# Mathematik I

**Vorlesungsskript**

Falk Jonatan Strube

Vorlesung von Herrn Meinhold

27. Oktober 2015

# Inhaltsverzeichnis

# Teil I. Elementare Grundlagen

## 1. Aussagen und Grundzüge der Logik

### 1.1. Aussagen, Wahrheitswert

**Aussage:** (im weiteren Sinne) Sprachlich sinnvoller, konsatierender Satz. In diesem Abschnitt werden nur zweiwertige Aussagen betrachtet, d.h. Aussagen, die entwoder wahr oder falsch sind.

**Bsp. 1:**

(1) Es gibt unendlich viele Primzahlen (wahr)

(2) Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge, z.B. (3,5), (5,7), (11,13), (17,19) usw. (Wahrheitswert nicth bekannt!)

(3) $5 + 7 = 13$ (falsch)

(4) Wie spät ist es? (keine Aussage)

(5) Diese Aussage ist falsch! (keine Aussage, paradox)

(6) Am 30.06.2016 wird es in Dresden regnen.

(1)–(3) sind zweiwertige Aussagen, (4) und (5) sind keine Aussagen, (6) ist keine zweiwertige Aussage (Wahrscheinlichkeit, d.h. Zahl zwischen 0 und 1 angebbar).

**Bezeichnungen:**

| | |
|---|---|
| p, q, r, | . . . Aussagen, |
| 0 | . . . falsche Aussage, |
| 1 | . . . wahre Aussage |

**Wahrheitswert:**

$$w(p) = \begin{cases} 1 & \text{(falls p wahr)} \\ 0 & \text{(fallls p falsch)} \end{cases}$$

$p \equiv q$ (p *identisch* q) . . . p und q haben denselben Wahrheitswert

### 1.2. Aussagesverschiebung

1.) *Negation* $\overline{p}$ („nicht p“) [oft auch $p!$ bzw. $\neg p$]

| $p$ | $\overline{p}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

2.) *Konjunktion* $p \wedge q$ („p und q“)

3.) *Disjunktion* $p \vee q$ („p oder q") [Alternative – nicht ausschließendes Oder!]

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

4.) *Implikation* $(p \Rightarrow q) :\equiv \overline{p} \vee q$ („aus p folgt q", „wenn p, dann q")

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |

Begriffe: $p \Rightarrow q$ (p: *Prämisse*, q: *Konklusion*)
Eine Implikation ist genau dann falsch, wenn die Prämisse richtig und die Konklusion falsch ist!

**Bsp. 2:**

- $-1 = 1$ (falsch) $\Rightarrow 1 = 1$ (wahr) [durch Quadrieren]
- $-1 = 1$ (falsch) $\Rightarrow 0 = 2$ (falsch) [Addition von 1]

Aus einer falschen Aussage lassen sich durch richtiges Schließen sowohl falsche als auch richtige Aussagen gewinnen.

Andere Sprechweisen: „p ist *hinreichend* für q", „q ist *notwendig* für p"

5.) *Äquivalenz* $(p \Leftrightarrow q) :\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ („p äquivalent q", „p ist notwendig und hinreichend für q", „p genau dann wenn q")
(ist genau dann wahr, wenn p und q den selben Wahrheitswert besitzen)

## 1.3. Logische Gesetze (Tautologien)

Eine Tautologie $t$ ist eine Aussagenverbindung, die unabhängig vom Wahrheitswert der einzelnen Aussagen stets wahr ist (d.h. $t \equiv 1$).

**Bsp. 3:**
Einige wichtige Tautologien

1.) $p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$

(Negation der Negation)

2.) $p \vee \overline{p}$

(Satz vom ausgeschlossenem Dritten)

3.) a) $\overline{p \wedge q} \equiv (\overline{p} \vee \overline{q})$
b) $\overline{p \vee q} \equiv (\overline{p} \wedge \overline{q})$
(de Morgansche Regeln)

4.) $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
(Kontrapositionsgesetz)

5.) $p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
(direkter Beweis)

6.) $p \wedge (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})) \Rightarrow q$
(indirekter Beweis)

Beweise mittels Wahrheitstafeln (vgl. Übung 1).
Bemerkung zu 1., 3., 4.: Eine Äquivalenz ist genau dann eine Tautologie, wenn beide Seiten identisch sind, z.B. $p \equiv \overline{\overline{p}}$.

**Beweistechniken:**
Zu beweisen ist $q$.

1.) Direkter Beweis:
- Nachweis von $p$ (Voraussetzung)
- Richtiger Schluss $p \Rightarrow q$
  Dann $q$ wahr (Behauptung)

2.) Indirekter Beweis: Annahme von $\overline{q}$ auf Wiederspruch führen (auf unterschiedliche Weise möglich, vgl. folgendes Bsp).

**Bsp. 4:**
$q =$„$\sqrt{2}$ ist irrational“ (keine rationale Zahl)
Beweis indirekt:
Es gelte $\overline{q}$, d.h. $\sqrt{2}$ ist rational, dann gelten folgende Schlüsse: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen $m$ und $n$.
$\Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 2 \cdot n^2 = m^2 \Rightarrow 2|m^2$
$\Rightarrow \boxed{2|m}$ (2 ist Teiler von m)
$\Rightarrow 4|m^2$ (mit $m^2 = 2n^2$)
$\Rightarrow 4|2n^2 \Rightarrow 2|n^2 \Rightarrow \boxed{2|n}$
Widerspruch: Da $m$ und $n$ teilerfremd sind. #

**Weitere Gesetze**

- $p \wedge q \equiv q \wedge p$
  $p \vee q \equiv q \vee p$

  (Kommutativgesetze)
- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

  (Assoziativgesetze)
- $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
  $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
  (Distributivgesetze)

- $p \wedge 1 \equiv p$, $p \vee 1 \equiv 1$, $p \wedge p \equiv p$
  $p \wedge 0 \equiv 0$, $p \vee 0 \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

  (Absorptionsgesetz)

## 1.4. Aussagefunktionen, Quantoren, Prädikatenlogik

$X$ sei eine Menge (Gesamtheit von Objekten $x$ mit einem gemeinsamen Merkmal, vgl. Abschnitt 2)
$x \in X$ ... $x$ ist Element von $X$. Die Objekte haben Eigenschaften (*Prädikate*)

**Aussagefunktion** (auch Aussageform) $p(x)$: Jedem $x \in X$ ist eine Aussage $p(x)$ zugeordnet. Dabei steht $x$ für ein Objekt, $p$ für ein Prädikat.

