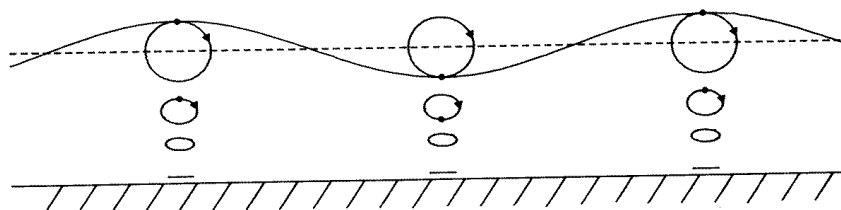
Figur 2.5: Partikkelbanene i bølger på dypt vann $a/\lambda = 0.06$.

Figur er misvisende.
På virkelig grunt vann er
ellipsene mye flatere ved
overflaten også.

Figur 2.6: Partikkelbaner i lange bølger på grunt vann $a/H = 0.25$.

2.4 Den mekaniske energien i overflate-bølger

For periodisk bølgebevegelse kan man finne enkle uttrykk for den midlere mekaniske energien pr. flateenhet i horisontalplanet. For overflatebølger skal vi benytte betegnelsen midlere *energitetthet* om denne størrelsen. (Vanligvis brukes denne betegnelsen om energien pr. volumenhet.) Energi består av kinetisk og potensiell energi, og den potensielle energien i overflatebølger skyldes overflatespenningen og tyngdekraften. Når overflaten deformeres, utfører overflatespenningen et arbeid som er σ multiplisert med endringen i overflatens areal. Den midlere potensielle energi pr. flateenhet på grunn av overflatespenningen kan derfor skrives

$$E_p^k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sigma \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2} - 1 \right] dt$$

Taylor utvikling av integrand gir for små verdier av $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ og $\frac{\partial \eta}{\partial y}$

$$E_p^k = \frac{1}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sigma \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \right] dt \quad (2.26)$$


For den *potensielle energien* på grunn av tyngdekraften velger vi null-nivået i $z = -H/2$ som er væskelagets midlere høyde over bunnen. Energi pr. volumenhet

Nei, dersom en må definere nullnivå på en spesiell måte er nok noe galt. Denne definisjonen er ikke konsistent med likning (2.12), øvre linje, og uttrykk (2.14) for hastighetspotensial. Henviser til slides.

22

OVERFLATEBØLGER I VÆSKER

er



$$e_p = \rho g \left(z + \frac{H}{2} \right)$$

og den midlere potensielle energi pr. flateenhet på grunn av tyngdekraften kan derfor skrives

$$E_p^t = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{-H}^{\eta} e_p \, dz \, dt = \frac{\rho g}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\eta^2 + H\eta) \, dt$$

Siden overflatehevningen η er forutsatt periodisk i t , får vi

$$E_p^t = \frac{\rho g}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \eta^2 \, dt \quad (2.27)$$

Den samlede midlere potensielle energi pr. flateenhet for overflatebølger er

$$E_p = E_p^t + E_p^k \quad (2.28)$$

Den *kinetiske energien* pr. volumenhet er

$$e_k = \frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2$$

og den midlere kinetiske energi pr. flateenhet av overflaten

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{-H}^{\eta} e_k \, dz \, dt$$

Ved Taylor utvikling etter potenser av η får vi

$$\int_{-H}^{\eta} e_k \, dz = \int_{-H}^0 e_k \, dz + (e_k)|_{z=0} \eta + \dots$$

For bølger med liten amplitude er det nok å ta med det første leddet i denne rekkeutviklingen, og ved innføring av hastighetspotensialet kan vi skrive

$$E_k = \frac{\rho}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{-H}^0 (\nabla \phi)^2 \, dz \, dt$$

Ved hjelp av Greens teorem og grenseflatebetingelsen ved bunnen (2.13) kan uttrykket omformes, og vi finner

$$E_k = \frac{\rho}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \, dt \quad (2.29)$$

Setter vi nå inn uttrykkene (2.14) for hastighetspotensialet og overflatehevingen i (2.26)–(2.29) får vi etter noen enkle omforminger

$$\begin{aligned} E_p^k &= \frac{1}{4} \sigma k^2 a^2 \\ E_p^t &= \frac{1}{4} \rho g a^2 \\ E_p &= E_k = \frac{1}{4} \rho g a^2 \left(1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g}\right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

De siste likningene viser at den midlere energitettheten av potensiell og kinetisk energi er like (*energiekvipartisjon*). Selv om dette synes å gjelde for de fleste typer av lineær bølgebevegelse, finnes det eksempler på bølgetyper hvor man ikke har energiekvipartisjon. Sverdrup-bølger som er en type tyngde-treghetsbølger i roterende væsker, er et eksempel på det.

Summen av E_p og E_k er den midlere mekaniske energitetthet og

$$E = E_p + E_k = 2E_p = 2E_k \quad (2.31)$$

Av siste likning i (2.30) fremgår det at for bølgelengder $\lambda \gg \lambda_m$, hvor λ_m er definert i (2.17), er energitettheten på grunn av overflatespenningen ubetydelig i forhold til energitettheten på grunn av tyngden. Vi har derfor at for $\lambda \gg \lambda_m$

$$E = \frac{1}{2} \rho g a^2 \quad (2.32)$$

som er den midlere mekaniske energitetthet for tyngdebølger. For bølgelengder $\lambda \ll \lambda_m$ er energitettheten på grunn av tyngden ubetydelig, og vi får at den midlere mekaniske energitettheten for kapillarbølger er

$$E = \frac{1}{2} \sigma k^2 a^2 \quad (2.33)$$

Vi ønsker også å beregne energistrømmen eller *energifluksen* i overflate-bølgene. La oss tenke oss at vi avgrenser et område på vannoverflaten S innenfor en lukket kurve Γ . Loddrett under overflaten S ligger et volum av vann Ω , avgrenset av vertikale vegger Π . Den totale energien i Ω og på S er gitt ved uttrykket

$$\int_{\Omega} e_p dV + \int_{\Omega} e_k dV + \int_S \sigma dS$$

der e_p er potensiell energi i tyngdefeltet pr. volumenhet, e_k er kinetisk energi pr. volumenhet, og overflatespenningen σ representerer potensiell energi pr. flateenhet. Under forutsetning at energi ikke skapes eller blir borte i området skal vi sette opp en integrert energilikning på formen

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} e_p dV + \int_{\Omega} e_k dV + \int_S \sigma dS \right\} = - \int_{\Gamma} \mathbf{q}_{\Gamma} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds - \int_{\Pi} \mathbf{q}_{\Pi} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2.34)$$

der \mathbf{q}_Γ er energifluksen langs den frie overflaten S , \mathbf{q}_Π er energifluksen i volumet Ω og $\hat{\mathbf{n}}$ er enhetsnormalvektor til den vertikale sideflaten Π . En annen framgangsmåte kunne ha bestått i å regne ut energifluks eksplisitt og vise at (2.34) gjelder. Dersom vi inkluderer viskøse effekter vil det i tillegg opptre et dissipasjonsledd. En ikke-konservativ volumkraft vil også gi opphav til et kildeledd i form av et integral over Ω .

For å relatere endringer av de integrerte størrelsene til endringer av feltvariable trenger vi et spesialtilfelle av Leibniz' regel

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} G dV = \int_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial t} dV + \int_S G|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} dA \quad (2.35)$$

der dA er et infinitesimalt element i xy -planet, og det siste leddet skriver seg fra tidsvariasjonen av den frie overflaten. En kan merke seg at dette leddet alene gir bidraget til endring av e_p fordi tyngdepotensialet er tidsuavhengig.

Vi setter nå opp likningene som styrer bevegelsen og som vi vil utlede energilikningen (2.34) fra. Noen er gitt tidligere men gjentas her for oversiktens skyld. Først har vi bevegelseslikningen for en ideell væske

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \quad (2.36)$$

hvor vi har brukt virvelfriheten til å omskrive det konvektive leddet. I stedet for eksplisitt å innføre tyngden opererer vi med et generelt kraftpotensial Φ . Væsken er inkompressibel og kontinuitetslikningen blir da

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.37)$$

Ved den frie overflaten har vi den dynamiske betingelsen

$$p = \sigma \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (2.38)$$

der \mathbf{n} er enhetsnormalvektor til den frie overflaten S . I tillegg har vi den kinematiske overflatebetingelsen (2.5) som kan skrives om på formen

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\partial \eta}{\partial t} dA \quad (2.39)$$

hvor dA er projeksjonen av dS ned i xy -planet.

