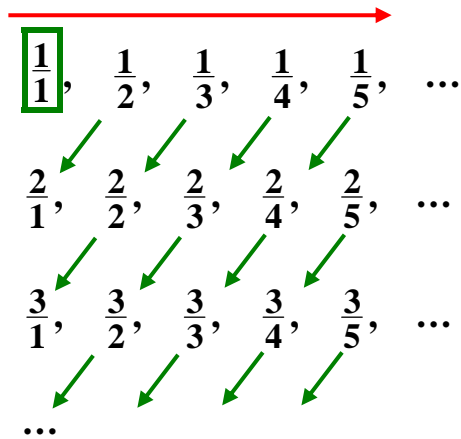


Abzählbarkeit der Menge der rationalen Zahlen

Es sei \mathbb{Q}^+ die Menge der positiven rationalen Zahlen. Die Zahlen werden zunächst zeilenweise derart angeordnet, dass in einer Zeile alle Zahlen $\frac{i}{j}$ mit dem gleichen Zähler i stehen:



Zählvorschrift:

1. Ordnen (aufsteigend) nach der Summe $s = i + j$ von Zähler und Nenner (\longrightarrow).
2. Bei gleicher Summe der Größe nach (aufsteigend) ordnen (\longrightarrow).
3. Zahlen, die bereits aufgelistet wurden (kürzbare Brüche), werden übersprungen bzw. gestrichen.

$$\Rightarrow \mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \dots \right\}$$

$s = \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots$

Mit dieser Zählvorschrift wird jede positive rationale Zahl nach endlich vielen Schritten erreicht. \mathbb{Q}^+ ist also abzählbar unendlich.

Man kann leicht zeigen (vgl. Übung), dass auch die Menge \mathbb{Q} aller rationalen Zahlen abzählbar unendlich ist.