# Gamle eksamener Me207

October 7, 2014

## ME 207, fredag 17. desember, 1993. 6 timer.

**Ex. 1** ***Dimensjonsanalyse.***
En todimensjonal turbulent jet (stråle) dannes ved at væske strømmer ut av en spalte og inn i en omkringliggende væske. Væskene har samme tetthet, $\rho$, derfor er systemet *ikke* påvirket av tyngden. Utstrømningen er karakterisert ved en momentumfluks pr. lengde, $I$, som har dimensjon masse/tid$^2$. Spaltens bredde er $a$ og væskenes kinematiske viskositetskoeffisienter, som også er like, betegnes med $\nu$ (dimensjon lengde$^2$/tid). Videre er $U_m$ væskehastigheten midt i jeten, $y = 0$, mens $b$ er jetens bredde.

a) Vi begrenser oss til å diskutere mulige variasjoner med $x$. Sett i denne forbindelse opp et fullstendig sett av dimensjonsløse tall fra de oppgitte variable:

$$a, \quad I, \quad \nu, \quad x, \quad \rho\,.$$

b) Vi antar nå at $a$ og $\nu$ er små slik at disse størrelsene ikke inngår i uttrykkene for $U_m$ og $b$. Finn hvordan $U_m$ og $b$ varierer med $x$. Ta utgangspunkt i oppgave 1a og angi mer presist hva små $a$ og $\nu$ betyr.

**Ex. 2** ***Grensesjikt.***
Vi har gitt randverdiproblemet:

$$\varepsilon y'' + x^2 y' - y = 0\,, \qquad y(0) = y(1) = 1$$

der $\varepsilon \to 0^+$.

a) Finn den ytre løsningen og forklar hvorfor vi må ha et grensesjikt ved $x = 0$.

b) Finn ordnen av grensesjiktstykkelsen, den indre løsningen og den uniforme løsning. Lag en skjematisk skisse av den uniforme løsningen.

**Ex. 3** ***Svingende vannsøyle.***

En dimensjonsløs modelllikning for en oscillerende vannsøyle kan skrives:

$$(1+\Delta)\ddot{\Delta} + \tfrac{1}{2}\dot{\Delta}^2 + \Delta = 0 \tag{1}$$

der $\Delta$ er væskehøyden over middelvannstand i vannsøylen.

a) Diskuter kritiske punkt for ligningen.

b) Ligningen kan utvikles fra Hamiltons prinsipp med Lagrangefunksjonen:

$$L = \tfrac{1}{2}(1+\Delta)\dot{\Delta}^2 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 \tag{2}$$

Vis dette og finn førsteintegralet for ligning (1).

c) Drøft mulige kurver i faseplanet og vis at periodiske løsninger av ligning (1) bare kan forekomme for

$$|\Delta| \le 1 \qquad \text{og} \qquad |\dot{\Delta}| \le \sqrt{2}\,.$$

**Ex. 4** ***Poincaré-Lindstedts metode.***

Vi har gitt samme likning som i oppgave 3:

$$(1+\Delta)\ddot{\Delta} + \tfrac{1}{2}\dot{\Delta}^2 + \Delta = 0$$

a) Innfør $\Delta = \varepsilon \cdot Y$, der $0 < \varepsilon \ll 1$ og $Y = O(\varepsilon^0)$, i ligningen over. Finn $Y$, samt oscillasjonsfrekvensen, til og med orden $\varepsilon$ ved hjelp av Poincaré-Lindstedts metode.

b) Utvid løsningen under a) til å omfatte bidrag av orden $\varepsilon^2$.

HVIS TIDEN TILLATER. (BØR UTSETTES TIL RESTEN AV EKSAMENSSETTET ER LØST).

## ME 207, Onsdag 15. juni, 1994, 6 timer

**Ex. 1** ***Dimensjonsanalyse.***

I visse parameter-områder vil det oppstå periodisk virvelavløsning bak en sylinder som står i en strøm. Vi kaller den tilhørende frekvensen for $\omega$ slik at listen av parametere kan skrives:

$$\nu \quad r \quad \omega \quad U \tag{1}$$

der $r$ er sylinderens radius, $U$ er væske-hastigheten langt oppstrøms for sylinderen og $\nu$ er viskositetskoeffissienten (dimensjon: $L^2/T$). Finn et komplett sett av dimensjonsløse tall og angi hvordan $\omega$ kan avhenge av de øvrige parametere.

**Ex. 2** ***Ordinær perturbasjonsutvikling.***

Vi har gitt en likning for $x$:

$$\frac{1}{K+x} = \sin x \tag{2}$$

der $K$ er en positiv parameter. Likningen (2) har et uendelig antall løsninger. Vi skal konsentrere oss om den minste positive løsningen for store verdier av $K$.

**a** Det er lett å se at $x \to 0$ når $K \to \infty$. Vis dette og finn den ledende tilnærmelse til $x$.

**b** Finn neste tilnærmelse til $x$ ved en perturbasjons-utvikling.

**Ex. 3** ***Toskala-utvikling.***

En dempet harmonisk oscillator er styrt av likningen:

$$m\ddot{x} + Cx^2\dot{x} + kx = 0 \tag{3}$$

der $m$ er systemets masse, $x$ er posisjonen, $k$ en fjærkonstant og $C$ en dempnings-koeffissient. Vi har videre gitt initialbetingelsene:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \tag{4}$$

**a** Gjør problemet dimensjonsløst slik at likningene (3) og (4) transformeres til:

$$u_{ss} + \epsilon u^2 u_s + u = 0 \tag{5}$$

$$u(0) = 1, \quad u_s(0) = 0 \tag{6}$$

der indeks betegner derivasjon, $s$ er dimensjonsløs tid, $u$ er dimensjonsløs posisjon og $\epsilon$ skal bestemmes. Begrunn valget av skalering. Diskuter betingelsen for at dempningsleddet er lite.

**b** Vi søker en tilnærmelse til løsningen av systemet i punkt (a) ved en toskala-utvikling for små $\epsilon$. Finn den ledende tilnærmelsen og dennes variasjon på den langsomme tidsskalaen.

