完備距離空間の例

定義 ノルムが与えられた$\mathbb{R}$上のベクトル空間を$\mathbb{R}$上の<u>ノルム空間</u>という。
ノルム$\|\cdot\|$によって、距離函数を$d(x,y)=\|x-y\|$と定めることによって、
ノルム空間は自然に距離空間とみなされる。
完備なノルム空間を<u>Banach空間</u>(Banach（バナッハ） space)と呼ぶ。 $\square$

例 $(\mathbb{R},|\cdot|)$は完備であり、1次元Banach空間とみなされる。(実数の連続性) $\square$

例 $\mathbb{R}^n$に任意のノルムを入れたものはBanach空間になる。
$\mathbb{R}^n$のノルムはすべて互いに同値なので、1つのノルムについてBanach空間になることを示せば十分である。ノルム

ℓ^∞-norm

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\},\quad x=[x_i]_{i=1}^n\in\mathbb{R}^n$$

に関する$\mathbb{R}^n$の完備性は$\mathbb{R}$の完備性に容易に帰着する。 $\square$

例 $\mathbb{R}^n$の閉集合は完備距離空間とみなされる。$\square$ (後でコンパクト距離空間も完備であることを説明する。)

$\boxed{\text{定理}}$ $C([a,b],\mathbb{R})=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\mid f\text{は連続}\}$ は自然に $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなされる。これに sup ノルム

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)| \qquad (f\in C([a,b],\mathbb{R}))$$

を入れたものは Banach空間になる。

注 $[a,b]$ はコンパクトで、$f\in C([a,b],\mathbb{R})$ について、$x\mapsto|f(x)|$ という写像は $[a,b]$ 上の実数値連続函数になるので、最大値を持つ。ゆえに、

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]}|f(x)| < \infty \qquad (f\in C([a,b],\mathbb{R})).$$

これより、$\|\cdot\|_\infty$ がノルムとして well-defined であることがわかる。

19世紀初頭の数学者(1人)
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の高校教科書の証明

$\boxed{\text{証明}}$ (完備性の証明)

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $C([a,b],\mathbb{R})$ における $\|\cdot\|_\infty$ に関する Cauchy列であると仮定する。

① 各$x\in[a,b]$について，実数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$がCauchy列になることを示そう．

任意に$\varepsilon>0$をとる．

関数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$は$\|\cdot\|_\infty$してCauchy列なので，

ある番号Nが存在して，$m,n\geqq N$ならば$\|f_m-f_n\|_\infty=\sup_{y\in[a,b]}|f_m(y)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$，

$$|f_m(x)-f_n(x)|\leqq\sup_{y\in[a,b]}|f_m(y)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon \qquad (x\in[a,b]).$$

特に，各$x\in[a,b]$ごとに実数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$はCauchy列になる．

② $\mathbb{R}$の完備性より，各$x\in[a,b]$ごとに$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$は収束するので，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x) \qquad (x\in[a,b])$$

によって，関数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$を定義できる．

③ $m,n\geqq N$のとき，$|f_m(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ $(x\in[a,b])$なので，$n\to\infty$の極限によって，

$$m\geqq N \text{ ならば } |f_m(x)-f(x)|\leqq\frac{\varepsilon}{3} \quad (x\in[a,b])$$

を得る．

つづく．

④ ゆえに，

注 fの連続性はまだ示されていない。

$m \geqq N$ ならば $\displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f_m(x) - f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$.

⑤ $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ すなわち f が連続であることを示そう。 $x \in [a,b]$ とする。

f_N は連続なので，ある $\delta > 0$ が存在して，

$x' \in [a,b]$ かつ $|x'-x| < \delta$ ならば，$|f_N(x') - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ となるので，

$$|f(x') - f(x)| \leqq \underbrace{|f(x') - f_N(x')|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(x') - f_N(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(x) - f(x)|}_{\leqq\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

これで，fの連続性を示せた。 $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ である。

⑥ したがって，$m \geqq N$ ならば

$$\|f_m - f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f_m(x) - f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

これで，$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ が $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ に $\|\cdot\|_\infty$ について収束することがわかった。

ゆえに，$C([a,b], \mathbb{R})$ は $\|\cdot\|_\infty$ について Banach 空間である。

$\boxed{\text{q.e.d.}}$