



Mathematik I

Vorlesungsskript

Mitschrift von Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von Herrn Michael Meinhold
& Prof. Dr. Fabian Schwarzenberger

11. Mai 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Elementare Grundlagen	4
1.1	Aussagen und Grundzüge der Logik	4
1.2	Mengen	4
1.3	Zahlen	4
1.4	Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen	4
1.5	Lineare Algebra	4
2	Folgen, Reihen, Grenzwerte	5
2.1	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen	5
2.1.1	Grenzwerte von Funktionen	5
2.1.2	Stetigkeit von Funktionen	8
2.2	Potenzreihen	11
3	Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen	13
3.1	Grundbegriffe	13
3.1.1	Das Differential	14
3.2	Differentiationsregeln	15
3.3	Anwendungen	17
3.3.1	Taylorische Formel, Taylor-Reihe	17
3.3.1.1	Taylor Reihen	19
3.3.2	Grenzwertbestimmung mittels der Regel von l'Hopital	20
3.3.3	Kurvendiskussion	23
3.3.4	Kurvendarstellungen	24
3.3.4.1	Darstellung ebener Kurven	24
3.3.4.2	Tangenten und Normalen ebener Kurven	26
3.3.4.3	Krümmung ebener Kurven	27
3.3.4.4	Raumkurven	28
3.3.5	Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung	28
4	Integralrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen	30
4.1	Der Integralbegriff	30
4.1.1	Das bestimmte Integral	30
4.1.2	Sammfunktion und unbestimmtes Integral	31
4.1.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)	32
4.2	Integrationsmethoden	32
4.2.1	Substitution	32
4.2.2	Partielle Integration	34
4.2.3	Integration gebrochen rationaler Funktionen	35
4.2.4	Integration von Potenzreihen	37
4.3	Numerische Integration	37
4.4	Uneigentliche Integrale	38
4.5	Anwendungen	40
4.5.1	Geometrische Anwendungen	40
4.5.1.1	Inhalte ebener Flächen	40
4.5.1.2	Bogenlänge	41

4.5.1.3	Volumen von Rotationskörpern	42
4.5.1.4	Mantelflächen von Rotationskörpern	43
4.5.1.5	Fourier-Reihen	44

1 Elementare Grundlagen

1.1 Aussagen und Grundzüge der Logik

1.2 Mengen

1.3 Zahlen

1.4 Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

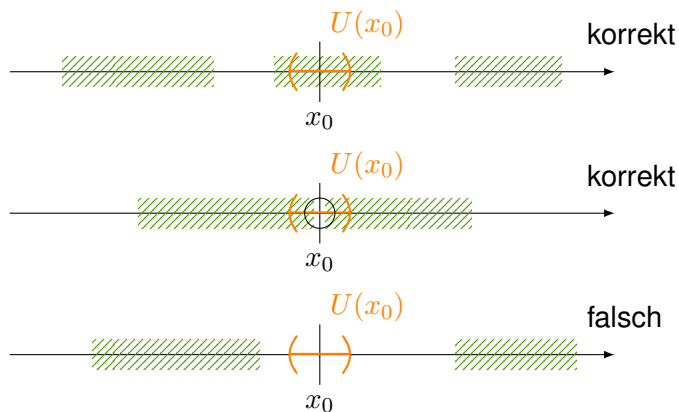
1.5 Lineare Algebra

2 Folgen, Reihen, Grenzwerte

2.1 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

2.1.1 Grenzwerte von Funktionen

Def. 1: Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und es existiere eine Umgebung $U(x_0)$ mit $U(x_0) \setminus \{x_0\} \subseteq Db(f)$.



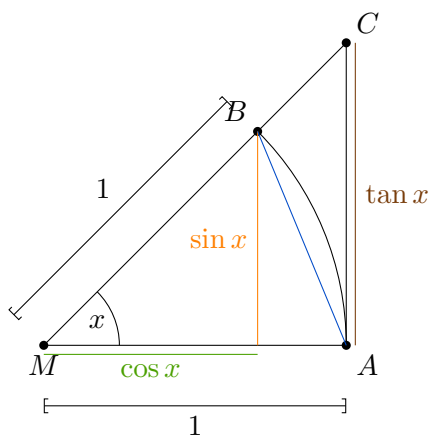
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$, $x_n \neq x_0$ (für alle n) und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda$.

Anschaulich: $f(x)$ strebt gegen λ , wenn x gegen x_0 strebt.

Bemerkung: Die Stelle x_0 muss *nicht* selbst zum Definitionsbereich gehören.

Bsp. 1:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$



$$\begin{aligned} F_{\triangle MAB} &\leq F_{\text{Sektor } MAB} \leq F_{\triangle MAC} \\ \frac{1}{2} \sin x &< \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x \quad | \cdot \frac{2}{\sin x} \\ \Leftrightarrow 1 &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Analog zu Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen gilt:

Satz 1: Es gelte $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Dann:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot a$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$)

Bsp. 2:

a.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 7x + 4}{3 \cos x} = \frac{4}{3}$

b.) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \frac{0}{0}$ Satz nicht anwendbar.

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 2 = 5$$

(andere Möglichkeit mit $\frac{0}{0}$ umzugehen lernen wir später)

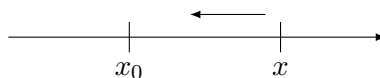
Def. 2:

a.) rechtseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = a : \Leftrightarrow \text{für jede Folge } (x_n) \text{ mit } x_n \in Db(f) \text{ und } x_n > x_0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ gilt}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$$

Andere Schreibweise: $\lim_{x \searrow x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0}$



b.) linkseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = a : \Leftrightarrow \text{analog rechtsseitiger Grenzwert}$$

c.) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a : \Leftrightarrow \text{für jede Folge } (x_n) \text{ mit } x_n \in Db(f) \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$

d.) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a : \Leftrightarrow \text{analog s.o.}$

Diskussion: Uneigentliche Grenzwerte:

Wir schreiben $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$ bei bestimmter Divergenz der Funktionswerte für:

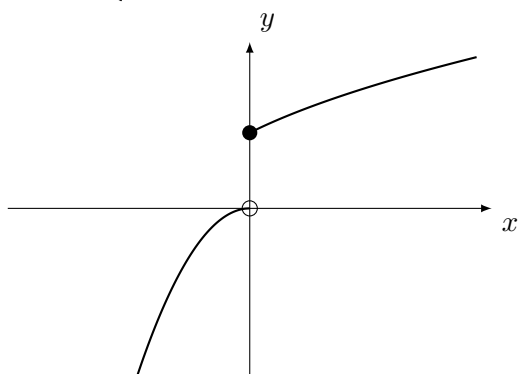
$$\bullet \begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ x \nearrow x_0 \\ x \searrow x_0 \\ x \rightarrow \infty \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Satz 2:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = a$$

Bsp. 3: (einseitiger Grenzwert)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existiert nicht!}$$

Bsp. 4:

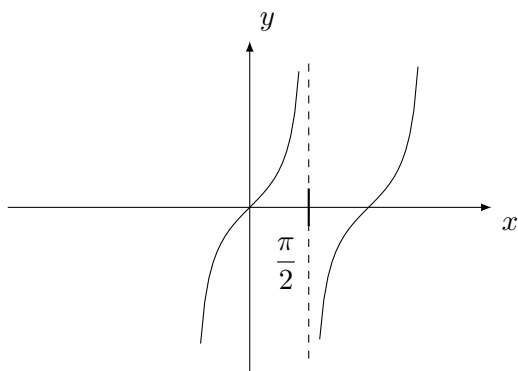
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{4}{x}\right) = "\infty \cdot 0"$$

$$\stackrel{u=\frac{4}{x}}{=} \lim_{u \searrow 0} \frac{4}{u} \sin(u) = 4$$

Bsp. 5:

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$$

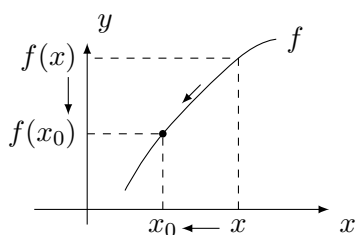
$$\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$$



2.1.2 Stetigkeit von Funktionen

Def. 3: Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in Db(f)$ gegeben. Es heißt f :

- a.) stetig in x_0 falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt
(also $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$, d.h. Limes und Funktion kann vertauscht werden).



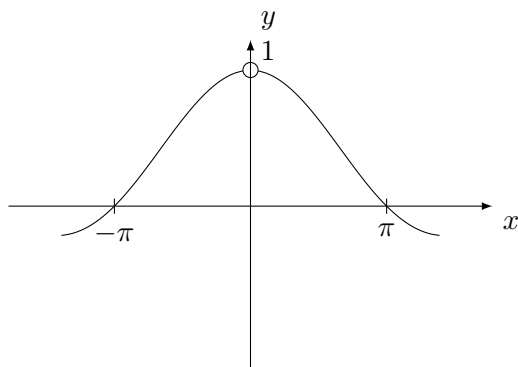
- b.) linksseitig stetig in x_0 , falls $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
c.) rechtsseitig stetig in x_0 , falls $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Bsp. 6:

a.) $f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig, da $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$.

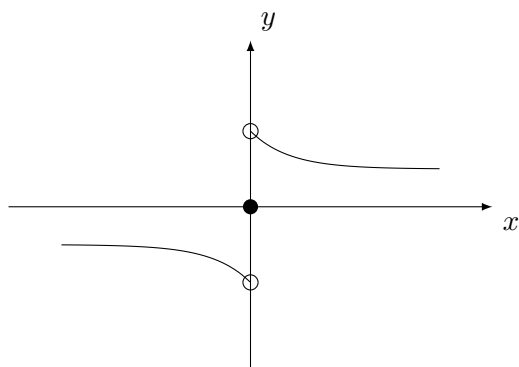
Aber $\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ stetig.

Bezeichnung: hebbare Unstetigkeit.

