

一様収束が函数の連続性を保つこと

X と Y は距離空間であるとする.

定理 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X から Y への連続写像の列であるとし, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f: X \rightarrow Y$ に一様収束しているとする. このとき, f も連続写像になる.

証明 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ をとる.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束しているので, ある N が存在して,

$$n \geq N \text{ かつ } x \in X \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad \left(\frac{\varepsilon}{3} - \text{argument を使う}\right)$$

f_N は連続なので, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$x \in X \text{ かつ } d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ゆえに, $x \in X$ かつ $d(x, a) < \delta$ のとき, 三角不等式

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

したがって, f は連続である.

q.e.d.

証明の見つけ方 ① x を a に近づけたとき, $f(x)$ が $f(a)$ に近づくことを示したい,
小さくなってほしいのは $d(f(x), f(a))$ である.

② $d(f(x), f(a))$ を三角不等式を使って, 「小さくなりそうなものたちの和」による
分解 (で上からおさえること) を考える:

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a))$$

\uparrow \uparrow \uparrow

x によらずに	x を a に
N を大きくすると	近づけると
小さくてきる	小さくなる.
(一様収束より)	(f_N の連続性より)

Red arrows connect the first and third terms of the inequality to their respective explanations, and a blue arrow connects the second term to its explanation.

③ 以上を発見を ε - N や ε - δ で書き直せば「証明が」できあがる. \square