Mathematik I

Vorlesungsskript

Mitschrift von Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von Herrn Meinhold

18. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

Teil I.
Elementare Grundlagen

1. Aussagen und Grundzüge der Logik

2. Mengen

3. Zahlen

4. Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

5. Lineare Algebra

5.1. Vektorräume

Begriff:

1.) Gegeben seien ein Körper $(K, +, \cdot)$, dessen Elemente *Skalare* heißen (meist $(\mathbb{R}, +, \cdot)$) und eine ABELsche Gruppe $(V, \oplus)$ (V... Menge, Elemente heißen Vektoren, $\oplus$... Vektoraddition).

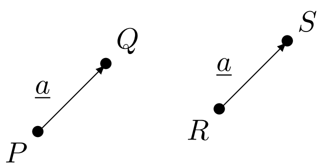
2.) Es gibt eine Abbildung $\odot$ von $K \times V$ in V die jedem $x \in V$ und jedem $\lambda \in K$ ein Element $\lambda \odot x$ in V mit folgenden Eigenschaften zuordnet.

- Distributivgesetze:
  $(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$
  $\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$
- Assoziativgesetz:
  $(\lambda \cdot \mu) \odot x = \lambda \odot (\mu \odot x)$
- Neutrales Element:
  $1 \odot x = x$

(für alle $\lambda, \mu \in K$ und $x, y \in V$)

Eine Menge V mit den in 1.) und 2.) aufgeführten Operationen $\oplus$ und $\odot$ heißt *Vektorraum* (VR) *über* K.
Bemerkung: Schreibweise meist $+$ anstelle von $\oplus$ und $\cdot$ anstelle von $odot$ (ergibt sich aus Zusammenhang der Elemente).

Bsp. 1:
Skalarbereich $\mathbb{R}$.
Vektoren: Größen, die durch eine Zahlenangabe (Länge) und eine Richtung charakterisiert sind (z.B. Kräfte, Geschwindigkeiten, Translatimen).



Pfeile als Repräsentanten eines Vektors $\underline{a}$.
Bezeichnung: $\underline{a} = \overrightarrow{a} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$

Ortskurven: Angeheftet in gemeinsamen Anfangspunkt O (Ursprung).

- Vektoraddition: $\underline{a}+\underline{b}$ ABB 110
- Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \underline{a}$:
  $\lambda > 0$ ABB 111
  $\lambda < 0$ ABB 112
  Länge von $\lambda \cdot \underline{a}$ ist das $|\lambda|$-fache der Länge von $\underline{a}$.
- Subtraktion: $\underline{a}-\underline{b} = \underline{a}+(-\underline{b}) = \underline{a}+((-1)\cdot \underline{b})$ ABB 113
- Nullvektor: $\underline{0}$ (Länge 0, keine Richtung)

Bsp. 2:

$$K = \mathbb{R}, V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Vektoraddition: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ ... \\ x_n+y_3 \end{pmatrix}$

Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ ... \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$

$\curvearrowright V$ Vektorraum über $\mathbb{R}$, Bezeichnung: $\mathbb{R}^n$, Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$

Def. 1:
Die Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn die Gleichung $\boxed{x_1\underline{a}_1 + ... + x_n\underline{a}_n = \underline{0}}$ nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ besitzt.

Diskussion:

1.) $x_1\underline{a}_1 + ... + x_n\underline{a}_n$ heißt *Linearkombination* (LK) der Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

2.) Falls es eine darstellung der Gestalt wie in Def. 1 gibt, in der nicht alle x_i gleich 0 sind, so heißen $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ *linear unabhängig*.
In diesem Falle lässt sich (wenigstens) einer der Vektoren als LK der anderen darstellen.

Def. 2:
Es sei $V_1 \subseteq V$ eine nichtleere Teilmenge von V. Wir bezeichnen mit $L(V_1)$ die Menge *aller* LK von jeweils endlich vielen Vektoren aus V_1. $L(V_1)$ ist die sogenante *lineare Hülle* von V_1.

Bemerkung:
$L(V_1)$ ist selbst ein Vektorraum, nämlich der von V_1 aufgespannte Teilraum von V (kleinster VR, welcher V_1 enthält).

Def. 3:

- Ein Vektorraum V heißt *n-dimensional*, wenn es n linear unabhängige Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ gibt, die den gesamten Raum aufspannen ($L(\{\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n\}) = L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n) = V$).
- Die Menge der Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ nennt man in diesem Falle eine Basis von V.

Diskussion:
In einem Vektorraum gibt es unterschiedliche Basen, jedoch ist die Anzahl der Vektoren, die eine Basis bilden, stets gleich (Dimension des VR).

Satz 1:
Es sei $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$ eine Basis des VRs V. Dann gibt es für *jedes* $\underline{x} \in V$ eine *eindeutige* Darstellung der Gestalt $\underline{x} = x_1\underline{a}_1, ..., x_n\underline{a}_n$.

Bemerkung:

- Die Koeffizienten $x_1, ...x_n$ heißen *Koordinaten* von $\underline{x}$ bezüglich der Basis $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.
- Die Summanden $x_1\underline{a}_1, ..., x_n\underline{a}_n$ heißen *Komponenten* von $\underline{x}$ bezüglich der Basis $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

Bsp. 3:
Die Vektoren $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \underline{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$ des Raumes $\mathbb{R}^n$ bilden offensichtlich eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

$\curvearrowright$ $\underline{e}_1, ..., \underline{e}_n$ sind linear unabhängig. Ferner gilt für beliebiges $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. $\underline{x} = x_1 \cdot \underline{e}_1 + ... + x_n \cdot \underline{e}_n$.

Bsp. 4:
Zwei Vektoren $\underline{a}_1 \neq \underline{0}$ und $\underline{a}_2 \neq \underline{0}$ in einer Ebene bilden genau dann eine Basis, wenn sie nicht parallel sind.

5.2. Matrizen

Def. 4:
Ein aus $m \cdot n$ Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$, welche in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind, bestehendes Schema heißt *Matrix vom Typ* (m, n).

