UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK 4100 — Matematiske metoder i mekanikk

Eksamensdag: Torsdag 12. juni 2014.

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Formelark.

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 20%)

En likning er gitt ved

$$x^2 - 3x + 2 = e^{-kx}, \tag{1}$$

og vi vil finne tilnærmede løsninger for store verdier av k.

1a (vekt 10%)

Forklar hvorfor løsningene er tilnærmet $x \approx 1$ og $x \approx 2$ når $k \to \infty$. Det kan være en god ide å tegne de to sidene i likning (1) for en stor verdi av k. Vi vil fortsette med den løsningen som ligger nær 1.
Innfør perturbasjonsrekken

$$x = 1 + x_1 + x_2 + ... \quad \text{der} \quad 1 \gg x_1 \gg x_2,$$

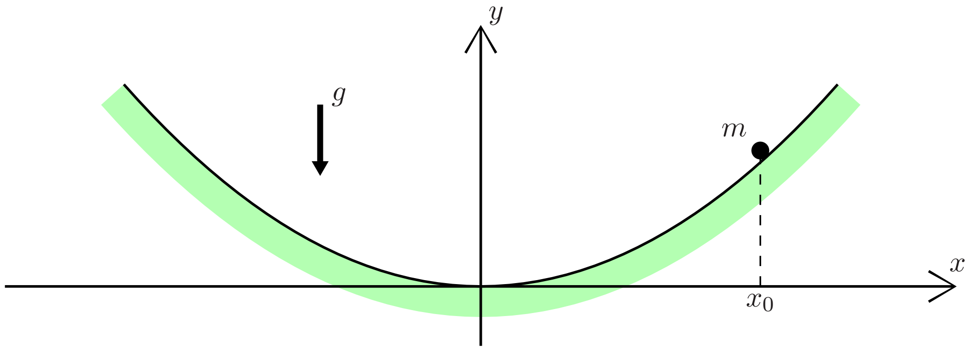
og bestem x_1 ved dominant-balanse betraktning.

1b (vekt 10%)

Finn x_2.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 (vekt 50%)



Føring med partikkel i initiell posisjon.

En partikkel, med masse m, glir i tyngdefeltet på en friksjonsfri føring $y = \frac{1}{2}\alpha x^2$. Bevegelsen foregår i xy-planet det y-aksen er vertikal og x-aksen horisontal. Ved tiden $t = 0$ er partikkelen i ro ved $x = x_0$.
NB: I denne oppgaven er det mulig å løse punkt d uten å løse punktene a-c

2a (vekt 10%)

Posisjonen av partikkelen, x, avhenger av de øvrige parameterene x_0, α, g, m og t. Vis at x kan uttrykkes

$$x = x_0 F(\pi_1, \pi_2),$$

der π_1 og π_2 er dimensjonsløse tall. Gi uttrykk for π_1 og π_2.

2b (vekt 10%)

Vi beskriver partikkelen ved koordinaten x. Finn Lagrangesfunksjonen og sett opp Lagrangeslikningen. Denne har et førsteintegral i dette tilfellet. Finn det og forklar hva det svarer til fysisk.

2c (vekt 10%)

Vi antar nå at partikkelen gjør små svingninger, dvs. at x_0 er liten i en eller annen forstand. Reskaler slik at Lagrangeslikningen fra forrige punkt gir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left((1+\epsilon z^2)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right) + z = 0, \tag{2}$$

og initialbetingelsen

$$z(0) = 1, \quad \frac{\mathrm{d}z(0)}{\mathrm{d}\tau} = 0, \tag{3}$$

(Fortsettes på side 3.)

der τ og z er hhv. dimensjonsløs tid og horisontal posisjon (x), mens ϵ er en liten parameter.
RETTELSE: Likning (2) er feil. Den korrekte likning er

$$\left((1+\epsilon z^2\right)\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\tau^2} + \epsilon z\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + z = 0. \tag{4}$$

Studentene fikk beskjed om at de kunne løse hvilken de ville av (2) og (4).

2d (vekt 20%)

Finn en periodisk approksimasjon til løsningen av (2) og (3), gyldig tom. orden ϵ.

Oppgave 3 (vekt 30%)

Et randverdiproblem er definert ved

$$\epsilon y'' - f(x)y = g(x), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2,$$

der f og g er gitte funksjoner som har Taylorekker i alle punkter. Funksjonene f og g er positive på intervallet $[0, 1]$ og ϵ er en liten parameter. Vi søker en tilnærmet løsning vha. grensesjiktsteori.

3a (vekt 10%)

Finn den ytre løsningen og forklar hvorfor vi må ha grensesjikt ved begge render.

3b (vekt 20%)

Finn en uniform tilnærmelse.

SLUTT