

# INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MORELIA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

**CONTROL I**

**REPORTE DE LABORATORIO**

## **PRÁCTICA 2 : BÚSQUEDA DE POLOS Y CEROS POR INSPECCIÓN**

PRESENTA(N):

**GABRIEL AGUILAR LEMUS  
JOSÉ PABLO BARRAGÁN FRANCO**

PROFESOR:

**GERARDO MARX CHAVEZ CAMPOS**

MORELIA, MICHOACÁN

24 DE NOVIEMBRE DE 2017

## 1. Introducción

Dentro de una función de transferencia de la forma

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

las raíces de ambos elementos de la fracción determinan importantes puntos en la operación del sistema descrito por la misma. Las raíces de  $N(s)$  o los ceros de la función determinan los puntos de frecuencia en los que la magnitud de la función de transferencia es cero. Por intuición matemática es fácil deducir que las raíces de  $D(s)$  o polos de la función de transferencia llevarán la magnitud de la función hacia infinito.

Otro elemento importante es  $G_0$  ó la ganancia (o atenuación) del sistema cuando  $s = 0$ . En un sistema eléctrico  $G_0$  define la ganancia en corriente directa.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = G_0 \frac{(1 + s/\omega_{z1})}{(1 + s/\omega_{p1})}$$

Estos elementos de una función de transferencia determinan a grandes rasgos el comportamiento del sistema descrito por la función en el dominio de la frecuencia y del tiempo. El hecho anterior propone contar con la capacidad de obtener los ceros y polos de las funciones de transferencia de manera rápida para aplicar a los sistemas un análisis rápido y adecuado.

El objeto de esta práctica es reconocer y determinar los ceros y polos de un sistema eléctrico por inspección y por cálculos matemáticos derivados del análisis de la red en cuestión, además de comparar los resultados obtenidos. Continuando el análisis de la red eléctrica se realizan mediciones prácticas para estudiar el comportamiento real de la respuesta en frecuencia de la red.

## 2. Metodología

### 2.1. Cálculo por inspección

El circuito que se analiza se muestra en la figura 1. Para obtener la función de transferencia se

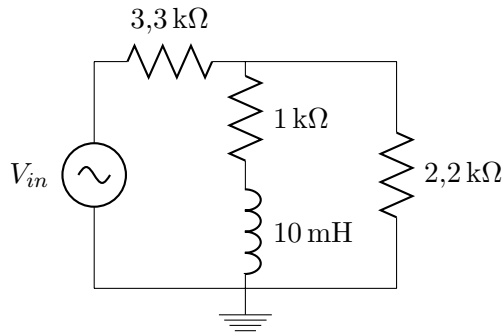


Figura 1: Circuito analizado

inspecciona la red en cuestión. La atenuación de corriente directa se obtiene analizando el sistema cuando  $s = 0$ . En este punto la impedancia del elemento reactivo es cero por lo tanto es un corto

circuito y la red queda reducida a un simple divisor de tensión con un voltaje de salida de

$$V_o = G_0 V_i = \frac{R_2 \parallel R_3}{R_2 \parallel R_3 + R_1} V_i$$

$$G_0 = \frac{R_2 \parallel R_3}{R_2 \parallel R_3 + R_1}$$

Continuando con el análisis, recordamos que los ceros de la función se suscitan cuando la magnitud de la misma es cero. En otras palabras, cuando la excitación de entrada no se ve presente en la salida. Evidentemente el elemento reactivo que genera esta condición se encuentra en una de las ramas en paralelo. El punto de frecuencia en el cual se presenta este comportamiento es obtenido mediante la resolución de la ecuación

$$R_2 + sL = \left(1 + s \frac{L}{R_2}\right) = R_2 \left(1 + \frac{1}{\omega_{z_1}}\right) = 0$$

por lo que

$$\omega_{z_1} = \frac{R_2}{L}$$

Los polos de la función de transferencia dependen de las características intrínsecas del sistema, en nuestro caso de la red, y no de las excitaciones o respuestas del sistema a estas. Para hacer mas clara la fuente de los polos dentro de la red es necesario realizar el razonamiento siguiente:

