OPPGAVER I ME302, 1998.

H. JOHNSGARD og G. PEDERSEN
Avdeling for Mekanikk, Matematisk Institutt
avdeling for mekanikk.

November 24, 2014

1 Dispersjonsrelasjoner

Nedenfor er gitt en serie ligninger. Hvilke har løsninger på formen
$\eta = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)}$? Finn og drøft relasjonen mellom ω og $\vec{k}$. Hvilke er bølgeligninger?

(a) $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = c_0^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$

(b) $\frac{\partial\eta}{\partial t} = c_0^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$

(c) $\frac{\partial\eta}{\partial t} = c_0\frac{\partial\eta}{\partial x} + \epsilon\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}$

(d) $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + a\frac{\partial\eta}{\partial t} = c_0^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$

(e) $\frac{\partial^4\eta}{\partial t^4} - \frac{\partial^4\eta}{\partial t^2\partial x^2} + \epsilon\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} = 0$

(f) $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \nabla^2\eta + \frac{\epsilon}{3}\nabla^2\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$

(g) $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial\eta}{\partial x})$

(h) $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\mu^2}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = 0$

2 Svingninger i basseng

Et basseng har lengde L og konstant dyp h. Bølgebevegelsen i bassenget antas å være godt beskrevet ved lineær potensialteori. I bassengets endepunkter har η null normalderivert. (Hva betyr det fysisk?)

Initialbetingelsen er gitt ved

$$\eta(x,0) = \frac{A}{f^4}(x+f)^2(x-f)^2 \qquad (1)$$

for $-f < x < f$, $\eta(x,0) = 0$ i resten av bassenget. Bevegelsen starter fra ro.

(a) Skisser initialbetingelsen og finn en passende fourierrepresentasjon av $\eta(x,t)$. (Fourierkoeffisienter skal regnes ut).

(b) Kan denne løsningsmetoden generaliseres til $3-D$. Forklar i så fall hvordan.

3 Standard bølgelikning og initialbetingelser

En funksjon η er definert for alle x og oppfyller likningen gitt i oppgave 1a. Hvor mange initialbetingelser er nødvendig for å sikre en entydig løsning? Gi et eksempel på et slikt sett av initialbetingelser. Finn løsningen ved et vilkårlig senere tidspunkt. Gjenta dette for 1c med $\epsilon = 0$. Diskuter tilfellet $\epsilon \neq 0$.

4 Bølger fra initiell forstyrrelse.

Vi har gitt Klein-Gordon likningen på formen:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + q\eta = 0 \tag{2}$$

som gjelder for $t > 0$ og $-\infty < x < \infty$. Bølger genereres fra den initielle forstyrrelsen:

$$\eta(x, 0) = A_0 e^{-\left(\frac{x}{L}\right)^2}; \quad \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

Finn en tilnærmet løsning for store x og t og diskuter hvor denne er gyldig.

5 Refleksjon fra hylle

Et bunnprofil er gitt ved

$$h = \begin{cases} h_1 & x < 0 \\ h_2 & x > 0 \end{cases} \tag{4}$$

Vi antar at lineær, hydrostatisk gruntvannsteori gjelder både til høyre og til venstre for spranget ($x = 0$). Ved spranget antar vi at overflatehevning og massefluks er kontinuerlig.

En sinusodial bølge med amplitude A og frekvens ω kommer inn mot spranget fra venstre. Finn de reflekterte og de transmitterte bølgene.

6 Refleksjon fra skråning

Vi har gitt en dybdefunksjon

$$h = \begin{cases} h_1 & x < 0 \\ h_1 - \frac{x}{L}(h_1 - h_2) & 0 < x < L \\ h_2 & x > L \end{cases} \tag{5}$$

Vi antar at lineær hydrostatisk gruntvannsteori gjelder for alle x. Fra området til venstre for bunnvariasjonene, $x < 0$, kommer det inn en sinusformet bølge med amplitude A og frekvens ω. Finn det resulterende bølgesystemet.

Du vil få bruk for å derivere de to lineært uavhengige løsningene av Bessels differensialligning til nullte orden:

$$\frac{\partial J_0}{\partial x} = -J_1, \quad \frac{\partial Y_0}{\partial x} = -Y_1.$$

For å drøfte ulike grensetilfeller trenger du formlene

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}), \quad Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}),$$

for store x og

$$J_0(x) \sim 1, \quad J_1(x) \sim \frac{1}{2}x, \quad Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln x, \quad Y_1(x) \sim -\frac{2}{\pi x},$$

for små x.

