



Theoretische Informatik

Vorlesungsskript

Mitschrift von Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von Dr. Boris Hollas

12. April 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Automaten und Formale Sprachen	4
1.1 Reguläre Sprachen	4
1.1.1 Deterministische endliche Automaten (DFA)	4
1.1.2 Nichtdeterministischer endliche Automaten (NFA)	6
1.1.3 Umwandlung eines NFA in einen DFA	6
1.1.4 Reguläre Ausdrücke	7
1.1.5 Das Pumping-Lemma	8
1.2 Kontextfreie Sprachen	10
1.2.1 Kellerautomaten (PDA)	10
1.2.2 Kontextfreie Grammatiken	11

Inhalte

Grundlage: Grundkurs Theoretische Informatik [1]

- Formale Sprachen
 - Reguläre Sprachen
 - ♦ Endliche Automaten
 - ♦ Reguläre Ausdrücke
 - Nichtreguläre Sprachen
 - Kontextfreie Sprachen
 - ♦ Kellerautomaten
 - ♦ Grammatiken
- Berechenbarkeit
 - Halteproblem
- Komplexitätsklassen
 - P
 - NP
 - NP -vollständige Probleme

1 Automaten und Formale Sprachen

Def.: Ein Alphabet ist eine Menge $\Sigma \neq \emptyset$ (Symbole in Σ – müssen nicht einzelne Buchstaben sein, auch Wörter usw. [bspw. „if“ oder „else“ im Alphabet der Programmiersprache C]).

Def.: Für $w_1, \dots, w_n \in \Sigma$ ist $w = w_1 \dots w_n$ ein Wort der Länge n .

Σ^n beschreibt alle Worte mit der Länge genau n

Das Wort ε ist das *leere Wort*.

Die Menge aller Wörter bezeichnen wir mit Σ^* (einschließlich dem leeren Wort).

Bsp.: $\Sigma = \{a, b, c\} \rightarrow \Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, aaa, \dots\}$

Def.: Für Wörter $a, b \in \Sigma^*$ ist ab die Konkatenation dieser Wörter.

Für ein Wort w ist w^n die n -fache Konkatenation von w , wobei $w^0 = \varepsilon$.

Bemerkung: Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt $\varepsilon w = w = w\varepsilon$. ε ist also das neutrale Element der Konkatenation.

Def.: Eine *formale Sprache* ist eine Teilmenge von Σ^* .

Def.: Für Sprachen A, B ist $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ sowie $A^n = \prod_{i=1}^n A$, wobei $A^0 = \{\varepsilon\}$.

Bemerkung: $\emptyset, \varepsilon, \{\varepsilon\}$ sind unterschiedliche Dinge (leere Menge, leeres Wort, Menge mit leerem Wort).

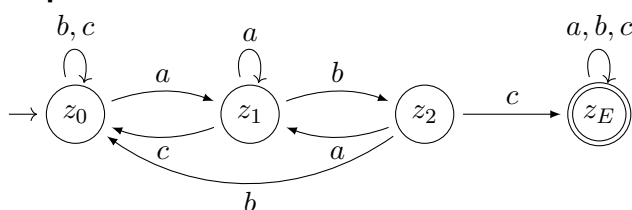
Bemerkung: Σ^* lässt sich ebenfalls definieren durch $\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$.

Ferner ist $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\varepsilon\}$.

1.1 Reguläre Sprachen

1.1.1 Deterministische endliche Automaten (DFA)

Bsp.:

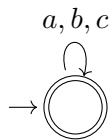


(Pfeil zeigt auf Startzustand, Endzustand ist doppelt umrandet)

Dieser DFA akzeptiert alle Wörter über $\Sigma = \{a, b, c\}$, die abc enthalten.

Deterministisch: Es gibt genau ein Folgezustand. Von jedem Knoten aus gibt es genau eine Kante für jedes Zeichen, nicht mehrere und nicht keine.

Bsp.:

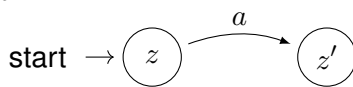


Dieser DFA erkennt die Sprache $\{a, b, c\}^*$.