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m \text{ (Zeilenindex)} \\ j=1,...,n \text{ (Spaltenindex)}}}$$

Def. 5 Rechenoperationen

1.) $\underline{A} = (a_{ij}), \underline{B} = (b_{ij})$ seien vom gleichen Typ (m,n).
$\boxed{\underline{A} + \underline{B} := (a_{ij} + b_{ij})}$ *Addition von Matrizen*

2.) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\underline{A} = (a_{ij})$ vom Typ (m,n).
$\boxed{\lambda \cdot \underline{A} = (\lambda \cdot a_{ij})}$ *Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar*

3.) $\underline{A} = (a_{ij}$ sei vom Typ (m,n)
$\underline{B} = (b_{ij})$ sei vom Typ (n,p)
$\underline{A}$ und $\underline{B}$ heißen in dieser Reihenfolge *verkettet* (Spaltenzahl von $\underline{A}$ = Zeilenzahl von $\underline{B}$).
$$\boxed{\underline{A} \cdot \underline{B} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,p}}}$$ *Matrizenmultiplikation*
Das Produkt ist also vom Typ (m,p).

Diskussion:
Zweckmäßig FALK-Schema zur Matrizenmultiplikation (vgl. folgendes Bsp. 5).

Def. 6
Die aus der (m,n)-Matrix $\underline{A}$ durch Vertauschung von Zeilen und Spalten entstehende (n,m)-Matrix heißt *Transformierte* von $\underline{A}$. Bezeichnung: $\underline{A}^T$.

Bsp. 5:
$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \underline{C} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a.) $\underline{A} + \underline{B}$ existiert nicht (unterschiedliche Typen).

b.) $\underline{A} + \underline{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

c.) $2 \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

d.) $\underline{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

e.) $\underline{B} \cdot \underline{A}$ existiert nicht ($(2,3)$ und $(2,2)$ nicht verkettet)

f.) $\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} 21 & 30 & 17 \\ -5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

(mit FALK-Schema:)

		3	6	4
		-2	0	1
5	-3	21	30	17
1	4	-5	6	8

Bemerkung: Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ!

Diskussion: (ausgewählte Rechenregeln)

1.) Die Menge der Matrizen vom gleichen Typ bilden mit den Operationen Addition und Multiplikation mit einem Skalar einen Vektorraum.
Bsp: $V = \{$Matrizen vom Typ $(2,2)\}$
Basis: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.) Falls die entsprechenden Typvoraussetzungen erfüllt sind, gelten:
- $(\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C})$ (Assoziativgesetz)
- $(\underline{A} \cdot \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C}$
  $(\underline{A} + \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{C} + \underline{B} \cdot \underline{C}$ (Distributivgesetze)
- $(\lambda \cdot \underline{A}) \cdot \underline{B} = \lambda \cdot (\underline{A} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \cdot (\lambda \cdot \underline{B})$
- $(\lambda \cdot \underline{A})^T = \lambda \cdot \underline{A}^T \qquad \left(\underline{A}^T\right)^T = \underline{A}$
- $(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T \qquad \boxed{(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B} \cdot \underline{A}^T}$

3.) Achtung: Im Allgemeinen gilt $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$!

4.) FALK-Schema bei fortgesetzter Multiplikation $\underline{A} \cdot \underline{BC}$

$$\begin{array}{c|c|c} & \underline{B} & \underline{C} \\ \hline \underline{A} & \underline{A} \cdot \underline{B} & (\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c|c} & \underline{C} \\ \hline \underline{B} & \underline{B} \cdot \underline{C} \\ \underline{A} & \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C}) \end{array}$$

(2 Varianten, gemäß Assoziativgesetz)

Spezielle Matrizen

1.) *Quadratische Matrizen*: Typ (n, n)
Eine quadratische Matrix $\underline{A}$ heißt

a) *symmetrisch*, wenn $\underline{A}^T = \underline{A}$ gilt.

b) obere *Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ für $i > j$.
untere *Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ für $i < j$.

c) *Diagonalmatrix*, wenn $a_i j =$ für $i \neq j$.

d) *Einheitsmatrix* $\underline{E}$, wenn $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$ (spezielle Diagonalmatrix).

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

2.) *Nullmatrix* $\underline{0}$ (sämtliche Elemente 0, nicht notwendig quadratisch).

3.) Matrizen vom Typ $(n, 1)$ (n Zeilen, eine Spalte) heißen (Spalten-)Vektoren.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$ (vgl. **??**)

Es ist $\underline{a}^T = (a_1|a_2|...|a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$ vom Typ $(1, n)$ (Zeilenvektor).

Diskussion:

1.) Die quadratischen Matrizen vom Typ (n, n) bilden mit den Operationen Addition und Multiplikation von Matrizen einen (nicht kommutativen) Ring.

2.) Für quadratische Matrizen $\underline{A}$ sind Potenzen bildbar:
$$\boxed{\underline{A}^0 = \underline{E} \quad \underline{A}^n = \underbrace{\underline{A} \cdot \underline{A} \cdot ... \cdot \underline{A}}_{n-\text{Faktoren}}, n \in \mathbb{N}}$$

3.) Falls die entsprechenden Typvoraussetzungen erfüllt sind, gelten:
$\underline{A} \cdot \underline{E} = \underline{A}$
$\underline{E} \cdot \underline{A} = \underline{A}$
$\underline{0} \cdot \underline{A} = \underline{0}$
$\underline{A} \cdot \underline{0} = \underline{0}$
$\underline{A} + \underline{0} = \underline{A}$
$\underline{0} + \underline{A} = \underline{A}$
(analog 0 und 1 bei den reellen Zahlen)

4.) Sei $\underline{A}$ vom Typ (m, n), $x \in \mathbb{R}^n$, d.h. vom Typ $(n, 1)$.
Dann ist $\boxed{\underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{x}}$ vom Typ $(m, 1)$.
Durch die Zuordnung $\underline{x} \longmapsto \underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{y}$ wird eine *lineare Abbildung* von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ beschrieben (Fkt. f heißt linear, wenn gilt $f(x+y) = f(x)+f(y)$ und $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R},\ x, y \in Db(f)$ gilt).