7 Refleksjon av puls fra hylle

Et bestemt bunnprofil er gitt ved

$$h = \begin{cases} h_1 & x < 0 \\ h_2 & x > 0 \end{cases} \tag{6}$$

Vi antar at lineær, hydrostatisk gruntvannsteori gjelder på begge sider av spranget ($x = 0$). En bølgepuls kommer fra venstre og er gitt ved

$$\eta(s) = \begin{cases} 0 & s < -L \\ A\cos^2(\pi \frac{s}{2L}) & -L < s < L \\ 0 & L < s \end{cases} \tag{7}$$

der $s = x - c_1 t$. Vi antar at pulsen, etter interaksjon med spranget, spaltes i en transmittert og en reflektert puls. Vi antar videre at begge pulsene har tilsvarende form som den innkommende, men med andre verdier på L og A. Hvilke lengder bør disse bølgepulsene ha? Finn amplitudene ved å kreve konservering av masse og energi.

8 Bølger over parabolsk bunn; stråleteori

En bunntopografi er gitt ved $h(x) = h_0(\frac{x}{l})^2$. Vi antar at lineær, hydrostatisk gruntvannsteori gjelder og at bølgen er monokromatisk i tiden (bare en frekvens).

(a) Bruk stråleteori til å bestemme fasefunksjonen χ.

(b) Gi en tolkning av uttrykket $\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x}\lambda$. Hvilket krav må vi legge på $\frac{\omega l}{\sqrt{g h_0}}$ for at stråleteorien skal være gyldig?

(c) Søk en løsning av gruntvannsligningen på formen $\eta = e^{i\omega t} x^q$. Sammenlign med resultatet vi fant ved hjelp av stråleteori.

9 Bølgegenerator; telling av topper

I den ene enden av en bølgerenne genereres bølger med lengde $\lambda = 1$ m. Bølgegeneratoren har stått på i 100 sekunder. Anslå antall bølgetopper i renna i de tre tilfellene der væskedypet er $h = 4$ m, $h = 0.5$ m og $h = 0.1$ m. Renna antas å være lang nok til at refleksjoner fra motsatt ende ikke inntreffer.

10 Bølgegenerator; selvfokusering

I den ene enden av en bølgerenne genereres det bølger med frekvensen $f(t)$. Frekvensen er 10 Hz når bølgegeneratoren slås på og 1 Hz når den slås av, 100 sekunder senere. Vi ønsker å konsentrere mest mulig bølgeenergi på et bestemt punkt i bølgerenna. Bruk stråleteori til å finne den optimale formen på $f(t)$. Finn punktet der energien konsentreres og tidspunktet dette inntreffer på . Renna antas å være så lang at refleksjoner fra motsatt ende ikke finner sted, og dypet er mye større enn lengden på de genererte forstyrrelsene.

Fungerer stråleteorien godt her? Vil metoden du har anvendt fungere i tilfeller der væskedypet er mye mindre enn lengden av de bølgene som genereres?

11 Energiomsetning i lange bølger på grunt vann

Vi skal i denne oppgaven anta ikke-lineær langbølgeteori.

(a) Finn energitettheten E pr horisontal flateenhet ved direkte utregning. (Energien i vertikale søyler med vann.)

(b) Finn de horisontale komponentene av energifluksen $\vec{F}$ integrert opp over hele dypet.

(c) Hvilken relasjon må eksistere mellom E og $\vec{F}$? Vis ved innsettning at dette stemmer her.

(d) Vi antar nå flat bunn, lineære forhold og en harmonisk, progressiv bølge. Vis hvordan midlede utgaver av E og $\vec{F}$ nå kan relateres ved hjelp av gruppehastigheten.

12 Langsomt varierende bølgekilde

Vi tar utgangspunkt i plane, nesten periodiske bølger i et homogent medium. Lineære forhold gjelder, og bølgene forplanter seg i positiv $x-$ retning. Dispersjonsrelasjonen er gitt ved $\omega = \frac{1}{3}k^3$. Ved $t = 0$ er den lokale bølgelengden gitt ved
$\lambda = a(2 + \tanh(bx))$.

(a) Vi skal anvende stråleteori, hvilke krav legger dette på parametrene a og b.

