Presentasjon Oblig 2

Caroline, Joakim og Trygve

April 8, 2014

Oppgave 57 - Numerical solutions for free oscillations

Vi har den skalerte ligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon^{-1}\sin(\epsilon x) = 0 \tag{1}$$

$$x(0) = 1, \frac{dx(0)}{dt} = 0$$

Løses numerisk og sammenlignes med løsning vba. Poincare-Lindstedts metode.

ϵ - maks vinkelutslag. Skal analysere for $\epsilon = [10^o, 30^o]$.

Løsninger

Løsning vba. Poincare-Lindstedts metode gir

$$x = \cos(\omega t) + \frac{\epsilon^2}{192}\left(\cos(\omega t) - cos(3\omega t)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \tag{2}$$

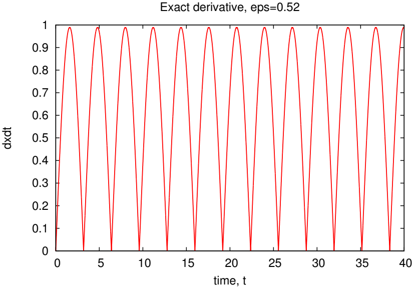
der

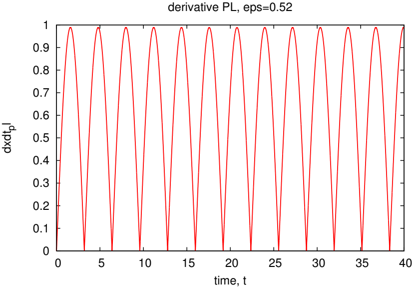
$$\omega = 1 - \frac{\epsilon^2}{16} + \mathcal{O}(\epsilon^4).$$

Ved å multiplisere (1) med x' får vi ut energilikningen. Fra den får vi følgende uttrykk for endringen i posisjon per tid

$$\frac{dx}{dt} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}\left(\cos(\epsilon x) - \cos(\epsilon)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Sammenligner den deriverte av Poincare-Lindstedts løsningen mot den eksakt deriverte fra energilikningen.

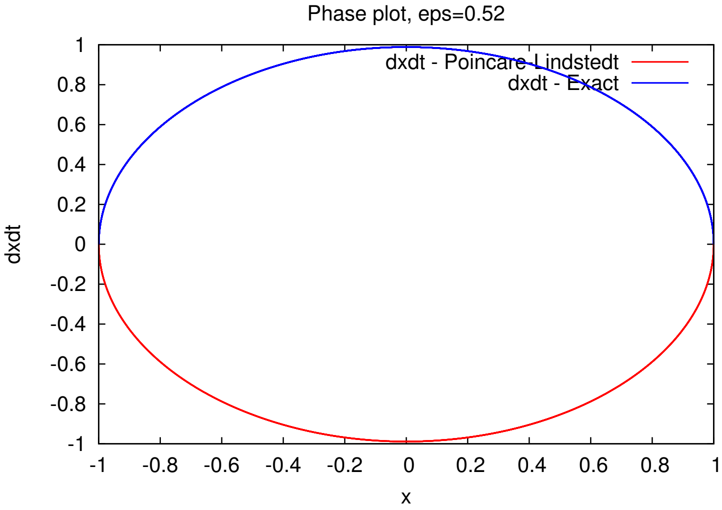




$$\frac{dx}{dt} = \left| \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} \left(\cos(\epsilon x) - \cos(\epsilon)\right)^{\frac{1}{2}} \right|$$

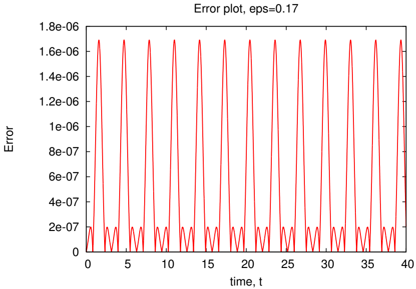
$$\frac{dx}{dt} = -\omega \sin(\omega t) + \frac{\epsilon^2 \omega}{192} \left(3\sin(3\omega t) - \sin(\omega t)\right)$$

