Praktikum Elektronik für Informatiker

Schaltvorgänge

1 Versuchsziel

Kennenlernen der Ausgleichsvorgänge in Gleichstromkreisen, die energiespeichernde Schaltelemente enthalten.

2 Grundlagen

2.1 Mathematische und physikalische Zusammenhänge

Beim Ein- und Ausschalten eines Gleichstromkreises, der nur ohmsche Widerstände enthält, ändern sich Ströme und Spannungen sprungartig nach dem Ohmschen Gesetz. Liegt dagegen im Stromkreis ein energiespeicherndes Schaltelement (Kondensator oder Spule), so treten Ausgleichsvorgänge auf, da sich die Energien nicht sprungartig ändern können, d.h. $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ kann nicht unendlich groß werden.

Die mathematische Behandlung dieser Schaltvorgänge führt auf lineare Differentialgleichungen (DGL) mit Störfunktion, deren Lösung aus zwei Teilen besteht:

- Lösung der homogenen DGL
- partikuläre Lösung der vollständigen DGL.

Physikalische Deutung: Der Ausgleichsvorgang besteht aus einem **flüchtigen** Anteil (Lösung der homogenen DGL) und einem **stationären** Anteil (partikuläre Lösung). Für $t \rightarrow \infty$ wird der flüchtige Anteil zu Null, und es wirkt nur noch der stationäre Anteil.

2.2 Stromkreise mit nur einem Speicherelement

2.2.1 Kreis mit Widerstand R und Kondensator C

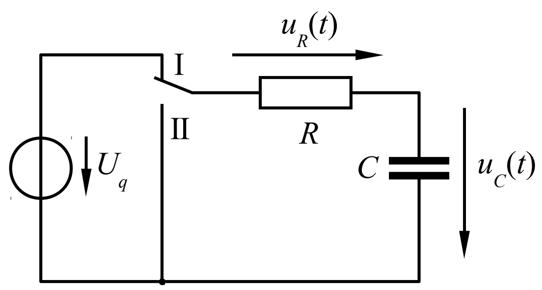


Bild 2.1: Schaltvorgang an einer RC-Schaltung

Einschalten (I)		Ausschalten (II)	
Maschengleichung			
$u_R+u_C=U_q$	(2.1)	$u_R+u_C=0$	(2.2)
Differentialgleichung			
$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}u_C=\frac{U_q}{RC}$	(2.3)	$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}u_C=0$	(2.4)
flüchtiger Anteil			
$u_C=k\ e^{\frac{-t}{RC}}$	(2.5)	$u_C=k\ e^{\frac{-t}{RC}}$	(2.6)
stationärer Anteil			
$u_C=U_q$	(2.7)	$u_C=0$	(2.8)
Anfangsbedingungen			
$t=0\ ,\quad u_C=0$	(2.9)	$t=0\ ,\quad u_C=U_{C0}$	(2.10)
Gesamtvorgang			
$u_C=U_q\cdot(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})$	(2.11)	$u_C=U_{C0}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$	(2.12)
Strom			
$i=\frac{U_q}{R}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$	(2.13)	$i=-\frac{U_{C0}}{R}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$	(2.14)

2.2.2 Kreis mit Widerstand R und Induktivität L

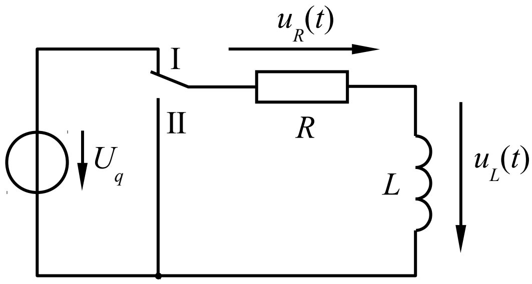


Bild 2.2: Schaltvorgang an einer RL-Schaltung

Einschalten (I)		Ausschalten (II)	
Maschengleichung			
$u_L + u_R = U_q$	(2.15)	$u_L + u_R = 0$	(2.16)
Differentialgleichung			
$\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L} i = \frac{U_q}{L}$	(2.17)	$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L} i = 0$	(2.18)
flüchtiger Anteil			
$i = k\, e^{-\frac{R}{L}t}$	(2.19)	$i = k\, e^{-\frac{R}{L}t}$	(2.20)
stationärer Anteil			
$i = \frac{U_q}{R}$	(2.21)	$i = \frac{U_q}{R}$	(2.22)
Anfangsbedingungen			
$t = 0 \quad , \quad i = 0$	(2.23)	$t = 0 \quad , \quad i = I_0$	(2.24)
Gesamtvorgang			
$i = \frac{U_q}{R} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})$	(2.25)	$i = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$	(2.26)
Spannung an der Induktivität L			
$u_L = U_q \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$	(2.27)	$u_L = -I_0 \cdot R \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$	(2.28)

2.2.3 Zeitkonstante

Die Zeitkonstante ist definiert

- für die RC-Schaltung als $\tau = RC$,
- für die RL Schaltung als $\tau = L/R$.