5.3. Determinanten

Def. 7:
Jeder n-reihigen quadratischen Matrix ist eindeutig eine Zahl $det\ \underline{A}$, die sogenannte *Determinante* von $\underline{A}$, wie folgt zugeordnet.
$n = 1$: $det\left((a_{11})\right) := a_{11}$
$$n \geq 2: det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\right) := a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}.$$
Dabei ist $A_{ij} = (-1)^{i+j} det\ U_{ij}$ die *Adjunkte* des Elements a_{ij}.
U_{ij} ist die $(n-1)$-reihige *(Unter-)Matrix*, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von $\underline{A}$ ernsteht.
$$\text{Bezeichnung: } det(\underline{A}) = det\left(\begin{pmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bsp. 6:

a.) $n = 2$:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot a_{21}$$
$$= \underline{\underline{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}}$$

b.) $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12} + a_{21} + a_{33})$$

(Alternativ auch: Regel von SARRUS [diese gilt NUR für 3-reihige Determinanten] $\Rightarrow$ (Summe der Produkte der Diagonalen nach rechts unten)-(Summe der Produkte der Diagonalen nach links unten))

Satz 2:

a.) $det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = det(\underline{A}) \cdot det(\underline{B})$

b.) $det(\underline{A}) = det(\underline{A}^T)$

Wegen Satz 2b gelten für alle folgenden, für die Zeilen formulierten Eigenschaften auch sinngemäß für die Spalten.

Satz 3: (Eigenschaften der Determinante)

(E1) $\underline{B}$ gehe aus $\underline{A}$ durch Vertauschen zweier Zeilen hervor, dann gilt $det(\underline{B}) = -det(\underline{A})$.

(E2) Es gilt $det(\underline{A}) = 0$ falls zwei Zeilen elementweise proportional sind bzw. falls alle Elemente einer Zeile gleich 0 sind.

(E3) Es gilt $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (steht ein Faktor in einer Zeile einer Determinante, so kann er auch vorgezogen werden).

(E4) Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn das λ-fache einer Zeile elementweise zu einer anderen Zeile addiert wird.

(E5) $det(\underline{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (Entwicklung nach i-ter Zeile, $(i = 1, ..., n)$)

$det(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (Entwicklung nach j-ten Spalte, $(j = 1, ..., n)$)

$\rightarrow$ *Entwicklungssatz*

Bsp. 7:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -5 & -4 \\ -1 & 1 & -4 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Spalte = Arbeitsspalte (bleibt unverändert)
Um in der untersten Spalte mehr Nullen zu erzeugen (mit Regel E4):
$S_{1,neu} := S_1 + 6 \cdot S_3$
$S_{2,neu} := S_2 + 2 \cdot S_3$
$\Rightarrow$
$= \begin{vmatrix} 19 & 7 & 3 & -1 \\ -32 & -8 & -5 & -4 \\ -26 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$
Nun kann mit der letzen Zeile relativ einfach die Determinante berchnet werden:
$= (-1) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 19 & 7 & -1 \\ -32 & -8 & -4 \\ -26 & -7 & 2 \end{vmatrix}$
Auf gleiche Weise werden nun wieder in Zeilen Nullen erzeugt:
$Z_{2,neu} := Z_2 - 4Z_1$
$Z_{3,neu} := Z_3 + 2Z_1$
$\Rightarrow$
$= \begin{vmatrix} 19 & 7 & 1 \\ -108 & -36 & 0 \\ 12 & 7 & 0 \end{vmatrix}$
$= (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -108 & -36 \\ 12 & 7 \end{vmatrix}$
$\overset{E3}{=} (-1) \cdot (-36) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 7 \end{vmatrix} = 36 \cdot 9 = \underline{\underline{324}}$
Prinzip: Nullen erzeugen mit (E4), dann mit Entwicklungssatz lösen (E5).

Anwendungen

1.) Vekotorrechnung in $\mathbb{R}^3$ (vgl. später, Abschnitt 5.5 **??**)

2.) Gegeben sei ein lineares Gleichungssytem (n Gleichungen, n Unbekannte)
Matrixform $\boxed{\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}}$ mit $\underline{A} = (a_{ij}), \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$. Diese Matrixform besitzt genau dann eine eindeutige Lösung $\underline{x}$, wenn $det(\underline{A}) \neq 0$.
In diesem Falle gilt $\boxed{x_j = \frac{det(\underline{B}_j)}{det(\underline{A})}}$ $(j = 1, ..., n)$. Wobei $\underline{B}_j$ aus $\underline{A}$ hervorgeht, indem man die j-te Spalte durch $\underline{b}$ ersetzt (*CRAMERsche Regel*, theoretische Bedeutung, praktisches Vorgehen zur Lösung der Matrixform vgl. folgenden Abschnitt).

5.4. Lineare Gleichungssysteme, Rang einer Matrix, Inverse

5.4.1. Das Austauschverfahren

Gegeben sei System von m linearen Funktionen mit den unabhängigen Veränderlichen $x_1, ..., x_n$ und den abhängigen Veränderlichen $y_1, ..., y_n$.

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + a_{10} \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a22x_2 + ... + a2nx_n + a_{20} \\ &... \\ y_m &= a_{m1}x_1 + am2x_2 + ... + amnx_n + a_{m0} \end{aligned}$$

Bsp. 8:
Betrieb, in Abteilungen, n Produkte $P_1, ..., P_n$:
a_{ij}... Kosten pro Einheit von P_j die in Abteilung i entstehen.
a_{i0}... Fixkosten in Abteilung i.
x_j... produzierte Mengen von P_j.
y_i... Gesamtkosten in Abteilung i.

Matrix-Schreibweise: $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{a}$ mit $\underline{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m,\\ j=1,...,n}}$ $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ ... \\ a_{0m} \end{pmatrix}$

Tabellenform:

	x_1	x_2	...	x_n	1
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_{10}
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_{20}
...	...				
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_{m0}

bzw.

	x^T	1
$\underline{y}$	$\underline{A}$	$\underline{a}$

Aufgaben:

1.) $\underline{x}$ vorgegeben, $\underline{y}$ ist zu berechnen (klar!).

2.) $\underline{y}$ vorgegeben, $\underline{x}$ zu berechnen (nicht immer lösbar, falls lösbar, nicht immer eindeutig lösbar).

