Unendliche Reihen

Begriff

Gegeben sei die Zahlenfolge $(a_n)_{n \geq n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$.

Die Zahlenfolge $(s_n)_{n \geq n_0}$ mit $s_n := \sum\limits_{j=n_0}^{n} a_j$ heißt Partialsummenfolge oder unendliche Reihe, Bezeichnung: $\boxed{\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n}$.

- Die Zahlen a_n heißen Glieder, die Zahlen s_n Partialsummen der Reihe.

  Der Unterschied zwischen a_n und s_n lässt sich am Beispiel eines Sparkontos verdeutlichen. Die Glieder a_n sind die Ein- bzw. Auszahlungen, die Partialsummen s_n die jeweiligen Kontostände, z.B.

n	Ein- bzw. Auszahlung a_n	Kontostand s_n
1	378,00	378,00
2	-38,00	340,00
3	-400,00	-60,00
4	65,00	5,00
5	-78,23	-73,23
6	80,00	6,77
...	...	...

- Ist die Reihe, also die Folge $(s_n)_{n \geq n_0}$ konvergent, so heißt der Grenzwert

  $\boxed{s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n =: \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n}$ die Summe der Reihe. Im Falle der Konvergenz

  bezeichnet also $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ sowohl die Reihe als auch deren Summe!

- Die Reihe heißt (bestimmt oder unbestimmt) divergent, wenn die Partialsummenfolge die entsprechende Eigenschaft hat.

Beispiele:

1) Es sei $\boxed{a_n = a \cdot q^n}$ $(a \neq 0,\ q \neq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ eine geometrische Folge.
   Kennzeichen einer geometrischen Folge ist der konstante Quotient zweier aufeinander folgender Glieder: $a_{n+1} / a_n = q$ für jedes n. Die zugehörige

   Partialsummenfolge $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n$ heißt unendliche geometrische Reihe.

   Für die endliche geometrische Reihe $s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n$ gilt im Falle

   $q \neq 1$ die Summenformel $\boxed{s_n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$, dabei ist a das Anfangsglied, q der

Quotient. Die Anzahl der Summanden ist gleich dem Exponenten (n+1) im Zähler (unabhängig vom Startindex). Aus dieser Summenformel ergibt sich die

Summe der unendlichen geometrischen Reihe $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a\cdot q^n = \frac{a}{1-q} \text{ (für } |q|<1)}$.

Anwendung: Ein periodischer Dezimalbruch ist als Bruch $\frac{m}{n}$ darzustellen,

z.B. $x = 3{,}1\overline{72} = 3{,}1727272\ldots =: 3{,}1 + x_1$, für den periodischen Anteil $x_1 = 0{,}0727272\ldots$ erhält man eine unendliche geometrische Reihe mit

$a = 0{,}072 = 72/1000$ und $q = 10^{-2}$ und damit $x_1 = \frac{a}{1-q} = \frac{72/1000}{99/100} = \frac{72}{990} = \frac{4}{55}$

sowie $x = \frac{31}{10} + \frac{4}{55} = \underline{\underline{\frac{349}{110}}}$.

Bei beliebiger Basis b gilt $\boxed{q = b^{-p}}$ (p ... Periodenlänge).

2) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ heißt harmonische Reihe.

Offensichtlich ist die Partialsummenfolge (s_n) streng monoton wachsend. Sie ist außerdem nicht beschränkt. Dies ergibt sich wie folgt:

Es sei $k > 4$ eine natürliche Zahl. Für alle $n \geq 2^k$ gilt

$$\underline{s_n \geq} s_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{16} + \ldots + 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k} = \underline{1 + \frac{k}{2}}$$

Da k beliebig groß wählbar ist, ergibt sich $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. Die harmonische Reihe ist also bestimmt divergent, Schreibweise $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty}$.

Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|}$ konvergent ist. Eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe *) heißt bedingt konvergent.

Eine absolut konvergente Reihe ist dagegen stets im gewöhnlichen Sinne konvergent.

*) Derartige Reihen gibt es, z.B. die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

Notwendiges Konvergenzkriterium

$\boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ konvergent}} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$. Anwendung meist in logisch äquivalenter

Form: $\boxed{\text{Glieder } a_n \text{ konvergieren nicht gegen } 0} \Rightarrow \boxed{\text{Reihe } \sum a_n \text{ ist divergent}}$.

