コンパクト距離空間から距離空間への連続写像の一様連続性　(証明は易しい)

定理　X, Yは距離空間であるとし，$f: X \to Y$は連続写像であるとする．
このとき，Xがコンパクトならば$f: X \to Y$は一様連続になる．

証明　任意に$\varepsilon > 0$をとる．
fの連続性より，各$a \in X$に対して，ある$\delta_a > 0$が存在して，

$x \in X$かつ$d(x, a) < \delta_a$ならば$d(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$．

このとき，$\{U_{\delta_a/2}(a)\}_{a \in X}$は$X$の開被覆(open covering)になる．
Xのコンパクト性より，有限個の$a_1, \dots, a_n \in X$が存在して，$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\delta_{a_i}/2}(a_i)$．
$\delta = \min\left\{ \frac{\delta_{a_i}}{2} \,\middle|\, i = 1, \dots, n \right\} > 0$とおく．$x, x' \in X$とし，$d(x, x') < \delta$と仮定する．
ある$i = 1, \dots, n$で，$x \in U_{\delta_{a_i}/2}(a_i)$すなわち$d(x, a_i) < \frac{\delta_{a_i}}{2}$をみたすものがある．
このとき$d(x, a_i) < \delta_{a_i}$でもあるので，$d(f(x), f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$となる．

次ページにつづく．

さらに，$d(x', a_i) \leqq d(x', x) + d(x, a_i) < \delta + \dfrac{\delta_{a_i}}{2} \leqq \dfrac{\delta_{a_i}}{2} + \dfrac{\delta_{a_i}}{2} = \delta_{a_i}$ となるので

$d(f(x'), f(a_i)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となることもいえる．

したがって，以上の状況（$d(x, x') < \delta$）のもとで，

$$d(f(x), f(x')) \leqq d(f(x), f(a_i)) + d(f(a_i), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで，f の一様連続性が示された． □