Чисельні методи в інформатиці
Лабораторна робота №4

Грищенко Юрій, ІПС-32, 2020

Для заданої функції f (x) (варіант функції взяти з лабораторної роботи №1) на заданому відрізку згенерувати систему точок на площині

$$\left\{ (x_i, y_i) \mid x_i = x_0 + ih, \;\; y_i = f(x_i), \; i = \overline{0.n} \; \right\}.$$

На основі заданої системи точок побудувати

1. Інтерполяційний багаточлен Лагранжа.
2. Інтерполяційний багаточлен Н'ютона.
3. Побудувати сплайн 3-го степеня дефекту 1.
4. Побудувати графіки.
5. Згенерувати многочлени в пунктах 1-3 для випадків n = 8 та n = 16 .
6. Провести порівняння отриманих результатів.

Мій варіант 2, функція 26:

$$26) \; e^{-x} + x^2 - 2$$

Нехай функція $f(x) \in C[a,b]$ $i = \overline{0,n}$ причому при $\forall i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$
$y_i = f(x_i), x_i \in [a,b]$

$\Phi(x)$ називається *інтерполюючою* $f(x)$ $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, якщо $\Phi(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$

Задача апроксимації (відновлення) функції (має не єдиний розв'язок):
Виберемо систему функцій: $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ - лінійно незалежні, $\varphi_k(x) \in C[a,b]$.
Побудуємо лінійну комбінацію

$$\varphi(x) = \Phi_n(x) = \sum c_k \varphi_k(x) \qquad \textbf{(2)}$$

(2) - узагальнений багаточлен.

Задача інтерполяції функції $f(x)$ алгебраїчним ,багаточленом полягає в знаходженні коефіцієнтів c_k, $k = \overline{0,n}$ для яких виконується $f(x_j) = \varphi(x_j)$ $j = \overline{0,n}$

1. $\varphi_k(x) = x^k$ - алгебраїчна система ,

Визначник Вандермонда

$$D(x_1,..,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{0 \le x < m \le n} (x_k - x_m) \neq 0 .$$

Інтерполяційний многочлен Лагранжа.

$\Phi_k^{(n)}(x)$ - поліном n - того степеня – *множник Лагранжа.*

З умови $\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\Phi_k^{(n)}(x_i) = f(x_i)$ випливає, що множник Лагранжа повинен задовольняти

$$\Phi_k^{(n)}(x_i) = \delta_{ik} \qquad \textbf{(2)}.$$

Так як $L_n(x)$ - многочлен степені n, то його аналітичний вигляд:

$$\Phi_k^{(n)}(x) = A_k(x-x_0)...(x-x_k)(x-x_{k+1})...(x-x_n),$$

де A_k –числовий параметр. знайдемо його з умови $\Phi_k^{(n)}(x)=1$:

$$A_k = 1\Big/\left((x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)\right).$$

Тоді коефіцієнти $\Phi_k^{(n)}(x)$ шукаємо у вигляді:

Формула множників Лагранжа:

$$\Phi_k^{(n)}(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)} \qquad \textbf{(3)}$$

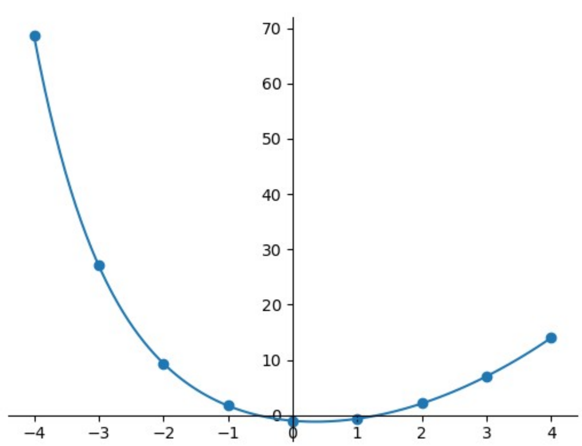
Позначивши $\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$, отримаємо $\Phi_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega_n'(x_k)}$

