Solitoner; MEK4320.

Geir Pedersen

Seksjon for Mekanikk, Matematisk institutt, UiO.

October 22, 2015

Solitær bølge = enkeltbølge
J. Scott Russel (1834): Observasjoner i kanaler, eksperimenter

$$c = \sqrt{g(h + A)}$$

der g er tyngdens akselerasjon, h dypet ved likevekt og A amplituden.

J. Boussinesq (1871): Første fullstendige teoretiske beskrivelse.

1960-1980: Solitoner og deres egenskaper er motetema i fysikk –
Kollisjonsegenskaper (partikkelanalogi)
Generering fra initialbetingelser

Solitærbølge-løsningen.

KdV likningen (lengdeskala: likevektsdyp)

$$\eta_t + (1 + \frac{3}{2}\eta)\eta_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} = 0 \qquad (1)$$

Solitær bølge av permanent form

$$\eta(x,t) = \alpha\, Y(x - ct),$$

der $\max Y = Y(0) = 1$ og $Y(\xi)$, $Y'(\xi)... \to 0$ når $\xi \to \pm\infty$.
Dvs. α er amplitude/dyp og utstrekning er begrenset.
Bølgehastigheten, c, er ukjent.
Innsetting i (1)

$$-cY' + (1 + \frac{3}{2}\alpha Y)Y' + \frac{1}{6}Y''' = 0,$$

Siste likning integreres til

$$(1-c)Y + \frac{3}{4}\alpha Y^2 + \frac{1}{6}Y'' = K_1.$$

$Y(\xi)... \to 0$ når $\xi \to \pm\infty$ gir $K_1 = 0$.
Multiplisering med integrerende faktor Y'

$$(1-c)YY' + \frac{3}{4}\alpha Y^2 Y' + \frac{1}{6}Y''Y' = 0,$$

og

$$\frac{1}{2}(1-c)Y^2 + \frac{1}{4}\alpha Y^3 + \frac{1}{12}\left(Y'\right)^2 = K_2.$$

Betingelse i uendelig $\Rightarrow K_2 = 0$ og $\max Y = Y(0) = 1 \Rightarrow$ $c = 1 + \frac{1}{2}\alpha$. Antar vi $0 < Y < 1$ følger

$$Y' = \pm Y\sqrt{3\alpha(1-Y)}.$$

Separabel.

Discussion of sign

- $\xi \to \infty$: $Y \to 0$; must have $Y' = -Y\sqrt{3\alpha} \Rightarrow$ $Y = \mathrm{const} \times e^{-\sqrt{3\alpha}\xi}$.
- $\xi \to -\infty$: $Y \to 0$; must have $Y' = +Y\sqrt{3\alpha} \Rightarrow$ $Y = \mathrm{const} \times e^{+\sqrt{3\alpha}\xi}$.
- Only local extremeum when $Y = 1 \Rightarrow$ solution must grow from $\xi = -\infty$ to $\xi = 0$, then decrease to $\xi = \infty$.

$+$ in separated equation for $\xi < 0$, $-$ for $\xi > 0$. Solutions readily obtained and combined.

Solitærbølgeløsning av KdV likningen

$$\eta = \alpha\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3\alpha}(x-ct)\right), \quad c = (1+\frac{1}{2}\alpha). \tag{2}$$

where $\mathrm{sech} \equiv 1/\cosh$.

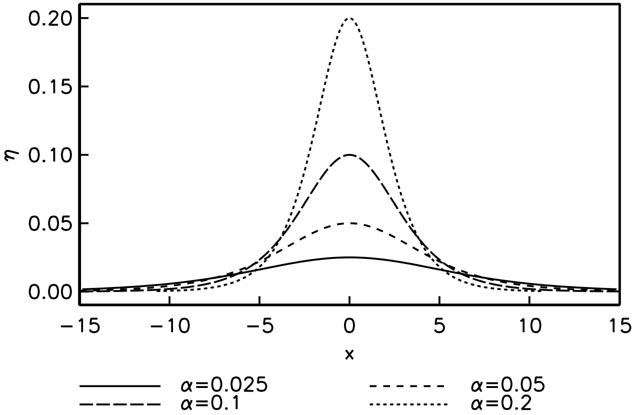
Properties

- Shape: single positive hump.
- Speed is slightly larger than linear shallow water speed (which is unity in present scaling)
- Speed increases linearly with amplitude (approximation valid within KdV theory)
- Length of hump inversly proportional to $1/\sqrt{\alpha}$.
  Higher solitary waves are shorter; consequence of balance of nonlinearity and dispersion.

More comments

- (2) eksakt bare for KdV likningen
- Solitærbølger finns for alle Boussinesq-type likninger, men oftest ikke i lukket analytisk form.
- Eksistens krever samvirkning av dispersjon og ikkelinearitet.
- Full potensialteori: perturbasjonsteknikker eller numerisk løsning
  maksimal amplitude 0.83$\times$equlibium depth,
- (2) ledende tilnærmelse for alle solitonsløsninger for tyngdebølger
- Solitærbølger finnes for andre likninger/fysiske systemer.

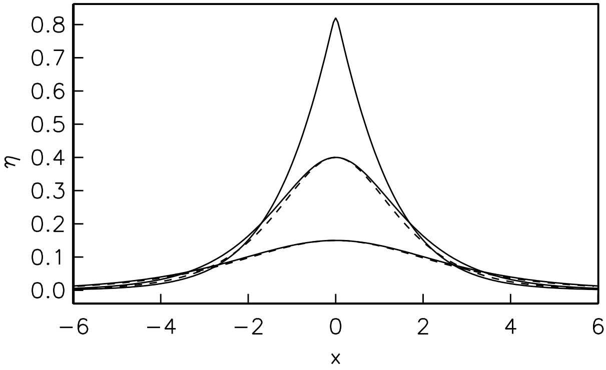
Boussinesq soliton



Soliton-profiler fra Boussinesq likningen

Lengde avtar med amplitude. Hvorfor ?

