Mathematik I

Vorlesungsskript

Falk Jonatan Strube

Vorlesung von Herrn Meinhold

29. Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

Teil I.
Elementare Grundlagen

1. Aussagen und Grundzüge der Logik

2. Mengen

2.1. Begriffe

Menge: Zusammenfassung gewisser wohl unterscheidbarer Objekte (Elemente) mit einem gemeinsamen Merkmal zu einem Ganzen.

Diskussion: Naiver Mengenbegriff führt zu Widerpsrüchen. z.B. Menge X aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.
$X = \{A | A\ Menge, A \notin A\}$
$X \in X$? Wenn $X \in X \Rightarrow X \notin X$ und $X \notin X \Rightarrow X \in X$ (Widerspruch!).
Diese Widersprüche können umgangen werden, wenn nur Teilmengen einer sogenannten Grundmenge betrachtet werden.

Bezeichungen:

- meist große Buchstaben für Mengen: $A, B, ..., M, ..., X$
- $\boxed{x \in M}$... x ist Element von M
- $\boxed{x \notin M}$... x ist kein Element von M

Schreibweise:
$M = \{\underbrace{...}_{\text{Elemente}}\}$ oder $M = \{x | p(x)\}$
mit $p(x) =$ Aussage, die genau für die Elemente x aus M wahr ist.

Wichtige Grundmengen:

- $\mathbb{N}$ ... Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{Z}$ ... Menge der ganzen Zahlen $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{Q}$ ... Menge der rationaln Zahlen $\{x | x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
- $\mathbb{R}$ ... Menge der reelen Zahlen
- $\mathbb{C}$ ... Menge der komplexen Zahlen $\{z | z = x + i \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

Bsp. 1:
M_1 ... Menge der Primzahlen kleiner 10, $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$
M_2 ... Menge der reelen Zahlen zwischen 0 und 1 $M_2 = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\} =: \underbrace{(0, 1)}_{\text{Intervallschreibweise}}$

Def. 1: (Intervallschreibweisen)
Es seien a und b reele Zahlen mit $a < b$:
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ ... abgeschlossenes Intervall
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ ... offenes Intervall
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} | -\infty < x < a\} = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$
usw.

Leere Menge: z.B. $\{x \in \mathbb{R} | x = x + 1\} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\}$ enthält kein Element.
Bezeichnung: $\emptyset$ oder $\{\}$

2.2. Mengenverknüpfungen

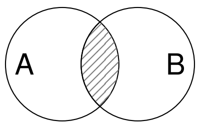
Def. 2:
$\boxed{M_1 = M_2} :\equiv \boxed{\forall x\ (x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2)}$ (*Gleichheit*)

Def. 3:
$\boxed{M_1 \subseteq M_2} :\equiv \boxed{\forall x\ (x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2)}$ (*Inkulsion*) „M_1 ist Teilmenge von M_2“

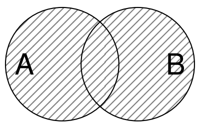
Diskussion:
Ist $M_1 \subseteq M_2$ aber $M_1 \neq M_2$ so kann man schreiben $M_1 \subset M_2$ (echte Teilmenge).

Def. 4:

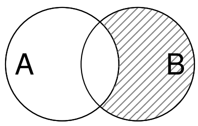
1.) $A \cap B := \{x | x \in A \land x \in B\}$
Durchschnitt von A und B



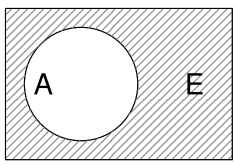
2.) $A \cup B := \{x | x \in A \lor x \in B\}$
Vereinigung von A und B



3.) $A \setminus B := \{x | x \in A \land x \notin B\}$
Differenz „A minus B“



4.) Bei Vorliegen einer Grundmenge E:
$\overline{A} := E \setminus A$
Komplimentärmenge von A



Diskussion: (ausgewählte Rechenregeln)

1.) $\cup$ und $\cap$ sind kommutativ und assoziativ
z.B. gilt $A \cup B = B \cup A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

2.) Allg. I ... Indexmenge, z.B. $\{1, 2, ..., n\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ dann:
$\bigcup\limits_{i \in I} A_i := \{x | \exists i \in I \quad x \in A_i\}$
$\bigcap\limits_{i \in I} A_i := \{x | \forall i \in I \quad x \in A_i\}$

2.3. Relationen

2.3.1. Grundbegriffe

Def. 5:
Die Menge $M_1 \times M_2 := \{(x_1, x_2) | x_1 \in M_1 \wedge x_2 \in M_2\}$ heißt *kartesisches Produkt* der Mengen M_1 und M_2 (= Menge aller geordneten Paare)

Bsp. 2:
$\mathbb{R}$ ... Menge der reelen Zahlen, veranschaulicht durch die Zahlengerade
$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ ... x-y-Ebene

Def. 6:
Eine Teilmenge $T \subseteq M_1 \times M_2$ heißt *(binäre) Relation*.

Diskussion:

1.) Verallgemeinerung: $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1 \in M_1, ..., x_n \in M_n\}$ (= Menge geordneter n-Tupel)
Eine Teilmenge $T \subseteq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ heißt *n-stellige Relation*.

2.) *Jede* Teilmenge von $M_1 \times M_2$ ist eine Relation, also auch die Grenfälle $\emptyset$ (gesamt leere Menge) und $M_1 \times M_2$ (vollständige Menge). Wichtig sind aber im allgemeinen die echten Teilmengen, die die verschiedensten Beziehungen zwischen den Elementen von M_1 und M_2 ausdrücken.

