距離空間論　黒木玄　2021年度作製

① 上限 sup と下限 inf
② 基本的な不等式 (Jensenの不等式, Young, Hölder, Minkowskiの不等式, Gibbsの情報不等式)
③ 写像による像と逆像
④ $\mathbb{R}$上のベクトル空間のノルム (ℓ^pノルム, $\mathbb{R}^n$のすべてのノルムは同値, supノルム, L^pノルム)
⑤ 距離空間 (定義, 同値な距離函数, 部分空間)
⑥ 連続写像と点列の収束 (等長性, ε-δ, ε-N, 収束点列の有界性, 点列による連続性の特徴付け, 有界性)
⑦ 四則演算の連続性 (ε-δの証明の作り方)
⑧ Cesàro和 (ε-Nの証明の見付け方)
⑨ ε近傍系 $U_\varepsilon(a)$
⑩ 開集合系
⑪ 位相空間 (2点集合の離散, 片思い, 密着位相, 連続写像, 同相写像, 相対位相)
⑫ 閉集合系 ($\mathbb{R}$の有界閉集合は最大値と最小値を持つこと, Cantor集合)
⑬ 閉包 (開核も同時に定義, 開円盤, 閉円盤, 半開区間, etc., 閉包の直接的特徴付け)
⑭ 点と部分のつながり方 (直観的な話)
⑮ 連続写像のたくさんの特徴付けのまとめ
⑯ 集積点
⑰ 稠密性 ($\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, Weierstrassの多項式近似定理(結果のみ), $K[x]\subset K[[x]]$)
⑱ 一様収束 (sup距離, 一様収束が函数の連続性を保つこと, $\frac{\varepsilon}{3}$論法)
⑲ コンパクト性 (連続写像の像でコンパクト性が保たれること, $\mathbb{R}$の有界閉集合)
⑳ 距離空間のHausdorff性 (コンパクト部分集合が閉集合になること)
㉑ 全有界性 (コンパクト距離空間が全有界になること)
㉒ コンパクト位相空間上の実数値連続函数は最大値と最小値を持つ。
㉓ 一様連続性 (階段函数による一様近似)
㉔ 完備性 (Cauchy列)
㉕ 完備な距離空間の例 (実数の完備性, Banach空間, $\mathbb{R}^n$, $C([a,b],\mathbb{R})$)
㉖ 絶対収束
㉗ 縮小写像
㉘ コンパクト性の特徴付け ($\mathbb{R}^n$の有界閉集合)
㉙ Weierstrassの多項式近似定理
㉚ 完備化

上限 sup = 最小上界 と 下限 inf = 最大下界

$A \subset \mathbb{R}$ であるとする。

$\alpha \in \mathbb{R}$ が A の<u>上界</u> (upper bound) であるとは，任意の $x \in A$ について $x \leq \alpha$ が成立することである。

A の上界が存在するとき，A は<u>上に有界</u> (bounded above) であるという。

不等式の向きを逆にすることによって，<u>下界</u>(lower bound) と<u>下に有界</u> (bounded below) が定義される。

A の上界全体の集合の最小値を A の<u>上限</u> (supremum) または<u>最小上界</u> (minimum upper bound) と呼び，$\sup A$ と表わす

同様に，A の<u>下限</u>(infimum) = 最大下界 (maximum lower bound) $\inf A$ が定義される。

$\sup A$ が A の中に存在するならば $\sup A$ は A の最大値に一致する ($\inf A$ についても同様)。

$\boxed{\text{実数の連続性の1つの表現}}$ 空でない$\begin{matrix}\text{上}\\\text{下}\end{matrix}$に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合には$\begin{matrix}\text{上限}\\\text{下限}\end{matrix}$が存在する。□

$A \neq \phi$ かつ A が上(下)に有界なら実数の連続性より，A の上限 $\sup A$ (下限 $\inf A$) が存在する。

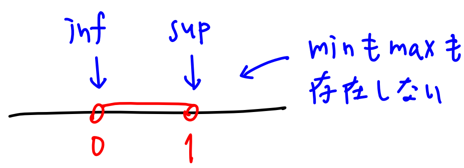
$A = \phi$ ならば A の上界全体の集合は $\mathbb{R}$ になる。そのとき，$\sup \phi = -\infty$ と約束しておく。

A が上に有限でない場合に $\sup A = \infty$ と約束しておく。

集合 X 上の函数 $f: X \to \mathbb{R}$ について，$\sup\limits_{x \in X} f(x) = \sup f(X) = \sup \{f(x) \mid x \in X\}$ とおき，<u>函数 f の値の X 上での上限</u>と呼ぶ。

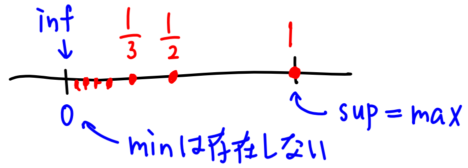
inf についても同様に定義しておく。

$\boxed{\text{例}}$ (1) $\sup (0,1) = \sup \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} = 1$，$\inf (0,1) = 0$。



