# MEK4320 ENERGIOMSETNING I OVERFLATEBØLGER.

Geir Pedersen

Department of Mathematics, UiO

September 3, 2015

# Utregning av tettheter.

Løsningen gitt i kompendium er lineær, det vil si at den er gyldig bare til ledende orden i amplituden ($a$). Følgelig vil vi bare kunne beregne tilnærmede energitettheter. Det viser seg at lineær bølgeteori gir integrerte energier som er korrekt tom. kvadratiske ledd i amplituden.
Vi har tre former for mekanisk energi som listes med tilhørende betegnelse for tetthet, per bredde normalt forplantningsretningen, midlet over en bølgelengde:

(i) Kinetisk energi, $E_k$.

(ii) Potensiell energi i tyngdefeltet, $E_p^t$.

(iii) Potensiell kappilar-energi, $E_p^k$.

Notasjon: feks. (K2.1) er likning 2.1 i kompendium. Indeksder brukes for partialt deriverte.

# To framgangsmåter

1. Midlere flukser og tettheter regnes ut direkte.
   Denne framgangsmåten er beskrevet upresist i kap 2.4
2. En utleder en konserveringslov fra likningene som styrer bevegelsen.
   - Gevinst: bekreftelse av uttrykk, også fullt ikkelineært
   - Gevinst: en kan vise eksistens av potensiell kappilarenergi
   - Ulempe: en god del regning.

Vi begrenser oss til en horisontal dimensjon.

Det fulle uttrykket for midlere kinetisk energi:

$$E_k = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{x_1}^{x_1+\lambda}\int\limits_{-H}^{\eta}\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

der resultatet er uavhengig av $x_1$ pga. periodisiteten. Integralet i $z$ kan deles i ett integral fra bunnen til $z = 0$ og ett fra $z = 0$ til den fri overflate. Siden integranden er kvadratisk i amplituden vil det siste gi et kubisk bidrag ($O(a^3)$) som kan sløyfes. Innsetting av den lineære løsningen fulgt av regning gir

$$E_k = \frac{1}{4}\rho g a^2(1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g}) + O(a^3) \tag{2}$$

Som i kompendium avsnitt 2.1-2.2[a] definerer vi nullnivå for tyngdepotensialet i $z = 0$. Integrert potensiell energi:

$$\int_{x_1}^{x_1+\lambda} \int_{-H}^{\eta} \rho g z \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\rho g \lambda H^2 + \int_{x_1}^{x_1+\lambda} \frac{1}{2}\rho g \eta^2 \mathrm{d}x \qquad (3)$$

Det første leddet på høyre side gir energien ved likevekt, mens det andre gir en økning knyttet til bølgebevegelsen. Dette gir:

$$E_p^t = \frac{1}{\lambda} \int_{x_1}^{x_1+\lambda} \frac{1}{2}\rho g \eta^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\rho g a^2 + O(a^3) \qquad (4)$$

[a] Redefinering av nullpunkt nedenfor (K2.26) er inkonsistent med løsningene fra avsnitt 2.1-2.2.

Dersom overflaten strekkes utføres et arbeid mot overflatespenningen som går til økning av den potensielle kappilar-energien. Den potensielle energien er $\sigma A + \mathrm{konst.}$, der $A$ er areal.
Vårt regnskap er per bredde. Areal per bredde $=$ buelengde $\Rightarrow$

$$\int_{x_1}^{x_1+\lambda} \sigma\sqrt{1+\eta_x^2}\mathrm{d}x = \sigma\lambda + \int_{x_1}^{x_1+\lambda} \frac{1}{2}\sigma\eta_x^2\mathrm{d}x + O(a^4) \qquad (5)$$

Første ledd på høyre side er likevektsbidraget $\Rightarrow$

$$E_p^k = \frac{1}{\lambda}\int_{x_1}^{x_1+\lambda} \frac{1}{2}\sigma\eta_x^2\mathrm{d}x + O(a^4) = \frac{1}{4}\sigma k^2 a^2 + O(a^3) \qquad (6)$$

Summasjon av bidrag til den potensielle energien

$$E_p^t + E_p^k = \frac{1}{4}\rho g a^2\left(1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g}\right) + O(a^3) = E_k + O(a^3) \qquad (7)$$

# Flukser

Transport av potensiell energi i tyngdefeltet, kinetisk energi og effekten av trykkets arbeid samles.

$$q_1 = \int_{-H}^{\eta} (\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho g z + p) u \mathrm{d}z \qquad (8)$$

Uttrykket forenkles vha. Eulers trykklikning (K2.7) med $p_a = 0$:

$$f_1 = -\int_{-H}^{\eta} \rho\phi_t\phi_x \mathrm{d}z = -\int_{-H}^{0} \rho\phi_t\phi_x \mathrm{d}z + O(a^3) \qquad (9)$$

Den midlere fluksen regnes så ut ved:

$$F_1 = -\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T}\int_{-H}^{0} \rho\phi_t\phi_x \mathrm{d}z\mathrm{d}t + O(a^3) \qquad (10)$$

Transport pga. kappilar-spenningene.

