

SIMULAZIONE I appello 11 gennaio 2018

nome:

cognome:

- Scrivere in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Si ricorda di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Si ricorda di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Si esplicitino le eventuali regole derivate usate che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- Mostrare se i seguenti elencati sotto sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero mostrare se sono validi o meno e soddisfacibili o insoddisfacibili in logica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso)

3 punti

- $\vdash \neg(B \rightarrow \neg\neg A) \ \& \ \neg\neg(B \vee \neg B)$

5 punti

- $\exists x (M(x) \vee A(x)) \vdash \forall x A(x)$

6 punti

- $\exists w (c = w \ \& \ w \neq d) \vdash \forall z \exists y z \neq y$

5 punti

- $\exists x \exists w (C(x) \ \& \ B(w)) \vdash \exists y (\neg C(y) \vee y \neq c \rightarrow B(y))$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono tautologie, opinioni o paradossi, ovvero VALIDI o meno e SODDISFACIBILI o meno rispetto alla logica classica classica con uguaglianza motivando la risposta: nel caso di sequente proposizionale non valido si indichi la riga della tabella di verità in cui il sequente è falso e nel caso di sequente predicativo non valido si mostri un contromodello (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso)

(4 punti)

Non è domenica nè sabato, se l'autostrada è libera dal traffico.

Soltanto se l'autostrada è libera dal traffico non è domenica ma è sabato.

si consiglia di usare:

S=“È sabato”

A =“L'autostrada è libera dal traffico”

D=“È domenica”

- (6 punti)

Chi ascolta non parla troppo.

Qualcuno parla troppo.

Qualcuno non ascolta o medita.

si consiglia di usare:

$M(x)$ = "x medita"

$A(x)$ = "x ascolta"

$P(x)$ = "x parla troppo"

- (6 punti)

Chi parla troppo non ascolta.

Nessuno parla troppo.

Tutti ascoltano.

si consiglia di usare i simboli nell'esercizio precedente

- (9 punti)

Un desiderio di Giulio è diventare un cantante rock.

Diventare un cantante rock è diverso che diventare un cantante di jazz.

Giulio ha un unico desiderio.

Non si dà il caso che Giulio non abbia un desiderio oppure

che abbia il desiderio di diventare un cantante di jazz.

si consiglia di usare:

$D(x,y)$ = x è un desiderio di y

r=diventare un cantante rock

j=diventare un cantante di jazz

l=diventare un cantante lirico

g=Giulio

- (14 punti)

"Qualcuno loda solo se stesso e loda quelli e soltanto quelli che non si lodano."

si consiglia di usare:

$L(x,y)$ = x loda y

- (14 punti)

"Non si dà il caso che ci sia qualcuno che se lui passa l'esame di logica allora tutti passano l'esame di logica. "

si consiglia di usare:

$B(x)$ = x passa l'esame di logica

- Sia T_{rec} la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Se Beppe recita, Dario non fa la comparsa.
- Luisa non recita se c'è un suggeritore.
- Luisa non recita solo se c'è un suggeritore.
- Se Dario non fa la comparsa allora Beppe e Luisa recitano.
- Dario fa la comparsa se Luisa recita o non c'è un suggeritore.

Si consiglia di usare:

$C(x)$ = x fa la comparsa

$R(x)$ = x recita

$S(x)$ = x un suggeritore

b=Beppe, d=Dario, l=Luisa.

Dedurre poi le seguenti affermazioni nella teoria indicata (ciascuna vale 4 punti):

- Non c'è un suggeritore se Luisa recita.
- Se Luisa recita Dario fa la comparsa.
- Dario fa la comparsa.
- Luisa non recita o Beppe non recita.
- Qualcuno non recita.

- Sia T_{mon} la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Per ciascuna montagna esiste una montagna più alta di lei.
- Se una montagna è più alta di un'altra montagna, e quest'altra è più alta di una terza montagna, allora la prima montagna è più alta della terza montagna.
- Il Monte Bianco, il Monte Rosa, il Civetta e l'Everest sono montagne.
- Il Monte Rosa è più alto del Civetta.
- Date due montagne o la prima è più alta della seconda o la seconda è più alta della prima.
- Nessuna montagna è più alta di se stessa.
- Non c'è montagna più alta dell'Everest.
- Il Monte Bianco è più alto del Monte Rosa.

Si consiglia di usare:

$A(x,y)$ = "x è più alto di y"

$M(x)$ = "x è una montagna"

b="Monte Bianco"

r="Monte Rosa"

c="Civetta"

e="Everest"

Dedurre poi in T_{am} le seguenti affermazioni (ciascuna vale 8 punti):

- Il Monte Bianco non è più alto dell'Everest.
- Il Monte Bianco è più alto del Civetta.
- L'Everest è più alto del Monte Rosa.
- L'Everest è più alto di tutte le montagne eccetto se stesso.

