$\boxed{\text{一様連続性}}$ 距離空間では，連続写像だけではなく一様連続写像を定義できる．

f_n：(集合) → (距離空間)，$n=1,2,3,\ldots$ について一様収束を定義できる．
(f_n：(集合) → (位相空間)，$n=1,2,3,\ldots$ については一様収束を定義できない．)

f：(距離空間) → (距離空間) が一様連続であることを定義できる．
(f：(位相空間) → (位相空間) については一様連続性を定義できない．)

$\boxed{\text{定義}}$ X と Y は距離空間であるとする．写像 $f: X \to Y$ が一様連続であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ について，ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $x, x' \in X$ について，$d(x, x') < \delta$ ならば $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ となることをいう． □

次ページでただの連続性とのちがいについて説明する．

連続写像と一様連続写像のちがい

$f: X \to Y$, X, Y は距離空間とする.

- f は連続

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{任意の } a \in X \text{ と任意の } \varepsilon > 0 \text{ について} \\ \text{ある } \delta > 0 \text{ が存在して, 任意 } x \in X \text{ について, } d(x, a) < \delta \text{ ならば } d(f(x), f(a)) < \varepsilon. \end{cases}$$

δ は各 a ごとに別々にとればよい.

- f は一様連続

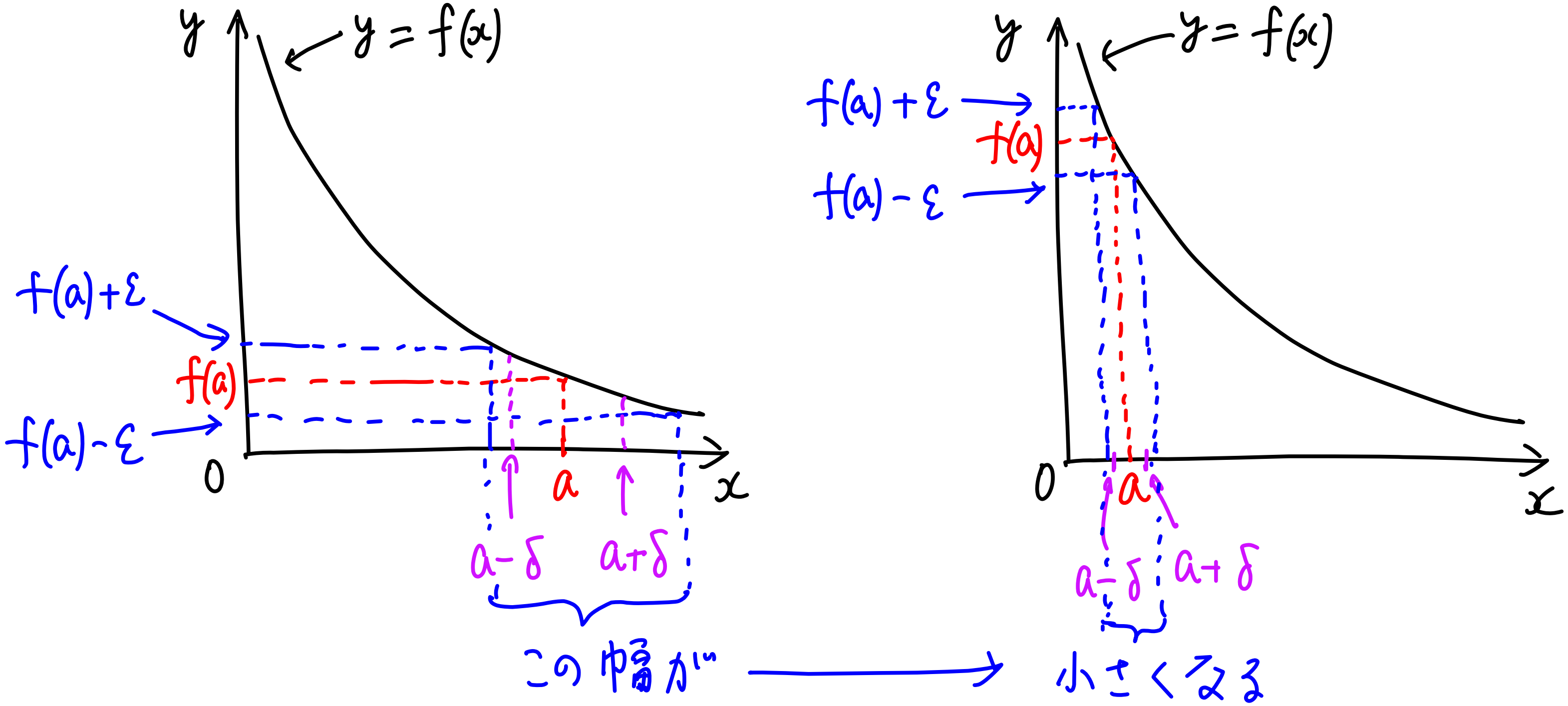
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ について,} \\ \text{ある } \delta > 0 \text{ が存在して, 任意 } x, a \in X \text{ について, } d(x, a) < \delta \text{ ならば } d(f(x), f(a)) < \varepsilon. \end{cases}$$

δ を a と無関係に決めなければいけない.

これより, 一様連続ならば連続であることもわかる.

例 $f(x)=x^{-1}$ $(x>0)$ で $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ を定める.

この f は $\mathbb{R}_{>0}$ で連続だが一様連続ではない.



a が 0 に近付くと, 同じ ε に対する δ をより小さく取る必要がある.

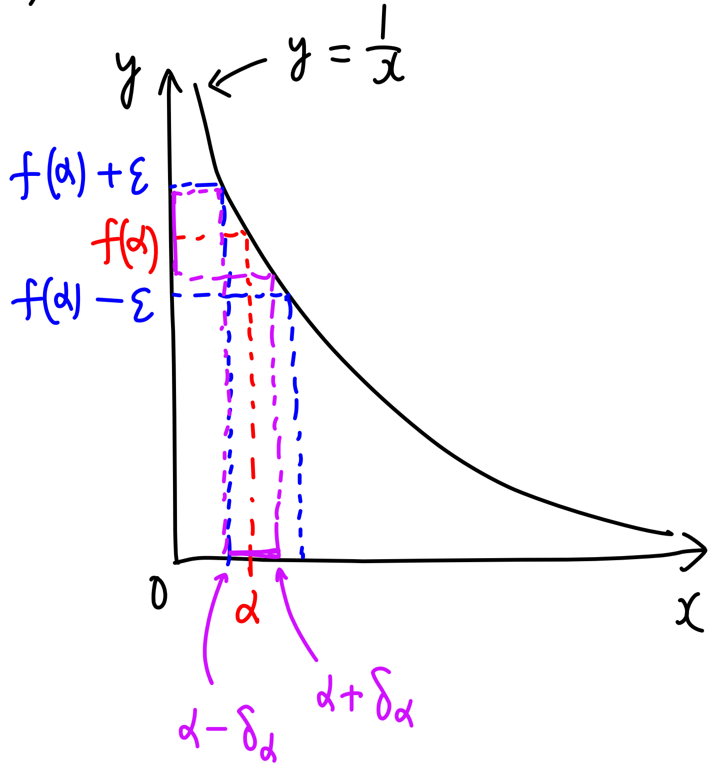
しかも, a を 0 に近付けると同じ ε に対するほしい δ は 0 にいくらでも近づく.

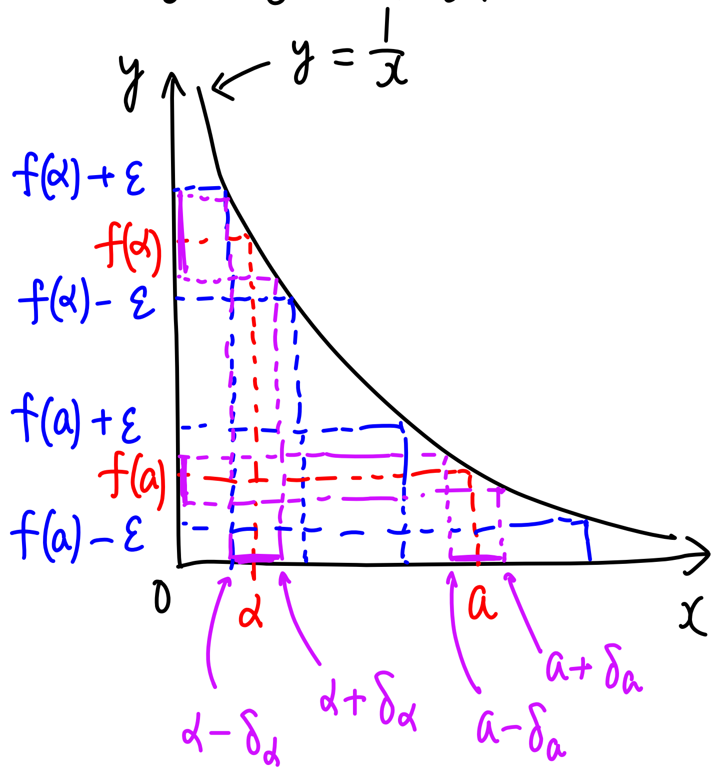
このことから $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ は $x>0$ で一様連続でないことがわかる. □

重要

$\boxed{\text{注意}}$ $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ の定義域を，固定された $\alpha>0$ について，$x \geqq \alpha$ に制限すると一様連続になる．

なぜならば $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ について，$a=\alpha$ における $\varepsilon>0$ に対する $\delta_\alpha>0$ は，$a>\alpha$ についても通用する δ になっているからである．





□