II appello 17 febbraio 2015

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Derivare in LJ:
  - 4 punti
    $\vdash \neg\neg(A \ \rightarrow \ C \vee \neg C)$
  - 3 punti
    $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B \vdash A \rightarrow \neg\neg B$
  - 6 punti
    $\vdash \forall y \ C(y) \ \rightarrow \ \forall w \ (\neg(\neg C(w) \& \neg B(w)))$
  - 6 punti
    $\forall x \ \neg C(x) \vdash \exists w \ C(y) \ \rightarrow \ \exists w \ (C(w) \vee B(w))$
  - 7 punti
    $\forall x \ C(x,x) \ \& \ \exists x \ C(x,z) \vdash \forall z \, \exists w \ (\ C(z,w) \ \vee \ C(w,z) \ )$

- Formalizzare le seguenti asserzioni e derivare i sequenti ottenuti nella logica indicata
  - (6 punti) in LJ

    Le stelle nane sono piccole e fredde.
    Non tutte le stelle sono piccole e fredde.

    Non tutte le stelle sono stelle nane.

    si consiglia di usare:
    S(x) = "x è una stella"
    F(x) = "x è fredda"
    P(x) = "x è piccola"
    P(x) = "x è nana"

  - (+ 4 punti con il precedente- 8 punti da solo)
    in LJ

    Le stelle nane sono piccole e fredde.
    Non tutte le stelle sono piccole e fredde.

    Non tutte le stelle sono nane.

si consiglia di usare:
S(x) = “x è una stella”
F(x) = “x è fredda”
P(x) = “x è piccola”
P(x) = “x è nana”

- (6 punti) in LJ

$$\frac{\text{Nessun uomo è immortale.} \quad \text{Gli esseri divini sono immortali.}}{\text{Nessun essere divino è un uomo e nessun uomo è un essere divino.}}$$

si consiglia di usare:
I(x)= x è immortale
D(x)=x è un essere divino
U(x)=x è un uomo

- (37 punti) Siano T^i_{croc} e T^c_{croc} le teorie ottenute estendendo rispettivamente LJ e LK con composizioni e con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Solo se Ottavia va in crociera è estate.
  - Se Ottavia va in crociera allora tutti vanno in crociera.
  - Piero o Anna vanno in crociera se Nora va in crociera.
  - Non si dà il caso che Nora non vada in crociera.
  - Piero va in crociera solo se Anna e Nora non vanno in crociera.
  - Piero è un maschio.
  - Nora, Ottavia e Anna sono femmine.

  Si consiglia di usare:
  E=È estate
  C(x)= x va in crociera
  o=Ottavia,
  n=Nora,
  a=Anna,
  p=Piero.
  F(x)=x è femmina
  M(x)= x è maschio

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

  - Nora va in crociera. (in T^c_{croc})
  - Piero non va in crociera. (in T^i_{croc})
  - Ottavia non va in crociera. (in T^i_{croc})
  - Se Piero va in crociera allora Nora non va in crociera. (in T^i_{croc})
  - Non è estate. (in T^i_{croc})
  - Anna va in crociera. (in T^c_{croc})
  - Qualche femmina va in crociera e qualche femmina non ci va. (in T^c_{croc})

- Un maschio non va in crociera. (in T^i_{croc})

- (43 punti) Siano T^i_p e T^c_p le teorie ottenute estendendo rispettivamente LJ e LK con composizioni e con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Non si dà il caso che Camilla non prepari nulla.
  - Se qualcuno prepara qualcosa, allora Valerio gli porta un regalo.
  - Chi porta un regalo a qualcuno non prepara nulla.
  - Nessuno porta un regalo a se stesso.

  Si consiglia di usare:
  P(x,y)= "x prepara y"
  R(x,y)="x porta un regalo a y"
  v="Valerio"
  c="Camilla"

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

  - Camilla prepara qualcosa. (in T^c_{pr})
  - Se qualcuno prepara qualcosa allora c'e' qualcuno che gli porta un regalo. (in T^i_{pr})
  - Valerio porta un regalo ad Camilla. (in T^c_{pr})
  - Valerio non porta un regalo a tutti. (in T^i_{pr})
  - Camilla non porta un regalo a nessuno. (in T^i_{pr})
  - Valerio non prepara nulla. (in T^i_{pr})
  - Se Valerio prepara qualcosa Camilla non gli porta un regalo. (in T^i_{pr})

Logica intuizionistica LJ

$$\begin{array}{cc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot \\ A \vdash A & \bot \vdash \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash C}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, C, C \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta}\ \text{cn}_{\text{sx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}\ \&-\text{f} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_1 \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{f} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee-\text{re}_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to-\text{f} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta}\ \to-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(z)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)}\ \forall-\text{f}\ (\Gamma, \forall x\ A(x) \text{ non dipendono da } z) \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma, A(z) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta}\ \exists-\text{f}\ (\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta \text{ non dipendono da } z) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x)}\ \exists-\text{re}$$

Logica classica predicativa LK

$$\begin{array}{cc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot \\ A \vdash A & \bot \vdash \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash C, \Delta}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, C, C \vdash \Delta}{\Gamma, C \vdash \Delta}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash C, C, \Delta}{\Gamma \vdash C, \Delta}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta}\ \&-\text{f} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_1 \quad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\text{f} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\text{re}_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\text{f} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad B, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \to-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(z), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta}\ \forall-\text{f}\ (\Gamma, \forall x A(x), \Delta \text{ non dipendono da } z) \qquad \frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma, A(z) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \Delta}\ \exists-\text{f}\ (\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta \text{ non dipendono da } z) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \Delta}\ \exists-\text{re}$$

Regole di composizione (ovvero cut)

in **LJ**:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta} \text{ cut}$$

in **LK**:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{ cut}$$

Si ricorda che sia in **LJ** che in **LK** la negazione è definita in tal modo

$$\neg \mathbf{C} \equiv \mathbf{C} \rightarrow \perp$$

Regole ammissibili in LJ

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}' \vdash \mathbf{A}\end{array}$$

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}}{\mathbf{\Gamma}, \neg\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}} \neg\text{−re} \qquad \frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash}{\mathbf{\Gamma} \vdash \neg\mathbf{A}} \neg\text{−f}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma} \text{sc}_{\text{sx}}$$

Regole ammissibili in LK

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}' \vdash \mathbf{A}\end{array}$$

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \neg\mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}} \neg\text{−re} \qquad \frac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \neg\mathbf{A}, \mathbf{\Delta}} \neg\text{−f}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma} \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}}$$