

I appello 24 giugno 2011

nome:

cognome:

appello

II compitino

- a chi fa l'appello verrà valutato ogni esercizio per il superamento dell'esame.
- a chi fa il II compitino verranno valutati soltanto gli esercizi con la dicitura II compitino.
- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):
 - 3 punti
 $(C \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B \vdash B \rightarrow \neg C$
 - 5 punti
 $\vdash \neg (\exists y (\neg C(y) \vee D(y)))$
 - 6 punti
 $\forall x \forall y (\neg C(x) \vee \neg A(y)) \vdash \neg \exists y (A(y) \vee C(y))$
 - 5 punti
 $\vdash \neg (\exists x \neg B(x) \rightarrow \neg \forall x \neg \neg B(x))$
 - 4 punti (II comp.)
 $\vdash \exists y \forall z (z = y \vee \neg y = z)$
 - 6 punti (II comp.)
 $\exists x \exists y x \neq y \vdash \forall z z \neq z$
 - 5 punti (II comp.)
 $\exists x \exists y x \neq y \vdash \neg \exists z z \neq z$
 - 5 punti (II comp.)
 $\vdash w = x \rightarrow x = u \vee u \neq w$

- Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI, ovvero hanno un modello che li rende validi, o INSODDISFACIBILI, ovvero nessun modello li rende validi, motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato di 2 punti)

- (3 punti)

Se ho tempo rileggo il compito.

Se e soltanto se ho tempo rileggo il compito.

si consiglia di usare:

R = "Rileggo il compito"

H = "Ho tempo"

- (6 punti)

I cerchi non hanno un angolo.

Ciò che ha un angolo non è un cerchio oppure non è una figura geometrica.

si consiglia di usare:

A(x) = "x ha un angolo"

C(x) = "x è un cerchio"

F(x) = "x è figura geometrica"

- (7 punti)

Non c'è in commercio un computer quantistico.

Se ci fosse in commercio un computer quantistico tutti gli informatici sarebbero felici.

si consiglia di usare:

Q(x) = "x è un computer quantistico"

C(x) = "x è in commercio"

I(x) = "x è informatico"

F(x) = "x è felice"

- (5 punti)

Chiunque pensa sa di non sapere.

C'è qualcuno che pensa.

si consiglia di usare:

P(x) = x pensa

S(x) = x sa di non sapere

- (6 punti)

Chiunque sa costruire un programma corretto si sente utile.

Chi non sa costruire un programma corretto non si sente utile.

si consiglia di usare:

S(x) = x sa costruire un programma corretto

U(x) = x si sente utile

- (7 punti - II comp.)

Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in LC=:

C'è un unico metodo che risolve il mio problema.
 Il metodo di Gianni risolve il mio problema.
 Il metodo di Gianni non è il metodo di Beppe.

 Il metodo di Beppe non risolve il mio problema.

si consiglia di usare:

$M(x) = x$ è metodo che risolve il mio problema
 g =metodo di Gianni
 b =metodo di Beppe

• (9 punti - II comp.)

Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_{=}$:

Non c'è un unico metodo che risolve il mio problema.
 Il metodo di Gianni risolve il mio problema.

 C'è un metodo diverso da quello di Gianni che risolve il mio problema.

si consiglia di usare:

$M(x) = x$ è metodo che risolve il mio problema
 g =metodo di Gianni

• (**II comp**) (12 punti) Siano T_{bi} la teoria che estende $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.
- Sia Chiara che Pina vanno in bici.
- Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va.
- Chiara non va in bici se Elia non ci va.

Si consiglia di usare:

$V(x) = x$ va in bici,
 c =Chiara, p =Pina, e =Elia, g =Giorgio, f =Fabio.

Dedurre poi le seguenti affermazioni in T_{bi} :

- Fabio non va in bici.
- Giorgio va in bici.
- Qualcuno va in bici e qualcuno non ci va.
- Elia va in bici.

