Komplexe Zahlen

Begriff

Die Menge C der komplexen Zahlen ist eine Obermenge der Menge der reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

1) C enthält eine Zahl i mit $\boxed{i^2 = -1}$ (die sogenannte imaginäre Einheit).

2) Jede komplexe Zahl z lässt sich in der Form

$\boxed{z = x + i \cdot y \;\; (x, y \in R)}$ schreiben (dabei $x = x + i \cdot 0$ für $x \in R$).

Bezeichnungen: x = : Re(z) ... Realteil von z

y = : Im(z) ... Imaginärteil von z.

3) Auf C werden die arithmetischen Operationen Addition (+) und Multiplikation (·) wie folgt erklärt. Es seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ zwei beliebige komplexe Zahlen. Dann:

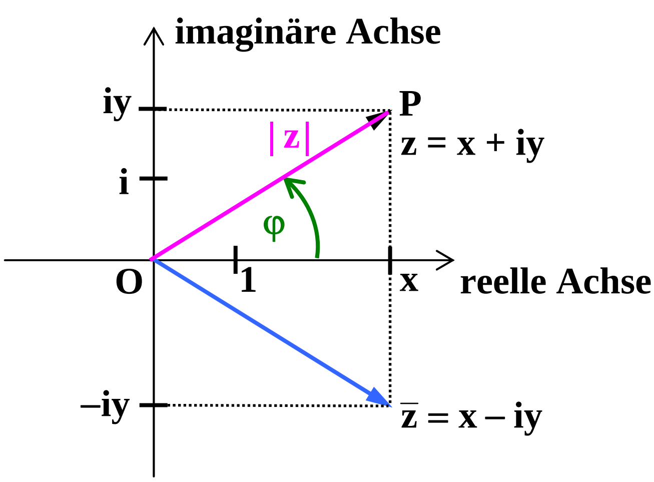
$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Bemerkungen:

- **Mit diesen Operationen wird die Menge C zum Körper der komplexen Zahlen.** **Die arithmetischen Operationen erfolgen unter Beachtung von $i^2 = -1$ wie im Reellen**
- **Auf C gibt es keine natürliche Ordnungsrelation.**

GAUSSsche Zahlenebene



- **Betrag von z: $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$**
- **Hauptargument von z: Orientierter Winkel φ zwischen positiver x- Achse und dem Strahl von O nach P (gemessen auf kürzestem Wege)**

  $\operatorname{Arg} z := \varphi \quad (-\pi < \varphi \le \pi)$

  (Neben-)Argument $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$ (k ganz)
- **Zu z konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = x - iy$**

Berechnung des Hauptarguments einer komplexen Zahl z ≠ 0

$$\boxed{\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{x}{|z|}\right) & \text{falls} \quad y \ge 0 \\ -\arccos\left(\dfrac{x}{|z|}\right) & \text{falls} \quad y < 0 \end{cases}}$$

Division komplexer Zahlen

Erweiterung mit der konjugiert komplexen Zahl c−id des Nenners

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2} \cdot i}$$

Trigonometrische Darstellung

Wegen $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$ und $\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$ erhält man $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Die Anwendung trigonometrischer Additionstheoreme ergibt:

(1) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$,

(2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ und $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2$.

EULERsche Formel: $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$

Exponentielle Darstellung einer komplexen Zahl: $\boxed{z = |z|\, e^{i\varphi}}$ mit $\varphi = \arg z$

Formel von MOIVRE: $\boxed{z^n = |z|^n\, e^{i\varphi n}}$

Lösung quadratischer Gleichungen

Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in R$ besitzt im Falle $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ die reellen

Lösungen $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ (L) .

Praktisches Vorgehen im Falle $\boxed{\frac{p^2}{4} - q < 0}$, d.h. $\frac{p^2}{4} - q = -(q - \frac{p^2}{4})$ mit $q - \frac{p^2}{4} > 0$:

Ebenfalls (L) anwenden und formal $\boxed{\sqrt{-1} = i}$ setzen $\Rightarrow$

$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i \cdot \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}$ (zwei konjugiert komplexe Lösungen).

Kreisteilungsgleichung $\boxed{z^n = b}$, mit $\boxed{\beta := \operatorname{Arg} b}$ ergeben sich

die n Lösungen $\boxed{z_k = \sqrt[n]{|b|}\, e^{i(\beta + k \cdot 360°)/n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)}$

Diese liegen auf einem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{|b|}$ um 0 und teilen ihn in n gleiche Teile.

Anwendung im Wechselstromkreis

Komplexer Widerstand Z im Wechselstromkreis (z.B. 50 Hz , d.h. $\omega = 2\pi \cdot 50 s^{-1}$).
Induktiver Widerstand ωLi (L... Induktivität, Einheit Vs/A = H ... Henry).
Kapazitiver Widerstand $1/(\omega Ci)$ (C... Kapazität, Einheit As/V = F ... Farad).
Auch für die komplexen Widerstände gilt bei einer Reihenschaltung der Teilwiderstände Z_i für den Gesamtwiderstand $Z = \sum Z_i$, bei Parallelschaltung gilt $1/Z = \sum 1/Z_i$.

Es sind dann Re(Z) ... Wirkwiderstand, Im(Z) ... Blindwiderstand,
$|Z|$ ... Scheinwiderstand, Arg(Z) ... Phasenverschiebung.