Hausaufgabe 5

Aufgabe 1. Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x\mathrm{e}^x.$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitungen f', f'' und f'''.
(b) Stellen Sie eine Vermutung für $f^{(n)}$ auf und beweisen sie diese per vollständiger Induktion.

Aufgabe 2. Entwickeln Sie die die folgenden Funktionen mittels der Taylor-Formel an der Stelle $x = x_0$ bis zur n-ten Potenz. Geben Sie das Restglied in der Form von Lagrange an.

(a) $f(x) = x\mathrm{e}^x$, $x_0 = 1$
(b) $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$
(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$
(d) $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = \pi$.

Aufgabe 3. Geben Sie für die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ mittels der Taylor-Formel eine Approximation durch ein Polynom zweiten Grades an. Entwickeln Sie hierbei an der Stelle $x_0 = 0$. Nutzen Sie dieses Polynom um den Wert $\sqrt[3]{1.5}$ näherungsweise zu berechnen. Schätzen Sie mit Hilfe des Restgliedes den Fehler dieser Näherung ab.

Aufgabe 4. Wir betrachten einen Kupferdraht mit Länge $l = 500\text{m}$, Durchmesser $d = 2\text{mm}$ und Dichte $\rho = 8.9\text{g}/\text{cm}^3$. Der Durchmesser ist mit einer Ungenauigkeit von 0.01mm gemessen worden. Nutzen Sie die Taylor-Formel bis zum linearen Glied um eine Abschätzung für den absoluten und den relativen Fehler beim Bestimmen der Masse des Kupferdrahtes (verursacht durch die Ungenauigkeit beim Messen) zu erhalten. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Bestimmen Sie die Funktion $m(d)$ welche die Masse des Drahtes in Abhängigkeit des Durchmessers d angibt. Achten Sie auf die Einheiten!
(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom p_1 für m bis zum linearen Glied unter Verwendung des Entwicklungspunktes $d_0 = 2\text{mm}$.
(c) Leiten Sie aus dem Taylorpolynom approximative Schranken für den Fehler $\Delta m = m(d) - m(d_0)$ her.
(d) Setzen Sie die Schranken aus Aufgabe (c) ins Verhältnis zum tatsächlichen Funktionswert $m(d_0)$ um die relativen Fehler zu erhalten.

Aufgabe 5. Berechnen Sie (wenn möglich) die folgenden Grenzwerte. Verwenden Sie dazu, wenn möglich die Regel von l'Hospital.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(3x)}{\tan(5x)}$
(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \ln\Big(\frac{a + x}{x}\Big)$, mit $a \in \mathbb{R}$
(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Big(1 + \frac{a}{x}\Big)^x$, mit $a \in \mathbb{R}$
(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{\mathrm{e}^{bx}}$, mit $a > 0$, $b > 0$
(e) $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} \sin(x)^{\sin(x)}$
(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\Big)$
(g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (1 + x)^{\frac{1}{\ln(x)}}$
(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \cdot \sin(x)}$