閉包と開核

X は位相空間(もしくは距離空間)であるとし, $A \subset X$ と仮定する.

定義 (閉包) A を含む閉集合で最小のもの(常に存在する)を A の<u>閉包</u> (<u>closure</u>) と呼び, $\overline{A}$ と表わす:

$$\overline{A} = \bigcap_{F\text{ は }X\text{ の閉集合},\ A \subset F} F = \left(\begin{array}{l}A\text{ を含む }X\text{ の閉集合全体の}\\ \text{共通部分}\end{array}\right). \quad \square$$

定義 (開核) A に含まれる開集合で最大のもの(常に存在)を A の<u>開核</u> ($\frac{\text{open}}{\text{kernel}}$) と呼び, A° と表わす:

$$A^\circ = \bigcup_{U\text{ は }X\text{ の開集合},\ A \supset U} U = \left(\begin{array}{l}A\text{ に含まれる }X\text{ の開集合全体の}\\ \text{和集合}\end{array}\right). \quad \square$$

命題 (定義から自明)

(1) A は X の閉集合 $\iff$ $\overline{A} = A$.

(2) A は X の開集合 $\iff$ $A^\circ = A$. $\square$

記号 A の X における補集合を A^c と書く. complement

$$A^c = X \setminus A \quad \square$$

$\boxed{\text{命題}}$ Aの閉包はAの補集合の開核の補集合に等しい: $\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$.

$\boxed{\text{証明}}$ $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$ を証明すればよい.

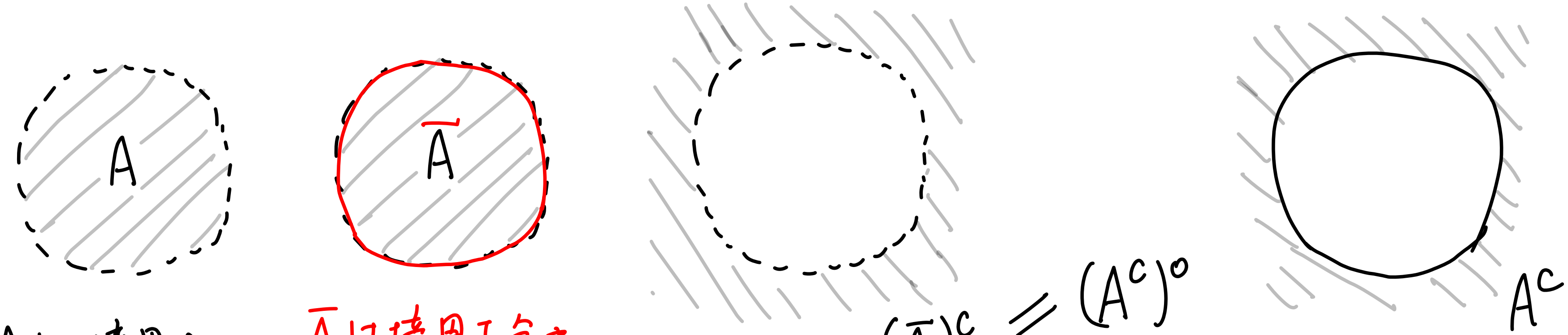
$$(\overline{A})^c = \Bigg(\bigcap_{F\text{はXの閉集合},\ A\subset F} F\Bigg)^c = \bigcup_{\underbrace{F\text{はXの閉集合}}_{\Leftrightarrow\ F^c\text{はXの開集合}},\ \underbrace{A\subset F}_{\Leftrightarrow\ A^c\supset F^c}} F^c$$

この F^c は A^c に含まれる開集合全体を動く.

$$= \bigcup_{U\text{はXの開集合},\ A^c\supset U} U = (A^c)^\circ.$$

□

$\boxed{\text{例}}$ $X=\mathbb{R}^2$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ のとき,



