



Mathematik I

Vorlesungsskript

Mitschrift von Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von Herrn Michael Meinhold
& Prof. Dr. Fabian Schwarzenberger

7. April 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Elementare Grundlagen	3
1.1	Aussagen und Grundzüge der Logik	3
1.2	Mengen	3
1.3	Zahlen	3
1.4	Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen	3
1.5	Lineare Algebra	3
2	Folgen, Reihen, Grenzwerte	4
2.1	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen	4
2.1.1	Grenzwerte von Funktionen	4
2.1.2	Stetigkeit von Funktionen	7
2.2	Potenzreihen	8
3	Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen	11
3.1	Grundbegriffe	11
3.1.1	Das Differential	12
3.2	Differentiationsregeln	13
3.3	Anwendungen	15
3.3.1	Taylorsche Formel, Taylor-Reihe	15
3.3.1.1	Taylor Reihen	17
3.3.2	Grenzwertbestimmung mittels der Regel von l'Hopital	18
3.3.3	Kurvendiskussion	21

1 Elementare Grundlagen

1.1 Aussagen und Grundzüge der Logik

1.2 Mengen

1.3 Zahlen

1.4 Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

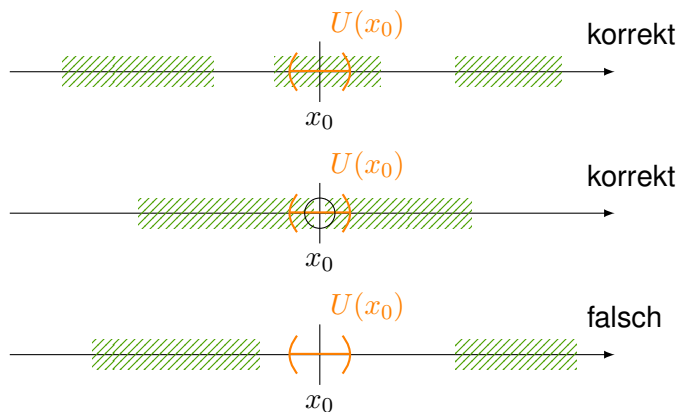
1.5 Lineare Algebra

2 Folgen, Reihen, Grenzwerte

2.1 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

2.1.1 Grenzwerte von Funktionen

Def. 1: Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und es existiere eine Umgebung $U(x_0)$ mit $U(x_0) \setminus \{x_0\} \subseteq Db(f)$.



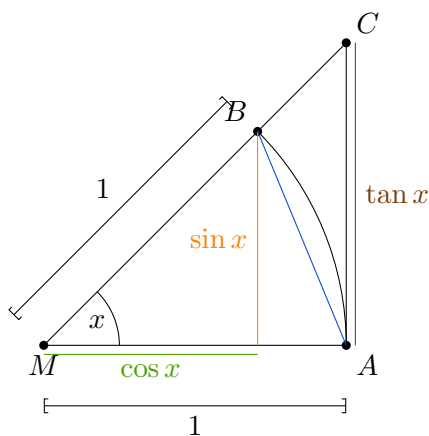
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f)$, $x_n \neq x_0$ (für alle n) und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda$.

Anschaulich: $f(x)$ strebt gegen λ , wenn x gegen x_0 strebt.

Bemerkung: Die Stelle x_0 muss *nicht* selbst zum Definitionsbereich gehören.

Bsp. 1:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$



$$\begin{aligned} F_{\triangle MAB} &\leq F_{\text{Sektor } MAB} \leq F_{\triangle MAC} \\ \frac{1}{2} \sin x &< \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x \quad | \cdot \frac{2}{\sin x} \\ \Leftrightarrow 1 &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Analog zu Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen gilt:

Satz 1: Es gelte $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Dann:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot a$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$)

Bsp. 2:

a.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 7x + 4}{3 \cos x} = \frac{4}{3}$

b.) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \frac{0}{0}$ Satz nicht anwendbar.

