Mathematik II für Informatiker, Sommersemester 2016 Prof. Dr. F. Schwarzenberger

Hausaufgabe 3

Aufgabe 1. Gegeben seien die Funktion $f : \mathrm{Db}(f) \to \mathbb{R}$ und $g : \mathrm{Db}(g) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 4 & \text{falls } x < 2 \\ 3 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) := \frac{3}{x-2} + 1.$$

(a) Wählen Sie für $\mathrm{Db}(f)$ und $\mathrm{Db}(g)$ die größtmöglichen Definitionsbereiche.
(b) Welchen Funktionswert hat f (bzw. g) an der Stelle $x = 2$?
(c) Stellen Sie den Graph der Funktionen f und g in einem Koordinatensystem dar.
(d) Geben Sie (falls möglich) den Grenzwert von f und g für $x \to 2$ an. Bestimmen Sie außerdem den links- und rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle $x = 2$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie, falls möglich, folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}, \quad a \in \mathbb{R}$ konstant,
(b) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot(x)$,
(c) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^2-6x-14}$,
(d) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^2-6x-16}$,
(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3\sqrt[12]{x^5}-4\sqrt[3]{x}}{\sqrt[7]{x^6}-13\sqrt[5]{x^2}-\sqrt{\pi^3}}$,
(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+\sin(2x)}{3x-\sin(4x)}$,
(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-x$,
(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3\mathrm{e}^{x/2}-2\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}}$.

Aufgabe 3. Überprüfen Sie die folgenden stückweise definierten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit an den Übergangsstellen:

(a) $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{falls } x < 1 \\ -4x^2+8 & \text{falls } 1 \leq x < 3 \\ -6x-8 & \text{falls } x \geq 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \ln(x) + 1/x & \text{falls } x < \mathrm{e} \\ \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\ln(x)} & \text{falls } \mathrm{e} \leq x < 100 \\ \mathrm{e}^{x-101} + \frac{50}{x\ln(10)} & \text{falls } x \geq 100 \end{cases}$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie jeweils den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass die stückweise definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Übergangsstelle stetig ist.

(a) $f(x) = \begin{cases} 4x-1 & \text{falls } x < 2 \\ -x+a & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2x^a-1 & \text{falls } x < 4 \\ 2^{\sqrt{x}} - \frac{x}{4} & \text{falls } x \geq 4 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} ax^2-a^2x+3 & \text{falls } x < -1 \\ 5ax-1 & \text{falls } x \geq -1 \end{cases}$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie jeweils den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass die stückweise definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Übergangsstelle stetig ist.

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^3-1} - \frac{1}{x-1} & \text{falls } x < 1 \\ ax+2 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{4-\sin(2x)}{5-\cos(5x)} & \text{falls } x \leq 0 \\ a\frac{3x+\sin(10x)}{7x-\sin(2x)} + \frac{1}{5} & \text{falls } x > 0 \end{cases}$