- La magnitud de  $s = j\omega$  es  $[Hz]$  y la magnitud de  $s^2 = (j\omega)^2$  es  $[Hz^2]$ .
- La función de transferencia no tiene dimensión. Por lo tanto las dimensiones de los factores que multiplican a las  $s$ 's deben ser inversas a las de las  $s$ 's.
- Las dimensiones de los factores de las  $s$ 's son  $[Hz^{-1}] = [s]$  para  $s$  y  $[Hz^{-2}] = s^2$  para  $s^2$ . Estos factores son constantes de tiempo.
- La manera de obtener los polos es obteniendo las constantes de tiempo del sistema.
- En nuestro problema equivalen a las constantes de tiempo de la red RL.

Dicho lo anterior, para continuar el análisis se eliminan las fuentes de excitación del sistema para realizar un análisis del mismo. En la red eléctrica se cortocircuitan las fuentes de voltaje y se 'abren' las fuentes de corriente. Obteniendo el circuito de la figura 2.

La constante de tiempo de nuestra red RL es la impedancia 'vista' desde el elemento reactivo sobre por su inductancia

$$\tau = \frac{L}{R_2 + R_1 \parallel R_3}$$

y el polo del sistema es simplemente el inverso de la constante de tiempo

$$\omega_{p_1} = \frac{1}{\tau} = \frac{R_2 + R_1 \parallel R_3}{L}$$

La conclusión de la inspección es que nuestra función de transferencia es

$$H(s) = G_0 \frac{(1 + s/\omega_{z_1})}{(1 + s/\omega_{p_1})} = \frac{R_2 \parallel R_3}{R_2 \parallel R_3 + R_1} \frac{\left(1 + s \frac{L}{R_2}\right)}{\left(1 + s \frac{L}{R_2 + R_1 \parallel R_3}\right)}$$

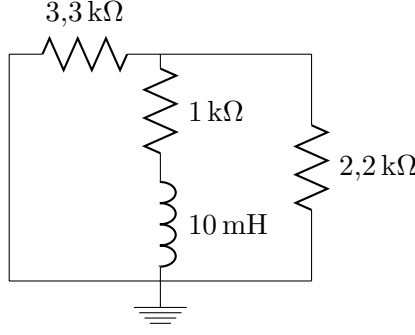


Figura 2: Circuito analizado

## 2.2. Cálculo matemático

El análisis matemático suscita obtener el voltaje de salida del punto de interés. Este voltaje es calculado mediante la ecuación de voltaje de un divisor de tensión formado por las resistencias  $R_1$  y la suma de la resistencia  $R_2$  y la impedancia  $sL$  en paralelo con la resistencia  $R_3$ . A continuación se muestra el desarrollo matemático realizado.

$$V_o = \frac{(R_2 + sL) \parallel R_3}{(R_2 + sL) \parallel R_3 + R_1} V_i$$

$$V_o = \frac{\frac{(R_2 + sL)R_3}{R_2 + sL + R_3}}{\frac{(R_2 + sL)R_3}{R_2 + sL + R_3} + R_1} V_i$$

$$V_o = \frac{\frac{(R_2 + sL)R_3}{R_2 + sL + R_3}}{\frac{R_1(R_2 + sL + R_3) + R_3(R_2 + sL)}{R_2 + sL + R_3}} V_i$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{(R_2 + sL) R_3}{R_1 (R_2 + sL + R_3) + (R_2 + sL) R_3}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2 R_3 \left(1 + \frac{sL}{R_2}\right)}{R_1 R_2 + R_1 R_2 + R_2 R_3 + sL R_1 + sL R_3}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2 R_3 \left(1 + \frac{sL}{R_2}\right)}{(R_1 R_2 + R_1 R_2 + R_2 R_3) \left(1 + \frac{sL(R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_2 + R_2 R_3}\right)}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2 \parallel R_3}{R_2 \parallel R_3 + R_1} \frac{\left(1 + s \frac{L}{R_2}\right)}{\left(1 + s \frac{L}{R_2 + R_1 \parallel R_3}\right)}$$