**Bsp. 5:**
$X$ ... Menge der positiven natürlichen Zahlen (1, 2, 3, ...)
$p(x)$ :=„$x$ ist eine Primzahl“
$p(5)$ ... wahr, $p(10)$ ... falsch

**Quantoren:**
Betrachtet werden folgende Aussagen:

1.) „Für alle $x$ (aus $X$) gilt $p(x)$“ $\equiv$ $\boxed{\forall x\ p(x)}$ (*universeller Quantor* / Allquantor)

2.) „Es existiert (wenigstens) ein $x$, für welches $p(x)$ gilt“ $\equiv$ $\boxed{\exists x\ p(x)}$ (*existenzieller Quantor*)

Zur Schreibweise:

- Bei Anwendungen (außerhalb der reinen Logik) wird oft die Grundmenke $X$ mit angegeben:
  $\forall x \in X\ p(x)$ usw.
- Falls sich Quantoren auf eine Teilmenge $M$ von $X$ beziehen sollen, dann können folgende Schreibweisen verwendet werden:
  $a = \forall x \in M\ p(x)$, $b = \exists x \in M\ p(x)$.
- Die Schreibweisen in der formalen Logik sind dann:
  $a = \forall x\ (x \in M \Rightarrow p(x))$

**Rechenregeln:**

$$\boxed{\overline{\forall x\ p(x)} \equiv \exists x\ \overline{p(x)}}$$

$$\boxed{\overline{\exists x\ p(x)} \equiv \forall x\ \overline{p(x)}}$$

**Mehrstellige Aussagefunktionen**

- $p(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\quad x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n$
  Die Grundmengen $X_i$ können, müssen aber nicht für jede Stelle gleich sein.
- Wird ein Quantor auf eine n-stellige Aussagefunktion angewandt, so entsteht eine (n-1)-stellige Aussagefunktion (eine 0-stellige Aussagefunktion ist eine Aussage)
  z.B.: $\exists y\ p(x, y, z) =: q(x, z)$, die Variable $y$ wird durch den Quantor $\exists$ gebunden ($y$... gebundene Variable). Wichtig ist der Platz, nicht der Name der Variable.
  $x, z$ ... freie Variable, können durch weitere Quantoren gebunden werden.

**Bsp. 6:**
Ein Dorf bestehe aus 2 Teilen (Ober- und Unterdorf). Es sei $M$ die Menge aller Bewohner des Dorfes. $M_1$ bzw. $M_2$ seien die Teilmengen von $M$, die dem Ober- bzw. Unterdorf entsprechen.
Wir betrachten folgende zweistellige Aussagefunktionen:
$k(x,y)\ldots$ Person $x$ (aus $M$) kennt Person $y$ (aus $M$)

a) $a(x) := \forall y\ k(x,y)\ldots$ Person $x$ kennt jeden ($\Rightarrow$ „Für alle $y$ gilt: $x$ kennt $y$")
$b(y) := \exists x\ k(x,y)\ \ldots$ es gibt jemanden, der $y$ kennt
$c := \forall x \forall y\ k(x,y)\ \ldots$ jeder kennt jeden
$d := \forall y \exists x\ k(x,y)\ \ldots$ jeder wird von wenigstens einer Person gekannt
$e := \exists x \forall y\ k(x,y)\ \ldots$ es gibt mindestens eine Person, die alle Personen kennt
Man beachte:
   - $d$ und $e$ sind nicht das Gleiche: Die Reihenfolge unterschiedlicher Quantoren muss beachtet werden. Bei $d$ kann für jedes $y$ ein anderes $x$ mit $k(x,y)$ existieren. Diese Abhängigkeit von $y$ wird manchmal in Anwendungen durch $\forall y\ \exists x(y)\ k(x,y)$ ausgedrückt.
   - Es gilt aber $e \Rightarrow d$ (stets wahr: Tautologie). Der Wahrheitsgehalt von z.B. $c, d, e$ kann dagegen nicht mit logischen Mitteln bestimmt werden.

b) Negation der Aussagen bzw. Aussageformen aus a).
$\overline{a(x)} \equiv \exists y\ \overline{k(x,y)}\ldots$ $x$ kennt wenigstens eine Person nicht
$\overline{b(x)} \equiv \forall x\ \overline{k(x,y)}\ \ldots$ keiner kennt $y$
$\overline{c} \equiv \exists x\ \overline{\forall y\ k(x,y)} \equiv \exists x\ \exists y\ \overline{k(x,y)}\ \ldots$ es gibt jemanden der wenigstens eine Person nicht kennt (jemanden, der nicht alle kennt)
$\overline{d} \equiv \exists y\ \forall x\ \overline{k(x,y)}\ldots$ es gibt jemanden, der von keiner Person gekannt wird $\overline{e} \equiv \forall x\ \exists y\ \overline{k(x,y)}$ $\ldots$ jeder kennt wenigstens eine Person nicht.

c) Folgende Aussagen sind mit Hilfe von Quantoren auszudrücken:
$f\ldots$ jeder aus dem Oberdorf kennt wenigstens eine Person aus dem Unterdorf.
$g\ldots$ es gibt jemanden im Unterdorf, der alle Personen des Oberdorfs kennt.

$$\begin{aligned} f &= \forall x \in M_1\ \exists y \in M_2\ k(x,y) \\ &= \forall x\ (x \in M_1 \Rightarrow \exists y\ (y \in M_2 \wedge k(x,y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \exists x \in M_2\ \forall y \in M_1\ k(x,y) \\ &= \exists x\ (x \in M_2 \wedge \forall y\ (y \in M_1 \Rightarrow k(x,y))) \end{aligned}$$

# 2. Mengen

## 2.1. Begriffe

**Menge:** Zusammenfassung gewisser wohl unterscheidbarer Objekte (Elemente) mit einem gemeinsamen Merkmal zu einem Ganzen.

**Diskussion:** Naiver Mengenbegriff führt zu Widerpsrüchen. z.B. Menge $X$ aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.
$X = \{A | A\ Menge, A \notin A\}$
$X \in X$? Wenn $X \in X \Rightarrow X \notin X$ und $X \notin X \Rightarrow X \in X$ (Widerspruch!).
Diese Widersprüche können umgangen werden, wenn nur Teilmengen einer sogenannten Grundmenge betrachtet werden.

**Bezeichungen:**

- meist große Buchstaben für Mengen: $A, B, ..., M, ..., X$
- $\boxed{x \in M}$ ... $x$ ist Element von $M$
- $\boxed{x \notin M}$ ... $x$ ist kein Element von $M$

**Schreibweise:**
$M = \{\underbrace{...}_{\text{Elemente}}\}$ oder $M = \{x|p(x)\}$
mit $p(x) =$ Aussage, die genau für die Elemente $x$ aus $M$ wahr ist.

