

コンパクト距離空間から距離空間への連続写像の一致連続性

(証明は易しい)

定理 X, Y は距離空間であるとし, $f: X \rightarrow Y$ は連続写像であるとする.

このとき, X がコンパクトならば $f: X \rightarrow Y$ は一致連続になる.

証明 任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

f の連続性より, 各 $a \in X$ に対して, ある $\delta_a > 0$ が存在して,

$$x \in X \text{ かつ } d(x, a) < \delta_a \text{ ならば } d(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

このとき, $\{U_{\delta_{a_i}/2}(a_i)\}_{a_i \in X}$ は X の開被覆 (open covering) になる.

X のコンパクト性より, 有限個の $a_1, \dots, a_n \in X$ が存在して, $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\delta_{a_i}/2}(a_i)$.

$\delta = \min \left\{ \frac{\delta_{a_i}}{2} \mid i=1, \dots, n \right\} > 0$ とおき, $x, x' \in X$ とし, $d(x, x') < \delta$ と仮定する.

ある $i=1, \dots, n$ で, $x \in U_{\delta_{a_i}/2}(a_i)$ となれば $d(x, a_i) < \frac{\delta_{a_i}}{2}$ を満たすものがある.

このとき, $d(x, a_i) < \delta_{a_i}$ でもあるので, $d(f(x), f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる.

次ページにつづく.

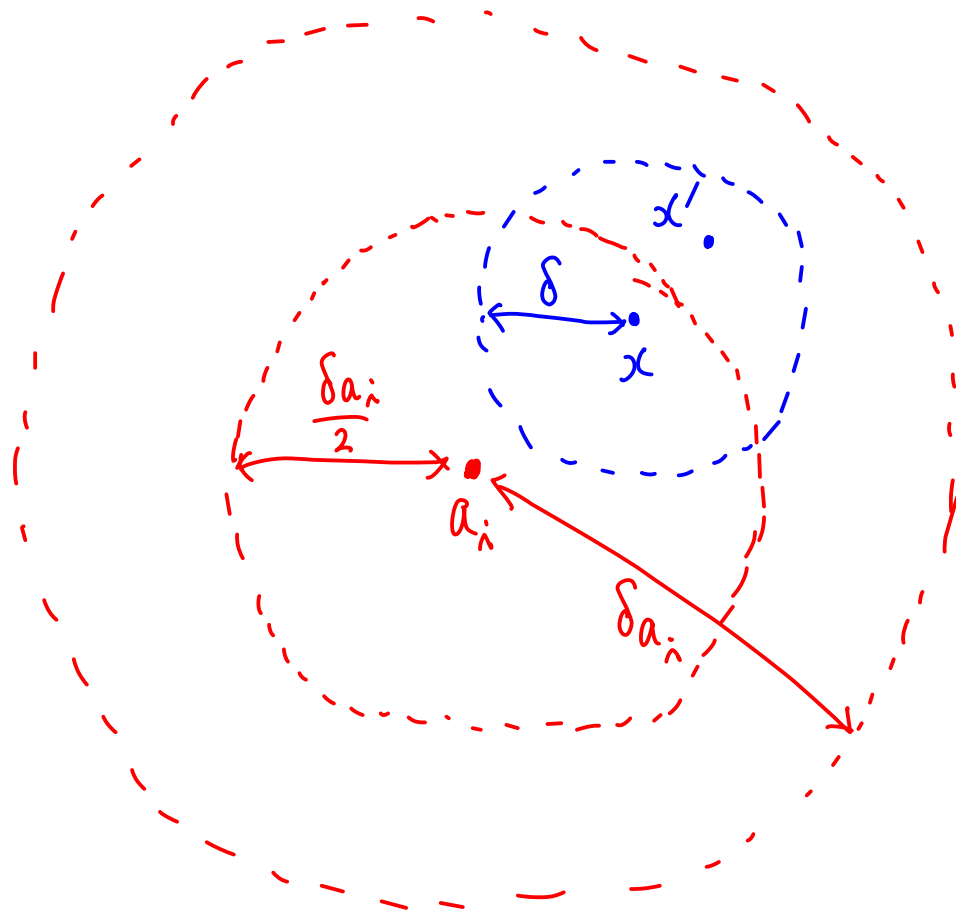
さらに, $d(x', a_i) \leq d(x', x) + d(x, a_i) < \delta + \frac{\delta a_i}{2} \leq \frac{\delta a_i}{2} + \frac{\delta a_i}{2} = \delta a_i$ となるので,
 $d(f(x'), f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ となることもいえる.

したがって, 以上の状況 ($d(x, x') < \delta$) のもとで,

$$d(f(x), f(x')) \leq d(f(x), f(a_i)) + d(f(a_i), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

これで, f の一様連続性が示された.

□



$$\delta \leq \frac{\delta a_i}{2}$$