Lösungsprinzip:
Man tausche so oft wie möglich y_r gegen x_s aus, Austauschschritt AS ($y_r \leftrightarrow x_s$) $\rightarrow$ *Austauschverfahren*.
Austauschschritt $y_r \leftrightarrow x_s$ bedeutet:

1.) r-te Zeile $y_r = ...$ nach x_s auflösen $x_s = ...$

2.) in allen anderen Zeilen x_s durch die rechte Seite vom obigen x_s ersetzen.
$\curvearrowright$ neue Tabelle

FOLIEN IM NETZ (Neumann)
Praktisches Vorgehen:

1.) Pivotelement (Pivot) kennzeichnen $\circ$

2.) Austauschregeln Austauschregel (AR) 1 bis AR 4 abarbeiten
Dabei für AR 4 unter der alten Tabelle die neue Pivotzeile (PZ) als Kellerzeile notieren.

ABB51
$a^*_{ij} = a_{ij} + a_{is} \cdot a^*_{rj}$ (Rechteckregel)

Bsp. 8 (Fortsetzung)
$y_1 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 50$ (Kosten in Abt. 1)
$y_2 = x_1 + 2x_3 + 40$ (Kosten in Abt. 2)

T_1	x_1	x_2	x_3	1
y_1	2	3	$\boxed{1}$	50
y_2	1	0	2	40
K	-2	-3	*	-50

T_2	x_1	x_2	y_1	1
x_3	-2	-3	1	-50
y_2	$\boxed{-3}$	-6	2	-60
K	*	-2	$\frac{2}{3}$	-20

T_3	y_2	x_2	y_1	1
x_3	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	-10
x_1	$-\frac{1}{3}$	-2	$\frac{2}{3}$	-20

d.h.:
$x_3 = \frac{2}{3}y_2 + x_2 - \frac{1}{3}y_1 - 10$
$x_1 = -\frac{1}{3}y_2 - 2x_2 + \frac{2}{3}y_1 - 20$

$\curvearrowright$ bei vorgegebenen Kosten y_1, y_2 ist die Lösung $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ nicht eindeutig bestimmbar.

z.B. $y_1 = 600,\ y_2 = 300$:
$x_2 = t$ (*frei wählbar*)
$x_3 = \frac{2}{3} \cdot 300 + t - \frac{1}{3} \cdot 600 - 10 = t - 10$
$x_1 = -\frac{1}{3} \cdot 300 - 2t + \frac{2}{3} \cdot 600 - 20 = 280 - 2t$

$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 280 - 2t \\ t \\ t - 10 \end{pmatrix}$$

hier für $x_i \geq 0$: $10 \leq t \leq 140$.

Varianten des Austauschverfahrens (AV)

1.) AVZ ... Austauschverfahren mit *Zeilentilgung*, d.h. neue PZ in neuer Tabelle weglassen.

2.) AVS ... Austauschverfahren mit *Spaltentilgung*, d.h. neue Pivotspalte in neuer Tabelle weglassen (nur anwendbar, wenn Variable über der weggelassenen Spalte = Null ist, siehe folgender Abschnitt).

3.) AVSZ ... AVZ+AVS gleichzeitig.

5.4.2. Lineare Gleichungssysteme

- Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (m Gleichungen, n Unbekannte $x_1, ..., x_n$)
  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$
  ...
  $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$
- Gleichungssystem heißt *homogen*, falls $b_1 = ... = b_m = 0$ gilt, sonst *unhomogen*.
- Matrixform $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m, \\ j=1,...,n}}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

- Äquivalente Form: $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} - \underline{b} \cdot 1$ mit $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$

  Hilfsgrößen $y_1 = y_2 = ... = y_m = 0$

- Tabellenform: $\begin{array}{c|cc} & \underline{x}^T & 1 \\ \hline \underline{y} & \underline{A} & \underline{b} \end{array}$

Lösungsprinzip:
Austauschverfahren, Variante AVS (da $y_i = 0$: Pivotspalte in neuer Tabelle weglassen!)
Fall 1:
Alle y_i sind austauschbar $\Rightarrow$ Gleichungssystem ist lösbar, Lösung aus letzter Tabelle (TE) ablesbar.

z.B.: $\begin{array}{c|cc} \text{TE} & x_3 & 1 \\ \hline x_1 & 0 & 4 \\ x_2 & 2 & -3 \end{array}$ $\curvearrowright x_1 = 4, \quad x_2 = 2x_3 - 3$ (x_3 frei wählbar)

Fall 2:
Wenigstens ein y_i ist gegen kein x_j austauschbar.

$\curvearrowright$ Tabelle: $\begin{array}{c|cc} & \text{(evtl.) noch nicht ausgetauschte } x_j & 1 \\ \hline ... & & \\ y_i & 0...0...0 & \alpha \\ ... & & \end{array}$ $\curvearrowright y_i = \alpha$

Fall 2a: $\alpha = 0$
Zeile y_i kann gestrichen werden $(0 = 0)$.
Fall 2b: $\alpha \neq 0$
Gleichungssystem nicht lösbar (Widerspruch, da $y_i = 0$)

Das Verfahren endet also im Fall 2b (unlösbar) oder mit einer Tabelle, in der kein y_i mehr vorkommt (Fall 1 oder 2a).

$\begin{array}{c|ccccc} \text{TE} & x_{S1} & x_{S2} & ... & x_{Sq} & 1 \\ \hline x_{r1} & ... & & & & \\ x_{r2} & ... & & & & \\ ... & & & & & \\ x_{rp} & ... & & & & \end{array}$

$x_{S...}$: NBV ... *Nichtbasisvariablen* (nicht ausgetauschte x_i)
$x_{r...}$: BV ... *Basisvariablen* (ausgetauschte x_i)

- Allgemeine Lösung ergibt sich aus Endtabelle: NBV beliebig vorgeben, BV daraus berechenbar.
- Falls keine NBV vorhanden sind, ist die Lösung eindeutig.

Def. 8:
Die Darstellung der Endtabelle heißt Basisdarstellung des lin. Gleichungssystems.
Bemerkung: Aus einer Basisdarstellung lassen sich weitere Basisdarstellungen durch Austausch $x_{ri} \leftrightarrow x_{sj}$ gewinnen.

