重要

定理 Hausdorff空間X（特に距離空間X）のコンパクト部分集合KはXの閉集合になる。

証明 $X \setminus K$がXの開集合になることを示せばよい。

$a \in X \setminus K$を任意にとる。

（aを含むXの開集合Uで$U \cap K = \phi$となるものを作ればよい。）

各$x \in K$に対して、$x \neq a$なので、Xの開集合U_xとV_xで$a \in U_x$, $x \in V_x$でかつ$U_x \cap V_x = \phi$をみたすものが存在する。

このとき、$K = \bigcup_{x \in K} (K \cap V_x)$は$K$の相対位相に関する開被覆になっている

Kはコンパクトなので、ある$x_1, \ldots, x_n \in K$が存在して、$K = \bigcup_{i=1}^{n} (K \cap V_{x_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$

$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$とおくと、$U$は$X$の開集合になり、$a \in U$と$U \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} = \phi$.

特に、$U \cap K = \phi$となる。

q.e.d.