



# **Mathematik I**

**Vorlesungsskript**

Mitschrift von Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von Herrn Michael Meinhold  
& Prof. Dr. Fabian Schwarzenberger

10. Mai 2016

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Elementare Grundlagen</b>	<b>4</b>
1.1	Aussagen und Grundzüge der Logik . . . . .	4
1.2	Mengen . . . . .	4
1.3	Zahlen . . . . .	4
1.4	Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen . . . . .	4
1.5	Lineare Algebra . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Folgen, Reihen, Grenzwerte</b>	<b>5</b>
2.1	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen . . . . .	5
2.1.1	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	5
2.1.2	Stetigkeit von Funktionen . . . . .	8
2.2	Potenzreihen . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen</b>	<b>13</b>
3.1	Grundbegriffe . . . . .	13
3.1.1	Das Differential . . . . .	14
3.2	Differentiationsregeln . . . . .	15
3.3	Anwendungen . . . . .	17
3.3.1	Taylorische Formel, Taylor-Reihe . . . . .	17
3.3.1.1	Taylor Reihen . . . . .	19
3.3.2	Grenzwertbestimmung mittels der Regel von l'Hopital . . . . .	20
3.3.3	Kurvendiskussion . . . . .	23
3.3.4	Kurvendarstellungen . . . . .	24
3.3.4.1	Darstellung ebener Kurven . . . . .	24
3.3.4.2	Tangenten und Normalen ebener Kurven . . . . .	26
3.3.4.3	Krümmung ebener Kurven . . . . .	27
3.3.4.4	Raumkurven . . . . .	28
3.3.5	Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Integralrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen</b>	<b>30</b>
4.1	Der Integralbegriff . . . . .	30
4.1.1	Das bestimmte Integral . . . . .	30
4.1.2	Sammfunktion und unbestimmtes Integral . . . . .	31
4.1.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) . . . . .	32
4.2	Integrationsmethoden . . . . .	32
4.2.1	Substitution . . . . .	32
4.2.2	Partielle Integration . . . . .	34
4.2.3	Integration gebrochen rationaler Funktionen . . . . .	35
4.2.4	Integration von Potenzreihen . . . . .	37
4.3	Numerische Integration . . . . .	37
4.4	Uneigentliche Integrale . . . . .	38
4.5	Anwendungen . . . . .	40
4.5.1	Geometrische Anwendungen . . . . .	40
4.5.1.1	Inhalte ebener Flächen . . . . .	40
4.5.1.2	Bogenlänge . . . . .	41

4.5.1.3	Volumen von Rotationskörpern . . . . .	42
4.5.1.4	Mantelflächen von Rotationskörpern . . . . .	43
4.5.1.5	Fourier-Reihen . . . . .	44

# **1 Elementare Grundlagen**

## **1.1 Aussagen und Grundzüge der Logik**

## **1.2 Mengen**

## **1.3 Zahlen**

## **1.4 Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen**

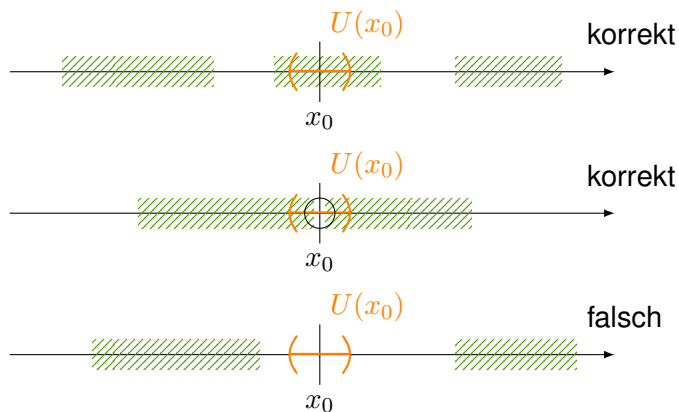
## **1.5 Lineare Algebra**

## 2 Folgen, Reihen, Grenzwerte

### 2.1 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

#### 2.1.1 Grenzwerte von Funktionen

**Def. 1:** Es sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und es existiere eine Umgebung  $U(x_0)$  mit  $U(x_0) \setminus \{x_0\} \subseteq Db(f)$ .



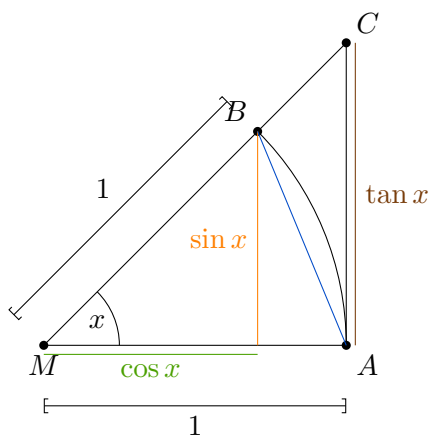
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow$  Für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in Db(f)$ ,  $x_n \neq x_0$  (für alle  $n$ ) und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda$ .

Anschaulich:  $f(x)$  strebt gegen  $\lambda$ , wenn  $x$  gegen  $x_0$  strebt.

**Bemerkung:** Die Stelle  $x_0$  muss *nicht* selbst zum Definitionsbereich gehören.

**Bsp. 1:**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$



$$\begin{aligned} F_{\triangle MAB} &\leq F_{\text{Sektor } MAB} \leq F_{\triangle MAC} \\ \frac{1}{2} \sin x &< \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x \quad | \cdot \frac{2}{\sin x} \\ \Leftrightarrow 1 &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Analog zu Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen gilt:

**Satz 1:** Es gelte  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ . Dann:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot a$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$  (falls  $b \neq 0$ )

**Bsp. 2:**

a.)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 7x + 4}{3 \cos x} = \frac{4}{3}$

b.)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \frac{0}{0}$  Satz nicht anwendbar.

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 2 = 5$$

(andere Möglichkeit mit  $\frac{0}{0}$  umzugehen lernen wir später)

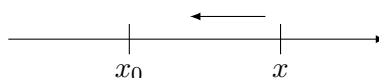
**Def. 2:**

a.) rechtseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = a : \Leftrightarrow \text{für jede Folge } (x_n) \text{ mit } x_n \in Db(f) \text{ und } x_n > x_0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ gilt}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$$

Andere Schreibweise:  $\lim_{x \searrow x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0}$



b.) linkseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = a : \Leftrightarrow \text{analog rechtsseitiger Grenzwert}$$

c.)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a : \Leftrightarrow \text{für jede Folge } (x_n) \text{ mit } x_n \in Db(f) \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a.$

d.)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a : \Leftrightarrow \text{analog s.o.}$

**Diskussion:** Uneigentliche Grenzwerte:

Wir schreiben  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$  bei bestimmter Divergenz der Funktionswerte für:

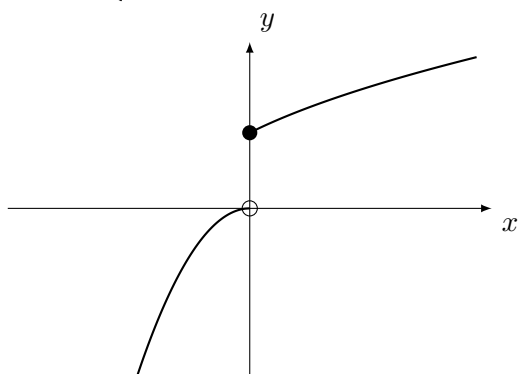
$$\bullet \begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ x \nearrow x_0 \\ x \searrow x_0 \\ x \rightarrow \infty \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

**Satz 2:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = a$$

**Bsp. 3:** (einseitiger Grenzwert)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existiert nicht!}$$

**Bsp. 4:**

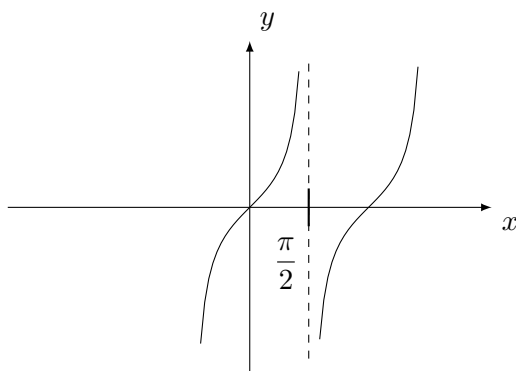
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{4}{x}\right) = "\infty \cdot 0"$$

$$\stackrel{u=\frac{4}{x}}{=} \lim_{u \searrow 0} \frac{4}{u} \sin(u) = 4$$

**Bsp. 5:**

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$$

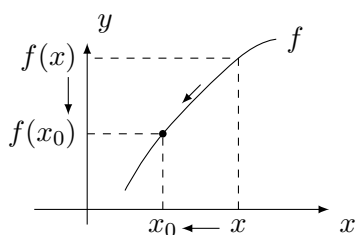
$$\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$$



## 2.1.2 Stetigkeit von Funktionen

**Def. 3:** Sei  $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in Db(f)$  gegeben. Es heißt  $f$ :

- a.) stetig in  $x_0$  falls  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  gilt  
(also  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$ , d.h. Limes und Funktion kann vertauscht werden).



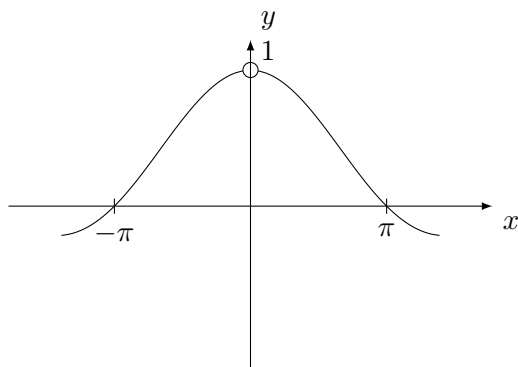
- b.) linksseitig stetig in  $x_0$ , falls  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .  
c.) rechtsseitig stetig in  $x_0$ , falls  $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Bsp. 6:**

- a.)  $f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  ist in  $x_0 = 0$  nicht stetig, da  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$ .

Aber  $\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$  ist in  $x_0 = 0$  stetig.

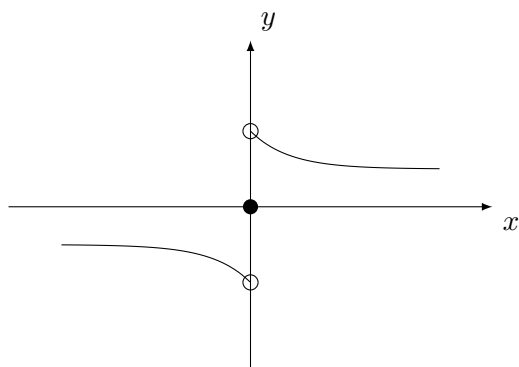
Bezeichnung: hebbare Unstetigkeit.



