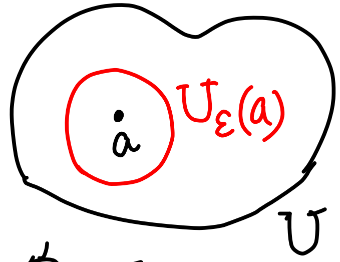
開集合と位相空間

(X, d_X), (Y, d_Y) は距離空間であるとする.

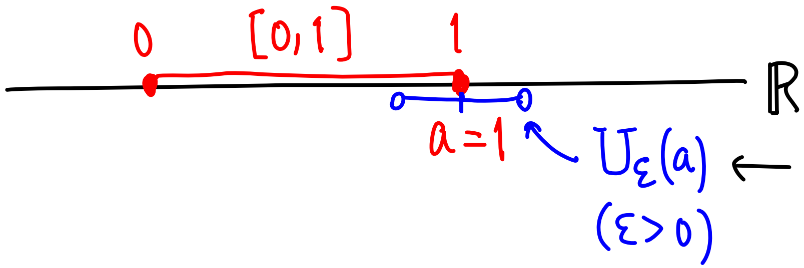


定義 X の部分集合 U が X の開集合 (open subset) であるとは,
任意の $a \in U$ に対して, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $U_\varepsilon(a) \subset U$ となることだと定める.
X の開集合全体の集合 $\mathcal{U}_X = \{U \mid U \text{ は } X \text{ の開集合}\}$ を X の開集合系と呼んだり,
X の位相 (topology) と呼んだりする. □

例 X と ϕ は X の開集合になる.
たとえば, $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqq x \leqq 1\} = [0, 1]$ を差の絶対値を距離とすることによって距離空間とみなすとき, $X = [0,1]$ は $X = [0,1]$ 自身の開集合になる. □

閉区間だが開集合になる.

例 $X = \mathbb{R}$ のとき, $[0,1]$ は X の開集合ではない(下図).



← 常に $[0,1]$ をはみ出す. □

注意 "入れ物"が何であるかによって開集合であるか否かは変化する. □

$\boxed{\text{例}}$ 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$U_\varepsilon(a)$ は X の開集合である．

$\boxed{\text{証明}}$ $b \in U_\varepsilon(a)$ を任意にとる．

このとき，$d_X(b,a) < \varepsilon$ なので $\delta = \varepsilon - d_X(b,a)$ とおくと，$\delta > 0$ となり，$x \in U_\delta(b)$ ならば

$$d_X(x,a) \underbrace{\leqq}_{\text{三角不等式}} d_X(x,b) + d_X(b,a) \underbrace{<}_{x \in U_\delta(b).} \delta + d_X(b,a) = \varepsilon$$ なので $x \in U_\varepsilon(a)$．

これで $U_\delta(b) \subset U_\varepsilon(a)$ が示され，$U_\varepsilon(a)$ が X の開集合であることがわかった． $\square$

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{R}^2$ を Euclid 距離で距離空間とみなすとき，

$$U = U_1((0,0)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の開集合である．

open disk は $\mathbb{R}^2$ の開集合

$\square$

$\boxed{\text{定理}}$ 距離空間 X とその開集合系 $\mathcal{U}_X$ について,

(1) $\phi \in \mathcal{U}_X$ かつ $X \in \mathcal{U}_X$.

(2) $U_\lambda \in \mathcal{U}_X$ $(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}_X$.