Def.: Ein DFA ist ein Tupel $\mathcal{M} = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$

- Z : Menge der Zustände
- Σ : Eingabealphabet
- δ : Überföhrungsfunktion $Z \times \Sigma \rightarrow Z$. Dabei bedeutet $\delta(z, a) = z'$, dass \mathcal{M} im Zustand z für das Zeichen a in den Zustand z' wechselt.
- $z_0 \in Z$: Startzustand
- E : Menge der Endzustände

δ :



Def.: Die erweiterte Überföhrungsfunktion $\hat{\delta} : Z \times \Sigma^* \rightarrow Z$ ist definiert durch

$$\hat{\delta}(z, w) = \begin{cases} z & \text{für } w = \varepsilon \\ \hat{\delta}(\delta(z, a), x) & \text{für } w = ax \text{ mit } a \in \Sigma, x \in \Sigma^* \end{cases}$$

Dazu vergleichbarer C-Code:

```

1 int  $\hat{\delta}$ (int z, char* w){
2     if ( strlen(w) == 0 )
3         return z;
4     else
5         return  $\hat{\delta}(\delta(z, w[0]), w[1])$ ;

```

Veranschaulichung:

ABB4

Die erweiterte Überföhrungsfunktion bestimmt den Zustand nach dem vollständigen Lesen eines Wortes.

Bsp.:

ABB5

$$\begin{aligned}
 \hat{\delta}(z_0, aaba) &= \hat{\delta}(\delta(z_0, a), aba) = \\
 \hat{\delta}(z_0, aba) &= \hat{\delta}(\delta(z_0, a), ba) = \\
 \hat{\delta}(z_0, ba) &= \hat{\delta}(\delta(z_0, b), a) = \\
 \hat{\delta}(z_E, a) &= \hat{\delta}(\delta(z_E, a), \varepsilon) = \\
 \hat{\delta}(z_E, \varepsilon) &= z_E
 \end{aligned}$$

Die von \mathcal{M} akzeptierte Sprache ist $L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(z_0, w) \in E\}$

1.1.2 Nichtdeterministischer endliche Automaten (NFA)

ABB23

NFA, der alles akzeptiert, was *abc* enthält:

ABB24

Beispiel: Wort *abaabcab*

Beispiel: NFA, der alle Wörter akzeptiert, die auf 001 enden:

ABB25

Akzeptierte Worte unter anderem: 01011001, 001001

Ein Wort wird vom NFA akzeptiert, wenn es einen Weg, ausgehend von einem Startzustand, gibt, mit dem ein End-Zustand erreicht wird.

Der NFA „weiß“ nicht, welcher Pfad zu durchlaufen ist; diesen muss der Benutzer ermitteln (wie bei einer Straßenkarte).

Ein NFA lässt sich formalisieren durch ein Tupel $\mathcal{M} = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$

- Z : Zustände
- Σ : Eingabealphabet
- $\delta: Z \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ Überföhrungsfunktion (bildet ab in Potenzmenge von Z)
- S : Menge der Startzustände
- E : Menge der Endzustände

Dabei bedeutet $\delta(z, a) \ni z'$, dass der NEA im Zustand z für die Eingabe a die Möglichkeit besitzt, in den Zustand z' zu wechseln.

1.1.3 Umwandlung eines NFA in einen DFA

Wir wollen den NFA

ABB 27

in einen DFA umwandeln. Der Startzustand des DFA besteht aus den Startzuständen des NFA:

ABB 28

Betrachten die Folgezustände für $a \in \Sigma$:

ABB 29

nächster Schritt:

ABB 30

nächster Schritt:

ABB 31

weitere Schritte:

$z_0, b : \{z_0\}$

$z_1, b : \{z_2\}$

ABB 32

$z_0, c : \{z_0\}$

$z_1, c : \{\}$

ABB 33

usw.:

ABB 34

Wenn ein Zustand des DFA einen Endzustand des NFA enthält, so ist es ein Endzustand. Der auf diese Weise erhaltene DFA kann Zustände enthalten, die sich zu einem Zustand zusammen fassen lassen. Mit dem Algorithmus Minimalautomat lässt sich ein DFA konstruieren, der minimal bezüglich der Anzahl seiner Zustände ist. Der Minimalautomat ist eindeutig, d.h. Minimalautomaten unterscheiden sich höchstens in der Benennung der Zustände.

