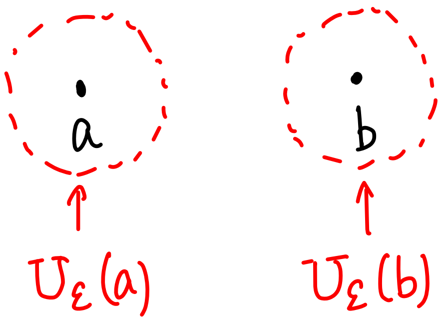
点の部分へのくっつき方 (直観的な話とHausdorff空間の定義)

点の点へのくっつき方

距離空間 X の互いに異なる点 $a, b \in X$ の図



十分に $\varepsilon > 0$ を小さくした。

距離空間 X の異なる2点に対して、

各々の点の ε 近傍を十分に小さくとると、

その ε 近傍たちは共通部分を持たない。

注 ε 近傍は開集合の特別な場合になっているので、距離空間においては、2つの異なる点 a, b に対して、

a を含む開集合 U と b を含む開集合 V で $U \cap V = \phi$ となるものが存在する。

□

定義 位相空間 X が $\underset{}{\overset{ハウスドルフ}{\text{Hausdorff}}}$ 空間であるとは、
その任意の互いに異なる2点 $a, b \in X$ に対して
a を含む開集合 U と b を含む開集合 V で $U \cap V = \phi$ をみたすものが
存在することであると定める。 □

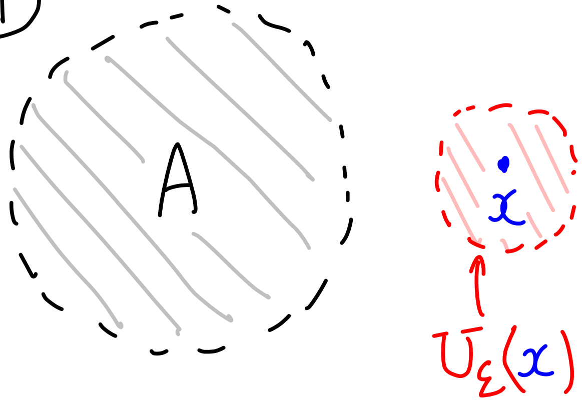
例 距離空間は Hausdorff 空間である。 □

注 Hausdorff 空間の定義の条件は点と点がどれくらい開集合で
分離されるかを記述する条件になっている。
後で位相空間Bで分離公理たちについて学ぶであろう。 □

ポイント 距離空間での点 a の ε 近傍 $U_\varepsilon(a)$ と一般での位相空間
での点を含む開集合は点 a と空間の部分のくっつき方（分離の仕方）
を記述していると考えられる。 □

点と部分集合のくっつき方　Xは距離空間とし，$A \subset X$であるとする．

①

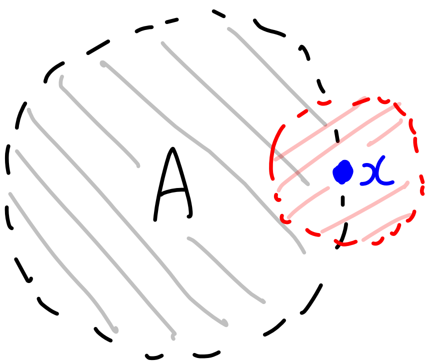


点xの十分小さなε近傍$U_\varepsilon(x)$をとると，
$A \cap U_\varepsilon(x) = \phi$となっているとする．

点xは部分集合Aにくっついていないように見える．

$(x \notin \overline{A})$

②



点xのどんなに小さなε近傍$U_\varepsilon(x)$をとっても
$A \cap U_\varepsilon(x) \neq \phi$となっているとする．

点xは部分集合Aにくっついているように見える．

$(x \in \overline{A})$

(点xはAの内側に描いてもよい．)