Mathematik I

Vorlesungsskript

Mitschrift von Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von Herrn Meinhold

14. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

Teil I. Elementare Grundlagen

1. Aussagen und Grundzüge der Logik

2. Mengen

3. Zahlen

4. Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

5. Lineare Algebra

5.1. Vektorräume

Begriff:

1.) Gegeben seien ein Körper $(K, +, \cdot)$, dessen Elemente *Skalare* heißen (meist $(\mathbb{R}, +, \cdot)$) und eine ABELsche Gruppe $(V, \oplus)$ (V... Menge, Elemente heißen Vektoren, $\oplus$... Vektoraddition).

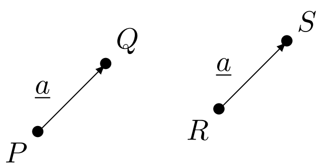
2.) Es gibt eine Abbildung $\odot$ von $K \times V$ in V die jedem $x \in V$ und jedem $\lambda \in K$ ein Element $\lambda \odot x$ in V mit folgenden Eigenschaften zuordnet.

- Distributivgesetze:
  $(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$
  $\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$
- Assoziativgesetz:
  $(\lambda \cdot \mu) \odot x = \lambda \odot (\mu \odot x)$
- Neutrales Element:
  $1 \odot x = x$

(für alle $\lambda, \mu \in K$ und $x, y \in V$)

Eine Menge V mit den in 1.) und 2.) aufgeführten Operationen $\oplus$ und $\odot$ heißt *Vektorraum* (VR) *über* K.
Bemerkung: Schreibweise meist $+$ anstelle von $\oplus$ und $\cdot$ anstelle von $odot$ (ergibt sich aus Zusammenhang der Elemente).

Bsp. 1:
Skalarbereich $\mathbb{R}$.
Vektoren: Größen, die durch eine Zahlenangabe (Länge) und eine Richtung charakterisiert sind (z.B. Kräfte, Geschwindigkeiten, Translatimen).



Pfeile als Repräsentanten eines Vektors $\underline{a}$.
Bezeichnung: $\underline{a} = \overrightarrow{a} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$

Ortskurven: Angeheftet in gemeinsamen Anfangspunkt O (Ursprung).

- Vektoraddition: $\underline{a} + \underline{b}$ ABB 110
- Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \underline{a}$:
  $\lambda > 0$ ABB 111
  $\lambda < 0$ ABB 112
  Länge von $\lambda \cdot \underline{a}$ ist das $|\lambda|$-fache der Länge von $\underline{a}$.
- Subtraktion: $\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b}) = \underline{a} + ((-1) \cdot \underline{b})$ ABB 113
- Nullvektor: $\underline{0}$ (Länge 0, keine Richtung)

Bsp. 2:

$$K = \mathbb{R}, V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Vektoraddition: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ ... \\ x_n + y_3 \end{pmatrix}$

Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ ... \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$

$\curvearrowright$ V Vektorraum über $\mathbb{R}$, Bezeichnung: $\mathbb{R}^n$, Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$

Def. 1:
Die Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn die Gleichung $\boxed{x_1\underline{a}_1 + ... + x_n\underline{a}_n = \underline{0}}$ nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ besitzt.

Diskussion:

1.) $x_1\underline{a}_1 + ... + x_n\underline{a}_n$ heißt *Linearkombination* (LK) der Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

2.) Falls es eine darstellung der Gestalt wie in Def. 1 gibt, in der nicht alle x_i gleich 0 sind, so heißen $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ *linear unabhängig*.
In diesem Falle lässt sich (wenigstens) einer der Vektoren als LK der anderen darstellen.

Def. 2:
Es sei $V_1 \subseteq V$ eine nichtleere Teilmenge von V. Wir bezeichnen mit $L(V_1)$ die Menge *aller* LK von jeweils endlich vielen Vektoren aus V_1. $L(V_1)$ ist die sogenante *lineare Hülle* von V_1.

Bemerkung:
$L(V_1)$ ist selbst ein Vektorraum, nämlich der von V_1 aufgespannte Teilraum von V (kleinster VR, welcher V_1 enthält).

Def. 3:

- Ein Vektorraum V heißt *n-dimensional*, wenn es n linear unabhängige Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ gibt, die den gesamten Raum aufspannen ($L(\{\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n\}) = L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n) = V$).
- Die Menge der Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ nennt man in diesem Falle eine Basis von V.

Diskussion:
In einem Vektorraum gibt es unterschiedliche Basen, jedoch ist die Anzahl der Vektoren, die eine Basis bilden, stets gleich (Dimension des VR).

Satz 1:
Es sei $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ eine Basis des VRs V. Dann gibt es für *jedes* $\underline{x} \in V$ eine *eindeutige* Darstellung der Gestalt $\underline{x} = x_1\underline{a}_1, ..., x_n\underline{a}_n$.

Bemerkung:

- Die Koeffizienten $x_1, ...x_n$ heißen *Koordinaten* von $\underline{x}$ bezüglich der Basis $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.
- Die Summanden $x_1\underline{a}_1, ..., x_n\underline{a}_n$ heißen *Komponenten* von $\underline{x}$ bezüglich der Basis $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

Bsp. 3:

Die Vektoren $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \underline{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$ des Raumes $\mathbb{R}^n$ bilden offensichtlich eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

$\curvearrowright$ $\underline{e}_1, ..., \underline{e}_n$ sind linear unabhängig. Ferner gilt für beliebiges $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. $\underline{x} = x_1 \cdot \underline{e}_1 + ... + x_n \cdot \underline{e}_n$.

