Mathematik I

Vorlesungsskript

Mitschrift von Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von Herrn Michael Meinhold
& Prof. Dr. Fabian Schwarzenberger

29. März 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Elementare Grundlagen

1.1 Aussagen und Grundzüge der Logik

1.2 Mengen

1.3 Zahlen

1.4 Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

1.5 Lineare Algebra

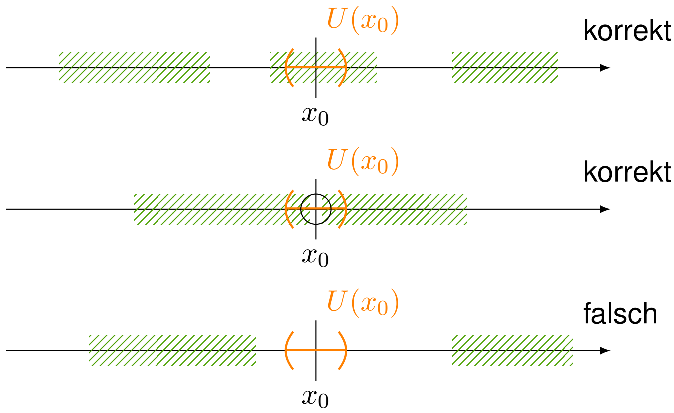
2 Folgen, Reihen, Grenzwerte

2.1 Zahlenfolgen

2.2 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

2.2.1 Grenzwerte von Funktionen

Def. 1: Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und es existiere eine Umgebung $U(x_0)$ mit $U(x_0)\{x_0\} \subseteq Db(f)$.

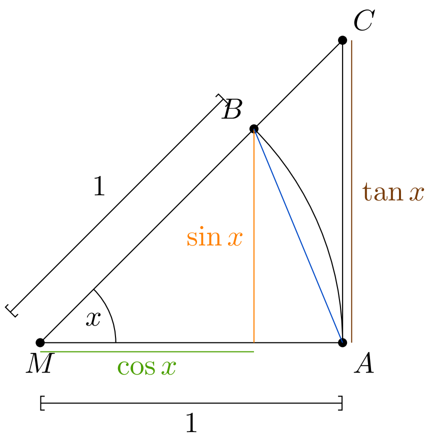


$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda$:⇔ Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$, $x_n \neq x$ (für alle n) und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.
Anschaulich: $f(x)$ strebt gegen a, wenn x gegen x_0 strebt.

Bemerkung: Die Stelle x_0 muss *nicht* selbst zum Definitionsbereich gehören.

Bsp. 1:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$



$F_{\triangle MAB} \leq F_{Sektor\ MAB} \leq F_{\triangle MAC}$

$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \quad \Big| \cdot \frac{2}{\sin x}$

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$
$$\Leftrightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Analog zu Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen gilt:

Satz 1: Es gelte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Dann:

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x) = a + b$
- $\lim\limits_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot a$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$)

Bsp. 2:

a.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3 - 7x + 4}{3\cos x} = \dfrac{4}{3}$

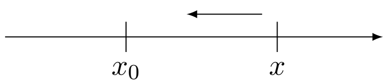
b.) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \dfrac{"0"}{0}$ Satz nicht anwendbar.

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} x + 2 = 5$

(andere Möglichkeit mit $\dfrac{"0"}{0}$ umzugehen lernen wir später)

Def. 2:

a.) rechtseitiger Grenzwert:
$\lim\limits_{x\searrow x_0} f(x) = a$:⇔ für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$ und $x_n > x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.



Andere Schreibweise: $\lim\limits_{x\searrow x_0} = \lim\limits_{x\to x_0+0}$

b.) linkseitiger Grenzwert:
$\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) = a$:⇔ analog rechtsseitiger Grenzwert

c.) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$:⇔ für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \infty$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

d.) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$:⇔ analog s.o.

Diskussion: Uneigentliche Grenzwerte:

Wir schreiben $\lim\limits_{\bullet} f(x) 0 \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$ bei bestimmter Divergenz der Funktionswerte für:

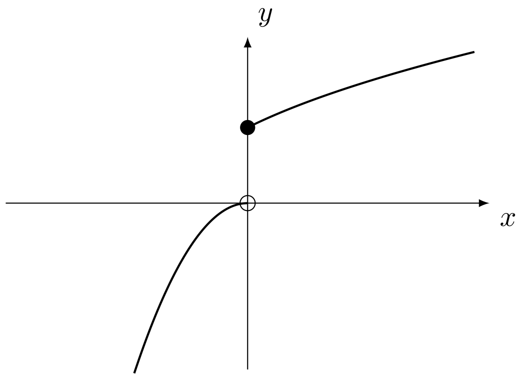
$\bullet \begin{cases} x \to x_0 \\ x \nearrow x_0 \\ x \searrow x_0 \\ x \to \infty \\ x \to -\infty \end{cases}$

Satz 2:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow x_0} = a$

Bsp. 3: (einseitiger Grenzwert)

$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$



$\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 0, \; \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht!

