Mathematik I

Vorlesungsskript

Mitschrift von Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von Herrn Meinhold

15. März 2016

Inhaltsverzeichnis

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

Teil I.
Elementare Grundlagen

Teil II.
Folgen, Reihen, Grenzwerte

1. Zahlenfolgen

1.1. Grenzwerte von Zahlenfolgen

Def. 1:
Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Eine Funktion f mit $Db(f) = \{u \in \mathbb{N} | n \geq n_0\}$ und $Wb(f) \subset \mathbb{R}$ heißt reelle Zahlenfolge.
Schreibweise:
$a_n = f(n) \qquad (n \in Db(f))$
$(a_n)_{n \geq n_0} = (a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, ...)$
oft $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$.

Bsp. 1:

a.) $a_n = (-1)^n \cdot n \quad (n \in \mathbb{N})$
$(a_n) = (0, -1, 2, -3, 4, ...)$

b.) $a_0 = -1,\ a_n = n \cdot a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ (rekursive Def.)
$(a_n) = (-1, -1, -2, -6, -24, ...),\ a_n = -n!$

c.) $a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + ... + \frac{3}{10^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$(a_n) = (0.3, 0.33, 0.333, ...)$

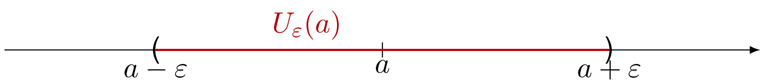
d.) $a_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$(a_n) = \left(\frac{5}{4}, \frac{8}{9}, \frac{17}{16}, \frac{24}{25}, ...\right)$

Def. 2:

- (a_n) heißt *konvergent*, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt mit folgender Eigenschaft:
  Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$, sodass für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.
- Die Zahl a heißt *Grenzwert* von (a_n).
  Schreibweisen:
  $\boxed{a = \lim\limits_{n \to \infty} (a_n)}$ oder $\boxed{a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a}$
- (a_n) heißt *divergent*, falls (a_n) nicht konvergent ist.

Diskussion

1.) Für $\varepsilon > 0$ heißt $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (offenes Intervall) ε-*Umgebung von* a.



$\left(\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a\right) \equiv (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)\ a_n \in U_\varepsilon(a))$
d.h. für jedes (noch so kleine) ε, liegen ab einem bestimmten (von ε abhängigen) Index $n_0(\varepsilon)$ alle Glieder $a_n (n \geq n_0(\varepsilon))$ in $U_\varepsilon(a)$.

2.) Im Bsp. 1 sind:
konvergente Folgen:
c.) mit $\underset{n\to\infty}{a_n} = \frac{1}{3}$
d.) mit $\underset{n\to\infty}{a_n} = 1$
divergente Folgen: a.) und b.)

3.) Ist $\underset{n\to\infty}{a_n} = 0$, so heißt (a_n) *Nullfolge*.

Def. 3:
(a_n) heißt:

- *streng monoton wachsend*, falls für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$.
- *monoton wachsend*, falls für jedes n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$.
- *streng monoton fallend*, falls für jedes n gilt: $a_n > a_{n+1}$.
- *monoton fallend*, falls für jedes n gilt: $a_n \geq a_{n+1}$.

Def. 4:
(a_n) heißt beschränkt, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $|a_n| \leq C$ für alle n.

Diskussion:

1.) (a_n) beschränkt
$\Leftrightarrow \exists c > 0 \; \forall n \quad |a_n| \leq C$
$\Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R} \; \exists c_2 \in \mathbb{R} \; \forall n \quad c_1 \leq a_n \leq c_2$

2.) Folgen aus Bsp. 1:

	Folge	Monotonie	Beschränktheit
a.)	$a_n = (-1)^n \cdot n$	–	–
b.)	$a_n = -n!$	streng monoton fallend (ab $n = 1$)	–
c.)	$a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + ... + \frac{3}{10^n}$	streng monoton wachsend	$0,3 \leq a_n < \frac{1}{3}$
d.)	$a_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n^2}$	–	$0 \leq a_n < \frac{5}{4}$

Satz 1:
Jede konvergente folge ist beschränkt.

