9 Tillegg Me302: Stokes bølger.

9.1 Introduksjon.

Stokes bølger er betegnelsen på periodiske bølger av permanent form, på uendelig og endelig dyp, og er en av de klassiske ikke-lineære løsninger for overflatebølger. Selve løsningen ble presentert første gang i 1847, mens stabilitet, modulasjoner av løsningen etc. har vært et poulært tema i litteraturen de siste tiår.

Rent matematisk er Stokes bølger et eksempel på Poincaree–Lindstedts metode.

9.2 Grunnlikinger, skalering.

Når vi neglisjerer effektene av viskositet og overflatespenning vil bølger på overflaten av en uendelig dyp, inkompressibel væske være styrt av likningene

$$\zeta^*{}_{t^*} + \phi^*{}_{x^*}\zeta^*{}_{x^*} = \phi^*{}_{z^*}, \quad z^* = \zeta^*; \tag{1}$$

$$\phi^*{}_{t^*} + \frac{1}{2}(\nabla^*\phi^*)^2 + g\zeta^* = 0, \quad z^* = \zeta^*; \tag{2}$$

$$(\nabla^*)^2\phi^* = 0, \quad z^* < \zeta^*; \tag{3}$$

$$\nabla^*\phi^* \to 0, \quad z^* \to -\infty; \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

der g er tyngdens akselerasjon, $z^* = \zeta^*$ angir den fri overflaten og ϕ^* er hastighetspotensialet. Vi har videre antatt todimensjonal bevegelse og merket størrelser med dimensjon med stjerne.

Vi søker en periodisk bølgeløsning av settet ovenfor. Denne løsningen velger vi å beskrive ved en bølgelengde λ^* og en karakteristisk amplitude, a^*, som velges presist siden. Perioden T^* er nå å betrakte som en ukjent på linje med overflatehevning og hastighetspotensial. Fra disse størrelsene avleder vi et bølgetall $k^* = 2\pi/\lambda^*$, en frekvens $\omega^* = 2\pi/T^*$ og en fasehastighet $c^* = \omega^*/k^*$. I tillegg til feltstørrelsene ζ^* og ϕ^* har vi nå 4 parametere:

$$k^*, \quad a^*, \quad g, \quad c^* \tag{6}$$

Dette gir to dimensjonsløse tall og c^* kan uttrykkes:

$$c^* = U^* f(\epsilon) \tag{7}$$

der $U^* \equiv \sqrt{g/k^*}$ er den lineære fasehastigheten, f er en ukjent funksjon og

$$\epsilon \equiv a^* k^* \tag{8}$$

er det dimensjonsløse tallet som ikke inneholder c^*. ϵ er et mål for ikkelineæriteten og kalles *bølgesteilhet*. Vi innfører nå dimensjonsløse variable:

$$\begin{array}{lll} z = k^* z^* & x = k^* x^* & t = k^* U^* t^* \\ \zeta^* = a^* \zeta & \phi^* = U^* a^* \phi & \end{array} \tag{9}$$

9.3 Bølger av permanent form, lineær løsning

Vi antar at bølgene har permanent form og beveger seg i positiv x-retning. Feltstørrelsene kan da skrives:

$$\zeta = \zeta(\theta) \qquad \phi = \phi(\theta, z), \tag{10}$$

der fasevariablen θ er definert som:

$$\theta = x - ct \tag{11}$$

Vi lar indekser etter komma betegne deriviasjoner og finner fra likning (1) tom. (4):

$$-c\phi_{,\theta} + \frac{1}{2}\epsilon(\phi_{,\theta}^2 + \phi_{,z}^2) + \zeta = 0 \tag{12}$$

$$-c\zeta_{,\theta} + \epsilon\zeta_{,\theta}\phi_{,\theta} = \phi_{,z} \tag{13}$$

som randbetingelser ved $z = \epsilon\zeta$,

$$\phi_{,\theta\theta} + \phi_{,zz} = 0 \tag{14}$$

som likning i væskeområdet $z < \epsilon\zeta$ og

$$\phi_{,\theta},\ \phi_{,z} \to 0 \tag{15}$$

som betingelser når $z \to -\infty$.

