

FORELESNINGER I BØLGETEORI

av

Bjørn Gjevik,
Geir K. Pedersen
og Karsten Trulsen

Matematisk Institutt
Universitetet i Oslo

Våren 2007

Innhold

1	INNLEDNING	5
1.1	Grunnleggende modeller og begreper	6
2	OVERFLATEBØLGER I VÆSKER	11
2.1	Grenseflatebetingelsene ved væskeoverflaten	12
2.2	Dispersjonsrelasjonen for lineære kapillar- og tyngdebølger	16
2.3	Partikkelbevegelsen i overflatebølger	19
2.4	Den mekaniske energien i overflate-bølger	21
2.5	En enkel kinematisk tolkning av gruppehastigheten. Gruppehastighet for overflatebølger.	28
2.6	Klein-Gordon likningen	30
2.7	Overflatebølger generert ved en lokal forstyrrelse i væsken	33
2.8	Stasjonær fase approksimasjonen. Asymptotisk uttrykk for Fourier integralet.	41
2.9	Asymptotisk utvikling av bølgefront	44
2.10	Lange bølger på grunt vann	46
2.11	Utleddning av ikkelineære gruntvannslikninger	56
2.11.1	Utleddning av Boussinesq likningene	56
2.11.2	Utleddning av KdV-likningen	58
2.12	Viskositetens innvirkning på overflatebølger	60
2.13	Svingninger i basseng	63
3	GENERELLE EGENSKAPER VED PERIODISKE OG NESTEN PERIODISKE BØLGER	68
3.1	Bølgekinematikk for en-dimensjonal bølgeforplantning	68
3.2	Hamiltons likninger. Bølge-partikkel analogien	71
3.3	Bølgekinematikk for fler-dimensjonal bølgeforplantning. Stråleteori	72
3.4	Eikonal-likningen og likningen for amplitudevariasjon langs strålene	76
3.5	Amplitudevariasjonen i nesten periodiske bølgetog	80
4	FANGEDE BØLGER	85
4.1	Tyngdebølger fanget på grunn av bunntopografien	85
4.2	WKB-metoden	90
4.3	Bølger fanget på grunn av rotasjonseffekter. Kelvin-bølger	92

5	BØLGER PÅ STRØM. LE- BØLGER OG LO-BØLGER. SKIPSBØLGER. BØLGER	
5.1	Le- og lo-bølger	96
5.2	Amplituden for to-dimensjonale le-bølger	97
5.3	Skipsbølgemønsteret	101
5.4	Bølgemotstand	112
5.5	Overflatebølger modifisert av strøm som varierer i styrke i horisontal retning	113
6	INTERNE TYNGDEBØLGER	117
6.1	Interne bølger i inkompressible væsker hvor diffusjonsprosessen kan neglisjeres. Dispersjons	
6.2	Interne bølger knyttet til sprangsjiktet	122
7	IKKE-LINÆRE BØLGER	127
7.1	Ikke-lineære bølger på grunt vann. Riemann's løsningsmetode. Bølgebrytning.	128
7.2	Korteweg-de Vries likningen. Ikke-lineære bølger med permanent form. Solitoner.	131
7.2.1	Mer om solitoner	134
7.3	Vannstandssprang. Hydraulisk sjokk.	135
A	Trykkenheter	139
	Bibliografi	141
	Register	143

Kapittel 1

INNLEDNING

Det er vanskelig å gi en generell og samtidig presis definisjon av hva bølgebevegelse er, men følgende løse formulering kan tjene som et nyttig utgangspunkt: En bølge er et signal som forplanter seg fra en del av et medium til en annen del med en karakteristisk hastighet. Signalet kan være hvilken som helst forstyrrelse som kan identifiseres slik at dens posisjon kan bestemmes til enhver tid. Signalet kan endre form og størrelse og forplantningshastigheten kan også endre seg under utbredelsen, men endringen er av en slik art at signalet kan gjenkjennes. Etter dette kan både periodiske forstyrrelser (bølgetog) og isolerte forstyrrelser (pulser) som beveger seg gjennom mediet betegnes som bølger.

Bølgebevegelsen opptrer i væsker, gasser, elastiske stoff og i vakuum, men bølgene kan ha forskjellige fysikalske årsaker. Eksempelvis er overflatebølger i vann forårsaket av tyngdekraften eller overflatespenningen, treghetsbølger i havet og atmosfæren er forårsaket av jordrotasjonen, seismiske bølger er forårsaket av elastiske krefter og radiobølger i vakuum skyldes elektromagnetiske krefter. Selv om årsakene til bølgebevegelsen kan være forskjellige, så har de forskjellige bølgetypene felles egenskaper og mange av de matematiske metodene som benyttes i undersøkelser av forskjellige bølgefenomen, er de samme. En kan derfor med full rett tale om en bølgeteori felles for alle bølgeformer.

Hovedhensikten med denne forelesningsserie er å gi kunnskap om viktige former for bølgebevegelse i væsker og gasser. Vi skal ikke søke å gi en komplett fremstilling av alle mulige bølgetyper. Vi skal heller gjøre utvalget slik at vi samtidig blir kjent med viktige felles egenskaper ved forskjellige bølgetyper, dessuten vil vi søke å gjøre utvalget slik at vi samtidig blir kjent med viktige matematiske metoder innen bølgeteori. For en mer fullstendig behandling av emnet henvises det til bøker av Lamb (1932), Stoker (1957), Tolstoy (1973), Whitham (1974) og Lighthill (1978). I de to siste bøkene vil man også finne referanser til de viktigste nyere arbeidene i feltet.

1.1 Grunnleggende modeller og begreper

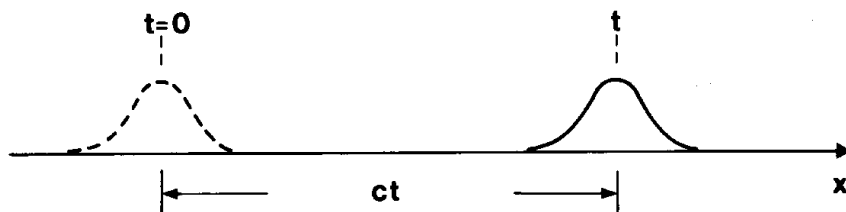
Den enkleste matematiske modell for bølgeutbredelse er gitt ved likningen

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

hvor x er en romkoordinat, t er tiden og c er en konstant. Likningen har løsningen

$$\phi = f(x - ct)$$

hvor f er en vilkårlig funksjon. Løsningen fremstiller en bølge som brer seg i x -aksens retning med konstant hastighet c .



Figur 1.1: En-dimensjonal bølgeutbredelse.

Den tre-dimensjonale bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (1.2)$$

beskriver forplantningen av lydbølger, seismiske bølger og elektromagnetiske bølger i medium med uniform forplantningshastighet c . En løsning av (1.2) kan skrives

$$\phi = \frac{f(r - ct)}{r}$$

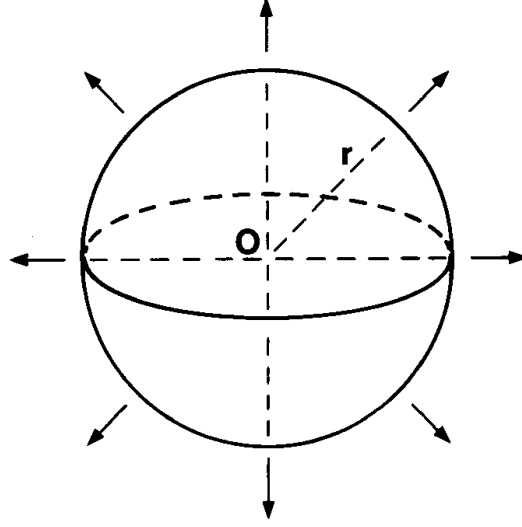
hvor r er avstanden fra et fast punkt O i rommet. Løsningen beskriver en kulesymmetrisk bølge som brer seg ut fra O , og bølgen dempes med en faktor $1/r$ under utbredelsen fordi energien fordeles over stadig større kuleskall (sfærisk dempning).

Bølgeligningen har også løsning som representerer en plan bølge

$$\phi = A \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} + \text{kompleks konjugert} \quad (1.3)$$

hvor A er konstant og de to andre konstantene ω og \mathbf{k} er forbundet ved relasjonen

$$\omega^2 = (\mathbf{k}c)^2 \quad (1.4)$$



Figur 1.2: Kulesymmetrisk bølgeutbredelse.

Vektoren $\mathbf{r} = (x, y, z)$ er posisjonsvektoren i et kartesisk koordinatsystem med akser x , y og z . Størrelsen

$$\chi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad (1.5)$$

er *fasefunksjonen* og likningen

$$\chi = \chi_0 = \text{konstant}$$

beskriver ved et gitt tidspunkt et plan som blir kalt *faseflaten*. En bølgedal eller bølgetopp er for eksempel gitt ved en fast verdi av fasefunksjonen. Vektoren \mathbf{k} er *bølgetallsvektoren* og dens komponenter langs aksene x , y og z betegnes henholdsvis k_i ($i = 1, 2, 3$) eller k_x , k_y og k_z . Det følger fra (1.5) at

$$\mathbf{k} = \nabla \chi \quad (1.6)$$

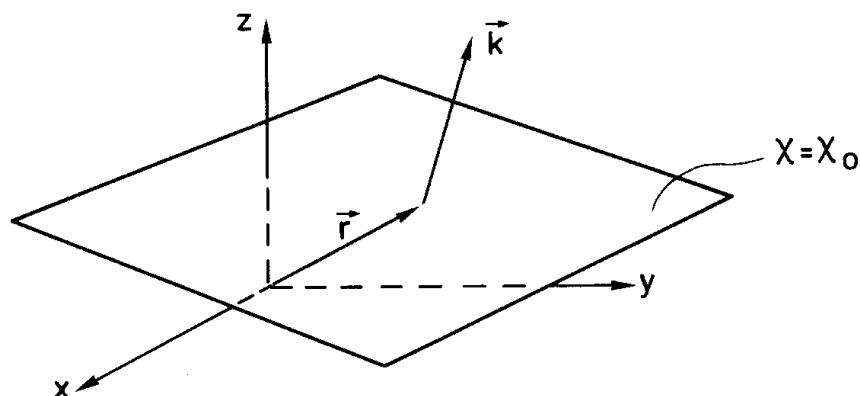
som viser at bølgetallsvektoren er normal til faseflaten.

Bølgelengden λ er avstanden mellom to faseflater hvor fasekonstanten χ_0 endrer seg med verdien 2π fra den ene flaten til den andre. Vi har at

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (1.7)$$

hvor $k = |\mathbf{k}|$ er *bølgetallet*. Bølgens vinkelhastighet er ω . *Perioden* T og *frekvensen* n er gitt ved

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ n &= \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (1.8)$$



Figur 1.3: Faseflate.

Vi betegner A som (halvparten av) den *komplekse amplituden* for bølgen, og den *fysikalske amplituden* er i dette tilfellet $2\text{Re}(A)$. Faseflaten beveger seg med hastighet

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (1.9)$$

i flatenormalens retning, og c blir derfor kalt *fasehastigheten*. Siden c i dette tilfellet er konstant, er fasehastigheten uavhengig av bølgelengden, og vi sier at bølgene er *ikke-dispersive* eller *dispersjonsløse*.

For de lineære likningene (1.1) og (1.2) gjelder superposisjonsprinsippet. En sum av løsninger av formen (1.3) er også løsning av bølgelikningen, og ved hjelp av Fouriers teorem kan man derved finne planbølger av vilkårlig form.

Nå fremkommer bølgelikningen (1.2) ved at man gjør en rekke forenklede antakelser om bølgebevegelsen og mediets natur. Forenklingen kan være noe forskjellig alt etter hvilken bølgetype man behandler, men de viktigste forenklingene for eksempel i akustikk og elastisitetsteori er:

1. Små bølgeamplituder slik at grunnlikningene kan lineariseres.
2. Varmeledning og viskositet neglisjeres.
3. Mediet er homogent.

I mange anvendelser vil disse antagelsene ofte ikke være oppfylt, og særlig når det gjelder ikke-lineære bølger og bølger i inhomogene media foregår det i dag en stor forskningsaktivitet. Vi skal gjennom eksempler vise viktige egenskaper ved slike bølgefenomenen.

I elementære fremstillinger av bølgeteorien blir det ofte skapt det inntrykk at det til all bølgebevegelse er knyttet hyperbolske likninger av typen (1.1) eller (1.2). Dette er ikke riktig. Den mest dagligdagse form for bølger, nemlig overflatebølger i vann, fremkommer matematisk som løsninger av Laplace likning med

kompliserte randbetingelser. Vannbølger tilhører en klasse av *dispersive bølger*, og for disse bølgene er fasehastigheten avhengig av bølgelengden. Dispersive bølger opptrer også som plane bølger tilsvarende (1.3), men relasjonen mellom vinkelhastighet og bølgetallsvektoren er forskjellig. I det generelle tilfellet er ω både avhengig av størrelse og retning av bølgetallsvektoren, og vi kan skrive dette ved

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) \quad (1.10)$$

Relasjonen mellom ω og \mathbf{k} blir kalt *dispersjonsrelasjonen*. I mange tilfeller er dispersjonsrelasjonen *isotrop*. Dette innebærer at ω er uavhengig av retningen av bølgetallsvektoren og avhenger bare av bølgetallet slik at

$$\omega = \omega(k) \quad (1.11)$$

Ved isotrop dispersjon er fasehastigheten uavhengig av bølgenes forplantningsretning. Ved anisotrop dispersjon derimot, vil i alminnelighet fasehastigheten være forskjellig alt etter hvilken retning bølgen forplanter seg i. Dette er tilfelle for eksempel for elastiske bølger i visse typer sedimentlag og overflatebølger i havet som forplanter seg i områder med strømskjær.

Øvingsoppgaver

1. Dispersjonsrelasjoner.

Nedenfor er gitt en serie ligninger. Hvilke har løsninger på formen $\eta = A \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}$? Finn og drøft relasjonen mellom ω og \mathbf{k} . Hvilke er bølgeligninger?

- (a) $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$
- (b) $\frac{\partial \eta}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$
- (c) $\frac{\partial \eta}{\partial t} = c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$
- (d) $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + a \frac{\partial \eta}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$
- (e) $\frac{\partial^4 \eta}{\partial t^4} - \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = 0$
- (f) $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla^2 \eta + \frac{\epsilon}{3} \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$
- (g) $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (x \frac{\partial \eta}{\partial x})$
- (h) $\frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\mu^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$

2. Standard bølgelikning og initialbetingelser.

En funksjon η er definert for alle x og oppfyller likningen gitt i oppgave 1a. Hvor mange initialbetingelser er nødvendig for å sikre en entydig løsning? Gi et eksempel på et slikt sett av initialbetingelser. Finn løsningen ved et vilkårlig senere tidspunkt. Gjenta dette for 1c med $\epsilon = 0$. Diskuter tilfellet $\epsilon \neq 0$.

Kapittel 2

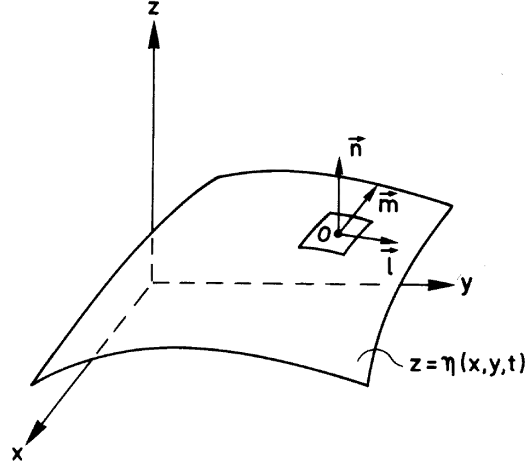
OVERFLATEBØLGER I VÆSKER

Overflatebølger forårsaket av tyngdekraften eller overflatespenningen er et dagligdags fenomen kjent for alle. Denne form for bølgebevegelse er også blitt beskrevet og studert i tallrike vitenskapelige arbeid, og det har vist seg at overflatebølgene fremviser et mangfold av egenskaper som man i mange tilfeller kan gjenfinne i andre former for bølgebevegelse. Dette gjør at overflatebølger inntar en sentral plass i bølgeteorien. Den betydningen som overflatebølgene har for forskjellige virksamheter i det praktiske liv, bidrar dessuten til at overflatebølger fortsatt er et interessant forskningsfelt.

Alt etter som om overflatespenningen eller tyngdekraften er dominerende for bølgebevegelsen, benytter vi betegnelsene *kapillarbølger* eller *tyngdebølger*. I noen tilfeller vil bølgebevegelsen være like mye influert av overflatespenningen som av tyngdekraften. Vi benytter da betegnelsen *kapillar-tyngdebølger* om disse bølgene. Både kapillar- og tyngdebølger vil være påvirket av viskositeten i væsken, slik at de korteste bølgene er de som dempes sterkest av friksjonens virkning. For bølgebevegelse på dypt vann fører viskositeten bare til betydelig dempning for bølger med bølgelengde mindre enn ca. 1 cm. Kompressibiliteten i væsken vil vanligvis være uten nevneverdig betydning for overflatebølgene.

Nær beslektet til overflatebølger er bølger som opptrer på skilleflaten mellom væsker med forskjellig tetthet. Noen eksempler på dette vil bli gitt i avsnittet om interne bølger.

2.1 Grenseflatebetingelsene ved væskeoverflaten



Figur 2.1: Ortogonale enhetsvektorer på overflate.

I det følgende får vi ofte bruk for de matematiske uttrykk for grenseflatebetingelsene ved væskeoverflaten, og innledningsvis skal vi i korthet utlede disse. Vi skal her behandle det tilfellet hvor en væske grenser til en overliggende gass med mye mindre egenvekt slik at en kan neglisjere bevegelsen i den overliggende gassen. Av den grunn kan vi regne med at det over væsken er et konstant isotropt trykk som vi betegner med p_a .

Vi lar flaten $z = \eta(x, y, t)$ betegne overflaten. z -aksen er rettet vertikalt og x - og y -aksene er horisontale, og væsken som vi betrakter fyller rommet under flaten. Når væsken er i ro og i likevekt, ligger overflaten i xy -planet. Enhetsvektoren \mathbf{n} betegner flatenormalen til flaten i punktet O . Denne er valgt slik at vektoren peker ut fra væsken. Enhetsvektorene \mathbf{l} og \mathbf{m} ligger i flatens tangentplan i punktet O , og vektorene \mathbf{l} , \mathbf{m} og \mathbf{n} utgjør et sett av ortogonale enhetsvektorer. Et slikt sett er for eksempel gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= (0, 1, \alpha_2) / \sqrt{1 + \alpha_2^2} \\ \mathbf{m} &= (-\alpha_2^2 - 1, \alpha_1 \alpha_2, -\alpha_1) / \sqrt{(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2)(1 + \alpha_2^2)} \\ \mathbf{n} &= (-\alpha_1, -\alpha_2, 1) / \sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

For å forenkle skrivingen har vi innført størrelsene $\alpha_i = \partial\eta/\partial x_i$, hvor $i = 1, 2$ betegner henholdsvis x og y .

På undersiden av et flatelement med areal dA som ligger i overflaten med punktet O som sentrum (se figur 2.1) virker krefter forårsaket av trykket og de viskøse spenningene i væsken. Med de forutsetninger som vi har gjort her, virker

det også en konstant trykk-kraft på oversiden av flateelementet. Resultanten av disse kreftene kan skrives

$$[(p - p_a)\mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \mathcal{P}]dA \quad (2.2)$$

hvor \mathcal{P} er spenningstensoren for de viskøse spenningene.

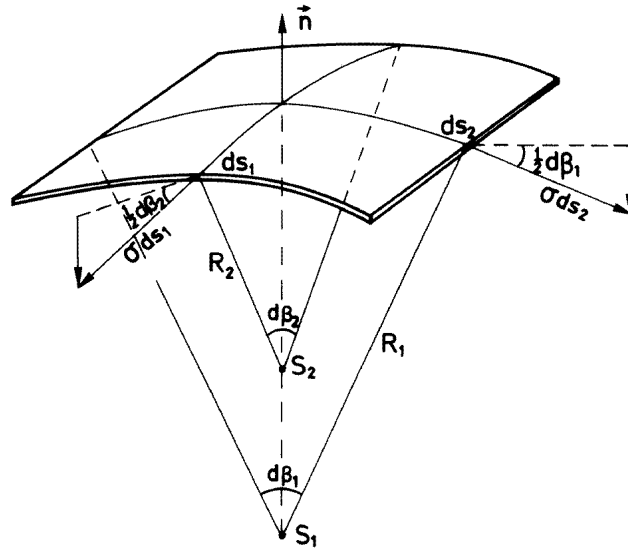
Langs flateelementets rand virker i tillegg krefter på grunn av overflatespenningen σ (kraft pr. lengdeenhet), rettet langs tangenten til flaten i randa. La punktet O være inneholdt i et enkelt sammenhengende område Ω på overflaten, avgrenset av randa Γ . Kappilarkraften som virker på et linjesegment $d\mathbf{s}$ langs randa Γ kan skrives som $-\sigma\mathbf{n} \times d\mathbf{s}$, hvor \mathbf{n} er overflatenormalen for linjesegmentet $d\mathbf{s}$. Den totale kappilarkraften som virker på den omkringliggende overflaten er

$$\mathbf{F} = - \oint_{\Gamma} \sigma \mathbf{n} \times d\mathbf{s}.$$

Dersom σ er konstant langs overflaten, så kan vi ved hjelp av Stokes sats, og ved å betrakte grensen at $\Omega \rightarrow dA$ skrumper inn mot punktet O , vise at kappilarkraften på flateelementet er rettet langs normalvektoren \mathbf{n} i O , og er gitt ved

$$d\mathbf{F} = \mathbf{n} dF_n = -\sigma \mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{n} dA.$$

Størrelsen av resultantkraften kan alternativt uttrykkes ved hovedkrumningsradiene for flaten. I figur 2.2 er flateelementet valgt slik at sidekantene ds_1 og ds_2 faller langs hovedkrumningsretningene for flaten. På figuren betegner S_1 og S_2



Figur 2.2: Hovedkrumningsradiene til en overflate

krumningssentrene og R_1 og R_2 hovedkrumningsradiene for flaten. Vinklene $d\beta_1$ og $d\beta_2$ er følgelig gitt ved relasjonene

$$d\beta_1 = \frac{ds_1}{R_1} \quad \text{og} \quad d\beta_2 = \frac{ds_2}{R_2}$$

Vi finner derfor at

$$F_n = -2\sigma ds_2 \frac{d\beta_1}{2} - 2\sigma ds_1 \frac{d\beta_2}{2} = -\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dA \quad (2.3)$$

hvor R_1 og R_2 er valgt positive når de tilsvarende krumningssentrene ligger inne i væsken. Størrelsen $\frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$ blir vanligvis betegnet som flatens middelkrumning.

For å unngå at væskepartiklene i overflaten blir utsatt for uendelig (eller uvirkelig) store akselerasjoner, så må resultantkraften av de spennings- og trykkkreftene som virker på flatelementet være null. Dette medfører at de *dynamiske grenseflatebetingelser* ved $z = \eta(x, y, t)$ kan skrives

$$\begin{aligned} p - \mathbf{n} \cdot \mathcal{P} \cdot \mathbf{n} - \sigma \nabla \cdot \mathbf{n} &= p_a \\ \mathbf{n} \cdot \mathcal{P} \cdot \mathbf{l} &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathcal{P} \cdot \mathbf{m} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

I tillegg til betingelsene (2.4) har man den kinematiske grenseflatebetingelsen ved overflaten. Vanligvis er massetransporten gjennom overflaten på grunn av fordampning eller diffusjonsprosesser ubetydelig, og man kan med god tilnærming anta at væskepartiklene i overflaten beveger seg tangensielt (eventuelt ligger i ro) i forhold til flaten. Dersom vektoren \mathbf{v} med komponenter u , v og w betegner hastigheten i væsken og dt er et lite tidsintervall, så må følgelig væskepartiklene ved overflaten bevege seg slik at

$$z + w dt = \eta(x + u dt, y + v dt, t + dt)$$

Ved Taylorutvikling etter potenser av dt finner vi så den *kinematiske grenseflatebetingelsen* ved overflaten

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta \quad (2.5)$$

Likningene (2.4) og (2.5) er ikkelineære og de variable u , v , w og η inngår på en meget komplisert måte. Vi skal derfor behandle noen spesialtilfeller og dessuten vise hvordan grenseflatebetingelsene forenkler seg ved linearisering.

Dersom man antar at væsken er friksjonsfri, homogen og inkompressibel og at bevegelsen er virvelfri, så kan strømhastigheten avledes av et potensiale ϕ og

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (2.6)$$

Trykket i væsken er da bestemt ved Eulers trykklikning (se f.eks. Gjevik, 1981)

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + gz \right) + p_a + f(t)$$

hvor ρ er tettheten i væsken og g er tyngdens akselerasjon. $f(t)$ er en funksjon av t som er bestemt av forholdene i et punkt i væsken. Vi tenker oss på samme måte som beskrevet av Gjevik (1981) at $f(t)$ kan trekkes inn i ϕ uten at dette fører til noen endring i hastighetsfeltet. Trykket ved overflaten kan derfor skrives

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right)_{z=\eta} - \rho g \eta + p_a \quad (2.7)$$

Ved Taylor utvikling av uttrykket i parentes etter potenser av η

$$p = -\rho \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} + g\eta \right] - \rho \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} \eta + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right]_{z=0} + \cdots + p_a \quad (2.8)$$

hvor \cdots angir høyere ordens ledd i rekkeutviklingen.

Dersom bølgeamplituden er liten nok, uten at vi på det nåværende stadium kan angi presise grenser, så kan de ledd hvor strømparametrene inngår i kvadrat eller i høyere potenser sløyfes i forhold til de leddene som er lineære i strømparametrene. Når man har funnet en bølgebevegelse som tilfredsstiller de lineariserte likninger som derved fremkommer, kan man for eksempel sette denne løsningen inn i de ikkelineære leddene. Derved kan man finne et estimat på hvor liten amplituden må være for at de høyere ordens ledd kan sløyfes. Vi skal komme tilbake til dette i senere avsnitt.

Det lineariserte uttrykket for trykket ved $z = \eta$ kan derfor skrives

$$p = -\rho \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} + g\eta \right] + p_a \quad (2.9)$$

På tilsvarende måte kan man gå frem for å linearisere andre ledd som opptrer i grenseflatebetingelsene (2.4). Uttrykket hvor overflatespenningen inngår kan skrives

$$-\sigma \nabla \cdot \mathbf{n} = \sigma \frac{\eta_{xx}(1 + \eta_y^2) + \eta_{yy}(1 + \eta_x^2) - 2\eta_x \eta_y \eta_{xy}}{(1 + \eta_x^2 + \eta_y^2)^{3/2}}$$

slik at man ved linearisering får

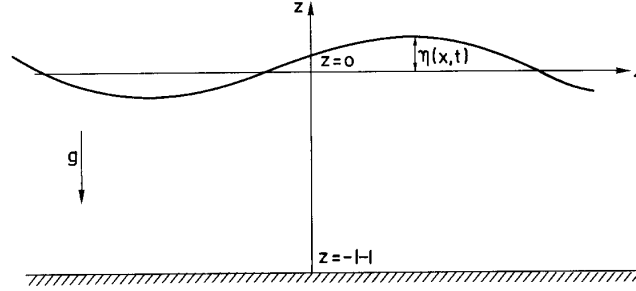
$$-\sigma \nabla \cdot \mathbf{n} = \sigma \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right). \quad (2.10)$$

Øvingsoppgaver

1. Finn de lineariserte uttrykk for de viskøse spenningskomponentene i (2.4). Anta Newtonsk væske.
2. Finn ved rekkeutvikling de lineære og kvadratiske ledd i den kinematiske grenseflatebetingelse (2.5).

2.2 Dispersjonsrelasjonen for lineære kapillar- og tyngdebølger

Vi skal betrakte to-dimensjonale overflatebølger i en friksjonsfri, homogen og inkompressibel væske, begrenset ved en plan og horisontal bunnflate. Vi legger



Figur 2.3: Todimensjonal bølge

aksekorset slik som vist i figur 2.3 hvor x -aksen danner overflaten når væsken er i ro og likevekt. Dybden av væskelaget er da H .

Bølgebevegelsen forutsettes å være virvelfri og hastighetspotensialet tilfredsstiller Laplace-likningen

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.11)$$

For lineære bølger kan grenseflatebetingelsene ved overflaten i henhold til (2.4), (2.9), (2.10) og resultater fra øvelser under punkt 2, skrives

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.12)$$

for $z = 0$. I tillegg til disse betingelser kommer grenseflatebetingelsen ved bunnen $z = -H$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (2.13)$$

En bølgeløsning av likningene (2.11)–(2.13) kan skrives

$$\begin{aligned} \eta &= a \sin(kx - \omega t) \\ \phi &= -\frac{a\omega}{k \sinh kH} \cosh k(z + H) \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

hvor a er bølgeamplituden. Bølgetallet og vinkelhastigheten er forbundet ved dispersjonsrelasjonen

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}\right) \tanh kH. \quad (2.15)$$

Fasehastigheten for kapillar- og tyngdebølger er derfor gitt ved

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tanh kH}{kH} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

hvor $c_0 = \sqrt{gH}$. Likningen (2.16) viser at fasehastigheten er lite påvirket av overflatespenningen dersom $\frac{\sigma k^2}{\rho g} \ll 1$. Dette medfører at overflatespenningen kan neglisjeres for bølger med bølgelengde meget større enn λ_m hvor

$$\lambda_m = 2\pi \left(\frac{\sigma}{\rho g} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.17)$$

På den andre siden dominerer overflatespenningen bevegelsen når bølgelengden er mye mindre enn λ_m . For rent vann ved 20°C er $\sigma = 7.4 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, og med $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ er $\lambda_m = 1.73 \text{ cm}$.

I de tilfeller hvor bølgelengden er mye mindre enn H og derved $kH \gg 1$ kan vi med god tilnærming sette $\tanh kH = 1$ og vi får fra (2.16) at

$$c = \left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.18)$$

I dette tilfellet har fasehastigheten en minimumsverdi

$$c_m = 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma g}{\rho} \right)^{\frac{1}{4}}$$

for bølgelengden λ_m . For rent vann ved 20°C er $c_m = 23 \text{ cm/s}$. Innfører vi størrelsene λ_m og c_m så kan (2.18) skrives

$$\frac{c}{c_m} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{\lambda} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

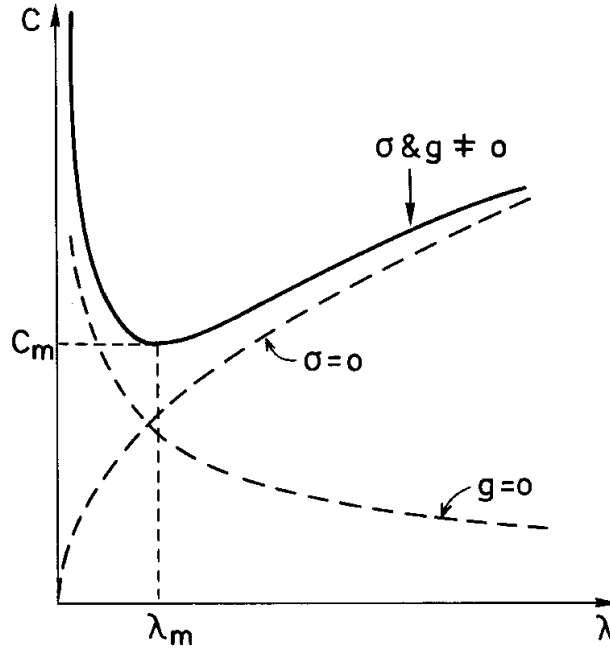
Vi legger merke til at dersom bølgelengden er større enn λ_m så er forplantningshastigheten større for lange bølger enn for korte, mens det motsatte er tilfelle for bølgelengder kortere enn λ_m . c som funksjon av bølgelengden er fremstilt i figur 2.4. Dersom bølgelengden er mye større enn H slik at $kH \ll 1$, kan vi sette

$$\tanh kH = kH - \frac{(kH)^3}{3}$$

og vi finner fra (2.16) at

$$c = c_0 \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\rho g H^2} - \frac{1}{3} \right) \frac{k^2 H^2}{2} \right]. \quad (2.19)$$

Hvis $\sigma = \frac{1}{3} \rho g H^2$, som for rent vann inntreffer for $H = 0.48 \text{ cm}$, så viser (2.19) at bølgene er ikke-dispersive i analogi med akustiske bølger. Dette blir noen ganger



Figur 2.4: Fasehastigheten c som funksjon av bølgelengden λ for bølger på dypt vann.

utnyttet til eksperimentelt å studere egenskaper for ikke-dispersive lydbølger ved hjelp av modeller i vann.

Med de løsningene av de lineære likningene som vi nå har funnet, er vi i stand til å angi betingelser for at lineariseringen skal være gyldig. Går vi tilbake til likning (2.8), så er $(\frac{\partial \phi}{\partial t})_{z=0}$ et typisk lineært ledd og $u^2 = (\frac{\partial \phi}{\partial x})_{z=0}^2$ er til andre orden et typisk ikkelineært ledd. Benytter vi løsningen (2.14), finner vi at forholdet mellom det ikkelineære leddet og det lineære leddet maksimalt er

$$\frac{ak}{\tanh kH}.$$

Skal det ikkelineære leddet kunne sløyfes i forhold til det lineære leddet, så må forholdet mellom leddene være meget mindre enn 1. Dette innebærer at lineariseringen er gyldig dersom $a/\lambda \ll 1$ når $kH \gg 1$ og $a/H \ll 1$ når $kH \ll 1$. I begge tilfeller vil altså lineariseringen være gyldig dersom bølgenes steilhet er tilstrekkelig liten.

Øvingsoppgaver

1. En plan bølge har bølgetallsvektor $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ og vinkelhastighet ω . Gi en geometrisk/fysisk tolkning av størrelsene ω/k_x og ω/k_y . Finn bølgetall, bølgelengde og fasehastighet for en tyngdebølge på dypt vann med periode

10 s. Finn bølgetallsvektoren når bølgen forplanter seg i en retning som danner en vinkel 30° med x -aksen.

2. Finn trykket i væsken for tyngde-kapillar bølger, og bestem trykket ved bunnen. Hvordan varierer trykket med z når $kH \ll 1$? Hvilke bølgeperioder kan registreres av en trykkmåler som ligger på bunnen på 100 m dyp med en følsomhet begrenset til $1/10000$ del av det hydrostatiske trykket? Bølgesteilheten $2a/\lambda$ settes lik 0.1.
3. Bestem den kinetiske energitettheten $\frac{\rho}{2}v^2$ for tyngdebølger på dypt vann. Hvilke betingelser må vi legge på bølgeamplituden a for at maksimalverdien av det ikkelineære leddet $\frac{\rho}{2}v^2$ er mindre enn 10% av typiske lineære ledd som inngår i Eulers trykk-likning? Uttrykk dette som et krav på bølgeamplituden når λ ligger mellom 1 m og 300 m.

2.3 Partikkelbevegelsen i overflatebølger

Vi tenker oss at vi merker den væskepartikkel som ved tiden t_0 har posisjon \mathbf{r}_0 slik at vi kan følge dens bevegelse. Partikkelen har ved et senere tidspunkt posisjonen \mathbf{r} . Hvis hastigheten \mathbf{v} i feltet er kjent, så er \mathbf{r} bestemt ved følgende integrallikning:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dt \quad (2.20)$$

Vi innfører nå partikkelens forrykning \mathbf{R} slik at

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{R}$$

og setter dette uttrykket inn i integranden i (2.20). Rekkeutvikling etter potenser av \mathbf{R} gir

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) dt + \int_{t_0}^t \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) dt + \dots$$

Dersom forrykningen er liten og hastighetsgradientene små, kan høyere ordens ledd neglisjeres. Ved linearisering får vi derfor at

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) dt \quad (2.21)$$

Vi skal benytte denne likningen til å finne partikkelbevegelsen for to-dimensjonale kapillar- og tyngdebølger. Hastighetskomponentene i bølgebevegelsen er etter (2.6) og (2.14)

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{a\omega}{\sinh kH} \cosh k(z+H) \sin(kx - \omega t) \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{a\omega}{\sinh kH} \sinh k(z+H) \cos(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Setter vi $\mathbf{r}_0 = (x_0, z_0)$ og $\mathbf{r} = (x, z)$, så følger av (2.21)

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{a}{\sinh kH} \cosh k(z_0 + H) \cos(kx_0 - \omega t) + K_1 \\ z - z_0 &= \frac{a}{\sinh kH} \sinh k(z_0 + H) \sin(kx_0 - \omega t) + K_2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

hvor K_1 og K_2 er integrasjonskonstanter.

Både her og senere vil vi få bruk for tidsmidlet av en funksjon $F(t)$, og vi definerer dette ved

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) dt, \quad (2.23)$$

hvor t_0 er en vilkårlig konstant. Dersom funksjonen $F(t)$ er periodisk med periode T , så vil tidsmidlet \bar{F} ikke avhenge av konstanten t_0 .

Ved tidsmidling av (2.22) finner vi, siden \cos og \sin er periodiske funksjoner,

$$\begin{aligned} \bar{x} - x_0 &= K_1 \\ \bar{z} - z_0 &= K_2 \end{aligned}$$

hvor \bar{x} og \bar{z} er partikkelens midlere posisjon. Ved hjelp av disse relasjonene kan (2.22) skrives

$$\begin{aligned} x - \bar{x} &= A \cos(kx_0 - \omega t) \\ z - \bar{z} &= B \sin(kx_0 - \omega t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

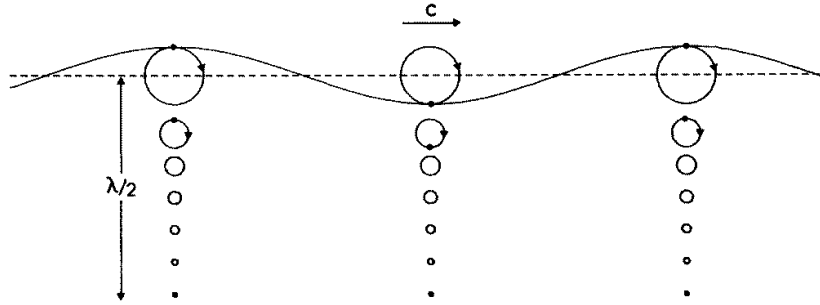
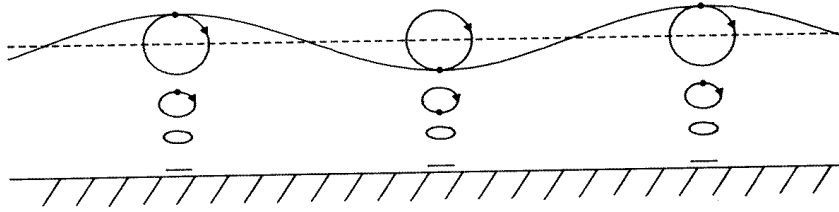
hvor

$$A = a \frac{\cosh k(z_0 + H)}{\sinh kH} \quad \text{og} \quad B = a \frac{\sinh k(z_0 + H)}{\sinh kH}.$$

Av (2.24) følger

$$\left(\frac{x - \bar{x}}{A}\right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{B}\right)^2 = 1 \quad (2.25)$$

som viser at væskepartiklene følger ellipsebaner og at omløpstiden i banen er bølgeperioden $T = 2\pi/\omega$. Ellipsens halvaksler er A og B . For partikler som er nær bunnen ($z_0 \rightarrow -H$) gjelder at $A \rightarrow a/\sinh kH$ og $B \rightarrow 0$, og ellipsen degenererer til en rett linje. Er H meget større enn bølgelengden slik at $kH \gg 1$, så er $A = B = ae^{kz_0}$. I dette tilfellet, altså for bølger på dypt vann, blir partikkelbanene sirkler som vist på figur 2.5. Radius i sirkelbanene avtar nedover i væsken, og i et dyp $z_0 = -\lambda$ er radius en faktor $e^{-2\pi} \simeq 2 \cdot 10^{-3}$ mindre enn ved overflaten. Partiklenes omløpsretning i banene følger av (2.24), og for bølger som beveger seg mot høyre er omløpsretningen angitt med piler i figur 2.5. Til sammenlikning er partikkelbanene i lange bølger på grunt vann $H/\lambda = 0.15$ skissert i figur 2.6.

Figur 2.5: Partikkelbanene i bølger på dypt vann $a/\lambda = 0.06$.Figur 2.6: Partikkelbaner i lange bølger på grunt vann $a/H = 0.25$.

2.4 Den mekaniske energien i overflate-bølger

For periodisk bølgebevegelse kan man finne enkle uttrykk for den midlere mekaniske energien pr. flateenhet i horisontalplanet. For overflatebølger skal vi benytte betegnelsen midlere *energitetthet* om denne størrelsen. (Vanligvis brukes denne betegnelsen om energien pr. volumenhet.) Energi består av kinetisk og potensiell energi, og den potensielle energien i overflatebølger skyldes overflatespenningen og tyngdekraften. Når overflaten deformeres, utfører overflatespenningen et arbeid som er σ multiplisert med endringen i overflatens areal. Den midlere potensielle energi pr. flateenhet på grunn av overflatespenningen kan derfor skrives

$$E_p^k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sigma \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2} - 1 \right] dt$$

Taylor utvikling av integrand gir for små verdier av $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ og $\frac{\partial \eta}{\partial y}$

$$E_p^k = \frac{1}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sigma \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \right] dt \quad (2.26)$$

For den *potensielle energien* på grunn av tyngdekraften velger vi null-nivået i $z = -H/2$ som er væskelagets midlere høyde over bunnen. Energi pr. volumenhet

er

$$e_p = \rho g \left(z + \frac{H}{2} \right)$$

og den midlere potensielle energi pr. flateenhet på grunn av tyngdekraften kan derfor skrives

$$E_p^t = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{-H}^{\eta} e_p \, dz \, dt = \frac{\rho g}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\eta^2 + H\eta) \, dt$$

Siden overflatehevningen η er forutsatt periodisk i t , får vi

$$E_p^t = \frac{\rho g}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \eta^2 \, dt \quad (2.27)$$

Den samlede midlere potensielle energi pr. flateenhet for overflatebølger er

$$E_p = E_p^t + E_p^k \quad (2.28)$$

Den *kinetiske energien* pr. volumenhet er

$$e_k = \frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2$$

og den midlere kinetiske energi pr. flateenhet av overflaten

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{-H}^{\eta} e_k \, dz \, dt$$

Ved Taylor utvikling etter potenser av η får vi

$$\int_{-H}^{\eta} e_k \, dz = \int_{-H}^0 e_k \, dz + (e_k)|_{z=0} \eta + \dots$$

For bølger med liten amplitude er det nok å ta med det første leddet i denne rekkeutviklingen, og ved innføring av hastighetspotensialet kan vi skrive

$$E_k = \frac{\rho}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{-H}^0 (\nabla \phi)^2 \, dz \, dt$$

Ved hjelp av Greens teorem og grenseflatebetingelsen ved bunnen (2.13) kan uttrykket omformes, og vi finner

$$E_k = \frac{\rho}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \, dt \quad (2.29)$$

Setter vi nå inn uttrykkene (2.14) for hastighetspotensialet og overflatehevingen i (2.26)–(2.29) får vi etter noen enkle omforminger

$$\begin{aligned} E_p^k &= \frac{1}{4} \sigma k^2 a^2 \\ E_p^t &= \frac{1}{4} \rho g a^2 \\ E_p &= E_k = \frac{1}{4} \rho g a^2 \left(1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g}\right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

De siste likningene viser at den midlere energitettheten av potensiell og kinetisk energi er like (*energiekvipartisjon*). Selv om dette synes å gjelde for de fleste typer av lineær bølgebevegelse, finnes det eksempler på bølgetyper hvor man ikke har energiekvipartisjon. Sverdrup-bølger som er en type tyngde-treghetsbølger i roterende væsker, er et eksempel på det.

