IV appello LOGICA 3 luglio 2017

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti di seguito sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero mostrare se sono validi o meno e soddisfacibili o insoddisfacibili in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di opinioni o paradossi i punti vanno raddoppiati):

– 3 punti
$\vdash \neg((((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \vee (B \rightarrow A))$

– 5 punti
$\exists y\, \neg M(y) \vdash \forall y\, \neg M(y) \rightarrow \perp$

– 6 punti
$\neg\neg M(w) \rightarrow \exists\, w\, M(w) \vdash \exists y\ (M(y) \vee C(y))$

– 6 punti
$c = w \vdash \exists z\, \forall w\ (a \neq w \rightarrow \neg w = z)$

– 6 punti
$A(y) \vee C(y) \vdash \exists w\, A(w)$

– 7 punti
$\exists z\, \forall w\, M(z, w) \vdash \forall w\, \exists z\ (M(z, w) \vee M(w, z))$

• Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla logica classica classica con uguaglianza motivando la risposta. Inoltre nel caso di opinioni o paradossi il punteggio è raddoppiato e la sola traduzione in formula proposizionale conta 1 punto mentre quella in formula predicativa 2 punti.

- (4 punti)

$$\frac{\text{Non arrivo in ritardo ma neanche tanto in anticipo se tutto fila liscio.}}{\text{Non si dà il caso che se tutto fila liscio non arrivi tanto in anticipo.}}$$

si consiglia di usare:
R="Arrivo in ritardo"
A ="Arrivo tanto in anticipo"
F="Tutto fila liscio"

- (6 punti)

  Non c'è nessun essere umano che vive su Giove.

  Ciò che vive su Giove non è un essere umano.

  si consiglia di usare:
  $U(y)$ =“x è un essere umano”
  $V(x, y)$ = “x vive su y”
  g= “Giove”

- (7 punti)

  Non si dà il caso che tutti gli oceani si estendano da nord a sud della terra
  o siano considerati dei mari.

  Qualche oceano non si estende da nord a sud della terra e non è neanche considerato un mare.

  si consiglia di usare:
  O(x)=“x è un oceano”
  E(x)= “x si estende da nord a sud della terra”
  M(x)=“x è considerato un mare”

- (7 punti)

  Non si dà il caso che tutti gli oceani si estendano da nord a sud della terra
  o siano considerati dei mari.

  Nessun oceano si estende da nord a sud della terra.

  si consiglia di usare:
  O(x)=“x è un oceano”
  E(x)= “x si estende da nord a sud della terra”
  M(x)=“x è considerato un mare”

- (8 punti)

  Qualcuno è l'autore de “La Gioconda” e qualsiasi altro diverso da lui non lo è.
  Il Tintoretto non è l'autore de “La Gioconda”.

  Non si dà il caso che l'autore de “La Gioconda” non sia unico o che sia il Tintoretto.

  si consiglia di usare:
  A(x)=“x è un autore de “La Gioconda”
  t=“il Tintoretto”

- (6 punti)

  Gli oceani sono acque ricche di pesci.
  Le acque ricche di pesci devono essere protette dall'inquinamento.

  Tutti gli oceani devono essere protetti dall'inquinamento.

  si consiglia di usare:
  O(x)=“x è un oceano”
  R(x)= “x è un'acqua ricca di pesci”
  P(x) =“x deve essere protetto dall'inquinamento”

- (10 punti)

  “Non esiste nessuno che ricorda tutto quello e solo quello che nessuno ricorda.”

  si consiglia di usare:
  R(x,y)= x ricorda y

- (21 punti) Sia T_{pied} la teoria ottenuta estendendo LC$_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
  - Sia Wilma che Laura vanno a piedi al lavoro se non ci va Matteo.
  - Rodolfo va a piedi al lavoro solo se non ci va Wilma.
  - Sia Wilma che Rodolfo non vanno a piedi al lavoro se Matteo non va a piedi al lavoro.
  - Matteo va a piedi se e solo se, o Laura ci va oppure Rodolfo non ci va.

  Si consiglia di usare:
  P(x)= x va a piedi,
  w=Wilma, l=Laura, r=Rodolfo, m=Matteo.

