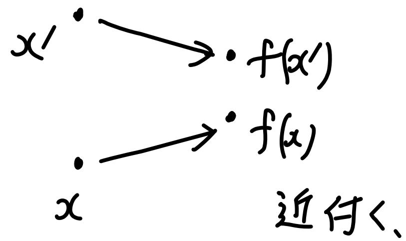
縮小写像

完備距離空間で非常によく使われる!

定義 X は距離空間であるとし，写像 $f: X \to X$ を考える.



$0 \leq c < 1$ をみたすある実数 c が存在して，

任意の $x, x' \in X$ について $d(f(x), f(x')) \leq c\, d(x, x')$

となるとき，f は縮小写像 (contracting mapping) であるという. □

注 縮小写像は(一様)連続になる. □

定義 集合 X と写像 $f: X \to X$ について，$f(x) = x$ をみたす $x \in X$ を f の不動点 (fixed point) であるという. □

定理 X が完備距離空間で f がその縮小写像であるとき，f の不動点がただ1つ存在する. □

⇑ 完備性

← 不動点定理の一種

応用

- 常微分方程式論における Lipschitz 条件のもとでの Picard の逐次近似法,
- 逆写像定理の証明.

$\boxed{\text{定理の証明}}$ $f: X \to X$ を n 個合成してできる写像を $f^n = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n}$ と書く。

$0 \leqq c < 1$ でかつ $d(f(x), f(x')) \leqq c\, d(x, x')$ $(x, x' \in X)$ と仮定する。

このとき、$d(f^n(x), f^n(x')) \leqq c^n d(x, x') \to 0$ $(n \to \infty)$ となる。

<u>不動点の一意性</u> $\alpha, \beta \in X$ が f の不動点ならば、

$$d(\alpha, \beta) = d(f^n(\alpha), f^n(\beta)) \leqq c^n d(\alpha, \beta) \to 0 \quad (n \to \infty)$$ なので $d(\alpha, \beta) = 0$. $\therefore$ $\alpha = \beta$.

<u>不動点の存在</u> X の完備性を使う。$x_0 \in X$ を任意にとり、$x_n = f^n(x_0)$ とおく。

このとき $m \leqq n$ ならば

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_0) &\leqq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_1, x_0) \\
&= d(f^{n-1}(x_1), f^{n-1}(x_0)) + d(f^{n-2}(x_1), f^{n-2}(x_0)) + \cdots + d(x_1, x_0) \\
&\leqq c^{n-1} d(x_1, x_0) + c^{n-2} d(x_1, x_0) + \cdots + 1 \cdot d(x_1, x_0) \\
&= (c^{n-1} + c^{n-2} + \cdots + 1)\, d(x_1, x_0) \leqq \frac{d(x_1, x_0)}{1-c}
\end{aligned}$$

$$d(x_n, x_m) = d(f^m(x_{n-m}), f^m(x_0)) \leqq c^m d(x_{n-m}, x_0) \leqq c^m \frac{d(x_1, x_0)}{1-c} \to 0 \quad (m \to \infty),$$

ゆえに、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列であるので、X の完備性より、ある $x_\infty \in X$ に収束する。

このとき、$f(x_\infty) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_\infty$. $\boxed{\text{q.e.d.}}$