Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen

Definitionen

- Die Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle x_0 (mit $U(x_0) \subset Db(f)$) differenzierbar, wenn der Grenzwert $f'(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.

  $f'(x_0)$ heißt 1. Ableitung (Differentialquotient) von f an der Stelle x_0.
- f heißt in einem Intervall I differenzierbar, wenn f an jeder inneren Stelle von I differenzierbar ist, und an evtl. vorhandenen Randpunkten einseitig differenzierbar ist.

  Bezeichnungen: $y' = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx}$
- Höhere Ableitungen: $f^{(0)}(x) := f(x)$, $f^{(n)}(x) := \frac{d}{dx}(f^{(n-1)}(x))$, n = 1, 2, 3, ...

Ableitungen der wichtigsten Grundfunktionen

f(x)	f ' (x)
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$
$\cot x$	$-(1+\cot^2 x) = -1/\sin^2 x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

f(x)	f ' (x)
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x = 1/\cosh^2 x$
$\coth x$	$1 - \coth^2 x = -1/\sinh^2 x$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$
$\operatorname{arccot} x$	$-1/(1+x^2)$
$\operatorname{ar\,sinh} x$	$1/\sqrt{x^2+1}$
$\operatorname{ar\,cosh} x$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\operatorname{ar\,tanh} x$	$1/(1-x^2)$
$\operatorname{ar\,coth} x$	$1/(1-x^2)$

Wichtige Differentiationsregeln

Linearität	$(c_1 u(x) + c_2 v(x))' = c_1 u'(x) + c_2 v'(x)$
Produktregel	$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$
Kettenregel	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Logarithmische Differentiation	$f(x) = u(x)^{v(x)} \Rightarrow \ln(f(x)) = v(x) \cdot \ln(u(x))$ $\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$ $\Rightarrow f'(x) = u(x)^{v(x)}(v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)})$