

完備化の構成の概略

定理 任意の距離空間 X の完備化が存在する。

略証 X における Cauchy 列全体の集合を C と書く。

C に同値関係 \sim を次のように入れる:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

$\tilde{X} = C/\sim$ とおく。

$\{x$ に収束する X 内の点列全体 $\}$
||

$\lambda: X \rightarrow \tilde{X}$ を $\lambda(x) = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}] = (x$ だけからなる点列の同値類) と定める。

\tilde{X} に距離関数を $\tilde{d}([\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ と定めることができる。

このとき, (\tilde{X}, \tilde{d}) が X の完備化になることを示せる。

詳しい証明は長いのので略す。

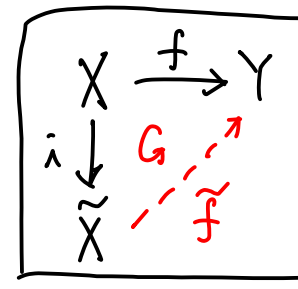
□

Cauchy 列は
収束しているように "見える" 点列
のことであった。

各 Cauchy 列ごとに
その収束先の点を作れば
完備化を作れる。

例 $X = \mathbb{Q}$ (距離は通常の絶対値による距離) のとき, 上の方法で, $\pi \in \mathbb{R}$ は
有理数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($x_1 = 3.1, x_2 = 3.14, x_3 = 3.141, \dots$) の同値類として作られる。□

完備化の本質的ユニバーサル性 (完備化の普遍性 (universality))



定理 $(\tilde{X}, \hat{i}: X \hookrightarrow \tilde{X})$ は X の完備化であるとする。

このとき、任意の完備距離空間 Y と一様連続写像 $f: X \rightarrow Y$ の組 $(Y, f: X \rightarrow Y)$ に対して、ある一様連続写像 $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y$ で $\tilde{f} \circ \hat{i} = f$ をみたすものが一意に存在する。
(このような $(Y, f: X \rightarrow Y)$ の組全体の中で完備化が親玉であるということ。)

略証 以下、 $\hat{i}(X) = X$ と同一視しておく。
 $\tilde{f} \circ \hat{i} = f$ は \tilde{f} が f の拡張になっていることを意味する。
 (そのとき、)

X は \tilde{X} で稠密なので、任意 $\tilde{x} \in \tilde{X}$ に対して、 X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で \tilde{x} に収束するものが存在する。
 一様連続写像は Cauchy 列を保つ (一様連続で $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ なら $f(x) = (x - \sqrt{2})^{-1}$ の場合の反例)

$f: X \rightarrow Y$ は一様連続写像なので、 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は Y における Cauchy 列になる。

Y は完備なので $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は Y の中で収束する。

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ は \tilde{x} に収束する X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のとり方によらないことも示せる。

したがって、 $\tilde{f}(\tilde{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ で写像 $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y$ を定義できる。

これは $\tilde{f} \circ \hat{i} = f$ をみたしている。この \tilde{f} が存在を要した \tilde{f} である。

これで、 \tilde{f} の存在を示せた

一意性は、 $\tilde{f} \circ \tilde{\lambda} = f$ をみたす (一様) 連続写像 $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y$ は、前ページの $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、

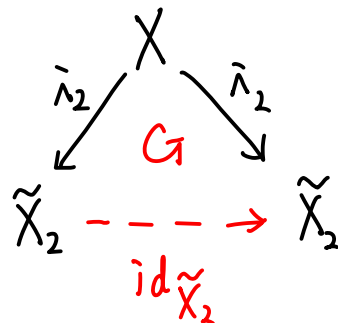
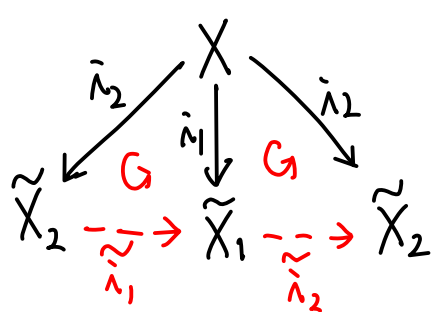
$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{f}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(x_n) \stackrel{\tilde{f} \circ \tilde{\lambda} = f}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

となり、上で作ったものと同じにならなければいけないことからわかる。 □

系 $(\tilde{X}_\nu, \tilde{\lambda}_\nu: X \rightarrow \tilde{X}_\nu)$ ($\nu=1,2$) は距離空間 X の完備化であるとする。

このとき 2つの等長写像 $\tilde{\lambda}_2: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ と $\tilde{\lambda}_1: \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ で互いに相手の逆写像になっているものが一意的存在する。

略証 上の定理を $f = \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ の場合に使う。よい。



の比較より, $\tilde{\lambda}_2 \circ \tilde{\lambda}_1 = \text{id}_{\tilde{X}_2}$

□