コンパクト性

← 位相数学AとBにおける最重要概念!!!

X は位相空間であるとする。(たとえば，X は距離空間であるとする。)

U_λ $(\lambda\in\Lambda)$ たちが X の開集合たちで，$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ が成立しているとき，
$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆 (open covering) と呼ぶ。 ($X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ を開被覆と言うこともある。)

有限個の開集合たちで構成された開被覆を有限開被覆 (finite open covering) と呼ぶ。

X の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\Lambda'\subset\Lambda$ のとき，$\{U_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ を $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の部分被覆 (subcovering) と呼ぶ。

たとえば，X の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\Lambda$ のとき，
$\{U_{\lambda_i}\}_{i=1}^n$ を $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆 (finite subring) と呼ぶ。

定義 X がコンパクトであるとは，X の任意の開被覆の有限部分被覆が存在することであると定める。 (compact) □

$\boxed{例}$ 易 $X=(0,1]$ はコンパクトではない。$U_k=\left(\frac{1}{k},1\right]$ $(k=1,2,3,\ldots)$ とおくと、$\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ は X の開被覆(開ヒフク)になる。$\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ の有限部分被覆は存在しないので X はコンパクトではない。

□

$\boxed{例}$ 難 閉区間 $X=[a,b]$ $(a<b)$ はコンパクトである。

(㊟ 一般に $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合たちと $\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合たちは一致する。)

$\boxed{証明}$ $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ を X の任意の開被覆であるとし、その有限部分被覆が存在しないと仮定する。矛盾をみちびけば証明が終わる。

その仮定のもとで、$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ と $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ の少なくともどちらか片方は有限個の U_λ たちでおおうことをできない。そのおおえない側を X_1 と書く。

以下、同様にして、X から X_1 を作ったのと同じ方法で、$X_k=[a_k,b_k]$ から、$X_{k+1}=[a_{k+1},b_{k+1}]$ を作ることができる。

つづく

このとき，$X_k=[a_k,b_k]$ $(k=1,2,\dots)$ の各々は有限個の U_λ たちでおおうことができず，

$$a\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq\cdots\leqq b_3\leqq b_2\leqq b_1\leqq b,\qquad b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}$$

となっている．

ゆえに，a_k と b_k は $k\to\infty$ とすると同じ値 c に収束する．

$a_k,b_k\in X=[a,b]$ でかつ，X は $\mathbb{R}$ の閉集合なので，$c\in X$ となる．

$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ なので，ある $\lambda_0\in\Lambda$ が存在して，$c\in U_{\lambda_0}$ となる． $U_\varepsilon^X(c)=\{x\in X\mid |x-c|<\varepsilon\}$

U_{λ_0} は X の開集合なので，ある $\varepsilon>0$ が存在して，$U_\varepsilon^X(c)\subset U_{\lambda_0}$ となる．

k を十分大きくして，$b_k-a_k=\dfrac{b-a}{2^k}<\varepsilon$ となるようにできる．

$a_k,a_{k+1},a_{k+2},\dots$ と $b_k,b_{k+1},b_{k+2},\dots$ は $X_k=[a_k,b_k]$ に含まれ，X_k は $\mathbb{R}$ の閉集合なので，それらの収束先 c も X_k に含まれる： $c\in X_k=[a_k,b_k]$．

このとき，$X_k\subset U_{\lambda_0}$ となる．

これ X_k が有限個の U_λ たちでおおえないことに矛盾する．

$\boxed{\text{q.e.d.}}$