La expresión de la función de transferencia de forma general es

$$\frac{\frac{r3 \cdot (r2 + \frac{r1 \cdot r3}{r3 + r1}) \cdot s}{(r3 + r2) \cdot (\frac{r2 \cdot r3}{r3 + r2} + r1)} + \frac{r2 \cdot r3 \cdot (r2 + \frac{r1 \cdot r3}{r3 + r1})}{(r3 + r2) \cdot (\frac{r2 \cdot r3}{r3 + r2} + r1) \cdot L}}{\frac{r2 + \frac{r1 \cdot r3}{r3 + r1}}{L} + s}$$

Sustituyendo los valores del circuito 1 obtenemos la expresión

$$\frac{40000,0 + \frac{2 \cdot s}{5}}{s + 232000,0}$$

Graficando en Scilab la función anterior Esta gráfica corresponde al valor de la atenuación de corriente directa:

$$G_0 = \frac{R_2 \parallel R_3}{R_2 \parallel R_3 + R_1} = 0,1724$$

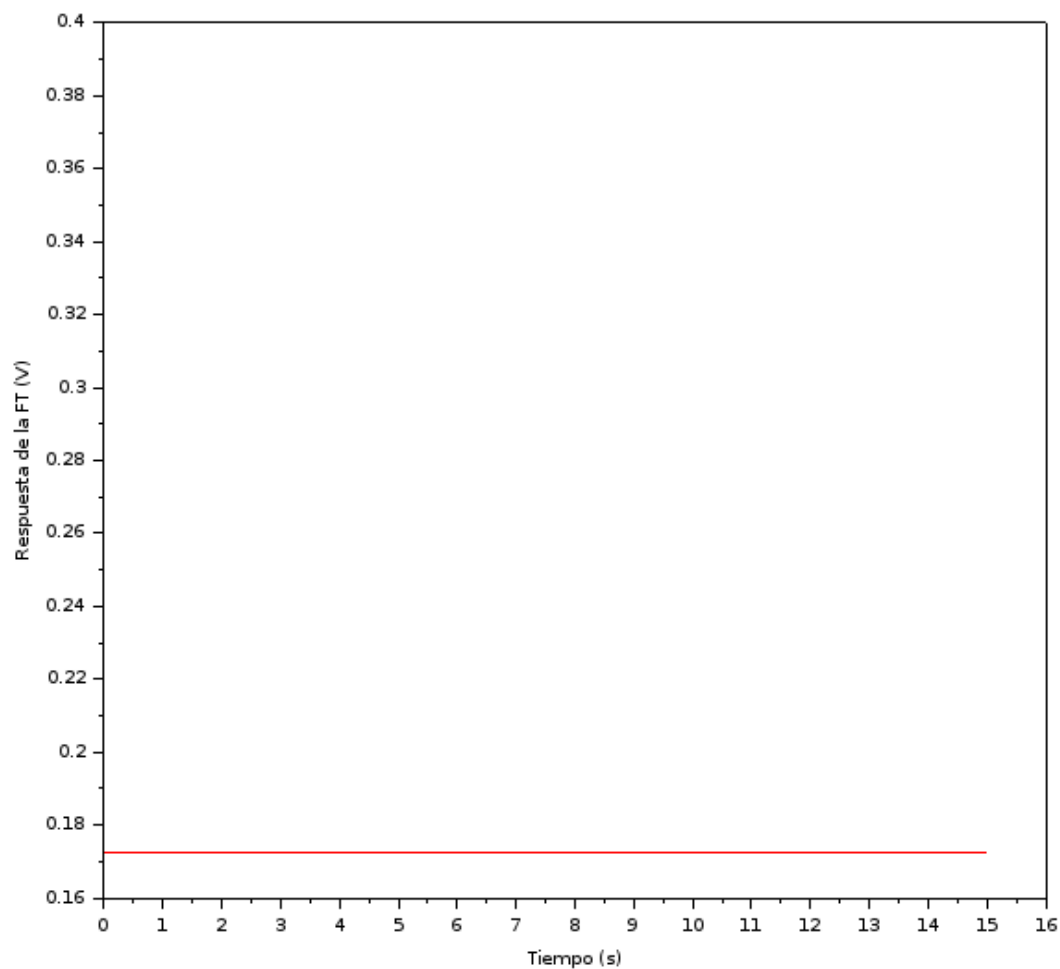


Figura 3: Gráfica función de transferencia en su respuesta temporal con una excitación de escalón unitario.

### 3. Resultados y discusión

#### 3.1. Simulación con LTspice

Se simula el circuito de la figura 1 en LTspice, donde se realiza una simulación transitoria para medir las constantes temporales del circuito estudiado. En la figura 4 se muestra el circuito simulado. Se introduce una resistencia en serie para modelar la resistencia en serie de una fuente de voltaje real. En la figura 4 se estipulan los valores utilizados en la simulación. La medición de las constantes temporales de los circuitos se realiza mediante una fuente de voltaje de onda cuadrada. Se realizaron las mediciones necesarias y se determina que las constantes de tiempo de los circuitos