Bsp. 4:
Zwei Vektoren $\underline{a}_1 \neq \underline{0}$ und $\underline{a}_2 \neq \underline{0}$ in einer Ebene bilden genau dann eine Basis, wenn sie nicht parallel sind.

5.2. Matrizen

Def. 4:
Ein aus $m \cdot n$ Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$, welche in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind, bestehendes Schema heißt *Matrix vom Typ* (m, n).

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m \text{ (Zeilenindex)} \\ j=1,...,n \text{ (Spaltenindex)}}}$$

Def. 5 Rechenoperationen

1.) $\underline{A} = (a_{ij}), \underline{B} = (b_{ij})$ seien vom gleichen Typ (m, n).
$\boxed{\underline{A} + \underline{B} := (a_{ij} + b_{ij})}$ *Addition von Matrizen*

2.) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\underline{A} = (a_{ij})$ vom Typ (m, n).
$\boxed{\lambda \cdot \underline{A} = (\lambda \cdot a_{ij})}$ *Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar*

3.) $\underline{A} = (a_{ij}$ sei vom Typ (m, n)
$\underline{B} = (b_{ij})$ sei vom Typ (n, p)
$\underline{A}$ und $\underline{B}$ heißen in dieser Reihenfolge *verkettet* (Spaltenzahl von $\underline{A}$ = Zeilenzahl von $\underline{B}$).

$$\boxed{\underline{A} \cdot \underline{B} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,p}}}$$ *Matrizenmultiplikation*

Das Produkt ist also vom Typ (m, p).

Diskussion:
Zweckmäßig FALK-Schema zur Matrizenmultiplikation (vgl. folgendes Bsp. 5).

Def. 6
Die aus der (m, n)-Matrix $\underline{A}$ durch Vertauschung von Zeilen und Spalten entstehende (n, m)-Matrix heißt *Transformierte* von $\underline{A}$. Bezeichnung: $\underline{A}^T$.

Bsp. 5:
$\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \underline{C} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

a.) $\underline{A} + \underline{B}$ existiert nicht (unterschiedliche Typen).

b.) $\underline{A} + \underline{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

c.) $2 \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

d.) $\underline{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

e.) $\underline{B} \cdot \underline{A}$ existiert nicht ($(2, 3)$ und $(2, 2)$ nicht verkettet)

f.) $\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} 21 & 30 & 17 \\ -5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

(mit FALK-Schema:)
$$\begin{array}{cc|ccc} & & 3 & 6 & 4 \\ & & -2 & 0 & 1 \\ \hline 5 & -3 & 21 & 30 & 17 \\ 1 & 4 & -5 & 6 & 8 \end{array}$$

Bemerkung: Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ!

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

Diskussion: (ausgewählte Rechenregeln)

1.) Die Menge der Matrizen vom gleichen Typ bilden mit den Operationen Addition und Multiplikation mit einem Skalar einen Vektorraum.
Bsp: $V = \{$Matrizen vom Typ $(2,2)\}$
Basis: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.) Falls die entsprechenden Typvoraussetzungen erfüllt sind, gelten:
- $(\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C})$ (Assoziativgesetz)
- $(\underline{A} \cdot \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C}$
  $(\underline{A} + \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{C} + \underline{B} \cdot \underline{C}$ (Distributivgesetze)
- $(\lambda \cdot \underline{A}) \cdot \underline{B} = \lambda \cdot (\underline{A} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \cdot (\lambda \cdot \underline{B})$
- $(\lambda \cdot \underline{A})^T = \lambda \cdot \underline{A}^T \qquad \left(\underline{A}^T\right)^T = \underline{A}$
- $(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T \qquad \boxed{(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B} \cdot \underline{A}^T}$

3.) Achtung: Im Allgemeinen gilt $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$!

4.) FALK-Schema bei fortgesetzter Multiplikation $\underline{A} \cdot \underline{BC}$

	$\underline{B}$	$\underline{C}$
$\underline{A}$	$\underline{A} \cdot \underline{B}$	$(\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C}$

oder

	$\underline{C}$
$\underline{B}$	$\underline{B} \cdot \underline{C}$
$\underline{A}$	$\underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C})$

(2 Varianten, gemäß Assoziativgesetz)

Spezielle Matrizen

1.) *Quadratische Matrizen*: Typ (n,n)
Eine quadratische Matrix $\underline{A}$ heißt

a) *symmetrisch*, wenn $\underline{A}^T = \underline{A}$ gilt.

b) obere *Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ für $i > j$.
untere *Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ für $i < j$.

c) *Diagonalmatrix*, wenn $a_ij =$ für $i \neq j$.

d) *Einheitsmatrix* $\underline{E}$, wenn $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$ (spezielle Diagonalmatrix).

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2.) *Nullmatrix* $\underline{0}$ (sämtliche Elemente 0, nicht notwendig quadratisch).

3.) Matrizen vom Typ $(n,1)$ (n Zeilen, eine Spalte) heißen (Spalten-)Vektoren.

$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (vgl. **??**)

Es ist $\underline{a}^T = (a_1|a_2|...|a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ vom Typ $(1,n)$ (Zeilenvektor).

Diskussion:

1.) Die quadratischen Matrizen vom Typ (n, n) bilden mit den Operationen Addition und Multiplikation von Matrizen einen (nicht kommutativen) Ring.

