Operationen auf binären Relationen und graphische Darstellung

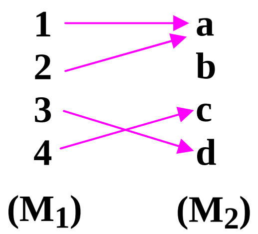
Es seien M_1 und M_2 zwei Mengen. Eine Teilmenge T des kartesischen Produktes

$M_1 \times M_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in M_1 \wedge x_2 \in M_2\}$ **heißt (binäre) Relation.**

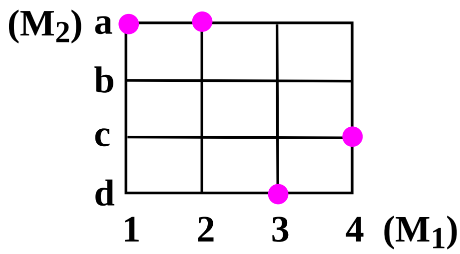
Graphische Darstellung binärer Relationen in $M_1 \times M_2$

Beispiel 1: $M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $M_2 = \{a, b, c, d\}$, $T = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, c)\}$

Variante 1: Pfeildarstellung



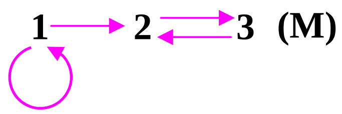
Variante 2: Koordinatensystem



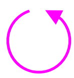
Graphische Darstellung binärer Relationen in $M \times M$

Beispiel 2: $M = \{1, 2, 3\}$, $T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$

Hier gibt es neben den beiden Varianten aus Beispiel 1 eine weitere Möglichkeit, indem bei der Pfeildarstellung die Elemente von M nur einmal dargestellt werden:



Besonderheiten:

Bei (1, 1) eine Schlinge  **zeichnen.**

Anstelle der beiden Pfeile zwischen 2 und 3 ist auch ein Doppelpfeil möglich: 

Komposition (Verkettung) von Relationen

Es seien $T_1 \subseteq M_1 \times M_2$ und $T_2 \subseteq M_2 \times M_3$ binäre Relationen. Die Relation

$$T_1 \circ T_2 := \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists_{y \in M_2} (x, y) \in T_1 \wedge (y, z) \in T_2\}$$

heißt Komposition oder Verkettung von T_1 und T_2.

Beispiel 3: $M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $M_2 = \{a, b, c, d\}$, $M_3 = \{u, v, w\}$,

$T_1 = \{(1, b), (1, d), (2, a), (3, b), (3, d), (4, a), (4, c)\} \subseteq M_1 \times M_2$.

$T_2 = \{(b, u), (c, v), (c, w), (d, u), (d, v)\} \subseteq M_2 \times M_3$.

Vorgehensweise zur Ermittlung der Elemente einer Komposition $T_1 \circ T_2$
1) Für jedes Element $(x, y) \in T_1$ alle Fortsetzungen $(y, z_i) \in T_2$ suchen.
2) (x, z_i) als Element von $T_1 \circ T_2$ notieren, falls noch nicht vorhanden.

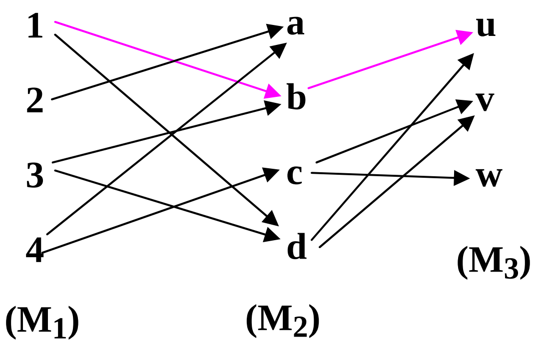
In der folgenden Tabelle ist diese Vorgehensweise für das Beispiel 3 dargestellt.

