# Mathematik I

**Vorlesungsskript**

Mitschrift von Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von Herrn Meinhold

11. Januar 2016

# Inhaltsverzeichnis

# Teil I.
# Elementare Grundlagen

## 1. Aussagen und Grundzüge der Logik

### 1.1. Aussagen, Wahrheitswert

**Aussage:** (im weiteren Sinne) Sprachlich sinnvoller, konsatierender Satz. In diesem Abschnitt werden nur zweiwertige Aussagen betrachtet, d.h. Aussagen, die entwoder wahr oder falsch sind.

**Bsp. 1:**

(1) Es gibt unendlich viele Primzahlen (wahr)

(2) Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge, z.B. (3,5), (5,7), (11,13), (17,19) usw. (Wahrheitswert nicth bekannt!)

(3) $5 + 7 = 13$ (falsch)

(4) Wie spät ist es? (keine Aussage)

(5) Diese Aussage ist falsch! (keine Aussage, paradox)

(6) Am 30.06.2016 wird es in Dresden regnen.

(1)–(3) sind zweiwertige Aussagen, (4) und (5) sind keine Aussagen, (6) ist keine zweiwertige Aussage (Wahrscheinlichkeit, d.h. Zahl zwischen 0 und 1 angebbar).

**Bezeichnungen:**

p, q, r, . . . Aussagen,
0 . . . falsche Aussage,
1 . . . wahre Aussage

**Wahrheitswert:**

$$w(p) = \begin{cases} 1 & \text{(falls p wahr)} \\ 0 & \text{(fallls p falsch)} \end{cases}$$

$p \equiv q$ (p *identisch* q) . . . p und q haben denselben Wahrheitswert

### 1.2. Aussagesverschiebung

1.) *Negation* $\overline{p}$ („nicht p“) [oft auch $p$! bzw. $\neg p$]

| $p$ | $\overline{p}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

2.) *Konjunktion* $p \wedge q$ („p und q“)



Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

3.) *Disjunktion* $p \vee q$ („p oder q“) [Alternative – nicht ausschließendes Oder!]

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

4.) *Implikation* $(p \Rightarrow q) :\equiv \overline{p} \vee q$ („aus p folgt q“, „wenn p, dann q“)

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |

Begriffe: $p \Rightarrow q$ (p: *Prämisse*, q: *Konklusion*)
Eine Implikation ist genau dann falsch, wenn die Prämisse richtig und die Konklusion falsch ist!

**Bsp. 2:**

- $-1 = 1$ (falsch) $\Rightarrow 1 = 1$ (wahr) [durch Quadrieren]
- $-1 = 1$ (falsch) $\Rightarrow 0 = 2$ (falsch) [Addition von 1]

Aus einer falschen Aussage lassen sich durch richtiges Schließen sowohl falsche als auch richtige Aussagen gewinnen.

Andere Sprechweisen: „p ist *hinreichend* für q“, „q ist *notwendig* für p“

5.) *Äquivalenz* $(p \Leftrightarrow q) :\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ („p äquivalent q“, „p ist notwendig und hinreichend für q“, „p genau dann wenn q“)
(ist genau dann wahr, wenn p und q den selben Wahrheitswert besitzen)

## 1.3. Logische Gesetze (Tautologien)

Eine Tautologie $t$ ist eine Aussagenverbindung, die unabhängig vom Wahrheitswert der einzelnen Aussagen stets wahr ist (d.h. $t \equiv 1$).

**Bsp. 3:**
Einige wichtige Tautologien

1.) $p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$

(Negation der Negation)

2.) $p \vee \overline{p}$

(Satz vom ausgeschlossenem Dritten)

3.) a) $\overline{p \wedge q} \equiv (\overline{p} \vee \overline{q})$
b) $\overline{p \vee q} \equiv (\overline{p} \wedge \overline{q})$
(de Morgansche Regeln)

4.) $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
(Kontrapositionsgesetz)

5.) $p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
(direkter Beweis)

6.) $p \wedge (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})) \Rightarrow q$
(indirekter Beweis)

Beweise mittels Wahrheitstafeln (vgl. Übung 1).
Bemerkung zu 1., 3., 4.: Eine Äquivalenz ist genau dann eine Tautologie, wenn beide Seiten identisch sind, z.B. $p \equiv \overline{\overline{p}}$.

**Beweistechniken:**
Zu beweisen ist $q$.

1.) Direkter Beweis:
- Nachweis von $p$ (Voraussetzung)
- Richtiger Schluss $p \Rightarrow q$
  Dann $q$ wahr (Behauptung)

2.) Indirekter Beweis: Annahme von $\overline{q}$ auf Wiederspruch führen (auf unterschiedliche Weise möglich, vgl. folgendes Bsp).

**Bsp. 4:**
$q =$„$\sqrt{2}$ ist irrational“ (keine rationale Zahl)
Beweis indirekt:
Es gelte $\overline{q}$, d.h. $\sqrt{2}$ ist rational, dann gelten folgende Schlüsse: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen $m$ und $n$.
$\Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 2 \cdot n^2 = m^2 \Rightarrow 2|m^2$
$\Rightarrow \boxed{2|m}$ (2 ist Teiler von m)
$\Rightarrow 4|m^2$ (mit $m^2 = 2n^2$)
$\Rightarrow 4|2n^2 \Rightarrow 2|n^2 \Rightarrow \boxed{2|n}$
Widerspruch: Da $m$ und $n$ teilerfremd sind. #

**Weitere Gesetze**

- $p \wedge q \equiv q \wedge p$
  $p \vee q \equiv q \vee p$

  (Kommutativgesetze)
- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

  (Assoziativgesetze)
- $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
  $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
  (Distributivgesetze)

- $p \wedge 1 \equiv p$, $p \vee 1 \equiv 1$, $p \wedge p \equiv p$
  $p \wedge 0 \equiv 0$, $p \vee 0 \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$

- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

  (Absorptionsgesetz)

## 1.4. Aussagefunktionen, Quantoren, Prädikatenlogik

$X$ sei eine Menge (Gesamtheit von Objekten $x$ mit einem gemeinsamen Merkmal, vgl. Abschnitt 2)
$x \in X$ ... $x$ ist Element von $X$. Die Objekte haben Eigenschaften (*Prädikate*)

**Aussagefunktion** (auch Aussageform) $p(x)$: Jedem $x \in X$ ist eine Aussage $p(x)$ zugeordnet. Dabei steht $x$ für ein Objekt, $p$ für ein Prädikat.

**Bsp. 5:**
$X$ ... Menge der positiven natürlichen Zahlen (1, 2, 3, ...)
$p(x) :=$„$x$ ist eine Primzahl"
$p(5)$ ... wahr, $p(10)$ ... falsch

**Quantoren:**
Betrachtet werden folgende Aussagen:

1.) „Für alle $x$ (aus $X$) gilt $p(x)$" $\equiv$ $\boxed{\forall x\ p(x)}$ (*universeller Quantor* / Allquantor)

2.) „Es existiert (wenigstens) ein $x$, für welches $p(x)$ gilt" $\equiv$ $\boxed{\exists x\ p(x)}$ (*existenzieller Quantor*)

Zur Schreibweise:

- Bei Anwendungen (außerhalb der reinen Logik) wird oft die Grundmenke $X$ mit angegeben:
  $\forall x \in X\ p(x)$ usw.

- Falls sich Quantoren auf eine Teilmenge $M$ von $X$ beziehen sollen, dann können folgende Schreibweisen verwendet werden:
  $a = \forall x \in M\ p(x)$, $b = \exists x \in M\ p(x)$.

- Die Schreibweisen in der formalen Logik sind dann:
  $a = \forall x\ (x \in M \Rightarrow p(x))$

**Rechenregeln:**

$\boxed{\overline{\forall x\ p(x)} \equiv \exists x\ \overline{p(x)}}$

$\boxed{\overline{\exists x\ p(x)} \equiv \forall x\ \overline{p(x)}}$

**Mehrstellige Aussagefunktionen**

- $p(x_1, x_2,\ ..., x_n), \quad x_1 \in X_1, x_2 \in X_2,\ ..., x_n \in X_n$
  Die Grundmengen $X_i$ können, müssen aber nicht für jede Stelle gleich sein.

- Wird ein Quantor auf eine n-stellige Aussagefunktion angewandt, so entsteht eine (n-1)-stellige Aussagefunktion (eine 0-stellige Aussagefunktion ist eine Aussage)
  z.B.: $\exists y\ p(x, y, z) =: q(x, z)$, die Variable $y$ wird durch den Quantor $\exists$ gebunden ($y$... gebundene Variable). Wichtig ist der Platz, nicht der Name der Variable.
  $x, z$ ... freie Variable, können durch weitere Quantoren gebunden werden.

**Bsp. 6:**
Ein Dorf bestehe aus 2 Teilen (Ober- und Unterdorf). Es sei $M$ die Menge aller Bewohner des Dorfes. $M_1$ bzw. $M_2$ seien die Teilmengen von $M$, die dem Ober- bzw. Unterdorf entsprechen.
Wir betrachten folgende zweistellige Aussagefunktionen:
$k(x, y)\dots$ Person $x$ (aus $M$) kennt Person $y$ (aus $M$)

a) $a(x) := \forall y\ k(x, y)\dots$ Person $x$ kennt jeden (⇒ „Für alle $y$ gilt: $x$ kennt $y$“)
$b(y) := \exists x\ k(x, y)\ \dots$ es gibt jemanden, der $y$ kennt
$c := \forall x \forall y\ k(x, y)\ \dots$ jeder kennt jeden
$d := \forall y \exists x\ k(x, y)\ \dots$ jeder wird von wenigstens einer Person gekannt
$e := \exists x \forall y\ k(x, y)\ \dots$ es gibt mindestens eine Person, die alle Personen kennt
Man beachte:
- $d$ und $e$ sind nicht das Gleiche: Die Reihenfolge unterschiedlicher Quantoren muss beachtet werden. Bei $d$ kann für jedes $y$ ein anderes $x$ mit $k(x, y)$ existieren. Diese Abhängigkeit von $y$ wird manchmal in Anwendungen durch $\forall y\ \exists x(y)\ k(x, y)$ ausgedrückt.
- Es gilt aber $e \Rightarrow d$ (stets wahr: Tautologie). Der Wahrheitsgehalt von z.B. $c, d, e$ kann dagegen nicht mit logischen Mitteln bestimmt werden.

b) Negation der Aussagen bzw. Aussageformen aus a).
$\overline{a(x)} \equiv \exists y\ \overline{k(x, y)}\dots$ $x$ kennt wenigstens eine Person nicht
$\overline{b(x)} \equiv \forall x\ \overline{k(x, y)}\ \dots$ keiner kennt $y$
$\overline{c} \equiv \exists x\ \overline{\forall y\ k(x, y)} \equiv \exists x\ \exists y\ \overline{k(x, y)}\ \dots$ es gibt jemanden der wenigstens eine Person nicht kennt (jemanden, der nicht alle kennt)
$\overline{d} \equiv \exists y\ \forall x\ \overline{k(x, y)}\dots$ es gibt jemanden, der von keiner Person gekannt wird $\overline{e} \equiv \forall x\ \exists y\ \overline{k(x, y)}$ $\dots$ jeder kennt wenigstens eine Person nicht.

c) Folgende Aussagen sind mit Hilfe von Quantoren auszudrücken:
$f\dots$ jeder aus dem Oberdorf kennt wenigstens eine Person aus dem Unterdorf.
$g\dots$ es gibt jemanden im Unterdorf, der alle Personen des Oberdorfs kennt.

$$\begin{aligned} f &= \forall x \in M_1\ \exists y \in M_2\ k(x, y) \\ &= \forall x\ (x \in M_1 \Rightarrow \exists y\ (y \in M_2 \wedge k(x, y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \exists x \in M_2\ \forall y \in M_1\ k(x, y) \\ &= \exists x\ (x \in M_2 \wedge \forall y\ (y \in M_1 \Rightarrow k(x, y))) \end{aligned}$$

# 2. Mengen

## 2.1. Begriffe

**Menge:** Zusammenfassung gewisser wohl unterscheidbarer Objekte (Elemente) mit einem gemeinsamen Merkmal zu einem Ganzen.

**Diskussion:** Naiver Mengenbegriff führt zu Widerpsrüchen. z.B. Menge $X$ aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.
$X = \{A | A\ Menge, A \notin A\}$
$X \in X$? Wenn $X \in X \Rightarrow X \notin X$ und $X \notin X \Rightarrow X \in X$ (Widerspruch!).
Diese Widersprüche können umgangen werden, wenn nur Teilmengen einer sogenannten Grundmenge betrachtet werden.

**Bezeichungen:**

- meist große Buchstaben für Mengen: $A, B, ..., M, ..., X$
- $\boxed{x \in M}$ ... $x$ ist Element von $M$
- $\boxed{x \notin M}$ ... $x$ ist kein Element von $M$

**Schreibweise:**
$M = \{\underbrace{...}_{\text{Elemente}}\}$ oder $M = \{x|p(x)\}$
mit $p(x) =$ Aussage, die genau für die Elemente $x$ aus $M$ wahr ist.

**Wichtige Grundmengen:**

- $\mathbb{N}$ ... Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{Z}$ ... Menge der ganzen Zahlen $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{Q}$ ... Menge der rationaln Zahlen $\{x|x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
- $\mathbb{R}$ ... Menge der reelen Zahlen
- $\mathbb{C}$ ... Menge der komplexen Zahlen $\{z|z = x + i \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

**Bsp. 1:**
$M_1$ ... Menge der Primzahlen kleiner 10, $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$
$M_2$ ... Menge der reelen Zahlen zwischen 0 und 1 $M_2 = \{x \in \mathbb{R}|0 < x < 1\} =: \underbrace{(0, 1)}_{\text{Intervallschreibweise}}$

**Def. 1:** (Intervallschreibweisen)
Es seien $a$ und $b$ reele Zahlen mit $a < b$:
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}|a \leq x \leq b\}$ ... abgeschlossenes Intervall
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}|a < x < b\}$ ... offenes Intervall
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R}|a \leq x < b\}$
$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R}| -\infty < x < a\} = \{x \in \mathbb{R}|x < a\}$
usw.

**Leere Menge:** z.B. $\{x \in \mathbb{R}|x = x + 1\} = \{x \in \mathbb{R}|x^2 + 1 = 0\}$ enthält kein Element.
Bezeichnung: $\emptyset$ oder $\{\}$

## 2.2. Mengenverknüpfungen

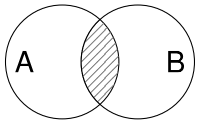
**Def. 2:**
$\boxed{M_1 = M_2} :\equiv \boxed{\forall x\ (x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2}$ (*Gleichheit*)

**Def. 3:**
$\boxed{M_1 \subseteq M_2} :\equiv \boxed{\forall x\ (x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2}$ (*Inkulsion*) „$M_1$ ist Teilmenge von $M_2$“

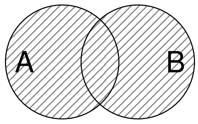
**Diskussion:**
Ist $M_1 \subseteq M_2$ aber $M_1 \neq M_2$ so kann man schreiben $M_1 \subset M_2$ (echte Teilmenge).

**Def. 4:**

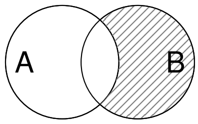
1.) $A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
*Durchschnitt* von $A$ und $B$



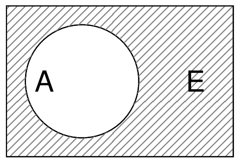

2.) $A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$
*Vereinigung* von $A$ und $B$




3.) $A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
*Differenz* „$A$ minus $B$“




4.) Bei Vorliegen einer Grundmenge $E$:
$\overline{A} := E \setminus A$
*Komplimentärmenge* von $A$




**Diskussion:** (ausgewählte Rechenregeln)

1.) $\cup$ und $\cap$ sind kommutativ und assoziativ
z.B. gilt $A \cup B = B \cup A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

2.) Allg. $I$ ... Indexmenge, z.B. $\{1, 2, ..., n\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ dann:
$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x | \exists i \in I \quad x \in A_i\}$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x | \forall i \in I \quad x \in A_i\}$$

## 2.3. Relationen

### 2.3.1. Grundbegriffe

**Def. 5:**
Die Menge $M_1 \times M_2 := \{(x_1, x_2) | x_1 \in M_1 \wedge x_2 \in M_2\}$ heißt *kartesisches Produkt* der Mengen $M_1$ und $M_2$ (= Menge aller geordneten Paare)

**Bsp. 2:**
$\mathbb{R}$ ... Menge der reelen Zahlen, veranschaulicht durch die Zahlengerade
$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ ... x-y-Ebene

**Def. 6:**
Eine Teilmenge $T \subseteq M_1 \times M_2$ heißt *(binäre) Relation*.

**Diskussion:**

1.) Verallgemeinerung: $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1 \in M_1, ..., x_n \in M_n\}$ (= Menge geordneter n-Tupel)
Eine Teilmenge $T \subseteq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ heißt *n-stellige Relation*.

2.) *Jede* Teilmenge von $M_1 \times M_2$ ist eine Relation, also auch die Grenfälle $\emptyset$ (gesamt leere Menge) und $M_1 \times M_2$ (vollständige Menge). Wichtig sind aber im allgemeinen die echten Teilmengen, die die verschiedensten Beziehungen zwischen den Elementen von $M_1$ und $M_2$ ausdrücken.

**Def. 7:** (Eigenschaften binärer Relationen in $M_1 \times M_2$)
Eine Relation $T \subseteq M_1 \times M_2$ heißt:

a) *linksvollständig (linkstotal)*, wenn für jedes $x_1 \in M_1$ (wenigstens) ein $x_2 \in M_2$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

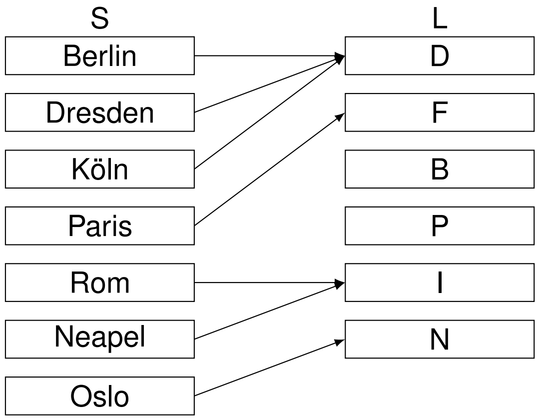
b) *recthvollständig (rechtstotal*, wenn für jedes $x_2 \in M_2$ (wenigstens) ein $x_1 \in M_1$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

c) *rechteindeutig*, wenn für jedes $x_1 \in M_1$ höchstens ein $x_2 \in M_2$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

d) *linkseindeutig*, wenn für jedes $x_2 \in M_2$ höchstens ein $x_1 \in M_1$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

**Bsp. 3:**
Es seien $S$ bzw. $L$ folgende Mengen von Städten bzw. Ländern:
$S = \{Berlin,\ Dresden,\ Köln,\ Paris,\ Ram,\ Neapel,\ Oslo\}$
$L = \{D(eutschland),\ F(rankreich),\ B(elgien),\ I(talien),\ P(olen),\ N(orwegen)\}$
Die Relation $T \subseteq S \times L$ soll darstellen, welche Stadt in welchem Land liegt.
Man gebe $T$ elementweise an und stelle die Relation graphisch dar!
Welche der Eigenschaften aus Def. 7 treffen zu?

