The Kelvin pattern

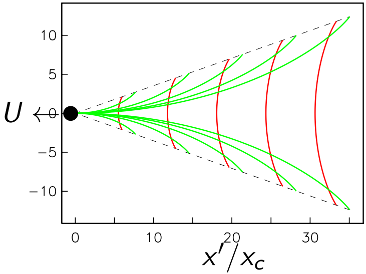
An example on wave optics
MEK4320

Geir Pedersen

Department of Mathematics, UiO

May 29, 2017

Punktforstyrrelse i overflaten



Konstant hastighet: $\vec{U} = -U\vec{\imath} \Rightarrow$ stasjonært og langsomt varierende bølgesystem. Isotrop dispersjonsrelasjon

$$\vec{c}' = c_0(k)\frac{\vec{k}}{k} \tag{1}$$

Bytte av koordinatsystem

Vi følger forstyrrelsen $\vec{r} = \vec{r}' - \vec{U}t$.

Harmonisk mode:

$A\cos\chi_H = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}' - \omega' t) = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - (\omega' + \vec{k}\cdot\vec{U})t)$

$$\omega = c_0(k)k + \vec{U}\cdot\vec{k} \equiv W(k_x, k_y) \tag{2}$$

$$\vec{c} = \left(c_0(k) + \vec{U}\cdot\frac{\vec{k}}{k}\right)\frac{\vec{k}}{k} \tag{3}$$

der $\vec{k} = k_x\vec{\imath} + k_y\vec{\jmath}$

Dopplerskift$\Rightarrow$ Anisotrop dispersjon

Stråleteori

Stasjonært mønster gir $\omega = 0$. (2) gir da:

$$W(k_x, k_y) = 0 \tag{4}$$

Gruppehastighet

$$\vec{c}_g = \frac{\partial W}{\partial k_x}\vec{\imath} + \frac{\partial W}{\partial k_y}\vec{\jmath} \tag{5}$$

Hamiltons likninger

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{c}_g, \qquad \frac{d\vec{k}}{dt} = 0 \tag{6}$$

der

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{c}_g \cdot \nabla \tag{7}$$

Uniformt medium $\Rightarrow$ Karakteristikkene blir rette linjer
Bare de karakteristikker kan bære energi som går gjennom forstyrrelsen (origo)

Må ha

$x = c_{gx} t$, $y = c_{gy} t$.

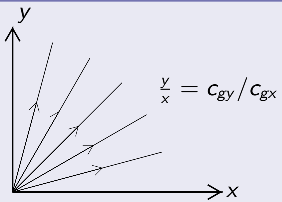
(Selv om mønstret er stajonært kan karakteristikker parameteriseres vha. tiden)

Eliminasjon av t:

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{\partial W}{\partial k_y}}{\frac{\partial W}{\partial k_x}} \tag{8}$$

kombinert med $W(k_x, k_y) = 0$ (4)$\Rightarrow$ to likninger for k_x og k_y.

Karakteristikker



Fasefunksjonen

$$\chi(\vec{r}) = \chi_0 + \int\limits_{C(\vec{r})} \vec{k} \cdot d\vec{r} \tag{9}$$

der χ_0 er fasen i origo og $C(\vec{r})$ integrasjonsvei
Integrasjon langs karakteristikkene er triviell fordi $\vec{k}$ er konstant på hver karakteristikk.

$$\chi(\vec{r}) = \chi_0 + k_x x + k_y y \tag{10}$$

Faselinjer $\chi = -A$. To muligheter for visualisering/tolkning

- En raskt danne seg et bilde av faselinjene ved å plotte nivålinjene til χ i feks. Matlab.
- En kan parameterisere faselinjer. En del trigonometri, men en demonstrerer to uavhengige løsninger for $\vec{k}$ fra (8) og (4)

Parameterisering av faselinjer for uendelig dyp

θ: vinklen mellom $\vec{k}$ og negativ x-akse

$$k_x = -k\cos\theta, \quad k_y = k\sin\theta. \tag{11}$$

(4) kan skrives om til

$$c_0 = U\cos\theta,$$

og $c_0(k) = \sqrt{g/k}$ gir da

$$k = \frac{g}{U^2\cos^2\theta} \tag{12}$$

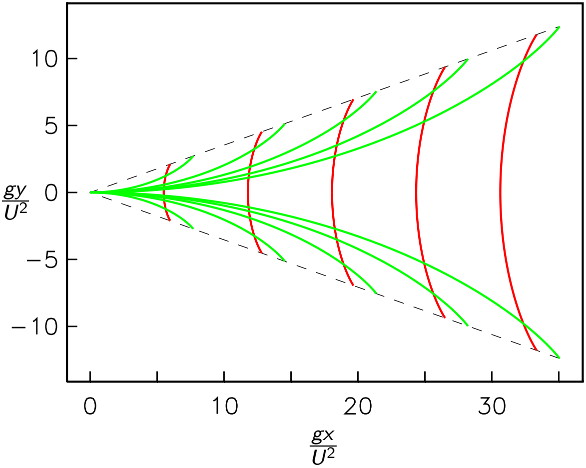
(8) og (10) løses for x og y

$$x = \frac{(A-\chi_0)g}{U^2}\cos\theta(1+\sin^2\theta) \tag{13}$$

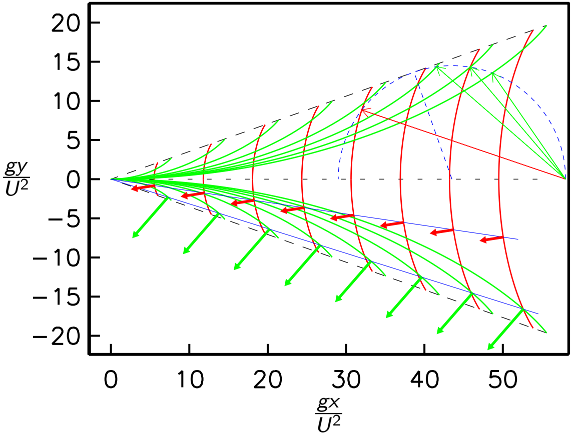
$$y = \frac{(A-\chi_0)g}{U^2}\cos^2\theta\sin\theta \tag{14}$$

NB: $y(\theta)/x(\theta)$ ekstremum for $\cos\theta = \sqrt{2/3}$ $(\theta = \theta_c = 35.3^\circ)\Rightarrow$ faselinjene har knekker $\Rightarrow$ uavhengige løsninger

Punktforstyrrelse: kan vises, vha. andre teknikker, at $\chi_0 = \frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi$ for hhv. hekk og baugbølger.



The Kelvin pattern, more details



Fat arrows: wave number vectors.

Dashed half circle: propagation with $\vec{c}_g$ from intersection with x-axis, subject to $c_0 = U\cos\theta$. Thin arrows: corresponding rays.