1.1.4 Reguläre Ausdrücke

Def.: Sei Σ ein Alphabet. Ein *regulärer Ausdruck* E sowie die durch E erzeugte *Sprache* $L(E)$ sind induktiv definiert:

- \emptyset ist ein regulärer Ausdruck und $L(\emptyset) = \emptyset$.
Bsp.:
ABB35
- Für $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ ist a ein regulärer Ausdruck und $L(a) = \{a\}$.
- Für reguläre Ausdrücke E_1, E_2 sind $(E_1|E_2)$, (E_1E_2) , (E_1^*) reguläre Ausdrücke (hier: $|$ = „oder“) und $L(E_1|E_2) = L(E_1) \cup L(E_2)$, $L(E_1E_2) = L(E_1)L(E_2)$, $L(E_1^*) = L(E_1)^*$ die davon erzeugten Sprachen:

Ausdruck	Sprache
$E_1 E_2$	$L(E_1 E_2) = L(E_1) \cup L(E_2)$
E_1E_2	$L(E_1E_2) = L(E_1)L(E_2)$
E_1^*	$L(E_1^*) = L(E_1)^*$

Hinweis: $E^+ = EE^*$, $E? = \varepsilon|E$

Wenn E_1, E_2 regulär, dann auch $(E_1|E_2)$, (E_1E_2) , (E_1^*) regulär

Bsp.:

- $L((0|1)^*) = (L(0|1))^* = (L(0) \cup L(1))^* = (\{0\} \cup \{1\})^* = \{0, 1\}^*$
- Regulärer Ausdruck über $\Sigma = \{a, b, c\}$, der die gleiche Sprache erzeugt wie der DFA aus dem letzten Automaten-Beispiel:
 $L((a|b|c)^*abc(a|b|c)^*) = \{a, b, c\}^* \{abc\} \{a, b, c\}^*$

Satz: Reguläre Ausdrücke erzeugen genau die regulären Sprachen.

Skizze: Umwandlung eines regulären Ausdrucks in einen endlichen Automaten.

- \emptyset : ABB 40
- $a \in \Sigma$: ABB 41 1.
 ε : ABB 41 2.
- Seien E_1, E_2 reguläre Ausdrücke und $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ DFAs mit $L(E_1) = L(\mathcal{M}_1)$, $L(E_2) = L(\mathcal{M}_2)$.
 - $E_1|E_2$: $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ sind zusammen ein NFA, der $L(\mathcal{M}_1) \vee L(\mathcal{M}_2)$ erkennt.
Bsp.: $E_1 = a, E_2 = b$
ABB 42

- $E_1 E_2$: $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ müssen hintereinander geschaltet werden, wobei ggf. neue Kanten eingefügt werden müssen. Dazu betrachtet man die Kante nach der neuen Verbindung und erzeugt dem entsprechend die Übergangskanten.

ABB 43

- E_1^* : Es müssen Kanten zurück zum Startzustand eingefügt werden

ABB 44

Der Beweis für die umgekehrte Richtung (DFA \rightarrow reg. Ausdruck) ist schwierig.

Bsp.:

- $E = 0(0|1)^*$

ABB 45

- ABB 46

Beobachtungen:

- um zum Endzustand zu kommen, braucht man eine 1.
- vor der 1 kann ε stehen, oder beliebig viele 0en der 1en.

$$\Rightarrow E = (0|1)^*1$$

1.1.5 Das Pumping-Lemma

Wenn ein DFA ein Wort akzeptiert, das mindestens so lang ist wie die Anzahl seiner Zustände, dann muss er einen Zustand zweimal durchlaufen (Schubfachprinzip). Daraus folgt, dass der DFA dabei eine Schleife durchläuft.

Bsp.:

ABB 47

Für $x = abcdecfg$ durchläuft der Automat eine Schleife: $x = ab \boxed{cde} cfg$. Daher akzeptiert der DFA auch alle Wörter $ab(cde)^k cfg$ für $k \geq 0$.

