 5. \\ \text{no} & \text{vai in } 2. \\ & \text{se in } \Gamma \text{ o in } \nabla \text{ c'è proposizione composta} \\ & \text{altrimenti STOP} \end{cases}$$

2. Scegli in $\Gamma \vdash \nabla$ una proposizione composta, diciamo $\mathtt{pr}_1 \circ \mathtt{pr}_2$ per esempio. $\mathtt{pr}_1 \circ \mathtt{pr}_2$ è in posizione buona per applicare ad essa una SUA regola (a dx se $\mathtt{pr}_1 \circ \mathtt{pr}_2$ sta a dx di $\vdash$ nel sequente, a sx se $\mathtt{pr}_1 \circ \mathtt{pr}_2$ sta a sx di $\vdash$)?

$$\begin{cases} \text{sì} & \text{vai in } 4. \text{ operando su } \mathtt{pr}_1 \circ \mathtt{pr}_2 \\ \text{no} & \text{vai in } 3. \text{ operando su } \mathtt{pr}_1 \circ \mathtt{pr}_2 \end{cases}$$

3. se operi su $\mathtt{pr}_1 \circ \mathtt{pr}_2$ fai uno scambio per portarla in posizione buona da poter applicare la sua regola e vai in 4. operando su $\mathtt{pr}_1 \circ \mathtt{pr}_2$.

4. se operi su $\mathtt{pr}_1 \circ \mathtt{pr}_2$ applica la sua regola. Quante premesse ha la regola?

$$\begin{cases} \text{una} & \text{vai in } 1. \text{ operando sulla premessa} \\ \text{due} & \text{scegli la prima premessa e vai in } 1. \text{ operando su di essa} \end{cases}$$

5. nell'albero ottenuto c'è foglia che NON è assioma con almeno una proposizione composta?

$$\begin{cases} \text{sì} & \text{scegli la foglia NON assioma e vai in } 2. \\ & \text{operando su di lei} \\ \text{no} & \text{STOP} \end{cases}$$

CONCLUSIONE: se nell'albero ottenuto tutte le foglie sono assiomi, allora $\Gamma \vdash \nabla$ è derivabile in LC_p altrimenti NON lo è.

Come trovare riga con uscita 0 di proposizioni non valide

se algoritmo per $\Gamma \vdash \nabla$ si ferma con foglia del tipo

$$V_{i_1}, \dots V_{i_n} \vdash V_{k_1}, \dots V_{k_m}$$

che NON è assioma e fatta solo di variabili proposizionali ove

$$\{\ V_{i_1}, \dots V_{i_n}\ \} \bigcap \{\ V_{k_1}, \dots V_{k_m}\ \} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

la riga della tabella con

$$\begin{array}{rcll} V_{i_j} & = & 1 & \text{se } V_{i_j} \text{ sta a sx sequente (ovvero tra le premesse del sequente)} \\ V_{k_j} & = & 0 & \text{se } V_{k_j} \text{ sta a dx sequente (ovvero tra le conclusioni del sequente)} \end{array}$$

dà valore 0 alla proposizione $\Gamma_{\&} \rightarrow \Delta_{\vee}$.

Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE o SODDISFACIBILI o NON VALIDE o INSODDISFACIBILI tramite la procedura di decisione del calcolo dei sequenti LC_p:

1. $\models P\&Q \rightarrow P\&R$?
2. $\models P\&Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$?
3. $\models P \rightarrow (Q \rightarrow P\&Q)$?
4. $\models (\ (\ P \rightarrow C\ )\&(\ Q \rightarrow C\ )\ ) \vee D \rightarrow (P \vee Q \rightarrow C\ )$?
5. $\models P \rightarrow P$?
6. $\models P \vee \neg P$?
7. $\models P\&\neg P$?
8. $\models P \rightarrow (P \rightarrow P)$?
9. $\models (P \rightarrow P) \rightarrow P$?
10. $\models P \rightarrow (Q \rightarrow P)$?
11. $\models P\&Q \rightarrow P \vee Q$?
12. $\models P \vee Q \rightarrow P$?
13. $\models P \rightarrow (P \vee Q) \vee C$?
14. $\models (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P \vee Q$?
15. $\models \neg P \vee Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$?
16. $\models P \vee Q \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$?
17. $\models (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$?
18. $\models (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$?
19. $\models P\&(Q \vee R) \rightarrow (P\&Q) \vee (P\&R)$?
20. $\models P \rightarrow ((Q \vee R) \rightarrow (P\&Q) \vee (P\&R))$?
21. $\models A \vee \neg B \rightarrow \neg A \vee B$?

Logica classica proposizionale $\mathbf{LC}_p$

$$\frac{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \frac{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \to -\mathrm{S}$$