8. Nozione di teoria proposizionale ed esercizi

Def.[**teoria proposizionale**] Con il termine **teoria proposizionale** si intende un'*estensione* del calcolo della logica classica proposizionale LC_p con un numero finito di **assiomi extralogici** indicati in una lista

- Ax.1
- Ax.2
- Ax.3
- Ax.4
- ...
- Ax.k

e **regole di composizione** della forma

$$\frac{\vdash \mathtt{fr} \qquad\qquad \Gamma, \mathtt{fr}, \Gamma' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma' \vdash \nabla}\ \text{comp}$$

ove $\mathtt{fr}$ è una proposizione (o più genericamente "formula") del linguaggio proposizionale.

Ovvero in breve

TEORIA= LOGICA + regole di composizione + assiomi EXTRALOGICI

Nel seguito identificheremo una teoria proposizionale designando i SOLI assiomi extralogici.

Def. [**teorema**] Una formula $\mathtt{fr}$ è detta **teorema di una teoria** $\mathcal{T}$ se il sequente

$$\vdash \mathtt{fr}$$

è *derivabile in* $\mathcal{T}$ (appunto con l'uso degli assiomi e delle regole di composizione!!).

Osservazione: Tutte le tautologie classiche sono teoremi di ogni teoria proposizionale!!!

Come derivare in una teoria

Se la teoria $\mathcal{T}$ è fatta da assiomi extralogici

- Ax.1
- ...
- Ax.k

la regola di composizione si può usare in due modi:

1. **Uso della regola di composizione su assiomi**:

   Le formule `fr` che si ottengono da una derivazione in $\mathbf{LC}_p$ di `fr` con l'uso di assiomi extralogici $\mathrm{Ax.}\mathbf{i_1}, \mathrm{Ax.}\mathbf{i_2} \ldots$ come premesse diventano *teoremi della teoria* $\mathcal{T}$ componendo con gli assiomi.

   Infatti, per esempio se abbiamo una *derivazione* π *ottenuta con due assiomi*

$$\frac{\pi}{\mathrm{Ax.}\mathbf{i_1}, \mathrm{Ax.}\mathbf{i_2} \vdash \mathtt{fr}}$$

   si può comporre questa derivazione con la regola di composizione *fino a trovare una derivazione di* $\vdash \mathtt{fr}$ *nella teoria* $\mathcal{T}$ *in tal modo*

$$\dfrac{\vdash \mathrm{Ax.}\mathbf{i_1} \qquad \dfrac{\vdash \mathrm{Ax.}\mathbf{i_2} \qquad \dfrac{\pi}{\mathrm{Ax.}\mathbf{i_1}, \mathrm{Ax.}\mathbf{i_2} \vdash \mathtt{fr}}}{\mathrm{Ax.}\mathbf{i_1} \vdash \mathtt{fr}}\,\mathrm{comp}}{\vdash \mathtt{fr}}\,\mathrm{comp}$$

   $\Rightarrow$ `fr` diventa **teorema della teoria T**.

2. **Uso della regola di composizione su teoremi già noti**:

   IN UNA TEORIA LA CONOSCENZA SI ACCUMULA con la regola comp:

   Se in una teoria avete *già dimostrato il teorema* $\vdash \mathtt{T}_1$ ovvero avete trovato una derivazione π_1

$$\frac{\pi_1}{\vdash \mathtt{T}_1}$$

   allora *potete usare la formula* $\mathtt{T}_1$ *come premessa per derivare un'altra formula* T_2.
   Se ci riuscite e trovate una derivazione nella teoria del tipo

$$\frac{\pi_2}{\mathtt{T}_1 \vdash \mathtt{T}_2}$$

   allora **potete comporre le derivazioni** π_1 **e** π_2 **con comp**
   per ottenere una derivazione di $\vdash \mathtt{T}_2$ (senza premesse)!! nella teoria
   in tal modo

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\vdash \mathtt{T}_1} \qquad \dfrac{\pi_2}{\mathtt{T}_1 \vdash \mathtt{T}_2}}{\vdash \mathtt{T}_2}\,\mathrm{comp}$$

   ovvero
   in una **teoria** *si possono derivare* **nuovi teoremi componendo** con derivazioni di **teoremi già noti**

Esempi di teorie con esercizi

1. Sia T_{gi} la teoria proposizionale ottenuta dalla formalizzazione dei seguenti assiomi:

   - Giovanni va in gita se Carla non ci va.
   - Beppe non va in gita se e solo se ci va Giovanni.
   - Beppe va in gita se Carla non va in gita.
   - Toni va in gita solo se ci va Carla.

   utilizzando:
   C= Carla va in gita
   B= Beppe va in gita
   G=Giovanni va in gita
   T=Toni va in gita
   E=Ester va in gita

   Mostrare che sono teoremi di T_{gi} le seguenti affermazioni:

   - Se Giovanni non va in gita allora Beppe ci va.
   - Se Carla non va in gita allora Beppe non ci va.
   - Carla va in gita.
   - Solo se Carla va in gita allora ci vanno sia Toni che Giovanni.
   - Se Carla non va in gita ci va Ester.
   - Non si dà il caso che Carla non vada in gita e che ci vada Beppe.

   Soluzione (un cenno - si vedano anche le note del corso):

   - **Ax.1** è $\neg\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{G}$
   - **Ax.2** è $(\neg\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{G})\ \&\ (\mathbf{G} \rightarrow \neg\mathbf{B})$
   - **Ax.3** è $\neg\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}$
   - **Ax.4** è $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{C}$

   Poi $\mathtt{T_1}$ è $\neg\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{B}$ che si deriva usando $\mathbf{Ax_2}$ come segue

$$\dfrac{\vdash \mathrm{Ax}._{\mathbf{2}} \qquad \dfrac{\pi}{(\neg\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{G})\ \&\ (\mathbf{G} \rightarrow \neg\mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{B}}}{\vdash \neg\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{B}}\ \mathrm{comp}$$

   ove π è una qualche derivazione nella teoria (qui basta in $\mathbf{LC}_p$) del sequente

$$(\neg\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{G})\ \&\ (\mathbf{G} \rightarrow \neg\mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{B}$$

   che si lascia da fare per esercizio al lettore.

2. Sia T_{bi} la teoria che estende $\mathrm{LC}_{=}$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

   - Sia Chiara che Pina vanno in bici.
   - Se Pina va in bici allora o Giorgio ci va oppure Fabio ci va
   - Fabio va in bici solo se non ci va Chiara.
   - Chiara non va in bici se Elia non ci va.

   utilizzando:
   C=Chiara va in bici
   P=Pina va in bici
   G=Giorgio va in bici
   F= Fabio va in bici
   E= Elia va in bici

   Mostrare che sono teoremi di T_{bi} le seguenti affermazioni:

   - Se Fabio va in bici allora Chiara non ci va.
   - Fabio non va in bici.
   - Giorgio va in bici.
   - Elia va in bici.