Vi ser umiddelbart at dersom ledd proporsjonale med ϵ sløyfes får vi et lineært problem. For små ϵ søker vi løsninger i form av potensrekker i ϵ:

$$\zeta = \zeta_0(\theta) + \epsilon\zeta_1(\theta) + \epsilon^2\zeta_2(\theta) + \cdots \tag{16}$$

$$\phi = \phi_0(\theta, z) + \epsilon\phi_1(\theta, z) + \epsilon^2\phi_2(\theta, z) + \cdots \tag{17}$$

$$c = c_0 + \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \cdots \tag{18}$$

der alle ϕ_i og ζ_i skal være periodiske i θ. Disse rekkene settes inn i likningene (12) tom. (15) som så ordnes etter potenser av ϵ. Når vi så krever at uttrykket foran hver potens skal forsvinne ender vi opp med et hierarki av likninger for ζ_i og ϕ_i. Koeffisentene i utviklingen av c bestemmes fra kravet om at det skal eksistere løsninger på angitt form, dvs. at ζ_i og ϕ_i skal være periodiske. Utviklingen av randbetingelsene blir noe komplisert på grunn av den fri overflaten. For eksempel må vi utvikle leddet $c\phi_{,\theta}$ i (12) gjennom flere trinn:

$$\begin{aligned}
c\phi_{,\theta}|_{z=\epsilon\zeta} &= c(\phi_{,\theta} + \epsilon\phi_{,\theta z}\zeta + \frac{1}{2}\epsilon^2\phi_{,\theta zz}\zeta^2 + \cdot\cdot)|_{z=0} \\
&= (c_0 + \epsilon c_1 + \cdot\cdot)\Big((\phi_{0,\theta} + \epsilon\phi_{1,\theta} + \cdot\cdot) + \epsilon(\phi_{0,\theta z} + \epsilon\phi_{1,\theta z} + \cdot\cdot)\zeta + \frac{1}{2}\epsilon^2\phi_{0,\theta zz}\zeta^2 + \cdot\cdot\Big)|_{z=0} \\
&= c_0\phi_{0,\theta} + \epsilon(c_0\phi_{1,\theta} + c_1\phi_{0,\theta} + c_0\phi_{0,\theta z}\zeta_0) \\
&\quad + \epsilon^2(c_0\phi_{2,\theta} + c_1\phi_{1,\theta} + c_2\phi_{0,\theta} + c_1\phi_{0,\theta z}\zeta_0 + c_0\phi_{0,\theta z}\zeta_1 + \frac{1}{2}c_0\phi_{0,\theta zz}\zeta_0^2 + c_0\phi_{1,\theta z}\zeta_0) + \cdot\cdot
\end{aligned}$$

Som vi ser blir utrykkene raskt svært kompliserte. Til laveste orden blir likningssettet:

$$\begin{aligned}
-c_0\phi_{0,\theta} + \zeta_0 = 0 &\qquad \text{for} \quad z = 0 \\
c_0\zeta_{0,\theta} + \phi_{0,z} = 0 &\qquad \text{for} \quad z = 0 \\
\phi_{0,\theta\theta} + \phi_{0,zz} = 0 &\qquad \text{for} \quad z < 0 \\
\phi_{0,\theta}, \phi_{0,z} \to 0 &\qquad \text{for} \quad z \to -\infty
\end{aligned} \tag{19}$$

Som gir en periodisk løsningen på formen:

$$\zeta_0 = \cos\theta \quad \phi_0 = e^z \sin\theta \quad c_0 = 1 \tag{20}$$

Dette er den lineære løsningen for periodiske tyngdebølger på dypt vann som er gitt i kompendiet. I og med at vi har satt maksimum av ζ_0 lik 1 har vi i realiteten valgt amplitudefaktoren a^*. For å få en entydig utvikling må vi i det etterfølgende kreve at ledd som $\cos\theta$ eller $\sin\theta$ ikke inngår i ζ_1, ζ_2 etc.

