MEK4320
ENERGIOMSETNING I OVERFLATEBØLGER.

Geir Pedersen

Department of Mathematics, UiO

February 9, 2017

Utregning av tettheter.

Løsningen gitt i kompendium er lineær, det vil si at den er gyldig bare til ledende orden i amplituden (a). Følgelig vil vi bare kunne beregne tilnærmede energitettheter. Det viser seg at lineær bølgeteori gir integrerte energier som er korrekt tom. kvadratiske ledd i amplituden.
Vi har tre former for mekanisk energi som listes med tilhørende betegnelse for tetthet, per bredde normalt forplantningsretningen, midlet over en bølgelengde:

(i) Kinetisk energi, E_k.

(ii) Potensiell energi i tyngdefeltet, E_p^t.

(iii) Potensiell kappilar-energi, E_p^k.

Notasjon: feks. (K2.1) er likning 2.1 i kompendium. Indekser brukes for partialt deriverte.

To framgangsmåter

1. Midlere flukser og tettheter regnes ut direkte.
   Denne framgangsmåten er beskrevet upresist i kap 2.4
2. En utleder en konserveringslov fra likningene som styrer bevegelsen.
   - Gevinst: bekreftelse av uttrykk, også fullt ikkelineært
   - Gevinst: en kan vise eksistens av potensiell kappilarenergi
   - Ulempe: en god del regning.

Vi begrenser oss til en horisontal dimensjon.

The role surface pressure, p_a

Application of a uniform surface pressure will lead to a constant addition of p_a to the pressure throughout the fluid, while the velocities and the surface elevation are unaffected.

In the energy balance p_a will enter only through the pressure work at surfaces. Looking at any volume, Ω, with surface Σ, the effect of the work exerted by p_a is:

$$\int_{\Sigma} -p_a \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_{\Omega} -p_a \nabla \cdot \vec{v} d\Omega = 0,$$

where Gauss' theorem is employed and we have invoked $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.
We exempt p_a in the subsequent calculatons by putting it equal to zero

Direct evaluation of densities and fluxes

The wave solution

The harmonic solution reads

$$\phi = -\frac{a\omega \cosh k(z+H)}{k \sinh kH} \cos(kx - \omega t), \quad \eta = a \sin(kx - \omega t),$$

where ω and k fulfill the dispersion relation.
In the integration we mainly need simple integrals akin to

$$\int_{x_1}^{x_1+\lambda} \sin^2(x - \omega t) dx = \frac{1}{2},$$

and

$$\int_{-H}^{0} \cosh^2(k(z+H)) dz = \frac{1}{2}(\cosh kH \sinh kH + H).$$

Averaged kinetic energy

Det fulle uttrykket for midlere kinetisk energi:

$$E_k = \frac{1}{\lambda} \int\limits_{x_1}^{x_1+\lambda} \int\limits_{-H}^{\eta} \frac{1}{2}\rho \vec{v}^2 \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \qquad (1)$$

der resultatet er uavhengig av x_1 pga. periodisiteten. Integralet i z kan deles i ett integral fra bunnen til $z = 0$ og ett fra $z = 0$ til den fri overflate. Siden integranden er kvadratisk i amplituden vil det siste gi et kubisk bidrag ($O(a^3)$) som kan sløyfes. Innsetting av den lineære løsningen fulgt av regning gir

$$E_k = \frac{1}{4}\rho g a^2 (1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g}) + O(a^3) \qquad (2)$$

Averaged potential energy due to gravity

Som i kompendium avsnitt 2.1-2.2[a] definerer vi nullnivå for tyngdepotensialet i $z = 0$. Integrert potensiell energi:

$$\int_{x_1}^{x_1+\lambda} \int_{-H}^{\eta} \rho g z \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\rho g \lambda H^2 + \int_{x_1}^{x_1+\lambda} \frac{1}{2}\rho g \eta^2 \mathrm{d}x \qquad (3)$$

Det første leddet på høyre side gir energien ved likevekt, mens det andre gir en økning knyttet til bølgebevegelsen. Dette gir:

$$E_p^t = \frac{1}{\lambda} \int_{x_1}^{x_1+\lambda} \frac{1}{2}\rho g \eta^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\rho g a^2 + O(a^3) \qquad (4)$$

[a] Redefinering av nullpunkt nedenfor (K2.26) er inkonsistent med løsningene fra avsnitt 2.1-2.2.

