

Solitoner; MEK4320.

Geir Pedersen

Seksjon for Mekanikk, Matematisk institutt, UiO.

October 27, 2014

Solitær bølge = enkeltbølge

J. Scott Russel (1834): Observasjoner i kanaler, eksperimenter

$$c = \sqrt{g(h + A)}$$

der g er tyngdens akselerasjon, h dypet ved likevekt og A amplituden.

J. Boussinesq (1871): Første fullstendige teoretiske beskrivelse.

1960-1980: Solitoner og deres egenskaper er mote-tema i fysikk –
Kollisjonsegenskaper (partikkelanalogi)
Generering fra initialbetingelser

Solitærbølge-løsningen.

KdV likningen (lengdeskala: likevektsdyp)

$$\eta_t + \left(1 + \frac{3}{2}\eta\right)\eta_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} = 0 \quad (1)$$

Solitær bølge av permanent form

$$\eta(x, t) = \alpha Y(x - ct),$$

der $\max Y = Y(0) = 1$ og $Y(\xi), Y'(\xi) \dots \rightarrow 0$ når $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Dvs. α er amplitude/dyp og utstrekning er begrenset.

Bølgehastigheten, c , er ukjent.

Innsetting i (1)

$$-cY' + \left(1 + \frac{3}{2}\alpha Y\right)Y' + \frac{1}{6}Y''' = 0,$$

Siste likning integreres til

$$(1 - c)Y + \frac{3}{4}\alpha Y^2 + \frac{1}{6}Y'' = K_1.$$

$Y(\xi) \dots \rightarrow 0$ når $\xi \rightarrow \pm\infty$ gir $K_1 = 0$.

Multiplisering med integrerende faktor Y'

$$(1 - c)YY' + \frac{3}{4}\alpha Y^2 Y' + \frac{1}{6}Y'' Y' = 0,$$

og

$$\frac{1}{2}(1 - c)Y^2 + \frac{1}{4}\alpha Y^3 + \frac{1}{12}(Y')^2 = K_2.$$

Betingelse i uendelig $\Rightarrow K_2 = 0$ og $\max Y = Y(0) = 1 \Rightarrow c = 1 + \frac{1}{2}\alpha$. Antar vi $0 < Y < 1$ følger (- etter rotutdragning forkastes)

$$Y' = Y\sqrt{3\alpha(1 - Y)}.$$

Separabel med enkel løsning

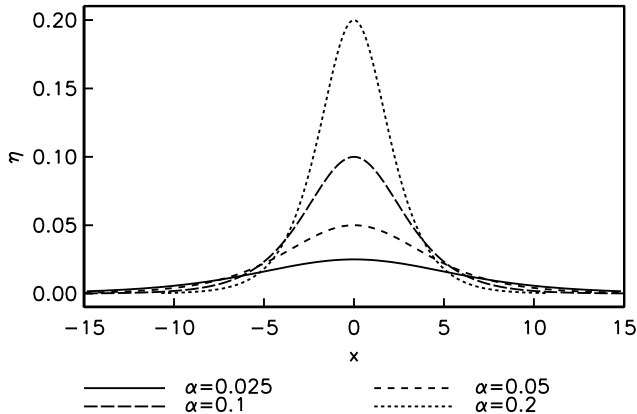
Solitærbølgeløsning av KdV likningen

$$\eta = \alpha \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3\alpha} (x - ct) \right), \quad c = \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \right). \quad (2)$$

der $\operatorname{sech} \equiv 1/\cosh$.

- (2) eksakt bare for KdV likningen
- Solitærbølger finns for alle Boussinesq-type likninger, men oftest ikke i lukket analytisk form.
- Eksistens krever samvirkning av dispersjon og ikkelinearitet.
- Full potensialteori: perturbasjonsteknikker eller numerisk løsning
maksimal amplitude $0.83 \times$ equilibrium depth,
- (2) ledende tilnærmelse for alle solitonsløsninger for tyngdebølger
- Solitærbølger finnes for andre likninger/fysiske systemer.

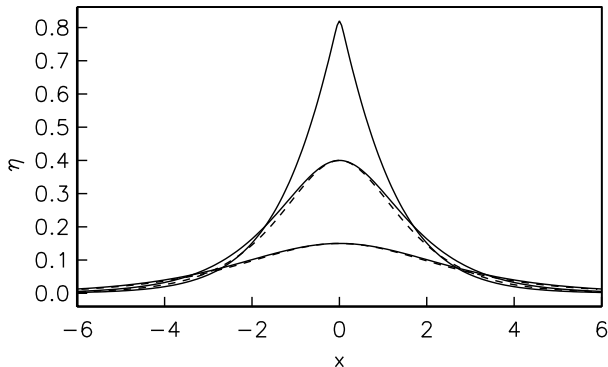
Boussinesq soliton



Soliton-profiler fra Boussinesq likningen

Lengde avtar med amplitude. Hvorfor ?