- $T = \{(Berlin, D), (Dresden, D), (Köln, D), (Paris, F), (Rom, I), (Neapel, I), (Oslo, N)\}$
- graphische Darstellung:




$(x, y) \in T : x \to y$ (gerichteter Graph)

- Eigenschaften:
linksvollständig
nicht rechtsvollständig
rechtseindeutig
nicht linkseindeutig
(solche Relationen nennt man auch „Funktionen“, eindeutige Zuordnung [von Stadt $\to$ Land])

**Def. 8:** (Eigenschaften binärer Relationen in $M \times M$)
Eine Relation $T \subseteq M \times M$ (Sprechweise auch „Relation auf M“) heißt...

a) *reflexiv*, wenn $(x, x) \in T$ für alle $x \in M$,

b) *symmetrisch*, wenn $(x, y) \in T \Rightarrow (y, x) \in T$,

c) *antisymmetrisch*, wenn $((x, y) \in T \wedge (y, x) \in T) \Rightarrow x = y$,

d) *asymmetrisch*, wenn $(x, y) \in T \Rightarrow (y, x) \notin T$,

e) *transitiv*, wenn $((x, y) \in T \wedge (y, z) \in T) \Rightarrow (x, z) \in T$

... jeweils für *alle* $x, y, z \in M$ gilt.

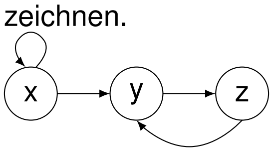
**Bsp. 4:**
Welche Eigenschaften aus Def. 8 besitzen folgende Relationen?
Es sei $P$ eine Menge von Personen.

a) Eine Person $x \in P$ sei jünger als $y \in P$, wenn ihr Geburtstag später als der von $y$ ist.
$\curvearrowright J \subseteq P \times P$ mit $J = \{(x, y) | x \text{ ist jünger als } y\}$.
$J$ ist offensichtlich asymmetrisch (damit auch antisymmetrisch [Die Prämisse der Implikation $((x, y) \in J \wedge (y, x) \in J) \Rightarrow x = y$ ist stets falsch, damit die Implikation stets wahr]) und transitiv.
Eine solche Relation nennt man auch *strikte Ordnungsrelation* (vgl. Abschnitt 2.3.4).

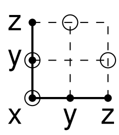
b) Zwei Personon $x \in P$ und $y \in P$ heißen gleichaltrig, wenn $x$ und $y$ das gleiche Geburts*jahr* besitzen.
$\curvearrowright G \subseteq P \times P$ mit $G = \{(x, y) | x \text{ und } y \text{ sind gleichaltrig}\}$.
$G$ ist offensichtlich reflexiv, symmetrisch und transitiv.
Derartige Relationen nennt man *Äquivalenzrelationen*, vgl. Abschnitt 2.3.3. Sie teilen $P$ in disjunkte sogenannte Äquivalenzklassen auf ($x$ äquivalent $y$ heißt, $x$ und $y$ besitzen gleiches Geburtsjahr).

Graphische Darstellung von Relationen $T$ in $M \times M$ (auf $M$). Möglichkeiten:

1.) Elemente von $M$ nur einmal darstellen, Pfeildarstellun wie bisher, bei $(x, x) \in T$ eine Schlinge zeichnen.




(gerichteter Graph)

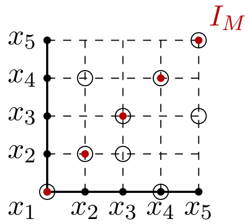
2.) 


(Koordinatensystem)
Diese Variante ist auch bei Relationen in $M_1 \times M_2$ möglich.

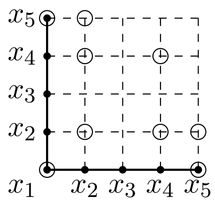
**Diskussion:**

1.) Die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität lassen sich beim gerichteten Graphen leicht nachprüfen.
*Reflexivität:* Bei jedem Element ist eine Schlinge.
*Symmetrie:* Jeder Pfeil $x \to y$ $(y \neq x)$ besitzt „umkehrpfeil“ $(x \leftarrow y)$.
Antisymmetrie: Schlinge möglich, aber keine Umkehrpfeile.
Asymmetrie: weder Schlingen noch Umkehrpfeile.
*Transitivität:* Falls ein Pfeil $x \to y$ eine „Fortsetzung“ $y \to z$ besitzt, so verläuft auch ein Pfeil von $x$ nach $z$.

2.) Auch die Darsteellung von Koordinatensystem lassen sich die Eigenschaften Reflexivität und Symmetrie sofort überprüfen.
*Reflexivität:* Die Diagonale $I_M = \{(x,x)|x \in M\}$ gehört zu $T$ ($I_M$ heißt auch *Identitätsrelation*, diese Relation ist eine spezielle Funktion, identische Funktion $y = f(x)) = x$, $x \in M$ später als Funktion auch mit $i_M$ bezeichnet)
*Symmetrie:* $T$ ist spiegelsymmetrisch bzgl. $I_M$




ist reflexiv aber nicht symmetrisch




ist symmetrisch aber nicht reflexiv

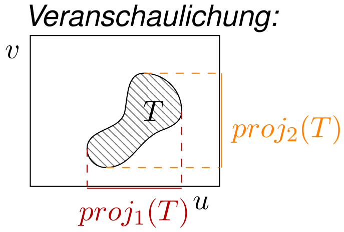
*Alternative Schreibweisen:* Es sei $T \subseteq M_1 \times M_2$ eine binäre Relation.
Anstelle $\boxed{(x,y) \in T}$ kann man schreiben:

- $xTy$ ($x$ steht in Relation $T$ zu $y$), für viele wichtige Relationen gibt es spezielle Zeichen, z.B. $x < y$, $x = y$, $g||h$ oder $A \subseteq B$ usw.
- Aussageformen (vgl. Prädikatenlogik): $\boxed{T(x,y)}$ (auch mit mehreren Variablen möglich)

### 2.3.2. Operationen auf Relationen

Da Relationen spezielle Mengen sind, gibt es Operationen wie $\cup$, $cap$ usw. auch hier. Weitere für Relationen wichtige Operationen in den folgenden Definitionen:

**Def. 9:**
Es sein $T$ eine Relation in $U \times V$.
Die Menge $proj_1(T) = \{x \in U | \exists y \in V, (x,y) \in T\}$ heißt *Projektion* von $T$ auf $u$ (1. Faktor des kartesischen Produkts).
Analog ist $proj_2(T) = \{y \in V | \exists x \in U, (x,y) \in T\}$ die Projektion auf den 2. Faktor.
*Veranschaulichung:*



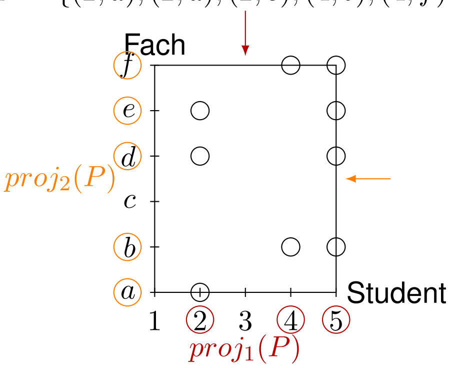

**Bsp. 5:**
Es sei $S = \{1,2,3,4,5\}$ eine Menge von Studenten und $F = \{a,b,c,d,e,f\}$ eine Menge von Fächern.
Es sei $P \subseteq S \times F$ die Relation, die angibt, welcher Student in welchem Fach eine Nach- bzw. Wiederholungsprüfung im bevorstehenden Prüfungsabschnitt hat.
Die Studenten $1$ und $3$ haben keine Prüfung ausstehen, Student $2$ muss die Prüfungen in $a$. $d$ und $e$, $4$ in $b$ und $f$ sowie 5 in $b$, $d$, $e$ und $f$ ablegen.

a) Man gebe die Relation $P$ elementweise an und stelle sie in einem Koordinatensystem dar.

b) Man ermittle die Projektionen $P$ auf $S$ bzw. $F$ und kennzeichne diese in der Skizze.

Lösung:

a) $P = \{(2,a),(2,d),(2,e),(4,b),(4,f),(5,b),(5,d),(5,e),(5,f)\}$




b) $proj_1(P) = \{2,4,5\} \subseteq S$
(= Menge der Studenten, die wenigsten eine N/W-Prüfung haben.)
$proj_2(P) = \{a,b,d,e,f\} \subseteq F$
(= Menge der Fächer, in denen Student(en) eine N/W-Prüfung haben.)

**Def. 10:**
Es sei $T \subseteq M_1 \times M_2$ eine binäre Relation.
Die Relation $T^{-1} := \{(y,x)|(x,y) \in T\} \subseteq M_2 \times M_1$ heißt *inverse Relation* (bzw. kurz: *Inverse*) von $T$.

**Bsp. 6:** (vgl. Bsp. 5)
$P^{-1} = \{(a,2),(b,4),(b,5),(d,2),(d,5),(e,2),(e,5),(f,4),(f,5)\}$
Besonders wichtig ist die folgende Operation:

**Def. 11:**
Es seien $T_1 \subseteq M_1 \times M_2$ und $T_2 \subseteq M_2 \times M_3$ binäre Relationen.
Als *Komposition* (oder auch *Verkettung*) $T_1 \circ T_2$ („$T_2$ nach $T_1$“) wird die Relation $T_1 \circ T_2 := \{(x,z) \in M_1 \times M_3 | \exists y \in M_2 \quad (x,y) \in T_1 \wedge (y,z) \in T_2\}$ in $M_1 \times M_3$ bezeichnet.

**Bsp. 7:**
Es sei $M$ die Menge aller Menschen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt leben. Weiter seien $S = \{(x,y)|x$ ist Mutter von $y\} \subseteq M \times M$ und $T = \{(y,z)|y$ ist verheiratet mit $z\} \subseteq M \times M$.
Dann bedeutet $(x,z) \in S \circ T$: Es gibt ein $y$, sodass $x$ die Mutter von $y$ ist ($(x,y) \in S$) und $y$ mit $z$ verheiratet ($(y,z) \in T$) ist, d.h. „$x$ ist die Schwiegermutter von $z$“.

**Diskussion:** Wichtige Eigenschaft der Komposition $\circ$:

- Die Operation $\circ$ ist *assoziativ*, d.h. seien $T_1 \subseteq A \times B$, $T_2 \subseteq B \times C$ und $T_3 \subseteq C \times D$, dann gilt:
$\underbrace{(T_1 \circ T_2)}_{\subseteq A \times C} \circ \underset{\subseteq C \times D}{T_3} = \underset{\subseteq A \times B}{T_1} \circ \underbrace{(T_2 \circ T_3)}_{\subseteq B \times D} = T_1 \circ T_2 \circ T_3 \subseteq A \times D$

**Def. 12:**
Es sei $T$ eine Relation in $M \times M$ (auf $M$).
Als *transitive Hülle* $T^+$ von $T$ bezeichnet man die kleinste Relation, die $T$ enthält und transitiv ist.

**Satz 1:** Es gilt: $\boxed{T^+ = T \cup (T \circ T) \cup (T \circ T \circ T) \cup ...}$

**Bemerkung:**
Bezeichnung für $\underbrace{T \circ T \circ ... \circ T}_{\text{n-mal}}$ auch $T^n$
(Nicht verwechseln mit Mengenprodukt $\underbrace{T \times ... \times T}_{\text{n-mal}}$ bzw. Funktionen mit n-ten Potenz $f^n$!)

Damit ist $\boxed{T^+ = \bigcup_{j=1}^{\infty} T^j}$

**Beweis:**

1.) $T^+$ ist transitiv, denn sei $(x,y) \in T^+$ und $(y,z) \in T^+$, dann existieren natürliche Zahlen $j_1, j_2 \geq 1$ mit $(x,y) \in T^{j_1}$ und $(y,z) \in T^{j_2}$,
d.h. $y$ wird in $j_1$ Schritten von $x$ aus erreicht und $z$ in $j_2$ Schritten von $y$ aus erreicht. Also wird $z$ in $j_1 + j_2$ Schritten von $x$ aus erreicht,
d.h. $(x,z) \in T^{j_1+j_2} \subseteq T^+$

2.) Es sei $T \subseteq S$ für eine transitive Relation $S$.
$\Rightarrow T \circ T \subseteq S \circ S \subset S$ und für beliebiges $j \geq 1$:
$T^j \subseteq S^j \subseteq S$ und somit:
$T^+ = \bigcup_{j=1}^{\infty} T^j \subseteq S,$
d.h. $T^+$ ist tatsächlich die kleinste transitive Relation, die $T$ enthält.

**Diskussion:**

1.) Analog zur transitiven Hülle einer Relation $T$ in $M \times M$ (auf $M$) werden die reflexive Hülle bzw. die symmetrische Hülle von $T$ als die jeweils kleinsten Relationen die T enthalten und reflexiv bzw. symmetrisch sind definiert.
Die Ermittlung gestaltet sich etwas „einfacher“ als bei der transitiven Hülle:
*Reflexive Hülle* von $T$: $\boxed{T \cup I_M}$ (dabei ist $I_M = \{(x,x) | x \in M\}$ [Diagonale / Identitätsrelation])
*Symmetrische Hülle* von $T$: $\boxed{T \cup T^{-1}}$

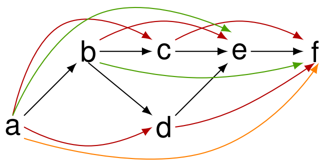
2.) Von Bedeutung ist auch die *reflexiv-transitive* Hüllo ven $T$:
$\boxed{T^* = T^+ \cup I_M}$ (dabei $T^+$ ... transitive Hülle von $T$)

**Bsp. 8:**
Gegeben sei die Menge $M = \{a,b,c,d,e,f\}$
sowie die Relation $T = \{(a,b),(b,c),(c,e),(b,d),(d,e),(e,f)\}$.

a) *Transitive Hülle*: Zur Ermittlung der Komposition $S \circ T$:
Für jedes Element $(x,y) \in S$ alle Fortsetzungen $(y,z) \in T$ suchen $\curvearrowright$ $(x,z)$ als Element von $S \circ T$ notieren, falls es noch nicht vorkommt.
Bspw.:

- $(a,b)$, Fortsetzungen wären $(b,c),(b,d)$ $\curvearrowright$ Elemente $(a,c)$ und $(a,d)$ notieren.
- $(b,c)$, Fortsetzung $(c,e)$ $\curvearrowright$ $(b,e)$ notieren
- usw.

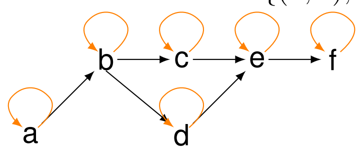
$\Rightarrow T \circ T = \{(a,c),(a,d),(b,e),(c,f),(d,f)\} = T^2$
$T^3 = T \circ (T \circ T) = \{(a,e),(b,f)\}$ (ausgehend von $T$ in $T \circ T$ nach Fortsetzung suchen)
$T^4 = T \circ T^3 = \{(a,f)\}$



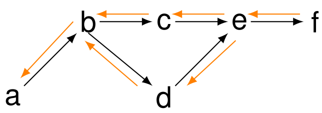

$\Rightarrow T^+ = T \cup \underbrace{(T \circ T)}_{\text{2 Schritte}} \cup \underbrace{(T \circ T \circ T)}_{\text{3 Schritte}} \cup \underbrace{(T \circ T \circ T \circ T}_{\text{4 Schritte}} = T \cup T^2 \cup T^3 \cup T^4$

(Formel bricht im endlichen Fall nach endlich vielen Schritten ab.)

b) *Reflexive Hülle*: $T \cup \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f)\}$




c) *Symmetrische Hülle*: $T \cup T^{-1} = T \cup \{(b,a),(c,b),(e,c),(d,b),(e,d),(f,e)\}$




Zur Überprüfung der Eigenschaften aus Def. 8 ist folgender Satz nützlich:

**Satz 2:**
Es sei $T \subseteq M \times M$ eine binäre Relation. Dann gilt:

a) $T$ ist reflexiv $\Leftrightarrow I_M \subseteq T$ ($I_M$ ... Identitätsrelation)

b) $T$ ist symmetrisch $\Leftrightarrow T^{-1} \subseteq T \quad [\Leftrightarrow T^{-1} = T]$

c) $T$ ist antisymmetrisch $\Leftrightarrow T \cap T^{-1} \subseteq I_M$

d) $T$ ist asymmetrisch $\Leftrightarrow T \cap T^{-1} = \emptyset$

e) $T$ ist transitiv $\Leftrightarrow T \circ T \subseteq T$

**Disskussion:**

1.) Beweise ergeben sich unmittelbar aus Def. 8, vgl. Übungsaufgabe 1.24 (für b) und e))

2.) Aus c) und d) ergibt sich z.B.
$\boxed{T \text{ asymmetrisch}} \Rightarrow \boxed{T \text{ antisymmetrisch}}$ (da $\emptyset$ Teilmenge jeder Menge ist)

### 2.3.3. Äquivalenzrelationen

**Def. 13:**
Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt *Äquivalenzrelation* auf $M$, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

**Diskussion:**

1.) Durch eine Äuivalenzrelation wird $M$ vollständig in paarweise elementfremde (disjunkte) *Äquivalenzklassen* zerlegt. Die Menge aller Äquivalenzklassen von $M$ bezüglich $T$ heißt *Quotientenmenge* $M/T$.
Aufgrund der 3. Eigenschaft aus Def. 13 erhält eine Äquivalenzklasse alle Elemente, die untereinander erreichbar sind (=äquivalent) und nur diese.

2.) Äquivalenzklassen enthalten alle Elemente, die bezüglich einer bestimmten Eigenschaft nicht unterscheidbar sind, z.B. Bsp. 4 mit $M = P$ (Menge von Personen), Äquivalenzrelation $G \subseteq P \times P$ mit $G = \{(x, y)|x$ und $y$ haben gleiches Geburtsjahr$\}$, Äquivalenzklassen sind die Jahrgänge.

3.) Anstelle der Schreibweise $(x, y) \in T$, $xTy$ oder $T(x, y)$ verwendet man bei beliebigen Äquivalenzrelationen auf $x \sim y$. Bei vielen speziellen Äquivalenzrelationen spezielle Symbole, sie folgendes Beispiel.

**Bsp. 9:**

a) $M$ sei eine beliebige Menge $T_1 = I_M = \{(x, y) \in M \times M|x = y\}$ (Identitätsrelation) ist eine Äquivalenzrelation.
Äquivalent heißt hier gleich!
Äquivalenzklassen sind sämtliche einelementige Teilmengen $\{x\}, x \in M$. $T_1$ heißt die feinste Zerlegung von $M$ die möglich ist. Die größte Zerlegung liefert die Relation $T_2 = M \times M$, die trivialer Weise ebenfalls eine Äquivalenzrelation ist mit nur einer Äquivalenzklasse $M$. Für die Anwendungen sind natürlich Relationen wichtig, die eine feinere Zerlegung liefern.

b) $M = \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen), $m \in \mathbb{N}^*$, $T \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit
   - $(x, y) \in T :\equiv$ „$x$ und $y$ lassen bei Division durch $m$ den gleichen Rest“
   - Bezeichnung $x \equiv y(mod\ m) \ldots x$ kongruent $y$ (modulo $m$), z.B. $29 \equiv 8(mod\ 7)$
   - $T$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$, Äquivalenzklassen:
     Restklassen modulo $m$ (siehe Übungsaufgabe 1.19)

c) $M \ldots$ Menge aller Geraden einer Ebene, $T \subseteq M \times M$ mit
   - $(x, y) \in T :\equiv$ „$x$ ist zu $y$ parallel“, Bezeichnung: $x||y$
     $\curvearrowright T$ ist Äquivalenzrelation auf $M$ (siehe Übungsaufgabe 1.21.)

### 2.3.4. Ordnungsrelationen

**Def. 14:**

a) Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt Ordnungsrelation auf $M$, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

b) Eine Ordnungsrelation heißt *vollstandig* oder *linear*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt $(x, y) \in T \vee (y, x) \in T$.

