距離空間の完備化 (completion)

X は距離空間であるとする.

おおざっぱな定義 距離空間 X のすきまをむだなく埋めて作られた完備距離空間を X の完備化と呼ぶ. □

定義 距離空間 $\tilde{X}$ と写像 $i : X \to \tilde{X}$ の組 $(\tilde{X}, i)$ が X の完備化とは以下の条件が成立していることだと定める:

(C1) $\tilde{X}$ は完備である. ←すきまを埋めた

(C2) $i : X \to \tilde{X}$ は等長写像 (距離を保つ写像) である.

注 等長写像は単射になる.

(C1), (C2) は X が完備距離空間 $\tilde{X}$ の部分空間とみなせることを意味している.

(C3) $i(X)$ は $\tilde{X}$ において稠密 (ちゅうみつ) である. ←むだがない. □

注意 $(\tilde{X}, i : X \hookrightarrow \tilde{X})$ が X の完備化のときには, 通常 $i(X)$ と X を同一視して, $X \subset \tilde{X}$ とみなし, X を $\tilde{X}$ の部分空間とみなす. □

注意 距離空間の完備化は常に存在し, 本質的に一意的である. □

$\boxed{例}$ $X=\mathbb{Q}$ (距離は通常の絶対値による距離) のとき, $\mathbb{R}$ はその完備化になる. $\square$

$\boxed{例}$ p は素数であるとする. このとき, $x\in\mathbb{Q}^\times=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ は

$$x=\pm p^N\frac{a}{b},\ N\in\mathbb{Z},\ a,b\in\mathbb{Z}_{>0},\ a,b \text{ は互いに素で } p \text{ でわりきれない}$$

と一意に書ける. このとき, <u>p進付値</u> (p-adic valuation) $|x|_p$ を

$$|x|_p=p^{-N},\quad |0|_p=0$$

と定める. このとき, $x,y\in\mathbb{Q}$ について

$$|xy|_p=|x|_p|y|_p,\quad |x+y|_p\leqq\max\{|x|_p,|y|_p\}\overset{\text{自明}}{\leqq}|x|_p+|y|_p.$$

ゆえに $d_p(x,y)=|x-y|_p$ によって, $\mathbb{Q}$ に通常とは異なる距離を入れることができる. d_p を p進距離と呼ぶ.

$\mathbb{Q}$ の p進距離に関する完備化にも体の構造を入れることができき, $\mathbb{Q}_p$ と一般に書かれ, <u>p進体</u> (p-adic field) と呼ばれる. $\square$

$\boxed{注}$ $\mathbb{Q}$ の"自然な"完備化は $\mathbb{R}$ 以外に $\mathbb{Q}_p$ もある! $\square$

例 $\mathbb{R}$上のベクトル空間 V を

$$V = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ は多項式で表現できる}\}$$

と定め，V にノルムを

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad (f \in V)$$

と定める．このノルムで V を距離空間とみなす．これの完備化は

$$C([a,b], \mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$$

にノルムを

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad (f \in C([a,b], \mathbb{R}))$$

と定めたものになる．$C([a,b], \mathbb{R})$ は完備（Banach空間）であることをみとめると，V が $C([a,b], \mathbb{R})$ の中で稠密であること（任意の $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ が V の元でいくらでも一様近似できること）を示せれば，$C([a,b], \mathbb{R})$ が V の完備化であることがわかる．Weierstrassの多項式近似定理によってそのことがわかる．$\square$