**Wichtige Grundmengen:**

- $\mathbb{N}$ ... Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{Z}$ ... Menge der ganzen Zahlen $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{Q}$ ... Menge der rationaln Zahlen $\{x|x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
- $\mathbb{R}$ ... Menge der reelen Zahlen
- $\mathbb{C}$ ... Menge der komplexen Zahlen $\{z|z = x + i \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

**Bsp. 1:**
$M_1$ ... Menge der Primzahlen kleiner 10, $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$
$M_2$ ... Menge der reelen Zahlen zwischen 0 und 1 $M_2 = \{x \in \mathbb{R}|0 < x < 1\} =: \underbrace{(0, 1)}_{\text{Intervallschreibweise}}$

**Def. 1:** (Intervallschreibweisen)
Es seien $a$ und $b$ reele Zahlen mit $a < b$:
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}|a \leq x \leq b\}$ ... abgeschlossenes Intervall
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}|a < x < b\}$ ... offenes Intervall
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R}|a \leq x < b\}$
$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R}| -\infty < x < a\} = \{x \in \mathbb{R}|x < a\}$
usw.

**Leere Menge:** z.B. $\{x \in \mathbb{R}|x = x + 1\} = \{x \in \mathbb{R}|x^2 + 1 = 0\}$ enthält kein Element.
Bezeichnung: $\emptyset$ oder $\{\}$

## 2.2. Mengenverknüpfungen

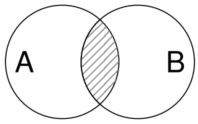
**Def. 2:**
$\boxed{M_1 = M_2} :\equiv \boxed{\forall x\ (x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2)}$ (*Gleichheit*)

**Def. 3:**
$\boxed{M_1 \subseteq M_2} :\equiv \boxed{\forall x\ (x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2)}$ (*Inkulsion*) „$M_1$ ist Teilmenge von $M_2$“

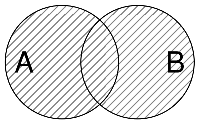
**Diskussion:**
Ist $M_1 \subseteq M_2$ aber $M_1 \neq M_2$ so kann man schreiben $M_1 \subset M_2$ (echte Teilmenge).

**Def. 4:**

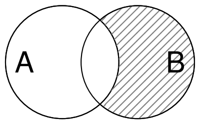
1.) $A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
*Durchschnitt* von $A$ und $B$



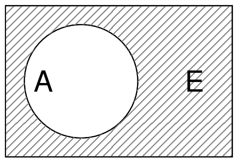

2.) $A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$
*Vereinigung* von $A$ und $B$




3.) $A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
*Differenz* „$A$ minus $B$“




4.) Bei Vorliegen einer Grundmenge $E$:
$\overline{A} := E \setminus A$
*Komplimentärmenge* von $A$




**Diskussion:** (ausgewählte Rechenregeln)

1.) $\cup$ und $\cap$ sind kommutativ und assoziativ
z.B. gilt $A \cup B = B \cup A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

2.) Allg. $I$ ... Indexmenge, z.B. $\{1, 2, ..., n\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ dann:
$\bigcup\limits_{i \in I} A_i := \{x | \exists i \in I \quad x \in A_i\}$
$\bigcap\limits_{i \in I} A_i := \{x | \forall i \in I \quad x \in A_i\}$

## 2.3. Relationen

### 2.3.1. Grundbegriffe

**Def. 5:**
Die Menge $M_1 \times M_2 := \{(x_1, x_2) | x_1 \in M_1 \wedge x_2 \in M_2\}$ heißt *kartesisches Produkt* der Mengen $M_1$ und $M_2$ (= Menge aller geordneten Paare)

**Bsp. 2:**
$\mathbb{R}$ ... Menge der reelen Zahlen, veranschaulicht durch die Zahlengerade
$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ ... x-y-Ebene

**Def. 6:**
Eine Teilmenge $T \subseteq M_1 \times M_2$ heißt *(binäre) Relation*.

**Diskussion:**

1.) Verallgemeinerung: $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1 \in M_1, ..., x_n \in M_n\}$ (= Menge geordneter n-Tupel)
Eine Teilmenge $T \subseteq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ heißt *n-stellige Relation*.

2.) *Jede* Teilmenge von $M_1 \times M_2$ ist eine Relation, also auch die Grenfälle $\emptyset$ (gesamt leere Menge) und $M_1 \times M_2$ (vollständige Menge). Wichtig sind aber im allgemeinen die echten Teilmengen, die die verschiedensten Beziehungen zwischen den Elementen von $M_1$ und $M_2$ ausdrücken.

**Def. 7:** (Eigenschaften binärer Relationen in $M_1 \times M_2$)
Eine Relation $T \subseteq M_1 \times M_2$ heißt:

a) *linksvollständig (linkstotal)*, wenn für jedes $x_1 \in M_1$ (wenigstens) ein $x_2 \in M_2$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

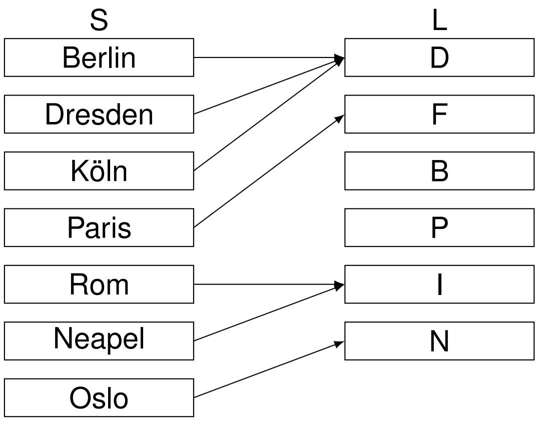
b) *recthvollständig (rechtstotal*, wenn für jedes $x_2 \in M_2$ (wenigstens) ein $x_1 \in M_1$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

c) *rechteindeutig*, wenn für jedes $x_1 \in M_1$ höchstens ein $x_2 \in M_2$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

d) *linkseindeutig*, wenn für jedes $x_2 \in M_2$ höchstens ein $x_1 \in M_1$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$.

**Bsp. 3:**
Es seien $S$ bzw. $L$ folgende Mengen von Städten bzw. Ländern:
$S = \{Berlin,\ Dresden,\ Köln,\ Paris,\ Ram,\ Neapel,\ Oslo\}$
$L = \{D(eutschland),\ F(rankreich),\ B(elgien),\ I(talien),\ P(olen),\ N(orwegen)\}$
Die Relation $T \subseteq S \times L$ soll darstellen, welche Stadt in welchem Land liegt.
Man gebe $T$ elementweise an und stelle die Relation graphisch dar!
Welche der Eigenschaften aus Def. 7 treffen zu?

