Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten

Es seien $k, n, n_0 \in N, k \ge 1, n \ge n_0 + k$. Dann heißt die Gleichung

$$\boxed{x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k} + h_n} \qquad (1)$$

lineare Differenzengleichung (oder lineare Rekursionsgleichung) mit konstanten Koeffizienten. Eine Indexverschiebung ist möglich (z.B. um k)

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + \ldots + a_k x_n + h_{n+k}.$$

Wichtig ist die Differenz zwischen höchstem und niedrigstem Index von x (= Ordnung der Differenzengleichung).

Die Gleichung (1) heißt homogen, falls $h_n = 0$ (für alle n) sonst inhomogen.

<u>Zur Lösung von (1):</u>

A) Bestimmung der allgemeinen Lösung $x_n^{(h)}$ der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\boxed{x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k}} \qquad (2)$$

Diese allgemeine Lösung von (2) lässt sich stets in der Gestalt

$$\boxed{x_n^{(h)} = C_1 x_n^{(1)} + \ldots + C_k x_n^{(k)}}$$

mit k speziellen Lösungen $x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(k)}$ von (2) schreiben. Mit dem Ansatz

$x_n^{(h)} = \lambda^n$ $(\lambda \ne 0)$ erhält man über die charakteristische Gleichung

$$\boxed{\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k} \qquad (3)$$

bei k verschiedenen Lösungen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ von (3):

$\boxed{x_n^{(h)} = C_1 \lambda_1^n + \ldots + C_k \lambda_k^n}$. Falls z. B. λ_1 2-fach (3-fach ...) auftritt,

dann $x_n^{(h)} = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_1^n n + (C_3 \lambda_1^n n^2 \ldots)$.

B) Bestimmung einer Partikulärlösung $x_n^{(p)}$ der inhomogenen Gleichung.

Dafür gibt es in wichtigen Fällen spezielle Ansätze mit unbestimmten Koeffizienten $A, A_0, \ldots$ (s. Tabelle unten). Diese Koeffizienten sind durch Einsetzen in (1) und Koeffizientenvergleich zu ermitteln.

Inhomogenität h_n	Bedingung	Ansatz für $x_n^{(p)}$
Polynom in n, Grad $r \ge 0$	λ=1 ist keine*) Lösung von (3)	Polynom gleichen Grades mit unbestimmten Koeffizienten
Potenzfunktion b^n	λ=b ist keine*) Lösung von (3)	$x_n^{(p)} = A \cdot b^n$

*) bei ρ-facher Lösung ist der Ansatz mit n^ρ zu multiplizieren

C) Allgemeine Lösung von (1): $\boxed{x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}}$

D) Anfangsbedingungen (AB) erfüllen (erste k Glieder vorgegeben).