

Hausaufgabe 4

Aufgabe 1. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Konvergenzradius folgender Potenzreihen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n n (x+2)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich folgender Potenzreihen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n(n+1)}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

Aufgabe 3. Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n.$$

Treffen Sie (wenn möglich) Aussagen über das Konvergenzverhalten an den Stellen $x = 3$, $x = 2$, $x = 6$ und $x = -10$ falls

- (a) Sie wissen, dass der Konvergenzradius gleich 3 ist;
- (b) Sie wissen, dass die Potenzreihe für $x = 4$ konvergiert und für $x = 1$ divergiert;
- (c) Sie wissen, dass $0 \leq a_n \leq \frac{n}{5^n}$ für alle n gilt.

Aufgabe 4. Nutzen Sie die Summenformel für die geometrische Reihe um die Funktion

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

als Grenzfunktion einer Potenzreihe darzustellen.

Aufgabe 5. Nutzen Sie die Definition der ersten Ableitung um f' zu bestimmen, falls $f : \text{Db}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist durch

(a) $f(x) := \cos(x)$ mit $\text{Db}(f) = \mathbb{R}$,

(b) $f(x) := \sqrt{x}$ mit $\text{Db}(f) = [0, \infty)$.

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \text{Db}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $\text{Db}(f) \subset \mathbb{R}$ größtmöglich) an der Stelle $x = 2$ stetig und differenzierbar ist.

(a) $f(x) := \begin{cases} ax^2 - 4 & \text{falls } x \leq 2 \\ (a+b)x + b & \text{falls } x > 2 \end{cases}$

(b) $f(x) := \begin{cases} a\sqrt{x} - b & \text{falls } x \leq 2 \\ a \sin(\pi/x) + \sqrt{2} \cdot x & \text{falls } x > 2 \end{cases}$

Aufgabe 7. Bestimmen Sie für folgende Funktionen jeweils die erste Ableitung auf ihrem größtmöglichen Definitionsbereich:

(a) $f(x) = \sqrt{x^4 \sqrt{x^3}}$

(b) $f(x) = e^{2x^4}$

(c) $f(x) = \frac{x^3 - \sin(2x)}{x^2 + \cos(3x)}$

(d) $f(x) = \sqrt{4 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} + 2$

(e) $f(x) = (x + \frac{1}{2}) \cdot \ln(2x + 1)$

(f) $f(x) = \frac{3}{\sin^2(x)} - \frac{5}{\sin(x)}$

(g) $f(x) = x^x$

(h) $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

(i) $f(x) = \ln(a + x + \sqrt{2ax + x^2})$