- $T = \{(Berlin, D), (Dresden, D), (Köln, D), (Paris, F), (Rom, I), (Neapel, I), (Oslo, N)\}$
- graphische Darstellung:




$(x, y) \in T : x \to y$ (gerichteter Graph)

- Eigenschaften:
linksvollständig
nicht rechtsvollständig
rechtseindeutig
nicht linkseindeutig
(solche Relationen nennt man auch „Funktionen", eindeutige Zuordnung [von Stadt $\to$ Land])

**Def. 8:** (Eigenschaften binärer Relationen in $M \times M$)
Eine Relation $T \subseteq M \times M$ (Sprechweise auch „Relation auf M") heißt...

a) *reflexiv*, wenn $(x, x) \in T$ für alle $x \in M$,

b) *symmetrisch*, wenn $(x, y) \in T \Rightarrow (y, x) \in T$,

c) *antisymmetrisch*, wenn $((x, y) \in T \wedge (y, x) \in T) \Rightarrow x = y$,

d) *asymmetrisch*, wenn $(x, y) \in T \Rightarrow (y, x) \notin T$,

e) *transitiv*, wenn $((x, y) \in T \wedge (y, z) \in T) \Rightarrow (x, z) \in T$

... jeweils für *alle* $x, y, z \in M$ gilt.

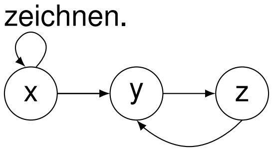
**Bsp. 4:**
Welche Eigenschaften aus Def. 8 besitzen folgende Relationen?
Es sei $P$ eine Menge von Personen.

a) Eine Person $x \in P$ sei jünger als $y \in P$, wenn ihr Geburtstag später als der von $y$ ist.
$\curvearrowright J \subseteq P \times P$ mit $J = \{(x, y) | x$ ist jünger als $y\}$.
$J$ ist offensichtlich asymmetrisch (damit auch antisymmetrisch [Die Prämisse der Implikation $((x, y) \in J \wedge (y, x) \in J) \Rightarrow x = y$ ist stets falsch, damit die Implikation stets wahr]) und transitiv.
Eine solche Relation nennt man auch *strikte Ordnungsrelation* (vgl. Abschnitt 2.3.4).

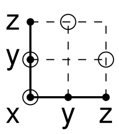
b) Zwei Personon $x \in P$ und $y \in P$ heißen gleichaltrig, wenn $x$ und $y$ das gleiche Geburts*jahr* besitzen.
$\curvearrowright G \subseteq P \times P$ mit $G = \{(x, y) | x$ und $y$ sind gleichaltrig$\}$.
$G$ ist offensichtlich reflexiv, symmetrisch und transitiv.
Derartige Relationen nennt man *Äquivalenzrelationen*, vgl. Abschnitt 2.3.3. Sie teilen $P$ in disjunkte sogenannte Äquivalenzklassen auf ($x$ äquivalent $y$ heißt, $x$ und $y$ besitzen gleiches Geburtsjahr).

Graphische Darstellung von Relationen $T$ in $M \times M$ (auf $M$). Möglichkeiten:

1.) Elemente von $M$ nur einmal darstellen, Pfeildarstellun wie bisher, bei $(x, x) \in T$ eine Schlinge zeichnen.




(gerichteter Graph)

2.) 

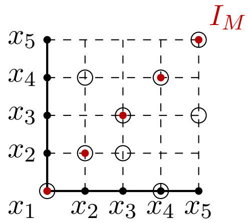

(Koordinatensystem)
Diese Variante ist auch bei Relationen in $M_1 \times M_2$ möglich.

**Diskussion:**

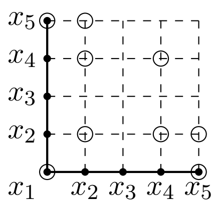
1.) Die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität lassen sich beim gerichteten Graphen leicht nachprüfen.
*Reflexivität:* Bei jedem Element ist eine Schlinge.

*Symmetrie:* Jeder Pfeil $x \to y$ $(y \neq x)$ besitzt „umkehrpfeil“ $(x \leftarrow y)$.
Antisymmetrie: Schlinge möglich, aber keine Umkehrpfeile.
Asymmetrie: weder Schlingen noch Umkehrpfeile.
*Transitivität:* Falls ein Pfeil $x \to y$ eine „Fortsetzung“ $y \to z$ besitzt, so verläuft auch ein Pfeil von $x$ nach $z$.

2.) Auch die Darsteellung von Koordinatensystem lassen sich die Eigenschaften Reflexivität und Symmetrie sofort überprüfen.
*Reflexivität:* Die Diagonale $I_M = \{(x,x)|x \in M\}$ gehört zu $T$ ($I_M$ heißt auch *Identitätsrelation*, diese Relation ist eine spezielle Funktion, identische Funktion $y = f(x)) = x$, $x \in M$ später als Funktion auch mit $i_M$ bezeichnet)
*Symmetrie:* $T$ ist spiegelsymmetrisch bzgl. $I_M$




ist reflexiv aber nicht symmetrisch




ist symmetrisch aber nicht reflexiv

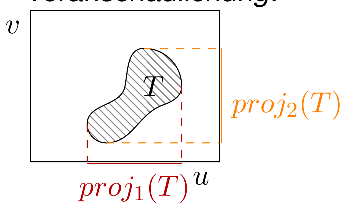
*Alternative Schreibweisen:* Es sei $T \subseteq M_1 \times M_2$ eine binäre Relation.
Anstelle $\boxed{(x,y) \in T}$ kann man schreiben:

- $xTy$ ($x$ steht in Relation $T$ zu $y$), für viele wichtige Relationen gibt es spezielle Zeichen, z.B. $x < y$, $x = y$, $g||h$ oder $A \subseteq B$ usw.
- Aussageformen (vgl. Prädikatenlogik): $\boxed{T(x,y)}$ (auch mit mehreren Variablen möglich)

### 2.3.2. Operationen auf Relationen

Da Relationen spezielle Mengen sind, gibt es Operationen wie $\cup$, $cap$ usw. auch hier. Weitere für Relationen wichtige Operationen in den folgenden Definitionen:

**Def. 9:**
Es sein $T$ eine Relation in $U \times V$.
Die Menge $proj_1(T) = \{x \in U|\exists y \in V, (x,y) \in T\}$ heißt *Projektion* von $T$ auf $u$ (1. Faktor des kartesischen Produkts).
Analog ist $proj_2(T) = \{y \in V|\exists x \in U, (x,y) \in T\}$ die Projektion auf den 2. Faktor.
*Veranschaulichung:*



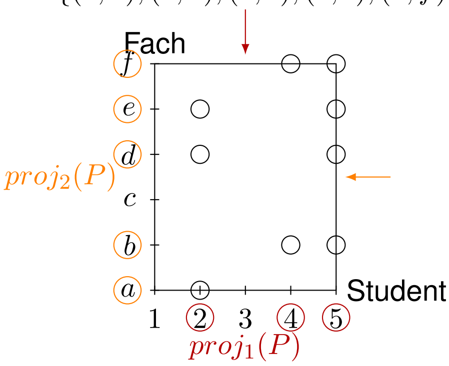
**Bsp. 5:**
Es sei $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ eine Menge von Studenten und $F = \{a, b, c, d, e, f\}$ eine Menge von Fächern. Es sei $P \subseteq S \times F$ die Relation, die angibt, welcher Student in welchem Fach eine Nach- bzw. Wiederholungsprüfung im bevorstehenden Prüfungsabschnitt hat.
Die Studenten $1$ und $3$ haben keine Prüfung ausstehen, Student $2$ muss die Prüfungen in $a$. $d$ und $e$, $4$ in $b$ und $f$ sowie 5 in $b$, $d$, $e$ und $f$ ablegen.

a) Man gebe die Relation $P$ elementweise an und stelle sie in einem Koordinatensystem dar.

b) Man ermittle die Projektionen $P$ auf $S$ bzw. $F$ und kennzeichne diese in der Skizze.