Def. 7: (Eigenschaften binärer Relationen in $M_1 \times M_2$)
Eine Relation $T \subseteq M_1 \times M_2$ heißt:

a) *linksvollständig (linkstotal)*, wenn für jedes $x_1 \in M_1$ (wenigstens) ein $x_2 \in M_2$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

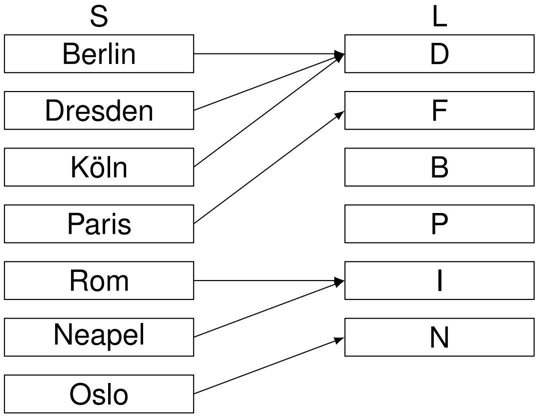
b) *recthvollständig (rechtstotal*, wenn für jedes $x_2 \in M_2$ (wenigstens) ein $x_1 \in M_1$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

c) *rechteindeutig*, wenn für jedes $x_1 \in M_1$ höchstens ein $x_2 \in M_2$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

d) *linkseindeutig*, wenn für jedes $x_2 \in M_2$ höchstens ein $x_1 \in M_1$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

Bsp. 3:
Es seien S bzw. L folgende Mengen von Städten bzw. Ländern:
$S = \{Berlin,\ Dresden,\ Köln,\ Paris,\ Ram,\ Neapel,\ Oslo\}$
$L = \{D(eutschland),\ F(rankreich),\ B(elgien),\ I(talien),\ P(olen),\ N(orwegen)\}$
Die Relation $T \subseteq S \times L$ soll darstellen, welche Stadt in welchem Land liegt.
Man gebe T elementweise an und stelle die Relation graphisch dar!
Welche der Eigenschaften aus Def. 7 treffen zu?

- $T = \{(Berlin, D), (Dresden, D), (K\ddot{o}ln, D), (Paris, F), (Rom, I), (Neapel, I), (Oslo, N)\}$
- graphische Darstellung:



$(x, y) \in T : x \to y$ (gerichteter Graph)

- Eigenschaften:
linksvollständig
nicht rechtsvollständig
rechtseindeutig
nicht linkseindeutig
(solche Relationen nennt man auch „Funktionen“, eindeutige Zuordnung [von Stadt $\to$ Land])

Def. 8: (Eigenschaften binärer Relationen in $M \times M$)
Eine Relation $T \subseteq M \times M$ (Sprechweise auch „Relation auf M“) heißt…

a) *reflexiv*, wenn $(x, x) \in T$ für alle $x \in M$,

b) *symmetrisch*, wenn $(x, y) \in T \Rightarrow (y, x) \in T$,

c) *antisymmetrisch*, wenn $((x, y) \in T \wedge (y, x) \in T) \Rightarrow x = y$,

d) *asymmetrisch*, wenn $(x, y) \in T \Rightarrow (y, x) \notin T$,

e) *transitiv*, wenn $((x, y) \in T \wedge (y, z) \in T) \Rightarrow (x, z) \in T$

… jeweils für *alle* $x, y, z \in M$ gilt.

Bsp. 4:
Welche Eigenschaften aus Def. 8 besitzen folgende Relationen?
Es sei P eine Menge von Personen.

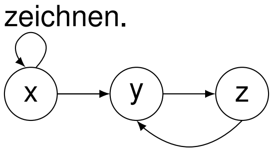
a) Eine Person $x \in P$ sei jünger als $y \in P$, wenn ihr Geburtstag später als der von y ist.
$\curvearrowright J \subseteq P \times P$ mit $J = \{(x, y) | x$ ist jünger als $y\}$.
J ist offensichtlich asymmetrisch (damit auch antisymmetrisch [Die Prämisse der Implikation $((x, y) \in J \wedge (y, x) \in J) \Rightarrow x = y$ ist stets falsch, damit die Implikation stets wahr]) und transitiv.
Eine solche Relation nennt man auch *strikte Ordnungsrelation* (vgl. Abschnitt 2.3.4).

b) Zwei Personon $x \in P$ und $y \in P$ heißen gleichaltrig, wenn x und y das gleiche Geburts*jahr* besitzen.
$\curvearrowright G \subseteq P \times P$ mit $G = \{(x, y) | x$ und y sind gleichaltrig$\}$.
G ist offensichtlich reflexiv, symmetrisch und transitiv.

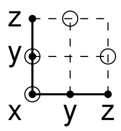
Derartige Relationen nennt man *Äquivalenzrelationen*, vgl. Abschnitt 2.3.3. Sie teilen P in disjunkte sogenannte Äquivalenzklassen auf (x äquivalent y heißt, x und y besitzen gleiches Geburtsjahr).

Graphische Darstellung von Relationen T in $M \times M$ (auf M). Möglichkeiten:

1.) Elemente von M nur einmal darstellen, Pfeildarstellun wie bisher, bei $(x, x) \in T$ eine Schlinge zeichnen.



(gerichteter Graph)

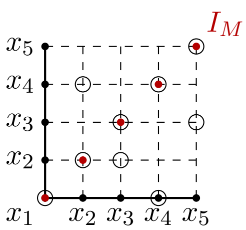
2.) 

(Koordinatensystem)
Diese Variante ist auch bei Relationen in $M_1 \times M_2$ möglich.

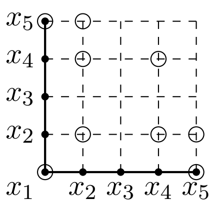
Diskussion:

1.) Die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität lassen sich beim gerichteten Graphen leicht nachprüfen.
Reflexivität: Bei jedem Element ist eine Schlinge.
Symmetrie: Jeder Pfeil $x \to y$ $(y \neq x)$ besitzt „umkehrpfeil" $(x \leftarrow y)$.
Antisymmetrie: Schlinge möglich, aber keine Umkehrpfeile.
Asymmetrie: weder Schlingen noch Umkehrpfeile.
Transitivität: Falls ein Pfeil $x \to y$ eine „Fortsetzung" $y \to z$ besitzt, so verläuft auch ein Pfeil von x nach z.