**Ex. 4** ***Variasjonsregning.***

Funksjonalen $J$ er definert ved:

$$J(u) = \int\int_\Omega (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - a\int_0^{\sqrt{2}} u(1 - s/\sqrt{2}, s/\sqrt{2})\mathrm{d}s \tag{7}$$

der $a$ er en konstant, indekser står for partiell derivasjon og området $\Omega$ er trekanten med hjørner (x=0,y=0), (x=1,y=0) og (x=0,y=1). Det siste integralet i (7) har tolkning som et kurveintegral langs hypotenusen av trekanten, med $s$ som buelengde.

**a** Vi krever nå at $u$ skal være i mengden av alle to ganger differensierbare funksjoner som er null for $x = 0$ og $y = 0$ ( katetene i $\Omega$). Finn den $u$ som gir ekstremum for $J$.

*hint:* Løsningen kan skrives som et polynom av andre grad.

**b** Vis at løsningen fra punkt (a) gir et minimum for $J$.

## Me207, fredag 16. juni, 1995, 6 timer

Vi skal i dette oppgavesettet studere matematiske problemer relatert til stasjonær varmetransport i en strømmende væske. Definisjonsområdet er $\Omega = \{(x, y) \,|\, 0 \le x, y \le L\}$. Temperaturfeltet $\hat{T}(x, y)$ er lik $T_0$ for $x = 0$ og $T_1$ for $x = L$, der $T_1 < T_0$. Foreløpig antas $\partial T/\partial n = 0$ på $y = 0$ og $y = L$ ($\partial T/\partial n \equiv \nabla T \cdot \vec{n}$, der $\vec{n}$ er en utadrettet enhetsnormal til randen). Varmetransporten skjer dels ved at væsken strømmer med konstant hastighet $U$ i positiv $x$-retning og dels ved (isotrop) molekylær diffusjon der diffusjonskoeffisienten betegnes med $k$. Vi vil arbeide med $T = \hat{T} - T_1$ som primærukjent og definerer $\Delta T = T_0 - T_1$. Randverdiproblemet for $T$ blir da

$$
\begin{aligned}
U\frac{\partial T}{\partial x} &= k\nabla^2 T \quad \text{i } \Omega && (1)\\
T &= \Delta T \quad \text{for } x = 0 && (2)\\
T &= 0 \quad \text{for } x = L && (3)\\
k\frac{\partial T}{\partial n} &= 0 \quad \text{for } y = 0, L && (4)
\end{aligned}
$$

Her har $T$ dimensjon temperatur og $k$ har dimensjon lengde$^2$/tid.

**Ex. 1** ***Dimensjonsanalyse.***

a) Anta at løsningen av (1)–(4) er entydig. Vis at $T$ er uavhengig av $y$.

b) Bruk dimensjonsanalyse til å etablere hvordan $T$ kan variere med parameterne $U$, $L$, $k$, $\Delta T$ og $x$.

c) Skaler randverdiproblemet (1)–(4) og bruke dette til å kontrollere resultatet i b).

**Ex. 2** ***Perturbasjonsmetoder.*** Det skalerte randverdiproblemet fra oppgave 1c) kan skrives

$$y'(\xi) = \epsilon y''(\xi), \quad y(0) = 1,\ y(1) = 0 \tag{5}$$

der $y$, $\xi$ og $\epsilon > 0$ er dimensjonsløse størrelser. Vi skal nå anta at $\epsilon \ll 1$.

a) Løs (5) ved hjelp av grensesjiktsteori.

b) Løs (5) ved en to-skala-utvikling:

$$y(\xi) \approx Y_0(\xi, \eta) + \epsilon Y_1(\xi, \eta)$$

der $\eta = \xi/\epsilon$.

c) Kommenter nøyaktigheten av resultatene i oppgave a) og b). Under hvilke fysiske forhold er nøyaktigheten god?

**Ex. 3** ***Variasjonsregning.***

a) Hvis hastigheten $U$ er liten, kan vi neglisjere leddet $U\partial T/\partial x$ i (1). Uttrykk mer presist hva denne antagelsen innebærer. Under forutsetningen av at temperaturfeltet kun varierer med $x$ skal en finne en funksjonal hvis stasjonærpunkt impliserer (1). (Hint: Forsøk med en funksjonal der temperaturgradienten kvadreres og integreres over definisjonsområdet).

b) Vi endrer nå randbetingelsen ved $y = 0$ slik at $-k\partial T/\partial n$ har en foreskrevet verdi forskjellig fra null. Temperaturfeltet vil da avhenge av både $x$ og $y$. Forstatt antar vi at leddet $U\partial T/\partial x$ kan neglisjeres. Finn en funksjonal for dette randverdiproblemet.

## ME 207, mandag 17. juni 1996, 6 timer

Ved sensur har hver av punktene 1a og 2a vekt én mens de resterende punktene (1b, 1c, 1d, 1e, 1f, 1g, 2b, 2c og hele oppgave 3) hver har vekt to.

**Ex. 1 .**

Vi skal studere den matematiske modellen

$$m\ell\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + mg\sin x = 0,\ t > 0, \quad x(0) = A,\ \frac{dx}{dt}(0) = 0. \tag{1}$$

(a) Gi et eksempel på et fysisk problem der (1) er en relevant modell, og gi en kort fysisk tolkning av parameterne $m$, $x$, $\mu$, $g$ og $A$.

(b) Bruk dimensjonsanalyse til å etablere at

$$x = x(A, t\sqrt{g/\ell}, \mu/m\sqrt{g\ell}).$$

(c) Anta at vi er primært interessert i å studere fenomener der $A$ er liten og der leddet $\mu dx/dt$ er lite. Formuler en skalert, approksimativ versjon av problemet i (1) under disse antagelsene.