Bsp. 4:

$\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \sin\left(\frac{4}{x}\right) = "\infty \cdot 0"$

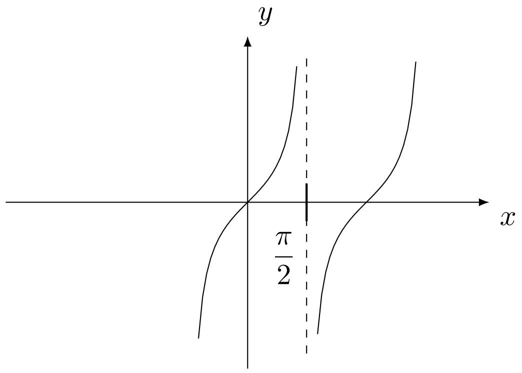
$\overset{u=\frac{4}{x}}{=} \lim\limits_{u \searrow 0} \frac{4}{u} \sin(u) = 4$

Bsp. 5:

$\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

$\lim\limits_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$

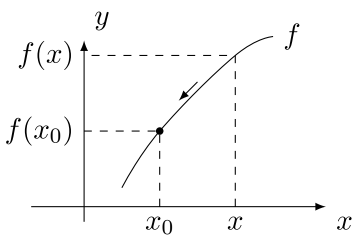
Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube



2.2.2 Stetigkeit von Funktionen

Def. 3: Sei $f: Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in Db(f)$ gegeben.
Es heißt f:

a.) stetig in x_0 falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt
(also $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, d.h. Limes und Funktion kann vertauscht werden).



b.) linksseitig stetig in x_0, falls $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

c.) rechtsseitig stetig in x_0, falls $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Bsp. 6:

a.) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig, da $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$.
Aber $\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ stetig.
Bezeichnung: hebbare Unstetigkeit.
ABB16

b.) $f_2(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da $\lim\limits_{x \nearrow 0} f_2(x) \neq f_2(0) \neq \lim\limits_{x \nearrow 0} f_2(x)$
Bezeichnung: endlicher Sprung.
ABB17

c.) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da $\lim\limits_{x \nearrow 0} f_3(x) = \infty \neq f_3(0)$.
ABB18

d.) $f_3(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ nicht existiert.
ABB19

Def. 4: Die Funktion $f : DB(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ heißt

a.) *in einem Intervall $I \subset Db(f)$ stetig*, falls f an jeder inneren Stelle $x_0 \in I$ stetig ist und in evtl. zu I gehörenden Randpunkten einseitig stetig ist.

b.) *stetig*, falls f in allen Punkten $x_0 \in Db(f)$ stetig ist.

Bemerkung: Jede der in **??** und **??** betrachteten Funktionen ist stetig.

Bsp. 7: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig.

Satz 3: Sind f und g stetig in x_0, so sind auch $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g,\ f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$(falls $g(x_0) \neq 0$) stetig in x_0.

Satz 4: (Stetigkeit und Verknüpfungen)
Seien $g : Db(g) \to \mathbb{R}$ und $f : Db(f) \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $Wb(g) \subseteq Db(f)$, dann gilt:
Ist g stetig in x_0 und f stetig in $g(x_0)$, so ist $f \circ g : Db(g) \to \mathbb{R},\ (f \circ g)(x) = f(g(x))$ stetig in x_0.

Satz 5: (Zwischenwertsatz)
Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]Db(f)$. Falls $f(a) \cdot f(b) < 0$ (also haben unterschiedliche Vorzeichen), so gilt $\exists x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = 0$
ABB20

Satz 6: Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$. Dann nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Diskussion:

a.) $f(x) = \tan x$ nimmt auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ kein Maximum an.
ABB21

b.) $f(x) = \begin{cases} \arctan\frac{1}{x} & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ nicht stetig und nimmt kein Maximum auf $[-1, 1]$ an.
ABB22

2.3 Potenzreihen

Def.: Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n}$ Potenzreihe mit dem Mittelpunkt x_0.

Diskussion:

- Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ ist die Potenzreihe eine feste Reihe.
- Konvergenzbereich $K := \{x \in \mathbb{R}|$Potenzreihe ist konvergent$\}$
- Für jedes $x \in K$ existiert der Summenwert der Potenzreihe. Die Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ heißt Grenzfunktion der Potenzreihe.