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 2 = 5$$

(andere Möglichkeit mit $\frac{0}{0}$ umzugehen lernen wir später)

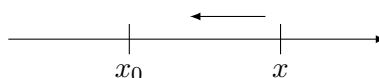
Def. 2:

a.) rechtseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = a : \Leftrightarrow \text{für jede Folge } (x_n) \text{ mit } x_n \in Db(f) \text{ und } x_n > x_0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ gilt}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$$

Andere Schreibweise: $\lim_{x \searrow x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0}$



b.) linkseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = a : \Leftrightarrow \text{analog rechtsseitiger Grenzwert}$$

c.) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a : \Leftrightarrow \text{für jede Folge } (x_n) \text{ mit } x_n \in Db(f) \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$

d.) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a : \Leftrightarrow \text{analog s.o.}$

Diskussion: Uneigentliche Grenzwerte:

Wir schreiben $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$ bei bestimmter Divergenz der Funktionswerte für:

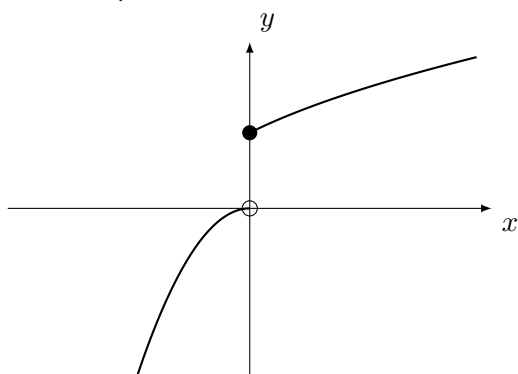
$$\bullet \begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ x \nearrow x_0 \\ x \searrow x_0 \\ x \rightarrow \infty \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Satz 2:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = a$$

Bsp. 3: (einseitiger Grenzwert)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existiert nicht!}$$

Bsp. 4:

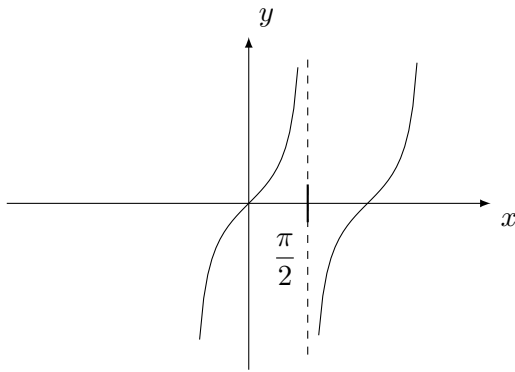
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{4}{x}\right) = "\infty \cdot 0"$$

$$\stackrel{u=\frac{4}{x}}{=} \lim_{u \searrow 0} \frac{4}{u} \sin(u) = 4$$

Bsp. 5:

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$$

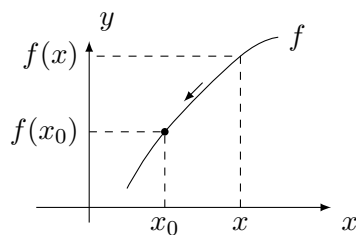
$$\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$$



2.1.2 Stetigkeit von Funktionen

Def. 3: Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in Db(f)$ gegeben. Es heißt f :

- a.) stetig in x_0 falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt
(also $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$, d.h. Limes und Funktion kann vertauscht werden).



- b.) linksseitig stetig in x_0 , falls $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
c.) rechtsseitig stetig in x_0 , falls $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Bsp. 6:

- a.) $f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig, da $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$.

Aber $\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ stetig.

Bezeichnung: hebbare Unstetigkeit.

ABB16

- b.) $f_2(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da $\lim_{x \nearrow 0} f_2(x) \neq f_2(0) \neq \lim_{x \searrow 0} f_2(x)$

Bezeichnung: endlicher Sprung.

ABB17

- c.) $f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da $\lim_{x \nearrow 0} f_3(x) = \infty \neq f_3(0)$.

ABB18

d.) $f_3(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, da der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nicht existiert.

ABB19

Def. 4: Die Funktion $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ heißt

a.) in einem Intervall $I \subset Db(f)$ stetig, falls f an jeder inneren Stelle $x_0 \in I$ stetig ist und in evtl. zu I gehörenden Randpunkten einseitig stetig ist.

b.) stetig, falls f in allen Punkten $x_0 \in Db(f)$ stetig ist.

Bemerkung: Jede der in ?? und ?? betrachteten Funktionen ist stetig.

Bsp. 7: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig.

Satz 3: Sind f und g stetig in x_0 , so sind auch $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x_0) \neq 0$) stetig in x_0 .