Nå følger en serie omforminger og bruk av integralsatser for å framskaffe energilikningen på den ønskede form. Vi starter med å prikke (2.36) med hastighetsvektor og integrere resultatet over Ω . Videre benyttes Gauss sats og divergensfrihet for å frambringe likningen

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) dV = - \int_{\partial \Omega} \left(p + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \rho \Phi \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.40)$$

der $\partial\Omega$ betegner randa til Ω , dvs. unionen av den frie overflaten S , den vertikale sideflaten Π og bunnen. Det er imidlertid ingen bidrag fra bunnen på grunn av det kinematiske bunnkravet (2.13). Enhetsnormalvektoren \mathbf{n} er utadrettet. Vi benytter nå (2.35) for å skrive likningen om til en form som inneholder tidssending av integrert kinetisk og potensiell energi i tyngdefeltet. Den kinematiske randbetingelsen (2.39) gir så at de fleste ledd i overflateintegralet kansellerer og vi ender opp med

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} e_p dV + \int_{\Omega} e_k dV \right\} = - \int_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Pi} \left(p + \frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 + \rho \Phi \right) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dV \quad (2.41)$$

Benyttes nå (2.38) og (2.39) kan det første leddet på høyresiden i (2.41) skrives om

$$- \int_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S \sigma \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\partial \eta}{\partial t} dA. \quad (2.42)$$

Ved videre å benytte at $\mathbf{n} = (\mathbf{k} - \nabla \eta) / \sqrt{1 + (\nabla \eta)^2}$ har vi identiteten

$$\nabla \cdot (\mathbf{n} \eta_t) = \nabla \cdot \mathbf{n} \eta_t + \mathbf{n} \cdot \nabla \eta_t = \nabla \cdot \mathbf{n} \eta_t - \frac{\nabla \eta \cdot \nabla \eta_t}{\sqrt{1 + (\nabla \eta)^2}}$$

og følgelig får vi ved å benytte både Leibnitz regel og Gauss sats

$$- \int_S \sigma \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\partial \eta}{\partial t} dA = - \frac{d}{dt} \int_S \sigma dS - \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{n}} \frac{\partial \eta}{\partial t} ds \quad (2.43)$$

hvor $\hat{\mathbf{n}}$ er enhetsnormalvektor til Π og \mathbf{n} er enhetsnormalvektor til den frie overflaten S , og ds er et infinitesimalt kurveelement langs projeksjonen av Γ ned i xy -planet. Første ledd på høyresiden er forandringen i total overflateenergi, mens det andre leddet er total fluks av overflateenergi (både adveksjon av overflateenergi gjennom Γ og overflatespenningens arbeid på snittkurven Γ).

La oss oppsummere det hele

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 dV + \int_{\Omega} \rho \Phi dV + \int_S \sigma dS \right\} \\ &= - \int_{\Gamma} \sigma \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \frac{\partial \eta}{\partial t} ds - \int_{\Pi} \left(p + \frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 + \rho \Phi \right) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \end{aligned} \quad (2.44)$$

hvor bidragene på venstre side er forandringen i kinetisk energi, forandringen i potensiell tyngdeenergi og forandringen i overflateenergi, og bidragene på høyre side er fluks av overflateenergi gjennom kurven Γ , trykkets arbeid på flaten Π , transport av kinetisk energi gjennom flaten Π og transport av potensiell tyngdeenergi gjennom flaten Π . Ved hjelp av Eulers trykkformel kan de tre leddene som står inni den siste parentesen forenkles ytterligere

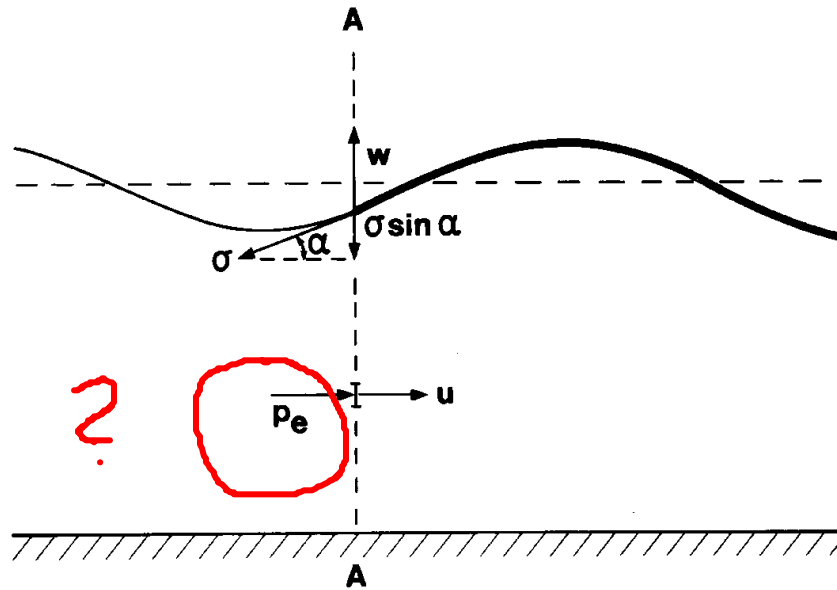
$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 dV + \int_{\Omega} \rho \Phi dV + \int_S \sigma dS \right\} = - \int_{\Gamma} \sigma \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \frac{\partial \eta}{\partial t} ds + \int_{\Pi} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2.45)$$

En enkel illustrasjon av høyresiden i (2.45) for to-dimensjonal geometri er gitt i figur 2.7. For to-dimensjonal geometri er $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = \sin \alpha$ hvor α er helningsvinkelen til overflaten som definert i figuren. Arbeidet pr. tidsenhet som væsken til venstre for snittet A–A utfører på væsken til høyre er

Arbeid må relateres
til hele hastigheten.

$$W = -\sigma \frac{\partial \eta}{\partial t} \sin \alpha - \int_{-h}^{\eta} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} u \, dz.$$

Denne delen er ikke god og byttes
med slides. Uttrykk til venstre er
kombinasjon av arbeid og transport
av potensiell energi.



Figur 2.7: Illustrasjon for energifluks.

Vi skal nå betrakte den totale energifluksen integrert i vertikal retning, \mathbf{F} , definert slik at høyresiden i likning (2.45) kan skrives på formen

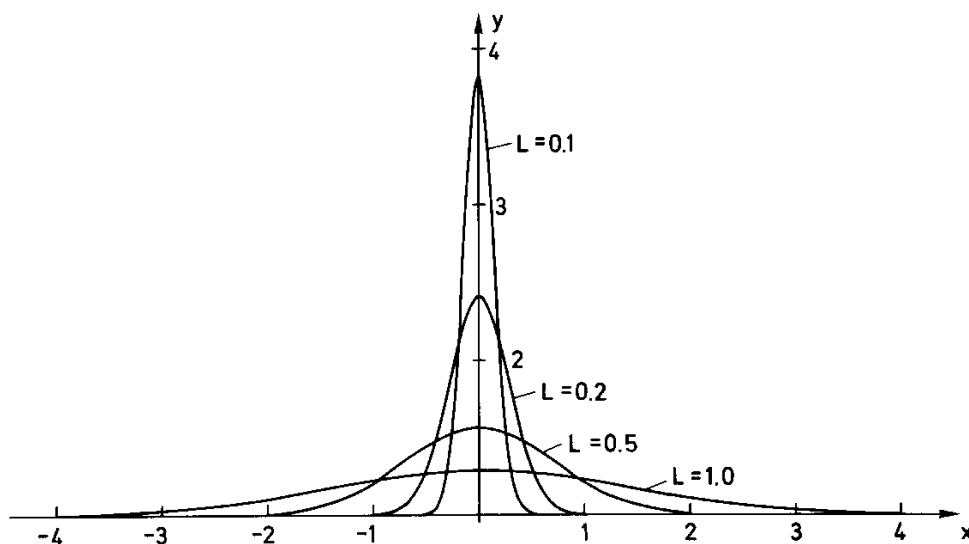
$$- \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} \, ds$$

hvor det infinitesimale kurveelementet ds er langs projeksjonen av Γ ned i xy -planet. Taylor utvikling av den horisontale energifluksen for små verdier av de deriverte av η og ϕ gir nå

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\sigma \nabla \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} + \int_{-h}^0 \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi \, dz \right].$$

I samsvar med tidligere antagelse er bare de ledd hvor bølgeamplituden inngår i kvadrat tatt med i dette uttrykket. Innføres hastighetspotensial og overflateheving (2.14) så finner man ved hjelp av relasjonene (2.15)–(2.16) og ved tidsmidling (2.23) at den midlere energifluksen \mathbf{F} pr. lengdeenhet langs bølgene er

$$\mathbf{F} = E \mathbf{c}_g \quad (2.46)$$



Figur 2.14: Gaussiske startprofiler

større enn L . Vi ser derfor uten videre at en forstyrrelse av formen (2.68) ikke vil generere nevneverdige kapillarbølger uten at $L < \lambda_m$ hvor λ_m er definert tidligere.