Summen av E_p og E_k er den midlere mekaniske energitetthet og

$$E = E_p + E_k = 2E_p = 2E_k \quad (2.31)$$

Av siste likning i (2.30) fremgår det at for bølgelengder $\lambda \gg \lambda_m$, hvor λ_m er definert i (2.17), er energitettheten på grunn av overflatespenningen ubetydelig i forhold til energitettheten på grunn av tyngden. Vi har derfor at for $\lambda \gg \lambda_m$

$$E = \frac{1}{2} \rho g a^2 \quad (2.32)$$

som er den midlere mekaniske energitetthet for tyngdebølger. For bølgelengder $\lambda \ll \lambda_m$ er energitettheten på grunn av tyngden ubetydelig, og vi får at den midlere mekaniske energitettheten for kapillarbølger er

$$E = \frac{1}{2} \sigma k^2 a^2 \quad (2.33)$$

Vi ønsker også å beregne energistrømmen eller *energifluksen* i overflate-bølgene. La oss tenke oss at vi avgrenser et område på vannoverflaten S innenfor en lukket kurve Γ . Loddrett under overflaten S ligger et volum av vann Ω , avgrenset av vertikale vegger Π . Den totale energien i Ω og på S er gitt ved uttrykket

$$\int_{\Omega} e_p dV + \int_{\Omega} e_k dV + \int_S \sigma dS$$

der e_p er potensiell energi i tyngdefeltet pr. volumenhet, e_k er kinetisk energi pr. volumenhet, og overflatespenningen σ representerer potensiell energi pr. flateenhet. Under forutsetning at energi ikke skapes eller blir borte i området skal vi sette opp en integrert energilikning på formen

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} e_p dV + \int_{\Omega} e_k dV + \int_S \sigma dS \right\} = - \int_{\Gamma} \mathbf{q}_{\Gamma} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds - \int_{\Pi} \mathbf{q}_{\Pi} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2.34)$$

der \mathbf{q}_Γ er energifluksen langs den frie overflaten S , \mathbf{q}_Π er energifluksen i volumet Ω og $\hat{\mathbf{n}}$ er enhetsnormalvektor til den vertikale sideflaten Π . En annen framgangsmåte kunne ha bestått i å regne ut energifluks eksplisitt og vise at (2.34) gjelder. Dersom vi inkluderer viskøse effekter vil det i tillegg opptre et dissipasjonsledd. En ikke-konservativ volumkraft vil også gi opphav til et kildeledd i form av et integral over Ω .

For å relatere endringer av de integrerte størrelsene til endringer av feltvariable trenger vi et spesialtilfelle av Leibniz' regel

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} G dV = \int_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial t} dV + \int_S G|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} dA \quad (2.35)$$

der dA er et infinitesimalt element i xy -planet, og det siste leddet skriver seg fra tidsvariasjonen av den frie overflaten. En kan merke seg at dette leddet alene gir bidraget til endring av e_p fordi tyngdepotensialet er tidsuavhengig.

Vi setter nå opp likningene som styrer bevegelsen og som vi vil utlede energilikningen (2.34) fra. Noen er gitt tidligere men gjentas her for oversiktens skyld. Først har vi bevegelseslikningen for en ideell væske

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) - \frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi \quad (2.36)$$

hvor vi har brukt virvelfriheten til å omskrive det konvektive leddet. I stedet for eksplisitt å innføre tyngden opererer vi med et generelt kraftpotensial Φ . Væsken er inkompressibel og kontinuitetslikningen blir da

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.37)$$

Ved den frie overflaten har vi den dynamiske betingelsen

$$p = \sigma \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (2.38)$$

der \mathbf{n} er enhetsnormalvektor til den frie overflaten S . I tillegg har vi den kinematiske overflatebetingelsen (2.5) som kan skrives om på formen

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\partial \eta}{\partial t} dA \quad (2.39)$$

hvor dA er projeksjonen av dS ned i xy -planet.

Nå følger en serie omforminger og bruk av integralsatser for å framskaffe energilikningen på den ønskede form. Vi starter med å prikke (2.36) med hastighetsvektor og integrere resultatet over Ω . Videre benyttes Gauss sats og divergensfrihet for å frambringe likningen

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) dV = - \int_{\partial\Omega} \left(p + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \rho \Phi \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.40)$$

der $\partial\Omega$ betegner randa til Ω , dvs. unionen av den frie overflaten S , den vertikale sideflaten Π og bunnen. Det er imidlertid ingen bidrag fra bunnen på grunn av det kinematiske bunnkravet (2.13). Enhetsnormalvektoren \mathbf{n} er utadrettet. Vi benytter nå (2.35) for å skrive likningen om til en form som inneholder tidssending av integrert kinetisk og potensiell energi i tyngdefeltet. Den kinematiske randbetingelsen (2.39) gir så at de fleste ledd i overflateintegralet kansellerer og vi ender opp med

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} e_p dV + \int_{\Omega} e_k dV \right\} = - \int_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Pi} \left(p + \frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 + \rho \Phi \right) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dV \quad (2.41)$$

Benyttes nå (2.38) og (2.39) kan det første leddet på høyresiden i (2.41) skrives om

$$- \int_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S \sigma \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\partial \eta}{\partial t} dA. \quad (2.42)$$

Ved videre å benytte at $\mathbf{n} = (\mathbf{k} - \nabla \eta) / \sqrt{1 + (\nabla \eta)^2}$ har vi identiteten

$$\nabla \cdot (\mathbf{n} \eta_t) = \nabla \cdot \mathbf{n} \eta_t + \mathbf{n} \cdot \nabla \eta_t = \nabla \cdot \mathbf{n} \eta_t - \frac{\nabla \eta \cdot \nabla \eta_t}{\sqrt{1 + (\nabla \eta)^2}}$$

og følgelig får vi ved å benytte både Leibnitz regel og Gauss sats

$$- \int_S \sigma \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\partial \eta}{\partial t} dA = - \frac{d}{dt} \int_S \sigma dS - \int_{\Gamma} \sigma \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{n}} \frac{\partial \eta}{\partial t} ds \quad (2.43)$$

hvor $\hat{\mathbf{n}}$ er enhetsnormalvektor til Π og \mathbf{n} er enhetsnormalvektor til den frie overflaten S , og ds er et infinitesimalt kurveelement langs projeksjonen av Γ ned i xy -planet. Første ledd på høyresiden er forandringen i total overflateenergi, mens det andre leddet er total fluks av overflateenergi (både adveksjon av overflateenergi gjennom Γ og overflatespenningens arbeid på snittkurven Γ).

La oss oppsummere det hele

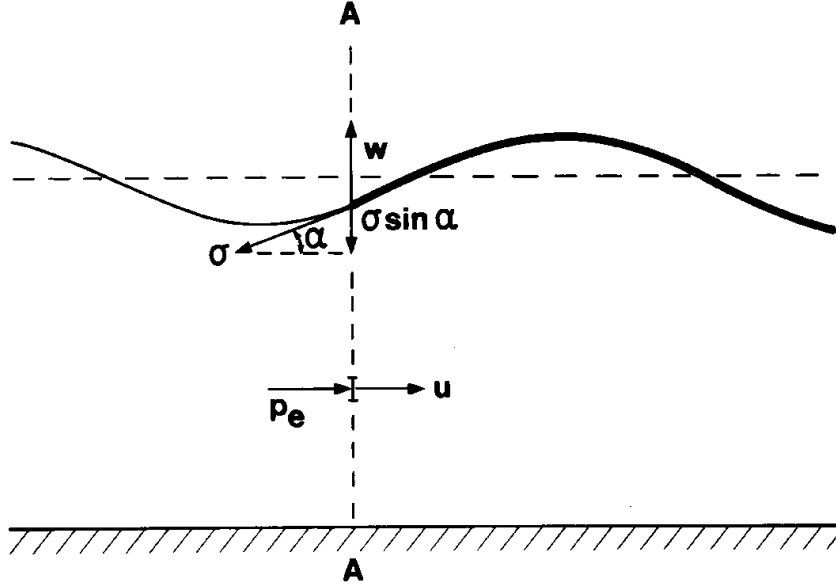
$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 dV + \int_{\Omega} \rho \Phi dV + \int_S \sigma dS \right\} \\ &= - \int_{\Gamma} \sigma \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \frac{\partial \eta}{\partial t} ds - \int_{\Pi} \left(p + \frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 + \rho \Phi \right) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \end{aligned} \quad (2.44)$$

hvor bidragene på venstre side er forandringen i kinetisk energi, forandringen i potensiell tyngdeenergi og forandringen i overflateenergi, og bidragene på høyre side er fluks av overflateenergi gjennom kurven Γ , trykkets arbeid på flaten Π , transport av kinetisk energi gjennom flaten Π og transport av potensiell tyngdeenergi gjennom flaten Π . Ved hjelp av Eulers trykkformel kan de tre leddene som står inni den siste parentesen forenkles ytterligere

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 dV + \int_{\Omega} \rho \Phi dV + \int_S \sigma dS \right\} = - \int_{\Gamma} \sigma \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \frac{\partial \eta}{\partial t} ds + \int_{\Pi} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2.45)$$

En enkel illustrasjon av høyresiden i (2.45) for to-dimensjonal geometri er gitt i figur 2.7. For to-dimensjonal geometri er $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = \sin \alpha$ hvor α er helningsvinkelen til overflaten som definert i figuren. Arbeidet pr. tidsenhet som væsken til venstre for snittet A–A utfører på væsken til høyre er

$$W = -\sigma \frac{\partial \eta}{\partial t} \sin \alpha - \int_{-h}^{\eta} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} u \, dz.$$



Figur 2.7: Illustrasjon for energifluks.

Vi skal nå betrakte den totale energifluksen integrert i vertikal retning, \mathbf{F} , definert slik at høyresiden i likning (2.45) kan skrives på formen

$$- \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} \, ds$$

hvor det infinitesimale kurveelementet ds er langs projeksjonen av Γ ned i xy -planet. Taylor utvikling av den horisontale energifluksen for små verdier av de deriverte av η og ϕ gir nå

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\sigma \nabla \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} + \int_{-h}^0 \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi \, dz \right].$$

I samsvar med tidligere antagelse er bare de ledd hvor bølgeamplituden inngår i kvadrat tatt med i dette uttrykket. Innføres hastighetspotensial og overflateheving (2.14) så finner man ved hjelp av relasjonene (2.15)–(2.16) og ved tidsmidling (2.23) at den midlere energifluksen \mathbf{F} pr. lengdeenhet langs bølgene er

$$\mathbf{F} = E \mathbf{c}_g \quad (2.46)$$

hvor størrelsen

$$\mathbf{c}_g = \frac{c}{2} \left[\frac{1 + \frac{3\sigma k^2}{\rho g}}{1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g}} + \frac{2kH}{\sinh 2kH} \right] \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (2.47)$$

er en vektor med samme retning som bølgetallsvektoren \mathbf{k} og som har dimensjon av hastighet, og E er energitettheten for tyngde–kapillarbølger. Ved derivasjon av (2.15) finner vi at hastigheten $c_g = \frac{d\omega}{dk}$. Vektoren \mathbf{c}_g betegnes *gruppehastigheten* og vi skal behandle denne størrelsen inngående i et neste avsnitt. Foreløpig legger vi merke til at energifluksen er lik energitettheten multiplisert med gruppehastigheten. Dette er en sats av generell gyldighet for lineær bølgebevegelse.

For tyngdebølger på dypt vann ($kH \gg 1$) er energifluksen pr. lengdeenhet langs bølgetoppene

$$F = \frac{1}{4} \rho g a^2 c. \quad (2.48)$$

Tabellen nedenfor viser fasehastighet, periode og energifluks for tyngdebølger med bølgelengde fra 1–150 m og med amplitude 0.1 m. Vanddypet er forutsatt å være mye større enn bølgelengden slik at vi kan regne som om det er uendelig dypt vann.

$\lambda(\text{m})$	$c(\text{m/s})$	$T(\text{s})$	$F(\text{watt/m})$
5	2.79	1.79	69
10	3.95	2.53	97
25	6.25	4.00	153
50	8.84	5.66	217
75	10.82	6.93	265
100	12.50	8.00	307
150	15.30	9.80	375

Øvingsoppgaver

1. Vi betrakter et havbasseng med dybde 10 m og med rett kystlinje. En bøye registrerer bølger med periode 7 s og amplitude 0.5 m. Anta at kysten absorberer all innkommende bølgeenergi. Undersøk om vi kan se bort fra dybden og/eller overflatespenningen. Regn ut bølgelengden, fasehastigheten og gruppehastigheten. Hvor stor effekt avsettes i en 500 m lang kyststripe? Hvor lang kyststripe er tilstrekkelig for å dekke energibehovet for en husstand?
2. En tsunami har amplitude 2 m på 5000 m dypt vann. Regn ut fase- og gruppehastighet (km/h), energitetthet (kWh/m²) og energiflukstetthet (kW/m).

2.5 En enkel kinematisk tolkning av gruppehastigheten. Gruppehastighet for overflatebølger.

I det foregående avsnitt har vi sett at hastigheten $c_g = \frac{d\omega}{dk}$ er knyttet til energifluksen i plane overflatebølger. I dette avsnittet skal vi gi en enkel kinematisk tolkning av størrelsen c_g som også rettferdiggjør betegnelsen gruppehastighet. Vi adderer to bølgekomponenter η_1 og η_2 med samme amplitude, men med litt forskjellig verdi for bølgetall og vinkelhastighet

$$\eta_1 = \frac{1}{2}a \sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t]$$

og

$$\eta_2 = \frac{1}{2}a \sin[(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta\omega)t]$$

hvor $2\Delta k$ og $2\Delta\omega$ er henholdsvis forskjellen i bølgetall og vinkelhastighet. Ved hjelp av formelen for summen av to sinusfunksjoner får vi

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = a \cos(\Delta kx - \Delta\omega t) \sin(kx - \omega t). \quad (2.49)$$

Likning (2.49) fremstiller en serie av bølgegrupper eller bølgepakker hvor amplituden av de individuelle bølgene innen hver gruppe varierer fra 0 til a . Bølgelengden for bølgegruppene er $\lambda_g = 2\pi/\Delta k$, og bølgelengden for de individuelle bølgene i gruppen er $\lambda = 2\pi/k$. De individuelle bølgetoppene forplanter seg med fasehastigheten $c = \omega/k$, mens bølgegruppene forplanter seg med gruppehastigheten

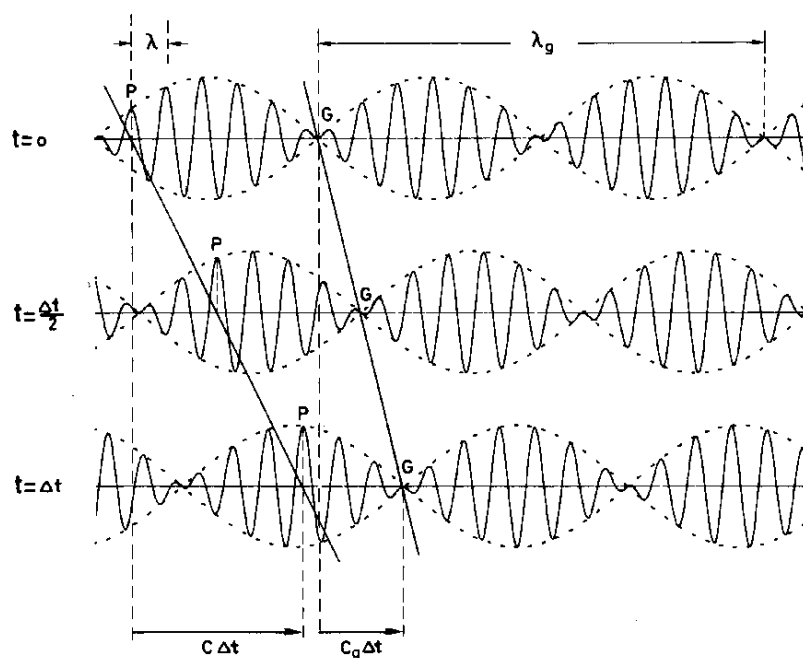
$$c_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (2.50)$$

For bølgebevegelse i flere romlige dimensjoner kan vi finne at gruppehastigheten er en vektor definert som gradienten av vinkelfrekvensen ω med hensyn på bølgetallsvektor \mathbf{k} , $\mathbf{c}_g = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$. For isotrope bølger, dvs. at dispersjonsrelasjonen kun avhenger av bølgetallet og ikke retningen til bølgetallsvektor, ser vi at gruppehastighetsvektor har samme retning som bølgetallsvektor.

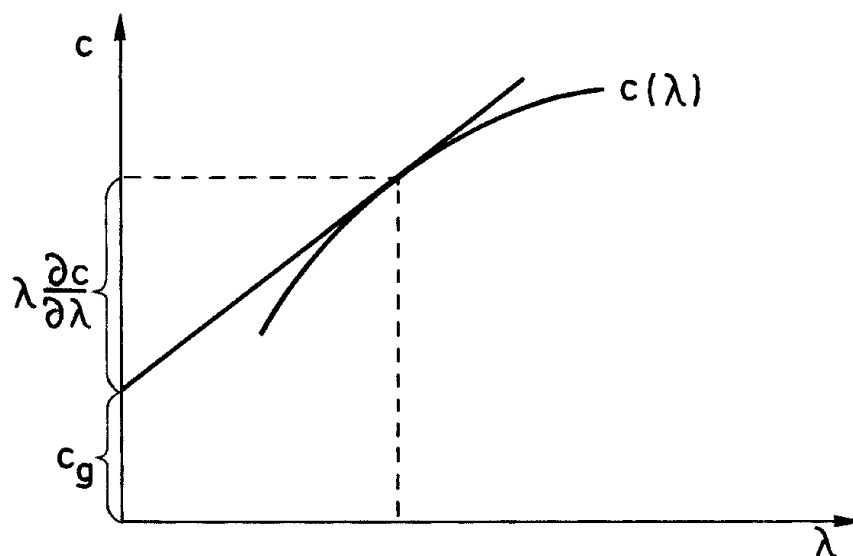
Ved hjelp av relasjonen $\omega = ck$ kan vi skrive

$$c_g = c + k \frac{dc}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \quad (2.51)$$

som viser at for dispersive bølger er gruppehastigheten forskjellig fra fasehastigheten. For ikke-dispersive bølger er gruppe- og fasehastighet like. Gruppehastigheten er større eller mindre enn fasehastigheten avhengig av om fasehastigheten henholdsvis avtar eller øker med bølgelengden. For tyngdebølger er således $c_g < c$, mens $c_g > c$ for kapillarbølger. Siden de individuelle bølgene beveger seg med en hastighet forskjellig fra bølgegruppens hastighet, vil det, for en iakttagere som



Figur 2.8: Grafen av funksjonen $\eta = a \cos(\Delta kx - \Delta \omega t) \sin(kx - \omega t)$ og omhyldningskurven $a \cos(\Delta kx - \Delta \omega t)$ ved tre tidspunkter for bølgetog med $c_g = c/2$. Forflytningen av bølgegruppen (G) og en individuell bølge (P) er avmerket.



Figur 2.9: Fase og gruppehastighet.

følger en individuell bølge i gruppen, se ut som om bølgen forplanter seg gjennom gruppen med variabel amplitude. Bølgen vil derfor tapes av syne i forkant eller bakkant av gruppen avhengig av om c er større eller mindre enn c_g . Fordi bølgeamplituden er null ved forkant og bakkant av hver bølgegruppe, indikerer dette at energien innen gruppen alltid brer seg med gruppehastighet. Vi har alt sett at denne tolkningen er riktig for overflatebølger.

Ved hjelp av (2.51) er det mulig å finne c_g grafisk ved å trekke tangenten til grafen $c = c(\lambda)$. Metoden er vist i figur 2.9. Gruppehastigheten for overflatebølger er gitt tidligere ved (2.47). Av dette uttrykket ser vi at for overflatebølger på dypt vann, $kH \gg 1$, så er

$$c_g = \frac{1}{2} c \frac{1 + \frac{3\sigma k^2}{\rho g}}{1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g}} \quad (2.52)$$

hvor fasehastigheten c er bestemt ved (2.18). Avhengig av om bølgelengden er mye større eller mye mindre enn λ_m (se likning 2.17) får vi

$$\begin{aligned} c_g &= \frac{1}{2} c & \text{når} & \lambda \gg \lambda_m \\ c_g &= \frac{3}{2} c & \text{når} & \lambda \ll \lambda_m \end{aligned} \quad (2.53)$$

Dette er uttrykkene for gruppehastighet for henholdsvis tyngde- og kapillarbølger på dypt vann.

For overflatebølger på grunt vann, $kH \ll 1$, finner vi på tilsvarende måte

$$\begin{aligned} c_g &= c = c_0 & \text{når} & \lambda \gg \lambda_m \\ c_g &= 2c & \text{når} & \lambda \ll \lambda_m \end{aligned}$$

Se figurene 2.10 og 2.11.

I dette avsnittet har vi vist at en serie av bølgegrupper fremkommer ved interferens av to harmoniske bølgekomponenter. Av øvingsoppgave i tilknytning til avsnitt 2.7 vil det fremgå at en enkelt bølgegruppe eller bølgepakke kan settes sammen av en skare harmoniske bølgekomponenter.

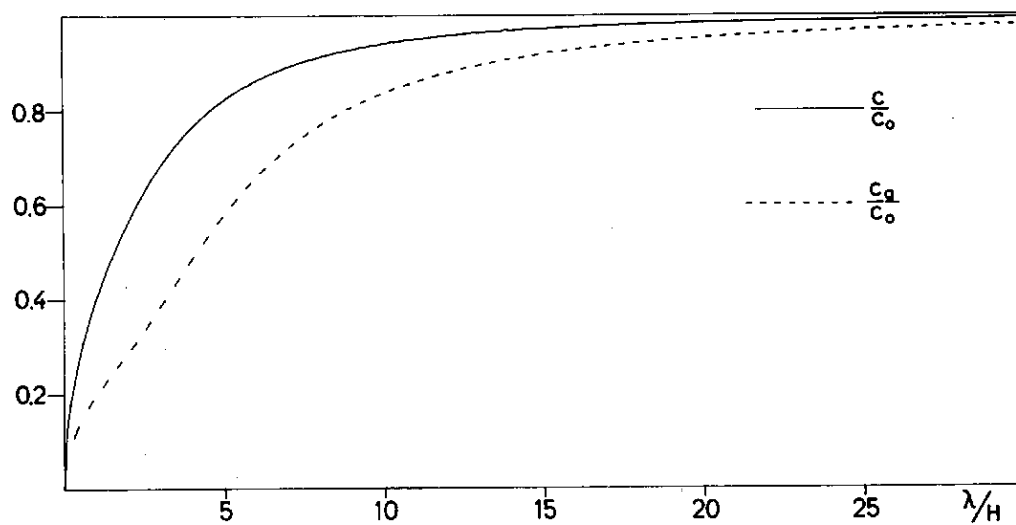
Bølgegrupper opptrer ofte i naturen, og dette er for eksempel et typisk trekk for eksempel ved dønning. Figur 2.12 viser bølgegruppe i registrering av dønning på Trænabanken. Seismogrammene i figur 3.1 i kapittel 2.13 viser også bølgegrupper.

2.6 Klein-Gordon likningen

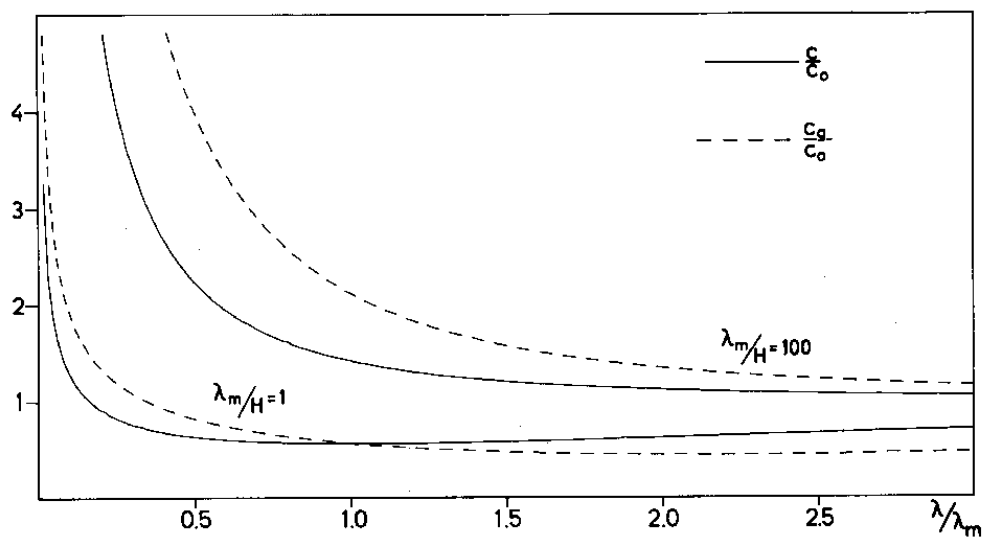
Som eksempel til de to foregående avsnitt skal vi behandle Klein-Gordon likningen

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + c_0^2 q^2 \eta = 0 \quad (2.54)$$

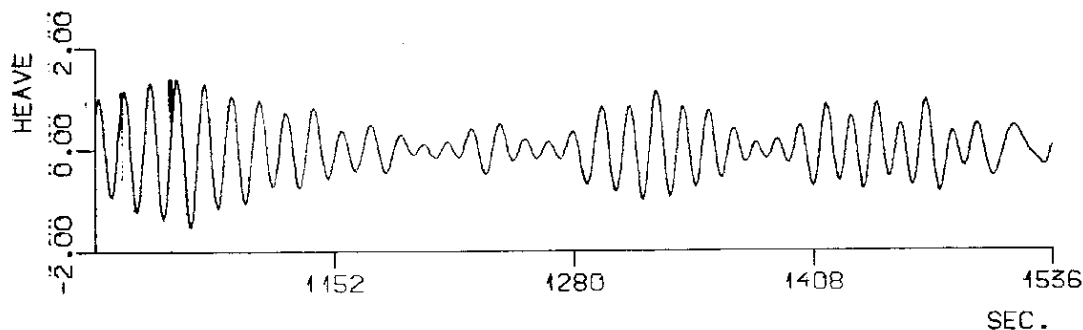
hvor c_0 og q er konstanter og η er en funksjon av x og t .



Figur 2.10: Fase- og gruppehastighet for tyngdebølger.



Figur 2.11: Fase- og gruppehastighet for tyngde- og kapillarbølger.



Figur 2.12: Langperiodisk hevning og senkning av vannflaten (i meter) registrert den 24-1-1982 klokken 9 GMT av bøye forankret på Trænabanken utenfor kysten av Helgeland. Dønningen skyldes et stormsenter i Nord-Atlanteren øst for Newfoundland (Gjevik, Lygre og Krogstad, 1984).

Denne likningen beskriver for eksempel bevegelsen for en svingende streng hvor det i tillegg til strekket i strengen virker fjærkrefter som trekker strengen inn mot likevektsstillingen. Klein-Gordon likningen beskriver dessuten fenomen innen relativistisk kvantemekanikk, og den fremkommer også for lange tyngdetregghetsbølger i roterende væsker.

Likningen tillater bølgeløsninger av formen

$$\eta = a \sin k(x - ct)$$

hvor fasehastigheten er

$$c = c_0(1 + q^2/k^2)^{\frac{1}{2}}$$

Gruppehastigheten er

$$c_g = \frac{d(ck)}{dk} = \frac{c_0^2}{c}$$

Energilikningen fremkommer ved å multiplisere KG-likningen med $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, og vi får etter omordning

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

hvor energitettheten (pr. masseenheter) er

$$E = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + c_0^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + c_0^2 q^2 \eta^2 \right]$$

og energifluksen er

$$F = -c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Ved å benytte bølgeløsningen kan vi beregne midlere energitetthet og energifluks, og vi finner

$$\begin{aligned}\overline{E} &= \frac{1}{2}a^2k^2c^2 \\ \overline{F} &= \frac{1}{2}a^2k^2c_0^2c\end{aligned}$$

Den midlere utbredelseshastighet for energien er derfor

$$\frac{\overline{F}}{\overline{E}} = \frac{c_0^2}{c} = c_g$$

2.7 Overflatebølger generert ved en lokal forstyrrelse i væsken

Når en stein kastes i stille og forholdsvis dypt vann, dannes det etter en stund et tog av regelmessige bølger som brer seg radiallyt ut fra det stedet hvor steinen traff overflaten. Er steinen forholdsvis stor, så vil vi se lange bølger i fronten av bølgetoget og gradvis kortere bølger innover mot sentret for bevegelsen. Årsaken til dette er at den mekaniske energien som tilføres vannet av steinen vil fordele seg på forskjellige bølgekomponenter, som så brer seg ut med en hastighet som er avhengig av bølgelengden. Etter en tid vil de lange bølgene ha løpt fra de korte, og den opprinnelige forstyrrelsen er blitt strukket ut til et regelmessig bølgetog med gradvis varierende bølgelengde. Dersom steinen kastes på grunt vann, vil alle bølgekomponentene med bølgelengde noe større enn vanddypet gå med nær samme hastighet. I dette tilfellet vil forstyrrelsen kunne bre seg over lange strekninger uten at formen endres merkbart. Dersom en tilstrekkelig liten stein slippes i vannet, vil de lange bølgene som eventuelt genereres ha svært liten amplitude, slik at bare de bølgekomponentene som har bølgelengde $\lambda \leq \lambda_m$ er synlige. I så fall vil en etter en tid se at det utvikler seg et bølgetog med korte bølger i fronten og gradvis lengre bølger bak.

Vi skal nå behandle noen av disse fenomenene matematisk. For enkelhets skyld skal vi imidlertid begrense oss til to-dimensjonal bølgebevegelse som en kan tenke seg fremkommer ved en langstrakt forstyrrelse. Matematisk er dette tilfellet enklere å behandle enn om bølgene brer seg ut i alle retninger, og bølgeamplituden avtar fordi energien stadig sprer seg over større område. Her skal vi dessuten behandle det tilfellet at bevegelsen starter fra ro med en heving eller senkning av overflaten. Initialbetingelsen kan derfor skrives

$$\begin{aligned}\phi &= 0 & \text{for} & \quad t = 0 \\ \eta &= \eta_0(x) & \text{for} & \quad t = 0\end{aligned}\tag{2.55}$$

For å løse likningene (2.11) med grenseflatebetingelsene (2.12)–(2.13) og initialbetingelsene (2.55) innfører vi Fourier-transformasjonen med hensyn på x som vi

definerer

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (2.56)$$

hvor $f(x)$ er en funksjon av x slik at integralet (2.56) eksisterer. Det tilhørende inversjonsintegral (omvendingsintegral) er

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \quad (2.57)$$

Vi forutsetter at både ϕ og dens deriverte samt η går mot null for $x \rightarrow \pm\infty$ og at den Fourier-transformerte av disse funksjonene eksisterer. Ved delvis integrasjon får vi følgende at

$$\widetilde{\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}} = (ik)^n \tilde{\phi} \quad \text{for} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Derav følger at den Fourier-transformerte av Laplace-likningen (2.11) kan skrives

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2} - k^2 \tilde{\phi} = 0 \quad (2.58)$$

Transformasjon av den første av de to grenseflatebetingelsene (2.12) gir

$$\tilde{\eta} = -\frac{1}{g(1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g})} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (2.59)$$

og ved eliminering av $\tilde{\eta}$ ved hjelp av den andre betingelsen i (2.12) får vi

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} + g(1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g}) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z = 0 \quad (2.60)$$

Den transformerte av grenseflatebetingelsen (2.13) er

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z = -H \quad (2.61)$$

Endelig blir den Fourier-transformerte av initialbetingelsene (2.55)

$$\tilde{\phi} = 0 \quad \text{og} \quad \tilde{\eta} = \tilde{\eta}_0 \quad \text{for} \quad t = 0 \quad (2.62)$$

En løsning av (2.58) som tilfredsstiller grenseflatebetingelsene (2.61) kan skrives

$$\tilde{\phi} = A(t) \cosh k(z + H) \quad (2.63)$$

hvor $A(t)$ er en vilkårlig funksjon av t .

Innsetting i (2.60) gir

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = -\omega^2 A$$

hvor ω er gitt ved dispersjonsrelasjonen (2.15). Initialbetingelsen (2.62) medfører at $A = 0$ for $t = 0$, og løsningen av den siste likningen kan derfor skrives

$$A(t) = A_0 \sin \omega t \quad (2.64)$$

hvor konstanten A_0 bestemmes ved hjelp av (2.59), (2.63) og initialbetingelsen (2.62) for $\tilde{\eta}$. Vi finner at

$$A_0 = -\frac{g(1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g})}{\omega \cosh kH} \tilde{\eta}_0 \quad (2.65)$$

Omvending av det transformerte uttrykket (2.63) med $A(t)$ gitt ved (2.64) og (2.65) gir hastighetspotensialet

$$\phi = -\frac{g}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} \frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH} \left(1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g}\right) \tilde{\eta}_0 e^{ikx} dk \quad (2.66)$$

Settes hastighetspotensialet (2.66) inn i den andre betingelsen i (2.12) får vi etter integrasjon at overflatehevingen kan skrives

$$\eta = \frac{1}{4\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\eta}_0 e^{i(kx+\omega t)} dk + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\eta}_0 e^{i(kx-\omega t)} dk \right) \quad (2.67)$$

For å komme frem til (2.67) har vi også benyttet dispersjonsrelasjonen (2.15). Siden $\tilde{\eta}_0(-k)$ er den kompleksskonjugerte av $\tilde{\eta}_0(k)$ og $\omega(-k) = \omega(k)$ kan integralene lett omformes slik at man bare integrerer over positive verdier av k . Derved får vi

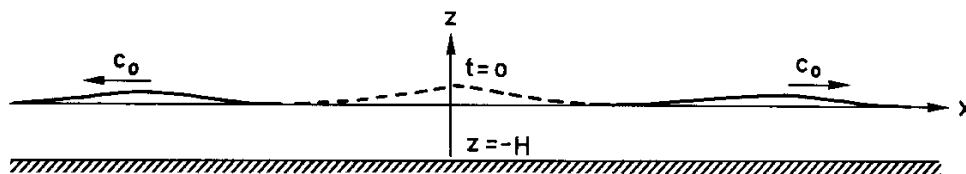
$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |\tilde{\eta}_0(k)| (\cos(kx - \omega t + \gamma) + \cos(kx + \omega t + \gamma)) dk$$

hvor γ er argumentet av $\tilde{\eta}_0(k)$. Dette uttrykket viser at bevegelsen kan oppfattes som sammensatt av et spektrum av harmoniske bølgekomponenter. Vi ser at den opprinnelige forstyrrelsen splittes opp i bølgekomponenter som beveger seg i positiv eller i negativ x -retning. Den komplekse Fourier-transformen $\tilde{\eta}_0(k)$ bestemmer amplitude og fasefordelingen for de forskjellige bølgekomponentene. Modulen kvadrert $|\tilde{\eta}_0(k)|^2$ er proporsjonal med det såkalte *bølgespektret*, som i dette tilfellet er et bølgetallspektrum.

Dersom spektret er slik at bare de bølgekomponenter hvor $\lambda \gg H$ er betydelige, kan vi ifølge (2.19) med god tilnærming sette $\omega = c_0|k|$ og integrere over den langperiodiske delen av spektret. Derved kan Fourier-integralet i (2.67) omvendes umiddelbart, og vi får

$$\eta = \frac{1}{2} \eta_0(x + c_0 t) + \frac{1}{2} \eta_0(x - c_0 t)$$

Dette viser at den opprinnelige forstyrrelsen vil splittes i to like pulser som beveger seg med konstant hastighet og uendret form henholdsvis i positiv og negativ x -retning. Amplituden for hver av pulsene er halvparten av amplituden for den opprinnelige forstyrrelsen (se figur 2.13).



Figur 2.13: Bølgebevegelse vekk fra opprinnelig forstyrrelse.

For å kunne diskutere bølgebevegelse gitt ved (2.67) i detalj skal vi gjøre et valg av funksjon $\eta_0(x)$ som fører til forholdsvis enkle integraler ved innsetting i (2.66) eller (2.67). Vi setter

$$\eta_0(x) = \frac{Q}{2L\sqrt{\pi}} e^{-(x/2L)^2} \quad (2.68)$$

hvor Q og L er konstanter. Funksjonen er skissert for forskjellige verdier av L i figur 2.14. For funksjonen (2.68) gjelder at

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_0(x) dx = Q$$

og

$$\tilde{\eta}_0(x) = Qe^{-(kL)^2} \quad (2.69)$$

Modulen $|\tilde{\eta}_0|$ er altså symmetrisk omkring $k = 0$, og siden $\tilde{\eta}_0$ er reell er fasen den samme for alle bølgekomponentene.

Dersom $L \rightarrow 0$, vil $\tilde{\eta}_0(x)$ degenerere til $Q\delta(x)$ hvor $\delta(x)$ er delta-funksjonen med egenskapene

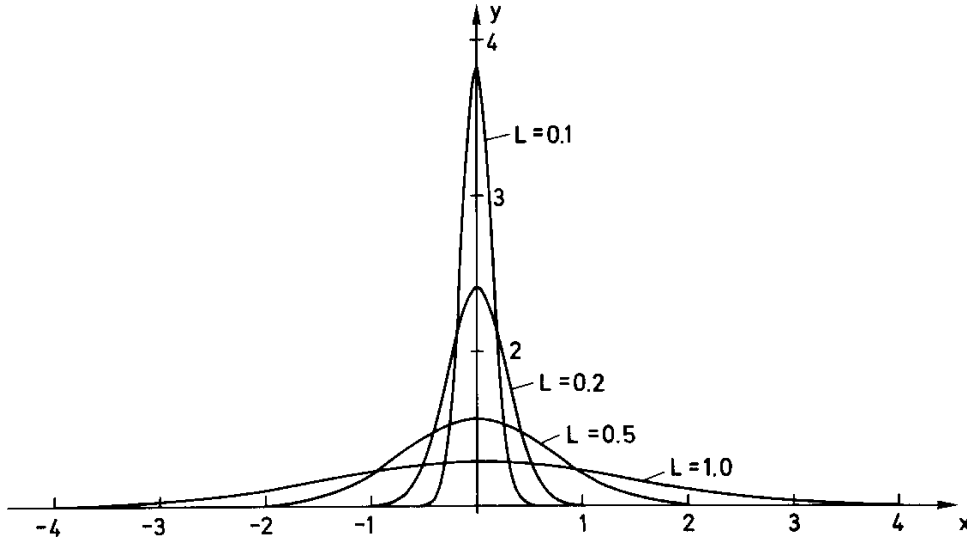
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \delta(x) = 0 \quad \text{for} \quad x \neq 0$$

og

$$\tilde{\delta}(k) = 1$$

Delta-funksjonen har altså et spektrum som gir lik amplitude på alle bølgekomponentene (hvitt spektrum).

For endelig L viser (2.69) at bølgekomponenter i spektre med bølgetall større enn $2\pi/L$ har forsvinnende små amplituder. Dette medfører at de vesentlige bidrag til integralene (2.67) kommer fra den delen av spektret hvor bølgelengden er



Figur 2.14: Gaussiske startprofiler

større enn L . Vi ser derfor uten videre at en forstyrrelse av formen (2.68) ikke vil generere nevneverdige kapillarbølger uten at $L < \lambda_m$ hvor λ_m er definert tidligere.

Når $\tilde{\eta}_0$ er gitt ved (2.69) er overflatehevingen symmetrisk om origo, og overflatehevingen kan skrives

$$\eta = \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty e^{-(kL)^2} [\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)] dk \quad (2.70)$$

Det byr på vanskeligheter å diskutere det fulle innhold av (2.70), og vi skal her begrense diskusjonen til tyngdebølge på dypt vann. I dette tilfellet er $\omega^2 = gk$. Vi innfører u som ny integrasjonsvariabel og setter henholdsvis i første og andre ledd i integralet (2.70)

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\frac{g}{x}\right)^{\frac{1}{2}}(u \mp r) \\ k &= \frac{1}{x}(u^2 \mp 2ur + r^2) \\ kx \pm \omega t &= u^2 - r^2 \end{aligned}$$

hvor

$$r = \left(\frac{gt^2}{4x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dette gir når $L \rightarrow 0$

$$\eta = \frac{2Q}{\pi} \frac{r}{x} \int_0^r \cos(u^2 - r^2) du \quad (2.71)$$

Utleddningen frem til (2.71) innebærer noen vanskelige grenseoverganger og enkelte vil kanskje foretrekke å gå veien om potensialet. En betrakter da potensialet

ved $z = 0$ og foretar tilsvarende substitusjoner i dette uttrykket. Etter at man har fått omformet uttrykket for potensialet, kan overflatehevningen bestemmes ved hjelp av grenseflatebetingelsen. Detaljer er gitt av Lamb (1932). Likning (2.71) er et eksakt uttrykk for overflatehevningen når bevegelsen starter fra ro og overflatehevningen ved $t = 0$ har form av en delta-funksjon i origo. Det viser at overflatehevningen kan uttrykkes ved Fresnel integralene

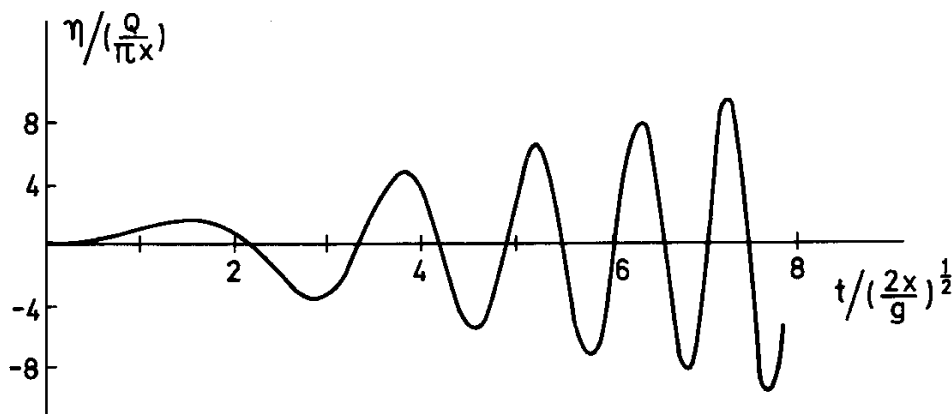
$$C(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \cos u^2 du$$

og

$$S(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \sin u^2 du$$

som er tabulert. Siden (2.71) leder til store verdier for η i nærheten av origo, er det klart at løsningen i dette området bryter med forutsetningene for den lineære teori. Langt borte fra origo vil imidlertid (2.71) gi verdier av η som oppfyller forutsetningene og som beskriver bølgebevegelsen med god tilnærmelse. Med endelige verdier for L vil man derimot finne at løsningen (2.70) gir rimelige verdier for η også i nærheten av origo.