Lösung:

a) $P = \{(2, a), (2, d), (2, e), (4, b), (4, f), (5, b), (5, d), (5, e), (5, f)\}$




b) $proj_1(P) = \{2, 4, 5\} \subseteq S$
(= Menge der Studenten, die wenigsten eine N/W-Prüfung haben.)
$proj_2(P) = \{a, b, d, e, f\} \subseteq F$
(= Menge der Fächer, in denen Student(en) eine N/W-Prüfung haben.)

**Def. 10:**
Es sei $T \subseteq M_1 \times M_2$ eine binäre Relation.
Die Relation $T^{-1} := \{(y, x)|(x, y) \in T\} \subseteq M_2 \times M_1$ heißt *inverse Relation* (bzw. kurz: *Inverse*) von $T$.

**Bsp. 6:** (vgl. Bsp. 5)
$P^{-1} = \{(a, 2), (b, 4), (b, 5), (d, 2), (d, 5), (e, 2), (e, 5), (f, 4), (f, 5)\}$
Besonders wichtig ist die folgende Operation:

**Def. 11:**
Es seien $T_1 \subseteq M_1 \times M_2$ und $T_2 \subseteq M_2 \times M_3$ binäre Relationen.
Als *Komposition* (oder auch *Verkettung*) $T_1 \circ T_2$ („$T_2$ nach $T_1$“) wird die Relation $T_1 \circ T_2 := \{(x, z) \in M_1 \times M_3 | \exists y \in M_2 \quad (x, y) \in T_1 \wedge (y, z) \in T_2\}$ in $M_1 \times M_3$ bezeichnet.

**Bsp. 7:**
Es sei $M$ die Menge aller Menschen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt leben. Weiter seien $S = \{(x, y)|x$ ist Mutter von $y\} \subseteq M \times M$ und $T = \{(y, z)|y$ ist verheiratet mit $z\} \subseteq M \times M$.
Dann bedeutet $(x, z) \in S \circ T$: Es gibt ein $y$, sodass $x$ die Mutter von $y$ ist ($(x, y) \in S$) und $y$ mit $z$ verheiratet ($(y, z) \in T$) ist, d.h. „$x$ ist die Schwiegermutter von $z$“.

**Diskussion:** Wichtige Eigenschaft der Komposition $\circ$:

- Die Operation $\circ$ ist *assoziativ*, d.h. seien $T_1 \subseteq A \times B$, $T_2 \subseteq B \times C$ und $T_3 \subseteq C \times D$, dann gilt: $\underbrace{(T_1 \circ T_2)}_{\subseteq A\times C} \underbrace{\circ T_3}_{\subseteq C\times D} = \underbrace{T_1}_{\subseteq A\times B} \circ \underbrace{(T_2 \circ T_3)}_{\subseteq B\times D} = T_1 \circ T_2 \circ T_3 \subseteq A \times D$

**Def. 12:**
Es sei $T$ eine Relation in $M \times M$ (auf $M$).
Als *transitive Hülle* $T^+$ von $T$ bezeichnet man die kleinste Relation, die $T$ enthält und transitiv ist.

**Satz 1:** Es gilt: $\boxed{T^+ = T \cup (T \circ T) \cup (T \circ T \circ T) \cup ...}$

**Bemerkung:**
Bezeichnung für $\underbrace{T \circ T \circ ... \circ T}_{\text{n-mal}}$ auch $T^n$
(Nicht verwechseln mit Mengenprodukt $\underbrace{T \times ... \times T}_{\text{n-mal}}$ bzw. Funktionen mit n-ten Potenz $f^n$!)

Damit ist $\boxed{T^+ = \bigcup_{j=1}^{\infty} T^j}$

**Beweis:**

1.) $T^+$ ist transitiv, denn sei $(x, y) \in T^+$ und $(y, z) \in T^+$, dann existieren natürliche Zahlen $j_1, j_2 \geq 1$ mit $(x, y) \in T^{j_1}$ und $(y, z) \in T^{j_2}$,
d.h. $y$ wird in $j_1$ Schritten von $x$ aus erreicht und $z$ in $j_2$ Schritten von $y$ aus erreicht. Also wird $z$ in $j_1 + j_2$ Schritten von $x$ aus erreicht,
d.h. $(x, z) \in T^{j_1+j_2} \subseteq T^+$

2.) Es sei $T \subseteq S$ für eine transitive Relation $S$.
$\Rightarrow T \circ T \subseteq S \circ S \subset S$ und für beliebiges $j \geq 1$:
$T^j \subseteq S^j \subseteq S$ und somit:
$$T^+ = \bigcup_{j=1}^{\infty} T^j \subseteq S,$$
d.h. $T^+$ ist tatsächlich die kleinste transitive Relation, die $T$ enthält.

**Diskussion:**

1.) Analog zur transitiven Hülle einer Relation $T$ in $M \times M$ (auf $M$) werden die reflexive Hülle bzw. die symmetrische Hülle von $T$ als die jeweils kleinsten Relationen die T enthalten und reflexiv bzw. symmetrisch sind definiert.
Die Ermittlung gestaltet sich etwas „einfacher“ als bei der transitiven Hülle:
*Reflexive Hülle* von $T$: $\boxed{T \cup I_M}$ (dabei ist $I_M = \{(x, x)|x \in M\}$ [Diagonale / Identitätsrelation])
*Symmetrische Hülle* von $T$: $\boxed{T \cup T^{-1}}$

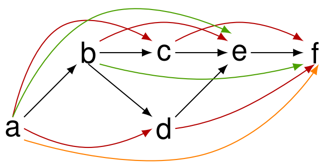
2.) Von Bedeutung ist auch die *reflexiv-transitive* Hüllo ven $T$:
$\boxed{T^* = T^+ \cup I_M}$ (dabei $T^+ \ldots$ transitive Hülle von $T$)

**Bsp. 8:**
Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c, d, e, f\}$
sowie die Relation $T = \{(a, b), (b, c), (c, e), (b, d), (d, e), (e, f)\}$.

a) *Transitive Hülle*: Zur Ermittlung der Komposition $S \circ T$:
Für jedes Element $(x, y) \in S$ alle Fortsetzungen $(y, z) \in T$ suchen $\curvearrowright$ $(x, z)$ als Element von $S \circ T$ notieren, falls es noch nicht vorkommt.
Bspw.:

- $(a, b)$, Fortsetzungen wären $(b, c), (b, d)$ $\curvearrowright$ Elemente $(a, c)$ und $(a, d)$ notieren.
- $(b, c)$, Fortsetzung $(c, e)$ $\curvearrowright$ $(b, e)$ notieren
- usw.