(d) Vi skal nå arbeide med den dimensjonsløse, lineariserte modellen

$$\bar{x}''(\bar{t}) + 2\epsilon\bar{x}'(\bar{t}) + \bar{x}(\bar{t}) = 0, \quad \bar{x}(0) = 1,\ \bar{x}'(0) = 0, \quad 0 < \epsilon \ll 1 \tag{2}$$

Vis at Poincaré-Lindstedts metode ikke fører frem i dette problemet (demonstrer dette bare ved å studere likninger til orden $\epsilon^0$ og $\epsilon^1$).

(e) Løs problemet (2) ved en to-skala metode.

(f) Vurder nøyaktigheten i amplitude og fase til løsningen funnet i oppgave 1e.

(g) Vi skal nå anta at $\mu$-leddet i (1) er tilstrekkelig lite til at det kan utelates fra differensiallikningen. Det vil si at vi studerer likningen

$$m\ell\frac{d^2x}{dt^2} + mg\sin x = 0 \tag{3}$$

Finn en funksjonal hvis ekstrempunkt gir differensiallikningen (3) og gi en fysisk tolkning av hvert av leddene i integranden i funksjonalen.

**Ex. 2 .**

Vi skal nå betrakte modellen

$$m\ell\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+mgx=0,\ t>0,\quad x(0)=0,\ m\frac{dx}{dt}(0)=I. \tag{4}$$

(a) Beskriv kort et fysisk problem der dette er en relevant matematisk modell og gi spesielt en tolkning av størrelsen $I$.

(b) Vi skal nå skalere problemet (4) for det tilfellet hvor leddet $m\ell d^2x/dt^2$ er lite. Finn en passende tids- og lengdeskala og utfør skaleringen. (Hint: En mulig metode er å observere at ved en karakteristisk tid kan vi neglisjere $m\ell d^2x/dt^2$ mens en karakteristisk lengde opptrer for små $t$ der leddene $m\ell d^2x/dt^2$ og $\mu dx/dt$ balanserer hverandre.)

(c) Problemet (4) kan gis følgende dimensjonsløse formulering:

$$\epsilon\bar{x}''(\bar{t})+\bar{x}'(\bar{t})+\bar{x}(\bar{t})=0,\quad \bar{x}(0)=0,\ \bar{x}'(0)=\epsilon^{-1}, \tag{5}$$

der $\epsilon$ er en dimensjonsløs parameter. Anta at $\epsilon \ll 1$. Løs problemet (5) ved hjelp av grensesjiktsteori.

**Ex. 3 .**

Gitt funksjonalen

$$J(w)=\int_0^\gamma\left[\frac{1}{2}\alpha(x)\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2-w(x)f(x)\right]dx$$

der $w(0)=w'(0)=0$. Finn randverdiproblemet som $w$ oppfyller når $\delta J=0$.

# ME 207, mandag 16. juni 1997, 6 timer

Ved sensur har oppgavene 1, 2 og 3 vekt 2, 3 og 4, henholdsvis. Delspørsmålene i oppgave 1 og 3 får alle samme vekt (vekt = 1).

**Ex. 1 .**

Under utprøving (modellforsøk) av en båtmodell finner man at motstanden $F$ på båten kan skrives som,

$$F=f(\rho,U,\nu,g,L) \tag{1.1}$$

der $F$ er målt i $N$, $\rho$ er væskens tetthet i kg/m$^3$, $U$ er hastigheten båten kjøres med gitt i m/s, $\nu$ er væskens kinematiske viskositet i m$^2$/s og $L$ er lengden av båten i m.

a) Sett opp dimensjonsmatrisen og finn en dimensjonsløs formulering av motstandsloven (1.1).

Det bygges en båt i full skala som er 9 ganger lengre enn modellbåten. Under en prøvetur kjøres full-skala-båten under betingelser som gjør at størrelsene $N_1=\frac{UL}{\nu}$ og $N_2=\frac{U^2}{gL}$ antar de samme numeriske verdier som i et av modellforsøkene. Væsketettheten $\rho$ og tyngdens akselerasjon $g$ hadde begge de samme verdier under nevnte prøvetur som i modellforsøkene.

b) Finn motstanden på full-skala-båten under prøveturen når motstanden på modellbåten i det sammenliknbare modellforsøket var $2N$.

**Ex. 2 .**

Et fysisk fenomen som utvikler seg i området $r \geq 1$, er beskrevet ved likningen,

$$\varepsilon\left(\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du(r)}{dr} - \frac{u(r)}{r^2}\right) + \varepsilon^2 u^2(r) + e^{-\frac{r-1}{\sqrt{\varepsilon}}} = 0 \tag{2.1}$$

der $\varepsilon \ll 1$. Grensebetingelsene er,

$$\left.\begin{array}{l} u(1) = 0 \\ \left|u(r)\right|_{r\to\infty} < \infty \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

Finn en uniformt gyldig asymptotiske løsning av (2.1) til ledende orden når $\varepsilon \to 0$ og randbetingelsene (2.2) skal være oppfylt.

**Ex. 3 .**

En funksjonal er gitt som,

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} L(y, y')dx \tag{3.1}$$

der $y = y(x)$.

a) Vis at et første-integral av Eulers likning, assosiert med ekstremalisering av $J(y)$, er bestemet ved,

$$L(y, y') - y'\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = A_0 \tag{3.2}$$

der $A_0$ er en konstant.

I et inhomogent optisk medium varierer brytningsindeksen $n(y)$ i et område $|y| < B$ som,

$$n(y) = \sqrt{4 - \tfrac{4}{\sqrt{5}}(\tfrac{y}{B})^2 + (\tfrac{y}{B})^4} \tag{3.3}$$

Lyshastigheten $c$ i mediet, er gitt som

$$c = \frac{c_0}{n(y)} \tag{3.4}$$

der $c_0$ er lyshastigheten i vakuum.

En lysstråle sendes ut fra punktet (0,0) i retningen (2,1) referert til et $(x, y)$-koordinatsystem.

b) Finn differensiallikningen som bestemmer strålens gang i mediet.

c) Finn strålens gangvei (path) i mediet.

d) Finn strålens $y$-koordinat og retning når $x \to \infty$. Skisser strålens gangvei i mediet.