2.) Auch die Darsteellung von Koordinatensystem lassen sich die Eigenschaften Reflexivität und Symmetrie sofort überprüfen.
Reflexivität: Die Diagonale $I_M = \{(x, x)|x \in M\}$ gehört zu T (I_M heißt auch *Identitätsrelation*, diese Relation ist eine spezielle Funktion, identische Funktion $y = f(x)) = x$, $x \in M$ später als Funktion auch mit i_M bezeichnet)
Symmetrie: T ist spiegelsymmetrisch bzgl. I_M



ist reflexiv aber nicht symmetrisch



ist symmetrisch aber nicht reflexiv

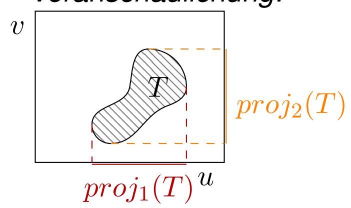
Alternative Schreibweisen: Es sei $T \subseteq M_1 \times M_2$ eine binäre Relation.
Anstelle $\boxed{(x, y) \in T}$ kann man schreiben:

- xTy (x steht in Relation T zu y), für viele wichtige Relationen gibt es spezielle Zeichen, z.B. $x < y$, $x = y$, $g||h$ oder $A \subseteq B$ usw.
- Aussageformen (vgl. Prädikatenlogik): $\boxed{T(x, y)}$ (auch mit mehreren Variablen möglich)

2.3.2. Operationen auf Relationen

Da Relationen spezielle Mengen sind, gibt es Operationen wie $\cup$, cap usw. auch hier. Weitere für Relationen wichtige Operationen in den folgenden Definitionen:

Def. 9:
Es sein T eine Relation in $U \times V$.
Die Menge $proj_1(T) = \{x \in U | \exists y \in V, (x, y) \in T\}$ heißt *Projektion* von T auf u (1. Faktor des kartesischen Produkts).
Analog ist $proj_2(T) = \{y \in V | \exists x \in U, (x, y) \in T\}$ die Projektion auf den 2. Faktor.
Veranschaulichung:



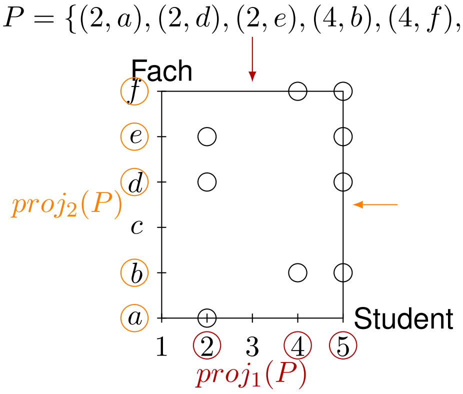
Bsp. 5:
Es sei $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ eine Menge von Studenten und $F = \{a, b, c, d, e, f\}$ eine Menge von Fächern. Es sei $P \subseteq S \times F$ die Relation, die angibt, welcher Student in welchem Fach eine Nach- bzw. Wiederholungsprüfung im bevorstehenden Prüfungsabschnitt hat.
Die Studenten 1 und 3 haben keine Prüfung ausstehen, Student 2 muss die Prüfungen in a. d und e, 4 in b und f sowie 5 in b, d, e und f ablegen.

a) Man gebe die Relation P elementweise an und stelle sie in einem Koordinatensystem dar.

b) Man ermittle die Projektionen P auf S bzw. F und kennzeichne diese in der Skizze.

Lösung:

a) $P = \{(2, a), (2, d), (2, e), (4, b), (4, f), (5, b), (5, d), (5, e), (5, f)\}$



b) $proj_1(P) = \{2, 4, 5\} \subseteq S$
(= Menge der Studenten, die wenigsten eine N/W-Prüfung haben.)
$proj_2(P) = \{a, b, d, e, f\} \subseteq F$
(= Menge der Fächer, in denen Student(en) eine N/W-Prüfung haben.)

Def. 10:
Es sei $T \subseteq M_1 \times M_2$ eine binäre Relation.
Die Relation $T^{-1} := \{(y,x)|(x,y) \in T\} \subseteq M_2 \times M_1$ heißt *inverse Relation* (bzw. kurz: *Inverse*) von T.

Bsp. 6: (vgl. Bsp. 5)
$P^{-1} = \{(a,2),(b,4),(b,5),(d,2),(d,5),(e,2),(e,5),(f,4),(f,5)\}$
Besonders wichtig ist die folgende Operation:

Def. 11:
Es seien $T_1 \subseteq M_1 \times M_2$ und $T_2 \subseteq M_2 \times M_3$ binäre Relationen.
Als *Komposition* (oder auch *Verkettung*) $T_1 \circ T_2$ („T_2 nach T_1“) wird die Relation $T_1 \circ T_2 := \{(x,z) \in M_1 \times M_3 | \exists y \in M_2 \quad (x,y) \in T_1 \wedge (y,z) \in T_2\}$ in $M_1 \times M_3$ bezeichnet.

Bsp. 7:
Es sei M die Menge aller Menschen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt leben. Weiter seien $S = \{(x,y)|x \text{ ist Mutter von } y\} \subseteq M \times M$ und $T = \{(y,z)|y \text{ ist verheiratet mit } z\} \subseteq M \times M$.
Dann bedeutet $(x,z) \in S \circ T$: Es gibt ein y, sodass x die Mutter von y ist ($(x,y) \in S$) und y mit z verheiratet ($(y,z) \in T$) ist, d.h. „x ist die Schwiegermutter von z“.