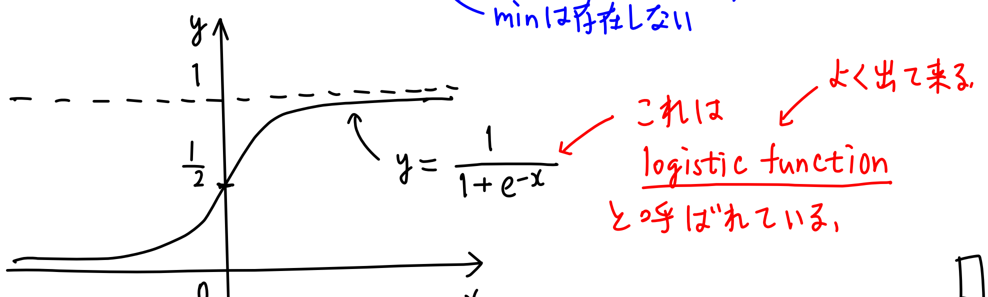
(2) $\inf \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\} = 0$

$\sup \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\} = \max \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\} = 1$



(3) $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \dfrac{1}{1+e^{-x}} = 1$，

$\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} \dfrac{1}{1+e^{-x}} = 0$。



□

定理 有界な単調増加実数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束する．（単調減少の場合も同様）

証明 実数の連続性（の1つの表現）より，$\alpha=\sup\{a_1,a_2,a_3,\dots\}$が存在する．
このとき，$a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq\cdots\leqq\alpha$となっている．もしも$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が$\alpha$に収束しないのであれば，
ある実数βで$a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq\cdots\leqq\beta<\alpha$をみたすものが存在し，$\alpha$より真に小さな$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の上界$\beta$が存在することになってしまい，$\alpha$が$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の上限＝最小上界であることに反する．
ゆえに$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はその上限αに収束する． □

例 $a_n=$（$\sqrt{2}$の小数点第n桁目まで）のとき，$a_1=1.4$，$a_2=1.41$，$a_3=1.414$，… は
有界な単調増加有理数列であり，有理数には収束しないが，実数$\sqrt{2}$に収束する． □

上極限 lim sup と下極限 lim inf

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は有界な実数列であるとする．このとき，$\{a_k\}_{k=n}^{\infty}=\{a_n,a_{n+1},a_{n+2},\dots\}$も有界である．
ゆえに実数の連続性（の1つの表現）より，下限$b_n=\sup\limits_{k\geqq n}a_k$と上限$c_n=\inf\limits_{k\geqq n}b_k$が存在する．
一般に実数の有界集合$A\supset B$について，$\inf A\leqq\inf B\leqq\sup B\leqq\sup A$が成立している．
ゆえに，$b_1\leqq b_2\leqq b_3\leqq\cdots\leqq c_3\leqq c_2\leqq c_1$が成立している．
特に，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$と$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$は上の定理より，それぞれ$\beta=\sup\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\leqq\gamma=\inf\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$に収束する．

定義 $\beta=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geqq n}a_k$と$\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geqq n}a_k$をそれぞれ点列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の<u>下極限 (limit infimum)</u>，<u>上極限 (limit supremum)</u>と呼び，それぞれを

$$\beta=\liminf_{n\to\infty}a_n\quad\leqq\quad\gamma=\limsup_{n\to\infty}a_n$$

と書く．有界な実数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$について，収束していなければ$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$と書いてはいけないが，
$\liminf\limits_{n\to\infty}a_n\leqq\limsup\limits_{n\to\infty}a_n$とはいつでも書くことが許される．これは非常に便利である． □

例 $a_n=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n} & (n\text{は正の奇数})\\ -1-\dfrac{1}{n} & (n\text{は正の偶数})\end{cases}$ とおく．このとき，$\begin{cases}a_1=1+\frac{1}{1},\ a_3=1+\frac{1}{3},\ a_5=1+\frac{1}{5},\dots\\ a_2=-1-\frac{1}{2},\ a_4=-1-\frac{1}{4},\ a_6=-1-\frac{1}{6},\dots\end{cases}$

なので $\sup\limits_{k\geqq n}a_k=1+\dfrac{1}{(n\text{以上の最小の奇数})}$，$\inf\limits_{k\geqq n}a_k=-1-\dfrac{1}{(n\text{以上の最小の偶数})}$，

$\limsup\limits_{n\to\infty}a_n=1$，$\liminf\limits_{n\to\infty}a_n=-1$． □

定理 有界な実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\alpha\in\mathbb{R}$ について以下の2つの条件は互いに同値である.

(a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束する.

(b) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

証明 よく使う (b)⇒(a) の証明のみを以下に示す.

(b)を仮定する. このとき, $\inf_{k\geqq n} a_k \leqq a_n \leqq \sup_{k\geqq n} a_k$ が成立しており, $\inf_{k\geqq n} a_k$ と $\sup_{k\geqq n} a_k$ は単調に同じ値 α に収束している. ゆえにそれらにはさまれた a_n も α に収束する.
これで (b)⇒(a) が示された.