2.) Für quadratische Matrizen $\underline{A}$ sind Potenzen bildbar:
$$\boxed{\underline{A}^0 = \underline{E} \quad \underline{A}^n = \underbrace{\underline{A} \cdot \underline{A} \cdot ... \cdot \underline{A}}_{n-\text{Faktoren}}, n \in \mathbb{N}}$$

3.) Falls die entsprechenden Typvoraussetzungen erfüllt sind, gelten:
$\underline{A} \cdot \underline{E} = \underline{A}$
$\underline{E} \cdot \underline{A} = \underline{A}$
$\underline{0} \cdot \underline{A} = \underline{0}$
$\underline{A} \cdot \underline{0} = \underline{0}$
$\underline{A} + \underline{0} = \underline{A}$
$\underline{0} + \underline{A} = \underline{A}$
(analog 0 und 1 bei den reellen Zahlen)

4.) Sei $\underline{A}$ vom Typ (m, n), $x \in \mathbb{R}^n$, d.h. vom Typ $(n, 1)$.
Dann ist $\boxed{\underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{x}}$ vom Typ $(m, 1)$.
Durch die Zuordnung $\underline{x} \longmapsto \underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{y}$ wird eine *lineare Abbildung* von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ beschrieben (Fkt. f heißt linear, wenn gilt $f(x+y) = f(x)+f(y)$ und $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R},\ x, y \in Db(f)$ gilt).

5.3. Determinanten

Def. 7:
Jeder n-reihigen quadratischen Matrix ist eindeutig eine Zahl $det\ \underline{A}$, die sogenannte *Determinante* von $\underline{A}$, wie folgt zugeordnet.
$n = 1$: $det\,((a_{11})) := a_{11}$
$$n \geq 2: det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\right) := a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}.$$
Dabei ist $A_{ij} = (-1)^{i+j} det\ U_{ij}$ die *Adjunkte* des Elements a_{ij}.
U_{ij} ist die $(n-1)$-reihige *(Unter-)Matrix*, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von $\underline{A}$ ernsteht.

Bezeichnung: $det(\underline{A}) = det\left(\begin{pmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$

Bsp. 6:

a.) $n = 2$:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot a_{21}$
$= \underline{\underline{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}}$

b.) $n = 3$:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12} + a_{21} + a_{33})$$
(Alternativ auch: Regel von SARRUS [diese gilt NUR für 3-reihige Determinanten] $\Rightarrow$ (Summe der Produkte der Diagonalen nach rechts unten)-(Summe der Produkte der Diagonalen nach links unten))

Satz 2:

a.) $det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = det(\underline{A}) \cdot det(\underline{B})$

b.) $det(\underline{A}) = det(\underline{A}^T)$

Wegen Satz 2b gelten für alle folgenden, für die Zeilen formulierten Eigenschaften auch sinngemäß für die Spalten.

Satz 3: (Eigenschaften der Determinante)

(E1) $\underline{B}$ gehe aus $\underline{A}$ durch Vertauschen zweier Zeilen hervor, dann gilt $det(\underline{B}) = -det(\underline{A})$.

(E2) Es gilt $det(\underline{A}) = 0$ falls zwei Zeilen elementweise proportional sind bzw. falls alle Elemente einer Zeile gleich 0 sind.

(E3) Es gilt $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (steht ein Faktor in einer Zeile einer Determinante, so kann er auch vorgezogen werden).

(E4) Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn das λ-fache einer Zeile elementweise zu einer anderen Zeile addiert wird.

(E5) $det(\underline{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (Entwicklung nach i-ter Zeile, $(i = 1, ..., n)$)

$det(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (Entwicklung nach j-ten Spalte, $(j = 1, ..., n)$)

$\rightarrow$ *Entwicklungssatz*

Bsp. 7:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -5 & -4 \\ -1 & 1 & -4 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Mitschrift von Falk-Jonatan Strube

3. Spalte = Arbeitsspalte (bleibt unverändert)
Um in der untersten Spalte mehr Nullen zu erzeugen (mit Regel E4):
$S_{1,neu} := S_1 + 6 \cdot S_3$
$S_{2,neu} := S_2 + 2 \cdot S_3$
$\Rightarrow$

$$= \begin{vmatrix} 19 & 7 & 3 & -1 \\ -32 & -8 & -5 & -4 \\ -26 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Nun kann mit der letzen Zeile relativ einfach die Determinante berchnet werden:

$$= (-1) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 19 & 7 & -1 \\ -32 & -8 & -4 \\ -26 & -7 & 2 \end{vmatrix}$$

Auf gleiche Weise werden nun wieder in Zeilen Nullen erzeugt:
$Z_{2,neu} := Z_2 - 4Z_1$
$Z_{3,neu} := Z_3 + 2Z_1$
$\Rightarrow$

$$= \begin{vmatrix} 19 & 7 & 1 \\ -108 & -36 & 0 \\ 12 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -108 & -36 \\ 12 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E3}{=} (-1) \cdot (-36) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 7 \end{vmatrix} = 36 \cdot 9 = \underline{\underline{324}}$$

Prinzip: Nullen erzeugen mit (E4), dann mit Entwicklungssatz lösen (E5).

Anwendungen

1.) Vekotorrechnung in $\mathbb{R}^3$ (vgl. später, Abschnitt 5.5 **??**)

2.) Gegeben sei ein lineares Gleichungssytem (n Gleichungen, n Unbekannte)

Matrixform $\boxed{\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}}$ mit $\underline{A} = (a_{ij}), \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$. Diese Matrixform besitzt genau dann eine eindeutige Lösung $\underline{x}$, wenn $det(\underline{A}) \neq 0$.