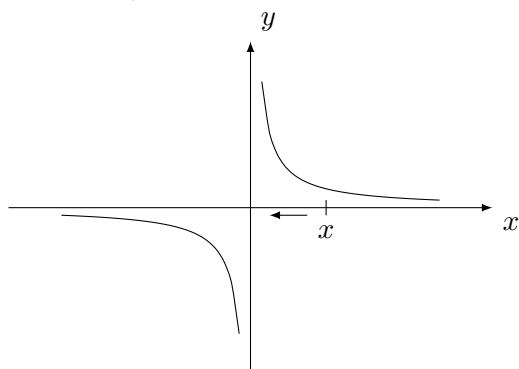


b.)  $f_2(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  ist unstetig in  $x_0 = 0$ , da  $\lim_{x \nearrow 0} f_2(x) \neq f_2(0) \neq \lim_{x \searrow 0} f_2(x)$

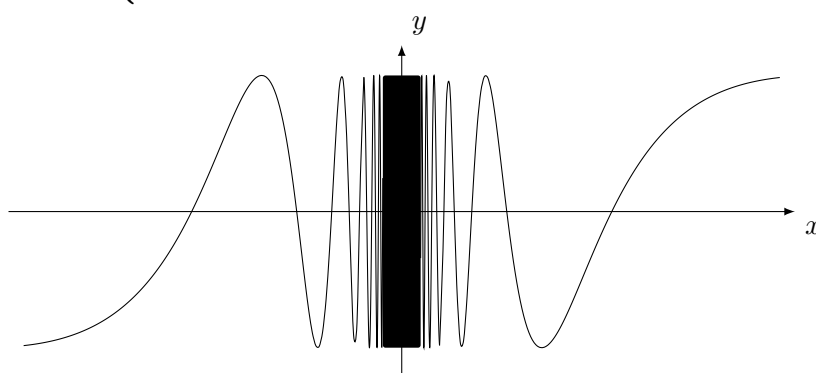
Bezeichnung: endlicher Sprung.



c.)  $f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  ist unstetig in  $x_0 = 0$ , da  $\lim_{x \nearrow 0} f_3(x) = \infty \neq f_3(0)$ .



d.)  $f_3(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$  ist unstetig in  $x_0 = 0$ , da der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  nicht existiert.



**Def. 4:** Die Funktion  $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$  heißt

a.) in einem Intervall  $I \subset Db(f)$  stetig, falls  $f$  an jeder inneren Stelle  $x_0 \in I$  stetig ist und in evtl. zu  $I$  gehörenden Randpunkten einseitig stetig ist.

b.) stetig, falls  $f$  in allen Punkten  $x_0 \in Db(f)$  stetig ist.

**Bemerkung:** Jede der in ?? und ?? betrachteten Funktionen ist stetig.

**Bsp. 7:**  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$  ist stetig.

**Satz 3:** Sind  $f$  und  $g$  stetig in  $x_0$ , so sind auch  $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g$ ,  $f \cdot g$  und  $\frac{f}{g}$  (falls  $g(x_0) \neq 0$ ) stetig in  $x_0$ .

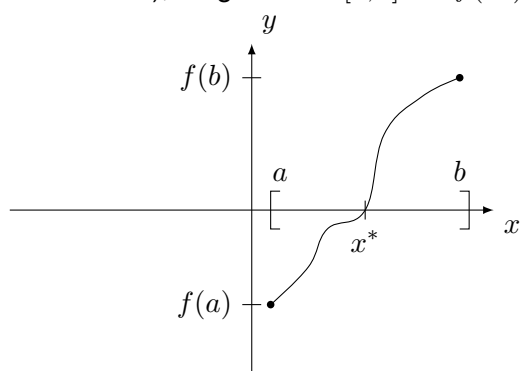
**Satz 4:** (Stetigkeit und Verknüpfungen)

Seien  $g : Db(g) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $Wb(g) \subseteq Db(f)$ , dann gilt:

Ist  $g$  stetig in  $x_0$  und  $f$  stetig in  $g(x_0)$ , so ist  $f \circ g : Db(g) \rightarrow \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = f(g(x))$  stetig in  $x_0$ .

**Satz 5:** (Zwischenwertsatz)

Sei  $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b] \subseteq Db(f)$ . Falls  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (also haben unterschiedliche Vorzeichen), so gilt  $\exists x^* \in [a, b]$  mit  $f(x^*) = 0$



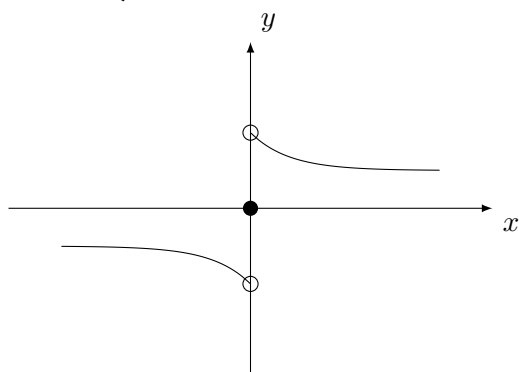
**Satz 6:** Sei  $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$ . Dann nimmt  $f$  auf  $[a, b]$  Minimum und Maximum an.

**Diskussion:**

a.)  $f(x) = \tan x$  nimmt auf  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  kein Maximum an.

ABB21

b.)  $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  nicht stetig und nimmt kein Maximum auf  $[-1, 1]$  an.



## 2.2 Potenzreihen

**Def.:** Sei  $(a_n)$  eine Zahlenfolge und  $x_0 \in \mathbb{R}$  heißt  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  Potenzreihe mit dem Mittelpunkt  $x_0$ .

### Diskussion:

- Für jedes feste  $x \in \mathbb{R}$  ist die Potenzreihe eine feste Reihe.
- Konvergenzbereich  $K := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{Potenzreihe ist konvergent}\}$
- Für jedes  $x \in K$  existiert der Summenwert der Potenzreihe. Die Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  heißt Grenzfunktion der Potenzreihe.

Zur Bestimmung des Konvergenzbereichs nutzt man Satz 10 und 11 aus ?? und erhält absolute Konvergenz in einem um  $x_0$  liegendem Konvergenzintervall  $I := (x_0 - r, x_0 + r)$ .

Wie  $r$  bestimmt wird liefert:

**Satz 1:** Sei  $(a_n)$  Zahlenfolge mit  $r := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$  existiert.

Dann ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < r \\ \text{divergent} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| > r \end{cases}$

### Diskussion:

- Verwechslungsgefahr:
  - Satz 10 und 11 betrachten (Zahlen-)Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
  - Satz 1 betrachtet Potenzreihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ , wobei  $a_n$  ein Faktor vor  $(x - x_0)^n$  ist.
- Falls der Grenzwert  $r$  aus Satz 1 nicht existiert, so gibt es trotzdem einen Konvergenzradius. Den gilt es auf andere Weise zu betrachten/ermitteln.
- Satz 1 sagt nichts über das Verhalten an den Randpunkten aus  $\rightarrow$  gesonderte Untersuchung nötig.

### Bsp. 1:

a.)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ , d.h.  $x_0 = 0$ ,  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} \right|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$\Rightarrow$  Konvergenzintervall  $I = (-1, 1)$

Randpunkte:

$x = -1$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  bedingt konvergent (alternierenden harmonische Reihe)

$$x = 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergent}$$

$\Rightarrow$  Konvergenzbereich:  $K = [-1, 1)$

$$\text{b.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ d.h. } x_0 = 0, a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$\Rightarrow r = \infty$$

d.h. die Reihe ist absolut konvergent für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Bezeichnung: *beständige Konvergenz*

$$\text{c.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \dots \quad \text{d.h. } x_0 = 0, a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Satz 1 ist aber nicht unmittelbar anwendbar.

Substitution  $u := x^2$  liefert aber  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{(2n)!}$  mit  $u_0 = 0, b_n = \frac{1}{(2n)!}$  ( $\sum b_n(u - u_0)^n$ )

$$\left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+2) \cdot (2n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$\Rightarrow r_u = \infty$  (Konvergenzradius für die Substituierte Reihe)

$\Rightarrow r_x = \sqrt{\infty} = \infty$  (Konvergenzradius für die untersuchte Funktion)

Im Konvergenzbereich  $K$  wird dadurch eine Potenzreihe eine Funktion dargestellt, die Grenzfunktion (siehe vorhergehende Diskussion).

### Bsp. 2:

$$\text{a.) } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ für } x \in (-1, 1) \text{ (geometrische Reihe)}$$

$$\text{b.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ (Beweis später)}$$

**Satz 2:** Die Grenzfunktion jeder Potenzreihe ist im Konvergenzbereich stetig.

# 3 Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen

## 3.1 Grundbegriffe

Tangentenproblem

ABB38

Gegeben:  $y = f(x)$

Gesucht: Tangente im Punkt  $(x_0, f(x_0))$

- Zunächst **Sekante** durch  $(x_1, f(x_1))$  und  $(x_0, f(x_0))$
- Dann betrachten wir  $x_1 \rightarrow x_0$
- Damit geht **Sekante** über in die **Tangente**.  
Außerdem geht  $\varphi$  in  $\alpha$  über.

$$\tan \alpha = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \tan \varphi = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}}$$

**Def. 1:** Die Funktion  $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt an der Stelle  $x_0$  (mit  $U(x_0) \subseteq Db(f)$ ) differenzierbar, falls

der Grenzwert  $\boxed{f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$  existiert.

$f'(x_0)$  heißt dann **1. Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

**Diskussion:**

- $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
- Gleichung der Tangente in  $(x_0, f(x_0))$  ist  $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  ( $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) Anstieg der Tangente ist als  $m = \tan \alpha = f'(x_0)$
- $f$  in  $x_0$  differenzierbar bedeutet es existiert eine eindeutige Tangente an die Kurve in dieser Stelle.  
z.B. ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$  in  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar:  
ABB39

**Satz 1:** Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar, so ist  $f$  in  $x_0$  stetig.

Beweis:

Sei  $f$  in  $x_n$  differenzierbar und  $(x_n)$  eine beliebige Folge mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Dann gilt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$  existiert.

$$\Rightarrow \exists K > 0 \text{ mit } \left| \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right| = \frac{|f(x_n) - f(x_0)|}{|x_n - x_0|} \leq K$$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| \leq K \cdot |x_n - x_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ ist stetig.}$$

**Def. 2:** Eine Funktion  $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$  heißt

a.) differenzierbar im Intervall  $I \subseteq Db(f)$ , falls  $f$  an jeder inneren Stelle  $x_0 \in I$  differenzierbar ist und in eventuellen Randpunkten einseitig differenzierbar ist.

d.h.  $\lim_{x \nearrow x_r} \frac{f(x) - f(x_r)}{x - x_r}$  bzw.  $\lim_{x \searrow x_r} \frac{f(x) - f(x_r)}{x - x_r}$  existiert

b.) differenzierbar, wenn  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in Db(f)$  differenzierbar ist.