Die Zeitkonstante τ kennzeichnet die Geschwindigkeit des Ausgleichsvorganges; sie ist jedoch nicht die Zeit, nach der er beendet ist. Sie ist nur von den Schaltelementen *R*, *L* und *C* abhängig, nicht von der geschalteten Spannung. In der graphischen Darstellung (Bild 2.3) des Schaltvorganges erscheint τ als Subtangente der e-Funktion.

In den meisten praktischen Anwendungsfällen nimmt man an, daß der Schaltvorgang bei $t = 5\tau$ abgeklungen ist.

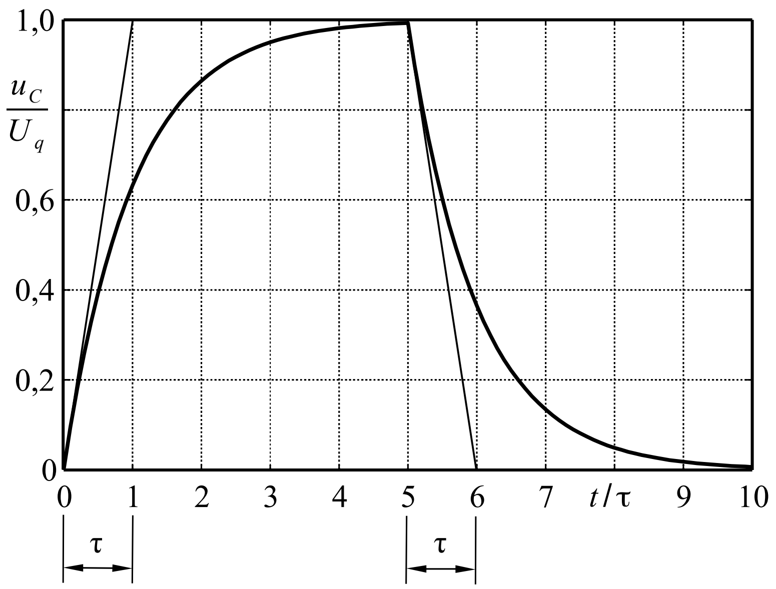
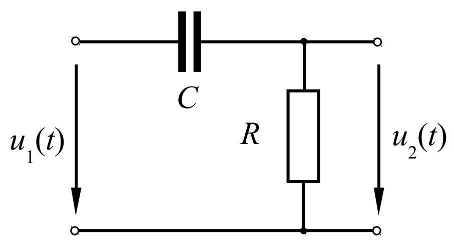


Bild 2.3: Spannungsverlauf $u_C = u_C(t)$ beim Ein- und Ausschalten einer RC-Schaltung

2.2.4 Differenzier- und Integrierschaltungen

Bei geeigneter Dimensionierung der Schaltelemente kann man die Differential- oder Integralkurve einer periodischen Wechselspannung beliebiger Kurvenform, die an ein RC- oder RL-Glied angelegt wird, z.B. in der Impulstechnik, erzeugen. Die nachstehend angegebenen Ableitungen für die RC-Schaltung lassen sich durch Anwenden von Dualitätsbeziehungen auf die RL-Schaltung übertragen.

a) Differenzierglied



Bedingung: $\tau \ll T$

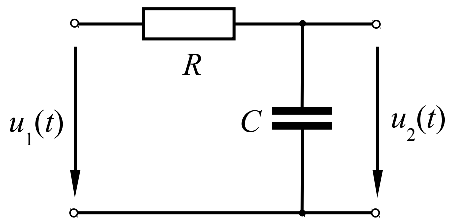
Bild 2.4: RC-Schaltung als Differenzierglied

$$u_1 = u_2 + \frac{1}{\tau} \int u_2 \, \mathrm{d}t \qquad (2.29)$$

Wegen $\tau \ll T$ kann der erste Summand vernachlässigt werden, und man erhält nach der Differentiation nach t letztlich

$$u_2 \approx \tau \frac{\mathrm{d}u_1}{d\,t} \quad . \tag{2.30}$$

b) Integrierglied



Bedingung: $\tau \gg \mathrm{T}$

Bild 2.5: RC-Schaltung als Integrierglied

$$u_1 = u_2 + \tau \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} \tag{2.31}$$