Bsp. 9
$3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2$
$-5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2$

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10$

T1	x_1	x_2	x_3	1
y_1	3	$\boxed{1}$	2	2
y_2	-5	-3	-2	2
y_3	1	3	-2	10
K	-3	*	-2	-2

mit AVS:

T2	x_1	x_3	1
x_2	-3	-2	-2
0	$\boxed{4}$	4	8
0	-8	-8	-16
K	*	-1	-2

T3	x_3	1
x_2	1	4
x_1	1	-2
0	0	0

(in T3 kann letzte 0-Zeile gestrichen werden)
$\curvearrowright$ T3 ist Endtabelle (BV: x_1, x_2, NBV: x_3)
allg. Lösung:
$x_2 = x_3 + x_4$
$x_1 = -x_3 - 2$
$x_3 \in \mathbb{R}$ frei wählbar

andere Form: $x_3 = t$ (Parameter), $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-2 \\ t+4 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ Bemerkung:

1.) Bei homogenen System $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}$ muss die 1-Spalte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht geschrieben werden (nur „gedacht").

2.) Die Methode AVS entspricht dem sogenannten *Gauß-Jordan-Verfahren*.
Der *Gauß-Algorithmus* (siehe folgendes Beispiel):
- AVSZ (Spalten- und Zeilentilgung)
- weggelassene Zeilen merken ($\rightarrow$ Kellerzeilen)
- Rückrechnung durchführen

Bsp. 10:
$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$
$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4$
$2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3$

T_1	x_1	x_2	x_2	1
0	-1	2	2	-4
0	2	5	2	-4
0	2	$\boxed{1}$	-1	+3
x_2	-2	*	4	-3

T_2	x_1	x_3	1
0	$\boxed{5}$	10	-10
0	-8	22	-19
x_1	*	2	-2

T_3	x_3	1
0	$\boxed{6}$	-3
x_3	*	$\frac{1}{2}$

Rückrechnung:
$T_3 \curvearrowright x_3 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$
$T_2 \curvearrowright x_1 = 2x_3 - 2 = \underline{\underline{-1}}$
$T_1 \curvearrowright x_2 = -2x_1 + 4x_3 - 3 = \underline{\underline{1}}$

Lösung: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Bemerkung:

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

m Gleichungen, n Unbekannte
$m \leq n$ $\curvearrowright$ AVS günstiger
$m \geq n$ $\curvearrowright$ Gauß oder AVS

5.4.3. Weitere Anwendungen des Austauschverfahrens

1.) Lineare Unabhängigkeit von Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ überprüfen.

Ansatz: $\boxed{x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + ... + x_n\underline{a}_n = \underline{0}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}}$ mit $\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ ... \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$ (Spalten von $\underline{A}$ sind die (Spalten-)Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$). Homogenes GLS mit AVS mit Starttabelle: $\begin{array}{c|c} & \underline{x}^T \\ \hline \underline{y} & \text{A} \end{array}$

- Unabhängigkeit genau dann, wenn alle x_i ausgetauscht werden können.
- Allgemein: Die zu den ausgetauschten x_i, d.h. BV, gehörenden $\underline{a}_i$ sind unabhängig. Sie bilden die Basis von $L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n$.

2.) Rang einer Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ ... \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$ ... $rang(\underline{A})$ (auch: $rank(\underline{A}), rk(\underline{A}), ...$)

Def.: $\boxed{rang(\underline{A}) := dim\ L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)}$
(Dimension des von den Spaltenvektoren aufgespannten Teilraumes).

Berechnung: $rang(\underline{A}) =$Anzahl der ausführbaren Austauschschritte im AVSZ mit $\begin{array}{c|c} & \underline{x}^T \\ \hline \underline{y} & \text{A} \end{array}$ als Starttabelle (1-Spalte entfällt).
Bemerkung: Es gilt $rang(\underline{A}^T) = rang(\underline{A})$.

3.) Berechnung der Determinante einer (n, n)-Matrix (vgl. Merkblatt „Lineare Algebra“)

5.4.4. Die Inverse einer (n,n)-Matrix

Def. 9:
Es sei $\underline{A}$ vom Typ (n, n). Das Gleichungssystem $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x}$ sei für jedes $\underline{y}$ *eindeutig* nach $\underline{x}$ auflösbar, d.h. $\underline{x} = \underline{B}\,\underline{y}$. Dann heißt die (n, n)-Matrix $\underline{B}$ *Inverse* von $\underline{A}$. Bezeichnung: $\underline{A}^{-1} = \underline{B}$.
Falls $\underline{A}^{-1}$ existiert, so heißt $\underline{A}$ *regulär*, sonst *singulär*.
Bemerkung:

1.) $\boxed{\underline{A} \text{ ist regulär}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{det\,\underline{A} \neq 0}$

2.) $\underline{A}$ regulär, dann hat $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ die eindeutige Lösung $\boxed{\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}}$.

Rechenregeln: Seien $\underline{A}$ und $\underline{B}$ regulär. Dann gilt:

- $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$, $\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E}$
- $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$
- $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{E}$

- $(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$
- $\left(\underline{A}^T\right)^{-1} = \left(\underline{A}^{-1}\right)^T$

Verfahren zur Ermittlung der Inversen:

- vollständiges AV mit Starttabelle $\begin{array}{c|c} & \underline{x}^T \\ \hline \underline{y} & \underline{A} \end{array}$
  Fall 1: alle x_i austauschbar $\curvearrowright$ $\underline{A}$ regulär.
  Fall 2: nicht alle x_i austauschbar $\curvearrowright$ $\underline{A}$ singulär.
  im Fall 1: $\curvearrowright$ nach Ordnen der Zeilen und Spalten: $\underline{A}^{-1}$ aus TE ablesbar.

- Probe: $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$

Bsp. 11:

$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ gesucht: $\underline{A}^{-1}$ (falls diese existiert).

Lösung:

T_1	x_1	x_2	x_3
y_1	$\boxed{1}$	2	1
y_2	1	0	2
y_3	1	-1	1
K	*	-2	-1

T_2	y_1	x_2	x_3
x_1	1	-2	-1
y_2	1	-2	$\boxed{1}$
y_3	1	-3	0
K	-1	2	*

T_3	y_1	x_2	y_2
x_1	2	-4	-1
x_3	-1	-2	1
y_2	1	$\boxed{-3}$	0
K	$\frac{1}{3}$	*	0

T_4	y_1	y_3	y_2
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1
x_3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
x_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0

$\curvearrowright \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Probe: $\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \underline{E} = \underline{A}^{-1}\,\underline{A}$

5.5. Vektorrechnung im Raum

5.5.1. Kartesische Basis

Einige Begriffe:

1.) *Betrag* eines Vektors $\underline{a}$: Länge des Pfeils, der $\underline{a}$ repräsentiert.
Bezeichnung: $|\underline{a}|$

2.) *Einheitsvektor*: Vektor mit $|\underline{a}| = 1$.