Potential energy due to surface tension

Dersom overflaten strekkes utføres et arbeid mot overflatespenningen som går til økning av den potensielle kappilar-energien. Den potensielle energien er $\sigma A + \mathrm{konst.}$, der A er areal.

Vårt regnskap er per bredde. Areal per bredde = buelengde ⇒

$$\int_{x_1}^{x_1+\lambda} \sigma\sqrt{1+\eta_x^2}\,\mathrm{d}x = \sigma\lambda + \int_{x_1}^{x_1+\lambda} \frac{1}{2}\sigma\eta_x^2\,\mathrm{d}x + O(a^4) \tag{5}$$

Første ledd på høyre side er likevektsbidraget ⇒

$$E_p^k = \frac{1}{\lambda}\int_{x_1}^{x_1+\lambda} \frac{1}{2}\sigma\eta_x^2\,\mathrm{d}x + O(a^4) = \frac{1}{4}\sigma k^2 a^2 + O(a^3) \tag{6}$$

Equipartition of energy

The total potential energy

$$E_p = E_p^t + E_p^k = \frac{1}{4}\rho g a^2 (1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g}) + O(a^3), \tag{7}$$

which is the same as the average kinetic energy

$$E_k = E_p,$$

In average potential and kinetic energies are equal.
This is a general property for linear waves.
It is also true for linear oscillators, such as a pendulum in the gravity field.

Three contribution to the energy flux

Transport av potensiell energi i tyngdefeltet, kinetisk energi og effekten av trykkets arbeid samles.

$$f_1 = \int_{-H}^{\eta} (\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho g z + p) u \mathrm{d}z \qquad (8)$$

Uttrykket forenkles vha. Eulers trykklikning (K2.7) (with $p_a = 0$):

$$f_1 = -\int_{-H}^{\eta} (\rho\phi_t - p_a)\phi_x \mathrm{d}z = -\int_{-H}^{0} \rho\phi_t\phi_x \mathrm{d}z + O(a^3) \qquad (9)$$

Den midlere fluksen regnes så ut ved:

$$F_1 = -\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T}\int_{-H}^{0} \rho\phi_t\phi_x \mathrm{d}z\mathrm{d}t + O(a^3) \qquad (10)$$

The energy flux due to capillary effects

Transport pga. kappilar-spenningene.

$f_2 =$ advek. kap. energi + effekt av kap.-spenning i snitt
advek. kap. energi : $\sigma \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} u = \sigma \times$ transport of surface length.
effekt av kap.-spenning : $\sigma \vec{s} \cdot \vec{v}$
Here s is arc-length of surface and $\vec{s}$ is unit tangent.

$$f_2 = \sigma[(1+\eta_x^2)^{\frac{1}{2}} u - (1+\eta_x^2)^{-\frac{1}{2}}(u+\eta_x w)]_{z=\eta} = -\sigma \eta_x \phi_z|_{z=0} + O(a^3) \tag{11}$$

The group velocity

Definisjon av gruppehastighet.

Midler vi f_2 (gir F_2) over en periode og regner sammen $F = F_1 + F_2$ får vi et resultat som hensiktsmessig kan skrives:

$$F = c_g E \tag{12}$$

der $c_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ er gruppehastighet.

(12) med uttrykk for c_g er en generell sats

Konserveringslover.

Konserveringslov på *integrert* form, for et volum Ω, kan skrives:

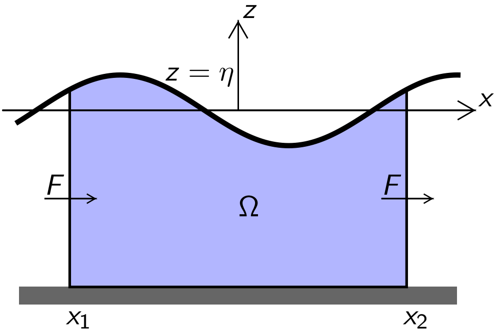
$$\int_{\Omega} \varepsilon_t \mathrm{d}\Omega = - \int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}A \tag{13}$$

der Σ er flaten som omslutter Ω. Lar vi Ω krympe til et punkt og benytter Gauss sats får vi konserveringsloven på *differensialform*:

$$\varepsilon_t = -\nabla \cdot \vec{q} \tag{14}$$

Leibniz sats kan brukes til å flytte tidsderivasjon utenfor integral i (13)

Kontrollvolum.



