Äquivalenzrelationen

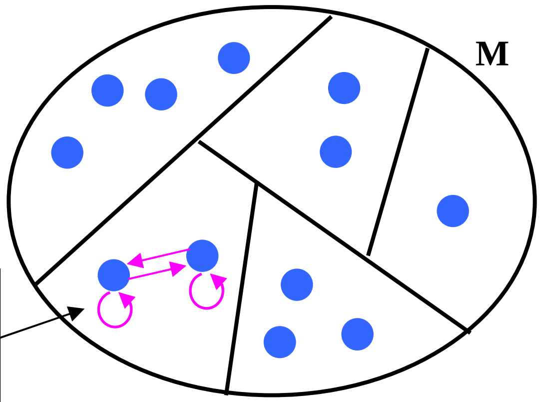
Definition:

Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt Äquivalenzrelation auf M, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Äquivalenzklassen:

Durch eine Äquivalenzrelation wird M vollständig in paarweise elementefremde (disjunkte) Äquivalenzklassen zerlegt. Die Menge aller Äquivalenzklassen, die von einer Äquivalenzrelation auf M erzeugt werden, heißt Quotientenmenge M/T.

Eine Äquivalenzklasse enthält alle Elemente, die untereinander erreichbar sind und nur diese. Das sind genau die Elemente, die bezüglich einer bestimmten Eigenschaft nicht unterscheidbar (= äquivalent) sind.



Jedes Element besitzt eine Schlinge und zwischen je zwei Elementen einer Äquivalenzklasse gibt es einen Doppelpfeil.

Beispiele: **1) Es sei M eine beliebige (nichtleere) Menge. Die Identitätsrelation $T_1 := I_M = \{(x,y) \in M \times M \mid x = y\}$ ist eine Äquivalenzrelation. „Äquivalent“ bedeutet bei dieser Relation „gleich“. Jedes Element ist nur mit sich selbst äquivalent, Äquivalenzklassen sind alle einelementigen Teilmengen $\{x\},\ x \in M$.**

2) Trivialerweise ist auch die sogenannte Allrelation $T_2 := M \times M$ eine Äquivalenzrelation, die allerdings nur eine Äquivalenzklasse (M) besitzt.

3) Es sei $M = \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^*, T_3 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei folgende Relation. $\boxed{(x,y) \in T_3}$ genau dann, wenn gilt: $\boxed{\text{x und y lassen bei Division durch m den gleichen Rest.}}$ Die Bezeichnung für diese u. a. in der Kryptographie außerordentlich wichtige Äquivalenzrelation ist: $\boxed{x \equiv y \pmod m}$, gelesen x kongruent y modulo m.

Äquivalenzklassen sind die Restklassen modulo m, Beispiel m = 3.

Restklasse 0: {…, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, …} = $\{3k + 0 \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

Restklasse 1: {…, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, …} = $\{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

Restklasse 2: {…, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, …} = $\{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

4) Es sei M die Menge aller Geraden einer Ebene, $T_4 \subseteq M \times M$ mit $\boxed{(x,y) \in T_4}$ genau dann, wenn $\boxed{\text{x und y parallel}}$ sind, T_4 ist eine Äquivalenzrelation auf M, Bezeichnung $\boxed{x \| y}$.