**Def. 15:**
Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt *strikte Ordnungsrelation* auf $M$, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist. Eine strikte Ordnungsrelation heißt vollständig, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt $(x, y) \in T \vee (y, x) \in T$.


Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

**Bsp. 10:**

a) $M = \mathbb{R}$, $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\boxed{(x,y) \in T :\equiv x \leq y}$ ist eine vollständige Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$.

b) Die Relation „$<$" ist eine (vollständige) strikte Ordnungsrelation.

c) $E$ sei eiine Menge, $M$ sei die *Menge aller Teilmengen von* $E$, d.h. $M$ ist die Potenzmenge $M = \mathcal{P}(E)$ von $E$.
$T \subseteq M \times M$ mit $\boxed{(A,B) \in T :\equiv A \subseteq B}$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(E) = M$ (Inklusion).

**Diskussion:**

1.) In der Literatur wird manchmal die Relation im Sinne von Def. 14 als Halbordnung und nur eine vollständige als Ordnung als Ordnungsrelation bezeichnet.

2.) Zu jeder Ordnung $T_1$ (auf $M$) gehört eine strikte Ordnung $T_2$ und umgekehrt: $T_2 = T_1 \backslash I_M$ bzw. $T_1 = T_2 \cup I_M$ ($T_1$ eist die reflexive Hülle von $T_2$), z.B. ($\leq$, $<$) oder ($\subseteq$, $\subset$).

3.) Die Symbole $\leq$ (bzw. $<$) können anstelle der Paarschreibweise auch bei beliebigen Ordnungen verwendet werden, falls keine anderen Zeichen dafür üblich sind.

**Def. 16:**
$T$ sei eine Ordnungsrelation auf eine Menge $M$. Weiter sei $A$ eine Teilmenge von $M$.

a) Ein Element $a \in M$ heißt obere Schranke von $A$, wenn gilt:
$\forall x \in A \quad x \leq a \quad (x \leq a$ d.h. $(x,a) \in T$, vgl. 3.) der vorhergehenden Diskussion)

b) Es sei $B$ die Menge der oberen Schranken von $A$, diese sei nicht leer. Falls es eine *kleinste obere Schranke* $s$ von $A$ gibt, d.h. $\exists s \in B \quad \forall b \in B \quad s \leq b$, so heißt $s$ das *Supremum von* $A$, $\boxed{s = sup\, A}$

c) Gilt $s \in A$, so heißt $s$ das Maximum von $A$: $s = max\, A = sup\, A$

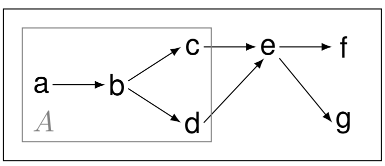
d) Ein Element $m \in A$ heißt maximal, wenn es kein größeres Element in $A$ gibt, d.h. $\forall x \in A \ (m \leq x \Rightarrow m = x)$

**Diskussion:**

1.) Die Begriffe aus Def. 16 lassen sich auf strikte Ordnungen $S$ übertragen, indem anstelle von $S$ die reflexive Hülle $T = S \cup I_M$ verwendet wird.

2.) Bei Ordnungsrelationen $T$ (auch für strikte Ordnungen) auf endlichen Mengen $M$ kann ein vereinfachter Graph, das sogenannte *HASSE-Diagramm*, betrachtet werden.
$a \longrightarrow b$ $(a \neq b)$ bedeutet $(a,b) \in T$ und es gibt kein Zwischenglied $c \neq a$ und $c \neq b$ mit $(a,c) \in T \wedge (c,b) \in T$ ($a$ ist unmittelbarer Vorgänger von $b$ bzw. $b$ Nachfolger von $a$).
Diesem Diagramm entspricht eine Teilrelation $U \subseteq T$, deren transitiv-reflexive Hülle (bzw. transitive Hülle bei strikten Ordnungen) $T$ ist.

3.) Veranschaulichung von Def. 16 mit einem HASSE-Diagramm einer nicht vollständigen Ordnung (nicht linear)




$M$

z.B. Arbeitsgänge, die in einer bestimmten Reihenfolge durchgeführt werden müssen, $A$ bspw. Teilarbeiten einer Zweigfirma
*obere Schranken:* $e, f, g$
$sup\, A = e$
*Maximum von $A$:* existiert nicht, da $e \notin A$
*maximale Elemente von $A$:* $c, d$

4.) Bei nichtlinearen Ordnungen müssene obere Schranken, Supremum und Maximum nicht existieren, es kann mehrere maximale Elemente $A \subseteq M$ geben.
Bei linearen Ordungen auf *endlichen* Mengen gibt es genau ein maximales Element $= max\, A = max\, B$

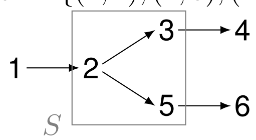
5.) Analog zur Def. 16 werden die Begriffe *untere Schranken* $a$ von $A$ ($\forall x \in A \quad a \leq x$), ***größte** untere Schranke* (*Infinum*) $s$ von $A$ ($B \neq \emptyset \ldots$ Menge der unteren Schranken, $\exists s \in B \quad \forall a \in B \forall a \leq s$), *Minimum von* $A$ ($min\, A = inf\, A = s$ falls $s \in A$) und minimales Element $m$ von $A$ ($\forall x \in A \quad (x \leq m \Rightarrow x = m)$) definiert.

**Bsp. 11:**
Eine bestimmte Arbeitsaufgabe besteht aus mehreren Arbeitsgängen.
Es sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ die Menge der Arbeitsgänge. Die Arbeitsgänge $\{2, 3, 5\} =: S$ werden von einer Subfirma durchgeführt. Für die Reihenfolge gilt: 1 muss vor 2, 2 vor 3 und 5, 3 vor 4 sowie 5 vor 6 durchgeführt werden.

a) Man beschreibe diese Forderungen durch eine Relation $U \subseteq A \times A$ und stelle sie graphisch dar (HASSE-Diagramm).
b) Man ermittle die transitive Hülle $U^+$ von $U$.
c) Man gebe (falls vorhanden) obere Schranken, Supremum, Maximum, max. Elemente sowie untere Schranken, Infinum, Minimum, min. Elemente von $S$ an.

Lösung:

a) $U = \{(1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (5, 6\}$




b) $U \circ U = \{(1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 6)\}$
$U \circ (U \circ U) = \{(1, 4), (1, 6)\}$
$U^4 = \emptyset$

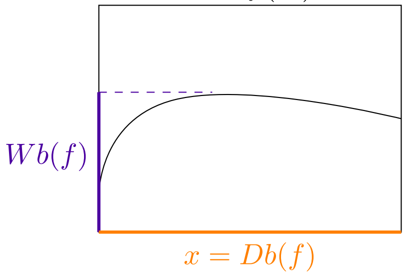
### 2.3.5. Funktionen

**Def. 17:**
Eine Relation $f \subseteq x \times y$ heißt *Funktion (Abbildung)* von $X$ in $Y$, wenn sie linksvollständig und rechtseindeutig ist.

**Diskussion:**

- Gemäß Def. 7 a+c aus Kapitel 2.3.1 bedeutet linksvollständig *und* rechtseindeutig, dass zu *jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$* mit $(x, y) \in f$ existiert, also *eindeutige Zuordnung*:
$\boxed{x \longmapsto y =: f(x)}$
*Schreibweise:* $f : X \to Y$ (manchmal $f|X \to Y$
$y = f(x)$ heißt auch *Bild* von $x$, $x$ *ein* Urbild von $y$ (muss nicht eindeutig sein).

- $X = Db(f) \dots$ *Definitionsbereich*,
  $Wb(f) = \{y \in Y | \exists x \in x \quad (x, y) \in f\} \subseteq Y \dots$ Wertebereich
  Schreibweise auch $f(X) := Wb(f)$ (Menge aller Bilder).




$f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$

**Def. 18:**

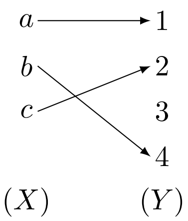
a) Eine Abbildung $f$ heißt *surjektiv* (Auch Abbildung auf $Y$),

b) Eine Funktion $f$ heißt *injektiv*, wenn zu jedem $y \in Wb(f)$ genau ein $x \in Db(f)$ existiert mit $(x, y) \in f$:
$\underset{\in Wb(f)}{y} \longmapsto x =: \underset{\in Db(f)}{f^{-1}(y)}$
(„$f$ oben -1“)
Die dadurch erklärte Abbildung $f^{-1} : Wb(f) \to Db(f)$ heißt *Umkehrfunktion* von $f$, vgl. auch Kap 1.4.

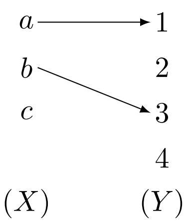
c) Eine injektive *und* surjektive Abb. von $X$ auf $Y$ heißt *bijektiv*.

d) Gebräuchlich sind auch die Begriffe *Surjektion*, *Injektion* und *Bijektion*!

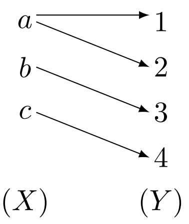
**Bsp. 12:**
Gegeben sind die Mengen $X = \{a, b, c\}$ und $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ sowie folgende Relation in $X \times Y$:




a) $T_1$:
$T_1$ ist eine Funktion $f(= T_1) : f : X \to Y \quad (1)$ diese ist injektiv, $Db(f) = X = \{a, b, c\}$, $Wb(f) = \{1, 2, 4\} =: W$, $f : X \to W \quad (2)$ ist surjektiv, also sogar bijektiv.
Als Relation sind $(1)$ und $(2)$ nicht zu unterscheiden, aber als Funktion.



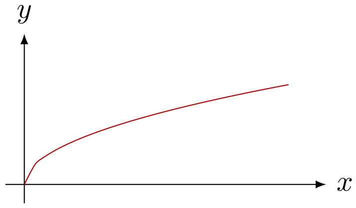

b) $T_2$:
$T_2$ ist keine Funktion, nicht linksvollständig. Betrachtet man $D = \{a, b\} \subset X$, so ist durch $T_2$ eine Funktion $f : D \to Y$ beschrieben, die Funktion ist injektiv und kann mit $W := f(D) = \{1, 3\}$ zu einer bijektiven Abbildung $f : D \to W$ umgewandelt werden.




c) $T_3$:
$T_3$ ist keine Funktion, da nicht rechtseindeutig.

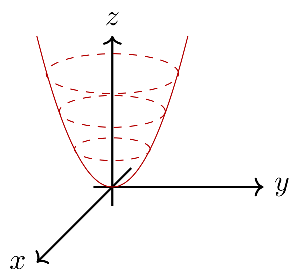
**Bsp. 13:**

a) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit „$x \to y = f(x) = \sqrt{x}$ ist eine *Funktion einer reelen Veränderlichen* (injektiv).




$Wb(f) = [0, \infty)$
$Db(f) = [0, \infty)$

b) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2 = f(x, y) =: z$ *Funktion zweier reeller Veränderlicher*.

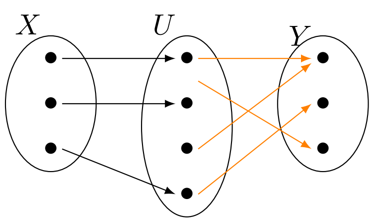



(Paraboloid)
$Db(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (x-y-Ebene)
$Wb(f) = [, \infty)$

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \longmapsto f(n) = \dfrac{n}{n+1}$ ist eine (reelle) Zahlenfolge. $f(0) = 1, f(1) = \dfrac{1}{2}, f(2) = \dfrac{2}{3}, \ldots$
Bezeichnung meist mit Index: $a_n = f(n) \curvearrowright ZF(a_n) \quad n \in \mathbb{N}$

**Def. 19:**
Es seien $g := X \to U$ mit $x \longmapsto u = g(x)$ und $f : U \to Y$ mit $u \longmapsto y = f(u)$ zwei Abbildungen. Dann stellt man die Zuordnung $x \longmapsto y = f(\underbrace{g(x)}_{u})$ eine Abbildung von $X$ in $Y$ dar, eine sogenannte *mittelbare Funktion (Komposition / Verkettung). Bezeichnung:* $g \circ f : X \to Y$ mit $y = (g \circ f)(x) = f(g(x))$

**Diskussion:**

1.)



$x \longmapsto u = g(x) \quad u \longmapsto f(u) = f(g(x))$
Paarschreibweise: $(x, u) \in g \qquad (u, y) \in f \curvearrowright (x, y) \in g \circ f$

2.) $g$ wird zuerst angewendet, dann $f$. Wie bei beliebigen Relationen die die Schreibweise $g \circ f$

3.) In der Literatur findet man oft die Schreibweise $f \circ g$ angelehnt an die Schreibweise $f(g(x))$. Die Reihenfolge der Berechnung ast aber von innen nach außen, erst innere Funktion $g$, dann die äußere $f$.

**Satz 3:**
Es sei $f : X \to Y$ eine *Bijektion*, d.h. es existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$, weiter sei $i_A$ für eine beliebige Menge $A$ die identische Abbildung (Identitätsrelation): $i_A : A \to A$ mit $i_A(x) = x$ für alle $x \in A$.
Es gilt dann:
$f \circ f^{-1} = id_X$, d.h. $(f \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(f(x)) = x(\forall x \in X)$ und
$f^{-1} \circ f = id_Y$, d.h. $(f^{-1} \circ f)(y)) = f(f^{-1}(y)) = y(\forall y \in Y)$
(Funktion und Umkehrfunktion nacheinander angewandt heben sich auf).

**Satz 4:**
Es seien $g = X \to U$ und $h : U \to Y$ zwei Bijektionen. Dann ist die Komposition $f := g \circ h : X \to Y$ ebenfalls eine Bijektion und es gilt:
$\boxed{f^{-1} = (g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}}$

## 2.4. Gleichmächtigkeit, Kardinalzahlen

Es sei eine hinreichend mufassend Grundmenge, die alle für eine mathematische Theorie relevante Objekte (Zahlen, Funktionen, usw.) enthält. $M$ sei die Potenzmenge von $E$(d.h. $M$ ist die Menge aller Teilmengen von $E$, $M = \mathcal{P}(E)$).

**Def. 20:**
Zwei Mengen $A$ und $B$ ($A \subseteq E, B \subseteq E$ bzw. $A \in M, B \in M$) heißen *gleichmächtig* (Bezeichnung $A \sim B$), wenn eine bijektive Abbildung von $A$ auf $B$ (damit auch $B$ auf $A$) existiert.

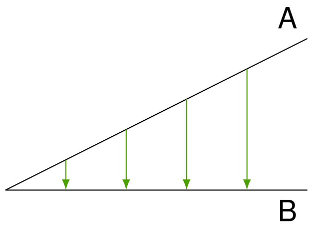
**Diskussion:**

1.) Offensichtlich ist die Relation $T \subseteq M \times M$ mit $(A, B) \in T :\equiv A \sim B$ eine Äquivalenzrelation auf $M$.

2.) Äquivalenzklassen sind Mengen gleichmächtiger Teilmengen von $E$. Diese Äquivalenzklassen nennt man *Kardinalzahlen*.

3.) Bei endlichen Mengen bedeutet Gleichmächtigkeit:
Gleiche Anzahl von Elementen
$A = \{a, b, c\}, B = \{X, Y, Z\}$
(Abbildung bspw. $a \to X \quad b \to Y \quad c \to Z$)
Bezeichnung: $cardA = |A| = 3 \quad (= |B|)$
*Natürliche Zahlen sind die Kardinalzahlen endlicher Mengen.*

4.) Die Anschauung versagt bei unendlichen Mengen.




Die Strecken $A$ und $B$ sind gleichmächtig, obwohl $A$ länger als $B$ ist.

**Def. 21:**
Eine Menge heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie mit der Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist.

**Diskussion:**

1.) $M$ ist abzählbar unendlich heißt, es existiert eine *Zählvorschrift*, bei der jedes Element von $M$ nach endlich vielen Schritten erreicht wird.

2.) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist abzählbar unendlich.
Andordnen nach steigendem Betrag:
$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...\}$

3.) $\mathbb{Q}^+$ ... Menge der pos. rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q}^+ : \begin{array}{cccc} \boxed{\frac{1}{1},} & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \cdots \\ \frac{2}{1}, & \frac{2}{2}, & \frac{2}{3}, & \cdots \\ \frac{3}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{3}{3}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Zählvorschrift:

a) (aufsteigend) Ordnen nach Summen von Zöhler und Nenner
b) Zahlen mit gleicher Summe der Größe nach aufsteigend anordnen.
c) Bereits enthaltene Zählen (=kürzbare Brücke) weglassen.

$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, ... \right\}$
analog zu $\mathbb{Z}$: Die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen (also $\mathbb{Q}^-$ zusammen mit $\mathbb{Q}^+$) ist abzählbar unendlich.

4.) Es gibt Mengen, die mächtiger sind als die Menge der natürlichen Zahlen: *überabzählbare Mengen* ($B$ heißt *mächtiger* als $A$, wenn se eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt, aber keine bijektive. Schreibweise: $|A| < |B|$).

z. B. gilt:

**Satz 5:** Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\} = (0, 1)$ ist überabzählbar.
Beweis: (*CANTORsches Diagonalverfahren*)
Indirekt, angenommen $M = (0, 1)$ sei abzhälbar unendlich, d.h. $M = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$.

Für die Zahlen $x_k$ wählen wir z.B. die eindeutige Darstellung als Dezimalbruch (9er Periode vermeiden). Also bspw. $0,39999... = 0,3\overline{9} = 0,4 = 0,40000...$)
$x_1 = 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} ...$
$x_2 = 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} ...$
$x_3 = 0, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} ...$
...
Es sei $z = 0, b_1 b_2 b_3 ...$ mit $b_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } a_k^{(k)} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } a_k^{(k)} = 1 \end{cases}$ für $k = 1, 2, 3, ...$
Damit unterscheiden sich $x_k$ und $z$ an der $k$-ten Stelle, d.h. $z \neq x_k$ für alle $k \geq 1$. $z$ ist also nicht in der Folge $x_1, x_2, x_3, ...$ enthalten, also $z \notin M$.
Andererseits ist $0 < z < 1$ also $z \in (0,1) = M$. ↯ Widerspruch! #

**Satz 6:**
Es sei $E$ eine Menge. Dann ist die Potenzmenge $M = \mathcal{P}(E)$ mächtiger als $E$.
Beweis:

1.) Die Abbildung $f : E \to M$ mit $f(x) = \{x\}$, die jedem $x \in E$ die einelementige Menge $\{x\} \in M$ zuordnet, ist injektiv.

2.) Angenommen, es gäbe eine bijektive (damit auch surjektive) Abbildung $g : E \to M$. Es sei $A = \{x \in E | x \notin g(x)\} \in M$ ($A$ Teilmenge von $E$). Da $g$ surjektiv ist, gibt ein $a \in E$ mit $g(a) = A$.
Fallunterscheidung:
   a) $a \in A = g(a) \Rightarrow a \notin g(a)$ ↯ Widerspruch!
   b) $a \notin A = g(a) \Rightarrow a \in g(a)$ ↯ Widerspruch!

   Beide Fälle führen auf einen Widerspruch, es gibt keine surjektive und damit auch keine bijektive Abbildung von $E$ auf $\mathcal{P}(E)$. #

**Diskussion:**
Satz 6 zeigt, dass es unendlich viele unendliche Mächtigkeiten gibt. So gilt bspw. $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(|\mathcal{P}(\mathbb{N})|)|$ usw.

**Satz 7:**
Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der Menge der natürlichen Zahlen ist gleichmächtig mit dem Intervall $(0,1)$, also überabzählbar (Beweis: siehe Übungsaufgabe 1.38).

## 2.5. Prinzip der vollständigen Induktion

Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Zu beweisen ist: „Für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt die Aussage $p(u)$.“ (Es sind also abzählbar unendlich viele Einzelaussagen zu beweisen!)