**Schreibweise:**

Die resultierende Funktion bezeichnen wir mit

$$f' : Db(f') \rightarrow \mathbb{R}, f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

wobei  $Db(f')$  aus allen Punkten  $x \in Db(f)$  besteht für welche der genannte Grenzwert existiert.

**Def. 3:** Sei  $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ . Wir definieren rekursiv die  $n$ -te Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$  mittels

$$f^{(n)}(x_0) := (f^{(n-1)})'(x_0) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

wobei  $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$  (unter der Voraussetzung, dass die jeweilige Ableitung existiert).

**Bsp. 1:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) : x^n, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h} ((x+h)^n - x^n) \\ &= \frac{1}{h} \left( x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n - x^n \right) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

d.h.  $f$  ist auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar.  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ .

**Bsp. 2:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \sin(x)$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \quad | \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \\ &= \frac{2 \cdot \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= \frac{\cos \left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \quad | \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Also  $f'(x) = \cos x$ .

**Bemerkung:** Ableitung der wichtigsten Grundfunktionen findet man in Formelsammlungen.

Zur Ableitung zusammengesetzter Funktionen lernen wir im später weitere Ableitungsregeln kennen.

### 3.1.1 Das Differential

ABB 49

$$dy = h \cdot \tan \alpha = f \cdot f'(x_0)$$

**Def. 4:**

- a.)  $dy := f'(x_0) \cdot h$  heißt das zur Stelle  $x_0$  und dem Zuwachs  $h = \Delta x$  gehörende *Differential* von  $f$ .
- b.)  $\Delta y := f(x_0 + h) - f(x_0)$  heißt die zur Stelle  $x_0$  und dem Zuwachs  $h = \Delta x$  gehörende *Differenz* von  $f$ .

**Diskussion**

- 1.)  $\Delta y$  ist die Änderung der Funktion  $f$ , wenn  $x$  in  $x + h$  übergeht;  $dy$  ist die entsprechende Änderung wenn statt  $f$  die Tangente an der Stelle  $x_0$  betrachtet wird (Linearisierung).
- 2.) Für kleine Zuwächse  $\Delta x$  gilt:  $\Delta y \approx dy$   
d.h.  $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$  für kleines  $\Delta x$  (nutzt man in der Fehlerrechnung)
- 3.) Sei  $y = f(x) = x \Rightarrow dy = dx = 1 \cdot h$  also  $\boxed{h = \Delta x = dx}$
- 4.) Damit  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$   
Also: 1. Ableitung = Differentialquotient  
andere Schreibweise:  $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$
- 5.) Höhere Ableitungen:  
$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

## 3.2 Differentiationsregeln

**Satz 1:** Falls die Ableitungen auf der rechten Seite existieren:

- $(C_1 u(x) + C_2 v(x))' = C_1 u'(x) + C_2 v'(x)$  (Linearität)
- $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$  (Produktregel)
- $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$  (Quotientenregel)

**Bsp. 1:**

- a.)  $f(x) = 7x^4 + \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 7x^4 + x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} \quad (x > 0)$   

$$\Rightarrow f'(x) = 28x^3 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{2}} = 28x^3 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$
- b.)  $f(x) = x \cdot \ln x \quad (x \geq 0)$   

$$\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1 \quad (\text{Produktregel})$$
- c.)  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 2}$   

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^x \cdot (x^2 + 2) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2)^2} \quad (\text{Quotientenregel})$$

**Satz 2:** Seien  $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Db(g) \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $Db(g) \subseteq \mathbb{R}$  und

- $g$  bei  $x_0 \in Db(g)$  differenzierbar
- $f$  bei  $g(x_0) \in Db(f)$  differenzierbar

so gilt:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

**Diskussion:**  $y = f(\underbrace{g(x)}_u) = f(u)$  mit  $u = g(x)$

Differentialschreibweise:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{äußere Ableitung} \cdot \text{innere Ableitung})$$

**Bsp. 2:**

a.)  $y = f(x) = \sin \underbrace{3x}_u$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 3 = 3 \cos 3x$$

b.)  $y = f(x) = 2^{\tan(3x)} \quad \left(-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}\right)$

Substitution:

$$u := \tan 3x$$

$$v := 3x$$

$$\Rightarrow y = 2^u, \quad u = \tan v$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 2^u \cdot \ln 2 \cdot (1 + \tan^2 v) \cdot 3 = 3 \cdot 2^{\tan 3x} \cdot \ln 2 \cdot (1 + \tan^2 3x)$$

**Bsp. 3:** (Logarithmische Differentiation)

$$f(x) = x^{\sin x} \quad x \in (0, \infty)$$

Basis und Exponent hängen von  $x$  ab!

Die Regeln  $(x^a)' = ax^{a-1}$  bzw.  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$  sind nicht unmittelbar anwendbar.

Betrachten:

$$f(x) = x^{\sin x}$$

$$\ln(f(x)) = \sin x \cdot \ln x$$

$$\xrightarrow{\text{Ableiten}} \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot (\cos(x) \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

**Satz 3:** Sei  $f : (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  Grenzfunktion einer Potenzreihe mit Kurvenradius  $r$ .

Dann gilt für alle  $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ :  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x - x_0)^{n-1}$



**Bsp. 4:**  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad |x| < 1$$

### 3.3 Anwendungen

#### 3.3.1 Taylorsche Formel, Taylor-Reihe

**Problem:** „Komplizierte“ Funktionen  $f$  soll in der Umgebung von  $x_0$  durch ein Polynom  $p_n$   $n$ -ten Grades angenähert werden.

**Ansatz:**  $p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$

**Forderung:**  $p_n(x_0) = f(x_0), p'_n(x_0) = f'(x_0), p''_n(x_0) = f''(x_0), \dots$

liefert:  $p_n(x_0) = a_0, p'_n(x_0) = a_1, p''_n(x_0) = 2a_2, \dots$

und  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ .

Allgemein:  $p_n^{(k)} = k!a_k$  für  $k = 0, 1, \dots, n$

**Def. 1:** Das Polynom  $p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$  heißt *Taylorpolynom*  $n$ -ten Grades mit Entwicklungsstelle  $x_0$ .

#### Diskussion:

1.)  $p_n$  ist eine Näherung für  $f$ .

Fehler:  $f(x) - p_n(x) =: R_n(x)$  heißt Restglied

2.) Restglied ist im Allgemeinen umso kleiner, je kleiner  $|x - x_0|$  ist und je größer  $n$  ist.

ABB 54

#### Satz 1: Taylorsche Formel

Es sei  $f$  in  $[a, b]$   $(n+1)$ -mal differenzierbar, sowie  $x_0, x \in [a, b]$ . Dann existiert ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$

(d.h.  $\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0)$  mit  $\vartheta \in (0, 1)$ ) mit  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ : *Restgliedform von Lagrange*.

$$\text{Es gilt also } f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{p_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

**Diskussion:** Spezialfall  $n = 0$ :  $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$  (*Mittelwertsatz der Differentialrechnung*)

ABB 55

Satz sagt: es gibt zwischen  $x_0$  und  $x_1$  einen Punkt auf der Funktion, sodass die Senkante die Tangente dieses Punktes ist.

Umstellen liefert:

$$\underbrace{f'(\xi)}_{\text{Anstieg der Tangente}} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Anstieg der Sekante}}$$

**Bsp. 1:**  $f(x) = e^x \quad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x = f''(x) = f'''(x) = \dots$$

$$\stackrel{x_0=0}{\implies} f'(0) = 1 = f''(0) = f'''(0) = \dots$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot x^k + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad 0 < \vartheta < 1$$

Wie gut ist diese Näherung?

Für  $x = \frac{1}{10} = 0,1$  und  $n = 4$  gilt:

$$e^{0,1} = 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,1^2}{2!} + \frac{0,1^3}{3!} + \frac{0,1^4}{4!} + \underbrace{\frac{0,1^5}{5!} e^{\vartheta \cdot 0,1}}_{R_4(0,1)} \text{ für ein } \vartheta \in (0,1).$$

$$\Rightarrow e^{0,1} = \underbrace{1 + 0,1 + 0,005 + 0,0001\bar{6} + 0,0000041\bar{6}}_{=1,1051708\bar{3}} + R_4(0,1) \text{ Abschätzen des } \vartheta:$$

$$\begin{aligned} 8, \bar{3} \cdot 10^{-8} &= \frac{0,1^5}{5!} = \frac{0,1^5}{5!} e^0 < \frac{0,1^5}{5!} e^{\vartheta \cdot 0,1} < \frac{0,1^5}{5!} e^{1 \cdot 0,1} < \frac{0,1^5}{5!} \cdot 3 = 25 \cdot 10^{-8} \\ \Rightarrow 1,1051708\bar{3} + 8, \bar{3} &\leq e^{0,1} \leq 1,1051708\bar{3} + 25 \cdot 10^{-8} \\ 1,10517091\bar{6} &\leq e^{0,1} \leq 1,10517108\bar{3} \end{aligned}$$

**Bsp. 2:**

$$f(x) = \cos(x), \quad x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(x_0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(x_0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(4)}(x_0) = 1$$

...

$$n = 2m + 1$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \underbrace{1}_{f(x_0)} + \underbrace{0}_{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)} + \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2} + 0 + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 0 + R_{2m+1} \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \cos(\vartheta x) \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \end{aligned}$$

ABB 56

$$\text{Näherung: } \cos x \equiv 1 - \frac{x^2}{2} \text{ für } |x| \ll 1$$

$$\text{Fehler: } |R_3(x)| \leq \frac{x^4}{4!}$$

Bsp.:

$$\cos 5^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{36}\right) = 1 - \underbrace{\frac{\pi^2}{2 \cdot 36^2}}_{0,9961923} + R_3$$

...

$$|R_2| \leq \frac{\pi^4}{36^4 \cdot 24} = 2,416 \cdot 10^{-6}$$

genau gilt:  $\cos 5^\circ = 0,99619$  (auf 5 Stellen genau)

**Bsp. 3:**  $f(x) = (1+x)^\alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

...

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$= \binom{\alpha}{k} \cdot k!(1+x)^{\alpha-k}$$

wir betrachten  $x_0 = 0$

$$f(0) = 1, f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha-1), \dots, f^{(k)}(0) = \binom{\alpha}{k} k!$$

Erinnerung:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } n, k \in \mathbb{N}, k \leq n \\ \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} & \text{kann für beliebige } n \in \mathbb{R} \text{ ausgewertet werden.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1} (1+\vartheta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \text{ mit } \vartheta \in (0,1)$$

**Bsp. 4:**  $f(x) \dots$  Polynom  $n$ -ten Grades

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow R_n(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{Taylorpolynom stellt } f \text{ exakt dar (Entwicklung nach Potenzen von } (x-x_0))$$

### 3.3.1.1 Taylor Reihen

**Satz 2:** Es sei  $f$  auf  $U(x_0)$  beliebig oft differenzierbar und es gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ .

Dann gilt 
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

Denn: Taylor-Formel sagt  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x)$ . Mit  $n \rightarrow \infty$  folgt die Behauptung.

**Bsp. 5:**  $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$  (vgl. Bsp. 1)

Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Sei  $x \in \mathbb{R}$  fest. Wähle  $n_0$  so, dass  $q := \frac{|x|}{n_0} < 1$ .

$\Rightarrow$  für  $n > n_0$  gilt:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| e^{\vartheta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq e^{|\vartheta x|} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &< e^{|x|} \cdot \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{n_0} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{n_0} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{n_0}}_{(n-n_0+1) \text{ Faktoren}} \\ &= e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n_0}}{n_0!} \cdot q^{n-n_0+1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ für alle } x \in (-\infty, \infty)$$

**Bsp. 6:**  $\cos x = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2m+1}(x)$  (vgl. Bsp. 2)

Ähnlich wie in Bsp. 5 kann man zeigen  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2m+1}(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\Rightarrow \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad x \in (-\infty, \infty)$$

Analog:  $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad x \in (-\infty, \infty)$

**Bsp. 7:** Restglieduntersuchung in Bsp. 3 führt zu:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad |x| < 1, \alpha \in \mathbb{R}$$

z.B. für  $\alpha = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots \\ &\approx 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{falls } |x| \ll 1 \end{aligned}$$

### 3.3.2 Grenzwertbestimmung mittels der Regel von l'Hopital

**Satz 3:** (Regel von l'Hopital)

Es gelte:

1.)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .

2.)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert (als eigentlicher und uneigentlicher Grenzwert).

Dann folgt:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (Typ:  $\frac{0}{0}$ )

Die gleiche Aussage gilt, wenn 1.) ersetzt wird durch

1'.)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$  (Typ:  $\frac{\infty}{\infty}$ )

**Beweis:** seien  $f, g, f', g'$  stetig in  $x_0$  und  $g'(x_0) \neq 0$

$$\text{Mittelwertsatz: } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overbrace{f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)}^0}{\underbrace{g(x_0) + g'(\xi)(x - x_0)}_0} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

**Bsp. 8:**

$$\begin{aligned} \text{a.) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c.) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos x} &= 2 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} = 2 \end{aligned}$$

Regel also auch mehrfach hintereinander anwendbar.

$$\begin{aligned} \text{d.) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh x} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh(x+1)}{\sinh x} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh x} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \dots \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Satz nicht anwendbar, da 2.) nie erfüllt ist.

Aber:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x+1} - e^{-(x+1)}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x+1} (1 - e^{-2(x+1)})}{e^x (1 + e^{-2x})} = e \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2(x+1)}}{1 + e^{-2x}}}_{=1} = e$$

**Diskussion:**

1.) Man beachte, dass der Anwendung von Satz 3 Zähler und Nenner einzeln differenziert werden (keine Quotientenregel)!

2.) Falls  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  nicht existiert, darf man nicht schlussfolgern, dass  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  nicht existiert (siehe Bsp. 9).

**Bsp. 9:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sin x}{3x - \cos x} = \frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \cos x}{3 + \sin x}$  existiert nicht.

1.) erfüllt, 2.) nicht erfüllt  $\Rightarrow$  Satz nicht anwendbar

Aber:

$$\frac{5x + \sin x}{3x - \cos x} = \frac{x \left(5 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x \left(3 - \frac{\cos x}{x}\right)} = \frac{5 + \frac{\sin x}{x}}{3 - \frac{\cos x}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3}$$

Weitere unbestimmte Ausdrücke:

Durch Zurückführen auf  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$  lässt sich auch folgendes behandeln:

" $0 \cdot \infty$ ":  $f(x) \cdot g(x)$  als Doppelbruch schreiben, d.h.  $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$  oder  $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$  ist dann vom Typ  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$ .

" $\infty - \infty$ ": Ausklammern  $f(x) - g(x) = f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)$  oder falls Brüche vorliegen Hauptnenner bilden.

" $0^0$ " / " $1^\infty$ " / " $\infty^0$ ": Umformung

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \exp \left( \ln \left( f(x)^{g(x)} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \exp \left( g(x) \ln f(x) \right) \\ &= \exp \left( \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{g(x) \cdot \ln f(x)}_{\text{Typ } "0 \cdot \infty"} \right) \end{aligned}$$

**Bsp. 10:**

a.)  $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \cdot \cot 3x \stackrel{"0 \cdot \infty"}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\frac{1}{\cot 3x}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\tan 3x} \stackrel{"0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x}{3(1 + \tan^2 3x)} = \frac{1}{3}$

b.)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \stackrel{"\infty - \infty"}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\sin x \cdot (e^x - 1)} \stackrel{"0}{=} \dots$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\cos x(e^x + 1) + \sin(x) \cdot e^x}$   
 $\stackrel{"0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{-\sin x \cdot (e^x - 1) + \cos(x) \cdot e^x + \cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x} = \frac{1}{2}$

c.)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} \stackrel{"1^\infty"}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \ln \left( (1-x)^{\frac{1}{x}} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left( \frac{\ln(1-x)}{x} \right)$   
 tauschen geht, da  $\exp(\cdot)$  stetig ist  
 $= \exp \left( \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}}_{\text{" " Typ } \frac{0}{0}} \right)$

Denn:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{1-x} = -1$

### 3.3.3 Kurvendiskussion

**Problemstellung:** Gegeben ist eine Funktion  $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$   $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$ .

Dann ist der Graph der Funktion definiert durch:  $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 | x \in Db(f)\}$ .

Dieser Graph ist zu untersuchen auf

- Nullstellen
- Stellen lokaler bzw. globaler Extrema
- Wendestellen
- Verhalten im Unendlichen, bzw. an den Randstellen des Definitionsbereichs  $Db(f)$  und (falls vorhanden) bei Annäherung an Unstetigkeitsstellen.

#### Diskussion:

- $x_0 \in Db(f)$  heißt **Nullstelle  $n$ -ter Ordnung**, falls  $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$ .  
Zur Nullstellenbestimmung lernen wir bald das (iterative) Newton-Verfahren kennen.
- Lokale Extrema** sind extremal bzgl. einer Umgebung der Extremstelle.  
**Globale Extrema** sind extremal bzgl. des gesamten Definitionsbereichs, sie sind lokale Extrema oder Funktionswerte in den Randpunkten.
- Wendepunkte** sind Punkte, an denen die Kurve von konkav in konvex oder von konvex in konkav übergeht.  
ABB 64  
ABB 65
- Einige einfache Zusammenhänge zwischen Eigenschaften der Kurve und der Ableitungen an der Stelle  $x_0$  ( $f$  sei auf  $U(x_0)$  hinreichend oft differenzierbar).

$f'(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	$f$ in Umgebung von $x_0$ streng monoton fallend.
$f'(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	$f$ in Umgebung von $x_0$ streng monoton wachsend.
$f'(x_0) = 0$	$\Leftarrow$	$f$ in $x_0$ lokal extremal.
$f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	$f$ in Umgebung von $x_0$ konkav.
$f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	$f$ in Umgebung von $x_0$ konvex.
$f''(x_0) = 0$	$\Leftarrow$	$x_0$ Wendestelle.
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	$f$ in $x_0$ lokal minimal
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	$f$ in $x_0$ lokal maximal
- Problem:  $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0$  ?  
Extremstelle oder Wendestelle oder was?

#### Hinreichende Bedingungen für das Vorliegen von Extremstellen

**Satz 4:** Sei  $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Db(f) \subseteq \mathbb{R}$  eine in  $x_0 \in Db(f)$   $n$ -mal differenzierbare Funktion und sei  $f^{(n)}$  stetig in  $x_0$ . Dann gilt falls  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$ :

- $n = 2, 4, 6, \dots$  (also gerade), so ist  $x_0$  lokale Extremstelle (Maximum falls  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , Minimum falls  $f^{(n)}(x_0) > 0$ ).

- b.)  $n = 3, 5, 7, \dots$  (also ungerade), so ist  $x_0$  eine Horizontal-Wendestelle (konvex  $\rightarrow$  konkav, falls  $f^{(n)}(x_0) < 0$ ; konkav  $\rightarrow$  konvex, falls  $f^{(n)}(x_0) > 0$ ).

ABB 66

Beweis mittels Taylor-Formal.

Oft ist auch folgendes Kriterium nützlich:

**Satz 4':** Sei  $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$  differenzierbar und  $x_0 \in Db(f)$ , sowie  $f'(x_0) = 0$ . Dann:

- a.)  $f'$  wechselt bei  $x_0$  das Vorzeichen  $\begin{cases} \text{von } + \text{ auf } - \Rightarrow x_0 \text{ lokale Maximumstelle} \\ \text{von } - \text{ auf } + \Rightarrow x_0 \text{ lokale Minimumstelle} \end{cases}$

- b.) kein Vorzeichenwechsel  $\Rightarrow x_0$  ist Horizontal-Wendestelle

### Hinreichende Bedingung für das Vorliegen einer Wendestelle

**Satz 5:** Sei  $f : Db(f) \rightarrow \mathbb{R}, Db(f) \subseteq \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar an  $x_0$  und  $f^{(n)}$  stetig in  $x_0$ . Dann gilt falls  $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$  und

- a.)  $n = 3, 5, 7, \dots \Rightarrow x_0$  ist Wendestelle  $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0 & \text{konvex} \Rightarrow \text{konkav} \\ f^{(n)}(x_0) > 0 & \text{konkav} \Rightarrow \text{konvex} \end{cases}$

- b.)  $n = 4, 6, 8, \dots \Rightarrow x_0$  keine Wendestelle, sondern sogenannte Flachstelle und Extremstelle, falls zusätzlich  $f'(x_0) = 0$ .

ABB 67

Analog zu Satz 4 und 4' gibt es auch für Wendestellen ein alternatives hinreichendes Kriterium:

**Satz 5':** Es sei  $f$  eine 2 mal differenzierbare Funktion (in Umgebung von  $x_0$ ), und es gelte  $f''(x_0) = 0$ . Dann:

- a.)  $f''$  wechselt bei  $x_0$  das Vorzeichen  $\begin{cases} \text{von } + \text{ auf } - : (\text{konvex} \rightarrow \text{konkav}) \text{ Wendestelle} \\ \text{von } - \text{ auf } + : (\text{konkav} \rightarrow \text{konvex}) \text{ Wendestelle} \end{cases}$

- b.) kein Vorzeichenwechsel  $\Rightarrow$  keine Wendestelle (sondern Flachstelle)

*Bemerkung* (zu Satz 4' und 5'):

Vorzeichenwechsel von  $f'$  bzw.  $f''$  bei  $x = x_0 \Leftrightarrow f'$  bzw.  $f''$  hat bei  $x_0$  Nullstelle ungerader Ordnung.