• (**II comp**)(24 punti) Sia T_{vec} la teoria ottenuta estendendo $LC_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Pippo è più vecchio di Ada.
- Nessuno è più vecchio di Gigi.
- Chi è più vecchio di Pippo è più vecchio di Gigi.
- Chiara è più vecchia di Titti.
- Se uno è più vecchio di un altro e quest'altro è più vecchio di un terzo, il primo è più vecchio del terzo.
- Ada è più vecchia di Chiara.

suggerimento: si consiglia di usare:

$A(x,y)$ = x è più vecchio di y

g=Gigi, p= Pippo, a= Ada, c= Chiara, t=Titti

uno=x, altro =y, terzo=z

Dopo aver formalizzato le frasi seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

Derivare

- Non esiste qualcuno più vecchio di Pippo.
 - Qualcuno è più vecchio di Ada.
 - Qualcuno è più vecchio di Titti.
 - Pippo è più vecchio di Chiara.
- (II comp.) Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)
 1. (5 punti) $\vdash \forall x \forall z (z \neq x \vee s(x) = s(z))$
 2. (6 punti) $\vdash \forall y \exists z \exists w s(y) = z + w$
 3. (5 punti) $\vdash \exists y \forall x y = x \cdot y$
 4. (6 punti) $\vdash \forall y (3 \neq s(y) \vee 2 = y)$
 5. (6 punti) $\vdash \exists x \exists y 2 + s(y) = s(x)$
 6. (8 punti) $\vdash 100 + 2 = 102$
 7. (10 punti) $\vdash \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y s(y) = x)$
 - (II comp.) Stabilire quali delle seguenti regole sono valide e in caso positivo anche sicure: (8 punti ciascuna)

$$\frac{\Gamma \vdash x = c, \Delta}{\Gamma, \exists x x \neq c \vdash \Delta} 1$$

$$\frac{\Gamma, x \neq c \vdash \Delta}{\Gamma \vdash x = c, \Delta} 2$$

Logica classica con uguaglianza- $LC_{=}$

$\frac{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'}$ $\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma} \text{sc}_{sx}$ $\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&S$ $\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee-S$ $\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg-S$ $\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow-S$ $\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall-S$ $\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \nabla} \exists-S \ (w \notin VL(\Gamma, \exists x A(x), \nabla))$ $\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} =-S$	$\frac{\text{ax-}\perp}{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla}$ $\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{dx}$ $\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-D$ $\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee D$ $\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg-D$ $\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow-D$ $\frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \forall-D \ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$ $\frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists-D$ $= -\text{ax}$ $\Gamma \vdash t = t, \Delta$
--	--

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $LC_{=}$ + comp_{sx} + comp_{dx} , ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla} \text{comp}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$\begin{aligned} Ax1. & \vdash \forall x \ s(x) \neq 0 \\ Ax2. & \vdash \forall x \ \forall y \ (s(x) = s(y) \rightarrow x = y) \\ Ax3. & \vdash \forall x \ x + 0 = x \\ Ax4. & \vdash \forall x \ \forall y \ x + s(y) = s(x + y) \\ Ax5. & \vdash \forall x \ x \cdot 0 = 0 \\ Ax6. & \vdash \forall x \ \forall y \ x \cdot s(y) = x \cdot y + x \\ Ax7. & \vdash A(0) \& \forall x \ (A(x) \rightarrow A(s(x))) \rightarrow \forall x \ A(x) \end{aligned}$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \dots (0))}_{n\text{-volte}}$$

e quindi per esempio

$$\begin{aligned} 1 & \equiv s(0) \\ 2 & \equiv s(s(0)) \end{aligned}$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg\neg\text{aX}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \quad \frac{\neg\neg\text{aX}_{sx2}}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C} \\
\\
\frac{\neg\neg\text{aX}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \quad \frac{\neg\neg\text{aX}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''} \\
\\
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta} \neg\neg\text{-S} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta} \neg\neg\text{-D} \\
\\
\frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma} \text{in}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{in}_{dx} \\
\\
\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A} \text{cn}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla} \text{cn}_{dx} \\
\\
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&\text{-re}_1 \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&\text{-re}_2 \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee\text{-re}_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee\text{-re}_2 \\
\\
\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \Delta} \forall\text{-re} \quad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \Delta} \exists\text{-re} \\
\\
\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla} \text{comp}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{comp}_{dx} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'} \text{rf}^* \\
\\
\frac{}{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta} \text{sm}^* \\
\\
\frac{}{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta} \text{tra}^* \quad \frac{}{\Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta} \text{cf}^* \\
\\
\frac{}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta} \text{cp}^* \\
\\
\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta} \text{sy-r} \quad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta} \text{sy-l} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta} \text{tr-r}
\end{array}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_= + \text{comp}_{sx} + \text{comp}_{dx}$ si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x (P(x) \rightarrow P(s(x)))}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x P(x)} \text{ind}$$