$\boxed{\text{完備性}}$ (位相空間の完備性は定義されないが，距離空間では定義される.)

X は距離空間であるとする.

$\boxed{\text{定義}}$ X 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が <u>Cauchy列</u> (<u>Cauchy sequence</u>) もしくは <u>基本列</u> ($\frac{\text{fundamental}}{\text{sequence}}$)

であるとは，任意 $\varepsilon>0$ に対して，ある番号 N が存在して，

$$\underline{m, n \geqq N} \text{ ならば } d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

となることであると定める.

「$m \geqq N$ かつ $n \geqq N$」という意味.
これを「$n \geqq m \geqq N$」に強めても定義と同値

□

$\boxed{\text{注意}}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy列であることを以下のように略記することがある:

- $d(a_m, a_n) \to 0 \quad \text{as} \quad m, n \to \infty$ $\quad$ (as $m \geqq n \to \infty$)

- $\displaystyle\lim_{m,n\to\infty} d(a_m, a_n) = 0$ $\quad$ $\left(\displaystyle\lim_{m \geqq n \to \infty} d(a_m, a_n) = 0\right)$

□

収束列はCauchy列である 距離空間X内の収束列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はCauchy列になる.

証明 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が$\alpha \in X$に収束しているとする. 任意に$\varepsilon > 0$をとる

あるNが存在して, $k \geqq N$ならば$d(a_k, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$となる.

このとき, $m, n \geqq N$ならば, $d(a_m, a_n) \leqq d(a_m, \alpha) + d(\alpha, a_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

これで, 収束列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$がCauchy列であることが示された. □

収束しないCauchy列の例 (収束しているように見えるが, 収束先がない点列)

$X = \mathbb{Q}$, $d(x, y) = |x - y|$で距離空間(X, d)を定める.

$a_n = (\sqrt{2}$を小数点以下第n桁目で切って得られる数$) \in \mathbb{Q}$ とおく

このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は$X = \mathbb{Q}$内のCauchy列になる.

しかし, その収束先の$\sqrt{2}$は$X = \mathbb{Q}$に含まれないので,

$X = \mathbb{Q}$の中で$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束しない. □

$\boxed{\text{Cauchy列は有界}}$ 距離空間 X 内の Cauchy列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である.

$\boxed{\text{証明}}$ $\varepsilon = 1$ とすると, ある N が存在して, $m, n \geqq N$ ならば $d(a_m, a_n) < \varepsilon = 1$.

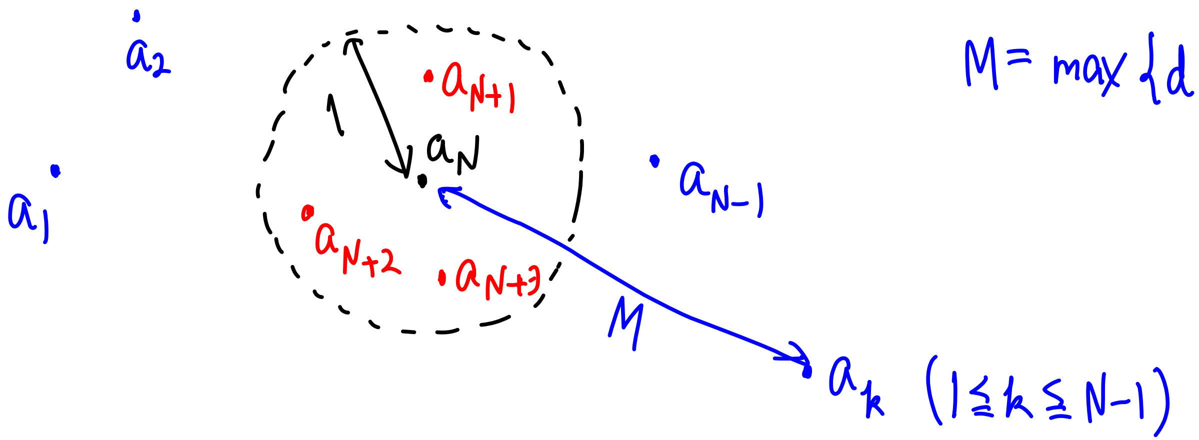
$M = \max\{d(a_1, a_N), d(a_2, a_N), \dots, d(a_{N-1}, a_N)\}$ とおく.

以上の状況では, 以下のようになっている;

- $n = N, N+1, N+2, \dots$ のとき, $d(a_n, a_N) < 1$.
- $n = 1, 2, \dots, N-1$ のとき, $d(a_n, a_N) \leqq M$.

ゆえに, 任意の番号 n について, $d(a_n, a_N) \leqq \max\{1, M\}$.

これで $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることがわかった. □



$M = \max\{d(a_k, a_N) \mid k = 1, \dots, N-1\}$

7/9 追加

定義 距離空間 X が<u>完備</u>(complete)であるとは,
X 内の任意の Cauchy 列が X 内のある点に収束することであると定める. $\square$

例 絶対値に関する通常の距離について $\mathbb{R}$ は完備である.
これは, 実数の連続性を特徴付ける互いに同値な条件のひとつ. $\square$