Satz: (Pumping Lemma)

Für jede reguläre Sprache L gibt es ein $n > 0$ (n : Anzahl Zustände des Minimalautomaten), so dass es für alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ eine Zerlegung $x = uvw$ gibt (in vorherigem Bsp.: $u = ab$, $v = cde$, $w = cfg$), so dass gilt:

- 1.) $|v| \geq 1$
- 2.) $|uv| \leq n$ (u, w können auch ε sein)
- 3.) $uv^k w \in L$ für alle $k \geq 0$.

Ohne Einschränkung ist n die Anzahl Zustände des Minimalautomaten.

$\Rightarrow \forall$ regulären Sprachen $L \quad \exists n > 0 \quad \forall x \in L, |x| \geq n \quad \exists u, v, w$ mit $x = uvw$ und $|v| \geq 1, |uv| \leq n \quad \forall k \geq 0 \quad uv^k w \in L$.

Das Pumping-Lemma lässt sich nutzen, um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist.

Bsp.: Wir zeigen, dass $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Problemstellung: Der Automat kann sich das n nicht „merken“, um nach n as wieder n bs zu erzeugen.

Beweis (Widerspruch):

- Angenommen, L sei regulär.
- Nach Pumping-Lemma gibt es dann ein $n > 0$, so dass sich alle $x \in L$ mit $|x| \geq n$ gemäß Pumping-Lemma zerlegen lassen.
- Sei $x = a^n b^n$.
- Angenommen v enthalte ein b , dann wäre $|uv| > n$.
Aus $|uv| \leq n$ folgt aber, dass v kein b enthält. aus $|v| \geq 1$ folgt, dass v mindestens ein a enthält.
ABB 48
- Das Wort uw enthält daher weniger as als bs und kann somit nicht in L enthalten sein (denn w enthält b^n , da v mindestens ein a enthält, ist durch uw mindestens ein a „verloren gegangen“:
 $uw = a^{n-|v|} b^n$) und ist deshalb nicht in L enthalten, Widerspruch ζ #

Vorgehen:

- ist regulär
- Def. Pumping Lemma
- x finden (gilt für alle x , also ein günstiges x aussuchen, mit dem sich Beweis führen lässt)
- durch 1.) und/oder 2.) einschränken
- durch 3.) zum Widerspruch führen

Bsp.: Wir zeigen, dass $L = \{zz | z \in \{a, b\}^*\}$ nicht regulär ist.

Intuitiver Hinweis: Kann nicht regulär sein, da sich der Automat nicht merken kann, wie viele as und bs im ersten z gelesen wurden, um dann das gleiche im zweiten z zu fabrizieren.

Beweis:

- Angenommen, L ist regulär.
- Dann gibt es ein $n > 0$, so dass sich alle $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen gemäß Pumping-Lemma.
- Sei $x = a^n b a^n b$.
- Wegen $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ besteht v aus mindestens einem a .
ABB 61
- Dann enthält $uw = a^{n-|v|} b a^n b$ (für $k = 0$) weniger as in der vorderen Hälfte als in der hinteren Hälfte. Da sich uw deshalb nicht in die Form zz mit $z \in \{a, b\}^*$ bringen lässt, ist $uw \notin L$, Widerspruch!

Satz: Seien L regulär und n die Anzahl Zustände des Minimalautomaten zu L . Dann gilt $|L| = \infty$ genau dann, wenn es ein $x \in L$ gibt mit $n \leq |x| < 2n$.

Beweis:

(\Leftarrow):

Gemäß Pumping Lemma gibt es eine Zerlegung $x = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $uv^k w \in L$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ (\mathbb{N} ist unendlich).

Daraus folgt $|L| = \infty$.

(\Rightarrow):

Da es nur endlich viele Wörter x mit $|x| < n$ gibt, gibt es ein $x \in L$ mit $|x| \geq n$.

Sei daher $x \in L$ mit $|x| \geq n$ und $|x|$ minimal.

Gemäß PL lässt sich x zerlegen in $x = uvw$.

Da $uw \in L$ und $|x|$ minimal ist, gilt $|uw| < n$.

Wegen $|x| \geq \underbrace{|uv|}_{< n \text{ gemäß PL}} + \underbrace{|uw|}_{< n \text{ Satz zuvor}} < n + n = 2n$ folgt die Behauptung $n \leq |x| < 2n$.