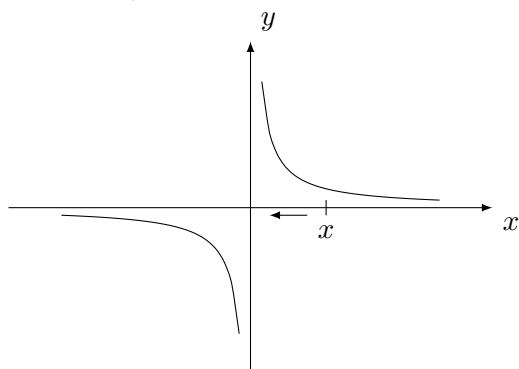


b.) $f_2(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da $\lim_{x \nearrow 0} f_2(x) \neq f_2(0) \neq \lim_{x \searrow 0} f_2(x)$

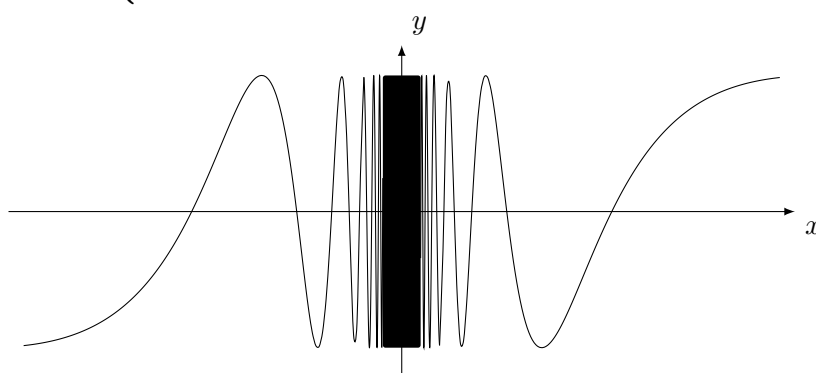
Bezeichnung: endlicher Sprung.



c.) $f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da $\lim_{x \nearrow 0} f_3(x) = \infty \neq f_3(0)$.



d.) $f_3(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nicht existiert.



Def. 4: Die Funktion $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ heißt

a.) in einem Intervall $I \subset Db(f)$ stetig, falls f an jeder inneren Stelle $x_0 \in I$ stetig ist und in evtl. zu I gehörenden Randpunkten einseitig stetig ist.

b.) stetig, falls f in allen Punkten $x_0 \in Db(f)$ stetig ist.

Bemerkung: Jede der in ?? und ?? betrachteten Funktionen ist stetig.

Bsp. 7: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig.

Satz 3: Sind f und g stetig in x_0 , so sind auch $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x_0) \neq 0$) stetig in x_0 .

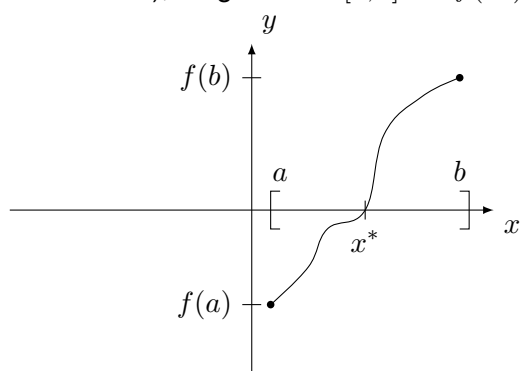
Satz 4: (Stetigkeit und Verknüpfungen)

Seien $g : Db(g) \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $Wb(g) \subseteq Db(f)$, dann gilt:

Ist g stetig in x_0 und f stetig in $g(x_0)$, so ist $f \circ g : Db(g) \rightarrow \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = f(g(x))$ stetig in x_0 .

Satz 5: (Zwischenwertsatz)

Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b] \subseteq Db(f)$. Falls $f(a) \cdot f(b) < 0$ (also haben unterschiedliche Vorzeichen), so gilt $\exists x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = 0$



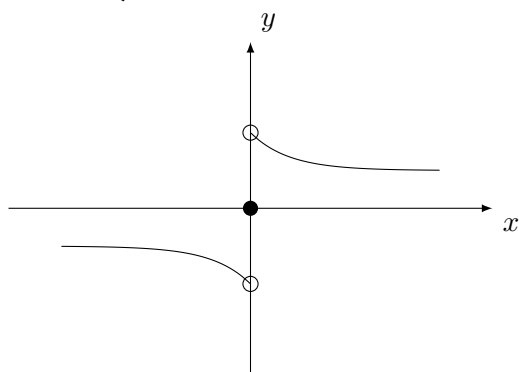
Satz 6: Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$. Dann nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Diskussion:

a.) $f(x) = \tan x$ nimmt auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ kein Maximum an.

ABB21

b.) $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ nicht stetig und nimmt kein Maximum auf $[-1, 1]$ an.



2.2 Potenzreihen

Def.: Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ Potenzreihe mit dem Mittelpunkt x_0 .

Diskussion:

- Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ ist die Potenzreihe eine feste Reihe.
- Konvergenzbereich $K := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{Potenzreihe ist konvergent}\}$
- Für jedes $x \in K$ existiert der Summenwert der Potenzreihe. Die Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ heißt Grenzfunktion der Potenzreihe.

Zur Bestimmung des Konvergenzbereichs nutzt man Satz 10 und 11 aus ?? und erhält absolute Konvergenz in einem um x_0 liegendem Konvergenzintervall $I := (x_0 - r, x_0 + r)$.

Wie r bestimmt wird liefert:

Satz 1: Sei (a_n) Zahlenfolge mit $r := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ existiert.

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ $\begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < r \\ \text{divergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| > r \end{cases}$.

Diskussion:

- Verwechslungsgefahr:
 - Satz 10 und 11 betrachten (Zahlen-)Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
 - Satz 1 betrachtet Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, wobei a_n ein Faktor vor $(x - x_0)^n$ ist.
- Falls der Grenzwert r aus Satz 1 nicht existiert, so gibt es trotzdem einen Konvergenzradius. Den gilt es auf andere Weise zu betrachten/ermitteln.
- Satz 1 sagt nichts über das Verhalten an den Randpunkten aus \rightarrow gesonderte Untersuchung nötig.

Bsp. 1:

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, d.h. $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} \right|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

\Rightarrow Konvergenzintervall $I = (-1, 1)$

Randpunkte:

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ bedingt konvergent (alternierenden harmonische Reihe)

$$x = 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergent}$$

\Rightarrow Konvergenzbereich: $K = [-1, 1)$

$$\text{b.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ d.h. } x_0 = 0, a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$\Rightarrow r = \infty$$

d.h. die Reihe ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bezeichnung: *beständige Konvergenz*

$$\text{c.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \dots \quad \text{d.h. } x_0 = 0, a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Satz 1 ist aber nicht unmittelbar anwendbar.

Substitution $u := x^2$ liefert aber $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{(2n)!}$ mit $u_0 = 0, b_n = \frac{1}{(2n)!}$ ($\sum b_n(u - u_0)^n$)

$$\left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+2) \cdot (2n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$\Rightarrow r_u = \infty$ (Konvergenzradius für die Substituierte Reihe)

$\Rightarrow r_x = \sqrt{\infty} = \infty$ (Konvergenzradius für die untersuchte Funktion)

Im Konvergenzbereich K wird dadurch eine Potenzreihe eine Funktion dargestellt, die Grenzfunktion (siehe vorhergehende Diskussion).

Bsp. 2:

$$\text{a.) } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ für } x \in (-1, 1) \text{ (geometrische Reihe)}$$

$$\text{b.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ (Beweis später)}$$

Satz 2: Die Grenzfunktion jeder Potenzreihe ist im Konvergenzbereich stetig.

3 Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen

3.1 Grundbegriffe

Tangentenproblem

ABB38

Gegeben: $y = f(x)$

Gesucht: Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$

- Zunächst **Sekante** durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_0, f(x_0))$
- Dann betrachten wir $x_1 \rightarrow x_0$
- Damit geht **Sekante** über in die **Tangente**.
Außerdem geht φ in α über.

$$\tan \alpha = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \tan \varphi = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}}$$

Def. 1: Die Funktion $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt an der Stelle x_0 (mit $U(x_0) \subseteq Db(f)$) differenzierbar, falls

der Grenzwert $f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

$f'(x_0)$ heißt dann **1. Ableitung** von f an der Stelle x_0 .

Diskussion:

- $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
- Gleichung der Tangente in $(x_0, f(x_0))$ ist $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ($t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) Anstieg der Tangente ist als $m = \tan \alpha = f'(x_0)$
- f in x_0 differenzierbar bedeutet es existiert eine eindeutige Tangente an die Kurve in dieser Stelle.
z.B. ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar:
ABB39

Satz 1: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Beweis:

Sei f in x_n differenzierbar und (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \rightarrow x_0$. Dann gilt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ existiert.

$$\Rightarrow \exists K > 0 \text{ mit } \left| \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right| = \frac{|f(x_n) - f(x_0)|}{|x_n - x_0|} \leq K$$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| \leq K \cdot |x_n - x_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ ist stetig.}$$

Def. 2: Eine Funktion $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$
 $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ heißt

a.) differenzierbar im Intervall $I \subseteq Db(f)$, falls f an jeder inneren Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist und in eventuellen Randpunkten einseitig differenzierbar ist.

d.h. $\lim_{x \nearrow x_r} \frac{f(x) - f(x_r)}{x - x_r}$ bzw. $\lim_{x \searrow x_r} \frac{f(x) - f(x_r)}{x - x_r}$ existiert

b.) differenzierbar, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in Db(f)$ differenzierbar ist.

Schreibweise:

Die resultierende Funktion bezeichnen wir mit

$$f' : Db(f') \rightarrow \mathbb{R}, f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

wobei $Db(f')$ aus allen Punkten $x \in Db(f)$ besteht für welche der genannte Grenzwert existiert.

Def. 3: Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren rekursiv die n -te Ableitung von f an der Stelle x_0 mittels

$$f^{(n)}(x_0) := (f^{(n-1)})'(x_0) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

wobei $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ (unter der Voraussetzung, dass die jeweilige Ableitung existiert).

Bsp. 1: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) : x^n, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h} ((x+h)^n - x^n) \\ &= \frac{1}{h} \left(x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n - x^n \right) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

d.h. f ist auf \mathbb{R} differenzierbar. $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Bsp. 2: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \sin(x)$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \quad | \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \\ &= \frac{2 \cdot \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= \frac{\cos \left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \quad | \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Also $f'(x) = \cos x$.