In diesem Falle gilt $\boxed{x_j = \frac{det(\underline{B}_j)}{det(\underline{A})}}$ $(j = 1, ..., n)$. Wobei $\underline{B}_j$ aus $\underline{A}$ hervorgeht, indem man die j-te Spalte durch $\underline{b}$ ersetzt (*CRAMERsche Regel*, theoretische Bedeutung, praktisches Vorgehen zur Lösung der Matrixform vgl. folgenden Abschnitt 1.5.4 **??**).

5.4. Lineare Gleichungssysteme, Rang einer Matrix, Inverse

5.4.1. Das Austauschverfahren

Gegeben sei System von m linearen Funktionen mit den unabhängigen Veränderlichen $x_1, ..., x_n$ und den abhängigen Veränderlichen $y_1, ..., y_n$.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + a_{10} \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a22x_2 + ... + a2nx_n + a_{20} \\
... \\
y_m &= a_{m1}x_1 + am2x_2 + ... + amnx_n + a_{m0}
\end{aligned}
$$

Bsp. 8:
Betrieb, in Abteilungen, n Produkte $P_1, ..., P_n$:
a_{ij}... Kosten pro Einheit von P_j die in Abteilung i entstehen.
a_{i0}... Fixkosten in Abteilung i.
x_j... produzierte Mengen von P_j.
y_i... Gesamtkosten in Abteilung i.

Matrix-Schreibweise: $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{a}$ mit $\underline{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m,\\ j=1,...,n}}$ $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ ... \\ a_{0m} \end{pmatrix}$

Tabellenform:

	x_1	x_2	...	x_n	1
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_{10}
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_{20}
...	...				
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_{m0}

bzw.

	x^T	1
$\underline{y}$	$\underline{A}$	$\underline{a}$

Aufgaben:

1.) $\underline{x}$ vorgegeben, $\underline{y}$ ist zu berechnen (klar!).

2.) $\underline{y}$ vorgegeben, $\underline{x}$ zu berechnen (nicht immer lösbar, falls lösbar, nicht immer eindeutig lösbar).

Lösungsprinzip:
Man tausche so oft wie möglich y_r gegen x_s aus, Austauschschritt AS ($y_r \leftrightarrow x_s$) $\rightarrow$ *Austauschverfahren*.
Austauschschritt $y_r \leftrightarrow x_s$ bedeutet:

1.) r-te Zeile $y_r = ...$ nach x_s auflösen $x_s = ...$

2.) in allen anderen Zeilen x_s durch die rechte Seite vom obigen x_s ersetzen.
$\curvearrowright$ neue Tabelle

FOLIEN IM NETZ (Neumann)
Praktisches Vorgehen:

1.) Pivotelement (Pivot) kennzeichnen $\circ$

2.) Austauschregeln Austauschregel (AR) 1 bis AR 4 abarbeiten
Dabei für AR 4 unter der alten Tabelle die neue Pivotzeile (PZ) als Kellerzeile notieren.

ABB51
$a^*_{ij} = a_{ij} + a_{is} \cdot a^*_{rj}$ (Rechteckregel)

Bsp. 8 (Fortsetzung)
$y_1 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 50$ (Kosten in Abt. 1)
$y_2 = x_1 + 2x_3 + 40$ (Kosten in Abt. 2)

T_1	x_1	x_2	x_3	1
y_1	2	3	$\boxed{1}$	50
y_2	1	0	2	40
K	-2	-3	*	-50

T_2	x_1	x_2	y_1	1
x_3	-2	-3	1	-50
y_2	$\boxed{-3}$	-6	2	-60
K	*	-2	$\frac{2}{3}$	-20

T_3	y_2	x_2	y_1	1
x_3	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	-10
x_1	$-\frac{1}{3}$	-2	$\frac{2}{3}$	-20

d.h.:
$x_3 = \frac{2}{3}y_2 + x_2 - \frac{1}{3}y_1 - 10$
$x_1 = -\frac{1}{3}y_2 - 2x_2 + \frac{2}{3}y_1 - 20$

$\curvearrowright$ bei vorgegebenen Kosten y_1, y_2 ist die Lösung $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ nicht eindeutig bestimmbar.

z.B. $y_1 = 600,\ y_2 = 300$:
$x_2 = t$ (*frei wählbar*)
$x_3 = \frac{2}{3} \cdot 300 + t - \frac{1}{3} \cdot 600 - 10 = t - 10$
$x_1 = -\frac{1}{3} \cdot 300 - 2t + \frac{2}{3} \cdot 600 - 20 = 280 - 2t$
$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 280 - 2t \\ t \\ t - 10 \end{pmatrix}$
hier für $x_i \geq 0$: $10 \leq t \leq 140$.

Varianten des Austauschverfahrens (AV)

1.) AVZ ... Austauschverfahren mit *Zeilentilgung*, d.h. neue PZ in neuer Tabelle weglassen.

2.) AVS ... Austauschverfahren mit *Spaltentilgung*, d.h. neue Pivotspalte in neuer Tabelle weglassen (nur anwendbar, wenn Variable über der weggelassenen Spalte = Null ist, siehe folgender Abschnitt).

3.) AVSZ ... AVZ+AVS gleichzeitig.