**Satz 8:**

1.) Es sei $\boxed{p(n_0)}$ wahr (Induktionsanfang)

2.) Für alle nat. Zahlen $n \geq n_0$ sei die Implikation $\boxed{p(n) \Rightarrow p(n+1)}$ wahr (Induktionsschluss)

Dann gilt: $p(n)$ ist für alle nat. Zahlen $n \geq n_0$ wahr.
Zum Beweis:

1.) $\curvearrowright p(n_0)$ ist wahr,

2.) $p(n_0) \Rightarrow p(n_0 + 1) ... \curvearrowright$ Konkulsion wahr usw. (Dominoeffekt)

**Bsp. 14:**
Zu beweisen ist $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$

1.) $p(1)$: $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$ (wahr) Induktiansanfang (IA)

2.) Es gelte $p(n)$: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Induktionsannahme/-voraussetzung (IV)

3.) zu zeigen $p(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n+1(n+2)(2n+3)}{6}$ Induktionsschritt (IS)

4.) *Induktionsschluss:* $(p(n) \Rightarrow p(n+1))$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&\overset{IA}{=} \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{6} \left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) \\
&= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) \\
&= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3) \qquad \#
\end{aligned}$$

# 3. Zahlen

## 3.1. Gruppen, Ringe, Körper

- Gegeben sei eine Menge $M$ und eine zweistellige Operation $\circ$ (d.h. Abb. von $M \times M$ in $M$)
  Bezeichnung: $(M, \circ)$, analog $(M, \circ, *)$
- Die Operation $\circ$ heißt *kommutativ*, wenn $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in M$.
- Die Operation $\circ$ heißt *assoziativ*, wenn $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle $a, b, c \in M$.

**Def. 1:**
$(M, \circ)$ heißt *Gruppe*, wenn gilt:

1.) Die Operation $\circ$ ist assoziativ

2.) Es gibt genau ein *neutrales Element* $e \in M$ mit $a \circ e = e \circ a = a$ (für alle $a \in M$)

3.) Es gibt zu jedem $a \in M$ genau ein *inverses Element* $a^{-1}$ mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

4.) Eine Gruppe heißt *ABELsch*, wenn zusätzlich folgendes gilt:
$\circ$ ist kommutativ

**Def. 2:**
$(M, \oplus, *)$ heißt *Ring*, wenn gilt:

1.) $(M, \oplus)$ ist eine ABELsche Gruppe.

2.) Die Operation $*$ ist assoziativ.

3.) Es gelten für beliebige $a, b, c \in M$:
$a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$
$(a \oplus b) * c = (a * c) \oplus (b * c)$ (Distributivgesetze)

4.) Ein Ring heiß *kommutativer Ring*, wenn gilt:
$*$ ist kommutativ

**Def. 3:**
$(M, \oplus, *)$ heißt *Körper*, wenn gilt:

1.) $(M, \oplus, *)$ ist ein Ring
(mit dem neutralen Element $E_0$ für die Operation $\oplus$)

2.) $(M \setminus \{E_0\}, *)$ ist eine ABELsche Gruppe
(mit dem neutralen Element $E_1$ für die Operation $*$)

## 3.2. Zahlentheorie

- Eine natürliche Zahl $p > 1$, die nurch durch $1$ und sich selbst teilbar ist heißt *Primzahl*.
- Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist entweder eine Primzahl, oder sie lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben.
  Diese sogenannte *Primfaktorzerlegung* ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

**Def. 4:**
Zwei natürliche zahlen aus $\mathbb{N}^*$ heißen *teilerfremd*, wenn sie außer $1$ keine gemeinsamen teiler besitzen.

- Es sei $a \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}^*$. Dann gibt es eine eindeutige Darstellung der Gestalt $\boxed{a = q \cdot m + r}$ mit $\boxed{0 \leq r < m}$ und $q \in \mathbb{Z}$.
  Bezeichnung: $m$ ... *Modul* $r$ ... (kleinste nichtnegative) *Rest modulo m* ($r \equiv mod(a, m)$)
- Zur Erinnerung: $a$ und $b$ seien ganze Zahlen, $m \in \ltimes^*$, dann $a \equiv b(mod\ m)$ [$a$ kongruent $b\ modulo\ m$]
  $\Leftrightarrow$ $a$ und $b$ haben den gleicher Rest $modulo\ m$
  $\Leftrightarrow$ $a - b$ ist durch $m$ teilbar (d.h. $\exists k \in \mathbb{Z} \quad a - b = k \cdot m$)

  **Satz 1:**
  Es sei $a \equiv b(mod\ m)$, $c \equiv d(mod\ m)$, dann gilt: $a + c \equiv b + d(mod\ m)$ und $a \cdot c \equiv b \cdot d(mod\ m)$ (d.h. in Summen und Produktenn darf jede Zahl durch einen beliebigen Vertreter der gleichen Restklasse ersetzt werden).

**Bsp. 1:**

a) $307 + 598 \equiv 1 + (-2) \equiv -1 \equiv 5(mod\ 6)$

b) $307 \cdot 598 \equiv 1 \cdot (-2) \equiv -2 \equiv 4(mod\ 6)$

c) $598^6 \equiv (-2)^6 \equiv 64 \equiv 4(mod\ 6)$

- Man wählt aus jeder Restklasse den kleinsten nichtnegativen Vertreter
  $\curvearrowright$ Menge von Resten $modulo\ m$: $\mathbb{Z}_m := \{0, 1, ..., m-1\}$
  $\curvearrowright$ „modulare Arithmetik": Operation $\oplus$ und $\odot$ für Zahlen aus $\mathbb{Z}_m$ erklärbar, in dem für das Ergebnis jeweils der kleinste nichtnegative Rest $modulo\ m$ gewählt wird (vgl. Satz 1)
  z.B. $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, ..., 6\}$, $5 \oplus 4 = 2$, da $5+4 \equiv 9 \equiv 2(mod\ 7)$ $5 \odot 6 = 2$, da $5 \cdot 6 \equiv 30 \equiv 2(mod\ 7)$
  Falls keine Verwechselung zu befürchten ist, wird die übliche Schreibweise $+$ und $\cdot$ anstelle von $\oplus$ und $\odot$ verwendet.

**Def. 5:**
Wenn es zu $c \in \mathbb{Z}_m$ eine Zahl $d \in \mathbb{Z}_m$ gibt, mit $c \cdot d \equiv 1(mod\ m)$ (bzw. $c \odot d \equiv 1$), so heißt $d$ die *(multiplikative) modulare Inverse* zu $c$ in $\mathbb{Z}_m$.
Bezeichnung: $d = c^{-1}$

**Bsp. 2:**
$c = 3 \in \mathbb{Z}_7$, wegen $3 \cdot 5 \equiv 1(mod\ 7)$ ist (in $\mathbb{Z}_7$) $3^{-1} = 5$.

**Satz 2:** Zu $a \in \mathbb{Z}_m, a \neq 0$, gibt es genau dann eine modulare Inverse in $\mathbb{Z}_m$, wenn $a$ und $m$ teilerfremd sind ($ggT(a, m) = 1$).

**Satz 3:** Es sei $p$ eine Primzahl. Dann ist $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ ein Körper.
Bemerkung: Falls $m$ keine Primzahl ist, so ist $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring.

**EUKLIDischer Algorithmus**

- Verfahren zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers $t$ zweier positiver natürlicher Zahlen, $t = ggT(a, b)$.
- In erweiterter Form bietet der Algorithmus eine Möglichkeit zur Bestimmung der modularen Inversen von $a$ zum Modul $m$ (mit $a < m$ und $a, m$ teilerfremd).

**Satz 4:** (EUKLIDischer Algorithmus)
Es seien $a, b \in \mathbb{N}^*, a > b$. Man bildet die endliche Folge
$r_0 := b,\ r_1 = mod\ (a, b),\ r_2 = mod\ (r_0, r_1), ...,\ r_n = mod\ (r_{n-2}, r_{n-1})$, Abbruch falls $r_n = 0$.
In diesem Fall gist $\boxed{ggT(a, b) = r_{n-1}}$ (letzter nicht verschwindender Rest).
Bezeichnung: $j$-te Division ... $\boxed{r_{j-2} : r_{j-1} = q_j \text{ Rest } r_j}$ $(j = 1, ..., n)$ (dabei $r_1 := a$).

**Satz 5:** (erweiterter EUKLIDischer Algorithmus)
Zusätzlich zur Folge $(r_n)$ aus Satz 4 bilde man die Folgen
$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = x_0 - q_2 x_1, ...,\ x_j = x_{j-2} - q_j x_{j-1} \quad (j \leq n-1)$ und
$y_0 = 1,\ y_1 = -q_1,\ y_2 = y_0 - q_2 y_1, ...,\ y_j = y_{j-2} - q_j y_{j-1} \quad (j \leq n-1)$
Dann gilt für alle $j = 0, ...,\ n-1$: $\boxed{r_j = x_j \cdot a + y_j \cdot b}$
Insbesondere gilt $\boxed{ggT(a, b) = x_{n-1} \cdot a + y_{n-1} \cdot b}$

**Diskussion:**

1.) Der Sinn der erweiterten EUKLIDischen Algorithmus besteht darin, in jedem Schrit den *Divisionsrest $r$ als linearkombination von $a$ und $b$ mit ganzzahligen Koeffizienten $x$ und $y$* darzustellen: $r = x \cdot a + y \cdot b$
Der Mechanismus wird am besten im Rechenschema des nachfolgenden Bsp. 4 deutlich.

2.) Sind $c$ und $m$ teilerfremd, $1 \leq c < m$, d.h. $ggT(m, c) = 1$, so erhält man mit dem erweiterten EUKLIDischen Algorithmus ($a = m, b = c$) eine Darstellung in der Form $\boxed{1 = x \cdot m + y \cdot c}$.
$\curvearrowright y \cdot c \equiv 1 (mod\ m)$ und damit $c^{-1} \equiv y (mod\ m)$ (für die modulare Inverse muss eventuell noch der in $\mathbb{Z}_m$ liegende, zu $y$ kongruente, Wert gebildet werden!).

**Bsp. 3:**
Man ermittle den größten gemeinsamen Teiler $t$ sowie das kleinste gemeinsame Vielfache $v$ der Zahlen $132$ und $84$.

- Es genügt der „einfache“ Algorithmus:

$$\begin{aligned} 132 : 84 &= 1 \text{ Rest } 48 \\ 84 : 48 &= 1 \text{ Rest } 36 \\ 48 : 36 &= 1 \text{ Rest } 12 \quad \curvearrowright t = ggT(132, 84) = \underline{\underline{12}} \\ 36 : 12 &= 3 \text{ Rest } \boxed{0} \curvearrowright \text{ Ende.} \end{aligned}$$

- $v = \dfrac{a \cdot b}{t} = \dfrac{132 \cdot 84}{12} = \underline{\underline{924}} = kgV(132, 84)$

**Bsp. 4:**

Man ermittle die modulare Inverse von $\overbrace{11}^{b}$ zum Modul $\overbrace{25}^{a}$.

| | | |
|---|---|---|
| | | $11 = 0 \cdot 25 + 1 \cdot 11$ (1) |
| $25 : 11 = 2$ Rest $3$ | $3 = 25 - 2 \cdot 11$ | $3 = 1 \cdot 25 - 2 \cdot 11$ (2) |
| $11 : 3 = 3$ Rest $2$ | $2 = 11 - 3 \cdot 3$ | $2 = -3 \cdot 25 + 7 \cdot 11$ (3) |
| $3 : 2 = 1$ Rest $1$ | $1 = 3 - 2$ | $\boxed{1} = 4 \cdot 25 - 9 \cdot 11$ |
| $2 : 1 = 2$ Rest $0$ | | |

$\curvearrowright (-9) \cdot 11 \equiv 1 (mod\ 25)$
$\curvearrowright 11^{-1} \equiv -9 \equiv 16 (mod\ 25)$, die Inverse von $11$ in $\mathbb{Z}_{25}$ ist $16$.
Zu den Schritten:

(1) $b = 0 \cdot a + 1 \cdot b$

(2) mittleres Feld als Linearkombination

(3) ab hier Rechnung links spaltenweise durchführen, dabei Faktoren $a$ und $b$ beibehalten.

**EULERsche $\varphi$-Funktion, Satz von EULER**

**Def. 6:**
Es sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann *EULERsche $\varphi$-Funktion*:
$\varphi(n) :=$ Anzahl der zu $n$ teilerfremden Elemente aus $\{1, 2, ..., n\}$. Eigenschaften der $\varphi$-Funktion:

- Es sei $p$ eine Primzahl, dann ist $\boxed{\varphi(p) = p - 1}$, $\boxed{\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)}$ $(k \in \mathbb{N}^*$
- Falls $ggT(m, n) = 1$, so gilt $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.
- Speziell: $n = p \cdot q$ ($p, q$ Primzahlen), dann $\boxed{\varphi(n) = (p-1) \cdot (q-1)}$ (1).

**Satz 6:** (Satz von EULER)
Es sei $ggT(a, n) = 1$, dann gilt:
$\boxed{a^{\varphi(n)} \equiv 1 (mod\ n)}$ (2).

**RSA-Verschlüsselung**

- Die Formeln (1) und (2) [siehe oberhalb] bilden die Grundlage für die sogenannte RSA-Verschlüsselung (RIVES, SHAMIR, ADLEMAN - 1978)
- Schlüsselerzeugung:
  1.) Man wählt (in der Praxis sehr große) Primzahlen $d$ und $q$.
  2.) $n := p \cdot q$, $m := \varphi(n) \overset{(1)}{=} (p-1)(q-1)$
  3.) $e$ wird so gewählt, dass $ggT(e, m) = 1$
  4.) $d := e^{-1} (mod\ m)$ (modulare Inverse)
  5.) $(n, e)$ ... öffentlicher Schlüssel
  $(n, d)$ ... geheimer Schlüssel (geheim ist nur $d$)
  $p$, $q$ und $m$ werden nicht mehr benötigt, bleiben aber geheim!
- Verschlüsselung:
  Klartext $a$ teilerfremd zu $n$ verschlüsseln mit $e$, d.h. $b :\equiv a^e (mod\ n)$ bilden ($b$ ... Geheimtext)
- Entschlüsselung:
  Der Empfänger und Besitzer des geheimen Schlüssels bildet $b^d (mod\ \ m)$ und erhält $b^d \equiv a (mod\ n)$ denn $b^d \equiv (a^e)^d \equiv a^{ed} \equiv a^{1+k \cdot m} \equiv a \cdot \underbrace{\left(a^{\varphi(n)}\right)}_{\equiv 1 \text{ wegen Satz 5}}{}^{k} \equiv a (mod\ n)$.
- Praktische Durchführung vgl Übungsaufgabe 2.4

## 3.3. Reelle Zahlen

$\mathbb{R}$ ... Menge der reellen Zahlen.
Auf $\mathbb{R}$ existiert eine algebraische Struktur und eine Ordnungsstruktur.

### 3.3.1. Algebraische Struktur

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den arithmetischen Operationen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) ist ein Körper.

**Def. 7:**

a.) $\boxed{0! := 1,\ n! = n \cdot (n-1)!}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ *Fakultät* (rekursive Funktion) b.) Sei $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*$, dann sei $\boxed{\binom{\alpha}{0} := 1, \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha}{k}\binom{\alpha-1}{k-1}}$ Binominalkoeffizient $\alpha$ über $k$.

d.h. $\boxed{\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k-1)}{k!}}$

**Diskussion:**

1.) Für $k, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n$ gilt $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

2.) Für $k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\boxed{\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}}$

3.) *Binomischer Lehrsatz*: $(a+b)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + ... + b^n$

*Pascalsches Dreieck*: (Spalte $\hat{=} k$ in $\binom{n}{k}$)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | | | | | | $n=0$ |
| | | | | 1 | | 1 | | | | | 1 |
| | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | 2 |
| | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | 3 |
| | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | 4 |
| 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | 5 |

**Stellenwertsysteme:**

- Es sei $k > 1$ eine natürliche Zahl (die sogenannte Basis)
- $x = (\underbrace{x_p x_{p-1} ... x_1 x_0}_{\text{Vorkomma}},\ \underbrace{x_{-1} x_{-2} ... x_{-q}}_{\text{Nachkomma}})_b$
  $:= \underbrace{x_p \cdot b^p + x_{p-1} \cdot b^{p-1} + ... + x_1 \cdot b^1 + x_0 \cdot b^0}_{\text{Vorkomma}} + \underbrace{x_{-1} \cdot b^{-1} + x_{-2} \cdot b^{-2} + ... + x_{-q} \cdot b^{-q}}_{\text{Nachkomma}}$
  heißt Darstellung zur Basis b (*).

**Bsp. 5:**

- $b = 2$ ... *Dual- oder Binärsystem* (Ziffern $\{0, 1\}$)
- $b = 3$ ... Trialsystem
- $b = 10$ ... *Dezimalsystem*
- $b = 16$ ... *Hexadezimalsystem* (Ziffern $\{0, 1, 2, ..., 9, \underset{10}{A}, \underset{11}{B}, \underset{12}{C}, \underset{13}{D}, \underset{14}{E}, \underset{15}{F}\}$

z.B. $(47)_{10} = (101111)_2 = (1202)_3 = (57)_8 = (2F)_{16}$

**Übergang von einem Ziffernsystem zu einem anderen**
z.B. $p = 3,\ q = 2$

$$\begin{aligned} x &= x_3b^3 + x_2b^2 + x_1b^1 + x_0 + x_{-1}b^{-1} + x_{-2}b^{-2} \\ &= (x_3b^2 + x_2x^1 + x_1)b + x_0 + (x_{-1} + x_{-2}b^{-1})b^{-1} \\ &= ((x_3b^1 + x_2)b + x_1)b + x_0 + (x_{-1} + x_{-2}b^{-1})b^{-1} \end{aligned}$$

Grundlage: fortgesetztes Klammern:

$$\begin{aligned} x = ((....((x_pb + x_{p-1})b + x_{p-2})b + ... + x_2)b + x_1)b + x_0 + \\ ((...(x_{-q}b^{-1} + x_{-(q-1)})b^{-1} + ... + x_{-2})b^{-1} + x_{-1})b^{-1} \end{aligned}$$

(**)

**Bsp. 6:** Übergang Dezimalsystem $\rightarrow$ anderes System

- ganzer Teil: fortgesetzte Division durch $b$ und Restabspaltung liefert $b$-Ziffern in der Reihenfolge $x_0, x_1, x_2, ...$
- gebrochener Teil: fortgesetzte Multiplikation mit $b$ und Abspaltung des ganzzahligen Anteils liefert $b$-Ziffern in der Reihenfolge $x_{-1}, x_{-2}, ...$

z.B. Dezimalsystem $\rightarrow$ Hexadezimalsystem ($b = 16$)
$x = 435,9$
ganzer Teil:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $435 : 16 =$ | $27$ | Rest $3$ | $\rightarrow x_0$ |
| $27 : 16 =$ | $1$ | Rest $11$ | $\rightarrow x_1$ |
| $1 : 16 =$ | $\boxed{0}$ | Rest $1$ | $\rightarrow x_2$ |

gebrochener Teil:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0,9 \cdot 16 =$ | $0.4$ | $+14$ | $\rightarrow x_{-1}$ |
| $0,4 \cdot 16 =$ | $\boxed{0.4}$ | $+6$ | $\rightarrow x_{-2}$ (Periode, da gleicher „Nachkommarest“) |

$\curvearrowright x = (1B3, E\overline{6})_{16}$

**Bsp. 7:** Übergang anderer Systeme $\rightarrow$ Dezimalsystem
Entweder direkte Auswertung von (*) (v.a. beim Dualsystem $\rightarrow$ Addition von 2er-Potenzen) *oder* Klammern in (**) von innen nach außen berechnen (zweckmäßig HORNER-Schema).