Satz 4: (Stetigkeit und Verknüpfungen)

Seien $g : Db(g) \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $Wb(g) \subseteq Db(f)$, dann gilt:

Ist g stetig in x_0 und f stetig in $g(x_0)$, so ist $f \circ g : Db(g) \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ stetig in x_0 .

Satz 5: (Zwischenwertsatz)

Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b] \subset Db(f)$. Falls $f(a) \cdot f(b) < 0$ (also haben unterschiedliche Vorzeichen), so gilt $\exists x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = 0$

ABB20

Satz 6: Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$. Dann nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Diskussion:

a.) $f(x) = \tan x$ nimmt auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ kein Maximum an.

ABB21

b.) $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ nicht stetig und nimmt kein Maximum auf $[-1, 1]$ an.

ABB22

2.2 Potenzreihen

Def.: Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ Potenzreihe mit dem Mittelpunkt x_0 .

Diskussion:

- Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ ist die Potenzreihe eine feste Reihe.
- Konvergenzbereich $K := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{Potenzreihe ist konvergent}\}$
- Für jedes $x \in K$ existiert der Summenwert der Potenzreihe. Die Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$
 heißt Grenzfunktion der Potenzreihe.

Zur Bestimmung des Konvergenzbereichs nutzt man Satz 10 und 11 aus ?? und erhält absolute Konvergenz in einem um x_0 liegendem Konvergenzintervall $I := (x_0 - r, x_0 + r)$.

Wie r bestimmt wird liefert:

Satz 1: Sei (a_n) Zahlenfolge mit $r := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ existiert.

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < r \\ \text{divergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| > r \end{cases}$.

Diskussion:

- Verwechslungsgefahr:
 - Satz 10 und 11 betrachten (Zahlen-)Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
 - Satz 1 betrachtet Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, wobei a_n ein Faktor vor $(x - x_0)^n$ ist.
- Falls der Grenzwert r aus Satz 1 nicht existiert, so gibt es trotzdem einen Konvergenzradius. Den gilt es auf andere Weise zu betrachten/ermitteln.
- Satz 1 sagt nichts über das Verhalten an den Randpunkten aus \rightarrow gesonderte Untersuchung nötig.

Bsp. 1:

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, d.h. $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

\Rightarrow Konvergenzintervall $I = (-1, 1)$

Randpunkte:

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ bedingt konvergent (alternierende harmonische Reihe)

$x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent

\Rightarrow Konvergenzbereich: $K = [-1, 1)$

$$\text{b.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ d.h. } x_0 = 0, a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$\Rightarrow r = \infty$$

d.h. die Reihe ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bezeichnung: *beständige Konvergenz*

$$\text{c.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \dots \quad \text{d.h. } x_0 = 0, a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Satz 1 ist aber nicht unmittelbar anwendbar.

Substitution $u := x^2$ liefert aber $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{(2n)!}$ mit $u_0 = 0, b_n = \frac{1}{(2n)!} (\sum b_n (u - u_0)^n)$

$$\left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+2) \cdot (2n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$\Rightarrow r_u = \infty$ (Konvergenzradius für die Substituierte Reihe)

$\Rightarrow r_x = \sqrt{\infty} = \infty$ (Konvergenzradius für die untersuchte Funktion)

Im Konvergenzbereich K wird dadurch eine Potenzreihe eine Funktion dargestellt, die Grenzfunktion (siehe vorhergehende Diskussion).

Bsp. 2:

$$\text{a.) } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ für } x \in (-1, 1) \text{ (geometrische Reihe)}$$

$$\text{b.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ (Beweis später)}$$

Satz 2: Die Grenzfunktion jeder Potenzreihe ist im Konvergenzbereich stetig.

3 Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen

3.1 Grundbegriffe

Tangentenproblem

ABB38

Gegeben: $y = f(x)$

Gesucht: Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$

- Zunächst **Sekante** durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_0, f(x_0))$
- Dann betrachten wir $x_1 \rightarrow x_0$
- Damit geht **Sekante** über in die **Tangente**.
Außerdem geht φ in α über.

$$\tan \alpha = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \tan \varphi = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}}$$

Def. 1: Die Funktion $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt an der Stelle x_0 (mit $U(x_0) \subseteq Db(f)$) differenzierbar, falls

der Grenzwert $f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

$f'(x_0)$ heißt dann **1. Ableitung** von f an der Stelle x_0 .