5.4.2. Lineare Gleichungssysteme

- Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (m Gleichungen, n Unbekannte $x_1, ..., x_n$)
  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$
  ...
  $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$
- Gleichungssystem heißt *homogen*, falls $b_1 = ... = b_m = 0$ gilt, sonst *unhomogen*.
- Matrixform $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m,\\ j=1,...,n}}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$

- Äquivalente Form: $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} - \underline{b} \cdot 1$ mit $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$

  Hilfsgrößen $y_1 = y_2 = ... = y_m = 0$

- Tabellenform:

	$\underline{x}^T$	1
$\underline{y}$	$\underline{A}$	$\underline{b}$

Lösungsprinzip:
Austauschverfahren, Variante AVS (da $y_i = 0$: Pivotspalte in neuer Tabelle weglassen!)
Fall 1:
Alle y_i sind austauschbar $\Rightarrow$ Gleichungssystem ist lösbar, Lösung aus letzter Tabelle (TE) ablesbar.

z.B.:

TE	x_3	1
x_1	0	4
x_2	2	-3

$\curvearrowright x_1 = 4, \quad x_2 = 2x_3 - 3$ (x_3 frei wählbar)

Fall 2:
Wenigstens ein y_i ist gegen kein x_j austauschbar.

$\curvearrowright$ Tabelle:

	(evtl.) noch nicht ausgetauschte x_j	1
...		
y_i	0...0...0	α
...		

$\curvearrowright y_i = \alpha$

Fall 2a: $\alpha = 0$
Zeile y_i kann gestrichen werden $(0 = 0)$.
Fall 2b: $\alpha \neq 0$
Gleichungssystem nicht lösbar (Widerspruch, da $y_i = 0$)

Das Verfahren endet also im Fall 2b (unlösbar) oder mit einer Tabelle, in der kein y_i mehr vorkommt (Fall 1 oder 2a).

TE	x_{S1}	x_{S2}	...	x_{Sq}	1
x_{r1}	...				
x_{r2}	...				
...					
x_{rp}	...				

$x_{S...}$: NBV ... *Nichtbasisvariablen* (nicht ausgetauschte x_i)
$x_{r...}$: BV ... *Basisvariablen* (ausgetauschte x_i)

- Allgemeine Lösung ergibt sich aus Endtabelle: NBV beliebig vorgeben, BV daraus berechenbar.
- Falls keine NBV vorhanden sind, ist die Lösung eindeutig.

Def. 8:
Die Darstellung der Endtabelle heißt Basisdarstellung des lin. Gleichungssystems.
Bemerkung: Aus einer Basisdarstellung lassen sich weitere Basisdarstellungen durch Austausch $x_{ri} \leftrightarrow x_{sj}$ gewinnen.

Bsp. 9
$3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2$
$-5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2$

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10$

T1	x_1	x_2	x_3	1
y_1	3	$\boxed{1}$	2	2
y_2	-5	-3	-2	2
y_3	1	3	-2	10
K	-3	*	-2	-2

mit AVS:

T2	x_1	x_3	1
x_2	-3	-2	-2
0	$\boxed{4}$	4	8
0	-8	-8	-16
K	*	-1	-2

T3	x_3	1
x_2	1	4
x_1	1	-2
0	0	0

(in T3 kann letzte 0-Zeile gestrichen werden)
$\curvearrowright$ T3 ist Endtabelle (BV: x_1, x_2, NBV: x_3)
allg. Lösung:
$x_2 = x_3 + x_4$
$x_1 = -x_3 - 2$
$x_3 \in \mathbb{R}$ frei wählbar

andere Form: $x_3 = t$ (Parameter), $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-2 \\ t+4 \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ Bemerkung:

1.) Bei homogenen System $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}$ muss die 1-Spalte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht geschrieben werden (nur „gedacht").

2.) Die Methode AVS entspricht dem sogenannten *Gauß-Jordan-Verfahren*.
Der *Gauß-Algorithmus* (siehe folgendes Beispiel):
- AVSZ (Spalten- und Zeilentilgung)
- weggelassene Zeilen merken ($\rightarrow$ Kellerzeilen)
- Rückrechnung durchführen

Bsp. 10:

$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$
$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4$
$2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3$

T_1	x_1	x_2	x_2	1
0	-1	2	2	-4
0	2	5	2	-4
0	2	$\boxed{1}$	-1	+3
x_2	-2	*	4	-3

T_2	x_1	x_3	1
0	$\boxed{5}$	10	-10
0	-8	22	-19
x_1	*	2	-2

T_3	x_3	1
0	$\boxed{6}$	-3
x_3	*	$\frac{1}{2}$

Rückrechnung:
$T_3 \curvearrowright x_3 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$
$T_2 \curvearrowright x_1 = 2x_3 - 2 = \underline{\underline{-1}}$
$T_1 \curvearrowright x_2 = -2x_1 + 4x_3 - 3 = \underline{\underline{1}}$

Lösung: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Bemerkung:

m Gleichungen, n Unbekannte
$m \leq n$ $\curvearrowright$ AVS günstiger
$m \geq n$ $\curvearrowright$ Gauß oder AVS

5.4.3. Weitere Anwendungen des Austauschverfahrens

1.) Lineare Unabhängigkeit von Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ überprüfen.

