閉集合系 Xは位相空間であるとする．$F\subset X$とする．

定義 FがXの閉集合（closed subset）であるとは，$F^c=X\setminus F=\{x\in X \mid x\notin F\}$が$X$の開集合になることであると定める．すなわち，$X$の開集合の補集合を$X$の閉集合と呼ぶ．

$\mathcal{F}_X=\{F\subset X \mid F$は$X$の閉集合$\}$を$X$の閉集合系と呼ぶ． □

定理 (1) ϕ, XはXの閉集合である．

(2) Xの閉集合達（無限個でもよい）の共通部分も閉集合である．

(3) Xの有限個の閉集合の和集合も閉集合である． □

証明 (1) XとϕはXの開集合なので，$X^c=\phi$と$\phi^c=X$はXの閉集合になる．

(2) F_λ $(\lambda\in\Lambda)$たちがXの閉集合ならば，$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\right)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda^c$，$F_\lambda^c$は$X$の開集合なので$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\right)^c$は$X$の開集合になるので，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda$は$X$の閉集合になる．

(3) F_i $(i=1,\cdots,n)$たちがXの閉集合ならば$\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^n F_i^c$，$F_i^c$は$X$の開集合なので，$\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)^c$は$X$の開集合になるので，$\bigcup_{i=1}^n F_i$は$X$の閉集合になる． □

例 $\mathbb{R}$は$\mathbb{R}$の開集合かつ閉集合である。 □

例 $[0,1)=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\leqq x<1\}$は$\mathbb{R}$は開集合でも閉集合でもない。 □

例 $[0,1)$は$[0,1)$自身の開集合かつ閉集合である。 □

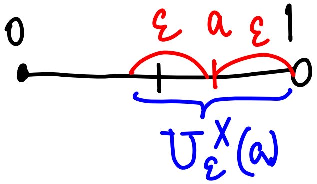
例 $[0,\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\leqq x\}$は$\mathbb{R}$の閉集合だが、開集合ではない。 □

例 $X=[0,1)\cup(1,2]=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\leqq x\leqq 2,\ x\neq 1\}$とおく。このとき、$[0,1)$, $(1,2]$はどちらもXの開集合かつ閉集合になる。

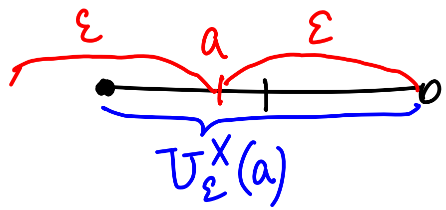
証明 $[0,1)$と$(1,2]$は互いに相手の補集合なので、$[0,1)$と$(1,2]$がXの開集合であることを示せば十分である。対称性より、$[0,1)$がXの開集合であることを示せば、同様にして、$(1,2]$がXの開集合であることもわかる。

$a\in[0,1)$を任意にとる。$\varepsilon=|1-a|=1-a>0$とおくと、$U_\varepsilon^X(a)\subset[0,1)$となる。

(i) $a\geqq\frac{1}{2}$のとき、



(ii) $a<\frac{1}{2}$のとき、



ゆえに、$[0,1)$はXの開集合である。 □

閉集合系による連続写像の特徴付け

位相空間のあいだの写像 $f : X \to Y$ について以下の2つの条件は同値である。

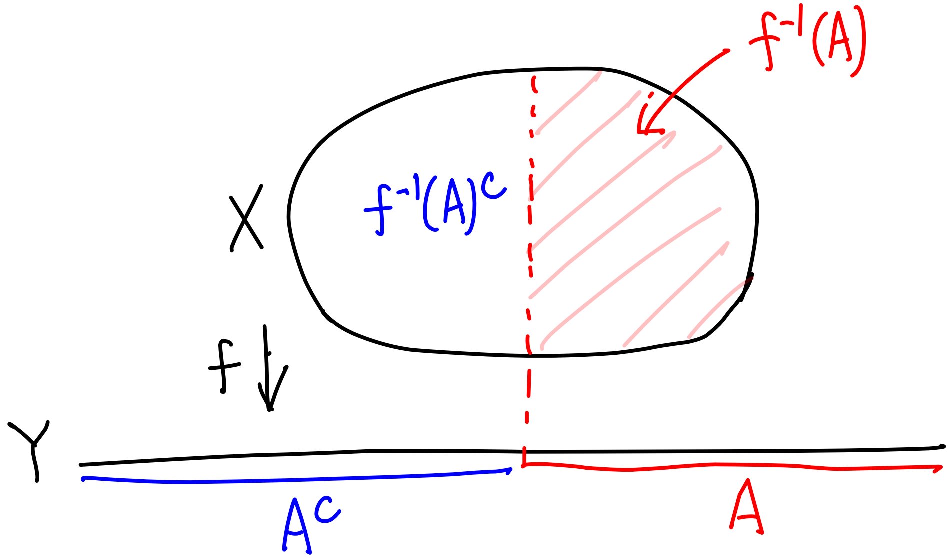
(1) f は連続である。（Y の任意の開集合 U に対して、$f^{-1}(U)$ は X の開集合になる。）

(2) Y の閉集合 F に対して、$f^{-1}(F)$ は X の閉集合になる。

証明の方針 閉集合は開集合の補集合であった。そして、

$$A \subset Y \Rightarrow f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c \quad \left(f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)\right)$$

なので、ほぼ自明である。 $\square$



← この図ではたしかに

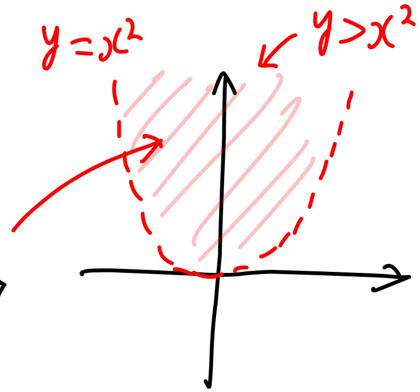
$$f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$$

となっている。

$\boxed{\text{例}}$ (開集合・閉集合の作り方)

位相空間の間の連続写像 $f: X \to Y$ と Y の開集合 U と Y の閉集合 F に対して, $f^{-1}(U)$ は X の開集合になり, $f^{-1}(F)$ は X の閉集合になる.

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\pi x)$, $F = \{0\}$ のとき, $f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(\pi x) = 0\} = \mathbb{Z}$ なので $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合になる.



(2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y - x^2$, $U = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}$ のとき,

$$f^{-1}(U) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の開集合になる.

$F = U^c = \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ とおくと,

$$f^{-1}(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \leq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の閉集合になる. $\square$

$\boxed{\text{問題}}$ もっとたくさん例を作れ. $\square$