Diskussion: Wichtige Eigenschaft der Komposition $\circ$:

- Die Operation $\circ$ ist *assoziativ*, d.h. seien $T_1 \subseteq A \times B$, $T_2 \subseteq B \times C$ und $T_3 \subseteq C \times D$, dann gilt:
  $\underbrace{(T_1 \circ T_2)}_{\subseteq A \times C} \underbrace{\circ T_3}_{\subseteq C \times D} = \underbrace{T_1}_{\subseteq A \times B} \circ \underbrace{(T_2 \circ T_3)}_{\subseteq B \times D} = T_1 \circ T_2 \circ T_3 \subseteq A \times D$

Def. 12:
Es sei T eine Relation in $M \times M$ (auf M).
Als *transitive Hülle* T^+ von T bezeichnet man die kleinste Relation, die T enthält und transitiv ist.

Satz 1: Es gilt: $\boxed{T^+ = T \cup (T \circ T) \cup (T \circ T \circ T) \cup \ldots}$

Bemerkung:
Bezeichnung für $\underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{\text{n-mal}}$ auch T^n
(Nicht verwechseln mit Mengenprodukt $\underbrace{T \times \ldots \times T}_{\text{n-mal}}$ bzw. Funktionen mit n-ten Potenz f^n!)

Damit ist $\boxed{T^+ = \bigcup_{j=1}^{\infty} T^j}$

Beweis:

1.) T^+ ist transitiv, denn sei $(x,y) \in T^+$ und $(y,z) \in T^+$, dann existieren natürliche Zahlen $j_1, j_2 \geq 1$ mit $(x,y) \in T^{j_1}$ und $(y,z) \in T^{j_2}$,
d.h. y wird in j_1 Schritten von x aus erreicht und z in j_2 Schritten von y aus erreicht. Also wird z in $j_1 + j_2$ Schritten von x aus erreicht,
d.h. $(x,z) \in T^{j_1+j_2} \subseteq T^+$

2.) Es sei $T \subseteq S$ für eine transitive Relation S.
$\Rightarrow T \circ T \subseteq S \circ S \subset S$ und für beliebiges $j \geq 1$:
$T^j \subseteq S^j \subseteq S$ und somit:
$T^+ = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} T^j \subseteq S,$
d.h. T^+ ist tatsächlich die kleinste transitive Relation, die T enthält.

Diskussion:

1.) Analog zur transitiven Hülle einer Relation T in $M \times M$ (auf M) werden die reflexive Hülle bzw. die symmetrische Hülle von T als die jeweils kleinsten Relationen die T enthalten und reflexiv bzw. symmetrisch sind definiert.
Die Ermittlung gestaltet sich etwas „einfacher“ als bei der transitiven Hülle:
Reflexive Hülle von T: $\boxed{T \cup I_M}$ (dabei ist $I_M = \{(x,x)|x \in M\}$ [Diagonale / Identitätsrelation])
Symmetrische Hülle von T: $\boxed{T \cup T^{-1}}$

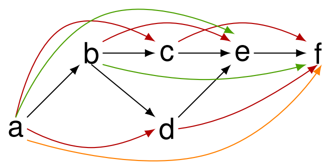
2.) Von Bedeutung ist auch die *reflexiv-transitive* Hüllo ven T:
$\boxed{T^* = T^+ \cup I_M}$ (dabei $T^+ \ldots$ transitive Hülle von T)

Bsp. 8:
Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c, d, e, f\}$
sowie die Relation $T = \{(a, b), (b, c), (c, e), (b, d), (d, e), (e, f)\}$.

a) *Transitive Hülle*: Zur Ermittlung der Komposition $S \circ T$:
Für jedes Element $(x, y) \in S$ alle Fortsetzungen $(y, z) \in T$ suchen $\curvearrowright$ (x, z) als Element von $S \circ T$ notieren, falls es noch nicht vorkommt.
Bspw.:

- (a, b), Fortsetzungen wären $(b, c), (b, d)$ $\curvearrowright$ Elemente (a, c) und (a, d) notieren.
- (b, c), Fortsetzung (c, e) $\curvearrowright$ (b, e) notieren
- usw.

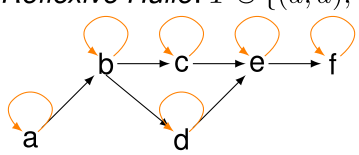
$\Rightarrow T \circ T = \{(a, c), (a, d), (b, e), (c, f), (d, f)\} = T^2$
$T^3 = T \circ (T \circ T) = \{(a, e), (b, f)\}$ (ausgehend von T in $T \circ T$ nach Fortsetzung suchen)
$T^4 = T \circ T^3 = \{(a, f)\}$



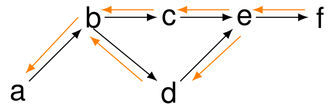
$$\Rightarrow T^+ = T \cup \underbrace{(T \circ T)}_{\text{2 Schritte}} \cup \underbrace{(T \circ T \circ T)}_{\text{3 Schritte}} \cup \underbrace{(T \circ T \circ T \circ T}_{\text{4 Schritte}} = T \cup T^2 \cup T^3 \cup T^4$$

(Formel bricht im endlichen Fall nach endlich vielen Schritten ab.)

b) *Reflexive Hülle*: $T \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f)\}$



c) *Symmetrische Hülle*: $T \cup T^{-1} = T \cup \{(b,a),(c,b),(e,c),(d,b),(e,d),(f,e)\}$



Zur Überprüfung der Eigenschaften aus Def. 8 ist folgender Satz nützlich:

