Грищенко Юрій, ПЗС

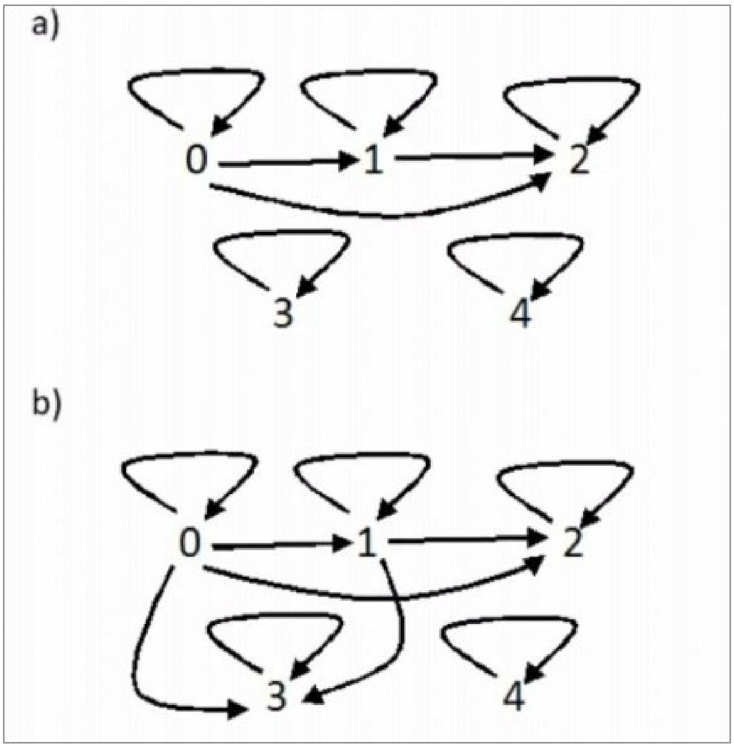
1. Довести, що в однооб'єктній категорії справедлива імплікація:
$\forall x (x \circ x = 1_m) \Rightarrow a \circ b = b \circ a$

З $\forall x (x \circ x = 1_m)$ випливає $(a \circ b) \circ (a \circ b) = 1_m$

$(a \circ b \circ a \circ b) \circ b = 1_m \circ b = b$
$a \circ b \circ a \circ (b \circ b) = a \circ b \circ a \circ 1_m = a \circ b \circ a$
Отже $a \circ b \circ a = b$

$(a \circ b \circ a) \circ a = b \circ a$
$a \circ b \circ (a \circ a) = a \circ b \circ 1_m = a \circ b$
Отже $a \circ b = b \circ a$

2. В категорії предпорядку знайти 2 x 3.



a) Для існування добутку 2x3 повинні існувати морфізми $pr_2 : 2 \times 3 \to 2$ та $pr_3 : 2 x 3 \to 3$. Маємо лише одне відображення в 3, отже єдине можливе значення для pr_3 це $pr_3 : 3 \to 3$, тоді єдиним можливим добутком 2 x 3 є 3. Але в категорії не задано морфізму $pr_2 : 3 \to 2$, звідси 3 не є добутком 2 x 3, отже такого добутку не існує.

b) Добутком є 1, маємо $pr_2 : 1 \to 2, pr_3 : 1 \to 3$. Необхідно перевірити пари морфізмів $f : 0 \to 2, g : 0 \to 3$. Бачимо, що існує єдиний морфізм $h : 0 \to 1$ для якого $h \circ pr_2 = f , h \circ pr_3 = g$.

3. Довести $\langle T , T \rangle \circ \Rightarrow = T$

Розглянемо діаграму 3.1:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "1_1"] \arrow[d, "x"'] & 1 \arrow[d, "{<T,T>}"] \\
a \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\Rightarrow"] \\
1 \arrow[r, "T"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

де g — мономорфізм, який є порівнювачем пари $\wedge : \Omega\times\Omega \to \Omega$ і $pr_1 : \Omega\times\Omega \to \Omega$.

Підберемо x так, щоб верхній квадрат діаграми був декартовим. Для цього розглянемо діаграму:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] & \Omega \times \Omega \arrow[r, shift left, "pr_1"] \arrow[r, shift right, "\wedge"'] & \Omega \\
1 \arrow[u, "x"] \arrow[ur, "\langle T, T\rangle"'] & &
\end{tikzcd}$$

Тоді існує єдиний $x : 1 \to a$ такий, що $x \circ g = \langle T, T\rangle$.

Розглянемо наступну діаграму:

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "s"] \arrow[ddr, bend right, "r"'] & & \\
& 1 \arrow[r, "1_1"] \arrow[d, "x"] & 1 \arrow[d, "\langle T, T\rangle"] \\
& a \arrow[r, "g"] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

Нехай $r \circ g = s \circ \langle T, T\rangle$. Тоді при k = s верхній трикутник комутує. Покажемо, що нижній трикутник комутує:

$k \circ x \circ g = k \circ \langle T, T\rangle = r \circ g$. Скоротивши на g одержуємо $k \circ x = r$.

Таким чином верхній квадрат діаграми 3.1 є декартовим. Верхній і нижній квадрати діаграми 3.1 декартові, отже за лемою про квадрати зовнішній квадрат теж декартовий. Звідси $\langle T, T\rangle \circ \Rightarrow = T$

5. Довести $(g \times k) \circ (f \times h) = (g \circ f) \times (k \circ h)$

Розглянемо діаграму

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[r, "g"] & c \arrow[r, "f"] & y \\
a \times b \arrow[ur, "pr_a"] \arrow[dr, "pr_b"'] \arrow[rr, "g \times k"] & & c \times d \arrow[u, "pr_c"] \arrow[d, "pr_d"'] \arrow[r, "f \times h"] & y \times z \arrow[u, "pr_y"] \arrow[d, "pr_z"'] \\
& b \arrow[r, "k"] & d \arrow[r, "h"] & z
\end{tikzcd}$$

Ліва та права частини діаграми комутують з означення функторного добутку (g x k та y x z відповідно), отже діаграма комутує. Тобто $(g \times k) \circ (f \times h) = \langle pr_a \circ (g \circ f), pr_b \circ (k \circ h)\rangle$. При цьому $(g \times k) \circ (f \times h)$ єдиний морфізм, при якому вона комутує, отже за визначенням він є функторним добутком $(g \circ f) \times (k \circ h)$.

4. **Довести $a^0 \cong 1$**

a^o — експоненціал 0 і a. Необхідно доказати, що 1 — також експоненціал 0 і a. Розглянемо діаграми:

$$\begin{tikzcd}
1 \times 0 \arrow[dr, "ev"] & \\
& a \\
c \times 0 \arrow[uu, "\hat{g} \times 1_0"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& a \times 0 \arrow[dl, shift right, "pr_0"'] \arrow[dr, "pr_a"] & \\
0 \arrow[ur, shift right, "i"'] \arrow[dr, shift left, "j"] & & a \\
& 1 \times 0 \arrow[ul, shift left, "pr_0'"] &
\end{tikzcd}$$

1 — кінцевий елемент, отже для будь-якого c існує єдиний $\hat{g}$: c -> 1.

Для декартово замкнутої категорії з початковим об'єктом 0 маємо $0 \cong a \times 0$ та $0 \cong c \times 0$. Звідси отримуємо комутативність правої діаграми. Отже можна задати $ev = pr'_0 \circ i \circ pr_1$.

Отже, за визначенням, 1 є експоненціалом a і 0, звідси $a^0 \cong 1$.