Merk: $\int \frac{dz}{a^2 - b^2z^2} = \frac{1}{ab}\tanh^{-1}(\frac{bz}{a})$, forutsatt $b^2z^2 < a^2$.

| $\eta$ | 0 | 0,500 | 1,00 | 2,00 | 4,00 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tanh\eta$ | 0 | 0,462 | 0,762 | 0,964 | 0,999 | 1 |

## ME 207, tirsdag 16. juni 1998, 6 timer.

Oppgave 1, 2, 3 og 4 har vekt 15% , 30% , 20% , 35% , h.h.v..

**Ex. 1 .**

En kule av fast stoff og med diameter $D(m)$ synker, på grunn av tyngden, med konstant hastighet $U(\mathrm{m/s})$ i en væskefylt beholder. Beholderen er så stor at dens vegger ikke har noen innflytelse på synkehastigheten. Det faste stoffet har tettheten $\rho_s(\mathrm{kg/m^3})$ mens væsken har tettheten $\rho_f(\mathrm{kg/m^3})$. Væskens skjærviskositet er $\mu_f(\mathrm{kg/m\cdot s})$, og tyngdens akselerasjon er $g(\mathrm{m/s^2})$.

a) Bestem et fullstendig sett av dimensjonsløse variable $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ for relasjonen

$$\pi_1 = \phi(\pi_2, \ldots, \pi_n)$$

Beholderen bringes opp i et romskip der tyngens akselerasjon $g_s = \frac{1}{18}g$. De andre fysiske parametrene nevnt overfor forblir uforandret.

b) Hvor stor blir synkehastigheten til kula under de forhold som råder i romskipet sammenliknet med synkehastigheten under de forhold som først ble nevnt?

**Ex. 2 .**

Likningen

$$\varepsilon\ddot{y}(t) + (1+t)\dot{y}(t) + (1-t^2)y(t) = 0 \tag{2.1}$$

med randbetingelser

$$y(0) = 1 \tag{2.2}$$

$$y(1) = \sqrt{e} \tag{2.3}$$

er gitt

a) Finn v.h.a. grensesjektsteori en første ordens tilnærming til løsningen av (2.1) med de gitte randverdier.

Likning (2.1) modifiseres til

$$\varepsilon\ddot{y}(t) - (1+t)\dot{y}(t) + (1-t^2)y(t) = 0 \tag{2.4}$$

mens randbetingelsene forblir uforandret

b) Hvor vil et eventuelt grensesjikt befinne seg nå?

c) Finn en ledende ordens tilnærming til løsningen av (2.4) med randkrav (2.2) og (2.3).

**Ex. 3 .**

Likningen

$$\ddot{u}(t) + \varepsilon u(t)\dot{u}(t)^2 + u(t) = 0 \tag{3.1}$$

med randbeingelser

$$u(0) = 1 \tag{3.2}$$

$$\dot{u}(0) = 0 \tag{3.3}$$

Finn $u(t)$ og oscillasjonsfrekvensen til og med orden $O(\varepsilon)$.

**Ex. 4 .**

Et fleksibelt tau er opphengt i posisjonene $(-1, y_1)$ og $(1, y_1)$. Tauet har lengden $l$ og er akkurat så langt at $y(x)|_{x=0} = 0$, der $y = y(x)$ er den kurveform tauet antar når det henger fritt i tyngdefeltet på nevnte måte. Tauets massetetthet er $\rho(\,\mathrm{kg/\,m})$ og tyngdens akselerasjon er $g(\,\mathrm{m/\,s^2})$. Tauet vil anta den kurveform som gir det minimum potensiell energi under de rand- og føringskrav som gjelder.

a) Vis at,

$$(\rho g y(x) + \lambda)\left(\sqrt{1 + y'(x)^2} - \frac{y'(x)^2}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}\right) = C \tag{4.1}$$

hvor $\lambda$ er en Lagrange-multiplikastor og $C$ er en integrasjonskonstant, er en nødvendig betingelse for at ovennevnte ekstremverdi skal inntreffe.

b) Finn $y = y(x)$.

c) Sett Lagrange-multiplikatoren $\lambda = \rho g$ og bestem integrasjonskonstantene. (Merk symmetrien $y(x) = y(-x)$.)

d) Finn tauets lengde $l$.

## ME 207 lørdag 17. juni 2000, 6 timer.

Oppgavene 1, 2, 3 og 4 gis hver vekt 22. Oppgave 5 gis vekt 12.

**Ex. 1 .**

a) Skriv ned Pi-teoremet.

b) Forklar hva det vil si at en fysisk lov er enhetsfri.

En vanndråpe med typisk diameter $d(m)$ synker under påvirkning av tyngdefeltet i en stor tank fylt med olje. Synkehastigheten $U$ (m/s) er konstant, og det finnes en relasjon

$$U = F(\rho_v, \rho_o, \mu_v, \mu_o, \sigma, d, g) \tag{1.1}$$

der

$\rho_v(\mathrm{kg/m^3})$ er vannets massetetthet
$\rho_o(\mathrm{kg/m^3})$ er oljens massetetthet
$\mu_v(\mathrm{kg/ms})$ er vannets dynamiske viskositet
$\mu_o(\mathrm{kg/ms})$ er oljens dynamiske viskositet
$\sigma(N/m)$ er overflatespenningskoeffisienten
$g(\mathrm{m/s^2})$ er tyngdens akselerasjon

c) Finn et fullstendig sett av dimensjonsløse variable assosiert med (1.1) og skriv ned en dimensjonsløs formulering av (1.1).

