Kurvendiskussion am Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2(\ln(x))^4.$$

Zunächst leiten wir ab:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x(\ln(x))^4 + x^2 4(\ln(x))^3 \frac{1}{x} \\
&= x\big(2(\ln(x))^4 + 4(\ln(x))^3\big) \\
f''(x) &= 2(\ln(x))^4 + 4(\ln(x))^3 + x\big(8(\ln(x))^3 + 12(\ln(x))^2\big)\frac{1}{x} \\
&= 2(\ln(x))^4 + 12(\ln(x))^3 + 12(\ln(x))^2 \\
f'''(x) &= \big(8(\ln(x))^3 + 36(\ln(x))^2 + 24\ln(x)\big)\frac{1}{x} \\
f^{(4)}(x) &= \big(24(\ln(x))^3 + 72\ln(x) + 24\big)\frac{1}{x^2} - \big(8(\ln(x))^3 + 36(\ln(x))^2 + 24\ln(x)\big)\frac{1}{x^2} \\
&= \big(-8(\ln(x))^3 - 12(\ln(x))^2 + 48\ln(x) + 24\big)\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

1 Nullstellen

Bedingung: $f(x) = 0$, also

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{\overset{!}{=}0}\underbrace{(\ln(x))}_{\overset{!}{=}0}{}^4.$$

- $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, entfällt da $0 \notin \mathrm{Db}(f)$
- $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, also ist $x = 1$ eine (4-fache) Nullstelle
  Warum 4-fach? Wegen

  $$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0, \quad f''(1) = 0, \quad f'''(1) = 0, \quad f^{(4)}(1) = 24 \neq 0$$

2 Lokale Extremstellen

- **notwendige Bedingung** $f'(x) = 0$

  $$\begin{aligned}
  &2x(\ln(x))^3(2 + \ln(x)) = 0 \\
  \Rightarrow\quad &\ln(x) = 0 \quad \vee \quad 2 + \ln(x) = 0 \\
  \Rightarrow\quad &\text{mögliche Extremstellen:} \quad x_{E_1} = 1, x_{E_2} = \mathrm{e}^{-2}
  \end{aligned}$$

- **hinreichende Bedingung (Variante 1)**
  Wir nutzen Satz 4. Das Einsetzen in die Ableitungen ergibt:

- Stelle $x_{E_1} = 1$:

$$f''(1) = 0, \quad f'''(1) = 0, \quad f^{(4)}(1) = 24 > 0$$

  Also ist der Punkt $(1, f(1)) = (1, 0)$ ein lokales Minimum
- Stelle $x_{E_2} = \mathrm{e}^{-2}$:

$$f''(\mathrm{e}^{-2}) = 2(-2)^4 + 12(-2)^3 + 12(-2)^2 = -16 < 0$$

  Also ist der Punkt $(\mathrm{e}^{-2}, f(\mathrm{e}^{-2})) = (\mathrm{e}^{-2}, 16\mathrm{e}^{-4})$ ein lokales Maximum

- **hinreichende Bedingung (Variante 2)**
  Wir nutzen Satz 4′. Wir untersuchen den Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung.

	$2x$	$(\ln(x))^3$	$(2+\ln(x))$		$f'(x)$	
$x_{E_1} = 1$	$+$	$(- \to +)$	$+$	$\Rightarrow$	$(- \to +)$	Minimum
$x_{E_2} = \mathrm{e}^{-2}$	$+$	$-$	$(- \to +)$	$\Rightarrow$	$(+ \to -)$	Maximum

3 Wendestellen

- **notwendige Bedingung** $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} & 2(\ln(x))^2\big((\ln(x))^2 + 6\ln(x) + 6\big) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \underbrace{\ln(x) = 0}_{\text{keine Wendest. siehe oben}} \quad \vee \quad \underbrace{(\ln(x))^2 + 6\ln(x) + 6 = 0}_{\Leftrightarrow \quad \ln(x) = -3 \pm \sqrt{3}} \\ \Rightarrow \quad & \text{mögliche Wendestellen:} \quad x_{W_1} = \mathrm{e}^{-3-\sqrt{3}}, x_{W_2} = \mathrm{e}^{-3+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

- **hinreichende Bedingung (Variante 1)**
  Wir nutzen Satz 5. Das Einsetzen in die Ableitungen ergibt:
  - Stelle $x_{W_1} = \mathrm{e}^{-3-\sqrt{3}}$:

$$f'''(\mathrm{e}^{-3-\sqrt{3}}) = -17612.58 < 0$$

    Also ist der Punkt $(\mathrm{e}^{-3-\sqrt{3}}, f(\mathrm{e}^{-3-\sqrt{3}})) = (0.0088, 0.0389)$ ein Wendepunkt (konvex $\to$ konkav)
  - Stelle $x_{W_2} = \mathrm{e}^{-3+\sqrt{3}}$:

$$f'''(\mathrm{e}^{-3+\sqrt{3}}) = 39.58 > 0$$

    Also ist der Punkt $(\mathrm{e}^{-3+\sqrt{3}}, f(\mathrm{e}^{-3+\sqrt{3}})) = (0.2814, 0.2047)$ ein Wendepunkt (konvex $\to$ konkav)

- **hinreichende Bedingung (Variante 2)**
  Wir nutzen Satz 5'. Wir untersuchen den Vorzeichenwechsel der 2. Ableitung.
  Sofort klar ist: x_{W_1} und x_{W_2} sind jeweils einfache Nullstellen von f''. Daher findet ein Vorzeichenwechsel von f'' (an diesen Stellen) statt, also sind

  $$\begin{aligned} W_1 &= (x_{W_1}, f(x_{W_1})) = (0.0088, 0.0389), \\ W_2 &= (x_{W_2}, f(x_{W_2})) = (0.2814, 0.2047) \end{aligned}$$

  Wendepunkte.

  Um mit dieser Variante die Art des Wendepunktes zu bestimmen ist eine genauere Untersuchung ähnlich wie bei den Extremstellen (als z.B mit Tabelle) nötig:

  Wegen $f''(x) = 2(\ln(x))^2 \cdot \big((\ln(x))^2 + 6\ln(x) + 6\big)$

	$2(\ln(x))^2$	$(\ln(x))^2 + 6\ln(x) + 6$		$f'(x)$	
$x_{W_1} = \mathrm{e}^{-3-\sqrt{3}}$	$+$	$(+ \to -)$	$\Rightarrow$	$(+ \to -)$	konvex→konkav
$x_{W_2} = \mathrm{e}^{-3+\sqrt{3}}$	$+$	$(- \to +)$	$\Rightarrow$	$(- \to +)$	konkav→konvex

4 Verhalten bei $x \to \infty$ und $x \searrow 0$

- Mit der wiederholten Anwendung der Regel von l'Hospital erhalten wir

  $$\lim_{x \searrow 0} \frac{(\ln(x))^4}{x^{-2}} \overset{“\frac{\infty}{\infty}”}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{4(\ln(x))^3 \cdot \frac{1}{x}}{-2 \cdot x^{-3}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{-2(\ln(x))^3}{x^{-2}} = \cdots = 0.$$

  Bemerkung: Wir erkennen, dass nach einmaligem Anwenden von l'Hospital bis auf einen Vorfaktor und den Exponenten (3 statt 4) der gleiche Bruch entsteht. Nach drei weiteren Anwendungen von l'Hospital wird der Exponent gleich 0 sein.

- Analoge Vorgehensweise liefert

  $$\lim_{x \searrow 0} f'(x) = 0$$

- Offensichtlich gilt

  $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^2(\ln(x))^4 = \infty$$

5 Graphische Veranschaulichung