## 3.3.4 Kurvendarstellungen, Tangenten- und Normalengleichungen, Krümmung

### 3.3.4.1 Darstellung ebener Kurven

- 1.) *Explizite kartesische Darstellungen*  $y = f(x)$

Wobei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (vgl. Abschnitt 3.3.3).

- 2.) *Implizite kartesische Darstellungen*  $F(x, y) = 0$

Für graphische Darstellung ungünstig. Unter bestimmten Voraussetzungen lässt sich  $F(x, y) = 0$  auflösen nach  $y$  (oder  $x$ ). Mehr dazu im Kapitel ?? (Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher).

- 3.) *Parameter Darstellung*  $x = x(t), y = y(t), t \in I$  (kurz PD)

vektorielle Form:  $\underline{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, t \in I$



**Bsp. 13:**

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

$$t \in [0, 2\pi) \quad a, b > 0$$

$$t = 0 \Rightarrow x(0) = a, y(0) = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = b$$

$$t = \pi \Rightarrow x(\pi) = -a, y(\pi) = 0$$

Dies ergibt eine Ellipse.

ABB R1

Übergang zur Parameterfreien Darstellung:  $t$  eliminieren.

$$\frac{x}{a} = \cos t, \frac{y}{b} = \sin t \quad | \text{ Quadrieren und Addieren}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1}$$

**Bsp. 14:** Kreis mit Mittelpunkt  $M = (x_0, y_0)$  und Radius  $R$ .

$$\text{PD bspw.: } x = x_0 + r \cos t \quad y = y_0 + R \sin t \quad t \in [0, 2\pi)$$

Parameterfreie Darstellung:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

ABB R2

## 4.) Explizite Darstellung in Polar-Koordinaten

- Darstellung eines Punktes in der Ebene

ABB 72

$x, y \dots$  kartesischen Koordinaten

$r, \varphi \dots$  Polarkoordinaten von  $P$  (analog Betrag und Argument einer komplexen Zahl)  $r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$

Umrechnung:

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

- Kurvendarstellung  $r = r(\varphi)$  ,  $\varphi \in [\alpha, \beta]$

Bsp.:  $r(\varphi) = 2, \varphi \in [0, 2\pi)$

ABB 73

Für jeden Winkel  $\varphi \in [\alpha, \beta]$  die Strecke  $r(\varphi)$  auf den  $\varphi$  entsprechenden Strahl von 0 abtragen.

$$\text{Bsp. 15: } r = r(\varphi) = 8 \cos \varphi \quad , \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$8 \cos \varphi$	8	7,73	6,92	5,66	4	2,07	0

ABB R3

**Bemerkung**

- Übergang „explizite Darstellung  $\rightarrow$  Parameterdarstellung“

$$y = f(x), x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow x = t, y = f(t), t \in [a, b] \quad (t \text{ als Parameter})$$

- Übergang „explizite Polardarstellung  $\rightarrow$  Parameterdarstellung“

$$r = r(\varphi), \varphi \in [a, b]$$

$$\Rightarrow x = r(\varphi) \cos \varphi, y = r(\varphi) \sin \varphi, \varphi \in [a, b] \text{ (}\varphi \text{ als Parameter)}$$

### Im Bsp. 15:

$$x = 8 \cos^2 \varphi$$

$$y = 8 \cos \varphi \sin \varphi \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Parameterfreie Darstellung:

$$y^2 = 64 \underbrace{\cos^2 \varphi}_{\frac{x}{8}} \underbrace{\sin^2 \varphi}_{1 - \frac{x}{8}}$$

$$= x(8 - x)$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 4^2$$

(Halb-)Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt (4, 0).

### 3.3.4.2 Tangenten und Normalen ebener Kurven

- Anstieg  $y'$  einer in PD gegebener Kurve  $x = x(t), y = y(t), t \in I$ .

Dazu sei  $y = f(x)$  die explizite kartesische Form (ohne die Elimination von  $t$  durchzuführen).

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \text{ (Kettenregel)}$$

In Anwendungen in  $t$  oft die Zeit, üblicher Weise schreibt man dann:

$$\frac{dx}{dt} =: \dot{x} \quad \frac{dy}{dt} =: \dot{y} \quad \Rightarrow y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} =: \ddot{x} \dots$$

- Tangente im Punkt  $P_0 = (x_0, y_0), x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$

ABB 74

(Ein) Richtungsvektor der Tangente in  $x_0, y_0$  ist gegeben durch  $\underline{t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$ .

Für  $\underline{n} = \underline{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}$  gilt  $(\underline{t}, \underline{n}) = 0$ . Also ist  $\underline{n} \perp \underline{t}$  und  $\underline{n}$  ist daher ein Richtungsvektor.

Kurve	$y = f(x), x \in I$	$x = x(t)$ $y = y(t), t \in I$	$r(\varphi), \varphi \in I$
Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$	$P_0 = (x_0, f(x_0))$	$P_0 = (x(t_0), y(t_0))$	$P_0 = (r(\varphi_0) \cdot \cos \varphi_0, r(\varphi_0) \cdot \sin \varphi_0)$
Anstieg $m = \tan \alpha$ in $P_0$	$f'(x_0)$	$\frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$	$\frac{r'(\varphi_0) \sin \varphi_0 + r(\varphi_0) \cos \varphi_0}{r'(\varphi_0) \cos \varphi_0 - r(\varphi_0) \sin \varphi_0}$
Tangenten- vektor $\underline{t}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} r'(\varphi_0) \cos \varphi_0 - r(\varphi_0) \sin \varphi_0 \\ r'(\varphi_0) \sin \varphi_0 + r(\varphi_0) \cos \varphi_0 \end{pmatrix}$
Normalen- vektor $\underline{n}$	$\begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -r'(\varphi_0) \sin \varphi_0 - r(\varphi_0) \cos \varphi_0 \\ r'(\varphi_0) \cos \varphi_0 - r(\varphi_0) \sin \varphi_0 \end{pmatrix}$

Tangentengleichungen:

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \cdot \underline{t} \quad s \in \mathbb{R}$$

Normalengleichungen:

$$y = y_0 - \frac{1}{m}(x - x_0)$$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \cdot \underline{n} \quad s \in \mathbb{R}$$

**Bsp. 16:** Für welche Werte des Parameters  $\varphi$  ist die Tangente an die Kurve  $r = r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  parallel zur y-Achse?

**Lösung:**  $r'(\varphi) = -a \sin \varphi$  mit der Bedingung  $r'(\varphi) \cdot \cos \varphi - r(\varphi) \cdot \sin \varphi = 0$

$$\Rightarrow -a \sin \varphi \cos \varphi - a(1 + \cos \varphi) \cdot \sin \varphi = 0$$

$$\Rightarrow -a \sin \varphi (\cos \varphi + 1 + \cos \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = 0 \vee \cos \varphi = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = 0^\circ, \varphi_2 = 180^\circ, \varphi_3 = 120^\circ, \varphi_4 = 240^\circ$$

Allerdings entfällt  $\varphi_2$ , da  $r'(\varphi_2) \sin \varphi_2 + r(\varphi_2) \cos \varphi_2 = 0$

### 3.3.4.3 Krümmung ebener Kurven

ABB 75

Gegeben sei die Kurve  $C$  und der feste Punkt  $P_0 = (x_0, y_0)$ . Außerdem sind zwei Punkte  $R$  und  $S$  auf der Kurve gegeben. Durch 3 Punkte  $P_0$ ,  $R$  und  $S$  im Allgemeinen eindeutig ein Kreis festgelegt.

Es sei  $K$  die Grenzlage dieses Kreises, wenn  $R$  und  $S$  in  $P_0$  übergeben.

Es heißt dann:

$K \dots$  Krümmungskreis (Schmiegekreis)

$\kappa$  (Kappa)  $\dots$  Krümmung

$\varrho \dots$  Krümmungsradius mit  $\varrho = \frac{1}{|\kappa|}$

$M \dots$  Mittelpunkt des Krümmungskreises  $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|}$

Tabelle (Krümmungen)

Kurve	$y = f(x), x \in I$	$x = x(t)$ $y = y(t), t \in I$	$r(\varphi), \varphi \in I$
Krümmung $\kappa$ in Punkt $P = (x, y)$	$\kappa = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\kappa = \frac{r^2 + 2(r')^2 - r \cdot r''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}$

**Bsp. 17:** In welchem Punkt ist  $f(x) = e^x$  am stärksten gekrümmt (d.h. maximiere  $|\kappa|$ )

**Lösung:**  $y' = e^x + y''$

$$\kappa = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}}} = |\kappa|$$

$$\frac{d|\kappa|}{dx} = \frac{e^x(1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}} - e^x \cdot \frac{3}{2}(1 + e^{2x})^{\frac{1}{2}} \cdot 2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^3} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^x(1 + e^{2x})^{\frac{1}{2}}}_{\neq 0} (1 + e^{2x} - 3e^{2x}) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2e^{2x} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \ln 2 \quad y_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{mit } \kappa = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{3}{3}}\right)^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad \varrho = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ABB 76

### 3.3.4.4 Raumkurven

- **Parameterdarstellung**  $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in I$

$$\text{vektorielle Form: } \underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- **Tangente im Punkt**  $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))^T$

$$\text{mit } \underline{r}(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix} \text{ gilt } \underline{g}(s) = \underline{r}(t_0) + s \cdot \dot{\underline{r}}(t_0), \quad s \in \mathbb{R} \text{ ist die Tangente im Punkt } P_0.$$

- **Physikalische Darstellung**  $\underline{r} = \underline{r}(t), t \in I \dots$  Bewegung eines Massepunktes im Raum  
 $\dot{\underline{r}}(t_0) \dots$  Geschwindigkeit zur Zeit  $t_0$   
 $\ddot{\underline{r}}(t_0) \dots$  Beschleunigung zur Zeit  $t_0$

- **Krümmung**  $\kappa = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3}, \text{ Krümmungsradius } \varrho = \frac{1}{\kappa}$

**Bsp. 18:** (Schraubenlinie)

$$\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ a \sin(t) \\ \frac{h}{2\pi} t \end{pmatrix} \quad t \geq 0, \quad a > 0, \quad h > 0 \quad (h \text{ ist Abstand zwischen zwei Schraubenlinien})$$

Gesucht ist die Tangente in Punkt  $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))^T$  für  $t_0 = \frac{\pi}{2}$ .

$$\text{Tangente: } \underline{g}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ \frac{h}{4} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

$$(\text{da die } y\text{-Koordinate in } s \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix} \text{ 0 ist: } \underline{g} \text{ ist parallel zur } x\text{-}z\text{-Ebene})$$

### 3.3.5 Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung

**Satz 6:** Es sei  $x^*$  eine Lösung der Gleichung  $f(x) = 0$ . Für ein geeignetes Intervall  $I = (x^* - r, x^* + r)$  gelte  $f'(x) \neq 0$  und  $\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq k < 1$  für alle  $x \in I$ .

Dann konvergiert für jeden Startwert  $x_0 \in I$  die mittels  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$   $n = 0, 1, 2, \dots$  festgelegte Folge gegen  $x^*$ , d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ .

Außerdem gilt  $|x^* - x_n| \leq \frac{k}{1-k} |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$ .

### Diskussion:

- Geometrische Veranschaulichung:

ABB 78

Tangente in  $P_0$  :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$x_1 \dots$  Nullstelle der Tangente

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ABB R Newton 1.

- Zur Wahl des Startwertes  $x_0$ :  
Falls in  $I$  gilt  $f''(x) > 0$ , dann ist ein  $x_0$  mit  $f(x_0) > 0$  günstig (bzw. bei  $f''(x) \leq 0$  ein  $f(x_0) < 0$ ).
- Praktisches Vorgehen:  
Abbruch falls  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ .

**Bsp. 19:** Gesucht sind Lösungen von  $f(x) = \cos(x) = x \Leftrightarrow x - \cos(x) = 0$ . Gesucht ist nun eine Nullstelle von  $f$ .

Start  $x_0 = 0,8$  (nur ein Beispiel)

ABB 79

$$f'(x) = 1 + \sin(x)$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n - x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$n$	$x_n$
0	0,8
1	0,73985
2	0,73908526
3	0,73908513322
4	0,73908513322...

$$\Rightarrow x^* = 0,739085$$

ABB R Newton 2.

# 4 Integralrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen

## 4.1 Der Integralbegriff

### 4.1.1 Das bestimmte Integral

**Problem:**

*Gegeben:* Kurve  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  und  $f(x) \geq 0$ .

*Gesucht:* Flächeninhalt  $I$  unter der Kurve

ABB 80

*Vorgehen:*

- Zerlegung  $Z$  des Intervalls  $[a, b]$ :  
 $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$
- In jedem Teilintervall Zwischenstelle  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  wählen. Dies ergibt die Zerlegung  $Z^*$  ( $Z$  mit Zwischenstellen).
- $\Delta(Z^*) := \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) = \dots$  Länge des größten Teilintervalls
- Approximation von  $I$  durch die Summe von Rechteckflächen:

$$S(Z^*, f) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$S(Z^*, f)$  heißt Riemann-Summe. Sie ist abhängig von der Zerlegung  $Z^*$ .

**Def. 1** Die Funktion  $f$  heißt (Riemann-)integrierbar über  $[a, b]$  falls für jede Zerlegungsfolge  $Z_\mu^*$  von  $[a, b]$  mit  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \Delta(Z_\mu^*) = 0$  gilt:  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} S(Z_\mu^*, f) = I$ . Die Zahl  $I$  heißt dann bestimmtes Integral von  $f$  über

$[a, b]$ . Bezeichnung:  $I = \int_a^b f(x) dx$ .

**Diskussion:**

- Def. 1 basiert auf der Forderung  $f(x) \geq 0$ . Falls  $f(x) < 0$  für alle  $x \in [a, b]$ , so gilt im Falle der Integrierbarkeit  $\int_a^b f(x) dx < 0$ :

ABB 82

$$\Rightarrow \text{Flächeninhalt } F = \int_a^b |f(x)| dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

- Man definiert:

$$\int_a^a f(x) dx := 0$$

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx \quad (b > a)$$

- Eigenschaften des bestimmten Integrals:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

für beliebige  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

- $\int_a^b c_1 u(x) + c_2 v(x) dx = c_1 \int_a^b u(x) dx + c_2 \int_a^b v(x) dx$  für  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

**Satz 1:** Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  auf  $[a, b]$  integrierbar.

**Diskussion:**

- Falls  $f$  stückweise stetig ist, mit endlich vielen Sprungstellen, so ist  $f$  ebenfalls integrierbar (Integration von Sprungstelle zu Sprungstelle).

ABB 93

- Nicht integrierbar ist bspw.  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ irrational} \\ 0 & x \text{ rational} \end{cases}$

## 4.1.2 Sammfunktion und unbestimmtes Integral

**Satz 2:** (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann existiert (mindestens) ein  $\xi \in (a, b)$  mit:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

Anschaulich:

ABB 94

Wir nennen  $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  den Integralmittelwert von  $f$  auf  $[a, b]$ .

*Integral mit variabler oberer Grenze:*

Wir betrachten  $\int_a^x f(t) dt =: F(x)$

ABB 95

**Satz 3:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  auf  $[a, b]$  differenzierbar und es gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Beweis:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \stackrel{\text{Satz 2}}{=} \frac{f(\xi) \cdot (x+h-x)}{h} = f(\xi) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x) \text{ da } f \text{ stetig.}$$

$$\Rightarrow F'(x) = f(x)$$

**Def. 2:** Die Funktion  $F$  heißt *Stammfunktion* von  $f$  (auf  $[a, b]$ ), wenn gilt  $F'(x) = f(x)$ .

**Diskussion:** Ist  $F$  eine Stammfunktion, so ist auch  $\tilde{F}$  mit  $\tilde{F}(x) = F(x) + C$  eine Stammfunktion.

**Def. 3:** Die Menge  $\{F(x) + C | C \in \mathbb{R} \text{ aller Stammfunktionen von } f, \text{ wobei } F \text{ beliebige Stammfunktion von } f \text{ ist,}\}$  heißt *unbestimmtes Integral* von  $f$ .

Bezeichnung:  $\int f(x) dx = F(x) + C$

### 4.1.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

**Satz 4:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $F$  beliebige Stammfunktion von  $f$ .

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beweis: Satz 3 liefert  $F_1(x) := \int_a^x f(t) \, dt$  ist Stammfunktion von  $f$ . Also gilt  $F(x) = F_1(x) + k$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = F_1(b) + k - \underbrace{F_1(a)}_{=0} - k = \int_a^b f(t) \, dt$$

**Diskussion:**

$$1.) \quad \underbrace{\int_a^b f(x) \, dx}_{\text{Flächeninhaltsproblem, Integralrechnung}} = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\substack{\text{Stammfunktion,} \\ \text{Umkehrung der Differentialrechnung}}}$$

Dieser Term ist also der Zusammenhang zwischen der Differential- und der Integralrechnung.

$$2.) \text{ Symbolik: } \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \Leftrightarrow \underbrace{\int dF(x)}_{F(x)+C} = \int f(x) \, dx$$

3.) Aus Tabellen zur Differentiation lassen sich Integrationsregeln ableiten.

**Beispiele:**

$$\begin{aligned} \text{a.) } \frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x \\ \Leftrightarrow \int -\sin x \, dx &= \cos x + C^* \quad | \cdot (-1) \\ \int \sin x \, dx &= -\cos x + \underbrace{C}_{=-C^*} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.) } \frac{d}{dx} x^{\alpha+1} &= (\alpha+1)x^\alpha \\ \Leftrightarrow \int x^\alpha \, dx &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\text{falls } \alpha \neq -1) \end{aligned}$$

## 4.2 Integrationsmethoden

### 4.2.1 Substitution

Zu berechnen ist  $\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx$ . Bekannt sei dabei die Stammfunktion  $F$  von  $f$ . Dann gilt:

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx \stackrel{\text{Subst.}}{u=g(x)} \int f(u) \, du = F(u) + C = \stackrel{u=g(x)}{=} F(g(x)) + C$$

Substitution  $u = g(x)$  impliziert  $\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x) \, dx$ .

**Merke:** Anwendung dieser Methode ist zweckmäßig, wenn der Integrand das Produkt eine Verknüpfung zweier Funktionen mit der Ableitung der inneren Funktion ist und eine Stammfunktion für die äußere Funktion bekannt ist.



$$\text{Bsp. 1: } \int \frac{1}{x} \sqrt[3]{\ln x} \, dx \stackrel{\substack{u=\ln x \\ dx=\frac{1}{x} du}}{=} \int \underbrace{\sqrt[3]{u}}_{u^{\frac{1}{3}}} \, du = \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} (\ln x)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$\text{Bsp. 2: } \int x e^{-x^2} \, dx \stackrel{\substack{u=-x^2 \\ dx=-\frac{du}{2x}}}{=} \int x e^u \frac{du}{-2x} = -\frac{1}{2} \int e^u \, du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

**Bsp. 3:** (Substitution bei bestimmten Integral)

- 1. Variante: Grenzen ersetzen

$$I = \int_0^{\sqrt{8}} x \sqrt{1+x^2} \, dx \stackrel{\substack{u=1+x^2 \\ dx=\frac{du}{2x}}}{=} \int_1^9 x \sqrt{u} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \, du = \left[ \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^9 = \frac{1}{3} (27 - 1) = \frac{26}{3}$$

$$\text{Grenzen in Substitution einsetzen } u = 1 + x^2 \Rightarrow u_{\text{unt}} = 1 + 0^2 = 1 \quad u_{\text{ob}} = 1 + \sqrt{8}^2 = 9$$

- 2. Variante: Erst unbestimmtes Integral lösen

$$I = \int_0^{\sqrt{8}} x \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

Dann Grenzen einsetzen:

$$I = \left[ \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{8}} = \frac{1}{3} (27 - 1) = \frac{26}{3}$$

$$\text{Bsp. 4: } \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C$$

(Zähler = Ableitung des Nenners)

$$\text{Nutze dazu die Substitution } u = f(x), \quad dx = \frac{du}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow \int \dots = \int \frac{1}{u} \, du = \ln |u| + C = \ln |f(x)| + C$$

**Bsp. 5:** (lineare Substitution)

$$\text{Allgemein: } \int f(ax+b) \, dx \stackrel{\substack{u=ax+b \\ \frac{du}{dx}=a}}{=} \int f(u) \frac{du}{a} \stackrel{F: \text{Stammfkt. von } f}{=} \frac{1}{a} \cdot F(u) + C$$

$$\text{a.) } \int \cos(3x) \, dx = \frac{1}{3} \sin(3x) + C$$

$$\text{b.) } \int e^{-2x} \, dx = \frac{1}{-2} e^{-2x} + C$$

$$\text{c.) } \int (3x+4)^6 \, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} (3x+4)^7 + C$$

$$\text{d.) } \int \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right) \, dx = 2 \cdot -\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + C$$

**Diskussion:** Neben diesen „natürlichen“ und leicht erkennbaren Substitutionen sind weiter Substitutionen durch die Einführung von „künstlichen“ Variablen möglich:

$$\int f(x) \, dx \stackrel{\substack{x=f(t) \\ \frac{dx}{dt}=\dot{\varphi}(t)}}{=} \int f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \, dt$$

Dies entspricht der Substitutionsregel, von rechts nach links gelesen. Falls die rechte Seite davon integrierbar ist (mit Stammfunktion  $H$ ), dann:

$$\int f(x) dx = H(t) + C = H(\varphi^{-1}(t)) + C \quad (\text{falls } \varphi^{-1} \text{ existiert})$$

**Bsp. 6:**

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \stackrel{\substack{x=\sinh(t) \\ \frac{dx}{dt}=\cosh(t)}}{\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1} = \int \frac{1}{\cosh(t)} \cosh(t) dt = \int dt = t + C = \operatorname{arcsinh}(x) + C$$

Für weitere geeignete Substitutionen siehe Integrationstabelle.