Boussinesq soliton vs. full potensialteori



Solitoner fra Boussinesq likninger (stiplet) og full potensialteori (hel linje) for $\alpha = 0.15, 0.4$. Potensialløsning for $\alpha = 0.82$ nær maksimum; topp nærmer seg 120° vinkel.

Kollisjonsegenskaper

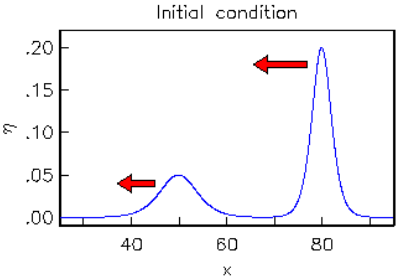
To solitærbølger med α_1 og α_2; samme retning.
Definerer $f_i = e^{-\sqrt{3\alpha_i}(x-\hat{x}_i-(1+\frac{1}{2}\alpha_i)t)}$ der $\hat{x}_i$ er referanseposisjoner

Eksakt interaksjonsløsning av KdV likning ($\beta_i = \sqrt{\alpha_i}$)

$$\frac{\eta}{4} = \frac{\beta_1^2 f_1 + \beta_2^2 f_2 + 2(\beta_1 - \beta_2)^2 f_1 f_2 + \left(\frac{\beta_2-\beta_1}{\beta_2+\beta_1}\right)^2 (\beta_2^2 f_1^2 f_2 + \beta_1^2 f_1 f_2^2)}{\left(1 + f_1 + f_2 + \left(\frac{\beta_2-\beta_1}{\beta_2+\beta_1}\right)^2 f_1 f_2\right)^2}$$

- Analyse for $\rightarrow \pm\infty$: bølger gjenoppstår etter kollisjon
- Denne egenskap $\Rightarrow$ soliton betegnelse
- Eksakte kollisjonsegenskaper bare vist for KdV likning; eller ledende ordens oppførsel i pertubasjonsutviklinger.

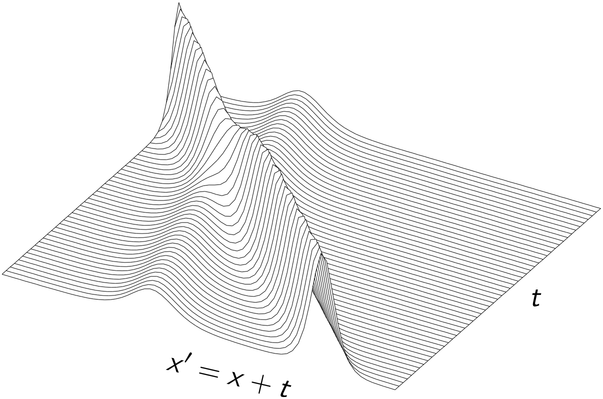
Interaksjon; stor forskjell i amplitude



$\alpha_1 = 0.05$, $\alpha_2 = 0.2$

- Propagering mot venstre. Stor solitærbølge tar igjen liten.
- Betydelig forskjell i hastighet $\Rightarrow$ interaksjon av begrenset varighet $\Rightarrow$ begrenset tid for svake ikke-lineære effekter å virke

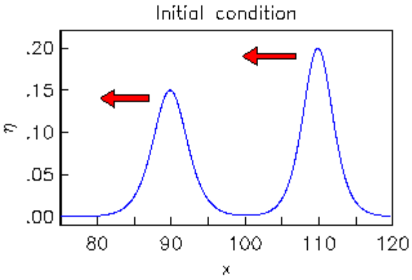
$\alpha_1 = 0.05$ og $\alpha_2 = 0.2$



Soliton-interaksjoner

Største amplitude: faseskift i forplantningsretningen

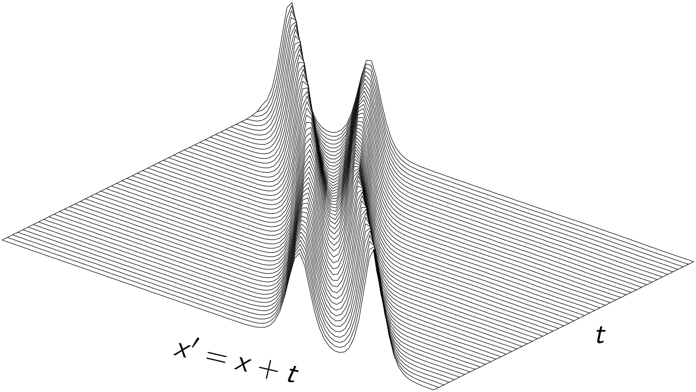
Minste amplitude: faseskift mot forplantningsretningen; motsatt av forventet fra ikke-lineære effekter



$\alpha_1 = 0.15$, $\alpha_2 = 0.2$

- Propagering mot venstre. Stor solitærbølge tar igjen liten.
- Liten forskjell i hastighet $\Rightarrow$ lengre tid for svake ikke-lineære effekter å virke

$\alpha_1 = 0.15$ og $\alpha_2 = 0.2$



Soliton-interaksjoner

Bølgene går ikke gjennom hverandre; de bytter amplitude

Analogi til partikler i elastisk støt $\Rightarrow$ soliton