Vernachlässigt man den ersten Summanden (wegen $\tau \gg \mathrm{T}$), so erhält man nach der Integration nach t

$$u_2 = \frac{1}{\tau} \int u_1 \, \mathrm{d}t \quad . \tag{2.32}$$

2.3 Stromkreis mit zwei Speicherelementen (Reihenschwingkreis)

2.3.1 Allgemeine Berechnung des Ausgleichsvorganges

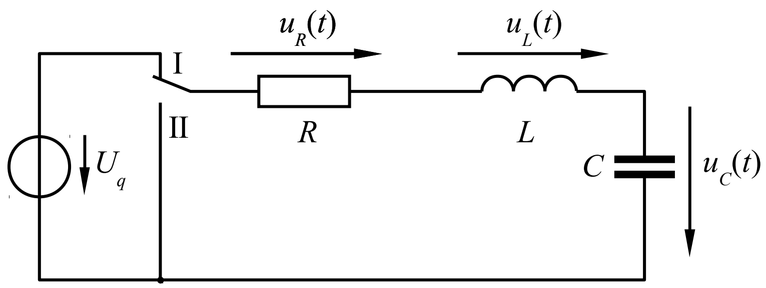


Bild 2.6: Schaltvorgang an einer RLC-Reihenschaltung

Der Maschensatz führt auf Differentialgleichungen 2. Ordnung:

Einschalten (I)		Ausschalten (II)	
Maschengleichung			
$u_L + u_R + u_C = U_q$	(2.33)	$u_L + u_R + u_C = 0$	(2.34)
Differentialgleichung			
$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{U_q}{L\,C}$	(2.35)	$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} u_C = 0$	(2.36)
flüchtiger Anteil			
a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $u_C = k_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + k_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$	(2.37a)	a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $u_C = k_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + k_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$	(2.38a)
b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $u_C = k_1 \mathrm{e}^{\lambda t} + k_2 t \mathrm{e}^{\lambda t}$	(2.37b)	b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $u_C = k_1 \mathrm{e}^{\lambda t} + k_2 t \mathrm{e}^{\lambda t}$	(2.38b)
stationärer Anteil			
$u_C = U_q$	(2.39)	$u_C = 0$	(2.40)
Anfangsbedingungen			
$t=0 \;,\quad u_C = 0 \;,\quad \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$	(2.41)	$t=0 \;,\quad u_C = U_{C0} \;,\quad \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$	(2.42)
Gesamtvorgang			
a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $u_C = U_q \left[1 - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}) \right]$	(2.43a)	a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $u_C = \frac{U_{C0}}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_2 t})$	(2.44a)
b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $u_C = U_q \left[1 - (1 - \lambda t) \mathrm{e}^{\lambda t} \right]$	(b)	b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $u_C = U_{C0} (1 - \lambda t) \mathrm{e}^{\lambda t}$	(b)
mit $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$			

Der zeitliche Verlauf von u_C ist damit abhängig von den Schaltelementen R, L und C. Der Parameter λ entscheidet über die Form des Ausgleichsvorganges, da sich für reelles λ Exponentialfunktionen, für komplexes λ jedoch Kreisfunktionen, d.h. periodische Ausgleichsvorgänge ergeben. Maßgebend ist dafür die Diskriminante

$$D = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \frac{R}{2L} \sqrt{1 - \left(\frac{2R_K}{R}\right)^2} \quad , \tag{2.45}$$

wobei $R_K = \sqrt{\frac{L}{C}}$ den Kennwiderstand des Schwingkreises darstellt.

