$\boxed{\text{コンパクト距離空間の特徴付け}}$ (重要だが証明をすべて理解するのは大変)

定理 X は距離空間であるとする. このとき, 以下の3条件は互いに同値である;

(a) X はコンパクトである. (X の任意の開被覆は有限部分被覆を持つ.)

(b) X 内の任意の点列は収束する部分列を持つ.

(c) X は全有界かつ完備である. $\square$

応用例 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A について

① A は有界 $\Leftrightarrow$ A は全有界 ($\Leftarrow$ は自明, $\Rightarrow$ は $A \subset \mathbb{R}^n$ を使う.)

② $\mathbb{R}^n$ は完備なので, A は $\mathbb{R}^n$ の閉集合 $\Leftrightarrow$ A は完備.

ゆえに,

③ A はコンパクト $\Leftrightarrow$ A は有界閉集合. ($A \subset \mathbb{R}^n$ とい前提が重要). $\square$

準備

（相対位相について）

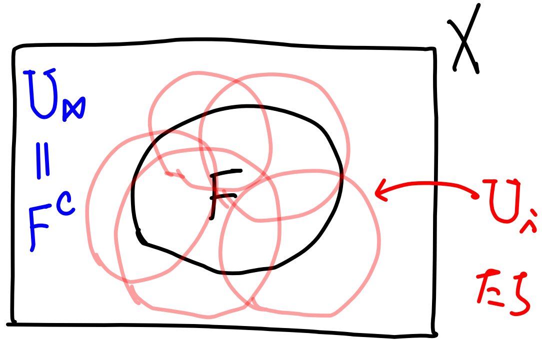
定理（易しい）コンパクト位相空間 X の閉集合 F もコンパクトである．

証明　V_i $(i \in I)$ は相対位相に関する F の開被覆であると仮定する．

相対位相の定義より，各 V_i は $V_i = U_i \cap F$（U_i は X の開集合）と書ける．

$U_\infty = F^c = X \setminus F$ は X の開集合である．

$X = U_\infty \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ という X の開被覆が得られる．



X はコンパクトなので，ある有限個の $i_1, \dots, i_n \in I$ が存在して，$X = U_\infty \cup \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$ となる．

このとき，$F = X \cap F = \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$ となる．

これで F がコンパクトであることを示せた．　$\square$

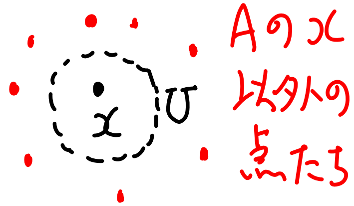
(a) コンパクト $\Rightarrow$ (b) 任意の点列は収束する部分列を持つ

補題 易 コンパクト位相空間 X の無限部分集合は集積点を持つ、

証明 $A \subset X$ かつ A は集積点を持たないと仮定し，A が有限集合になることを示せばよい．

任意の $x \in X \setminus A$ は Aの集積点でないので，

Xのある開集合Uで $x \in U$ かつ $U \cap A \neq \phi$ をみたすものが存在する．



xはAの集積点ではない．

ゆえに，A は Xの閉集合である．

前ページの結果より，A はコンパクトになる．

任意の $a \in A$ は A の X における集積点でないので，Xのある開集合U_aで

$a \in U_a$ かつ $U_a \cap A = \{a\}$ をみたすものが存在する．($U_a \cap A = \{a\}$ は Aの開集合)

このとき，$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ は Aの開被覆であり，A はコンパクトなので

有限個の $a_1, \dots, a_n \in A$ が存在して $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} = \{a_1, \dots, a_n\}$ となり，

A は有限集合であることがわかる． □

(a) ⇒ (b) の証明　(a) を仮定する（X はコンパクトと仮定する）.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 内の任意の点列であると仮定する.

$A = \{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ とおく. A がもしも有限集合ならば, ある $\alpha \in X$ が存在して, 無限個の $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ について, $x_{n_k} = \alpha$ $(k = 1, 2, \ldots)$ をみたすものが存在する. そのとき, 部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は α に収束する.

以下, A は無限集合だと仮定する. そのとき, 先の補題より, A の集積点 $\alpha \in X$ が存在する. $n_1 < n_2 < \cdots$ で $x_{n_k} \in U_{1/k}(\alpha)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ をみたすものを帰納的に作ろう.

α は A の集積点なので, $U_{1/1}(\alpha)$ はある x_{n_1} を含む.

$n_1 < \cdots < n_k$ で $x_{n_j} \in U_{1/j}(\alpha)$ $(j = 1, \ldots, k)$ をみたすものをすでに作れていると仮定する.

もしも, n_k よりも大きいすべての n について $x_n \notin U_{\frac{1}{k+1}}(\alpha)$ となってしまっているならば $x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}$ の中で α 以外のものと α の最短距離と $\frac{1}{k+1}$ の小さい方を ε とすると, $U_\varepsilon(\alpha)$ は A の α 以外の点を含まなくなる.（α 以外の $x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}$ のそれぞれと α の距離は ε 以上になり, $x_{n_k+1}, x_{n_k+2}, \ldots$ のそれぞれと α の距離も ε 以上になっている.）これは α が A の集積点であることに反する.

ゆえにある $n_{k+1} > n_k$ で $x_{n_{k+1}} \in U_{\frac{1}{k+1}}(\alpha)$ をみたすものが存在する.

これで $n_1 < n_2 < \cdots$ で $x_{n_k} \in U_{1/k}(\alpha)$ $(k=1, 2, \cdots)$ をみたすものを作れた.

このとき, 部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は α に収束している. $\square$