Формула Лагранжа: (інтерполяційний многочлен Лагранжа)

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega_n'(x_k)} \qquad \textbf{(4)}$$

Для n=8 отримуємо многочлен з коефіцієнтами [-1.00000000e+00 -9.97916428e-01 1.49980072e+00 -1.69615362e-01 4.19489466e-02 -7.37061434e-03 1.29645057e-03 -2.98789014e-04 3.45188825e-05]

Графік:



Максимальне по модулю відхилення від початкової функції для x_1=-4, x_2=-3.99, x_3=-3.98, ... дорівнює 0.026860698229512536

Інтерполяційний многочлен Ньютона.

Розділеною різницею 1- го порядку для функції $f(x)$ називатимемо

$$f(x_i;x_j)=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$$

Розділеною різницею 2- го порядку для функції $f(x)$ називатимемо

$$f(x_i;x_j;x_k)=\frac{f(x_i;x_j)-f(x_j;x_k)}{x_i-x_k}$$

Таблиця розділених різниць

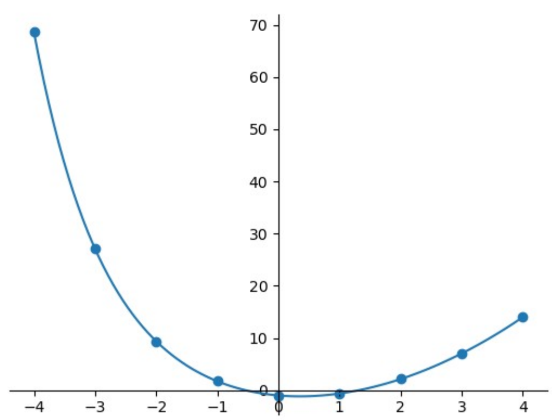
x_i	$f(x_i)$	p.p.1	p.p.2
x_0	$f(x_0)$	$f(x_0;x_1)$	$f(x_0;x_1;x_2)$
…			
x_n	$f(x_n)$		

маємо інтерполяційну формулу Ньютона вперед ($x_n \to x_0$):

$$L_n(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+...+f(x_0,...,x_n)(x-x_0)...(x-x_{n-1})$$

Для n=8 отримуємо многочлен з коефіцієнтами [-1.00000000e+00
-9.97916428e-01 1.49980072e+00 -1.69615362e-01 4.19489466e-02
-7.37061434e-03 1.29645057e-03 -2.98789014e-04 3.45188825e-05]

Графік:



Максимальне по модулю відхилення від початкової функції для x_1=-4, x_2=-3.99, x_3=-3.98, ... дорівнює 0.026860698229434377

Кубічний сплайн дефекту 1.

> Функція $s(x)$ називається сплайном степеня m і дефекту k якщо
> - $s(x) \in \pi_m$ (множина поліномів степеня m) на кожному відрізку $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$
> - $s(x) \in C^{m-k}[a,b]$

$$s(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_{i-1} - \frac{m_{i-1}h_i^2}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i} + \left(f_i - \frac{m_i h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, x \in [x_{i-1}, x_i]$$

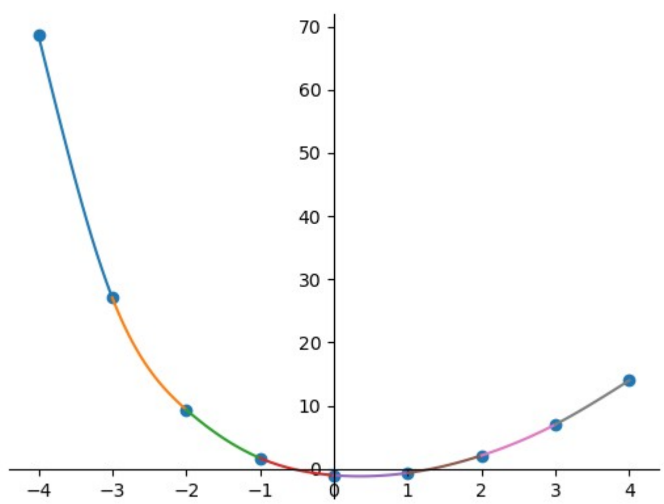
де $h_i=x_i-x_{i-1}$

Значення m отримуємо з СЛАР:

