Die Menge der reellen Zahlen aus dem Intervall $(0;1)$ ist überabzählbar.

Beweis (CANTORsches Diagonalverfahren):

Indirekt, angenommen die Menge $M = (0;1)$ sei abzählbar,
d.h. $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$.
Wir wählen für die Zahlen x_i die eindeutige Darstellung als Dezimalbruch, wobei wir die 9-er Periode vermeiden (z.B. $0{,}3999\ldots = 0{,}3\overline{9} = 0{,}4\overline{0} = 0{,}4000\ldots$)!

$$x_1 = 0, a_1^{(1)}\, a_2^{(1)}\, a_3^{(1)}\, a_4^{(1)} \dots$$

$$x_2 = 0, a_1^{(2)}\, a_2^{(2)}\, a_3^{(2)}\, a_4^{(2)} \dots$$

$$x_3 = 0, a_1^{(3)}\, a_2^{(3)}\, a_3^{(3)}\, a_4^{(3)} \dots$$

$$x_4 = 0, a_1^{(4)}\, a_2^{(4)}\, a_3^{(4)}\, a_4^{(4)} \dots$$

Wir betrachten die Zahl $z = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$ mit

$$b_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } a_k^{(k)} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } a_k^{(k)} = 1 \end{cases} .$$

Es ist also $a_k^{(k)} \neq b_k$ für alle k, d.h., z und x_k unterscheiden sich in jedem Falle an der k-ten Stelle nach dem Komma. Damit gilt $z \neq x_k$ für alle k, d.h., z ist nicht in der Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ enthalten, also $z \notin M$. Andererseits ist $0 < z < 1$ also $z \in (0;1) = M$.
Dies ist ein Widerspruch, damit ist die Behauptung bewiesen.