Bemerkung: Ableitung der wichtigsten Grundfunktionen findet man in Formelsammlungen.

Zur Ableitung zusammengesetzter Funktionen lernen wir im später weitere Ableitungsregeln kennen.

3.1.1 Das Differential

ABB 49

$$dy = h \cdot \tan \alpha = f \cdot f'(x_0)$$

Def. 4:

- a.) $dy := f'(x_0) \cdot h$ heißt das zur Stelle x_0 und dem Zuwachs $h = \Delta x$ gehörende *Differential* von f .
- b.) $\Delta y := f(x_0 + h) - f(x_0)$ heißt die zur Stelle x_0 und dem Zuwachs $h = \Delta x$ gehörende *Differenz* von f .

Diskussion

- 1.) Δy ist die Änderung der Funktion f , wenn x in $x + h$ übergeht; dy ist die entsprechende Änderung wenn statt f die Tangente an der Stelle x_0 betrachtet wird (Linearisierung).
- 2.) Für kleine Zuwächse Δx gilt: $\Delta y \approx dy$
d.h. $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$ für kleines Δx (nutzt man in der Fehlerrechnung)
- 3.) Sei $y = f(x) = x \Rightarrow dy = dx = 1 \cdot h$ also $\boxed{h = \Delta x = dx}$
- 4.) Damit $f'(x) = \frac{dy}{dx}$
Also: 1. Ableitung = Differentialquotient
andere Schreibweise: $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$
- 5.) Höhere Ableitungen:
$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

3.2 Differentiationsregeln

Satz 1: Falls die Ableitungen auf der rechten Seite existieren:

- $(C_1 u(x) + C_2 v(x))' = C_1 u'(x) + C_2 v'(x)$ (Linearität)
- $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ (Produktregel)
- $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$ (Quotientenregel)

Bsp. 1:

- a.) $f(x) = 7x^4 + \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 7x^4 + x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} \quad (x > 0)$

$$\Rightarrow f'(x) = 28x^3 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{2}} = 28x^3 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$
- b.) $f(x) = x \cdot \ln x \quad (x \geq 0)$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1 \quad (\text{Produktregel})$$
- c.) $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^x \cdot (x^2 + 2) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2)^2} \quad (\text{Quotientenregel})$$

Satz 2: Seien $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Db(g) \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$, $Db(g) \subseteq \mathbb{R}$ und

- g bei $x_0 \in Db(g)$ differenzierbar
- f bei $g(x_0) \in Db(f)$ differenzierbar

so gilt:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Diskussion: $y = f(\underbrace{g(x)}_u) = f(u)$ mit $u = g(x)$

Differentialschreibweise:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{äußere Ableitung} \cdot \text{innere Ableitung})$$

Bsp. 2:

a.) $y = f(x) = \sin \underbrace{3x}_u$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 3 = 3 \cos 3x$$

b.) $y = f(x) = 2^{\tan(3x)} \quad \left(-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}\right)$

Substitution:

$$u := \tan 3x$$

$$v := 3x$$

$$\Rightarrow y = 2^u, \quad u = \tan v$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 2^u \cdot \ln 2 \cdot (1 + \tan^2 v) \cdot 3 = 3 \cdot 2^{\tan 3x} \cdot \ln 2 \cdot (1 + \tan^2 3x)$$

Bsp. 3: (Logarithmische Differentiation)

$$f(x) = x^{\sin x} \quad x \in (0, \infty)$$

Basis und Exponent hängen von x ab!

Die Regeln $(x^a)' = ax^{a-1}$ bzw. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ sind nicht unmittelbar anwendbar.

Betrachten:

$$f(x) = x^{\sin x}$$

$$\ln(f(x)) = \sin x \cdot \ln x$$

$$\xrightarrow{\text{Ableiten}} \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot (\cos(x) \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

Satz 3: Sei $f : (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ Grenzfunktion einer Potenzreihe mit Kurvenradius r .

Dann gilt für alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x - x_0)^{n-1}$

Bsp. 4: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad |x| < 1$$

3.3 Anwendungen

3.3.1 Taylorsche Formel, Taylor-Reihe

Problem: „Komplizierte“ Funktionen f soll in der Umgebung von x_0 durch ein Polynom p_n n -ten Grades angenähert werden.

Ansatz: $p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$

Forderung: $p_n(x_0) = f(x_0), p'_n(x_0) = f'(x_0), p''_n(x_0) = f''(x_0), \dots$

liefert: $p_n(x_0) = a_0, p'_n(x_0) = a_1, p''_n(x_0) = 2a_2, \dots$

und $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Allgemein: $p_n^{(k)} = k!a_k$ für $k = 0, 1, \dots, n$

Def. 1: Das Polynom $p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ heißt *Taylorpolynom* n -ten Grades mit Entwicklungsstelle x_0 .

Diskussion:

1.) p_n ist eine Näherung für f .

Fehler: $f(x) - p_n(x) =: R_n(x)$ heißt Restglied

2.) Restglied ist im Allgemeinen umso kleiner, je kleiner $|x - x_0|$ ist und je größer n ist.

ABB 54

Satz 1: Taylorsche Formel

Es sei f in $[a, b]$ $(n+1)$ -mal differenzierbar, sowie $x_0, x \in [a, b]$. Dann existiert ein ξ zwischen x_0 und x

(d.h. $\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0)$ mit $\vartheta \in (0, 1)$) mit $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$: *Restgliedform von Lagrange*.

$$\text{Es gilt also } f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{p_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

Diskussion: Spezialfall $n = 0$: $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$ (*Mittelwertsatz der Differentialrechnung*)

ABB 55

Satz sagt: es gibt zwischen x_0 und x_1 einen Punkt auf der Funktion, sodass die Senkante die Tangente dieses Punktes ist.

Umstellen liefert:

$$\underbrace{f'(\xi)}_{\text{Anstieg der Tangente}} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Anstieg der Sekante}}$$

Bsp. 1: $f(x) = e^x \quad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x = f''(x) = f'''(x) = \dots$$

$$\stackrel{x_0=0}{\implies} f'(0) = 1 = f''(0) = f'''(0) = \dots$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot x^k + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad 0 < \vartheta < 1$$

Wie gut ist diese Näherung?

Für $x = \frac{1}{10} = 0,1$ und $n = 4$ gilt:

$$e^{0,1} = 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,1^2}{2!} + \frac{0,1^3}{3!} + \frac{0,1^4}{4!} + \underbrace{\frac{0,1^5}{5!} e^{\vartheta \cdot 0,1}}_{R_4(0,1)} \text{ für ein } \vartheta \in (0,1).$$

$$\Rightarrow e^{0,1} = \underbrace{1 + 0,1 + 0,005 + 0,0001\bar{6} + 0,0000041\bar{6}}_{=1,1051708\bar{3}} + R_4(0,1) \text{ Abschätzen des } \vartheta:$$

$$\begin{aligned} 8,3 \cdot 10^{-8} &= \frac{0,1^5}{5!} = \frac{0,1^5}{5!} e^0 < \frac{0,1^5}{5!} e^{\vartheta \cdot 0,1} < \frac{0,1^5}{5!} e^{1 \cdot 0,1} < \frac{0,1^5}{5!} \cdot 3 = 25 \cdot 10^{-8} \\ \Rightarrow 1,1051708\bar{3} + 8,3 &\leq e^{0,1} &< 1,1051708\bar{3} + 25 \cdot 10^{-8} \\ 1,10517091\bar{6} &\leq e^{0,1} &\leq 1,10517108\bar{3} \end{aligned}$$

Bsp. 2:

$$f(x) = \cos(x), \quad x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \quad \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow f''(x_0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x \quad \Rightarrow f'''(x_0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow f^{(4)}(x_0) = 1$$

...

$$n = 2m + 1$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \underbrace{1}_{f(x_0)} + \underbrace{0}_{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)} + \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2} + 0 + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 0 + R_{2m+1} \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \cos(\vartheta x) \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \end{aligned}$$

ABB 56

$$\text{Näherung: } \cos x \equiv 1 - \frac{x^2}{2} \text{ für } |x| \ll 1$$

$$\text{Fehler: } |R_3(x)| \leq \frac{x^4}{4!}$$

Bsp.:

$$\cos 5^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{36}\right) = 1 - \underbrace{\frac{\pi^2}{2 \cdot 36^2}}_{0,9961923} + R_3$$

...

$$|R_2| \leq \frac{\pi^4}{36^4 \cdot 24} = 2,416 \cdot 10^{-6}$$

genau gilt: $\cos 5^\circ = 0,99619$ (auf 5 Stellen genau)

Bsp. 3: $f(x) = (1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

...

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$= \binom{\alpha}{k} \cdot k!(1+x)^{\alpha-k}$$

wir betrachten $x_0 = 0$

$$f(0) = 1, f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha-1), \dots, f^{(k)}(0) = \binom{\alpha}{k} k!$$

Erinnerung:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } n, k \in \mathbb{N}, k \leq n \\ \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} & \text{kann für beliebige } n \in \mathbb{R} \text{ ausgewertet werden.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1} (1+\vartheta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \text{ mit } \vartheta \in (0,1)$$

Bsp. 4: $f(x) \dots$ Polynom n -ten Grades

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow R_n(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{Taylorpolynom stellt } f \text{ exakt dar (Entwicklung nach Potenzen von } (x-x_0))$$

3.3.1.1 Taylor Reihen

Satz 2: Es sei f auf $U(x_0)$ beliebig oft differenzierbar und es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Dann gilt
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

Denn: Taylor-Formel sagt $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x)$. Mit $n \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung.

Bsp. 5: $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$ (vgl. Bsp. 1)

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Wähle n_0 so, dass $q := \frac{|x|}{n_0} < 1$.