Oppgave a- phase plot

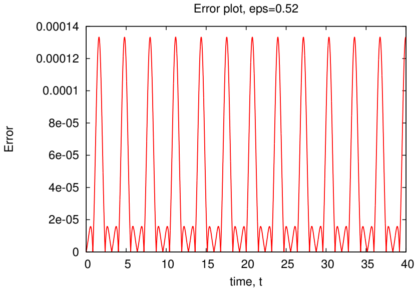


Oppgave a

Forskjellen på eksakt derivert og derivert fra Poincare-Lindstedts metode



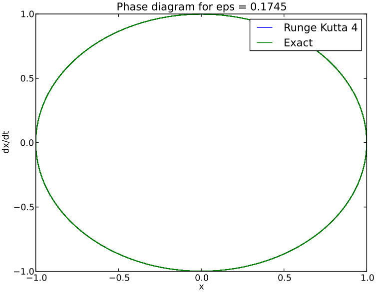
$\epsilon = 10^o$



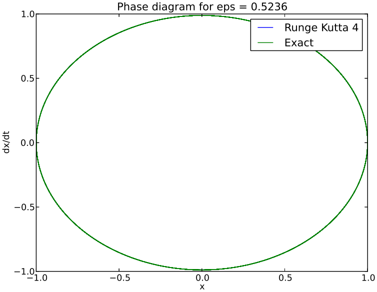
$\epsilon = 30^o$

Oppgave b: Numerisk løsning av dx/dt

Vi har brukt en RK4 løser for ODE'en. Sammenligning med den eksakte løsningen av dxdt viser en tilsynelatende god løsning.



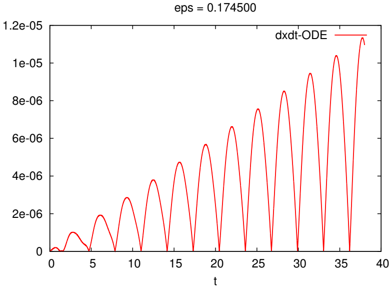
$\epsilon = 10^o$



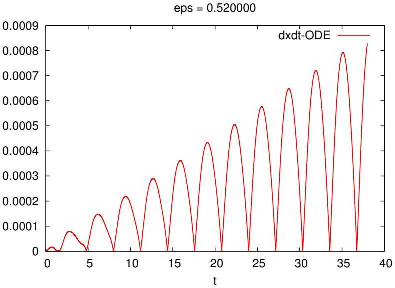
$\epsilon = 30^o$

Oppgave b: Feil for numerisk løsning av dx/dt

Utvikling av feilen over tid.



$\epsilon = 10^o$



$\epsilon = 30^o$

Oppgave b: Observasjoner

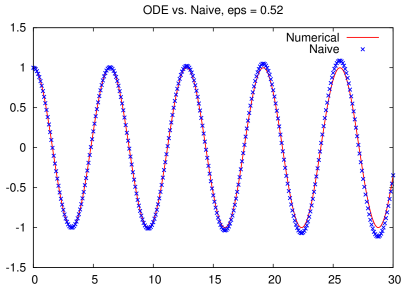
Feilen er størst ved $x = 0$.

Feilen er 0 ved $x = -1$ og $x = 1$.
$\Rightarrow$ initialbetingelsen $x(0) = 1$ er oppfylt for hver oscillasjon.

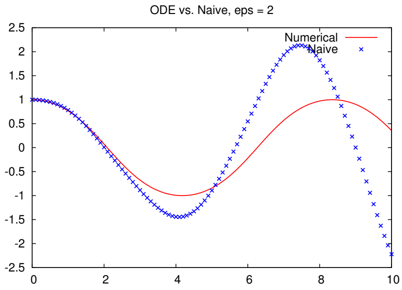
Maksimumsverdien til den numeriske løsningen av dx/dt minker over tid.

Vi har en nesten lineær utvikling av maksimumsfeilen med stigningstall henholdsvis $3 * 10^{-7}$ og $2 * 10^{-5}$ eller $2 * 10^{-6}$ og $2 * 10^{-4}$ pr periode.