Når $\tilde{\eta}_0$ er gitt ved (2.69) er overflatehevingen symmetrisk om origo, og overflatehevingen kan skrives

$$\eta = \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty e^{-(kL)^2} [\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)] dk \quad (2.70)$$

Det byr på vanskeligheter å diskutere det fulle innhold av (2.70), og vi skal her begrense diskusjonen til tyngdebølge på dypt vann. I dette tilfellet er $\omega^2 = gk$. Vi innfører u som ny integrasjonsvariabel og setter henholdsvis i første og andre ledd i integralet (2.70)

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\frac{g}{x}\right)^{\frac{1}{2}}(u \mp r) \\ k &= \frac{1}{x}(u^2 \mp 2ur + r^2) \\ kx \pm \omega t &= u^2 - r^2 \end{aligned}$$

hvor

$$r = \left(\frac{gt^2}{4x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dette gir når $L \rightarrow 0$

$$\eta = \frac{2Q}{\pi} \frac{r}{x} \int_0^r \cos(u^2 - r^2) du \quad (2.71)$$

Utleddningen frem til (2.71) innebærer noen vanskelige grenseoverganger og enkelte vil kanskje foretrekke å gå veien om potensialet. En betrakter da potensialet

UT

ved $z = 0$ og foretar tilsvarende substitusjoner i dette uttrykket. Etter at man har fått omformet uttrykket for potensialet, kan overflatehevningen bestemmes ved hjelp av grenseflatebetingelsen. Detaljer er gitt av Lamb (1932). Likning (2.71) er et eksakt uttrykk for overflatehevningen når bevegelsen starter fra ro og overflatehevningen ved $t = 0$ har form av en delta-funksjon i origo. Det viser at overflatehevningen kan uttrykkes ved Fresnel integralene

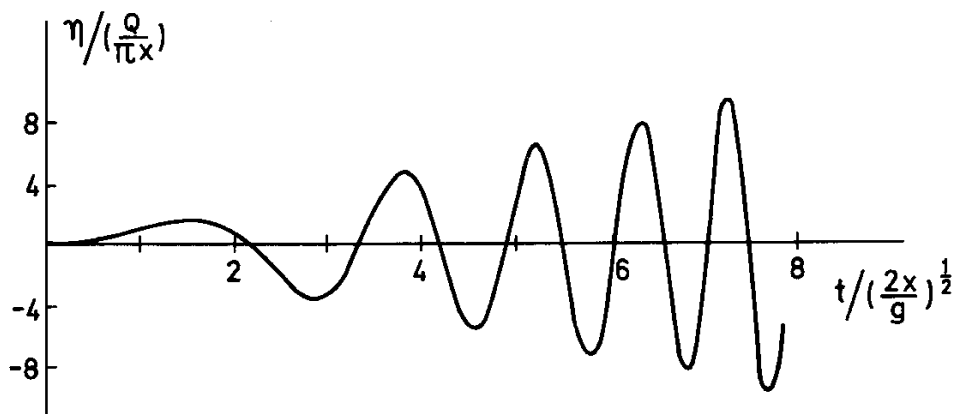
$$C(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \cos u^2 du$$

og

$$S(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \sin u^2 du$$

som er tabulert. Siden (2.71) leder til store verdier for η i nærheten av origo, er det klart at løsningen i dette området bryter med forutsetningene for den lineære teori. Langt borte fra origo vil imidlertid (2.71) gi verdier av η som oppfyller forutsetningene og som beskriver bølgebevegelsen med god tilnærmelse. Med endelige verdier for L vil man derimot finne at løsningen (2.70) gir rimelige verdier for η også i nærheten av origo.

Overflatehevningen, likning (2.71), som funksjon av t i et punkt i avstand $x = x_0$ fra origo er vist i figur 2.15. Det fremgår av figuren at bevegelsen på



Figur 2.15: Overflatehevning i et punkt.

hvert sted starter med langperiodiske svingninger etterfulgt av svingninger med gradvis kortere perioder. Vi legger merke til at bevegelsen alltid starter ved $t = 0$ selv i punkter som ligger langt borte fra origo. Dette henger sammen med at på dypt vann så brer de lengste tyngdebølgene seg med uendelig stor hastighet, og forstyrrelsen vil merkes umiddelbart i ethvert punkt i væsken. For $r \rightarrow \infty$

$$C(r) = S(r) = \frac{1}{2}$$

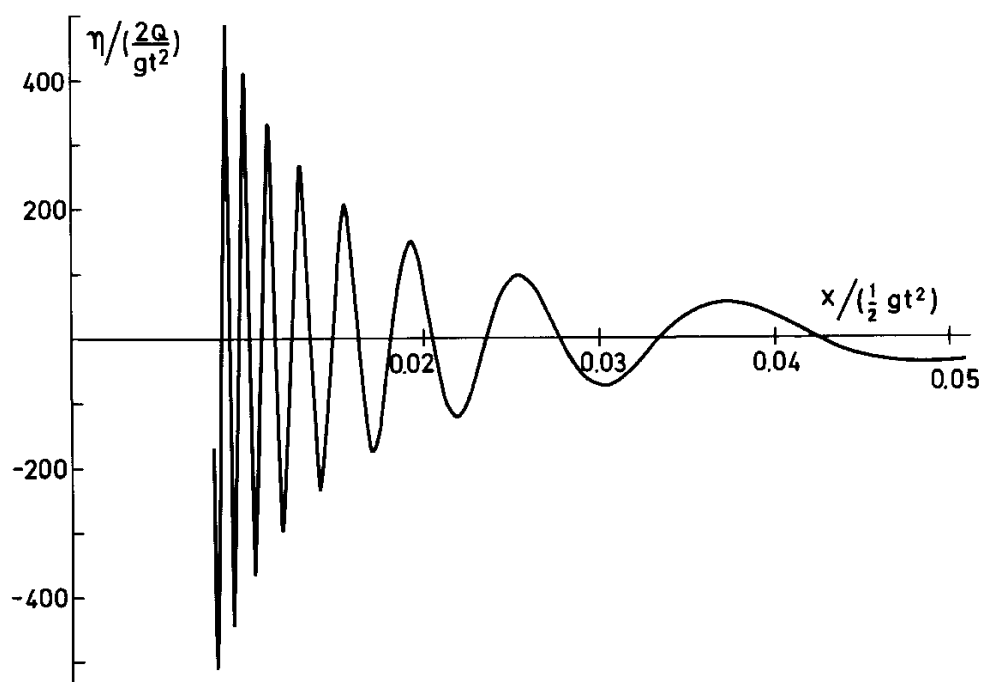
ikke
pensum

og det følger fra (2.71) at overflatehevningen kan skrives

$$\eta = \frac{Q}{2\sqrt{\pi}} \frac{g^{\frac{1}{2}} t}{x^{\frac{3}{2}}} \cos\left(\frac{gt^2}{4x} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.72)$$

Likning 2.72 kan finnes fra stasjonær fase.

Grafen for funksjonen (2.72) ved et vilkårlig tidspunkt $t = t_0$ er skissert i figur 2.16.



Figur 2.16: Overflatehevning ved et tidspunkt.

La oss nå studere overflateformen ved et tidspunkt t_0 og i en omegn om punktet $x = x_0$. Taylor-utvikling av fasefunksjonen gir

$$\frac{gt_0^2}{4x} = \frac{gt_0^2}{4x_0} - \frac{gt_0^2}{4x_0} \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right) + \dots$$

Bølgelengden λ tilsvarer en endring i fasefunksjonen på 2π

$$\lambda = |x - x_0| = \frac{8\pi x_0^2}{gt_0^2} \quad (2.73)$$

I nærheten av punktet $x = x_0$ vil derfor overflatehevningen være tilnærmet periodisk med bølgelengde gitt ved uttrykket ovenfor.

En bestemt fase i bølgetoget, som for eksempel kan være et null-punkt $\eta = 0$, vil være karakterisert med en fast verdi av fasefunksjonen. Dette medfører at nullpunktene I_1, I_2 og I_3 i figur 2.17 forplanter seg i x -retning slik at

deriverte av χ med hensyn på k er null. Altså

$$\chi'(k_0) = \omega'(k_0) \pm \frac{x}{t} = 0$$

For andre verdier av k vil integranden oscillere hurtig. Dersom $F(k)$ er en forholdsvis sakte varierende funksjon av k , så vil positive og negative bidrag oppheve hverandre. Nettobidraget til integralet for disse verdier av k vil derfor bli ubetydelig.

Vi utvikler nå funksjonene $F(k)$ og $\chi(k)$ i Taylorrekke i nærheten av punktet $k = k_0$. Dette gir

$$\begin{aligned} F(k) &\simeq F(k_0) \\ \chi(k) &\simeq \chi(k_0) + \frac{1}{2}\chi''(k_0)(k - k_0)^2 \end{aligned}$$

under forutsetning av at $\chi''(k_0) \neq 0$. Settes disse rekkeutviklingene inn i (2.74) får vi

$$I(x, t) \simeq F(k_0) e^{it\chi(k_0)} \int_a^b e^{\frac{i}{2}t\chi''(k_0)(k-k_0)^2} dk.$$

Siden integranden i dette integralet svinger hurtig for store verdier av $k - k_0$ kan vi uten nevneverdig feil utvide grensene i integralet til $\pm\infty$. Fra kjente formler har vi at integralet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm im^2 u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{m} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$$

hvor m er en positiv konstant. Benyttes dette resultatet fåes

$$I(x, t) \simeq \frac{\sqrt{2\pi} F(k_0)}{\sqrt{t|\chi''(k_0)|}} e^{i(\chi(k_0)t \pm \frac{\pi}{4})} \quad (2.75)$$

hvor øvre eller nedre tegn i eksponenten gjelder henholdsvis når $\chi''(k_0)$ er positiv eller negativ. Dette er stasjonær fase approksimasjonen for Fourier-integralet. Dersom $\chi'(k) = 0$ har flere nullpunkter som ligger tilstrekkelig spredt fra hverandre, vil man få en sum av bidrag hvor hvert enkelt ledd er av formen (2.75).