⇒ für $n > n_0$ gilt:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| e^{\vartheta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq e^{|\vartheta x|} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &< e^{|x|} \cdot \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{n_0} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{n_0} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{n_0}}_{(n-n_0+1) \text{ Faktoren}} \\ &= e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n_0}}{n_0!} \cdot q^{n-n_0+1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ für alle } x \in (-\infty, \infty)$$

Bsp. 6: $\cos x = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2m+1}(x)$ (vgl. Bsp. 2)

Ähnlich wie in Bsp. 5 kann man zeigen $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2m+1}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad x \in (-\infty, \infty)$$

Analog: $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad x \in (-\infty, \infty)$

Bsp. 7: Restglieduntersuchung in Bsp. 3 führt zu:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad |x| < 1, \alpha \in \mathbb{R}$$

z.B. für $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots \\ &\approx 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{falls } |x| \ll 1 \end{aligned}$$

3.3.2 Grenzwertbestimmung mittels der Regel von l'Hopital

Satz 3: (Regel von l'Hopital)

Es gelte:

- 1.) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- 2.) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert (als eigentlicher und uneigentlicher Grenzwert).

Dann folgt: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (Typ: $\frac{0}{0}$)

Die gleiche Aussage gilt, wenn 1.) ersetzt wird durch

$$1'.) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \quad (\text{Typ: } \frac{\infty}{\infty})$$

Beweis: seien f, g, f', g' stetig in x_0 und $g'(x_0) \neq 0$

$$\text{Mittelwertsatz: } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overbrace{f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)}^0}{\underbrace{g(x_0) + g'(\xi)(x - x_0)}_0} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Bsp. 8:

$$\begin{aligned} \text{a.) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c.) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos x} &= 2 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} = 2 \end{aligned}$$

Regel also auch mehrfach hintereinander anwendbar.

$$\begin{aligned} \text{d.) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh x} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh(x+1)}{\sinh x} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh x} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \dots \end{aligned}$$

\Rightarrow Satz nicht anwendbar, da 2.) nie erfüllt ist.

Aber:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x+1} - e^{-(x+1)}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x+1} (1 - e^{-2(x+1)})}{e^x (1 + e^{-2x})} = e \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2(x+1)}}{1 + e^{-2x}}}_{=1} = e$$

Diskussion:

- 1.) Man beachte, dass der Anwendung von Satz 3 Zähler und Nenner einzeln differenziert werden (keine Quotientenregel)!
- 2.) Falls $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht existiert, darf man nicht schlussfolgern, dass $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ nicht existiert (siehe Bsp. 9).

Bsp. 9: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sin x}{3x - \cos x} = \frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \cos x}{3 + \sin x}$ existiert nicht.

1.) erfüllt, 2.) nicht erfüllt \Rightarrow Satz nicht anwendbar

Aber:

$$\frac{5x + \sin x}{3x - \cos x} = \frac{x \left(5 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x \left(3 - \frac{\cos x}{x}\right)} = \frac{5 + \frac{\sin x}{x}}{3 - \frac{\cos x}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3}$$

Weitere unbestimmte Ausdrücke:

Durch Zurückführen auf $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ lässt sich auch folgendes behandeln:

" $0 \cdot \infty$ ": $f(x) \cdot g(x)$ als Doppelbruch schreiben, d.h. $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ oder $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ ist dann vom Typ $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$.

" $\infty - \infty$ ": Ausklammern $f(x) - g(x) = f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)$ oder falls Brüche vorliegen Hauptnenner bilden.

" 0^0 " / " 1^∞ " / " ∞^0 ": Umformung

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \exp \left(\ln \left(f(x)^{g(x)} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \exp \left(g(x) \ln f(x) \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow a} \underbrace{g(x) \cdot \ln f(x)}_{\text{Typ "0} \cdot \infty"} \right) \end{aligned}$$

Bsp. 10:

a.) $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \cdot \cot 3x \stackrel{\text{"0} \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\frac{1}{\cot 3x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\tan 3x} \stackrel{\text{"0/0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x}{3(1 + \tan^2 3x)} = \frac{1}{3}$$

b.) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \stackrel{\text{"} \infty - \infty \text{"}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\sin x \cdot (e^x - 1)} \stackrel{\text{"0/0}}{=} \dots$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\cos x(e^x + 1) + \sin(x) \cdot e^x}$$

$$\stackrel{\text{"0/0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{-\sin x \cdot (e^x - 1) + \cos(x) \cdot e^x + \cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x} = \frac{1}{2}$$

c.) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{"1}^\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \left((1-x)^{\frac{1}{x}} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\exp}_{\text{tauschen geht, da exp}(\cdot) \text{ stetig ist}} \left(\frac{\ln(1-x)}{x} \right)$

$$= \exp \left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}}_{\text{"0/0"}, \text{Typ } \frac{0}{0}} \right)$$

Denn: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{1-x} = -1$

3.3.3 Kurvendiskussion

Problemstellung: Gegeben ist eine Funktion $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$ $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$.

Dann ist der Graph der Funktion definiert durch: $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 | x \in Db(f)\}$.

Dieser Graph ist zu untersuchen auf

- Nullstellen
- Stellen lokaler bzw. globaler Extrema
- Wendestellen
- Verhalten im Unendlichen, bzw. an den Randstellen des Definitionsbereichs $Db(f)$ und (falls vorhanden) bei Annäherung an Unstetigkeitsstellen.

Diskussion:

- $x_0 \in Db(f)$ heißt **Nullstelle n -ter Ordnung**, falls $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
Zur Nullstellenbestimmung lernen wir bald das (iterative) Newton-Verfahren kennen.
- Lokale Extrema** sind extremal bzgl. einer Umgebung der Extremstelle.
Globale Extrema sind extremal bzgl. des gesamten Definitionsbereichs, sie sind lokale Extrema oder Funktionswerte in den Randpunkten.
- Wendepunkte** sind Punkte, an denen die Kurve von konkav in konvex oder von konvex in konkav übergeht.
ABB 64
ABB 65
- Einige einfache Zusammenhänge zwischen Eigenschaften der Kurve und der Ableitungen an der Stelle x_0 (f sei auf $U(x_0)$ hinreichend oft differenzierbar).

$f'(x_0) < 0$	\Rightarrow	f in Umgebung von x_0 streng monoton fallend.
$f'(x_0) > 0$	\Rightarrow	f in Umgebung von x_0 streng monoton wachsend.
$f'(x_0) = 0$	\Leftarrow	f in x_0 lokal extremal.
$f''(x_0) < 0$	\Rightarrow	f in Umgebung von x_0 konkav.
$f''(x_0) > 0$	\Rightarrow	f in Umgebung von x_0 konvex.
$f''(x_0) = 0$	\Leftarrow	x_0 Wendestelle.
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0$	\Rightarrow	f in x_0 lokal minimal
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$	\Rightarrow	f in x_0 lokal maximal
- Problem: $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0$?
Extremstelle oder Wendestelle oder was?

Hinreichende Bedingungen für das Vorliegen von Extremstellen

Satz 4: Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in Db(f)$ n -mal differenzierbare Funktion und sei $f^{(n)}$ stetig in x_0 . Dann gilt falls $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$:

- $n = 2, 4, 6, \dots$ (also gerade), so ist x_0 lokale Extremstelle (Maximum falls $f^{(n)}(x_0) < 0$, Minimum falls $f^{(n)}(x_0) > 0$).

- b.) $n = 3, 5, 7, \dots$ (also ungerade), so ist x_0 eine Horizontal-Wendestelle (konvex \rightarrow konkav, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$; konkav \rightarrow konvex, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$).

ABB 66

Beweis mittels Taylor-Formal.

Oft ist auch folgendes Kriterium nützlich:

Satz 4': Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in Db(f)$, sowie $f'(x_0) = 0$. Dann:

- a.) f' wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\begin{cases} \text{von } + \text{ auf } - \Rightarrow x_0 \text{ lokale Maximumstelle} \\ \text{von } - \text{ auf } + \Rightarrow x_0 \text{ lokale Minimumstelle} \end{cases}$

- b.) kein Vorzeichenwechsel $\Rightarrow x_0$ ist Horizontal-Wendestelle

Hinreichende Bedingung für das Vorliegen einer Wendestelle

Satz 5: Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar an x_0 und $f^{(n)}$ stetig in x_0 . Dann gilt falls $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$ und

- a.) $n = 3, 5, 7, \dots \Rightarrow x_0$ ist Wendestelle $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0 & \text{konvex} \Rightarrow \text{konkav} \\ f^{(n)}(x_0) > 0 & \text{konkav} \Rightarrow \text{konvex} \end{cases}$

- b.) $n = 4, 6, 8, \dots \Rightarrow x_0$ keine Wendestelle, sondern sogenannte Flachstelle und Extremstelle, falls zusätzlich $f'(x_0) = 0$.

ABB 67

Analog zu Satz 4 und 4' gibt es auch für Wendestellen ein alternatives hinreichendes Kriterium:

Satz 5': Es sei f eine 2 mal differenzierbare Funktion (in Umgebung von x_0), und es gelte $f''(x_0) = 0$. Dann:

- a.) f'' wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\begin{cases} \text{von } + \text{ auf } - : (\text{konvex} \rightarrow \text{konkav}) \text{ Wendestelle} \\ \text{von } - \text{ auf } + : (\text{konkav} \rightarrow \text{konvex}) \text{ Wendestelle} \end{cases}$

- b.) kein Vorzeichenwechsel \Rightarrow keine Wendestelle (sondern Flachstelle)

Bemerkung (zu Satz 4' und 5'):

Vorzeichenwechsel von f' bzw. f'' bei $x = x_0 \Leftrightarrow f'$ bzw. f'' hat bei x_0 Nullstelle ungerader Ordnung.

3.3.4 Kurvendarstellungen, Tangenten- und Normalengleichungen, Krümmung

3.3.4.1 Darstellung ebener Kurven

- 1.) *Explizite kartesische Darstellungen* $y = f(x)$

Wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (vgl. Abschnitt 3.3.3).

- 2.) *Implizite kartesische Darstellungen* $F(x, y) = 0$

Für graphische Darstellung ungünstig. Unter bestimmten Voraussetzungen lässt sich $F(x, y) = 0$ auflösen nach y (oder x). Mehr dazu im Kapitel ?? (Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher).

