$\boxed{\text{相対位相}}$ X は開集合系 $\mathcal{U}_X$ が与えられた位相空間であるとする。このとき、

X の部分集合 A に対して、

$$\mathcal{U}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{U}_X\} = \{A\text{と}X\text{の開集合の共通部分}\}$$

とおくと、A は開集合系 $\mathcal{U}_A$ が与えられた位相空間とみなされる

このとき、$\mathcal{U}_A$ を部分集合 A の相対位相 (relative topology) と呼ぶ。

(位相空間の部分集合は通常相対位相によって位相空間とみなされる。)

$\boxed{\mathcal{U}_A\text{が開集合の公理をみたすことの証明}}$ (1) $\phi, X \in \mathcal{U}_X$, $A \cap \phi = \phi$, $A \cap X = A$ なので $\phi, A \in \mathcal{U}_A$. (2) $V_\lambda \in \mathcal{U}_A$ $(\lambda \in \Lambda)$ のとき、$V_\lambda = A \cap U_\lambda$, $U_\lambda \in \mathcal{U}_X$ と書けるので、$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A \cap U_\lambda) = A \cap \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}_X$ なので $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \in \mathcal{U}_A$.

(3) $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{U}_A$ のとき、$V_i = A \cap U_i$, $U_i \in \mathcal{U}_X$ と書けて、$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{U}_X$ なので

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_i = \bigcap_{i=1}^{n}(A \cap U_i) = A \cap \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{U}_A.$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{問題}}$ X は距離空間とし, $A \subset X$ であるとする. このとき, A を X の部分距離空間とみなしたときの開集合系 $\mathcal{U}_A$ と X を位相空間とみなしたときの相対位相 $\mathcal{U}'_A$ が等しいことを示せ.

$\boxed{\text{証明}}$ 記号の準備 $a \in A$, $\varepsilon > 0$ に対して, $U^A_\varepsilon(a) = \{x \in A \mid d(x, a) < \varepsilon\} = A \cap U^X_\varepsilon(a)$.

このとき,
$$\begin{cases} \mathcal{U}_X = \{U \subset X \mid \text{任意の } x \in U \text{ に対して, ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して, } U^X_\varepsilon(x) \subset U\}, \\ \mathcal{U}_A = \{V \subset A \mid \text{任意の } x \in V \text{ に対して, ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して, } U^A_\varepsilon(x) \subset V\}, \\ \mathcal{U}'_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{U}_X\}. \end{cases}$$

$V \in \mathcal{U}_A$ とする. 任意の $x \in V$ に対して, ある $\varepsilon_x > 0$ が存在して, $U^A_\varepsilon(x) \subset V$ となる.
ゆえに, $V = \bigcup_{x \in A} U^A_\varepsilon(x) = \bigcup_{x \in A} (A \cap U^X_\varepsilon(x)) = A \cap \bigcup_{x \in A} U^X_\varepsilon(x)$, $\bigcup_{x \in A} U^X_\varepsilon(x) \in \mathcal{U}_X$ なので,
$V \in \mathcal{U}'_A$. したがって, $\mathcal{U}_A \subset \mathcal{U}'_A$.

$V \in \mathcal{U}'_A$ とする. $V = A \cap U$, $U \in \mathcal{U}_X$. 任意の $x \in V$ に対して, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $U^X_\varepsilon(x) \subset U$ となるので, $U^A_\varepsilon(x) = A \cap U^X_\varepsilon(x) \subset A \cap U = V$ となり,
$V \in \mathcal{U}_A$ となる. したがって, $\mathcal{U}'_A \subset \mathcal{U}_A$.

これで $\mathcal{U}_A = \mathcal{U}'_A$ であることがわかった.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$