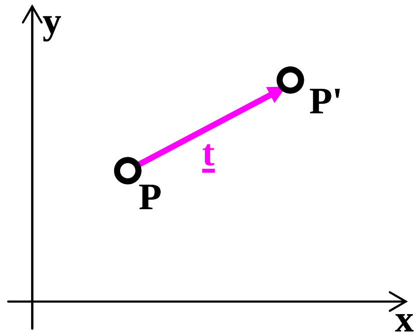
Transformationen im R^2

Betrachtet werden Transformationen eines Punktes $P(x, y) \to P'(x', y')$ (neue Koordinaten x', y' im gleichen Koordinatensystem = "aktive Transformation")

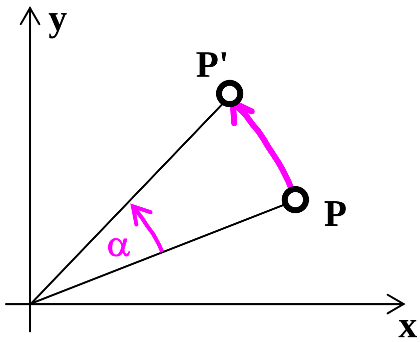
Translation: Verschiebung um einen Translationsvektor $\underline{t} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad (1)$$



Rotation um O, Drehwinkel α

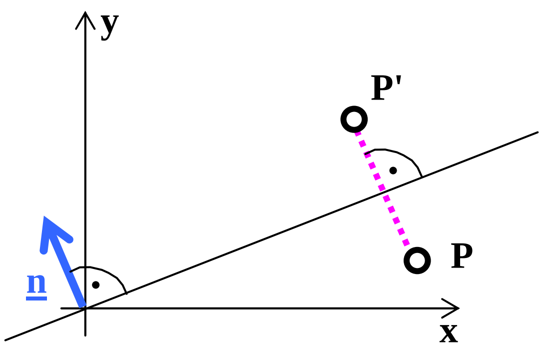
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{\text{Rotationsmatrix } \underline{R}_\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Spiegelung an einer Geraden g durch O mit **Normaleneinheitsvektor $\underline{n}$** ($|\underline{n}| = 1$) (Geradengleichung $ax + by + c = 0$,

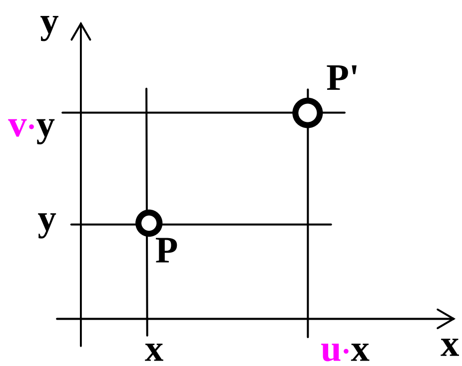
dann $\underline{n} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (\underbrace{\underline{E} - 2\,\underline{n}\,\underline{n}^T}_{\text{HOUSEHOLDER-Matrix } \underline{H}_{\underline{n}}}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Skalierung (koordinatenweise Streckung oder Stauchung mit den Skalierungsfaktoren u in x-Richtung und v in y-Richtung)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}}_{\text{Skalierungsmatrix } \underline{S}_{u,v}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Homogene 2D-Koordinaten

Die Translation lässt sich nicht unmittelbar durch eine Matrizenmultiplikation beschreiben (keine lineare Abbildung!). Zu diesem Zweck werden homogene 2D-Koordinaten eingeführt.

Homogene 2D-Koordinaten eines Punktes P(x , y): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ *)

Translation in homogenen 2D-Koordinaten: Translationsvektor $\underline{t} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1')$$

Transformationsmatrix $\underline{\tilde{T}}_{\underline{t}}$ **für homogene Koordinaten**

Inverse (für die Rücktransformation): $\underline{\tilde{T}}_{\underline{t}}^{-1} = \underline{\tilde{T}}_{(-\underline{t})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rotation um O, Spiegelung an einer Geraden durch O und Skalierung in homogenen 2D-Koordinaten:

Es sei $\underline{M}$ **die Transformationsmatrix vom Typ (2, 2) für die kartesischen Koordinaten** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$**. Dann ergibt sich als Transformationsmatrix für die homogenen Koordinaten** $\underline{\tilde{M}} := \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\underline{M}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$**, Inverse** $\underline{\tilde{M}}^{-1} := \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\underline{M}^{-1}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Damit lassen sich alle genannten Transformationen durch Matrizenmultiplikationen darstellen. Die Gesamttransformation ist durch eine (3, 3)-Matrix $\underline{\tilde{M}}$ **darstellbar. Mit einer weiteren Matrizenmultiplikation kann das Ergebnis der Gesamttransformation für k Punkte** $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, **... erhalten werden:**

$$\underline{\tilde{M}} \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} ... \\ ... \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \end{matrix} & ... \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} A' & B' & C' & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \end{matrix}} & \begin{matrix} ... \\ ... \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \end{matrix} & ... \end{pmatrix} \end{array}$$

***) Noch allgemeiner für** $h \neq 0$: $\begin{pmatrix} hx \\ hy \\ h \end{pmatrix}$**. Kartesische Koordinaten ergeben sich dann durch Division der 1. und 2. Koordinate durch h. Damit sind auch Zentralprojektionen darstellbar.**