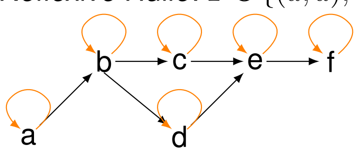
$\Rightarrow T \circ T = \{(a, c), (a, d), (b, e), (c, f), (d, f)\} = T^2$
$T^3 = T \circ (T \circ T) = \{(a, e), (b, f)\}$ (ausgehend von $T$ in $T \circ T$ nach Fortsetzung suchen)
$T^4 = T \circ T^3 = \{(a, f)\}$



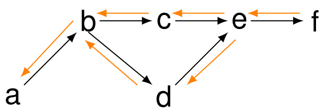

$$\Rightarrow T^+ = T \cup \underbrace{(T \circ T)}_{\text{2 Schritte}} \cup \underbrace{(T \circ T \circ T)}_{\text{3 Schritte}} \cup \underbrace{(T \circ T \circ T \circ T}_{\text{4 Schritte}} = T \cup T^2 \cup T^3 \cup T^4$$

(Formel bricht im endlichen Fall nach endlich vielen Schritten ab.)

b) *Reflexive Hülle*: $T \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f)\}$




c) *Symmetrische Hülle*: $T \cup T^{-1} = T \cup \{(b, a), (c, b), (e, c), (d, b), (e, d), (f, e)\}$




Zur Überprüfung der Eigenschaften aus Def. 8 ist folgender Satz nützlich:

**Satz 2:**
Es sei $T \subseteq M \times M$ eine binäre Relation. Dann gilt:

a) $T$ ist reflexiv $\Leftrightarrow I_M \subseteq T$ ($I_M$ ... Identitätsrelation)

b) $T$ ist symmetrisch $\Leftrightarrow T^{-1} \subseteq T$ $\quad [\Leftrightarrow T^{-1} = T]$

c) $T$ ist antisymmetrisch $\Leftrightarrow T \cap T^{-1} \subseteq I_M$

d) $T$ ist asymmetrisch $\Leftrightarrow T \cap T^{-1} = \emptyset$

e) $T$ ist transitiv $\Leftrightarrow T \circ T \subseteq T$

**Disskussion:**

1.) Beweise ergeben sich unmittelbar aus Def. 8, vgl. Übungs-Aufgabe 1.24 (für b) und e))

2.) Aus c) und d) ergibt sich z.B.
$\boxed{T \text{ asymmetrisch}} \Rightarrow \boxed{T \text{ antisymmetrisch}}$ (da $\emptyset$ Teilmenge jeder Menge ist)

### 2.3.3. Äquivalenzrelationen

**Def. 13:**
Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt *Äquivalenzrelation* auf $M$, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

**Diskussion:**

1.) Durch eine Äuivalenzrelation wird $M$ vollständig in paarweise elementfremde (disjunkte) *Äquivalenklassen* zerlegt. Die Menge aller Äquivalenzklassen von $M$ bezüglich $T$ heißt *Quotientenmenge* $M/T$.
Aufgrund der 3. Eigenschaft aus Def. 13 erhält eine Äquivalenzklasse alle Elemente, die untereinander erreichbar sind (=äquivalent) und nur diese.

2.) Äquivalenzklassen enthalten alle Elemente, die bezüglich einer bestimmten Eigenschaft nicht unterscheidbar sind, z.B. Bsp. 4 mit $M = P$ (Menge von Personen), Äquivalenzrelation $G \subseteq P \times P$ mit $G = \{(x, y)|x$ und $y$ haben gleiches Geburtsjahr$\}$, Äquivalenzklassen sind die Jahrgänge.

3.) Anstelle der Schreibweise $(x, y) \in T$, $xTy$ oder $T(x, y)$ verwendet man bei beliebigen Äquivalenzrelationen auf $x \sim y$. Bei vielen speziellen Äquivalenzrelationen spezielle Symbole, sie folgendes Beispiel.

**Bsp. 9:**

a) $M$ sei eine beliebige Menge $T_1 = I_M = \{(x, y) \in M \times M|x = y\}$ (Identitätsrelation) ist eine Äquivalenzrelation.
Äquivalent heißt hier gleich!
Äquivalenzklassen sind sämtliche einelementige Teilmengen $\{x\}, x \in M$. $T_1$ heißt die feinste Zerlegung von $M$ die möglich ist. Die größte Zerlegung liefert die Relation $T_2 = M \times M$, die trivialer Weise ebenfalls eine Äquivalenzrelation ist mit nur einer Äquivalenzklasse $M$. Für die Anwendungen sind natürlich Relationen wichtig, die eine feinere Zerlegung liefern.

b) $M = \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen), $m \in \mathbb{N}^*$, $T \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit
- $(x, y) \in T :\equiv$ „$x$ und $y$ lassen bei Division durch $m$ den gleichen Rest“
- Bezeichnung $x \equiv y(mod\ m)$ ... $x$ kongruent $y$ (modulo $m$), z.B. $29 \equiv 8(mod\ 7)$
- $T$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$, Äquivalenzklassen:
Restklassen modulo $m$ (siehe Übungs-Aufgabe 1.19)

c) $M$ ... Menge aller Geraden einer Ebene, $T \subseteq M \times M$ mit
- $(x, y) \in T :\equiv$ „$x$ ist zu $y$ parallel“, Bezeichnung: $x||y$
$\curvearrowright$ $T$ ist Äquivalenzrelation auf $M$ (siehe Übungs-Aufgabe 1.21.)

### 2.3.4. Ordnungsrelationen

**Def. 14:**

a) Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt Ordnungsrelation auf $M$, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

b) Eine Ordnungsrelation heißt *vollstandig* oder *linear*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt $(x, y) \in T \vee (y, x) \in T$.

**Def. 15:**
Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt *strikte Ordnungsrelation* auf $M$, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist. Eine strikte Ordnungsrelation heißt vollständig, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \neg = y$ gilt $(x, y) \in T \vee (y, x) \in T$.

**Bsp. 10:**

a) $M = \mathbb{R}$, $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\boxed{(x, y) \in T :\equiv x \leq y}$ ist eine vollständige Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$.

b) Die Relation „<" ist eine (vollständige) strikte Ordnungsrelation.

c) $E$ sei eiine Menge, $M$ sei die *Menge aller Teilmengen von* $E$, d.h. $M$ ist die Potenzmenge $M = \mathcal{P}(E)$ von $E$.
$T \subseteq M \times M$ mit $\boxed{(A, B) \in T :\equiv A \subseteq B}$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(E) = M$ (Inklusion).

