5. Esercitazione 19 maggio 2010- con regola =-S semplificata

Precisazioni sulle nozioni da usare negli esercizi

Un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ si dice **VALID0** rispetto alla semantica della logica classica se il sequente è valido in ogni modello, ovvero la proposizione $\Gamma_{\&} \rightarrow \Delta_{\vee}$ è vera in ogni modello.

Un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ si dice **SODDISFACIBILE** se $\Gamma_{\&} \rightarrow \Delta_{\vee}$ è vera in qualche modello.

Un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ si dice **NON VALID0** se $\Gamma_{\&} \rightarrow \Delta_{\vee}$ NON è valida in qualche modello, ovvero ha un contromodello,
ovvero c'è un modello in cui $\neg(\ \Gamma_{\&} \rightarrow \Delta_{\vee}\ )$ è vera.

Un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ si dice **INSODDISFACIBILE** se non c'è modello che rende vero $\Gamma_{\&} \rightarrow \Delta_{\vee}$ ovvero la sua negazione $\neg(\ \Gamma_{\&} \rightarrow \Delta_{\vee}\ )$ è vera in ogni modello.

Come usare le regole di uguaglianza?

Nella regola

$$\frac{\Sigma, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S}$$

NON TUTTE le occorrenze di t DEVONO essere rimpiazzate con s
MA TUTTE le occorrenze di s DEVONO essere rimpiazzate con t supposto che non compaiano in Σ, ∇ affinchè la regola sia sicura.

Esempio 1: Se vogliamo derivare la simmetria dell'uguaglianza

$$t = s \vdash s = t$$

in $\mathrm{LC}_{=}^{abbr}$ occorre applicare la regola $= -\mathrm{S}$ in tal modo:
si identifichi

$$\Sigma \equiv \emptyset \qquad \Gamma(x) \equiv \emptyset \qquad \Delta(x) \equiv x = t \qquad \nabla \equiv \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(t) \equiv t = t \qquad \Delta(s) \equiv s = t$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\frac{\begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \vdash t = t \end{array}}{t = s \vdash s = t} = -\mathrm{S}$$

Esempio 2: Se vogliamo derivare la transitività dell'uguaglianza

$$t = u, u = s \vdash t = s$$

in $\mathrm{LC}_{=}^{abbr}$ occorre applicare la regola $= -\mathrm{S}$ in tal modo:
si identifichi

$$\Sigma \equiv t = u \qquad \Gamma(x) \equiv \emptyset \qquad \Delta(x) \equiv t = x \qquad \nabla \equiv \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(u) \equiv t = u \qquad \Delta(s) \equiv t = s$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\frac{\begin{array}{c} \mathrm{ax-id} \\ t = u \vdash t = u \end{array}}{t = u, u = s \vdash t = s} = -\mathrm{S}$$

semplifichiamo regola =-S

Se si adotta la regola

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S}$$

che è valida e sicura, si possono rimuovere a piacimento, dal basso verso l'alto, tutte le occorrenze di s. Si consiglia di adottare questa regola negli esercizi.

- Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE rispetto alla semantica classica e nel caso di NON validità dire se sono SODDISFACIBILI o INSODDISFACIBILI:
  si ricorda che
  $$t \neq s \;\equiv\; \neg t = s$$

  1. $\models \forall x\ \exists y\ (\ A(x) \vee x = y\ )$?
  2. $\models \exists x\ (\ \perp\rightarrow x \neq x\ )$?
  3. $\models \exists x \forall y\ x = y$?
  4. $\models \neg \exists x\ x = x$?
  5. $\models \exists x\ x = c$?
  6. $\models \forall x\ x = x \rightarrow \exists x\ A(x)$?
  7. $\models \forall y\ \forall x\ (\ y = z \rightarrow x = z\ )$?
  8. $\models \forall y\ \forall x\ \forall z\ (\ x = y \& y = z \rightarrow x = z\ )$?
  9. $\models \forall y\ \forall x\ \forall z\ (\ x = y \& z = y \rightarrow x = z\ )$?
  10. $\models \forall x\ (\ x = y \& B(x) \rightarrow B(y)\ )$?
  11. $\models \neg \exists x\ (\ x = y \& B(x) \rightarrow B(y)\ )$?
  12. $\models \forall x \forall z \exists y(\ y = x \rightarrow y = z\ )$?
  13. $\models \forall x \forall z \exists y(\ y = z \rightarrow z = x\ )$?

