Potenzreihen

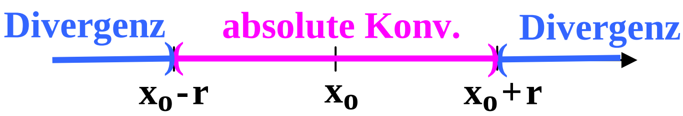
Begriff

Die Reihe $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}$ heißt Potenzreihe mit dem Mittelpunkt x_0.

Sie ist für jedes feste $x \in R$ eine Zahlenreihe.
Mit Hilfe des Quotienten- bzw. Wurzelkriteriums für Zahlenreihen ergibt sich, dass eine Potenzreihe in einem symmetrisch um x_0 gelegenen sogenannten Konvergenzintervall $\boxed{I := (x_0 - r\,; x_0 + r)}$ absolut konvergent ist. Dabei ist r der

Konvergenzradius: $\boxed{r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$ **(1) .**

Satz 1: Die Potenzreihe $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}$ ist absolut konvergent für alle x mit $|x - x_0| < r$, d.h. für $x \in$ I. Sie ist divergent für alle x mit $|x - x_0| > r$.



- **Achtung: Die Formel (1) nicht verwechseln mit dem Quotienten- bzw. Wurzelkriterium, dort Zahlenreihen $\sum a_n$, hier Potenzreihen $\sum a_n (x - x_0)^n$, d.h., a_n ist hier nur der Faktor von $(x-x_0)^n$!**
- **Falls die Grenzwerte in (1) nicht existieren, gibt es trotzdem einen Konvergenzradius, der dann auf andere Weise, z.B. mittels Substitution berechenbar ist.**
- **Der Satz 1 gibt keine Auskunft über das Verhalten an den Randpunkten des Konvergenzintervalls. Hier sind gesonderte Untersuchungen notwendig, um den Konvergenzbereich $K = \{x \in R \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ist konvergent$\}$ zu erhalten.**

Beispiel: Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, d.h. es ist $x_0 = 0$, $a_n = 1/n$.

Man erhält z.B. mit der Quotientenformel aus (1): $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1/n}{1/(n+1)} = \frac{n+1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$,

also r = 1 $\Rightarrow$ $I = (x_0 - r\,; x_0 + r) = (-1\,;1)$.

Randpunkte: $\boxed{x = -1}$ ergibt die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, dies ist konvergent auf Grund des Leibniz-Kriteriums für alternierende Reihen.

$\boxed{x = 1}$ ergibt die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, diese ist divergent (harmonische Reihe bzw. Vergleichsreihe $\sum 1/n^{\alpha}$ mit $\alpha = 1$). Damit Konvergenzbereich: $K = [-1\,;1)$.

Satz 2: Die Grenzfunktion jeder Potenzreihe ist im Konvergenz<u>bereich</u> stetig.