**Ex. 2 .**

To fysiske prosesser $u(\tau)$ og $v(\tau)$ vekselvirker og utvikler seg i tid på en slik måte at de kan beskrives med differensiallikningene

$$u''(\tau) + u(\tau) - \varepsilon u'(\tau)v'(\tau) = 0 \tag{2.2}$$
$$v'(\tau) + v(\tau) = u^2(\tau) \tag{2.3}$$

som er gitt på dimensjonsløs form. Initialvilkårene er

$$u(0) = 1 \tag{2.4}$$
$$u'(0) = \sqrt{\varepsilon} \tag{2.5}$$
$$v(0) = 0 \tag{2.6}$$

Det søkes en perturbasjonsløsning på formen

$$u = \alpha_0(\varepsilon)u_0(\tau) + \alpha_1(\varepsilon)u_1(\tau) + \cdots \tag{2.7}$$
$$v = \beta_0(\varepsilon)v_0(\tau) + \beta_1(\varepsilon)v_1(\tau) + \cdots \tag{2.8}$$

der $\alpha_m(\varepsilon)$ og $\beta_n(\varepsilon)$ er asymptotiske følger.

Finn $\alpha_0(\varepsilon), \alpha_1(\varepsilon), u_0(\tau)$ og $u_1(\tau)$, samt $\beta_0(\varepsilon), \beta_1(\varepsilon), v_0(\tau)$ og $v_1(\tau)$.

**Ex. 3 .**

Et fysisk fenomen er beskrevet med differensiallikningen,

$$\varepsilon u''(t) + \frac{1}{1+t}y'(t) + \varepsilon^2 y^3(t) - \frac{t}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t}{\varepsilon}} = 0 \tag{3.9}$$

med randbetingelsene

$$y(0) = 0 \tag{3.10}$$
$$|y(t)|_{t\to\infty} \to 0 \tag{3.11}$$

a) Finn ledende ordens ytre og indre løsninger, og konstruer ved hjelp av disse en uniformt gyldig løsning.

b) Finn differensiallikningen for annen ordens leddet $O(\varepsilon)$ i den indre løsningen.

**Ex. 4 .**

En partikkel med masse $m$ beveger seg i $(xy)$-planet under påvirkning av potensialet

$$V = ax^2 + by^2 \tag{4.12}$$

der $a > 0$, og $b > 0$.

Partikkelens hastighet er

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\dot{x}(t) + \boldsymbol{j}\dot{y}((t) \tag{4.13}$$

der $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$ er enhetsvektorer i $x$- og $y$-retningen, h.h.v. .

a) Finn Lagrange-funksjonen for partikkelens bevegelse.

b) Finn bevegelseslikningene for partikkelen.

Partikkelens bevegelse startes ved at

$x(0) = A > 0$
$\dot{x}(0) = 0$
$y(0) = 0$
$\dot{y}(0) = B > 0$

c) Finn partikkelbevegelsen $x(t), y(t)$ og skisser partikkelbanen i $(x, y)$-planet.

**Ex. 5 .**

La funksjonalen

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y')dx \tag{5.14}$$

være gitt, og hvor $y = y(x) \in C^2[a, b]$ med følgende krav

$$y(a) = y_0 \tag{5.15}$$

$$y(b) \quad \text{uspesifisert} \tag{5.16}$$

La $y$ gi et lokalt minimum i $J(y)$.

Finn differensiallikningen $y(x)$ da må tilfredsstille (Euler-likningen) og den naturlige randbetingelsen for problemet.

## ME 207 fredag 15. juni 2001, 6 timer

**Ex. 1 .**

Strømningsmotstanden på et fly er gitt som

$$F = f(\rho, \mu, U, L, B, c) \tag{1.1}$$

der $\rho$ er atmosfærens massetetthet, $\mu$ atmosfærens dynamiske viskositet, $U$ flyets hastighet, $L$ flyets lengde, $B$ er et mål for flyets bredde, mens $c$ er lydhastigheten i atmosfæren. Dimensjonene er uttrykt med måleenhetene for de grunnleggende dimensjoner:

$$\begin{array}{lll} [F] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}, & [\rho] = \text{kg/ m}^3, & [\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{m s}}, \\ [U] = \frac{\text{m}}{\text{s}}, & [L] = \text{m}, & [B] = \text{m}, \\ [c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}. & & \end{array}$$

a) Sett opp dimensjonsmatrisen og finn et fullstendig sett av dimensjonsløse variable for relasjonen (1.1)

Det utføres modellforsøk i en vindtunnel med spesiell atmosfære. Modellflyet er geometrisk likedannet med flyet i full skala. Kraften $F_M$ som virker på flymodellen i forsøkene uttrykkes dimensjonsløst ved

$$\pi_1 = \frac{F_M}{\rho_M U_M^2 B_M^2}$$

der målinger gir $F_M = 100\,N$. Ellers gjelder:

$$\rho_M = 5\rho_N\,, \quad U_M = \frac{1}{4}U_N\,, \quad B_M = \frac{1}{5}B_N$$

der subskrift $M$ indikerer verdier i modellforsøkene, og subskrift $N$ indikerer verdier under full-skala-forhold. Betingelsene under forsøket er ellers slik at Reynoldstallet ($R_M = \frac{\rho_M U_M L_M)}{\mu_M}$) i forsøket har samme numeriske verdi som under de full-skala-forhold forsøksresultatene skal være direkte sammenliknbare med.

b) Finn $\frac{\mu_M}{\mu_N}$, $\frac{L_M}{L_N}$ og $\frac{c_M}{c_N}$.

c) Finn kraften $F_N$ på flyet under nevnte full-skala-forhold.

**Ex. 2 .**

En pendel bestående av en masseløs uelastisk stang med lengde $\ell$ og en kule med masse $m$ er opphengt i punktet $P$. Pendelen startes ved tiden $t = 0$ ved at den slippes fra utslaget $\varepsilon$. Det vil si initialvilkårene er

$$\theta(t=0) = \varepsilon, \frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=0} = 0$$

a) Vis at likningen som beskriver utslaget $\theta(t)$ er

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta(t) \tag{2.2}$$

Det forutsettes at $0 < \varepsilon \ll 1$. Da er en perturbasjonsutvikling

$$\theta(t; g; \ell; \varepsilon) = \alpha_0(\varepsilon)\theta_0(\tau) + \alpha_1(\varepsilon)\theta_1(\tau) + \cdots \tag{2.3}$$

der

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,(1 + \beta_1(\varepsilon) + \cdots)t \tag{2.4}$$

av løsningen av (2.3) mulig.

b) Finn $\alpha_0(\varepsilon)$ og $\theta_0(\tau)$.

c) Finn videre $\alpha_1(\varepsilon), \beta_1(\varepsilon)$ samt $\theta_1(\tau)$.