Satz 2:
Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Def. 5:
(a_n) heißt *bestimmt konvergent* gegen $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$, falls gilt: $\forall c \in \mathbb{R} \; \exists n_0(c) \; \forall n \geq n_0(c) \begin{cases} a_n > c \\ a_n < c \end{cases}$.

Schreibweise: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}}$

Bsp. 2:

a.) aus Bsp. 1c.): $a_n = \frac{3}{10} + ... + \frac{3}{10^n}$, (a_n) monoton wachsend und beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) ist konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

b.) aus Bsp. 1b.): $a_n = -n!$, (a_n) monoton fallend und unbeschränkt $\Rightarrow$ (a_n) ist bestimmt divergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Diskussion:
Eine divergente Folge, die nicht bestimmt divergent ist, heißt *unbestimmt divergent*.
Bpsw. Folge aus Bsp. 1a.) $a_n = (-1)^n \cdot n$.

Einige wichtige Grenzwerte:

a.) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71...$ (EULERsche Zahl)

b.) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

c.) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

d.) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$

Satz 4: Rechenregeln (Grenzwertsätze)
(a_n) und (b_n) seien zwei konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} = b$. Dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \qquad (b_n \neq 0, b \neq 0)$

Bsp. 3:

a.) $a_n = \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + n} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$

$$a_n = \frac{n^2\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3 + \frac{n}{n^2}\right)} = \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{n}\right)} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$\boxed{\text{Ausklammern der höchsten Potenzen in Zähler und Nenner}}$

b.) $a_n = n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)$
(in Klammern: „$\infty - \infty$“ $\curvearrowright$ Erweitern mit 3. binomischer Formel)

$$a_n = \frac{n \cdot \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \cdot \left(\sqrt{n^2+1} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)} = \frac{n \cdot (n^2 + 1 - n^2)}{n \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + n} = \frac{n \cdot 1}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

oder: $\lim\limits_{n\to\infty} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

c.) $a_n = \frac{\sin n}{n} \qquad \left(0 \leq |a_n| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Allgemein: (a_n) beschränkt und (b_n) bestimmt divergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

1.2. Lineare Rekursionsgleichungen (Differenzengleichungen)

- Allgemeine Form einer Rekursionsgleichung k-ter Ordnung:
  $x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{n-k}) \qquad (k \geq 1,\ n \geq n_0 + k)$
- Wir betrachten nur *lineare Rekursionsgleichungen mit konstanten Koeffizienten* (d.h. a_j nicht von n abhängig):
  $\boxed{x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + ... + a_k a_{n-k} + h_n} \quad k \geq 1,\ a_k \neq 0,\ n \geq n_0 + k$
  x_n gesucht, $a_1, a_2, ..., a_k, h_n$ $(n \geq n_0)$ bekannt.
- Indexverschiebung möglich:
  $\boxed{x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + ... + a_k a_n + h_{n+k}} \quad (n \leq n_0)$
  Wichtig ist die Differenz zwischen höchstem und niedrigstem Index von x (=Ordnung der Rekursionsgleichung).
- Da die größen $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ...$ auch durch x_n und die Differenzen $\Delta x_n := x_n - x_{n-1}, \Delta^2 x_n := \Delta x_n - \Delta x_{n-1} = x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}, ...$ ausgedrückt werden können, ist der Name *Differenzengleichung* sehr verbreitet.
- Die Differenzengleichung (aus erstem Punkt) heißt homogen, falls $h_n = 0$ (für alle n), sonst inhomogen.

Zur Lösung von der Differenzengleichung (aus erstem Punkt oberhalb):

1.) Allgemeine Lösung: $\boxed{x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}}$, dabei ist $x_n^{(h)}$ die *allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung* $\boxed{x_n = a_1 x_{n-1} + ... + a_k x_{n-k}}$ und $x_n^{(p)}$ eine *partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen Gleichung*.

FEHLENDE VL

1.3. Unendliche Reihen

1.3.1. Grundbegriffe

Def. 6: Gegeben sei die Zahlenfolge $(a_n)_n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}$. Die Zahlenfolge $(s_n)_n \geq n_0$ mit $s_{n_0} := a_{n_0},\ s_{n_0+1} := a_{n_0} + a_{n_0+1},\ s_{n_0+2} := a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2},\ ...,\ s_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n$ (*Partialsumeenfolge*) heißt *unendliche Reihe*.

