

重要
定理 Hausdorff空間 X (特に距離空間 X) のコンパクト部分集合 K は X の閉集合になる.

証明 $X \setminus K$ が X の開集合になることを示せばよい.

$a \in X \setminus K$ を任意にとる.

(a を含む X の開集合 U で $U \cap K = \emptyset$ となるものを作ればよい.)

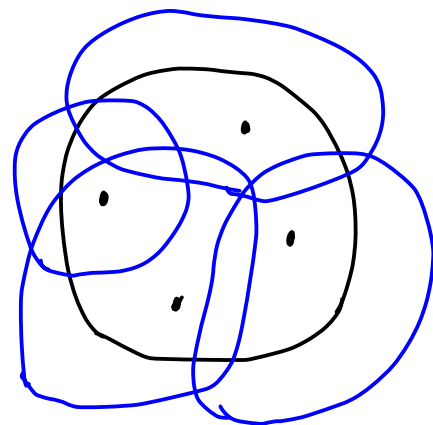
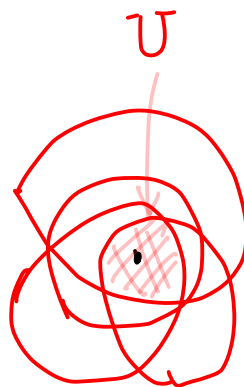
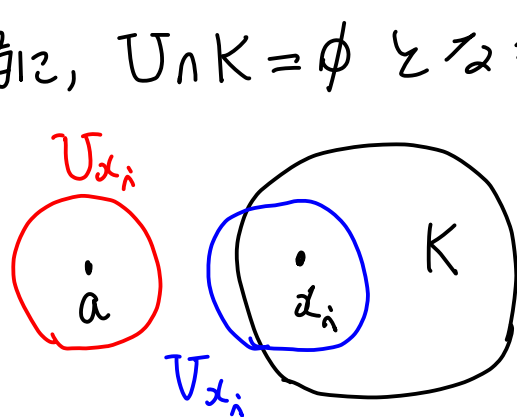
各 $x \in K$ に対して, $x \neq a$ なので, X の開集合 U_x と V_x で $a \in U_x$, $x \in V_x$ かつ $U_x \cap V_x = \emptyset$ をみたすものが存在する.

このとき, $K = \bigcup_{x \in K} (K \cap V_x)$ は K の相対位相に関する開被覆になっている

K はコンパクトなので, ある $x_1, \dots, x_n \in K$ が存在して, $K = \bigcup_{i=1}^n (K \cap V_{x_i}) \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$

$U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$ とおくと, U は X の開集合になり, $a \in U$ と $U \cap \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = \emptyset$.

特に, $U \cap K = \emptyset$ となる.



← 青全体が
 $\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$

q.e.d.