



Mathematik I

Vorlesungsskript

Mitschrift von Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von Herrn Michael Meinhold
& Prof. Dr. Fabian Schwarzenberger

24. März 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Elementare Grundlagen	3
1.1	Aussagen und Grundzüge der Logik	3
1.2	Mengen	3
1.3	Zahlen	3
1.4	Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen	3
1.5	Lineare Algebra	3
2	Folgen, Reihen, Grenzwerte	4
2.1	Zahlenfolgen	4
2.2	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen	4
2.2.1	Grenzwerte von Funktionen	4
2.2.2	Stetigkeit von Funktionen	7
2.3	Potenzreihen	8
3	Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen	11
3.1	Grundbegriffe	11

1 Elementare Grundlagen

1.1 Aussagen und Grundzüge der Logik

1.2 Mengen

1.3 Zahlen

1.4 Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

1.5 Lineare Algebra

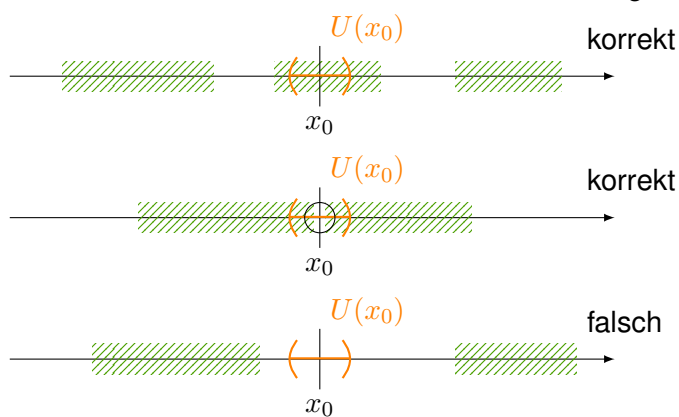
2 Folgen, Reihen, Grenzwerte

2.1 Zahlenfolgen

2.2 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

2.2.1 Grenzwerte von Funktionen

Def. 1: Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und es existiere eine Umgebung $U(x_0)$ mit $U(x_0) \setminus \{x_0\} \subseteq Db(f)$.



$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$, $x_n \neq x_0$ (für alle n) und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt

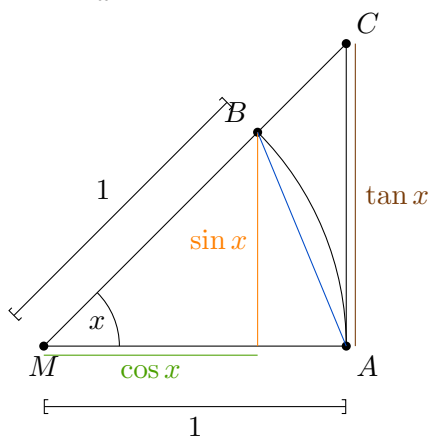
$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda$.

Anschaulich: $f(x)$ strebt gegen λ , wenn x gegen x_0 strebt.

Bemerkung: Die Stelle x_0 muss *nicht* selbst zum Definitionsbereich gehören.

Bsp. 1:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$



$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x \quad | \cdot \frac{2}{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{x}{\sin x} > \cos x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Analog zu Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen gilt:

Satz 1: Es gelte $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Dann:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot a$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$)

Bsp. 2:

a.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 7x + 4}{3 \cos x} = \frac{4}{3}$

b.) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \frac{0}{0}$ Satz nicht anwendbar.
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 2 = 5$
 (andere Möglichkeit mit $\frac{0}{0}$ umzugehen lernen wir später)

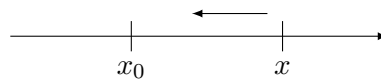
Def. 2:

a.) rechtseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \text{für jede Folge } (x_n) \text{ mit } x_n \in Db(f) \text{ und } x_n > x_0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ gilt}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$$

Andere Schreibweise: $\lim_{x \searrow x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0}$



b.) linkseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \text{analog rechtsseitiger Grenzwert}$$

c.) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \text{für jede Folge } (x_n) \text{ mit } x_n \in Db(f) \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$

d.) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \text{analog s.o.}$

Diskussion: Uneigentliche Grenzwerte:

Wir schreiben $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$ bei bestimmter Divergenz der Funktionswerte für:

