Das Austauschverfahren

Gegeben sei folgendes System von m linearen Funktionen mit den unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ und den abhängigen Variablen $y_1, y_2, \dots, y_m$:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_{10}$$
$$\dots$$
$$y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + a_{m0}$$

Matrix-Form: $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{a}$ mit $\underline{A} = (a_{ij})$, $\underline{a} = (a_{i0})$, $\underline{x} = (x_j)$, $\underline{y} = (y_i)$ $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$

Tabellenform:

	x_1	x_2	...	x_n	1
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_{10}
...					
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_{m0}

(T1), **Kurzform:**

	$\underline{x}^T$	1
$\underline{y}$	$\underline{A}$	$\underline{a}$

Austauschschritt $y_r \leftrightarrow x_s$ **(Voraussetzung $a_{rs} \neq 0$)**

bedeutet r - te Zeile $y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rs}x_s + \dots + a_{rn}x_n + a_{r0}$ **auflösen nach x_s :**

$$x_s = -\frac{a_{r1}}{a_{rs}}x_1 - \frac{a_{r2}}{a_{rs}}x_2 \dots + \frac{1}{a_{rs}}y_r - \dots - \frac{a_{rn}}{a_{rs}}x_n - \frac{a_{r0}}{a_{rs}}$$ **und einsetzen in die i - te Zeile $(i \neq r)$:**

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{is}x_s + \dots + a_{in}x_n + a_{i0}$$

$$= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{is}\left(-\frac{a_{r1}}{a_{rs}}x_1 - \frac{a_{r2}}{a_{rs}}x_2 \dots + \frac{1}{a_{rs}}y_r - \dots - \frac{a_{rn}}{a_{rs}}x_n - \frac{a_{ro}}{a_{rs}}\right) + \dots + a_{in}x_n + a_{i0}$$

$$= \left(a_{i1} - a_{is}\frac{a_{r1}}{a_{rs}}\right)x_1 + \left(a_{i2} - a_{is}\frac{a_{r2}}{a_{rs}}\right)x_2 + \dots + \frac{a_{is}}{a_{rs}}y_r \ \dots + \left(a_{in} - a_{is}\frac{a_{rn}}{a_{rs}}\right)x_n + a_{io} - a_{is}\frac{a_{ro}}{a_{rs}}$$

Damit ergibt sich eine neue Tabelle (T2), deren Koeffizienten zur Abkürzung mit $a_{ij}{}^*$ bezeichnet sind. Die Austauschregeln zur Berechnung der $a_{ij}{}^*$ ergeben sich aus den obigen Gleichungen für x_s (→ AR1, AR2) und y_i (→ AR3, AR4)

↓ s-te Spalte

	x_1	x_2	...	y_r	...	x_n	1
y_1	$a_{11}{}^*$	$a_{12}{}^*$	...	$a_{1s}{}^*$	...	$a_{1n}{}^*$	$a_{10}{}^*$
...							
r-te Zeile → x_s	$a_{r1}{}^*$	$a_{r2}{}^*$	...	$a_{rs}{}^*$	...	$a_{rn}{}^*$	$a_{r0}{}^*$
...							
y_m	$a_{m1}{}^*$	$a_{m2}{}^*$	...	$a_{ms}{}^*$	...	$a_{mn}{}^*$	$a_{m0}{}^*$

(T2)

Austauschregeln (zur Abkürzung $p := a_{rs}$ ... Pivot)

AR1) Pivot $a_{rs}{}^* = 1/p$	AR2) Pivotzeile $a_{rj}{}^* = a_{rj} / (-p)$ $(j \neq s)$
AR3) Pivotspalte $a_{is}{}^* = a_{is} / p$ $(i \neq r)$	AR4) $a_{ij}{}^* = a_{ij} + a_{is} \cdot a_{rj}{}^*$ $(i \neq r, j \neq s)$ (Rechteckregel)

Zur Beachtung: **Bei der Anwendung der Rechteckregel wird die neue Pivotzeile (ohne Pivot) unter der alten Tabelle als Kellerzeile notiert** **(siehe auch das Beispiel auf Seite 2).**

Lösung linearer Gleichungssysteme

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \dots & \qquad\qquad (1) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Matrix-Form: $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ (1') mit $\underline{A} = (a_{ij})$, $\underline{x} = (x_j)$, $\underline{b} = (b_i)$ $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$

Äquivalente Form: $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} - \underline{b}$ mit $\underline{y} = \underline{o}$, **Tabellenform:**

$$\begin{array}{c|cc} & \underline{x}^T & 1 \\ \hline \underline{y} = \underline{o} & \underline{A} & -\underline{b} \end{array} \qquad (1'')$$

Lösungsprinzip: Austauschverfahren mit Spaltentilgung (AVS)