3.) zu $|\underline{a}| \neq \underline{0}$ gehörender Einheitsvektor $\boxed{\underline{a}^0 = \frac{1}{|\underline{a}|}\underline{a}}$

4.) *Kartesische Basis* $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ besitzen Betrag 1, stehen $\perp$ aufeinander und bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (Rechtsschraubregel: Rechtsschraube $\perp$ zu $\underline{i}$ und $\underline{j}$ halten, auf kürzestem Weg von $\underline{i}$ nach $\underline{j}$ drehen. $\curvearrowright$ Bewegung in Richtung $\underline{k}$).
ABB 52

5.) *Kartesisches Koordinatensystem*:

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

- Fester Punkt O als Ursprung
- kartesische Basis $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ (jeweils linear unabhängig)

Damit eineindeutige Zuordnung:
$\underset{\text{Punkt}}{P} \overset{1}{\underset{1}{\longleftrightarrow}} \underset{\text{Ortsvektor}}{\overrightarrow{OP}} = \underline{r} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k}$
ABB 53

$\underline{r} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (Kurzschreibweise – beide Schreibweisen gleichberechtigt)

Betrag eines Vektors $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$: $\boxed{|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

Bemerkung:

Bezeichnung auch $\underline{e_1} = \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e_2} = \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e_3} = \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{x} = \overrightarrow{x} = \mathbf{x}$

5.5.2. Das Skalarprodukt

Def. 10:
Die Zahl $(\underline{a}, \underline{b}) := |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot cos(\varphi)$ heißt *Skalarprodukt* der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$. Dabei ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

Eigenschaften des Sklarproduktes:

a.) $(\underline{a}, \underline{a}) > 0$ für $\underline{a} \neq \underline{0}$

b.) $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$ (Symmetrie)

c.) $(\lambda\, \underline{a} + \mu\, \underline{b},\ \underline{c} = \lambda \cdot (\underline{a}, \underline{c}) + \mu(\underline{b}, \underline{c})$ (Linearität)

Satz 4:
Es sei $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$.
Folgerung: $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a}^T \cdot \underline{b} = \underline{b}^T \cdot \underline{a}}$
Schreibweisen: $(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a} \circ \underline{b} = ...$

Anwendungen:

1.) Projektion $\underline{a}_{\underline{b}}$ von $\underline{a}$ auf $\underline{b}$: $\boxed{\underline{a}_{\underline{b}} = (\underline{a}, \underline{b}^0)\underline{b}^0 = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{b}|^2}\underline{b}}$

ABB 54
Herleitung:

Mitschrift von
Falk-Jonatan Strube

$|\underline{a}_{\underline{b}}| = |\underline{a}| \cdot cos(\varphi)$
$\underline{a}_{\underline{b}} = |\underline{a}| \cdot cos(\varphi) \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot cos(\varphi) \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|^2} = (\underline{a}, \underline{b}) \cdot \frac{1}{|\underline{b}|^2} \cdot \underline{b}$

2.) Winkel φ zwischen zwei Vektoren: $\boxed{cos(\varphi) = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}}$

Bsp. 12:

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

a.) $|\underline{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}, |\underline{b}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{65}$
$cos(\varphi) = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}} = \frac{29}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}}$
$\varphi = arccos\left(\frac{29}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}}\right) \approx 15,92°$

b.) Projektion von $\underline{b}$ auf $\underline{a}$: $\underline{ba} = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}|^2} \underline{a} = \frac{29}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{29}{14} \underline{e}_1 - \frac{29}{7} \underline{e}_2 + \frac{29 \cdot 3}{14} \underline{e}_3$

3.) *Orthogonalitätskriterium*:
$(\underline{a}, \underline{b}) = 0 \Leftrightarrow (\underbrace{|\underline{a}| = 0}_{\underline{a}=} \vee \underbrace{|\underline{b}| = \underline{0}}_{\underline{b}=\underline{0}} \vee cos(\varphi) = 0)$
Vereinbarung: $\underline{0}$ orthogonal zu jedem Vektor $\curvearrowright$ $\boxed{(\underline{a}, \underline{b}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{a} \perp \underline{b}}$

5.5.3. Das vektorielle Produkt

Def. 11:
Das vektorielle Produkt $\underline{a} \times \underline{b}$ zweier Vektoren $(\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3)$ ist ein Vektor, der eindeutig festgelegt ist durch:

(1) $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot sin(\varphi)$

(2) $\underline{a} \times \underline{b}$ ist senkrecht zu $\underline{a}$ und senkrecht zu $\underline{b}$.

(3) $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{a} \times \underline{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Eigenschaften des vektoriellen Produktes:

- $\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a})$ (Anti-Kommutativgesetz)
- $\underline{a} \times (\underline{a} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$ (Distributivgesetz)
- $\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = (\lambda \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda \underline{b})$
- Speziell: $\underline{a} \times \underline{a} = \underline{0}$
- $\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3, \; \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$ usw.

Satz 5:

Es sei $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, dann gilt:

$$\underline{a} \times \underline{b} \underset{\text{Schema}}{\widehat{=}} \begin{vmatrix} \underline{i} & a_1 & b_1 \\ \underline{j} & a_2 & b_2 \\ \underline{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \widehat{=} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \underline{k}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_2b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Bsp. 13:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \underline{k} = -2\underline{i} - 7\underline{j} - 4\underline{k} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Kontrolle: $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{a}) = 0, \ (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{b}) = 0$!