Overflatehevningen, likning (2.71), som funksjon av t i et punkt i avstand $x = x_0$ fra origo er vist i figur 2.15. Det fremgår av figuren at bevegelsen på



Figur 2.15: Overflatehevning i et punkt.

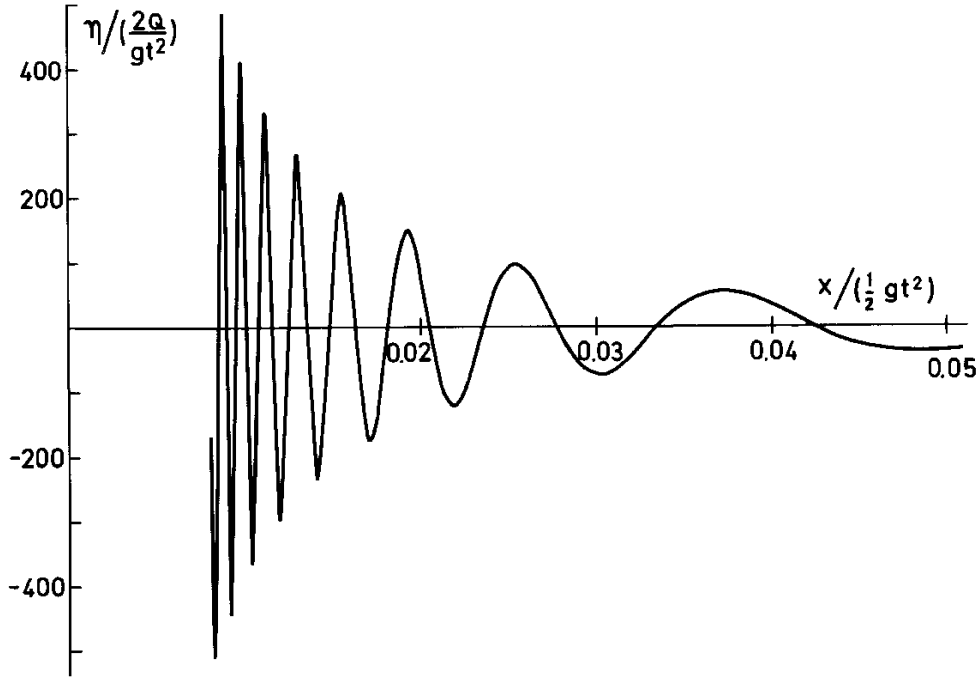
hvert sted starter med langperiodiske svingninger etterfulgt av svingninger med gradvis kortere perioder. Vi legger merke til at bevegelsen alltid starter ved $t = 0$ selv i punkter som ligger langt borte fra origo. Dette henger sammen med at på dypt vann så brer de lengste tyngdebølgene seg med uendelig stor hastighet, og forstyrrelsen vil merkes umiddelbart i ethvert punkt i væsken. For $r \rightarrow \infty$

$$C(r) = S(r) = \frac{1}{2}$$

og det følger fra (2.71) at overflatehevningen kan skrives

$$\eta = \frac{Q}{2\sqrt{\pi}} \frac{g^{\frac{1}{2}} t}{x^{\frac{3}{2}}} \cos\left(\frac{gt^2}{4x} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.72)$$

Grafen for funksjonen (2.72) ved et vilkårlig tidspunkt $t = t_0$ er skissert i figur 2.16.



Figur 2.16: Overflatehevning ved et tidspunkt.

La oss nå studere overflateformen ved et tidspunkt t_0 og i en omegn om punktet $x = x_0$. Taylor-utvikling av fasefunksjonen gir

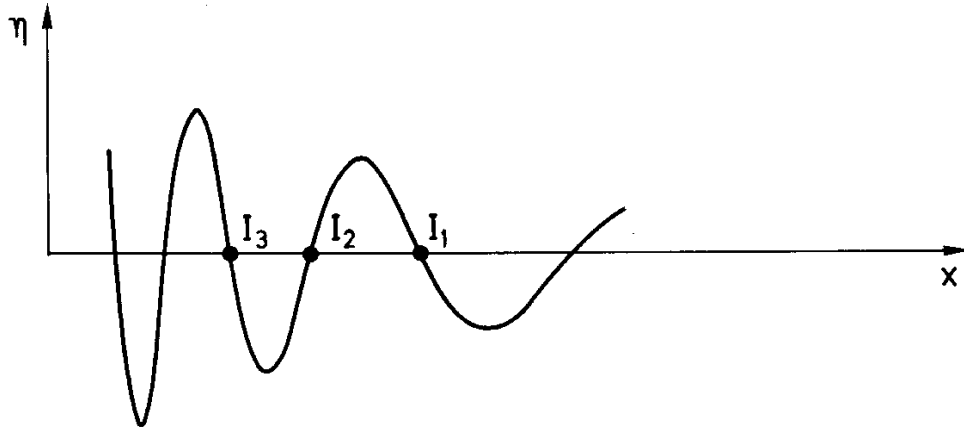
$$\frac{gt_0^2}{4x} = \frac{gt_0^2}{4x_0} - \frac{gt_0^2}{4x_0} \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right) + \dots$$

Bølgelengden λ tilsvarer en endring i fasefunksjonen på 2π

$$\lambda = |x - x_0| = \frac{8\pi x_0^2}{gt_0^2} \quad (2.73)$$

I nærheten av punktet $x = x_0$ vil derfor overflatehevningen være tilnærmet periodisk med bølgelengde gitt ved uttrykket ovenfor.

En bestemt fase i bølgetoget, som for eksempel kan være et null-punkt $\eta = 0$, vil være karakterisert med en fast verdi av fasefunksjonen. Dette medfører at nullpunktene I_1, I_2 og I_3 i figur 2.17 forplanter seg i x -retning slik at



Figur 2.17: Skisse for overflatehevningen.

$$\frac{gt^2}{4x} = \text{konstant}$$

Dette betyr at punktene forplanter seg med hastighet

$$\dot{x} = \frac{2x}{t}$$

Ved et bestemt tidspunkt er derfor hastigheten for I_1 større enn for I_2 , og hastigheten for I_2 er igjen større enn for I_3 . Bølgene blir således kontinuerlig dratt ut i lengde.

Øvingsoppgaver

1. Smalbåndet spektrum.

Vi skriver overflatehevningen som en sum av et uendelig antall sinusoidale bølgekomponenter

$$\eta(x, t) = \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

med

$$a(k) = \frac{a_0}{\kappa \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{k - k_0}{\kappa}\right)^2}$$

hvor a_0 , κ og k_0 er konstanter. Merk at bølgetallspektret er proporsjonalt med $|a(k)|^2$. Vis at ved $t = 0$ har overflaten form av en Gaussisk bølgepakke gitt ved

$$\eta(x, t = 0) = a_0 e^{-\left(\frac{\kappa x}{2}\right)^2} \cos k_0 x$$

Vi antar at bølgetallsspektret er smalbåndet (κ liten) slik at vi i nærheten av $k = k_0$, hvor vi får bidrag til integralet, kan sette

$$\omega(k) \simeq \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}(k - k_0)$$

Vis at

$$\eta(x, t) = a_0 e^{-\frac{\kappa^2(x - c_g t)^2}{4}} \cos(k_0 x - \omega(k_0)t)$$

hvor $c_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$. Skisser overflatehevningen for forskjellige valg av parametrene som inngår. Gi en begrunnelse for at det neste leddet i rekkeutviklingen for ω vil føre til at bølgepakken endrer form ved at den strekkes ut.

Hint: I integral av formen $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2 + bu} du$ substituer $u = v + b/2a$. Integralet $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-av^2} dv = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

2. Finn uttrykkene for hastighetspotensialet ϕ og overflatehevningen η i det tilfellet at væsken ved $t = 0$ tilføres en impuls slik at $\phi(x, z = 0, t = 0) = \phi_0(x)$ mens overflaten $\eta(x, t = 0) = 0$.

2.8 Stasjonær fase approksimasjonen. Asymptotisk uttrykk for Fourier integralet.

I det foregående avsnitt har vi vist at dersom væsken forstyrres lokalt, så kan hastighetspotensialet og overflatehevningen som beskriver den etterfølgende bevegelse uttrykkes ved Fourier integral av typen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{i(kx \pm \omega(k)t)} dk$$

hvor $F(k)$ er en funksjon av k . Det byr som vi har sett på vanskeligheter å diskutere integralet i sin alminnelighet, og vi skal finne et asymptotisk uttrykk for Fourier integralet gyldig for store verdier av t og x . Utledningen ble opprinnelig gitt av Kelvin (1887). Vi skal behandle det tilfellet at $t \rightarrow \infty$ mens x/t har en fast endelig verdi. Vi lar integrasjonsgrensene være vilkårlige og skriver integralet på formen

$$I(x, t) = \int_a^b F(k) e^{it\chi(k)} dk \quad (2.74)$$

hvor a og b er konstanter og

$$\chi(k) = \frac{x}{t}k \pm \omega(k)$$

For store verdier av t vil hovedbidraget til integralet (2.74) komme fra verdier av k i et område omkring verdien k_0 hvor $k = k_0$ betegner punktet hvor den

deriverte av χ med hensyn på k er null. Altså

$$\chi'(k_0) = \omega'(k_0) \pm \frac{x}{t} = 0$$

For andre verdier av k vil integranden oscillere hurtig. Dersom $F(k)$ er en forholdsvis sakte varierende funksjon av k , så vil positive og negative bidrag oppheve hverandre. Nettobidraget til integralet for disse verdier av k vil derfor bli ubetydelig.

Vi utvikler nå funksjonene $F(k)$ og $\chi(k)$ i Taylorrekke i nærheten av punktet $k = k_0$. Dette gir

$$\begin{aligned} F(k) &\simeq F(k_0) \\ \chi(k) &\simeq \chi(k_0) + \frac{1}{2}\chi''(k_0)(k - k_0)^2 \end{aligned}$$

under forutsetning av at $\chi''(k_0) \neq 0$. Settes disse rekkeutviklingene inn i (2.74) får vi

$$I(x, t) \simeq F(k_0) e^{it\chi(k_0)} \int_a^b e^{\frac{i}{2}t\chi''(k_0)(k-k_0)^2} dk.$$

Siden integranden i dette integralet svinger hurtig for store verdier av $k - k_0$ kan vi uten nevneverdig feil utvide grensene i integralet til $\pm\infty$. Fra kjente formler har vi at integralet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm im^2 u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{m} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$$

hvor m er en positiv konstant. Benyttes dette resultatet fåes

$$I(x, t) \simeq \frac{\sqrt{2\pi} F(k_0)}{\sqrt{t|\chi''(k_0)|}} e^{i(\chi(k_0)t \pm \frac{\pi}{4})} \quad (2.75)$$

hvor øvre eller nedre tegn i eksponenten gjelder henholdsvis når $\chi''(k_0)$ er positiv eller negativ. Dette er stasjonær fase approksimasjonen for Fourier-integralet. Dersom $\chi'(k) = 0$ har flere nullpunkter som ligger tilstrekkelig spredt fra hverandre, vil man få en sum av bidrag hvor hvert enkelt ledd er av formen (2.75).

Tar vi ytterligere et ledd med i rekkeutviklingen for χ vil dette leddet være

$$\frac{1}{6}\chi'''(k_0)(k - k_0)^3.$$

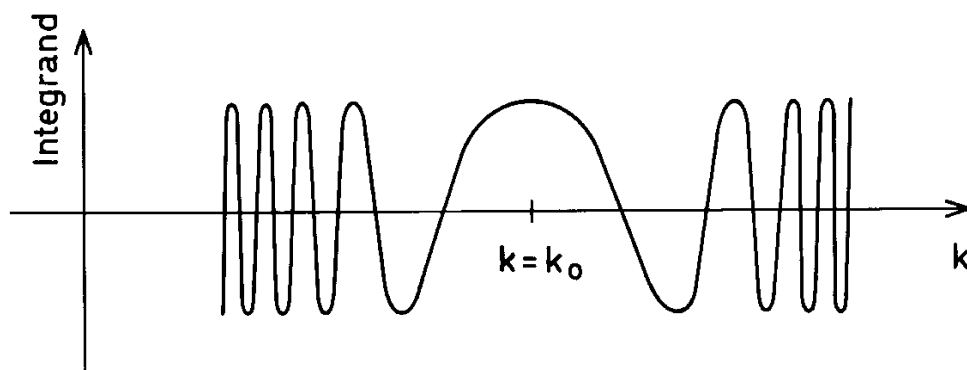
Formelen (2.75) er derfor bare gyldig når størrelsen

$$|(k - k_0)\chi'''(k_0)/\chi''(k_0)| \ll 1$$

i hele området for k som gir bidrag til integralet, dvs. når integranden svinger langsomt, se figur 2.18.

Bidrag til integranden får man derfor for k -verdier hvor

$$t(k - k_0)^2 \chi''(k_0) \leq 2\pi n$$



Figur 2.18: Prinsippskisse for stasjonær fase.

hvor n er et lite heltall. Dette kombinert med kravet ovenfor gir at

$$q = t^{-\frac{1}{2}} |\chi'''(k_0)| / |\chi''(k_0)|^{3/2} \ll 1$$

for at tilnærmelsen (2.75) skal være god.

La oss nå benytte stasjonær fase approksimasjonen til å finne asymptotiske uttrykk for overflatehevningen for tyngdebølger på dypt vann generert av en overflateforstyrrelse av form som en delta-funksjon i origo ($x = 0$). Bevegelsen av overflaten for $x > 0$ skyldes bølger som forplanter seg i x -aksens retning, og overflatehevningen for $x > 0$ kan ifølge resultatene i avsnitt 2.7 skrives

$$\eta(x, t) = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{i(kx - \omega t)} dk.$$

Vi setter følgelig

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{Q}{2\pi}, \\ \chi(k) &= k \frac{x}{t} - g^{\frac{1}{2}} k^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Dette gir

$$k_0 = \frac{gt^2}{4x^2}, \quad \chi'(k_0) = 0, \quad \chi(k_0) = -\frac{gt}{4x},$$

og

$$\chi''(k_0) = \frac{2x^3}{gt^3}, \quad \chi'''(k_0) = -12 \frac{x^5}{g^2 t^5}.$$

Ved å benytte (2.75) finner vi et uttrykk for overflatehevningen som er identisk med det vi tidligere har funnet i (2.72). Størrelsen q er proporsjonal med $(2x/gt^2)^{\frac{1}{2}}$ som viser at tilnærmelsen er god såfremt $\frac{1}{2}gt^2 \gg x$. Dette er også i samsvar med hva vi tidligere har funnet.

Øvingsoppgaver

1. Bruk stasjonær fase approksimasjonen til å finne overflatehevningen for tyngdebølger på dypt vann når $L \neq 0$. Diskuter løsningen.
2. Bruk stasjonær fase approksimasjonen til å finne overflatehevningen for kapillarbølger på dypt vann. La initialforstyrrelsen ha form som en delta-funksjon. Sammenlikn med løsning for tyngdebølger.
3. Vi har gitt Klein-Gordon likningen på formen:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + q\eta = 0$$

som gjelder for $t > 0$ og $-\infty < x < \infty$. Bølger genereres fra den initielle forstyrrelsen

$$\eta(x, 0) = A_0 e^{-(\frac{x}{L})^2}, \quad \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Finn en tilnærmet løsning for store x og t og diskuter hvor denne er gyldig.

2.9 Asymptotisk utvikling av bølgefront

Antar vi uendelig dyp vil vi ikke ha noen klar begrensning på bølgetoget som genereres fra en initiell forstyrrelse, men amplituden vil avta gradvis i tråd med fordelingen av energi i spekteret. Tar vi i betraktning at dypet er endelig har vi en begrensning på hastigheten av tyngdebølger og vi må forvente at det finnes en klart definert front av bølgetoget. Dette skal vi studere nærmere nedenfor.

Fouriertransform anvendt på initialverdiproblemet gir inversjonsintegralet

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \tilde{\eta}_0 e^{i\chi} dk; \quad \chi \equiv kx - \omega(k)t \quad (2.76)$$

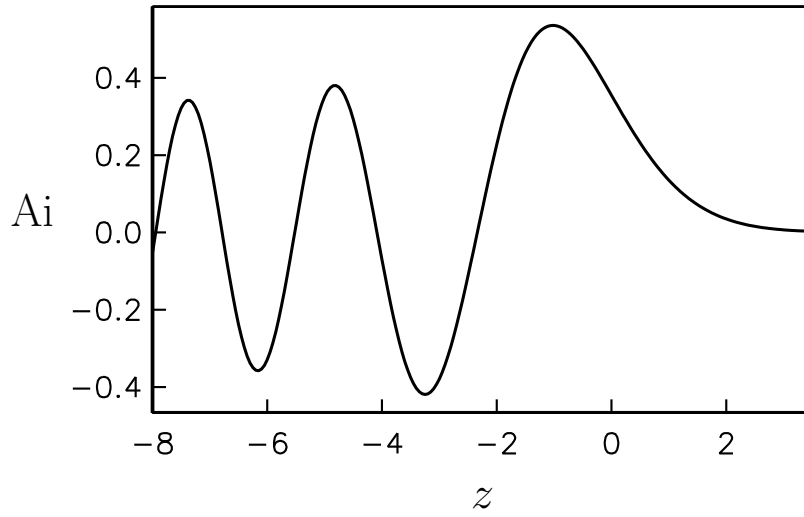
for den delen av bølgetoget som forplanter seg i positiv x -retning. For store x og t vil det dominerende bidraget komme fra det stasjonære punktet i faseplanet, k_s , der

$$\frac{d\chi(k_s)}{dk} = 0$$

som tilsvare

$$c_g(k_s) = \frac{x}{t}. \quad (2.77)$$

Dersom vi begrenser oss til tyngdebølger er gruppehastigheten begrenset av $c_0 = \sqrt{gH}$. Vi finner derfor bare stasjonære punkter for $\frac{x}{t} \leq c_0$. For større verdier for x/t er det rimelig å anta at vi ikke har noen bølge — den har ikke rukket å komme dit. For grensen $\frac{x}{t} = c_0$ finner vi et stasjonært punkt for $k_s = 0$. Dette er



Figur 2.19: Airy funksjonen.

et andre ordens stasjonært punkt i den forstand at også $\chi''(k_s) = 0$. Tar vi med tredje leddet i Taylorrekka får vi

$$\chi \approx kx - c_0 \left(k - \frac{H^2}{6} k^3 \right) t \quad (2.78)$$

og integralet

$$\eta(x, t) \approx \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \tilde{\eta}_0(0) e^{i \left(kx - \left(c_0 k - \frac{H^2}{6} c_0 k^3 \right) t \right)} dk. \quad (2.79)$$

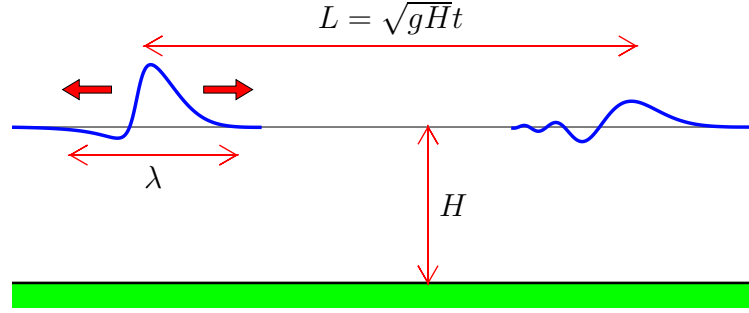
En triviell substitusjon uttrykker dette integralet ved hjelp av

$$\operatorname{Ai}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left(\frac{1}{3} s^3 + zs \right) ds \quad (2.80)$$

som er en integralformel for Airy funksjonen Ai , som er en løsning av Airy's likning

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - zF = 0. \quad (2.81)$$

Denne spiller en stor rolle i anvendt matematikk fordi løsningene har en eksponensiell variasjon for $z > 0$ og en trigonometrisk (svingende) for $z < 0$. Derfor dukker den ofte opp i lokale løsninger i ytterkanten av bølgemønstre. Airy funksjonen er den løsningen av (2.81) som er eksponensielt avtagende når $z \rightarrow \infty$ og oppfyller normaliseringsbetingelsen $\int_{-\infty}^\infty F dz = 1$. Airy funksjonen er framstilt i figur 2.19.



Figur 2.20: Definisjons-skisse av initialbetingelse og bølgespredning.

Nær $x = c_0 t$ får vi nå den asymptotiske tilnærmelsen

$$\eta \sim \frac{\frac{1}{2}\tilde{\eta}(0)}{(\frac{1}{2}c_0 H^2 t)^{\frac{1}{3}}} \text{Ai}\left(\frac{x - c_0 t}{(\frac{1}{2}c_0 H^2 t)^{\frac{1}{3}}}\right) \quad (2.82)$$

der $\tilde{\eta}(0)$ er integralet av $\eta(x, 0)$.

Når $\frac{x - c_0 t}{(\frac{1}{2}c_0 H^2 t)^{\frac{1}{3}}} \rightarrow -\infty$ kan vi bruke et asymptotisk uttrykk for Ai. Dette kan matches asymptotisk med den vanlige stasjonær-fase tilnærmelsen for $x \rightarrow c_0 t^-$. Vi hopper over detaljene her, men viser i stedet et eksempel på spredning av tsunami (figur 2.20). Ulike matematiske løsninger er framstilt i figurene 2.21 og 2.22. Etter at langbølgeteori er gjennomgått er det en god ide å se nærmere på forholdet mellom resultatene.

2.10 Lange bølger på grunt vann

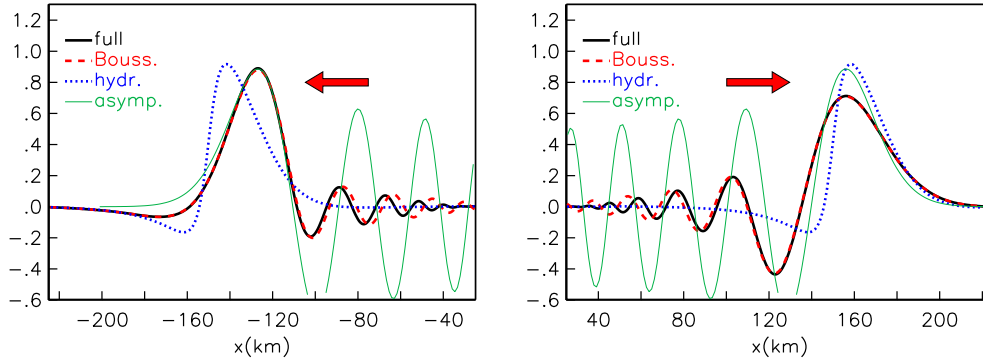
Dersom bølgelengden er stor i forhold til vanddypet og amplituden tilstrekkelig liten, beveger vannpartiklene seg i langstrakte ellipsebener, og horisontalhastigheten er mye større enn vertikalhastigheten. Horisontalhastigheten er tilnærmet konstant i vertikale snitt, og vertikal-akselerasjonen er liten sammenliknet med tyngdeakselerasjonen. Trykket i væsken er derfor tilnærmet hydrostatisk og bestemt ved tykkelsen av det overliggende væskelag. Disse forhold kan utnyttes til å utlede likninger som beskriver forplantningen av lange bølger på grunt vann. Disse forenklinger kommer for eksempel til anvendelse ved beregning av tidevann og stormflo som er bølgefenomen hvor bølgelengden er meget større enn havdypet.

Vi innfører de horisontale volumfluksene

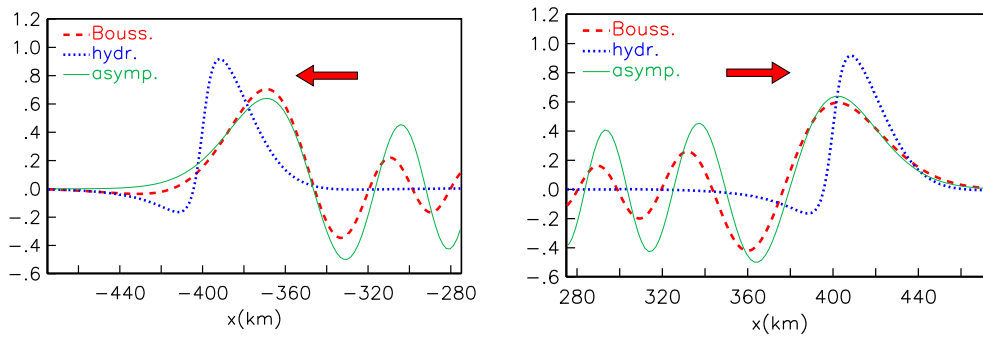
$$U = \int_{-H}^{\eta} u \, dz, \quad V = \int_{-H}^{\eta} v \, dz. \quad (2.83)$$

Dersom væsken er inkompressibel, så må netto horisontal innstrømning i en væskesøyle føre til en tilsvarende heving av overflaten. Dette kan skrives

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (2.84)$$



Figur 2.21: Spredning av jordskjelvgenerert overflatebølge (tsunami). Overflatehevingen (meter) er tegnet etter $t = 11.3$ min som tilsvarer en gangvei $L = c_0 t = 150$ km når $H = 5$ km. Kurven merket “full” er en nøyaktig numerisk løsning av Laplace likning med randbetingelser, “Bouss” er løsningen av Bousinesq likningene, “hydr.” av gruntvannslikningene, mens “asyp.” er løsningen gitt ved (2.82). Vi merker oss at “hydr.” resultatet har samme form som initialbetingelsen, men halvert amplitude.



Figur 2.22: Overflatehevingen (m) etter $t = 30$ min, $L = 400$ km. Vi merker oss at de forskjellen mellom de numeriske resultatene og asymptoten er redusert i forhold til figur 2.21.

Denne likningen fåes også ved å integrere kontinuitetslikningen $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ fra $z = -H$ til $z = \eta$ og benytte de kinematiske grenseflatebetingelsene ved bunnen og overflaten. Vi legger merke til at det ikke er foretatt noen linearisering for å komme frem til likning (2.84). Den gjelder også i tilfeller hvor bunnen ikke er plan og H er en funksjon av x og y .

Siden vertikalakselerasjonen er liten, gir den lineariserte bevegelseslikningen i vertikalretning

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Ved integrasjon får vi hydrostatisk trykkfordeling som innebærer at trykket i væsken er bestemt ved vekten av overliggende væskesøyle. For en væske med uniform tetthet er

$$p = \rho g(\eta - z) + p_0$$

hvor p_0 som før betegner trykket over væsken. Innsettes dette uttrykket for p i de lineariserte bevegelseslikningene i horisontalretning, får vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

Disse likningene viser at med de tilnærmelser som er gjort, så er u og v uavhengige av z . I denne tilnærming er derfor

$$\begin{aligned} u &= U/H \\ v &= V/H \end{aligned}$$

Dette medfører at likningene for horisontalbevegelsen kan skrives

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.85}$$

hvor $c_0^2 = gH$. Likningene (2.84) og (2.85) er de lineariserte gruntvannslikningene. Den formen de her er skrevet på egner seg særlig godt for numerisk integrasjon. Derivasjon av likning (2.84) med hensyn på t og substitusjon av uttrykkene for $\frac{\partial U}{\partial t}$ og $\frac{\partial V}{\partial t}$ fra (2.85) leder til en likning for overflatehevingen

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial y}). \tag{2.86}$$

Dersom bunnen er plan (c_0 uavhengig av x og y), reduserer (2.86) seg til den vanlige to-dimensjonale bølgelikningen for ikke-dispersive bølger. En bølgeløsning

av (2.84) og (2.85) kan når c_0 er konstant, skrives

$$\begin{aligned}\eta &= a \sin k(x - c_0 t), \\ u &= \frac{a}{H} c_0 \sin k(x - c_0 t), \\ v &= 0.\end{aligned}$$

Den tilsvarende vertikalhastighet er

$$w = -\frac{ka}{H} c_0 (z + H) \cos k(x - c_0 t).$$

En kan forholdsvis lett innføre et korreksjonsledd i gruntvannslikningene (2.85) som i noen grad tar hensyn til avvik fra hydrostatisk trykkfordeling. For enkelhets skyld skal vi vise hvordan dette kan gjøres i det tilfellet at bunnen er plan og bevegelsen foregår i plan parallelle med xz -planet. Dette medfører at bevegelsen er uavhengig av y og at $v = 0$. Under forutsetning av at horisontalhastigheten er uavhengig av z , får vi derfor ved integrasjon av kontinuitetslikningen

$$w = -\frac{\partial u}{\partial x}(z + H).$$

Fra den lineariserte likningen for vertikalbevegelsen får vi følgende

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(z + H).$$

Trykket finner vi så ved integrasjon. Dersom bare lineære ledd beholdes, så er

$$p = \rho g(\eta - z) + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \left(\frac{1}{2} z^2 + Hz \right) + p_0.$$

Med dette uttrykket for p kan den lineariserte likningen for horisontalbevegelsen skrives

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \left(\frac{1}{2} z^2 + Hz \right).$$

Integrasjon av denne likningen i intervallet fra $z = -H$ til $z = 0$, gir

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{H^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \quad (2.87)$$

hvor andre leddet på høyre side i likningen (2.87) representerer et korreksjonsledd for avvik fra hydrostatisk trykkfordeling. Likningen (2.87) sammen med kontinuitetslikningen (2.84) (med $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$) har bølgeløsninger av formen

$$\begin{aligned}\eta &= a \sin k(x - ct) \\ U &= ac \sin k(x - ct)\end{aligned}$$

hvor fasehastigheten er

$$c = \frac{c_0}{(1 + \frac{(kH)^2}{3})^{\frac{1}{2}}} \simeq c_0(1 - \frac{(kH)^2}{6}). \quad (2.88)$$

Dette viser at korreksjonsleddet i likning (2.87) leder til dispersive bølger, og dispersjonsrelasjonen (2.88) er i samsvar med den vi tidligere har funnet for lange bølger (likning 2.19).

Betingelsen for at man kan regne med hydrostatisk trykkfordeling er åpenbart at $kH \ll 1$. Dersom dette kravet er oppfylt, er leddet $\frac{H^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2}$ i likning (2.87) mye mindre enn f.eks. leddet $\frac{\partial U}{\partial t}$. Dette ser man når man beregner leddene ved hjelp av løsningen av likningen.

Til nå har vi antatt at amplituden er så liten at bevegelseslikningen kan lineariseres. Ved hjelp av de lineære løsningene som vi har funnet, kan vi lett finne betingelsen for at lineariseringen skal være gyldig. Lineariseringen innebærer for eksempel at leddet $u \frac{\partial u}{\partial x}$ er sløyfet i forhold til $\frac{\partial u}{\partial t}$. Forholdet mellom det første og det siste av disse leddene er maksimalt lik a/H . Det ikkelineære leddet kan derfor godt sløyfes når forholdet $a/H \ll 1$. Dette er i overensstemmelse med hva vi tidligere fant i avsnitt 2.2. Betingelsen $a/H \ll 1$ vil også medføre at det ikkelineære leddet $u \frac{\partial w}{\partial x}$ kan sløyfes i forhold til $\frac{\partial w}{\partial t}$ i likningen for vertikalbevegelsen.

Dersom bølgelengden er tilstrekkelig stor i forhold til H , så kan vi etter hva vi tidligere har sett, sløyfe leddet $\frac{\partial w}{\partial t}$ i forhold til g og regne med hydrostatisk trykkfordeling selv for bølger med forholdsvis stor amplitude. Selv om bølgeamplituden er så stor at man må ta med ikkelineære ledd i likningene, så vil forutsetningene om at trykkfordelingen er hydrostatisk og at horisontalhastigheten er uavhengig av z , gjelde med god tilnærming for bølger som er tilstrekkelig lange i forhold til dypet. Dersom man bare tar med de dominerende ikkelineære ledd, får man fra bevegelseslikningen for horisontalbevegelsen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.89)$$

og fra kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[u(H + \eta)]. \quad (2.90)$$

Likningene (2.89) og (2.90) beskriver bevegelsen av ikkelineære plane bølger på grunt vann. Disse likningene blir behandlet inngående i avsnitt 7.1.

Korreksjonsleddet for avvik fra hydrostatisk trykkfordeling (se likning 2.87) kan bli av samme størrelsesorden som det ikkelineære leddet $u \frac{\partial u}{\partial x}$, dersom parameteren $\frac{a}{H}(\frac{\lambda}{H})^2$ er omkring 10. I så fall er de ikkelineære og de ikke-hydrostatiske effekter av like stor betydning, og et tilsvarende korreksjonsledd som i likning (2.87) må taes med i den ikkelineære gruntvannslikningen (2.89). For to-dimensjonal bevegelse finner man at i dette tilfellet kan gruntvannslikningen skrives

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{U^2}{h + \eta}) = -g(h + \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{H^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2}. \quad (2.91)$$

Det overlates til leseren som øvelse å utlede likningen (2.91). Denne likningen sammen med likning (2.84) går under navnet Boussinesq likningene. Parameteren $\frac{a}{H}(\frac{\lambda}{H})^2$ spiller en viktig rolle ved klassifisering av lange bølger, og den har fått navnet *Ursell-parameteren*.

Gruntvannslikningene kan utledes ved en formell pertubasjonsutvikling hvor parametrene

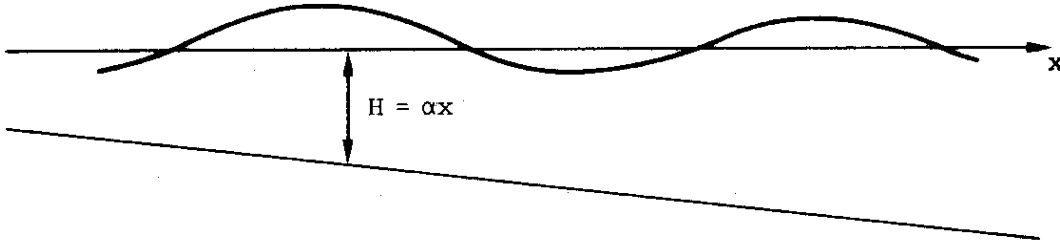
$$\alpha = \frac{a}{H} \quad \text{og} \quad \beta = \frac{\lambda}{H}$$

tjener som utviklingsparametre. Denne fremgangsmåten vil man finne beskrevet for eksempel i Whitham (1974). Her har vi med hensikt valgt en matematisk mindre formell fremstilling. Til gjengjeld kommer den fysikalske tolkningen av de forskjellige tilnærmelsene tydeligere frem ved denne fremstillingen. I neste kapittel presenterer vi en formell utledning av Boussinesq og KdV-likninger.

Vi skal til slutt vise hvordan de lineariserte gruntvannslikningene kan benyttes til å studere forplantningen av plane bølger over skrånende bunn. Den relative endringen i vanddypet forutsettes å være liten over en distanse som tilsvarer bølgelengden. Vi setter

$$H = \alpha x$$

hvor $\alpha = \tan \theta$, og θ er bunnplanets hellningsvinkel med horisontalplanet (x -aksen).



Figur 2.23: Bølge på skrånende bunn.

Vi søker løsninger av (2.86) som er periodisk i t slik at

$$\eta = \hat{\eta}(x) \cos \omega t.$$

Innsatt i (2.86) gir dette følgende likning for $\hat{\eta}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \right) + \kappa \hat{\eta} = 0 \quad (2.92)$$

hvor $\kappa = \omega^2 / \alpha g$. Det er minst to strategier for å løse likning (2.92). En strategi er å skrive $\hat{\eta}$ som potensrekke i x

$$\hat{\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ved innsetting i likningen for $\hat{\eta}$ gir dette, siden koeffisientene foran hver enkelt potens i x må være lik null om likningen skal være oppfylt,

$$a_n = \frac{\kappa}{n^2} a_{n-1}.$$

Rekken for $\hat{\eta}$ kan derfor skrives

$$\hat{\eta} = a_0 \left[1 - \frac{\kappa x}{1^2} + \frac{(\kappa x)^2}{1^2 \cdot 2^2} - \dots \right].$$

Dette er rekken for Bessel-funksjonen J_0 av orden null og argument $2\sqrt{\kappa x}$ (se Rottmann) slik at

$$\hat{\eta} = a_0 J_0(2\sqrt{\kappa x}). \quad (2.93)$$

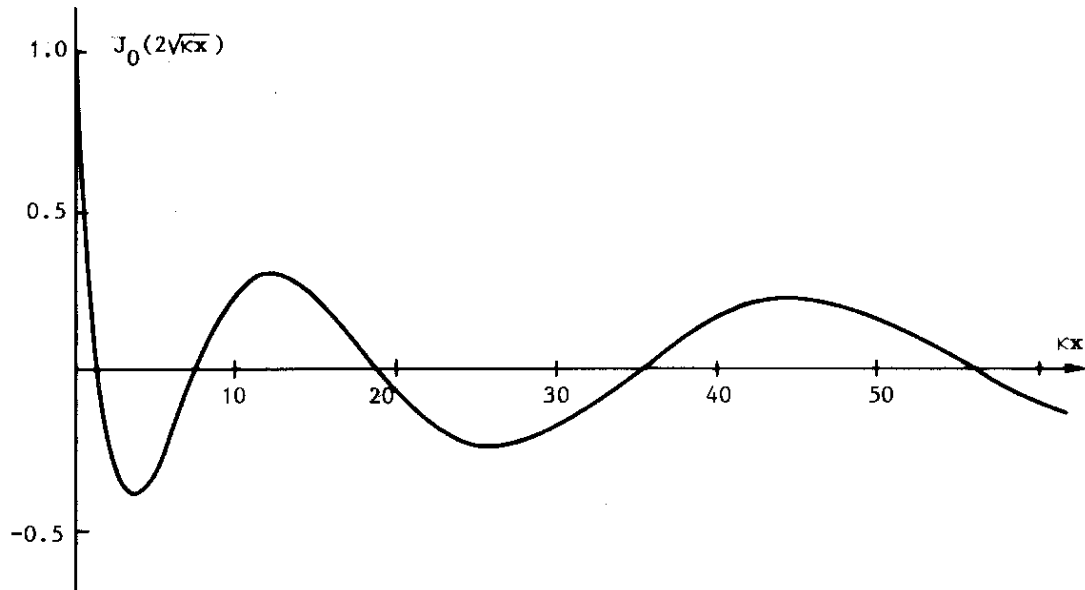
En annen strategi for å finne løsningen til likning (2.92) er å gjøre substitusjonen $u = 2\sqrt{\kappa x}$. Dette bringer likningen over på formen

$$u \frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial u^2} + \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial u} + u \hat{\eta} = 0$$

som er Bessel-likningen på standard form. Følgelig har vi at den generelle løsningen er på formen

$$\hat{\eta} = a J_0(u) + b Y_0(u).$$

Grafen for funksjonen $J_0(2\sqrt{\kappa x})$ er skissert i figur 2.24.



Figur 2.24: Bølgeprofil på skrånende bunn.

For store verdier av argumentet, z , kan Bessel-funksjonen erstattes med første leddet i en asymptotisk utvikling (se K. Rottmann 1960)

$$J_0(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right).$$

Vi får derfor at for $\sqrt{\kappa x} \gg 1$ så er

$$\hat{\eta} = \frac{a_0}{\sqrt{\pi \kappa^{1/4} x^{1/4}}} \cos(2\sqrt{\kappa x} - \frac{\pi}{4}).$$

Derved kan overflatehevingen skrives

$$\eta = a(x) \cos(2\sqrt{\kappa x} + \omega t - \frac{\pi}{4}) + a(x) \cos(2\sqrt{\kappa x} - \omega t - \frac{\pi}{4}) \quad (2.94)$$

hvor

$$a(x) = \frac{a_0}{2\sqrt{\pi \kappa^{1/4} x^{1/4}}}.$$

Rekkeutviklingen av fasefunksjonen $\chi = 2\sqrt{\kappa x} \pm \omega t - \frac{\pi}{4}$ i potensrekke i x (se tilsvarende utvikling på side 39) leder til følgende uttrykk for bølgelengden i omegn av punktet $x = x_0$

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{x_0}{\kappa}}.$$

Uttrykket (2.94) viser at den periodiske bevegelsen består av to bølge-komponenter, med amplitude a , som beveger seg henholdsvis i positiv og negativ x -retning. For bølge-komponenten som beveger seg inn over grunnere vann, øker bølgeamplituden samtidig med at bølgelengden avtar.

Øvingsoppgaver

1. Vis at den lineariserte Boussinesq-likningen leder til en fasehastighet

$$c = \frac{c_0}{(1 + \frac{(kH)^2}{3})^{\frac{1}{2}}}$$

Lag en sammenlikning mellom verdier for c beregnet på grunnlag av dette uttrykket og på grunnlag av det eksakte uttrykket for fasehastigheten for tyngdebølger. Hvor stor må bølgelengden være i forhold til vanddypet for at avviket skal være mindre enn 5%. Foreta en liknende sammenlikning når fasehastigheten settes lik $c = c_0$.

2. I en uendelig lang kanal med plan bunn og rette parallelle sidevegger er vanddypet H når vannet er i ro, og bredden av kanalen er B . Vi legger x -aksen langs kanalens midtlinje og med y -aksen pekende normalt på sideveggene. Anta at $kH \ll 1$, og vis at bølger med overflateheving

$$\eta = \hat{\eta}(y) e^{i(kx - \omega t)}$$

bare er mulig under visse betingelser. Bestem $\hat{\eta}(y)$, og vis at bølgebevegelsen kan tenkes sammensatt av bølger som reflekteres fra sideveggene.

3. Vi betrakter to-dimensjonal bølgebevegelse i et væskelag hvor bunnen er plan og vanddypet ved likevekt er H . På bunnen ligger det neddykket en kloss med høyde h og lengde L . Inn mot klossen kommer en sinusoidal bølge med amplitude a og bølgelengde λ . Finn amplituden for bølgen som reflekteres ved klossen, og bølgen som forplanter seg inn i området bak klossen. Vi forutsetter at den lineariserte hydrostatiske gruntvannsteorien gjelder i hele området. Finn den maksimale kraften som virker på klossen i horisontal retning. Sett inn verdier karakteristisk for sokkelen på Statfjord C plattformen: $h = 60\text{m}$, $L = 150\text{m}$ og langperiodisk dønning $\lambda = 800\text{m}$ og $a = 1\text{m}$. Vanddypet er $H = 150\text{m}$. Bestem kraften på sokkelen. Hva er i første rekke årsakene til at dette overslaget må antas å være beheftet med store feil?

4. Refleksjon fra hylle.

Et bunnprofil er gitt ved

$$h = \begin{cases} h_1 & x < 0 \\ h_2 & x > 0 \end{cases}$$

Vi antar at lineær, hydrostatisk gruntvannsteori gjelder både til høyre og til venstre for spranget ($x = 0$). Ved spranget antar vi at overflateheving og massefluks er kontinuerlig.

En sinusoidal bølge med amplitude A og frekvens ω kommer inn mot spranget fra venstre. Finn de reflekterte og de transmitterte bølgene.

5. Refleksjon fra skråning.

Vi har gitt en dybdefunksjon

$$h = \begin{cases} h_1 & x < 0 \\ h_1 - \frac{x}{L}(h_1 - h_2) & 0 < x < L \\ h_2 & x > L \end{cases}$$

Vi antar at lineær hydrostatisk gruntvannsteori gjelder for alle x . Fra området til venstre for bunnvariasjonene, $x < 0$, kommer det inn en sinusformet bølge med amplitude A og frekvens ω . Finn det resulterende bølgesystemet.