- 3.) *Parameter Darstellung* $x = x(t), y = y(t), t \in I$ (kurz PD)

vektorielle Form: $\underline{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, t \in I$

Bsp. 13:

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

$$t \in [0, 2\pi) \quad a, b > 0$$

$$t = 0 \Rightarrow x(0) = a, y(0) = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = b$$

$$t = \pi \Rightarrow x(\pi) = -a, y(\pi) = 0$$

Dies ergibt eine Ellipse.

ABB R1

Übergang zur Parameterfreien Darstellung: t eliminieren.

$$\frac{x}{a} = \cos t, \frac{y}{b} = \sin t \quad | \text{ Quadrieren und Addieren}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1}$$

Bsp. 14: Kreis mit Mittelpunkt $M = (x_0, y_0)$ und Radius R .

$$\text{PD bspw.: } x = x_0 + r \cos t \quad y = y_0 + R \sin t \quad t \in [0, 2\pi)$$

Parameterfreie Darstellung:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

ABB R2

4.) Explizite Darstellung in Polar-Koordinaten

- Darstellung eines Punktes in der Ebene

ABB 72

$x, y \dots$ kartesischen Koordinaten

$r, \varphi \dots$ Polarkoordinaten von P (analog Betrag und Argument einer komplexen Zahl) $r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$

Umrechnung:

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

- Kurvendarstellung $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$

Bsp.: $r(\varphi) = 2, \varphi \in [0, 2\pi)$

ABB 73

Für jeden Winkel $\varphi \in [\alpha, \beta]$ die Strecke $r(\varphi)$ auf den φ entsprechenden Strahl von 0 abtragen.

$$\text{Bsp. 15: } r = r(\varphi) = 8 \cos \varphi \quad , \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$8 \cos \varphi$	8	7,73	6,92	5,66	4	2,07	0

ABB R3

Bemerkung

- Übergang „explizite Darstellung \rightarrow Parameterdarstellung“

$$y = f(x), x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow x = t, y = f(t), t \in [a, b] \quad (t \text{ als Parameter})$$

- Übergang „explizite Polardarstellung \rightarrow Parameterdarstellung“

$$r = r(\varphi), \varphi \in [a, b]$$

$$\Rightarrow x = r(\varphi) \cos \varphi, y = r(\varphi) \sin \varphi, \varphi \in [a, b] \text{ (}\varphi \text{ als Parameter)}$$

Im Bsp. 15:

$$x = 8 \cos^2 \varphi$$

$$y = 8 \cos \varphi \sin \varphi \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Parameterfreie Darstellung:

$$y^2 = 64 \underbrace{\cos^2 \varphi}_{\frac{x}{8}} \underbrace{\sin^2 \varphi}_{1 - \frac{x}{8}}$$

$$= x(8 - x)$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 4^2$$

(Halb-)Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt (4, 0).

3.3.4.2 Tangenten und Normalen ebener Kurven

- Anstieg y' einer in PD gegebener Kurve $x = x(t), y = y(t), t \in I$.

Dazu sei $y = f(x)$ die explizite kartesische Form (ohne die Elimination von t durchzuführen).

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \text{ (Kettenregel)}$$

In Anwendungen in t oft die Zeit, üblicher Weise schreibt man dann:

$$\frac{dx}{dt} =: \dot{x} \quad \frac{dy}{dt} =: \dot{y} \quad \Rightarrow y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} =: \ddot{x} \dots$$

- Tangente im Punkt $P_0 = (x_0, y_0), x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$

ABB 74

(Ein) Richtungsvektor der Tangente in x_0, y_0 ist gegeben durch $\underline{t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$.

Für $\underline{n} = \underline{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}$ gilt $(\underline{t}, \underline{n}) = 0$. Also ist $\underline{n} \perp \underline{t}$ und \underline{n} ist daher ein Richtungsvektor.

Kurve	$y = f(x), x \in I$	$x = x(t)$ $y = y(t), t \in I$	$r(\varphi), \varphi \in I$
Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$	$P_0 = (x_0, f(x_0))$	$P_0 = (x(t_0), y(t_0))$	$P_0 = (r(\varphi_0) \cdot \cos \varphi_0, r(\varphi_0) \cdot \sin \varphi_0)$
Anstieg $m = \tan \alpha$ in P_0	$f'(x_0)$	$\frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$	$\frac{r'(\varphi_0) \sin \varphi_0 + r(\varphi_0) \cos \varphi_0}{r'(\varphi_0) \cos \varphi_0 - r(\varphi_0) \sin \varphi_0}$
Tangenten- vektor \underline{t}	$\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} r'(\varphi_0) \cos \varphi_0 - r(\varphi_0) \sin \varphi_0 \\ r'(\varphi_0) \sin \varphi_0 + r(\varphi_0) \cos \varphi_0 \end{pmatrix}$
Normalen- vektor \underline{n}	$\begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -r'(\varphi_0) \sin \varphi_0 - r(\varphi_0) \cos \varphi_0 \\ r'(\varphi_0) \cos \varphi_0 - r(\varphi_0) \sin \varphi_0 \end{pmatrix}$

Tangentengleichungen:

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \cdot \underline{t} \quad s \in \mathbb{R}$$

Normalengleichungen:

$$y = y_0 - \frac{1}{m}(x - x_0)$$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \cdot \underline{n} \quad s \in \mathbb{R}$$

Bsp. 16: Für welche Werte des Parameters φ ist die Tangente an die Kurve $r = r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ parallel zur y-Achse?

Lösung: $r'(\varphi) = -a \sin \varphi$ mit der Bedingung $r'(\varphi) \cdot \cos \varphi - r(\varphi) \cdot \sin \varphi = 0$

$$\Rightarrow -a \sin \varphi \cos \varphi - a(1 + \cos \varphi) \cdot \sin \varphi = 0$$

$$\Rightarrow -a \sin \varphi (\cos \varphi + 1 + \cos \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = 0 \vee \cos \varphi = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = 0^\circ, \varphi_2 = 180^\circ, \varphi_3 = 120^\circ, \varphi_4 = 240^\circ$$

Allerdings entfällt φ_2 , da $r'(\varphi_2) \sin \varphi_2 + r(\varphi_2) \cos \varphi_2 = 0$

3.3.4.3 Krümmung ebener Kurven

ABB 75

Gegeben sei die Kurve C und der feste Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$. Außerdem sind zwei Punkte R und S auf der Kurve gegeben. Durch 3 Punkte P_0 , R und S im Allgemeinen eindeutig ein Kreis festgelegt.

Es sei K die Grenzlage dieses Kreises, wenn R und S in P_0 übergeben.

Es heißt dann:

$K \dots$ Krümmungskreis (Schmiegekreis)

κ (Kappa) \dots Krümmung

$\varrho \dots$ Krümmungsradius mit $\varrho = \frac{1}{|\kappa|}$

$M \dots$ Mittelpunkt des Krümmungskreises $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|}$

Tabelle (Krümmungen)

Kurve	$y = f(x), x \in I$	$x = x(t)$ $y = y(t), t \in I$	$r(\varphi), \varphi \in I$
Krümmung κ in Punkt $P = (x, y)$	$\kappa = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\kappa = \frac{r^2 + 2(r')^2 - r \cdot r''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}$

Bsp. 17: In welchem Punkt ist $f(x) = e^x$ am stärksten gekrümmt (d.h. maximiere $|\kappa|$)

Lösung: $y' = e^x + y''$

$$\kappa = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}}} = |\kappa|$$

$$\frac{d|\kappa|}{dx} = \frac{e^x(1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}} - e^x \cdot \frac{3}{2}(1 + e^{2x})^{\frac{1}{2}} \cdot 2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^3} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^x(1 + e^{2x})^{\frac{1}{2}}}_{\neq 0} (1 + e^{2x} - 3e^{2x}) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2e^{2x} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \ln 2 \quad y_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{mit } \kappa = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{3}{3}}\right)^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad \varrho = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ABB 76

3.3.4.4 Raumkurven

- **Parameterdarstellung** $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in I$

$$\text{vektorielle Form: } \underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- **Tangente im Punkt** $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))^T$

$$\text{mit } \underline{r}(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix} \text{ gilt } \underline{g}(s) = \underline{r}(t_0) + s \cdot \dot{\underline{r}}(t_0), \quad s \in \mathbb{R} \text{ ist die Tangente im Punkt } P_0.$$

- **Physikalische Darstellung** $\underline{r} = \underline{r}(t), t \in I \dots$ Bewegung eines Massepunktes im Raum
 $\dot{\underline{r}}(t_0) \dots$ Geschwindigkeit zur Zeit t_0
 $\ddot{\underline{r}}(t_0) \dots$ Beschleunigung zur Zeit t_0

- **Krümmung** $\kappa = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3}, \text{ Krümmungsradius } \varrho = \frac{1}{\kappa}$

Bsp. 18: (Schraubenlinie)

$$\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ a \sin(t) \\ \frac{h}{2\pi} t \end{pmatrix} \quad t \geq 0, \quad a > 0, \quad h > 0 \quad (h \text{ ist Abstand zwischen zwei Schraubenlinien})$$

Gesucht ist die Tangente in Punkt $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))^T$ für $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Tangente: } \underline{g}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ \frac{h}{4} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

$$(\text{da die } y\text{-Koordinate in } s \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix} \text{ 0 ist: } \underline{g} \text{ ist parallel zur } x\text{-}z\text{-Ebene})$$

3.3.5 Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung

Satz 6: Es sei x^* eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Für ein geeignetes Intervall $I = (x^* - r, x^* + r)$ gelte $f'(x) \neq 0$ und $\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq k < 1$ für alle $x \in I$.

Dann konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in I$ die mittels $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $n = 0, 1, 2, \dots$ festgelegte Folge gegen x^* , d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

Außerdem gilt $|x^* - x_n| \leq \frac{k}{1-k} |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$.

Diskussion:

- Geometrische Veranschaulichung:

ABB 78

Tangente in P_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

x_1 ... Nullstelle der Tangente

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ABB R Newton 1.

