$\boxed{\text{開集合系による連続写像の特徴付け}}$

X, Y は距離空間であるとする.

$\boxed{\text{定理}}$ 写像 $f: X \to Y$ について, 以下の2つの条件は互いに同値である.

(1) f は連続である.

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して,
ある $\delta > 0$ が存在して, $x \in X$ かつ $d_X(x, a) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

$\Longleftrightarrow$ 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して,
ある $\delta > 0$ が存在して, $f(U_\delta^X(a)) \subset U_\varepsilon^Y(f(a))$.

(2) Y の任意の開集合 U に対して, $f^{-1}(U)$ は X の開集合になる. (証明は後述) $\square$

この条件は非常に抽象的だが, もとの ε-δ による定義よりシンプルである.

$\boxed{\text{定義}}$ 位相空間 X, Y のあいだの写像 $f: X \to Y$ が<u>連続</u>であることを上の定理の条件 (2) が成立していることだと定める. $\square$

前ページの定理の証明

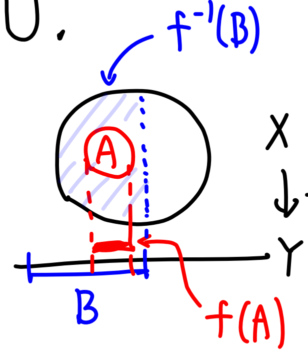
$f(a) \in U$ $\Updownarrow$　　$\{x \in X \mid f(x) \in U\}$ $/\!/$

(1) ⇒ (2)　$f: X \to Y$ は連続であるとし，Y の開集合 U と $a \in f^{-1}(U)$ を任意にとる．

$f(a) \in U$ かつ U は Y の開集合なので，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$U_\varepsilon^Y(f(a)) \subset U$．

f は連続なので，ある $\delta > 0$ が存在して，$f(U_\delta^X(a)) \subset U_\varepsilon^Y(f(a)) \subset U$．

ゆえに，$U_\delta^X(a) \subset f^{-1}(U)$ となるので，$f^{-1}(U)$ は X の開集合になる．



（注 ― 一般に $f: X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$, $f(A) \subset B$ ならば $A \subset f^{-1}(B)$．）

(2) ⇒ (1)　条件(2)を仮定し，$a \in X$ と $\varepsilon > 0$ を任意にとる．

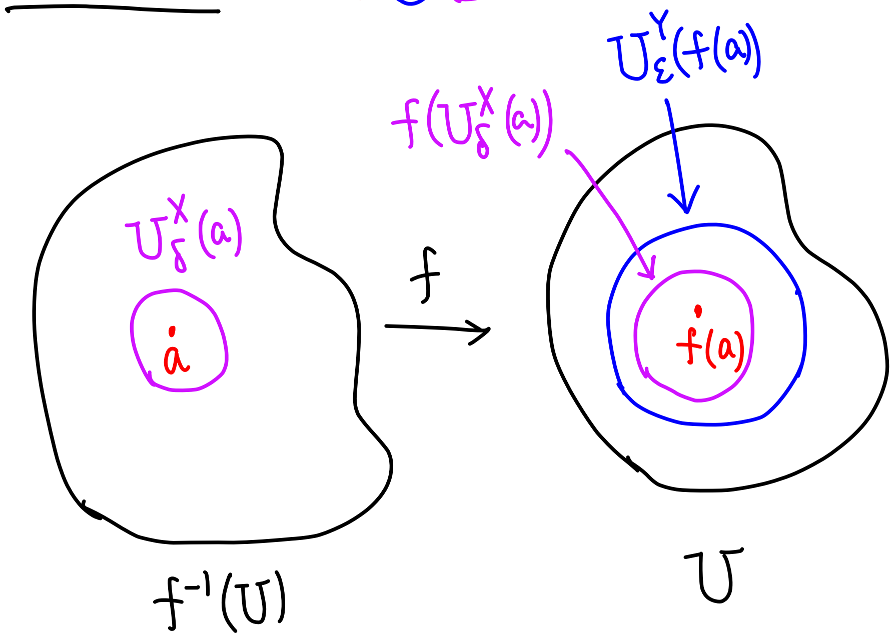
$U_\varepsilon^Y(f(a))$ は Y の開集合なので，条件(2)より $f^{-1}(U_\varepsilon^Y(f(a)))$ は X の開集合になる．

$f(a) \in U_\varepsilon^Y(f(a))$ より，$a \in f^{-1}(U_\varepsilon^Y(f(a)))$ となるので，$f^{-1}(U_\varepsilon^Y(f(a)))$ が X の開集合であることより，ある $\delta > 0$ が存在して，$U_\delta^X(a) \subset f^{-1}(U_\varepsilon^Y(f(a)))$ となる．

