13. Calcolo dei sequenti per logica classica predicativa

Vogliamo qui introdurre il calcolo dei sequenti per i predicati. A tal scopo dobbiamo prima introdurre il concetto di *variabile libera* e *variabile vincolata.*

Nozione di variabile LIBERA in termini e formule

Una variabile $\mathbf{x}$ si dice **libera** in un termine $\mathbf{t_{ter}}$ se vi compare. Ma diamo anche la definizione precisa come segue:

$\mathbf{x}$ **si dice LIBERA in** $\mathbf{t_{ter}}$ **sse** $\mathbf{x} \in \mathbf{VL}(\mathbf{t_{ter}})$ ove
$\mathbf{VL}(\mathbf{c}) \equiv \emptyset$ se $\mathbf{c}$ costante $\mathbf{VL}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}$

Poi definiamo la nozione di variabile libera di una formula come segue:

$\mathbf{x}$ **si dice LIBERA in** $\mathtt{fr}$ **sse** $\mathbf{x} \in \mathbf{VL}(\mathtt{fr})$ ove
$\mathbf{VL}(\perp) \equiv \emptyset$ $\mathbf{VL}(\mathbf{P_k}(\mathbf{t_1}, \dots, \mathbf{t_m})) \equiv \mathbf{VL}(\mathbf{t_1}) \cup \dots \cup \mathbf{VL}(\mathbf{t_m})$ $\mathbf{VL}(\forall \mathbf{y}\ \mathtt{fr}) \equiv \mathbf{VL}(\mathtt{fr}) \setminus \{\mathbf{y}\}$ **ovvero y appare VINCOLATA in** $\forall \mathbf{y}\ \mathtt{fr}$ $\mathbf{VL}(\exists \mathbf{y}\ \mathtt{fr}) \equiv \mathbf{VL}(\mathtt{fr}) \setminus \{\mathbf{y}\}$ **ovvero y appare VINCOLATA in** $\exists \mathbf{y}\ \mathtt{fr}$ $\mathbf{VL}(\mathtt{fr}_1 \,\&\, \mathtt{fr}_2) \equiv \mathbf{VL}(\mathtt{fr}_1) \cup \mathbf{VL}(\mathtt{fr}_2)$ $\mathbf{VL}(\mathtt{fr}_1 \vee \mathtt{fr}_2) \equiv \mathbf{VL}(\mathtt{fr}_1) \cup \mathbf{VL}(\mathtt{fr}_2)$ $\mathbf{VL}(\mathtt{fr}_1 \to \mathtt{fr}_2) \equiv \mathbf{VL}(\mathtt{fr}_1) \cup \mathbf{VL}(\mathtt{fr}_2)$ $\mathbf{VL}(\neg \mathtt{fr}) \equiv \mathbf{VL}(\mathtt{fr})$

Esercizio: descrivere le variabili libere delle seguenti formule

$\mathbf{VL}(\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \to \forall \mathbf{z}\ \mathbf{B}(\mathbf{z}, \mathbf{y})\ ) =$

$\mathbf{VL}(\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \to \forall \mathbf{x}\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ ) =$

$\mathbf{VL}(\ \mathbf{A}(\mathbf{z}) \to \exists \mathbf{x}\ \mathbf{A}(\mathbf{x})\ ) =$

Logica classica (predicativa) - LC

 

Il calcolo dei sequenti **LC** include le regole sotto ove

- i simboli $\mathtt{fr}_1$ e $\mathtt{fr}_2$ sono META-variabili che indicano formule complesse arbitrarie;
- la scrittura $\mathtt{fr}[\mathtt{x}/\mathtt{t}]$ indica la formula ottenuta sostituendo TUTTE le occorrenze libere della variabile $\mathbf{x}$ in $\mathtt{fr}$ con il termine $\mathbf{t_{ter}}$;
- la scrittura $\mathbf{\Gamma}[\mathbf{x}/\mathbf{t_{ter}}]$ indica la lista di formule ottenuta dalla lista $\mathbf{\Gamma}$ sostituendo in ogni formula di tal lista la variabile $\mathbf{x}$ con il termine $\mathbf{t_{ter}}$;
- Il simbolo $\mathbf{t_{ter}}$ è una META-variabile che indica un termine qualsiasi del linguaggio che può essere una delle variabili $x, y, z, \ldots$ oppure una delle costanti $a, b, c, \ldots$;
- le regole di quantificazioni sotto si intendono chiuse sulla sostituzione della variabili x, w che appaiono sotto con QUALSIASI altra variabile purchè vengano rispettate le condizioni indicate.

$$\textbf{ax-id}\quad \Gamma, \mathtt{fr}_1, \Gamma' \vdash \Delta, \mathtt{fr}_1, \Delta' \qquad \textbf{ax-}\bot\quad \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla \qquad \text{ax-tt}\quad \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathtt{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1 \& \mathtt{fr}_2, \Delta}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, \mathtt{fr}_1, \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \& \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}\ \&-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1, \mathtt{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1 \vee \mathtt{fr}_2, \Delta}\ \vee-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \vee \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathtt{fr}_1, \Delta}\ \neg-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1, \Delta}{\Gamma, \neg \mathtt{fr}_1 \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \vdash \mathtt{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1 \rightarrow \mathtt{fr}_2, \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1, \Delta \quad \Gamma, \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \rightarrow \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{S}$$

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]\ ,\ \nabla}{\mathbf{\Gamma} \vdash\ \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ ,\ \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma},\ \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ ,\ \nabla)) \qquad \frac{\mathbf{\Gamma},\ \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ ,\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t_{ter}}] \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma}\ ,\ \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr} \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}$$

$$\frac{\mathbf{\Gamma},\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}] \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma},\ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr} \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma}, \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}, \mathbf{\Delta})) \qquad \frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t_{ter}}]\ ,\ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ ,\ \nabla}{\mathbf{\Gamma} \vdash \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ ,\ \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

Poi diciamo che un

sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile nel calcolo LC
se tal sequente ammette una derivazione in **LC**,
ovvero un albero costruito con regole di **LC** avente assiomi come foglie.

