Grundzüge der Logik

Aussagenlogik

Bezeichnungen

$a \equiv b$ (a identisch b) ... a und b besitzen denselben Wahrheitswert.
0 ... falsche Aussage , 1 ... wahre Aussage

Aussagenverbindungen

Negation $\overline{p}$ (nicht p), ist genau dann wahr (1), wenn p falsch (0) ist

Konjunktion $p \wedge q$ (p und q), Schreibweise auch $p \cdot q$ oder kurz pq

Disjunktion $p \vee q$ (p oder q)

Implikation $p \Rightarrow q :\equiv \overline{p} \vee q$

Äquivalenz $p \Leftrightarrow q$

Wahrheitstafeln

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Zur Beachtung: Eine Implikation $p \Rightarrow q$ ist genau dann falsch, wenn die Prämisse p wahr und die Konklusion q falsch ist.

Logische Gesetze (Tautologien)

Eine Tautologie ist eine Aussagenverbindung, die unabhängig vom Wahrheitswert der einzelnen Aussagen stets wahr ist (d.h. $t \equiv 1$)

$p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$ (Negation der Negation) [1)]

$p \vee \overline{p}$ (Satz vom ausgeschlossenen Dritten)

$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$, $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ (Formeln von de MORGAN) [1)]

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ (Kontrapositionsgesetz) [1)]

$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ (direkter Beweis)

$(p \wedge (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})) \Rightarrow q$ (indirekter Beweis)

[1)] Eine Äquivalenz ist genau dann eine Tautologie, wenn beide Seiten identisch sind, Schreibweise dann auch $p \equiv \overline{\overline{p}}$ usw.

Weitere Gesetze

$p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$ (Kommutativgesetze)
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (Assoziativgesetze)

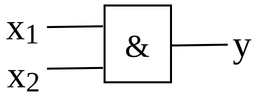
$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$, $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ (Distributivgesetze)

$p \vee 0 \equiv p$, $p \vee 1 \equiv 1$, $p \vee p \equiv p$, $p \wedge 0 \equiv 0$, $p \wedge 1 \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (Absorptionsgesetz)

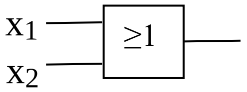
Schaltfunktionen

BOOLEsche Funktion (Schaltfunktion): $y = f(x_1, \dots, x_n)$. Die Variablen x_i und y können nur die Werte 0 und 1 annehmen.

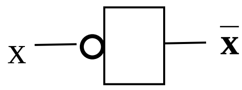
Gatterdarstellung **Und-Gatter** $y = x_1 x_2$:



Oder-Gatter $y = x_1 \vee x_2$:



, **Nicht-Gatter**



Prädikatenlogik

Begriffe

X sei eine Menge.

Aussagefunktion (Aussageform) p(x) … Jedem Element x aus X ist eine Aussage p(x) zugeordnet, p bezeichnet eine Eigenschaft **(Prädikat)**.

Quantoren

Betrachtet werden die Aussagen:

1) Für alle x (aus X) gilt p(x) .
   Bezeichnung $\forall_x p(x)$ … **Allquantor (universeller Quantor)**
2) Es existiert (mindestens) ein x (aus X), für welches p(x) gilt.
   Bezeichnung $\exists_x p(x)$ … **existentieller Quantor**

Schreibweisen (außerhalb der formalen Logik, z.B. in der Analysis):
Es wird häufig die Grundmenge X mit angegeben, z.B. $\forall_{x \in X}\, p(x)$. Für eine Teilmenge M von X können dann die folgenden Schreibweisen verwendet werden:

$a = \forall_{x \in M}\, p(x)$, $b = \exists_{x \in M}\, p(x)$.

Die Schreibweisen in der formalen Logik sind dann:

$a = \forall_x\, (x \in M \Rightarrow p(x))$, $b = \exists_x\, (x \in M \wedge p(x))$.

Rechenregeln

$\overline{\forall_x p(x)} \equiv \exists_x \overline{p(x)}$, $\overline{\exists_x p(x)} \equiv \forall_x \overline{p(x)}$ **(Formeln von de MORGAN)**

Beispiel: m und n seien natürliche Zahlen.
Es seien a:= $\forall_n \exists_m\, m > n$ und b:= $\exists_m \forall_n\, m > n$. Dann gilt z.B. a ≡ 1, da die Menge N nicht beschränkt ist. Für jedes n gibt es eine (von n abhängige) Zahl m die größer als n ist. Dagegen ist b ≡ 0, denn es gibt kein festes m, welches größer als alle natürlichen Zahlen ist. a und b sind also nicht das Gleiche. Die Reihenfolge unterschiedlicher Quantoren muss beachtet werden!