Element von T_1	Fortsetzung(en) in T_2	$\to$ Element(e) von $T_1 \circ T_2$
(1, b)	(b, u)	(1, u)
(1, d)	(d, u) [1], (d, v)	(1, v)
(2, a)	-	-
(3, b)	(b, u)	(3, u)
(3, d)	(d, u) [1], (d, v)	(3, v)
(4, a)	-	-
(4, c)	(c, v), (c, w)	(4, v), (4, w)

[1] (1, u) und (3, u) sind bereits vorhanden und werden nur einmal aufgeführt!

Damit ergibt sich $T_1 \circ T_2 = \{(1, u), (1, v), (3, u), (3, v), (4, v), (4, w)\}$

Auch graphisch (Pfeildarstellung) lässt sich dies nachvollziehen, indem sämtliche Verbindungen von M_1 über M_2 nach M_3 gesucht werden (in der Skizze ist nur die erste Verbindung von 1 über b nach u farbig dargestellt):



Wichtig: Die Operation Verkettung ist assoziativ, d.h. mit $T_1 \subseteq A \times B$, $T_2 \subseteq B \times C$ und $T_3 \subseteq C \times D$ gilt: $(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3) =: T_1 \circ T_2 \circ T_3 \subseteq A \times D$.

Projektionen

Es sei T eine Relation in $U \times V$. Die Menge $\operatorname{proj}_1(T) := \{x \in U \mid \exists_{y \in V} (x, y) \in T\}$ heißt Projektion von T auf den 1. Faktor U des kartesischen Produktes.

Analog ist $\operatorname{proj}_2(T) := \{y \in V \mid \exists_{x \in U} (x, y) \in T\}$ die Projektion von T auf den 2. Faktor V des kartesischen Produktes.

Inverse Relation

Es sei $T \subseteq M_1 \times M_2$ eine binäre Relation. Die Relation

$T^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in T\} \subseteq M_2 \times M_1$ heißt inverse Relation (kurz Inverse) von T.

Transitive Hülle

Es sei T eine Relation in $M\times M$ (auf M). Als transitive Hülle T^+ von T wird die kleinste Relation, die T enthält und transitiv ist, bezeichnet.

Satz: Es gilt $\boxed{T^+ = T\cup(T\circ T)\cup(T\circ T\circ T)\cup \ldots = \bigcup_{j=1}^{\infty} T^j}$. **(1)**

(Dabei bezeichnet T^j die Komposition $\underbrace{T\circ T\circ \ldots\circ T}_{\text{j-mal}}$.)

Beispiel 4: Gegeben sei die Menge M = {a, b, c, d, e, f} sowie die Relation $T = \{(a, b), (b, c), (c, e), (b, d), (d, e), (e, f)\} \subseteq M\times M$.

Entsprechend der Vorgehensweise im Beispiel 3 ergibt sich der Reihe nach

$T\circ T = T^2 = \{(a, c), (a, d), (b, e), (c, f), (d, f)\}$, $T\circ(T\circ T) = T^3 = \{(a, e), (b, f)\}$,

$T\circ(T\circ T\circ T) = T^4 = \{(a, f)\}$, $T\circ(T\circ T\circ T\circ T) = T^5 = \Phi$ **und damit für die transitive Hülle** $T^+ = \{(a, b), (b, c), (c, e), (b, d), (d, e), (e, f),$
$(a, c), (a, d), (b, e), (c, f), (d, f), (a, e), (b, f), (a, f)\}$.

Reflexive Hülle, symmetrische Hülle. reflexiv-transitive Hülle

Es sei wieder T eine Relation in $M\times M$ (auf M). $I_M = \{(x,x) \mid x\in M\}$ sei die Identitätsrelation (ein Paar (x, y) gehört genau dann zu I_M wenn x gleich (oder identisch) y ist.

1) Als reflexive Hülle von T wird die Relation $\boxed{T\cup I_M}$ bezeichnet.

2) Die symmetrische Hülle von T ist $\boxed{T\cup T^{-1}}$.

3) Die reflexiv-transitive Hülle T* von T ist die Vereinigung der transitiven Hülle T^+ mit der Identitätsrelation I_M: $\boxed{T^* = T^+ \cup I_M}$.