□

注意 この辺の話は本当は ε-N 論法でしっかり証明を書いておいた方がよいことである.
しかし, この段階でこのノートでは ε-N 論法による収束の定義を述べていないので
以上のようなスタイルになっている.

参考のために上の定理の (a)⇒(b) の "ε-N" による証明も以下に書いておく.
後でこのページまでもどって勉強し直してほしい.

<u>(a)⇒(b)の証明</u> (a)を仮定し, $\varepsilon>0$ を任意にとる. ある番号 n が存在して,
$k\geqq n$ ならば $\alpha-\frac{\varepsilon}{2}<a_k<\alpha+\frac{\varepsilon}{2}$ となり, $\alpha-\varepsilon<\inf_{k\geqq n} a_k\leqq\sup_{k\geqq n} a_k<\alpha+\varepsilon$ となる.
これより, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となることがわかる.

□

基本的な不等式

たとえば I上で有界かつ連続な函数

$\mathbb{R}$の区間I上の(適当な条件をみたす)函数 $f: I \to \mathbb{R}$ に実数$E[f]$を対応させる函数 $f \mapsto E[f]$ は以下の条件をみたしていると仮定する: $f, g: I \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ について,

(1) $E[\alpha f + \beta g] = \alpha E[f] + \beta E[g]$ (線形性)

(2) I全体で $f \leqq g$ ならば $E[f] \leqq E[g]$ (単調性)

(3) 定数αに値を持つ定数函数αについて $E[\alpha] = \alpha$. (規格化)

このような$E[\ ]$を期待値汎函数と呼ぶ.

Eはexpectationの頭文字.

例 以下の$E[\ ]$は上の条件をみたしている.

- $x_1, \dots, x_n \in I$ について, $E[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.
- $p_1, \dots, p_n \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ のとき, $E[f] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) p_i$.
- $I = (a, b)$, $p(x) \geqq 0$ $(x \in (a, b))$, $\int_a^b p(x)\,dx = 1$ のとき, $E[f] = \int_a^b f(x) p(x)\,dx$. □

$x \in I$ を $x \in \mathbb{R}$ に対応させる函数を x と書き, $\mu = E[x]$ とおく.
$\mu \in I$ が成立していると仮定する. ($I = (0, 1)$, $E[f] = \lim_{x \to 0} f(x)$ のとき, $E[x] = 0 \notin I$)

Jensenの不等式 I上の上(下)に凸な函数 $f: I \to \mathbb{R}$ について, $E[f] \overset{\geqq}{\leqq} f(E[x])$ □

証明 簡単のため f はC^2級で $f'' \overset{\geqq}{\leqq} 0$ をみたしていると仮定する.

$y = f(x)$ $(x \in I)$ の $\mu = E[x] \in I$ での接線を $y = a(x - \mu) + f(\mu)$ と書くと,
fが上に凸であることより, $f(x) \overset{\geqq}{\leqq} a(x - \mu) + f(\mu)$ $(x \in I)$ が成立している. (ここがポイント)

ゆえに, $E[f] \underset{\text{単調性}}{\overset{\geqq}{\leqq}} E[a(x - \mu) + f(\mu)] \underset{\text{線形性・規格化}}{=} a(E[x] - \mu) + f(\mu) \underset{\mu = E[x]}{=} f(E[x])$. □

例 $I = \mathbb{R}_{>0} = (0, \infty) \ni x_i$, $E[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$, $f(x) = \log x$ のとき,

$E[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log x_i = \log (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$, $E[x] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ と Jensenの不等式より

$$\log (x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leqq \log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

$\log x$ は単調増加函数なので

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$ (相加相乗平均の不等式) □

Youngの不等式 $p,q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ a,b>0$ のとき, $ab \leqq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

証明 $E[f]=\frac{f(a^p)}{p}+\frac{f(b^q)}{q}$ と $f(x)=\log x$ について,

$$E[f]=\frac{\log a^p}{p}+\frac{\log b^q}{q}=\log a+\log b=\log(ab),\quad f(E[x])=\log\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right).$$

Jensenの不等式 $E[f]\leqq f(E[x])$ と $\log x$ の単調増加性より, $ab\leqq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$. □

Hölderの不等式 $p,q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ a_i,b_i\geqq 0$ のとき,

$$(*)\quad \sum_{i=1}^n a_ib_i \leqq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$

証明 $A=\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p},\ B=\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q},\ A_i=\frac{a_i}{A},\ B_i=\frac{b_i}{B}$ とおく,

$(*)$ は $\sum_{i=1}^n A_iB_i\leqq 1$ と同値であるので, $\sum_{i=1}^n A_iB_i\leqq 1$ を示そう.