$f_2$ = advek. kap. energi + effekt av kap.-spenning i snitt

$$f_2 = \sigma[(1+\eta_x^2)^{\frac{1}{2}}u-(1+\eta_x^2)^{-\frac{1}{2}}(u+\eta_x w)]_{z=\eta} = -\sigma\eta_x\phi_z|_{z=0}+O(a^3) \quad (11)$$

Definisjon av gruppehastighet.

Midler vi $f_2$ (gir $F_2$) over en periode og regner sammen $F = F_1 + F_2$ får vi et resultat som hensiktsmessig kan skrives:

$$F = c_g E \quad (12)$$

der $c_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ er gruppehastighet.

(12) med uttrykk for $c_g$ er en generell sats

# Energi-ekvipartisjon (equipartition of energy).

Uttrykkene for tettheter gir

$$E_k = E_p,$$

Midlere potensiell og kinetisk energi er like. Dette er en generell egenskap for lineære bølger.
(Det gjelder også for en pendel i tyngdefeltet med små utslag)

# Konserveringslover.

Konserveringslov på *integrert* form, for et volum $\Omega$, kan skrives:

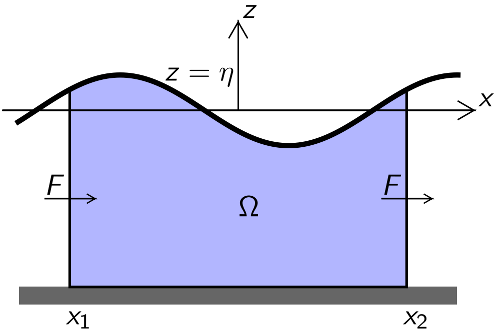
$$\int_{\Omega} \varepsilon_t \mathrm{d}\Omega = -\int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}A \tag{13}$$

der $\Sigma$ er flaten som omslutter $\Omega$. Lar vi $\Omega$ krympe til et punkt og benytter Gauss sats får vi konserveringsloven på *differensialform*:

$$\varepsilon_t = -\nabla \cdot \vec{q} \tag{14}$$

Leibniz sats kan brukes til å flytte tidsderivasjon utenfor integral i (13)

# Kontrollvolum.




Integrert energilikning for området:

$$\frac{d}{dt}(e_p + e_k + e_p^{(k)}) = F|_{x=x_1} - F|_{x=x_2} \tag{15}$$

$e_p$, $e_k$, $e_p^{(k)}$ integrerte energier i $\Omega$.
Mål: grunnlikninger, manupulering, tolkning $\Rightarrow$ (15)

Bevegelseslikningen for en ideell væske:

$$\rho \vec{v}_t = -\nabla p - \rho \nabla (\frac{1}{2} \vec{v}^2) - \rho \nabla \Phi \tag{16}$$

der virvelfriheten er brukt til å omskrive det konvektive leddet. (16) multipliseres med hastigheten og integreres over $\Omega$. Gauss sats og divergensfrihet gir:

$$\int_\Omega (\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2)_t d\Omega = -\int_r ( \quad p + \frac{1}{2}\rho \vec{v}^2 + \rho \Phi \quad ) \vec{v} \cdot \vec{n} ds \tag{17}$$

$$(i) \quad (ii) \quad (iii) \tag{18}$$

der $r$ betegner den delen av randa som utgjør den fri overflaten og de vertikale snitt ved $x_1$ og $x_2$.
I (17) gjenkjennes allerede kinetisk energi til venstre.

Tidsderivasjon utenfor integral vha. en utgave Leibniz sats (bare tidsvariasjon av overflaten):

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} G d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial t} d\Omega + \int_{x_1}^{x_2} G|_{z=\eta} \vec{v}\cdot\vec{n} ds \tag{19}$$

Her

$$\int_{\Omega} (\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2)_t d\Omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega} (\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2) d\Omega - \int_{x_1}^{x_2} (\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2)|_{z=\eta} \vec{v}\cdot\vec{n} ds \tag{20}$$

og

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \Phi d\Omega = \int_{x_1}^{x_2} \Phi|_{z=\eta} \vec{v}\cdot\vec{n} ds, \tag{21}$$

fordi $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$.

Innsetting i (17): siste ledd i (20) og (ii) kansellerer fra (21) ledd (iii) $\Rightarrow$ volumintegral av tyngdepotensiale

$$\frac{d}{dt}(e_p + e_k) = -\int_{x_1}^{x_2} p\vec{v}|_{z=\eta} \cdot \vec{n} ds + I_1 - I_2 \tag{22}$$

der

$$e_k = \int_{\Omega} \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 d\Omega \qquad e_p = \int_{\Omega} \rho\Phi d\Omega \tag{23}$$

$$I_i = \int_{-H}^{\eta} \{(p + \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho\Phi)u\}|_{x=x_i} dz \tag{24}$$

På plass: alt utenom kappilarbidrag som må komme fra første ledd på h.s. av (22)

# Pure gravity waves, results

Expression for $I_i$ contains, in sequence:

1. Effect of pressure in vertical transect
2. Advection of kinetic energy in vertical transect
3. Advection of potential energy in gravity field in vertical transect

Hence, when $\sigma = 0$ we have $I = F$.
Moreover, when $\sigma = 0$ the first term on rhs. of (22) vanishes.
Hence, we have shown the simplified version of (15)

$$\frac{d}{dt}(e_p + e_k) = F|_{x=x_1} - F|_{x=x_2}$$

First term on rhs. of (22) can be rewritten to yield $e_p^{(k)}$ term as well as contribution to $F$.
Details follow after "EXTRA" flag, but will not be required.