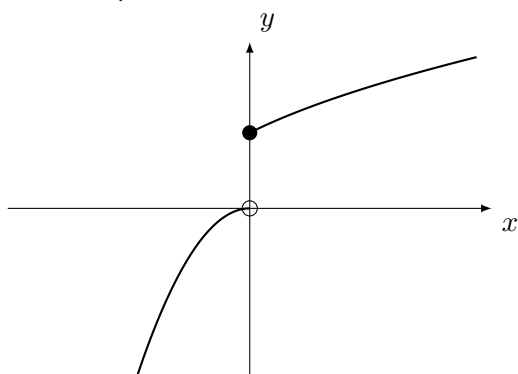
$$\bullet \begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ x \nearrow x_0 \\ x \searrow x_0 \\ x \rightarrow \infty \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Satz 2:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = a$$

Bsp. 3: (einseitiger Grenzwert)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existiert nicht!}$$

Bsp. 4:

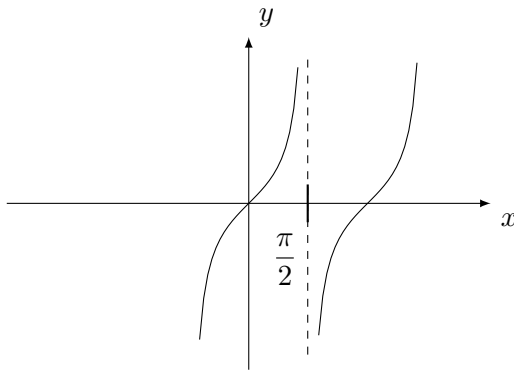
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{4}{x}\right) = "\infty \cdot 0"$$

$$\stackrel{u=\frac{4}{x}}{=} \lim_{u \searrow 0} \frac{4}{u} \sin(u) = 4$$

Bsp. 5:

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$$

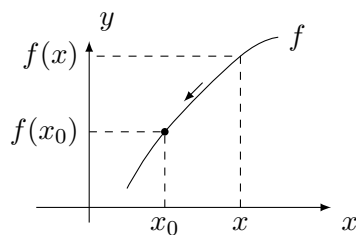
$$\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$$



2.2.2 Stetigkeit von Funktionen

Def. 3: Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in Db(f)$ gegeben. Es heißt f :

- a.) stetig in x_0 falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt
(also $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$, d.h. Limes und Funktion kann vertauscht werden).



- b.) linksseitig stetig in x_0 , falls $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
c.) rechtsseitig stetig in x_0 , falls $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Bsp. 6:

- a.) $f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig, da $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$.

Aber $\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ stetig.

Bezeichnung: hebbare Unstetigkeit.

ABB16

- b.) $f_2(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da $\lim_{x \nearrow 0} f_2(x) \neq f_2(0) \neq \lim_{x \searrow 0} f_2(x)$

Bezeichnung: endlicher Sprung.

ABB17

- c.) $f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da $\lim_{x \nearrow 0} f_3(x) = \infty \neq f_3(0)$.

ABB18

d.) $f_3(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nicht existiert.

ABB19

Def. 4: Die Funktion $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ heißt

a.) in einem Intervall $I \subset Db(f)$ stetig, falls f an jeder inneren Stelle $x_0 \in I$ stetig ist und in evtl. zu I gehörenden Randpunkten einseitig stetig ist.

b.) stetig, falls f in allen Punkten $x_0 \in Db(f)$ stetig ist.

Bemerkung: Jede der in ?? und ?? betrachteten Funktionen ist stetig.

Bsp. 7: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig.

Satz 3: Sind f und g stetig in x_0 , so sind auch $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x_0) \neq 0$) stetig in x_0 .

Satz 4: (Stetigkeit und Verknüpfungen)

Seien $g : Db(g) \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $Wb(g) \subseteq Db(f)$, dann gilt:

Ist g stetig in x_0 und f stetig in $g(x_0)$, so ist $f \circ g : Db(g) \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ stetig in x_0 .

Satz 5: (Zwischenwertsatz)

Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b] \subset Db(f)$. Falls $f(a) \cdot f(b) < 0$ (also haben unterschiedliche Vorzeichen), so gilt $\exists x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = 0$

ABB20

Satz 6: Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$. Dann nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Diskussion:

a.) $f(x) = \tan x$ nimmt auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ kein Maximum an.

ABB21

b.) $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ nicht stetig und nimmt kein Maximum auf $[-1, 1]$ an.