Satz 2:
Es sei $T \subseteq M \times M$ eine binäre Relation. Dann gilt:

a) T ist reflexiv $\Leftrightarrow I_M \subseteq T$ ($I_M \dots$ Identitätsrelation)

b) T ist symmetrisch $\Leftrightarrow T^{-1} \subseteq T \quad [\Leftrightarrow T^{-1} = T]$

c) T ist antisymmetrisch $\Leftrightarrow T \cap T^{-1} \subseteq I_M$

d) T ist asymmetrisch $\Leftrightarrow T \cap T^{-1} = \emptyset$

e) T ist transitiv $\Leftrightarrow T \circ T \subseteq T$

Disskussion:

1.) Beweise ergeben sich unmittelbar aus Def. 8, vgl. Übungsaufgabe 1.24 (für b) und e))

2.) Aus c) und d) ergibt sich z.B.
$\boxed{T \text{ asymmetrisch}} \Rightarrow \boxed{T \text{ antisymmetrisch}}$ (da $\emptyset$ Teilmenge jeder Menge ist)

2.3.3. Äquivalenzrelationen

Def. 13:
Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt *Äquivalenzrelation* auf M, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Diskussion:

1.) Durch eine Äuivalenzrelation wird M vollständig in paarweise elementfremde (disjunkte) *Äquivalenklassen* zerlegt. Die Menge aller Äquivalenzklassen von M bezüglich T heißt *Quotientenmenge* M/T.
Aufgrund der 3. Eigenschaft aus Def. 13 erhält eine Äquivalenzklasse alle Elemente, die untereinander erreichbar sind (=äquivalent) und nur diese.

2.) Äquivalenzklassen enthalten alle Elemente, die bezüglich einer bestimmten Eigenschaft nicht unterscheidbar sind, z.B. Bsp. 4 mit $M = P$ (Menge von Personen), Äquivalenzrelation $G \subseteq P \times P$ mit $G = \{(x,y) | x$ und y haben gleiches Geburtsjahr$\}$, Äquivalenzklassen sind die Jahrgänge.

3.) Anstelle der Schreibweise $(x,y) \in T$, xTy oder $T(x,y)$ verwendet man bei beliebigen Äquivalenzrelationen auf $x \sim y$. Bei vielen speziellen Äquivalenzrelationen spezielle Symbole, sie folgendes Beispiel.

Bsp. 9:

a) M sei eine beliebige Menge $T_1 = I_M = \{(x, y) \in M \times M | x = y\}$ (Identitätsrelation) ist eine Äquivalenzrelation.
Äquivalent heißt hier gleich!
Äquivalenzklassen sind sämtliche einelementige Teilmengen $\{x\}, x \in M$. T_1 heißt die feinste Zerlegung von M die möglich ist. Die größte Zerlegung liefert die Relation $T_2 = M \times M$, die trivialer Weise ebenfalls eine Äquivalenzrelation ist mit nur einer Äquivalenzklasse M. Für die Anwendungen sind natürlich Relationen wichtig, die eine feinere Zerlegung liefern.

b) $M = \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen), $m \in \mathbb{N}^*$, $T \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit
- $(x, y) \in T :\equiv$ „x und y lassen bei Division durch m den gleichen Rest“
- Bezeichnung $x \equiv y(mod\ m) \ldots x$ kongruent y (modulo m), z.B. $29 \equiv 8(mod\ 7)$
- T ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$, Äquivalenzklassen:
  Restklassen modulo m (siehe Übungsaufgabe 1.19)

c) $M \ldots$ Menge aller Geraden einer Ebene, $T \subseteq M \times M$ mit
- $(x, y) \in T :\equiv$ „x ist zu y parallel“, Bezeichnung: $x||y$
  $\curvearrowright T$ ist Äquivalenzrelation auf M (siehe Übungsaufgabe 1.21.)

2.3.4. Ordnungsrelationen

Def. 14:

a) Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt Ordnungsrelation auf M, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

b) Eine Ordnungsrelation heißt *vollstandig* oder *linear*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt $(x, y) \in T \vee (y, x) \in T$.

Def. 15:
Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt *strikte Ordnungsrelation* auf M, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist. Eine strikte Ordnungsrelation heißt vollständig, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt $(x, y) \in T \vee (y, x) \in T$.

Bsp. 10:

a) $M = \mathbb{R}$, $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\boxed{(x, y) \in T :\equiv x \leq y}$ ist eine vollständige Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$.

b) Die Relation „$<$“ ist eine (vollständige) strikte Ordnungsrelation.

c) E sei eiine Menge, M sei die *Menge aller Teilmengen von* E, d.h. M ist die Potenzmenge $M = \mathcal{P}(E)$ von E.
$T \subseteq M \times M$ mit $\boxed{(A, B) \in T :\equiv A \subseteq B}$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(E) = M$ (Inklusion).

Diskussion:

1.) In der Literatur wird manchmal die Relation im Sinne von Def. 14 als Halbordnung und nur eine vollständige als Ordnung als Ordnungsrelation bezeichnet.

2.) Zu jeder Ordnung T_1 (auf M) gehört eine strikte Ordnung T_2 und umgekehrt: $T_2 = T_1 \backslash I_M$ bzw. $T_1 = T_2 \cup I_M$ (T_1 eist die reflexive Hülle von T_2), z.B. ($\leq$, $<$) oder ($\subseteq$, $\subset$).

3.) Die Symbole $\leq$ (bzw. $<$) können anstelle der Paarschreibweise auch bei beliebigen Ordnungen verwendet werden, falls keine anderen Zeichen dafür üblich sind.

