$\boxed{\text{有限区間上での積分と一様収束極限の交換}}$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする.

$\boxed{\text{定理}}$ $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続函数であるとし, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に一様収束していると仮定する. (f も連続になる.) このとき,

数列 $\left\{\int_a^b f_n(x)\,dx\right\}_{n=1}^{\infty}$ は $\int_a^b f(x)\,dx$ に収束する. すなわち,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{=f(x).}\,dx.$$

$\boxed{\text{証明}}$ 任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束しているので, ある N が存在して,

$n \geqq N$ かつ $x \in [a, b]$ のとき, $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \dfrac{1}{b-a}\dfrac{\varepsilon}{2}$, すなわち,

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) < f(x) + \frac{1}{b-a}\frac{\varepsilon}{2}$$

となるので

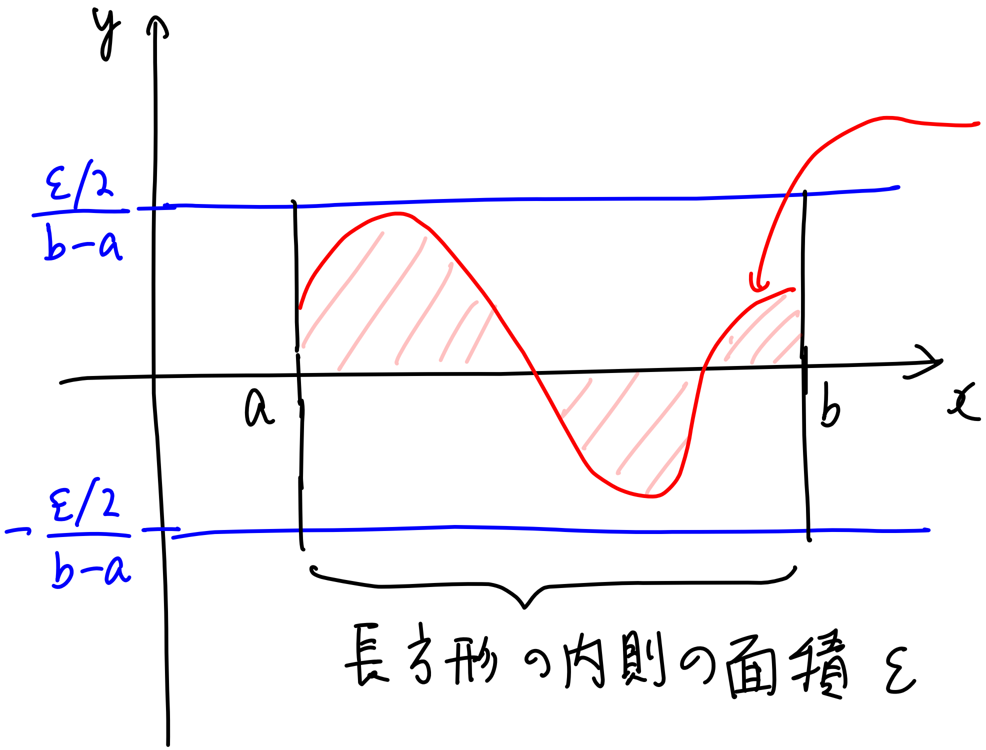
$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} \leqq \int_a^b f_n(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

つづく

すなわち，

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

これは $\int_a^b f_n(x)\,dx$ が $\int_a^b f(x)\,dx$ に $n\to\infty$ で収束することを意味する. $\boxed{\text{q.e.d.}}$



$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_a^b \left(f_n(x) - f(x)\right) dx\right|$$

$$< \varepsilon$$

上の証明は
このように考えてもよい。