Løsningen forutsettes regulær til alle tider. Det vil si

$$|\theta(\tau;\varepsilon)| < \infty\ ; \qquad 0 \leq \tau < \infty\ .$$

**Ex. 3 .**

Et diffusjonsfenomen er beskrevet med likningen

$$\frac{d}{dr}\Big[(\varepsilon + \varepsilon^2 F(r,\varepsilon))\frac{dF}{dr}\Big] + \frac{\varepsilon + \varepsilon^2 F(r,\varepsilon)}{r}\frac{dF}{dr} + e^{-\frac{r-1}{\sqrt{\varepsilon}}} = 0 \tag{3.5}$$

og randbetingelse

$$F(0,\varepsilon) = 0 \tag{3.6}$$

samt regularitetskrav:

$$|F(r,\varepsilon)|_{r\to\infty} < \infty \tag{3.7}$$

forutsatt:

$$0 < \varepsilon \ll 1, \quad r \geq 1$$

En skal her finne en approksimativ løsning til likning (3.1) ved en ytre og en indre asymptotisk utvikling. Likning (3.1) antaes gitt på dimensjonsløs form.

a) Finn de to ledende ledd i de nevnte asymptotiske utviklinger (to ledd i indre, og to ledd i ytre).

b) Konstruer en uniformt gyldig løsning ved hjelp av løsningen funnet som svar på spørsmål a).

**Ex. 4 .**

La $y = y(x)$ gi et lokalt minimum i funksjonalen

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y')dx \tag{4.8}$$

der

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$

og $y(x) \in C^2[a, b]$.

a) Vis at

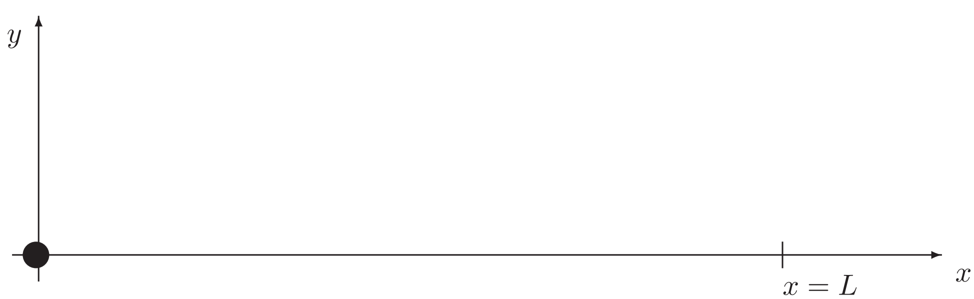
$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial L}{\partial y'}\Big) = 0 \tag{4.9}$$

er et nødvendig krav for et slikt minimum.

b) La så $L = L(y, y')$ og vis nå at

$$L(y, y') - y'\Big(\frac{\partial L}{\partial y'}\Big) = C \ \ \text{(konstant)} \tag{4.10}$$

er et nødvendig krav for et slikt minimum.




Figur 4.1 viser gjenstand ● i posisjonen $(0, 0)$. Sluttposisjonen $(L, 0)$ er også avmerket.

På et plant, horisontalt golv ligger en gjenstand i posisjonen $x = 0$, $y = 0$ (se figur 4.1). Gjenstanden skal skyves langs golvet til posisjonen $x = L$, $y = 0$. Friksjonskraften mellom golvet og gjenstanden er hele tiden motsatt rettet den øyeblikkelige bevegelsesretningen. Friksjonskraftens størrelse (skalarverdien) er gitt ved

$$F(y) = (a^2 - \kappa^2 y^2)^{1/2} \tag{4.11}$$

hvor $a$ og $\kappa$ er konstanter slik at

$$F(y) > 0$$

i det aktuelle $y$-området.

c) Finn de kurver $y = y(x)$ som tilfredsstiller nødvendige betingelser for at friksjonsarbeidet som utføres under forflytningen fra (0,0) til $(L, 0)$ skal bli minimalt.

## ME 207, fredag 14. juni 2002, 6 timer.

**Ex. 1 .**

a) Skriv ned Pi-teoremet.

b) Forklar hva det vil si at en fysisk lov er enhetsfri (unit free).

I en stratifisert gass/væske strømning i et sirkulært rør med diameter $D(m)$, strømmer et væskelag med massestrømningsrate $Q_\ell$(kg/s) og over dette et gasslag med massestrømningsrate $Q_g$(kg/s). Væsken har viskositet $\nu_\ell$(m$^2$/s) og tettheten $\rho_\ell$(kg/m$^3$). Gassen har viskositet $\nu_g$(m$^2$/s) og tetthet $\rho_g$(kg/m$^3$). Overflatespenningskoeffisienten i skilleflaten mellom væske og gass er $\sigma$(kg/s$^2$). Tyngdens akselerasjon er $g$(m/s$^2$). For visse strømningsrater oppstår det bølger med bølgelengde $\lambda$ (m) på væskeoverflaten. Bølgelengden er funksjon av strømningsparametre og fluidegenskaper slik at

$$\lambda = F(Q_\ell, \rho_\ell, \nu_\ell, Q_g, \rho_g, \nu_g, g, \sigma, D) \tag{1.1}$$

c) Sett opp dimensjonsmatrisen og bestem et fullstendig sett av dimensjonsløse variable. Angi deretter en ekvivalent dimensjonsløs formulering av (1.1)

**Ex. 2 .**

Finn approksimative løsninger for $u(t)$ og $v(t)$ for $t \geq 0$ fra følgende likningssystem

$$\begin{aligned} \tfrac{du}{dt} &= v \\ \varepsilon \tfrac{dv}{dt} &= -u^2 - v \end{aligned}$$

med initialkravene

$$u(0) = 1, \quad v(0) = 0$$

forutsatt $0 < \varepsilon \ll 1$. Regn ut ledd til og med orden $O(\varepsilon)$.