Anwendungen:

1.) *Flächeninhalt* des von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannte *Parallelogramms*: $\boxed{F = |\underline{a} \times \underline{b}|}$
ABB 55
$sin(\alpha) = \frac{h}{|\underline{b}|}$
$F = |\underline{a}| \cdot h = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot sin(\alpha) = |\underline{a} \times \underline{b}|$

2.) Flächeninhalt eines Dreiecks $\Delta P_1P_2P_3$: $\boxed{F = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_2} \right|}$ (halbes Parallelogramm)

3.) *Parallelitätskriterium*: $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \ \Leftrightarrow \ |\underline{a} \times \underline{b}| = 0 \ \Leftrightarrow \ (|\underline{a}| = 0 \vee |\underline{b}| = 0 \vee sin(\varphi) = 0)$
Vereinbarung: $\underline{0}$ || zu jedem Vektor
$\curvearrowright \boxed{\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \ \Leftrightarrow \ \underline{a} || \underline{b}}$

5.5.4. Das Spatprodukt

Def. 12:
Die Zahl $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})$ heißt Spatprodukt der Vektoren $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$.
Eigenschaften: $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{b} \times \underline{c}, \underline{a}) = (\underline{c} \times \underline{a}, \underline{b})$ (durch zyklisches Vertauschen)

Berechnung: $\boxed{(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = det(\underline{a}|\underline{b}|\underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$

Anwendung:

1.) Volumen des von $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$ aufgespannten Spates (Parallelotop): $\boxed{V = |(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})|}$
ABB 57

$V = F_{\text{Grundfläche}} \cdot h = |\underline{a} \times \underline{b}| \cdot |\underline{c}| \cdot |cos(\alpha)| = |(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})|$
Bemerkung:

Spatprodukt $\begin{cases} > 0 & \text{... Rechtssystem} \\ < 0 & \text{... Linkssystem} \end{cases}$

2.) *Komplanaritätskriterium*:
Die Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ sind komplanar, d.h. sie liegen in einer (in O angehefteten) Ebene
$\Leftrightarrow \ (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = 0$
$\Leftrightarrow \ \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ sind linear abhängig.

5.5.5. Geraden- und Ebenengleichungen

1.) Parameterdarstellung einer Geraden g durch P_1 und P_2:
P ... beliebiger Punkt von g
ABB 58
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \quad (t \in \mathbb{R})$
$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + t \cdot \underline{a}}$ (Punkt-Richtungs-Form)
$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + t \cdot (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)} \quad (t \in \mathbb{R})$ (Zwei-Punkte-Form)

Bsp.:
Gerade durch die Punkte $P_1 = (1, 2, -1), P_2 = (0, 1, 4)$

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2.) Parameterdarstellung einer Ebene ε durch 3 Punkte P_1, P_2, P_3, die nicht auf einer Geraden liegen.
ABB 59
P ... beliebiger Punkt von ε
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + u \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + v \cdot \overrightarrow{P_1P_3} \quad (u, v \in \mathbb{R})$
$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + u \cdot \underline{a} + v \cdot \underline{b}} \quad (u, v \in \mathbb{R})$
$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_1 + u \cdot (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) + v(\underline{r}_3 - \underline{r}_1)}$

3.) Parameterfreie Ebenengleichung
ABB 60
Normalenvektor $\underline{n}$ ($\underline{n} \neq 0, \ \underline{n} \perp \varepsilon$):

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \ \underline{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$$

Dabei sei $P(x, y, z)$ ein beliebiger Punkt in ε und $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ein fester Punkt in ε mit Orthogonalitätskriterium $(\underline{n}, \overrightarrow{P_0P}) = 0$ bzw. $\boxed{(\underline{n}, \underline{r} - \underline{r}_0) = 0}$.

Ausführlich: $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right) = 0$, d.h. $a \cdot (x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

Allgemeine Form: $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ mit $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Bsp. 15:

Ebene durch $P_1(1,0,0), P_2(3,1,5), P_3(-2,0,2)$

- P.d. (Parameterdarstellung) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\underline{a}} + v \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\underline{b}} \quad (u, v \in \mathbb{R})$
- Ein Normalenvektor ist bpsw. $\underline{u} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -19 \\ 3 \end{pmatrix}$

  $\curvearrowright$ Parameterfreie Darstellung: $2x - 19y + 3z + d = 0$
  d berechnen: Einsetzen von $x = 1, y = z = 0$ (P_1) liefert $2 \cdot 1 + d = 0 \;\Rightarrow\; d = -2$
  $\curvearrowright$ $\boxed{2x + 19y + 3z - 2 = 0}$

5.5.6. Einige geometrische Grundaufgaben

1.) Schnitt von Gerade und Ebene

Bsp. 16:

Gegeben:
Ebene ε: $2x - 4y + z + 3 = 0$
Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
Gesucht:

a.) Schnittpunkt (Spurpunkt) $S(x_S, y_S, z_S)$
b.) Schnittwinkel

zu a.) $g: x = 3 - t,\; y = t,\; z = 1 - 2t$ einsetzen in Ebenengleichung: $2(3-t) - 4 \cdot t + 1 - 2t + 3 = 0 \Rightarrow -8t + 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{4}$
$t = \frac{5}{4}$ in Geradengleichung einsetzen: $x_S = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}, y_S = \frac{5}{4}, z_S = 1 - 2\frac{5}{4} = -\frac{3}{2}$
$\curvearrowright$ $\underline{\underline{S\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{3}{2}\right)}}$

zu b.) Schnittwinkel:
ABB 61
$\beta = \measuredangle(\underline{n}, \underline{a})$ (Richtungsvektor von g)
$\alpha = |90° - \beta|$
$\underline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \beta = arrcos\left(\frac{(\underline{n}, \underline{a})}{|\underline{n}| \cdot |\underline{a}|}\right) \approx 135,45°$
$\curvearrowright$ $\alpha = |90° - \beta| \approx 45,45°$

2.) Schnitt zweier Ebenen: 2 Gleichungen, 3 Unbekannte

Bsp. 17:

Schnitt der Ebenen $\varepsilon_1 : \ x + y + z - 1 = 0$ und $\varepsilon_2 : \ x - 2y + 3z + 4 = 0$.

Austauschverfahren:

T_1	x	y	z	1
0	$\boxed{1}$	1	1	-1
0	1	-2	3	4
K	*	-1	-1	1

T_2	x	z	1
x	-1	-1	1
0	-3	$\boxed{2}$	5
K	$\frac{3}{2}$	*	$-\frac{5}{2}$

T_3	y	1
x	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
z	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$

$y \dots$ NBV, $y = t$ (beliebig), $x = -\frac{5}{2}t + \frac{7}{2}$, $z = \frac{3}{2}t - \frac{5}{2}$

also $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}t + \frac{7}{2} \\ t \\ \frac{3}{2}t - \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, oder $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$

3.) Abstand $d(P_1, \varepsilon)$ eines Punktens P_1 in einer Ebene ε.

