Abzählbarkeit der Menge der rationalen Zahlen

Es sei Q^+ die Menge der positiven rationalen Zahlen. Die Zahlen werden zunächst zeilenweise derart angeordnet, dass in einer Zeile alle Zahlen $\frac{i}{j}$ mit dem gleichen Zähler i stehen:

$$\begin{array}{cccccc}
\boxed{\frac{1}{1}}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \ldots \\[1em]
\frac{2}{1}, & \frac{2}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{2}{4}, & \frac{2}{5}, & \ldots \\[1em]
\frac{3}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{3}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{3}{5}, & \ldots \\[1em]
\ldots & & & & &
\end{array}$$

Zählvorschrift:

1. **Ordnen (aufsteigend) nach der Summe s = i + j von Zähler und Nenner (⟶).**
2. **Bei gleicher Summe der Größe nach (aufsteigend) ordnen (⟶).**
3. **Zahlen, die bereits aufgelistet wurden (kürzbare Brüche), werden übersprungen bzw. gestrichen.**

$$\Rightarrow \quad Q^+ = \{\underset{s\,=\,2}{\frac{1}{1}}, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}}_{3}, \underbrace{\frac{1}{3}, \cancel{\frac{2}{2}}, \frac{3}{1}}_{4}, \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}}_{5}, \underset{\ldots}{\cancel{\frac{2}{4}}}, \ldots\}$$

Mit dieser Zählvorschrift wird jede positive rationale Zahl nach endlich vielen Schritten erreicht. Q^+ ist also abzählbar unendlich.

Man kann leicht zeigen (vgl. Übung), dass auch die Menge Q aller rationalen Zahlen abzählbar unendlich ist.