**Ex. 3 .**

Finn de to første leddene i en perturbasjonsutvikling av løsningen av $y(t)$ for $t \geq 0$ fra følgende likning

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon y^3 \tag{3.2}$$

med initialkrav

$$y(0) = 1, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

forutsatt $0 < \varepsilon \ll 1$.

**Ex. 4 .**

Temperaturfeltet $T(r;\varepsilon)$ mellom to rette, sirkulære sylindre er beskrevet med likningen

$$\varepsilon\Big(\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}\Big)+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}=0 \tag{4.3}$$

Likningen er gitt på dimensjonsløs form med randbetingelsene

$$T(r=1,\varepsilon)=1, \quad T(r=2,\varepsilon)=0$$

a) Vis at den eksakte løsningen av (4.1) med kravene (4.2) og (4.3), kan skrives

$$T(r;\varepsilon)=\frac{1}{1-2^{1/\varepsilon}}\Big(1-\frac{2^{1/\varepsilon}}{r^{1/\varepsilon}}\Big) \tag{4.4}$$

Vi antar så at $0<\varepsilon\ll 1$. Løsningen av (4.1) har da grensesjikt ved $r=1$.

b) Innfør

$$r=1+y=1+\delta(\varepsilon)\eta \tag{4.5}$$

i (4.1) og skriv likningen i $\eta$-variabelen.

c) Bestem $\delta(\varepsilon)$ og ledende ordens ledd i en indre og en ytre perturbasjonsutvikling av løsningen av (4.1).

d) Bestem også andre ordens leddene i perturbasjonsutviklingene nevnt under c).

e) Vis at ledende ordens indre løsning funnet under c) samsvarer med grenseverdien av (4.4) funnet ved grenseovergangen $\eta$ fast, $\varepsilon\to 0$ utført på (4.4). (NB! $\lim\limits_{\gamma\to\infty}(1+\frac{z}{\gamma})^{\gamma}=e^z$).

**Ex. 5 .**

Et tynt membran er utspent mellom to sirkulære ringer, slik som antydet i figur 5.1. Den potensielle energien som er lagret i membranet er proporsjonal med størrelsen av membranets overflate.

a) Forklar at en funksjonal for den potensielle energien som er lagret i membranet forutsatt aksesymmetri, kan skrives

$$J(r)=2\pi K\int_{-\ell}^{\ell} r\sqrt{1+\Big(\frac{dr}{dx}\Big)^2}\,dx$$

der $K$ er en proporsjonalitetskonstant og $x=\pm\ell$ er $x$-koordinatene for de to nevnte ringene (se figur 5.1, der også $r(x)$ er indikert).

Membranets form i likevekt er bestemt av minimalsiering av den potensielle energien som er lagret i membranet.

b) Finn $r(x)$ når vi antar at første ordens variasjonen bestemmer et minimum, samt at $r(x)=r(-x)$ og $r(0)=1$.

## ME 207, tirsdag 17. juni 2003, 6 timer.

**Ex. 1 .**

En seilbåt går med hastigheten $U_b$ (m/s). Fremdriften skyldes kraften $F_s$ ($\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$) fra seilet på båten i fartsretningen. Båten er også påvirket av motstandskraften $F_r$ ($\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$) fra omgivelsene (vann og luft), og denne er rettet mot fartsretningen. En finner at $F_s$ og $F_r$ kan beskrives som følger,

$$
\begin{aligned}
F_s &= f_s(\rho_\ell, U_\ell, U_b, h_s, b_s) \\
F_r &= f_r(\rho_\ell, \rho_v, U_\ell, U_b, \ell_b, b_b, \nu_v, g)
\end{aligned}
$$

der variablene $\rho_\ell$(kg/m$^3$) og $\rho_v$(kg/m$^3$) er luften og vannets tetthet, h.h.v., $U_\ell$(m/s) og $U_b$(m/s), luften og båtens hastighet, h.h.v., $h_s$(m) og $b_s$(m), seilets høyde og bredde, h.h.v., $\ell_b$(m) og $b_b$(m), båtens lengde og bredde, h.h.v., $\nu_v$(m$^2$/s) er vannets kinematiske viskositet, $g$($\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) er tyngdenes akselerasjon.

a) Finn fullstendige sett av dimensjonsløse variable slik at en kan skrive

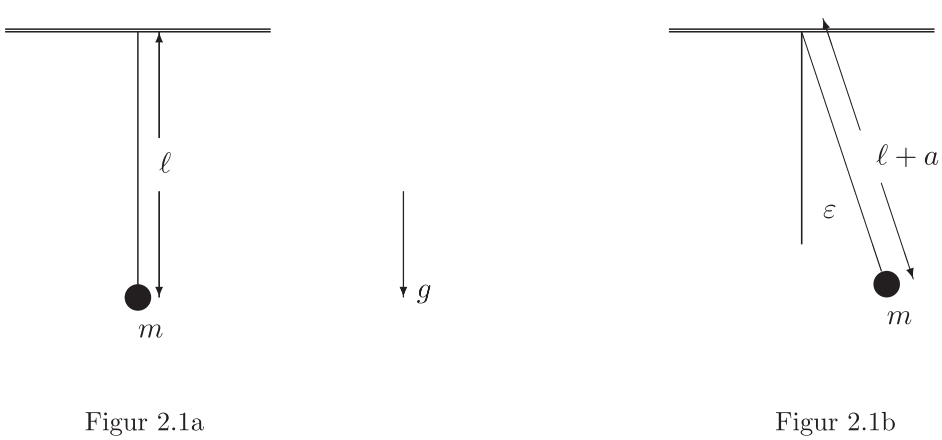
$$
\begin{aligned}
\pi_1^{(s)} &= \phi_s(\pi_2^{(s)}, \pi_3^{(s)}, \ldots) \\
\pi_1^{(b)} &= \phi_b(\pi_2^{(b)}, \pi_3^{(b)}, \ldots
\end{aligned}
$$

der (1.3) og (1.4) skal korrespondere med h.h.v. (1.1) og (1.2).

b) Finn en relasjon mellom $\phi_s$ pg $\phi_b$ når $U_b$ forutsettes konstant.

