Науково-практичний звіт на тему

АПРОКСИМАЦІЯ НАЙМЕНШОГО ОХОПЛЮЮЧОГО ЗІРКОВОГО МНОГОКУТНИКА

Ю. А. Грищенко, студент 3 курсу, групи ІПС-32

Постановка задачі: Для заданої множини S із N точок на площині побудувати гладку апроксимацію найменшого охоплюючого зіркового многокутника, вершинами якого є усі точки множини S однорідним бісплайном.

Опис алгоритму:

Зіркоподібний многокутник — многокутна зірчата область на площині. Тобто, вона містить точку z, з якої всі точки многокутника видимі.

Для множини точок S можна побудувати безліч таких многокутників, обравши будь-яку точку z на площині. Обравши цю точку, можемо просто відсортувати всі точки s множини S за кутом вектора zs. Тоді отримаємо зіркоподібний многокутник, де вершини впорядковані за годоинниковою стрілкою.

Найпростіший спосіб обрати точку z — це взяти середнє арифметичне з усіх точок S. Це не гарантує мінімальну площу многокутника, але для апроксимації може працювати задовільно.

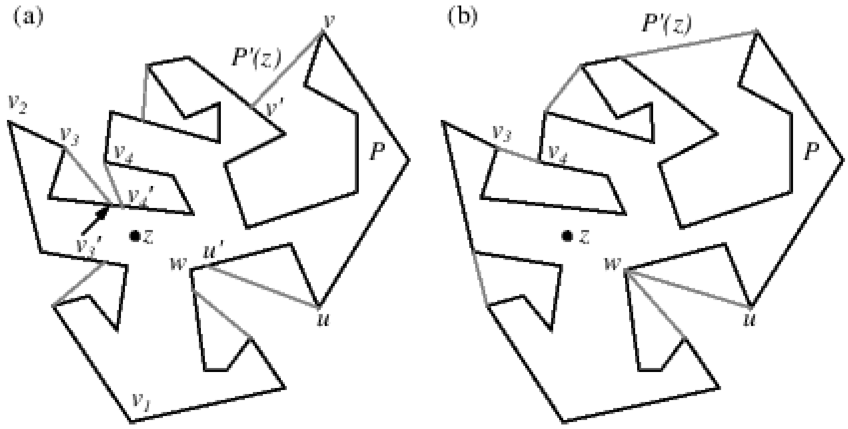


Figure 3: Minimum-area star-shaped polygon $P'(z)$ containing P with point z lying in the kernel of $P'(z)$: (a) unrestricted version; (b) restricted version in which the vertices of $P'(z)$ are constrained to be vertices of P.

Існує алгоритм для знаходження оптимальної точки z, який працює за час $O(n^2)$, проте він дуже складний для розуміння та імплементації.

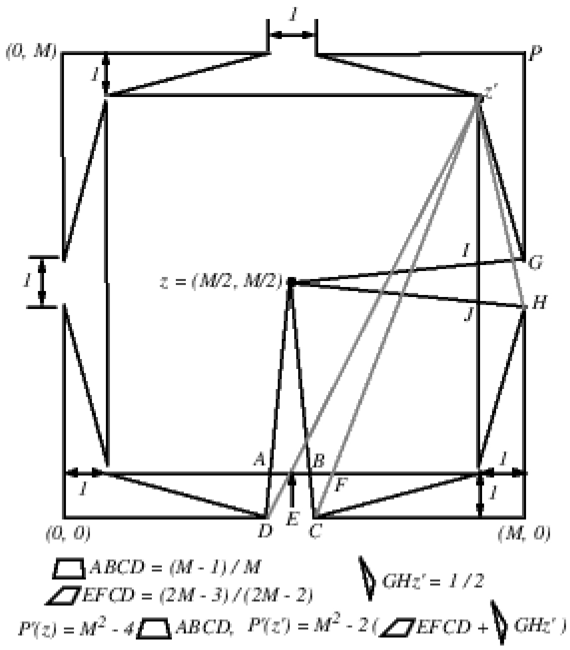
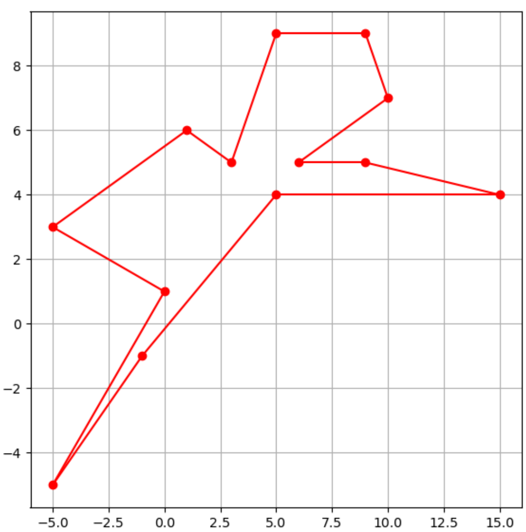


Figure 4: Example in which any optimal P^* must have its kernel point lying in the *interior* of some cell: z is an interior point of the cell which is the inner square, and M is a large number. For any vertex z' of this cell, $P'(z')$ has area larger than $P'(z)$. In particular, $area(ABCD) - area(EFCD) = (-M+2)/[2M(M-1)] \approx -1/(2M)$ but $area(GHJI) - area(GHz') = 1/2 - 1/M \approx 1/2$, and thus $P'(z)$ saves more area than $P'(z')$.