Oppgave c

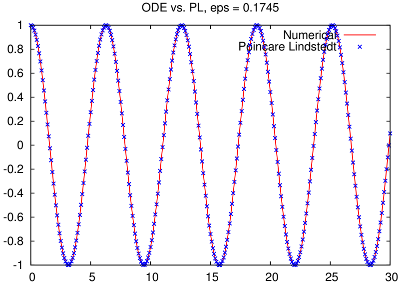


$\epsilon = 10^o$

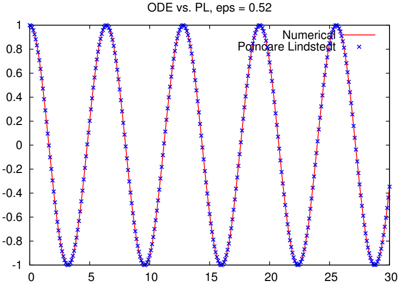


$\epsilon = 114^o$

Oppgave c

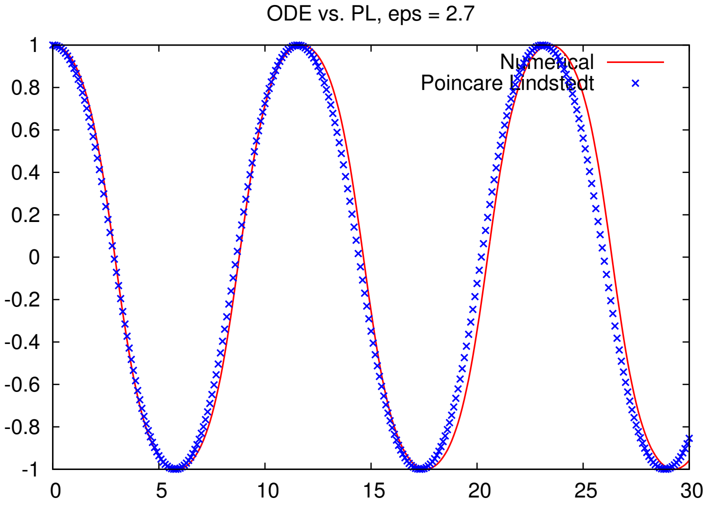


$\epsilon = 10^o$



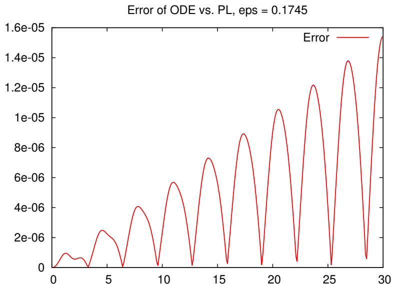
$\epsilon = 30^o$

Oppgave c

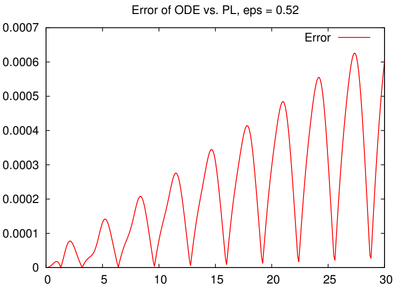


$\epsilon = 154^o$

Oppgave c

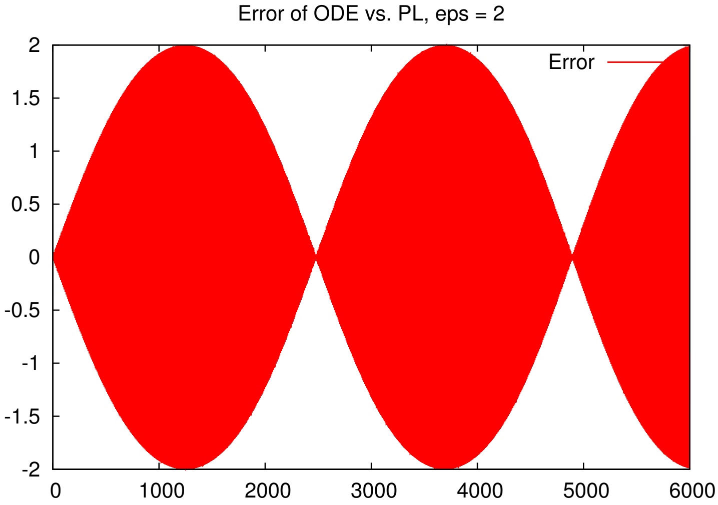


$\epsilon = 10^o$



$\epsilon = 30^o$

Oppgave c



$$\epsilon = 114^o$$

Oppgave d: Vinkelhastighet og periode

$\epsilon = 10^o$
P-L $\quad T = 6.2920 \quad \omega = 0.998096$
RK4 $\quad T = 6.2915 \quad \omega = 0.998171$
Error $= 7.5 * 10^{-5}$

$\epsilon = 30^o$
P-L $\quad T = 6.3895 \quad \omega = 0.982865$
RK4 $\quad T = 6.3884 \quad \omega = 0.983038$
Error $= 1.1 * 10^{-4}$

Forskjell i ω forklarer noe av feilen.

Oppgave d: Eksakt periode

Vi kan også sammenlikne med perioden funnet fra likning (80):

$$T = \int_0^1 \frac{2\sqrt{2}\epsilon\, dx}{(\cos \epsilon x - \cos \epsilon)^{\frac{1}{2}}}$$

$\epsilon = 10^o$

	Likn. (80)	P-L	RK4
$\omega =$	0.998096	0.998096	0.998171
Error =		10^{-7}	10^{-4}

$\epsilon = 30^o$

	Likn. (80)	P-L	RK4
$\omega =$	0.982889	0.982865	0.983038
Error =		10^{-5}	10^{-4}