$\boxed{\text{sup ノルムによる一様収束の特徴付け}}$ Xを集合とし，Vを$\mathbb{R}$上のノルム空間とする．

関数 $f : X \to V$ の sup ノルム $\|f\|_\infty$ を次のように定める：

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\| \quad (\text{有限の上限が存在しないとき } \infty \text{ と約束})．$$

値が∞になる場合もあることを除けば，$\|\cdot\|_\infty$ はノルムの性質をみたす：

(1) $\|f+g\|_\infty \leqq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$　(2) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$　(3) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$．

ここで，$f, g : X \to V$，$\alpha \in \mathbb{R}$．

定理 XからVへの関数列$\{f_n\}_{n=1}^\infty$と$f : X \to V$について以下の2つは互いに同値：

(1) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$はfに一様収束する．　(2) $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \ (n \to \infty)$．

証明 (1) $\Rightarrow$ (2)　(1)を仮定し，任意に$\varepsilon > 0$をとる．(1)より，あるNが存在して，

$n \geqq N$ かつ $x \in X$ ならば $\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる．ゆえに，$n \geqq N$ならば

$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ となる．これで，$\|f_n - f\|_\infty \to 0$

が示された．

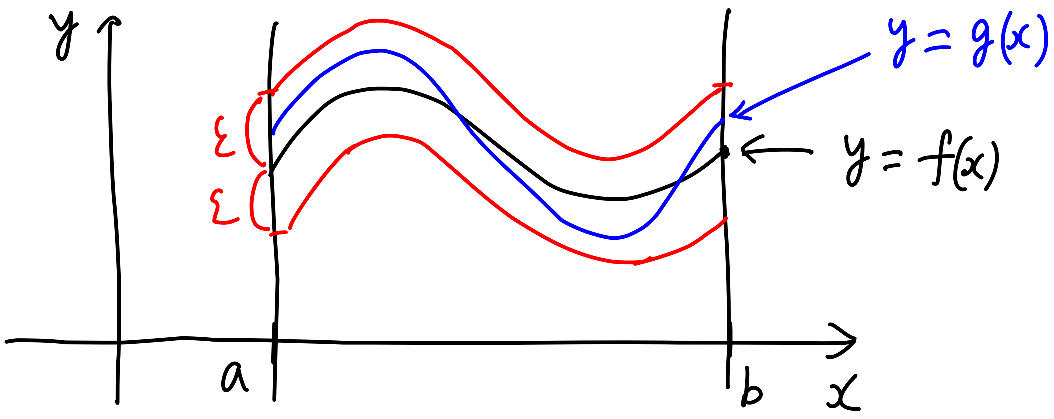
つづく．

(2) ⇒ (1)　(2) を仮定し，任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$\|f_n - f\|_\infty \to 0$ より，
ある N が存在して，$n \geqq N$ ならば $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ となる．
ゆえに，$n \geqq N$ かつ $x \in X$ のとき，

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leqq \sup_{y \in X} \|f_n(y) - f(y)\| = \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

これで，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束することが示された．　□

$\boxed{\text{図}}$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする．$X = [a, b]$，$V = \mathbb{R}$，$\|\cdot\| = |\cdot|$ としておく．
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ について，$\|g - f\|_\infty = \sup_{a \leqq x \leqq b} |g(x) - f(x)| < \varepsilon$ となる $g : [a, b] \to \mathbb{R}$
は次のように図示される：



□