Diskussion:

- $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
- Gleichung der Tangente in $(x_0, f(x_0))$ ist $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ($t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) Anstieg der Tangente ist als $m = \tan \alpha = f'(x_0)$
- f in x_0 differenzierbar bedeutet es existiert eine eindeutige Tangente an die Kurve in dieser Stelle.
z.B. ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar:
ABB39

Satz 1: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Beweis:

Sei f in x_n differenzierbar und (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \rightarrow x_0$. Dann gilt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ existiert.

$$\Rightarrow \exists K > 0 \text{ mit } \left| \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right| = \frac{|f(x_n) - f(x_0)|}{|x_n - x_0|} \leq K$$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| \leq K \cdot |x_n - x_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ ist stetig.}$$

Def. 2: Eine Funktion $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$
 $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ heißt

a.) differenzierbar im Intervall $I \subseteq Db(f)$, falls f an jeder inneren Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist und in eventuellen Randpunkten einseitig differenzierbar ist.

d.h. $\lim_{x \nearrow x_r} \frac{f(x) - f(x_r)}{x - x_r}$ bzw. $\lim_{x \searrow x_l} \frac{f(x) - f(x_l)}{x - x_l}$ existiert

b.) differenzierbar, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in Db(f)$ differenzierbar ist.

Schreibweise:

Die resultierende Funktion bezeichnen wir mit

$$f' : Db(f') \rightarrow \mathbb{R}, f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

wobei $Db(f')$ aus allen Punkten $x \in Db(f)$ besteht für welche der genannte Grenzwert existiert.

Def. 3: Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren rekursiv die n -te Ableitung von f an der Stelle x_0 mittels

$$f^{(n)}(x_0) := (f^{(n-1)})'(x_0) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

wobei $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ (unter der Voraussetzung, dass die jeweilige Ableitung existiert).

Bsp. 1: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) : x^n, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h} ((x+h)^n - x^n) \\ &= \frac{1}{h} \left(x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n - x^n \right) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

d.h. f ist auf \mathbb{R} differenzierbar. $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Bsp. 2: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \sin(x)$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \quad | \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \\ &= \frac{2 \cdot \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= \frac{\cos \left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \quad | \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Also $f'(x) = \cos x$.

Bemerkung: Ableitung der wichtigsten Grundfunktionen findet man in Formelsammlungen.

Zur Ableitung zusammengesetzter Funktionen lernen wir im später weitere Ableitungsregeln kennen.

3.1.1 Das Differential

ABB 49

$$dy = h \cdot \tan \alpha = f \cdot f'(x_0)$$

Def. 4:

- a.) $dy := f'(x_0) \cdot h$ heißt das zur Stelle x_0 und dem Zuwachs $h = \Delta x$ gehörende *Differential* von f .
- b.) $\Delta y := f(x_0 + h) - f(x_0)$ heißt die zur Stelle x_0 und dem Zuwachs $h = \Delta x$ gehörende *Differenz* von f .

Diskussion

- 1.) Δy ist die Änderung der Funktion f , wenn x in $x + h$ übergeht; dy ist die entsprechende Änderung wenn statt f die Tangente an der Stelle x_0 betrachtet wird (Linearisierung).
- 2.) Für kleine Zuwächse Δx gilt: $\Delta y \approx dy$
d.h. $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$ für kleines Δx (nutzt man in der Fehlerrechnung)
- 3.) Sei $y = f(x) = x \Rightarrow dy = dx = 1 \cdot h$ also $\boxed{h = \Delta x = dx}$
- 4.) Damit $f'(x) = \frac{dy}{dx}$
Also: 1. Ableitung = Differentialquotient
andere Schreibweise: $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$
- 5.) Höhere Ableitungen:
 $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$

3.2 Differentiationsregeln

Satz 1: Falls die Ableitungen auf der rechten Seite existieren:

- $(C_1 u(x) + C_2 v(x))' = C_1 u'(x) + C_2 v'(x)$ (Linearität)
- $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ (Produktregel)
- $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$ (Quotientenregel)