**Diskussion:**

1.) In der Literatur wird manchmal die Relation im Sinne von Def. 14 als Halbordnung und nur eine vollständige als Ordnung als Ordnungsrelation bezeichnet.

2.) Zu jeder Ordnung $T_1$ (auf $M$) gehört eine strikte Ordnung $T_2$ und umgekehrt: $T_2 = T_1 \backslash I_M$ bzw. $T_1 = T_2 \cup I_M$ ($T_1$ eist die reflexive Hülle von $T_2$), z.B. ($\leq$, $<$) oder ($\subseteq$, $\subset$).

3.) Die Symbole $\leq$ (bzw. $<$) können anstelle der Paarschreibweise auch bei beliebigen Ordnungen verwendet werden, falls keine anderen Zeichen dafür üblich sind.

**Def. 16:**
$T$ sei eine Ordnungsrelation auf eine Menge $M$. Weiter sei $A$ eine Teilmenge von $M$.

a) Ein Element $a \in M$ heißt obere Schranke von $A$, wenn gilt:
$\forall x \in A \quad x \leq a \quad (x \leq a$ d.h. $(x, a) \in T$, vgl. 3.) der vorhergehenden Diskussion)

b) Es sei $B$ die Menge der oberen Schranken von $A$, diese sei nicht leer. Falls es eine *kleinste obere Schranke* $s$ von $A$ gibt, d.h. $\exists s \in B \quad \forall b \in B \quad s \leq b$, so heißt $s$ das *Supremum von* $A$, $\boxed{s = sup\, A}$

c) Gilt $s \in A$, so heißt $s$ das Maximum von $A$: $s = max\, A = sup\, A$

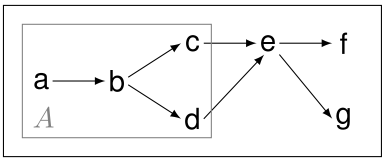
d) Ein Element $m \in A$ heißt maximal, wenn es kein größeres Element in $A$ gibt, d.h. $\forall x \in A\ (m \leq x \Rightarrow m = x)$

**Diskussion:**

1.) Die Begriffe aus Def. 16 lassen sich auf strikte Ordnungen $S$ übertragen, indem anstelle von $S$ die reflexive Hülle $T = S \cup I_M$ verwendet wird.

2.) Bei Ordnungsrelationen $T$ (auch für strikte Ordnungen) auf endlichen Mengen $M$ kann ein vereinfachter Graph, das sogenannte *HASSE-Diagramm*, betrachtet werden.
a $\longrightarrow$ b $(a\neg = b)$ bedeutet $(a, b) \in T$ und es gibt kein Zwischenglied $c\neg = a$ und $c\neg = b$ mit $(a, c) \in T \wedge (c, b) \in T$ ($a$ ist unmittelbarer Vorgänger von $b$ bzw. $b$ Nachfolger von $a$).
Diesem Diagramm entspricht eine Teilrelation $U \subseteq T$, deren transitiv-reflexive Hülle (bzw. transitive Hülle bei strikten Ordnungen) $T$ ist.

3.) Veranschaulichung von Def. 16 mit einem HASSE-Diagramm einer nicht vollständingen Ordnung (nicht linear)




z.B. Arbeitsgänge, die in einer bestimmten Reihenfolge durchgeführt werden müssen, $A$ bspw. Teilarbeiten einer Zweigfirma
*obere Schranken:* $e, f, g$
$sup\, A = e$
*Maximum von* $A$*:* existiert nicht, da $e\neg \in A$
*maximale Elemente von* $A$*:* $c, d$

4.) Bei nichtlinearen Ordnungen müssene obere Schranken, Supremum und Maximum nicht existieren, es kann mehrere maximale Elemente $A \subseteq M$ geben.
Bei linearen Ordungen auf *endlichen* Mengen gibt es genau ein maximales Element $= max\, A = max\, B$

5.) Analog zur Def. 16 werden die Begriffe *untere Schranken* $a$ von $A$ ($\forall x \in A \quad a \leq x$), ***größte*** *untere Schranke* (*Infinum*) $s$ von $A$ ($B\neg = \emptyset \ldots$ Menge der unteren Schranken, $\exists s \in B \quad \forall a \in B \forall a \leq s$), *Minimum von* $A$ ($min\, A = inf\, A = s$ falls $s \in A$) und minimales Element $m$ von $A$ ($\forall x \in A \quad (x \leq m \Rightarrow x = m)$) definiert.

**Bsp. 11:**
Eine bestimmte Arbeitsaufgabe besteht aus mehreren Arbeitsgängen.
Es sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ die Menge der Arbeitsgänge. Die Arbeitsgänge $\{2, 3, 5\} =: S$ werden von einer Subfirma durchgeführt. Für die Reihenfolge gilt: 1 muss vor 2, 2 vor 3 und 5, 3 vor 4 sowie 5 vor 6 durchgeführt werden.

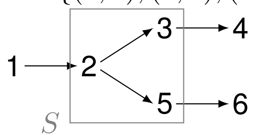
a) Man beschreibe diese Forderungen durch eine Relation $U \subseteq A \times A$ und stelle sie graphisch dar (HASSE-Diagramm).

b) Man ermittle die transitive Hülle $U^+$ von $U$.

c) Man gebe (falls vorhanden) obere Schranken, Supremum, Maximum, max. Elemente sowie untere Schranken, Infinum, Minimum, min. Elemente von $S$ an.

Lösung:

a) $U = \{(1,2),(2,3),(2,5),(3,4),(5,6)\}$




b) $U \circ U = \{(1,3),(1,5),(2,4),(2,6)\}$
$U \circ (U \circ U) = \{(1,4),(1,6)\}$
$U^4 = \emptyset$

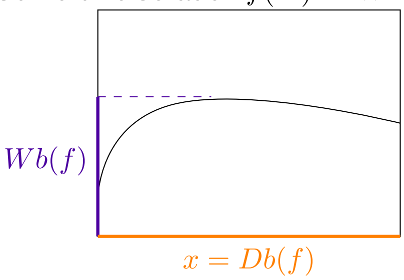
### 2.3.5. Funktionen

**Def. 17:**
Eine Relation $f \subseteq x \times y$ heißt *Funktion (Abbildung)* von $X$ in $Y$, wenn sie linksvollständig und rechtseindeutig ist.