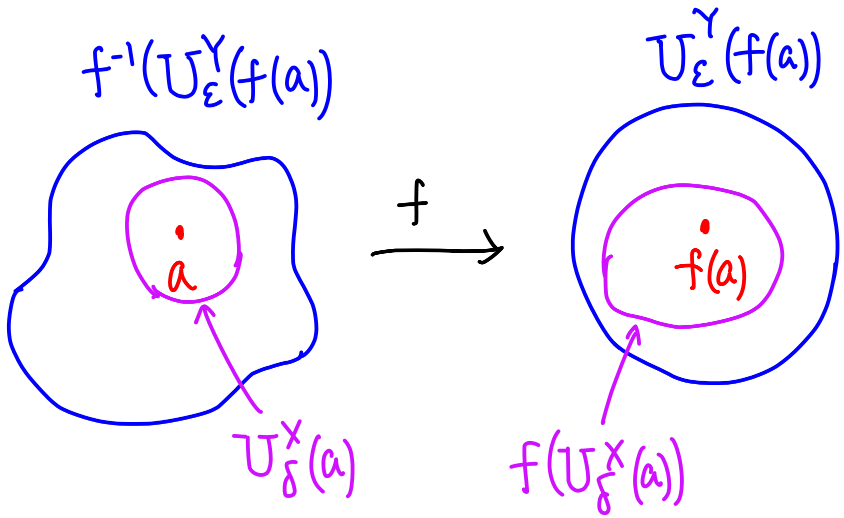
ゆえに，$f(U_\delta^X(a)) \subset U_\varepsilon^Y(f(a))$ となるので，f が連続であることがわかる．　□

証明の図による説明

(1) ⇒ (2) ① ② ③ ④



(2) ⇒ (1) ① ② ③



応用例 位相空間 X, Y, Z と連続写像たち $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ に対して、それらの合成 $g \circ f: X \to Z$ も連続写像になる。

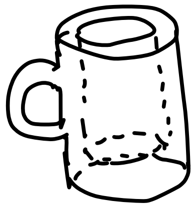
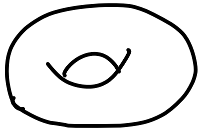
証明 U を Z の開集合とすると、g の連続性より $g^{-1}(U)$ は Y の開集合になり、f の連続性より、$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ は X の開集合になるので合成 $g \circ f: X \to Z$ も連続になる。

自分で示せ

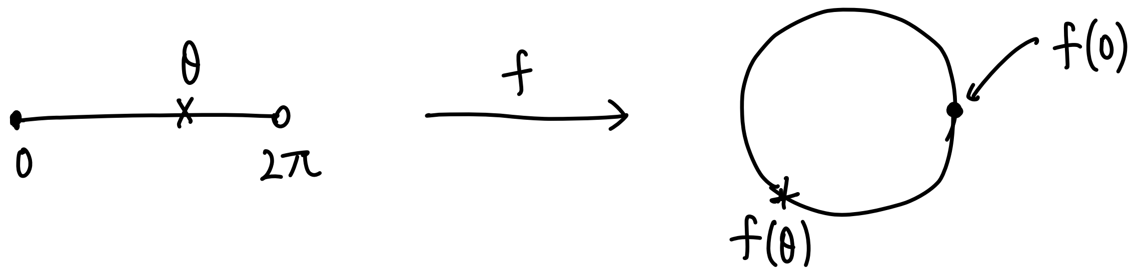
$\square$

$\boxed{\text{定義}}$ (同相, homeomorphic) 位相空間(たとえば距離空間) X と Y のあいだに連続写像たち $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ で互いに相手に逆写像になるものが存在するとき, X と Y は同相 (homeomorphic) であるといい, f と g を同相写像 (homeomorphism) と呼ぶ.

□

$\boxed{\text{例}}$ コップ  とドーナツ  は同相である. □

$\boxed{\text{例}}$ $X = [0, 2\pi)$, $Y = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ のとき, $f: X \to Y$ を $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ と定めると, f は全単射連続写像になるが, 逆写像 $f^{-1}: Y \to X$ は連続にならない. ゆえに, f は同相写像ではない.



□

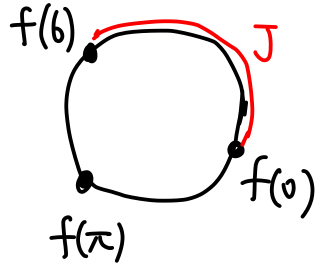
問題 $X=[0,2\pi)$ と $Y=S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ が同相でないことを示せ。

解答例 X と Y は同相であると仮定する。(矛盾をみちびけばよい。)

互いに相手の逆写像になる全単射連続写像たち $f:X\to Y$, $g:Y\to X$ が存在する。

f と g の $X\setminus\{\pi\}$ と $Y\setminus\{f(\pi)\}$ への制限は、$X\setminus\{\pi\}$ と $Y\setminus\{f(\pi)\}$ のあいだの同相写像になっている(自分で示せ)。

$f(0)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $f(\pi)=(\cos\beta,\sin\beta)$, $f(6)=(\cos\gamma,\sin\gamma)$, $\beta<\alpha<\gamma<\beta+2\pi$ をみたす $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ をとれる。



このとき、$J=\{(\cos\theta,\sin\theta)\mid\alpha\leqq\theta\leqq\gamma\}$ は $f(\pi)=(\cos\beta,\sin\beta)$ を含まない。

$h:[\alpha,\gamma]\to J$, $\theta\mapsto h(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ は同相写像である。

これと $g:Y\to X$ と X の $\mathbb{R}$ への包含写像の合成 $\varphi:[\alpha,\gamma]\to\mathbb{R}$, $\theta\mapsto\varphi(\theta)=g(h(\theta))$ は連続でかつ、$\varphi(\alpha)=g(h(\alpha))=g(f(0))=0$, $\varphi(\gamma)=g(h(\gamma))=g(f(6))=6$ なので中間値の定理より、ある $\theta\in[\alpha,\gamma]$ が存在して、$\varphi(\theta)=g(h(\theta))=\pi=g(f(\pi))$。

しかし、$J=h([\alpha,\gamma])$ は $f(\pi)$ を含まないので、g が全単射であることに矛盾する。 □