Du vil få bruk for å derivere de to lineært uavhengige løsningene av Bessels differensialligning til nullte orden:

$$\frac{\partial J_0}{\partial x} = -J_1, \quad \frac{\partial Y_0}{\partial x} = -Y_1.$$

For å drøfte ulike grensetilfeller trenger du formlene

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}), \quad Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}),$$

for store x og

$$J_0(x) \sim 1, \quad J_1(x) \sim \frac{1}{2}x, \quad Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln x, \quad Y_1(x) \sim -\frac{2}{\pi x},$$

for små x .

6. Refleksjon av puls fra hylle.

Et bestemt bunnprofil er gitt ved

$$h = \begin{cases} h_1 & x < 0 \\ h_2 & x > 0 \end{cases}$$

Vi antar at lineær, hydrostatisk gruntvannsteori gjelder på begge sider av spranget ($x = 0$). En bølgepuls kommer fra venstre og er gitt ved

$$\eta(s) = \begin{cases} 0 & s < -L \\ A \cos^2(\pi \frac{s}{2L}) & -L < s < L \\ 0 & L < s \end{cases}$$

der $s = x - c_1 t$. Vi antar at pulsen, etter interaksjon med spranget, spaltes i en transmittert og en reflektert puls. Vi antar videre at begge pulsene har tilsvarende form som den innkommende, men med andre verdier på L og A . Hvilke lengder bør disse bølgepulsene ha? Finn amplitudene ved å kreve konservering av masse og energi.

7. Energiomsetning i lange bølger på grunt vann.

Vi skal i denne oppgaven anta ikke-lineær langbølgeteori.

- Finn energitettheten E pr horisontal flateenhet ved direkte utregning. (Energien i vertikale søyler med vann.)
- Finn de horisontale komponentene av energifluksen \mathbf{F} integrert opp over hele dypet.
- Hvilken relasjon må eksistere mellom E og \mathbf{F} ? Vis ved innsettning at dette stemmer her.
- Vi antar nå flat bunn, lineære forhold og en harmonisk, progressiv bølge. Vis hvordan midlede utgaver av E og \mathbf{F} nå kan relateres ved hjelp av gruppehastigheten.

2.11 Utledning av ikkelineære gruntvannslikninger

2.11.1 Utledning av Boussinesq likningene

Vi antar todimensjonal bevegelse med x -aksen horisontalt og z -aksen vertikalt. Bunnen (likevektsdypet) er variabel og beskrives ved $z^* = -h^*(x^*)$, der \star angir størrelser med dimensjon. Vi gjør likningene dimensjonsløse i tråd med følgende punkter:

- Et typisk dyp, H , brukes for skalering av “vertikale” størrelser som z , vertikalhastighet og overflatehevning.
- En typisk bølgelengde, ℓ , brukes for skalering av horisontale størrelser.
- Feltstørrelser skaleres i tillegg med en faktor, α , som er et mål for amplituden.

En linearisering forutsetter nå at α er liten, mens en langbølgeutvikling bygger på at

$$\epsilon \equiv \frac{H^2}{\ell^2} \quad (2.95)$$

er liten. Vi gjennomfører nedenfor en formell utvikling i disse parameterene. Det er verdt å merke seg at vi ikke innfører formelle pertubasjonsrekker for de ukjente, men i stedet iterer på likningene.

Dimensjonering gjøres etter

$$\begin{aligned} z^* &= Hz & x^* &= \ell x & t^* &= \ell(gH)^{-\frac{1}{2}}t \\ h^* &= Hh(x) & \eta^* &= \alpha H\eta & u^* &= \alpha(gH)^{\frac{1}{2}}u \\ w^* &= \epsilon^{\frac{1}{2}}\alpha(gH)^{\frac{1}{2}}w & p^* &= \rho gHp \end{aligned}$$

Randbetingelsene ved $z = \alpha\eta$ kan nå skrives

$$p = 0, \quad \eta_t + \alpha u \eta_x = w. \quad (2.96)$$

Ved bunnen har vi betingelsen om null væske-gjennomstrømning, som gir

$$w = -h_x u. \quad (2.97)$$

I væskerommet har vi Eulers bevegelseslikninger

$$u_t + \alpha u u_x + \alpha w u_z = -\alpha^{-1} p_x \quad (2.98)$$

$$\epsilon(w_t + \alpha u w_x + \alpha w w_z) = -\alpha^{-1}(p_z + 1) \quad (2.99)$$

og kontinuitetslikningen

$$u_x + w_z = 0. \quad (2.100)$$

Elimineres alle ledd av orden ϵ får vi den hydrostatiske beskrivelsen. Til orden ϵ^0 gir (2.99) en trykkfordeling

$$p = \alpha\eta - z + O(\alpha\epsilon) \quad (2.101)$$

som impliserer at $p_x = \alpha\eta_x + O(\alpha\epsilon)$, dvs. at den horisontale trykkgradienten er uavhengig av z til orden ϵ^0 . Av dette følger at alle partikler i et snitt $x=\text{const.}$ får samme horisontale akselerasjon. Har de da samme horisontalhastighet til orden ϵ^0 ved ett tidspunkt gjelder dette til alle tider. Dette er for eksempel tilfelle der hvor væsken initielt er i ro. Vi kan nå skrive

$$u_z = O(\epsilon) \quad (2.102)$$

eller $u \approx u(x, t)$. Dette kan også vises ved å benytte krav om virvelfrihet. Likning (2.98) gir da

$$u_t + \alpha u u_x = -\eta_x + O(\epsilon). \quad (2.103)$$

Vi vil nå utlede en høyere ordens likning ved å anta at både ϵ og α er små. Dette betyr at vi beholder ledd av orden α og ϵ , men at ledd inneholdende produkter av disse eller ϵ^2 sløyfes. Vi starter med å definere et vertikal-middel

$$\bar{u} = (h + \alpha\eta)^{-1} \int_{-h}^{\alpha\eta} u \, dz. \quad (2.104)$$

En følge av (2.102) er at $\bar{u}(x, t) - u(x, z, t) = O(\epsilon)$. En dybdemidlet kontinuitetslikning kan nå skrives

$$\eta_t = -\{(h + \alpha\eta)\bar{u}\}_x. \quad (2.105)$$

Denne er eksakt og er utledet i kompendiet ved en direkte volum-betraktning.

En korreksjon på hydrostatisk trykk kan finnes fra (2.99). Vi kan gjøre feil av orden ϵ og α inne i parentesene på venstre side uten at trykket får relativ feil av lavere orden enn $\alpha\epsilon$ og ϵ^2 . Først må vi finne et uttrykk for w . Fra (2.96), (2.102) og (2.100) følger

$$w = \eta_t - z\bar{u}_x + O(\alpha, \epsilon). \quad (2.106)$$

Settes dette inn i (2.99) får vi

$$p = \alpha\eta - z - \epsilon\alpha(z\eta_{tt} - \frac{1}{2}z^2\bar{u}_{xt}) + O(\alpha\epsilon^2, \alpha^2\epsilon). \quad (2.107)$$

Fra (2.105) har vi $\eta_{tt} = -(h\bar{u})_{xt} + O(\alpha)$ som kan brukes til å skrive om uttrykket for p . Det neste steget er å midle den horisontale komponenten av bevegelseslikningen, (2.98), over væskedypet. Midling av første ledd på venstre side gir

$$\overline{(u_t)} = (h + \alpha\eta)^{-1} \int_{-h}^{\alpha\eta} u_t \, dz = \bar{u}_t + \alpha(h + \alpha\eta)^{-1}(\bar{u} - u|_{z=\alpha\eta})\eta_t. \quad (2.108)$$

Likning (2.102) gir nå at det siste leddet er av orden $\alpha\epsilon$ som sløyfes. For neste ledd i (2.98) får vi tilsvarende

$$\overline{\left(\frac{1}{2}\alpha(u^2)_x\right)} = \alpha\frac{1}{2}\left(\overline{(u^2)}\right)_x + O(\alpha^2\epsilon). \quad (2.109)$$

En konsekvens av (2.102) er at vi kan skrive $u = \bar{u} + \epsilon u_1$ der u_1 er av orden 1, men er null i middel. En enkel regning gir nå

$$\frac{1}{2}\left(\overline{(u^2)}\right)_x = \frac{1}{2}\overline{(\bar{u}^2 + 2\epsilon\bar{u}u_1)}_x + O(\epsilon^2) = \bar{u}\bar{u}_x + O(\epsilon)^2. \quad (2.110)$$

Det siste bidraget til akselerasjonen i (2.98) kan sløyfes umiddelbart som følge av (2.102). Setter vi så inn p fra (2.107) på venstresiden og midler denne får vi

$$\bar{u}_t + \alpha\bar{u}\bar{u}_x = -\eta_x + \epsilon\left\{\frac{1}{2}h(h\bar{u}_t)_{xx} - \frac{1}{6}h^2\bar{u}_{xxt}\right\} + O(\epsilon^2, \alpha\epsilon). \quad (2.111)$$

Denne sammen med (2.105) utgjør et sett av to likninger i x og t for de to ukjente η og \bar{u} . Likningene kan bringes på mange former ved omskrivninger av høyere ordens ledd eller ved feks. å innføre $U = (h + \alpha\eta)\bar{u}$ som ukjent. Legg merke til at (2.111) er gyldig for variabelt dyp. Det prinsipielt nye ved (2.111) i forhold til hydrostatisk teori er at det nye leddet på høyresiden gir dispersjon.

2.11.2 Utledning av KdV-likningen

Dersom vi har bølger som forplanter seg i bare en retning over konstant dyp kan Boussinesq-likningene erstattes av en den enklere KdV (Korteweg-de Vries) likningen. Denne kan utledes på flere ulike vis, hvorav vi nevner:

1. En finner et ledende ikke-lineært ledd fra hydrostatisk ikke-lineær teori og et ledende dispersjonsledd fra den lineære dispersjonsrelasjonen. Disse kombineres så direkte.
2. En bytter koordinatsystem slik at det beveger seg med lineær gruntvannshastighet. For ensrettede bølger vil alle størrelser endre seg langsomt i tiden når de sees i dette systemet.
3. En kan finne korreksjoner på likningene for Riemann-invariantene innenfor rammen av Boussinesq-likningene.

Framgangsmåte 1 følges seinere i kompendiet. Denne kan nok oppfattes som vel lettvinnt, derfor skal vi her gi en formell utledning av typen 2.

Vi skal gjøre to ting: beskrive det hele med bare η som ukjent og redusere likningenes orden. Først byttes koordinater etter:

$$\xi = x - t, \quad \tau = \epsilon t. \quad (2.112)$$

Bølgen forplanter seg altså mot økende x og den lille faktoren ϵ foran t angir at tidsvariasjonen i det nye koordinatsystemet er langsam. Egentlig kunne vi like gjerne valgt α som ϵ for reskalering av tiden og en bør tenke seg at disse parametrene er av samme størrelsesorden. Koordinatskifte i kontinuitetslikningen, (2.105), gir

$$\epsilon\eta_\tau - \eta_\xi = -(1 + \alpha\eta)\bar{u}_\xi - \alpha\bar{u}\eta_\xi. \quad (2.113)$$

Der vi altså har satt $h \equiv 1$. Til ledende orden gir likningen ovenfor: $\eta_\xi = \bar{u}_\xi + O(\alpha, \epsilon)$. Dersom vi har at η og \bar{u} er like ett eller annet sted i mediet er de alltid like til denne orden. Dette er tilfelle dersom bølgen f.eks. har endelig utstrekning. Likningen ovenfor kan derfor omskrives innenfor gjeldende nøyaktighet

$$\epsilon\eta_\tau - \eta_\xi = -\bar{u}_\xi - 2\alpha\eta\eta_\xi + O(\epsilon^2, \alpha\epsilon). \quad (2.114)$$

Tilsvarende kan mesteparten av \bar{u} 's forekomster i den transformerte bevegelseslikningen elimineres. Innsetting i (2.111), etterfulgt av omskrivninger, gir

$$\bar{u}_\xi = \eta_\xi + \epsilon\eta_\tau + \alpha\eta\eta_\xi + \frac{1}{3}\epsilon\eta_{\xi\xi\xi} + O(\epsilon^2, \alpha\epsilon). \quad (2.115)$$

Ved innsetting i (2.114) og ordning framkommer så en variant av KdV likningen

$$\epsilon\eta_\tau + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_\xi + \frac{1}{6}\epsilon\eta_{\xi\xi\xi} = O(\epsilon^2, \alpha\epsilon). \quad (2.116)$$

Vi merker oss at $O(1)$ leddene kansellerte slik at denne likningen direkte uttrykker regnskapet mellom langsam tidsendring, ikke-lineæritet og dispersjon. En bør også observere at ingen kryss-derivasjon var nødvendig for å eliminere \bar{u} slik at en lav orden på likningene oppnås automatisk. Innføres koordinatene x og t i (2.116) finner vi

$$\eta_t + (1 + \frac{3}{2}\alpha\eta)\eta_x + \frac{1}{6}\epsilon\eta_{xxx} = O(\epsilon^2, \alpha\epsilon), \quad (2.117)$$

som svarer til formen gjengitt seinere i kompendiet. Denne kan omskrives videre på ulike vis. F.eks. kan vi benytte ledende ordens balanse i (2.117), $\eta_t + \eta_x = O(\epsilon, \alpha)$, til å omskrive dispersjonsleddet

$$\eta_t + (1 + \frac{3}{2}\alpha\eta)\eta_x - \frac{1}{6}\epsilon\eta_{xxt} = O(\epsilon^2, \alpha\epsilon), \quad (2.118)$$

som er gunstigere å løse numerisk. De ulike varianter av KdV likninger vil naturligvis ikke gi identiske svar, men svar som er konsistente innenfor de felles feilgrensene.

Det er mulig å generalisere KdV- likningen slik at en langsomt-varierende bunn ($h_x = O(\epsilon, \alpha)$) etc. kan inkluderes, men vi skal ikke gjøre dette her.

2.12 Viskositetens innvirkning på overflatebølger

I det foregående har vi behandlet væsken som friksjonsfri og derved neglisjert viskositetens innvirkning på bølgebevegelsen. Selv om vi kan gjøre dette med god tilnærming for mange bølgefænomener, vil viskositeten i andre tilfeller kunne ha en dominerende innflytelse på bølgebevegelsen. Det er derfor god grunn til å se nærmere på den betydningen friksjonen har for overflatebølger.

Vi skal her nøye oss med å behandle plane overflatebølger i en homogen og inkompressibel Newtonsk væske av ubegrenset dyp. De lineariserte bevegelseslikningene er

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w - g \quad (2.120)$$

og kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

I disse likningene, og i følgende likninger i dette avsnittet, betegner ∇^2 den to-dimensjonale Laplace operatoren

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

ν er den kinematiske viskositetskoeffisienten.

Vi innfører potensialene ϕ og ψ og setter

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.121)$$

Både virvellikningen (som finnes ved å eliminere trykket fra (2.119) og (2.120)) og kontinuitetslikningen er oppfylt dersom

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.122)$$

og

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (2.123)$$

Derved følger det fra (2.119) og (2.120) at trykket p kan skrives

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz \right) + f(t)$$

hvor $f(t)$ er en vilkårlig funksjon av t som vi kan trekke inn i ϕ . Benytter vi så resultatene fra avsnitt 2.1, får de lineariserte grenseflatebetingelsene ved overflaten

formen

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + 2\nu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= w\end{aligned}\tag{2.124}$$

hvor man i alle tre likningene skal sette $z = 0$. Den første av disse likningene uttrykker at skjærspenningen er null ved overflaten, den neste likningen er betingelsen for normalspenningen og den siste er den kinematiske betingelsen. Av de to siste likningene kan overflatehevningen elimineres, og en får

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + gw + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\tag{2.125}$$

for $z = 0$.

Likningene (2.122) og (2.123) har løsninger

$$\begin{aligned}\psi &= Ae^{mz} e^{i(kx - \omega t)} \\ \phi &= Be^{kz} e^{i(kx - \omega t)}\end{aligned}\tag{2.126}$$

hvor A , B , k og ω er konstanter og

$$m = \left(k^2 - \frac{i\omega}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

For at bevegelsen skal dø ut når $z \rightarrow -\infty$ velger vi realdelen av m positiv. De tilhørende hastighetskomponenter finnes ved at uttrykkene (2.126) settes inn i (2.121). Den første grenseflatebetingelsen i (2.124) sammen med betingelsen (2.125) leder til et homogent likningssett for konstantene A og B . Skal dette settet ha ikke-trivielle løsninger for A og B , må determinanten være null, og dette medfører at følgende betingelse må være oppfylt:

$$\left(\frac{c}{c_s} + i\beta\right)^2 - 1 + \beta^{3/2} \left(\beta - 2i\frac{c}{c_s}\right)^{\frac{1}{2}} = 0\tag{2.127}$$

hvor $c_s = \left(\frac{g}{k} + k\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ er fasehastigheten for tyngde-kapillarbølger i friksjonsfri væske ($\nu = 0$) og c betegner som før fasehastigheten ω/k .

Parameteren β som inngår i likning (2.127) er gitt ved

$$\beta = \frac{2\nu k}{c_s}.$$

For væsker med liten viskositet er β meget liten unntatt for svært korte bølgelengder. Tabell 2.1 viser noen verdier av β for rent vann ($\sigma = 7.4 \cdot 10^{-2} \text{N/m}$, $\nu = 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$).

λ cm	$\beta \times 10^3$	z_e cm
1	5.01	0.01
10	0.31	0.03
100	0.01	0.05
1000	0.0001	0.09

Tabell 2.1: Dempning ved forskjellige bølgelengder.

Dersom man unntar de svært korte bølgelengdene, kan man sløyfe leddet som har $\beta^{3/2}$ som faktor i likning (2.127), og vi får

$$c = c_s(1 - i\beta).$$

For et reelt bølgetall er altså fasehastigheten kompleks. Realverdien av c er fasehastigheten for bølgene, mens imaginærdelen tilsvarer en eksponensiell dempning. Benytter man seg av resultatene ovenfor, kan overflatehevningen skrives

$$\eta = ae^{-2\nu k^2 t} \cos k(x - c_s t).$$

Dette uttrykket viser at forplantningshastigheten er upåvirket av friksjonen, men at friksjonen medfører en dempning av bølgeamplituden som er størst for korte bølger. e-foldingstiden for dempningen er

$$t_e = \frac{1}{2\nu k^2} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\nu}.$$

Siden perioden for bølgene er $T = 2\pi/kc_s$ så tilsvarer e-foldingstiden et antall perioder

$$\frac{t_e}{T} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{c_s}{\nu k} \right) = \frac{1}{2\pi\beta}.$$

Selv for så korte bølger som $\lambda = 1\text{cm}$ er e-foldingstiden i vann omkring 30 perioder. Med andre ord etter at bølgene har forplantet seg en strekning på 30λ er amplituden redusert med en faktor e^{-1} .

For tilstrekkelig små verdier av β er

$$m = \pm \frac{k}{\beta^{1/2}}(1 - i).$$

Potensialet ψ som angir hvordan det virvelfrie hastighetsfeltet blir deformert av friksjonens virkning, vil i dette tilfellet inneholde en dempningsfaktor $\exp(\frac{z}{z_e})$ hvor

$$z_e = \frac{\beta^{1/2}\lambda}{2\pi}.$$

Hastighetsfeltet er derfor bare merkbart påvirket av friksjonen i en tynn sone av tykkelse z_e nær overflaten. Noen tallverdier for z_e for overflatebølger i vann er

gitt i tabell 2.1. Regningene ovenfor viser at friksjonen har liten betydning for lange bølger, og e-foldingstiden t_e vokser over alle grenser når $k \rightarrow 0$. Dersom væskedypet er begrenset, vil imidlertid de lengste bølgene skape betydelige hastigheter nær bunnen. På grunn av friksjonen vil det også utvikles et grensesjikt ved bunnen som får betydning for bølgenes demping. Det er mulig å estimere virkningen av dette, men vi vil ikke gå nærmere inn på det her.

2.13 Svingninger i basseng

For lineær bølgebevegelse vil en sum av bølgekomponenter også være en mulig løsning av likningene. Stående svingninger fremkommer ved å addere bølgekomponenter som forplanter seg i motsatt retning i forhold til hverandre. Adderer man til bølgekomponenten gitt ved (2.14) en annen bølgekomponent med bølgetall $-k$ og amplitude a , får man

$$\begin{aligned}\eta &= A \cos kx \sin \omega t \\ \phi &= \frac{A\omega}{k \sinh kH} \cosh k(z+H) \cos kx \cos \omega t\end{aligned}$$

hvor $A = -2a$. Krever man så at horisontalhastigheten skal være null ved vertikale plan ved $x = 0$ og $x = L$, medfører dette at bevegelsen bare er mulig når bølgetallet har bestemte diskrete verdier k_n gitt ved

$$k_n L = n\pi$$

hvor $n = (1, 2, 3, \dots)$. Den tilhørende verdi av vinkelhastigheten ω_n finnes ved å sette $k = k_n$ i dispersjonsrelasjonen (2.15). For tyngdebølger får vi at

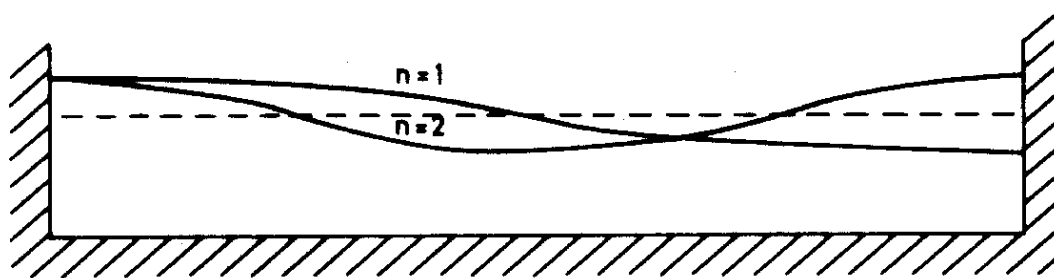
$$\omega_n = \left[g \frac{n\pi}{L} \tanh\left(\frac{n\pi H}{L}\right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Derved kan man bestemme frekvens og periode for stående svingninger i et kar med horisontal bunn og vertikale vegger. Overflatehevningen ved tidspunktet $t = 0$ for de to laveste modene, grunntonen, $n = 1$, og overtonen, $n = 2$, er skissert på figur 2.25. Dersom $\frac{H}{L} \ll 1$, kan man for de laveste modene sette $\tanh\left(\frac{n\pi H}{L}\right) \simeq \frac{n\pi H}{L}$, og perioden for svingningen blir

$$T_n = \frac{2L}{nc_0}.$$

Dette viser at den største svingeperioden ($n = 1$) tilsvarer den tiden det tar for en bølge å gå frem og tilbake i bassenget.

Stående svingninger kan også opptre i basseng hvor dypet ikke er uniformt. Ut fra løsningene på side 52 kan man for eksempel finne perioden for stående svingninger i basseng med jevnt skrånende bunn. Det overlates til leseren å gjøre det.



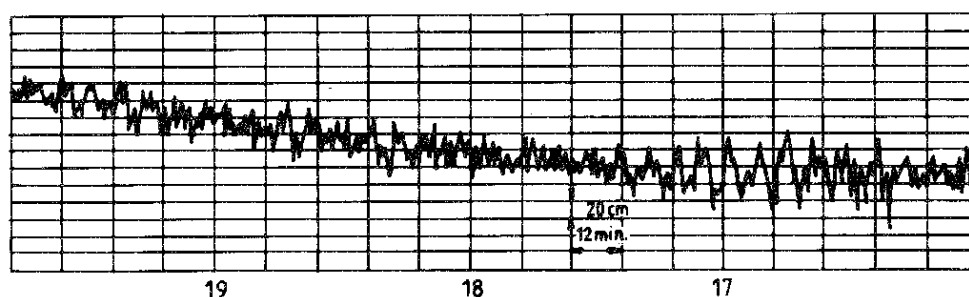
Figur 2.25: To laveste egenmoder i basseng.

For mer kompliserte bassengformer kan det by på store matematiske vanskeligheter å bestemme perioden, men det finnes en rekke beregninger av perioden for forskjellige bassengformer. Interesserte henvises til en oversiktsartikkel av Miles (1974).

Stående svingninger av den arten som her er beskrevet, opptrer i innsjøer og havnebasseng. I innsjøer er det som regel vind som fører til at svingningene blir satt i gang, men ras og jordskjelv kan også være årsaken. Etter et jordskjelv i India i 1950 ble det for eksempel observert svingninger i flere norske innsjøer og fjordarmer (Kvale 1955).

For svingninger i havnebasseng kompliseres analysen ved at bassenget er åpent til havet og at en del av energien kan lekke ut gjennom åpningen. Som eksempel på hvordan svingeperioden kan bestemmes for åpne bassenger henvises til øvingsoppgave 1 under dette avsnitt. Denne type svingninger har en klar analogi i akustiske svingninger i orgelpiper.

Svingningene i havner, eller drag som sjøfolk sier, oppstår som regel under visse værforhold, og svingningen får antagelig sin energi fra periodiske forstyrrelser i havet utenfor bassenget. Svingningene innvirker på havneforholdene og



Figur 2.26: Registrering av svingninger i Sørvær havn. Avtegnet fra Viggosson og Rye.

har derfor betydelig praktisk interesse. Undersøkelser av svingninger i to norske havner, Sørvær i Finnmark og Sirevåg i Rogaland, er beskrevet av Viggosson og Rye (1971) og av Gjertveit (1971). I figur 2.26 er det vist registreringer av svingninger i Sørvær havn. Amplituden i svingningene er opptil 0.8m, og svingetiden er omkring 6min.

Øvingsoppgaver

1. En to-dimensjonal modell av en havn kan tenkes å bestå av et gruntvannsområde av lengde b og med uniformt dyp h og et ubegrenset dyphav med uniformt dyp H . Vi skal undersøke muligheten for langperiodiske svingninger i havna samtidig med at det forplanter seg bølger utover i dyphavet. Vi forutsetter at svingningene er langperiodiske og bruker den lineariserte og hydrostatiske gruntvannsteorien. I havneområdet settes overflatehevingen til

$$\eta = \hat{\eta}(x)e^{i\omega t}$$

hvor x regnes utover fra kysten og ω er vinkelhastigheten og $\hat{\eta}(x)$ er en funksjon av x . I dyphav er

$$\eta = ae^{i(kx - \omega t)}$$

hvor bølgetallet $k = \omega/c_2$ og amplituden a er bestemt av amplituden for svingningene i havna. Vis at ω er bestemt ved

$$\tan\left(\frac{\omega b}{c_1}\right) = i\frac{c_2}{c_1}$$

hvor $c_1 = \sqrt{gh}$ og $c_2 = \sqrt{gH}$. Finn svingetiden når $h/H \ll 1$, og vis at man i dette tilfellet har en knute for svingningene ved utløpet av havna.

2. Vis at hastighetspotensialet

$$\phi = a[\sinh ky \sin kz + \sin ky \sinh kz] \cos \omega t$$

beskriver transversale svingninger i en kanal hvor sideveggene er rette linjer som danner en vinkel på 45° med vertikalen. Origo er lagt i kanalens dypeste punkt med y - og z -aksen henholdsvis horisontalt og vertikalt. Vis også at for grunnsvingningen er

$$\phi = ayz \cos \omega_1 t$$

og vinkelhastigheten er bestemt ved

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{H}}$$

H betegner høyde av vannspeilet over origo ved likevekt.

3. Svingninger i basseng

Et basseng har lengde L og konstant dyp h . Bølgebevegelsen i bassenget antas å være godt beskrevet ved lineær potensialteori. I bassengets endepunkter har η null normalderivert. (Hva betyr det fysisk?)

Initialbetingelsen er gitt ved

$$\eta(x, 0) = \frac{A}{f^4}(x + f)^2(x - f)^2$$

for $-f < x < f$, $\eta(x, 0) = 0$ i resten av bassenget. Bevegelsen starter fra ro .

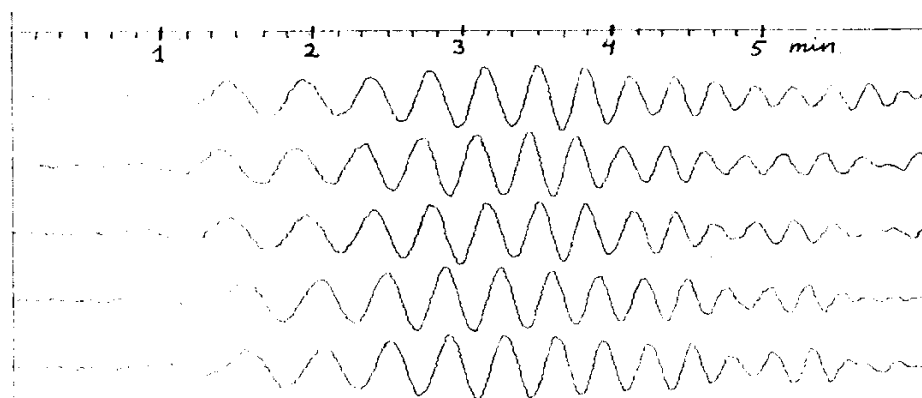
- (a) Skisser initialbetingelsen og finn en passende Fourierrepresentasjon av $\eta(x, t)$. (Fourierkoeffisienter skal regnes ut).
- (b) Sett $L = 200$ og $f = 10$. Beregn og plott overflateformene ved $t = 0.25 \frac{L}{\sqrt{gh}}$ for $h = 0.1$, $h = 1.0$, $h = 10.0$ og $h = 100.0$. Gjenta dette for $t = 0.75 \frac{L}{\sqrt{gh}}$.
- (c) Sett $L = 0.03$, $h = 0.01$ og $f = 0.001$. Studer løsningen for ulike tidspunkter. Hvordan brytes pulsen opp?
- (d) Kan denne løsningsmetoden generaliseres til tre dimensjoner. Forklar i så fall hvordan.

Kapittel 3

GENERELLE EGENSKAPER VED PERIODISKE OG NESTEN PERIODISKE BØLGETOG

I det foregående har vi sett flere eksempler på bølgetog hvor egenskapene ved de individuelle bølgene såsom bølgelengde, frekvens og amplitude, endrer seg lite fra en bølge til den neste. De gradvise endringene kan enten ha oppstått som en følge av dispersjon, eller på grunn av inhomogeniteter i mediet. Vi har også sett at viskositeten kan lede til gradvise endringer i et bølgetog.

Nesten periodiske bølgetog av denne typen forekommer ofte i naturen, og disse fenomenene er selvfølgelig ikke bare knyttet til bølger i væsker. For å vise dette har vi her tatt med en registrering av jordbunnbevegelse fra 5 sensorer ved det seismiske registreringsanlegget NORSAR (figur 3.1). Sentralen for anlegget ligger



Figur 3.1: Seismogram.

på Kjeller utenfor Oslo, og sensorene er plassert over Østlandsområdet. Disse bølgene er seismiske overflatebølger (Rayleigh bølger) som forplanter seg langs jordoverflaten, og bølgene skyldes i dette tilfellet et jordskjelv ved Azorene. Det regelmessige bølgetoget er hovedsakelig fremkommet som følge av dispersjonens virkning.

3.1 Bølgekinematikk for en-dimensjonal bølgeforplantning

Vi forutsetter innledningsvis at en eller annen parameter (hastighet, trykk, forrykning etc.) som beskriver bølgebevegelsen, kan skrives på formen

$$A(x, t)e^{i\chi(x, t)}. \quad (3.1)$$

Det er underforstått at enten realdelen eller imaginærdelen av uttrykket ovenfor representerer den fysikalske størrelsen. Fra fasefunksjonen χ kan vi bestemme k og ω ved

$$k = \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad \omega = -\frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (3.2)$$

k , ω og A forutsettes å være langsomt varierende funksjoner av x og t i den betydning at størrelsene varierer lite over en distanse som tilsvarer bølgelengden eller over et tidsrom tilsvarende en periode. k og ω representerer således lokale verdier henholdsvis for bølgetall og vinkelhastighet, og fasefunksjonen er derfor på en konstant nær lik

$$\chi = kx - \omega t.$$

Ut fra dette er det rimelig å anta at ω og k er forbundet lokalt ved dispersjonsrelasjonen. I et inhomogent medium hvor fasehastigheten endrer seg langsomt i bølgenes utbredelsesretning, vil ω foruten å avhenge av k , være en langsomt varierende funksjon av x . Tar vi også med muligheten for at mediets egenskaper endrer seg langsomt i tiden, kan vi skrive

$$\omega = \omega(k, x, t).$$

Eksempelvis er $\omega = k\sqrt{gH}$ dispersjonsrelasjonen for lange bølger på grunt vann. Med langsomt varierende vanddyb $H = H(x)$, er dette en relasjon av typen beskrevet ovenfor. Når det gjelder tidsavhengigheten, kan denne fremkomme på flere måter. I avsnitt (5.5) skal vi behandle et tilfelle hvor overflatebølger forplanter seg gjennom områder med tidsavhengig tidevannsstrøm. Dette fører som vi skal se til en dispersjonsrelasjon hvor tiden inngår eksplisitt.

Det følger fra (3.2) at

$$\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_t = 0 \quad (3.3)$$

Av grunner som vil fremgå senere har vi valgt å angi ved indekser hvilke variable som holdes fast ved derivasjonen. Nå er $k/2\pi$ antall bølger pr. lengdeenhet og $\omega/2\pi$ antall bølger pr. tidsenhet. k og ω kan følgelig tolkes henholdsvis som bølgetetthet og bølgefluks. Likning (3.3) uttrykker derfor at antallet bølger innenfor et visst intervall endrer seg som følge av netto fluks av bølger gjennom intervalllets endepunkter. Deriverer vi dispersjonsrelasjonen med hensyn på x mens t holdes fast, får vi

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_x \left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_t + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_k.$$

Innsetting i (3.3) gir så

$$\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)_x + c_g \left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_t = -\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_k \quad (3.4)$$

hvor $c_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ er gruppehastigheten.

I et homogent medium vil dispersjonsrelasjonen ikke avhenge eksplisitt av x , og $\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0$. I dette tilfellet forenkler (3.4) seg til

$$\frac{\partial k}{\partial t} + c_g \frac{\partial k}{\partial x} = 0. \quad (3.5)$$

Dette viser at i et homogent medium vil en observatør som beveger seg med gruppehastigheten, følge en bølge med fast bølgetall. Dersom vi betrakter et punkt med koordinat x som beveger seg med gruppehastigheten, så er

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k}. \quad (3.6)$$

Derved kan (3.4) skrives

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial x} \quad (3.7)$$

som uttrykker endringene av k med tiden i et punkt som beveger seg med hastighet c_g .

Nå er ω en funksjon av k og x og t

$$\frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_x \frac{dk}{dt} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_k \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial t}.$$

Ved å benytte (3.6) og (3.7) får vi at

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t}.$$

Det er i denne forbindelse viktig å understreke forskjellen på differensialoperatorene $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_g \frac{\partial}{\partial x}$ og $\frac{\partial}{\partial t}$.

Dersom mediet ikke endrer seg i tiden, er ω ikke eksplisitt avhengig av t , og $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$. Likningen ovenfor får i dette tilfellet formen

$$\frac{d\omega}{dt} = 0. \quad (3.8)$$

Den siste likningen viser at ω er konstant når man beveger seg med gruppehastigheten. Med andre ord: En bølge med en bestemt periode beveger seg med en hastighet som tilsvarer gruppehastigheten for denne bølgen. Dette gjør det i mange tilfeller mulig å bestemme gruppehastigheten fra observasjoner. For jordskjelvbølgene vist på figur 3.1, kan man identifisere bølger med periode fra 35 til 15 sekunder. Om tidspunktet for skjelvet er kjent, så kan gangtiden t_g (dvs. den tid bølgen har brukt fra jordskjelvsentret til observasjonspunktet) for de forskjellige bølgeperiodene bestemmes. Bølgene vil følge en bane som ligger nært opp til storsirkelen gjennom jordskjelvsentret og observasjonsstedet. Kjenner man lengden L av bølgenes bane, så er gruppehastigheten for bølgen

$$c_g = L/t_g.$$

Det må understrekes at siden gruppehastigheten kan variere langs banen, så vil en med denne metoden finne en midlere gruppehastighet for banen.

Vi legger merke til at likningene (3.4) og (3.5) bare gir informasjon om frekvens og bølgetall, og derved om fasefunksjonen, mens bølgeamplituden er ubestemt. Av den grunn nyttes ofte betegnelsen bølgekinematikk om teorien og resultatene som oppnåes på denne måten.

For et homogent medium hvor c_g er en funksjon av k , har likningen (3.5) en løsning slik at k er bestemt ved

$$c_g = \frac{x}{t}. \quad (3.9)$$

At dette er riktig innser vi ved derivasjon av siste likning med hensyn på x og t slik at størrelsene $\frac{\partial k}{\partial t}$ og $\frac{\partial k}{\partial x}$ fremkommer. Likningen uttrykker at en bølgekomponent med fast bølgetall k som ved tiden $t = 0$ starter fra origo $x = 0$, har forplantet seg en distanse x i løpet av tidsrommet t .

Uttrykket (3.9) kan benyttes til å utlede resultater som vi tidligere har utledet tildels etter omfattende analyse. Dette gjelder for eksempel bølgeformen i stor avstand fra forstyrrelsen som har skapt bølgene.

For tyngdebølger på dypt vann er

$$c_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

og ved hjelp av (3.9) finner vi så at

$$k = \frac{gt^2}{4x^2}.$$

Den tilsvarende verdi for ω er

$$\omega = \frac{gt}{2x}.$$

Dette gir en fasefunksjon i overensstemmelse med hva vi fant for bølger generert av en isolert forstyrrelse (se likning 2.72).

På tilsvarende måte kan vi nå finne bølgetall, vinkelhastighet og fasefunksjon for kapillarbølger generert av en isolert forstyrrelse. For kapillarbølger på dypt vann er

$$c_g = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}}$$

og (3.9) gir

$$k = \frac{4}{9} \frac{\rho}{\sigma} \frac{x^2}{t^2}.$$

Det må understrekes at også dette uttrykket for k gjelder når man er langt vekk fra forstyrrelsen.

Som eksempel på løsning av likningen (3.4) når $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ er forskjellig fra null, skal vi behandle lange tyngdebølger over en skrånende bunn (se side 52). I dette tilfellet er

$$\omega = \sqrt{agx}k.$$

Forutsetter vi stasjonære forhold er $\frac{\partial k}{\partial t} = 0$, og derved er

$$\frac{\partial k}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{k}{x}.$$

Denne likning har løsning

$$k = k_0 x^{-\frac{1}{2}}$$

hvor k_0 er en konstant. Vi finner altså igjen et resultat som er i overensstemmelse med tidligere beregninger.

Øvingsoppgaver

1. Bølgegenerator; telling av topper

I den ene enden av en bølgerenne genereres bølger med lengde $\lambda = 1$ m. Bølgegeneratoren har stått på i 100 sekunder. Anslå antall bølgetopper i renna i de tre tilfellene der væskedypet er $h = 4$ m, $h = 0.5$ m og $h = 0.1$ m. Renna antas å være lang nok til at refleksjoner fra motsatt ende ikke inntreffer.

3.2 Hamiltons likninger. Bølge-partikkel analogien

Lesere med kunnskaper i klassisk mekanikk vil umiddelbart gjenkjenne likningene (3.6)–(3.8). For en partikkel i et konservativt kraftfelt er partikkelens bevegelse

beskrevet ved Hamiltons likninger

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{dH}{dt} &= 0\end{aligned}\tag{3.10}$$

hvor q er den generaliserte koordinat, p er det generaliserte momentum og H er Hamilton funksjonen. I et konservativt kraftfelt er H partikkelens totale energi. Vi ser at likningssettet (3.10) er av samme form som likningssettet (3.6)–(3.8). Det eksisterer derfor en formell analogi mellom partikkelbevegelse og bølgebevegelse slik at

x	tilsvarer	q
k	tilsvarer	p
ω	tilsvarer	H

Det var Einstein (1905) som først ga den formelle analogien mellom partikkelbevegelse og bølgebevegelse fysikalsk innhold ved å sette lyspartikkelens (photonets) energi og bevegelsesmengde henholdsvis $H = \hbar\omega$ og $p = \hbar k$ hvor \hbar har fått navnet Planck's konstant.

Dette er grunnlaget for de to komplementære beskrivelsene av lys enten som partikkelbevegelse eller som bølgebevegelse.

3.3 Bølgekinematikk for fler-dimensjonal bølgeforplantning. Stråleteori

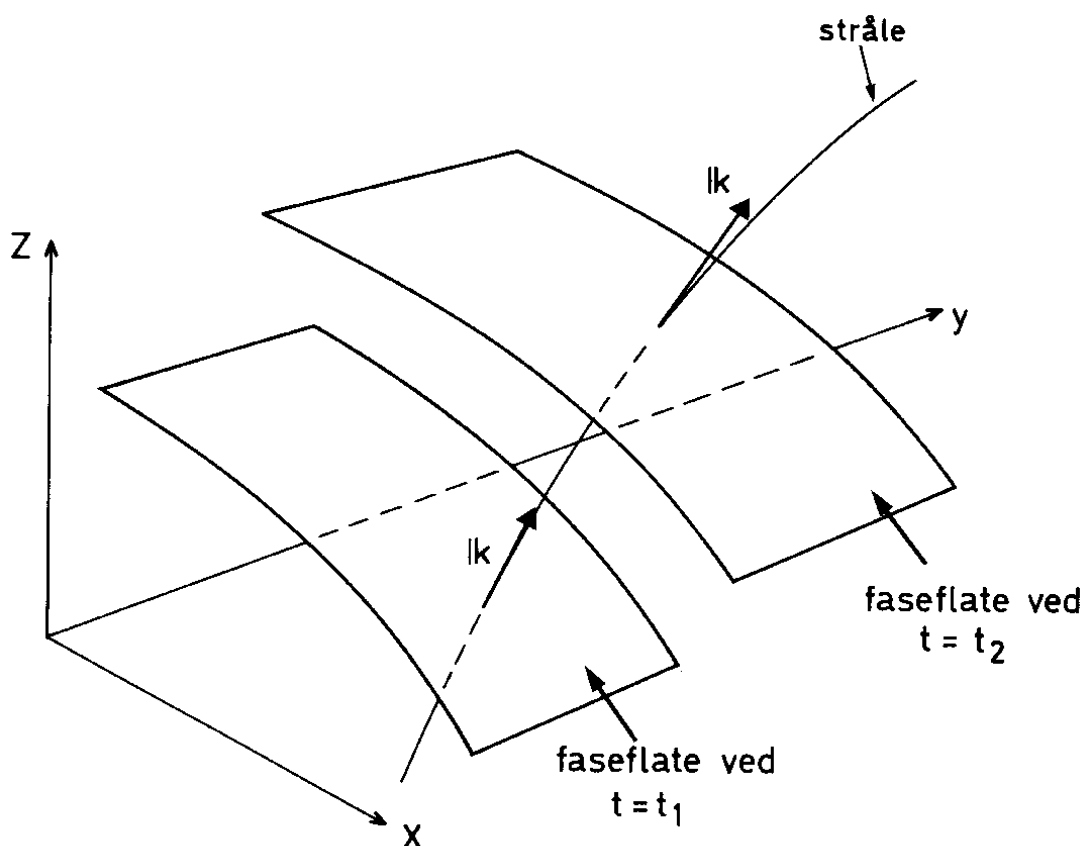
I det generelle tilfellet vil fasefunksjonen avhenge av posisjonsvektoren \mathbf{r} slik at $\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$. På tilsvarende måte som i avsnitt 2.13 kan vi bestemme lokale verdier av bølgetallsvektor og vinkelhastighet

$$\mathbf{k} = \nabla\chi \quad \text{og} \quad \omega = -\frac{\partial\chi}{\partial t}.$$

Vi forutsetter da at \mathbf{k} og ω er langsomt varierende funksjoner av rom- og tidskoordinatene. For et bestemt tidspunkt vil likningen

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \textit{konstant}$$

fremstille en faseflate, og vektoren \mathbf{k} står normalt på flaten. På grunn av forutsetningene om langsomt varierende funksjoner, vil faseflatene være svakt krummet, se figur 3.2. Romkurven som fremkommer ved å sette



Figur 3.2: Stråle og faseflater.

$$\mathbf{k} \times d\mathbf{r} = 0$$

hvor $d\mathbf{r}$ er et vektorielt bueelement for kurven, betegnes en *stråle*. Bølgetallsvektoren er altså tangent til strålen. Som i det en-dimensjonale tilfellet er \mathbf{k} og ω forbundet ved dispersjonsrelasjonen som i dette tilfellet antas tidsuavhengig

$$\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}). \quad (3.11)$$

Den eksplisitte avhengigheten av \mathbf{r} er et uttrykk for romlige inhomogeniteter i mediet. Endringene med tiden av \mathbf{k} og ω i et punkt med koordinat \mathbf{r} som beveger seg med gruppehastigheten, vil være gitt med likninger for hver av de tre koordinatretningene.