(b) Bruk stråleteori og karakteristikk-metoden til å estimere den lokale bølgelengden for alle x ved et vilkårlig senere tidspunkt. En vanskelig algebraisk ligning vil oppstå her, denne skal ikke løses.

13 Bølger med skrått infall.

Det er gitt et dyp som er uavhengig av y-retning, dvs. dyp $h = h(x)$. Vi skal studere hvordan lange harmoniske bølger oppfører seg over denne bunnen. Bølgene skal ha skrått infall, hvilket betyr at bølgetallet har en komponent i y-retning.

a Finn hvordan amplituden varierer vha. fysisk optikk (transportlikningen). Er det riktig at en bølge alltid amplifiseres når den kommer inn på grunnere vann?

b Diskuter hva som skjer med amplituden når en bølge beveger seg ut på dypere vann.

14 Lange bølger på et sprangsjikt

Vi har en friksjonsfri væske med to lag som ikke er blandbare. Videre antar vi at trykket i væsken er hydrostatisk, med null trykk på fri overflate og at bevegelsen foregår i et vertikalt plan. Ved $t = 0$ er horisontalkomponenten av hastigheten uavhengig av den vertikale koordinaten. Vi lar h_1 og h_2 være tykkelsene av øvre og nedre lag ved likevekt. η_1 og η_2 er vertikalforskyvningene av fri overflate og skilleflaten, og u_1 og u_2 er horisontalkomponentene av hastighetene i øvre og nedre lag. Tyngdens akselerasjon er g, og den relative tetthetsforskjellen mellom lagene er $\epsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$. Bevegelsen vil da være styrt av følgende ligninger:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = -g(1-\epsilon) \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - g\epsilon \frac{\partial \eta_2}{\partial x}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta_1 - \eta_2) = -\frac{\partial}{\partial x}\left((h_1 + \eta_1 - \eta_2)u_1\right) \tag{10}$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left((h_2 + \eta_2)u_2\right) \tag{11}$$

(a) Utled disse ligningene. Hva innebærer antagelsen om hydrostatisk trykk?

Anta i resten av oppgaven at vi har flat bunn og små utslag fra likevekt.

(b) Finn de harmoniske bølgeløsningene ligningssettet har. Vis at de faller i to klasser, og diskuter egenskapene de to modene har.

(c) Ligningssettet har løsninger i form av pulser som går med uendret form. Vis at vi har to moder av disse pulsene, som tilsvarer modene i (b). Vis ved hjelp av noen enkle skisser hvordan forskyvningen av overflaten og skilleflaten avhenger av parametrene i problemet. Illustrerer også grafisk hvordan bølgehastigheten avhenger av disse parametrene.

15 Bølgebrytning

En bølgepuls har initielt fasongen

$$\eta = \begin{cases} A(x+L)/L & -L < x < 0 \\ A(L-x)/L & 0 < x < L \end{cases} \tag{12}$$

$\eta = 0$ for $|x| > L$. Bølgen forplanter seg mot høyre. Væskedypet er konstant lik h. Vi antar at svakt ikke-lineær, hydrostatisk gruntvannsteori gjelder. Kun andre ordens ikkelineariteter skal tas med. Når bryter bølgen?

Forklar kort hvordan dette kan generaliseres til bølgepulser med vilkårlig form og vilkårlig sterk ikke-lineæritet.

16 Bølger på strøm.

For bølger på en langsomt varierende grunnstrøm, $\vec{U}$, kan vi anta en dispersjonsrelasjon på formen:

$$\omega = \sigma + \vec{k} \cdot \vec{U} \tag{13}$$

der σ er frekvensen vi ville hatt uten strøm, på engelsk kalt *intrinsic frequency*. Det siste leddet i (13) kalles Doppler-skiftet.

I resten av oppgaven studerer vi lange, lineære overflatebølger på grunt vann og antar at grunnstrømmen er gitt ved $\vec{U} \equiv -U(x)\vec{\jmath}$ der $\vec{\jmath}$ er enhetsvektoren i y-retning. Videre antas at U har en klokkefasong:

$$U = U_m e^{-\frac{x^2}{l^2}} \tag{14}$$

I en slik strøm kan vi ha fangede bølger.

a Gi en fysisk redegjørelse for fangningsmekanismen.

b Anta at vi har et gitt bølgetall i y-retning. Finn begrensninger på mulige ω for fangede moder ved stråleteori.

c Sett opp det fulle lineære egenverdi-problemet som bestemmer egenmodene.

