$\boxed{\text{まとめ}}$ (距離空間の間の連続写像)

X, Y は距離空間であるとする. 写像 $f: X \to Y$ について以下は互いに同値;

(a) f は連続.

(b) (定義) 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して,
任意の $x \in X$ について, $d(x, a) < \delta$ ならば $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる.

(c) X 内の収束する点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, Y 内の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$ となる.

(d) 任意 $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$.

(e) Y の任意の開集合 V に対して, $f^{-1}(V)$ も X の開集合になる. ← 非自明!

(f) 〃 閉 〃 〃 閉 〃.

(g) 任意の X の部分集合 A に対して, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ となる.

この2つの同値性はそうむずかしくない!

注 (g) は,「A にくっついている点 x を f でうつすと $\overline{f(A)}$ にくっついている」という意味.
連続写像とはくっついている点を切りはなさない写像のことである.