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \\ \frac{dk_i}{dt} &= -\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

hvor indeksene $i = 1, 2, 3$ betegner vektorkomponenter langs de tre akseretningene. Likningene (3.11) og (3.12) sammen med initialbetingelsene for x_i , k_i og ω bestemmer bølgebanen (eller partikkelbanen) $\mathbf{r}(t)$. Likningssettets form gjør det særlig egnet for numeriske beregninger. I et medium med isotrop dispersjon hvor ω er en funksjon av $k = |\mathbf{k}|$, men ikke av retning til \mathbf{k} , får vi at

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_i} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial k_i} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{k_i}{k}.$$

Dette viser at for medier med isotrop dispersjon har gruppehastighet samme retning som bølgetallsvektoren og bølgebanene faller i dette tilfellet sammen med strålene.

For å vise eksplisitte løsninger av (3.12) skal vi behandle to eksempler. Det første omhandler avbøyning (refraksjon) av lange bølger på grunt vann. Vi antar at bunntopografien er slik at vanddypet H er en funksjon av koordinaten x gitt ved

$$c(x) = \sqrt{gH(x)}.$$

Dispersjonsrelasjonen kan følgelig skrives

$$\omega = c(x)k.$$

Siden forplantningshastigheten avhenger av dypet, vil bølgene avbøyes (refrakteres). Dersom vanddypet øker med x , vil strålene gå som antydnet på figur 3.3. Vi betegner bølgetallsvektorens komponenter langs x - og y -aksen med henholdsvis k_x og k_y . Fra likningen (3.12) finner vi at langs en stråle er

$$\begin{aligned}\omega &= \textit{konstant} \\ k_y &= \textit{konstant} \\ k_x &= \pm \left(\frac{\omega^2}{c^2(x)} - k_y^2 \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

For det tilfellet som er skissert på figuren må man velge minus foran kvadratroten i det siste uttrykket.

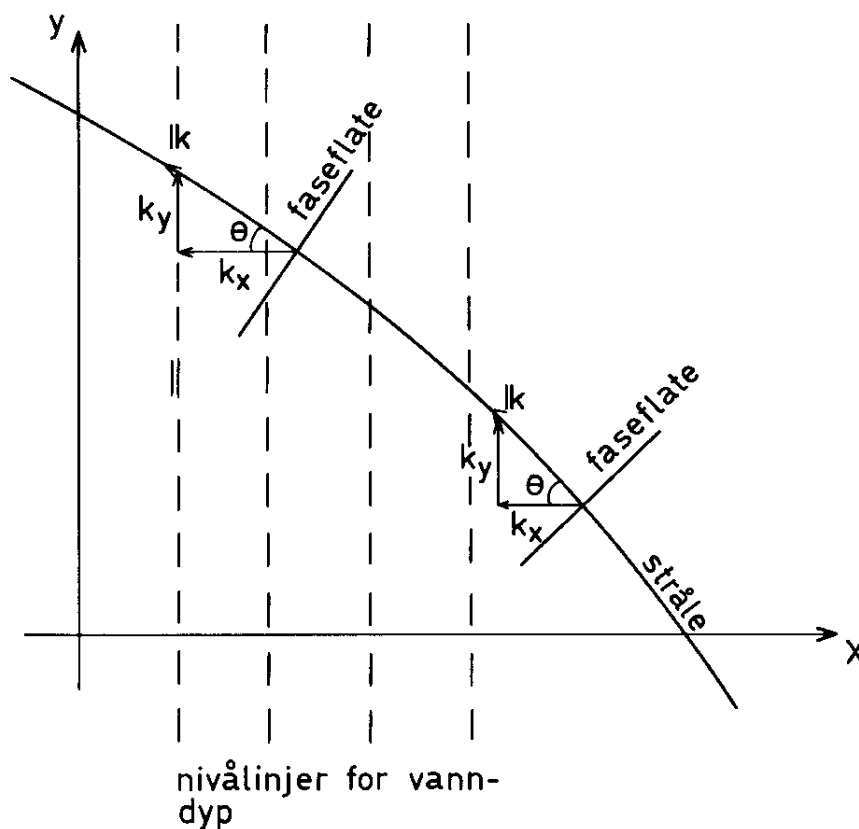
Dersom vinkelen mellom x -aksen og bølgetallsvektoren betegnes med θ får vi

$$\frac{\sin \theta}{c} = \frac{k_y}{kc} = \frac{k_y}{\omega} = \textit{konstant}$$

som viser at avbøyningen skjer i henhold til *Snells lov*. Likningen for strålen er

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_y}{k_x}.$$

For spesielle valg av funksjonen $H(x)$ kan man finne enkle analytiske uttrykk for strålen. Avbøyning av den type som vi har behandlet her, kan man iaktta når



Figur 3.3: Refraksjon på grunt vann.

bølger forplanter seg inn mot en rett strand med jevnt skrånende bunn. En vil da se at bølger som kommer inn på skrå i forhold til stranden, avbøyes slik at bølgetoppene etterhvert blir parallelle med stranden.

Det neste eksempelet er avbøyning av seismiske bølger i kulesymmetrisk klode. Vi antar at fasehastigheten for bølgene er en funksjon av avstanden $r = |\mathbf{r}|$ fra klodens sentrum og at bølgene brer seg uten dispersjon slik at

$$\omega = c(r)k.$$

Denne dispersjonsrelasjonen gjelder med god tilnærmelse for seismiske bølger som forplanter seg gjennom jorden. Vi finner at med denne dispersjonsrelasjonen så er

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{dc}{dr} \frac{x_j}{r} k, \quad \frac{\partial \omega}{\partial k_j} = c \frac{k_j}{k}.$$

Fra likningene (3.12) følger det derfor at

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = c \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{dc}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} k,$$

hvor \mathbf{r} er koordinaten for et punkt som beveger seg langs strålen med hastighet c . Multipliserer vi den første av disse likningene vektorielt med \mathbf{k} og den andre

med \mathbf{r} , finner vi at

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{k}) = 0.$$

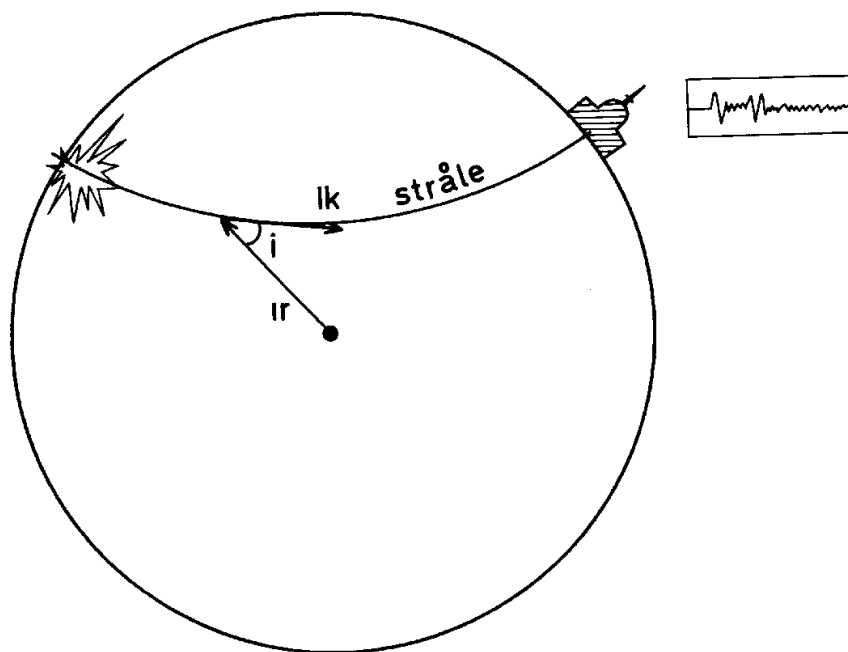
Dette innebærer at

$$\mathbf{r} \times \mathbf{k} = \text{konstant}$$

langs en og samme stråle. Dersom vinkelen mellom de to vektorene betegnes i (se figur 3.4) får vi at

$$p = \frac{r \sin i}{c} = \text{konstant}$$

langs en og samme stråle. Størrelsen p betegnes bølgeparameteren, og denne parameteren spiller en viktig rolle i seismologi.



Figur 3.4: Seismisk stråle på kule.

3.4 Eikonal-likningen og likningen for amplitudevariasjon langs strålene

I de foregående betraktninger har vi forutsatt at det eksisterer en bølgebevegelse slik at bølgetall, bølgeamplitude og vinkelhastighet er langsomt varierende funksjoner av romkoordinatene og tidskoordinatene. Under disse forutsetninger har vi så utledet de grunnleggende resultater i bølgekinematikk og stråleteori.

Bølgebevegelse av denne type er for eksempel mulig i et inhomogent eller ikke-stasjonært medium hvor de fysikalske egenskaper endrer seg lite over en distanse som tilsvarer en bølgelengde og over en tid som tilsvarer en bølgeperiode. En kan derfor vente at forutsetningene er oppfylt dersom bølgelengden og perioden er tilstrekkelig korte.

Som eksempel skal vi løse bølgelikningen (2.86) i det tilfellet at forplantningshastigheten $c_0 = \sqrt{gH}$ er en funksjon av x og y . Vi antar at skalaen for inhomogenitet i bølgefeltet er lik skalaen for inhomogenitet i forplantningshastigheten c_0 . Vi antar at løsningen av (2.86) kan skrives på formen

$$\eta = A(x, y, t)e^{i\chi(x, y, t)} \quad (3.13)$$

hvor frekvens og bølgevektor er definert ved

$$\omega = -\frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad \mathbf{k} = \nabla\chi.$$

Antakelsen om langsomt varierende bølgefelt betyr at forholdet mellom en bølgelengde $\lambda = 2\pi/k$ og skalaen for inhomogenitet L må være et lite tall. Tilsvarende må forholdet mellom en bølgeperiode $2\pi/\omega$ og skalaen for ikke-stasjonaritet T være et lite tall. Vi introduserer derfor en ordningsparameter slik

$$\epsilon = \frac{1}{kL} = \frac{1}{\omega T} \ll 1. \quad (3.14)$$

Dersom vi tar utgangspunkt i de langsomme skalaene for inhomogenitet og ikke-stasjonaritet som referanse kan vi få eksplisitt beskrevet den hurtige bølgefase ved ordningsparameteren slik

$$\eta = A(x, y, t)e^{\epsilon^{-1}i\chi(x, y, t)}. \quad (3.15)$$

Det vil nå være naturlig å anta at amplituden A kan utvikles i en perturbasjonsutvikling ved hjelp av den samme ordningsparameteren

$$\eta = (A_0(x, y, t) + \epsilon A_1(x, y, t) + \epsilon^2 A_2(x, y, t) + \dots) e^{\epsilon^{-1}i\chi(x, y, t)}. \quad (3.16)$$

Derivasjon av denne rekkeutviklingen gir for eksempel

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \left(-i\epsilon^{-1}\omega A_0 - i\omega A_1 + \frac{\partial A_0}{\partial t} + O(\epsilon) \right) e^{\epsilon^{-1}i\chi(x, y, t)}.$$

Rekkeutviklingen (3.16) skal nå substitueres inn i (2.86). Vi innser at den komplekse eksponentialfunksjonen er felles for alle ledd og kan faktorerises bort. Uttrykket som da gjenstår må være oppfylt til alle ordener i ϵ . Dette gir et hierarki av likninger til bestemmelse av χ , A_0 , etc.

Den første av disse likningene bærer navnet *eikonal-likningen*. I dette tilfellet er denne likningen

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 \quad (3.17)$$

hvor $k = |\mathbf{k}|$. Vi gjenkjenner dette som dispersjonsrelasjonen. Dersom vi kan anta et stasjonært bølgefelt så kan vi skrive

$$\chi = S(x, y) - \omega t \quad (3.18)$$

og faselinjene er bestemt ved

$$S(x, y) - \omega t = \text{konst.}$$

Bølgevektoren

$$\mathbf{k} = \nabla \chi = \nabla S$$

er følgelig normal til faselinjene, slik som den skal.

Den andre likningen blir i teorien for elektro-magnetiske bølger ofte betegnet *transport-likningen* fordi den beskriver hvordan energifluksen er bevart langs en stråle. I vårt tilfelle er denne likningen

$$\omega \frac{\partial A_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\omega A_0) + c_0^2 \mathbf{k} \cdot \nabla A_0 + \nabla \cdot (c_0^2 \mathbf{k} A_0) = 0. \quad (3.19)$$

Dersom vi multipliserer denne likningen med A_0 så lar den seg integrere én gang og vi får

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega A_0^2) + \nabla \cdot (c_0^2 \mathbf{k} A_0^2) = 0. \quad (3.20)$$

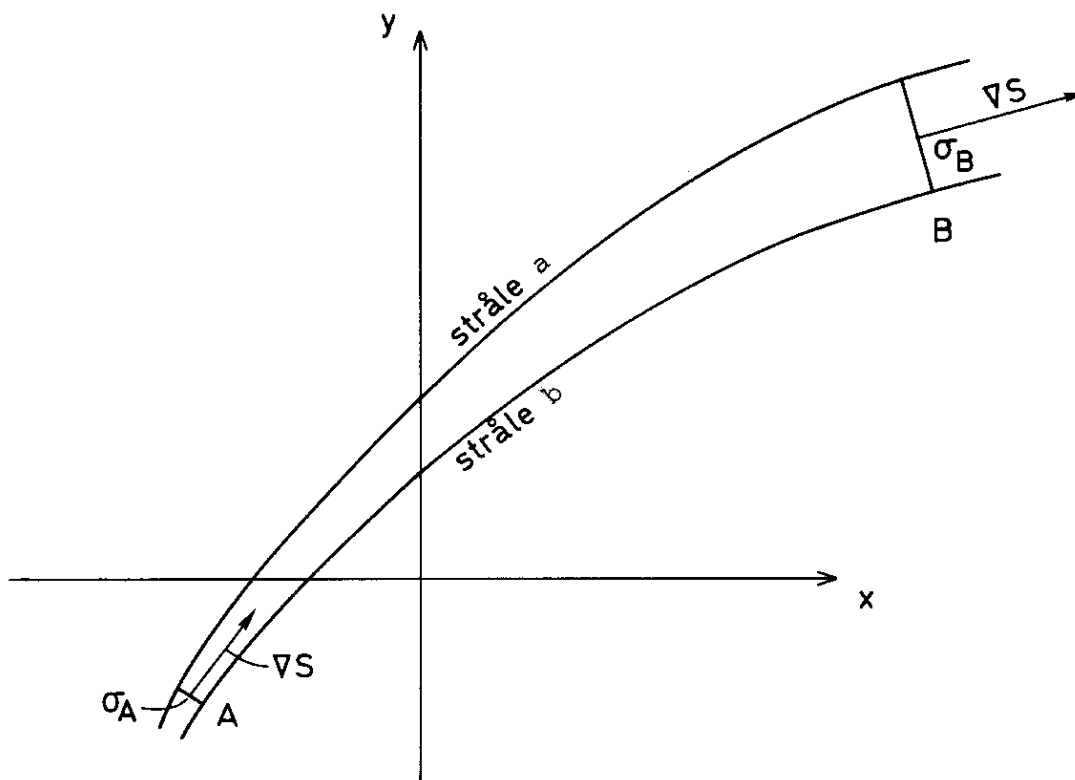
Dette er en bevaringslikning for “tettheten” ωA_0^2 som blir advektert med gruppehastigheten $\mathbf{c}_g = c_0^2 \mathbf{k} / \omega$.

Likning (3.20) beskriver amplitudevariasjoner langs strålene. La oss anta stasjonært bølgefelt og la oss betrakte et område (se figur 3.5) begrenset av de to strålene a og b hvor flatene σ_A og σ_B er normale til strålekippet som ligger mellom strålene. Vi forutsetter at strålene a og b ligger så nært inntil hverandre at c_0 , A_0 og ∇S kan settes konstant over flatene σ_A og σ_B . Vi integrerer likning (3.20) over området og benytter Gauss sats. Siden gruppehastigheten er parallell med bølgevektor, så forsvinner bidraget til integralet langs strålene, og vi får

$$\sigma_A (c_0 A_0^2)_{\text{ved A}} = \sigma_B (c_0 A_0^2)_{\text{ved B}}. \quad (3.21)$$

A_0 representerer amplituden for det ledende leddet i rekkeutviklingen (3.16), og størrelsen $c_0 A_0^2$ er derfor et mål for energifluksen. Likningen (3.21) uttrykker altså at i denne tilnærmelsen er energifluksen konstant langs et strålerør. Dette er et viktig resultat, og det medfører at det ikke opptrer refleksjon av bølgeenergi langs strålen. Dette viser at bølgekinematikken som vi har utviklet i det foregående forutsetter at endringene i mediet er så gradvise at bølgene avbøyes (refrakteres) uten at noe av energien blir reflektert.

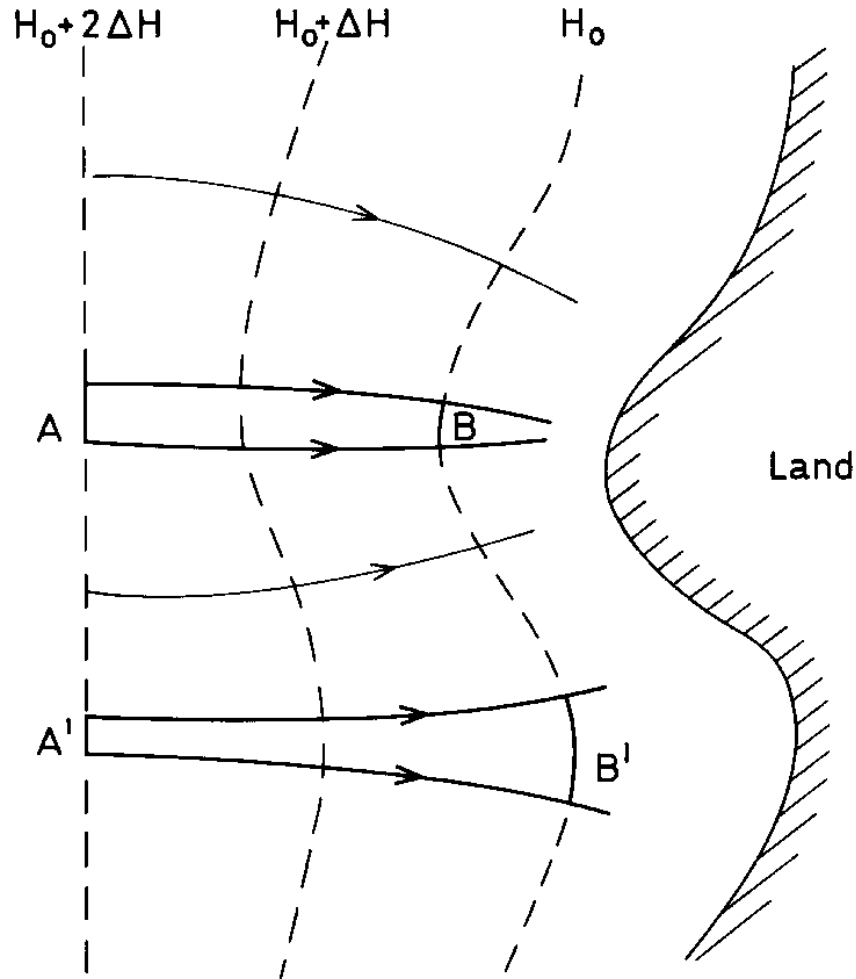
Legg merke til at anvendelsen av Gauss sats var spesielt enkel fordi gruppehastigheten var parallell med bølgevektor i vårt tilfelle, og dermed forsvant



Figur 3.5: Skisse for utregning av amplitude langs et strålerør.

bidraget til integralet langs strålene. I tilfeller hvor gruppehastigheten ikke er parallell med bølgevektor vil det være bidrag til integralet langs strålene. I slike tilfeller kan det være enklere å bruke bølgebaner istedenfor stråler som skissert i figur 3.5.

Til slutt skal vi ved et eksempel demonstrere en anvendelse av resultatene fra dette avsnittet. Vi betrakter da lange overflatebølger som forplanter seg inn mot en kyst hvor kystform og bunntopografi er skissert i figur 3.6. For en bølge som har rettlinjete faselinjer ute på dypt vann, blir strålen som antydnet på figuren. Vi velger å betrakte et stråleknippe $A - B$ utenfor odden og stråleknippet $A' - B'$ utenfor bukten slik at snittflatene ved A og A' er like store. Vi forutsetter dessuten at bølgeamplituden er like stor ved A og A' . Siden snittflatene for stråleknippene er mindre ved B enn ved B' , følger det fra (3.21) at bølgeamplituden er større ved B enn ved B' . At bølgeenergien på denne måten blir fokusert mot odden og spredd i bukten, kan noen ganger iakttas i naturen. Dette kan man se best fra fly, og luftfotografiet på figur 3.7 viser mange slike effekter.



Figur 3.6: Prinsippskisse for bølger mot kyst.

3.5 Amplitudevariasjonen i nesten periodiske bølgetog

I det foregående avsnitt integrerte vi opp (3.20) ved hjelp av Gauss sats for bølger med fast frekvens (monokromatiske bølger). For et nesten periodisk bølgetog fremkommet for eksempel ved dispersjonens virkning, så vil ikke amplitudevariasjonen kunne finnes ved en slik enkel anvendelse av Gauss sats, men derimot må likningen (3.20) integreres opp i både tid og rom.

Nå vet vi at for lineære bølger er den midlere energifluksen \mathbf{F} gitt ved den midlere energitettheten E og gruppehastigheten \mathbf{c}_g

$$\mathbf{F} = \mathbf{c}_g E.$$

Egentlig har vi bare vist dette for en enkelt bølgekomponent, men det er rimelig



Figur 3.7: Luftfotografi fra et område ved Kiberg på Finnmarkskysten. Bildet er tatt 12. juni 1976 av Fjellanger Widerøe A.S.

å vente at den samme relasjonen gjelder lokalt med god tilnærming også i tilfeller med langsomt varierende bølgetog. Dersom det ikke er noen energitilførsel til bølgene ved ytre påvirkninger, f.eks. vindvirkning eller vekselvirkninger mellom bølger og strøm, så må netto energifluks inn i området tilsvare endringen i energitetthet innenfor det samme området. For plane bølger som forplanter seg i x -retning kan dette uttrykkes ved

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (c_g E) = 0. \quad (3.22)$$

Dersom den midlere energitetthet er tidsuavhengig, noe som for eksempel gjelder for monokromatiske bølger med fast frekvens, vil (3.22) kunne integreres ved hjelp av Gauss sats som vist tidligere.

Energilikningen (3.22) spiller en viktig rolle i bølgeteori. En generalisert likning inneholdende kildeledd og koplingledd som uttrykker henholdsvis generering av bølger på grunn av vind og vekselvirkning mellom bølger og strøm, brukes for eksempel ved bølgevarsling (Kinsman 1965).

Nå er energitettheten proporsjonal med a^2 hvor a er bølgeamplituden, og for plane tyngdebølger på dypt vann er eksempelvis $E = \frac{1}{2} \rho g a^2$. Innsatt i likning (3.22) får vi således

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \nabla \cdot (c_g a^2) = 0. \quad (3.23)$$

Vi skal ikke her gå nærmere inn på generelle løsninger av energilikningen (3.22), men det kan være illustrerende å studere to enkle løsninger.

For lange overflatebølger som forplanter seg innover en jevnt skrånende bunn med helningskoeffisient α , er gruppehastigheten $c_g = \sqrt{gH} = \sqrt{g\alpha x}$ (se avsnitt 2.7). Dersom bølgetoget er rent periodisk i tiden slik at $\frac{\partial a^2}{\partial t} = 0$ følger det fra (3.23) at energifluksen er konstant og vi må derfor ha at bølgeamplituden

$$a = \text{konst.} \cdot x^{-\frac{1}{4}}.$$

Dette er i overensstemmelse med hva vi fant tidligere i avsnitt 2.10.

For bølger generert av en konsentrert forstyrrelse ved $t = 0$ og $x = 0$ vil gruppehastigheten være gitt ved

$$c_g = \frac{x}{t}$$

hvor t er gangtiden fram til et punkt i avstand x . Bølgeamplituden kan finnes fra (3.23)

$$a = \text{konst.} \cdot x^{-\frac{3}{2}} t$$

Ved sammenlikning med uttrykket (2.72) kan konstanten bestemmes.

Øvingsoppgaver

1. Vi forutsetter at fasehastigheten for seismiske bølger kun er en funksjon av dypet z som vi skriver $c(z)$. Hastigheten ved overflaten $z = 0$ er c_0 . Finn banen for en bølge med vinkelhastighet ω_0 som sendes ut fra et punkt O ved overflaten i en retning som danner en vinkel θ med overflaten. Vi tenker oss at bølgene forplanter seg innenfor et begrenset område slik at overflaten kan regnes som plan. Finn avstanden fra O til det punktet A hvor strålen kommer opp til overflaten. $c(z)$ er en monoton økende funksjon av z . Bestem gangtiden som funksjon av avstanden OA , og finn det dypeste punktet på strålen.

Figur 3.8: Figuren mangler inntil videre!

2. I et hav med uniformt dyp H_0 er det en grunne, og dypet er gitt ved

$$H = H_0(1 - \alpha e^{-\frac{x^2+y^2}{L^2}})$$

hvor α og L er konstanter. Finn strålene for plane bølger med bølgelengde $\lambda = \beta L$ (hvor β er en konstant) som kommer inn mot grunnen langs x -retningen.

3. Bølgegenerator; selvfokusering

I den ene enden av en bølgerenne genereres det bølger med frekvensen $f(t)$. Frekvensen er 10 Hz når bølgegeneratoren slås på og 1 Hz når den slås av, 100 sekunder senere. Vi ønsker å konsentrere mest mulig bølgeenergi på et bestemt punkt i bølgerenna. Bruk stråleteori til å finne den optimale formen på $f(t)$. Finn punktet der energien konsentreres og tidspunktet dette inntreffer på. Renne antas å være så lang at refleksjoner fra motsatt ende ikke finner sted, og dypet er mye større enn lengden på de genererte forstyrrelsene.

Fungerer stråleteorien godt her? Vil metoden du har anvendt fungere i tilfeller der væskedypet er mye mindre enn lengden av de bølgene som genereres?

4. Bølger over parabolisk bunn

En bunntopografi er gitt ved $h(x) = h_0(\frac{x}{l})^2$. Vi antar at lineær, hydrostatisk gruntvannsteori gjelder og at bølgen er monokromatisk i tiden (bare en frekvens).

- (a) Bruk stråleteori til å bestemme fasefunksjonen χ .
- (b) Gi en tolkning av uttrykket $\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \lambda$. Hvilket krav må vi legge på $\frac{\omega l}{\sqrt{gh_0}}$ for at stråleteorien skal være gyldig?
- (c) Søk en løsning av gruntvannsligningen på formen $\eta = e^{i\omega t} x^q$. Sammenlign med resultatet vi fant ved hjelp av stråleteori.

5. Langsamt varierende bølgekilde

Vi tar utgangspunkt i plane, nesten periodiske bølger i et homogent medium. Lineære forhold gjelder, og bølgene forplanter seg i positiv x -retning. Dispersjonsrelasjonen er gitt ved $\omega = \frac{1}{3}k^3$. Ved $t = 0$ er den lokale bølgelengden gitt ved $\lambda = a(2 + \tanh(bx))$.

- (a) Vi skal anvende stråleteori, hvilke krav legger dette på parametrene a og b .
- (b) Bruk stråleteori og karakteristikk-metoden til å estimere den lokale bølgelengden for alle x ved et vilkårlig senere tidspunkt. En vanskelig algebraisk ligning vil oppstå her, denne skal ikke løses.

6. Bølger med skrått infall

Det er gitt et dyp som er uavhengig av y -retning, dvs. dyp $h = h(x)$. Vi skal studere hvordan lange harmoniske bølger oppfører seg over denne bunnen. Bølgene skal ha skrått infall, hvilket betyr at bølgetallet har en komponent i y -retning.

- a Finn hvordan amplituden varierer vha. fysisk optikk (transportlikningen). Er det riktig at en bølge alltid amplifiseres når den kommer inn på grunnere vann?
- b Diskuter hva som skjer med amplituden når en bølge beveger seg ut på dypere vann.

7. Bølger fra initiell forstyrrelse 2.

Vi har igjen gitt Klein-Gordon likningen som i oppgaven i forrige kapittel. Ved $t = 0$ antar vi en punktforstyrrelse ved $x = 0$. Bruk stråleteori til å bestemme fasefunksjonen ved store x og t . Sammenlign med svaret fra oppgaven i forrige kapittel.

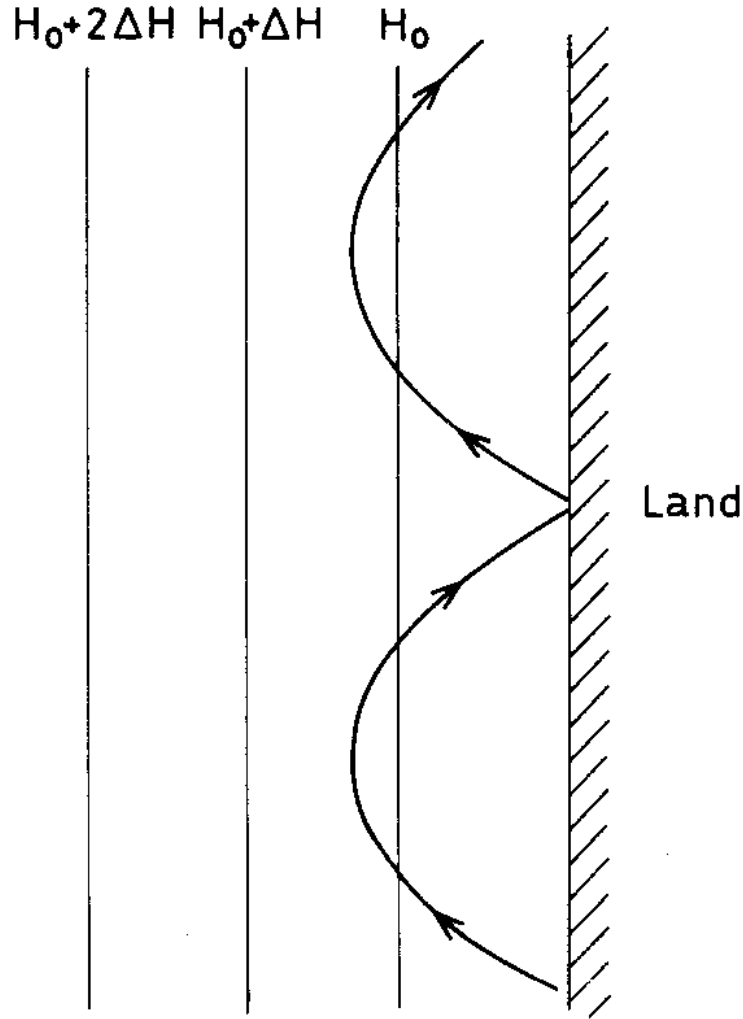
Kapittel 4

FANGEDE BØLGER

For overflatebølger på dypt vann avtar bevegelsen raskt nedover i dypet slik at på et dyp som tilsvarer en bølgelengde eller mer, er bevegelsen ubetydelig. Bølgeenergien er derfor knyttet til en sone i nærheten av overflaten, og energien er bundet til denne sonen mens bølgene forplanter seg fremover overflaten. Vi kan si at bølgene er fanget til overflaten og at overflaten virker som en *bølgeleder* (wave-guide). Fangede bølger og bølgeledere spiller en viktig rolle for de fleste former av bølgebevegelse. I havet og atmosfæren kan det for eksempel som følge av tetthetssjiktningen, oppstå horisontale lag med lav lydhastighet. Der ved kan laget tjene som bølgeleder, og lyd av visse frekvenser kan forplante seg over store strekninger med forholdsvis liten dempning. Når lydbølgene på denne måten brer seg langs et lag, vil energien spres over større og større sylinderflater med akse vertikalt gjennom lydkilden. Dersom energistrømmen er den samme gjennom alle sylinderflater uavhengig av radius r , vil bølgeamplituden avta som $1/\sqrt{r}$. Dette er en vesentlig mindre dempning enn ren sfærisk dempning hvor bølgeamplituden avtar som $1/r$. Lav geometrisk dempning er et karakteristisk trekk ved bølgeledere. Den matematiske beskrivelse av forskjellige bølgeledere er svært lik. I det følgende skal vi studere noen eksempler på fangede tyngdebølger.

4.1 Tyngdebølger fanget på grunn av bunntopografien

Siden lange tyngdebølger forplanter seg hurtigere på dypt vann enn på grunt vann, vil bølgene avbøyes (refrakteres) som følge av forskjeller i vanddyppet. Ved en rett kyststrekning hvor vanddyppet øker monotont utover, vil bølger som forplantes inn mot kysten avbøyes mot kysten. Dersom bølgene reflekteres ved land, vil bølgene avbøyes på veien utover, og avbøyningen kan bli så stor at bølgene vender og forplanter seg inn mot kysten igjen. Etter en ny refleksjon vil forholdene gjenta seg, og ved periodiske refleksjoner og avbøyninger langs kysten kan en tenke seg at det oppstår fangede bølger. På figur 4.1 er strålebanen for bølgene skissert.



Figur 4.1: Strålebaner for fangede bølger.

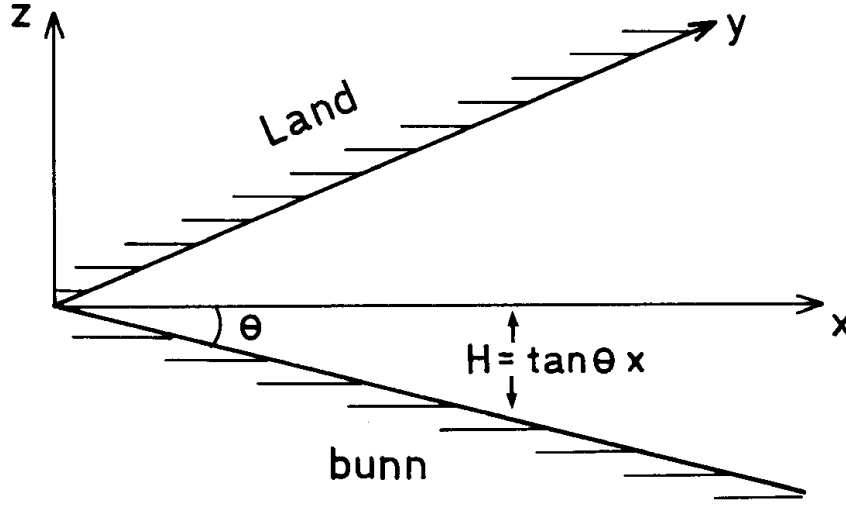
Det eksisterer en enkel løsning av Laplace-likning (2.11) med randbetingelsene (2.12) (med $\sigma = 0$) som beskriver fangede tyngdebølger langs en kyst hvor dypet øker lineært med avstand fra kysten. Bunntopografien og valg av koordinataksene fremgår av figur 4.2.

I tillegg til randbetingelsene (2.12) ved overflaten har vi den kinematiske betingelsen

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \tan \theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

ved bunnen $z = -x \tan \theta$. Hastighetspotensialet er

$$\phi = -\frac{ag}{kc} e^{-k(x \cos \theta - z \sin \theta)} \cos k(y - ct) \quad (4.1)$$



Figur 4.2: Kystgeometri.

og

$$c = \pm \left(\frac{g}{k} \sin \theta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Den tilsvarende overflatehevning er

$$\eta = ae^{-kx \cos \theta} \sin k(y - ct).$$

Vi ser at bølgene forplanter seg langs kysten med en hastighet avhengig av bunns helling, og at bølgeamplituden avtar eksponensielt ut fra kysten. Siden fasehastigheten kan ha verdi \pm , vil bølgene kunne forplante seg i begge retninger langs kysten. Kysten og bunntopografien danner altså i dette tilfellet en to-veis bølgeleder. Denne bølgetypen kan man for eksempel iaktta i kanaler hvor bredene er stensatt eller støpt med jevn skråning. Bølgene blir i engelsk litteratur kalt “edge-waves”, og den spesielle løsningen (4.1) representerer første mode i en skare løsninger (Ursell 1952). Tilsvarende enkle løsninger for andre former for bunntopografi er ikke kjent.

Når vi skal studere fenomenet mer inngående, skal vi forutsette at bølgene er så lange at vi kan benytte gruntvannstilnærmelsen. Vi legger koordinataksene som på figur 4.1, og lar vandypet H være en monotont økende funksjon av x . Ved land tenker vi oss at det er en vertikal vegg og at vandypet er vesentlig større enn bølgeamplituden. Overflatehevningen η skriver vi på formen

$$\eta = \hat{\eta}(x) \sin k(y - ct)$$

hvor $\hat{\eta}(x)$ er en funksjon av x som skal bestemmes. Fra (2.86) får vi så

$$\frac{d}{dx} \left(H \frac{d\hat{\eta}}{dx} \right) = k^2 \left(H - \frac{c^2}{g} \right) \hat{\eta}. \quad (4.2)$$

Ved kystlinjen $x = 0$ er volumfluksen i x -retning null, og dette innebærer

$$\frac{d\hat{\eta}}{dx} = 0 \quad \text{for} \quad x = 0. \quad (4.3)$$

For fangede bølger må dessuten

$$\hat{\eta} \rightarrow 0 \quad \text{når} \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Likningen (4.2) med randbetingelse (4.3) og (4.4) er et egenverdiproblem av kjent type som for valgte k gir bestemte tillatte verdier av c .

Vi innfører

$$\hat{\eta} = H^{-\frac{1}{2}}\psi$$

og substituerer i (4.2). Dette gir

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2(W(x) - 1)\psi \quad (4.5)$$

hvor

$$W(x) = \frac{c^2}{gH} + \frac{1}{4} \frac{H'^2 - 2HH''}{(kH)^2}.$$

Her betyr $'$ derivasjon med hensyn på x . Grenseflatebetingelse for ψ blir

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= \frac{1}{2} \frac{\psi}{H} \frac{dH}{dx} & \text{for } x = 0 \\ \psi &\rightarrow 0 & \text{for } x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dette viser at egenverdiproblemet er av tilsvarende type som det som fremkommer ved løsning av Schrödinger-likningen i kvantemekanikk. Dersom H er en langsomt varierende funksjon av x , så kan W tilnærmet settes

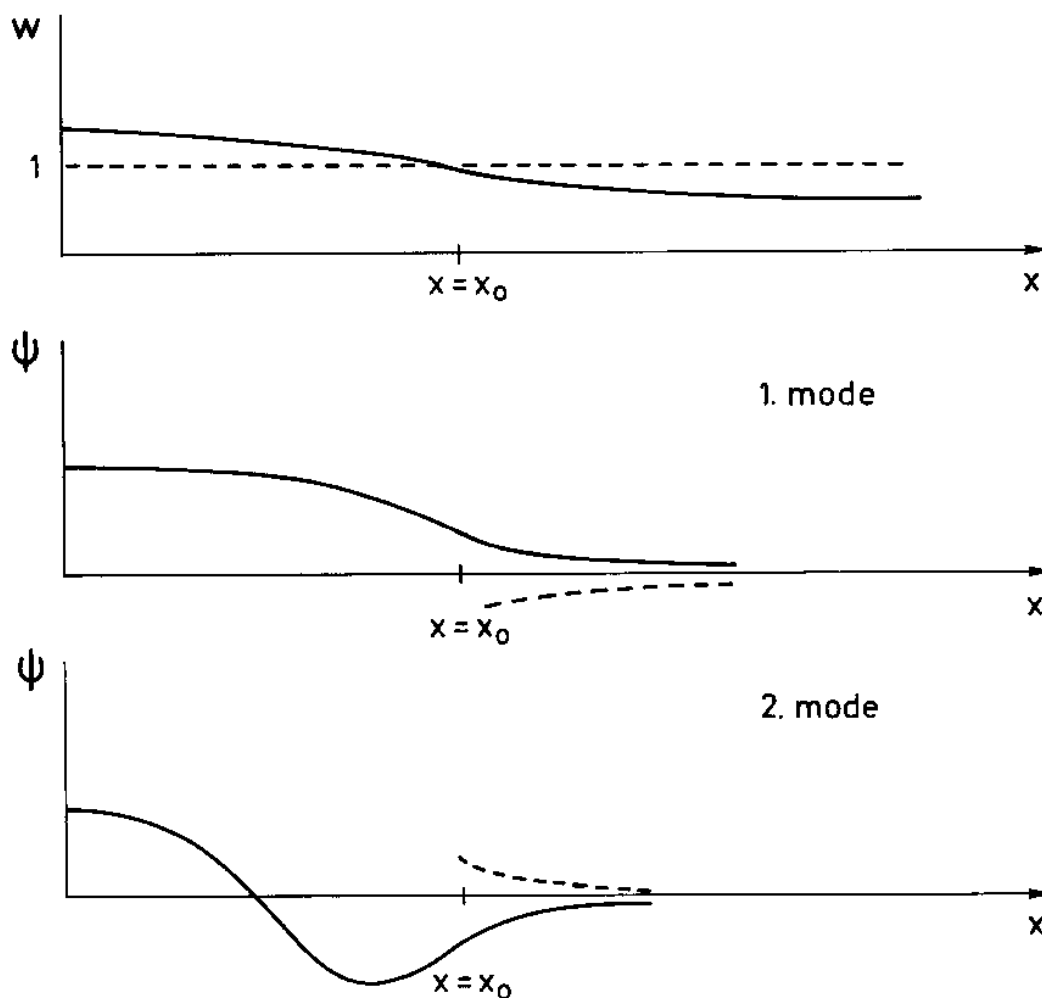
$$W = \frac{c^2}{gH}. \quad (4.7)$$

Siden faktoren $1/(kH)^2$ inngår i leddet som sløyfes, venter vi at tilnærmelsen blir bedre dess kortere bølgelengden er. I samsvar med denne tilnærmelsen modifiseres den første av grenseflatebetingelsene (4.6) til

$$\frac{d\psi}{dx} = 0 \quad \text{for} \quad x = 0. \quad (4.8)$$

Løsningen av (4.5) skifter karakter i henhold til om $W > 1$ eller $W < 1$. For $W > 1$ (dvs. $H < \frac{c^2}{g}$) kan ψ ha karakter av svingninger, mens for $W < 1$ (dvs. $H > \frac{c^2}{g}$) kan løsningen være eksponensielt dempet.