Definition of vertically integrated energy densities, $E_k^{(i)}$ and$E_p^{(i)}$

$$e_k = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 d\Omega = \int\limits_{x_1}^{x_2} E_k^{(i)} dx, \quad \text{where} \quad E_k^{(i)} = \int\limits_{-H}^{\eta} \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 dz \quad (25)$$

$$e_p = \int\limits_{\Omega} \rho\Phi d\Omega = \int\limits_{x_1}^{x_2} E_p^{(i)} dx, \quad \text{where} \quad E_k^{(i)} = \int\limits_{-H}^{\eta} \rho\Phi dz \quad (26)$$

$I$ on preceding slides are vertically integrated fluxes, now renamed $F^{(i)}$. Dividing (15) by $x_2 - x_1$ and forming the limit $x_2 - x_1 \to 0$ we obtain the depth integrated energy equation

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_p^{(i)} + E_k^{(i)}) = -\frac{\partial F^{(i)}}{\partial x} \quad (27)$$

The averaged quantities, $E_k$ etc, may then be obtained by inserting the wave mode solution in $E_k^{(i)}$ etc., removing the equilibrium contribution, make the appropriate approximations and average over $t$ or $x$.

EXTRA

# Kappilarbidragene

Siste steg: omskrivning av overflateintegral med $p$.
Dynamisk randbetingelse ved $z = \eta$

$$p\vec{n} = -\sigma \frac{\partial \vec{s}}{\partial s} \Rightarrow p = -\frac{\sigma \eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{28}$$

Delevis integrasjon

$$-\int_{x_1}^{x_2} p\vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sigma \vec{v} \cdot d\vec{s} = (\sigma \vec{v} \cdot \vec{s})|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \sigma \vec{s} \cdot d\vec{v} \tag{29}$$

Første ledd på h.s. er effekt av kapilarspenning i snitt.
Siste ledd må gi tidsendring av tetthet og adveksjon av potensiell kappilar enegi og må omskrives.

## Kappilarenergi

$$e_p^{(k)} \equiv \sigma L = \int_{x_1}^{x_2} \sigma \, ds = \int_{x_1}^{x_2} \sigma s_x \, dx, \quad \mathrm{der} \quad s_x = \sqrt{1 + \eta_x^2} \qquad (30)$$

Tidsderivasjon

$$\frac{\mathrm{d}e_p^{(k)}}{\mathrm{d}t} = \sigma \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma \eta_x \eta_{xt}}{s_x} dx \qquad (31)$$

## Omskrivning siste ledd i (29)

Definisjoner: $\hat{u} = u(x, \eta, t)$, $\hat{w} = w(x, \eta, t)$

Kinematisk betingelse: $\hat{w} = \eta_t + \hat{u}\eta_x \Rightarrow \hat{w}_x = \eta_{xt} + \ldots$

Bruker $d\vec{v} = (\vec{\imath}\hat{u}_x + \vec{k}\hat{w}_x)dx$ og ordner[b]

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \sigma\vec{s} \cdot d\vec{v} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sigma\left(\frac{\eta_x\eta_{xt}}{s_x} + \frac{\partial}{\partial x}(s_x\hat{u})\right)dx$$

$$= \frac{\mathrm{d}e_p^{(k)}}{\mathrm{d}t} + (\hat{u}\sigma s_x)|_{x_1}^{x_2}$$

der det siste leddet er adveksjon av kappilarenergi.

[b] Alternativ: Geometrisk kan en se at $\vec{s} \cdot d\vec{v}$ svarer til materiell forlengelse. Tidsendring av $L$ oppnås ved a korrigere for transport av buelengde $(s_x\hat{u})$ inn/ut av $\Omega$.

# Totale flukser

Samles alt får vi (15) med energifluks:

$$F = \int_{-H}^{\eta} \{(p + \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho\Phi)u\}dz + \sigma u|_{z=\eta}\frac{\partial s}{\partial x} - \sigma\vec{v}\cdot\vec{s} \qquad (32)$$

Ved bruk av Eulers trykklikning kan $F$ forenkles ytterligere:

$$F = -\int_{-H}^{\eta} \phi_t\phi_x dz + \sigma u|_{z=\eta}\frac{\partial s}{\partial x} - \sigma\vec{v}\cdot\vec{s} \qquad (33)$$

Ved innsetting av lineær løsning etc. gjenskapes tidligere resultater.