Def. 16:
T sei eine Ordnungsrelation auf eine Menge M. Weiter sei A eine Teilmenge von M.

a) Ein Element $a \in M$ heißt obere Schranke von A, wenn gilt:
$\forall x \in A \quad x \leq a \quad (x \leq a$ d.h. $(x, a) \in T$, vgl. 3.) der vorhergehenden Diskussion)

b) Es sei B die Menge der oberen Schranken von A, diese sei nicht leer. Falls es eine *kleinste obere Schranke* s von A gibt, d.h. $\exists s \in B \quad \forall b \in B \quad s \leq b$, so heißt s das *Supremum von* A,
$\boxed{s = sup\, A}$

c) Gilt $s \in A$, so heißt s das Maximum von A: $s = max\, A = sup\, A$

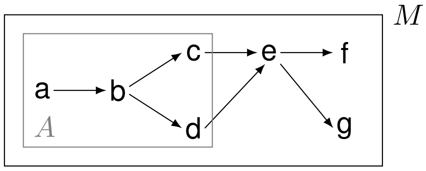
d) Ein Element $m \in A$ heißt maximal, wenn es kein größeres Element in A gibt, d.h. $\forall x \in A\ (m \leq x \Rightarrow m = x)$

Diskussion:

1.) Die Begriffe aus Def. 16 lassen sich auf strikte Ordnungen S übertragen, indem anstelle von S die reflexive Hülle $T = S \cup I_M$ verwendet wird.

2.) Bei Ordnungsrelationen T (auch für strikte Ordnungen) auf endlichen Mengen M kann ein vereinfachter Graph, das sogenannte *HASSE-Diagramm*, betrachtet werden.
a $\longrightarrow$ b $(a \neq b)$ bedeutet $(a, b) \in T$ und es gibt kein Zwischenglied $c \neq a$ und $c \neq b$ mit $(a, c) \in T \wedge (c, b) \in T$ (a ist unmittelbarer Vorgänger von b bzw. b Nachfolger von a).
Diesem Diagramm entspricht eine Teilrelation $U \subseteq T$, deren transitiv-reflexive Hülle (bzw. transitive Hülle bei strikten Ordnungen) T ist.

3.) Veranschaulichung von Def. 16 mit einem HASSE-Diagramm einer nicht vollständingen Ordnung (nicht linear)



z.B. Arbeitsgänge, die in einer bestimmten Reihenfolge durchgeführt werden müssen, A bspw. Teilarbeiten einer Zweigfirma
obere Schranken: e, f, g
$sup\, A$= e
Maximum von A*:* existiert nicht, da $e \notin A$
maximale Elemente von A*:* c, d

4.) Bei nichtlinearen Ordnungen müssene obere Schranken, Supremum und Maximum nicht existieren, es kann mehrere maximale Elemente $A \subseteq M$ geben.
Bei linearen Ordungen auf *endlichen* Mengen gibt es genau ein maximales Element $= max\, A = max\, B$

5.) Analog zur Def. 16 werden die Begriffe *untere Schranken* a von A ($\forall x \in A \quad a \leq x$), *größte untere Schranke* (*Infinum*) s von A ($B \neq \emptyset$ ... Menge der unteren Schranken, $\exists s \in B \quad \forall a \in B \forall a \leq s$), *Minimum von* A ($min\, A = inf\, A = s$ falls $s \in A$) und minimales Element m von A ($\forall x \in A \quad (x \leq m \Rightarrow x = m)$) definiert.

Bsp. 11:

Eine bestimmte Arbeitsaufgabe besteht aus mehreren Arbeitsgängen.
Es sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ die Menge der Arbeitsgänge. Die Arbeitsgänge $\{2, 3, 5\} =: S$ werden von einer Subfirma durchgeführt. Für die Reihenfolge gilt: 1 muss vor 2, 2 vor 3 und 5, 3 vor 4 sowie 5 vor 6 durchgeführt werden.

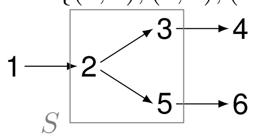
a) Man beschreibe diese Forderungen durch eine Relation $U \subseteq A \times A$ und stelle sie graphisch dar (HASSE-Diagramm).

b) Man ermittle die transitive Hülle U^+ von U.

c) Man gebe (falls vorhanden) obere Schranken, Supremum, Maximum, max. Elemente sowie untere Schranken, Infinum, Minimum, min. Elemente von S an.

Lösung:

a) $U = \{(1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (5, 6\}$



b) $U \circ U = \{(1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 6)\}$
$U \circ (U \circ U) = \{(1, 4), (1, 6)\}$
$U^4 = \emptyset$

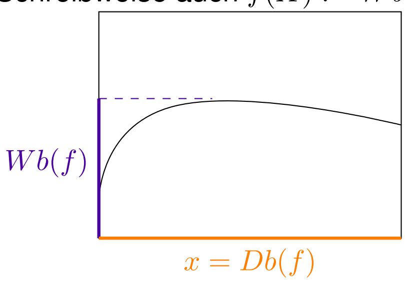
2.3.5. Funktionen

Def. 17:
Eine Relation $f \subseteq x \times y$ heißt *Funktion (Abbildung)* von X in Y, wenn sie linksvollständig und rechtseindeutig ist.

Diskussion:

- Gemäß Def. 7 a+c aus Kapitel 2.3.1 bedeutet linksvollständig *und* rechtseindeutig, dass zu *jedem* $x \in X$ *genau ein* $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ existiert, also *eindeutige Zuordnung*:
  $\boxed{x \longmapsto y =: f(x)}$
  Schreibweise: $f : X \to Y$ (manchmal $f|X \to Y$
  $y = f(x)$ heißt auch *Bild* von x, x *ein* Urbild von y (muss nicht eindeutig sein).

- $X = Db(f) \ldots$ *Definitionsbereich*,
  $Wb(f) = \{y \in Y | \exists x \in x \quad (x, y) \in f\} \subseteq Y \ldots$ Wertebereich
  Schreibweise auch $f(X) := Wb(f)$ (Menge aller Bilder).