Vi betrakter nå tilfellet hvor H er en monotont økende funksjon av x , og H går mot en konstant verdi for $x \rightarrow \infty$ slik at $W > 1$ for $0 < x < x_0$, og $W < 1$



Figur 4.3: De to laveste fangede modene.

for $x > x_0$. For visse verdier av k og c kan vi derfor ha løsninger for ψ som har karakter av fangede bølger hvor bevegelsen er eksponensielt dempet for $x > x_0$. Avhengig av antallet knutepunkter for svingningene i området $x < x_0$ vil man kunne ha forskjellige moder for bølgebevegelsen. I figur 4.3 er $\psi(x)$ skissert for 1. og 2. mode.

Fenomenet med fangede bølger i havet er særlig viktig for lange bølger. Årsaken til det er at de lange bølgene med bølgelengde 100 km og mer, vil være mer eller mindre upåvirket av små ujevnheter i bunn og kystlinje og mer styrt av de storstilte endringene i bunnforholdene. Derfor kommer de enkle modellene vi har behandlet her ofte til anvendelse.

4.2 WKB-metoden

Uten å måtte ty til numeriske metoder kan det være vanskelig å bestemme løsningene av (4.5) som tilfredsstiller grenseflatebetingelsene. Vi skal her vise en metode til å finne en tilnærmet løsning. Vi setter

$$f(x) = W(x) - 1$$

hvor W er gitt ved (4.7). Likningen (4.5) kan derved skrives

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2 f(x)\psi. \quad (4.9)$$

For enkelthets skyld forutsetter vi som før at H er en monotont økende funksjon av x og at H går mot en konstant verdi for $x \rightarrow \infty$. For store verdier av k kan vi finne en tilnærmet løsning av (4.9) ved å benytte samme metode som i punkt (3.4). Vi skriver følgelig ψ ved en rekkeutvikling

$$\psi = e^{ikS} \left[P_0(x) + \frac{P_1(x)}{ik} + \dots \right]$$

hvor S , P_0 og P_1 er funksjoner av x . Rekkeutviklingen settes inn i (4.9), og koeffisienten foran hvert ledd i den rekken som fremkommer kreves lik null. Derved får man

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS}{dx} \right)^2 &= f(x), \\ \frac{d}{dx} \left(P_0^2 \frac{dS}{dx} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Dette leder til

$$S = \pm \int f D^{\frac{1}{2}} dx$$

og

$$P_0 = \text{konst.} / f^{\frac{1}{4}}.$$

Tar man hensyn bare til det ledende leddet i rekkeutviklingen kan ψ derfor skrives

$$\psi = A f^{-\frac{1}{4}} \sin\left(k \int f^{\frac{1}{2}} dx\right) + B f^{-\frac{1}{4}} \cos\left(k \int f^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (4.10)$$

hvor A og B er konstanter. Løsningen (4.10) er kjent som WKB-løsningen, hvor navnet er formet ved initialene til Wentzel, Kramers og Brillouin som fant løsningen uavhengig av hverandre omkring 1926. Det er åpenbart at (4.10) ikke er gyldig i nærheten av og i punktet $x = x_0$ hvor $f = 0$. En løsning av (4.9) som er gyldig i dette området finner vi ved å gå frem på følgende måte. Vi skriver

$$f(x) \simeq -|f'(x_0)|(x - x_0) \quad (4.11)$$

hvor $f'(x_0)$ betegner den deriverte av f i punktet $x \simeq x_0$, og vi innfører ξ som ny variabel slik at

$$x - x_0 = k^{-\frac{2}{3}} |f'(x_0)|^{-\frac{1}{3}} \xi.$$

Likningen (4.9) kan derved skrives på formen

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \xi\psi. \quad (4.12)$$

Dette er Airy's differensiallikning som ved en spesiell transformasjon kan bringes over til Bessels likning. Airy's likning har to lineært uavhengige løsninger $\text{Ai}(\xi)$ og $\text{Bi}(\xi)$ som betegnes Airys funksjoner. Den ene funksjonen, $\text{Ai}(\xi)$, har karakter av svingninger for $\xi < 0$, mens for $\xi > 0$ er funksjonen eksponensielt dempet slik at $\text{Ai}(\xi) \rightarrow 0$ for $\xi \rightarrow \infty$. (Se Abramowitz og Stegun 1972). Vi legger merke til at siden k er forutsatt å være stor, så vil $|\xi|$ kunne være stor selv om $|x - x_0|$ er så liten at rekkeutviklingen (4.11) er gyldig. Siden vi forutsetter at $\psi \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \infty$, må vi som løsning av (4.12) velge

$$\psi = D\text{Ai}(\xi) \quad (4.13)$$

hvor D er en konstant. For store verdier av ξ gjelder følgende asymptotiske uttrykk for $\text{Ai}(\xi)$

$$\text{Ai}(\xi) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \xi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}} \quad \text{for} \quad \xi > 0$$

og

$$\text{Ai}(\xi) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} |\xi|^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}|\xi|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{for} \quad \xi < 0.$$

Skal uttrykkene (4.10) og (4.13) for ψ falle sammen for store verdier av $|\xi|$, medfører dette at $A = B$ og at $k \int f^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}|\xi|^{\frac{3}{2}}$. Dette fører til at WKB-løsningen for $x < x_0$ kan skrives

$$\psi = A f^{-\frac{1}{4}} \sin\left(k \int_x^{x_0} f^{\frac{1}{2}} dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.14)$$

hvor A er en vilkårlig konstant.

Siden f er forutsatt å være en langsomt varierende funksjon av x , så er

$$\frac{d\psi}{dx} = -A k f^{\frac{1}{4}} \cos\left(k \int_x^{x_0} f^{\frac{1}{2}} dx + \frac{\pi}{4}\right)$$

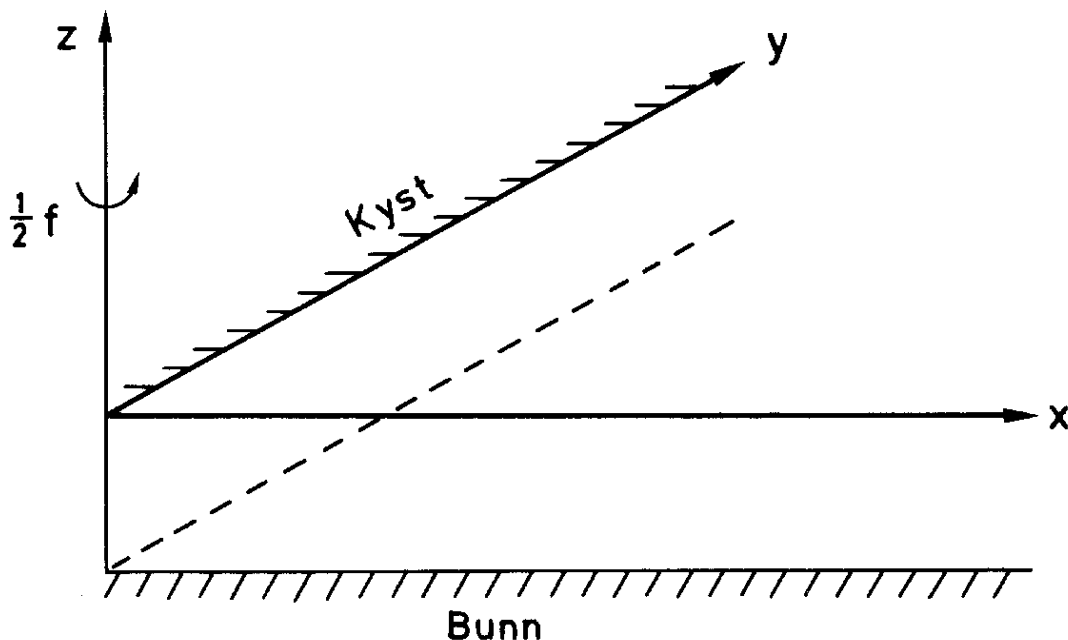
i den tilnærmelse vi her regner. Grenseflatebetingelsen ved $x = 0$ gitt ved (4.8) medfører at

$$k \int_x^{x_0} f^{\frac{1}{2}} dx + \frac{\pi}{4} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad (4.15)$$

hvor $n = 0, 1, 2$. Likningene (4.15) bestemmer egenverdiene for k eller c . Det viser seg at WKB-metoden ofte gir egenverdiene med god tilnærmelse selv for moderate eller endog små verdier av k . En er fristet til å nevne et sitat fra en kjent anvendt matematiker: En god formel kjennetegnes ved at den kan brukes langt utenfor sitt gyldighetsområde.

4.3 Bølger fanget på grunn av rotasjonseffekter. Kelvin-bølger

For svært lange tyngdebølger på jorden vil Coriolis-kraften være av betydning, og denne kraften vil modifisere bølgebevegelsen. Disse bølgene som blir betegnet tyngde-treghetsbølger, har tildels andre egenskaper enn rene tyngdebølger. Her skal vi bare se hvordan Coriolis-kraften kan lede til fangede bølger langs en kyst selv i tilfeller hvor bunnen er plan. Vi betrakter bølge-bevegelse i et væskelag begrenset av en horisontal bunnsflate $z = -H$ og en rett kystlinje $x = 0$. (Se figur 4.4). Væskelaget roterer med konstant vinkelhastighet $\frac{1}{2}f$ om vertikalaksen. For



Figur 4.4: Kystgeometri.

tilstrekkelig lange bølger, slik at trykkfordelingen er tilnærmet hydrostatisk, får man at bevegelsen er beskrevet med tilsvarende likninger som (2.84) og (2.85), men hvor Coriolis-kraften inngår i tillegg til trykkraften i bevegelseslikningen. Dersom overflatehevning og volumfluksene i x - og y -retning betegnes som før med henholdsvis η , U og V , får vi følgende sett av likninger:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial t} - fV &= -c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial t} + fU &= -c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{aligned}$$

Disse likningene har løsning av formen

$$\begin{aligned}\eta &= ae^{-\frac{f}{c_0}x} \sin k(y + c_0 t) \\ U &= 0 \\ V &= -c_0 a e^{-\frac{f}{c_0}x} \sin k(y + c_0 t)\end{aligned}$$

Dette er en bølge med amplitude a og bølgetall k som forplanter seg i retning av den negative y -akse. Bevegelsen avtar eksponensielt ut fra kysten, og e -foldingsdistansen er c_0/f . Bølger av dene type betegnes *Kelvin-bølger*. Vi legger merke til at med det valg av rotasjonsretning som vi har gjort her, (se figur 4.4), kan Kelvin-bølgene bare forplante seg slik at kysten ligger til høyre for forplantningsretningen, så kysten er altså en en-veis bølgeleder for Kelvin-bølgene. I så henseende skiller Kelvin-bølger seg fra tyngdebølger som er fanget på grunn av bunntopografien.

Tidevannsbevegelsen i kystnære farvann består som regel av Kelvin-bølger, men i dette tilfellet er bølgebevegelsen ofte modifisert av kystform og bunntopografi. Den enkle modellen vi har behandlet tjener bare til å illustrere de fysiske prinsipper som ligger til grunn for denne bølgebevegelsen. Fangede bølger av den art som er beskrevet i de to siste avsnittene, er et aktuelt forskningsfelt og har mange anvendelser: Tidevannsbevegelse, stormflo, flodbølger på grunn av jordkjelv etc. Interesserte henvises til Mysak og Le Blond (1978) og Gill (1982). Kelvin- og edge-bølgenes betydning for stormflo og tidevann langs norskekysten er diskutert i et arbeid av Martinsen, Gjevik og Røed (1979).

Kapittel 5

BØLGER PÅ STRØM. LE-BØLGER OG LO-BØLGER. SKIPSBØLGER. BØLGEMOTSTAND.

I anvendelser støter man ofte på det tilfellet at bølgebevegelsen forekommer samtidig med at det er en strøm i væsken. Bølgebevegelsen vil i slike tilfeller kunne bli modifisert av strømmen, og strøm kan gi opphav til spesielle bølgefenomener.

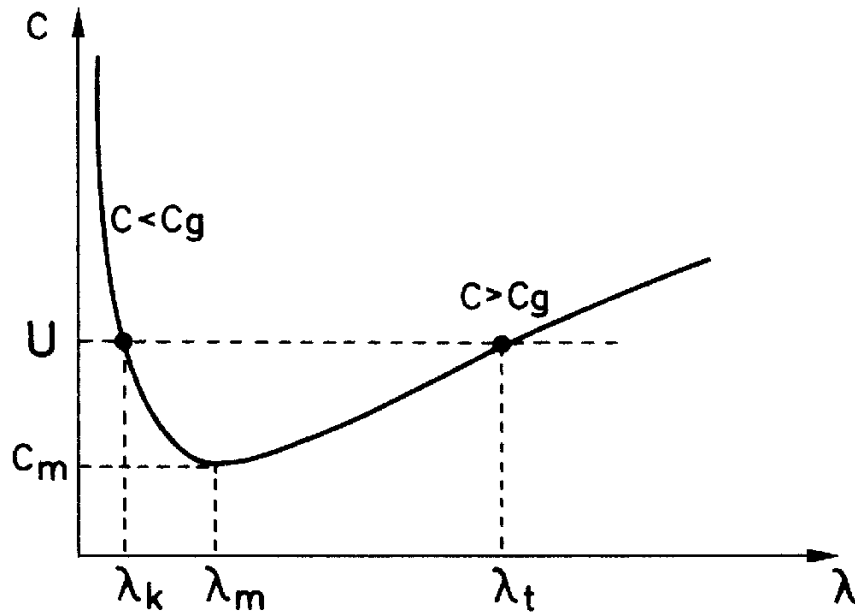
En stasjonær strøm forbi en eller annen hindring eller forstyrrelse, for eksempel en stein på bunnen av en elv, vil kunne føre til stasjonære bølgemønstre på le eller lo siden av hindringen. Disse stasjonære bølgemønstrene blir henholdsvis betegnet som le-bølger og lo-bølger. Tilsvarende bølgeformer vil opptre når en forstyrrelse, for eksempel en båt eller et insekt, beveger seg med jevn fart bortover væskeoverflaten. I det følgende skal vi først behandle le- og lo-bølger i det tilfellet at strømmen er uniform og stasjonær. Det er da direkte analogi mellom bølgemønsteret generert av en faststående hindring i strømmen og bølgene generert av en forstyrrelse som beveger seg med jevn fart langs vannflaten.

I de tilfeller hvor strømmen ikke er stasjonær eller uniform, vil strømmen alene kunne modifisere bølgebevegelsen. Bølger som forplanter seg inn i et område med horisontale strømskjær vil for eksempel få endret bølgelengde og amplitude på grunn av strømmens virkning. Dette fenomenet kan en ofte iaktta for eksempel ved elveutløp. Likeledes vil vertikale strømskjær modifisere bølgebevegelsen, og virkningen vil avhenge av bølgelengden. Bølgebevegelse som er påvirket av ikke-uniforme strømmer er vanskelig å behandle matematisk, og vi skal i det følgende nøye oss med å studere et enkelt eksempel. Strømmens innvirkning på bølgebevegelse er imidlertid et aktuelt og interessant forskningsfelt. Peregrine (1976) har i en oversiktsartikkel gitt meget god innføring i matematiske metoder og problemstillinger innen dette området.

5.1 Le- og lo-bølger

I første omgang skal vi for enkelthets skyld behandle to-dimensjonal bølgebevegelse generert av en eller annen forstyrrelse som beveger seg bortover overflaten med konstant fart U . Tilsvarende bølgemønster vil man få om væsken beveget seg med uniform og stasjonær hastighet U forbi en stillestående forstyrrelse.

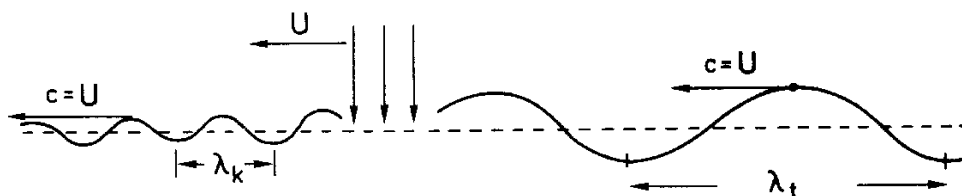
Dispersjonsegenskapene for tyngde-kapillær bølger på dypt vann kan oppsummeres i følgende diagram (figur 5.1) hvor c_m er den minste fasehastigheten som kan forekomme og λ_m den tilsvarende bølgelengde (se avsnitt 2.2). Dersom $U > c_m$ har vi to bølgekomponenter med bølgelengde henholdsvis λ_k og λ_t , og fasehastighet $c = U$. Disse bølgekomponenter vil derfor kunne danne et stasjonært bølgemønster foran eller bak forstyrrelsen. Nå vet vi at for bølgelengder større enn λ_m er gruppehastigheten mindre enn fasehastigheten ($c_g < c$), mens det motsatte ($c_g > c$) er tilfellet for bølgelengder mindre enn λ_m . Vi vet også at energien



Figur 5.1: Dispersjonsegenskaper for tyngde-kapillær bølger.

i bølgene brer seg med gruppehastigheten. Bølgeenergien for bølger med lengde $\lambda_t > \lambda_m$ vil derfor ikke kunne holde tritt med forstyrrelsen, mens bølgeenergi for bølger med lengde $\lambda_k < \lambda_m$ vil løpe fra forstyrrelsen. Vi vil derfor få to stasjonære bølgetog som vist i figur 5.2, tyngde-bølger med bølgelengde λ_t på baksiden av forstyrrelsen (le-bølger), og kapillar-bølger med bølgelengde λ_k på forsiden av forstyrrelsen (lo-bølger). Dersom $U < c_m$ vil ingen bølger kunne følge forstyrrelsen, og vi vil i dette tilfellet hverken ha le- eller lo-bølger i tilknytning til forstyrrelsen. Likeledes vil le-bølgene ikke eksistere dersom U overskrider hastigheten \sqrt{gH} hvor H er vanddypet. Amplituden for le- og lo-bølgene vil avhenge av forstyrrels-

ens form. Selv om begge bølgetyper vil være mulig, kan det tenkes at forstyrrelsen bare frembringer den ene typen og at den andre har ubetydelig amplitude.



Figur 5.2: Le- og lo-bølger.

5.2 Amplituden for to-dimensjonale le-bølger

Når man skal beregne amplituden for le- eller lo-bølger, vil man kunne komme opp i matematiske vanskeligheter om man direkte søker den stasjonære bevegelsen. Likningene for den stasjonære bølgebevegelsen vil i alminnelighet lede til en flertydighet, slik at det ikke umiddelbart fremgår av regningene hvilke bølger som skal ligge på le- eller lo-siden av forstyrrelsen. Lar man bølgebevegelsen fremkomme ved at forstyrrelsen utvikler seg gradvis frem mot en stasjonær tilstand, vil man kunne unngå denne vanskeligheten. Her skal vi for enkelthets skyld gjennomføre regningene når forstyrrelsen utvikler seg på en spesiell måte (Whitham 1974). Vi betrakter en trykkforstyrrelse

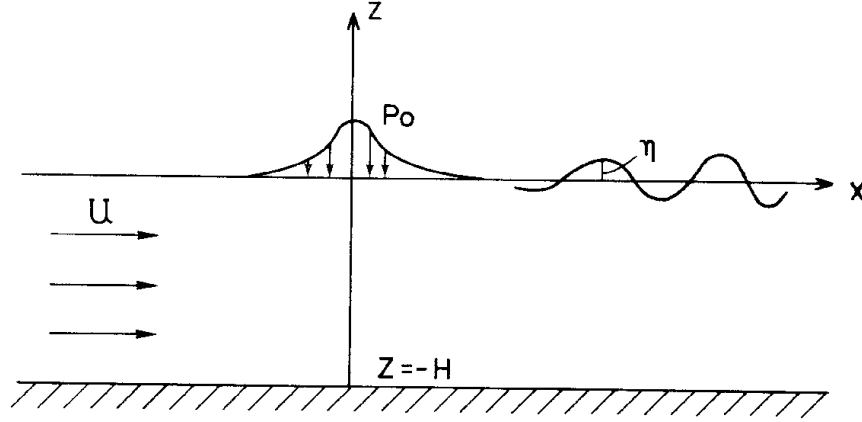
$$p_0(x, t) = f(x)e^{\varepsilon t} \quad \varepsilon > 0 \quad (5.1)$$

på overflaten av et væskelag med tykkelse H , som strømmer med uniform og stasjonær hastighet U i x -aksens retning over en plan horisontal bunn $z = -H$, se figur 5.3.

Vi tenker oss at trykkforstyrrelsen er konsentrert omkring $x = 0$ slik at $p_0 \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \pm\infty$, og at trykket har utviklet seg fra null ved $t = -\infty$ henimot en verdi av p_0 ved $t = 0$. Etter en viss tid $t > 0$ er det klart at vi vil få et urealistisk høyt trykk slik at de lineariseringer vi skal gjøre vil bli ugyldige. For tilstrekkelig små verdier av p_0 vil imidlertid løsningen være gyldig i et begrenset tidsrom $t = O(\frac{1}{\varepsilon})$ etter tidspunktet $t = 0$. Ved å la $\varepsilon \rightarrow 0$, vil vi så kunne finne den stasjonære bølgebevegelsen som settes opp av trykkforstyrrelsen p_0 .

Vi antar at væsken er friksjonsfri, homogen og inkompressibel og at bevegelsen som settes opp av trykkforstyrrelsen er virvelfri. Vi skal videre neglisjere overflatespenningen slik at vi begrenser oss til å betrakte le-bølger. Hastighetspotensialet ϕ for bevegelsen tilfredsstiller Laplace likningen

$$\nabla^2 \phi = 0.$$



Figur 5.3: Le-bølger.

De lineariserte grenseflatebetingelser ved overflaten kan skrives

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + g\eta &= -\frac{p_0}{\rho} \end{aligned} \quad (5.2)$$

for $z = 0$. Vi har her på vanlig måte redefinert potensialet slik at konstanten $\frac{\rho}{2}U^2$ i Eulers trykklikning trekkes inn i potensialet sammen med funksjonen $f(t)$ (se avsnitt 2.1). Videre er grenseflatebetingelsene ved bunnen $z = -H$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Vi søker en løsning av disse likningene av formen

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, t) &= \phi(x, z)e^{\varepsilon t} \\ \eta(x, z) &= \eta_0(x)e^{\varepsilon t} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Setter man disse uttrykkene inn i Laplace-likningen og grenseflatebetingelsene (5.2), kan faktoren $e^{\varepsilon t}$ forkortes, og man står igjen med et sett av likninger for ϕ og η_0 . Vi forutsetter at den Fourier transformerte i x for funksjonene $f(x)$, $\phi(x, z)$ og $\eta_0(x)$ eksisterer, og vi betegner disse ved \tilde{f} , $\tilde{\phi}$ og $\tilde{\eta}_0$ (se avsnitt 2.7). På tilsvarende måte kan vi så finne likninger for ϕ og η_0 , og løsningen av disse gir at

$$\tilde{\eta}_0 = \frac{\tilde{f}k \tanh kH}{\rho[(kU - i\varepsilon)^2 - gk \tanh kH]}.$$

Ved å benytte inversjonsteoremet (2.57) finner vi at overflate deformasjonen på grunn av trykkforstyrrelsen kan skrives

$$\eta(x, t) = \frac{e^{\varepsilon t}}{2\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}k \tanh kH e^{ikx}}{(kU - i\varepsilon)^2 - gk \tanh kH} dk. \quad (5.4)$$

Vi skal beregne integralet (5.4) i det spesielle tilfellet at vandypet er uendelig stort, og vi har at

$$k \tanh kH \rightarrow |k|$$

for $H \rightarrow \infty$. Vi skal dessuten for enkelthets skyld velge en trykkforstyrrelse slik at

$$f(x) = Q\delta(x)$$

hvor $\delta(x)$ er delta-funksjonen som tidligere er blitt behandlet i avsnitt 2.7, og Q er konstant. Dette medfører at

$$\tilde{f}(k) = Q$$

slik at \tilde{f} kan settes utenfor integraltegnet i (5.4). Under disse forutsetninger kan vi skrive integralet i (5.4) som en sum av to integraler slik at

$$\eta(x, t) = \frac{Qe^{\varepsilon t}}{2\pi\rho} [I_1 + I_2] \quad (5.5)$$

hvor

$$I_{1,2} = \int_0^\infty \frac{e^{\pm ikx}}{kU^2 \mp 2i\varepsilon U - g} dk.$$

Indeks 1 og 2 tilsvarer her henholdsvis øvre og nedre fortegnvalg i integranden. Under forutsetning av at ε er en liten størrelse har vi nå sløyet ε^2 . I det komplekse k -planet har således integralene $I_{1,2}$ poler for

$$k_{1,2} = \frac{g}{U^2} \pm \frac{2\varepsilon}{U}i$$

henholdsvis.

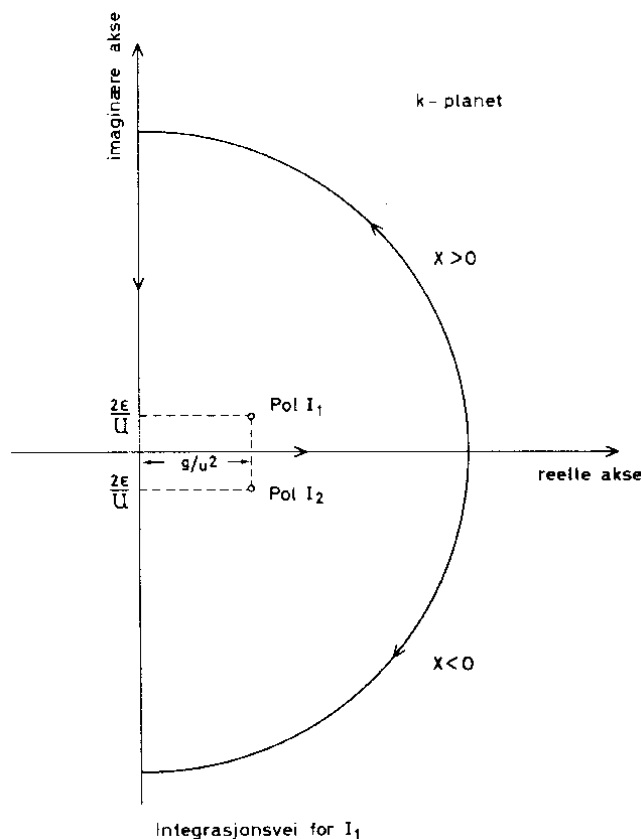
Skal vi for eksempel beregne integralet I_1 må vi skille mellom tilfellene $x > 0$ og $x < 0$. I det første tilfellet ($x > 0$) integrerer vi langs den reelle k -aksen til $k = \infty$, deretter langs en sirkelbane i det uendelig fjerne hvor integranden $\rightarrow 0$, til den imaginære akse, og så tilbake til origo langs den sistnevnte akse (se figur 5.3). Denne lukkede kurven omslutter polen, og integralet langs kurven er derfor lik $2\pi i$ ganger residuet. I det andre tilfellet $x < 0$, velger vi en tilsvarende integrasjonskurve i 4. kvadrant. Denne vil følgelig ikke omslutte polen. I figur 5.4 er polene avmerket, og de to forskjellige integrasjonsveiene for I_1 skissert. På tilsvarende måte kan man gå frem når man skal beregne integralet I_2 bare med den forskjell at man må velge integrasjonsveien i 1. kvadrant for $x < 0$ og i 4. kvadrant for $x > 0$.

Resultatet av disse beregningene gir for $\varepsilon \rightarrow 0$

$$I_1 + I_2 = -\frac{4\pi}{U^2} \sin k_s x + \frac{2}{U^2} \int_0^\infty \frac{ke^{-kx}}{k^2 + k_s^2} dk \quad x > 0$$

og

$$I_1 + I_2 = \frac{2}{U^2} \int_0^\infty \frac{ke^{kx}}{k^2 + k_s^2} dk \quad x < 0$$



Figur 5.4: Integrasjonskontur.

hvor bølgetallet $k_s = g/U^2$. Vi legger merke til at denne bølgen har fasehastighet $c = U$ slik at den er stasjonær i forhold til forstyrrelsen. Går vi langt bort fra forstyrrelsen vil integralene i uttrykket for $I_1 + I_2$ bare gi små bidrag, og vi vil ha en stasjonær overflateform $\eta = \eta_s(x)$ som med god tilnærming kan skrives

$$\begin{aligned} \eta_s(x) &= -\frac{2Q}{\rho U^2} \sin k_s x & x > 0 \\ \eta_s(x) &\simeq 0 & x < 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Vi legger til slutt merke til at innføringen av størrelsen ε var påkrevet for å få et entydig svar for $\varepsilon \rightarrow 0$. Hadde vi satt $\varepsilon = 0$ i (5.5), ville polene blitt liggende på integrasjonsveien og følgelig ført til en flertydighet i løsningen. Denne flertydigheten hadde gitt seg utslag i at den stasjonære bølgen kunne ligge oppstrøms og nedstrøms for forstyrrelsen. Det finnes også andre måter for å unngå flertydigheten, blant annet kan man innføre en liten kunstig friksjon proporsjonal med hastigheten (Lamb 1932, s. 242). Problemene med flertydighet er diskutert av Palm (1953) i et arbeid om le-bølger i atmosfæren.

Øvingsoppgaver

1. Bestem den stasjonære overflateformen forårsaket av en punktformet trykkforstyrrelse i det tilfellet at H er endelig. Diskuter spesielt tilfellene $U < \sqrt{gH}$ og $U > \sqrt{gH}$.
2. Bestem på tilsvarende måte den stasjonære overflateformen for kapillarbølger på dypt vann.

5.3 Skipsbølgeomønsteret

Til nå har vi studert bølgeomønsteret fremkommet av forstyrrelser som har hatt uendelig utstrekning på tvers av strømrretning. Dersom forstyrrelsen har en endelig utstrekning, vil det utvikle seg et to-dimensjonalt bølgeomønster på overflaten. Slike stasjonære bølgeomønstre kan en for eksempel iaktta bak skip som beveger seg med jevn fart (figur 5.5), eller i tilknytning til en kvist som berører overflaten i en bekk hvor vannet renner med jevn fart. Satelittbilder har vist at tilsvarende bølgeomønster opptrer i atmosfæren når luften strømmer forbi en isolert fjelltopp. Det er nylig blitt kjent at Beerenberg på Jan Mayen skaper slike bølgeomønstre (figur 5.6).

Det mest karakteristiske trekk ved skipsbølgeomønsteret er at bølgebevegelsen bare forekommer innenfor en viss sektor som stråler ut fra skipet. Dersom skipet beveger seg over dypt vann, er sektorens vinkel 39° , og den er uavhengig av skipets fart.

Vi antar at et skip seiler med konstant fart U langs en rett kurs. I løpet av en tid t har skipet beveget seg en distanse Ut fra posisjon B til posisjon A (se figur 5.7). På hvert sted langs ruten skaper skipet bølger som brer seg utover i alle retninger og interfererer med hverandre. Vi skal søke de bølgene som holder seg stasjonære i forhold til skipet. Vi betrakter derfor bølger som ble sendt ut mens skipet var i B langs en stråle BQ som danner en vinkel θ med AB . Betingelsen for at disse bølgene skal være stasjonære er at

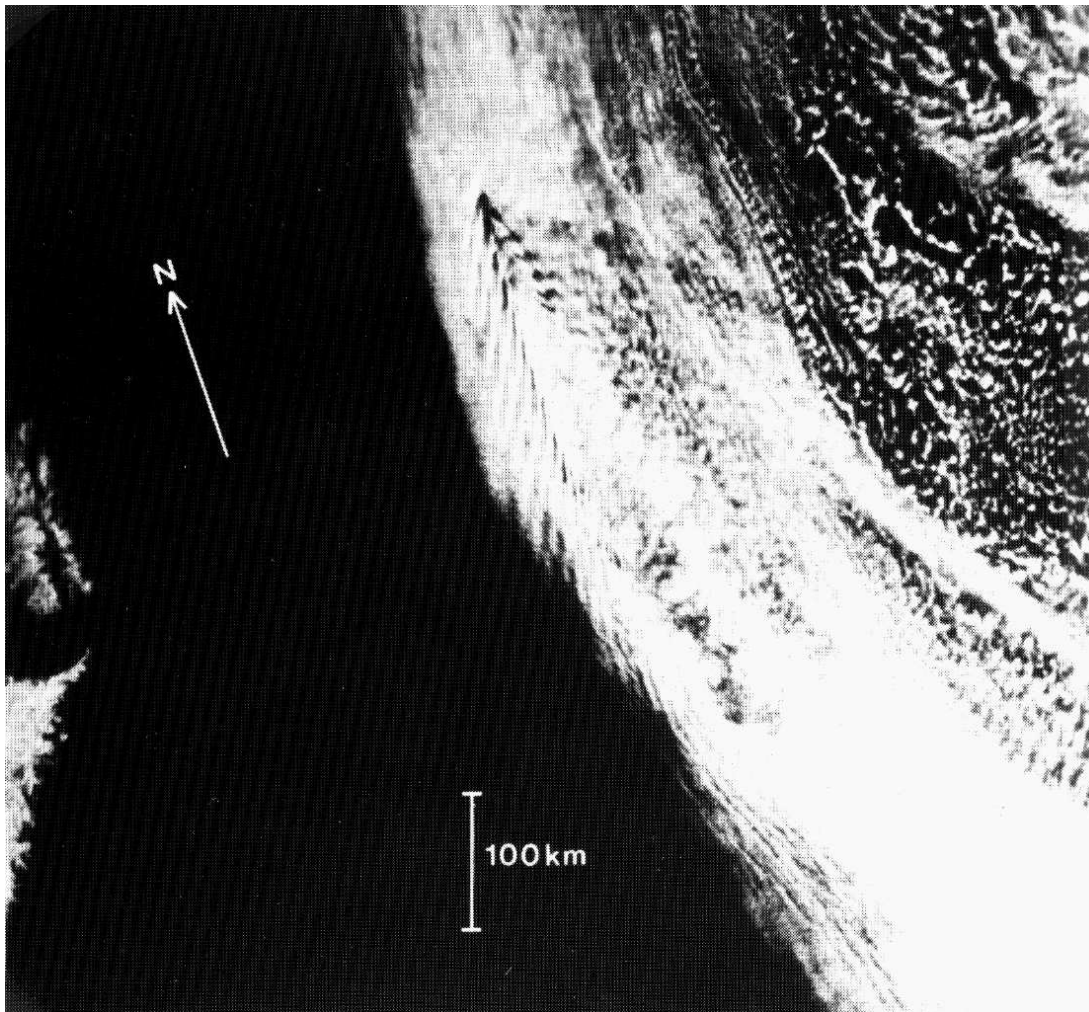
$$c(k) = U \cos \theta \quad (5.7)$$

hvor $c(k)$ er fasehastigheten for en bølgekomponent med bølgetall k . Nå forplanter bølgeenergien seg med gruppehastigheten c_g , og for tyngdebølger er $c_g \leq c$. Overflateformen for bølgene som ble sendt ut i B langs strålen BQ er derfor å finne et sted på strålen mellom punktene B og Q . For tyngdebølger på dypt vann er $c_g = \frac{1}{2}c$, og bølgene er derfor kommet frem til et punkt P midtveis mellom Q og B . De stasjonære bølgene som ble sendt ut i B , vil derfor ligge på en sirkel gjennom P og B med radius $\frac{1}{4}Ut$.

Vi kan konstruere tilsvarende sirkler som angir bølgefronten for stasjonære bølger som ble sendt ut i punkter langs AB . Dette er skissert på figur 5.8.



Figur 5.5: Skipsbølgeomønstre i Geirangerfjorden. (Foto Røstad).



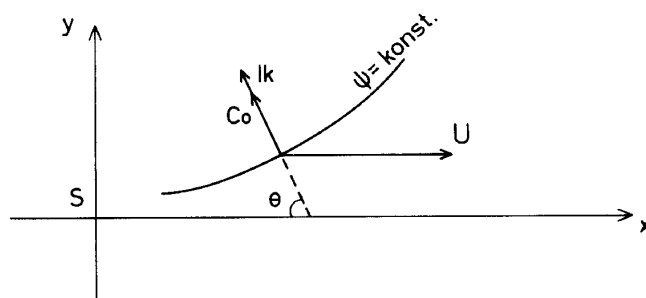
Figur 5.6: Satelittbilde som viser “skipsbølgemønster” i skydekket ved Jan Mayen 1. september 1976.

Dette enkle resonementet som vi har gjennomført her, gir oss ingen informasjon om bølgeomønstrets utseende og bølgenes amplitude. Det er faktisk en formidabel oppgave å bestemme dette for et skipsskrog av vilkårlig form, og den oppgaven er ennå ikke løst i sin alminnelighet. Her skal vi begrense oss til å bestemme bølgeomønstret i det tilfellet at skipet erstattes med en punktformet forstyrrelse på overflaten. I det følgende presenteres to mulige framgangsmåter, og for øvrig henvises til Newman (1977).

Framgangsmåte I

La oss for enkelthets skyld tenke oss at forstyrrelsen (S) står stille og at vannet beveger seg med konstant hastighet U i x -retning (figur 5.9). Bølgeformen tenkes beskrevet med en fasefunksjon ϕ hvor faselinjen $\phi = \text{konstant}$ angir for eksempel en bølgetopp. Bølgetallsvektoren er da

$$\mathbf{k} = \nabla\phi. \quad (5.8)$$



Figur 5.9:

En bølgekomponent som i stillestående vann forplanter seg med fasehastighet $c_0(k)$ vil føres med strømmen slik at fasehastigheten i forhold til et fast aksekors blir

$$c = c_0(k) + \mathbf{U} \cdot \frac{\mathbf{k}}{k}. \quad (5.9)$$

For stasjonære bølger er $c = 0$, og ved å sette (5.8) inn i (5.9) fremkommer det en differensiallikning for ϕ . Vi skal løse denne differensiallikningen ved å innføre karakteristikk slik at bølgetallskomponentene $k_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ og $k_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}$ er konstante langs disse linjene. Denne metoden er beskrevet av Whitham (1974). Med $c = 0$ er (5.9) en likning for k_x og k_y som vi kan skrive

$$F(k_x, k_y) = 0 \quad (5.10)$$

hvor F betegner en funksjon av bølgetallskomponentene. Dette betyr at k_x kan uttrykkes ved en funksjon av k_y , og vi skriver

$$k_x = f(k_y). \quad (5.11)$$

Fra likning (5.8) følger at $\nabla \times \mathbf{k} = 0$ slik at

$$\frac{\partial k_y}{\partial x} - \frac{\partial k_x}{\partial y} = 0.$$

Setter vi inn for k_x fra (5.11) kan den siste likningen skrives

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - f'(k_y)\frac{\partial}{\partial y}\right)k_y = 0.$$

Dette betyr at k_y er konstant på en linje eller karakteristikk $y = y(x)$ slik at

$$\frac{dy}{dx} = -f'(k_y).$$

Det følger fra (5.11) at også k_x er konstant langs denne linjen. Vi integrerer siste likning og velger integrasjonskonstanten slik at karakteristikken går gjennom origo

$$y = -f'(k_y)x. \quad (5.12)$$

Ved å derivere (5.10) med hensyn på k_y finner vi

$$\frac{\partial F}{\partial k_y} + \frac{\partial F}{\partial k_x} f'(k_y) = 0$$

slik at (5.12) kan skrives

$$\frac{y}{x} = \frac{\partial F}{\partial k_y} / \frac{\partial F}{\partial k_x}. \quad (5.13)$$

Ved hjelp av (5.10) kan vi finne k_x og k_y som funksjoner av x og y . Ved å integrere $\nabla\phi$ langs karakteristikken hvor k_x og k_y er konstant, får vi at fasefunksjonen $\phi = k_x x + k_y y$. Linjer med konstant fase er derved gitt ved

$$\phi = k_x x + k_y y = -A \quad (5.14)$$

hvor A er en konstant. Fortegnsvalget av A sammen med fortegnet på k_x avgjør bølgemønsterets plassering på lo- eller le-siden.

Som eksempel på hvordan den foregående teorien kan benyttes, skal vi bestemme faselinjene for tyngdebølger på dypt vann. I dette tilfellet kan vi skrive

$$F(k_x, k_y) = Uk_x + \sqrt{gk} = 0.$$

Vi innfører nå vinkelen θ (se figur 5.8) definert ved

$$\cos \theta = -\frac{k_x}{k} \quad \sin \theta = -\frac{k_y}{k}$$

og velger $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Derved finner vi at

$$k = \frac{g}{U^2 \cos^2 \theta}$$

og

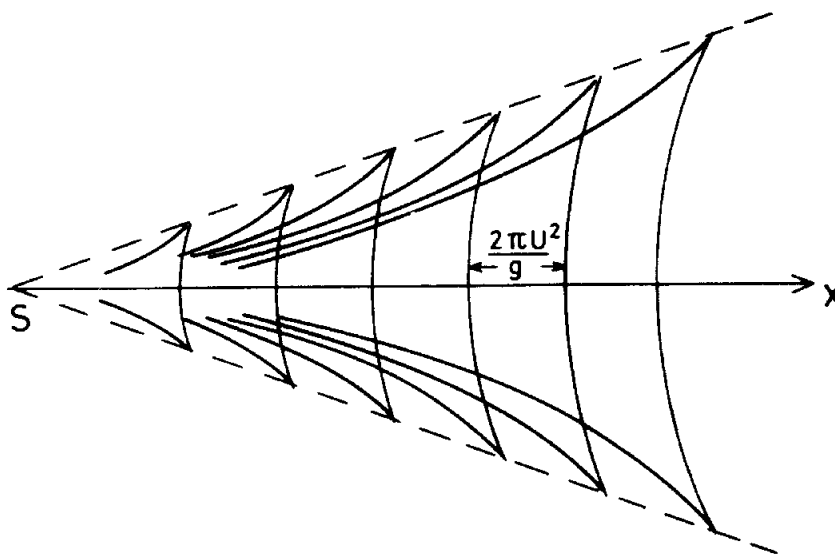
$$\frac{\partial F}{\partial k_x} = U(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta), \quad \frac{\partial F}{\partial k_y} = \frac{U}{2} \sin \theta \cos \theta.$$

Ved innsetting i (5.13) og (5.14) finner vi en parameterfremstilling for linjene med konstant fase

$$\begin{aligned} x &= A \frac{U^2}{g} \cos \theta (1 + \sin^2 \theta) \\ y &= A \frac{U^2}{g} \cos^2 \theta (1 + \sin \theta) \end{aligned} \quad (5.15)$$

hvor A er en konstant. Velger man for eksempel $A = 2\pi n$ hvor $n = 1, 2, \dots$, finner man en skare med faselinjer bak skipet med avstand fra hverandre som tilsvarer den lokale bølgelengden. Et slikt sett av faselinjer er tegnet i figur 5.10. Faselinjene ender i en spiss for verdier av θ slik at y , for en gitt A , har et maksimum eller minimum. I disse punktene er $\sin^2 \theta = \frac{1}{3}$, og derved er

$$\left| \frac{y}{x} \right| = \frac{1}{4} \sqrt{2}.$$



Figur 5.10:

Siden $\arctan(\frac{1}{4}\sqrt{2}) = 19.5^\circ$, viser dette at faselinjene ligger innenfor en sektor med åpningsvinkel 39° .