Aは境界を含まない

$\overline{A}$は境界を含む

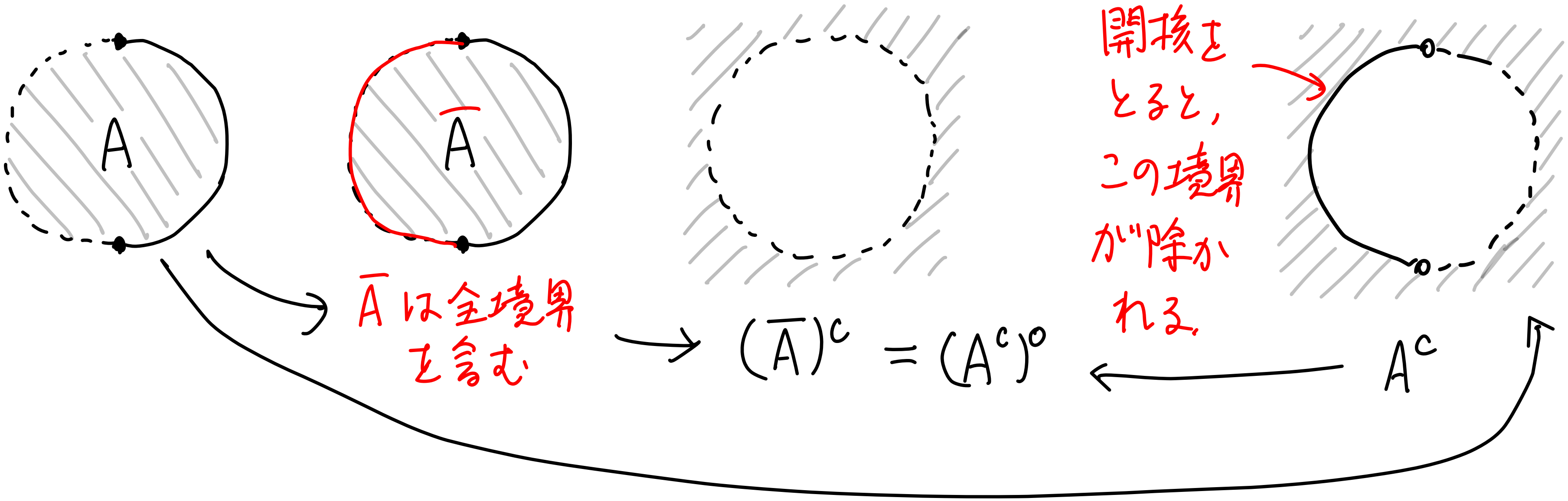
$(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$