**Ex. 2 .**

En pendel består av en masse $m$ opphengt i en elastisk snor med lengde $\ell$ når pendelen er i ro i likevekt, slik som indikert i figure 2.1a. Når pendelen svinger (Figur 2.1b), antar snora lengden $L(t) = \ell + x(t)$. Pendelen befinner seg i et tyngdefelt med akselerasjon $g$.




Figur 2.1. Figur 2.1a viser pendelen i likevekt i ro, mens figur 2.1b viser pendelen ved maksimalt utslag.

Vi antar at følgende likninger gjelder for pendelbevegelsen

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} + \tfrac{k}{m}x + g(1 - \cos\theta) - (\ell + x)\dot{\theta}^2 = 0 \\
\ddot{\theta} + \tfrac{g}{\ell + x}\sin\theta + \tfrac{2}{\ell + x}\dot{x}\,\dot{\theta} = 0
\end{aligned}
$$

Pendelen startes med følgende initialvilkår

$$\begin{aligned} x(0) &= a \\ \dot{x}(0) &= 0 \\ \theta(0) &= \varepsilon \\ \dot{\theta}(0) &= 0 \end{aligned}$$

a) Innfør dimensjonsløse variable $\tau = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t$, $X(\tau) = \frac{x(t)}{a}$ og $\Theta(\tau) = \frac{\theta(t)}{\varepsilon}$. Vis at under forutsetningen $\frac{k}{m} = 4\frac{g}{\ell}$, kan likningene (2.1) og (2.2) i disse dimensjonsløse variable, skrives

$$\ddot{X} + 4X + \tfrac{1}{\delta}(1 - \cos(\varepsilon\theta)) - \tfrac{\varepsilon^2}{\delta}(1 + \delta X)\dot{\Theta}^2 = 0$$
$$\varepsilon(1 + \delta X)\ddot{\Theta} + \sin(\varepsilon\Theta) + 2\varepsilon\delta\dot{X}\dot{\theta} = 0$$

der $\delta = a/\ell$.

b) Anta $\delta = \varepsilon$ i likning (2.7) og (2.8). Lineariser de likningene du da får og finn løsningene av disse under de gitte initialvilkår.

c) Behold $\delta = \varepsilon$ og finn løsning av (2.8) til og med orden $O(\varepsilon)$.

**Ex. 3 .**

Et fysisk fenomen er beskrevet med likningen

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{1+t+t^2}\frac{du}{dt} + u(t) = 0 \tag{3.1}$$

som er gitt på dimensjonsløs form. Fenomenet foregår på intervallet $[0,1]$ ($t \in [0,1]$). Randbetingelsene er

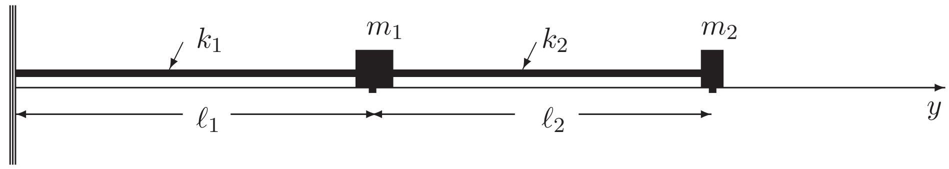
$$u(0) = 1, \quad u(1) = 1$$

a) Finn ledende ordensledd i en indre og en ytre perturbasjonsløsning av problemet.

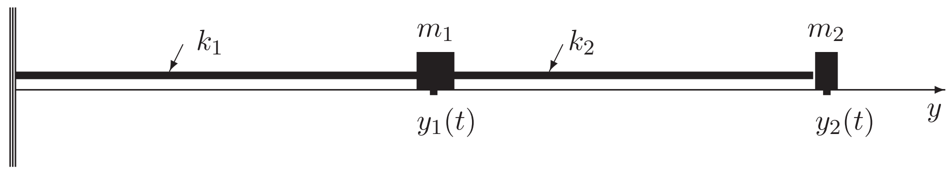
b) Finn størrelsesorden og likning for annenordensleddet i den indre løsningen.

**Ex. 4 .**

En mekanisk oscillator består av to masser $m_1$ og $m_2$ som ved hjelp av to fjærer er forbundet til en fast forankring (se figur 4.1). Fjærkonstantene er $k_1$ og $k_2$ slik som indikert i figuren. De øyeblikkelige posisjonene til $m_1$ og $m_2$ er $y_1(t)$ og $y_2(t)$, h.h.v. (se figur). Fjærenes lengde i likevekt er $\ell_1$ og $\ell_2$.




Figur 4.1a viser oscillator i ro i likevekt.




Figur 4.1b viser oscillator mens den svinger.

a) Vis at Lagrangefunksjonen for den mekaniske oscillatoren kan skrives

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 - \frac{k_1}{2}(y_1 - \ell_1)^2 - \frac{k_2}{2}(y_2 - y_1 - \ell_2)^2 \tag{4.2}$$

b) Vis at bevegelseslikningene for massene $m_1$ og $m_2$, h.h.v., kan skrives

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + k_1(y_1 - \ell_1) - k_2(y_2 - y_1 - \ell_2) &= 0 \\ m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1 - \ell_2) &= 0 \end{aligned}$$

c) Oscillatoren startes med følgende initialvilkår

$$\begin{aligned} y_2(0) &= \ell_1 + \ell_2 + a \\ \dot{y}_2(0) &= 0 \\ \dot{y}_1(0) &= 0 \end{aligned}$$

Finn $y_1(0)$, samt $y_1(t)$ for $t > 0$.