- Formalizzare le frasi seguenti e provare la loro correttezza, ovvero mostrare se la loro formalizzazione è valida rispetto alla semantica classica:
  si consiglia di usare il calcolo dei sequenti per provare la validità del sequente
  e di costruire un contromodello per provare la non validità.

  1. Il programma fattoriale su 3 dà come unico output 6.
     Il programma fattoriale su 3 dà output il numero x.
     ___
     Il numero x è uguale a 6.
     con
     f= " il fattoriale"
     3= " il numero tre"
     6= " il numero sei"
     $O(x, y, z)$= " il programma y su z dà output il numero x"

  2. Il programma fattoriale su 2 dà un'`unico` output.
     Il programma fattoriale su 2 dà output il numero 2.
     Il programma fattoriale su 2 dà output il numero x.
     ___
     Il numero x è uguale 2.
     con
     f= " il fattoriale"
     2= " il numero due"
     3= " il numero tre"
     $O(x, y, z)$= " il programma y su z dà output il numero x"

3.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Il programma fattoriale su 2 dà un'}\texttt{unico}\text{ output.}\\ \text{Il programma fattoriale su 2 dà output 2.}\\ \text{2 è diverso da 3}\end{array}}{\text{Il programma fattoriale su 2 non dà output 3.}}$$

con
f= " il fattoriale"
2= " il numero due"
3= " il numero tre"
$O(x, y, z)$= " il programma y su z dà output il numero x"

4.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Il programma fattoriale su 2 dà un'}\texttt{unico}\text{ output.}\\ \text{Il programma fattoriale su 2 dà output 2.}\end{array}}{\text{Il programma fattoriale su 2 non dà output 3.}}$$

con
f= " il fattoriale"
3= " il numero due"
2= " il numero tre"
$O(x, y, z)$= " x è output del programma y su z"

5.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Franco è venuto ad una sola riunione.}\\ \text{Franco non è venuto all'ultima riunione.}\\ \text{Franco è venuto alla riunione del 10 giugno.}\end{array}}{\text{L'ultima riunione non è quella del 10 giugno.}}$$

ove si consiglia di usare:
V(x,y)= x è venuto alla riunione y
u=ultima riunione
d=riunione del 10 giugno
f=Franco

- Mostrare le regole dell'uguaglianza sono valide e sicure:

$$\begin{array}{c} = -\mathrm{ax} \\ \Sigma \vdash t = t, \Delta \end{array} \qquad \frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -\mathrm{S}_f$$

- Stabilire quali delle seguenti regole sono valide e in caso positivo anche sicure:

$$\frac{\Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash s = t}\ 1 \qquad \frac{\Gamma \vdash t = s \quad \Gamma \vdash s = u}{\Gamma \vdash t = u}\ 2$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash t = u}\ 3$$

Spunti per approfondimento personale fuori programma: Il calcolo dei sequenti della logica classica, sia con uguaglianza che senza, assume che il dominio del modello del calcolo abbia un'importante proprietà, sai dire quale?
Per scoprirlo rispondi prima a queste domande:

1. È derivabile il sequente in $\mathrm{LC}_{=}^{abbr}$

$$\vdash \exists x\ x = x$$

??

2. È derivabile il sequente in LC^{abbr}, con A proposizione qualsiasi,

$$\vdash \exists x \ (\ A \rightarrow A \ )$$

??

3. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio predicativo con SOLO variabili (tante quante sono i numeri naturali), senza costanti, e una solo proposizione atomica A. Quali tipi di domini D possiamo estendere ad un modello del calcolo classico in questo linguaggio?

Logica classica con uguaglianza- calcolo abbreviato $\mathbf{LC}_{=}^{abbr}$

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{ax-}\bot \\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\text{D} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\text{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\text{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\text{S}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to -\text{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to -\text{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\text{D}\ (x \notin VL(\Gamma, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\text{S}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\text{S}\ (x \notin VL(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\text{D}$$

$$\begin{array}{c} = -\text{ax} \\ \Sigma \vdash t = t, \Delta \end{array} \qquad \frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\text{S}_f$$