Oppgave 31 - Boundary layer; equation of third order

$\epsilon^2 y''' - y' + y = 0, \quad y(0) = \alpha,\ y(1) = \beta,\ y'(1) = \gamma/\epsilon$

Grensesjikt i $x = 0$ og $x = 1$

Løsning:

$y_o = Ce^x$
$y_{\text{match},L} = C$
$y_{i,L} = (\alpha - C)e^{-x/\epsilon} + C$
$y_{\text{match},R} = Ce$
$y_{i,R} = (\beta - Ce)e^{(x-1)/\epsilon} + Ce$
$y_{\text{uniform}} = y_o + y_{i,L} - y_{\text{match},L} + y_{i,R} - y_{\text{match},R} = Ce^x + (\alpha - C)e^{-x/\epsilon} + (\beta - Ce)e^{(x-1)/\epsilon}$

Forskjellige valg av C:

⋆ Om man finner C fra $y_{i,R}$ får man $C = \dfrac{\beta - \gamma}{e} \equiv C_1$
og det er den metoden man skal bruke på eksamen

⋆ Men om man finner C fra den uniforme løsningen får man $C = \dfrac{\beta - \gamma - \alpha e^{-1/\epsilon}}{e - \epsilon e - e^{-1/\epsilon}} \approx \dfrac{\beta - \gamma}{e - \epsilon e} \equiv C_2$

Effekter av å bruke C_1 eller C_2:

⋆ C_1 gir en løsning som oppfyller $y(0) = \alpha$ og $y(1) = \beta$ bedre enn løsningen med C_2 gjør (se fig 1)

⋆ C_2 gir en løsning som oppfyller $y'(1) = \gamma/\epsilon$ (se fig 2)

⋆ For liten ϵ blir løsningene så godt som like, men for noen γ vil ikke løsningen gitt av C_1 gi et avvik fra $y'(1) = \gamma/\epsilon$ som forblir endelig selv for veldig små ϵ (se fig 3). Dette skyldes at mens den deriverte er $O(1/\epsilon)$, vil neste orden, som vi ikke har med i standard grensesjiktsteori, gi en korreksjon i den deriverte som er $O(1)$. I dette tilfellet får vi med denne når vi lar "unified solution" oppfylle randbetingelsen ved $x = 1$.

⋆ Begge løsningene viker fortere fra $y(0) = \alpha$ enn $y(1) = \beta$ (se fig 1)

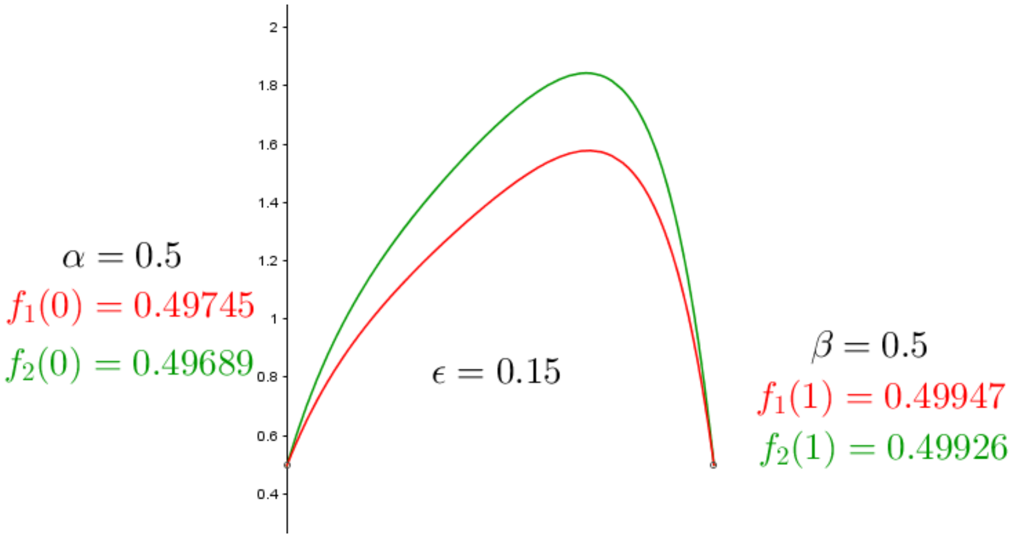

Fig 1: C_1 gir løsning som best oppfyller $y(0) = \alpha,\ y(1) = \beta$, og begge løsningene oppfyller $y(1) = \beta$ bedre enn $y(0) = \alpha$