Boussinesq soliton vs. full potensialteori



Solitoner fra Boussinesq likninger (stiplet) og full potensialteori (hel linje) for $\alpha = 0.15, 0.4$. Potensialløsning for $\alpha = 0.82$ nær maksimum; topp nærmer seg 120° vinkel.

Kollisjonsegenskaper

To solitærbølger med α_1 og α_2 ; samme retning.

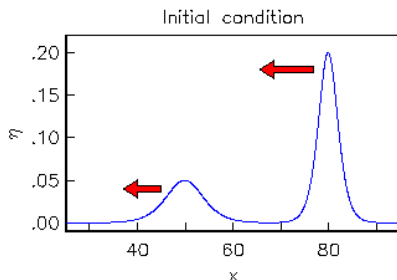
Definerer $f_i = e^{-\sqrt{3\alpha_i}(x-\hat{x}_i-(1+\frac{1}{2}\alpha_i)t)}$ der \hat{x}_i er referanseposisjoner

Eksakt interaksjonsløsning av KdV likning

$$\frac{\eta}{4} = \frac{\alpha_1^2 f_1 + \alpha_2^2 f_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 f_1 f_2 + \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}\right)^2 (\alpha_2^2 f_1^2 f_2 + \alpha_1^2 f_1 f_2^2)}{\left(1 + f_1 + f_2 + \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}\right)^2 f_1 f_2\right)^2} \quad (3)$$

- Analyse for $\rightarrow \pm\infty$: bølger gjenoppstår etter kollisjon
- Denne egenskap \Rightarrow soliton betegnelse
- Eksakte kollisjonsegenskaper bare vist for KdV likning; eller ledende ordens oppførsel i pertubasjonsutviklinger.

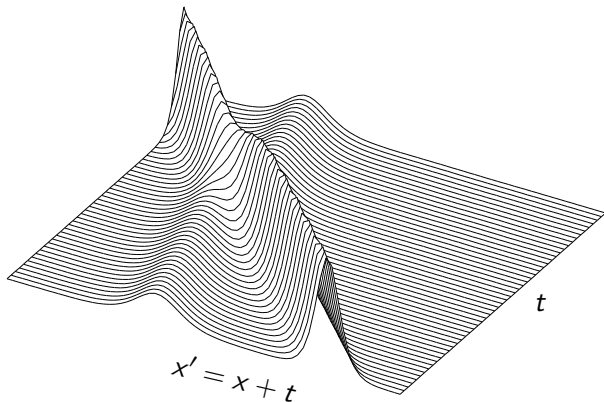
Interaksjon; stor forskjell i amplitude



$$\alpha_1 = 0.05, \alpha_2 = 0.2$$

- Propagering mot venstre. Stor solitærbølge tar igjen liten.
- Betydelig forskjell i hastighet \Rightarrow interaksjon av begrenset varighet \Rightarrow begrenset tid for svake ikke-lineære effekter å virke

$$\alpha_1 = 0.05 \text{ og } \alpha_2 = 0.2$$

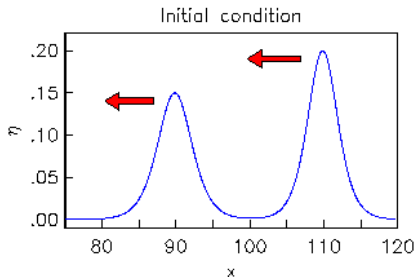


Soliton-interaksjoner

Største amplitude: faseskift i forplantningsretningen

Minste amplitude: faseskift mot forplantningsretningen; motsatt av forventet fra ikke-lineære effekter

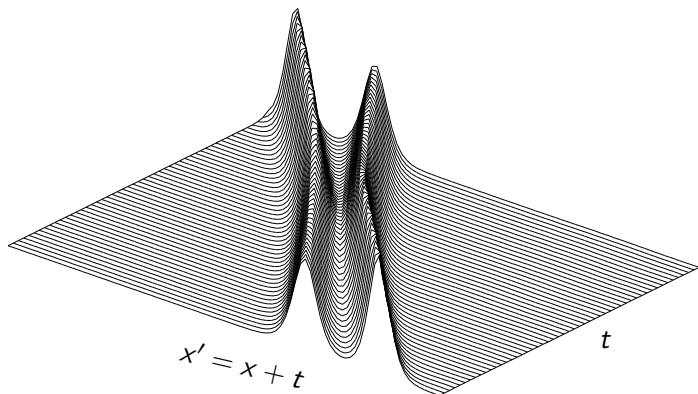
Interaksjon; liten forskjell i amplitude



$$\alpha_1 = 0.15, \alpha_2 = 0.2$$

- Propagering mot venstre. Stor solitærbølge tar igjen liten.
- Liten forskjell i hastighet \Rightarrow lengre tid for svake ikke-lineære effekter å virke

$$\alpha_1 = 0.15 \text{ og } \alpha_2 = 0.2$$



Soliton-interaksjoner

B olgene går ikke gjennom hverandre; de bytter amplitude

Analogi til partikler i elastisk støt \Rightarrow soliton