Hinreichende Konvergenzkriterien

A) LEIBNIZ-Kriterium für alternierende Reihen

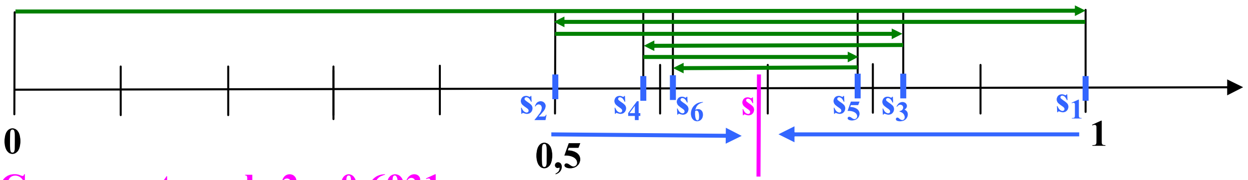
$$\boxed{b_n \geq b_{n+1} > 0\,(n \in \mathbb{N}) \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = 0} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + - \ldots \text{ ist konvergent.}}$$

D.h., wenn die Beträge b_n der Glieder $a_n := (-1)^n b_n$ einer alternierenden Reihe eine monotone Nullfolge bilden, dann ist die Reihe konvergent.

Der Fehler bei Approximation der Reihensumme s durch die Partialsumme s_n ist höchstens gleich dem Betrag des ersten weggelassenen Gliedes: $\boxed{|s-s_n| \leq b_{n+1}}$.

Veranschaulichung: „Sprünge" ($\rightleftarrows$), abwechselnd nach rechts bzw. links mit immer kleiner werdender „Sprungweite" a_n. Die „Landepunkte" s_n nähern sich dem Grenzwert s. Beispiel: Alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

Zahlenwerte $s_1 = 1$, $s_2 = 0{,}5$, $s_3 = 0{,}8\overline{3}$, $s_4 = 0{,}58\overline{3}$, $s_5 = 0{,}78\overline{3}$, $s_6 = 0{,}61\overline{6}$, …



Grenzwert $s = \ln 2 = 0{,}6931$

B) Vergleichskriterien für Reihen mit nichtnegativen Gliedern

Für Reihen mit nichtnegativen Gliedern ($a_n \geq 0$) ist s_n monoton wachsend, für solche Reihen ist absolute Konvergenz identisch mit (gewöhnlicher) Konvergenz.

Es gilt in diesem Falle $\sum\limits_{n=n_o}^{\infty} a_n < \infty$.

Divergenz ist gleichbedeutend mit bestimmter Divergenz: $\sum\limits_{n=n_o}^{\infty} a_n = \infty$

Majoranten-Kriterium

$$\boxed{0 \leq a_n \leq b_n \text{ (für } n \geq n_1 \geq n_o) \wedge \sum_{n=n_o}^{\infty} b_n \text{ konvergent}} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=n_o}^{\infty} a_n \text{ konvergent}}$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=n_o}^{\infty} b_n$ heißt in diesem Falle konvergente Majorante von $\sum\limits_{n=n_o}^{\infty} a_n$.

(Anschaulich: Die Summe der Reihe $\sum b_n$ ist $< \infty$, damit gilt das Gleiche für die Reihe $\sum a_n$ mit den kleineren Gliedern.)

Minoranten-Kriterium

$$\boxed{0 \le b_n \le a_n \text{ (für } n \ge n_1 \ge n_0) \wedge \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ divergent}} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ divergent}}$$

Die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ heißt in diesem Falle divergente Minorante von $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

(Anschaulich: Es ist $\sum b_n = \infty$, damit gilt wegen $a_n \ge b_n$ auch $\sum a_n = \infty$.)

Vergleichsreihen zur Anwendung von Majoranten- bzw. Minoranten-Kriterium

Die Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ ist } \begin{cases} \text{konvergent} & \text{für } \alpha > 1 \\ \text{divergent} & \text{für } \alpha \le 1 \end{cases}}$.

Die vereinfachte Anwendung der Vergleichskriterien verdeutlicht das folgende

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^3+n^2+31}$, wegen der Dominanz der höchsten Potenzen in Zähler und Nenner verhält sich die Reihe so wie die Reihe $\sum \frac{n^2}{n^3} = \sum \frac{1}{n}$. Diese ist divergent (harmonische Reihe, $\alpha = 1$), also gilt auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^3+n^2+31} = \infty$.

C) Quotienten- und Wurzelkriterium für Reihen mit beliebigen Gliedern

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \begin{cases} < 1 \\ > 1 \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent} \\ \text{divergent} \end{cases}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1 \\ > 1 \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent} \\ \text{divergent} \end{cases}}$$

Rechenregeln

- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ seien konvergent mit den Summen a bzw. b.

  Dann gilt $\sum (a_n + b_n) = a + b$ und $\sum c a_n = c \cdot a$.

- $\boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent}} \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{Die Glieder } a_n \text{ lassen sich beliebig umordnen, ohne dass sich die Summe ändert.}}$

- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergent mit den Summen a bzw. b.

Dann gilt $\boxed{\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i b_j = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) = a \cdot b}$. Die Anordnung der Summanden ist beliebig, z.B. Ordnung nach Indexsumme (Cauchy-Produkt.)