$\mathbb{R}$上のベクトル空間のノルム

Vは$\mathbb{R}$上のベクトル空間であるとする.

例 $V = \mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$.

例 $V = C([a,b], \mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$は連続$\}$.

定義 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \geq 0\}$が<u>ノルム</u>であるとは以下の条件をみたすことであると定める: $u, v \in V$と$\alpha \in \mathbb{R}$について

(N1) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (三角不等式)

(N2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$

(N3) $\|v\| = 0 \iff v = 0$ ($\Leftarrow$は(N2)から出る) □

例 $p \geq 1$のとき, $\mathbb{R}^n$における<u>ℓ^pノルム</u>$\|\cdot\|_p$を

$$\|a\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \quad (a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n)$$

Minkowskiの不等式から三角不等式が得られる.

と定めることができる. さらに<u>ℓ^∞ノルム</u>$\|\cdot\|_\infty$を次のように定めることができる:

$$\|a\|_\infty = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}.$$

□

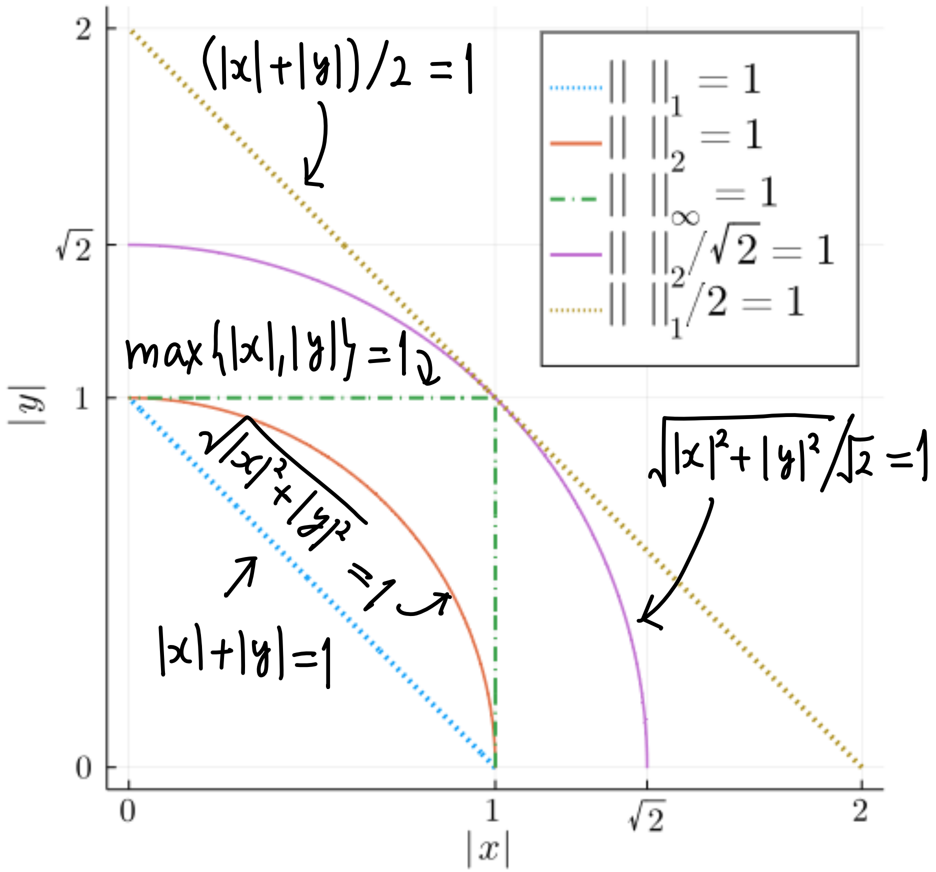
問題 $1 \leq p \leq q < \infty$のとき$\|a\|_p \geq \|a\|_q$でかつ$\lim_{p \to \infty} \|a\|_p = \|a\|_\infty$となることを示せ. □

答えはMetricSpaces.pdfにある

$\boxed{例}$ ($\mathbb{R}^2$の場合)　$(x,y)\in\mathbb{R}^2$とする.

$1\leqq p<\infty$について $\|(x,y)\|_p = (|x|^p+|y|^p)^{1/p}$,　$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$.

$\|(x,y)\|_p = 1$ となる $(|x|,|y|)\in\mathbb{R}^2_{\geqq 0}$ 全体のグラフは次のようになる.



左図より $a=(x,y)\in\mathbb{R}^2$について

$$\begin{cases} \|a\|_1 \geqq \|a\|_2 \geqq \|a\|_\infty \\ \frac{1}{2}\|a\|_1 \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}\|a\|_2 \leqq \|a\|_\infty \end{cases}$$

$\boxed{問題}$ $a\in\mathbb{R}^n$について以下を示せ.

$1\leqq p\leqq q<\infty$のとき,

(1) $\|a\|_p \geqq \|a\|_q \geqq \|a\|_\infty$,

(2) $n^{-1/p}\|a\|_p \leqq n^{-1/q}\|a\|_q \geqq \|a\|_\infty$. □

答えは MetricSpaces.pdf にある.

$\boxed{\text{定義}}$ V におけるノルム $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|'$ が同値であるとは,
ある正の定数 c_1, c_2 で $c_1\|a\| \leqq \|a\|' \leqq c_2\|a\|$ $(a \in V)$ をみたすものが
存在することだと定める. $\square$

$\boxed{\text{定理}}$ (易) $\mathbb{R}^n$ の ℓ^p ノルム $(1 \leqq p \leqq \infty)$ はすべて互いに同値である. $\square$

1つ前のページの問題を参照.

$\boxed{\text{定理}}$ (難) $\mathbb{R}^n$ におけるすべてのノルムは互いに同値である. $\square$

証明略

$\boxed{\text{注意}}$ V が無限次元ならば V は互いに同値でないノルムが無数に持つ. $\square$

$\boxed{\text{例}}$ $V = C([a,b], \mathbb{R})$ の **L^p ノルム** $\|\cdot\|_p$ を以下のように定められる;

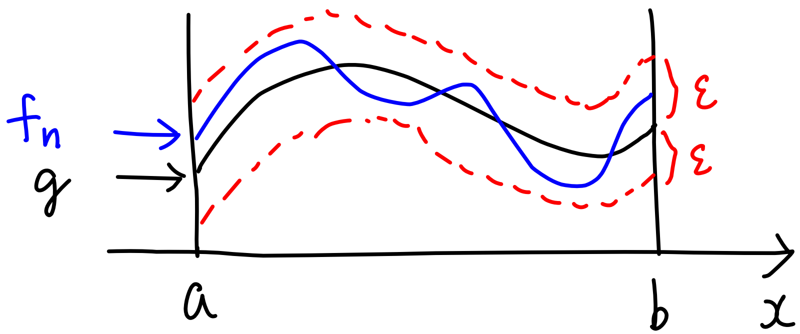
$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} & (1 \leqq p < \infty) \\ \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| & (p = \infty) \end{cases} \qquad (f \in V = C([a,b], \mathbb{R})).$$

$\|\cdot\|_\infty$ は **sup ノルム** とも呼ばれる.

これは $\max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ に等しい.

□

$\boxed{\text{注意}}$ $\|f_n - g\|_\infty < \varepsilon$ は以下の図のような状況である;



$$g(x) - \varepsilon < f_n(x) < g(x) + \varepsilon \quad (a \leqq x \leqq b)$$

となっている状況.

後で説明することになるが, $\|f_n - g\|_\infty \to 0$ は f_n が g に **一様収束** することと同値になる.

□