Tar vi ytterligere et ledd med i rekkeutviklingen for χ vil dette leddet være

$$\frac{1}{6}\chi'''(k_0)(k - k_0)^3.$$

Formelen (2.75) er derfor bare gyldig når størrelsen

$$|(k - k_0)\chi'''(k_0)/\chi''(k_0)| \ll 1$$

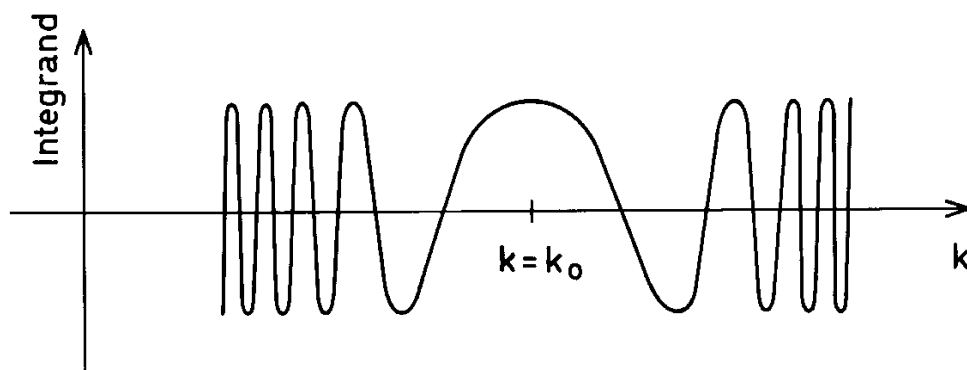
i hele området for k som gir bidrag til integralet, dvs. når integranden svinger langsomt, se figur 2.18.

Bidrag til integranden får man derfor for k -verdier hvor

$$t(k - k_0)^2 \chi''(k_0) \leq 2\pi n$$

Største feil kommer fra områdene langt fra det stasjonære punktet.

Denne rekkeutviklingen gir da ikke noe godt bilde av gyldigheten.



Figur 2.18: Prinsippskisse for stasjonær fase.

hvor n er et lite heltall. Dette kombinert med kravet ovenfor gir at

$$q = t^{-\frac{1}{2}} |\chi'''(k_0)| / |\chi''(k_0)|^{3/2} \ll 1$$

for at tilnærmelsen (2.75) skal være god.

La oss nå benytte stasjonær fase approksimasjonen til å finne asymptotiske uttrykk for overflatehevningen for tyngdebølger på dypt vann generert av en overflateforstyrrelse av form som en delta-funksjon i origo ($x = 0$). Bevegelsen av overflaten for $x > 0$ skyldes bølger som forplanter seg i x -aksens retning, og overflatehevningen for $x > 0$ kan ifølge resultatene i avsnitt 2.7 skrives

$$\eta(x, t) = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{i(kx - \omega t)} dk.$$

Vi setter følgelig

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{Q}{2\pi}, \\ \chi(k) &= k \frac{x}{t} - g^{\frac{1}{2}} k^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Dette gir

$$k_0 = \frac{gt^2}{4x^2}, \quad \chi'(k_0) = 0, \quad \chi(k_0) = -\frac{gt}{4x},$$

og

$$\chi''(k_0) = \frac{2x^3}{gt^3}, \quad \chi'''(k_0) = -12 \frac{x^5}{g^2 t^5}.$$

Ved å benytte (2.75) finner vi et uttrykk for overflatehevningen som er identisk med det vi tidligere har funnet i (2.72). Størrelsen q er proporsjonal med $(2x/gt^2)^{\frac{1}{2}}$ som viser at tilnærmelsen er god såfremt $\frac{1}{2}gt^2 \gg x$. Dette er også i samsvar med hva vi tidligere har funnet.

Øvingsoppgaver

av (2.84) og (2.85) kan når c_0 er konstant, skrives

$$\begin{aligned}\eta &= a \sin k(x - c_0 t), \\ u &= \frac{a}{H} c_0 \sin k(x - c_0 t), \\ v &= 0.\end{aligned}$$

Den tilsvarende vertikalhastighet er

$$w = -\frac{ka}{H} c_0 (z + H) \cos k(x - c_0 t).$$

En kan forholdsvis lett innføre et korreksjonsledd i gruntvannslikningene (2.85) som i noen grad tar hensyn til avvik fra hydrostatisk trykkfordeling. For enkelhets skyld skal vi vise hvordan dette kan gjøres i det tilfellet at bunnen er plan og bevegelsen foregår i plan parallelle med xz -planet. Dette medfører at bevegelsen er uavhengig av y og at $v = 0$. Under forutsetning av at horisontalhastigheten er uavhengig av z , får vi derfor ved integrasjon av kontinuitetslikningen

$$w = -\frac{\partial u}{\partial x}(z + H).$$

Fra den lineariserte likningen for vertikalbevegelsen får vi følgende

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(z + H).$$

Trykket finner vi så ved integrasjon. Dersom bare lineære ledd beholdes, så er

$$p = \rho g(\eta - z) + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \left(\frac{1}{2} z^2 + Hz \right) + p_0.$$

Med dette uttrykket for p kan den lineariserte likningen for horisontalbevegelsen skrives

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \left(\frac{1}{2} z^2 + Hz \right).$$

Integrasjon av denne likningen i intervallet fra $z = -H$ til $z = 0$, gir

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{H^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \quad (2.87)$$

hvor andre leddet på høyre side i likningen (2.87) representerer et korreksjonsledd for avvik fra hydrostatisk trykkfordeling. Likningen (2.87) sammen med kontinuitetslikningen (2.84) (med $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$) har bølgeløsninger av formen

$$\begin{aligned}\eta &= a \sin k(x - ct) \\ U &= ac \sin k(x - ct)\end{aligned}$$

Likner
kap. 2.11.1
og slides, men
er løsere og
mindre generelt.
Hopp over.

hvor fasehastigheten er

$$c = \frac{c_0}{(1 + \frac{(kH)^2}{3})^{\frac{1}{2}}} \simeq c_0(1 - \frac{(kH)^2}{6}). \quad (2.88)$$

Dette viser at korreksjonsleddet i likning (2.87) leder til dispersive bølger, og dispersjonsrelasjonen (2.88) er i samsvar med den vi tidligere har funnet for lange bølger (likning 2.19).

Betingelsen for at man kan regne med hydrostatisk trykkfordeling er åpenbart at $kH \ll 1$. Dersom dette kravet er oppfylt, er leddet $\frac{H^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2}$ i likning (2.87) mye mindre enn f.eks. leddet $\frac{\partial U}{\partial t}$. Dette ser man når man beregner leddene ved hjelp av løsningen av likningen.

Til nå har vi antatt at amplituden er så liten at bevegelseslikningen kan lineariseres. Ved hjelp av de lineære løsningene som vi har funnet, kan vi lett finne betingelsen for at lineariseringen skal være gyldig. Lineariseringen innebærer for eksempel at leddet $u \frac{\partial u}{\partial x}$ er sløyfet i forhold til $\frac{\partial u}{\partial t}$. Forholdet mellom det første og det siste av disse leddene er maksimalt lik a/H . Det ikkelineære leddet kan derfor godt sløyfes når forholdet $a/H \ll 1$. Dette er i overensstemmelse med hva vi tidligere fant i avsnitt 2.2. Betingelsen $a/H \ll 1$ vil også medføre at det ikkelineære leddet $u \frac{\partial w}{\partial x}$ kan sløyfes i forhold til $\frac{\partial w}{\partial t}$ i likningen for vertikalbevegelsen.

Dersom bølgelengden er tilstrekkelig stor i forhold til H , så kan vi etter hva vi tidligere har sett, sløyfe leddet $\frac{\partial w}{\partial t}$ i forhold til g og regne med hydrostatisk trykkfordeling selv for bølger med forholdsvis stor amplitude. Selv om bølgeamplituden er så stor at man må ta med ikkelineære ledd i likningene, så vil forutsetningene om at trykkfordelingen er hydrostatisk og at horisontalhastigheten er uavhengig av z , gjelde med god tilnærmelse for bølger som er tilstrekkelig lange i forhold til dypet. Dersom man bare tar med de dominerende ikkelineære ledd, får man fra bevegelseslikningen for horisontalbevegelsen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.89)$$

og fra kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[u(H + \eta)]. \quad (2.90)$$

Likningene (2.89) og (2.90) beskriver bevegelsen av ikkelineære plane bølger på grunt vann. Disse likningene blir behandlet inngående i avsnitt 7.1.

Korreksjonsleddet for avvik fra hydrostatisk trykkfordeling (se likning 2.87) kan bli av samme størrelsesorden som det ikkelineære leddet $u \frac{\partial u}{\partial x}$, dersom parameteren $\frac{a}{H}(\frac{\lambda}{H})^2$ er omkring 10. I så fall er de ikkelineære og de ikke-hydrostatiske effekter av like stor betydning, og et tilsvarende korreksjonsledd som i likning (2.87) må taes med i den ikkelineære gruntvannslikningen (2.89). For to-dimensjonal bevegelse finner man at i dette tilfellet kan gruntvannslikningen skrives

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{U^2}{h + \eta}) = -g(h + \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{H^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2}. \quad (2.91)$$

NLSW er utledet bedre på slides. Dette er nødvendigvis upresist. Hopp over.

Det overlates til leseren som øvelse å utlede likningen (2.91). Denne likningen sammen med likning (2.84) går under navnet Boussinesq likningene. Parameteren $\frac{a}{H}(\frac{\lambda}{H})^2$ spiller en viktig rolle ved klassifisering av lange bølger, og den har fått navnet *Ursell-parameteren*.