Integrert energilikning for området:

$$\frac{d}{dt}(e_p + e_k + e_p^{(k)}) = F|_{x=x_1} - F|_{x=x_2} \tag{15}$$

e_p, e_k, $e_p^{(k)}$ integrerte energier i Ω.
Mål: grunnlikninger, manupulering, tolkning $\Rightarrow$ (15)

Bevegelseslikningen for en ideell væske:

$$\rho \vec{v}_t = -\nabla p - \rho \nabla (\frac{1}{2} \vec{v}^2) - \rho \nabla \Phi \tag{16}$$

der virvelfriheten er brukt til å omskrive det konvektive leddet.
(16) multipliseres med hastigheten og integreres over Ω. Gauss sats og divergensfrihet gir:

$$\int_\Omega (\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2)_t d\Omega = - \int_r (\quad p + \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \rho \Phi \quad) \vec{v} \cdot \vec{n} ds \tag{17}$$

$$(i) \quad (ii) \quad (iii) \tag{18}$$

der r betegner den delen av randa som utgjør den fri overflaten og de vertikale snitt ved x_1 og x_2.
I (17) gjenkjennes allerede kinetisk energi til venstre.

Tidsderivasjon utenfor integral vha. en utgave Leibniz sats (bare tidsvariasjon av overflaten):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} G d\Omega = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial t} d\Omega + \int\limits_{x_1}^{x_2} G|_{z=\eta} \vec{v}\cdot\vec{n} ds \qquad (19)$$

Her

$$\int\limits_{\Omega} (\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2)_t d\Omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega} (\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2) d\Omega - \int\limits_{x_1}^{x_2} (\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2)|_{z=\eta} \vec{v}\cdot\vec{n} ds \qquad (20)$$

og

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \Phi d\Omega = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Phi|_{z=\eta} \vec{v}\cdot\vec{n} ds, \qquad (21)$$

fordi $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$.

Innsetting i (17): siste ledd i (20) og (ii) kansellerer fra (21) ledd (iii) $\Rightarrow$ volumintegral av tyngdepotensiale

$$\frac{d}{dt}(e_p + e_k) = -\int_{x_1}^{x_2} p\vec{v}|_{z=\eta} \cdot \vec{n} ds + I_1 - I_2 \qquad (22)$$

der

$$e_k = \int_{\Omega} \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 d\Omega \qquad e_p = \int_{\Omega} \rho\Phi d\Omega \qquad (23)$$

$$I_i = \int_{-H}^{\eta} \{(p + \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho\Phi)u\}|_{x=x_i} dz \qquad (24)$$

På plass: alt utenom kappilarbidrag som må komme fra første ledd på h.s. av (22)

Expression for I_i contains, in sequence:

1. Effect of pressure in vertical transect
2. Advection of kinetic energy in vertical transect
3. Advection of potential energy in gravity field in vertical transect

Hence, when $\sigma = 0$ we have $I = F$.
Moreover, when $\sigma = 0$ the first term on rhs. of (22) vanishes.
Hence, we have shown the simplified version of (15)

$$\frac{d}{dt}(e_p + e_k) = F|_{x=x_1} - F|_{x=x_2}$$

First term on rhs. of (22) can be rewritten to yield $e_p^{(k)}$ term as well as contribution to F.
Details follow after "EXTRA" flag, but will not be required.