Bsp. 1:

a.) $f(x) = 7x^4 + \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 7x^4 + x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} \quad (x > 0)$
 $\Rightarrow f'(x) = 28x^3 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{2}} = 28x^3 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

b.) $f(x) = x \cdot \ln x \quad (x \geq 0)$
 $\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1$ (Produktregel)

c.) $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 2}$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{e^x \cdot (x^2 + 2) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2)^2}$ (Quotientenregel)

Satz 2: Seien $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Db(g) \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$, $Db(g) \subseteq \mathbb{R}$ und

- g bei $x_0 \in Db(g)$ differenzierbar
- f bei $g(x_0) \in Db(f)$ differenzierbar

so gilt:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Diskussion: $y = f(\underbrace{g(x)}_u) = f(u)$ mit $u = g(x)$

Differentialschreibweise:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{äußere Ableitung} \cdot \text{innere Ableitung})$$

Bsp. 2:

a.) $y = f(x) = \sin \underbrace{3x}_u$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 3 = 3 \cos 3x$$

b.) $y = f(x) = 2^{\tan(3x)} \quad \left(-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}\right)$

Substitution:

$$u := \tan 3x$$

$$v := 3x$$

$$\Rightarrow y = 2^u, \quad u = \tan v$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 2^u \cdot \ln 2 \cdot (1 + \tan^2 v) \cdot 3 = 3 \cdot 2^{\tan 3x} \cdot \ln 2 \cdot (1 + \tan^2 3x)$$

Bsp. 3: (Logarithmische Differentiation)

$$f(x) = x^{\sin x} \quad x \in (0, \infty)$$

Basis und Exponent hängen von x ab!

Die Regeln $(x^a)' = ax^{a-1}$ bzw. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ sind nicht unmittelbar anwendbar.

Betrachten:

$$f(x) = x^{\sin x}$$

$$\ln(f(x)) = \sin x \cdot \ln x$$

$$\xrightarrow{\text{Ableiten}} \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot (\cos(x) \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

Satz 3: Sei $f : (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ Grenzfunktion einer Potenzreihe mit Kurvenradius r .

Dann gilt für alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x - x_0)^{n-1}$

Bsp. 4: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad |x| < 1$$

3.3 Anwendungen

3.3.1 Taylorsche Formel, Taylor-Reihe

Problem: „Komplizierte“ Funktionen f soll in der Umgebung von x_0 durch ein Polynom p_n n -ten Grades angenähert werden.

Ansatz: $p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$

Forderung: $p_n(x_0) = f(x_0), p'_n(x_0) = f'(x_0), p''_n(x_0) = f''(x_0), \dots$

liefert: $p_n(x_0) = a_0, p'_n(x_0) = a_1, p''_n(x_0) = 2a_2, \dots$

und $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Allgemein: $p_n^{(k)} = k!a_k$ für $k = 0, 1, \dots, n$

Def. 1: Das Polynom $p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ heißt *Taylorpolynom* n -ten Grades mit Entwicklungsstelle x_0 .

Diskussion:

1.) p_n ist eine Näherung für f .

Fehler: $f(x) - p_n(x) =: R_n(x)$ heißt Restglied

2.) Restglied ist im Allgemeinen umso kleiner, je kleiner $|x - x_0|$ ist und je größer n ist.

ABB 54

Satz 1: Taylorsche Formel

Es sei f in $[a, b]$ $(n+1)$ -mal differenzierbar, sowie $x_0, x \in [a, b]$. Dann existiert ein ξ zwischen x_0 und x

(d.h. $\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0)$ mit $\vartheta \in (0, 1)$) mit $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$: *Restgliedform von Lagrange*.

$$\text{Es gilt also } f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{p_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

Diskussion: Spezialfall $n = 0$: $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$ (*Mittelwertsatz der Differentialrechnung*)

ABB 55

Satz sagt: es gibt zwischen x_0 und x_1 einen Punkt auf der Funktion, sodass die Senkante die Tangente dieses Punktes ist.

Umstellen liefert:

$$\underbrace{f'(\xi)}_{\text{Anstieg der Tangente}} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Anstieg der Sekante}}$$

Bsp. 1: $f(x) = e^x \quad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x = f''(x) = f'''(x) = \dots$$

$$\stackrel{x_0=0}{\implies} f'(0) = 1 = f''(0) = f'''(0) = \dots$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot x^k + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad 0 < \vartheta < 1$$

Wie gut ist diese Näherung?