- Zur Wahl des Startwertes x_0 :
Falls in I gilt $f''(x) > 0$, dann ist ein x_0 mit $f(x_0) > 0$ günstig (bzw. bei $f''(x) \leq 0$ ein $f(x_0) < 0$).
- Praktisches Vorgehen:
Abbruch falls $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

Bsp. 19: Gesucht sind Lösungen von $f(x) = \cos(x) = x \Leftrightarrow x - \cos(x) = 0$. Gesucht ist nun eine Nullstelle von f .

Start $x_0 = 0,8$ (nur ein Beispiel)

ABB 79

$$f'(x) = 1 + \sin(x)$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n - x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

n	x_n
0	0,8
1	0,73985
2	0,73908526
3	0,73908513322
4	0,73908513322...

$$\Rightarrow x^* = 0,739085$$

ABB R Newton 2.

4 Integralrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen

4.1 Der Integralbegriff

4.1.1 Das bestimmte Integral

Problem:

Gegeben: Kurve $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ und $f(x) \geq 0$.

Gesucht: Flächeninhalt I unter der Kurve

ABB 80

Vorgehen:

- Zerlegung Z des Intervalls $[a, b]$:
 $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$
- In jedem Teilintervall Zwischenstelle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ wählen. Dies ergibt die Zerlegung Z^* (Z mit Zwischenstellen).
- $\Delta(Z^*) := \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) = \dots$ Länge des größten Teilintervalls
- Approximation von I durch die Summe von Rechteckflächen:

$$S(Z^*, f) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$S(Z^*, f)$ heißt Riemann-Summe. Sie ist abhängig von der Zerlegung Z^* .

Def. 1 Die Funktion f heißt (Riemann-)integrierbar über $[a, b]$ falls für jede Zerlegungsfolge Z_μ^* von $[a, b]$ mit $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \Delta(Z_\mu^*) = 0$ gilt: $\lim_{\mu \rightarrow \infty} S(Z_\mu^*, f) = I$. Die Zahl I heißt dann bestimmtes Integral von f über

$[a, b]$. Bezeichnung: $I = \int_a^b f(x) dx$.

Diskussion:

- Def. 1 basiert auf der Forderung $f(x) \geq 0$. Falls $f(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt im Falle der Integrierbarkeit $\int_a^b f(x) dx < 0$:

ABB 82

$$\Rightarrow \text{Flächeninhalt } F = \int_a^b |f(x)| dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

- Man definiert:

$$\int_a^a f(x) dx := 0$$

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx \quad (b > a)$$

- Eigenschaften des bestimmten Integrals:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b c_1 u(x) + c_2 v(x) dx = c_1 \int_a^b u(x) dx + c_2 \int_a^b v(x) dx \text{ für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Satz 1: Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f auf $[a, b]$ integrierbar.

Diskussion:

- Falls f stückweise stetig ist, mit endlich vielen Sprungstellen, so ist f ebenfalls integrierbar (Integration von Sprungstelle zu Sprungstelle).

ABB 93

- Nicht integrierbar ist bspw. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ irrational} \\ 0 & x \text{ rational} \end{cases}$

4.1.2 Sammfunktion und unbestimmtes Integral

Satz 2: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert (mindestens) ein $\xi \in (a, b)$ mit:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

Anschaulich:

ABB 94

Wir nennen $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ den Integralmittelwert von f auf $[a, b]$.

Integral mit variabler oberer Grenze:

Wir betrachten $\int_a^x f(t) dt =: F(x)$

ABB 95

Satz 3: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ auf $[a, b]$ differenzierbar und es gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Beweis:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \stackrel{\text{Satz 2}}{=} \frac{f(\xi) \cdot (x+h-x)}{h} = f(\xi) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x) \text{ da } f \text{ stetig.}$$

$$\Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Def. 2: Die Funktion F heißt *Stammfunktion* von f (auf $[a, b]$), wenn gilt $F'(x) = f(x)$.

Diskussion: Ist F eine Stammfunktion, so ist auch \tilde{F} mit $\tilde{F}(x) = F(x) + C$ eine Stammfunktion.

Def. 3: Die Menge $\{F(x) + C | C \in \mathbb{R} \text{ aller Stammfunktionen von } f, \text{ wobei } F \text{ beliebige Stammfunktion von } f \text{ ist,}\}$ heißt *unbestimmtes Integral* von f .

Bezeichnung: $\int f(x) dx = F(x) + C$

4.1.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Satz 4: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und F beliebige Stammfunktion von f .

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beweis: Satz 3 liefert $F_1(x) := \int_a^x f(t) \, dt$ ist Stammfunktion von f . Also gilt $F(x) = F_1(x) + k$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = F_1(b) + k - \underbrace{F_1(a)}_{=0} - k = \int_a^b f(t) \, dt$$

Diskussion:

$$1.) \quad \underbrace{\int_a^b f(x) \, dx}_{\text{Flächeninhaltsproblem, Integralrechnung}} = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\substack{\text{Stammfunktion,} \\ \text{Umkehrung der Differentialrechnung}}}$$

Dieser Term ist also der Zusammenhang zwischen der Differential- und der Integralrechnung.

$$2.) \text{ Symbolik: } \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \Leftrightarrow \underbrace{\int dF(x)}_{F(x)+C} = \int f(x) \, dx$$

3.) Aus Tabellen zur Differentiation lassen sich Integrationsregeln ableiten.

Beispiele:

$$\begin{aligned} \text{a.) } \frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x \\ \Leftrightarrow \int -\sin x \, dx &= \cos x + C^* \quad | \cdot (-1) \\ \int \sin x \, dx &= -\cos x + \underbrace{C}_{=-C^*} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.) } \frac{d}{dx} x^{\alpha+1} &= (\alpha+1)x^\alpha \\ \Leftrightarrow \int x^\alpha \, dx &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\text{falls } \alpha \neq -1) \end{aligned}$$

4.2 Integrationsmethoden

4.2.1 Substitution

Zu berechnen ist $\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx$. Bekannt sei dabei die Stammfunktion F von f . Dann gilt:

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx \stackrel{\text{Subst.}}{u=g(x)} \int f(u) \, du = F(u) + C = \stackrel{u=g(x)}{=} F(g(x)) + C$$

Substitution $u = g(x)$ impliziert $\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x) \, dx$.

Merke: Anwendung dieser Methode ist zweckmäßig, wenn der Integrand das Produkt eine Verknüpfung zweier Funktionen mit der Ableitung der inneren Funktion ist und eine Stammfunktion für die äußere Funktion bekannt ist.

$$\text{Bsp. 1: } \int \frac{1}{x} \sqrt[3]{\ln x} \, dx \stackrel{\substack{u=\ln x \\ dx=\frac{1}{x} du}}{=} \int \underbrace{\sqrt[3]{u}}_{u^{\frac{1}{3}}} \, du = \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} (\ln x)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$\text{Bsp. 2: } \int x e^{-x^2} \, dx \stackrel{\substack{u=-x^2 \\ dx=-\frac{du}{2x}}}{=} \int x e^u \frac{du}{-2x} = -\frac{1}{2} \int e^u \, du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

Bsp. 3: (Substitution bei bestimmten Integral)

- 1. Variante: Grenzen ersetzen

$$I = \int_0^{\sqrt{8}} x \sqrt{1+x^2} \, dx \stackrel{\substack{u=1+x^2 \\ dx=\frac{du}{2x}}}{=} \int_1^9 x \sqrt{u} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \, du = \left[\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^9 = \frac{1}{3} (27 - 1) = \frac{26}{3}$$

$$\text{Grenzen in Substitution einsetzen } u = 1 + x^2 \Rightarrow u_{\text{unt}} = 1 + 0^2 = 1 \quad u_{\text{ob}} = 1 + \sqrt{8}^2 = 9$$

- 2. Variante: Erst unbestimmtes Integral lösen

$$I = \int_0^{\sqrt{8}} x \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

Dann Grenzen einsetzen:

$$I = \left[\frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{8}} = \frac{1}{3} (27 - 1) = \frac{26}{3}$$

$$\text{Bsp. 4: } \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C$$

(Zähler = Ableitung des Nenners)

$$\text{Nutze dazu die Substitution } u = f(x), \quad dx = \frac{du}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow \int \dots = \int \frac{1}{u} \, du = \ln |u| + C = \ln |f(x)| + C$$

Bsp. 5: (lineare Substitution)

$$\text{Allgemein: } \int f(ax+b) \, dx \stackrel{\substack{u=ax+b \\ \frac{du}{dx}=a}}{=} \int f(u) \frac{du}{a} \stackrel{F: \text{Stammfkt. von } f}{=} \frac{1}{a} \cdot F(u) + C$$

$$\text{a.) } \int \cos(3x) \, dx = \frac{1}{3} \sin(3x) + C$$

$$\text{b.) } \int e^{-2x} \, dx = \frac{1}{-2} e^{-2x} + C$$

$$\text{c.) } \int (3x+4)^6 \, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} (3x+4)^7 + C$$

$$\text{d.) } \int \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right) \, dx = 2 \cdot -\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + C$$

Diskussion: Neben diesen „natürlichen“ und leicht erkennbaren Substitutionen sind weiter Substitutionen durch die Einführung von „künstlichen“ Variablen möglich:

$$\int f(x) \, dx \stackrel{\substack{x=f(t) \\ \frac{dx}{dt}=\dot{\varphi}(t)}}{=} \int f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \, dt$$

Dies entspricht der Substitutionsregel, von rechts nach links gelesen. Falls die rechte Seite davon integrierbar ist (mit Stammfunktion H), dann:

$$\int f(x) dx = H(t) + C = H(\varphi^{-1}(t)) + C \quad (\text{falls } \varphi^{-1} \text{ existiert})$$

Bsp. 6:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \stackrel{\substack{x=\sinh(t) \\ \frac{dx}{dt}=\cosh(t)}}{\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1} = \int \frac{1}{\cosh(t)} \cosh(t) dt = \int dt = t + C = \operatorname{arcsinh}(x) + C$$

Für weitere geeignete Substitutionen siehe Integrationstabelle.

