Чисельні методи в інформатиці
Лабораторна робота №1

Грищенко Юрій, ІПС-32, 2020

Задача. Знайти приблизні корені рівняння 26) $e^{-x} + x^2 - 2 = 0;$ методом Ньютона та модифікованим методом Ньютона.

Метод Ньютона. Його застосовують для розв'язання задачі (2.1) із неперервно диференційовною функцією $f(x)$. Спочатку вибирають початкове наближення x_0, а наступні наближення обчислюють за формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0, 1, 2, ..., \; f'(x_n) \neq 0. \tag{2.18}$$

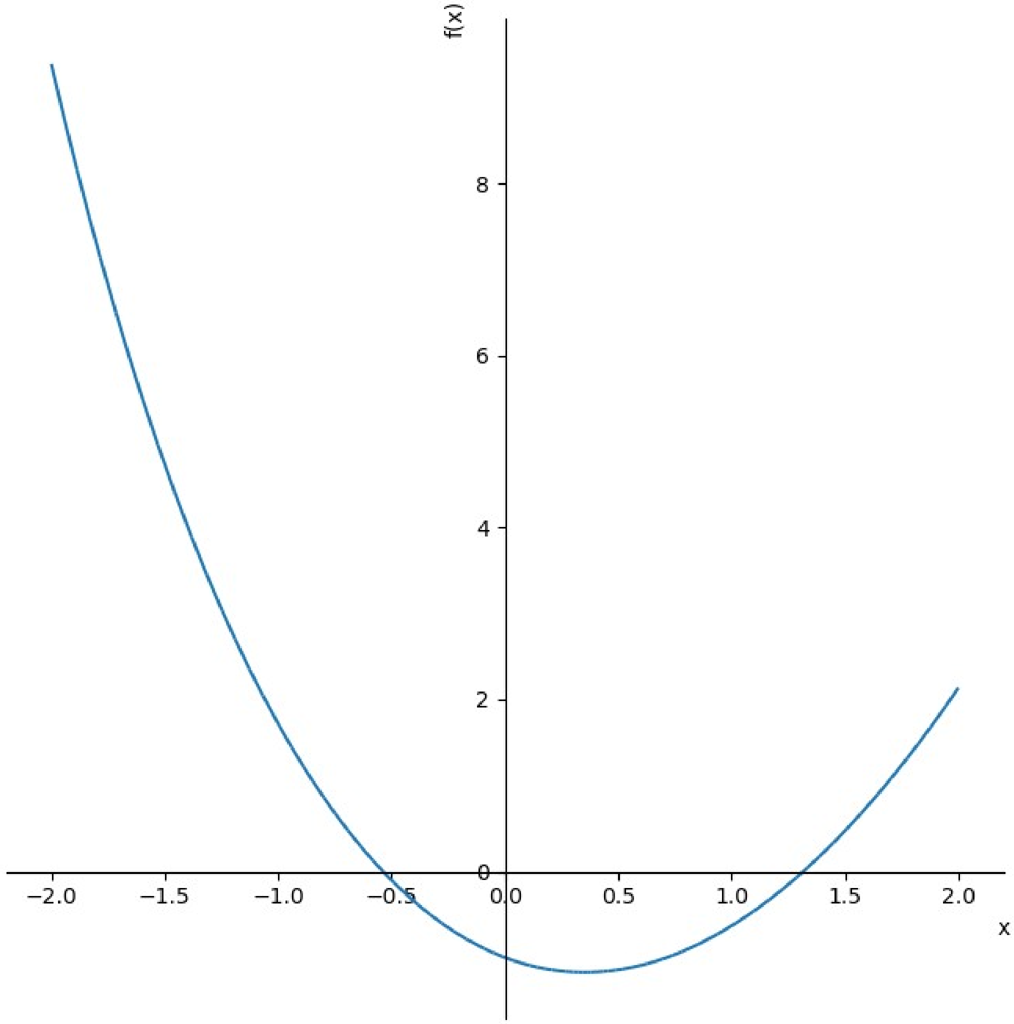
З геометричного погляду x_{n+1} — це значення абсциси точки перетину дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_n, f(x_n))$ із віссю абсцис. Тому метод Ньютона називають також *методом дотичних*.