- ganzer Teil: beginnend mit $x_p$
  ABB1
- gebrochener Teil: beginnend mit $x_{-q}$
  ABB 2

$x = (1E2, B8)_{16}$
ganzer Teil:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $1$ | $14$ | $2$ |
| $16$ | | $16$ | $480$ |
| | $1$ | $30$ | $\boxed{482}$ |

gebrochener Teil:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 8 | 11 | * |
| $\frac{1}{16} = 0,0625$ | | $0,5$ | $\boxed{0,71875}$ |
| | 8 | $11,5$ | |

$\curvearrowright x = \underline{\underline{482,71875}}$

**Bsp. 8:** Hexadezimalsystem $\leftrightarrow$ Dualsystem
4 Dualziffern entsprechen einer Hexadezimalziffer ($2^4 = 16$) $\curvearrowright$ 4er Gruppen von Dualziffern ab Komma bilden.

a.) $(A8C, B2)_{16} = (1010\ 1000\ 1100,\ 1011\ 1011\ 001(0))_2$

b.) $((0)110\ 1110,\ 101(0))_2 = (6E, A)_{16}$

### 3.3.2. Zahlendarstellung im Computer

1.) Ganze Binärzahlen in Zweierkomplementdarstellung ($n$ Bit, meist $n = 8, 16, 32, 64$)

- Bsp.: $n = 8$ $\quad (100)_{10} = (64)_{16}$

| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^7$ | $2^6$ | $2^5$ | $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ |

  MSB: most siginficant bit
  (LSB: least significant bit)

- Um auch negative Zahlen darstellen zu können, wird das MSB als Vorzeichen reserviert. Negative Zahlen $-a$ ($1 \leq a \leq 2^{n-1}$) werden im sogenannten Zweierkomplement $\overline{a} := 2^n - a$ dargestellt ($\curvearrowright \overline{a} \geq 2^{n-1} \curvearrowright MSB = 1$)
- Nightnegtavie Zahlen $0 \leq a \leq 2^{n-1} - 1$ werden unverändert dargestellt ($MSB = 0$)
- Damit Darstellung ganzer Zahlen von $-2^{n-1}$ bis $2^{n-1} - 1$ (Anzahl $2^n$) möglich, $n = 8 : -128 bis 127$.
- Umwandlung negativer Zahlen $\rightarrow$ Zweierkomplement

**Bsp. 9:** $n = 8$, umzuwandeln sei $-100$ (dezimal)
zwei Möglichkeiten:

1.) (für die Handrechnung): $\overline{100} = \underbrace{2^8}_{=256} - 100 = \underbrace{156}_{(9C)_{16}} =$

| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

*Bemerkung*: Das Zweierkomplement der positiven Zahl $100$ ist die positive Zahl $156 = \overline{100}$, diese wird wegen $MSB = 1$ als negative Zahl $-100$ interpretiert.

2.) (am schnellsten): Rechts (beim LSB) beginnend alle Ziffern bis einschließlich der ersten $1$ übernehmen (unverändert lassen), für alle höherwertigen Ziffern $Z$ das *Einerkomplement* $1 - z$ bilden:

$(100)_{10} =$

| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

$= (\overline{100})_{10} = (156)_2$

Rückumwandlung (Zahl mit $MSB = 1 \rightarrow$ neg. Zahl) analog:
$\overline{156} = 256 - 156 = 100 \rightarrow \underline{\underline{-100}}$
Die Subtraktion wird damit auf die Addition des Zweierkomplements zurückgeführt.

**Bsp. 10:** $a = 64 - 100 = 64 + (-100)$

$$\begin{aligned} 64 = 2^6 &= 0100\,0000 \\ -100 &= 1001\,1100 \quad + \\ Summe &= 1101\,1100 \quad \text{Ergebins negativ} \\ 36 &= 0010\,0100 \quad \text{dargestellst ist aber } \overline{z} = 2^n - z \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Ergebnis: $a = -36 = -z$
Ein *Überlauf* (Ergebnis $\geq 2^{n-1}$ oder $< -2^{n-1}$) ensteht in folgenden Fällen ($\rightarrow$ ERROR!)

| | $a$ | $b$ | $a+b$ | |
|---|---|---|---|---|
| MSB | 0 | 0 | 1 | ($MSB = 0$ erwartet!) |
| MSB | 1 | 1 | 0 | ($MSB = 1$ erwartet!) |

Bemerkung: Für die Handrechnung (z.B. $2 - 5 =: a$) kleinere zahl von größerer Subtrahieren $a = -(5-2)$, dabei genügt es für $n$ die Binärstellenzahl des Minuenden $(5)_{10} = (101)_2$ also $n = 3$ zu verwenden. Es wird dabei ausschließlich mit nicht-negativen Zahlen gerechnet $(0, 1, ..., 2^n - 1)$:
$(5-2)_{10} = ((5 + 2^n - 2) - 2^n)_{10} = (5 + \overline{2} - 2^n)_{10}$
$(2)_{10} = (010)_2 \curvearrowright \overline{2} = (110)_2$
$(5)_{10} = (101)_2$

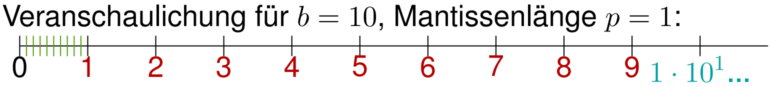
$$\begin{aligned} 5: &\quad 101 \\ \overline{2}: &\quad 110 \quad + \\ 1 &\quad 011 \end{aligned}$$

vordere Stelle $2^n$ ignorieren
$\curvearrowright 5 - 3 = 3 = (011)_2 \curvearrowright \underline{\underline{a = -3}}$

2.) Gleitkommasysteme
$\boxed{x = v \cdot m \cdot b^e}$ dabei

- $v = (-1)^V$ ... *Vorzeichen* $\begin{cases} V = 0 & \text{positive Zahl} \\ V = 1 & \text{negative Zahl} \end{cases}$
- $m$ ... *Mantisse*, Stellenzahl $p$, die Mantisse heißt *normalisiert* falls sie folgende Gestalt besitzt:
  $m_1, m_2, ..., m_p$ oder $0, m_1, m_2, ..., m_p$ mit $m \neq 0$. Dabei sind $m_1, m_2, ..., m_p$ die Ziffern zur Basis $b$.
- $e$ ... *Exponent*, ganzzahlig $e_{min} \leq e \leq e_{max}$.

In jedem Gleitkommasystem sind nur endlich viele Zahlen darstellbar, die Menge der reellen zahlen ist aber überabzählbar (unendlich).
Gleitkommazahlen liegen auf der Zahlengeraden diskret verteilt (fester Exponent $\curvearrowright$ gleiche Abstände, wächst Exponent um $k$, so wachsen die Abstände auf $b^k$-fache!)
Veranschaulichung für $b = 10$, Mantissenlänge $p = 1$:




*Exponent* 0: $1 \cdot 10^0, 2 \cdot 10^0, ..., 9 \cdot 10^0$
*Exponent* -1: $1 \cdot 10^{-1}, 2 \cdot 10^{-1}, ..., 9 \cdot 10^{-1}$
*Exponent* 1: $1 \cdot 10^1, 2 \cdot 10^1, ..., 9 \cdot 10^1$
*Rundung*: Zahlen, die nicht in diesem „Raster“ enthalten sind, werden auf dei nächstgelegene darstellbare Gleitkommazahl gerundet. Falls die Zahl genau in der Mitte zwischen zwei darstellbaren Zahlen liegt, wird auf die gerade Zahl gerundet (Bsp. $3,75 \rightarrow 3,8$ oder $4,65 \rightarrow 4,6$ bei Rundung auf eine Stelle nach dem Komma).

**Numerische Probleme beim Rechnen mit Gleitkommazahlen**

- Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze gelten im allgemeinen nicht mehr. Ursachen sind bspw. Ziffernauslöschung bei der Subtraktion fast gleicher Zahlen, Addition oder Subtraktion von Zahlen unterschiedlicher Größenordnung.

**Bsp. 11:**

1.) Man berechne $(a+b)+c$ und $a+(b+c)$ in einem System mit 3-Stelliger Mantisse: $a = 3,73 \cdot 10^6$, $b = -3,71 \cdot 10^6$ und $c = 6,42 \cdot 10^3$
   - $a + b = 0,02 \cdot 10^6 = 2,00 \cdot 10^4$ (Normalisierung)
     $c = 0,642 \cdot 10^4 = 0,64 \cdot 10^4$ (Exponentenangleichung und Rundung)
     $(a+b)+c = 2,64 \cdot 10^4 = \underline{\underline{26400}}$
   - $c = 0,00642 \cdot 10^6 = 0,01 \cdot 10^6$ (Exponentenangleichung und Rundung)
     $b + c = -3,,70 \cdot 10^6$
     $a + (b+c) = 0,03 \cdot 10^6 = 3,00 \cdot 10^4 = \underline{\underline{30000}}$
   - exakter Wert: $a + b + c = \underline{\underline{26420}}$

2.) Aufgabe der numerischen Mathematik ist es, die unvermeidlichen Genauigkeitsverluste beim Rechnen mit Maschinenzahlen durch optimale Organisation (Reihenfolge) der Rechnung und Fehleranalyse in Grenzen zu halten.

3.) Gleitkommaformat IEEE 754 (single precision, 32 Bit)
$x = v \cdot m \cdot b^e = (-1)^V \cdot 1, m_2\, m_3 ... m_24 \cdot 2^{E-B}$ ($b = 2$, Binärsystenm)

- Vorzeichen $V = 0 \curvearrowright$ positiv, $V = 1 \curvearrowright$ negativ (1 Bit)
- Mantisse $m_1$ im Binärsystem stets gleich $1$.
  $\curvearrowright$ nur Abspeicherung von $\boxed{M = m_2\, m_3 ... m_24}$ (23 Bit)
- Exponent: Abgespeichert wird $\boxed{E := e + B}$
  mit dem sogenannten *Biaswert* $B = 127$ (Bias = Verzerrung) als nichtnegative 8-stellige Binärzahl, $e_{min} = -126$ ($E = 1$), $e_{max} = 127$ ($E = 254 = (1111\ 1110)_2$), die Grenzfälle $E = (0000\ 0000)_2$ und $E = (1111\ 1111)_2$ sind für Sonderfälle ($0$, $\infty$, nichtdefinierte Werte) vorgesehen.

Abspeicherung in der Reihenfolge $\boxed{VEM}$ (32 Bit)

**Bsp. 12:** Umwandlung einer Dezimalzahl in das IEEE 754-Format (32-Bit), $x = 435,9$ (vgl. Bsp. 6)

1.) Konvertierung in Dualzahl (unter Verwendung von Bsp. 6/Hexadez.)
$x = 1B3, E\overline{6})_{16} = (1\ 1011\ 0011, 1100\ 0110\ 0110...)_2$

2.) Normalisierte Gleitkommadarstellung, Mantisse mit 23 Stellen nach dem Komma, Kommaverschiebung um 8 Stellen.
$\curvearrowright x = 1, \underbrace{1011\ 0011\ 1110\ 0110\ 0110\ 011}_{M}(0\ 0110...))_2 \cdot 2^8$ (Abrundung!)

3.) Exponent $e = 8 \curvearrowright E = e + B = 8 + 127 = 135 = \underbrace{(1000\ 0111)_2}_{E}$

4.) Vorzeichenbit $V = 0$ (da $x$ positiv)

$\curvearrowright x :$ $\boxed{0\ 1000\ 0111\ 1011\ 0011\ 1110\ 0110\ 0110\ 011}$

**Bsp. 13:** IEEE 754$\rightarrow$ Dezimalzahl

$\boxed{1\ 1000\ 0011\ 0111\ 1100\ 0000\ 0000\ 0000\ 000}$

1.) $E = (1000\ 00111)_2 = 131 \curvearrowright e = E - B = 131 - 127 = \underline{\underline{4}}$

2.) $V = 1 \curvearrowright$ negativ, normalisierte Mantisse $1, M$
$\curvearrowright x = -(1,011111)_2 \cdot 2^4 = -(10111,11)_2$
$\curvearrowright x = -23,75$

Bemerkung:

1.) Neben dem single-Format gibt es in IEEE 754 das double-Format (54 Bit, V=1Bit, E=11Bit, M=52 Bit, B=1023) sowie das erweiterbare Format

2.) Zahlbereiche single: $1,401 \cdot 10^{-45}...3,403 \cdot 10^{38}$, double: $4,941 \cdot 10^{-324}...1,798 \cdot 10^{308}$

### 3.3.3. Ordnungsstruktur

- Durch $\leqq$ (auch $\leq$) ist auf $\mathbb{R}$ eine vollständige Ordnungsrelation erklärt.
- Verträglichkeit mit der algebraischen Struktur (für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$):

(1) $x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leqq y + z$

(2) $(x \leq y) \wedge (z \geq 0) \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \leq y \cdot z$
$(x \leq y) \wedge (z \leq 0) \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \geq y \cdot z$

Für die strikte Ordnung $<$ gilt:

$\boxed{(x < y) \wedge (z < 0) \quad \Rightarrow \quad x \cdot > y \cdot z}$

**Def. 8:**

Sei $x$ eine reele Zahl. Dann heißt $|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ der (absolute) Betrag von $x$.

ABB 5

Vorzeichenfunktion $sgn(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

**Diskussion:** Es gilt:

1.) $|a - b|$ = „Abstand der Zahlen $a$ und $b$ auf der Zahlengeraden“
ABB 6
(speziell: $|a|$ = „Abstand von $a$ zum Ursprung“)

2.) $a = |a| \cdot sgn(a)$

3.) $|a| = |-a|, |ab| = |a| \cdot |b|, \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (falls $b \neq 0$)

4.) $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ (*Dreiecksungleichung*) für alle $a, b \in \mathbb{R}$

**Lösung von Ungleichung**

**Bsp. 14:** (Ungleichung mit Beträgen)
Gesucht sei die Lösungmenge $L$ der reellen Zahlen, die die Ungleichung $|x-1| < 3+\frac{1}{2}x$ (*) erfüllen.

- kritische Stelle(n): Nullstellen des Terms innerhalb der Betragsstriche d.h. $x = 1 \curvearrowright$ Fallunterscheidung
  ABB 7
- 1. Fall: $x - 1 < 0$ d.h. $x < 1$
  in (*):
  $-(x-1) < 3 + \frac{1}{2}x \Leftrightarrow$
  $-\frac{3}{2}x < 2 \Leftrightarrow$
  $\underline{\underline{x > -\frac{4}{3}}}$
  $\curvearrowright L_1 = \left\{x|(x<1) \wedge x > \frac{4}{3}\right\} = \left(-\frac{4}{3}, 1\right)$
- 2. Fall $x - 1 \geq 0$ d.h. $x \geq 1$
  in (*):
  $x - 1 < 3 + \frac{1}{2}x \Leftrightarrow$
  $\frac{1}{2}x < 4 \Leftrightarrow$
  $\underline{\underline{x < 8}}$
  $\curvearrowright L_2 = \{x|(x \geq 1) \wedge (x < 8)\} = [1, 8)$
- $\Rightarrow L = L_1 \cup L_2 = \underline{\underline{\left(-\frac{4}{3}, 8\right)}}$

**Bsp. 15:** (Ungleichung mit gebrochen rationalen Termen)
$\frac{x}{x+1} < 1$ (*)

- kritische Stelle(n): Nenner-Nullstellen, hier: $x = -1$.
  ABB 7 (äquiv. mit -1)
- 1. Fall: $x < -1$
  in (*):
  $\Leftrightarrow x > x + 1 \Leftrightarrow 0 > 1$ (Widerspruch)
  $L_1 = \emptyset$.
- 2. Fall: $x > -1$
  in (*):
  $\Leftrightarrow x < x + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$ (wahre Aussage)
  $L_2 = \{x|x > -1\} = (-1, \infty)$
- $\Rightarrow L = L_1 \cup L_2 = \underline{\underline{(-1, \infty)}}$

**Bsp. 16:** (quadratische Ungleichungen)
$x^2 + 3x < 10 \Leftrightarrow$
$\left(x + \frac{3}{3}\right)^2 - \frac{9}{4} < 10 \Leftrightarrow$ (vereinfacht durch quadratische Ergännzung)
$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{49}{4} \Leftrightarrow$

$\left|x+\frac{3}{2}\right| < \frac{7}{2} \Leftrightarrow$ (Äquivalenz siehe Übung)
$\frac{-7}{2} < x + \frac{3}{2} < \frac{7}{2} \Leftrightarrow$
$-5 < x < 2$
$L = \underline{\underline{(-5, 2)}}$

Bemerkung:
In vielen Fällen ist auch ein graphischer Lösungsansatz möglich. Dabei sind geeignete Schnittpunkte (≙Gleichung) exakt rechnerisch zu ermitteln, ausschließend Ungleichheitszeichen betrachten.

**in Bsp. 16:**
$x^2 + 3x < 10 \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{x_2 + 3x - 10}_{=f(x)} < 0$

Nullstellen von $f(x)$:
$x^2 + 3x - 10 = 0$
$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}$
$\curvearrowright$ Grobskizze von $y = f(x)$ (Parabel, nach oben geöffnet)
ABB 81
$\curvearrowright L = (-5, 2)$

**Schranken und Grenzen**

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke gibt, vgl. 2. Man kann zeigen, dass es bei diesen Ordnungsrelationen ($\leq$) auf $\mathbb{R}$ dann auch eine kleinste obere Schranke (*Supremum*, $sup\ M$, $s = max\ M$ falls $s \in M$)
- Analog: nach *unten beschränkt, Infimum, Minimum*.
- Falls $M$ *nicht* nach oben beschränkt ist, d.h. es gilt:
  $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in M \quad x \leq a = \forall a \in \mathbb{R} \quad \exists x \in M \quad x > a$, dann Schreibweise $\boxed{sup\ M := \infty}$
- Analog: in $\boxed{inf\ M := -\infty}$ falls $M$ *nicht* nach unten beschränkt.
- $M$ heißt *beschränkt*, falls $M$ nach oben und unten beschränkt ist.

**Bsp. 17:**
$M = \left\{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

- *obere Schranken*: $\pi$, $2300$, $7$, $2,01$ usw.
  kleinste obere Schranke: $sup\ M = 2 = max\ M$
- *untere Schranken*: $-31$, $0$, $0,99$ usw.
  größte untere Schranke: $inf\ M = 1$ ($1 \notin M \curvearrowright min\ M$ existiert nicht)

ABB 82

## 3.4. Komplexe Zahlen

**Motivation:** z.B. $\boxed{x^2 + 1 = 0}$ ($\Leftrightarrow x^2 = -1$) im Bereich der reellen Zahlen nicht lösbar. $\curvearrowright$ Zahlenbereichserweiterung

### 3.4.1. Begriff, Rechenregeln

Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist eine Obermenge der Menge der reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

1.) $\mathbb{C}$ enthält eine Zahl $i$ mit $\boxed{i^2 = -1}$ (oft auch mit $j$ bezeichnet)

2.) Jede komplexe Zahl $z$ lässt sich in der Form $\boxed{z = x + i \cdot y}$ $\quad (x, y \in \mathbb{R})$ darstellen.
Dabei $x = Re(z)$ (Realteil) und $y = Im(z)$ (Imaginärteil)

3.) Auf $\mathbb{C}$ werden die Operationen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) wie folgt erklärt:
Sei $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$, $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ Dann gilt:
$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
$z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
Die Menge $\mathbb{C}$ wird mit diesen Operationen zum *Körper der komplexen Zahlen*. Die arithmetischen Operationen erfolgen unter Beachtung von $i^2 = -1$ wie im Reellen.