Замість цього, я просто використовую serднє арифметичне. Ця точка легко знаходиться і дає непоганий результат.



Далі апроксимація однорідним бісплайном:

На практиці дуже часто використовують однорідний квадратичний бісплайн.

- If the knots are equidistant then we have a **uniform** B-spline
- If a uniform quadratic B-spline is defined the control points (P_0, P_1, P_2) then $m = k + n + 1 = 2 + 2 + 1 = 5$,

$$\mathbf{T} = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (0, 1, 2, 3, 4, 5),$$

- The B-spline curve is defined by

$$S(t) = \sum_{i=0}^{2} N_{i,2}(t) P_i.$$

- Using the Cox-de Boor recursion formula, the triangular scheme is

$$\begin{array}{ccccc} N_{0,0}(t) & \rightarrow & N_{0,1}(t) & \rightarrow & N_{0,2}(t) \\ & \nearrow & & \nearrow & \\ N_{1,0}(t) & \rightarrow & N_{1,1}(t) & & \\ & \nearrow & & & \\ N_{2,0}(t) & & & & \end{array}$$

- Evaluating the basis functions for $N_{0,2}(t)$ gives

$$\begin{aligned} N_{0,2}(t) &= \frac{t-0}{2-0} N_{0,1}(t) + \frac{3-t}{3-1} N_{1,1}(t) \\ &= \frac{t}{2}\left[\frac{t-0}{1-0} N_{0,0}(t) + \frac{2-t}{2-1} N_{1,0}(t)\right] \\ &\quad + \frac{3-t}{2}\left[\frac{t-1}{2-1} N_{1,0}(t) + \frac{3-t}{3-2} N_{2,0}(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[t^2 N_{0,0}(t) + t(2-t) N_{1,0}(t) + (3-t)(t-1) N_{1,0}(t) \right. \\ &\quad \left. + (3-t)^2 N_{2,0}(t)\right] \end{aligned}$$

- When $0 < t < 1$ then $N_{0,0}(t) = 1, N_{1,0}(t) = 0$, $N_{2,0}(t) = 0$ and

$$N_{0,2}(t) = \frac{1}{2} t^2.$$

- When $1 < t < 2$ then $N_{0,0}(t) = 0$, $N_{1,0}(t) = 1$, $N_{2,0}(t) = 0$ and

$$N_{0,2}(t) = \frac{1}{2}[-2(t-1)^2 + 2(t-1) + 2]$$

- When $2 < t < 3$ then $N_{0,0}(t) = 0$, $N_{1,0}(t) = 0$, $N_{2,0}(t) = 1$ and

$$N_{0,2}(t) = \frac{1}{2}[(t-2)^2 - 2(t-2) + 1].$$

- Doing similar for $N_{1,2}(t)$ and $N_{2,2}(t)$

$$N_{0,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{if } 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{2}[-2(t-1)^2 + 2(t-1) + 2] & \text{if } 1 \le t < 2 \\ \frac{1}{2}[(t-2)^2 - 2(t-2) + 1] & \text{if } 2 \le t < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

$$N_{1,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-1)^2 & \text{if } 1 \le t < 2 \\ \frac{1}{2}[-2(t-2)^2 + 2(t-2) + 2] & \text{if } 2 \le t < 3 \\ \frac{1}{2}[(t-3)^2 - 2(t-3) + 1] & \text{if } 3 \le t < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

$$N_{2,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-2)^2 & \text{if } 2 \le t < 3 \\ \frac{1}{2}[-2(t-3)^2 + 2(t-3) + 2] & \text{if } 3 \le t < 4 \\ \frac{1}{2}[(t-4)^2 - 2(t-4) + 1] & \text{if } 4 \le t < 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

- Our uniform quadratic B-spline is only defined for $t \in [t_2, t_3] = [2, 3]$

$$N_{0,2}(t)P_0 = \frac{1}{2}[(t-t_2)^2 - 2(t-t_2) + 1]P_0,$$
$$N_{1,2}(t)P_1 = \frac{1}{2}[-2(t-t_2)^2 + 2(t-t_2) + 1]P_1,$$
$$N_{2,2}(t)P_2 = \frac{1}{2}(t-t_2)^2 P_2,$$