Zur Bestimmung des Konvergenzbereichs nutz man Satz 10 und 11 aus **??** und erhält absolute Konvergenz in einem um x_0 liegendem Konvergenzintervall $I := (x_0 - r, x_0 + r)$.
Wie r bestimmt wird liefert:

Satz 1: Sei (a_n) Zahlenfolge mit $r := \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{1}{2qrt[n]|a_n|}$ existiert.
Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x-x_0| < r \\ \text{divergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x-x_0| > r \end{cases}$.

Diskussion:

- Verwechslungsgefahr:
  - Satz 10 und 11 betrachten (Zahlen-)Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$
  - Satz 1 betrachtet Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, wobei a_n ein Faktor vor $(x-x_0)^n$ ist.
- Falls der Grenzwert r aus Satz 1 nicht existiert, so gibt es trotzdem einen Konvergenzradius. Den gilt es auf andere Weise zu betrachten/ermitteln.
- Satz 1 sagt nichts über das Verhalten an den Randpunkten aus $\to$ gesonderte Untersuchung nötig.

Bsp. 1:

a.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, d.h. $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, ...$
$r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}} = \lim\limits_{n\to\infty} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
$\Rightarrow$ Konvergenzintervall $I = (-1, 1)$
Randpunkte:
$x = -1 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ bedingt konvergent (alternierenden harmonische Reihe)
$x = 1 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent
$\Rightarrow$ Konvergenzbereich: $K = [-1, 1)$

b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, d.h. $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n!}$

$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

$\Rightarrow r = \infty$

d.h. die Reihe ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bezeichnung: *beständige Konvergenz*

c.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} + ...$ d.h. $x_0 = 0$, $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ungerade} \end{cases}$

Satz 1 ist aber nicht unmittelbar anwendbar.

Substitution $u := x^2$ liefert aber $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{(2n)!}$ mit $u_0 = 0$, $b_n = \frac{1}{(2n)!}$ $(\sum b_n(u-u_0)^n)$

$\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+2)\cdot(2n+1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

$\Rightarrow r_u = \infty$ (Konvergenzradius für die Substituierte Reihe)

$\Rightarrow r_x =$ "$\sqrt{\infty}$" $= \infty$ (Konvergenzradius für die untersuchte Funktion)

Im Konvergenzbereich K wird dadurch eine Potenzreihe eine Funktion dargestellt, die Grenzfunktion (siehe vorhergehende Diskussion).

Bsp. 2:

a.) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $x \in (-1,1)$ (geometrische Reihe)

b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$ (Beweis später)

Satz 2: Die *Grenzfunktion* jeder Potenzreihe ist *im Konvergenzbereich stetig*.

3 Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen

3.1 Grundbegriffe

Tangentenproblem
ABB38
Gegeben: $y = f(x)$
Gesucht: Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$

- Zunächst Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_0, f(x_0))$
- Dann betrachten wir $x_1 \to x_0$
- Damit geht Sekante über in die Tangente.
  Außerdem geht φ in α über.

$$\tan\alpha = \lim_{\varphi\to\alpha} \tan\varphi = \lim_{x_1\to x_0} \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}}$$

Def. 1: Die Funktion $f : Db(f) \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle x_0 (mit $U(x_0) \subseteq Db(f)$) differenzierbar, falls der Grenzwert $\boxed{f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$ existiert.
$f'(x_0)$ heißt dann *1. Ableitung* von f an der Stelle x_0.

Diskussion:

- $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
- Gleichung der Tangente in $(x_0, f(x_0))$ ist $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ($t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) Anstieg der Tangente ist als $m = \tan\alpha = f'(x_0)$
- f in x_0 differenzierbar bedeutet es existiert eine eindeutige Tangente an die Kurve in dieser Stelle.
  z.B. ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar:
  ABB39

Satz 1: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.
Beweis:
Sei f in x_n differenzierbar und (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \to x_0$. Dann gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ existiert.
$\Rightarrow \exists\, K > 0$ mit $\left|\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right| = \dfrac{|f(x_n) - f(x_0)|}{|x_n - x_0|} \leq K$
$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| \leq K \cdot |x_n - x_0| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \Rightarrow f$ ist stetig.

Def. 2: Eine Funktion $f : Db(f) \to \mathbb{R}$
$Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ heißt

a.) differenzierbar im Interval $I \subseteq Db(f)$, falls f an jeder inneren Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist und in eventuellen Randpunkten einseitig differenzierbar ist.
d.h. $\lim\limits_{x \nearrow x_r}$ bzw. $\lim\limits_{x \searrow x_r} \dfrac{f(x) - f(x_r)}{x - x_r}$ existiert

b.) differenzierbar, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in Db(f)$ differenzierbar ist.