4.) Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine natürliche Ordnungsrelation.
Veranschaulichung: *GAUSSsche Zahlenebene*
Zahl $z \leftrightarrow$ Punkt $(x, y) \leftrightarrow$ Vektor $\overrightarrow{OP}$
ABB 83

- *Betrag* von $z$:
  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Hauptarrgument von $z$: orientierter Winkel zwischen positiver x-Achse und $\overrightarrow{OP}$ (gemessen auf kürzestem Wege)
  $Arg(z) := \varphi \qquad (-\pi < \varphi \leq \pi)$
- zu $z$ konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ :
  $\overline{z} := x - i \cdot y$

**Diskussion:**

- Falls nicht notwendig kürzester Weg gewählt wird: Argument $arg(z) = Arg(z) + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$
  z.B. $z = 1 - i \quad : \quad Arg(z) = -45° = -\frac{\pi}{4}$, ein (Neben-)argument bspw. $arg(z) = 315°$
- Berechnung von $Arg(z)$ $(z \neq 0)$: $cos\varphi = \frac{x}{|z|}$, $sin\varphi = \frac{y}{|z|}$

$$\boxed{Arg(z) = \begin{cases} +arccos\frac{x}{|z|} & \text{falls } y \leq 0 \\ -arccos\frac{x}{|z|} & \text{falls } y < 0 \end{cases}}$$

**Bsp. 18:**
$z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -12 - 5i$
ABB 84

a.) Betrag und Hauptargument
$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
$\varphi_1 = Arg(z_1) = arccos\frac{3}{5} \approx 53,13°$
$|z_2| = 13$
$\varphi_2 = Arg(z_2) = -arccos - \frac{12}{13} \approx -157,38°$


Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

b.) Arithmetische Operationen:
$z_1 + z_2 = -9 - i$
$z_1 - z_2 = 15 + 9i$
$z_1 \cdot z_2 = -16 - 63i$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = -\frac{56}{169} - \frac{33}{169}i$

### 3.4.2. Darstellungsformen komplexer Zahlen

- Trigonometrische Darstellung
- EULERsche Form
- exponentielle Darstellung

ABB 91
$\boxed{z = x + iy}$ (*arithmetische Darstellung*)
$x = |z| \cdot cos\varphi$
$y = |z| \cdot sin\varphi$
$\curvearrowright \boxed{z = |z| \cdot (cos\varphi + i\ sin\varphi)}$ (*trigonometrische Darstellung*)
(und $\varphi = arg\ z$, meist $\varphi = Arg\ z$)

**Diskussion:**
$z_1 = |z_1| \cdot (cos\varphi_1 + i\ sin\varphi_1)$
$z_2 = |z_2| \cdot (cos\varphi_2 + i\ sin\varphi_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\underbrace{(cos\varphi_1\ cos\varphi_2 - sin\varphi_1\ sin\varphi_2)}_{cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i\underbrace{(sin\varphi_1\ cos\varphi_2 + sin\varphi_2\ cos\varphi_1)}_{sin(\varphi_1+\varphi_2)})$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ sin(\varphi_1 + \varphi_2))}$$

Folgerung:
$$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|}$$
$$\boxed{arg(z_1 \cdot z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)}$$

Analog:
$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (z_2 \neq 0)}$$
$$\boxed{arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)}$$

Es ist also sinnvoll zu definieren:

**Def. 10:**
$\boxed{e^{i\varphi} = cos\varphi + i\ sin\varphi}$ (*EULERsche Form*)

**Diskussion:**

1.) *Exponentielle Darstellung* von z: $\boxed{z = |z| \cdot e^{i\varphi}}$

2.) Wegen der obigen Formeln bleiben für diese Darstellung die vom Reellen bekannnten Potenzgesetze gültig.
Insbesondere gilt die Formel von MOIVRE:
$$\boxed{z^n = \left(|z| \cdot e^{i\varphi}\right)^n = |z|^n \cdot e^{i\varphi n} = |z|^n(cos(n\varphi) + i\ sin(n\varphi))}$$

**Bsp. 19:**

a.) $z_1 = \underbrace{3+4i}_{arithmetisch} = \underbrace{5\cdot(cos53,13^\circ + i\ sin(53,13^\circ)}_{trigonometrisch} = \underbrace{5\cdot e^{i\cdot 53,13^\circ}}_{exponentiell}$

$z_2 = -12-5i = 13\cdot(cos(-157,38^\circ + i\ sin(-157,38^\circ)) = 13\cdot e^{-i\cdot 157,38^\circ}$

b.) $z = -1+i$, gesucht: $z^{12}$

$|z| = \sqrt{2},\ Arg(z) = arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 135^\circ = \frac{3}{4}\pi$

$z = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{3}{4}\pi} \Rightarrow z^12 = \left(\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3}{4}\pi}\right) = 2^6\cdot e^{i\frac{3}{4}\pi\cdot 12} = 64\cdot e^{i\cdot 9\pi} = 64\cdot e^{i\pi}$

arithmetische Darstellung: $z^{12} = 64\cdot(cos\pi + i\ sin\pi) = \underline{\underline{-64}}$

### 3.4.3. Spezielle Gleichungen

Quadratische Gleichung: $z^2 + p\cdot z + q = 0 \qquad (p,q\in\mathbb{R})$

quadratische Ergänzung: $\left(z+\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$

1. Fall: $\frac{p}{2} - q \geq 0 \curvearrowright z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

2. Fall: $\frac{p^2}{4} - q < 0$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{p}{2}\right)^2 + \overbrace{\underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{>0}}^{\widehat{=}a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(z+\frac{p}{2}\right) + i\cdot a\right)\cdot\left(\left(p+\frac{p}{2}\right) - i\cdot a\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}$$

praktisches Vorgehen:

Lösungsformel aus dem ersten Fall stets anwenden, im Fall 2 Formal $\sqrt{-1} = \pm i$.

**Bsp. 20:**

$z^2 + 28z + 200 = 0$

$z_{1,2} = -14 \pm \sqrt{-4} = \underline{\underline{-14 \pm 2i}}$

**Kreisteilungsgleichung:**

$\boxed{z^n = b}, b\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}^*$

Lösung:

- $b$ exponentiell darstellen: $b = |b|\cdot e^{i\beta} \quad ,\beta = Arg(b)$
- Gleichung besitzt $n$ Lösungen $\boxed{z_k = \sqrt[n]{|b|}\cdot e^{i\frac{\beta + k\cdot 360^\circ}{n}}}$ mit $k = 0,1,...,n-1$

zum Beweis:

Ansatz: $z = r\cdot e^{i\varphi}$

$z^n = r^n\cdot e^{i\varphi n} = |b|\cdot e^{i\beta}$

Zwei Gleichungen stimmen überein, wenn jeweils der Betrag gleich und Winkel bis auf ein vielfaches von $\pi$ gleich ist.

1.) $r^n = |b| \curvearrowright r = \sqrt[n]{|b|}$

2.) $\varphi \cdot n = \beta + k \cdot 360°$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\curvearrowright \varphi = \dfrac{\beta + k \cdot 360°}{n}$ (nur $n$ verschiedene Argumente)

Beispiele:

a.) $z^3 = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$
$z_k = 1^{\frac{1}{3}} \cdot e^{i\frac{0+k\cdot 2\pi}{3}}$ $(k = 0, 1, 2)$
$z_0 = e^{i\cdot 0} = \underline{\underline{1}}$
$z_1 = e^{\frac{2}{3}\pi} = cos(\frac{2}{3}\pi) + i\ sin(\frac{2}{3}\pi) = \underline{\underline{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i}}$
$z_2 = e^{i\frac{4}{3}\pi} = cos(\frac{4}{3}\pi) + i\ sin(\frac{4}{3}\pi) = \underline{\underline{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i}}$
Allgemein: Lösungen der Gleichung $z^n = b$ teilen Kreis mit Radius $\sqrt[n]{|b|}$ um $0$ in $n$ gleiche Teile.
ABB 92

b.) $z^4 = -16 = 16 \cdot e^{i\cdot\pi}$
$z_k = 2 \cdot e^{i\frac{\pi + k\cdot 2\pi}{4}}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$
$z_0 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}}$
$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = \underline{\underline{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}}$
$z_2 = 2 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \underline{\underline{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}}$
$z_3 = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}}$
ABB 93

Anwendung:
Faktorisierung des Polynoms $p(x) = x^4 + 16$

$$\begin{aligned} x^4 + 16 &= (x - z_0) \cdot (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot (x - z_3) \\ &= (x - \sqrt{2} - \sqrt{2}i) \cdot (x - \sqrt{2} + \sqrt{2}i) \cdot (x + \sqrt{2} - \sqrt{2}i) \cdot (x + \sqrt{2} + \sqrt{2}i) \\ &= (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4) \end{aligned}$$

### 3.4.4. Anwendung im Wechselstromkreis

1.) Spule:
Stromstärke $I = I_m \cdot (cos(\omega t) + i\ sin(\omega t))$
Spannung $U = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot (cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + i\ sin(\omega t + \frac{\pi}{2}))$
(formale Ergänzung zu komplexer Größe)
$\curvearrowright I = I_m \cdot e^{i\omega t}$, $U = I_m \cdot \omega \cdot L \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2}} = \underbrace{I_m \cdot \omega \cdot L \cdot e^{i\omega t}}_{I\cdot\omega\cdot L} \cdot \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i}$

$R = \dfrac{U}{I} \curvearrowright \boxed{R_L = \omega \cdot L \cdot i}$ (*induktiver Widerstand*)

2.) Kondensator:
$\boxed{R_C = \dfrac{1}{\omega \cdot C \cdot i}}$ (*kapazitiver Widerstand*)

Bezeichnung in E-Technik:
$Z := R_ges = R + i \cdot X$
Wirkwiderstand $R$, Blindwiderstand $X$, Scheinwiderstand $|Z|$, Leitwert $Y = \dfrac{1}{Z}$

**Bsp. 22:**

ABB 94

$R = 100\Omega, C = 20\mu F = 20 \cdot 10^{-6}\frac{As}{V}, L = 1H = 1\frac{Vs}{A}, \omega = 2\pi \cdot \underbrace{50\frac{1}{s}}_{f}$

Gesucht ist der Gesamtwiderstand $Z$.

$Z = R + R_C + R_L = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$

$Z = (100 + 155,04i)\Omega = 184,44 \cdot e^{i\cdot 57,17^\circ}\Omega$

$\curvearrowright$

Wirkwiderstand: $Re(Z) = 100\Omega$

Blindwiderstand: $Im(Z) = 155,04\Omega$

Scheinwiederstand: $|Z| = 184,44\Omega$

Phasenverschiebung: $Arg(Z) = 57,17^\circ$

# 4. Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

## 4.1. Elementare Funktionen (Teil 1)

### 4.1.1. Polynome

**Def. 1:**

$y = f(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + ... + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$ mit $(a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$ heißt ganze rationale Funktion oder *Polynom* vom Grad $n$ (falls $a_n \neq 0$).

Zur Beschreibung der Funktionswerte zweckmäßig: HORNER-Schema (vgl. Stellenwertsysteme **??**)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | ... | $a_1$ | $a_0$ |
| $x_0$ | | $b_{n-1}\cdot x_0$ | $b_{n-2}\cdot x_0$ | ... | $b_1\cdot x_0$ | $b_0\cdot x_0$ |
| | $\underbrace{\boxed{b_{n-1}}}_{=a_n}$ | $\boxed{b_{n-2}}$ | $\boxed{b_{n-3}}$ | ... | $\boxed{b_0}$ | $f(x_0) = r_0$ |

Polynomdivision: $\frac{f(x)}{x - x_0} = b_{n-1}\,x^{n-1} + b_{n-2}\,x^{n-2} + ... + b_1\,x + b_0 + \frac{r_0}{x - x_0}$

**Bsp. 1:**

$f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 6, \quad x_0 = 3,$ ges: $f(x_0), \quad \frac{f(x)}{x - x_0}$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | −2 | 1 | 0 | −6 |
| $x_0 = 3$ | | 3 | 9 | 21 | 66 | 198 |
| | 1 | 3 | 7 | 22 | 66 | 192 |

$f(x) : (x - 3) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 22x + 66 + \frac{192}{x - 3}$

**Satz 1:**

Es sei $f(x) = p_n(x) = a_n\,x^n + ... + a_0$ ein Polynom vom Grad $n$ (d.h. $a_n \neq 0$). Dann besitzt $f$ (in $\mathbb{C}$) genau $n$ Nullstellen $x_1, ..., x_n$ und es gilt: $f(x) = a_n(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot ... \cdot(x - x_n)$. (Zerlegung in Linearfaktoren)

**Diskussion:**

1.) Falls in der Linearfaktorzerlegung der Faktor $(x - x_0)$ genau $k$-mal $(1 \geq k \geq n)$ vorkommt, so heißt $x_0$ $k$*-fache Nullstelle* (Nullstelle der Vielfachheit $k$).

2.) Nichtreelle Nullstellen sind möglich, sie treten stets paarweise als konjugiert komplexe Zahlen auf $(x_0, \overline{x_0})$). In diesem Falle Zusammenfassung der Linearfaktoren zu reellen quadratischen Faktoren möglich: $(x - x_0) \cdot (x - \overline{x_0}) = x^2 - (x_0 + \overline{x_0})x + x_0 \cdot \overline{x_0} = x^2 - 2 \cdot Re(x_0) \cdot x + |x_0|^2$

3.) Falls $a_0, a_1, ..., a_n$ ganze Zahlen sind, dann sind ganzzahlige Nullstellen Teiler von $a_0$ (falls vorhanden).

4.) Allgemeine Methoden zur Nullstellenbestimmung später (Kap. 3 **??**)

**Bsp. 2:**
$p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6,$ ges: Nullstellen
Durch Probieren $\boxed{x_1 = 2}$
mit HORNER-Schema:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | -5 | 1 | -6 | |
| $x_1 = 2$ | | 2 | 6 | 2 | 6 | |
| | 1 | 3 | 1 | 3 | $\boxed{0}$ | $\curvearrowright p(x) = (x-2) \cdot \underbrace{(x^3 + 3x^2 + x + 3)}_{\text{durch Probieren } x_2 = -3}$ |
| $x_2 = -3$ | | -3 | 0 | -3 | | |
| | 1 | 0 | 1 | $\boxed{0}$ | | $\curvearrowright p(x) = (x-2)(x+3)\underbrace{(x^2+1)}_{x_{3,4} = \pm i}$ |

$\curvearrowright$ Zerlegung: $p(x) = (x-2)(x+3)(x-i)(x+i)$

### 4.1.2. Gebrochen rationale Funktionen

**Def. 2:**
$y = f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m\, x^m + a_{m-1}\, x^{m-1} + ... + a_1\, x + a_0}{b_n\, x^n + b_{n-1}\, x^{n-1} + ... + b_1\, x + b_0}$ mit $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$ und $Db(f) = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$ heißt gebrochenrationale Funktion. f heißt *echt gebrochen*, falls $m < n$ und *unechtgebrochen*, falls $m \geq n$.

**Diskussion:**

- Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass Zähler- und Nennerpolynom keine gemeinsamen Nullstellen besitzen (ansonsten: Kürzen gemeinsamer Linearfaktoren von Zähler und Nenner [unter Beachtung des Definitionsbereichs])
- Die Nullstellen des Nennerpolynoms heißen *Polstellen* der gebrochen rationalen Funktion (bei Polstelle $x_P$: $|f(x)| \to \infty$ für $x \to x_P$).
- Die Nullstellen des Zählerpolynoms sind die Nullstellen von $f$.
- Verhalten von $f(x)$ bei $k$-facher reeller Nullstelle oder Polstelle:
  $\boxed{\text{Vorzeichenwechsel} \Leftrightarrow k \text{ ungerade}}$

...

## 4.2. Fehlende VL vom 02.12.2015

...

- Bilden der Umkehrfunktion zu $y = f(x)$, $x \in Db(f)$:

1.) Auflösen der Funktionsgleichung nach $x$: $x =: f^{-1}(y)$ (falls dies eindeutig möglich ist, andernfalls existiert $f^{-1}$ nicht!)

2.) Oft erfolgt anschließend eine Vertauschung von $x$ und $y$:
$y = f^{-1}(x)$, $x \in Db(f^{-1}) = Wb(f)$.
Vertauschung entspricht geometrisch Spiegelung an der Geraden $x = y$, vgl. Bsp. 4.

**Bsp. 4:**
$y = f(x) = \sqrt{x} + 2 \qquad , x \in [0, \infty)$

1.) Auflösen nach $x$: $y - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = (y-2)^2 = f^{-1}(y)$

2.) Vertauschen von $x$ und $y$: $y = f^{-1}(x) = (x-2)^2, Db(f^{-1}) = Wb(f) = [2, \infty)$
Abb 101
! $Db(f^{-1})$ nur $[2, \infty)$, obwohl $(x-2)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erklärt ist.

**Def. 6:**
Die reellwertige Fkt. $y = f(x)$ heißt

a.) *streng monoton wachsend*, falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ gilt.

b.) *monoton wachsend* (=nicht fallend), falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ gilt für alle $x_1, x_2 \in Db(f)$.

c.) Analog: *Streng monoton fallend* bzw *monoton fallend* (=nicht wachsend).

**Satz 2:**
$f$ streng monoton $\Rightarrow$ $f$ ist injektiv (d.h. $f^{-1}$ existiert)

## 4.3. Elementare Funktionen (Teil 2)

### 4.3.1. Wurzel- und Logarithmusfunktionen

**Def. 7:**
$y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad (x \in [0, \infty), n \in \mathbb{N}^*)$ ist die Umkehrfunktion zu $y = x^n \quad (x \in [0, \infty))$

**Diskussion:**

1.) Im Bereich der reellen Zahlen ist $\sqrt[n]{x}$ nur für $x \geq 0$ erklärt, der Funktionswert ist selber nicht negativ.

2.) Lässt man in $x^{\frac{1}{3}}$ negative $x$ zu (etwa $\sqrt[3]{-8} = -2$), so ergeben sich Widersprüche:
z.B.: $\sqrt[3]{-8} = -2 \Rightarrow -2 = -8^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \left((-8)^2\right)^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$

3.) Es gilt $\sqrt{x^2} = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$

**Def. 8:**
$y = log_a(x) \quad (a > 0 \wedge a \neq 1, x \in (0, \infty))$ ist Umkehrfunktion zu $y = a^x \quad (x \in \mathbb{R})$.
Speziell:

- $lg(x) := log_{10}(x)$
- $ln(x) := log_e(x)$

ABB 102

**Diskussion:**

1.) Log-Gesetze:

$$log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y$$
$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$$
$$log_a(x^\alpha) = \alpha \; log_a x$$
$$log_c b = \frac{log_a b}{log_a c}$$

2.) Es gilt $x = a^{log_a x}$ $\quad (f(f^{-1}(x)) = x \forall y \in Db(f^{-1}))$

3.) Ferner gilt $a^x = e^{ln(a^x)} = e^{x \cdot ln\ a}$

### 4.3.2. Arcusfunktionen

Vorbetrachtung: $y = f(x) = sin\ x(x \in \mathbb{R})$ ist nicht injektiv, also existiert keine Umkehrfunktion.
Aber: $y = sin(x)$, eingeschränkt auf z.B. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist injektiv und damit umkehrbar.
ABB 103

**Def. 9:**
Umkehrfunktionen

| | Db | Wb | Umkehrfunktion von ... | |
|---|---|---|---|---|
| $y = arcsin\ x$ | $[-1, 1]$ | $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ | $y = sin\ x$ | $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ |
| $y = arccos\ x$ | $[-1, 1]$ | $[0, \pi]$ | $y = cos\ x$ | $0 \leq x \leq \pi$ |
| $y = arctan\ x$ | $\mathbb{R}$ | $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ | $y = tan\ x$ | $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ |
| $y = arccot\ x$ | $\mathbb{R}$ | $(0, \pi)$ | $y = cot\ x$ | $0 < x < \pi$ |

**Bsp. 5:**
Gesucht sind alle Lösungen der folgenden Gleichung: $tan(2x) = y$
Es sei $2x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$, mit $k \in \mathbb{Z}$.
$y = tan(2x) = tan(2x - k \cdot \pi)$ mit $2x - k\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\Rightarrow 2x - k\pi = arctan(y) \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{arctan(y) + k\pi}{2}}}$

### 4.3.3. Areafunktionen

**Def. 10:**
Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen

| | Db | Wb | Umkehrfunktion von ... | |
|---|---|---|---|---|
| $y = arsinh\ x$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $y = sinh\ x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $y = arcosh\ x$ | $[1, \infty)$ | $[0, \infty)$ | $y = cosh\ x$ | $x \geq 0$ |
| $y = artanh\ x$ | $(-1, 1)$ | $\mathbb{R}$ | $y = tanh\ x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $y = arcoth\ x$ | $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $y = coth\ x$ | $x \neq 0$ |

Aus der Def. der Hyberbelfunktionen (Def. 5) folgt:
$arsinh\ x = ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$artanh\ x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
$arcosh\ x = ln(x + \sqrt{x^2+1}$
$arcoth\ x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

# 5. Lineare Algebra

## 5.1. Vektorräume

**Begriff:**

1.) Gegeben seien ein Körper $(K, +, \cdot)$, dessen Elemente *Skalare* heißen (meist $(\mathbb{R}, +, \cdot)$) und eine ABELsche Gruppe $(V, \oplus)$ ($V$... Menge, Elemente heißen Vektoren, $\oplus$... Vektoraddition).