$(\overline{A})^c$は境界を含まない

A^cは境界を含む

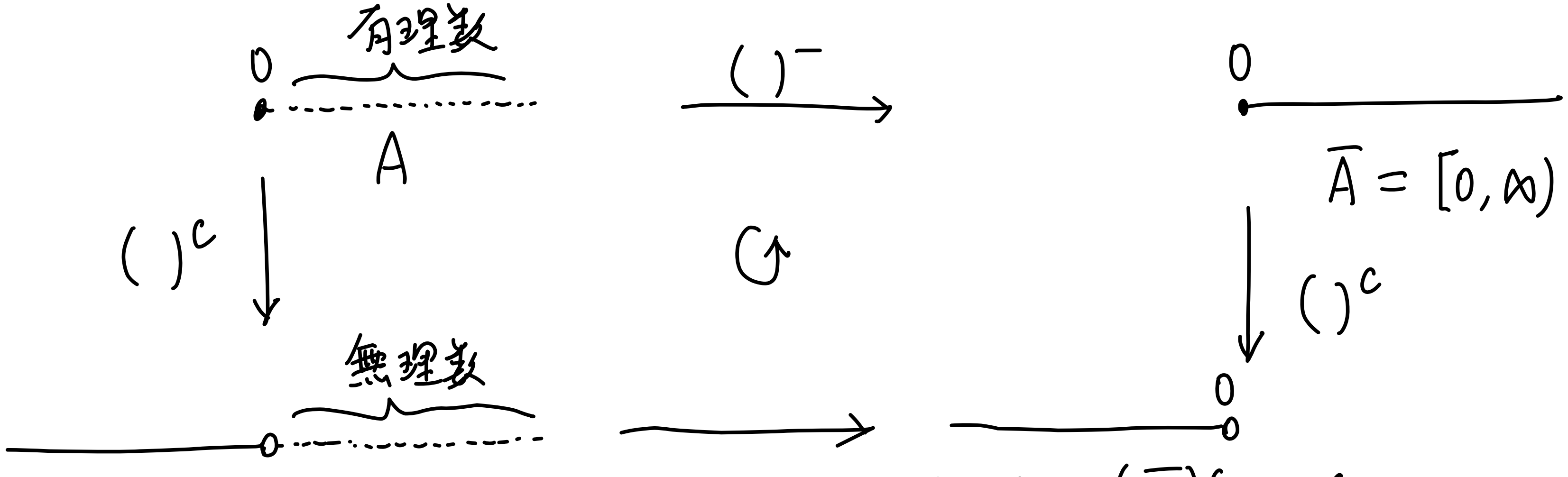
□

$\boxed{\text{例}}$ $X=\mathbb{R}^2$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqq 0,\ x^2+y^2=1\}$.



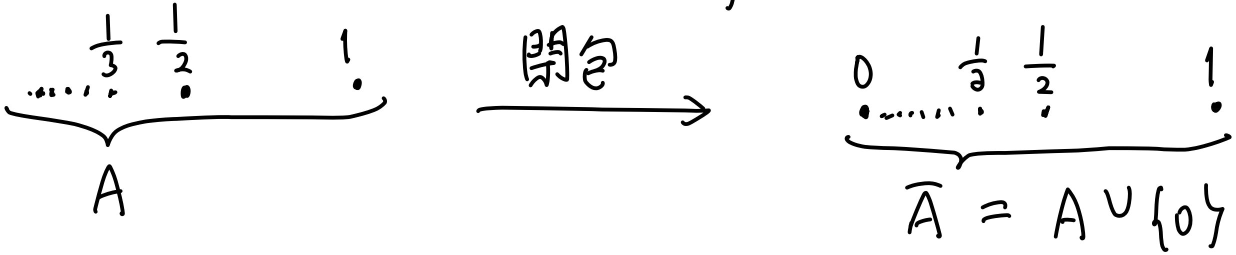
□

$\boxed{\text{例}}$ $X=\mathbb{R}$, $A=\mathbb{Q}\cap[0,\infty)$.



□

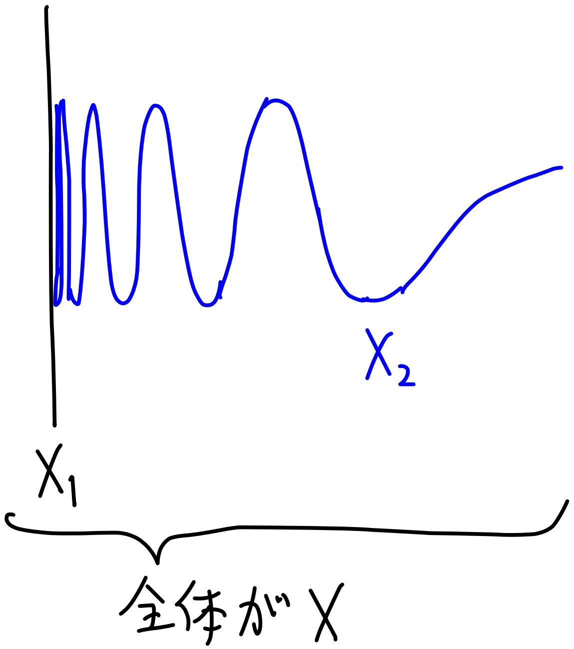
例 $X=\mathbb{R}$, $A=\left\{\frac{1}{n} \middle| n=1,2,3,\dots\right\}$ のとき,



□

例 $X=X_1\cup X_2$, $X_1=(\mathbb{R}^2\text{の}y\text{軸})=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$, $X_2=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right) \middle| x>0\right\}$.

X_1とX_2の閉包は何になっているだろうか?



Xは連結だが弧状連結ではない → 位相数学B

(1) X_1は$\mathbb{R}^2$の閉集合になっている.

Xの開集合全体は$\mathbb{R}^2$の開集合とXの共通部分全体に等しいので X_1 はXの閉集合でもある.

ゆえに, X_2はXの開集合になっている.

(2) X_2の$\mathbb{R}^2$における閉包は

$$X_1\cup\{(x,y)\in X_1 \mid -1\leq y\leq 1\}$$

になっており, これはX内におけるX_2の閉包にもなっている. X_2はXの閉集合ではない. □