Bølgemønsteret består av to bølgesystemer. Det ene har bølgekammer som ligger på tvers av skipets bevegelsesretning. Disse kalles tverrbølger eller hekkbølger. Bølgelengden for hekkbølgene bak skipet er $\lambda = 2\pi U^2/g$. Bølgeammene for det andre bølgesystemet danner en vifte som sprer seg ut fra skipet. Disse bølgene kalles divergerende bølger eller baugbølger.

Metoden som vi har benyttet til å beregne faselinjene for skipsbølgemønsteret er generell og kan anvendes for andre bølgetyper. Gjevik og Marthinsen (1978) beregnet for eksempel med samme metoden faselinjer for le-bølger i atmosfæren. De fant god overensstemmelse ved sammenlikning med bølgemønster på satelitt-bilder (figur 5.6).

For en punktformet forstyrrelse er det også mulig med relativt enkle metoder å bestemme amplituden for bølgene, og slike beregninger for skipsbølger er beskrevet blant annet av Lamb (1932) og Newman (1977).

Framgangsmåte II

Vi antar at en punktforstyrrelse som beveger seg i overflaten med hastighet $-\mathbf{U} = -U\mathbf{i}$ genererer et stasjonært og langsomt varierende bølgetog. Dette kan behandles med bølgekinematikk som beskrevet i kap. 3. Regnet i forhold til væsken har vi en isotrop dispersjonsrelasjon som gir en fasehastighet $c = c_0(k)$ der k er absoluttverdien av bølgetallsvektoren \mathbf{k} . Vi bytter nå koordinatsystem slik at forstyrrelsen blir liggende i ro. Vi får da frekvensen

$$\omega = c_0(k)k + \mathbf{U} \cdot \mathbf{k} \equiv W(k_x, k_y) \quad (5.16)$$

der k_x og k_y er komponentene av bølgetallsvektoren. W definert som ovenfor tilsvarende F tidligere. Vi merker oss at (5.16) gir *anisotrop* dispersjon pga. det siste leddet som ofte betegnes Doppler-skift. At bølgemønsteret er stasjonært betyr i dette koordinatsystemet at $\omega = 0$. Dispersjonsrelasjonen (5.16) gir da umiddelbart en likning for k_x og k_y

$$W(k_x, k_y) = 0. \quad (5.17)$$

Gruppehastigheten er nå gitt ved

$$\mathbf{c}_g = \frac{\partial W}{\partial k_x} \mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial k_y} \mathbf{j}. \quad (5.18)$$

Da mediet er uniformt gir strålelikningene

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{c}_g \quad (5.19)$$

der

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}_g \cdot \nabla. \quad (5.20)$$

Det følger umiddelbart at \mathbf{k} og derved \mathbf{c}_g er konstante langs karakteristikkene, slik at disse blir rette linjer. Bare de karakteristikkene kan bære energi som går

gjennom forstyrrelsen, som vi uten tap av generalitet kan plassere i origo. Hvert forhold y/x svarer derfor til en karakteristikk og overalt i mediet har vi likningen

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{\partial W}{\partial k_y}}{\frac{\partial W}{\partial k_x}} \quad (5.21)$$

som sammen med (5.17) implisitt definerer k_x og k_y som funksjon av x og y . For å finne eksplisitte uttrykk kan fortsette på ulike vis. En mulighet er å benytte (5.17) til å uttrykke komponentene av bølgetallsvektoren vha. c_0 . Innsetting i (5.21) gir da en bikvadratisk likning for c_0 . En annen mulighet er å innføre vinkelen, θ , mellom \mathbf{k} og den negative x -retningen. Vi kan da sette

$$k_x = -k \cos \theta, \quad k_y = k \sin \theta. \quad (5.22)$$

Fra (5.17) følger da umiddelbart

$$k = \frac{g}{U^2 \cos^2 \theta}. \quad (5.23)$$

Vi merker oss at dette er en omskrivning av $U = c_0 / \cos \theta$. Innsetting i (5.21) fulgt av eliminasjon av k gir da

$$\frac{y}{x} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{1 + \sin^2 \theta} \equiv f(\theta). \quad (5.24)$$

Høyresiden, $f(\theta)$, har maksimum for $\sin \theta = \sqrt{1/3}$, dvs $\theta = \theta_c \approx 35.3^\circ$. Dette svarer til $y/x = \sqrt{2}/4$ som er identisk med den ytterbegrensning av bølgeomønstret som er funnet tidligere. For $y/x < \sqrt{2}/4$ finner vi to løsninger for θ , en som er mindre enn θ_c og en som er større. Disse to grenene definerer hver sin fasefunksjon og derved hvert sitt bølgefelt. Den første definerer de såkalte *hekkbølgene*, mens det andre gir *baugbølgene*. Likning (5.24) kan lett omskrives til en bikvadratisk likning for $\sin \theta$,

$$\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \sin^4 \theta + \left(2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right) \sin^2 \theta + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0, \quad (5.25)$$

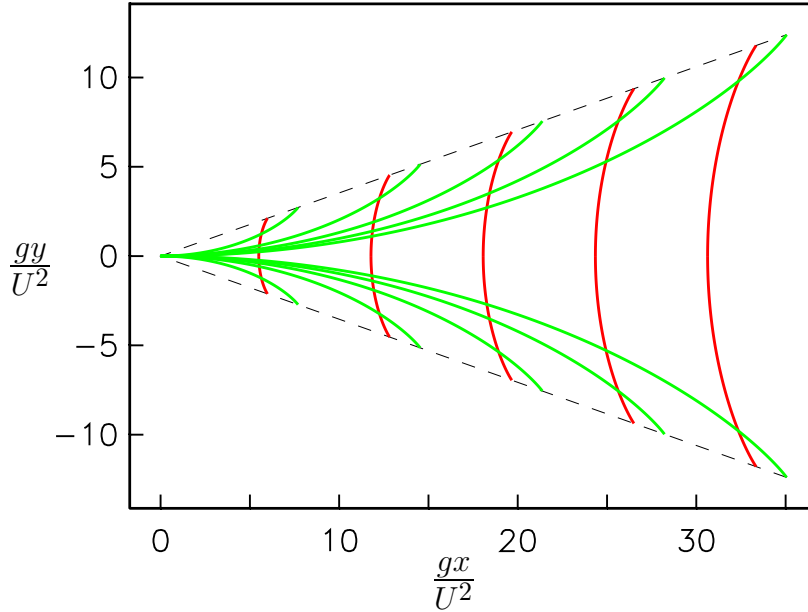
som har fire løsninger for $(y/x)^2 < 1/8$, tilsvarende de to bølgefeltene definert for positive og negative y .

For fasefunksjonen kan vi sette opp integralet

$$\chi(\mathbf{r}) = \chi_0 + \int_{C(\mathbf{r})} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.26)$$

der χ_0 er fasen i origo og $C(\mathbf{r})$ betegner en hvilken som helst kurve som starter i origo og slutter i \mathbf{r} . I dette tilfellet får vi triviell regning dersom vi integrerer langs karakteristikkene

$$\chi(\mathbf{r}) = \chi_0 + k_x x + k_y y \quad (5.27)$$



Figur 5.11: Fase-diagram for de to bølgesystemene bak en punktforstyrrelse på uendelig dyp. Vi har tegnet faselinjer som svarer til $\chi = -2n\pi$, $n = 1, 2, \dots, 5$.

der k_x og k_y jo er kjente som funksjoner av x og y . Hver verdi av χ definerer en faselinje. Vi uttrykker bølgetallskomponentene vha. θ også i (5.27). Likningene (5.21) og (5.27) kan så løses mhp. x og y og vi finner en parameterisering av faselinjene ($\chi = -A = \text{konstant}$)

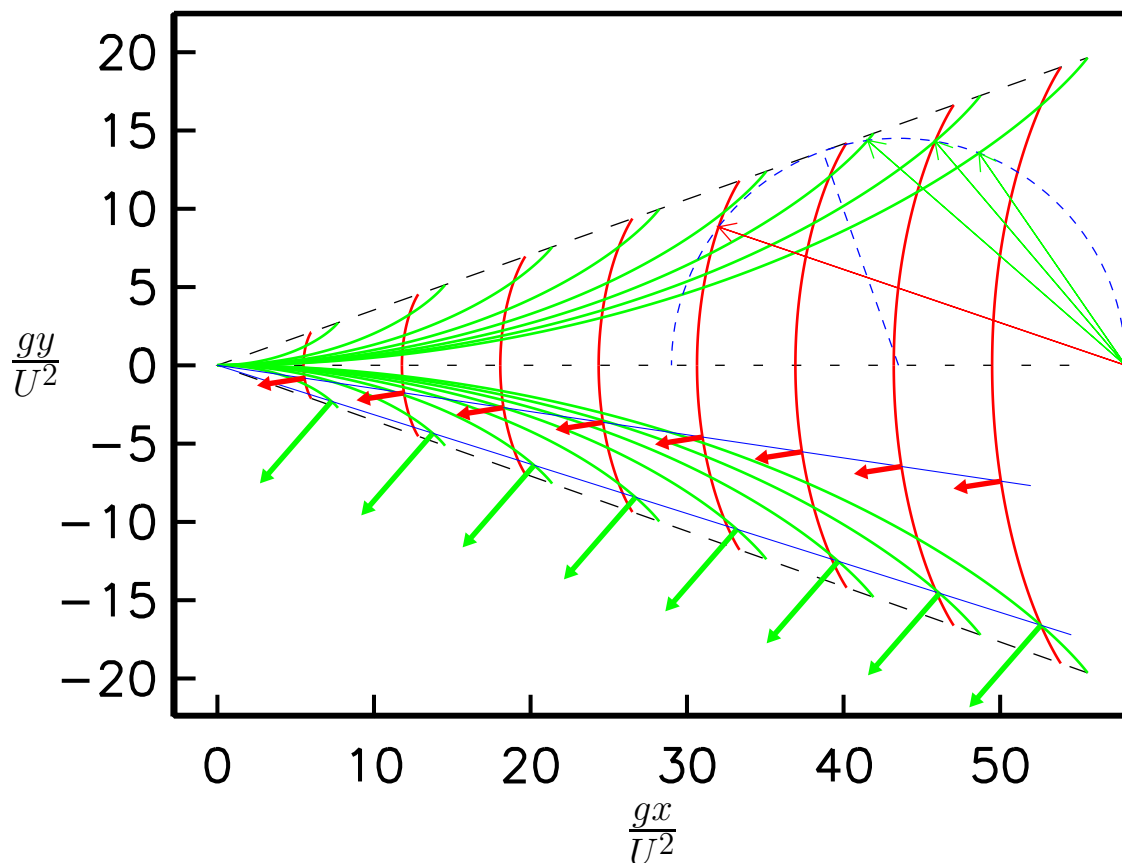
$$x = \frac{(A + \chi_0)U^2}{g} \cos \theta (1 + \sin^2 \theta), \quad (5.28)$$

$$y = \frac{(A + \chi_0)U^2}{g} \cos^2 \theta \sin \theta. \quad (5.29)$$

For $|\theta| < \theta_c$ beskriver disse faselinjer for hekkbølger, mens de for $|\theta| > \theta_c$ gir faselinjer for baugbølger, eller divergerende bølger. Siden disse to feltene er uavhengig behøver de ikke ha samme χ_0 . Stråleteorien bryter sammen i ytterkant av bølgemønstret, for $\theta \approx \pm\theta_c$.

Ved stråleteori får vi ikke bestemt fasen χ_0 . For en punktforstyrrelse kan det vises, f.eks. ved bruk av stasjonær fase etter Fourier transform, at $\chi_0 = \frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi$ for henholdsvis hekk- og baugbølger (se f.eks. Newman (1977)). Disse verdiene er brukt i figure 5.11. I figur 5.12 har vi også tegnet inn den geometriske stedet som nåes ved gruppehastighet fra et valgt punkt. Figuren viser også “energitransportbanene” fram til krysningpunktene med faselinjer.

Øvingsoppgaver

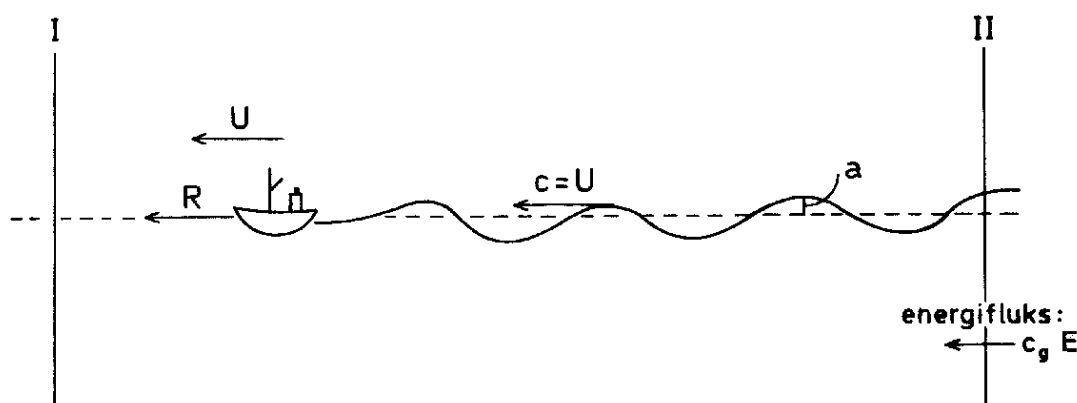


Figur 5.12: Fasediagram for Kelvin's skipsbølgeomønster. Den stiplede halvsirkelen angir de geografiske steder dit gruppehastigheten bringer oss fra stedet der halvsirkelen krysser x -aksen til høyre. Dette betyr at energien som forstyrrelsen tilførte det stasjonære bølgesystemet da den passerte dette punktet nå befinner langs den stiplede sirkelen (og dens speilbilde under y -aksen). Pilene fra punktet og til bølgetoppenes skjæring med sirkelen svarer da til bølgebaner i det koordinatsystemet der forstyrrelsen beveger seg. Vi merker oss at bølgebanene er vinkelrette på kammene.

I det nedre halvplanet er to karakteristikk inntegnet. Langs den øverste (skalerte) bølgetallsvektorer tilhørende hekkbølger inntegnet, mens langs den nedre har vi tegnet inn bølgetallsvektorene for baugbølger.

1. Bestem faselinjene for stasjonære kapillarbølger på dypt vann generert av en punktformet forstyrrelse som beveger seg med konstant fart.
2. Bestem faselinjene for tyngdebølger på vann av endelig dyp generert av en punktformet forstyrrelse som beveger seg med konstant fart. Tegn opp faselinjene i to tilfeller $U < \sqrt{gH}$ og $U > \sqrt{gH}$.

5.4 Bølgemotstand



Figur 5.13:

Når en forstyrrelse beveger seg bortover overflaten slik at et stasjonært bølgemønster oppstår, så vil vannet stadig tilføres energi ved at området som berøres av bølgebevegelsen stadig blir større. Denne energien må bli overført ved at forstyrrelsen utfører et arbeid, og dette gir seg utslag i at en må bruke en kraft R for å føre forstyrrelsen med konstant fart. Denne kraften betegnes *bølgemotstand*. Vi skal finne et uttrykk for denne kraften for plan (to-dimensjonal) bølgebevegelse bak en forstyrrelse som beveger seg med konstant fart U . Det stasjonære bølgemønsteret har amplitude a , og ifølge (2.32) er den midlere bølgeenergi for tyngdebølger pr. lengdeenhet langs overflaten

$$E = \frac{1}{2} \rho g a^2$$

hvor ρ er vannets tetthet. Foran og bak forstyrrelsen trekkes en vertikal kontrollflate henholdsvis I og II (figur 5.13). Vi ser så på energitilvekst innenfor væskevolumet begrenset av flatene I og II i et tidsrom Δt . Arbeidet utført av trekk-kraften R er $RU\Delta t$. Økningen av bølgeenergi innenfor væskevolumet på grunn av at bølgetoget er blitt lengre, er $Ec\Delta t$. Dessuten er det en fluks av

bølgeenergi $c_g E \Delta t$ inn i volumet ved flaten II . Energiregnskapet for væskevolumet innenfor kontrollflatene blir følgelig

$$RU \Delta t + c_g E \Delta t = Ec \Delta t.$$

Derved finner vi at bølgemotstanden på forstyrrelsen kan skrives

$$R = \frac{c - c_g}{c} E.$$

For tyngdebølger på dypt vann er $c_g = \frac{1}{2}c$ og

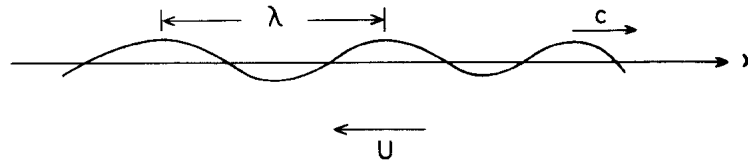
$$R = \frac{1}{4} \rho g a^2.$$

Benytter man så den beregnede amplitude for en stasjonær bølge bak en punktformet trykkforstyrrelse (avsnitt 5.2), vil man finne at i dette tilfellet avtar bølgemotstanden med økende hastighet.

Metoder til beregning av bølgemotstanden når man tar hensyn til den tredimensjonale strukturen i skipsbølgemønsteret er beskrevet av Newman (1977).

5.5 Overflatebølger modifisert av strøm som varierer i styrke i horisontal retning

Vi skal her kort vise hvordan overflatebølger blir modifisert når de forplanter seg inn i et område med gradvise endringer i strømhastigheten i horisontal retning. Dette fenomenet kan iakttas i naturen hvor bunntopografien eller utstrømning av vann fra elveutløp fører til horisontale variasjoner i strømhastigheten. Vi begrenser oss til plane bølger som forplanter seg i x -aksens retning mot en strøm med hastighet $U(x)$ som er en funksjon av x , se figur 5.14. Vi antar at strømmen er



Figur 5.14:

langsomt varierende slik at

$$\left| \frac{\lambda}{U} \frac{dU}{dx} \right| \ll 1$$

hvor λ er bølgelengde. Lokalt vil derfor bølgene være tilnærmet upåvirket av endringene i strømmen. På hvert enkelt sted kan vi da regne som om bølgene

forplanter seg på en uniform strøm. Med de definerte retninger kan fasehastighet i forhold til et fast aksekors skrives

$$c = c_0 - U$$

hvor $c_0 = \sqrt{g/k}$ er fasehastighet for tyngdebølger på dypt vann. Betrakter vi periodisk bevegelse med fast frekvens ω_0 , så har vi følgende at

$$ck = \sqrt{gk} - Uk = \omega_0.$$

Deriverer vi den siste likningen med hensyn på x får vi

$$\frac{dk}{dx} = \frac{2\frac{dU}{dx}k}{c_0 - 2U}.$$

Dette viser at for $c_0 > 2U$ så vil bølgetallet øke og bølgelengden avta når bølgene forplanter seg mot en strøm av økende styrke. Dersom strømvariasjonen er så stor at U nærmer seg $c_0/2$, så vil endringen i bølgelengde bli så stor at forutsetningene for denne teorien ikke er oppfylt. Grenseverdien $U = c_0/2$ tilsvarer at bølgenes gruppehastighet blir lik strømhastigheten. Energien i bølgebevegelsen kan da ikke lenger forplante seg opp mot strømmen, og dette leder til en opphopning av bølgeenergi. Vi har sett at bølgelengden avtar mot null inn mot det området hvor $U = c_0/2$. Med konstant energiflukt forventer vi at bølgeamplituden øker over alle grenser. De kraftige effektene som er beskrevet her vil opptre i områder med sterk strøm og for korte bølgelengder hvor fasehastigheten er relativt liten. Svak frekvensmodulasjon av langeperiodiske dønninger på grunn av tidsvarierende tidevannsstrøm har også blitt observert, se figur 5.15.

Øvingsoppgaver

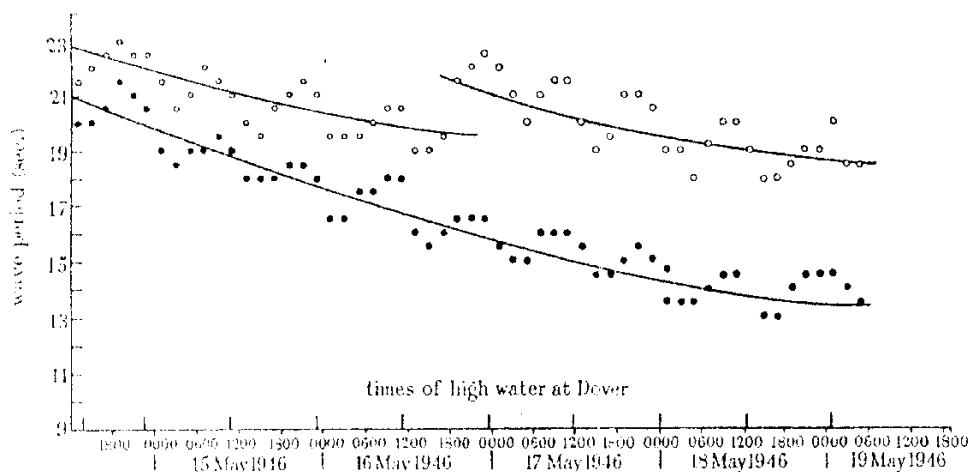
1. Bestem frekvensmodulasjonen for tyngdebølger på dypt vann som forplanter seg mot en uniform strøm $U(t) = U_0 \sin \Omega t$. Perioden $2\pi/\Omega$ antas å være mye lenger enn middelperioden T_0 for bølgene. Finn et enkelt uttrykk for perioden når strømhastigheten U_0 er mye mindre enn fasehastigheten c_0 for bølgene i rolig vann. Benytt dataene i figur 5.15 til å estimere tidevannsstrømmens styrke.
2. For bølger på en langsomt varierende grunnstrøm, \mathbf{U} , kan vi anta en dispersjonsrelasjon på formen

$$\omega = \sigma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}$$

der σ er frekvensen vi ville hatt uten strøm, på engelsk kalt *intrinsic frequency*. Det siste leddet kalles Doppler-skiftet.

I denne oppgaven ser vi på lange, lineære overflatebølger på grunt vann og antar at grunnstrømmen er gitt ved $\mathbf{U} \equiv -U(x)\mathbf{j}$ der \mathbf{j} er enhetsvektoren i y -retning. Videre antas at U har en klokkefasong

$$U = U_m e^{-\frac{x^2}{l^2}}$$



Figur 5.15: Modulasjoner av perioden for dønning forårsaket av tidevannsstrømmen. Tre episoder observert ved kysten av Cornwall, England. (Etter Barber 1949)

I en slik strøm kan vi ha fangede bølger.

- a Gi en fysisk redegjørelse for fangningsmekanismen.
 - b Anta at vi har et gitt bølgetall i y -retning. Finn begrensninger på mulige ω for fangede moder ved stråleteori.
 - c Sett opp det fulle lineære egenverdi-problemet som bestemmer egenmodene.
3. Fra forrige oppgave punkt (c) har vi at bølgebevegelsen i en planparallel grunnstrøm er styrt av likningen

$$\left(\frac{\hat{\eta}_x}{P}\right)_x + \left(1 - \frac{k_y^2}{P}\right)\hat{\eta} = 0; \quad P \equiv (\omega + Uk_y)^2/(gh)$$

der grunnstrømmen U varierer med x og $\hat{\eta}$ relaterer seg til overflaten i henhold til

$$\eta(x, y, t) = \text{Re} \left(\hat{\eta}(x) e^{i(k_y y - \omega t)} \right)$$

Benytt WKBJ metoden til å finne tilnærmelser til $\hat{\eta}$. Hvor er de gyldige? Svarer resultatet til energikonservering i bølgebevegelsen?

Kapittel 6

INTERNE TYNGDEBØLGER

Interne tyngdebølger kan opptre i atmosfæren, havet og innsjøer og skyldes oppdriftskraften på grunn av den vertikale tetthetssjiktningen. Selv om tetthetssjiktningen kan ha forskjellige årsaker, såsom variasjoner i temperatur, saltholdighet, eller konsentrasjoner av andre oppløste stoffer, så er mange egenskaper ved bølgebevegelsen like. Den primære årsaken til de interne bølgene er oppdriftskraften, men bølgebevegelsen vil i mange tilfeller være modifisert av forskjellige andre årsaker, i første rekke kompressibilitet og diffusjonsprosesser. Langperiodiske interne bølger i naturen vil dessuten ofte være betydelig påvirket av Corioliskraften. For relativt kortperiodiske interne bølger i vann eller hav kan væsken regnes som inkompressibel, og dessuten vil bølgebevegelsen være tilnærmet upåvirket av endringer i tetthet som følge av langsom diffusjon av varme eller salt.

Det er i særdeleshet én parameter som har fundamental betydning når man skal beskrive interne bølger. Dette er oppdriftsfrekvensen eller Väisälä-Brunt frekvensen. Vi skal innledningsvis definere denne størrelsen og gi den en enkel fysikalsk tolkning. Ved likevekt er tettheten ρ_0 konstant langs horisontale flater, og ρ_0 er en funksjon av den vertikale koordinaten z som for eksempel kan stå for dypet.

En væskepartikkel som føres i vertikal retning en avstand Δz ut fra likevektsstillingen, se figur 6.1, vil være påvirket av en oppdriftskraft pr. volumenhet

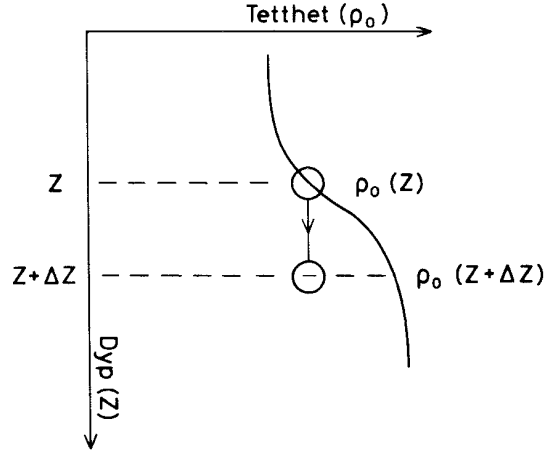
$$-g[\rho_0(z + \Delta z) - \rho_0(z)] \simeq -g \frac{d\rho_0}{dz} \Delta z$$

som søker å føre partikkelen tilbake til likevektsstillingen. Partikkelens masse pr. volumenhet ganget med akselerasjonen er

$$\rho_0 \frac{d^2}{dt^2}(\Delta z).$$

Dersom vi neglisjerer trykk-kraften, kan bevegelseslikningen for partikkelen skrives

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Delta z) = -N^2 \Delta z \quad (6.1)$$



Figur 6.1:

hvor størrelsen

$$N = \left(\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.2)$$

er *oppdriftsfrekvensen*. Likning (6.1) sier at væskepartikkelen utfører vertikale svingninger med frekvens N . Utenom dette gir denne enkle modellen hvor trykkkreftene er neglisjert, ingen informasjon om egenskapene ved bølgebevegelsen.

6.1 Interne bølger i inkompressible væsker hvor diffusjonsprosessen kan neglisjeres. Dispersjonsegenskaper og partikkelbevegelse.

Bølgebevegelsen fører til hastighetsperturbasjoner som kan uttrykkes ved vektoren \mathbf{v} som har komponenter u , v og w henholdsvis langs x -, y - og z -aksen. De to førstnevnte aksene ligger i horisontalplanet, og z -aksen angir som før dypet. Bevegelsen medfører at tettheten endres i forhold til den verdien tettheten har ved likevekt. Vi betegner tetthetsendringen med ρ , og den totale tetthet på et bestemt sted er $\rho_0 + \rho$. Vi antar at tetthetsendringene utelukkende skyldes forflytning av væskepartikler med bølgebevegelsen, og vi neglisjerer således tetthetsendringer på grunn av diffusjonsprosesser. Vi antar videre at bølgeamplituden er så liten at vi kan linearisere de likningene som beskriver bevegelsen. Siden ρ avhenger av bølgeamplituden, omfatter lineariseringen også at vi sløyfer produkter hvor for eksempel ρ og \mathbf{v} inngår. Under disse forutsetninger kan bevegelseslikningen, tilstandslikningen og kontinuitetslikningen skrives

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -w \frac{d\rho_0}{dz} \quad (6.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6.5)$$

hvor p er trykkendringen på grunn av bølgebevegelsen, og vektoren \mathbf{g} som er rettet i z -aksens retning betegner tyngdens akselerasjon.

Av likningene (6.3)–(6.5) kan vi eliminere p , u , v og ρ slik at vi blir stående igjen med en likning for vertikalhastigheten

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla^2 w) + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} = -N^2 \nabla_h^2 w \quad (6.6)$$

hvor

$$\nabla_h^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

For å utlede (6.6) kan vi gå frem på følgende måte: Vektorlikningen (6.3) gir tre likninger for hastighetskomponentene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\rho}{\rho_0} g \end{aligned}$$

Ved å derivere de to første av disse likningene henholdsvis med hensyn på x og y og addere får vi

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla_h^2 p.$$

På grunn av (6.5) kan dette skrives

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho_0} \nabla_h^2 p.$$

Derivasjon med hensyn på z gir

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla_h^2 p \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \right) + \frac{1}{\rho_0} \nabla_h^2 \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Anvender vi nå operatoren ∇_h^2 på den siste av de tre komponentlikningene, kan vi eliminere trykket fra likningen ovenfor slik at vi får en likning hvor bare w og ρ inngår. Ved å bruke (6.4) kan vi også eliminere ρ . Derved fremkommer likningen (6.6).

Vi forventer at den viktigste effekten av tetthetssjiktningen er knyttet til oppdriftskraften som er representert ved leddet på høyre side i likning (6.6). Når tetthetsendringene ved likevekt er små kan andre leddet på venstre side i den samme likningen sløyfes. Dette tilsvarer at man beholder den dynamiske effekten av tetthetssjiktningen, men sløyfer den kinematiske. Approksimasjonen betegnes Boussinesq-antagelsen, og den representerer i mange tilfeller en god tilnærming. Gyldigheten er diskutert senere i dette avsnittet. I lys av dette kan vi derfor skrive (6.6)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla^2 w) = -N^2 \nabla_h^2 w. \quad (6.7)$$

For konstant N søker vi bølgeløsning av formen

$$w = A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (6.8)$$

hvor A er en konstant. De tilhørende hastighetskomponenter i horisontalretningen er

$$u = -\frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$$

og

$$v = -\frac{k_y k_z}{k_x^2 + k_y^2} A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$$

hvor k_x , k_y og k_z betegner henholdsvis x -, y - og z -komponenten av bølgetallsvektoren.

Ved å sette uttrykket i (6.8) inn i likning (6.7) finner vi dispersjonsrelasjonen

$$\omega^2 = N^2 \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \quad (6.9)$$

Dette viser at interne tyngdebølger av formen (6.8) har vinkelfrekvens

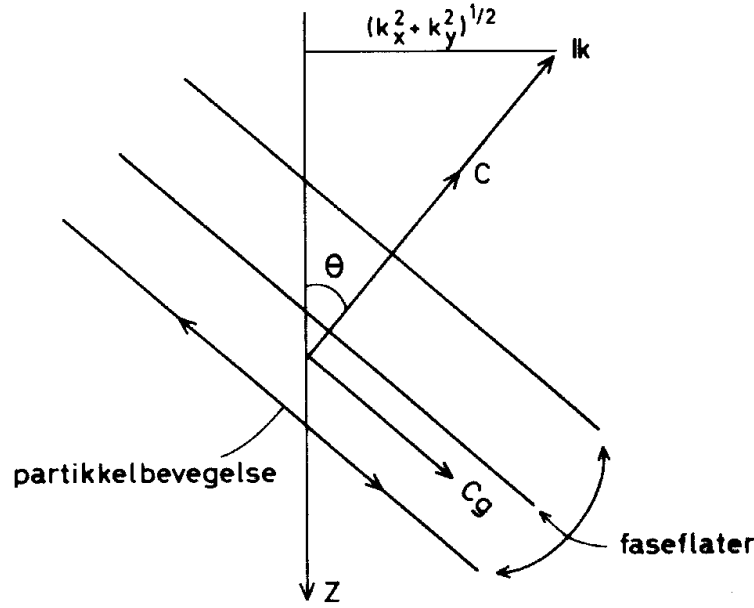
$$\omega \leq N$$

og at oppdriftsfrekvensen er en øvre grense for de frekvenser som kan forekomme. Settes $\omega = N$ medfører det at bølgebevegelsen er uavhengig av z og at den vertikale komponenten av bølgetallsvektoren $k_z = 0$. Væskepartiklene beveger seg i dette tilfellet i vertikale plan ($u = v = 0$), og svingetiden er i samsvar med det vi fant innledningsvis. For gitte verdier av ω og N danner bølgetallsvektoren vinkelen

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\omega}{N}\right)$$

med vertikalen. Når bevegelsen er periodisk i x , y og z , følger det fra kontinuitetslikningen (6.5) at

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$$



Figur 6.2:

Dette viser at partikkelbevegelsen for de interne bølgene er rettet normalt til bølgetallsvektoren. Partikkelbevegelsen foregår følgelig i plan som er parallelle med faseflatene, se figur 6.2.

I dispersjonsrelasjonen (6.9) inngår bølgetallsvektorens komponenter såvel som bølgetallsvektorens størrelse. Det betyr at vi har anisotrop dispersjon og at forplantningshastigheten er retningsavhengig. Ved anisotrop dispersjon faller ikke gruppehastigheten langs bølgetallsvektorens retning, og for interne tyngdebølger som følger dispersjonsrelasjonen (6.9), er gruppehastigheten rettet langs faseflatene. Gruppehastigheten har komponenter

$$\mathbf{c}_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right)$$

henholdsvis langs de tre koordinatretningene x , y og z . Med relasjonen (6.9) finner vi

$$\mathbf{c}_g = \frac{c}{k} \{ k_x \cot^2 \theta, k_y \cot^2 \theta, -k_z \} \quad (6.10)$$

Enkel regning gir at

$$\mathbf{c}_g \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Dette viser at gruppehastigheten er rettet normalt på bølgetallsvektoren. Av (6.10) ser vi at horisontalkomponenten av \mathbf{c}_g og \mathbf{k} har samme retning og at vertikalkomponentene er motsatt rettet. Dette betyr at den vertikale energitransporten ved interne tyngdebølger er rettet i motsatt retning av den vertikale forflytning

av faseflatene. På figur 6.2 er samhørende retninger for bølgetallsvektor, gruppehastighet og partikkelbevegelse skissert.

Vi er nå istand til å angi under hvilke betingelser vi kan sløyfe andre leddet på venstre side av likning 6.6. Ved hjelp av 6.8 finner vi at forholdet mellom andre og første ledd i likningen er

$$\left| \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{k_z}{k^2} \right|$$

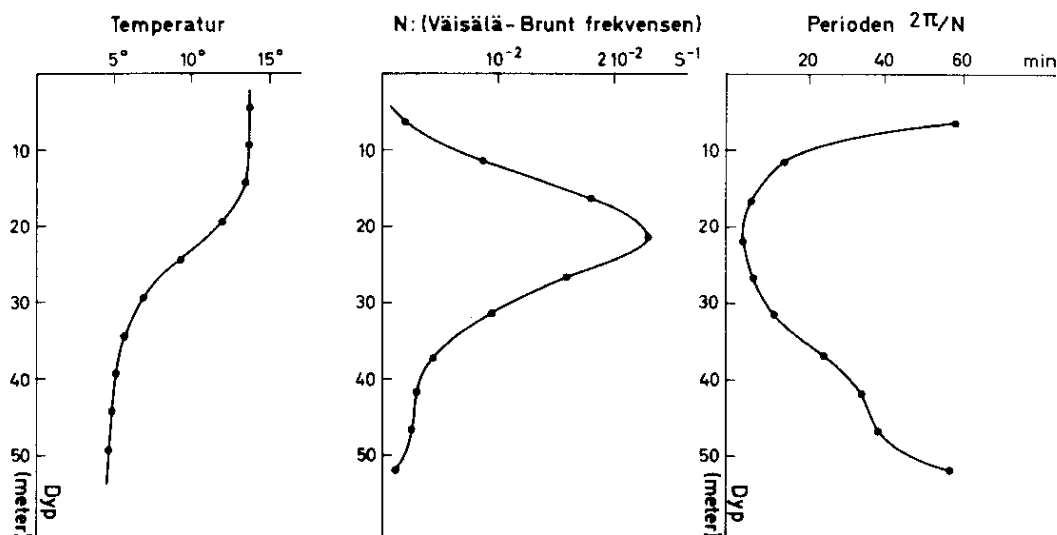
Dette viser at andre leddet kan sløyfes i forhold til det første når den relative tetthetsvariasjonen over en distanse tilsvarende k_z/k^2 er tilstrekkelig liten.

6.2 Interne bølger knyttet til sprangsjiktet

I havet og i innsjøer opptrer det ofte situasjoner med lagdeling av vannmassene i overflatelag og bunnlag hvor tettheten er tilnærmet uniform i hvert av lagene. I et tynt sjikt mellom lagene endrer tettheten seg forholdsvis raskt i vertikal retning. Dette sjiktet blir betegnet *sprangsjiktet*, og det oppstår ved blanding av vannmassene fra overflatelaget og bunnlaget. Tetthetsvariasjonen i sprangsjiktet skyldes forskjeller i saltholdighet eller temperatur. I fjorder opptrer det ofte et sprangsjikt i situasjoner med stor tilførsel av ferskvann som legger seg i overflaten, og i innsjøer opptrer sprangsjiktet som følge av oppvarming av overflatelaget.

Figur 6.3 viser en karakteristisk temperaturfordeling i øvre delen av en dyp innsjø i sommerhalvåret. Temperaturen fremstilt på figuren er middelerdien for en angitt tidsperiode. Vi ser at overflatelaget er 15–20 m tykt og at temperaturen er omkring 14°. Sprangsjiktet strekker seg fra 20 til 30 meters dyp, og vannet under sprangsjiktet viser liten temperaturvariasjon med dypet. På grunnlag av temperatur-observasjonene kan man beregne tettheten ρ_0 , oppdriftsfrekvensen N og perioden $2\pi/N$. De to sistnevnte størrelsene er også fremstilt som funksjon av dypet i figur 6.3. I overflatelaget og bunnlaget er oppdriftsfrekvensen liten, mens sprangsjiktet er karakterisert med en stor verdi av N . Under slike forhold vil kraftig vind i innsjøens lengderetning transportere det varme overflatelaget i vindens retning slik at sprangsjiktet løftes i opp-vinds enden og senkes i ned-vinds enden. Når vinden løyer, vil hevningen og senkningen av sprangsjiktet forplante seg som indre bølger. Observasjoner av slike bølger i Mjøsa er beskrevet av Mørk, Gjevik og Holte (1980). Liknende fenomen er kjent fra mange andre innsjøer, blant annet Loch Ness i Skottland (Thorpe *et al.* 1972).

I fjorder vil skiftninger i tidevannsstrømmen over fjordterskler ofte gi opphav til indre bølger. Ved målinger i Herdlefjorden vest for Bergen ble dette påvist av Fjeldstad allerede i 30-årene. Observasjonene er senere publisert i et arbeid fra 1964 (Fjeldstad 1964). Indre tidevannsbølger har blitt påvist mange steder og under forskjellige forhold. Se for eksempel en oversiktsartikkel av Farmer og Freeland (1983). Stigebrand (1979) har funnet at slike bølger genereres ved Drøbakterskelen i Oslofjorden.



Figur 6.3: Målinger fra Hamarbukta i Mjøsa 4–9 september 1974.

I atmosfæren vil det under visse værstsituasjoner oppstå temperaturinversjoner eller isoterme lag, mens lagene over og under er i nær nøytral likevekt. Oppdriftsfrekvens som funksjon av høyden over bakken endrer seg under slike forhold på tilsvarende måte som i sprangsjiktet i havet. Dette kan gi opphav til indre tyngdebølger, og skipsbølgemønsteret ved Jan Mayen (figur 5.6) oppstår gjerne i slike situasjoner. I atmosfæren må man også ta hensyn til luftens kompressibilitet og vindvariasjonen i høyden. Disse problemene er inngående behandlet av Miles (1969), Gill (1983) og i GARP publication series (1980).

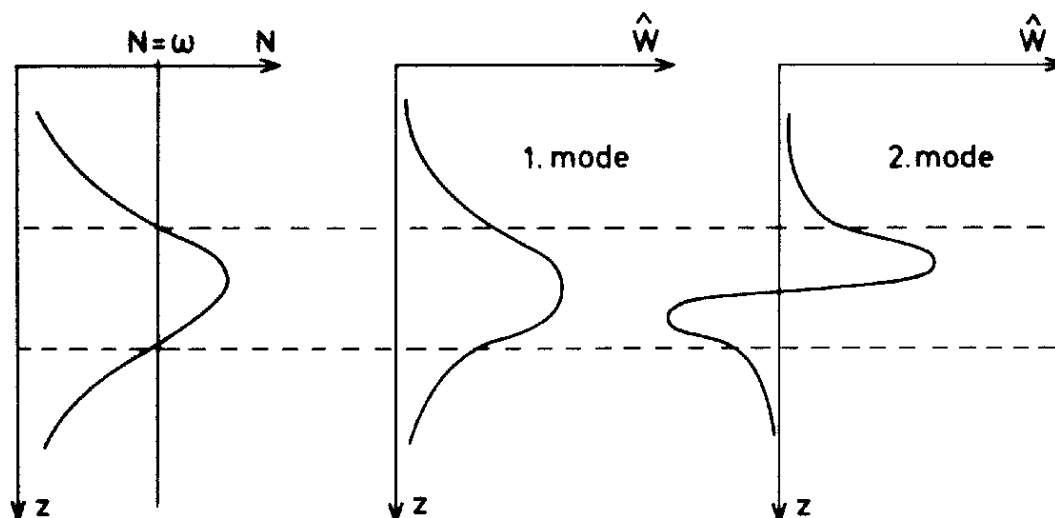
Vi skal her vise noen karakteristiske egenskaper for indre bølger knyttet til sprangsjiktet. Vi antar at N er en funksjon av z og søker løsninger av (6.7) som beskriver plane bølger som forplanter seg horisontalt

$$w(x, z, t) = \hat{w}(z) \sin(kx - \omega t) \quad (6.11)$$

og ved innsetting finner vi

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} = -k^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) \hat{w}. \quad (6.12)$$

Løsninger av denne likningen for forskjellige modeller av sprangsjiktet er beskrevet av Krauss (1966) og Roberts (1975). Likningen er av samme form som (4.5), og for store k kan for eksempel WKB-metoden benyttes til å finne tilnærmede løsninger. For $\omega < N$ har løsningen av (6.12) karakter tilsvarende harmoniske svingninger, mens for $\omega > N$ vil løsningen tilsvare en eksponensiell demping (eller økning). I sprangsjiktet kan vi derfor ha bølgebevegelse med vertikalhastighet som antydnet i figur 6.4.



