完備性と絶対収束の概念は表裏一体

定理 $(V, \|\cdot\|)$ は $\mathbb{R}$ 上のノルム空間であるとする。以下の2つの条件は互いに同値である。

(a) $(V, \|\cdot\|)$ は Banach空間である(完備である)。

(b) V 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ が有限の値に収束するならば
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ は $\|\cdot\|$ について収束する。

注 (b)の状況のもとで級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は<u>絶対収束</u>するという。

例 収束するが絶対収束していない級数の例。

(1) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$ のときの $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2.$

(2) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ $(n=1, 2, \cdots)$ のときの $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$ $\square$

$\boxed{\text{定理の証明}}$ <u>(a) ⇒ (b)</u> $(V, \|\cdot\|)$ は完備であると仮定する。

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は V 内の点列で $\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|a_k\|$ は有限の値に収束していると仮定する。

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。V 内の点列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示したい。

$(V, \|\cdot\|)$ は完備だと仮定したので、$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることを示せば十分。

$S_n = \sum_{k=1}^{n}\|a_k\|$ とおくと、$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある実数に収束しているので、ゆえに Cauchy 列にもなっている。ゆえに、ある N が存在して、$N \leqq m \leqq n$ ならば $S_n - S_m < \varepsilon$ となり、

$$\|s_n - s_m\| = \|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n\| \leqq \|a_{m+1}\| + \|a_{m+2}\| + \cdots + \|a_n\| = S_n - S_m < \varepsilon.$$

これで、$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることがわかった。

以上で (a) ⇒ (b) が示された。

(b) ⇒ (a)　(b)を仮定する．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $(V, \|\cdot\|)$ のCauchy列であるとする．

m, nを十分大きくすると $\|a_m - a_n\|$ を小さくできる．

このとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $(1 \leqq n_1 < n_2 < \cdots)$ をうまくとって，

$$\|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

となるようにできる．

証明のポイント

$b_1 = a_{n_1}$, $b_i = a_{n_i} - a_{n_{i-1}}$ $(i = 2, 3, \ldots)$ とおく．このとき，$a_{n_k} = \sum_{i=1}^{k} b_i$,

$$\sum_{i=1}^{k} \|b_i\| = \|a_{n_1}\| + \sum_{i=2}^{k} \|a_{n_i} - a_{n_{i-1}}\| \leqq \|a_{n_1}\| + \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{2^{i-1}} < \|a_{n_1}\| + 1.$$

ゆえに，$\sum_{i=1}^{\infty} \|b_i\|$ は $\|a_{n_1}\| + 1$ 以下の実数に収束する．

したがって，部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は(b)の仮定よりある $\alpha \in V$ に収束する．

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も α に収束することを示そう。

$\varepsilon > 0$ を任意にとる。

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy列だと仮定していたので、ある N_1 が存在して、

$$m, n \geqq N_1 \text{ ならば } \|a_n - a_m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は $\alpha \in V$ に収束していたので、ある N_2 が存在して、

$$k \geqq N_2 \text{ ならば } \|a_{n_k} - \alpha\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

k を $k \geqq N_2$ かつ $n_k \geqq N_1$ をみたすようにとると、$n \geqq N_1$ のとき、

$$\|a_n - \alpha\| \leqq \|a_n - a_{n_k}\| + \|a_{n_k} - \alpha\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

これで、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も α に収束していることがわかった。

$\boxed{\text{q.e.d.}}$