Für $x = \frac{1}{10} = 0,1$ und $n = 4$ gilt:

$$e^{0,1} = 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,1^2}{2!} + \frac{0,1^3}{3!} + \frac{0,1^4}{4!} + \underbrace{\frac{0,1^5}{5!} e^{\vartheta \cdot 0,1}}_{R_4(0,1)} \text{ für ein } \vartheta \in (0,1).$$

$$\Rightarrow e^{0,1} = \underbrace{1 + 0,1 + 0,005 + 0,0001\bar{6} + 0,0000041\bar{6}}_{=1,1051708\bar{3}} + R_4(0,1) \text{ Abschätzen des } \vartheta:$$

$$\begin{aligned} 8,3 \cdot 10^{-8} &= \frac{0,1^5}{5!} = \frac{0,1^5}{5!} e^0 < \frac{0,1^5}{5!} e^{\vartheta \cdot 0,1} < \frac{0,1^5}{5!} e^{1 \cdot 0,1} < \frac{0,1^5}{5!} \cdot 3 = 25 \cdot 10^{-8} \\ \Rightarrow 1,1051708\bar{3} + 8,3 &\leq e^{0,1} &\leq 1,1051708\bar{3} + 25 \cdot 10^{-8} \\ 1,10517091\bar{6} &\leq e^{0,1} &\leq 1,10517108\bar{3} \end{aligned}$$

Bsp. 2:

$$f(x) = \cos(x), \quad x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \quad \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow f''(x_0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x \quad \Rightarrow f'''(x_0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow f^{(4)}(x_0) = 1$$

...

$$n = 2m + 1$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \underbrace{1}_{f(x_0)} + \underbrace{0}_{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)} - \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2} + 0 + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 0 + R_{2m+1} \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \cos(\vartheta x) \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \end{aligned}$$

ABB 56

$$\text{Näherung: } \cos x \equiv 1 - \frac{x^2}{2} \text{ für } |x| \ll 1$$

$$\text{Fehler: } |R_3(x)| \leq \frac{x^4}{4!}$$

Bsp.:

$$\cos 5^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{36}\right) = 1 - \underbrace{\frac{\pi^2}{2 \cdot 36^2}}_{0,9961923} + R_3$$

...

$$|R_2| \leq \frac{\pi^4}{36^4 \cdot 24} = 2,416 \cdot 10^{-6}$$

genau gilt: $\cos 5^\circ = 0,99619$ (auf 5 Stellen genau)

Bsp. 3: $f(x) = (1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

...

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$= \binom{\alpha}{k} \cdot k!(1+x)^{\alpha-k}$$

wir betrachten $x_0 = 0$

$$f(0) = 1, f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha-1), \dots, f^{(k)}(0) = \binom{\alpha}{k} k!$$

Erinnerung:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } n, k \in \mathbb{N}, k \leq n \\ \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} & \text{kann für beliebige } n \in \mathbb{R} \text{ ausgewertet werden.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1} (1+\vartheta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \text{ mit } \vartheta \in (0,1)$$

Bsp. 4: $f(x) \dots$ Polynom n -ten Grades

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow R_n(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{Taylorpolynom stellt } f \text{ exakt dar (Entwicklung nach Potenzen von } (x-x_0))$$

3.3.1.1 Taylor Reihen

Satz 2: Es sei f auf $U(x_0)$ beliebig oft differenzierbar und es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Dann gilt
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

Denn: Taylor-Formel sagt $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x)$. Mit $n \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung.

Bsp. 5: $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$ (vgl. Bsp. 1)

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Wähle n_0 so, dass $q := \frac{|x|}{n_0} < 1$.