## 4.2.2 Partielle Integration

Produktregel der Differentiation:

$$\frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x)) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\Rightarrow u(x)v(x) = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

**Bsp. 7:**

$$\text{a.) } \int \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{\sin(2x)}_{v'(x)} dx = \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{-\frac{1}{2} \cos(2x)}_v - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{-\frac{1}{2} \cos(2x)}_v dx = -\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

$$u'(x) = 1 \quad v(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$\text{b.) } \int \underbrace{x^3}_{v'} \underbrace{\ln x}_u = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4} x^4 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C = \frac{1}{4} x^4 \left( \ln x - \frac{1}{4} \right) + C$$

**Merke:** Typische Anwendungsfälle für partielle Integration (mit  $p(x)$  jeweils als  $u$ ):

- $\int p(x) e^{ax} dx$
- $\int p(x) \cos(ax) dx$
- $\int p(x) \sin(ax) dx$

aber (mit  $\ln(x)$  jeweils als  $u$ ):

- $\int p(x) \cdot \ln(x) dx$
- $\int x^\alpha \cdot \ln(x) dx$

**Bsp. 8:**

$$\int \arctan(x) dx \stackrel{\substack{u=\arctan(x) \\ v'=1}}{=} x \cdot \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(|x^2 + 1|) + C$$

$$u' = \frac{1}{1+x^2} \quad v = x$$

### 4.2.3 Integration gebrochen rationaler Funktionen

Gegeben: Gebrochen rationale Funktion  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Integration erfolgt in 5 Schritten:

1.) Falls  $f$  unecht gebrochen: Polynomdivision erhalten dann  $f(x) = \underbrace{a(x)}_{\text{Polynom}} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{\text{echt gebrochen}}$

2.) Nullstellen von  $q$  ermitteln. Dann Zerlegung  $q$ :

$$q(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdot (x - \alpha_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_1 + q_1)^{m_1} \cdot (x^2 + p_2 + q_2)^{m_2} \cdot \dots$$

$k_i$ : reelle Nullstellen  $m_i$ : nicht reell zerlegbar

Dabei kürzt man eventuelle gemeinsame Faktoren in  $r$  und  $q$  heraus.

3.) Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \text{Summe von Partialbrüchen}$$

Jeden Faktor der Form  $\begin{cases} (x - \alpha)^k \\ (x^2 + px + q)^m \end{cases}$  der Gleichung entspricht der Anteil

$$\begin{cases} \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k} \\ \frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{B_mx + C_m}{(x^2 + px + q)^m} \end{cases} \text{ in dieser Summe.}$$

**Bsp. 9:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 4}{(x - 1)^3(x + 5)(x^2 + 2x + 2)^2} \\ &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3} + \frac{D}{x + 5} + \frac{Ex + F}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 2x + 2)^2} \end{aligned}$$

Beachte:  $x^2 + 2x + 2$  ist reell nicht weiter zerlegbar, Nullstelle:  $1 \pm i$ .

4.) Ermittlung der Koeffizienten durch

- Multiplikation des Ansatzes der Partialbruchzerlegung mit  $q(x)$
- Kombination der folgenden beiden Methoden
  - a.) Einsetzen der reellen Nullstellen
  - b.) Koeffizientenvergleich
 (falls  $q$  nur reelle Nullstellen hat, reicht Methode a.)

5.) Integration der Partialbrüche

$$\text{a.) } \int \frac{1}{(x - \alpha)^j} dx = \begin{cases} \ln(|x - \alpha|) + C & j = 1 \\ \frac{1}{1 - j} (x - \alpha)^{1-j} + C & j = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

$$\text{b.) } \int \frac{3x + C}{(x^2 + px + q)^j} dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x + q)}{(x^2 + px + q)^j} + \frac{C - \frac{Bp}{2}}{(x^2 + px + q)^j} dx$$

$$\bullet \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^2} dx: \text{ Nutze Substitution.}$$

$$\bullet \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^j} \overset{\text{quadratische Ergänzung}}{=} \int \frac{1}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^j} dx \overset{u=x+\frac{p}{2}}{=} \int \frac{1}{(u^2 + a^2)^j} du$$

$$\begin{cases} j = 1 & \text{Stammfunktion siehe Merkblatt} \\ j > 1 & \text{siehe weitere Formelsammlung (selten)} \end{cases}$$

**Bsp. 10:**  $I = \int \frac{3x + 4}{x^2 + 2x - 3} dx$

- echt gebrochen
- Nullstellen des Nenners:  $x_1 = -3, x_2 = 1$   
 $\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

Ansatz für PBZ:

$$\frac{3x + 4}{(x + 3)(x - 1)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 1} \quad | \cdot (x + 3)(x - 1)$$

$$3x + 4 = A(x - 1) + B(x + 3)$$

Einsetzen der NS:

$$x_1 : -5 = A \cdot (-4) \Rightarrow A = \frac{5}{4}$$

$$x_2 : 7 = B \cdot 4 \Rightarrow B = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{5}{4}}{x + 3} dx + \int \frac{\frac{7}{4}}{x - 1} dx$$

$$= \frac{5}{4} \ln(|x + 3|) + \frac{7}{4} \ln(|x - 1|) + C$$

**Bsp. 11:**  $I = \int \frac{7x^2 - 10x + 37}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)} dx$

- echt gebrochen
- Nenner reell nicht weiter zerlegbar (denn Nullstellen von  $x^2 - 4x + 13$  sind  $x_{1/2} = 2 \pm 3i$ )
- Partialbruchzerlegung:

$$\frac{7x^2 - 10x + 37}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 4x + 13} \quad | \cdot \text{Nenner}$$

$$7x^2 - 10x + 37 = A(x^2 - 4x + 13) + (Bx + C)(x + 1)$$

$$= (A + B)x^2 + (-4A + B + C)x + (13A + C)$$

Einsetzen der Nullstelle  $x = -1$ :  $54 = 18A \Rightarrow A = 3$

Koeffizientenvergleich  $x^2$ :  $7 = A + B \Rightarrow B = 4$

$x^0$ :  $13A + C \Rightarrow C = -2$

$$\Rightarrow \int \frac{7x^2 - 10x + 37}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)} dx = \int \underbrace{\frac{3}{x + 1}}_a + \underbrace{\frac{4x - 2}{x^2 - 4x + 13}}_b dx$$

$$a : \int \frac{3}{x + 1} dx = 3 \ln |x + 1| + C_1$$

$$\begin{aligned}
 b: \int \frac{4x-2}{x^2-4x+13} dx &= \int \frac{2(2x-4)-2+8}{x^2-4x+13} = 2 \underbrace{\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{6}{x^2-4x+13}}_{I_2} dx \\
 I_1 &= \int \frac{2x-4}{x^2-4x+13} dx \stackrel{\text{Subst.}}{=} \ln|x^2-4x+13| + C_2 \\
 I_2 &= 6 \int \frac{dx}{(x-2)^2+9} = 6 \int \frac{du}{u^2+3^2} = 6 \cdot \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{u}{3}\right) + C_3 = 2 \cdot \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C_3 \\
 \Rightarrow I &= 3 \ln|x+1| + 2 \ln(x^2-4x+13) + 2 \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C_4
 \end{aligned}$$

## 4.2.4 Integration von Potenzreihen

**Satz 1:** Es sei  $f: (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  die Grenzfunktion der Potenzreihe (mit Konvergenzradius  $r$ ). Dann ist  $F: (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$  eine Stammfunktion von  $f$  (gliedweises Integrieren im Konvergenzintervall).

**Bsp. 12:**

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad |x| < 1 \text{ (siehe Übung, nutze geometrische Reihe)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + C_1$$

$$\text{Wir wissen aber auch: } \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C_2$$

$$\Rightarrow \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + C_3 \quad \text{mit } C_3 = 0 \text{ (setze } x = 0 \text{ ein) und } |x| < 1.$$

**Bsp. 13:** Gesucht ist Stammfunktion zu  $f(x) = e^{-x^2}$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \left( 1 - t^2 + \frac{(t^2)^2}{2!} - \frac{(t^2)^3}{3!} + \dots \right) dt \\
 &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \dots \quad (x \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

**Diskussion:**

- $\int e^{-t^2} dt$  nicht geschlossen auswertbar.
  - Für nicht zu große  $x$  ist die Reihendarstellung zur Auswertung von  $F$  gut geeignet.
- z.B.  $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!} + \frac{1}{13 \cdot 6!} - \frac{1}{15 \cdot 7!} + \frac{1}{17 \cdot 8!} - \dots$
- 0,746824...

$$|\text{Fehler}| < \frac{1}{19 \cdot 9!} = 1,4504 \cdot 10^{-7} \text{ (vgl. Satz über Leibnitz-Kriterium)}$$

## 4.3 Numerische Integration

**Ziel:** Berechne  $I = \int_a^b f(x) dx$  falls Stammfunktion „kompliziert“ oder nicht elementar angebar.

**Prinzip:**

- a.) Zerlegung von  $[a, b]$  in  $n$  gleichlange Teilintervalle der Länge  $h = \frac{1}{n}(b - a)$   
 $\Rightarrow$  Teilpunkte sind  $x_k = a + k \cdot h$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ),  $y_k = f(x_k)$   
 ABB 101

- b.) Ersetze  $f(x)$  über den Teilintervallen durch einfachere Funktionen.  
 z.B.:

- lineare Funktionen  $\rightsquigarrow$  Trapez Regel
- quadratische Funktionen  $\rightsquigarrow$  SIMPSON-Regel

ABB 102+3

Als Näherung für  $I$  ergibt sich für die Simpson-Regel:

$$I \approx S_n(h) = \frac{h}{3} ((y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}))$$

falls  $n$  gerade ist.

### Diskussion:

- 1.) Fehlerabschätzung:

$$I = S_n(h) - \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) \quad a < \xi < b$$

(falls  $f^{(4)}$  stetig in  $[a, b]$ )

- 2.) Simpson-Regel ist für Polynome einschließlich Grad 3 exakt.

- 3.) Praktische Durchführung: Schrittweithalbwierung

Startwert:  $S^{(1)} = S_n(h)$  für geeignetes  $h$ .  $S^{(2)} = S_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$ ,  $S^{(3)} = S_{4n}\left(\frac{h}{4}\right)$ , usw. bis dich die Ziffern in gewünschter Genauigkeit nicht mehr ändern.