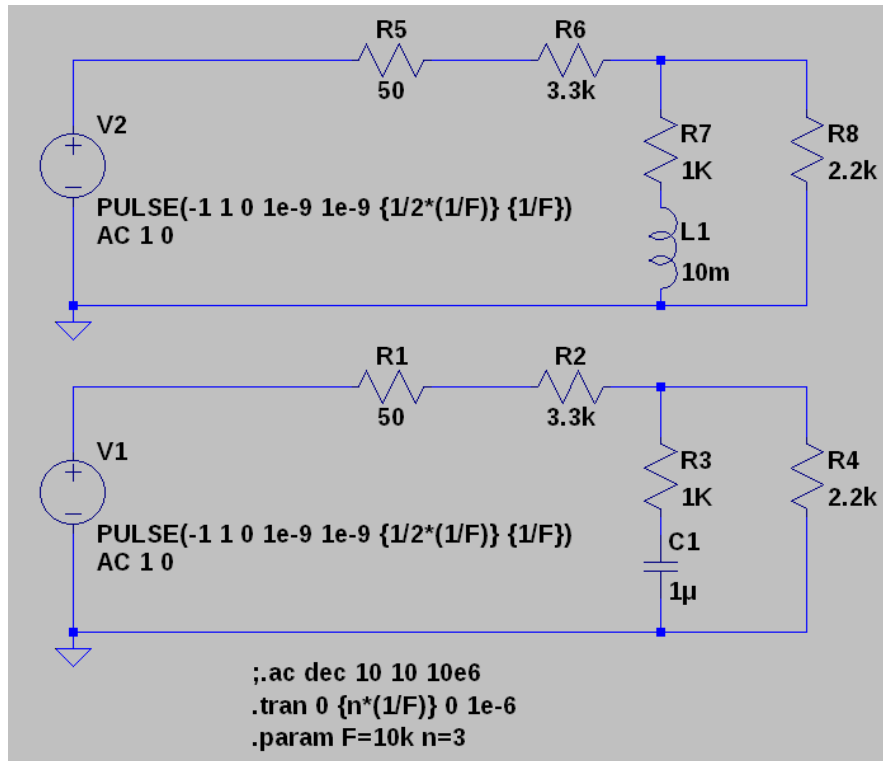


Figura 4: Circuitos simulados en LTspice

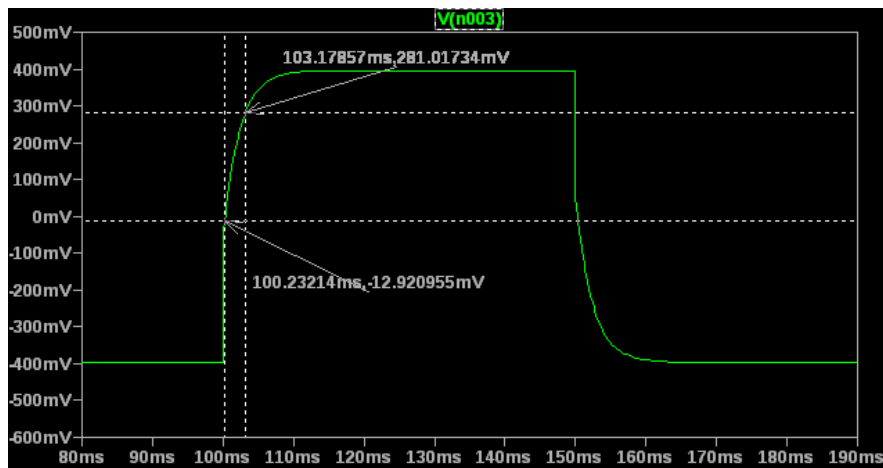


Figura 5:

RL y RC son

$$\tau_{RC} = 2,94 \text{ ms}$$

$$\tau_{RL} = 6,92718 \mu\text{s}$$

La constante temporal del circuito inductivo se manifiesta en el polo de la función de transferencia con un valor teórico de

$$\tau_{RL} = \frac{10 \text{ mF}}{1 \text{ k}\Omega + 3,35 \text{ k}\Omega \parallel 2,2 \text{ k}\Omega} = 4,3 \mu\text{s}$$

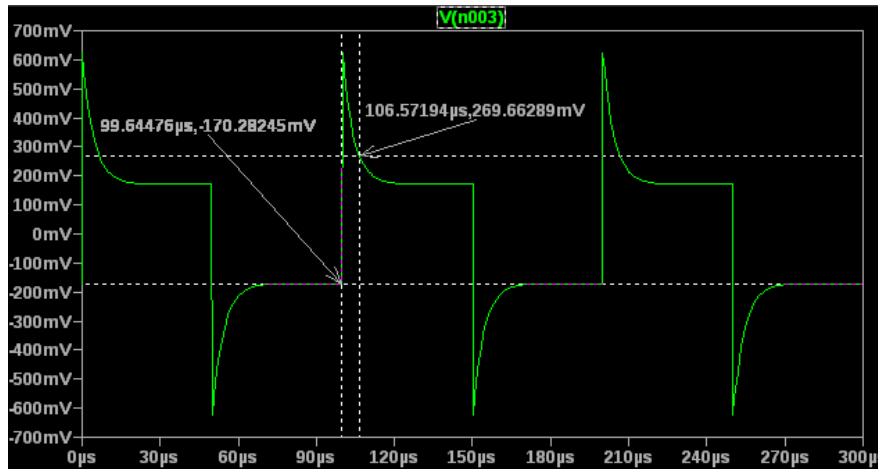


Figura 6:

Se realiza también el análisis en corriente alterna del circuito con el inductor. La salida de esta simulación se muestra en la figura