Regulärer Ausdruck: Generator

Automat: Validator

1.2 Kontextfreie Sprachen

1.2.1 Kellerautomaten (PDA)

Ein Kellerautomat (Pushdown Automaton, PDA) besitzt gegenüber einem NFA zwei zusätzliche Eigenschaften:

- Es gibt ε -Übergänge.
- Er besitzt einen Stack, auf dem Zeichen abgelegt oder von dem Zeichen gelesen werden können.

Zur graphischen Darstellung von PDAs verwenden wir eine erweiterte Automatennotation:

ABB62

Unten auf dem Stack liegt das Symbol $\#$. Dies ist das einzige Symbol, das sich zu Beginn einer Rechnung auf dem Stack befindet.

Bsp.: PDA, der $\{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ akzeptiert.

ABB63

Wir erlauben nun, dass der PDA in einem Schritt auch mehrere Zeichen auf den Stack schreibt. Dazu erweitern wir die graphische Notation wie folgt:

ABB 68

Def.: Ein PDA ist ein Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$

- Z : Zustände
- Σ : Eingabealphabet
- Γ : Stackalphabet
- $\delta: Z \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}(Z \times \Gamma_\varepsilon)$, wobei $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \{\varepsilon\}$
- $z_0 \in Z$: Startzustand
- $\# \in \Gamma$: Unterstes Stackzeichen

- $E \in Z$: Endzustände

ABB 69

$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

$\gamma \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$

$\gamma' \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$

Def.: Die von einem PDA M akzeptierte Sprache $L(M)$ ist die Menge aller $x \in \Sigma^*$, für die gilt: Der PDA M kann, ausgehend vom Startzustand und dem initialen Stackzustand $\#$, durch das Lesen des Wortes x einen Endzustand erreichen.

1.2.2 Kontextfreie Grammatiken

Eine kontextfreie Grammatik beschreibt, wie durch das Ersetzen von variablen Wörter der Sprache erzeugt werden können. Jede Ersetzungsregel hat die Form „linke Seite \rightarrow rechte Seite“ (linke Seite der Regel kann ersetzt werden durch die rechte Seite), wobei „linke Seite“ eine Variable ist.

Beginnend mit dem Startsymbol werden solange Ersetzungsregeln angewendet, bis alle Variablen durch Terminalsymbole (Elemente aus Σ) ersetzt wurden.

Bsp.:

- Satz \rightarrow NP VP*
- NP \rightarrow Artikel Nomen
- Artikel \rightarrow die
- Nomen \rightarrow Katze
- Nomen \rightarrow Maus
- VP \rightarrow Verb NP
- Verb \rightarrow jagt

Satz \Rightarrow NP VP \Rightarrow Artikel Nomen VP \Rightarrow Artikel Nomen Verb NP \Rightarrow Artikel Nomen Verb Artikel Nomen $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ die Katze jagt die Maus

Syntax dazu:

ABB 71

Def.: Eine kontextfreie Grammatik ist ein Tupel $\sigma = (V, \Sigma, P, S)$

- V : Endliche Menge der Variablen oder Nonterminalzeichen
- Σ : Alphabet oder Terminalzeichen $V \cap \Sigma = \emptyset$
- P : Regeln oder Produktionen der Form $u \rightarrow v$ mit $u \in V$ und $v \in (V \cup \Sigma)^*$
- $S \in V$

Für $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$ schreiben wir $x \Rightarrow y$, wenn sich durch das Ersetzen einer Variablen in x die Satzform y erzeugen lässt.

*Nominalphase, Verbalphase

Bsp.: die Nomen Verb \Rightarrow die Katze Verb

Die reflexive und transitive Hülle der Relation \Rightarrow bezeichnen wir mit \Rightarrow^* . Umgangssprachlich: durch \Rightarrow^* werden nicht alle \Rightarrow -Umformungen dargestellt, sondern teils übersprungen.

Bsp.:

Satz \Rightarrow^* die Katze VP,

Satz \Rightarrow^* die Katze jagt die Maus.

Def.: Die von einer Grammatik erzeugte Sprache ist $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}$.

Literatur

- [1] Boris Hollas. *Grundkurs Theoretische Informatik: Mit Aufgaben und Anwendungen*. Springer Berlin, 2015.