Ansatz: $\boxed{x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + ... + x_n\underline{a}_n = \underline{0}} \Leftrightarrow \boxed{\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}}$ mit $\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ ... \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$ (Spalten von $\underline{A}$ sind die (Spalten-)Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$). Homogenes GLS mit AVS mit Starttabelle: $\begin{array}{c|c} & \underline{x}^T \\ \hline \underline{y} & \text{A} \end{array}$

- Unabhängigkeit genau dann, wenn alle x_i ausgetauscht werden können.
- Allgemein: Die zu den ausgetauschten x_i, d.h. BV, gehörenden a_i sind unabhängig. Sie bilden die Basis von $L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

2.) Rang einer Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ ... \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$ ... $rang(\underline{A})$ (auch: $rank(\underline{A}), rk(\underline{A}), ...$)

Def.: $\boxed{rang(\underline{A}) := dim\ L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)}$
(Dimension des von den Spaltenvektoren aufgespannten Teilraumes).

Berechnung: $rang(\underline{A}) =$Anzahl der ausführbaren Austauschschritte im AVSZ mit $\begin{array}{c|c} & \underline{x}^T \\ \hline \underline{y} & \text{A} \end{array}$ als Starttabelle (1-Spalte entfällt).
Bemerkung: Es gilt $rang(\underline{A}^T) = rang(\underline{A})$.

3.) Berechnung der Determinante einer (n, n)-Matrix (vgl. Merkblatt „Lineare Algebra")

5.4.4. Die Inverse einer (n,n)-Matrix

Def. 9:
Es sei $\underline{A}$ vom Typ (n, n). Das Gleichungssystem $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x}$ sei für jedes $\underline{y}$ *eindeutig* nach $\underline{x}$ auflösbar, d.h. $\underline{x} = \underline{B}\,\underline{y}$. Dann heißt die (n, n)-Matrix $\underline{B}$ *Inverse* von $\underline{A}$. Bezeichnung: $\underline{A}^{-1} = \underline{B}$.
Falls $\underline{A}^{-1}$ existiert, so heißt $\underline{A}$ *regulär*, sonst *singulär*.
Bemerkung:

1.) $\boxed{\underline{A} \text{ ist regulär}} \Leftrightarrow \boxed{det\,\underline{A} \neq 0}$

2.) $\underline{A}$ regulär, dann hat $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ die eindeutige Lösung $\boxed{\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}}$.

Rechenregeln: Seien $\underline{A}$ und $\underline{B}$ regulär. Dann gilt:

- $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$, $\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E}$
- $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$
- $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{E}$

- $(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$
- $\left(\underline{A}^T\right)^{-1} = \left(\underline{A}^{-1}\right)^T$

Verfahren zur Ermittlung der Inversen:

- vollständiges AV mit Starttabelle $\begin{array}{c|c} & \underline{x}^T \\ \hline \underline{y} & \underline{A} \end{array}$
  Fall 1: alle x_i austauschbar $\curvearrowright$ $\underline{A}$ regulär.
  Fall 2: nicht alle x_i austauschbar $\curvearrowright$ $\underline{A}$ singulär.
  im Fall 1: $\curvearrowright$ nach Ordnen der Zeilen und Spalten: $\underline{A}^{-1}$ aus TE ablesbar.
- Probe: $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$

Bsp. 11:

$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ gesucht: $\underline{A}^{-1}$ (falls diese existiert).

Lösung:

T_1	x_1	x_2	x_3
y_1	$\boxed{1}$	2	1
y_2	1	0	2
y_3	1	-1	1
K	*	-2	-1

T_2	y_1	x_2	x_3
x_1	1	-2	-1
y_2	1	-2	$\boxed{1}$
y_3	1	-3	0
K	-1	2	*

T_3	y_1	x_2	y_2
x_1	2	-4	-1
x_3	-1	-2	1
y_2	1	$\boxed{-3}$	0
K	$\frac{1}{3}$	*	0

T_4	y_1	y_3	y_2
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1
x_3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
x_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0

$\curvearrowright \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Probe: $\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \underline{E} = \underline{A}^{-1}\,\underline{A}$

5.5. Vektorrechnung im Raum

5.5.1. Kartesische Basis

Einige Begriffe:

1.) *Betrag* eines Vektors $\underline{a}$: Länge des Pfeils, der $\underline{a}$ repräsentiert.
Bezeichnung: $|\underline{a}|$

2.) *Einheitsvektor*: Vektor mit $|\underline{a}| = 1$.

3.) zu $|\underline{a}| \neq \underline{0}$ gehörender Einheitsvektor $\boxed{\underline{a}^0 = \frac{1}{|\underline{a}|}\underline{a}}$

4.) *Kartesische Basis* $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ besitzen Betrag 1, stehen $\perp$ aufeinander und bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (Rechtsschraubregel: Rechtsschraube $\perp$ zu $\underline{i}$ und $\underline{j}$ halten, auf kürzestem Weg von $\underline{i}$ nach $\underline{j}$ drehen. $\curvearrowright$ Bewegung in Richtung $\underline{k}$).
ABB 52

5.) *Kartesisches Koordinatensystem*:

- Fester Punkt O als Ursprung
- kartesische Basis $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ (jeweils linear unabhängig)

Damit eineindeutige Zuordnung:
$\underset{\text{Punkt}}{P} \overset{1}{\underset{1}{\longleftrightarrow}} \underset{\text{Ortsvektor}}{\overrightarrow{OP}} = \underline{r} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k}$
ABB 53

$\underline{r} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (Kurzschreibweise – beide Schreibweisen gleichberechtigt)

Betrag eines Vektors $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$: $\boxed{|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

Bemerkung:

Bezeichnung auch $\underline{e_1} = \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e_2} = \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e_3} = \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{x} = \overrightarrow{x} = \mathbf{x}$

5.5.2. Das Skalarprodukt

Def. 10:
Die Zahl $(\underline{a}, \underline{b}) := |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot cos(\varphi)$ heißt *Skalarprodukt* der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$. Dabei ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

Eigenschaften des Sklarproduktes:

a.) $(\underline{a}, \underline{a}) > 0$ für $\underline{a} \neq \underline{0}$

b.) $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$ (Symmetrie)

c.) $(\lambda\, \underline{a} + \mu\, \underline{b},\ \underline{c} = \lambda \cdot (\underline{a}, \underline{c}) + \mu(\underline{b}, \underline{c})$ (Linearität)

Satz 4:

Es sei $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$.

