Determinanten

Definition: Jeder n-reihigen quadratischen Matrix $\underline{A}$ ist eindeutig eine Zahl det $\underline{A}$, die **Determinante** von $\underline{A}$, wie folgt zugeordnet:

n=1: $\det(a_{11}) := a_{11}$,

n≥1: $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} := a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} \ .$$

Dabei ist $\boxed{A_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det \underline{U}_{ij}}$ die sogenannte **Adjunkte** des Elementes a_{ij}.

$\underline{U}_{ij}$ ist die (n–1)-reihige **Untermatrix**, die durch **Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte** von A entsteht, $\det \underline{U}_{ij}$ wird als **Unterdeterminante** bezeichnet.

Bezeichnung: $$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (n \geq 2)$$

Interpretation: det $\underline{A}$ ist der (vorzeichenbehaftete) **Inhalt des** von den Spaltenvektoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ der Matrix $\underline{A}$ aufgespannten **Parallelotops** (n=2 … **Parallelogramm-Flächeninhalt**, n=3 … **Spat-Volumen**).

Einige Rechenregeln: $\boxed{\det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \det \underline{A} \cdot \det \underline{B}}$, $\boxed{\det \underline{A}^T = \det \underline{A}}$.

Aus der letzten Gleichung ergibt sich, dass die folgenden, für die Zeilen formulierten Eigenschaften sinngemäß auch für die Spalten gelten.

Eigenschaften der Determinante:

(E1)	$\underline{B}$ gehe aus $\underline{A}$ durch Vertauschen zweier Zeilen hervor. Dann gilt $\det \underline{B} = -\det \underline{A}$.
(E2)	Es gilt det $\underline{A}$ = 0, falls zwei Zeilen elementweise proportional sind bzw. falls alle Elemente einer Zeile gleich 0 sind.
(E3)	Falls alle Elemente <u>einer</u> Zeile mit dem Faktor λ multipliziert werden, so wird der Wert der Determinante mit λ multipliziert.
(E4)	Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn das λ-fache einer Zeile elementweise zu einer <u>anderen</u> Zeile addiert wird.
(E5)	**Entwicklungssatz** $\boxed{\det \underline{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}}$ … Entwicklung nach der i-ten Zeile (i = 1, …, n) $\boxed{\det \underline{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}}$ … Entwicklung nach der j-ten Spalte (j = 1, …, n)

Berechnung von Determinanten:

n=2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}} - \underline{a_{12}a_{21}}$

n=3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

Regel von SARRUS
(nur für dreireihige Determinanten!)

$$= \underline{(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}$$

$$- \underline{(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}})$$

n beliebig: Prinzip … Nullen erzeugen mit E4,
anschließend Enwicklungssatz (E5) usw.

Beispiel:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & & \ast & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -5 & -4 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \overset{1)}{=} \begin{vmatrix} 19 & 7 & 3 & -1 \\ -32 & -8 & -5 & -4 \\ -26 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{2)}{=} \underbrace{(-1)\cdot(-1)^{4+3}}_{1} \begin{vmatrix} 19 & 7 & -1 \\ -32 & -8 & -4 \\ -26 & -7 & 2 \end{vmatrix} \ast$$

$$\overset{3)}{=} \begin{vmatrix} 19 & 7 & -1 \\ -108 & -36 & 0 \\ 12 & 7 & 0 \end{vmatrix} \overset{4)}{=} \underbrace{(-1)\cdot(-1)^{1+3}}_{-1} \begin{vmatrix} -108 & -36 \\ 12 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{5)}{=} (-1)\cdot(-36) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 7 \end{vmatrix} = 36\cdot(3\cdot 7 - 1\cdot 12) = 36\cdot 9 = \underline{\underline{324}}$$

1) Mit (E4) Nullen erzeugen (z.B.) in 4. Zeile mit der Spalte 3 als Arbeitsspalte ($\ast$): $s_1^{(neu)} := s_1^{(alt)} + 6s_3$, $s_2 := s_2 + 2s_3$

2) Entwicklungssatz (E5) für Zeile 4 anwenden (Element mal Adjunkte)

3) (Regel von SARRUS anwenden oder) mit (E4) Nullen erzeugen (z.B.) in der 3. Spalte mit der Zeile 1 als Arbeitszeile ($\ast$): $z_2 := z_2 - 4z_1$, $z_3 := z_3 + 2z_1$

4) Entwicklungssatz (E5) für Spalte 3 anwenden

5) Optionale Vereinfachung für die Handrechnung: In Umkehrung der Eigenschaft (E3): Faktor –36 aus der 1. Zeile herausziehen