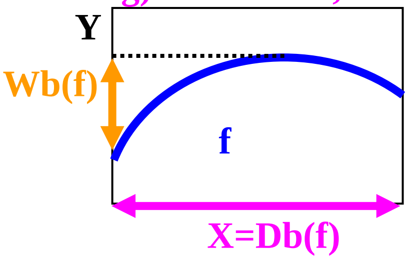
Funktionen

Definition 1: Eine Relation $f \subseteq X \times Y$ heißt **Funktion (Abbildung) von X in Y,** wenn sie **linksvollständig und rechtseindeutig** ist.



Zu **jedem** $x \in X$ existiert also **genau ein** $y \in Y$ mit $(x,y) \in f$, Schreibweise $f \mid X \to Y$, damit ergibt sich eine **eindeutige Zuordnung** $x \to y =: f(x)$.

$y = f(x)$ heißt auch **Bild** von x.
x heißt auch <u>ein</u> **Urbild** von y (muss nicht eindeutig sein).

$X =: Db(f)$ ... **Definitionsbereich,** $Wb(f) := \{y \in Y \mid \exists_{x \in X}\ (x,y) \in f\}$ ... **Wertebereich**

Schreibweise auch $f(X) := Wb(f)$ (= Menge aller Bilder)

Definition 2:

a) Eine Abbildung f heißt **surjektiv** (auch Abbildung **auf** Y), wenn $Wb(f) = Y$ gilt.

b) Eine Funktion heißt **injektiv** (auch **umkehrbar eindeutig** oder **eineindeutig**), wenn **zu jedem** $y \in Wb(f)$ **genau ein** $x \in Db(f)$ **existiert mit** $(x, y) \in f$.

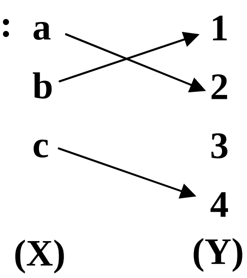
$$\begin{array}{l} y \in Wb(f) \\ \downarrow \\ x =: f^{-1}(y) \in Wb(f) \end{array}$$

Die dadurch erklärte Funktion $f^{-1} \mid Wb(f) \to Db(f)$ heißt **Umkehrfunktion** f^{-1} („ f oben –1“) von f.

c) Eine **injektive <u>und</u> surjektive** Abbildung von X auf Y heißt **bijektiv**.

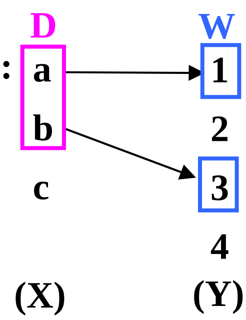
Beispiele: Gegeben seien die Mengen $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ sowie die Relationen T_1, T_2 und T_3 in $X \times Y$.

• T_1:

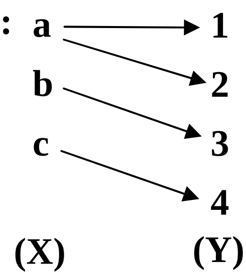


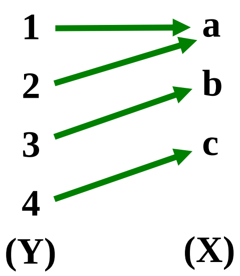
T_1 ist linksvollständig und rechtseindeutig und ist daher eine **Funktion f** (=T_1): $\boxed{f \mid X \to Y}$ (1).
Da f auch linkseindeutig ist, ist **f injektiv (eineindeutig),**
$Db(f) = X$, $Wb(f) = \{1, 2, 4\} =: W$.
Die Abbildung $\boxed{f \mid X \to W}$ (2) **ist auch surjektiv, also bijektiv.**
Die Umkehrfunktion ist eine Abbildung $f^{-1} \mid W \to X$.
Als Relationen sind (1) und (2) nicht zu unterscheiden, aber als Funktionen!

• T_2:



T_2 ist keine Funktion, da nicht linksvollständig. Mit $D := \{a, b\} \subset X$ wird durch T_2 eine Funktion $f \mid D \to Y$ beschrieben. Diese ist injektiv und kann mit $W := f(D) = Wb(f) = \{1, 3\} \subset Y$ zu einer bijektiven Abbildung $f \mid D \to W$ umgewandelt werden.
Die Umkehrfunktion ist eine Abbildung $f^{-1} \mid W \to D$.

- T_3: 

- T_4: 

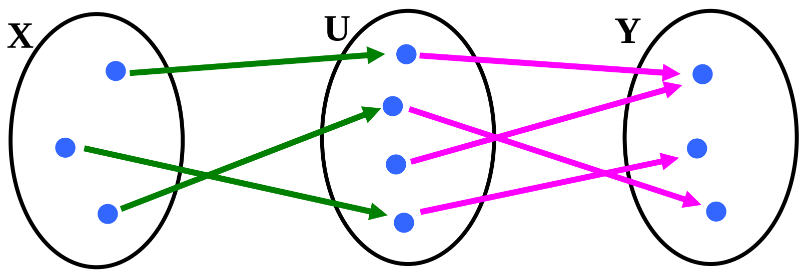
T_3 ist <u>keine Funktion</u>, da nicht rechtseindeutig. Die <u>Relation</u> $T_3 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 3), (c, 4)\}$ in $X \times Y$ besitzt die inverse Relation $T_4 := T_3^{-1} = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c)\}$ in $Y \times X$. Diese Relation stellt eine surjektive, aber nichtinjektive Funktion $f \mid Y \to X$ dar.

Definition 3:

Es seien $g \mid X \to U$ mit $x \to u = g(x)$ und $f \mid U \to Y$ mit $u \to y = f(u)$ zwei Abbildungen. Dann stellt die Zuordnung $x \to y = f(\underbrace{g(x)}_{u})$ eine Abbildung von X in Y dar, eine sogenannte mittelbare Funktion (Komposition, Verkettung).

Bezeichnung: $\boxed{g \circ f \mid X \to Y}$ mit $\boxed{(g \circ f)(x) = f(g(x))}$.

Zuordnungsschema:



$x \longrightarrow u = g(x)$, $u \longrightarrow y = f(u)$

Paarschreibweise: $(x, u) \in g$, $(u, y) \in f \Rightarrow (x, y) \in g \circ f$

Bemerkung: Zuerst wird g angewendet, dann f. Wie bei beliebigen Relationen ergibt sich die Schreibweise $g \circ f$.
In der Literatur findet man leider oft die Form $f \circ g$, offenbar wegen der Schreibweise $f(g(x))$.
Bei allen Verwendungen mittelbarer Funktionen (Literatur, Vorlesungen) sollte unbedingt die Schreibweise überprüft werden. Im Zweifelsfall die eindeutige Form $f(g(x))$ benutzen!

Satz 1: $f \mid X \to Y$ sei eine Bijektion, d.h. es existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} \mid Y \to X$. Dann gilt $f \circ f^{-1} = i_{\underline{X}}$ (d.h. $\boxed{(f \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(f(x)) = x \text{ für alle } x \in X}$, sowie $f^{-1} \circ f = i_{\underline{Y}}$ (d.h. $\boxed{(f^{-1} \circ f)(x) = f(f^{-1}(y)) = y \text{ für alle } y \in Y}$.

Satz 2: Es seien $g \mid X \to U$ und $h \mid U \to Y$ zwei Bijektionen. Dann ist die Komposition $f := g \circ h \mid X \to Y$ ebenfalls eine Bijektion und es gilt $\boxed{f^{-1} = (g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}}$.