II appello 17 luglio 2013

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica con uguaglianza motivando la risposta (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $\vdash \neg(\ (\ (\ (A \ \rightarrow\ B\ ) \rightarrow\ A\ )\ \rightarrow\ A\ )\ \vee\ C\ )$

  - 5 punti
    $\neg C(w)\ \rightarrow\ \exists\ w\ C(w)\ \vdash\ \exists y\ \ C(y)$

  - 5 punti
    $\vdash\ \exists z\ \forall w\ (\ a \neq w\ \vee\ w = z\ )$

  - 5 punti
    $\exists y\ \neg C(y) \vdash \forall y\, C(y)\ \rightarrow\ \neg C(y)$

  - 5 punti
    $A(y)\ \vee\ C(y) \vdash \forall w\ A(w)$

  - 5 punti
    $\forall w\ \forall z\ w \neq z\ \vdash\ \forall w\ A(w)$

  - 6 punti
    $a \neq b \vdash\ \forall z\ \exists y\ y \neq z\ \vee\ C(w)$

• Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla semantica della logica classica motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato della metà arrotondata per eccesso)

  - (3 punti)
    Lo Scirocco non soffia né da nord né da ovest se c'è afa.
    ___
    Non si dà il caso che soltanto se c'é afa lo Scirocco soffi da nord.

si consiglia di usare:
N=“Scirocco soffia da nord”
O =“Scirocco soffia da ovest”
A=“C’é afa”

- (7 punti)

  Non si dà il caso che tutti i mari siano puliti e balneabili.

  Qualche mare non è pulito o se è pulito non è balneabile.

  si consiglia di usare:
  M(x)=“x è un mare”
  B(x)= “x è balneabile”
  P(x) =“x è pulito”

- (7 punti)

  Qualcuno è l’autore della Divina Commedia e qualsiasi altro diverso da lui non lo è.
  Dante scrisse La Divina Commedia.

  L’autore della Divina Commedia è unico.

  si consiglia di usare:
  A(x)=“x è un autore della Divina Commedia”
  d=“Dante”

- (6 punti)

  Nel sud della Nuova Zelanda vivono dei pinguini.
  I pinguini sanno nuotare ma non volare.

  I pinguini che vivono nel sud della Nuova Zelanda non sanno volare.

  si consiglia di usare:
  S(x)=“x vive nel sud della Nuova Zelanda”
  P(x)= “x è un pinguino”
  V(x) =“x sa volare”
  N(x)=“x sa nuotare”

- (7 punti)

  I bambini imparano facilmente qualsiasi sport.
  Quelli che imparano facilmente uno sport sono fortunati.

  I bambini sono fortunati.

  si consiglia di usare:
  I(x,y)=“x impara facilmente y”
  F(x)= “x è un fortunato”
  S(x) =“x è uno sport”
  B(x)=“x è un bambino”

- (5 punti)

  Non c’è nessun uomo che vive senza bere.

  Chiunque viva senza bere non è un uomo.

  si consiglia di usare:
  U(y) =“x è un uomo”
  B(x)= “x vive senza bere”

- (21 punti) Sia T_{mon} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
  - Sia Chiara che Giacomo vanno in montagna se non ci va Luca.
  - Luca va in montagna se e solo se, o Giacomo ci va oppure Filippo non ci va.
  - Filippo va in montagna solo se non ci va Chiara.
  - Sia Chiara che Filippo non vanno in montagna se Luca non va in montagna.

  Si consiglia di usare:
  V(x)= x va in montagna, c=Chiara, g=Giacomo, f=Filippo, l=Luca.

  Formalizzare le seguenti affermazioni e dedurne la validità in T_{mon}:
  - Se Filippo va in montagna anche Luca ci va.
  - Se Filippo va in montagna allora Chiara non ci va oppure Giacomo ci va.
  - Luca va in montagna se Filippo non ci va ma ci va Chiara.
  - Luca va in montagna.
  - Filippo va in montagna solo se Giacomo va in montagna.

- (28 punti) Sia T_{cor} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
  - Pietro corre piú veloce di Agnese.
  - Nessuno corre piú veloce di Giacomo.
  - Se qualcuno corre piú veloce di Pietro allora corre piú veloce di Giacomo.
  - Agnese corre piú veloce di Chiara.
  - Non si dà il caso che Chiara non corra piú veloce di Tobia.
  - Se uno corre piú veloce di un altro e quest'altro corre piú veloce di un terzo, il primo corre piú veloce del terzo.
  - Se uno corre piú veloce di un'altro, quest'altro non corre piú veloce del primo.

  suggerimento: si consiglia di usare:
  A(x,y)= x corre piú veloce di y
  g=Giacomo, p= Pietro, a= Agnese, c= Chiara, t=Tobia
  uno=x, altro =y, terzo=z

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria in T_{cor}:
  Derivare
  - Qualcuno corre piú veloce di un altro.
  - Nessuno corre piú veloce di Pietro.
  - Pietro corre piú veloce di Chiara.
  - Tobia non corre piú veloce di Chiara.
  - Chiara non corre piú veloce di Pietro.
  - Nessuno corre piú veloce di se stesso.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (5 punti) $\vdash \forall w \ \ (y \neq 3 \ \rightarrow \ s(3) \neq s(y))$
2. (5 punti) $\vdash \forall y \ (\ s(3) \neq s(y) \ \vee \ y = 3 \ )$
3. (5 punti) $\vdash \forall y \ \exists z \ (y+1)+1 = s(z)$
4. (5 punti) $\vdash \exists w \ (\ w \neq 3 \ \vee \ \exists z \ z = 3 \ )$
5. (6 punti) $\vdash \exists w \ \forall y \ y + 0 = w + y$
6. (7 punti) $\vdash 3 \neq 1 \ \rightarrow \ 4 \neq 2$
7. (7 punti) $\vdash \ \exists x \ 3 = x \cdot 1$
8. (9 punti) $\vdash \forall w \ \forall y \ s(y) = w + 1$
9. (11 punti) $\vdash \forall x \ \exists y \ (\ y + 2 = x \ \vee \ (\ x = y + 1 \ \vee \ 0 = x \ ) \ )$

- Stabilire se le seguenti regole sono valide e anche sicure rispetto alla semantica classica:

  (8 punti)
  $$\frac{A(x) \vdash \Delta \qquad\qquad B \vdash \Delta}{\forall x \ A(x) \vee B \vdash \Delta} \ 1$$

  (5 punti)
  $$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \rightarrow A \vdash \Delta} \ 2$$

- (10 punti) Stabilire se la formalizzazione di

  $$\frac{x \text{ è sul palco } \vdash y \text{ applaude}}{\text{Qualcuno è sul palco } \vdash \text{ Tutti applaudono}} \ 3$$

  è istanza di una regola valida, assieme alla sua inversa, rispetto alla semantica classica, ove
  $P(x)$=“x è sul palco”
  $A(x)$=“x applaude”

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\frac{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \frac{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla} \qquad \frac{\text{ax-}\top}{\Gamma \vdash \nabla, \top, \nabla'}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \to -\text{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to -\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\text{S} \qquad \frac{= -\text{ax}}{\Gamma \vdash t = t, \Delta}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC$_=$ + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \text{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$

$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$

$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$

$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$

$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$

$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$

$Ax7. \vdash A(0)\ \&\ \forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ )\ \to\ \forall x\ A(x)$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \ \equiv\ \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \ \equiv\ s(0)$$

$$2 \ \equiv\ s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{−S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{−D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{"}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{"}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{−S}_v \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{−D}_v$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{tra}^* & \text{cf}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\mathrm{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\, P(x) \rightarrow P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$