Gruntvannslikningene kan utledes ved en formell pertubasjonsutvikling hvor parametrene

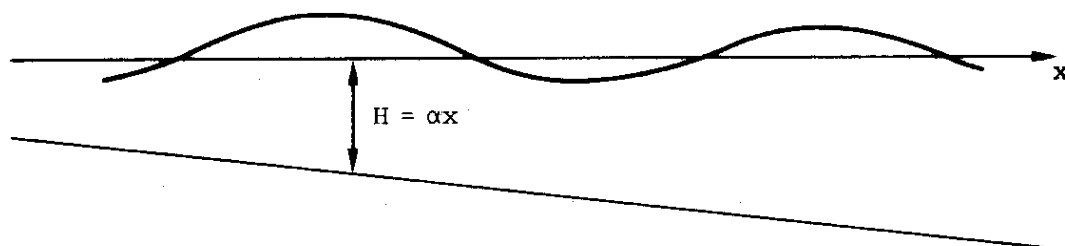
$$\alpha = \frac{a}{H} \quad \text{og} \quad \beta = \frac{\lambda}{H}$$

tjener som utviklingsparametre. Denne fremgangsmåten vil man finne beskrevet for eksempel i Whitham (1974). Her har vi med hensikt valgt en matematisk mindre formell fremstilling. Til gjengjeld kommer den fysikalske tolkningen av de forskjellige tilnærmelsene tydeligere frem ved denne fremstillingen. I neste kapittel presenterer vi en formell utledning av Boussinesq og KdV-likninger.

Vi skal til slutt vise hvordan de lineariserte gruntvannslikningene kan benyttes til å studere forplantningen av plane bølger over skrånende bunn. Den relative endringen i vanddypet forutsettes å være liten over en distanse som tilsvarer bølgelengden. Vi setter

$$H = \alpha x$$

hvor $\alpha = \tan \theta$, og θ er bunnplanets hellningsvinkel med horisontalplanet (x -aksen).



Figur 2.23: Bølge på skrånende bunn.

Vi søker løsninger av (2.86) som er periodisk i t slik at

$$\eta = \hat{\eta}(x) \cos \omega t.$$

Innsatt i (2.86) gir dette følgende likning for $\hat{\eta}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \right) + \kappa \hat{\eta} = 0 \quad (2.92)$$

hvor $\kappa = \omega^2 / \alpha g$. Det er minst to strategier for å løse likning (2.92). En strategi er å skrive $\hat{\eta}$ som potensrekke i x

$$\hat{\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

på Kjeller utenfor Oslo, og sensorene er plassert over Østlandsområdet. Disse bølgene er seismiske overflatebølger (Rayleigh bølger) som forplanter seg langs jordoverflaten, og bølgene skyldes i dette tilfellet et jordskjelv ved Azorene. Det regelmessige bølgetoget er hovedsakelig fremkommet som følge av dispersjonens virkning.

3.1 Bølgekinematikk for en-dimensjonal bølgeforplantning

Vi forutsetter innledningsvis at en eller annen parameter (hastighet, trykk, forrykning etc.) som beskriver bølgebevegelsen, kan skrives på formen

$$A(x, t)e^{i\chi(x, t)}. \quad (3.1)$$

Det er underforstått at enten realdelen eller imaginærdelen av uttrykket ovenfor representerer den fysikalske størrelsen. Fra fasefunksjonen χ kan vi bestemme k og ω ved

$$k = \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad \omega = -\frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (3.2)$$

k , ω og A forutsettes å være langsomt varierende funksjoner av x og t i den betydning at størrelsene varierer lite over en distanse som tilsvarer bølgelengden eller over et tidsrom tilsvarende en periode. k og ω representerer således lokale verdier henholdsvis for bølgetall og vinkelhastighet, og fasefunksjonen er derfor på en konstant nær lik

$$\chi = kx - \omega t.$$

Bytt med første ledd i Taylorutvikling.

Ut fra dette er det rimelig å anta at ω og k er forbundet lokalt ved dispersjonsrelasjonen. I et inhomogent medium hvor fasehastigheten endrer seg langsomt i bølgenes utbredelsesretning, vil ω foruten å avhenge av k , være en langsomt varierende funksjon av x . Tar vi også med muligheten for at mediets egenskaper endrer seg langsomt i tiden, kan vi skrive

$$\omega = \omega(k, x, t).$$

Eksempelvis er $\omega = k\sqrt{gH}$ dispersjonsrelasjonen for lange bølger på grunt vann. Med langsomt varierende vanndyp $H = H(x)$, er dette en relasjon av typen beskrevet ovenfor. Når det gjelder tidsavhengigheten, kan denne fremkomme på flere måter. I avsnitt (5.5) skal vi behandle et tilfelle hvor overflatebølger forplanter seg gjennom områder med tidsavhengig tidevannsstrøm. Dette fører som vi skal se til en dispersjonsrelasjon hvor tiden inngår ekplisitt.

Det følger fra (3.2) at

$$\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_t = 0 \quad (3.3)$$

Bølgebevegelse av denne type er for eksempel mulig i et inhomogent eller ikke-stasjonært medium hvor de fysikalske egenskaper endrer seg lite over en distanse som tilsvarer en bølgelengde og over en tid som tilsvarer en bølgeperiode. En kan derfor vente at forutsetningene er oppfylt dersom bølgelengden og perioden er tilstrekkelig korte.

Som eksempel skal vi løse bølgelikningen (2.86) i det tilfellet at forplantnings-hastigheten $c_0 = \sqrt{gH}$ er en funksjon av x og y . Vi antar at skalaen for inhomogenitet i bølgefeltet er lik skalaen for inhomogenitet i forplantningshastigheten c_0 . Vi antar at løsningen av (2.86) kan skrives på formen

$$\eta = A(x, y, t)e^{i\chi(x, y, t)} \quad (3.13)$$

hvor frekvens og bølgevektor er definert ved

$$\omega = -\frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \mathbf{k} = \nabla \chi.$$

Antakelsen om langsomt varierende bølgefelt betyr at forholdet mellom en bølgelengde $\lambda = 2\pi/k$ og skalaen for inhomogenitet L må være et lite tall. Tilsvarende må forholdet mellom en bølgeperiode $2\pi/\omega$ og skalaen for ikke-stasjonaritet T være et lite tall. Vi introduserer derfor en ordningsparameter slik

$$\epsilon = \frac{1}{kL} = \frac{1}{\omega T} \ll 1. \quad (3.14)$$

Dersom vi tar utgangspunkt i de langsomme skalaene for inhomogenitet og ikke-stasjonaritet som referanse kan vi få eksplisitt beskrevet den hurtige bølgefase ved ordningsparameteren slik

$$\eta = A(x, y, t)e^{\epsilon^{-1}i\chi(x, y, t)}. \quad (3.15)$$

Det vil nå være naturlig å anta at amplituden A kan utvikles i en perturbasjonsutvikling ved hjelp av den samme ordningsparameteren

$$\eta = (A_0(x, y, t) + \epsilon A_1(x, y, t) + \epsilon^2 A_2(x, y, t) + \dots) e^{\epsilon^{-1}i\chi(x, y, t)}. \quad (3.16)$$

Derivasjon av denne rekkeutviklingen gir for eksempel

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(-i\epsilon^{-1}\omega A_0 - i\omega A_1 + \frac{\partial A_0}{\partial t} + O(\epsilon) \right) e^{\epsilon^{-1}i\chi(x, y, t)}.$$

Rekkeutviklingen (3.16) skal nå substitueres inn i (2.86). Vi innser at den komplekse eksponentialfunksjonen er felles for alle ledd og kan faktorerises bort. Uttrykket som da gjenstår må være oppfylt til alle ordener i ϵ . Dette gir et hierarki av likninger til bestemmelse av χ , A_0 , etc.

Den første av disse likningene bærer navnet *eikonal-likningen*. I dette tilfellet er denne likningen

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 \quad (3.17)$$

hvor $k = |\mathbf{k}|$. Vi gjenkjenner dette som dispersjonsrelasjonen. Dersom vi kan anta et stasjonært bølgefelt så kan vi skrive

$$\chi = S(x, y) - \omega t \quad (3.18)$$

og faselinjene er bestemt ved

$$S(x, y) - \omega t = \text{konst.}$$

Bølgevektoren

$$\mathbf{k} = \nabla \chi = \nabla S$$

er følgelig normal til faselinjene, slik som den skal.

Den andre likningen blir i teorien for elektro-magnetiske bølger ofte betegnet *transport-likningen* fordi den beskriver hvordan energifluksen er bevart langs en stråle. I vårt tilfelle er denne likningen

$$\omega \frac{\partial A_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\omega A_0) + c_0^2 \mathbf{k} \cdot \nabla A_0 + \nabla \cdot (c_0^2 \mathbf{k} A_0) = 0. \quad (3.19)$$

Dersom vi multipliserer denne likningen med A_0 så lar den seg integrere én gang og vi får

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega A_0^2) + \nabla \cdot (\mathbf{c}_g \omega A_0^2) = 0. \quad (3.20)$$

Dette er en bevaringslikning for “tettheten” ωA_0^2 som blir advektert med gruppehastigheten $\mathbf{c}_g = c_0^2 \mathbf{k} / \omega$.