(3) $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{U}_X$ ならば $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{U}_X$. (証明は後述) □

$\boxed{\text{定義}}$ 集合 X にその部分集合の集合 $\mathcal{U}_X$ で上の定理の条件 (1), (2), (3) をみたすものが与えられているとき, X を位相空間と呼び, $\mathcal{U}_X$ をその開集合系と呼び, $\mathcal{U}_X$ の元を X の開集合と呼び, 上の条件 (1), (2), (3) を開集合系の公理と呼ぶ. □

トポロジーと呼ぶこともある

位相空間 = topological space

位相空間 X の開集合系 $\mathcal{U}_X$ は X の点のつながり方を記述していると考えられる.
(トポロジー)

$\boxed{\text{注意}}$ 距離空間は常に自然に位相空間とみなせるが逆は成立しない.
たとえば $X = \{1, 2\}$, $\mathcal{U}_X = \{\phi, X\}$ で定まる位相空間は距離空間からは決して得られない. □

$\boxed{\text{前ページの定理の証明}}$ (1) $a \in \phi$ となることはないので ϕ は X の開集合である.

任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $U_\varepsilon(a) \subset X$ なので X は X の開集合である.

(2) すべての $\lambda \in \Lambda$ について U_λ は X の開集合であると仮定し, $a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を任意にとる.

ある $\mu \in \Lambda$ が存在して, $a \in U_\mu$ となる.

U_μ は X の開集合なので, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $U_\varepsilon(a) \subset U_\mu \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となる.

ゆえに $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ も X の開集合である.

(3) 有限個の $U_1, U_2, \cdots, U_n$ は X の開集合であるとし, $a \in U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ を任意にとる.

各 U_i は X の開集合なので, ある $\varepsilon_i > 0$ が存在して, $U_{\varepsilon_i}(a) \subset U_i$ となる

$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\} > 0$ とおくと, $U_\varepsilon(a) \subset U_{\varepsilon_i}(a)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ となるので,

$U_\varepsilon(a) \subset U_{\varepsilon_1}(a) \cap U_{\varepsilon_2}(a) \cap \cdots \cap U_{\varepsilon_n}(a) \subset U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$.

ゆえに, $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ も X の開集合である. $\square$

$\boxed{\text{例}}$ $k = 1, 2, \cdots$ に対して, $X = \mathbb{R}$ の開集合 U_k を $U_k = U_{1/k}(0) = \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ と定めると,

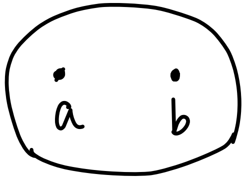
$U_1 \cap \cdots \cap U_n = U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ は $X = \mathbb{R}$ の開集合だが,

$\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \{0\}$ は $X = \mathbb{R}$ の開集合ではない. $\square$

$\boxed{\text{おまけ}}$ 2点集合 $X=\{a,b\}$ に入るすべての位相のリスト：

= topology
= 開集合系

$\mathcal{U}_1=\{\phi, X\}$, $\mathcal{U}_2=\{\phi, X, \{a\}\}$, $\mathcal{U}_3=\{\phi, X, \{b\}\}$, $\mathcal{U}_4=\{\phi, X, \{a\}, \{b\}\}$,

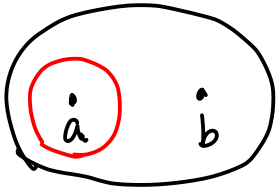


aとbを分離する
開集合がない

aとbどちらから
見ても相手は自分
にくっついているように
見える。

密着位相
concrete
topology

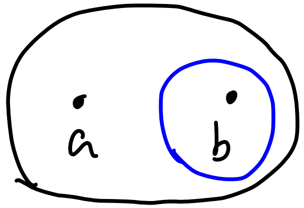
a⌢b くっついている



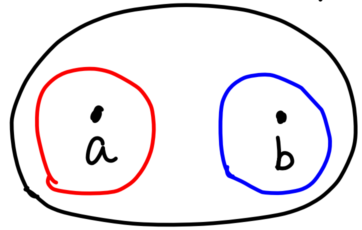
aから見ると
自分だけを含む
開集合が存在するので
bは自分にくっついていないように見える。

しかし、bから見ると、
自分を含む開集合は常にaも含むので、
aは自分にくっついているように見える。

"片思い"位相



左と同様



aもbも相手は
自分にくっついていない
ように見えている。

離散位相
discrete
topology