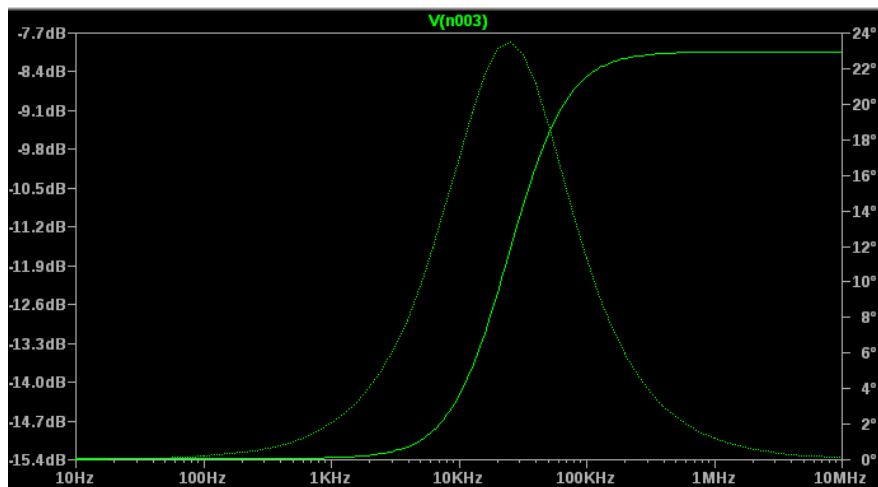


Figura 7: Respuesta en frecuencia del circuito en la salida.

### 3.2. Mediciones prácticas

Se realizan mediciones prácticas para comprobar el comportamiento esperado de la simulación. En las siguientes capturas el osciloscopio se muestran las mediciones de las constantes de tiempo de los circuitos capacitivos e inductivos.