ここがポイント

Youngの不等式と $\sum_{i=1}^n A_i^p=\sum_{i=1}^n B_i^q=1$ が成立していることより,

$$\sum_{i=1}^n A_iB_i\leqq\sum_{i=1}^n\left(\frac{A_i^p}{p}+\frac{B_i^q}{q}\right)=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^n A_i^p+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^n B_i^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$ □

Minkowskiの不等式 $p>1,\ x_i,y_i\in\mathbb{R}$ のとき

$$(**)\quad \left(\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|^p\right)^{1/p}\leqq\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n|y_i|^p\right)^{1/p}.$$

証明 $a_i=|x_i|,\ b_i=|y_i|$ とおくと, $|x_i+y_i|\leqq a_i+b_i$ より $((**)$の左辺$)\leqq\left(\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p\right)^{1/p}$ なので

$$(**)'\quad \left(\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p\right)^{1/p}\leqq\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}$$

を示せばよい. $q>1$ を $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ で定めると, $(p-1)q=pq\left(1-\frac{1}{p}\right)=pq\frac{1}{q}=p$ なので

$$\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p=\sum_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)^{p-1}$$

Hölderの不等式

$$\leqq\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(p-1)q=p\\ \frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}\end{array}\right.$$

なので, 両辺を $\left(\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$ でわって $(**)'$ を得る. □

ギブス
Gibbsの情報不等式 $p_i, q_i > 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$ のとき, $\sum_{i=1}^n q_i \log \frac{q_i}{p_i} \geqq 0$.

証明 $f(x) = x \log x$ とおくと, $f'(x) = \log x + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ より, $f(x)$ は下に凸である.
$E[f] = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{q_i}{p_i}\right) p_i$ の場合のJensenの不等式より

$$\sum_{i=1}^n q_i \log \frac{q_i}{p_i} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{q_i}{p_i} \log \frac{q_i}{p_i} = E[f] \geqq f(E[x]) = f\left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{p_i} p_i\right) = f(1) = 0. \qquad \square$$

注意 $x, y > 0$ の函数 $\frac{x}{y}$ と $x \log y$ を $0 \leqq x < \infty$, $0 \leqq y \leqq \infty$ に

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ \infty & (0<x<\infty \text{ かつ } y=0) \\ 0 & (0<x<\infty \text{ かつ } y=\infty) \\ x/y & (0<x<\infty \text{ かつ } 0<y<\infty) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ -\infty & (0<x<\infty \text{ かつ } y=0) \\ \infty & (0<x<\infty \text{ かつ } y=\infty) \\ x\log y & (0<x<\infty \text{ かつ } 0<y<\infty) \end{cases}$$

によって拡張すると, $0 \leqq q_i < \infty$, $0 \leqq p_i < \infty$, $\sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n p_i = 1$ のとき,

$$\sum_{i=1}^n g(q_i, f(q_i, p_i)) \geqq 0$$

が成立している. この形でGibbsの情報不等式が使われることが多い. $\square$

注意 $\Delta^{n-1} = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_{\geqq 0} \mid \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ とおく. $p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n) \in \Delta^{n-1}$ に対して, $D(q\|p) = \sum_{i=1}^n q_i \log(q_i/p_i)$ を<u>Kullback-Leibler情報量</u>(KL情報量)と呼ぶ.
KL情報量は「確率分布 p による確率分布 q のシミュレーションの誤差の大きさ」という意味を持っている(<u>Sanovの定理</u>について調べてみよ). KL情報量 $D(q\|p)$ は p と q について対称でないが, p と q の距離のようによく使われる. $\square$

注意 以上で証明した不等式は和 $\sum_{i=1}^n$ を積分 $\int_a^b dx$ でおきかえた場合も成立している.

<u>Hölder</u> $\left|\int_a^b f(x) g(x)\, dx\right| \leqq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$ $\left(p, q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

<u>Minkowski</u> $\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leqq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{1/p}$ $(p \geqq 1)$

<u>Gibbs</u> $p(x) \geqq 0$, $q(x) \geqq 0$, $\int_a^b p(x)\, dx = \int_a^b q(x)\, dx = 1$ のとき, $\int_a^b q(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}\, dx \geqq 0$. $\square$

問題 以上の不等式を示せ. $\square$

距離空間の話は解析学の話ともみなされる.
そこでは基本的な不等式はもっとも基本的な道具になる.

写像による像と逆像

$\left(f(A)=\{f(x)\mid x\in A\},\ f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\},\ X\setminus A=\{x\in X\mid x\notin A\}\right)$

問題 集合間の写像 $f:X\to Y$ と $A, A_i\subset X$ $(i\in I)$ と $B, B_j\subset Y$ $(j\in J)$ について以下を示せ.

(1) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J}B_j\right)=\bigcup_{j\in J}f^{-1}(B_j)$, $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J}B_j\right)=\bigcap_{j\in J}f^{-1}(B_j)$, $f^{-1}(Y\setminus B)=X\setminus f^{-1}(B)$.

(2) $\begin{cases} f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f(A_i), \\ f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\subset\bigcup_{i\in I}f(A_i) \text{ でかつ「常に = が成立} \Leftrightarrow f \text{ は単射」.}\end{cases}$

fは単射 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, x'\in X$ について $f(x)=f(x')$ ならば $x=x'$
$\Leftrightarrow$ $\forall x, x'\in X$ について $x\neq x'$ ならば $f(x)\neq f(x')$

(3) $A\subset f^{-1}(f(A))$ でかつ「fが単射ならば $A=f^{-1}(f(A))$」.