4.2.2 Partielle Integration

Produktregel der Differentiation:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x)) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ \Rightarrow u(x)v(x) \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx \\ \Rightarrow \boxed{\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx} \end{aligned}$$

Bsp. 7:

$$\begin{aligned} \text{a.) } \int \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{\sin(2x)}_{v'(x)} dx &= \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{-\frac{1}{2} \cos(2x)}_v - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{-\frac{1}{2} \cos(2x)}_v dx = -\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C \\ u'(x) &= 1 \quad v(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\text{b.) } \int \underbrace{x^3}_{v'} \underbrace{\ln x}_u = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4} x^4 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C = \frac{1}{4} x^4 \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + C$$

Merke: Typische Anwendungsfälle für partielle Integration (mit $p(x)$ jeweils als u):

- $\int p(x) e^{ax} dx$
- $\int p(x) \cos(ax) dx$
- $\int p(x) \sin(ax) dx$

aber (mit $\ln(x)$ jeweils als u):

- $\int p(x) \cdot \ln(x) dx$
- $\int x^\alpha \cdot \ln(x) dx$

Bsp. 8:

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &\stackrel{\substack{u=\arctan(x) \\ v' \equiv 1}}{=} x \cdot \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(|x^2 + 1|) + C \\ u' &= \frac{1}{1+x^2} \quad v = x \end{aligned}$$

4.2.3 Integration gebrochen rationaler Funktionen

Gegeben: Gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Integration erfolgt in 5 Schritten:

1.) Falls f unecht gebrochen: Polynomdivision erhalten dann $f(x) = \underbrace{a(x)}_{\text{Polynom}} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{\text{echt gebrochen}}$

2.) Nullstellen von q ermitteln. Dann Zerlegung q :

$$q(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdot (x - \alpha_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_1 + q_1)^{m_1} \cdot (x^2 + p_2 + q_2)^{m_2} \cdot \dots$$

k_i : reelle Nullstellen m_i : nicht reell zerlegbar

Dabei kürzt man eventuelle gemeinsame Faktoren in r und q heraus.

3.) Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \text{Summe von Partialbrüchen}$$

Jeden Faktor der Form $\begin{cases} (x - \alpha)^k \\ (x^2 + px + q)^m \end{cases}$ der Gleichung entspricht der Anteil

$$\begin{cases} \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k} \\ \frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{B_mx + C_m}{(x^2 + px + q)^m} \end{cases} \text{ in dieser Summe.}$$

Bsp. 9:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 4}{(x - 1)^3(x + 5)(x^2 + 2x + 2)^2} \\ &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3} + \frac{D}{x + 5} + \frac{Ex + F}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 2x + 2)^2} \end{aligned}$$

Beachte: $x^2 + 2x + 2$ ist reell nicht weiter zerlegbar, Nullstelle: $1 \pm i$.

4.) Ermittlung der Koeffizienten durch

- Multiplikation des Ansatzes der Partialbruchzerlegung mit $q(x)$
- Kombination der folgenden beiden Methoden
 - a.) Einsetzen der reellen Nullstellen
 - b.) Koeffizientenvergleich
 (falls q nur reelle Nullstellen hat, reicht Methode a.)

5.) Integration der Partialbrüche

$$\text{a.) } \int \frac{1}{(x - \alpha)^j} dx = \begin{cases} \ln(|x - \alpha|) + C & j = 1 \\ \frac{1}{1 - j}(x - \alpha)^{1-j} + C & j = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

$$\text{b.) } \int \frac{3x + C}{(x^2 + px + q)^j} dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x + q)}{(x^2 + px + q)^j} + \frac{C - \frac{Bp}{2}}{(x^2 + px + q)^j} dx$$

$$\bullet \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^2} dx: \text{ Nutze Substitution.}$$

$$\bullet \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^j} \overset{\text{quadratische Ergänzung}}{=} \int \frac{1}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^j} dx \overset{u=x+\frac{p}{2}}{=} \int \frac{1}{(u^2 + a^2)^j} du$$

$$\begin{cases} j = 1 & \text{Stammfunktion siehe Merkblatt} \\ j > 1 & \text{siehe weitere Formelsammlung (selten)} \end{cases}$$

Bsp. 10: $I = \int \frac{3x + 4}{x^2 + 2x - 3} dx$

- echt gebrochen
- Nullstellen des Nenners: $x_1 = -3, x_2 = 1$
 $\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

Ansatz für PBZ:

$$\frac{3x + 4}{(x + 3)(x - 1)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 1} \quad | \cdot (x + 3)(x - 1)$$

$$3x + 4 = A(x - 1) + B(x + 3)$$

Einsetzen der NS:

$$x_1 : -5 = A \cdot (-4) \Rightarrow A = \frac{5}{4}$$

$$x_2 : 7 = B \cdot 4 \Rightarrow B = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{5}{4}}{x + 3} dx + \int \frac{\frac{7}{4}}{x - 1} dx$$

$$= \frac{5}{4} \ln(|x + 3|) + \frac{7}{4} \ln(|x - 1|) + C$$

Bsp. 11: $I = \int \frac{7x^2 - 10x + 37}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)} dx$

- echt gebrochen
- Nenner reell nicht weiter zerlegbar (denn Nullstellen von $x^2 - 4x + 13$ sind $x_{1/2} = 2 \pm 3i$)
- Partialbruchzerlegung:

$$\frac{7x^2 - 10x + 37}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 4x + 13} \quad | \cdot \text{Nenner}$$

$$7x^2 - 10x + 37 = A(x^2 - 4x + 13) + (Bx + C)(x + 1)$$

$$= (A + B)x^2 + (-4A + B + C)x + (13A + C)$$

Einsetzen der Nullstelle $x = -1$: $54 = 18A \Rightarrow A = 3$

Koeffizientenvergleich x^2 : $7 = A + B \Rightarrow B = 4$

x^0 : $13A + C \Rightarrow C = -2$

$$\Rightarrow \int \frac{7x^2 - 10x + 37}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)} dx = \int \underbrace{\frac{3}{x + 1}}_a + \underbrace{\frac{4x - 2}{x^2 - 4x + 13}}_b dx$$

$$a : \int \frac{3}{x + 1} dx = 3 \ln |x + 1| + C_1$$

$$\begin{aligned}
 b: \int \frac{4x-2}{x^2-4x+13} dx &= \int \frac{2(2x-4)-2+8}{x^2-4x+13} = 2 \underbrace{\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{6}{x^2-4x+13}}_{I_2} dx \\
 I_1 &= \int \frac{2x-4}{x^2-4x+13} dx \stackrel{\text{Subst.}}{=} \ln|x^2-4x+13| + C_2 \\
 I_2 &= 6 \int \frac{dx}{(x-2)^2+9} = 6 \int \frac{du}{u^2+3^2} = 6 \cdot \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{u}{3}\right) + C_3 = 2 \cdot \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C_3 \\
 \Rightarrow I &= 3 \ln|x+1| + 2 \ln(x^2-4x+13) + 2 \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C_4
 \end{aligned}$$

4.2.4 Integration von Potenzreihen

Satz 1: Es sei $f: (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ die Grenzfunktion der Potenzreihe (mit Konvergenzradius r). Dann ist $F: (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$ eine Stammfunktion von f (gliedweises Integrieren im Konvergenzintervall).

Bsp. 12:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad |x| < 1 \text{ (siehe Übung, nutze geometrische Reihe)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + C_1$$

$$\text{Wir wissen aber auch: } \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C_2$$

$$\Rightarrow \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + C_3 \quad \text{mit } C_3 = 0 \text{ (setze } x = 0 \text{ ein) und } |x| < 1.$$

Bsp. 13: Gesucht ist Stammfunktion zu $f(x) = e^{-x^2}$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{(t^2)^2}{2!} - \frac{(t^2)^3}{3!} + \dots \right) dt \\
 &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \dots \quad (x \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Diskussion:

- $\int e^{-t^2} dt$ nicht geschlossen auswertbar.
- Für nicht zu große x ist die Reihendarstellung zur Auswertung von F gut geeignet.

$$\text{z.B. } \int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!} + \frac{1}{13 \cdot 6!} - \frac{1}{15 \cdot 7!} + \frac{1}{17 \cdot 8!} - \dots$$

0,746824...

$$|\text{Fehler}| < \frac{1}{19 \cdot 9!} = 1,4504 \cdot 10^{-7} \text{ (vgl. Satz über Leibnitz-Kriterium)}$$

4.3 Numerische Integration

Ziel: Berechne $I = \int_a^b f(x) dx$ falls Stammfunktion „kompliziert“ oder nicht elementar angebar.

Prinzip:

a.) Zerlegung von $[a, b]$ in n gleichlange Teilintervalle der Länge $h = \frac{1}{n}(b - a)$
 \Rightarrow Teilpunkte sind $x_k = a + k \cdot h$ ($k = 0, 1, \dots, n$), $y_k = f(x_k)$
 ABB 101

b.) Ersetze $f(x)$ über den Teilintervallen durch einfachere Funktionen.
 z.B.:

- lineare Funktionen \rightsquigarrow Trapez Regel
- quadratische Funktionen \rightsquigarrow SIMPSON-Regel

ABB 102+3

Als Näherung für I ergibt sich für die Simpson-Regel:

$$I \approx S_n(h) = \frac{h}{3} ((y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}))$$

falls n gerade ist.

Diskussion:

1.) Fehlerabschätzung:

$$I = S_n(h) - \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) \quad a < \xi < b$$

(falls $f^{(4)}$ stetig in $[a, b]$)

2.) Simpson-Regel ist für Polynome einschließlich Grad 3 exakt.

3.) Praktische Durchführung: Schrittweithalbung

Startwert: $S^{(1)} = S_n(h)$ für geeignetes h . $S^{(2)} = S_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$, $S^{(3)} = S_{4n}\left(\frac{h}{4}\right)$, usw. bis dich die Ziffern in gewünschter Genauigkeit nicht mehr ändern.

