Mengenlehre

Betrachtet werden nur Elemente bzw. Teilmengen einer (hinreichend umfassenden) sogenannten Grundmenge.

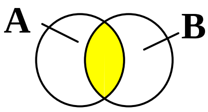
Mengenverknüpfungen

Gleichheit $(M_1 = M_2) :\equiv \forall_x (x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2)$

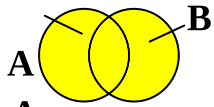
Inklusion $(M_1 \subseteq M_2) :\equiv \forall_x (x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2)$

M_1 **ist Teilmenge von** M_2.

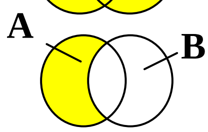
Durchschnitt $A \cap B := \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$



Vereinigung $A \cup B := \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$



Differenz $A \setminus B := \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$



Komplementärmenge bezüglich einer Grundmenge E: $\overline{A} := E \setminus A$

Ausgewählte Rechenregeln

1) Vereinigung und Durchschnitt sind kommutativ und assoziativ.

2) Für eine Indexmenge I, z.B. {1, 2, 3, ... , n}, N werden erklärt:

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x \mid \exists_{i\in I}\ x \in A_i\} \ , \qquad \bigcap_{i\in I} A_i := \{x \mid \forall_{i\in I}\ x \in A_i\}$$

3) $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A} \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$

Relationen

Mengen-Produkte

$M_1 \times M_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in M_1 \wedge \ x_2 \in M_2\}$ **(Menge geordneter Paare)**

$M_1 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in M_1, \ldots, \ x_n \in M_n\}$ **(Menge geordneter n-Tupel)**

Eine Teilmenge T von $M_1 \times M_2$ **heißt (binäre) Relation in M_1 x M_2.**

Eine Teilmenge T von $M \times M =: M^2$ **heißt auch (binäre) Relation auf M.**

Eigenschaften binärer Relationen in $M_1 \times M_2$

Eine Relation T in $M_1 \times M_2$ **heißt**

a) linksvollständig (linkstotal), wenn für jedes $x_1 \in M_1$ **wenigstens ein** $x_2 \in M_2$ **existiert mit** $(x_1, x_2) \in T$,

b) rechtsvollständig (rechtstotal), wenn für jedes $x_2 \in M_2$ **wenigstens ein** $x_1 \in M_1$ **existiert mit** $(x_1, x_2) \in T$,

c) rechtseindeutig, wenn für jedes $x_1 \in M_1$ höchstens ein $x_2 \in M_2$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$,

d) linkseindeutig, wenn für jedes $x_2 \in M_2$ höchstens ein $x_1 \in M_1$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$,

Eigenschaften binärer Relationen in $M \times M$

Eine Relation T in $M \times M$ heißt

a) reflexiv, wenn $(x,x) \in T$,

b) symmetrisch, wenn $(x,y) \in T \Rightarrow (y,x) \in T$,

c) antisymmetrisch, wenn $((x,y) \in T \wedge (y,x) \in T) \Rightarrow x = y$,

d) asymmetrisch, wenn $(x,y) \in T \Rightarrow (y,x) \notin T$,

e) transitiv, wenn $((x,y) \in T \wedge (y,z) \in T) \Rightarrow (x,z) \in T$,

jeweils für alle x, y, z $\in$ M gilt.

Wichtige Relationen

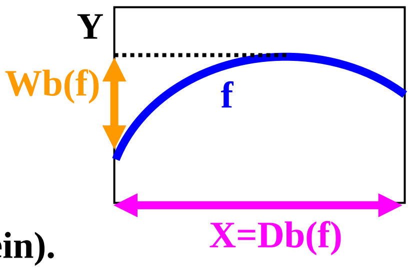
1) Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt Äquivalenzrelation auf M, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

2) a) Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt Ordnungsrelation auf M, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Eine Ordnungsrelation heißt vollständig oder linear, wenn für alle x, y $\in$ M gilt $(x,y) \in T \vee (y,x) \in T$.

b) Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt strikte Ordnungsrelation auf M, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist. Eine strikte Ordnung heißt vollständig oder linear, wenn für alle x, y $\in$ M mit $x \neq y$ gilt $(x,y) \in T \vee (y,x) \in T$.

3) Eine Relation $f \subseteq X \times Y$ heißt Funktion (Abbildung) von X in Y, wenn sie linksvollständig und rechtseindeutig ist,

d.h. zu jedem $x \in X$ existiert genau ein $y \in Y$ mit $(x,y) \in f$, Schreibweise $f \mid X \to Y$, damit ergibt sich eine eindeutige Zuordnung $x \to y =: f(x)$.



y = f(x) heißt auch Bild von x.
x heißt auch <u>ein</u> Urbild von y (muss nicht eindeutig sein).

- X =: Db(f) ... Definitionsbereich
- Wb(f):= $\{y \in Y \mid \exists_{x \in X}\ (x,y) \in f\}$ ... Wertebereich

  Schreibweise auch f(X) := Wb(f) (= Menge aller Bilder)