9.4 Ikkelineær løsning

Til orden ϵ får vi likningssettet:

$$\begin{array}{lll} -c_0\phi_{1,\theta} + \zeta_1 = c_1\phi_{0,\theta} - \frac{1}{2}(\phi_{0,\theta}^2 + \phi_{0,z}^2) + c_0\phi_{0,\theta z}\zeta_0 & \text{for} \quad z = 0 & \text{(a)} \\ c_0\zeta_{1,\theta} + \phi_{1,z} = -c_1\zeta_{0,\theta} + \zeta_{0,\theta}\phi_{0,\theta} - \phi_{0,zz}\zeta_0 & \text{for} \quad z = 0 & \text{(b)} \\ \phi_{1,\theta\theta} + \phi_{1,zz} = 0 & \text{for} \quad z < 0 & \text{(c)} \\ \phi_{1,\theta}, \phi_{1,z} \to 0 & \text{for} \quad z \to -\infty & \text{(d)} \end{array} \tag{21}$$

Når ϕ_0 og ζ_0 er kjent gir dette et lineært likningsett med samme venstreside som for laveste orden, men der løsningen til laveste orden viser seg som inhomogeniteter. Dette vil gjenta seg til høyere ordner og den totale løsningen kan da finnes steg for steg. Elimineres ζ_1 mellom (21)(a) og (21)(b) får vi etter insetting fra (20):

$$\phi_{1,\theta\theta} + \phi_{1,z} = 2c_1 \sin\theta \tag{22}$$

Det kan vises at en periodisk løsning av denne og (21)(c,d) er mulig bare dersom $c_1 = 0$. Dette kan gjøres på flere vis. Vi nevner her to:

1. Vi multipliserer (22) med ϕ_0 og integrerer over en bølgelengde:

   $$2\pi c_1 = \int_0^{2\pi} \phi_0\phi_{1,\theta\theta}\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} \phi_0\phi_{1,z}\mathrm{d}\theta \tag{23}$$

   Både ϕ_0 og ϕ_1 er periodiske og løsninger av Laplace likning. Ved bruk av Stokes' sats kan vi da vise: $\int_0^{2\pi} \phi_0\phi_{1,z}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \phi_{0,z}\phi_1\mathrm{d}\theta$. Videre kan vi anvende delevis-integrasjon på det første integralet i (23). Periodisiteten får randleddene til å forsvinne og vi ender opp med:

   $$2\pi c_1 = \int_0^{2\pi} \phi_1(\phi_{0,\theta\theta} + \phi_{0,z})\mathrm{d}\theta \tag{24}$$

   Setter vi inn for ϕ_0 følger nå $c_1 = 0$.

2. Vi benytter at løsningen for ϕ må ha formen (27) (se nedenfor) pga. periodisitet og (21). Setter vi rekken inn i (22) følger at c_1 må være null.

Vi merker oss forøvrig at inhomogeniteten i (22) har samme form som et resonant pådrag i form av feks. et overflatetrykk. Løsningen til første orden blir nå:

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}\cos 2\theta \qquad \phi_1 = 0 \tag{25}$$

Dersom vi regner videre til neste orden vil vi få $c_2 = \frac{1}{2}$, mens vi må enda videre for å finne korreksjoner på ϕ. Ut fra svarene så langt og formen på de ikke-lineære ledd kan vi anta at hele utviklingen har formen:

$$\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \epsilon^k \cos(k+1)\theta \tag{26}$$

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \epsilon^k e^{(k+1)z} \sin(k+1)\theta \tag{27}$$

der vi har forutsatt null midlere vannstandshevning og hastighet. At feltstørrelsene kan uttrykkes ved Fourier-rekker kan vi naturligvis slutte direkte av antagelsen om periodisitet. Mindre opplagt er det at vår formelle utviklingen etter ϵ direkte gir denne Fourier-rekka. Stokesbølge-utviklingen har ved ulike spesielle teknikker blitt ført svært langt. En har funnet at den høyeste Stokesbølge som er mulig har $\epsilon \approx 0.44$. I likhet med den ekstreme solitærbølge har denne spisse topper med en indre vinkel på 120°.