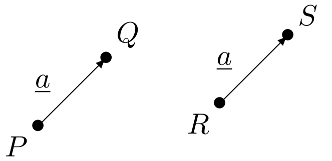
2.) Es gibt eine Abbildung $\odot$ von $K \times V$ in $V$ die jedem $x \in V$ und jedem $\lambda \in K$ ein Element $\lambda \odot x$ in $V$ mit folgenden Eigenschaften zuordnet.

- Distributivgesetze:
  $(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$
  $\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$
- Assoziativgesetz:
  $(\lambda \cdot \mu) \odot x = \lambda \odot (\mu \odot x)$
- Neutrales Element:
  $1 \odot x = x$

(für alle $\lambda, \mu \in K$ und $x, y \in V$)

Eine Menge $V$ mit den in 1.) und 2.) aufgeführten Operationen $\oplus$ und $\odot$ heißt *Vektorraum* (VR) *über* $K$.
Bemerkung: Schreibweise meist $+$ anstelle von $\oplus$ und $\cdot$ anstelle von $odot$ (ergibt sich aus Zusammenhang der Elemente).

**Bsp. 1:**
Skalarbereich $\mathbb{R}$.
Vektoren: Größen, die durch eine Zahlenangabe (Länge) und eine Richtung charakterisiert sind (z.B. Kräfte, Geschwindigkeiten, Translatimen).




Pfeile als Repräsentanten eines Vektors $\underline{a}$.
Bezeichnung: $\underline{a} = \overrightarrow{a} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$

**Ortskurven:** Angeheftet in gemeinsamen Anfangspunkt $O$ (Ursprung).

- Vektoraddition: $\underline{a} + \underline{b}$ ABB 110

- Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \underline{a}$:
  $\lambda > 0$ ABB 111
  $\lambda < 0$ ABB 112
  Länge von $\lambda \cdot \underline{a}$ ist das $|\lambda|$-fache der Länge von $\underline{a}$.
- Subtraktion: $\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b}) = \underline{a} + ((-1) \cdot \underline{b})$ ABB 113
- Nullvektor: $\underline{0}$ (Länge 0, keine Richtung)

**Bsp. 2:**

$$K = \mathbb{R}, V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Vektoraddition: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ ... \\ x_n + y_3 \end{pmatrix}$

Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ ... \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$

$\curvearrowright V$ Vektorraum über $\mathbb{R}$, Bezeichnung: $\mathbb{R}^n$, Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$

**Def. 1:**
Die Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn die Gleichung $\boxed{x_1\underline{a}_1 + ... + x_n\underline{a}_n = \underline{0}}$ nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = .... = x_n = 0$ besitzt.

**Diskussion:**

1.) $x_1\underline{a}_1 + ... + x_n\underline{a}_n$ heißt *Linearkombination* (LK) der Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

2.) Falls es eine darstellung der Gestalt wie in Def. 1 gibt, in der nicht alle $x_i$ gleich 0 sind, so heißen $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ *linear unabhängig*.
In diesem Falle lässt sich (wenigstens) einer der Vektoren als LK der anderen darstellen.

**Def. 2:**
Es sei $V_1 \subseteq V$ eine nichtleere Teilmenge von $V$. Wir bezeichnen mit $L(V_1)$ die Menge *aller* LK von jeweils endlich vielen Vektoren aus $V_1$. $L(V_1)$ ist die sogenante *lineare Hülle* von $V_1$.

**Bemerkung:**
$L(V_1)$ ist selbst ein Vektorraum, nämlich der von $V_1$ aufgespannte Teilraum von $V$ (kleinster VR, welcher $V_1$ enthält).

**Def. 3:**

- Ein Vektorraum $V$ heißt *n-dimensional*, wenn es $n$ linear unabhängige Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ gibt, die den gesamten Raum aufspannen ($L(\{\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n\}) = L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n) = V$).
- Die Menge der Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ nennt man in diesem Falle eine Basis von $V$.

**Diskussion:**
In einem Vektorraum gibt es unterschiedliche Basen, jedoch ist die Anzahl der Vektoren, die eine Basis bilden, stets gleich (Dimension des VR).

**Satz 1:**
Es sei $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ eine Basis des VRs $V$. Dann gibt es für *jedes* $\underline{x} \in V$ eine *eindeutige* Darstellung der Gestalt $\underline{x} = x_1\underline{a}_1, ..., x_n\underline{a}_n$.

**Bemerkung:**

- Die Koeffizienten $x_1, ...x_n$ heißen *Koordinaten* von $\underline{x}$ bezüglich der Basis $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.
- Die Summanden $x_1\underline{a}_1, ..., x_n\underline{a}_n$ heißen *Komponenten* von $\underline{x}$ bezüglich der Basis $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

**Bsp. 3:**

Die Vektoren $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \underline{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$ des Raumes $\mathbb{R}^n$ bilden offensichtlich eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

$\curvearrowright$ $\underline{e}_1, ..., \underline{e}_n$ sind linear unabhängig. Ferner gilt für beliebiges $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. $\underline{x} = x_1 \cdot \underline{e}_1 + ... + x_n \cdot \underline{e}_n$.

**Bsp. 4:**
Zwei Vektoren $\underline{a}_1 \neq \underline{0}$ und $\underline{a}_2 \neq \underline{0}$ in einer Ebene bilden genau dann eine Basis, wenn sie nicht parallel sind.

## 5.2. Matrizen

**Def. 4:**
Ein aus $m \cdot n$ Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$, welche in $m$ Zeilen und $n$ Spalten angeordnet sind, bestehendes Schema heißt *Matrix vom Typ* $(m, n)$.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m \text{ (Zeilenindex)} \\ j=1,...,n \text{ (Spaltenindex)}}}$$

**Def. 5** Rechenoperationen

1.) $\underline{A} = (a_{ij}), \underline{B} = (b_{ij})$ seien vom gleichen Typ $(m, n)$.
$\boxed{\underline{A} + \underline{B} := (a_{ij} + b_{ij})}$ *Addition von Matrizen*

2.) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\underline{A} = (a_{ij})$ vom Typ $(m, n)$.
$\boxed{\lambda \cdot \underline{A} = (\lambda \cdot a_{ij})}$ *Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar*

3.) $\underline{A} = (a_{ij}$ sei vom Typ $(m, n)$
$\underline{B} = (b_{ij})$ sei vom Typ $(n, p)$
$\underline{A}$ und $\underline{B}$ heißen in dieser Reihenfolge *verkettet* (Spaltenzahl von $\underline{A}$ = Zeilenzahl von $\underline{B}$).

$$\boxed{\underline{A} \cdot \underline{B} = \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,p}}}$$ *Matrizenmultiplikation*

Das Produkt ist also vom Typ $(m, p)$.

**Diskussion:**
Zweckmäßig FALK-Schema zur Matrizenmultiplikation (vgl. folgendes Bsp. 5).

**Def. 6**
Die aus der $(m, n)$-Matrix $\underline{A}$ durch Vertauschung von Zeilen und Spalten entstehende $(n, m)$-Matrix heißt *Transformierte* von $\underline{A}$. Bezeichnung: $\underline{A}^T$.

**Bsp. 5:**

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \underline{C} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a.) $\underline{A} + \underline{B}$ existiert nicht (unterschiedliche Typen).

b.) $\underline{A} + \underline{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

c.) $2 \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

d.) $\underline{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

e.) $\underline{B} \cdot \underline{A}$ existiert nicht ($(2, 3)$ und $(2, 2)$ nicht verkettet)

f.) $\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} 21 & 30 & 17 \\ -5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

(mit FALK-Schema:)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 6 | 4 |
| | | -2 | 0 | 1 |
| 5 | -3 | 21 | 30 | 17 |
| 1 | 4 | -5 | 6 | 8 |

Bemerkung: Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ!

**Diskussion:** (ausgewählte Rechenregeln)

1.) Die Menge der Matrizen vom gleichen Typ bilden mit den Operationen Addition und Multiplikation mit einem Skalar einen Vektorraum.
Bsp: $V = \{$Matrizen vom Typ $(2,2)\}$
Basis: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.) Falls die entsprechenden Typvoraussetzungen erfüllt sind, gelten:
- $(\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C})$ (Assoziativgesetz)
- $(\underline{A} \cdot \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C}$
  $(\underline{A} + \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{C} + \underline{B} \cdot \underline{C}$ (Distributivgesetze)
- $(\lambda \cdot \underline{A}) \cdot \underline{B} = \lambda \cdot (\underline{A} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \cdot (\lambda \cdot \underline{B})$
- $(\lambda \cdot \underline{A})^T = \lambda \cdot \underline{A}^T \qquad \left(\underline{A}^T\right)^T = \underline{A}$
- $(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T \qquad \boxed{(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B} \cdot \underline{A}^T}$

3.) Achtung: Im Allgemeinen gilt $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$!

4.) FALK-Schema bei fortgesetzter Multiplikation $\underline{A} \cdot \underline{BC}$

$$\begin{array}{c|c|c} & \underline{B} & \underline{C} \\ \hline \underline{A} & \underline{A} \cdot \underline{B} & (\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} \end{array}$$
oder
$$\begin{array}{c|c} & \underline{C} \\ \hline \underline{B} & \underline{B} \cdot \underline{C} \\ \underline{A} & \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C}) \end{array}$$
(2 Varianten, gemäß Assoziativgesetz)

### Spezielle Matrizen

1.) *Quadratische Matrizen*: Typ $(n,n)$
Eine quadratische Matrix $\underline{A}$ heißt

a) *symmetrisch*, wenn $\underline{A}^T = \underline{A}$ gilt.

b) obere *Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ für $i > j$.
untere *Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ für $i < j$.

c) *Diagonalmatrix*, wenn $a_i j =$ für $i \neq j$.

d) *Einheitsmatrix* $\underline{E}$, wenn $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$ (spezielle Diagonalmatrix).

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

2.) *Nullmatrix* $\underline{0}$ (sämtliche Elemente $0$, nicht notwendig quadratisch).

3.) Matrizen vom Typ $(n,1)$ ($n$ Zeilen, eine Spalte) heißen (Spalten-)Vektoren.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$ (vgl. **??**)

Es ist $\underline{a}^T = (a_1|a_2|...|a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$ vom Typ $(1,n)$ (Zeilenvektor).

**Diskussion:**

1.) Die quadratischen Matrizen vom Typ $(n,n)$ bilden mit den Operationen Addition und Multiplikation von Matrizen einen (nicht kommutativen) Ring.

2.) Für quadratische Matrizen $\underline{A}$ sind Potenzen bildbar:
$$\boxed{\underline{A}^0 = \underline{E} \quad \underline{A}^n = \underbrace{\underline{A} \cdot \underline{A} \cdot ... \cdot \underline{A}}_{n-\text{Faktoren}}, n \in \mathbb{N}}$$

3.) Falls die entsprechenden Typvoraussetzungen erfüllt sind, gelten:
$\underline{A} \cdot \underline{E} = \underline{A}$
$\underline{E} \cdot \underline{A} = \underline{A}$
$\underline{0} \cdot \underline{A} = \underline{0}$
$\underline{A} \cdot \underline{0} = \underline{0}$
$\underline{A} + \underline{0} = \underline{A}$
$\underline{0} + \underline{A} = \underline{A}$
(analog $0$ und $1$ bei den reellen Zahlen)

4.) Sei $\underline{A}$ vom Typ $(m,n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, d.h. vom Typ $(n,1)$.
Dann ist $\boxed{\underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{x}}$ vom Typ $(m,1)$.
Durch die Zuordnung $\underline{x} \longmapsto \underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{y}$ wird eine *lineare Abbildung* von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ beschrieben (Fkt. $f$ heißt linear, wenn gilt $f(x+y) = f(x)+f(y)$ und $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R},\ x,y \in Db(f)$ gilt).

## 5.3. Determinanten

**Def. 7:**
Jeder $n$-reihigen quadratischen Matrix ist eindeutig eine Zahl $det\ \underline{A}$, die sogenannte *Determinante* von $\underline{A}$, wie folgt zugeordnet.
$n = 1$: $det\,((a_{11})) := a_{11}$
$$n \geq 2: det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\right) := a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}.$$
Dabei ist $A_{ij} = (-1)^{i+j} det\ U_{ij}$ die *Adjunkte* des Elements $a_{ij}$.
$U_{ij}$ ist die $(n-1)$-reihige *(Unter-)Matrix*, die durch Streichen der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalte von $\underline{A}$ ernsteht.
$$\text{Bezeichnung: } det(\underline{A}) = det\left(\begin{pmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Bsp. 6:**

a.) $n = 2$:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot a_{21}$
$= \underline{\underline{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}}$

b.) $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12} + a_{21} + a_{33})$

(Alternativ auch: Regel von SARRUS [diese gilt NUR für 3-reihige Determinanten] $\Rightarrow$ (Summe der Produkte der Diagonalen nach rechts unten)-(Summe der Produkte der Diagonalen nach links unten))

**Satz 2:**

a.) $det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = det(\underline{A}) \cdot det(\underline{B})$

b.) $det(\underline{A}) = det(\underline{A}^T)$

Wegen Satz 2b gelten für alle folgenden, für die Zeilen formulierten Eigenschaften auch sinngemäß für die Spalten.

**Satz 3:** (Eigenschaften der Determinante)

(E1) $\underline{B}$ gehe aus $\underline{A}$ durch Vertauschen zweier Zeilen hervor, dann gilt $det(\underline{B}) = -det(\underline{A})$.

(E2) Es gilt $det(\underline{A}) = 0$ falls zwei Zeilen elementweise proportional sind bzw. falls alle Elemente einer Zeile gleich $0$ sind.

(E3) Es gilt $\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ \lambda a_{i1} & ... & \lambda a_{in} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{i1} & ... & a_{in} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$ (steht ein Faktor in einer Zeile einer Determinante, so kann er auch vorgezogen werden).

(E4) Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn das $\lambda$-fache einer Zeile elementweise zu einer anderen Zeile addiert wird.

(E5) $det(\underline{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (Entwicklung nach $i$-ter Zeile, $(i = 1, ..., n)$)

$det(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (Entwicklung nach $j$-ten Spalte, $(j = 1, ..., n)$)

$\rightarrow$ *Entwicklungssatz*

**Bsp. 7:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -5 & -4 \\ -1 & 1 & -4 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Spalte = Arbeitsspalte (bleibt unverändert)
Um in der untersten Spalte mehr Nullen zu erzeugen (mit Regel E4):
$S_{1,neu} := S_1 + 6 \cdot S_3$
$S_{2,neu} := S_2 + 2 \cdot S_3$
$\Rightarrow$
$$= \begin{vmatrix} 19 & 7 & 3 & -1 \\ -32 & -8 & -5 & -4 \\ -26 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$
Nun kann mit der letzen Zeile relativ einfach die Determinante berchnet werden:
$$= (-1) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 19 & 7 & -1 \\ -32 & -8 & -4 \\ -26 & -7 & 2 \end{vmatrix}$$
Auf gleiche Weise werden nun wieder in Zeilen Nullen erzeugt:
$Z_{2,neu} := Z_2 - 4Z_1$
$Z_{3,neu} := Z_3 + 2Z_1$
$\Rightarrow$
$$= \begin{vmatrix} 19 & 7 & 1 \\ -108 & -36 & 0 \\ 12 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -108 & -36 \\ 12 & 7 \end{vmatrix}$$
$$\overset{E3}{=} (-1) \cdot (-36) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 7 \end{vmatrix} = 36 \cdot 9 = \underline{\underline{324}}$$
Prinzip: Nullen erzeugen mit (E4), dann mit Entwicklungssatz lösen (E5).

### Anwendungen

1.) Vekotorrechnung in $\mathbb{R}^3$ (vgl. später, Abschnitt 5.5 **??**)

2.) Gegeben sei ein lineares Gleichungssytem ($n$ Gleichungen, $n$ Unbekannte)
Matrixform $\boxed{\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}}$ mit $\underline{A} = (a_{ij}), \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$. Diese Matrixform besitzt genau dann eine eindeutige Lösung $\underline{x}$, wenn $det(\underline{A}) \neq 0$.
In diesem Falle gilt $\boxed{x_j = \frac{det(\underline{B}_j)}{det(\underline{A})}}$ $(j = 1, ..., n)$. Wobei $\underline{B}_j$ aus $\underline{A}$ hervorgeht, indem man die $j$-te Spalte durch $\underline{b}$ ersetzt (*CRAMERsche Regel*, theoretische Bedeutung, praktisches Vorgehen zur Lösung der Matrixform vgl. folgenden Abschnitt 1.5.4 **??**).

# 5.4. Lineare Gleichungssysteme, Rang einer Matrix, Inverse

## 5.4.1. Das Austauschverfahren

Gegeben sei System von $m$ linearen Funktionen mit den unabhängigen Veränderlichen $x_1, ..., x_n$ und den abhängigen Veränderlichen $y_1, ..., y_n$.

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + a_{10} \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a22x_2 + ... + a2nx_n + a_{20} \\ &... \\ y_m &= a_{m1}x_1 + am2x_2 + ... + amnx_n + a_{m0} \end{aligned}$$

**Bsp. 8:**
Betrieb, in Abteilungen, $n$ Produkte $P_1, ..., P_n$:
$a_{ij}$... Kosten pro Einheit von $P_j$ die in Abteilung $i$ entstehen.
$a_{i0}$... Fixkosten in Abteilung $i$.
$x_j$... produzierte Mengen von $P_j$.
$y_i$... Gesamtkosten in Abteilung $i$.

Matrix-Schreibweise: $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{a}$ mit $\underline{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m,\\ j=1,...,n}}$ $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ ... \\ a_{0m} \end{pmatrix}$

Tabellenform:

| | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ... | $a_{1n}$ | $a_{10}$ |
| $y_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | ... | $a_{2n}$ | $a_{20}$ |
| ... | ... | | | | |
| $y_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | ... | $a_{mn}$ | $a_{m0}$ |

bzw.

| | $x^T$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\underline{y}$ | $\underline{A}$ | $\underline{a}$ |

Aufgaben:

1.) $\underline{x}$ vorgegeben, $\underline{y}$ ist zu berechnen (klar!).

