$\boxed{\text{集積点}}$ (accumulation point, limit point) 複素解析の一致の定理で使われる.

Xは位相空間であるとする.(例えばXは距離空間であるとする.)

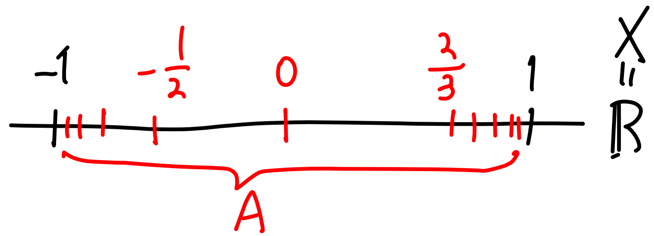
$\boxed{\text{定義}}$ 点$x \in X$が部分集合$A \subset X$の集積点であるとは,
xを含むXの任意の開集合がx以外のAの点を含むことであると定める. □

$\boxed{\text{注意}}$ Xが距離空間のとき, 点$x \in X$が$A \subset X$の集積点であることと,
xを含む任意のε近傍$U_\varepsilon(x)$ $(\varepsilon > 0)$がx以外の点を含むことは同値. □

$\boxed{\text{例}}$ $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Z}$のとき, Aの集積点は存在しない.

$\boxed{\text{例}}$ $X = \mathbb{R}$, $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$のとき, $0 \in \mathbb{R}$はAの唯一の集積点である.

$\boxed{\text{例}}$ $X = \mathbb{R}$, $A = \left\{ (-1)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n = 1, 2, \ldots \right\}$のとき,
Aの集積点全体の集合は$\{\pm 1\}$になる.



$\boxed{\text{例}}$ $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ならばAの集積点全体の集合は$\mathbb{R}$になる.

他にも自分で色々例を考えてみよ.

$\boxed{\text{定理}}$ 距離空間 X と部分集合 $A \subset X$ について以下は互いに同値になる:

(a) x は A の集積点である.

(b) 任意に $\varepsilon > 0$ に対して, $U_\varepsilon(x)$ は x 以外の A の点を含む.

(c) $x \in \overline{A \setminus \{x\}} = \overline{\{a \in A \mid a \neq x\}}$.

$\boxed{\text{証明}}$ (自明に近い) <u>(a) $\Rightarrow$ (b)</u> (a) を仮定し, 任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

$U_\varepsilon(x)$ は X の開集合になるので, 集積点の定義より, $U_\varepsilon(x)$ は x 以外の A の点を含む.

<u>(b) $\Rightarrow$ (c)</u> (b) を仮定する. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. (b) より $U_\varepsilon(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$.

これより, $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ であることがわかる (閉包の点の特徴付けからわかる).

<u>(c) $\Rightarrow$ (a)</u> (c) を仮定し, U は x を含む X の任意の開集合であるとする.

(c) (と閉包の点の特徴付け) より, $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$.

これは U が x 以外の A の点を含むことを意味する. ゆえに x は A の集積点.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$