ε-δ や ε-N の証明の見付け方

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の距離は Euclid 距離としておく。

（ノルムで入れた距離ならなんでもよい。）

例 (3) $f_\times : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\times(x,y) = xy$ の連続性を証明せよ。

証明の見付け方 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ と $\varepsilon > 0$ を任意にとる。

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y) \mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ を (a,b) に十分に近くすれば $|f_\times(x,y) - f_\times(a,b)| = |xy - ab| < \varepsilon$ となることを示したい。

$$
\left.\begin{aligned}
|xy - ab| &= |xy - ay + ay - ab| \leq |xy - ay| + |ay - ab| \\
&= |x-a||y| + |a||y-b|
\end{aligned}\right) \text{⓪}
$$

この計算を最初にしてしまうことがポイント

ゆえに、(x,y) を (a,b) に十分近付ければ $|x-a||y| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|a||y-b| < \frac{\varepsilon}{2}$ となることを示せればよい。

$|a||y-b| < \frac{\varepsilon}{2}$ は $\underline{|y-b| < \frac{\varepsilon/2}{1+|a|}}$ ① ならば成立している。

$|x-a||y| < \frac{\varepsilon}{2}$ は、もしも $|y| \leq M$, $M>0$ とできていれば、$|x-a| < \frac{\varepsilon/2}{M}$ ならば成立している。

つづく

$|y-b| \leqq 1$ ② とできていれば $|y| = |y-b+b| \leqq |y-b| + |b| \leqq 1+|b|$.

そのとき, $|x-a| < \dfrac{\varepsilon/2}{1+|b|}$ ③ ならば $|x-a||y| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる.

以上の ① $|y-b| \leqq \dfrac{\varepsilon/2}{1+|a|}$, ② $|y-b| \leqq 1$, ③ $|x-a| < \dfrac{\varepsilon/2}{1+|b|}$ が同時に成立する

ように, (x,y) と (a,b) の距離 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ を小さくすればよい.

そのためには, $|x-a|$ と $|y-b|$ が $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 以下になるので,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta = \min\left\{\frac{\varepsilon/2}{1+|a|},\ 1,\ \frac{\varepsilon/2}{1+|b|}\right\}$$

とすればよい. そのとき, ①, ②, ③ が成立するので ⓪ より $|xy-ab| < \varepsilon$ となる.

これで, $f_x(x,y) = xy$ の連続性の証明が得られた. $\square$

例 (3) 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ実数 α と β に収束するとき，
実数列 $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha\beta$ に収束することを示せ．

証明の見付け方　任意に $\varepsilon > 0$ をとる．

n を十分に大きくすれば $|x_n y_n - \alpha\beta| < \varepsilon$ となることを示したい．

$$|x_n y_n - \alpha\beta| = |x_n y_n - \alpha y_n + \alpha y_n - \alpha\beta| \leqq |x_n y_n - \alpha y_n| + |\alpha y_n - \alpha\beta|$$
$$= |x_n - \alpha||y_n| + |\alpha||y_n - \beta|. \quad ⓪$$

この計算を最初にしてしまうことがポイント．

ゆえに，n を十分大きくすれば $|x_n - \alpha||y| < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $|\alpha||y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ となることを示せればよい．

$|\alpha||y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ は $|y_n - \beta| < \frac{\varepsilon/2}{1+|\alpha|}$ ① ならば成立する．

$|x_n - \alpha||y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ は，仮に $|y_n| \leqq M$, $M > 0$ となっているならば $|x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon/2}{M}$ のとき成立している．

$|y_n-\beta| \leqq 1$ ② とできていれば $|y_n| = |y_n-\beta+\beta| \leqq |y_n-\beta|+|\beta| \leqq 1+|\beta|$.

そのとき, $|x_n-\alpha| < \dfrac{\varepsilon/2}{1+|\beta|}$ ③ ならば $|x_n-\alpha||y| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成立している.

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は β に収束しているので, ある N_1 が存在して, $n \geqq N_1$ ならば $|y_n-\beta| < \dfrac{\varepsilon/2}{1+|\alpha|}$ ①,

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は β に収束しているので, ある N_2 が存在して, $n \geqq N_2$ ならば $|y_n-\beta| < 1$ ②,

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束しているので, ある N_3 が存在して, $n \geqq N_3$ ならば $|x_n-\alpha| < \dfrac{\varepsilon/2}{1+|\beta|}$ ③.

ゆえに, $n \geqq \max\{N_1, N_2, N_3\}$ ならば ①, ②, ③ が成立しており, ⓪ より

$|x_n y_n - \alpha\beta| < \varepsilon$ となる.

これで $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha\beta$ に収束することの証明が得られた. □