- Il Monte Rosa non è più alto del Monte Bianco.
- Stabilire se le seguenti regole, formalizzate dove occorre, e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica classica (l'analisi delle inverse raddoppia il punteggio):

- (6 punti)

$$\frac{D \vdash C}{\neg(C \vee \neg C) \vdash \neg D \ \& \ C} \quad 1$$

- (6 punti)

$$\frac{\text{Nevica} \vdash \text{Non piove}}{\text{È mattina} \vdash \text{Solo se non nevica piove}} \quad 2$$

ove

M = “è mattina”

P = “piove”

N = “nevica”

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (7 punti) $\vdash \forall y \exists z \exists w \ y + w = z$

2. (7 punti) $\vdash \exists w \exists y \ w \cdot y = 0 + y$

Logica classica con uguaglianza- $\text{LC}_=$

ax-id	$\text{ax-}\perp$	ax-tt
$\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'$	$\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla$	$\Gamma \vdash \nabla, \text{tt}, \nabla'$
$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{sc}_{\text{sx}}$	$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}}$	
$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&\text{S}$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-\text{D}$	
$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee-\text{S}$	$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee\text{D}$	
$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg-\text{S}$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg-\text{D}$	
$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow-\text{S}$	$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow-\text{D}$	
$\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall-\text{S}$	$\frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \forall-\text{D} \ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$	
$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \nabla} \exists-\text{S} \ (w \notin VL(\Gamma, \exists x A(x), \nabla))$	$\frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists-\text{D}$	
$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} =-\text{S}$	$\begin{array}{c} =-\text{ax} \\ \Gamma \vdash t = t, \Delta \end{array}$	

TAUTOLOGIE CLASSICHE

associatività \vee	$(A \vee B) \vee C$	\leftrightarrow	$A \vee (B \vee C)$
associatività $\&$	$(A \& B) \& C$	\leftrightarrow	$A \& (B \& C)$
commutatività \vee	$A \vee B$	\leftrightarrow	$B \vee A$
commutatività $\&$	$A \& B$	\leftrightarrow	$B \& A$
distributività \vee su $\&$	$A \vee (B \& C)$	\leftrightarrow	$(A \vee B) \& (A \vee C)$
distributività $\&$ su \vee	$A \& (B \vee C)$	\leftrightarrow	$(A \& B) \vee (A \& C)$
idempotenza \vee	$A \vee A$	\leftrightarrow	A
idempotenza $\&$	$A \& A$	\leftrightarrow	A
leggi di De Morgan	$\neg(B \vee C)$	\leftrightarrow	$\neg B \& \neg C$
	$\neg(B \& C)$	\leftrightarrow	$\neg B \vee \neg C$
legge della doppia negazione	$\neg \neg A$	\leftrightarrow	A
implicazione classica	$(A \rightarrow C)$	\leftrightarrow	$\neg A \vee C$
disgiunzione come antecedente	$(A \vee B \rightarrow C)$	\leftrightarrow	$(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)$
congiunzione come antecedente	$(A \& B \rightarrow C)$	\leftrightarrow	$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$
legge della contrapposizione	$(A \rightarrow C)$	\leftrightarrow	$(\neg C \rightarrow \neg A)$
legge del modus ponens	$A \& (A \rightarrow C)$	\rightarrow	C
legge della NON contraddizione	$\neg(A \& \neg A)$		
legge del terzo escluso	$A \vee \neg A$		
leggi di De Morgan	$\neg(\exists x A(x))$	\leftrightarrow	$\forall x \neg A(x)$
	$\neg(\forall x A(x))$	\leftrightarrow	$\exists x \neg A(x)$

Regola di composizione

$$\frac{\vdash \mathbf{fr} \quad \Gamma, \mathbf{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla} \text{ comp}$$

Regole derivate o ammissibili per $\mathbf{LC}_=$

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{c} \frac{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \quad \frac{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C} \\ \\ \frac{\neg\text{-ax}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \quad \frac{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''} \\ \\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta} \neg\neg\text{-S} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta} \neg\neg\text{-D} \\ \\ \frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma} \text{in}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{in}_{dx} \\ \\ \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \Delta} \forall\text{-S}_v \quad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \Delta} \exists\text{-D}_v \\ \\ \frac{\text{rf}^*}{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'} \\ \\ \frac{\text{sm}^*}{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta} \\ \\ \frac{\text{tra}^*}{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta} \quad \frac{\text{cf}^*}{\Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta} \\ \\ \frac{\text{cp}^*}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta} \\ \\ \frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta} \text{sy-r} \quad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta} \text{sy-l} \\ \\ \frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta, \Delta'} \text{tr-r} \end{array}$$

Aritmetica di Peano PA

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $LC_{=}$ la regola di composizione

$$\frac{\vdash \mathbf{fr} \quad \Gamma, \mathbf{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla} \text{ comp}$$

e i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x \ s(x) \neq 0$$

$$Ax2. \vdash \forall x \ \forall y \ (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$$

$$Ax3. \vdash \forall x \ x + 0 = x$$

$$Ax4. \vdash \forall x \ \forall y \ x + s(y) = s(x + y)$$

$$Ax5. \vdash \forall x \ x \cdot 0 = 0$$

$$Ax6. \vdash \forall x \ \forall y \ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$

$$Ax7. \vdash A(0) \& \forall x \ (A(x) \rightarrow A(s(x))) \rightarrow \forall x \ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \dots (0))}_{n\text{-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(s(0))$$