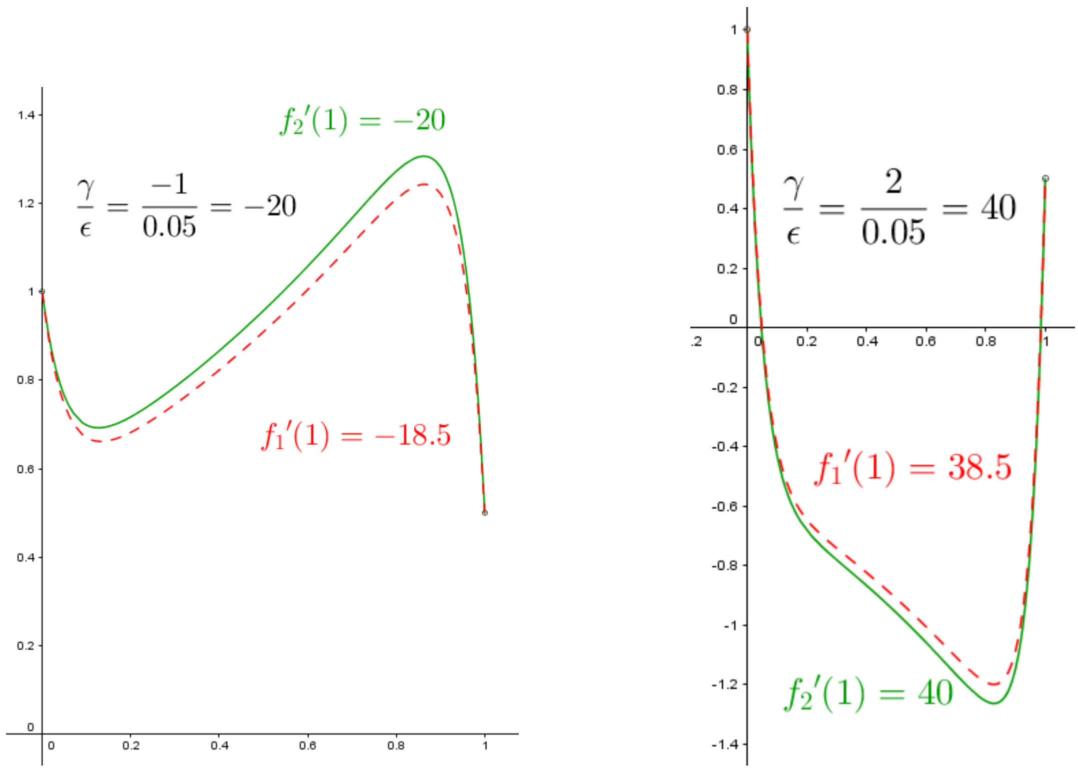

Fig 2: C_2 gir en løsning som oppfyller $y'(1) = \gamma/\epsilon$

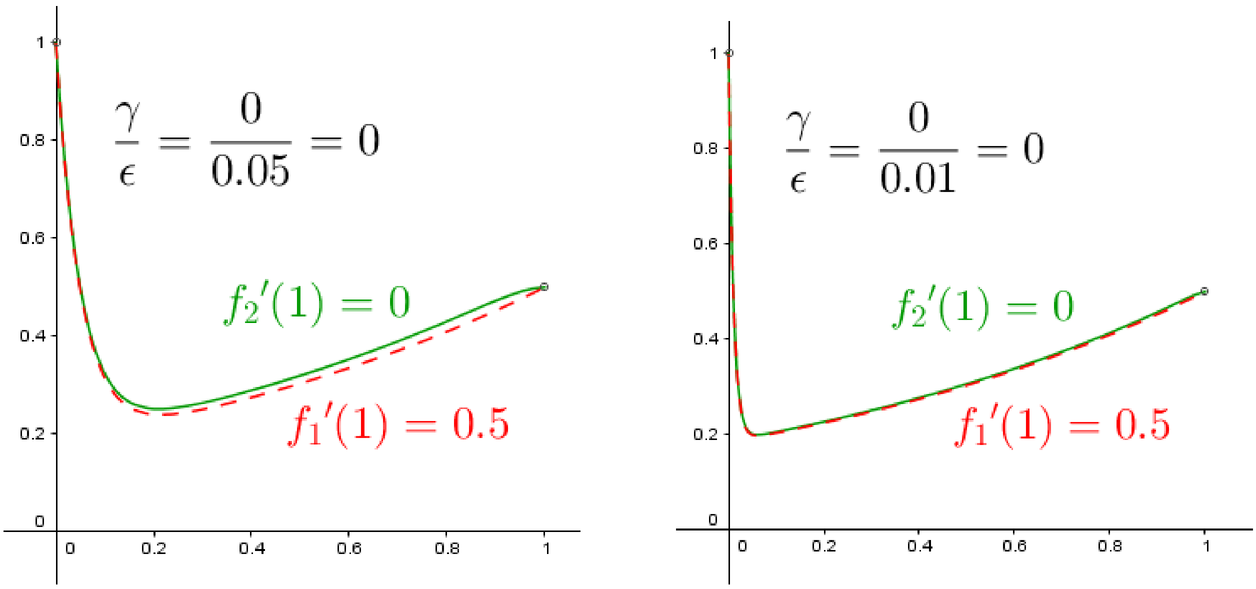

Fig 3: For liten ϵ blir løsningene så godt som like