⇒ für $n > n_0$ gilt:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| e^{\vartheta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq e^{|\vartheta x|} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &< e^{|x|} \cdot \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{n_0} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{n_0} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{n_0}}_{(n-n_0+1) \text{ Faktoren}} \\ &= e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n_0}}{n_0!} \cdot q^{n-n_0+1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ für alle } x \in (-\infty, \infty)$$

Bsp. 6: $\cos x = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2m+1}(x)$ (vgl. Bsp. 2)

Ähnlich wie in Bsp. 5 kann man zeigen $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2m+1}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad x \in (-\infty, \infty)$$

Analog: $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad x \in (-\infty, \infty)$

Bsp. 7: Restglieduntersuchung in Bsp. 3 führt zu:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad |x| < 1, \alpha \in \mathbb{R}$$

z.B. für $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots \\ &\approx 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{falls } |x| \ll 1 \end{aligned}$$

3.3.2 Grenzwertbestimmung mittels der Regel von l'Hopital

Satz 3: (Regel von l'Hopital)

Es gelte:

- 1.) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- 2.) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert (als eigentlicher und uneigentlicher Grenzwert).

Dann folgt: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (Typ: $\frac{0}{0}$)

Die gleiche Aussage gilt, wenn 1.) ersetzt wird durch

1'. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ (Typ: $\frac{\infty}{\infty}$)

Beweis: seien f, g, f', g' stetig in x_0 und $g'(x_0) \neq 0$

$$\text{Mittelwertsatz: } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overbrace{f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)}^0}{\underbrace{g(x_0) + g'(\xi)(x - x_0)}_0} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Bsp. 8:

$$\begin{aligned} \text{a.) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c.) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos x} &= 2 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} = 2 \end{aligned}$$

Regel also auch mehrfach hintereinander anwendbar.

$$\begin{aligned} \text{d.) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh x} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh(x+1)}{\sinh x} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh x} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \dots \end{aligned}$$

\Rightarrow Satz nicht anwendbar, da 2.) nie erfüllt ist.

Aber:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x+1} - e^{-(x+1)}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x+1} (1 - e^{-2(x+1)})}{e^x (1 + e^{-2x})} = e \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2(x+1)}}{1 + e^{-2x}}}_{=1} = e$$

Diskussion:

1.) Man beachte, dass der Anwendung von Satz 3 Zähler und Nenner einzeln differenziert werden (keine Quotientenregel)!

2.) Falls $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht existiert, darf man nicht schlussfolgern, dass $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ nicht existiert (siehe Bsp. 9).

Bsp. 9: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sin x}{3x - \cos x} = \frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \cos x}{3 + \sin x}$ existiert nicht.

1.) erfüllt, 2.) nicht erfüllt \Rightarrow Satz nicht anwendbar

Aber:

$$\frac{5x + \sin x}{3x - \cos x} = \frac{x \left(5 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x \left(3 - \frac{\cos x}{x}\right)} = \frac{5 + \frac{\sin x}{x}}{3 - \frac{\cos x}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3}$$

Weitere unbestimmte Ausdrücke:

Durch Zurückführen auf $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ lässt sich auch folgendes behandeln:

" $0 \cdot \infty$ ": $f(x) \cdot g(x)$ als Doppelbruch schreiben, d.h. $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ oder $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ ist dann vom Typ $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$.

" $\infty - \infty$ ": Ausklammern $f(x) - g(x) = f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)$ oder falls Brüche vorliegen Hauptnenner bilden.

" 0^0 "/" 1^∞ "/" ∞^0 ": Umformung

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \exp \left(\ln \left(f(x)^{g(x)} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \exp \left(g(x) \ln f(x) \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow a} \underbrace{g(x) \cdot \ln f(x)}_{\text{Typ "0} \cdot \infty"} \right) \end{aligned}$$

Bsp. 10:

a.) $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \cdot \cot 3x \stackrel{"0 \cdot \infty"}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\frac{1}{\cot 3x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\tan 3x} \stackrel{"0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x}{3(1 + \tan^2 3x)} = \frac{1}{3}$

b.) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \stackrel{"\infty - \infty"}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\sin x \cdot (e^x - 1)} \stackrel{"0}{=} \dots$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\cos x(e^x + 1) + \sin(x) \cdot e^x}$
 $\stackrel{"0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{-\sin x \cdot (e^x - 1) + \cos(x) \cdot e^x + \cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x} = \frac{1}{2}$

c.) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} \stackrel{"1^\infty"}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \left((1 - x)^{\frac{1}{x}} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left(\frac{\ln(1 - x)}{x} \right)$
 tauschen geht, da $\exp(\cdot)$ stetig ist
 $= \exp \left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x)}{x}}_{\text{" " Typ } \frac{0}{0}} \right)$

Denn: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{1-x} = -1$

3.3.3 Kurvendiskussion

Problemstellung: Gegeben ist eine Funktion $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$ $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$.