Folgerung: $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}}$
Schreibweisen: $(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a} \circ \underline{b} = ...$

Anwendungen:

1.) Projektion $\underline{a}_{\underline{b}}$ von $\underline{a}$ auf $\underline{b}$: $\boxed{\underline{a}_{\underline{b}} = (\underline{a}, \underline{b}^0)\underline{b}^0 = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{b}|^2}\underline{b}}$

ABB 54
Herleitung:

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

$|\underline{a}_{\underline{b}}| = |\underline{a}| \cdot cos(\varphi)$

$\underline{a}_{\underline{b}} = |\underline{a}| \cdot cos(\varphi) \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot cos(\varphi) \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|^2} = (\underline{a}, \underline{b}) \cdot \frac{1}{|\underline{b}|^2} \cdot \underline{b}$

2.) Winkel φ zwischen zwei Vektoren: $\boxed{cos(\varphi) = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}}$

Bsp. 12:

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

a.) $|\underline{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}, |\underline{b}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{65}$

$cos(\varphi) = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}} = \frac{29}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}}$

$\varphi = arccos\left(\frac{29}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}}\right) \approx 15,92°$

b.) Projektion von $\underline{b}$ auf $\underline{a}$: $\underline{ba} = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}|^2} \underline{a} = \frac{29}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{29}{14} \underline{e}_1 - \frac{29}{7} \underline{e}_2 + \frac{29 \cdot 3}{14} \underline{e}_3$

3.) *Orthogonalitätskriterium*:

$(\underline{a}, \underline{b}) = 0 \Leftrightarrow (\underbrace{|\underline{a}| = 0}_{\underline{a}=} \vee \underbrace{|\underline{b}| = \underline{0}}_{\underline{b}=\underline{0}} \vee cos(\varphi) = 0)$

Vereinbarung: $\underline{0}$ orthogonal zu jedem Vektor $\curvearrowright$ $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{a} \perp \underline{b}}$

5.5.3. Das vektorielle Produkt

Def. 11:

Das vektorielle Produkt $\underline{a} \times \underline{b}$ zweier Vektoren $(\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3)$ ist ein Vektor, der eindeutig festgelegt ist durch:

(1) $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot sin(\varphi)$

(2) $\underline{a} \times \underline{b}$ ist senkrecht zu $\underline{a}$ und senkrecht zu $\underline{b}$.

(3) $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{a} \times \underline{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Eigenschaften des vektoriellen Produktes:

- $\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a})$ (Anti-Kommutativgesetz)
- $\underline{a} \times (\underline{a} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$ (Distributivgesetz)
- $\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = (\lambda \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda \underline{b})$
- Speziell: $\underline{a} \times \underline{a} = \underline{0}$
- $\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3, \; \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$ usw.

Satz 5:

Es sei $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, dann gilt:

$$\underline{a} \times \underline{b} \underset{\text{Schema}}{\widehat{=}} \begin{vmatrix} \underline{i} & a_1 & b_1 \\ \underline{j} & a_2 & b_2 \\ \underline{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \widehat{=} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \underline{k}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_2b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Bsp. 13:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \underline{k} = -2\underline{i} - 7\underline{j} - 4\underline{k} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Kontrolle: $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{a}) = 0, \ (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{b}) = 0$!

Anwendungen:

1.) *Flächeninhalt* des von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannte *Parallelogramms*: $\boxed{F = |\underline{a} \times \underline{b}|}$
ABB 55
$sin(\alpha) = \dfrac{h}{|\underline{b}|}$
$F = |\underline{a}| \cdot h = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot sin(\alpha) = |\underline{a} \times \underline{b}|$

2.) Flächeninhalt eines Dreiecks $\Delta P_1P_2P_3$: $\boxed{F = \dfrac{1}{2} \left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_2}\right|}$ (halbes Parallelogramm)

3.) *Parallelitätskriterium*: $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \ \Leftrightarrow \ |\underline{a} \times \underline{b}| = 0 \ \Leftrightarrow \ (|\underline{a}| = 0 \vee |\underline{b}| = 0 \vee sin(\varphi) = 0)$
Vereinbarung: $\underline{0}$ || zu jedem Vektor
$\curvearrowright \boxed{\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \ \Leftrightarrow \ \underline{a} || \underline{b}}$

5.5.4. Das Spatprodukt

Def. 12:
Die Zahl $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})$ heißt Spatprodukt der Vektoren $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$.
Eigenschaften: $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{b} \times \underline{c}, \underline{a}) = (\underline{c} \times \underline{a}, \underline{b})$ (durch zyklisches Vertauschen)

Berechnung: $\boxed{(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = det(\underline{a}|\underline{b}|\underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$

Anwendung:

1.) Volumen des von $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$ aufgespannten Spates (Parallelotop): $\boxed{V = |(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})|}$
ABB 57

$V = F_{\text{Grundfläche}} \cdot h = |\underline{a} \times \underline{b}| \cdot |\underline{c}| \cdot |cos(\alpha)| = |(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})|$
Bemerkung:

Spatprodukt $\begin{cases} > 0 & \text{... Rechtssystem} \\ < 0 & \text{... Linkssystem} \end{cases}$

2.) *Komplanaritätskriterium*:
Die Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ sind komplanar, d.h. sie liegen in einer (in O angehefteten) Ebene
$\Leftrightarrow \ (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = 0$
$\Leftrightarrow \ \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ sind linear abhängig.