(4) $f(f^{-1}(B))=f(X)\cap B$ でかつ「fが全射ならば $f(f^{-1}(B))=B$」

fは全射 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall y\in Y$ について ある $x\in X$ で $y=f(x)$ となるものが存在する.

略解 (1) $x\in f^{-1}\left(\bigcup_{j=J}B_j\right)$のとき, $f(x)\in\bigcup_{j\in J}B_j$ なので, ある$j\in J$で$f(x)\in B_j$となるものがあり, $x\in f^{-1}(B_j)$となるので, $x\in\bigcup_{j\in J}f^{-1}(B_j)$. 逆に $x\in\bigcup_{j\in J}f^{-1}(B_j)$のとき, ある$j\in J$が存在して $x\in f^{-1}(B_j)$ すなわち $f(x)\in B_j$ となるので $f(x)\in\bigcup_{j\in J}B_j$ すなわち $x\in f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J}B_j\right)$.

$x\in f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J}B_j\right)$のとき, $f(x)\in\bigcap_{j\in J}B_j$ なのですべての$j\in J$について $f(x)\in B_j$ すなわち$x\in f^{-1}(B_j)$となり, $x\in\bigcap_{j\in J}f^{-1}(B_j)$を得る. 逆に $x\in\bigcap_{j\in J}f^{-1}(B_j)$のとき, すべての$j$について $x\in f^{-1}(B_j)$ すなわち $f(x)\in B_j$となり, $f(x)\in\bigcap_{j\in J}B_j$ すなわち $x\in f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J}B_j\right)$ を得る.

$x\in f^{-1}(Y\setminus B)$のとき, $f(x)\in Y\setminus B$ なので $f(x)\notin B$ すなわち $x\notin f^{-1}(B)$ となるので $x\in X\setminus f^{-1}(B)$. 逆に $x\in X\setminus f^{-1}(B)$のとき, $x\notin f^{-1}(B)$ すなわち $f(x)\notin B$ なので $f(x)\in Y\setminus B$ すなわち $x\in f^{-1}(Y\setminus B)$.

(2) $y\in f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)$のとき, $y=f(x)$, $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$と書け, ある$i\in I$で$x\in A_i$をみたすものがあるので $y=f(x)\in f(A_i)\subset\bigcup_{i\in I}f(A_i)$. 逆に $y\in\bigcup_{i\in I}f(A_i)$のとき, ある$i\in I$で$y\in f(A_i)$をみたすものがあるので, $y=f(x)$, $x\in A_i\subset\bigcup_{i\in I}A_i$と書けるので $y\in f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)$. ゆえに $f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f(A_i)$.

$y\in f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$のとき, $y=f(x)$, $x\in\bigcap_{i\in I}A_i$と書け, すべての$i\in I$について$x\in A_i$なので $y=f(x)\in f(A_i)$となり, $y\in\bigcap_{i\in I}f(A_i)$を得る. ゆえに $f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\subset\bigcap_{i\in I}f(A_i)$.

$A_i\subset X$ $(i\in I)$のとき常に $f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}f(A_i)$ となると仮定する. $x, x'\in X$, $x\neq x'$と仮定する. $A_1=\{x\}$, $A_2=\{x'\}$ とおくと $\phi=f(\phi)=f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)=\{f(x)\}\cap\{f(x')\}$ なので $f(x)\neq f(x')$. ゆえにfは単射である.

fは単射であるとし, $A_i\subset X$ $(i\in I)$とする. $y\in\bigcap_{i\in I}f(A_i)$を任意に取る. $y=f(x_i)$, $x_i\in A_i$ $(i\in I)$と表わせる. fは単射なので x_iたちは互いに等しい. $x=x_i$ $(i\in I)$ は $x\in\bigcap_{i\in I}A_i$をみたし, $y=f(x)$をみたす. ゆえに $y\in f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$なので $\bigcap_{i\in I}f(A_i)\subset f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$. $\supset$ は常に成立するので = を得る.

(3) $x\in A$ のとき, $f(x)\in f(A)$ なので $x\in f^{-1}(f(A))$. ゆえに $A\subset f^{-1}(f(A))$.

f は単射であると仮定し, $x\in f^{-1}(f(A))$ とする. $f(x)\in f(A)$ となるので $f(x)=f(x')$, $x'\in A$ と書ける. f は単射なので $x=x'\in A$. ゆえに $f^{-1}(f(A))\subset A$. $\supset$ は常に成立するので $=$ を得る.