Schreibweise:
Die resultierende Funktion bezeichnen wir mit
$f' : Db(f') \to \mathbb{R}, f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
wobei $Db(f')$ aus allen Punkten $x \in Db(f)$ besteht für welche der genannte Grenzwert existiert.

Def. 3: Sei $f : Db(f) \to \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren rekursiv die n-te Ableitung von f an der Stelle x_0 mittels
$f^{(n)}(x_0) := \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) \quad n = 1, 2, 3, ...$
wobei $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ (unter der Voraussetzung, dass die jeweilige Ableitung existiert).

Bsp. 1: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) : x^n,\ n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left((x+h)^n - x^n\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2}h^2 + ... + \binom{n}{n} h^n - x^n\right) \\
&\xrightarrow{h \to 0} n \cdot x^{n-1}
\end{aligned}$$

d.h. f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Bsp. 2: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \sin(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} && \mid \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \\
&= \frac{2 \cdot \cos\frac{2x+h}{2} \cdot \sin\frac{h}{2}}{h} \\
&= \frac{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} && \mid \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \xrightarrow{h \to 0} 1 \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

Also $f'(x) = \cos x$.
Bemerkung: Ableitung der wichtigsten Grundfunktionen findet man in Formelsammlungen.
Zur Ableitung zusammengesetzter Funktionen lernen wir im später weitere Ableitungsregeln kennen.

3.1.1 Das Differential

ABB 49
$dy = h \cdot \tan\alpha = f \cdot f'(x_0)$

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

Def. 4:

a.) $dy := f'(x_0) \cdot h$ heißt das zur Stelle x_0 und dem Zuwachs $h = \Delta x$ gehörende *Differential* von f.

b.) $\Delta y := f(x_0 + h) - f(x_0)$ heißt die zur Stelle x_0 und dem Zuwachs $h = \Delta x$ gehörende *Differenz* von f.

Diskussion

1.) Δy ist die Änderung der Funktion f, wenn x in $x + h$ übergeht; dy ist die entsprechende Änderung wenn statt f die Tangente an der Stelle x_0 betrachtet wird (Linearisierung).

2.) Für kleine Zuwächse Δx gilt: $\Delta y \approx dy$
d.h. $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$ für kleines Δx (nutzt man in der Fehlerrechnung)

3.) Sei $y = f(x) = x \Rightarrow dy = dx = 1 \cdot h$ also $\boxed{h = \Delta x = dx}$

4.) Damit $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$
Also: 1. Ableitung = Differentialquotient
andere Schreibweise: $f'(x) = \dfrac{d}{dx} f(x)$

5.) Höhere Ableitungen:
$f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{d^n}{dx^n} f(x)$

3.2 Differentiationsregeln

Satz 1: Falls die Ableitungen auf der rechten Seite existieren:

- $(C_1 u(x) + C_2 v(x))' = C_1 u'(x) + C_2 v'(x)$ (Linearität)
- $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ (Produktregel)
- $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$ (Quotientenregel)

Bsp. 1:

a.) $f(x) = 7x^4 + \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 7x^4 + x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} \quad (x > 0)$
$\Rightarrow f'(x) = 28x^3 + \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{2}} = 28x^3 + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

b.) $f(x) = x \cdot \ln x \quad (x \geq 0)$
$\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln x + \dfrac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1$ (Produktregel)

c.) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 2}$
$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{e^x \cdot (x^2 + 2) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \dfrac{e^x (x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2)^2}$ (Quotientenregel)

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

Satz 2: Seien $f : Db(f) \to \mathbb{R},\ g : Db(g) \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $Db(f) \subseteq \mathbb{R},\ Db(g) \subseteq \mathbb{R}$ und

- g bei $x_0 \in Db(g)$ differenzierbar
- f bei $g(x_0) \in Db(f)$ differenzierbar

so gilt:
$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Diskussion: $y = f(\underbrace{g(x)}_{u}) = f(u)$ mit $u = g(x)$

Differentialschreibweise:
$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ (äußere Ableitung · innere Ableitung)

Bsp. 2:

a.) $y = f(x) = \sin \underbrace{3x}_{u}$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 3 = 3\cos 3x$

b.) $y = f(x) = 2^{\tan(3x)} \quad \left(-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}\right)$
Substitution:
$u := \tan 3x$
$v := 3x$
$\Rightarrow y = 2^u,\ u = \tan v$
$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 2^u \cdot \ln 2 \cdot (1 + \tan^2 v) \cdot 3 = 3 \cdot 2^{\tan 3x} \cdot \ln 2 \cdot (1 + \tan^2 3x)$