$$\tau_{RC} = 2,2 \text{ ms}$$

$$\tau_{RL} = 5,6 \mu\text{s}$$



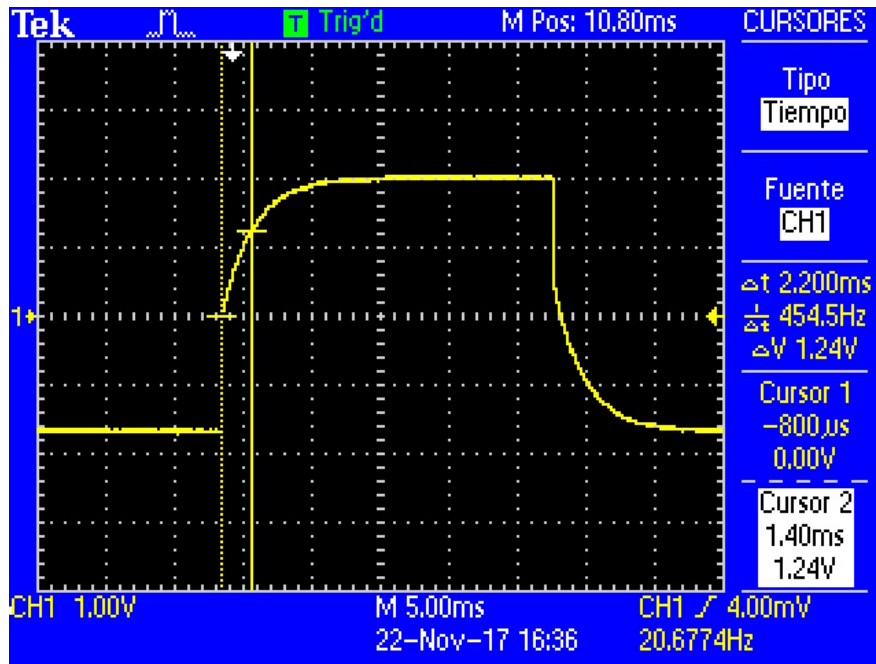


Figura 8: Medición de la constante temporal del circuito capacitivo

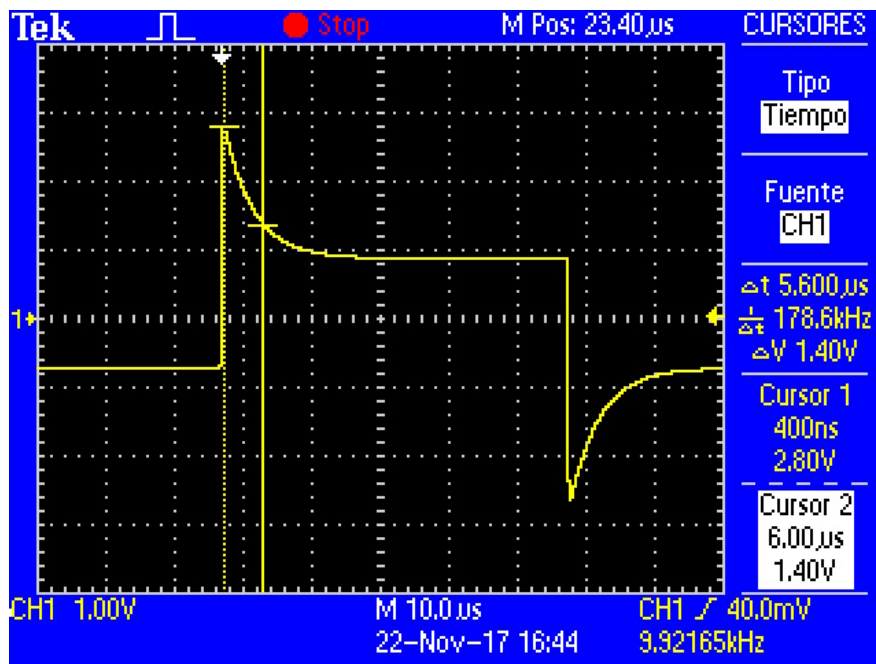


Figura 9: Medición de la constante temporal del circuito inductivo

Se realiza un barrido de frecuencias desde 10 Hz hasta 2 MHz. La gráfica de las mediciones realizadas se muestra en la figura 10. Se puede observar una considerable desviación en la respuesta en frecuencia del voltaje. Esto se debe a la pobre respuesta del inductor utilizado en la práctica, dado que no es un inductor de alta frecuencia.