Bsp.: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

$n = 4, h = 0,25$

k	x_k	y_0, y_n	y_{2j+1}	y_{2j}
0	0	1		
1	0,25		0,939413	
2	0,5			0,778801
3	0,75		0,569783	
4	1	0,367879		
		1,367879	1,509196	0,778801

$$S_4(0,25) = \frac{0,25}{3} (1,367879 + 4 \cdot 1,509196 + 2 \cdot 0,778801)$$

4.4 Uneigentliche Integrale

- Vorbetrachtung:

Bisher $\int_a^b f(x) dx$ wobei $[a, b]$ endliches Integral auf f stückweise stetig auf $[a, b]$ (daher beschränkt)

- 2 Erweiterungen:

- 1.) unendliches Intervall $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ oder $(-\infty, \infty)$
- 2.) Funktion f unbeschränkt (Unendlichkeits- bzw. Polstellen)

Unendliches Intervall (zu 1.)

$$a.) \int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^b f(x) dx$$

analog:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x) dx$$

$$b.) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \text{ für beliebiges } c \in \mathbb{R} \text{ (bspw. } c = 0 \text{)}.$$

Diskussion:

- 1.) Falls die Grenzwerte existieren, so heißt das Integral konvergent, sonst divergent.
- 2.) Ein berühmtes Beispiel ist die Γ -Funktion:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0)$$

Eigenschaft: $\Gamma(n) = (n-1)!$ falls $n \in \mathbb{N}$

Bsp. 1:

$$a.) \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (-e^{-A} + e^0) = 1$$

$$b.) \int_0^{\infty} \cos x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [\sin(x)]_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (\sin A - \underbrace{\sin 0}_{=0})$$

Grenzwert existiert nicht \Rightarrow Integral unbestimmt divergent.

$$c.) \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [\ln|x|]_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln A - \underbrace{\ln 1}_0) = \infty$$

\Rightarrow bestimmt divergent

Unbeschränkter Integrand (zu 2.)

- a.) bspw. Unendlichkeitsstellen bei b :

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

ABB 104

- b.) falls Unendlichkeitsstelle x_0 im Inneren von $[a, b]$ liegt:

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx$$

... und nutzen nun a.):

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Bsp. 2:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^4 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (2\sqrt{4} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 4$$

Unendliches Intervall und unbeschränkter Integrand (Kombination von 1. und 2.)

Bsp. 3

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

mit $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \underbrace{\quad}_{\text{Subst. } t=\sqrt{x-1}} = 2 \arctan \sqrt{x-1} + C:$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} [2 \arctan \sqrt{x-1}]_{1+\varepsilon}^2 + \lim_{A \rightarrow \infty} [2 \arctan \sqrt{x-1}]_2^A \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} (2 \arctan 1 - 2 \arctan \sqrt{\varepsilon}) + \lim_{A \rightarrow \infty} (2 \arctan \sqrt{A-1} - 2 \arctan 1) \\ &= \underbrace{\lim_{A \rightarrow \infty} 2 \arctan \sqrt{A-1}}_{\pi} - \underbrace{\lim_{\varepsilon \searrow 0} 2 \arctan \sqrt{\varepsilon}}_0 \\ &= \pi \end{aligned}$$

4.5 Anwendungen

4.5.1 Geometrische Anwendungen

4.5.1.1 Inhalte ebener Flächen

- ABB 105

mit $a < b$ und $f(x) \geq 0$:

$$F = \int_a^b f(x) dx$$

- ABB 106

mit $a < b < c$:

$$F = \int_a^c |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \left| \int_b^c f(x) dx \right| = \int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- ABB 107

mit $f(x)$: obere Funktion und $g(x)$: untere Funktion:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x) dx$$

Bsp. 1: Gesucht ist der Flächeninhalt F des von der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) begrenzten Bereichs.

ABB 108

$$y = \pm b \sqrt{a - \frac{x^2}{a}}$$

$$\begin{aligned} F &= 4 \cdot \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \stackrel{\text{Subst. } x = a \sin t}{=} \frac{4b}{a} \left[\frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) \right]_0^a \\ &= \frac{4b}{a} \frac{1}{2} a^2 \underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}} = \pi \cdot ab \end{aligned}$$

4.5.1.2 Bogenlänge

Bogenlänge ebener Kurven

ABB 109

Kurve K mit Parameterdarstellung. $x = x(t)$ $y = y(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$

- Vorgehen: Approximieren durch Streckenzug, dann Verfeinerung

$$\text{Länge des Streckenzugs: } \sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

ABB 110

$$\Rightarrow (\text{Mittelwertsatz der Differentialrechnung}) \sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\dot{x}(u_i))^2 + (\dot{y}(v_i))^2} \cdot \Delta t_i$$

mit $u_i, v_i \in (t_{i-1}, t_i)$

Verfeinerung:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt$$

Diskussion:

- Bogenlänge der Kurve $\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ zwischen α und t ist

$$s = \int_{\alpha}^t \underbrace{\sqrt{(\dot{x}(u))^2 + (\dot{y}(u))^2}}_{|\dot{r}(u)|} du =: f(t)$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = |\dot{r}(t)| \Rightarrow ds = |\dot{r}(t)| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \text{ (heißt Bogenelement)}$$

- Tabelle (Bogenlänge ebener Kurven)

Kurvendarstellung	Bogenlänge s , Bogenelement ds
$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$	$s = \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}_{ds} dt$
$y = f(x), x \in [a, b]$	$s = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}_{ds} dx$
$x = g(y), y \in [c, d]$	$s = \int_c^d \underbrace{\sqrt{1 + (g'(y))^2}}_{ds} dy$
$r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$	$s = \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}}_{ds} d\varphi$

Bogenlänge von Raumkurven

Gegeben sei Kurve K mit Parameterdarstellung $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$.

Die Bogenlänge berechnet sich dann mittels

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt$$

Bsp. 2 (Schraubenlinie)

$$\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ \frac{h}{2\pi} t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) &= \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix} \\ s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}_{a^2} + \frac{h^2}{(2\pi)^2}} dt \\ &= 2\pi \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \\ &= \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}\end{aligned}$$

4.5.1.3 Volumen von Rotationskörpern

ABB 118

a.) Gegeben:

- Kurve K mit $y = f(x)$, $x \in [a, b]$
- Das Flächenstück F_x zwischen Kurve und x -Achse rotiere um die x -Achse.

Gesucht:

- Volumen V_x des dabei erzeugten Körpers

Es gilt: $V_x = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$

(Idee: Approximation von F_x durch Rechteckflächen

$\xrightarrow{\text{Rotation}} \text{Zylinderscheiben } V_x \approx \sum_i \pi (f(\xi_i))^2 \Delta x_i$

Grenzübergang: $V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Diskussion:

a) Allgemein gilt $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$ ($a < b$)

b) Falls K in Parameterform gegeben $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \dots t \dots \beta$, dann ergibt sich

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (y(t))^2 \cdot \underbrace{\dot{x}(t) dt}_{dx}, \text{ wobei ... (die Orientierung) so zu wählen ist, dass } a := x(\alpha) < x(\beta) = b \text{ gilt. Unter Umständen kann } \alpha < \beta \text{ sein.}$$

b.) Gegeben: Kurve $x = g(y)$, $y \in [c, d]$

ABB 119

Gesucht: Volumen V_y bei Rotation von F_y um y -Achse.

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy$$

Für Parameterdarstellung:

$$V_y = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (x(t))^2 \cdot \underbrace{\dot{y}(t) dt}_{dy}, \text{ wobei } c = y(\alpha) < y(\beta) = d$$

Bsp. 3: Gesucht ist das Volumen eines Rotationsparaboloids der Höhe h und mit Basisradius R .

ABB 120

$$\text{Kurve: } y = ax^2, \quad h = aR^2 \Rightarrow a = \frac{h}{R^2}$$

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_0^h x^2 dy = \pi \int_0^h \frac{y}{a} dy = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h} y dy \\ &= \frac{\pi R^2}{h} \int_0^h y dy = \frac{\pi R^2}{h} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^h \\ &= \frac{\pi R^2}{h} \cdot \frac{1}{2} h^2 = \frac{\pi R^2 h}{2} \end{aligned}$$

4.5.1.4 Mantelflächen von Rotationskörpern

a.) Gegeben: Kurve K mit $y = f(x) \geq 0, x \in [a, b]$

Gesucht: Die von der Kurve K , bei Rotation um x -Achse erzeugte Rotationsfläche M_x .

ABB 121

$$M_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

(Approximation der Kurve K durch Polygonzug

$\xrightarrow{\text{Rotation}}$ Kegelstumpffläche

$$M_x \approx \sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) \Delta s_i$$

$$\rightarrow 2\pi \int_a^b f(x) \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}_{ds} dx \quad (\text{Bogenelement})$$

$$\text{Allgemein gilt: } M_x = 2\pi \int_a^b y ds$$

b.) Gegeben: Kurve $x = g(y) \geq 0, y \in [c, d]$

Gesucht: Mantelfläche bei Rotation um die y -Achse.

$$M_y = 2\pi \int_K x ds = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

Für Parameterdarstellung:

$$M_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt \quad \text{mit } \alpha \leq t \leq \beta$$

Bsp. 4: Kugeloberfläche

ABB 122

Halbkreis K soll um x -Achse rotiert werden.

$$x = R \cdot \cos t$$

$$y = R \cdot \sin t$$

$$t \in [0, \pi]$$

$$\dot{x}(t) = -R \sin t \quad \dot{y}(t) = R \cos t$$

$$\begin{aligned} M_x &= 2\pi \int_K y ds = 2\pi \int_0^{\pi} y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} R \sin t \cdot R dt = 2\pi R^2 [-\cos t]_0^{\pi} \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

4.5.1.5 Fourier-Reihen

Gegeben: Funktion $f(x)$, $x \in [0, T]$

ABB 123

Gesucht: Reihendarstellung mit trigonometrischen Funktionen der Periode $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \dots$

d.h. (mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$):

$\cos(\omega x), \cos(2\omega x), \cos(3\omega x), \dots$

$\sin(\omega x), \sin(2\omega x), \sin(3\omega x), \dots$

Ansatz ist daher:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)), \text{ wobei die Koeffizienten } a_k, b_k, k \geq 0 \text{ zu ermitteln sind.}$$

Motivation ist: Approximation von f zum Zwecke der Speicherplatzreduzierung (Abgespeichert werden i.A. nur wenige der Koeffizienten a_k und b_k . Das gilt auch dann, wenn f in diskreter Form vorliegt, d.h. in Form von Messwerten y_k an vielen Messstellen x_k .)