Mathematik I

Vorlesungsskript

Mitschrift von Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von Herrn Michael Meinhold
& Prof. Dr. Fabian Schwarzenberger

23. März 2016

Inhaltsverzeichnis

Teil 1
Elementare Grundlagen

1.1 Aussagen und Grundzüge der Logik

1.2 Mengen

1.3 Zahlen

1.4 Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

1.5 Lineare Algebra

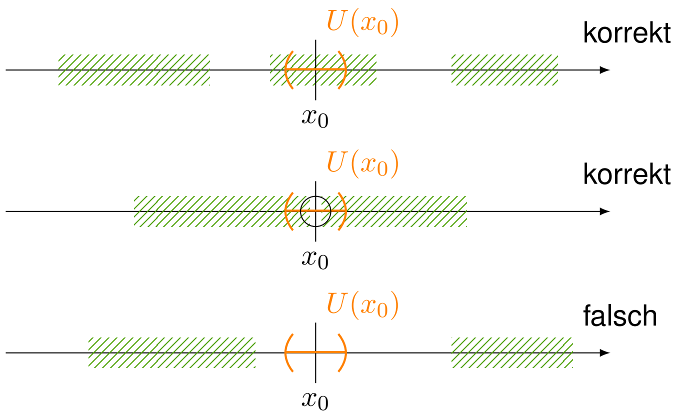
Teil 2
Folgen, Reihen, Grenzwerte

2.1 Zahlenfolgen

2.2 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

2.2.1 Grenzwerte von Funktionen

Def. 1: Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und es existiere eine Umgebung $U(x_0)$ mit $U(x_0)\{x_0\} \subseteq Db(f)$.

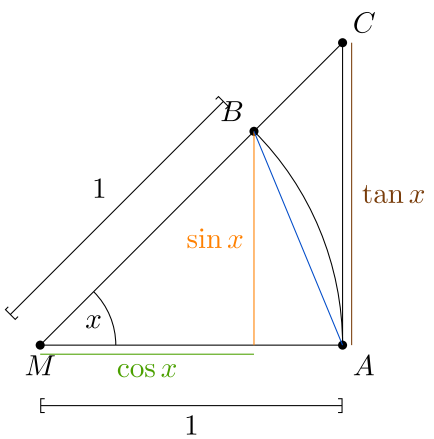


$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$:⇔ Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$, $x_n \neq x$ (für alle n) und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$.
Anschaulich: $f(x)$ strebt gegen a, wenn x gegen x_0 strebt.

Bemerkung: Die Stelle x_0 muss *nicht* selbst zum Definitionsbereich gehören.

Bsp. 1:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$



$$F_{\triangle MAB} \leq F_{Sektor\ MAB} \leq F_{\triangle MAC}$$
$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \quad | \cdot \frac{2}{\sin x}$$
$$\Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Analog zu Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen gilt:

Satz 1: Es gelte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Dann:

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x) = a + b$
- $\lim\limits_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot a$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$)

Bsp. 2:

a.) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^3 - 7x + 4}{3\cos x} = \frac{4}{3}$

b.) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x-3} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ Satz nicht anwendbar.

$= \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} x + 2 = 5$

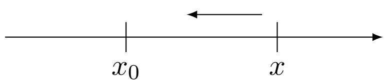
(andere Möglichkeit mit $\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ umzugehen lernen wir später)

Def. 2:

a.) rechtseitiger Grenzwert:

$\lim\limits_{x\searrow x_0} f(x) = a :\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$ und $x_n > x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Andere Schreibweise: $\lim\limits_{x\searrow x_0} = \lim\limits_{x\to x_0+0}$



b.) linkseitiger Grenzwert:

$\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) = a :\Leftrightarrow$ analog rechtsseitiger Grenzwert

c.) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a :\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \infty$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

d.) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a :\Leftrightarrow$ analog s.o.

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

Diskussion: Uneigentliche Grenzwerte:

Wir schreiben $\lim\limits_{\bullet} f(x) 0 \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$ bei bestimmter Divergenz der Funktionswerte für:

$\bullet \begin{cases} x \to x_0 \\ x \nearrow x_0 \\ x \searrow x_0 \\ x \to \infty \\ x \to -\infty \end{cases}$

Satz 2:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow x_0} = a$

Bsp. 3: (einseitiger Grenzwert)

$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

ABB13

$\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 0, \ \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht!

Bsp. 4:

$\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \sin\left(\frac{4}{x}\right) = \text{"'}\infty \cdot 0\text{"}$

$\overset{u=\frac{4}{x}}{=} \lim\limits_{u \searrow 0} \frac{4}{u} \sin(u) = 4$

Bsp. 5:

$\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

$\lim\limits_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$

ABB14

2.2.2 Stetigkeit von Funktionen

Def. 3: Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R}, \ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in Db(f)$ gegeben.
Es heißt f:

a.) stetig in x_0 falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt
(also $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, d.h. Limes und Funktion kann vertauscht werden).
ABB15

b.) linksseitig stetig in x_0, falls $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

c.) rechtsseitig stetig in x_0, falls $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Bsp. 6:

a.) $f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig, da $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$.

Aber $\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ stetig.

Bezeichnung: hebbare Unstetigkeit.

ABB16

b.) $f_2(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da $\lim\limits_{x \nearrow 0} f_2(x) \neq f_2(0) \neq \lim\limits_{x \nearrow 0} f_2(x)$

Bezeichnung: endlicher Sprung.

ABB17

c.) $f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da $\lim\limits_{x \nearrow 0} f_3(x) = \infty \neq f_3(0)$.

ABB18

d.) $f_3(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ nicht existiert.

ABB19

Def. 4: Die Funktion $f : DB(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ heißt

a.) *in einem Intervall* $I \subset Db(f)$ *stetig*, falls f an jeder inneren Stelle $x_0 \in I$ stetig ist und in evtl. zu I gehörenden Randpunkten einseitig stetig ist.

b.) *stetig*, falls f in allen Punkten $x_0 \in Db(f)$ stetig ist.

Bemerkung: Jede der in **??** und **??** betrachteten Funktionen ist stetig.

Bsp. 7: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig.

Satz 3: Sind f und g stetig in x_0, so sind auch $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g,\ f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$(falls $g(x_0) \neq 0$) stetig in x_0.

Satz 4: (Stetigkeit und Verknüpfungen)
Seien $g : Db(g) \to \mathbb{R}$ und $f : Db(f) \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $Wb(g) \subseteq Db(f)$, dann gilt:
Ist g stetig in x_0 und f stetig in $g(x_0)$, so ist $f \circ g : Db(g) \to \mathbb{R},\ (f \circ g)(x) = f(g(x))$ stetig in x_0.

Satz 5: (Zwischenwertsatz)
Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b] Db(f)$. Falls $f(a) \cdot f(b) < 0$ (also haben unterschiedliche Vorzeichen), so gilt $\exists x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = 0$
ABB20

Satz 6: Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$. Dann nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Diskussion:

a.) $f(x) = \tan x$ nimmt auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ kein Maximum an.
ABB21

b.) $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ nicht stetig und nimmt kein Maximum auf $[-1, 1]$ an.
ABB22

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube