$\boxed{\text{定理}}$ $\mathbb{R}$の空でない有界閉集合は最大値と最小値を持つ。 最小値も同様

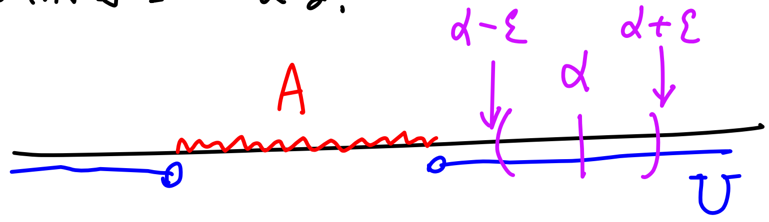
$\boxed{\text{証明}}$ Aは$\mathbb{R}$の空でない有界閉集合であるとする。最大値の存在のみを示す。

実数の連続性(の1つ表現)より、Aは有界なので上限(最小上界) $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$ が存在する。

閉集合でなくても成立

一般にAに含まれる上界はAの最大値になるので $\alpha \in A$ を示せば十分である。

Aは$\mathbb{R}$の閉集合なので、$U = A^c = \mathbb{R} \setminus A$ は$\mathbb{R}$の開集合になる。



$\alpha \notin A$と仮定して矛盾を出せば十分である。

$\alpha \notin A$ は $\alpha \in U = A^c$ と同値である。

そのとき、Uは$\mathbb{R}$の開集合なので、ある$\varepsilon > 0$が存在して、$U_\varepsilon(\alpha) \subset U$ となる。

$U_\varepsilon(\alpha) = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ と A が共通部分を持たないので $\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$ も Aの上界になる。

これは Aの最小上界αより小さなAの上界$\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$が存在することを意味する。

これは矛盾である

$\boxed{\text{q.e.d.}}$