ABB22

2.3 Potenzreihen

Def.: Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ Potenzreihe mit dem Mittelpunkt x_0 .

Diskussion:

- Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ ist die Potenzreihe eine feste Reihe.
- Konvergenzbereich $K := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{Potenzreihe ist konvergent}\}$
- Für jedes $x \in K$ existiert der Summenwert der Potenzreihe. Die Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$
 heißt Grenzfunktion der Potenzreihe.

Zur Bestimmung des Konvergenzbereichs nutzt man Satz 10 und 11 aus ?? und erhält absolute Konvergenz in einem um x_0 liegendem Konvergenzintervall $I := (x_0 - r, x_0 + r)$.

Wie r bestimmt wird liefert:

Satz 1: Sei (a_n) Zahlenfolge mit $r := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2qrt[n] |a_n|}$ existiert.

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < r \\ \text{divergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| > r \end{cases}$

Diskussion:

- Verwechslungsgefahr:
 - Satz 10 und 11 betrachten (Zahlen-)Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
 - Satz 1 betrachtet Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, wobei a_n ein Faktor vor $(x - x_0)^n$ ist.
- Falls der Grenzwert r aus Satz 1 nicht existiert, so gibt es trotzdem einen Konvergenzradius. Den gilt es auf andere Weise zu betrachten/ermitteln.
- Satz 1 sagt nichts über das Verhalten an den Randpunkten aus \rightarrow gesonderte Untersuchung nötig.

Bsp. 1:

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, d.h. $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} \right|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

\Rightarrow Konvergenzintervall $I = (-1, 1)$

Randpunkte:

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ bedingt konvergent (alternierenden harmonische Reihe)

$x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent

\Rightarrow Konvergenzbereich: $K = [-1, 1)$

$$\text{b.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ d.h. } x_0 = 0, a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$\Rightarrow r = \infty$$

d.h. die Reihe ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bezeichnung: *beständige Konvergenz*

$$\text{c.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \dots \quad \text{d.h. } x_0 = 0, a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Satz 1 ist aber nicht unmittelbar anwendbar.

Substitution $u := x^2$ liefert aber $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{(2n)!}$ mit $u_0 = 0, b_n = \frac{1}{(2n)!} (\sum b_n(u - u_0)^n)$

$$\left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+2) \cdot (2n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$\Rightarrow r_u = \infty$ (Konvergenzradius für die Substituierte Reihe)

$\Rightarrow r_x = \sqrt{\infty} = \infty$ (Konvergenzradius für die untersuchte Funktion)

Im Konvergenzbereich K wird dadurch eine Potenzreihe eine Funktion dargestellt, die Grenzfunktion (siehe vorhergehende Diskussion).

Bsp. 2:

$$\text{a.) } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ für } x \in (-1, 1) \text{ (geometrische Reihe)}$$

$$\text{b.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ (Beweis später)}$$

Satz 2: Die Grenzfunktion jeder Potenzreihe ist im Konvergenzbereich stetig.

3 Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen

3.1 Grundbegriffe

Tangentenproblem

ABB38

Gegeben: $y = f(x)$

Gesucht: Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$

- Zunächst **Sekante** durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_0, f(x_0))$
- Dann betrachten wir $x_1 \rightarrow x_0$
- Damit geht **Sekante** über in die **Tangente**.
Außerdem geht φ in α über.

$$\tan \alpha = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \tan \varphi = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}}$$

Def. 1: Die Funktion $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt an der Stelle x_0 (mit $U(x_0) \subseteq Db(f)$) differenzierbar, falls

der Grenzwert $\boxed{f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$ existiert.

$f'(x_0)$ heißt dann **1. Ableitung** von f an der Stelle x_0 .

Diskussion:

- $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
- Gleichung der Tangente in $(x_0, f(x_0))$ ist $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ($t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) Anstieg der Tangente ist als $m = \tan \alpha = f'(x_0)$
- f in x_0 differenzierbar bedeutet es existiert eine eindeutige Tangente an die Kurve in dieser Stelle.
z.B. ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar:
ABB39

Satz 1: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Beweis:

Sei f in x_n differenzierbar und (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \rightarrow x_0$. Dann gilt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ existiert.

$$\Rightarrow \exists K > 0 \text{ mit } \left| \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right| = \frac{|f(x_n) - f(x_0)|}{|x_n - x_0|} \leq K$$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| \leq K \cdot |x_n - x_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ ist stetig.}$$