Mathematik I

Vorlesungsskript

Mitschrift von Falk-Jonatan Strube

Vorlesung von Herrn Meinhold

20. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

Teil I.
Elementare Grundlagen

1. Aussagen und Grundzüge der Logik

2. Mengen

3. Zahlen

4. Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

5. Lineare Algebra

Teil II.
Folgen, Reihen, Grenzwerte

1. Zahlenfolgen

1.1. Grenzwerte von Zahlenfolgen

Def. 1:
Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Eine Funktion f mit $Db(f) = \{u \in \mathbb{N} | n \geq n_0\}$ und $Wb(f) \subset \mathbb{R}$ heißt reelle Zahlenfolge.
Schreibweise:
$a_n = f(n) \qquad (n \in Db(f))$
$(a_n)_{n \geq n_0} = (a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, ...)$
oft $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$.

Bsp. 1:

a.) $a_n = (-1)^n \cdot n \quad (n \in \mathbb{N})$
$(a_n) = (0, -1, 2, -3, 4, ...)$

b.) $a_0 = -1,\ a_n = n \cdot a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ (rekursive Def.)
$(a_n) = (-1, -1, -2, -6, -24, ...),\ a_n = -n!$

c.) $a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + ... + \frac{3}{10^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$(a_n) = (0.3, 0.33, 0.333, ...)$

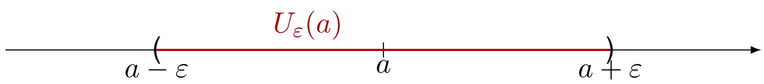
d.) $a_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
$(a_n) = \left(\frac{5}{4}, \frac{8}{9}, \frac{17}{16}, \frac{24}{25}, ... \right)$

Def. 2:

- (a_n) heißt *konvergent*, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt mit folgender Eigenschaft:
  Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$, sodass für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.
- Die Zahl a heißt *Grenzwert* von (a_n).
  Schreibweisen:
  $\boxed{a = \lim_{n \to \infty} (a_n)}$ oder $\boxed{a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a}$
- (a_n) heißt *divergent*, falls (a_n) nicht konvergent ist.

Diskussion

1.) Für $\varepsilon > 0$ heißt $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (offenes Intervall) ε-*Umgebung von* a.



$\left(\lim_{n \to \infty} a_n = a \right) \equiv (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)\ a_n \in U_\varepsilon(a))$
d.h. für jedes (noch so kleine) ε, liegen ab einem bestimmten (von ε abhängigen) Index $n_0(\varepsilon)$ alle Glieder $a_n (n \geq n_0(\varepsilon))$ in $U_\varepsilon(a)$.

2.) Im Bsp. 1 sind:
konvergente Folgen:
c.) mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$
d.) mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
divergente Folgen: a.) und b.)

3.) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, so heißt (a_n) *Nullfolge*.

Def. 3:
(a_n) heißt:

- *streng monoton wachsend*, falls für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$.
- *monoton wachsend*, falls für jedes n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$.
- *streng monoton fallend*, falls für jedes n gilt: $a_n > a_{n+1}$.
- *monoton fallend*, falls für jedes n gilt: $a_n \geq a_{n+1}$.

Def. 4:
(a_n) heißt beschränkt, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $|a_n| \leq C$ für alle n.