Vorlesungsbeispiel (Hauptachsentransformation)

a) $Q(x,y) = 13x^2 - 32xy + 37y^2 = \underline{x}^T \underline{S}\,\underline{x}$ mit $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$\underline{S} = \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 37 \end{pmatrix}$

b) Charakteristische Gleichung:

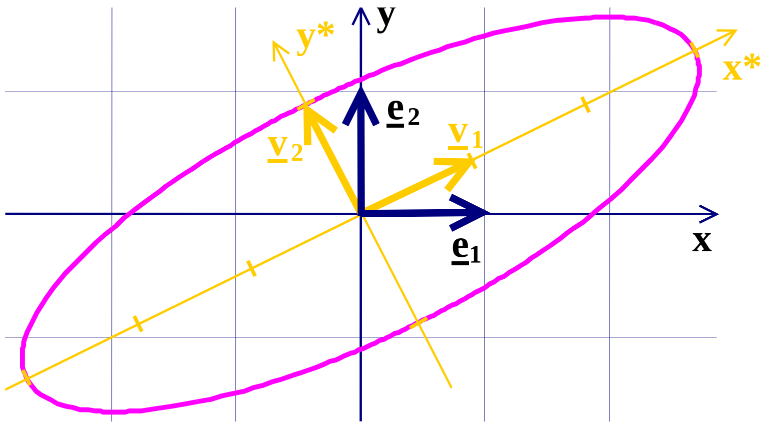
$$\det(\underline{S} - \lambda \underline{E}) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -16 \\ -16 & 37-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 50\lambda + 225 = 0 \Rightarrow$$

Eigenwerte von $\underline{S}$: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 45$,

EV zu $\lambda_1 = 5$: $\begin{array}{r} 8x - 16y = 0 \\ -16x + 32y = 0 \end{array} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$

EV zu $\lambda_2 = 45$: $\begin{array}{r} -32x - 16y = 0 \\ -16x - 8y = 0 \end{array} \Rightarrow y = -2x \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -2u \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u \neq 0$

Eigenvektoren (z.B.): $\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$



Mit den Koordinaten x* und y* bezüglich der orthonormierten Basis $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ ergibt sich schließlich

$Q(x, y) = \lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2}$
$= 5x^{*2} + 45y^{*2} = 45$

und damit $\frac{x^{*2}}{3^2} + \frac{y^{*2}}{1^2} = 1$

(Ellipse mit den Halbachsen 3 bzw. 1 in x*- bzw. y*-Richtung)