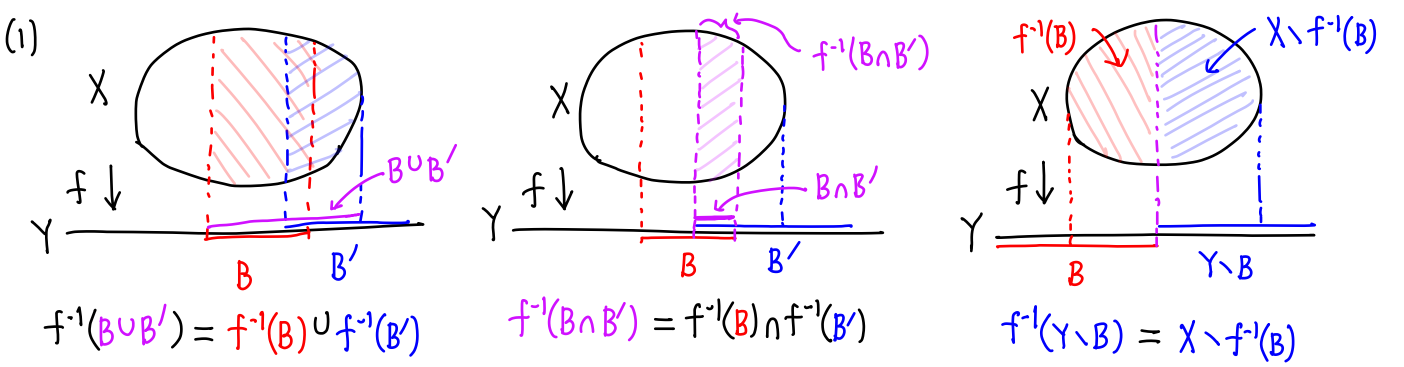
(4) $y\in f(f^{-1}(B))$ のとき, ある $x\in f^{-1}(B)$ が存在して $y=f(x)$ と書け, $x\in f^{-1}(B)$ より $y=f(x)\in f(X)\cap B$. ゆえに $f(f^{-1}(B))\subset f(X)\cap B$. 逆に $y\in f(X)\cap B$ のとき, $y=f(x)\in B$, $x\in X$ と書ける. そのとき, $x\in f^{-1}(B)$ でもあるので $y=f(x)\in f(f^{-1}(B))$. ゆえに $f(X)\cap B\subset f(f^{-1}(B))$. したがって, $f(f^{-1}(B))=f(X)\cap B$.

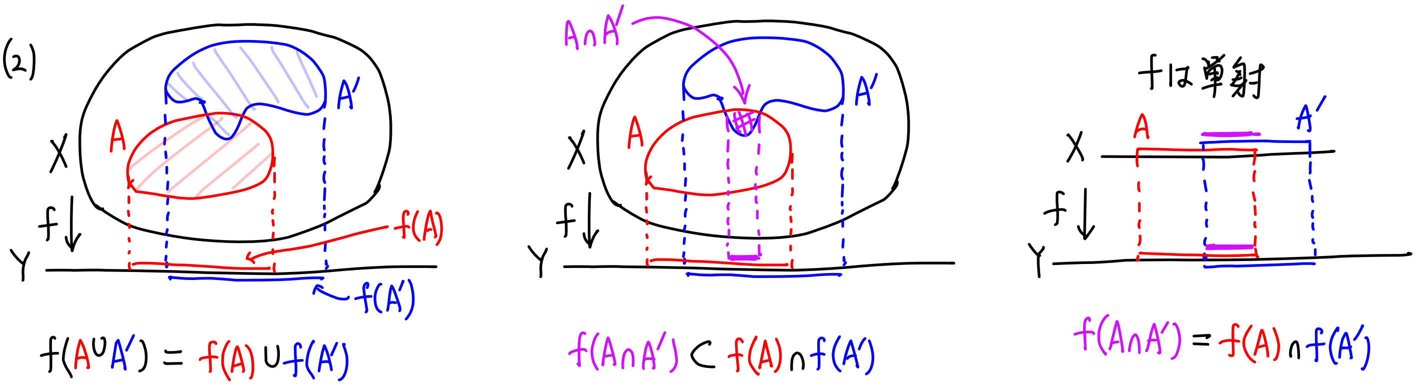
f が全射のとき, $f(X)=Y$ なので $f(f^{-1}(B))=f(X)\cap B=Y\cap B=B$. □

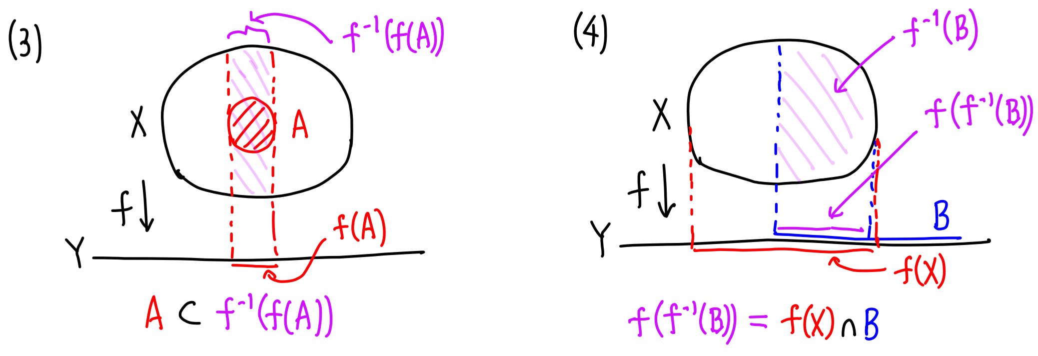
注意 以上は念のために略証を書いただけで, 読者の全員が内容を解読することを意図していない! 時間をかけて自分で証明を作ってほしい. そのとき, どうしても証明のアイデアが思い浮かばない場合には以上の略証を参照してもよい. □

問題 以上の図と上の問題の関係について考えてみよ.

