Zur Mächtigkeit der Potenzmenge

Definition 1: Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig**, wenn eine bijektive Abbildung von A auf B (damit auch von B auf A bzw. zwischen A und B) existiert. Bezeichnung: $A \sim B$ (auch $|A| = |B|$).

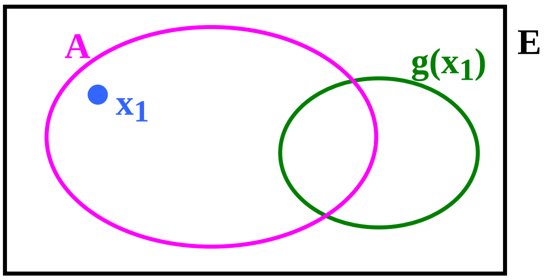
Definition 2: Eine Menge B heißt **mächtiger** als A, wenn es eine injektive Abbildung $f \mid A \to B$ gibt, aber keine bijektive Abbildung, Schreibweise: $|A| < |B|$.

Satz: Es sei E eine nichtleere Menge. Dann ist die Potenzmenge $M = \mathcal{P}(E)$ mächtiger als E.

Beweis: 1) Die Abbildung $f \mid E \to M$ mit $f(x) = \{x\}$, die jedem $x \in E$ die einelementige Menge $\{x\} \in M$ zuordnet, ist offensichtlich injektiv.

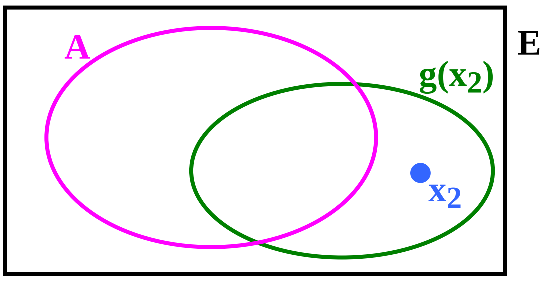
2) Wir zeigen, dass es keine bijektive Abbildung von E auf M gibt. Dieser Teil des Beweises erfolgt indirekt. Angenommen es gäbe doch eine bijektive Abbildung $g \mid E \to M$. Die Abbildung g ist dann auch surjektiv. Der Kernpunkt des Beweises ist die folgende Teilmenge A von E (also $A \in M$): $\boxed{A = \{x \in E \mid x \notin g(x)\}}$.

<u>Veranschaulichung von A:</u> Es werden jeweils in einem Diagramm ein Element x <u>und</u> die zugeordnete Teilmenge g(x) von E schematisch dargestellt.



<u>Diagramm 1:</u>

Das Element x_1 gehört nicht zur zugeordneten Menge $g(x_1)$: $x_1 \notin g(x_1)$.
Das bedeutet aber gemäß Definition der Menge A, dass $x_1 \in A$ gilt.



<u>Diagramm 2:</u>

Das Element x_2 gehört zur zugeordneten Menge $g(x_2)$: $x_2 \in g(x_2)$.
Das bedeutet aber gemäß Definition der Menge A, dass $x_2 \notin A$ gilt.

Da die Abbildung $g \mid E \to M$ als surjektiv angenommen wurde, müsste es ein $a \in E$ geben mit $g(a) = A$. Dies führt aber zum Widerspruch, wie folgende Fallunterscheidung zeigt.

1. Fall: $a \in A = g(a)$, dann ist a nach Definition von A kein Element von A, denn A soll genau die Elemente x von E enthalten, die nicht zur zugeordneten Menge g(x) gehören, damit entsteht der Widerspruch $a \notin A$.

2. Fall: $a \notin A = g(a)$, dann ist a nach Definition von A ein Element von A, denn A soll genau die Elemente x von E enthalten, die nicht zur zugeordneten Menge g(x) gehören, also auch a. Damit entsteht der Widerspruch $a \in A$.

Die Annahme der Surjektivität von g führt also zum Widerspruch. Es gibt also keine surjektive*) und damit auch keine bijektive Abbildung von E auf $M = \mathcal{P}(E)$.

*) Anschaulich: E enthält „zu wenig“ Elemente x, um jedes Element von M, also jede Teilmenge von E, als Bild g(x) zu erhalten.