5.5.5. Geraden- und Ebenengleichungen

1.) Parameterdarstellung einer Geraden g durch P_1 und P_2:
P ... beliebiger Punkt von g
ABB 58
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \quad (t \in \mathbb{R})$
$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + t \cdot \underline{a}}$ (Punkt-Richtungs-Form)
$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + t \cdot (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)} \quad (t \in \mathbb{R})$ (Zwei-Punkte-Form)

Bsp.:
Gerade durch die Punkte $P_1 = (1, 2, -1), P_2 = (0, 1, 4)$

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2.) Parameterdarstellung einer Ebene ε durch 3 Punkte P_1, P_2, P_3, die nicht auf einer Geraden liegen.
ABB 59
P ... beliebiger Punkt von ε
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + u \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + v \cdot \overrightarrow{P_1P_3} \quad (u, v \in \mathbb{R})$
$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + u \cdot \underline{a} + v \cdot \underline{b}} \quad (u, v \in \mathbb{R})$
$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + u \cdot (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) + v(\underline{r}_3 - \underline{r}_1)}$

3.) Parameterfreie Ebenengleichung
ABB 60
Normalenvektor $\underline{n}$ ($\underline{n} \neq 0, \ \underline{n} \perp \varepsilon$):

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \ \underline{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$$

Dabei sei $P(x, y, z)$ ein beliebiger Punkt in ε und $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ein fester Punkt in ε mit Orthogonalitätskriterium $(\underline{n}, \overrightarrow{P_0P}) = 0$ bzw. $\boxed{(\underline{n}, \underline{r} - \underline{r}_0) = 0}$.

Ausführlich: $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right) = 0$, d.h. $a \cdot (x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

Allgemeine Form: $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ mit $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

Bsp. 15:
Ebene durch $P_1(1,0,0), P_2(3,1,5), P_3(-2,0,2)$

- P.d. (Parameterdarstellung) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\underline{a}} + v \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\underline{b}} \quad (u, v \in \mathbb{R})$

- Ein Normalenvektor ist bpsw. $\underline{u} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -19 \\ 3 \end{pmatrix}$

  $\curvearrowright$ Parameterfreie Darstellung: $2x - 19y + 3z + d = 0$
  d berechnen: Einsetzen von $x = 1, y = z = 0$ (P_1) liefert $2 \cdot 1 + d = 0 \;\Rightarrow\; d = -2$
  $\curvearrowright \boxed{2x + 19y + 3z - 2 = 0}$

5.5.6. Einige geometrische Grundaufgaben

1.) Schnitt von Gerade und Ebene

Bsp. 16:
Gegeben:
Ebene ε: $2x - 4y + z + 3 = 0$
Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
Gesucht:

a.) Schnittpunkt (Spurpunkt) $S(x_S, y_S, z_S)$
b.) Schnittwinkel

zu a.) $g : x = 3 - t,\ y = t,\ z = 1 - 2t$ einsetzen in Ebenengleichung: $2(3 - t) - 4 \cdot t + 1 - 2t + 3 = 0 \Rightarrow -8t + 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{4}$
$t = \frac{5}{4}$ in Geradengleichung einsetzen: $x_S = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}, y_S = \frac{5}{4}, z_S = 1 - 2\frac{5}{4} = -\frac{3}{2}$
$\curvearrowright \underline{\underline{S\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{3}{2}\right)}}$

zu b.) Schnittwinkel:
ABB 61
$\beta = \measuredangle(\underline{n}, \underline{a})$ (Richtungsvektor von g)
$\alpha = |90° - \beta|$
$\underline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \beta = arrcos\left(\frac{(\underline{n}, \underline{a})}{|\underline{n}| \cdot |\underline{a}|}\right) \approx 135,45°$
$\curvearrowright \alpha = |90° - \beta| \approx 45,45°$

2.) Schnitt zweier Ebenen: 2 Gleichungen, 3 Unbekannte

Bsp. 17:
Schnitt der Ebenen $\varepsilon_1 :\ x+y+z-1=0$ und $\varepsilon_2 :\ x-2y+3z+4=0$.
Austauschverfahren:

T_1	x	y	z	1
0	$\boxed{1}$	1	1	-1
0	1	-2	3	4
K	*	-1	-1	1

T_2	x	z	1
x	-1	-1	1
0	-3	$\boxed{2}$	5
K	$\frac{3}{2}$	*	$-\frac{5}{2}$

T_3	y	1
x	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
z	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$

$y \dots$ NBV, $y=t$ (beliebig), $x=-\frac{5}{2}t+\frac{7}{2}$, $z=\frac{3}{2}t-\frac{5}{2}$

also $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}t+\frac{7}{2} \\ t \\ \frac{3}{2}t-\frac{5}{2} \end{pmatrix}$, oder $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$