**Diskussion:**

- Gemäß Def. 7 a+c aus Kapitel 2.3.1 bedeutet linksvollständig *und* rechtseindeutig, dass zu *jedem* $x \in X$ *genau ein* $y \in Y$ mit $(x,y) \in f$ existiert, also *eindeutige Zuordnung*:
  $\boxed{x \longmapsto y =: f(x)}$
  *Schreibweise:* $f : X \to Y$ (manchmal $f|X \to Y$
  $y = f(x)$ heißt auch *Bild* von $x$, $x$ *ein* Urbild von $y$ (muss nicht eindeutig sein).

- $X = Db(f) \ldots$ *Definitionsbereich*,
  $Wb(f) = \{y \in Y | \exists x \in x \quad (x,y) \in f\} \subseteq Y \ldots$ Wertebereich
  Schreibweise auch $f(X) := Wb(f)$ (Menge aller Bilder).




$f : \mathbb{R} \to \{0,1\}$

**Def. 18:**

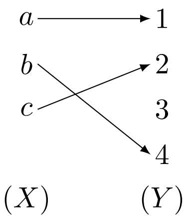
a) Eine Abbildung $f$ heißt *surjektiv* (Auch Abbildung auf $Y$),

b) Eine Funktion $f$ heißt *injektiv*, wenn zu jedem $y \in Wb(f)$ genau ein $x \in Db(f)$ existiert mit $(x,y) \in f$:
$\underset{\in Wb(f)}{y} \longmapsto x =: \underset{\in Db(f)}{f^{-1}(y)}$
(„$f$ oben -1")
Die dadurch erklärte Abbildung $f^{-1} : Wb(f) \to Db(f)$ heißt *Umkehrfunktion* von $f$, vgl. auch Kap 1.4.

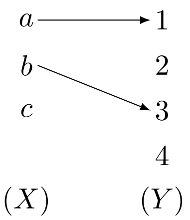
c) Eine injektive *und* surjektive Abb. von $X$ auf $Y$ heißt *bijektiv*.

d) Gebräuchlich sind auch die Begriffe *Surjektion*, *Injektion* und *Bijektion*!

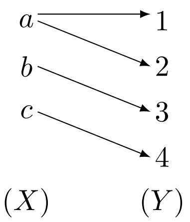
**Bsp. 12:**
Gegeben sind die Mengen $X = \{a, b, c\}$ und $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ sowie folgende Relation in $X \times Y$:




a) $T_1$:
$T_1$ ist eine Funktion $f(= T_1) : f : X \to Y$ $(1)$ diese ist injektiv, $Db(f) = X = \{a, b, c\}$, $Wb(f) = \{1, 2, 4\} =: W$, $f : X \to W$ $(2)$ ist surjektiv, also sogar bijektiv.
Als Relation sind $(1)$ und $(2)$ nicht zu unterscheiden, aber als Funktion.



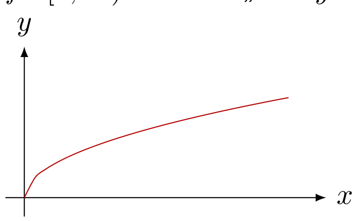

b) $T_2$:
$T_2$ ist keine Funktion, nicht linksvollständig. Betrachtet man $D = \{a, b\} \subset X$, so ist durch $T_2$ eine Funktion $f : D \to Y$ beschrieben, die Funktion ist injektiv und kann mit $W := f(D) = \{1, 3\}$ zu einer bijektiven Abbildung $f : D \to W$ umgewandelt werden.




c) $T_3$:
$T_3$ ist keine Funktion, da nicht rechtseindeutig.

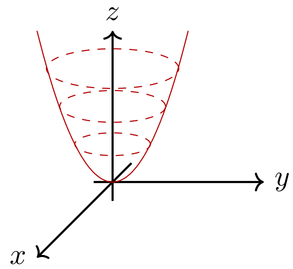
**Bsp. 13:**

a) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit „$x \to y = f(x) = \sqrt{x}$ ist eine *Funktion einer reelen Veränderlichen* (injektiv).




$Wb(f) = [0, \infty)$
$Db(f) = [0, \infty)$

b) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2 = f(x, y) =: z$ *Funktion zweier reeller Veränderlicher.*



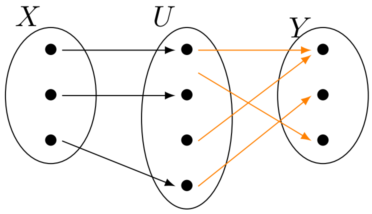

(Paraboloid)

$Db(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (x-y-Ebene)
$Wb(f) = [, \infty)$

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \longmapsto f(n) = \dfrac{n}{n+1}$ ist eine (reelle) Zahlenfolge. $f(0) = 1, f(1) = \dfrac{1}{2}, f(2) = \dfrac{2}{3}, \ldots$
Bezeichnung meist mit Index: $a_n = f(n) \curvearrowright ZF(a_n) \quad n \in \mathbb{N}$

**Def. 19:**
Es seien $g := X \to U$ mit $x \longmapsto u = g(x)$ und $f : U \to Y$ mit $u \longmapsto y = f(u)$ zwei Abbildungen. Dann stellt man die Zuordnung $x \longmapsto y = f(\underset{u}{g(x)})$ eine Abbildung von $X$ in $Y$ dar, eine sogenannte *mittelbare Funktion (Komposition / Verkettung). Bezeichnung:* $g \circ f : X \to Y$ mit $y = (g \circ f)(x) = f(g(x))$

**Diskussion:**

1.) 


$x \longmapsto u = g(x) \quad u \longmapsto f(u) = f(g(x))$
Paarschreibweise: $(x, u) \in g \qquad (u, y) \in f \curvearrowright (x, y) \in g \circ f$

2.) $g$ wird zuerst angewendet, dann $f$. Wie bei beliebigen Relationen die die Schreibweise $g \circ f$

3.) In der Literatur findet man oft die Schreibweise $f \circ g$ angelehnt an die Schreibweise $f(g(x))$. Die Reihenfolge der Berechnung ast aber von innen nach außen, erst innere Funktion $g$, dann die äußere $f$.

**Satz 3:**
Es sei $f : X \to Y$ eine *Bijektion*, d.h. es existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$, weiter sei $i_A$ für eine beliebige Menge $A$ die identische Abbildung (Identitätsrelation): $i_A : A \to A$ mit $i_A(x) = x$ für alle $x \in A$.
Es gilt dann:
$f \circ f^{-1} = id_X$, d.h. $(f \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(f(x)) = x (\forall x \in X)$ und
$f^{-1} \circ f = id_Y$, d.h. $(f^{-1} \circ f)(y)) = f(f^{-1}(y)) = y (\forall y \in Y)$
(Funktion und Umkehrfunktion nacheinander angewandt heben sich auf).

**Satz 4:**
Es seien $g = X \to U$ und $h : U \to Y$ zwei Bijektionen. Dann ist die Komposition $f := g \circ h : X \to Y$ ebenfalls eine Bijektion und es gilt:
$\boxed{f^{-1} = (g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}}$