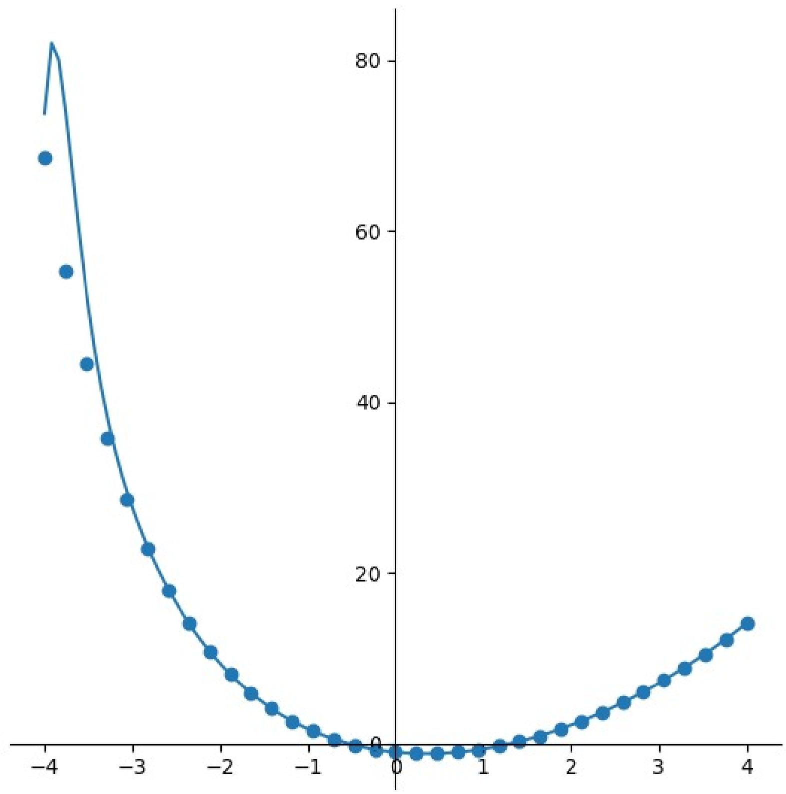
$$\begin{cases} \frac{h_i}{6}m_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}m_i + \frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, N-1} \\ m_0 = m_n = 0 \end{cases}$$

При n=8 отримуємо для 9 відрізків многочлени:

```
[247.1744406  228.44500224  68.9253486    5.74377905] for [-4.0; -3.0]
[-40.2821938  -59.01163215 -26.89352953  -4.90276296] for [-3.0; -2.0]
[-0.44531347  0.74368834  2.98413072  0.07684708] for [-2.0; -1.0]
[-1.         -0.92037125  1.32007112 -0.47783945] for [-1.0; 0.0]
[-1.         -0.92037125  1.32007112 -0.03182043] for [0.0; 1.0]
[-0.95035675 -1.069301    1.46900087 -0.08146368] for [1.0; 2.0]
[-2.44282386  1.16939966  0.34965054  0.10509471] for [2.0; 3.0]
[ 12.05425925 -13.32768345   5.18201158  -0.4318343 ] for [3.0; 4.0]
```



При більших (n > ~30) для перших двух методів отримуємо многочлени з дуже великим степенем, і через похибки обчислень коефіцієнти при старших степенях призводять до поганого наближення:



Сплайн, навпаки, для більших n дає краще наближення: