$\boxed{\text{一様収束が関数の連続性を保つこと}}$ XとYは距離空間であるとする.

定理 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$はXからYへの連続写像の列であるとし, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$は$f: X \to Y$に一様収束しているとする. このとき, fも連続写像になる.

証明 任意の$a \in X$と任意の$\varepsilon > 0$をとる.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$はfに一様収束しているので, あるNが存在して,

$$n \geq N \text{ かつ } x \in X \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

($\frac{\varepsilon}{3}$-argumentを使う)

f_Nは連続なので, ある$\delta > 0$が存在して,

$$x \in X \text{ かつ } d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ゆえに, $x \in X$ かつ $d(x,a) < \delta$ のとき,

三角不等式

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

したがって, fは連続である.

q.e.d.

$\boxed{\text{証明の見つけ方}}$ ① x を a に近付けたとき $f(x)$ が $f(a)$ に近付くことを示したい。

小さくなってほしいのは $d(f(x), f(a))$ である。

② $d(f(x), f(a))$ を三角不等式を使って「小さくなりそうなものたちの和」による分解(で上からおさえること)を考える：

$$d(f(x), f(a)) \leqq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a))$$

x によらずに N を大きくすると小さくできる(一様収束より)

x を a に近付けると小さくなる。(f_N の連続性より)

③ 以上を発見を ε-N や ε-δ で書き直せば証明ができあがる。 $\square$