  Formalizzare le seguenti affermazioni e dedurne la validità in T_{pied}: (ciascuna conta 3 punti quando non indicato altrimenti)

  - Se Rodolfo va a piedi al lavoro anche Matteo ci va.
  - Se Rodolfo va a piedi al lavoro allora Wilma non ci va oppure Laura ci va.
  - Matteo va a piedi al lavoro se Rodolfo non ci va ma ci va Wilma.
  - (6 punti) Matteo va a piedi al lavoro.
  - Rodolfo va a piedi al lavoro solo se ci va anche Laura.

- Sia T_{ins} la teoria ottenuta estendendo LC$_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
  - Se uno insegue un altro e quest'altro insegue un terzo, il primo insegue pure il terzo.
  - Se uno insegue un'altro, quest'altro non insegue del primo.
  - La lepre insegue il coniglio.
  - Nessuno insegue la vipera.
  - Se qualcuno insegue la lepre allora insegue la vipera.
  - Il coniglio insegue la nutria.
  - Non si dà il caso che la nutria non insegua la papera.

  si consiglia di usare:
  I(x,y)= x insegue y
  v=la vipera, l= la lepre, c= il coniglio, = la nutria, p=la papera
  uno=x, altro =y, terzo=z

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria in T_{ins}: (ciascuna conta 5 punti quando non indicato espressamente)

  - Qualcuno insegue un altro.
  - La nutria insegue la papera.
  - (10 punti) Nessuno insegue la lepre.
  - (10 punti) La lepre insegue la nutria.
  - (10 punti) La papera non insegue la nutria.
  - La nutria non insegue la lepre.
  - (10 punti) Nessuno insegue se stesso.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (5 punti) $\vdash \exists w\ (\ w \neq 2\ \vee\ \exists z\ z = 2 + 0\ )$
  2. (6 punti) $\vdash \forall w\ \ (\ y \neq 4\ \rightarrow\ s(4) \neq s(y)\ )$
  3. (6 punti) $\vdash \forall y\ (\ s(5) \neq s(y)\ \vee\ y = 5\ )$
  4. (6 punti) $\vdash \forall y\ \exists z\ (y + 1) + 1 = s(z)$
  5. (8 punti) $\vdash \exists w\ \forall y\ y + 0 = w + y$
  6. (8 punti) $\vdash 3 \neq 1\ \rightarrow\ 4 \neq 2$
  7. (8 punti) $\vdash\ \exists x\ 3 = x \cdot 1$
  8. (11 punti) $\vdash \forall w\ \forall y\ s(y) = w + 1$
  9. (15 punti) $\vdash \forall x\ \exists y\ (\ y + 2 = x\ \vee\ (\ x = y + 1\ \vee\ 0 = x\ )\ )$

- Stabilire se le seguenti regole, formalizzate dove occorre, e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

  (10 punti)

$$\frac{\text{Gino parla} \vdash \text{Tutti si divertono} \qquad \text{Mirko parla} \vdash \text{Tutti si divertono}}{\text{Se Gino non parla Mirko parla} \vdash \ \text{Tutti si divertono}}\ 1$$

ove
P(x)=x parla
g=Gino
m=Mirko
D(x)=x si diverte

(10 punti)

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B\ \rightarrow\ (\neg A\ \rightarrow\ C) \vdash \Delta}\ 2$$

(16 punti) Stabilire se la formalizzazione di

$$\frac{x \text{ è nel parco } \vdash y \text{ passeggia.}}{\text{Qualcuno è nel parco } \vdash \ \text{Tutti passeggiano}}\ 3$$

ove
$P(x)$="x è nel parco"
$S(x)$="x passeggia"

Logica classica con uguaglianza- $\mathrm{LC}_=$

$$\overset{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \overset{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla} \qquad \overset{\text{ax-}\top}{\Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\mathrm{S} \qquad \overset{=-\mathrm{ax}}{\Gamma \vdash t = t, \Delta}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $\mathrm{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx}, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$

$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$

$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$

$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$

$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$

$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$

$Ax7. \vdash A(0)\ \&\ \forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ )\ \to\ \forall x\ A(x)$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \;\equiv\; \neg t = s$

$$\begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{sx1} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{dx1} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{–S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{–D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{''} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{''} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{''}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{''}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{–S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{–D}_v$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{tra}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{cf}^* \\ \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$