完備化の構成の概略

定理 任意の距離空間 X の完備化が存在する.

Cachy列は収束しているように"見える"点列のことであった.

略証 X における Cauchy列全体の集合を C と書く.
C に同値関係 $\sim$ を次のように入れる:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

各 Cauchy列ごとにその収束先の点を作れば完備化を作れる.

$\tilde{X} = C/\sim$ とおく.

$\{x$ に収束する X 内の点列全体$\}$ $=$

$i: X \to \tilde{X}$ を $i(x) = [\{x\}_{n=1}^{\infty}] =$ (x だけからなる点列の同値類) と定める.

$\tilde{X}$ に距離関数を $\tilde{d}([\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ と定めることができる.

このとき, $(\tilde{X}, i)$ が X の完備化になることを示せる.

詳しい証明は長いので略す. □

例 $X = \mathbb{Q}$ (距離は通常の絶対値による距離) のとき, 上の方法で, $\pi \in \mathbb{R}$ は有理数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($x_1 = 3.1,\ x_2 = 3.14,\ x_3 = 3.141, \ldots$) の同値類として作られる. □

完備化の本質的な一意性 (完備化の普遍性 (universality))

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ \tilde{X} \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

定理 $(\tilde{X},\ i : X \hookrightarrow \tilde{X})$ は X の完備化であるとする。

このとき、任意の完備距離空間 Y と一様連続写像 $f : X \to Y$ の組 $(Y,\ f : X \to Y)$ に対して、ある一様連続写像 $\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$ で $\tilde{f} \circ i = f$ をみたすものが一意に存在する。(このような $(Y,\ f : X \to Y)$ の組全体の中で完備化が親玉であるということ。)

略証 以下、$i(X) = X$ と同一視しておく。そのとき、$\tilde{f} \circ i = f$ は $\tilde{f}$ が f の拡張になっていることを意味する。

X は $\tilde{X}$ で稠密なので、任意 $\tilde{x} \in \tilde{X}$ に対して、X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\tilde{x}$ に収束するものが存在する。

一様連続写像は Cauchy 列を保つ (一様連続でない場合の反例 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - \sqrt{2})^{-1}$)

$f : X \to Y$ は一様連続写像なので、$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は Y における Cauchy 列になる。

Y は完備なので $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は Y の中で収束する。

$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ は $\tilde{x}$ に収束する X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のとり方によらないことも示せる。

したがって、$\tilde{f}(\tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ で写像 $\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$ を定義できる。

これは $\tilde{f} \circ i = f$ をみたしている。この $\tilde{f}$ が存在を示したい $\tilde{f}$ である。

υ ヴイ　ν ニュー

これで、$\tilde{f}$ の存在を示せた。

一意性は、$\tilde{f}\circ i = f$ をみたす(一様)連続写像 $\tilde{f}: \tilde{X} \to Y$ は、前ページの $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{f}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(x_n) \underset{\tilde{f}\circ i = f}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

となり、上で作ったものと同じにならなければいけないことからわかる。 □

ニュー

系 $(\tilde{X}_\nu, i_\nu : X \to \tilde{X}_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$ は距離空間 X の完備化であるとする。

このとき2つの等長写像 $\tilde{i}_2 : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ と $\tilde{i}_1 : \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1$ で互いに相手の逆写像になっているものが一意的に存在する。

略証 上の定理を $f = i_1, i_2$ の場合に使えばよい。

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dll, "i_2"'] \arrow[d, "i_1"] \arrow[drr, "i_2"] & & \\
\tilde{X}_2 \arrow[rr, dashed, "\tilde{i}_1"'] & \arrow[ur, phantom, "G"] & \tilde{X}_1 \arrow[rr, dashed, "\tilde{i}_2"'] & \arrow[ul, phantom, "G"] & \tilde{X}_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "i_2"'] \arrow[dr, "i_2"] \arrow[d, phantom, "G"] & \\
\tilde{X}_2 \arrow[rr, dashed, "\mathrm{id}_{\tilde{X}_2}"'] & {} & \tilde{X}_2
\end{tikzcd}$$

の比較より、$\tilde{i}_2 \circ \tilde{i}_1 = \mathrm{id}_{\tilde{X}_2}$ □