2.3.2 Formen des flüchtigen Vorganges

a) Aperiodischer Fall

Es gilt die Beziehung $R > 2R_K$, d.h. $\lambda_{1,2}$ ist reell und negativ. Der Ausgleichsvorgang besteht aus der Überlagerung von zwei e-Funktionen mit verschiedenen Zeitkonstanten (τ_{RC} und τ_{RL}). Die Abklingdauer wird im wesentlichen durch $\tau_{RC} = RC$ bestimmt. In erster Näherung verhält sich der Schwingkreis so, als wäre L nicht vorhanden ($\tau_{RC} > 4\tau_{RL}$).

b) Aperiodischer Grenzfall

Es gilt $R = 2R_K$ oder $\tau_{RC} = 4\tau_{RL}$. Damit ergibt sich

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{R}{2L} \quad . \tag{2.46}$$

Beim aperiodischen Grenzfall wird die kürzeste Abklingzeit t_b erreicht.

c) Periodischer Fall

Infolge von $R < 2R_K$ erhält man für $\lambda_{1,2}$ konjugiert komplexe Werte. Durch Einführen von

Dämpfungsfaktor $$\delta = \frac{R}{2L} \quad , \tag{2.47}$$

Resonanzkreisfrequenz (bei $R = 0$) $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{und} \tag{2.48}$$

Eigenkreisfrequenz (bei $R \neq 0$) $$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{2.49}$$

ergibt sich

$$\lambda_{1,2} = \delta \pm j\omega \quad . \tag{2.50}$$

Bei Benutzung der Eulerschen Formeln findet man als endgültige Lösung für den

Einschaltvorgang (I)

$$u_C = U_q \left[1 - \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{\delta}{\omega}\right) \right] \quad , \tag{2.51}$$

und den

Ausschaltvorgang (II)

$$u_C = U_{C0} \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{\delta}{\omega}\right) \quad . \tag{2.52}$$

Der Ausgleichsvorgang $u_C(t)$ verläuft als gedämpfte Schwingung. Die Größe der Dämpfung wird durch den Dämpfungsfaktor δ oder das logarithmische Dekrement Λ beschrieben:

$$\Lambda = \ln \frac{u_C(t)}{u_C(t+T)} = \delta T = \frac{R\pi}{\omega L} \approx \frac{\pi}{\varrho} \qquad \text{mit} \quad \varrho = \frac{\omega_0 L}{R} \quad \text{... Schwingkreisgüte} \quad . \tag{2.53}$$

Nach der **Zeit t_b** ist die **Amplitude auf 5 % ihres Ausgangswertes** zurückgegangen:

$$e^{-\delta t_b} = 0{,}05 \quad \text{, d.h.} \quad \delta t_b = \ln 20 \approx 3 \quad ; \tag{2.54}$$

daraus folgt für die Beruhigungszeit t_b

$$t_b \approx \frac{3}{\delta} = \frac{3T}{\Lambda}$$

und für die Anzahl der Schwingungen bis zum Abklingen

$$n_0 = \frac{t_b}{T} \approx \frac{3}{\Lambda} = \frac{3\rho}{\pi} \approx \rho \quad . \tag{2.55}$$

Bild 2.7 zeigt den zeitlichen Verlauf von u_C für verschiedene Werte der Dämpfung.