一般の写像はある物体 X をある Y への射影の図で表わすと便利である.







自分でこのような図をたくさん描いてみよ

□

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間のノルム

V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であるとする.

例 $V = \mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$. □

例 $V = C([a,b], \mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ は連続$\}$ $(a < b)$. □

定義 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ がノルムであるとは, 以下の条件をみたすことである; $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ について,

(1) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ （三角不等式）

(2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$

(3) $\|v\| = 0 \iff v = 0$. （$\Rightarrow$ は非退化性と呼ばれている. $\Leftarrow$ は (2) から出る.）

例 $p \geq 1$ のとき, $\mathbb{R}^n$ におけるノルム $\|\cdot\|_p$ を

$$\|a\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \quad (a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n).$$

と定めることができる. ノルム $\|\cdot\|_\infty$ を

$$\|a\|_\infty = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$$

と定めることもできる. これらを ℓ^p ノルムと呼ぶ. □

（定義 ノルムが与えられたベクトル空間をノルム空間と呼ぶ.）

問題 (1) 上の例の $\|\cdot\|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ が $\mathbb{R}^n$ のノルムになることを示せ.

(2) $\lim_{p \to \infty} \|a\|_p = \|a\|_\infty$ を示せ. □

解説 (1) で非自明なのは三角不等式の証明だけであるが, Minkowski の不等式としてすでに証明されている.

(2) を示そう. $|a_1| = \cdots = |a_r| > |a_{r+1}| \geq \cdots \geq |a_n|$ して仮定してよい. そのとき,

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^p = |a_1|^p r \left(1 + \frac{1}{r}\sum_{i=r+1}^n \left(\frac{|a_i|}{|a_1|}\right)^p\right) \text{ より}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} = |a_1| \underbrace{r^{\frac{1}{p}}}_{\to 1} \left(1 + \frac{1}{r}\sum_{i=r+1}^n \underbrace{\left(\frac{|a_i|}{|a_1|}\right)^p}_{\to 0}\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[p \to \infty]{} |a_1| = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}.$$ □

定義 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V におけるノルム $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|'$ に対して, ある正の定数 C_1, C_2 で

$$C_1 \|a\| \leq \|a\|' \leq C_2 \|a\| \quad (a \in V)$$

が成立しているとき, 2つのノルム $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ は同値であるという. □

これは同値関係になる.

問題 $\infty \geqq p > q \geqq 1$ のとき, $a \in \mathbb{R}^n$ について次が成立することを示せ:

$$\|a\|_p \leqq \|a\|_q \leqq n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|a\|_p.$$

特に, $\mathbb{R}^n$ のノルム $\|\cdot\|_p$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ は互いにすべて同値である.

(例えば $\|a\|_2 \leqq \|a\|_1 \leqq \sqrt{2}\|a\|_2$)

解説 $\alpha = \|a\|_q > 0$ と仮定してよい. $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{R}$ と書く. $|a_i| \leqq \alpha$ となっている.

$p = \infty$ と仮定する. このとき,

$$\|a\|_p = \|a\|_\infty = \max_{1 \leqq i \leqq n} |a_i| = \left(\max_{1 \leqq i \leqq n} |a_i|^q\right)^{1/q} \leqq \left(\|a\|_q^q\right)^{1/q} = \|a\|_q.$$

$$\|a\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q} \leqq \left(n \max_{1 \leqq i \leqq n} |a_i|^q\right)^{1/q} = n^{1/q} \max_{1 \leqq i \leqq n} |a_i| = n^{1/q}\|a\|_\infty.$$

$p < \infty$ と仮定する.

$0 \leqq \left|\frac{a_i}{\alpha}\right| \leqq 1$ となるので, $p \geqq q > 0$ より $\left|\frac{a_i}{\alpha}\right|^p \leqq \left|\frac{a_i}{\alpha}\right|^q$ となる. ゆえに

$$\|a\|_p = \alpha \left\|\frac{1}{\alpha}a\right\|_p = \alpha\left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{a_i}{\alpha}\right|^p\right)^{1/p} \leqq \alpha\left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{a_i}{\alpha}\right|^q\right)^{1/p} = \alpha\left(\left\|\frac{1}{\alpha}a\right\|_q\right)^{q/p}$$

$$= \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\|a\|_q\right)^{q/p} = \alpha \cdot 1 = \|a\|_q.$$

これで $\|a\|_p \leqq \|a\|_q$ を示せた.

$p \geqq q > 0$ より, $\frac{p}{q} \geqq 1$ となるので, $x > 0$ において函数 $x^{\frac{p}{q}}$ は下に凸である.

