Weierstrassの多項式近似定理

$a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ とする.

定理 閉区間 $[a,b]$ 上の任意の連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して,
多項式関数たち $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で f に一様収束するものが存在する.

証明 (高木貞治『解析概論』第6章§78で紹介されているSerge Bernsteinの方法)

準備 (確率論での二項分布に関する結果)

$\varphi_{n,k}(x)$ をBernsteinの多項式と呼ばれることもある.

多項式 $\varphi_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ $(k=0,1,2,\dots,n)$ とおく.

ここで $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ = (n個からk個とる組み合わせの個数), ← ${}_nC_k$

$\boxed{1}$ $$\sum_{k=0}^{n} \varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \overset{\text{二項定理}}{=} (x+(1-x))^n = 1^n = 1.$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,\varphi_{n,k}(x) = nx$ を示そう. (平均)

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = nx \overbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}}^{1 \;(\text{二項定理})} = nx.$$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\varphi_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$ を示そう。

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 \overbrace{\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}x^{k-2}(1-x)^{n-k}}^{\overset{1}{\overset{\parallel}{}}\ \leftarrow \text{二項定理}} = n(n-1)x^2.$$

$\boxed{4}$ $$\sum_{k=0}^{n} k^2\varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n}k(k-1)\varphi_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n}k\varphi_{n,k}(x)$$

$$\overset{\boxed{2},\boxed{3}}{=} n(n-1)x^2 + nx.$$

$\boxed{5}$ $$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n}k^2\varphi_{n,k}(x) - 2nx\sum_{k=0}^{n}k\varphi_{n,k}(x) + n^2x^2\sum_{k=0}^{n}\varphi_{n,k}$$

$$\overset{\boxed{4},\boxed{2},\boxed{1}}{=} \underbrace{n(n-1)x^2}\ \boxed{+nx} - 2nx\cdot nx \quad + n^2x^2$$

キャンセル

$$= n^2x^2 \boxed{-nx^2}$$

$$= nx - nx^2 = nx(1-x).$$ (分散)

以上で準備終。

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続であるとする。

$g(x)=f((1-x)a+xb)$ で、連続関数 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ を定める。

このとき、$f(x)=g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ $(a\leqq x\leqq b)$ となっている。

ゆえに、$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ の代わりに、$g:[0,1]\to\mathbb{R}$ について、定理を示せば十分である。（g に一様収束する多項式関数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ を作ればよい。）

多項式関数 $g_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ を

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_{n,k}(x) \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

と定める。

$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $[0,1]$ 上で g に一様収束することを示そう。

任意に $\varepsilon>0$ をとる。

$\boxed{6}$ g はコンパクトな $[0,1]$ 上の実数値連続函数なので、$M=\max_{x\in[0,1]}|g(x)|$ が存在する。

$\boxed{7}$ g はコンパクト距離空間 $[0,1]$ 上の実数値連続函数なので、一様連続になる。ゆえに、ある $\delta>0$ が存在して、

$$x,y\in[0,1] \text{ かつ } |x-y|<\delta \Longrightarrow |g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$\boxed{8}$ 正の整数 N を十分大きくして、$\dfrac{M}{2N\delta^2}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ となるようにしておく。そして、以下、$n\geqq N$ と仮定し、$x\in[0,1]$ を任意にとって固定しておく。

$\boxed{9}$

$$g(x)-g_n(x)=g(x)\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\varphi_{n,k}(x)}_{\boxed{1}\text{ より}\to=1}-\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_{n,k}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right)\varphi_{n,k}(x),$$

$\varphi_{n,k}(x)\geqq 0$ ($x\in[0,1]$ より) なので、

$$|g(x)-g_n(x)|=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right)\varphi_{n,k}(x)\right| \overset{\text{三角不等式}}{\leqq} \sum_{k=0}^{n}\left|g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|\varphi_{n,k}(x).$$

$\left|g(x)-g_n(x)\right| \leqq \sum_{k=0}^{n} \left|g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \varphi_{n,k}(x)$ の右辺の和を以下で

$\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta$ の k たち と $\left|x-\frac{k}{n}\right| \geqq \delta$ の k たち に分割して考える.

$\boxed{10}$

$$\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta} \underbrace{\left|g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2}\ \leftarrow \boxed{7}\text{より}} \varphi_{n,k}(x) < \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta} \varphi_{n,k}(x)}_{\leqq 1\ \leftarrow \boxed{1}\text{より}} \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\boxed{11}$

$$\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqq\delta} \left|g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \varphi_{n,k}(x) \leqq \sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqq\delta} \Big(\underbrace{|g(x)|+\left|g\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{\leqq 2M\ \leftarrow \boxed{6}\text{より}}\Big) \varphi_{n,k}(x)$$

$$\leqq 2M \sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqq\delta} 1\cdot\varphi_{n,k}(x) \leqq 2M \sum_{k=0}^{n} \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \varphi_{n,k}(x) \underset{\boxed{5}}{\leqq} \frac{2M}{n^2\delta^2} \overbrace{nx(1-x)}^{\frac{1}{4} \ \geqq\ \leftarrow x\in[0,1]}$$

$\left|x-\frac{k}{n}\right| \geqq \delta \iff \left(x-\frac{k}{n}\right)^2 \geqq \delta^2 \iff \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \geqq 1$

$$\leqq \frac{M}{2n\delta^2} \underset{n\geqq N}{\leqq} \frac{M}{2N\delta^2} \underset{\boxed{8}}{<} \frac{\varepsilon}{2}.$$

$n \geqq N \leftarrow \boxed{8}$

$\boxed{12}$ 以上より, $n \geqq N$ のとき, 任意の $x \in [0,1]$ について,

$$|g(x) - g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となることがわかった. これは $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が g に $[0,1]$ 上一様収束することを意味している.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{問題}}$ $\displaystyle\max_{x \in [0,1]} \varphi_{n,k}(x) = \varphi_{n,k}\left(\frac{k}{n}\right)$ となることを確認し,

$y = \varphi_{n,k}(x)$ のグラフが単峰型になることを実際にグラフを描いて確認せよ、このことが上の証明にどのように関係しているかを考えよ、

$\square$