Bezeichnung: $\boxed{\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n}$

- Die Zahlen a_n heißen Glieder der Reihe, die Zahlen s_n heißen Partialsummen der Reihe
- Ist die Reihe konvergent, d.h. die Folge (s_n) ist konvergent, so heißt $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_n =: \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ die Summe der Reihe
- Die Reihe heißt (bestimmt oder unbestimmt) divergent, wenn die Partialsummen die entsprechende Eigenschaft haben.

Bemerkung: Oft $n_0 = 0$ oder $= 1$

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

Bsp. 6: $a_n = aq^n$ mit $a \neq 0, q \neq 0, n = 0, 1, 2, ...$
$(a_n) = (a, aq, aq^2, aq^3, ...)$ (*geometrische Zahlenfolge*)
$(s_n) = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ (*geometrische Reihe*)
$= (\underbrace{a}_{s_0}, \underbrace{a + aq}_{s_1}, \underbrace{a + aq + aq^2}_{s_2}, ...)$
$s_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^n \quad | \cdot q$
$s_n q = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + ... + aq^{n+1}$
Beide Zeilen voneinander abgezogen:
$s_n - s_n q = a - aq^{n+1}$
$s_n(1 - q) = a - aq^{n+1} \quad | : (1 - q)$ falls $q \neq 1$
$s_n = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{a - q}$ (*Summenformale für die endliche geometrische Reihe* mit Anfangsglied a und $n+1$ Summanden)
$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a}{a - q}$ falls $|q| < 1 \Rightarrow$ Summe der unendlichen geometrischen Reihe:
$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1 - q}}$ für $|q| < 1$.
z.B. $0,\overline{72} = 0,727272... = \frac{72}{100} + \frac{72}{10.000} + \frac{72}{1.000.000} + ... = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$

Bsp. 7: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ heißt *harmonische Reihe*. Offensichtlich ist (s_n) streng monoton wachsend. Man kann zeigen, dass (s_n) nicht beschränkt ist. Aus Satz 3 folgt: die harmonische Reihe ist bestimmt divergent.
Schreibweise: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Def. 7: Die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ heißt

(a) absolut konvergent, falls $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

(b) bedingt konvergent, falls $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent, aber $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a|$ nicht konvergent ist.

Satz 5: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Diskussion:

1.) Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren. Z.B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$

2.) Für Reihen mit nicht-negativen Gliedern ($a_n \geq 0$ für alle n) ist absolute Konvergenz identisch mit (gewöhnlicher) Konvergenz. Für solche Reihen gilt entweder $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n < \infty$ [(absolut) konvergent] oder $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \infty$ [bestimmt divergent].

1.3.2. Konvergenzkriterien

1. Notwendiges Konvergenzkriterium

Satz 6: $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konv. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Beweis: $a_n = s_n - s_{n-1}$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$

Bemerkung:

a) Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend. Z.B. $a_n = \frac{1}{n}$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

b) Anwendung des Satzes meist in logisch äquivalenter Form: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ divergiert

Bsp. 8: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n-1}\right)^{50}$
$a_1 = 1,94 \cdot 10^{-48}, a_2 = 1,3 \cdot 10^{-49}, \ldots$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{10-\frac{1}{n}}\right)^{50} \neq 0$
$\Rightarrow$ Reihe divergent (sogar besimmt divergent, da alle $a_n \geq 0$)

2. Hinreichendes Kriterien

(A) *Leibnitzkriterium für alternierende Reihen*

Satz 7: Sei (b_n) Folge mit

- $b_n \geq b_{n+1} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \ldots$ konvergent. D.h. wenn die Beträge b_n der Glieder einer alternierenden Reihe mit $a_n = (-1)^n b_n$ eine Nullfolge bilden, dann ist die Reihe konvergent.
Weiter gilt: $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$

Also ist der Fehler bei der Approximation von s durch s_n beschränkt durch den Betrag von a_{n+1}.

Bsp. 9: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$ (alternierende harmonische Reihe)
$s_1 = 1,\ s_2 = 0,5,\ s_3 \approx 0,83,\ s_4 \approx 0,583,\ s_5 \approx 0,78,\ s_6 \approx 0,62$
ABB 6
Man kann zeigen: $s = \ln 2 = 0,6931$