$f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$

Def. 18:

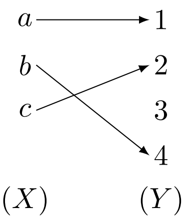
a) Eine Abbildung f heißt *surjektiv* (Auch Abbildung auf Y),

b) Eine Funktion f heißt *injektiv*, wenn zu jedem $y \in Wb(f)$ genau ein $x \in Db(f)$ existiert mit $(x, y) \in f$:
$\underset{\in Wb(f)}{y} \longmapsto x =: \underset{\in Db(f)}{f^{-1}(y)}$
(„f oben -1“)
Die dadurch erklärte Abbildung $f^{-1} : Wb(f) \to Db(f)$ heißt *Umkehrfunktion* von f, vgl. auch Kap **??**.

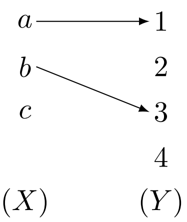
c) Eine injektive *und* surjektive Abb. von X auf Y heißt *bijektiv*.

d) Gebräuchlich sind auch die Begriffe *Surjektion*, *Injektion* und *Bijektion*!

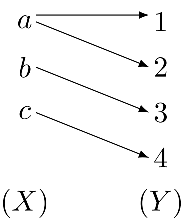
Bsp. 12:
Gegeben sind die Mengen $X = \{a, b, c\}$ und $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ sowie folgende Relation in $X \times Y$:



a) T_1:
T_1 ist eine Funktion $f(= T_1) : f : X \to Y$ (1) diese ist injektiv, $Db(f) = X = \{a, b, c\}$, $Wb(f) = \{1, 2, 4\} =: W$, $f : X \to W$ (2) ist surjektiv, also sogar bijektiv.
Als Relation sind (1) und (2) nicht zu unterscheiden, aber als Funktion.



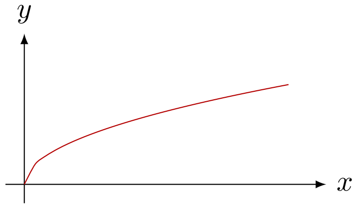
b) T_2:
T_2 ist keine Funktion, nicht linksvollständig. Betrachtet man $D = \{a, b\} \subset X$, so ist durch T_2 eine Funktion $f : D \to Y$ beschrieben, die Funktion ist injektiv und kann mit $W := f(D) = \{1, 3\}$ zu einer bijektiven Abbildung $f : D \to W$ umgewandelt werden.



c) T_3:
T_3 ist keine Funktion, da nicht rechtseindeutig.

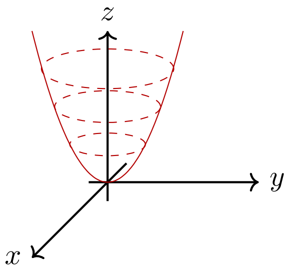
Bsp. 13:

a) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit „$x \to y = f(x) = \sqrt{x}$ ist eine *Funktion einer reelen Veränderlichen* (injektiv).



$Wb(f) = [0, \infty)$
$Db(f) = [0, \infty)$

b) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2 = f(x, y) =: z$ *Funktion zweier reeller Veränderlicher*.

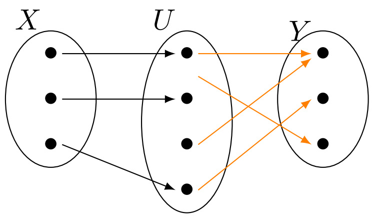


(Paraboloid)
$Db(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (x-y-Ebene)
$Wb(f) = [, \infty)$

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \longmapsto f(n) = \dfrac{n}{n+1}$ ist eine (reelle) Zahlenfolge. $f(0) = 1, f(1) = \dfrac{1}{2}, f(2) = \dfrac{2}{3}, \ldots$
Bezeichnung meist mit Index: $a_n = f(n) \curvearrowright ZF(a_n) \quad n \in \mathbb{N}$

Def. 19:
Es seien $g := X \to U$ mit $x \longmapsto u = g(x)$ und $f : U \to Y$ mit $u \longmapsto y = f(u)$ zwei Abbildungen. Dann stellt man die Zuordnung $x \longmapsto y = f(\underbrace{g(x)}_{u})$ eine Abbildung von X in Y dar, eine sogenannte *mittelbare Funktion (Komposition / Verkettung). Bezeichnung:* $g \circ f : X \to Y$ mit $y = (g \circ f)(x) = f(g(x))$

Diskussion:

1.) 

$x \longmapsto u = g(x) \quad u \longmapsto f(u) = f(g(x))$
Paarschreibweise: $(x, u) \in g \qquad (u, y) \in f \curvearrowright (x, y) \in g \circ f$

2.) g wird zuerst angewendet, dann f. Wie bei beliebigen Relationen die die Schreibweise $g \circ f$

3.) In der Literatur findet man oft die Schreibweise $f \circ g$ angelehnt an die Schreibweise $f(g(x))$. Die Reihenfolge der Berechnung ast aber von innen nach außen, erst innere Funktion g, dann die äußere f.

Satz 3:
Es sei $f : X \to Y$ eine *Bijektion*, d.h. es existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$, weiter sei i_A für

eine beliebige Menge A die identische Abbildung (Identitätsrelation): $i_A : A \to A$ mit $i_A(x) = x$ für alle $x \in A$.
Es gilt dann:
$f \circ f^{-1} = id_X$, d.h. $(f \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(f(x)) = x(\forall x \in X)$ und
$f^{-1} \circ f = id_Y$, d.h. $(f^{-1} \circ f)(y)) = f(f^{-1}(y)) = y(\forall y \in Y)$
(Funktion und Umkehrfunktion nacheinander angewandt heben sich auf).