- Which can be written in matrix form as

$$S(t) = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

- In general terms a uniform quadratic B-spline curve is written as

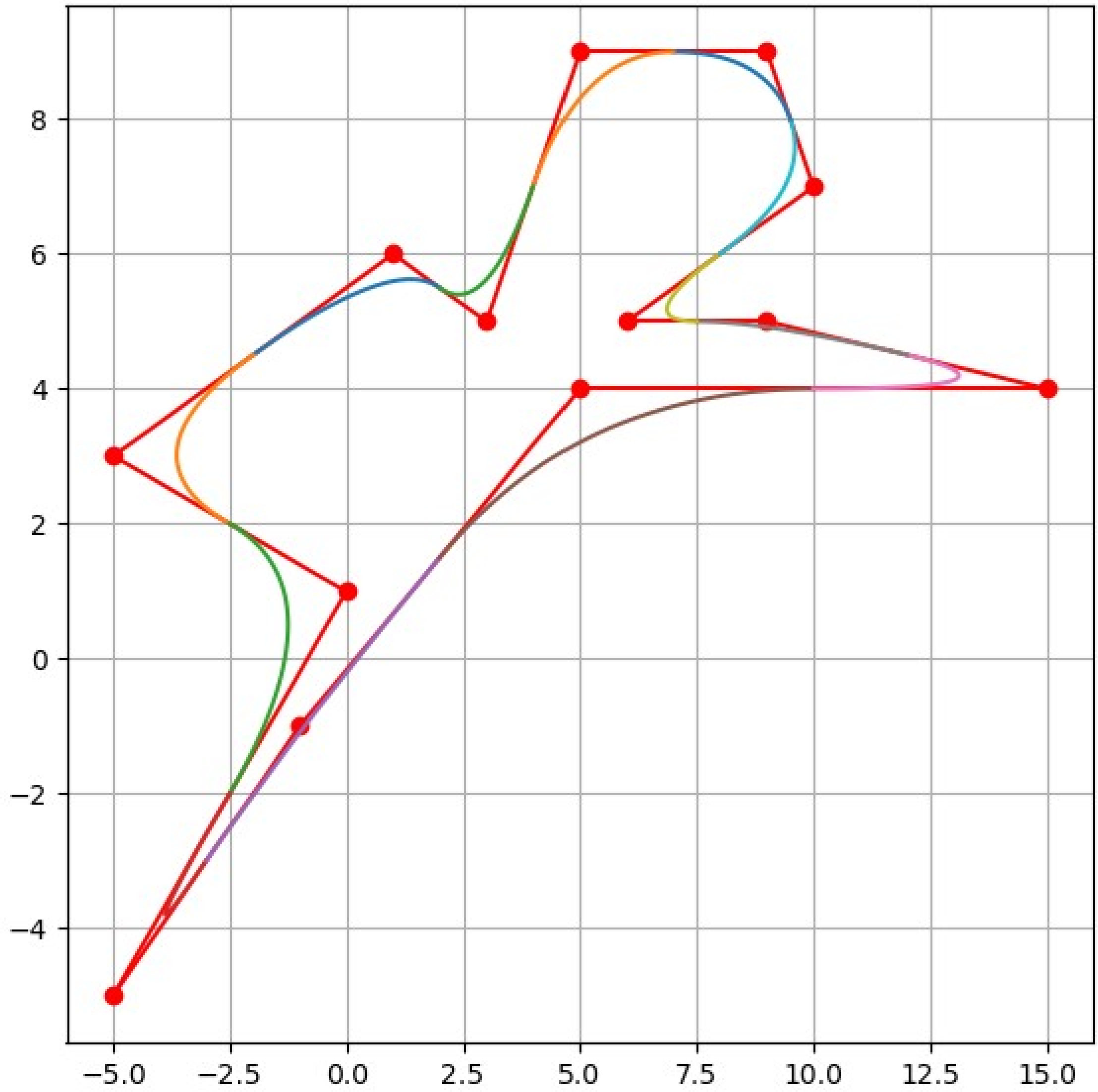
$$S_i(t) = \begin{pmatrix} P_i & P_{i+1} & P_{i+2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix},$$

where $i = 0, 1, \ldots, n-k+1$

Отже, мажмо просту формулу для знаходження кривих однорідного квадратичного бісплайну, вважаємо що для кожної кривої 0 <= t <= 1.

Будуємо криві для всіх послідовних P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, а також, щоб замкнути криву, будуємо криві для трійок (P_{n-2}, P_{n-1}, P_o), (P_{n-1}, P_0, P_1).

Маємо результат:


8
6
4
2
0
−2
−4
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0