Dersom vi går tilbake til størrelser med benevning, får vi fasehastigheten:

$$c^* = \sqrt{\frac{g}{k^*}} \left(1 + \frac{1}{2}(a^* k^*)^2 + \cdots\right) \tag{28}$$

Bølgehastigheten øker altså med bølgesteilheten. For midlere massetransport kan vi sette opp uttrykket:

$$Q^* = \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} \int_{-\infty}^{\zeta^*} u^* dz^* dt^* = \frac{1}{2k^*} \sqrt{\frac{g}{k^*}} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) > 0 \tag{29}$$

Vi ser at i motsetning til lineær teori gir Stokesbølgen en netto massetransport, *Stokes drift*, i bølgens forplantningsretningen.

9.5 Stabilitet av Stokesbølger.

Det vakte stor oppsikt da Benjamin og Feir i 1967 viste at Stokesbølgen alltid er instabil på uendelig dyp. De viste at en perturbasjon som bestod av en kortere og en lengre bølgelengde enn Stokesbølgens ville vokse opp. (side-band instability). Følgen blir at Stokesbølgen blir modulert – noen topper vokser andre avtar. Hva som i siste instans blir resultatet er ennå ikke fullstendig klarlagt og det er stadig stor aktivitet på dette feltet. For små bølgesteilheter er imidlertid denne instabiliteten svært langsom. Stokesbølger med stor steilhet ($\epsilon \sim 0.2$) vil også være instabile mhp. vekst av tverrmoder, slik at bevegelsen blir tredimensjonal.

9.6 Beskrivelse av modulerte Stokesbølger.

Utviklingen i første seksjon kan utvides til å inbefatte også en langsom tidsvariasjon ved:

$$2\zeta = A(x,t)e^{i(kx-\omega t)} + \epsilon A_2(x,t)e^{2i(kx-\omega t)} + \cdots + c.c. \tag{30}$$

der A, A_1 etc. varierer langsomt mhp. x og t. En kan da utlede en likning bare for A (se feks. C.C. Mei: The applied dynamics of ocean surface waves):

$$i\frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}|A^2|A = 0 \tag{31}$$

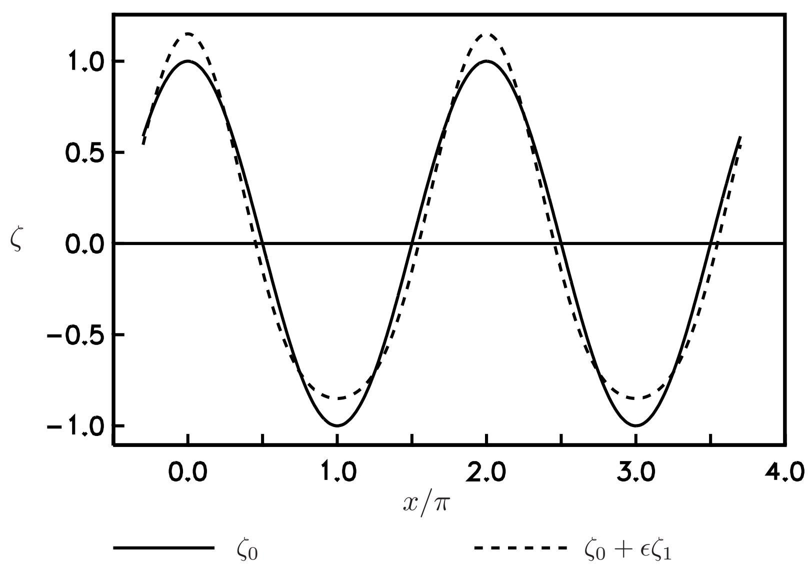

Figure 1: Overflatehevningen for en Stokesbølge med steilhet $\epsilon = 0.3$. Vi ser at toppen blir krappere og bunnen slakere i den ikke-lineære løsningen.

der $\tau = \epsilon t$ og $\xi = \epsilon(x - c_g t)$ hvor c_g er lineær gruppehastighet for bølgetall k. Denne likningen kalles den kubiske Schrödinger likningen og kan blant annet brukes til å studere Benjamin–Feir instabiliteten. I C.C. Mei: The appl... benyttes den også til å beskrive omhyllingsolitoner.