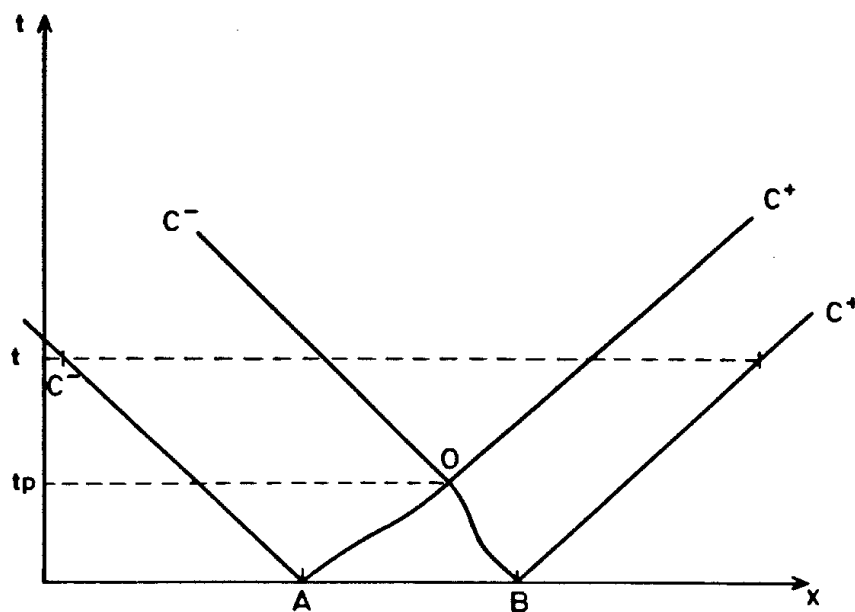
Likning (3.20) beskriver amplitudevariasjoner langs strålene. La oss anta stasjonært bølgefelt og la oss betrakte et område (se figur 3.5) begrenset av de to strålene a og b hvor flatene σ_A og σ_B er normale til strålekippet som ligger mellom strålene. Vi forutsetter at strålene a og b ligger så nært inntil hverandre at c_0 , A_0 og ∇S kan settes konstant over flatene σ_A og σ_B . Vi integrerer likning (3.20) over området og benytter Gauss sats. Siden gruppehastigheten er parallell med bølgevektor, så forsvinner bidraget til integralet langs strålene, og vi får

$$\sigma_A (c_0 A_0^2)_{\text{ved A}} = \sigma_B (c_0 A_0^2)_{\text{ved B}}. \quad (3.21)$$

A_0 representerer amplituden for det ledende leddet i rekkeutviklingen (3.16), og størrelsen $c_0 A_0^2$ er derfor et mål for energifluksen. Likningen (3.21) uttrykker altså at i denne tilnærmelsen er energifluksen konstant langs et strålerør. Dette er et viktig resultat, og det medfører at det ikke opptrer refleksjon av bølgeenergi langs strålen. Dette viser at bølgekinematikken som vi har utviklet i det foregående forutsetter at endringene i mediet er så gradvise at bølgene avbøyes (refrakteres) uten at noe av energien blir reflektert.

Legg merke til at anvendelsen av Gauss sats var spesielt enkel fordi gruppehastigheten var parallell med bølgevektor i vårt tilfelle, og dermed forsvant

Byttes med slides.



Figur 7.3:

Uttrykkene (7.9) og (7.10) viser at bølgen beveger seg med en hastighet avhengig av den relative bølgeamplituden η/H . I dette tilfellet hvor $\eta/H > 0$, vil bølgetoppen bevege seg raskere enn resten av bølgen. Dette vil medføre at bølgen etterhvert utvikler en bratt front slik som skissert i figur 7.4.

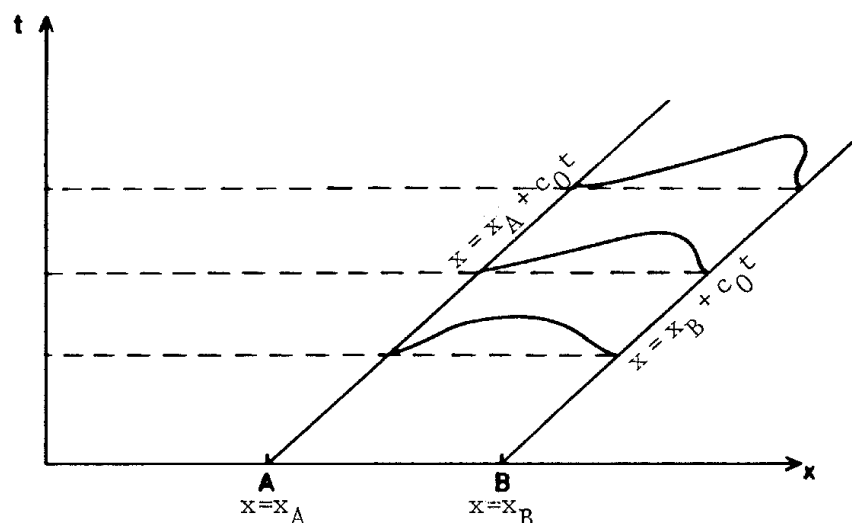
Etter en viss tid t_b vil bølgefronten være steil med vertikal tangent, og etter dette vil bølgen bryte. Ved brytning vil bølgeformen være en flertydig funksjon av x , og matematisk gir dette seg utslag i at flere karakteristikk skjærer hverandre i et punkt. Forutsetningen om at bare to karakteristikk, en C^+ og en C^- karakteristikk skjærer hverandre i hvert punkt i (x, t) -planet, innebærer derfor at vi betrakter bølgebevegelse før brytning inntreffer. I avsnitt 7.3 skal vi se nærmere på bølgeformer som kan oppstå etter at brytning har inntruffet.

7.2 Korteweg-de Vries likningen. Ikke-lineære bølger med permanent form. Solitoner.

En del viktige egenskaper ved lange bølger på grunt vann kan summeres opp ved tre enkle modell-likninger. Vi velger å betrakte bølger som beveger seg i x -aksens retning. Da vil likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (7.11)$$

hvor $c_0 = \sqrt{gH}$, beskrive lineære ikke-dispersive bølger. Likningen har løsning $\eta = f(x - c_0 t)$ hvor f er en vilkårlig funksjon. Bølgen beveger seg altså med



Figur 7.4:

konstant hastighet og uendret form. Likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (7.12)$$

beskriver i første tilnærmelse lineære dispersive bølger. Likningen har løsning $\eta = A e^{ik(x-ct)}$ hvor $c = c_0(1 - \frac{(kH)^2}{6})$. Dette er i overensstemmelse med den vi fant i avsnitt 2.1 for lange bølger på grunt vann etter å ha korrigert for avvik fra hydrostatisk trykkfordeling. Videre vil likningen

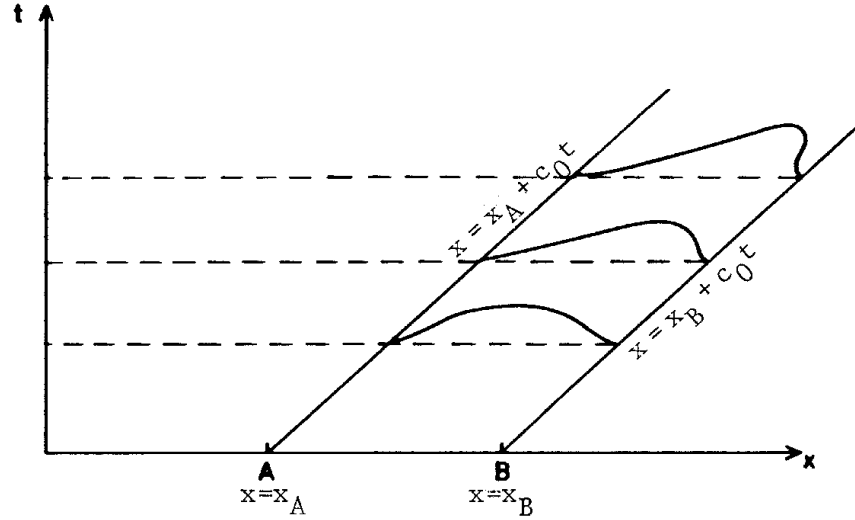
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (7.13)$$

i første tilnærmelse beskrive ikke-lineære bølger som brer seg med en hastighet som er avhengig av bølgeamplituden i henhold til hva vi fant i avsnitt 7.1. Likningen (7.13) uttrykker derfor at bølgeformen endres og at det utvikler seg en steil front dersom $\eta/H > 0$. Kombinerer man likningene (7.12) og (7.13) får man en likning som i første tilnærmelse inkorporerer både dispersjon og ikke-lineære effekter. Dette er Korteweg-de Vries likning (KdV-likningen).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (7.14)$$

KdV-likningen kan utledes fra bevegelseslikningene ved en formell rekkeutvikling hvor parametrene a/H og $(H/\lambda)^2$ tjener som utviklingsparametre. Her skal vi nøye oss med den intuitive og mindre stringente utledningen som er beskrevet ovenfor. Ved denne metoden får vi imidlertid fremhevet en viktig ting. En differensiallikning av KdV typen vil gjelde for all bølgebevegelse hvor ikke-lineariteten

Er gjort i
kap 2.11.2
Les dette
delkapitlet
likevel.