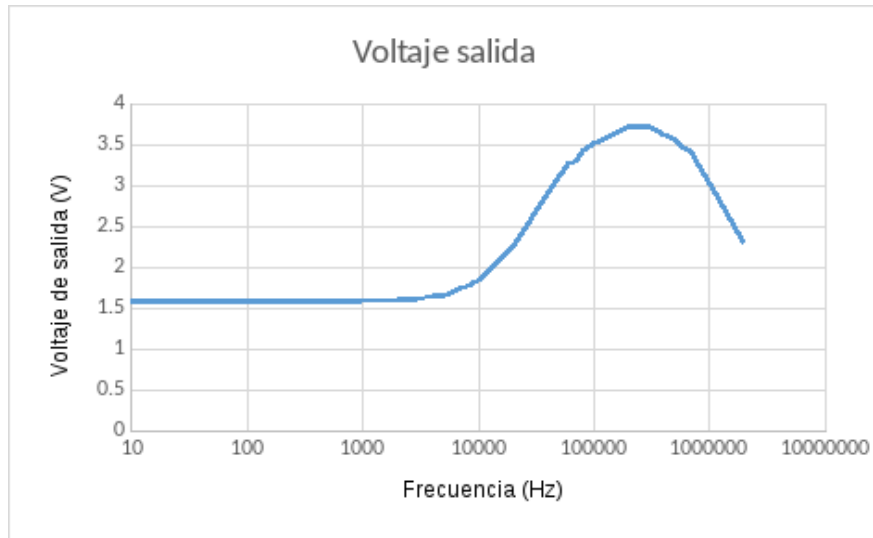


Figura 10: Voltaje de salida en respuesta a frecuencia del circuito práctico.

## 4. Conclusión

En la práctica se revisaron los conceptos analizados en clase, la búsqueda e identificación de los ceros y polos de la función de transferencia como una herramienta para identificar la salida del sistema y su respuesta a ciertos estímulos. Estas raíces definen constantes importantes del sistema y tienen a depender fuertemente de todas los factores en el sistema.