Definition of vertically integrated energy densities, $E_k^{(i)}$ and$E_p^{(i)}$

$$e_k = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 d\Omega = \int\limits_{x_1}^{x_2} E_k^{(i)} dx, \quad \text{where} \quad E_k^{(i)} = \int\limits_{-H}^{\eta} \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 dz \qquad (25)$$

$$e_p = \int\limits_{\Omega} \rho\Phi d\Omega = \int\limits_{x_1}^{x_2} E_p^{(i)} dx, \quad \text{where} \quad E_k^{(i)} = \int\limits_{-H}^{\eta} \rho\Phi dz \qquad (26)$$

I on preceding slides are vertically integrated fluxes, now renamed $F^{(i)}$. Dividing (15) by $x_2 - x_1$ and forming the limit $x_2 - x_1 \rightarrow 0$ we obtain the depth integrated energy equation

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_p^{(i)} + E_k^{(i)}) = -\frac{\partial F^{(i)}}{\partial x} \qquad (27)$$

The averaged quantities, E_k etc, may then be obtained by inserting the wave mode solution in $E_k^{(i)}$ etc., removing the equilibrium contribution, make the appropriate approximations and average over t or x.

EXTRA

Kappilarbidragene

Siste steg: omskrivning av overflateintegral med p.
Dynamisk randbetingelse ved $z = \eta$

$$p\vec{n} = -\sigma \frac{\partial \vec{s}}{\partial s} \Rightarrow p = -\frac{\sigma \eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (28)$$

Delevis integrasjon

$$-\int\limits_{x_1}^{x_2} p\vec{v}\cdot\vec{n}ds = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sigma\vec{v}\cdot d\vec{s} = (\sigma\vec{v}\cdot\vec{s})|_{x_1}^{x_2} - \int\limits_{x_1}^{x_2} \sigma\vec{s}\cdot d\vec{v} \qquad (29)$$

Første ledd på h.s. er effekt av kapilarspenning i snitt.
Siste ledd må gi tidsendring av tetthet og adveksjon av potensiell kappilar enegi og må omskrives.

Kappilarenergi

$$e_p^{(k)} \equiv \sigma L = \int_{x_1}^{x_2} \sigma\, ds = \int_{x_1}^{x_2} \sigma s_x\, dx, \quad \text{der} \quad s_x = \sqrt{1+\eta_x^2} \qquad (30)$$

Tidsderivasjon

$$\frac{\mathrm{d}e_p^{(k)}}{\mathrm{d}t} = \sigma \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma \eta_x \eta_{xt}}{s_x} dx \qquad (31)$$

Omskrivning siste ledd i (29)

Definisjoner: $\hat{u} = u(x,\eta,t)$, $\hat{w} = w(x,\eta,t)$
Kinematisk betingelse: $\hat{w} = \eta_t + \hat{u}\eta_x \Rightarrow \hat{w}_x = \eta_{xt} + \dots$
Bruker $d\vec{v} = (\vec{\imath}\hat{u}_x + \vec{k}\hat{w}_x)dx$ og ordner[b]

$$\int_{x_1}^{x_2} \sigma\vec{s}\cdot d\vec{v} = \int_{x_1}^{x_2} \sigma\left(\frac{\eta_x\eta_{xt}}{s_x} + \frac{\partial}{\partial x}(s_x\hat{u})\right)dx$$
$$= \frac{\mathrm{d}e_p^{(k)}}{\mathrm{d}t} + (\hat{u}\sigma s_x)\big|_{x_1}^{x_2}$$

der det siste leddet er adveksjon av kappilarenergi.

[b] Alternativ: Geometrisk kan en se at $\vec{s}\cdot d\vec{v}$ svarer til materiell forlengelse. Tidsendring av L oppnås ved a korrigere for transport av buelengde $(s_x\hat{u})$ inn/ut av Ω.

Totale flukser

Samles alt får vi (15) med energifluks:

$$F = \int_{-H}^{\eta} \{(p + \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho\Phi)u\}dz + \sigma u|_{z=\eta}\frac{\partial s}{\partial x} - \sigma\vec{v}\cdot\vec{s} \qquad (32)$$

Ved bruk av Eulers trykklikning kan F forenkles ytterligere:

$$F = -\int_{-H}^{\eta} \phi_t\phi_x dz + \sigma u|_{z=\eta}\frac{\partial s}{\partial x} - \sigma\vec{v}\cdot\vec{s} \qquad (33)$$

Ved innsetting av lineær løsning etc. gjenskapes tidligere resultater.