$\boxed{\text{連続写像}}$

(X, d_X), (Y, d_Y) は距離空間であるとし, 写像 $f: X \to Y$ について考える.

定義 (等長写像) f が<u>等長写像</u> (<u>isometric mapping</u>) であるとは,
任意の $x, x' \in X$ について $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ が成立することだと定める. □

例 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V を任意のノルム $\|\cdot\|$ によって距離空間とみなすとき,
$a \in V$ に対して, $f_a : V \to V$ を $f_a(v) = v + a$ $(v \in V)$ と定めると, f_a は等長写像になる. □

例 $\mathbb{R}^2$ をEuclidノルムで距離空間とみなすとき, $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を
$f_\theta(x, y) = ((\cos\theta)x + (-\sin\theta)y,\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)y)$ と定めると, f_θ は等長写像になる. □

等長写像という条件は非常に強い.

continuous mapping

その条件を大幅にゆるめて, <u>連続写像</u> (および後で<u>一様連続写像</u>) が定義される.

定義 (連続写像) f が<u>連続</u>であるとは, 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in X$ について, $d_X(x, a) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ になることだと定める. □

出た! ε-δ だ!

おおざっぱな定義　$f: X \to Y$ が<u>連続</u>であるとは，任意の $a \in X$ において，$x \in X$ が a にいくらでも近付くとき，$f(x)$ も $f(a)$ にいくらでも近付くことだと定める．□

近付き方は任意

これを定義として採用しようとすると，「いくらでも近付く」の意味があいまいなせいでこまる場合が出て来る．そこで次の ε-δ 論法による定義を採用することが標準的になっている．

定義　$f: X \to Y$ が連続であるとは，任意の X の点 a と任意に小さな許される誤差 $\varepsilon > 0$ に対して，(a と ε ごとにちがっていてもよい) ある $\delta > 0$ が存在して，点 $x \in X$ を点 a に距離 δ 未満まで近付ければ，$f(x)$ が $f(a)$ に距離 ε 未満まで近付くことであると定める．□

問題　前ページとこのページを比較して，同じことを言っていることを納得するまで考えつづけよ．(数ヶ月の時間が必要かもしれない！) □

点列の収束との関係 $f: X \to Y$ について以下の2つの条件は同値である。

(a) f は連続である。

(b) 任意の $a \in X$ と a に収束する X 内の任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、
Y 内の点列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束している：$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$。

証明 <u>(a) ⇒ (b) を示そう。</u> f は連続であるとし、$a \in X$ と $\varepsilon > 0$ を任意にとる。
このとき、ある $\delta > 0$ が存在して、$x \in X$ かつ $d_X(x, a) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる。
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束する X 内の点列であるとする。このとき、ある番号 N が存在して、
$n \geqq N$ ならば $d_X(x_n, a) < \delta$ となり、ゆえに、$d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ となる。
これで $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(a)$ に収束することがわかった。 □

<u>準備</u> f が連続でないことは次の条件になる：
ある $a \in X$ とある $\varepsilon > 0$ が存在して、任意の $\delta > 0$ に対して、
ある $x \in X$ が存在して、$d_X(x, a) < \delta$ かつ $d_Y(f(x), f(a)) \geqq \varepsilon$ となる。

つづく

<u>(b) ⇒ (a) の対偶を示そう.</u>　f は連続でないと仮定する. このとき, ある $a \in X$ と ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 次をみたす:

任意の $\delta > 0$ に対して, ある $x \in X$ が存在して, $d_X(x, a) < \delta$ かつ $d_Y(f(x), f(a)) \geqq \varepsilon$ となる.

これを $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対する $\delta = \frac{1}{n}$ に適用すると, ある $x_n \in X$ が存在して, $d_X(x_n, a) < \frac{1}{n}$ かつ $d_Y(f(x_n), f(a)) \geqq \varepsilon$ となる.

このとき, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束するが, $f(x_n)$ と $f(a)$ の距離は決して ε 未満にならないので, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束しない.

これで (b) ⇒ (a) の対偶が示された. $\square$