Figur 6.4:

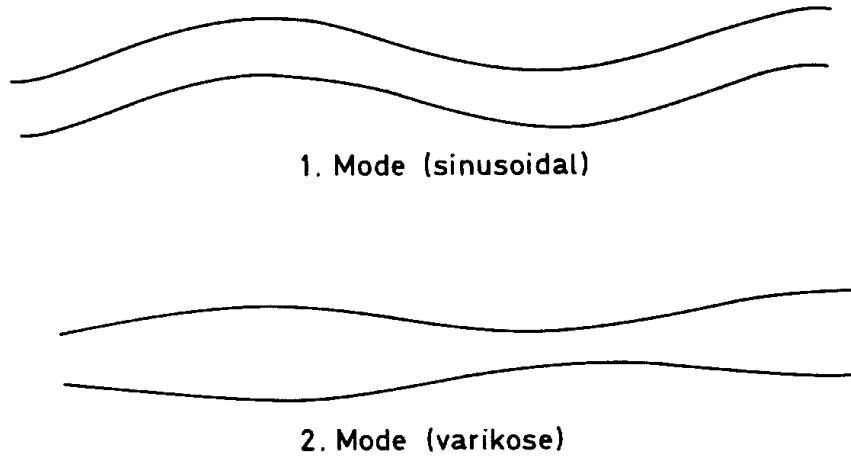
De høyere moder (mode 3, 4 osv.) er karakterisert med flere svingninger innen området hvor $\omega < N$. For en bestemt verdi av ω hører en bestemt verdi av bølgetallet (egenverdi) slik at den laveste mode har det minste bølgetallet og den største bølgelengde. Bølgelengden avtar gradvis for de øvrige modene. Bølger i mode 1 har den største forplantningshastigheten i horisontalretning. Til mode 1 og 2 tilsvarer en deformasjon av sprangsjiktet som antydnet i figur (6.5).

De største vertikalhastighetene i bølgebevegelsen finner en i nærheten av sprangsjiktet, og vertikalhastigheten er ubetydelig ved overflaten. Hevning eller senkning av overflaten vil derfor være ubetydelig selv om hevingen av sprangsjiktet kan være flere meter.

I tilfeller med et grunt sprangsjikt kan indre bølger fremkalle relativt store strømvariasjoner på overflaten. Strømsetningene vil virke inn på korte overflatebølger, med den følge at under lette vindforhold vil små bølger ha en tendens til å samles i bånd som altså avspeiler de indre bølger. Disse båndene kan noen ganger være synlig med det blotte øye. Siden refleksjon av radarbølger fra overflaten avhenger sterkt av overflatens ruhet, kan båndene bli ekstra godt synlig med radar. Et eksempel på et slikt "radar-bilde" av indre bølger er vist på figur (6.6).

Øvingsoppgaver

1. I tilfeller med markert sprangsjikt av liten vertikal utstrekning, kan sjiktningen tilnærmes ved en 2-lags modell med uniform tetthet $\rho_0 - \Delta\rho_0$ og ρ_0 henholdsvis i øvre og nedre lag. Tykkelsen av øvre og nedre lag betegnes henholdsvis med h og H . Bestem dispersjonsrelasjonen og hastighetsfeltet for plane bølger i denne modellen, og vis at bevegelsen har to moder;



Figur 6.5:

en overflatebølge-mode og en intern mode knyttet til skilleflaten. Vis at for lange bølger så er fasehastigheten for overflate-moden og den interne moden henholdsvis

$$c = \sqrt{g(H+h)} \quad \text{og} \quad c = \sqrt{\frac{g^* H h}{H+h}}$$

hvor

$$g^* = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} g$$

2. Bestem vertikalhastighet, og finn dispersjonsrelasjonen for indre tyngdebølger i et horisontalt væskelag med uniform dybde H . Tettheten ved likevekt øker eksponensielt med dypet (z)

$$\rho_0(z) = \rho_s e^{-\beta z}$$

hvor ρ_s er tettheten ved overflaten. Vi antar at vertikalhastigheten er null både ved overflaten og ved bunnen.

3. Lange bølger på et sprangsjikt

Vi har en friksjonsfri væske med to lag som ikke er blandbare. Videre antar vi at trykket i væsken er hydrostatisk, med null trykk på fri overflate og at bevegelsen foregår i et vertikalt plan. Ved $t = 0$ er horisontalkomponenten av hastigheten uavhengig av den vertikale koordinaten. Vi lar h_1 og h_2 være tykkelsene av øvre og nedre lag ved likevekt. η_1 og η_2 er vertikalforskyvningene av fri overflate og skilleflaten, og u_1 og u_2 er horisontalkomponentene av hastighetene i øvre og nedre lag. Tyngdens akselerasjon er g , og den



Figur 6.6: Radar-ekko fra havoverflaten i et område 10–15 km fra land sør-øst for Ryvingen mellom Grimstad og Arendal. Bildet ble tatt den 7. september 1983 av et fly som brukes i oljevernberedskapen. Båndstrukturen gjenspeiler indre bølger med bølgelengder fra 0.5–1 km. Nærmere analyse finnes i en artikkel av Gjevik og Høst (1984). (Foto Fjellanger Widerøe A/S).

relative tetthetsforskjellen mellom lagene er $\epsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$. Bevegelsen vil da være styrt av følgende ligninger:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -g \frac{\partial \eta_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= -g(1 - \epsilon) \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - g\epsilon \frac{\partial \eta_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\eta_1 - \eta_2) &= -\frac{\partial}{\partial x}((h_1 + \eta_1 - \eta_2)u_1), \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}((h_2 + \eta_2)u_2).\end{aligned}$$

(a) Utled disse ligningene. Hva innebærer antagelsen om hydrostatisk trykk?

Anta i resten av oppgaven at vi har flat bunn og små utslag fra likevekt.

- (b) Finn de harmoniske bølgeløsningene ligningssettet har. Vis at de faller i to klasser, og diskuter egenskapene de to modene har.
- (c) Ligningssettet har løsninger i form av pulser som går med uendret form. Vis at vi har to moder av disse pulsene, som tilsvarer modene i (b). Vis ved hjelp av noen enkle skisser hvordan forskyvningen av overflaten og skilleflaten avhenger av parametrene i problemet. Illustrerer også grafisk hvordan bølgehastigheten avhenger av disse parametrene.

Kapittel 7

IKKE-LINÆRE BØLGER

Vi har til nå hovedsaklig behandlet lineære bølger som er bølgebevegelse beskrevet ved lineære differensiallikninger. Disse likningene er som regel fremkommet ved at de ikke-lineære leddene i grunnlikningene er sløyfet. Dette kan gjøres under forutsetning av at bølgeamplituden er tilstrekkelig liten. Ved å bruke relasjoner som gjelder for de lineære bølgene har vi estimert størrelsen av de ikke-lineære leddene og funnet betingelser for når disse leddene kan sløyfes i forhold til de lineære ledd i likningene. I avsnitt 2.2 fant vi at for bølger på dypt vann kan de ikke-lineære leddene sløyfes dersom $a/H \ll 1$. Her betegner a , H og λ som før henholdsvis bølgeamplitude, midlere vanddyb og bølgelengde.

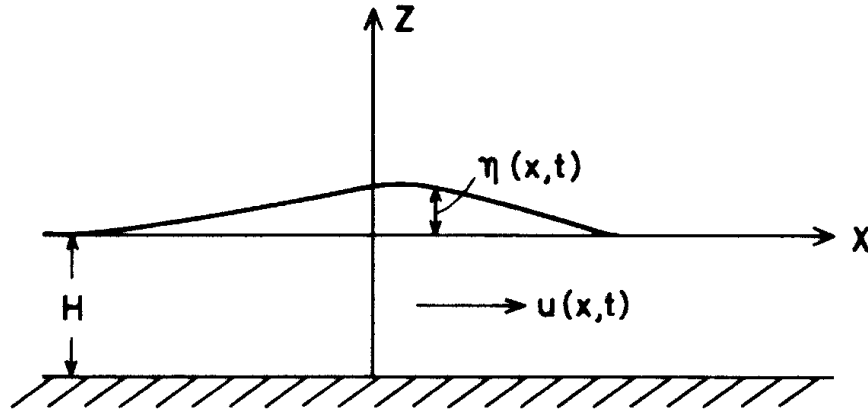
Vi skal nå se litt nærmere på bølgebevegelse hvor amplituden er så stor at de ikke-lineære leddene må beholdes i de likninger som beskriver bølgebevegelsen. Vi skal betegne slike bølger *ikke-lineære bølger*. Ikke-lineære bølger har på mange måter andre egenskaper enn lineære bølger. For ikke-lineære bølger gjelder:

1. Bølgehastigheten avhenger av amplituden.
2. Bølgebrytning kan inntreffe, og bølger med steil front (sjokkbølger) kan oppstå.
3. Bølgebevegelse kan sette opp en svak strøm i bølgenes forplantningsretning.
4. Forskjellige bølgekomponenter som samtidig forplanter seg gjennom samme område, vil påvirke hverandre. Superposisjonsprinsippet gjelder vanligvis ikke for ikke-lineære bølger.

Gjennom en del eksempler skal vi demonstrere disse effektene, og vi skal dessuten studere noen ikke-lineære bølgetyper som kan forplante seg med uendret form.

7.1 Ikke-lineære bølger på grunt vann. Riemann's løsningsmetode. Bølgebrytning.

Det følger av diskusjonen i avsnitt 2.10 at dersom Ursell-parameteren $\frac{a}{H}(\frac{\lambda}{H})^2 \gg 10$, så kan man regne trykkfordelingen i lange bølger på grunt vann som hydrostatisk. Dersom man bare tar med de dominerende ikke-lineære ledd i bevegelseslikningen, får man at likningene (2.89) og (2.90) beskriver plane ikke-lineære bølger på grunt vann. I disse likningene inngår bare horisontalhastigheten u og overflatehevingen η som ukjente.



Figur 7.1:

Vi regner altså her med hydrostatisk trykkfordeling slik at hastigheten u kan betraktes som konstant gjennom væskelaget. Derved er u bare funksjon av x og t . Vi innfører nå størrelsen

$$c^2 = g(H + \eta) \quad (7.1)$$

og ved å eliminere η fra (2.89) og (2.90) får vi følgende likninger

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -2c \frac{\partial c}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(2c) + c \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial x}(2c) = 0.$$

Ved addisjon og substraksjon av disse to likningene finner vi

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (c + u) \frac{\partial}{\partial x} \right] (2c + u) = 0 \quad (7.2)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - (c - u) \frac{\partial}{\partial x} \right] (2c - u) = 0 \quad (7.3)$$

De opprinnelige likningene er derved brakt over på en form slik at likningene kan løses ved hjelp av karakteristikk. Dette går under navnet Riemann's metode fordi Riemann (1892) foretok en liknende transformasjon av likningene for ikke-lineære lydbølger i en gass slik at han kunne diskutere løsningen av likningene. Likningene for ikke-lineære lydbølger kan nemlig skrives på tilsvarende form som (7.2) og (7.3), slik at det er en direkte analogi mellom ikke-lineære lydbølger og ikke-lineære vannbølger på grunt vann.

Likningen (7.2) viser at størrelsen

$$P = 2c + u = \text{konstant} \quad (7.4)$$

langs kurver (karakteristikker) i (x, t) -planet hvor vinkelkoeffisienten til kurvene er bestemt ved

$$\frac{dx}{dt} = c + u. \quad (7.5)$$

Vi betegner disse kurvene med C^+ . Likeledes viser (7.3) at størrelsen

$$Q = 2c - u = \text{konstant} \quad (7.6)$$

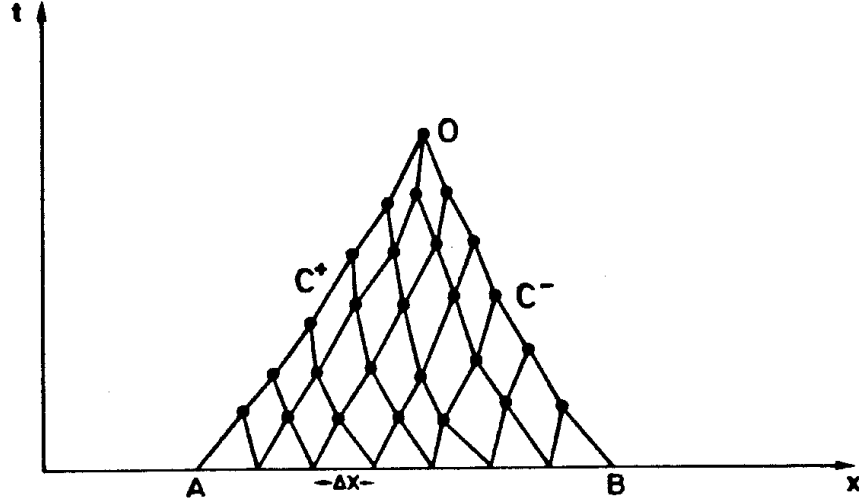
langs kurver med vinkelkoeffisient

$$\frac{dx}{dt} = -(c - u) \quad (7.7)$$

og vi betegner disse kurvene med C^- .

La oss anta at ved $t = 0$ er u og c spesifisert som funksjon av x . I et hvert punkt på x -aksen bestemmer da (7.5) og (7.7) vinkelkoeffisienten for to kurver C^+ og C^- . Langs disse kurvene er henholdsvis størrelsene P og Q bevart. Velger man punkter på x -aksen som ligger i en tilstrekkelig liten avstand Δx fra hverandre, kan kurvene approksimeres med rette linjer i tangentreningene. I skjæringspunktene for C^+ og C^- linjene kan man så bestemme verdiene av u og c . Derved kan man bestemme vinkelkoeffisienten for kurvene i skjæringspunktene slik at disse igjen kan tjene som utgangspunkter for beregningen av u og c i nye punkt. Grid-nettet ved en slik numerisk integrasjon er skissert på figur 7.2. Gjennom ethvert punkt er det bare tegnet to karakteristikker fordi vi forutsetter her at u og c skal være entydige i punktene. På figuren skjærer C^+ karakteristikken gjennom A og C^- karakteristikken gjennom B hverandre i punktet O . Verdien av u og c i punktet O er således bare bestemt av den initielle forstyrrelse i området AB på x -aksen. Vi sier at O har AB som avhengighetsområde.

La oss anta at ved tiden $t = 0$ er overflaten som følge av en eller annen forstyrrelse løftet over likevektsstillingen innenfor et område AB og at væskelaget er i ro og den øvrige delen av overflaten er uforstyrret. I (x, t) -planet vil karakteristikkene i dette tilfellet gå som antydnet på figur 7.3. For enkelthets skyld har vi her bare tegnet de karakteristikkene som går gjennom A og B som i dette tilfellet



Figur 7.2:

vil være rette linjer. I et visst tidsrom avhengig av formen på forstyrrelsen, vil karakteristikkene gjennom A og B begrense knippene av C^+ og C^- karakteristikker som stråler ut fra området AB .

Etter et tidsrom t_p skjærer C^- karakteristikken gjennom B og C^+ karakteristikken gjennom A hverandre i punktet O . Ved et senere tidspunkt $t > t_p$ er knippene av C^+ og C^- karakteristikker adskilt. Dette betyr at den opprinnelige forstyrrelsen ved $t = 0$ er splittet opp i to adskilte bølger som beveger seg henholdsvis mot høyre og venstre. Mellom de to bølgene er væsken i ro, og overflaten er plan.

For $t > t_p$ skjærer knippet av C^+ karakteristikker fra AB C^- karakteristikker som kommer fra området utenfor AB . Innenfor det knippet som representerer bølgen som beveger seg mot høyre er følgende

$$Q = 2c - u = 2c_0 \quad (7.8)$$

hvor $c_0 = \sqrt{gH}$. Punktet på bølgen beveger seg mot høyre med hastighet

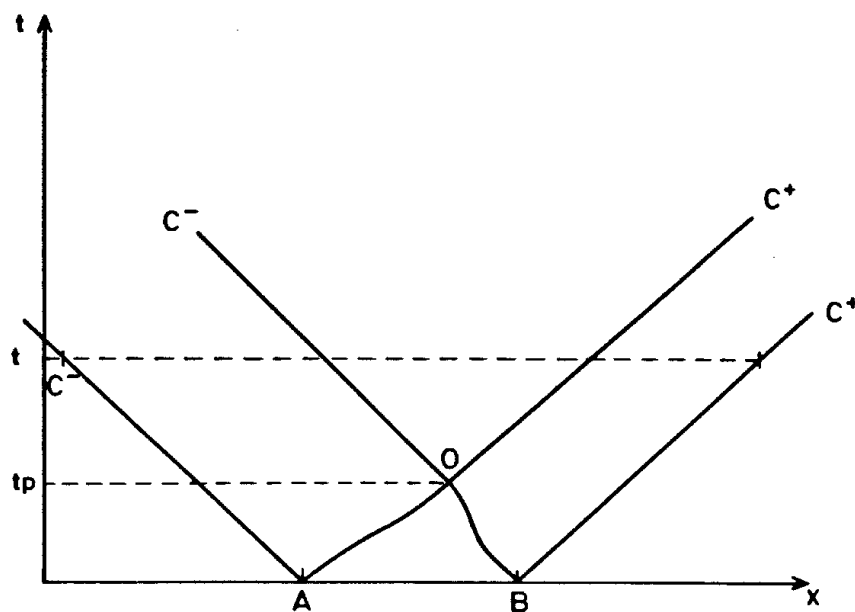
$$c_f = c + u.$$

Ved hjelp av (7.8) og (7.1) kan vi skrive

$$c_f = 3c - 2c_0 = c_0[3\sqrt{1 + \eta/H} - 2]. \quad (7.9)$$

Dersom $\eta/H \ll 1$, har vi at

$$c_f \simeq c_0[1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}]. \quad (7.10)$$



Figur 7.3:

Uttrykkene (7.9) og (7.10) viser at bølgen beveger seg med en hastighet avhengig av den relative bølgeamplituden η/H . I dette tilfellet hvor $\eta/H > 0$, vil bølgetoppen bevege seg raskere enn resten av bølgen. Dette vil medføre at bølgen etterhvert utvikler en bratt front slik som skissert i figur 7.4.

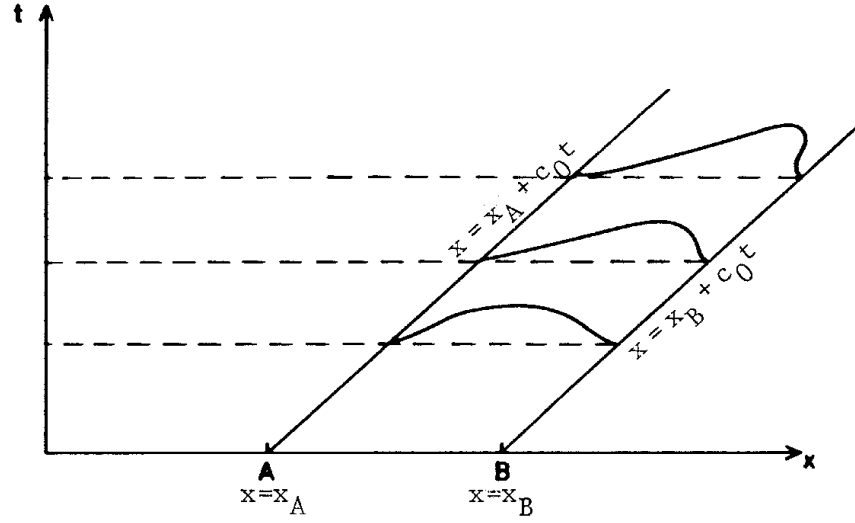
Etter en viss tid t_b vil bølgefronten være steil med vertikal tangent, og etter dette vil bølgen bryte. Ved brytning vil bølgeformen være en flertydig funksjon av x , og matematisk gir dette seg utslag i at flere karakteristikk skjærer hverandre i et punkt. Forutsetningen om at bare to karakteristikk, en C^+ og en C^- karakteristikk skjærer hverandre i hvert punkt i (x, t) -planet, innebærer derfor at vi betrakter bølgebevegelse før brytning inntreffer. I avsnitt 7.3 skal vi se nærmere på bølgeformer som kan oppstå etter at brytning har inntruffet.

7.2 Korteweg-de Vries likningen. Ikke-lineære bølger med permanent form. Solitoner.

En del viktige egenskaper ved lange bølger på grunt vann kan summeres opp ved tre enkle modell-likninger. Vi velger å betrakte bølger som beveger seg i x -aksens retning. Da vil likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (7.11)$$

hvor $c_0 = \sqrt{gH}$, beskrive lineære ikke-dispersive bølger. Likningen har løsning $\eta = f(x - c_0 t)$ hvor f er en vilkårlig funksjon. Bølgen beveger seg altså med



Figur 7.4:

konstant hastighet og uendret form. Likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (7.12)$$

beskriver i første tilnærmelse lineære disperse bølger. Likningen har løsning $\eta = A e^{ik(x-ct)}$ hvor $c = c_0(1 - \frac{(kH)^2}{6})$. Dette er i overensstemmelse med den vi fant i avsnitt 2.1 for lange bølger på grunt vann etter å ha korrigert for avvik fra hydrostatisk trykkfordeling. Videre vil likningen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (7.13)$$

i første tilnærmelse beskrive ikke-lineære bølger som brer seg med en hastighet som er avhengig av bølgeamplituden i henhold til hva vi fant i avsnitt 7.1. Likningen (7.13) uttrykker derfor at bølgeformen endres og at det utvikler seg en steil front dersom $\eta/H > 0$. Kombinerer man likningene (7.12) og (7.13) får man en likning som i første tilnærmelse inkorporerer både dispersjon og ikke-lineære effekter. Dette er Korteweg-de Vries likning (KdV-likningen).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (7.14)$$

KdV-likningen kan utledes fra bevegelseslikningene ved en formell rekkeutvikling hvor parametrene a/H og $(H/\lambda)^2$ tjener som utviklingsparametre. Her skal vi nøye oss med den intuitive og mindre stringente utledningen som er beskrevet ovenfor. Ved denne metoden får vi imidlertid fremhevet en viktig ting. En differensiallikning av KdV typen vil gjelde for all bølgebevegelse hvor ikke-lineariteten

og dispersjon er av den spesielle formen som beskrevet her. KdV-likningen for bølger på grunt vann ble først utledet av Korteweg og de Vries (1895). Det har senere vist seg at likningen også fremkommer for lange bølger i andre media, for eksempel plasma i et magnetfelt.

I avsnitt 2.10 fant vi at dispersjonsleddet som kommer fra avviket fra hydrostatisk trykkfordeling er av samme størrelsesorden som det dominerende ikke-lineære leddet dersom Ursell parameteren $\frac{a}{H}(\frac{\lambda}{H})^2$ er omkring 10. I dette tilfellet kan vi forvente at brytning og dispersjon vil balansere hverandre slik at det oppstår ikke-lineære bølger som forplanter seg med konstant hastighet og uendret form. For å undersøke dette søker vi en løsning av KdV-likningen av formen

$$\eta = H\zeta(\psi)$$

hvor ζ er en funksjon av $\psi = (x - Ut)/H$. Innsatt i KdV-likningen får vi

$$\zeta''' + [6(1 - \frac{U}{c_0}) + 9\zeta]\zeta' = 0$$

hvor merket ' betegner derivasjon med hensyn på ψ . Ved å integrere en gang

$$\zeta'' + 6(1 - \frac{U}{c_0})\zeta + \frac{9}{2}\zeta^2 = \text{konstant}.$$

Vi skal nå forutsette at ζ , ζ' og $\zeta'' \rightarrow 0$ for $\psi \rightarrow \infty$. Integrasjonskonstant kan derved settes lik null, og ved å multiplisere siste likning med ζ' og så integrere, får vi

$$\zeta'^2 = 3\zeta^2(\alpha - \zeta) \quad (7.15)$$

hvor

$$\alpha = 2(\frac{U}{c_0} - 1) \quad (7.16)$$

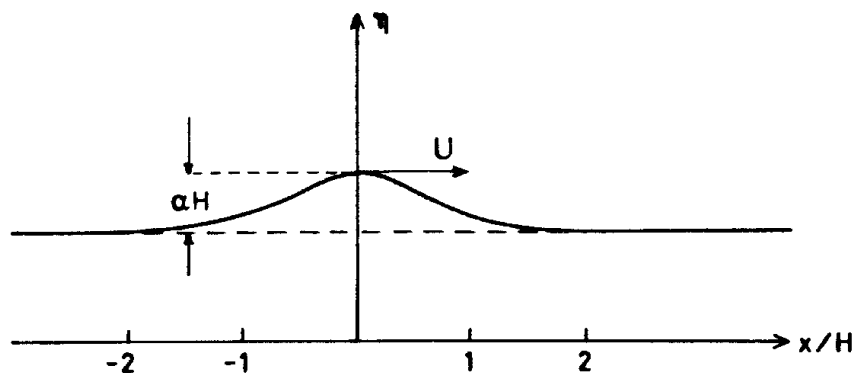
Likningen (7.15) har løsningen

$$\zeta = \alpha \operatorname{sech}^2[(\frac{3\alpha}{4})^{\frac{1}{2}}\psi] \quad (7.17)$$

hvor $\operatorname{sech} z = 1/\cosh z$. Overflatehevingen som tilsvarende (7.17) er skissert i figur 7.5 for $\alpha = 0.5$. Figuren viser en symmetrisk bølgeform bestående av en eneste bølgetopp. Bølgen har amplitude αH , og den beveger seg med hastighet

$$U = c_0(1 + \frac{\alpha}{2}).$$

På grunn av sin form har bølgen fått navnet *solitær-bølge* (solitary wave). Den kan lett genereres i en bølgekanal, forplante seg uendret over lange strekninger og reflekteres fra endeveggene i kanalen. KdV-likningen har også løsninger som



Figur 7.5:

tilsvarer periodiske bølger som brer seg med uendret form og konstant hastighet. Disse bølgene kalles *cnoidale-bølger*. Disse består av en serie av forholdsvis krappe bølgetopper adskilt ved langstrakte bølgedaler.

Den solitære bølge og de cnoidale bølgene har vært kjent lenge, både som løsninger av KdV-likninger og fra eksperiment. I den senere tid har det blitt gjort en rekke oppdagelser som har ført til fornyet interesse for disse bølgefenomenene. Gjennom teoretiske arbeider har det lyktes å transformere KdV-likningen over i en form som har gjort det mulig å diskutere andre løsninger av likningen. Man har blant annet oppdaget at to solitære bølger som beveger seg mot hverandre vil kolliderer, for så å oppstå som solitære bølger som beveger seg til hver sin kant. Viktig er det også at liknende bølgefenomen som er beskrevet ved KdV-likningen, er funnet for eksempel i kvantemekanikk, optikk (laser) og faste stoffers fysikk (krystallgitter). Selv om grunnlikningen er forskjellig fra KdV-likningen, har man funnet løsninger med egenskaper tilsvarende den solitære bølge. Som felles betegnelse for slike bølgeformer har navnet *solitoner* kommet i alminnelig bruk.

7.2.1 Mer om solitoner

Enkle og idealiserte bølgeløsninger spiller en stor rolle i bølgeteori. Delevis skyldes dette at disse løsninger ofte kan sees som deler av mer komplekse bølgemønstre. En annen viktig grunn er at studiet av spesielle løsninger kan gi generell innsikt i oppførselen til bølger og de fysiske mekanismene som er involvert.

I litteraturen er bølger av *permanent form* viktige. Som navnet antyder er dette bølger som forplanter seg med uendret form og konstant hastighet. Naturligvis opptrer slike løsninger eksakt bare for uniforme medier, men ofte vil de også gi en god tilnærming når mediet varierer langsomt. Det enkleste, og viktigste, eksemplet på bølger av permanent form er den enkle harmoniske moden ("sinusbølge") som vi finner i lineær bølgeteori. Det finnes også en del ikke-lineære bølger av

permanent form, bl.a.: Stokes-bølgen som er en generalisering av den harmoniske moden, sjokk av endelig utstrekning i diffusive media og solitære bølger som vi skal omtale her. Som navnet antyder består en solitær bølge av en enkelt bølgetopp. I streng forstand har den ikke endelig utstrekning, men styrken (avviket fra likevekt) forsvinner når vi fjerner oss fra toppen. Dersom solitærbølger oppfyller bestemte interaksjonsrelasjoner kalles de solitoner. Grovt sagt kreves et at de overlever kollisjoner uten tap av identitet eller samlet energi etc.

Solitære bølger ble, sammen med mange andre bølgefenomener, først beskrevet av J. Scott Russel i hans banebrytende arbeid “Report on Waves” som ble forfattet på oppdrag fra The Royal Society in London i 1842. Scott Russel var britisk vannveis-ingeniør og gjorde mange observervasjoner av bølger i kanaler, deriblandt av en enkelt (solitær) bølgetopp som forplantet seg over lange avstander uten merkbar formendring eller oppsplitting. Han klarte også å gjenskape en slik bølge i laboratoriet og målte dens hastighet til å være $\sqrt{g(h+A)}$ der g er tyngdens akselerasjon, h dypet ved likevekt og A amplituden.

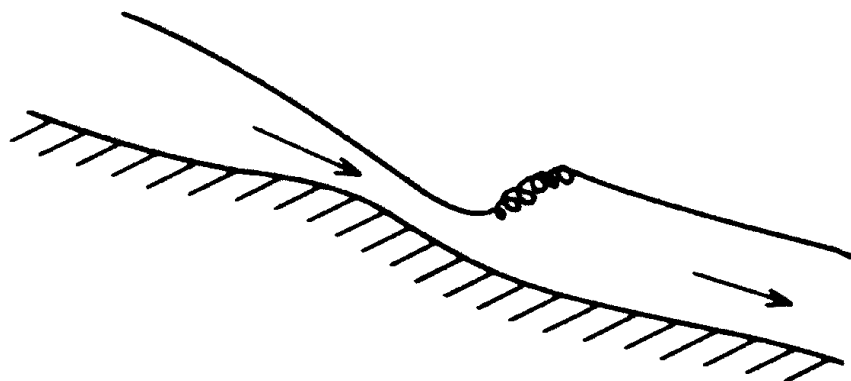
Den første som ga en komplett teoretisk beskrivelse av solitærbølgen var J. Boussinesq i 1871. Det var i forbindelse med dette arbeidet han utledet den opprinnelige Boussinesq likningen. Senere har mer nøyaktige uttrykk for solitærbølgen blitt funnet fra perturbasjonsutviklinger anvendt direkte på det fulle likningsettet for en ideell væske. En har også funnet helt andre typer av solitærbølger. De solitærbølger som er av samme natur som den lange overflatebølgen kalles i dag ofte for Boussinesq-soliton.

Forskning på solitærbølger kom svært i skuddet på 60-tallet. Basert på den enkle KdV likningen ble det utviklet en omfattende teori omkring disse bølgeene. En fant forbløffende interaksjonsegenskaper mellom solitærbølger som er analoge til støt mellom partikler, noe som ga en forbindelse over til kvantefysikken. Ved den såkalte inverse spredningsteorien kunne man forutsi mye om hvordan solitoner kan utvikle seg fra initialbetingelser av generell form. Senere har man funnet en del andre spesielle fenomener der solitærbølger er, eller kan være, involvert. Disse skal vi la ligge og heller konsentrere oss om de sidene ved solitærbølgen som allerede er nevnt.

7.3 Vannstandssprang. Hydraulisk sjokk.

Dersom dispersjonen er for svak til å forhindre brytning, kan det utvikle seg bølgeformer med steil front og med kraftig turbulent bevegelse i en sone nær fronten. Forøvrig vil bølgen bevege seg med konstant hastighet og med uendret form. Slike bølgeformer kan man iaktta i naturen for eksempel i overløpsrenner fra demninger og i elver hvor vannet renner med stor hastighet. Bølgen kan da opptre som et stasjonært *vannstandssprang* blant ujevnheter i bunnen.

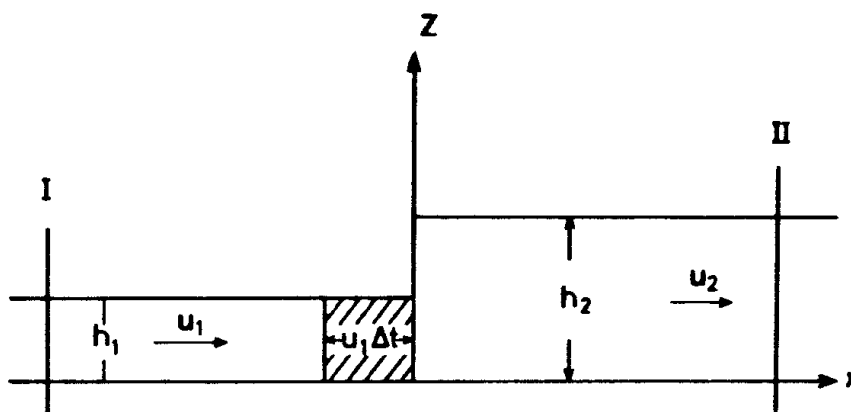
I enkelte elver, blant annet Severn River i England og Tsien-Tang i Kina, forplanter tidevannet seg oppover elva i form av et vannstands-sprang med kraftig



Figur 7.6:

turbulens i spranget og med tilnærmet plane vannflater foran og bak spranget.

Vi skal her beskrive en enkel modell av vannstandssprang, og vi skal representere selve spranget ved en diskontinuerlig overgang mellom to vann-nivåer h_1 og h_2 , og vi velger $h_1 < h_2$ slik som vist på figur 7.7.



Figur 7.7:

I første omgang vil vi betrakte et stasjonært vannstandssprang, og vi vil forutsette at strømhastigheten er konstant på hver side av spranget. Vi betegner strømhastigheten ved u_1 og u_2 som angitt på figuren. Siden spranget er stasjonært og u_1 og u_2 er uavhengige av z , er volumfluksen

$$Q = u_1 h_1 = u_2 h_2. \quad (7.18)$$

Vi benytter så impulslikningen på væskevolumet mellom de to vertikale snittflatene I og II som angitt på figuren. Netto innstrømning av bevegelsesmengde

gjennom snittflatene må være lik differansen i trykk-kraft ved de to flatene. Under forutsetning om hydrostatisk trykkfordeling får vi

$$\rho u_2^2 h_2 - \rho u_1^2 h_1 = -\frac{1}{2}\rho g h_2^2 + \frac{1}{2}\rho g h_1^2$$

hvor ρ er tettheten i væsken. Ved hjelp av (7.18) kan den siste likningen skrives

$$Q(u_2 - u_1) = \frac{g}{2}(h_1^2 - h_2^2). \quad (7.19)$$

Av (7.18) og (7.19) finner vi Q , u_1 og u_2 uttrykt ved h_1 og h_2 .

$$\begin{aligned} Q^2 &= \frac{g}{2} h_2 h_1 (h_1 + h_2) \\ u_1 &= c_1 \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{h_2}{h_1}\right) \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)} \\ u_2 &= c_2 \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{h_2}\right) \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right)} \end{aligned} \quad (7.20)$$

hvor $c_1 = \sqrt{gh_1}$ og $c_2 = \sqrt{gh_2}$. Vi ser av (7.21) at for $h_1 < h_2$ så er $u_1 > c_1$ og $u_2 < c_2$. Strømhastigheten er altså større enn forplantningshastigheten for lange lineære bølger på forsiden av spranget, og strømhastigheten er mindre enn den tilsvarende forplantningshastigheten på baksiden av spranget.

Vi skal nå se på energiregnskapet for et væskevolum som passerer spranget. I løpet av et tidsrom Δt passerer en væskemengde $Q\Delta t$ spranget. Samtidig utfører trykket et netto arbeid på væskemengden som kan skrives

$$\Delta W = \frac{1}{2}\rho g Q \Delta t (h_1 - h_2).$$

Før væskemengden passerer spranget har den en mekanisk energi

$$\left(\frac{1}{2}\rho g u_1^2 + \frac{1}{2}\rho g h_1\right) Q \Delta t$$

og etter at hele væskemengden har passert spranget, har den en mekanisk energi

$$\left(\frac{1}{2}\rho g u_2^2 + \frac{1}{2}\rho g h_2\right) Q \Delta t.$$

Tar man hensyn til det utførte arbeidet, finner en fort at for væskemengden som passerer spranget så er endringen i indre energi

$$\Delta E = \frac{\rho}{2} Q \Delta t [u_1^2 - u_2^2 - 2g(h_2 - h_1)].$$

Ved hjelp av formlene (7.21) får vi at endringen i ΔE pr. tidsenhet er

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\rho g}{4} \frac{Q}{h_1 h_2} (h_2 - h_1)^3. \quad (7.21)$$

Dette betyr at dersom $h_2 > h_1$, så er det en økning av væskens indre energi, og et tilsvarende tap av væskens mekaniske energi må finne sted. Denne overføringen av mekanisk energi til indre energi kan komme i stand ved turbulent dissipasjon, og derfor er vannstandssprang karakterisert ved kraftig turbulent bevegelse i en sone nær spranget. Ved å frembringe vannstandssprang i overløpsrenner og kanaler, kan man på en effektiv måte redusere strømhastigheten. Denne teknikk blir mye brukt i vannbygg. Energitalpet kan også komme i stand ved at den frigjorte energien transporteres vekk fra spranget ved bølger. En vil da ha et *bølgende vannstandssprang* med bølger på overflaten bak spranget, slik at den modellen vi har studert her ikke kan anvendes. Bølgende vannstandssprang kan frembringes ved eksperiment og observeres i naturen, f.eks. i Severn River.

Av (7.21) ser vi at for $h_1 > h_2$ må væsken som passerer spranget tilføres energi, og et vannstandssprang av denne type er derfor umulig.

Om vi legger en hastighet $-u_1$ til den bevegelsen som vi har beskrevet ovenfor, får vi at et vannstandssprang som forplanter seg inn i et vannlag som er i ro. Forplantningshastigheten for vannstandsspranget vil da være u_1 hvor u_2 er gitt ved (7.21).

Til slutt skal vi bare nevne at vannstandssprang er en hydraulisk analogi til sjokkbølger i gasser. En benytter derfor noen ganger betegnelsen *hydraulisk sjokk* om vannstandsspranget.

Tillegg A

Trykkenheter

Enhet for trykk i SI-systemet er i Pa (pascal) = N/m^2 (Newton pr. kvadratmeter). Foruten denne enheten finnes det en rekke andre enheter. De viktigste er :

- 1 fysisk atmosfære (atm) = $1.0133 \cdot 10^5 N/m^2$
- 1 teknisk atmosfære (at) = $1 kp/cm^2 = 0.8907 \cdot 10^5 N/m^2$
- 1 bar = 10^3 millibar (mb) = $10^5 N/m^2$
- 1 millimeter kvikksølvhøyde (mm Hg) = 1 Torr = $1.3332 \cdot 10^2 N/m^2$
- 1 millimeter vannsøyle (mm Vs) = $9.8067 N/m^2$
- 1 psi (pound pr. square inch) = $6.8948 \cdot 10^3 N/m^2$

Sammenhengen mellom noen av trykkenhetene fremgår dessuten fra tabellen.

	N/m^2	bar	atm	Torr
$1 N/m^2$	1	10^{-5}	$0.9869 \cdot 10^{-5}$	$0.75006 \cdot 10^{-2}$
1 bar	10^5	1	0.9869	750.06
1 atm	$1.0133 \cdot 10^5$	1.0133	1	760
1 Torr	$1.3332 \cdot 10^2$	$1.3332 \cdot 10^{-3}$	$1.3158 \cdot 10^{-3}$	1

Bibliografi

- [1] Farmer, D.M. & Freeland, H.J. (1983), The Physical Oceanography of Fjords. Progr. in Oceanography 12, 2, 147–215.
- [2] GARP publication (1980), Orographic effects in planetary flows. GARP-publ. series No. 23 WMO, Geneva.
- [3] Gill, A.E. (1982), Atmosphere–Ocean Dynamics. Academic Press, London.
- [4] Gjertveit, E. (1971), Numerical calculations of long periodic oscillations at two Norwegian harbours. Proc. Sec. Int. Conf. Port Ocean Eng., Arctic Conditions, Vol. II, 751–771.
- [5] Gjevik, B. og Høst, S.E. (1984), Langkammede indre bølger i Skagerrak. Naturen 6, 209–214.
- [6] Gjevik, B., Lygre, A. & Krogstad, H.E. (1984), Ocean swell on the Norwegian continental shelf. Report 6201/1/84 IKU, Oceanographic Center, Trondheim, Norway.
- [7] Gjevik, B. (1981), Innføring i fluidmekanikk. Forelesninger, Matematisk institutt, Universitetet i Oslo.
- [8] Kinsman, B. (1965), Wind waves. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [9] Lamb, H. (1932), Hydrodynamics, Sixth edition, Dover Publications, New York.
- [10] Lighthill, J. (1978), Waves in fluids. Cambridge University Press, London.
- [11] Miles, J.W. (1974), Harbor seiching. Ann. Rev. Fluid Mech. Vol. 6, Annual Reviews Inc. Palo Alto, California.
- [12] Miles, J.W. (1969), Waves and wave drag in stratified flows. Proc. 12th Intern. Congr. Appl. Mech., Stanford University 26–31 August 1968.

- [13] Mørk, G., Gjevik, B. & Holte, S. (1979), Generation and propagation of long internal waves in Mjøsa. Innsjøers dynamikk. Intern report nr. 2, Norsk Hydrologisk komite, Oslo.
- [14] Newman, J.N. (1977), Marine Hydrodynamics. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- [15] Palm, E. (1953), On the formation of surface waves in a fluid flowing over a corrugated bed and on the development of mountain waves. *Astrophys. Norwegica*, V, 3, 61–130.
- [16] Peregrine, D.H. (1976), Interaction of Water Waves and Currents. *Adv. Appl. Mech.*, 16, 9–17.
- [17] Rottmann, K. (1960), *Mathematische Formelsammlung*.
- [18] Stoker, J.J. (1957), *Water Waves*, Interscience Publishers Inc., New York.
- [19] Thorpe, S.A., Hall, A. & Crofts, I. (1972), The internal surge in Loch Ness. *Nature* 237, No. 5350, 96–98.
- [20] Tolstoy, I. (1973), *Wave propagation*, McGraw-Hill, New York.
- [21] Viggoson, G. & Rye, H. (1971), Long periodic oscillations in Sørvær harbour, Finnmark, Norway.
- [22] Whitham, G.B. (1974), *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons, New York.

Register

anisotrop, 9

bølgelengde, 7

bølgetall, 7

bølgetallsvektor, 7

dispersiv, 9

dispersjonsløs, 8

dispersjonsrelasjon, 9

dynamisk grenseflatebetingelse, 14

faseflate, 7

fasefunksjon, 7

fasehastighet, 8

frekvens, 7

ikke-dispersiv, 8

isotrop, 9

kapillar-tyngdebølger, 11

kapillarbølger, 11

kinematisk grenseflatebetingelse, 14

krumningsradius, 13

overflatespenning, 13

periode, 7

superposisjonsprinsippet, 8

tyngdebølger, 11

vinkelhastighet, 7