Fall 1: Alle y_i austauschbar $\Rightarrow$ (1) ist lösbar, Lösung aus letzter Tabelle (TE) ablesbar,
die nicht ausgetauschten x_j (Nichtbasisvariable NBV) sind frei wählbar,
die ausgetauschten x_j (Basisvariable BV) lassen sich durch die NBV ausdrücken

Fall 2: Wenigstens ein y_i ist gegen kein x_j austauschbar, in der 1-Spalte der entsprechenden Zeile stehe die Zahl α, dann
Fall 2a: $\alpha = 0 \Rightarrow$ Zeile (0 = 0) kann gestrichen werden
Fall 2b: $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ Gleichungssystem (1) ist nicht lösbar

---

Beispiel:
$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + x_3 &= 18 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

○ .... Pivot, Beispielrechnung für Rechteckregel:

$$(-5)\cdot 2 + 1 = -9$$

T1	x_1	x_2	x_3	1	P
0	5	−3	1	−18	15
0	1	4	2	3	−10
K	−5	3	*	18	−15

T2	x_1	x_2	1	P
x_3	−5	3	18	−15
0	−9	10	39	−40
K	0,9	*	−3,9	4

T3	x_1	1	P
x_3	−2,3	6,3	−3
x_2	0,9	−3,9	4

T3 ist Endtabelle, Lösung: $x_1 = t$, $x_2 = 0{,}9\,t - 3{,}9$, $x_3 = -2{,}3\,t + 6{,}3$ $(t \in R)$

Probe (optional), s. Seite 3

Bemerkungen:

1. **Anstelle AVS kann auch AVSZ durchgeführt werden, dabei Kellerzeilen nicht mit K markieren, sondern mit den ausgetauschten x_j, am Ende Rückrechnung mit den Kellerzeilen in umgekehrter Reihenfolge durchführen (= GAUSS-Algorithmus)**

2. **Bei einem homogenen System ($\underline{b} = \underline{o}$) kann die 1-Spalte (lauter Nullen!) $\rightarrow$ entfallen. Sie muss am Ende natürlich berücksichtigt werden!**

$$\begin{array}{c|c} & \underline{x}^T \\ \hline \underline{y} & \underline{A} \end{array}$$

Probe beim Austauschverfahren (optional)

Zusatzspalte in T1 so eintragen, dass alle Zeilensummen gleich 1 sind, außer in den Zeilen, die den sogenannten Hilfsvariablen $y_i = 0$ beim Austauschverfahren mit Spaltentilgung entsprechen. Diese Zeilensummen müssen gleich 0 sein. Nach dem Austausch müssen die Zeilensummen = 1 sein, mit Ausnahme der oben genannten y-Zeilen beim AVS und AVSZ (dort Zeilensummen = 0). Beim AVSZ ist auch die Kellerzeile zu überprüfen (Zeilensumme = 1).

Weitere Anwendungen des Austauschverfahrens

(jeweils mit der Starttabelle $\begin{array}{c|c} & \underline{x}^T \\ \hline \underline{y} & \underline{A} \end{array}$ **)**

- **Inverse einer (n,n)-Matrix, vollständiges AV, Fall 1: Alle y_i austauschbar $\Rightarrow$ $\underline{A}$ ist regulär, nach Ordnen von Zeilen und Spalten ist $\underline{A}^{-1}$ aus TE ablesbar, Fall 2: Nicht alle y_i austauschbar $\Rightarrow$ $\underline{A}$ ist singulär**

- **Rang einer Matrix, AVSZ , rang($\underline{A}$) = Anzahl der ausführbaren Austauschschritte**

- **Lineare Unabhängigkeit von Vektoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ überprüfen,**
  Ansatz $x_1\underline{a}_1 + \dots + x_n\underline{a}_n = \underline{o} \Leftrightarrow \underline{A}\,\underline{x} = \underline{o}$, dabei $\underline{A}$ .... Matrix mit den Spaltenvektoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$, AVS, die zu den ausgetauschten x_j (BV) gehörenden $\underline{a}_j$ sind unabhängig, sie bilden eine Basis von L($\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$)

- **Determinante einer (n,n)-Matrix: AVSZ ,**
  det $\underline{A} = 0$, falls rang ($\underline{A}$) < n, anderenfalls gilt
  $$\det \underline{A} = (-1)^{i_1+j_1} p_1 \cdot (-1)^{i_2+j_2} p_2 \cdot \ldots \cdot (-1)^{i_n+j_n} p_n ,$$
  dabei p_k ... Pivot im k-ten Austauschschritt, i_k bzw. j_k ... Zeilen- bzw. Spaltennummer des Pivots in der jeweiligen Tabelle Tk.