$\boxed{\text{Cesàro 和}}$ (チェザロ和)

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ の形であらわれる。

問題 実数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が σ に収束しているならば $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ も σ に収束していることを示せ。

証明の見付け方 実数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が σ に収束することは、$\{s_n-\sigma\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することと同値であり、$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k - \sigma = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s_k-\sigma)$ なので $\sigma=0$ の場合を示せば十分である。

実数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束すると仮定し、任意に $\varepsilon>0$ をとる。

n を十分に大きくすれば $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right| < \varepsilon$ となることを示せばよい。

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right| \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|s_k| = \underbrace{\frac{|s_1|+|s_2|+\cdots+|s_{N-1}|}{n}}_{} + \underbrace{\frac{|s_N|+|s_{N+1}|+\cdots+|s_n|}{n}}_{} \qquad (*)$$

② Nを固定して, nを大きくすると いくらでも小さくなる.

① Nを十分大きくすれば $|s_N|, |s_{N+1}|, \ldots, |s_n|$ の各々は小さい, 和をnで割っても小さい,

nを十分大きくして, 各々を $< \frac{\varepsilon}{2}$ とできればよい.

①の処理 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束しているので, ある N が存在して, $k \geqq N$ ならば $|s_k| < \frac{\varepsilon}{2}$

となるので, $\underbrace{n \geqq N}_{\boxed{1}}$ ならば
$$\frac{|s_N|+|s_{N+1}|+\cdots+|s_n|}{n} < \frac{\overbrace{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2}}^{n-N+1\text{個の和}}}{n} \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

②の処理 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しているので有界である. ゆえにある $M>0$ で

任意の $k=1,2,\ldots$ について $|s_k| \leqq M$ となるものが存在する.

ゆえに, $\underbrace{n > \frac{(N-1)M}{\varepsilon/2}}_{\boxed{2}}$ ならば
$$\frac{|s_1|+|s_2|+\cdots+|s_{N-1}|}{n} \leqq \frac{\overbrace{M+M+\cdots+M}^{N-1\text{個の和}}}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ゆえに, $n > \max\left\{\underset{\boxed{1}}{N}, \underset{\boxed{2}}{\frac{(N-1)M}{\varepsilon/2}}\right\}$ ならば $(*)$ より, $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right| < \varepsilon$ となる.

これでほしい証明が得られた! □

証明の整書　実数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が σ に収束することは，$\{s_n-\sigma\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することと同値であり，$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k-\sigma=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s_k-\sigma)$ なので $\sigma=0$ の場合を示せば十分である．

実数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束すると仮定し，任意に $\varepsilon>0$ をとる．

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束していることより，ある N_1 が存在して，$k\geqq N_1$ ならば $|s_k|<\frac{\varepsilon}{2}$． ①

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列なので有界であり，ある $M>0$ が存在して，$|s_k|\leqq M$ ② $(k=1,2,\cdots)$．

$N_2>\frac{(N_1-1)M}{\varepsilon/2}$ ③ となる番号 N_2 をとり，$N=\max\{N_1,N_2\}$ とおく．

このとき，$n\geqq N$ ならば

② 分子 $\leqq(N_1-1)M$　　① 分子 $<(n-N_1+1)\frac{\varepsilon}{2}$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k\right|\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|s_k|=\frac{|s_1|+|s_2|+\cdots+|s_{N_1-1}|}{n}+\frac{|s_{N_1}|+|s_{N_1+1}|+\cdots+|s_n|}{n}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$ ③

これで $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することが示された．

q.e.d.

問題 収束しない実数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束するものの例を挙げよ.

解答例 $s_n = (-1)^{n-1}$ のとき, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないが, $t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ は

$$t_1 = \frac{1}{1},\quad t_2 = \frac{1-1}{2} = 0,\quad t_3 = \frac{1-1+1}{3} = \frac{1}{3},\quad t_4 = \frac{1-1+1-1}{4} = 0,\ \cdots$$

$$t_n = \begin{cases} 1/n & (n\text{は奇数}) \\ 0 & (n\text{は偶数}) \end{cases}$$

となるので $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right\}$ は 0 に収束する. □

問題 有界でない実数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束するものの例を挙げよ.

解答例 $s_n = (-1)^{n-1}(\sqrt{n-1} + \sqrt{n})$ のとき, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非有界であり,

$s_1 = 1,\quad s_1 + s_2 = 1-(1+\sqrt{2}) = -\sqrt{2},\quad s_1+s_2+s_3 = -\sqrt{2}+(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \sqrt{3},\ \cdots$ なので

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = (-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

□

来週は ε 近傍, 開集合について