ε: $ax + by + cz + d = 0$, Punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$

$$\boxed{d(P_1, \varepsilon) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

ABB 91

$\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $P_0 \in \varepsilon$, d.h. $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$

$$d(P_1, \varepsilon) = \left| \overrightarrow{P_0P_1}_{\vec{n}} \right| = \frac{\left| \left(\overrightarrow{P_0P_1}, \underline{n} \right) \right|}{|\underline{n}|}$$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} x_1 - y_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(P_1, \varepsilon) = \frac{|a(x_1 - x_0 + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Bsp. 18:

Abstand von $P_1(2, -9, -16)$ von der Ebene $\varepsilon : \ 3x - 7y + 8z + 26 = 0$.

$$d(P_1, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 2 - 7 \cdot (-9) + 8 \cdot (-16) + 26|}{\sqrt{3^2 + (-7)^2 + 8}} = \frac{|-33|}{\sqrt{122}} = \underline{\underline{\frac{33}{\sqrt{122}}}}$$

Bemerkung: Gerade g in der x-y-Ebene, Gleichung $ax + by + c = 0$, NV: $\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, Abstand eines Punktes $P_1(x_1, y_1)$ von g:

$$\boxed{d(P_1, g)} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

4.) Abstand $d(Q, g)$ eines Punktes Q von einer Geraden g (in $\mathbb{R}^3$).

$g : \underline{r} = \underbrace{\overrightarrow{OP_1}}_{\underline{r}_1} + t\underline{a} \quad t \in \mathbb{R}$ (Parameterdarstellung)

ABB 92

(d ist Höhe $\overline{LQ}$ des von $\underline{a}$ und $\overrightarrow{P_1Q}$ aufgespannten Parallelogramms)

Lotfußpunkt: $\boxed{\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1Q}_{\underline{a}}}$

Bsp. 19:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}, Q(1,1,1)$$

a) Abstand $d(Q,g)$:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{P_1Q} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_1Q} \times \underline{a} = 2\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{P_1Q} \times \underline{a}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$d(Q,g) = \frac{3}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\sqrt{2}}}$$

b) Lotfußpunkt: $\overrightarrow{P_1Q}_{\underline{a}} = \frac{\left(\overrightarrow{P_1Q}, \underline{a}\right)}{|\underline{a}|^2} \cdot \underline{a} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow L\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

5.) Abstand $d(g_1, g_2)$ zweier nicht paralleler Geraden g_1 und g_2.
$g_1: \underline{r} = \underline{r}_1 + s \cdot \underline{a}_1$
$g_2: \underline{r} = \underline{r}_2 + t \cdot \underline{a}_2 \quad (s, t \in \mathbb{R})$
ABB 93
$$d = \left|\overrightarrow{P_1P_2}_{\underline{a}_1 \times \underline{a}_2}\right| = d(g_1, g_2) = \frac{|(\underline{r}_2 - \underline{r}_1, \underline{a}_1 \times \underline{a}_2)|}{|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2|}$$
Bemerkung: Lotfußpunkte L_1 und L_2 aus Bedingungen $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \underline{a}_1$ und $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \underline{a}_2$ ermittelbar.

5.6. Eigenwerte und Eigenvektoren

Es sei $\underline{A}$ eine (n,n)-Matrix.

Def. 13:
Die Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* (EW) der quadratischen Matrix $\underline{A}$, falls die Gleichung $\boxed{\underline{A}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}}$ nichttriviale Lösungsvektoren $\underline{x}$ besitzt. Diese heißen dann *Eigenvektoren* (EV) von $\underline{A}$ zum Eigenwert λ.

Diskussion:

1.) $\underline{A}\,\underline{x} = \lambda \underline{x} \Leftrightarrow (\underline{A} - \lambda \underline{E})\underline{x} = \underline{0}$
D.h. nichttriviale Lösungen existieren genau dann, wenn $\boxed{det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0}$ (*charakteristische Gleichung*) gilt.

2.) Vorgehensweise zur Ermittlung von EW und EV:

- charakt. Gleichung lösen (n i.a. komlpexe Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_n$)
- Gleichungssystem $(\underline{A} - \lambda_i \underline{E})\underline{x} = \underline{0}$ für $i = 1, ..., n$ lösen.

Im folgenden werden nur symmetrische (n, n)-Matrizen $\underline{S}$ betrachtet, d.h. $\underline{S}^T = \underline{S}$.

Satz 6:
Es sei $\underline{S}$ eine symmetrische (n, n)-Matrix. Dann gilt:

(1) Alle Eigenwerte von $\underline{S}$ sind reell.

(2) Zu verschidenen EW λ_1 bzw. λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) gehörende EV $\underline{v}_1$ bzw. $\underline{v}_2$ sind orthogonal (vgl. Disskussion).

(3) Es gibt eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^n$, die aus n paarweise orthonormierten EV $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ von $\underline{S}$ besteht.

(4) Es sei $\underline{V} = (\underline{v}_1 | ... | \underline{v}_n)$ eine Matrix, deren Spaltenvektoren n paarweise orthonomierte EV von $\underline{S}$ sind. Dann gilt:
   - $\underline{V} \cdot \underline{V}^T = \underline{V}^T \cdot \underline{V} = \underline{E}$ (d.h. $\underline{V}^{-1} = \underline{V}^T$, $\underline{V}$ ist sogenannte orthogonale Matrix)
   - $\underline{V}^T \cdot \underline{S} \cdot \underline{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda \curvearrowright \boxed{\underline{S} = \underline{V} \cdot \Lambda \cdot \underline{V}^T}$
   - Es gilt $\underline{S}^{-1} = \underline{V} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \underline{V}^T$ mit $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = \Lambda^{-1}$

     $\underline{S}^n = \underline{V} \cdot \Lambda^n \cdot \underline{V}^T$

Betrag (Norm) eines Vektors $|\underline{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ paarweise orthonormiert bedeutet $(\underline{v}_i, \underline{v}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$.