Klein-Gordon likning; Spredning fra initiell forstyrrelse

Definisjon av problem, overblikk

Vi har gitt likningen

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + q\eta = 0. \tag{1}$$

Med initialbetingelse

$$\eta(x,0) \equiv \eta_0(x) = \mathrm{e}^{-(\frac{x}{L})^2}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\eta(x,0) = 0, \tag{2}$$

der vi har satt amplituden av initialbetingelsen til 1. Karakteren til løsningen avhenger av q og L i kombinasjonen qL^2 noe som kan vises ved reskalering[1]. Likevel beholdes q i likningen.

En asymptotisk løsning av (1) og (2) finnes i to trinn

1. *Fouriertransform*
   Likningssystemet er lineært med konstante koeffissienter og initialbetingelsen er romlig begrenset. Da kan vi etablere en løsning i form av et Fourier-integral. Feks. vil vi for store positive x kunne skrive:

   $$\eta(x,t) = \frac{1}{2\pi}\Re\int_0^\infty \tilde{\eta}_0(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}\mathrm{d}k$$

   der ω og k oppfyller dispersjonsrelasjonen.

2. *Stasjonær fase*
   For store x og t vil dominante bidrag i Fourier integralet komme fra områder nær stasjonære punkter. En kan da finne en eksplisitt løsning i sluttet form som er asymptotisk gyldig for store x og t.

Løsning i Fourierplanet

Generelt om Fouriertransform

Vi definer den transformerte til en funksjon, f, ved

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{3}$$

med tilbaketransform

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{4}$$

En viktig egenskap ved transformen er:

$$\widetilde{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}} = \mathrm{i}k\tilde{f} \tag{5}$$

som vises enkelt ved delvis-integrasjon.

[1] Tidsskalaen, dvs. hvor *fort* løsningen utvikler seg, vil ikke avhenge av den gitte kombinasjonen. Vi kan for eksempel skrive $\eta = \mathrm{f}unksjon(\frac{x}{L}, \frac{t}{L}, qL^2)$

Fouriertransform på (1,2)

Vi kan nå anvende Fouriertransform på hele likningen (1) og benytte (5) to ganger slik at all derivasjon mhp. x erstattes med potenser av ik. Resultatet er den *ordinære* likningen

$$\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial t^2} + (k^2 + q)\tilde{\eta} = 0 \tag{6}$$

som har den generelle løsningen

$$\tilde{\eta}(k,t) = A(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(k)t} + B(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(k)t} \tag{7}$$

der $\omega(k) = \sqrt{q + k^2}$. Dette er dispersjonsrelasjonen. Faktorene A og B bestemmes av initial betingelsene. Den Fouriertransformerte versjonen av initialbetingelsene blir

$$\tilde{\eta}(k,0) = \tilde{\eta}_0(k) = L\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\left(\frac{kL}{2}\right)^2}, \quad \frac{\partial \tilde{\eta}(k,0)}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

som gir $A = B = \frac{1}{2}\tilde{\eta}_0$. Tilbaketransformasjonsformelen gir da

$$\eta(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\tilde{\eta}_0(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)} + \tilde{\eta}_0(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+\omega(k)t)}\right)\mathrm{d}k \tag{9}$$

Dette er en lineær superposisjon av harmoniske moder som oppfyller initialbetingelsene.

Uttrykket (9) kan skrives om på mange vis. Siden $\tilde{\eta}_0$ er reell og symmetrisk om $k = 0$ er det er lett å vise at de to leddene i integranden gir bidrag som er komplekskonjugerte av hverandre. Derfor

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2\pi}\Re\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\eta}_0(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}\mathrm{d}k.$$

Gjør vi om til to integraler fra 0 til ∞ følger

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2\pi}\Re\left\{\int\limits_{0}^{\infty}\tilde{\eta}_0(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}\mathrm{d}k + \int\limits_{0}^{\infty}\tilde{\eta}_0(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+\omega(k)t)}\mathrm{d}k\right\} \tag{10}$$

der de to integralene kan gjenkjennes som bølgesystemer som går i hhv. positiv og negativ x-retning.

Stasjonær fase

Generelt om stasjonær fase

Et generelt Fourier-integral er gitt ved

$$I(t) = \int\limits_{a}^{b} F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\chi(k)}\mathrm{d}k \tag{11}$$

der a og b kan være endelige eller uendelige grenser. For store t svinger integranden meget hurtig og $I \to 0$ når $t \to \infty$. Dersom vi i integrasjonsintervallet har et stasjonært punkt, dvs. en k_0 slik at

$$\frac{\mathrm{d}\chi(k_0)}{\mathrm{d}k} = 0$$

vil det dominante bidraget til I komme fra området rundt k_0[2]. Vi finner da den asymptotiske tilnærmelsen

$$I(t) \sim \frac{\sqrt{2\pi}F(k_0)}{\sqrt{t|\chi''(k_0)|}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\chi(k_0)t \pm \frac{\pi}{4}\right)} \tag{12}$$

der fortegnet i eksponenten er likt fortegnet på $\chi''(k_0)$.

Anvendelse av stasjonær fase

Vi konsentrerer oss om det første leddet i (10) og gjenkjenner F i (11) som $\tilde{\eta}_0/(2\pi)$ og fasefunksjonen som

$$\chi = k\frac{x}{t} - \omega(k) \tag{13}$$

det stasjonære punktet er gitt ved

$$c_g(k_0) \equiv \frac{\mathrm{d}\omega(k_0)}{\mathrm{d}k} = \frac{x}{t}.$$

Tolk denne! Utregning av viser at $c_g < 1$ for alle k som betyr at stasjonær fase kan brukes bare for $x < t$. Når $x < t$ finner vi

$$k_0 = q^{\frac{1}{2}}\frac{x}{t}(1 - (\frac{x}{t})^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \chi(k_0) = -q^{\frac{1}{2}}(1 - (\frac{x}{t})^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \chi''(k_0) = -q^{-\frac{1}{2}}(1 - (\frac{x}{t})^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Innsatt i (12) gir dette

$$\eta \sim a(x,t)\cos\theta(x,t) \tag{14}$$

der

$$a = \frac{L^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{4}}}{(2\frac{t}{L})^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{L^2 q}{4((\frac{t}{x})^2-1)}}}{(1-(\frac{x}{t})^2)^{\frac{3}{4}}}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} - q^{\frac{1}{2}}\sqrt{t^2 - x^2}$$

Det lokale bølgetallet kan defineres ved $k_l(x,t) = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$. Utregning viser $k_l(x,t) = k_0(x,t)$. Dette er et resultat som kan vises generelt for stasjonær fase approksimasjoner når χ har formen (13).

Med utgangspunkt i løsningen bør nå følgende spørsmål diskuteres:

1. Hvordan varierer amplituden (a) med x og t ?
2. Hvordan varierer den lokale bølgelengden med x og t ?
3. Hvordan forplanter enkelttopper seg relativt til hele bølgesystemet ?

Svarene sammenholdes med animasjonen på nettet.

[2]Dersom vi *ikke* har et stasjonært punkt vil I gå mot null som $1/t$. Hvis a og b er endelige kan en asymptotisk tilnærmelse finnes ved delevis integrasjon.