Модифікований метод Ньютона. Його формула має вигляд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \; n = 0, 1, 2, \dots .$$

Ці методи реалізували, використавши мову програмування Python 3 та бібліотеку SymPy.

Спочатку програма виводить графік функції на проміжку [-2, 2]:



Бачимо, що функція має два корені.

Потім програма запитує у користувача початкове значення x_o та значення абсолютної похибки ε. Будемо шукати дійсний корінь, починаючи з -0,5, з точністю 10^{-4}.

```
Enter x_0: -0.5
Choose precision: 0.0001
```

Вважатимемо, що корінь знаходиться на проміжку [-1, -0.5]

Спочатку перевіримо умови збіжності:

1. Подвійна диференційованість: $f''(x)=e^{-x}+2$
2. $f''(x)$ більше 0 для всіх x, тобто опуклість не змінюється
3. $f(-1)f(-0.5)<0$
4. $f(-0.5)<0$, а $f''(-0.5)>0$

Отже функція f(x) має один корінь на проміжку [-1,-0.5], і його можна знайти методом Ньютона.

Підрахуємо максимальну кількість кроків, за яку ми знайдемо цей корінь на проміжку [-1, 0.5]. Візьмемо приблизне значення кореня x*=0,5

$$m_1=\min_{x\in[-1,-0.5]}|f'(x)|=\min_{x\in[-1,-0.5]}|2x-e^{-x}|=\left|-1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right|\approx 1{,}607$$

$$M_2=\max_{x\in[-1,-0.5]}|f''(x)|=\max_{x\in[-1,-0.5]}|2+e^{-x}|=2+\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 2.06$$

$$q=\frac{M_2|x_0-x^*|}{2}m_1\approx 0.0617$$

$$n\geq\log_2\left(\frac{\ln(|x_0-x^*|/epsilon)}{\ln(1/q)}+1\right)+1\approx 2{,}64$$

Після введення вхідних даних починаються обчислення, програма на кожному кроці виводить значення x_n та $f(x_n)$.

```
Newton's method
f(-0.538237) = 0.002683
f(-0.537275) = 0.000002
Answer: -0.537275, steps: 2
Press Enter to continue.

Modified Newton's method
f(-0.538237) = 0.002683
f(-0.537224) = -0.000141
f(-0.537277) = 0.000007
Answer: -0.537277, steps: 3
```

Бачимо, що метод Ньютона завершили роботу швидше, ніж очікувалось. Модифікований метод Ньютона заняв на 1 крок більше.

Тепер знайдемо інший дійсний корінь, починаючи з x=1:

```
Enter x_0: 1
Choose precision: 0.0001

Newton's method
f(1.387300) = 0.174350
f(1.318246) = 0.005378
f(1.315976) = 0.000006
Answer: 1.315976, steps: 3
Press Enter to continue.

Modified Newton's method
f(1.387300) = 0.174350
f(1.280476) = -0.082477
f(1.331009) = 0.035796
f(1.309077) = -0.016248
f(1.319032) = 0.007240
f(1.314596) = -0.003254
f(1.316590) = 0.001457
f(1.315697) = -0.000653
f(1.316098) = 0.000293
f(1.315918) = -0.000131
f(1.315999) = 0.000059
Answer: 1.315999, steps: 11
```

Висновки.

Як бачимо, звичайний метод Ньютона знаходить потрібне значення за меншу кількість кроків. Дійсно, цей метод має квадратичну збіжність, а модифікований метод Ньютона має лише лінійну збіжність.

З іншого боку, модифікований метод дає змогу не обчислювати похідну на кожній ітерації, тому позбувається можливого ділення на нуль.