2.) $\underline{y}$ vorgegeben, $\underline{x}$ zu berechnen (nicht immer lösbar, falls lösbar, nicht immer eindeutig lösbar).

Lösungsprinzip:
Man tausche so oft wie möglich $y_r$ gegen $x_s$ aus, Austauschschritt AS ($y_r \leftrightarrow x_s$) $\rightarrow$ *Austauschverfahren.*
Austauschschritt $y_r \leftrightarrow x_s$ bedeutet:

1.) $r$-te Zeile $y_r = ...$ nach $x_s$ auflösen $x_s = ....$

2.) in allen anderen Zeilen $x_s$ durch die rechte Seite vom obigen $x_s$ ersetzen.
$\curvearrowright$ neue Tabelle

FOLIEN IM NETZ (Neumann)
Praktisches Vorgehen:

1.) Pivotelement (Pivot) kennzeichnen $\circ$

2.) Austauschregeln Austauschregel (AR) 1 bis AR 4 abarbeiten
Dabei für AR 4 unter der alten Tabelle die neue Pivotzeile (PZ) als Kellerzeile notieren.

ABB51
$a^*_{ij} = a_{ij} + a_{is} \cdot a^*_{rj}$ (Rechteckregel)

**Bsp. 8** (Fortsetzung)
$y_1 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 50$ (Kosten in Abt. 1)
$y_2 = x_1 + 2x_3 + 40$ (Kosten in Abt. 2)

| $T_1$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 2 | 3 | $\boxed{1}$ | 50 |
| $y_2$ | 1 | 0 | 2 | 40 |
| K | -2 | -3 | * | -50 |

| $T_2$ | $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | -2 | -3 | 1 | -50 |
| $y_2$ | $\boxed{-3}$ | -6 | 2 | -60 |
| K | * | -2 | $\frac{2}{3}$ | -20 |

| $T_3$ | $y_2$ | $x_2$ | $y_1$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | $\frac{2}{3}$ | 1 | $-\frac{1}{3}$ | -10 |
| $x_1$ | $-\frac{1}{3}$ | -2 | $\frac{2}{3}$ | -20 |

d.h.:
$x_3 = \frac{2}{3}y_2 + x_2 - \frac{1}{3}y_1 - 10$
$x_1 = -\frac{1}{3}y_2 - 2x_2 + \frac{2}{3}y_1 - 20$

$\curvearrowright$ bei vorgegebenen Kosten $y_1, y_2$ ist die Lösung $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ nicht eindeutig bestimmbar.

z.B. $y_1 = 600,\ y_2 = 300$:
$x_2 = t$ (*frei wählbar*)
$x_3 = \frac{2}{3} \cdot 300 + t - \frac{1}{3} \cdot 600 - 10 = t - 10$
$x_1 = -\frac{1}{3} \cdot 300 - 2t + \frac{2}{3} \cdot 600 - 20 = 280 - 2t$

$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 280 - 2t \\ t \\ t - 10 \end{pmatrix}$$

hier für $x_i \geq 0$: $10 \leq t \leq 140$.

Varianten des Austauschverfahrens (AV)

1.) AVZ ... Austauschverfahren mit *Zeilentilgung*, d.h. neue PZ in neuer Tabelle weglassen.
2.) AVS ... Austauschverfahren mit *Spaltentilgung*, d.h. neue Pivotspalte in neuer Tabelle weglassen (nur anwendbar, wenn Variable über der weggelassenen Spalte = Null ist, siehe folgender Abschnitt).
3.) AVSZ ... AVZ+AVS gleichzeitig.

### 5.4.2. Lineare Gleichungssysteme

- Gegeben sei das lineare Gleichungssystem ($m$ Gleichungen, $n$ Unbekannte $x_1, ..., x_n$)
  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$
  ...
  $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$
- Gleichungssystem heißt *homogen*, falls $b_1 = ... = b_m = 0$ gilt, sonst *unhomogen*.
- Matrixform $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m,\\ j=1,...,n}}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$


Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

- Äquivalente Form: $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} - \underline{b} \cdot 1$ mit $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$

  Hilfsgrößen $y_1 = y_2 = ... = y_m = 0$

- Tabellenform:

| | $\underline{x}^T$ | 1 |
|---|---|---|
| $\underline{y}$ | $\underline{A}$ | $\underline{b}$ |

Lösungsprinzip:
Austauschverfahren, Variante AVS (da $y_i = 0$: Pivotspalte in neuer Tabelle weglassen!)
Fall 1:
Alle $y_i$ sind austauschbar $\Rightarrow$ Gleichungssystem ist lösbar, Lösung aus letzter Tabelle (TE) ablesbar.

z.B.:

| TE | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 4 |
| $x_2$ | 2 | -3 |

$\curvearrowright x_1 = 4, \quad x_2 = 2x_3 - 3$ ($x_3$ frei wählbar)

Fall 2:
Wenigstens ein $y_i$ ist gegen kein $x_j$ austauschbar.

$\curvearrowright$ Tabelle:

| | (evtl.) noch nicht ausgetauschte $x_j$ | 1 |
|---|---|---|
| ... | | |
| $y_i$ | 0...0...0 | $\alpha$ |
| ... | | |

$\curvearrowright y_i = \alpha$

Fall 2a: $\alpha = 0$
Zeile $y_i$ kann gestrichen werden $(0 = 0)$.
Fall 2b: $\alpha \neq 0$
Gleichungssystem nicht lösbar (Widerspruch, da $y_i = 0$)

Das Verfahren endet also im Fall 2b (unlösbar) oder mit einer Tabelle, in der kein $y_i$ mehr vorkommt (Fall 1 oder 2a).

| TE | $x_{S1}$ | $x_{S2}$ | ... | $x_{Sq}$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_{r1}$ | ... | | | | |
| $x_{r2}$ | ... | | | | |
| ... | | | | | |
| $x_{rp}$ | ... | | | | |

$x_{S...}$: NBV . . . *Nichtbasisvariablen* (nicht ausgetauschte $x_i$)
$x_{r...}$: BV . . . *Basisvariablen* (ausgetauschte $x_i$)

- Allgemeine Lösung ergibt sich aus Endtabelle: NBV beliebig vorgeben, BV daraus berechenbar.
- Falls keine NBV vorhanden sind, ist die Lösung eindeutig.

**Def. 8:**
Die Darstellung der Endtabelle heißt Basisdarstellung des lin. Gleichungssystems.
Bemerkung: Aus einer Basisdarstellung lassen sich weitere Basisdarstellungen durch Austausch $x_{ri} \leftrightarrow x_{sj}$ gewinnen.

**Bsp. 9**
$3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2$
$-5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2$

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10$

| T1 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 3 | $\boxed{1}$ | 2 | 2 |
| $y_2$ | -5 | -3 | -2 | 2 |
| $y_3$ | 1 | 3 | -2 | 10 |
| K | -3 | * | -2 | -2 |

mit AVS:

| T2 | $x_1$ | $x_3$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $x_2$ | -3 | -2 | -2 |
| $0$ | $\boxed{4}$ | 4 | 8 |
| $0$ | -8 | -8 | -16 |
| K | * | -1 | -2 |

| T3 | $x_3$ | $1$ |
|---|---|---|
| $x_2$ | 1 | 4 |
| $x_1$ | 1 | -2 |
| $0$ | 0 | 0 |
| | | |

(in T3 kann letzte 0-Zeile gestrichen werden)
$\curvearrowright$ T3 ist Endtabelle (BV: $x_1, x_2$, NBV: $x_3$)
allg. Lösung:
$x_2 = x_3 + x_4$
$x_1 = -x_3 - 2$
$x_3 \in \mathbb{R}$ frei wählbar

andere Form: $x_3 = t$ (Parameter), $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-2 \\ t+4 \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ Bemerkung:

1.) Bei homogenen System $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}$ muss die 1-Spalte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht geschrieben werden (nur „gedacht“).

2.) Die Methode AVS entspricht dem sogenannten *Gauß-Jordan-Verfahren*.
Der *Gauß-Algorithmus* (siehe folgendes Beispiel):
- AVSZ (Spalten- und Zeilentilgung)
- weggelassene Zeilen merken ($\rightarrow$ Kellerzeilen)
- Rückrechnung durchführen

**Bsp. 10:**
$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$
$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4$
$2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3$

| $T_1$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_2$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | -1 | 2 | 2 | -4 |
| 0 | 2 | 5 | 2 | -4 |
| 0 | 2 | $\boxed{1}$ | -1 | +3 |
| $x_2$ | -2 | * | 4 | -3 |

| $T_2$ | $x_1$ | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\boxed{5}$ | 10 | -10 |
| 0 | -8 | 22 | -19 |
| $x_1$ | * | 2 | -2 |

| $T_3$ | $x_3$ | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $\boxed{6}$ | -3 |
| $x_3$ | * | $\frac{1}{2}$ |

Rückrechnung:
$T_3 \curvearrowright x_3 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$
$T_2 \curvearrowright x_1 = 2x_3 - 2 = \underline{\underline{-1}}$
$T_1 \curvearrowright x_2 = -2x_1 + 4x_3 - 3 = \underline{\underline{1}}$

Lösung: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Bemerkung:

$m$ Gleichungen, $n$ Unbekannte
$m \leq n \quad \curvearrowright$ AVS günstiger
$m \geq n \quad \curvearrowright$ Gauß oder AVS

### 5.4.3. Weitere Anwendungen des Austauschverfahrens

1.) Lineare Unabhängigkeit von Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ überprüfen.

Ansatz: $\boxed{x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + ... + x_n\underline{a}_n = \underline{0}} \Leftrightarrow \boxed{\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}}$ mit $\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ ... \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$ (Spalten von $\underline{A}$ sind die (Spalten-)Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$). Homogenes GLS mit AVS mit Starttabelle: $\begin{array}{c|c} & \underline{x}^T \\ \hline \underline{y} & \text{A} \end{array}$

- Unabhängigkeit genau dann, wenn alle $x_i$ ausgetauscht werden können.
- Allgemein: Die zu den ausgetauschten $x_i$, d.h. BV, gehörenden $a_i$ sind unabhängig. Sie bilden die Basis von $L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

2.) Rang einer Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ ... \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$ ... $rang(\underline{A})$ (auch: $rank(\underline{A}), rk(\underline{A}), ...$)

Def.: $\boxed{rang(\underline{A}) := dim\ L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)}$
(Dimension des von den Spaltenvektoren aufgespannten Teilraumes).

Berechnung: $rang(\underline{A}) =$Anzahl der ausführbaren Austauschschritte im AVSZ mit $\begin{array}{c|c} & \underline{x}^T \\ \hline \underline{y} & \text{A} \end{array}$ als Starttabelle (1-Spalte entfällt).
Bemerkung: Es gilt $rang(\underline{A}^T) = rang(\underline{A})$.

3.) Berechnung der Determinante einer $(n, n)$-Matrix (vgl. Merkblatt „Lineare Algebra“)

### 5.4.4. Die Inverse einer (n,n)-Matrix

**Def. 9:**
Es sei $\underline{A}$ vom Typ $(n, n)$. Das Gleichungssystem $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x}$ sei für jedes $\underline{y}$ *eindeutig* nach $\underline{x}$ auflösbar, d.h. $\underline{x} = \underline{B}\,\underline{y}$. Dann heißt die $(n, n)$-Matrix $\underline{B}$ *Inverse* von $\underline{A}$. Bezeichnung: $\underline{A}^{-1} = \underline{B}$.
Falls $\underline{A}^{-1}$ existiert, so heißt $\underline{A}$ *regulär*, sonst *singulär*.
Bemerkung:

1.) $\boxed{\underline{A} \text{ ist regulär}} \Leftrightarrow \boxed{det\,\underline{A} \neq 0}$

2.) $\underline{A}$ regulär, dann hat $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ die eindeutige Lösung $\boxed{\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}}$.

Rechenregeln: Seien $\underline{A}$ und $\underline{B}$ regulär. Dann gilt:

- $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$, $\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E}$
- $\left(\underline{A}^{-1}\right)^{-1} = \underline{A}$
- $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{E}$

- $(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$
- $\left(\underline{A}^T\right)^{-1} = \left(\underline{A}^{-1}\right)^T$

Verfahren zur Ermittlung der Inversen:

- vollständiges AV mit Starttabelle $\begin{array}{c|c} & \underline{x}^T \\ \hline \underline{y} & \underline{A} \end{array}$
  Fall 1: alle $x_i$ austauschbar $\curvearrowright$ $\underline{A}$ regulär.
  Fall 2: nicht alle $x_i$ austauschbar $\curvearrowright$ $\underline{A}$ singulär.
  im Fall 1: $\curvearrowright$ nach Ordnen der Zeilen und Spalten: $\underline{A}^{-1}$ aus TE ablesbar.
- Probe: $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$

**Bsp. 11:**

$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ gesucht: $\underline{A}^{-1}$ (falls diese existiert).

Lösung:

| $T_1$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | $\boxed{1}$ | 2 | 1 |
| $y_2$ | 1 | 0 | 2 |
| $y_3$ | 1 | -1 | 1 |
| K | * | -2 | -1 |

| $T_2$ | $y_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | -2 | -1 |
| $y_2$ | 1 | -2 | $\boxed{1}$ |
| $y_3$ | 1 | -3 | 0 |
| K | -1 | 2 | * |

| $T_3$ | $y_1$ | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 2 | -4 | -1 |
| $x_3$ | -1 | -2 | 1 |
| $y_2$ | 1 | $\boxed{-3}$ | 0 |
| K | $\frac{1}{3}$ | * | 0 |

| $T_4$ | $y_1$ | $y_3$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | -1 |
| $x_3$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | 1 |
| $x_2$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 |

$$\curvearrowright \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Probe: $\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \underline{E} = \underline{A}^{-1}\,\underline{A}$

## 5.5. Vektorrechnung im Raum

### 5.5.1. Kartesische Basis

Einige Begriffe:

1.) *Betrag* eines Vektors $\underline{a}$: Länge des Pfeils, der $\underline{a}$ repräsentiert.
Bezeichnung: $|\underline{a}|$

2.) *Einheitsvektor*: Vektor mit $|\underline{a}| = 1$.

3.) zu $|\underline{a}| \neq \underline{0}$ gehörender Einheitsvektor $\boxed{\underline{a}^0 = \frac{1}{|\underline{a}|}\underline{a}}$

4.) *Kartesische Basis* $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ besitzen Betrag 1, stehen $\perp$ aufeinander und bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (Rechtsschraubregel: Rechtsschraube $\perp$ zu $\underline{i}$ und $\underline{j}$ halten, auf kürzestem Weg von $\underline{i}$ nach $\underline{j}$ drehen. $\curvearrowright$ Bewegung in Richtung $\underline{k}$).
ABB 52

5.) *Kartesisches Koordinatensystem*:

- Fester Punkt $O$ als Ursprung
- kartesische Basis $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ (jeweils linear unabhängig)

Damit eineindeutige Zuordnung:
$\underset{\text{Punkt}}{P} \overset{1}{\underset{1}{\longleftrightarrow}} \underset{\text{Ortsvektor}}{\overrightarrow{OP}} = \underline{r} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k}$
ABB 53

$\underline{r} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (Kurzschreibweise – beide Schreibweisen gleichberechtigt)

Betrag eines Vektors $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$: $\boxed{|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

Bemerkung:

Bezeichnung auch $\underline{e_1} = \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e_2} = \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e_3} = \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{x} = \overrightarrow{x} = \mathbf{x}$$

### 5.5.2. Das Skalarprodukt

**Def. 10:**
Die Zahl $(\underline{a}, \underline{b}) := |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot cos(\varphi)$ heißt *Skalarprodukt* der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$. Dabei ist $\varphi$ der Winkel zwischen den Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

Eigenschaften des Sklarproduktes:

a.) $(\underline{a}, \underline{a}) > 0$ für $\underline{a} \neq \underline{0}$

b.) $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$ (Symmetrie)

c.) $(\lambda\, \underline{a} + \mu\, \underline{b},\ \underline{c} = \lambda \cdot (\underline{a}, \underline{c}) + \mu(\underline{b}, \underline{c})$ (Linearität)

**Satz 4:**
Es sei $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$.

Folgerung: $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}}$
Schreibweisen: $(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a} \circ \underline{b} = ...$

Anwendungen:

1.) Projektion $\underline{a}_{\underline{b}}$ von $\underline{a}$ auf $\underline{b}$: $\boxed{\underline{a}_{\underline{b}} = (\underline{a}, \underline{b}^0)\underline{b}^0 = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{b}|^2}\underline{b}}$

ABB 54
Herleitung:

$$|\underline{a}_{\underline{b}}| = |\underline{a}| \cdot cos(\varphi)$$
$$\underline{a}_{\underline{b}} = |\underline{a}| \cdot cos(\varphi) \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot cos(\varphi) \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|^2} = (\underline{a}, \underline{b}) \cdot \frac{1}{|\underline{b}|^2} \cdot \underline{b}$$

2.) Winkel $\varphi$ zwischen zwei Vektoren: $\boxed{cos(\varphi) = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}}$

**Bsp. 12:**

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a.) $|\underline{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}, |\underline{b}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{65}$

$$cos(\varphi) = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}} = \frac{29}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}}$$
$$\varphi = arccos\left(\frac{29}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}}\right) \approx 15,92°$$

b.) Projektion von $\underline{b}$ auf $\underline{a}$: $\underline{ba} = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}|^2} \underline{a} = \frac{29}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{29}{14} \underline{e}_1 - \frac{29}{7} \underline{e}_2 + \frac{29 \cdot 3}{14} \underline{e}_3$

3.) *Orthogonalitätskriterium*:

$$(\underline{a}, \underline{b}) = 0 \Leftrightarrow (\underbrace{|\underline{a}| = 0}_{\underline{a}=} \vee \underbrace{|\underline{b}| = \underline{0}}_{\underline{b}=\underline{0}} \vee cos(\varphi) = 0)$$

Vereinbarung: $\underline{0}$ orthogonal zu jedem Vektor $\curvearrowright$ $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{a} \perp \underline{b}}$

### 5.5.3. Das vektorielle Produkt

**Def. 11:**
Das vektorielle Produkt $\underline{a} \times \underline{b}$ zweier Vektoren $(\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3)$ ist ein Vektor, der eindeutig festgelegt ist durch:

(1) $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot sin(\varphi)$

(2) $\underline{a} \times \underline{b}$ ist senkrecht zu $\underline{a}$ und senkrecht zu $\underline{b}$.

(3) $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{a} \times \underline{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Eigenschaften des vektoriellen Produktes:

- $\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a})$ (Anti-Kommutativgesetz)
- $\underline{a} \times (\underline{a} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$ (Distributivgesetz)
- $\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = (\lambda \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda \underline{b})$
- Speziell: $\underline{a} \times \underline{a} = \underline{0}$
- $\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3, \; \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$ usw.

**Satz 5:**

Es sei $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, dann gilt:

$$\underline{a} \times \underline{b} \underset{\text{Schema}}{\widehat{=}} \begin{vmatrix} \underline{i} & a_1 & b_1 \\ \underline{j} & a_2 & b_2 \\ \underline{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \widehat{=} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \underline{k}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_2b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

**Bsp. 13:**

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \underline{k} = -2\underline{i} - 7\underline{j} - 4\underline{k} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Kontrolle: $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{a}) = 0, \ (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{b}) = 0$ !

Anwendungen:

1.) *Flächeninhalt* des von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannte *Parallelogramms*: $\boxed{F = |\underline{a} \times \underline{b}|}$
ABB 55
$sin(\alpha) = \dfrac{h}{|\underline{b}|}$
$F = |\underline{a}| \cdot h = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot sin(\alpha) = |\underline{a} \times \underline{b}|$

2.) Flächeninhalt eines Dreiecks $\Delta P_1P_2P_3$: $\boxed{F = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_2} \right|}$