Figur 7.4:

konstant hastighet og uendret form. Likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (7.12)$$

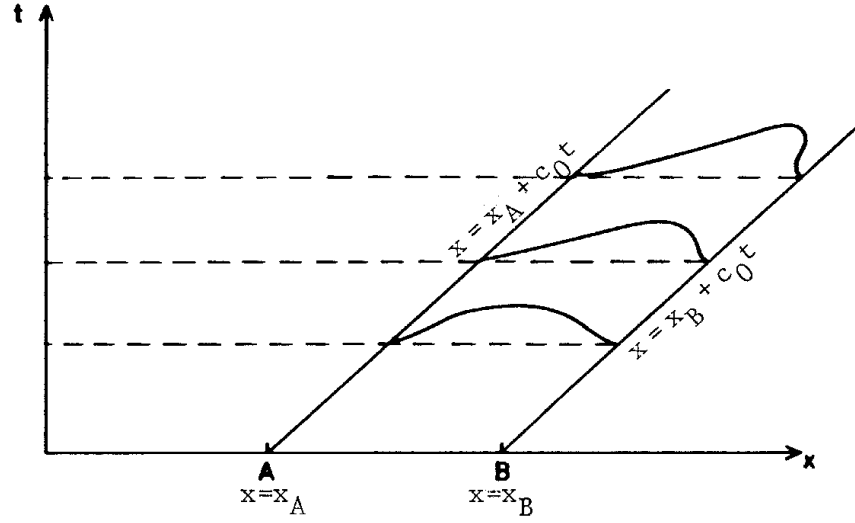
beskriver i første tilnærmelse lineære disperse bølger. Likningen har løsning $\eta = A e^{ik(x-ct)}$ hvor $c = c_0(1 - \frac{(kH)^2}{6})$. Dette er i overensstemmelse med den vi fant i avsnitt 2.1 for lange bølger på grunt vann etter å ha korrigert for avvik fra hydrostatisk trykkfordeling. Videre vil likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (7.13)$$

i første tilnærmelse beskrive ikke-lineære bølger som brer seg med en hastighet som er avhengig av bølgeamplituden i henhold til hva vi fant i avsnitt 7.1. Likningen (7.13) uttrykker derfor at bølgeformen endres og at det utvikler seg en steil front dersom $\eta/H > 0$. Kombinerer man likningene (7.12) og (7.13) får man en likning som i første tilnærmelse inkorporerer både dispersjon og ikke-lineære effekter. Dette er Korteweg-de Vries likning (KdV-likningen).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (7.14)$$

KdV-likningen kan utledes fra bevegelseslikningene ved en formell rekkeutvikling hvor parametrene a/H og $(H/\lambda)^2$ tjener som utviklingsparametre. Her skal vi nøye oss med den intuitive og mindre stringente utledningen som er beskrevet ovenfor. Ved denne metoden får vi imidlertid fremhevet en viktig ting. En differensiallikning av KdV typen vil gjelde for all bølgebevegelse hvor ikke-lineariteten



Figur 7.4:

konstant hastighet og uendret form. Likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (7.12)$$

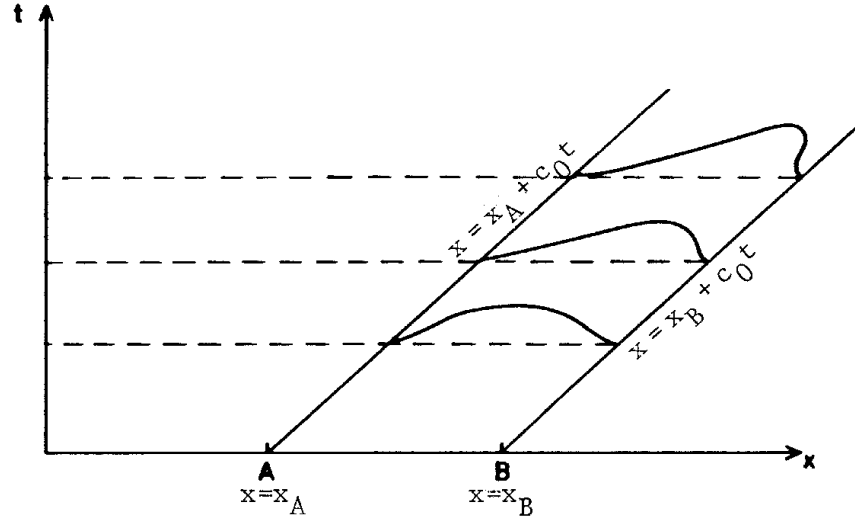
beskriver i første tilnærmelse lineære dispersive bølger. Likningen har løsning $\eta = A e^{ik(x-ct)}$ hvor $c = c_0(1 - \frac{(kH)^2}{6})$. Dette er i overensstemmelse med den vi fant i avsnitt 2.1 for lange bølger på grunt vann etter å ha korrigert for avvik fra hydrostatisk trykkfordeling. Videre vil likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (7.13)$$

i første tilnærmelse beskrive ikke-lineære bølger som brer seg med en hastighet som er avhengig av bølgeamplituden i henhold til hva vi fant i avsnitt 7.1. Likningen (7.13) uttrykker derfor at bølgeformen endres og at det utvikler seg en steil front dersom $\eta/H > 0$. Kombinerer man likningene (7.12) og (7.13) får man en likning som i første tilnærmelse inkorporerer både dispersjon og ikke-lineære effekter. Dette er Korteweg-de Vries likning (KdV-likningen).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (7.14)$$

KdV-likningen kan utledes fra bevegelseslikningene ved en formell rekkeutvikling hvor parametrene a/H og $(H/\lambda)^2$ tjener som utviklingsparametre. Her skal vi nøye oss med den intuitive og mindre stringente utledningen som er beskrevet ovenfor. Ved denne metoden får vi imidlertid fremhevet en viktig ting. En differensiallikning av KdV typen vil gjelde for all bølgebevegelse hvor ikke-lineariteten



Figur 7.4:

konstant hastighet og uendret form. Likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (7.12)$$

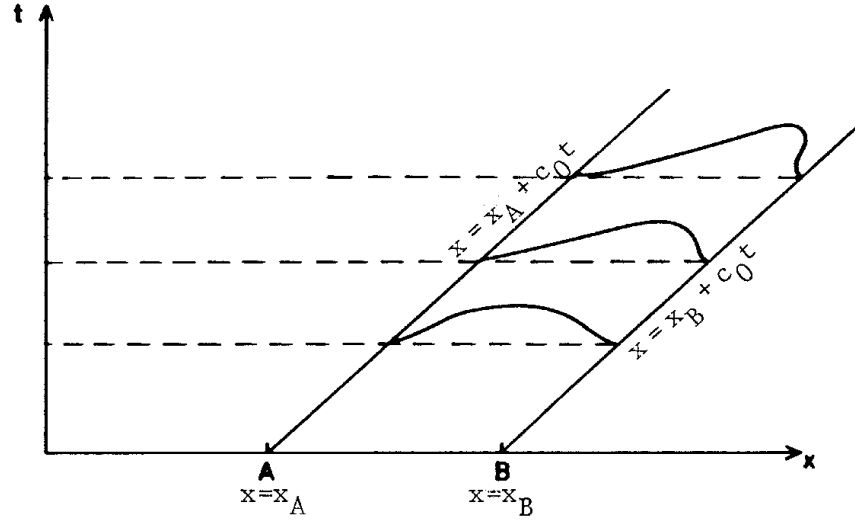
beskriver i første tilnærmelse lineære dispersive bølger. Likningen har løsning $\eta = A e^{ik(x-ct)}$ hvor $c = c_0(1 - \frac{(kH)^2}{6})$. Dette er i overensstemmelse med den vi fant i avsnitt 2.1 for lange bølger på grunt vann etter å ha korrigert for avvik fra hydrostatisk trykkfordeling. Videre vil likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (7.13)$$

i første tilnærmelse beskrive ikke-lineære bølger som brer seg med en hastighet som er avhengig av bølgeamplituden i henhold til hva vi fant i avsnitt 7.1. Likningen (7.13) uttrykker derfor at bølgeformen endres og at det utvikler seg en steil front dersom $\eta/H > 0$. Kombinerer man likningene (7.12) og (7.13) får man en likning som i første tilnærmelse inkorporerer både dispersjon og ikke-lineære effekter. Dette er Korteweg-de Vries likning (KdV-likningen).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (7.14)$$

KdV-likningen kan utledes fra bevegelseslikningene ved en formell rekkeutvikling hvor parametrene a/H og $(H/\lambda)^2$ tjener som utviklingsparametre. Her skal vi nøye oss med den intuitive og mindre stringente utledningen som er beskrevet ovenfor. Ved denne metoden får vi imidlertid fremhevet en viktig ting. En differensiallikning av KdV typen vil gjelde for all bølgebevegelse hvor ikke-lineariteten



Figur 7.4:

konstant hastighet og uendret form. Likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (7.12)$$