Dann ist der Graph der Funktion definiert durch: $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 | x \in Db(f)\}$.

Dieser Graph ist zu untersuchen auf

- Nullstellen
- Stellen lokaler bzw. globaler Extrema
- Wendestellen
- Verhalten im Unendlichen, bzw. an den Randstellen des Definitionsbereichs $Db(f)$ und (falls vorhanden) bei Annäherung an Unstetigkeitsstellen.

Diskussion:

- $x_0 \in Db(f)$ heißt **Nullstelle n -ter Ordnung**, falls
 $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
 Zur Nullstellenbestimmung lernen wir bald das (iterative) Newton-Verfahren kennen.
- Lokale Extrema** sind extremal bzgl. einer Umgebung der Extremstelle.
Globale Extrema sind extremal bzgl. des gesamten Definitionsbereichs, sie sind lokale Extrem oder Funktionswerte in den Randpunkten.
- Wendepunkte** sind Punkte, an denen die Kurve von konkav in konvex oder von konvex in konkav übergeht.
 ABB 64
 ABB 65
- Einige einfache Zusammenhänge zwischen Eigenschaften der Kurve und der Ableitungen an der Stelle x_0 (f sei auf $U(x_0)$ hinreichend oft differenzierbar).

$f'(x_0) < 0$	\Rightarrow	f in Umgebung von x_0 streng monoton fallend.
$f'(x_0) > 0$	\Rightarrow	f in Umgebung von x_0 streng monoton wachsend.
$f'(x_0) = 0$	\Leftarrow	f in x_0 lokal extremal.
$f''(x_0) < 0$	\Rightarrow	f in Umgebung von x_0 konkav.
$f''(x_0) > 0$	\Rightarrow	f in Umgebung von x_0 konvex.
$f''(x_0) = 0$	\Leftarrow	x_0 Wendestelle.
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0$	\Rightarrow	f in x_0 lokal minimal
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$	\Rightarrow	f in x_0 lokal maximal
- Problem: $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0$?
 Extremstelle oder Wendestelle oder was?

Hinreichende Bedingungen für das Vorliegen von Extremstellen

Satz 4: Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in Db(f)$ n -mal differenzierbare Funktion und sei $f^{(n)}$ stetig in x_0 . Dann gilt falls $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$:

- $n = 2, 4, 6, \dots$ (also gerade), so ist x_0 lokale Extremstelle (Maximum falls $f^{(n)}(x_0) < 0$, Minimum falls $f^{(n)}(x_0) > 0$).

- b.) $n = 3, 5, 7, \dots$ (also ungerade), so ist x_0 eine Horizontal-Wendestelle (konvex \rightarrow konkav, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$; konkav \rightarrow konvex, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$).
 ABB 66

Beweis mittels Taylor-Formal.

Oft ist auch folgendes Kriterium nützlich:

Satz 4': Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in Db(f)$, sowie $f'(x_0) = 0$. Dann:

- a.) f' wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\begin{cases} \text{von } + \text{ auf } - \Rightarrow x_0 \text{ lokale Maximumstelle} \\ \text{von } - \text{ auf } + \Rightarrow x_0 \text{ lokale Minimumstelle} \end{cases}$

- b.) kein Vorzeichenwechsel $\Rightarrow x_0$ ist Horizontal-Wendestelle

Hinreichende Bedingung für das Vorliegen einer Wendestelle

Satz 5: Sei $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar an x_0 und $f^{(n)}$ stetig in x_0 . Dann gilt falls $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$ und

- a.) $n = 3, 5, 7, \dots \Rightarrow x_0$ ist Wendestelle $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0 & \text{konvex} \Rightarrow \text{konkav} \\ f^{(n)}(x_0) > 0 & \text{konkav} \Rightarrow \text{konvex} \end{cases}$

- b.) $n = 4, 6, 8, \dots \Rightarrow x_0$ keine Wendestelle, sondern sogenannte Flachstelle und Extremstelle, falls zusätzlich $f'(x_0) = 0$.

ABB 67