17 Bølger fra initiell forstyrrelse2 ; stråleteori.

Vi har igjen gitt Klein-Gordon likningen (2) som i oppgave 4. Ved $t = 0$ antar vi en punktforstyrrelse ved $x = 0$. Bruk stråleteori til å bestemme fasefunksjonen ved store x og t. Sammenlikn med svaret fra oppgave 4.

18 Forstyrrelse på grunt vann.

Vi har gitt en dybdefunksjon:

$$h(x) = \begin{cases} h_0 x/L & \text{for} \quad x < L \\ h_0 & \text{for} \quad x \geq L \end{cases} \tag{15}$$

På et dyp $h = h_m < h_0$ har vi en bølgemaker som lager sirkelsymmetriske bølger med frekvens ω. For enkelhets skyld antar vi at all bølge energi som når land, $h = 0$, absorberes. Bruk stråleteori til å anslå hvor stor del av energien fra bølgemakeren som unnslipper (ut på dypt vann) når vi antar lange tyngdebølger. Diskuter kort modifikasjonene vi får ved å anta endelig dyp. Finn hvor mye av energien som unslipper dersom dypet går til uendelig.

19 WKBJ-metoden.

Fra oppgave 16(c) har vi at bølgebevegelsen i en planparallell grunnstrøm er styrt av likningen:

$$\left(\frac{\hat{\eta}_x}{P}\right)_x + (1 - \frac{k_y^2}{P})\hat{\eta} = 0; \quad P \equiv (\omega + U k_y)^2/(gh) \tag{16}$$

der grunnstrømmen U varierer med x og $\hat{\eta}$ relaterer seg til overflaten i hht.

$$\eta(x,y,t) = \mathrm{Re}\left(\hat{\eta}(x)e^{\imath(k_y y-\omega t)}\right) \tag{17}$$

Benytt WKBJ metoden til å finne tilnærmelser til $\hat{\eta}$. Hvor er de gyldige? Svarer resultatet til energikonservering i bølgebevegelsen?

20 Stokes bølger.

En ikke-lineær Klein-Gordon likning er gitt ved:

$$u_{tt} - u_{xx} + u - \epsilon u^3 = 0 \tag{18}$$

Likningen er skalert slik at $u = O(1)$ og ϵ er liten. Finn de første leddene i en "Stokes-bølge utvikling".

21 Internal Waves

In a stratified fluid we have the density

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 - \Delta\rho & \text{when} \quad z < -B \\ \rho_0 + \dfrac{\Delta\rho}{B} z & \text{when} \quad -B \le z \le B \\ \rho_0 + \Delta\rho & \text{when} \quad B < z \end{cases} \tag{19}$$

where the z-axis is pointing vertically downwards.

a

We wish to approximate the buoyancy frequency (Brunt-Väisälä), N, by a constant for $-B < z < B$. When is this justified ?

b

Internal modes due to the stratification is governed by

$$\hat{w}'' + k^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) \hat{w} = 0, \tag{20}$$

where $\hat{w}$ defines the vertical variation of the vertical velocity component, k is the wave number in the horizontal direction and ω is the frequency.
Show that, for the stratification in (19), modes are given by (20) combined with the boundary conditions

$$\left. \begin{array}{lll} \hat{w}' - k\hat{w} = 0 & \text{at} & z = -B \\ \hat{w}' + k\hat{w} = 0 & \text{at} & z = B \end{array} \right\} \tag{21}$$

c

Solve the eigenvalue problem from the preceding point to obtain implicit expressions for $\beta = \sqrt{\frac{N^2}{\omega^2} - 1}$. Show that there are two groups of modes, with $\hat{w}$ that are symmetric and anti-symmetric with respect to $z = 0$, respectively.

d

The dispersion relations may be represented as the intersections between a functions that are linear and periodic in β. Show this and explain why the symmetric modes have 1, 3, 5 etc. extrema in the interval $-B < z < B$, whereas the antisymmetric modes have 2, 4, 6 ...
Depict $\hat{w}$ for the lowest two modes of each kind.

e

Instead of an unbounded fluid we now assume a semi-unbounded one with a rigid lid at $z = -H$. Outline briefly how to find the modes in this case.