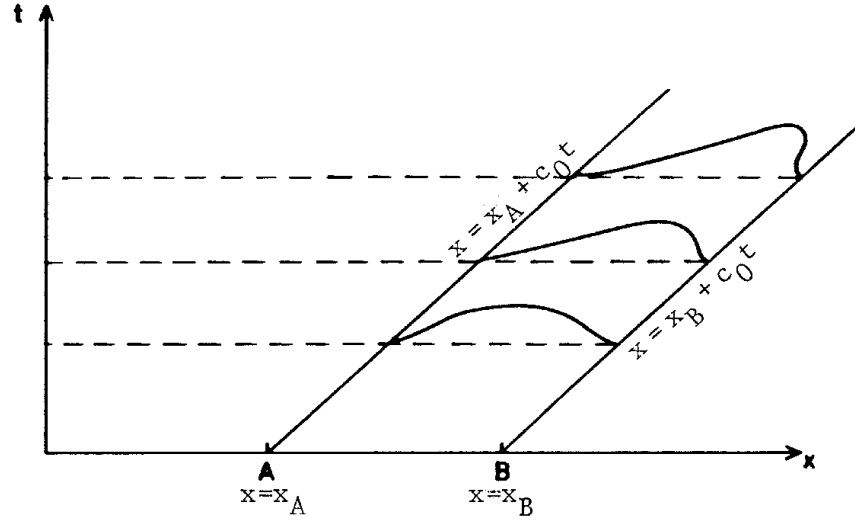
beskriver i første tilnærmelse lineære disperse bølger. Likningen har løsning $\eta = A e^{ik(x-ct)}$ hvor $c = c_0(1 - \frac{(kH)^2}{6})$. Dette er i overensstemmelse med den vi fant i avsnitt 2.1 for lange bølger på grunt vann etter å ha korrigert for avvik fra hydrostatisk trykkfordeling. Videre vil likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (7.13)$$

i første tilnærmelse beskrive ikke-lineære bølger som brer seg med en hastighet som er avhengig av bølgeamplituden i henhold til hva vi fant i avsnitt 7.1. Likningen (7.13) uttrykker derfor at bølgeformen endres og at det utvikler seg en steil front dersom $\eta/H > 0$. Kombinerer man likningene (7.12) og (7.13) får man en likning som i første tilnærmelse inkorporerer både dispersjon og ikke-lineære effekter. Dette er Korteweg-de Vries likning (KdV-likningen).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (7.14)$$

KdV-likningen kan utledes fra bevegelseslikningene ved en formell rekkeutvikling hvor parametrene a/H og $(H/\lambda)^2$ tjener som utviklingsparametre. Her skal vi nøye oss med den intuitive og mindre stringente utledningen som er beskrevet ovenfor. Ved denne metoden får vi imidlertid fremhevet en viktig ting. En differensiallikning av KdV typen vil gjelde for all bølgebevegelse hvor ikke-lineariteten



Figur 7.4:

konstant hastighet og uendret form. Likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (7.12)$$

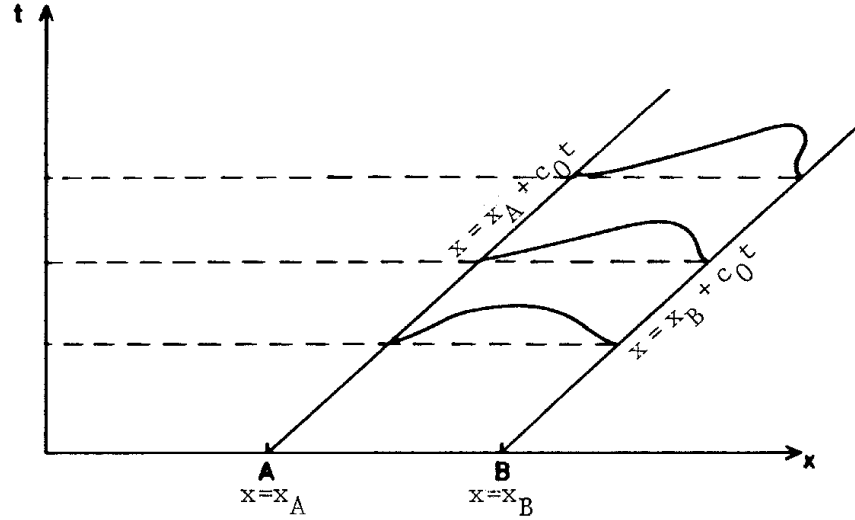
beskriver i første tilnærmelse lineære disperse bølger. Likningen har løsning $\eta = A e^{ik(x-ct)}$ hvor $c = c_0(1 - \frac{(kH)^2}{6})$. Dette er i overensstemmelse med den vi fant i avsnitt 2.1 for lange bølger på grunt vann etter å ha korrigert for avvik fra hydrostatisk trykkfordeling. Videre vil likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (7.13)$$

i første tilnærmelse beskrive ikke-lineære bølger som brer seg med en hastighet som er avhengig av bølgeamplituden i henhold til hva vi fant i avsnitt 7.1. Likningen (7.13) uttrykker derfor at bølgeformen endres og at det utvikler seg en steil front dersom $\eta/H > 0$. Kombinerer man likningene (7.12) og (7.13) får man en likning som i første tilnærmelse inkorporerer både dispersjon og ikke-lineære effekter. Dette er Korteweg-de Vries likning (KdV-likningen).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (7.14)$$

KdV-likningen kan utledes fra bevegelseslikningene ved en formell rekkeutvikling hvor parametrene a/H og $(H/\lambda)^2$ tjener som utviklingsparametre. Her skal vi nøye oss med den intuitive og mindre stringente utledningen som er beskrevet ovenfor. Ved denne metoden får vi imidlertid fremhevet en viktig ting. En differensiallikning av KdV typen vil gjelde for all bølgebevegelse hvor ikke-lineariteten



Figur 7.4:

konstant hastighet og uendret form. Likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (7.12)$$

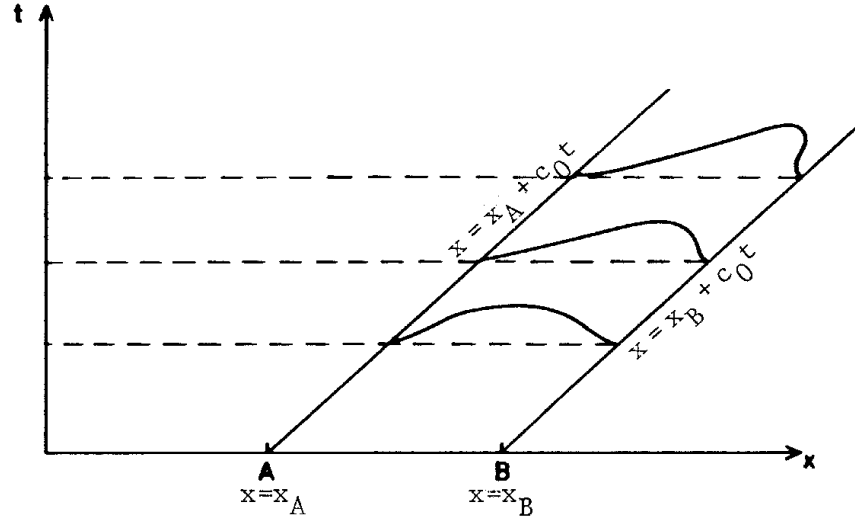
beskriver i første tilnærmelse lineære dispersive bølger. Likningen har løsning $\eta = A e^{ik(x-ct)}$ hvor $c = c_0(1 - \frac{(kH)^2}{6})$. Dette er i overensstemmelse med den vi fant i avsnitt 2.1 for lange bølger på grunt vann etter å ha korrigert for avvik fra hydrostatisk trykkfordeling. Videre vil likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (7.13)$$

i første tilnærmelse beskrive ikke-lineære bølger som brer seg med en hastighet som er avhengig av bølgeamplituden i henhold til hva vi fant i avsnitt 7.1. Likningen (7.13) uttrykker derfor at bølgeformen endres og at det utvikler seg en steil front dersom $\eta/H > 0$. Kombinerer man likningene (7.12) og (7.13) får man en likning som i første tilnærmelse inkorporerer både dispersjon og ikke-lineære effekter. Dette er Korteweg-de Vries likning (KdV-likningen).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (7.14)$$

KdV-likningen kan utledes fra bevegelseslikningene ved en formell rekkeutvikling hvor parametrene a/H og $(H/\lambda)^2$ tjener som utviklingsparametre. Her skal vi nøye oss med den intuitive og mindre stringente utledningen som er beskrevet ovenfor. Ved denne metoden får vi imidlertid fremhevet en viktig ting. En differensiallikning av KdV typen vil gjelde for all bølgebevegelse hvor ikke-lineariteten



Figur 7.4:

konstant hastighet og uendret form. Likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (7.12)$$

beskriver i første tilnærmelse lineære dispersive bølger. Likningen har løsning $\eta = A e^{ik(x-ct)}$ hvor $c = c_0(1 - \frac{(kH)^2}{6})$. Dette er i overensstemmelse med den vi fant i avsnitt 2.1 for lange bølger på grunt vann etter å ha korrigert for avvik fra hydrostatisk trykkfordeling. Videre vil likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (7.13)$$

i første tilnærmelse beskrive ikke-lineære bølger som brer seg med en hastighet som er avhengig av bølgeamplituden i henhold til hva vi fant i avsnitt 7.1. Likningen (7.13) uttrykker derfor at bølgeformen endres og at det utvikler seg en steil front dersom $\eta/H > 0$. Kombinerer man likningene (7.12) og (7.13) får man en likning som i første tilnærmelse inkorporerer både dispersjon og ikke-lineære effekter. Dette er Korteweg-de Vries likning (KdV-likningen).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (7.14)$$

KdV-likningen kan utledes fra bevegelseslikningene ved en formell rekkeutvikling hvor parametrene a/H og $(H/\lambda)^2$ tjener som utviklingsparametre. Her skal vi nøye oss med den intuitive og mindre stringente utledningen som er beskrevet ovenfor. Ved denne metoden får vi imidlertid fremhevet en viktig ting. En differensiallikning av KdV typen vil gjelde for all bølgebevegelse hvor ikke-lineariteten