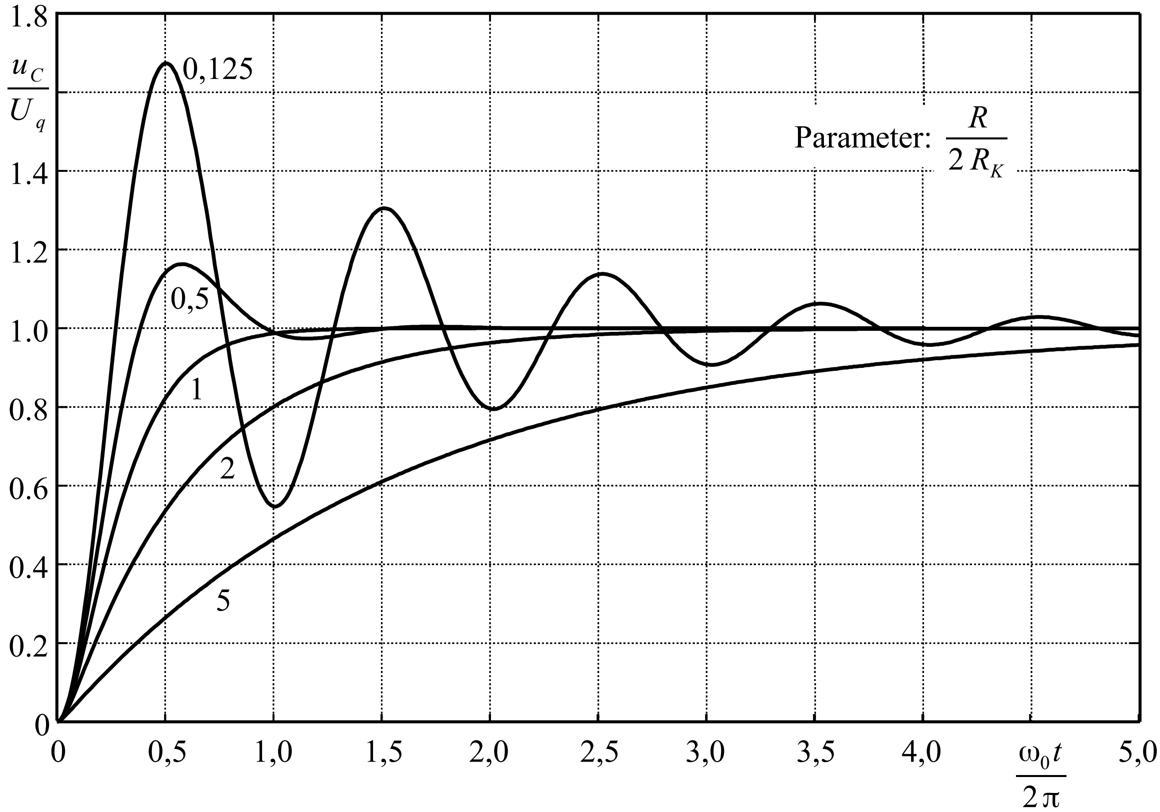


Bild 2.7: Einschaltvorgang einer RLC-Schaltung für verschiedene Werte der Dämpfung

2.4 Messmethode

Da die Zeitkonstanten üblicherweise in der Größenordnung von Milli- bzw. Mikrosekunden liegen, können die Ausgleichsvorgänge nur oszillographisch beobachtet werden. Die zu untersuchenden Schaltungen werden von einer Rechteckspannung periodisch angestoßen, die gleichzeitig den Zeitmaßstab für das Schirmbild liefert.

3 Vorbereitungsaufgaben

3.1 Eine Reihenschaltung von $R = 5\ \text{k}\Omega$ und $C = 20\ \text{nF}$ wird durch eine Rechteckspannung $U = 1\ \text{V}/\ 1\ \text{kHz}$ angestoßen.

Skizzieren Sie maßstäblich die Funktionen $u_C(t)$ und $u_R(t)$ über eine Periode T der Rechteckspannung! Tragen Sie in das Diagramm die Zeikonstante τ für den Ein- und den Ausschaltvorgang ein!

3.2 Entwerfen Sie die Schaltskizzen für die Differentiation und die Integration einer Rechteckspannung durch eine RC-Reihenschaltung! Stellen Sie die differenzierte und die integrierte Spannung qualitativ als Funktion der Zeit dar!

3.3 Skizzieren Sie mit Hilfe von Gleichung ((2.51) maßstäblich $\frac{u_C}{U_q} = f\left(\frac{\omega t}{2\pi}\right)$ für die gegebenen Werte $U_q = 1\ \text{V}$, $R = 50\ \Omega$, $L = 20\ \text{mH}$ und $C = 0{,}5\ \mu\text{F}$! Ermitteln Sie T, t_b und ϱ!

4 Messaufgaben

Stromkreis mit Widerstand R und Kondensator C

4.1 Oszillographieren Sie den zeitlichen Verlauf von $u_C(t)$ und $u_R(t)$ für verschiedene Werte von R (Schirmbilder drucken bzw. speichern!).

Ermitteln Sie daraus die Zeitkonstante τ und vergleichen Sie die Werte mit den errechneten.

4.2 Benutzen Sie die RC-Schaltung als Differenzier- bzw. Integrierglied, indem Sie sicherstellen, dass die Bedingung $T \gg \tau$ bzw. $T \ll \tau$ erfüllt ist.

Oszillographieren Sie den zeitlichen Verlauf von Ein- und Ausgangsspannung für verschiedene Formen der Eingangsspannung (Schirmbilder drucken bzw. speichern!).

Stromkreis mit Widerstand R, Kondensator C und Spule L

4.3 Variieren Sie R und drucken bzw. speichern Sie die verschiedenen Schirmbilder für $u_C(t)$. Ermitteln Sie den aperiodischen Grenzfall durch Versuch und Berechnung.

4.4 Bestimmen Sie für zwei unterschiedliche periodische Fälle **messtechnisch** die Beruhigungszeit t_b!

4.5 Bestimmen Sie für den periodischen Fall **messtechnisch** das logarithmische Dekrement sowie **rechnerisch** daraus die Güte ϱ in Abhängigkeit von R und stellen Sie diese Funktionen graphisch dar.