Satz 4:
Es seien $g = X \to U$ und $h : U \to Y$ zwei Bijektionen. Dann ist die Komposition $f := g \circ h : X \to Y$ ebenfalls eine Bijektion und es gilt:
$\boxed{f^{-1} = (g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}}$

2.4. Gleichmächtigkeit, Kardinalzahlen

Es sei eine hinreichend mufassend Grundmenge, die alle für eine mathematische Theorie relevante Objekte (Zahlen, Funktionen, usw.) enthält. M sei die Potenzmenge von E(d.h. M ist die Menge aller Teilmengen von E, $M = \mathcal{P}(E)$).

Def. 20:
Zwei Mengen A und B ($A \subseteq E, B \subseteq E$ bzw. $A \in M, B \in M$) heißen *gleichmächtig* (Bezeichnung $A \sim B$), wenn eine bijektive Abbildung von A auf B (damit auch B auf A) existiert.

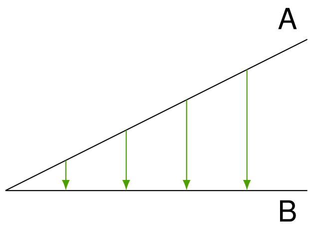
Diskussion:

1.) Offensichtlich ist die Relation $T \subseteq M \times M$ mit $(A, B) \in T :\equiv A \sim B$ eine Äquivalenzrelation auf M.

2.) Äquivalenzklassen sind Mengen gleichmächtiger Teilmengen von E. Diese Äquivalenzklassen nennt man *Kardinalzahlen*.

3.) Bei endlichen Mengen bedeutet Gleichmächtigkeit:
Gleiche Anzahl von Elementen
$A = \{a, b, c\}, B = \{X, Y, Z\}$
(Abbildung bspw. $a \to X \quad b \to Y \quad c \to Z$)
Bezeichnung: $cardA = |A| = 3 \quad (= |B|)$
Natürliche Zahlen sind die Kardinalzahlen endlicher Mengen.

4.) Die Anschauung versagt bei unendlichen Mengen.



Die Strecken A und B sind gleichmächtig, obwohl A länger als B ist.

Def. 21:
Eine Menge heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie mit der Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist.

Diskussion:

1.) M ist abzählbar unendlich heißt, es existiert eine *Zählvorschrift*, bei der jedes Element von M nach endlich vielen Schritten erreicht wird.

2.) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist abzählbar unendlich.
Andordnen nach steigendem Betrag:
$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...\}$

3.) $\mathbb{Q}^+$ ... Menge der pos. rationalen Zahlen
ABB 61
Zählvorschrift:
   a) (aufsteigend) Ordnen nach Summen von Zöhler und Nenner
   b) Zahlen mit gleicher Summe der Größe nach aufsteigend anordnen.
   c) Bereits enthaltene Zählen (=kürzbare Brücke) weglassen.

$\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, ...\right\}$
analog zu $\mathbb{Z}$: Die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen (also $\mathbb{Q}^-$ zusammen mit $\mathbb{Q}^+$) ist abzählbar unendlich.

4.) Es gibt Mengen, die mächtiger sind als die Menge der natürlichen Zahlen: *überabzählbare Mengen* (B heißt *mächtiger* als A, wenn se eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt, aber keine bijektive. Schreibweise: $|A| < |B|$).

z. B. gilt:

Satz 5: Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\} = (0, 1)$ ist überabzählbar.
Beweis: (*CANTORsches Diagonalverfahren*)
Indirekt, angenommen $M = (0, 1)$ sei abzhälbar unendlich, d.h. $M = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$.
Für die Zahlen x_k wählen wir z.B. die eindeutige Darstellung als Dezimalbruch (9er Periode vermeiden). Also bspw. $0,39999... = 0,3\overline{9} = 0,4 = 0,40000...$)
$x_1 = 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} ...$
$x_2 = 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} ...$
$x_3 = 0, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} ...$
...
Es sei $z = 0, b_1 b_2 b_3 ...$ mit $b_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } a_k^{(k)} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } a_k^{(k)} = 1 \end{cases}$ für $k = 1, 2, 3, ...$
Damit unterscheiden sich x_k und z an der k-ten Stelle, d.h. $z \neq x_k$ für alle $k \geq 1$. z ist also nicht in der Folge $x_1, x_2, x_3, ...$ enthalten, also $z \notin M$.
Andererseits ist $0 < z < 1$ also $z \in (0, 1) = M$. ↯ Widerspruch! #

Satz 6:
Es sei E eine Menge. Dann ist die Potenzmenge $M = \mathcal{P}(E)$ mächtiger als E.
Beweis:

1.) Die Abbildung $f : E \to M$ mit $f(x) = \{x\}$, die jedem $x \in E$ die einelementige Menge $\{x\} \in M$ zuordnet, ist injektiv.

2.) Angenommen, es gäbe eine bijektive (damit auch surjektive) Abbildung $g : E \to M$. Es sei $A = \{x \in E | x \notin g(x)\} \in M$ (A Teilmenge von E). Da g surjektiv ist, gibt ein $a \in E$ mit $g(a) = A$. Fallunterscheidung:

a) $a \in A = g(a) \Rightarrow a \notin g(a)$ ↯ Widerspruch!

b) $a \notin A = g(a) \Rightarrow a \in g(a)$ ↯ Widerspruch!

Beide Fälle führen auf einen Widerspruch, es gibt keine surjektive und damit auch keine bijektive Abbildung von E auf $\mathcal{P}(E)$. #

Diskussion:

Satz 6 zeigt, dass es unendlich viele unendliche Mächtigkeiten gibt. So gilt bspw. $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(|\mathcal{P}(\mathbb{N})|)|$ usw.

Satz 7:

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der Menge der natürlichen Zahlen ist gleichmächtig mit dem Intervall $(0, 1)$, also überabzählbar (Beweis: siehe Übungsaufgabe 1.38).