Versione alternativa del calcolo LC

 

Qui presentiamo una versione alternativa del calcolo **LC** in cui le regole agiscono su quantificatori e connettivi applicati rispettivamente a predicati atomici $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e variabili proposizionali $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ (la differenza tra le variabili $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}$ e le META-variabili $\mathtt{fr_1}$ e $\mathtt{fr_2}$ è che le prime sono i costituenti di base della grammatica delle formule per formare formule complesse, ad esempio $A\,\&\,(\,B(x)\ \vee\ C\,)\ \rightarrow\ \exists x\ \ D(x,y)$, mentre le seconde sono solo variabili di più alto livello per indicare una formula complessa). Ma per completezza il calcolo deve contenere *anche TUTTE le applicazioni delle regole ottenute mettendo al posto delle variabili* $\mathbf{A},\mathbf{B}$ *e dei predicati* $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ *delle formule qualsiasi e al posto di* $\mathbf{w}$ *nelle regole* $\exists-$S *e* $\forall-$D *una qualsiasi altra variabile purchè rispetti le condizioni dettate dalle regole.*

$$\begin{array}{ccc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot & \text{ax-}\mathtt{tt} \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla' \end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \rightarrow -\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \rightarrow -\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t_{ter}) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x\ A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t_{ter}), \exists x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

Come usare le regole del calcolo predicativo

Memo:

applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e $\forall$-D e $\exists$-S
Usare VARIABILI NUOVE (=non presenti nei sequenti) nelle regole $\forall$-D e $\exists$-S
usare SOLO le lettere $\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ come VARIABILI nelle regole $\exists$**-S** e $\forall$**-D**
usare le lettere minuscole $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \ldots$ come costanti
le lettere $\mathbf{u_{ter}}$,$\mathbf{v_{ter}}$, $\mathbf{t_{ter}}$,$\mathbf{s_{ter}}$ sono usate come METAVARIABILI per termini ovvero sono usate al posto sia di costanti che di variabili

Esercizi

1. Il seguente albero

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ A(z) \vdash A(z)\end{array}}{A(z) \vdash \forall z\ A(z)}\ \forall\text{−D}}{\exists z\ A(z) \vdash \forall z\ A(z)}\ \exists\text{−S}$$

   è una derivazione corretta in LC ??

   Il sequente radice è un sequente valido?

2. Il seguente albero

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\textbf{ax-id}\\ A(z) \vdash A(z)\end{array}}{\exists z\ A(z) \vdash A(z)}\ \exists\text{−S}}{\exists z\ A(z) \vdash \forall z\ A(z)}\ \forall\text{−D}$$

   è una derivazione corretta in LC ??

3. Chi è il termine **t** che compare nelle regole delle quantificazioni?

   Il termine **t** una metavariabile che sta ad indicare una qualsiasi variabile, ad esempio **x** o **y**, oppure una costante qualsiasi, per esempio **c**.

4. Cosa vuol dire $\mathbf{A}(\mathbf{t})$??

   $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ sta ad indicare la formula ottenuta sostituendo in un predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ al posto di $\mathbf{x}$ il termine $\mathbf{t}$.

   Vedremo in seguito che il termine $\mathtt{pr}(\mathbf{t})$ è ottenuto per **sostituzione** in $\mathtt{pr}(\mathbf{x})$ di $\mathbf{x}$ con un termine $\mathbf{t}$, ovvero $\mathtt{pr}(\mathbf{x})[\mathbf{x}/\mathbf{t}] = \mathtt{pr}(\mathbf{t})$, ed è definito solo se le variabili libere di t NON passano da libere a vincolate dopo la sostituzione in $\mathtt{pr}(\mathbf{x})$.

5. Derivare in LC

$$\forall \mathbf{x}\ (\ \mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\ )\ , \mathbf{U}(\overline{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{M}(\overline{\mathbf{s}})$$

6. Formalizzare in sequente l'asserzione

   Il conte Augusto è un'antenato di Mario ed è nobile

   Qualche antenato di Mario è nobile

   ove si pone
   $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ = **"x è antenato di y"**
   $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ = **"x è nobile"**
   $\overline{\mathbf{m}}$=**"Mario"**
   c="Il conte Augusto"

   Si derivi il sequente ottenuto in LC.

7. Derivare in LC

$$\forall y\ A(y) \vdash \forall w\ A(w)$$

8. Derivare in LC

$$\exists y\ A(y) \vdash \exists w\ A(w)$$

9. Derivare in LC

$$\forall x\ \forall y\ (\ \neg C(x) \vee \neg A(y)\ ) \vdash \neg \exists y\ (\ A(y) \,\&\, C(y)\ )$$

10. Derivare in LC

$$\vdash \neg\, \exists y\, \neg C(y) \;\rightarrow\; \forall y\, C(y)$$

11. Tradurre l'argomentazione (dal IV appello 2014) in sequente e verificarne la validità in logica classica:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Nei boschi crescono i funghi.}\\ \text{Alcuni funghi sono velenosi.}\end{array}}{\text{Alcuni funghi velenosi crescono nei boschi.}}$$

si consiglia di usare:
C(x)="x cresce nei boschi"
F(x) ="x è un fungo"
V(x) ="x è velenoso"