**Bsp.:**  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

$n = 4, h = 0,25$

$k$	$x_k$	$y_0, y_n$	$y_{2j+1}$	$y_{2j}$
0	0	1		
1	0,25		0,939413	
2	0,5			0,778801
3	0,75		0,569783	
4	1	0,367879		
		1,367879	1,509196	0,778801

$$S_4(0,25) = \frac{0,25}{3} (1,367879 + 4 \cdot 1,509196 + 2 \cdot 0,778801)$$

## 4.4 Uneigentliche Integrale

- Vorbetrachtung:

Bisher  $\int_a^b f(x) dx$  wobei  $[a, b]$  endliches Integral auf  $f$  stückweise stetig auf  $[a, b]$  (daher beschränkt)

- 2 Erweiterungen:

- 1.) unendliches Intervall  $(-\infty, b]$ ,  $[a, \infty)$  oder  $(-\infty, \infty)$
- 2.) Funktion  $f$  unbeschränkt (Unendlichkeits- bzw. Polstellen)

### Unendliches Intervall (zu 1.)

$$a.) \int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^b f(x) dx$$

analog:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x) dx$$

$$b.) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \text{ für beliebiges } c \in \mathbb{R} \text{ (bspw. } c = 0 \text{)}.$$

### Diskussion:

1.) Falls die Grenzwerte existieren, so heißt das Integral konvergent, sonst divergent.

2.) Ein berühmtes Beispiel ist die  $\Gamma$ -Funktion:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0)$$

Eigenschaft:  $\Gamma(n) = (n-1)!$  falls  $n \in \mathbb{N}$

### Bsp. 1:

$$a.) \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (-e^{-A} + e^0) = 1$$

$$b.) \int_0^{\infty} \cos x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [\sin(x)]_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (\sin A - \underbrace{\sin 0}_{=0})$$

Grenzwert existiert nicht  $\Rightarrow$  Integral unbestimmt divergent.

$$c.) \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [\ln|x|]_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln A - \underbrace{\ln 1}_0) = \infty$$

$\Rightarrow$  bestimmt divergent

### Unbeschränkter Integrand (zu 2.)

a.) bspw. Unendlichkeitsstellen bei  $b$ :

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

ABB 104

b.) falls Unendlichkeitsstelle  $x_0$  im Inneren von  $[a, b]$  liegt:

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx$$

... und nutzen nun a.):

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x) dx$$

### Bsp. 2:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^4 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (2\sqrt{4} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 4$$

## Unendliches Intervall und unbeschränkter Integrand (Kombination von 1. und 2.)

### Bsp. 3

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

mit  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \underbrace{\quad}_{\text{Subst. } t=\sqrt{x-1}} = 2 \arctan \sqrt{x-1} + C:$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} [2 \arctan \sqrt{x-1}]_{1+\varepsilon}^2 + \lim_{A \rightarrow \infty} [2 \arctan \sqrt{x-1}]_2^A \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} (2 \arctan 1 - 2 \arctan \sqrt{\varepsilon}) + \lim_{A \rightarrow \infty} (2 \arctan \sqrt{A-1} - 2 \arctan 1) \\ &= \underbrace{\lim_{A \rightarrow \infty} 2 \arctan \sqrt{A-1}}_{\pi} - \underbrace{\lim_{\varepsilon \searrow 0} 2 \arctan \sqrt{\varepsilon}}_0 \\ &= \pi \end{aligned}$$

## 4.5 Anwendungen

### 4.5.1 Geometrische Anwendungen

#### 4.5.1.1 Inhalte ebener Flächen

- ABB 105

mit  $a < b$  und  $f(x) \geq 0$ :

$$F = \int_a^b f(x) dx$$

- ABB 106

mit  $a < b < c$ :

$$F = \int_a^c |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \left| \int_b^c f(x) dx \right| = \int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- ABB 107

mit  $f(x)$ : obere Funktion und  $g(x)$ : untere Funktion:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x) dx$$

**Bsp. 1:** Gesucht ist der Flächeninhalt  $F$  des von der Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ) begrenzten Bereichs.

ABB 108

$$y = \pm b \sqrt{a - \frac{x^2}{a}}$$

$$\begin{aligned} F &= 4 \cdot \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \stackrel{\text{Subst. } x = a \sin t}{=} \frac{4b}{a} \left[ \frac{1}{2} \left( x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) \right]_0^a \\ &= \frac{4b}{a} \frac{1}{2} a^2 \underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}} = \pi \cdot ab \end{aligned}$$



### 4.5.1.2 Bogenlänge

#### Bogenlänge ebener Kurven

ABB 109

Kurve  $K$  mit Parameterdarstellung.  $x = x(t)$   $y = y(t)$   $t \in [\alpha, \beta]$

- Vorgehen: Approximieren durch Streckenzug, dann Verfeinerung

$$\text{Länge des Streckenzugs: } \sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

ABB 110

$$\Rightarrow (\text{Mittelwertsatz der Differentialrechnung}) \sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\dot{x}(u_i))^2 + (\dot{y}(v_i))^2} \cdot \Delta t_i$$

mit  $u_i, v_i \in (t_{i-1}, t_i)$

Verfeinerung:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt$$

#### Diskussion:

- Bogenlänge der Kurve  $\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  zwischen  $\alpha$  und  $t$  ist

$$s = \int_{\alpha}^t \underbrace{\sqrt{(\dot{x}(u))^2 + (\dot{y}(u))^2}}_{|\dot{r}(u)|} du =: f(t)$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = |\dot{r}(t)| \Rightarrow ds = |\dot{r}(t)| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \text{ (heißt Bogenelement)}$$

- Tabelle (Bogenlänge ebener Kurven)

Kurvendarstellung	Bogenlänge $s$ , Bogenelement $ds$
$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$	$s = \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}_{ds} dt$
$y = f(x), x \in [a, b]$	$s = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}_{ds} dx$
$x = g(y), y \in [c, d]$	$s = \int_c^d \underbrace{\sqrt{1 + (g'(y))^2}}_{ds} dy$
$r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$	$s = \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}}_{ds} d\varphi$

#### Bogenlänge von Raumkurven

Gegeben sei Kurve  $K$  mit Parameterdarstellung  $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$ .

Die Bogenlänge berechnet sich dann mittels

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt$$

#### Bsp. 2 (Schraubenlinie)

$$\underline{r} = \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ \frac{h}{2\pi} t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) &= \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix} \\ s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}_{a^2} + \frac{h^2}{(2\pi)^2}} dt \\ &= 2\pi \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \\ &= \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}\end{aligned}$$

### 4.5.1.3 Volumen von Rotationskörpern

ABB 118

a.) Gegeben:

- Kurve  $K$  mit  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$
- Das Flächenstück  $F_x$  zwischen Kurve und  $x$ -Achse rotiere um die  $x$ -Achse.

Gesucht:

- Volumen  $V_x$  des dabei erzeugten Körpers

Es gilt:  $V_x = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$

(Idee: Approximation von  $F_x$  durch Rechteckflächen

$\xrightarrow{\text{Rotation}}$  Zylinderscheiben  $V_x \approx \sum_i \pi (f(\xi_i))^2 \Delta x_i$

Grenzübergang:  $V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

**Diskussion:**

a) Allgemein gilt  $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$  ( $a < b$ )

b) Falls  $K$  in Parameterform gegeben  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\alpha \dots t \dots \beta$ , dann ergibt sich

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (y(t))^2 \cdot \underbrace{\dot{x}(t) dt}_{dx}, \text{ wobei ... (die Orientierung) so zu wählen ist, dass } a := x(\alpha) < x(\beta) = b \text{ gilt. Unter Umständen kann } \alpha < \beta \text{ sein.}$$

b.) Gegeben: Kurve  $x = g(y)$ ,  $y \in [c, d]$

ABB 119

Gesucht: Volumen  $V_y$  bei Rotation von  $F_y$  um  $y$ -Achse.

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy$$

Für Parameterdarstellung:

$$V_y = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (x(t))^2 \cdot \underbrace{\dot{y}(t) dt}_{dy}, \text{ wobei } c = y(\alpha) < y(\beta) = d$$

**Bsp. 3:** Gesucht ist das Volumen eines Rotationsparaboloids der Höhe  $h$  und mit Basisradius  $R$ .

ABB 120

$$\text{Kurve: } y = ax^2, \quad h = aR^2 \Rightarrow a = \frac{h}{R^2}$$

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_0^h x^2 dy = \pi \int_0^h \frac{y}{a} dy = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h} y dy \\ &= \frac{\pi R^2}{h} \int_0^h y dy = \frac{\pi R^2}{h} \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^h \\ &= \frac{\pi R^2}{h} \cdot \frac{1}{2} h^2 = \frac{\pi R^2 h}{2} \end{aligned}$$

#### 4.5.1.4 Mantelflächen von Rotationskörpern

a.) Gegeben: Kurve  $K$  mit  $y = f(x) \geq 0, x \in [a, b]$

Gesucht: Die von der Kurve  $K$ , bei Rotation um  $x$ -Achse erzeugte Rotationsfläche  $M_x$ .

ABB 121

$$M_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

(Approximation der Kurve  $K$  durch Polygonzug

$\xrightarrow{\text{Rotation}}$  Kegelstumpffläche

$$M_x \approx \sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) \Delta s_i$$

$$\rightarrow 2\pi \int_a^b f(x) \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}_{ds} dx \quad (\text{Bogenelement})$$

$$\text{Allgemein gilt: } M_x = 2\pi \int_a^b y ds$$

b.) Gegeben: Kurve  $x = g(y) \geq 0, y \in [c, d]$

Gesucht: Mantelfläche bei Rotation um die  $y$ -Achse.

$$M_y = 2\pi \int_K x ds = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

Für Parameterdarstellung:

$$M_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt \quad \text{mit } \alpha \leq t \leq \beta$$

**Bsp. 4:** Kugeloberfläche

ABB 122

Halbkreis  $K$  soll um  $x$ -Achse rotiert werden.

$$x = R \cdot \cos t$$

$$y = R \cdot \sin t$$

$$t \in [0, \pi]$$

$$\dot{x}(t) = -R \sin t \quad \dot{y}(t) = R \cos t$$

$$\begin{aligned} M_x &= 2\pi \int_K y ds = 2\pi \int_0^{\pi} y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} R \sin t \cdot R dt = 2\pi R^2 [-\cos t]_0^{\pi} \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

### 4.5.1.5 Fourier-Reihen

Gegeben: Funktion  $f(x)$ ,  $x \in [0, T]$

ABB 123

Gesucht: Reihendarstellung mit trigonometrischen Funktionen der Periode  $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \dots$

d.h. (mit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ):

$\cos(\omega x), \cos(2\omega x), \cos(3\omega x), \dots$

$\sin(\omega x), \sin(2\omega x), \sin(3\omega x), \dots$

Ansatz ist daher:

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))$ , wobei die Koeffizienten  $a_k, b_k, k \geq 0$  zu ermitteln sind.

Motivation ist: Approximation von  $f$  zum Zwecke der Speicherplatzreduzierung (Abgespeichert werden i.A. nur wenige der Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$ . Das gilt auch dann, wenn  $f$  in diskreter Form vorliegt, d.h. in Form von Messwerten  $y_k$  an vielen Messstellen  $x_k$ .)