ゆえに Jensen の不等式より,

$$\left(\frac{1}{n}\|a\|_q^q\right)^{p/q} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{p/q} \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(|a_i|^q\right)^{p/q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |a_i|^p = \frac{1}{n}\left(\|a\|_p\right)^p$$

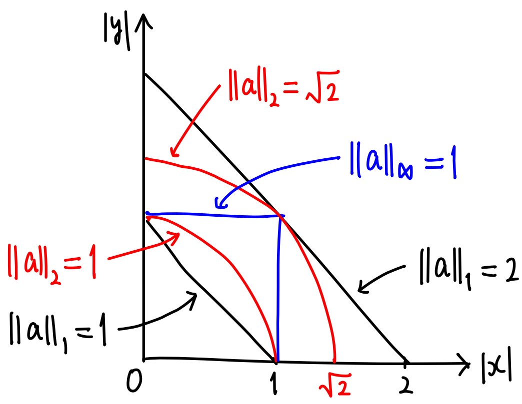
$$\therefore \quad n^{-1/q}\|a\|_q \leqq n^{-1/p}\|a\|_p, \quad \text{i.e.} \quad \|a\|_q \leqq n^{1/q-1/p}\|a\|_p.$$

これで $\|a\|_q \leqq n^{1/q-1/p}\|a\|_p$ も示せた.

□

例 ($n = 2$ のときの $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ の比較) $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ について,

$$\|a\|_1 = |x| + |y|, \quad \|a\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \|a\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$



この図より,

$$\begin{cases} \|a\|_\infty \leqq \|a\|_2 \leqq \|a\|_1 \\ \|a\|_\infty \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}\|a\|_2 \geqq \frac{1}{2}\|a\|_1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} \max\{|x|, |y|\} \leqq \sqrt{x^2 + y^2} \leqq |x| + |y| \\ \max\{|x|, |y|\} \geqq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geqq \frac{|x| + |y|}{2} \end{array}\right)$$

□

定理 $\mathbb{R}^n$ におけるすべてのノルムは互いにすべて同値である.

証明 $e_i = (0, \cdots, \overset{i}{1}, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (i番目のみが1で他は0) とおく.

$\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^n$における任意のノルムであるとする.

$a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ について, ノルム$\|\cdot\|$の三角不等式と Cauchy-Schwarz の不等式より, $c_2 = \sqrt{\|e_1\|^2 + \cdots + \|e_n\|^2}$ とおくと,

$$\|a\| = \left\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\right\| \leqq \sum_{i=1}^n |a_i| \|e_i\| \leqq c_2 \|a\|_2.$$

ゆえに, $a, b \in \mathbb{R}^n$ について, $\|a-b\| \leqq c_1 \sqrt{n} \|a-b\|_2$ なので通常の Euclid ノルム $\|\cdot\|_2$ について, ノルム $\|\cdot\|$ は連続になるので, $\mathbb{R}^n$の有界閉集合 $\{a \in \mathbb{R}^n \mid \|a\|_2 = 1\}$ (単位球面) 上でノルム $\|a\|$ は最小値 c_2 を持つ. $a \neq 0$ のとき $\|a\| > 0$ なので, $c_2 > 0$ となる.

したがって, $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ について, $\alpha = \|a\|_2 > 0$ とおくと, $\frac{1}{\alpha} a \in S^{n-1}$ となり,

$$\|a\| = \alpha \left\|\frac{1}{\alpha} a\right\| \geqq \alpha c_2 = c_2 \|a\|_2.$$

これで, 正の定数 c_1, c_2 が存在して, $c_2 \|a\|_2 \leqq \|a\| \leqq c_1 \|a\|_2$ となること, つまり, $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|_2$ が同値なノルムであることがわかった. ノルムの同値性は同値関係なので, $\mathbb{R}^n$のすべてのノルムが同値になることもわかる. □

注意 上の証明で,「$\mathbb{R}^n$の有界閉集合上の実数値連続函数が最小値を持つ」という結果を使った. この主張に出て来る「閉集合」「連続函数」の定義とこの結果については, 後でおいて詳しく説明する. (22を見よ.) □

約束 単に $\mathbb{R}^n$ と書いて距離空間とみなす場合には Euclid ノルム

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \qquad (x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

によって定めた距離函数を考えることにする. たとえば $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ の距離は

$$d(x, x') = |x - x'| \qquad (x, x' \in \mathbb{R})$$

と定義されていると考える. さらに, $\mathbb{R}^n$の部分集合を距離空間とみなす場合にも同様であるとする.

しかし, 上の定理より, Euclid ノルム以外の任意のノルムで距離を定義してもほとんどの結論は同じになる. □

例 $V = C([a,b],\mathbb{R}) = \{f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f は連続\}$ $(a<b)$ とする.

$f\in V$ は閉区間上の連続函数なので, $x\mapsto |f(x)|$ は閉区間 $[a,b]$ 上の $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 値の連続函数になるので, V の sup ノルム $\|\cdot\|_\infty$ が

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

と定義される. これが実際にノルムであることを示そう.

(注 $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ が成立することについては ㉒ を見よ.)

$f,g\in V$ について,

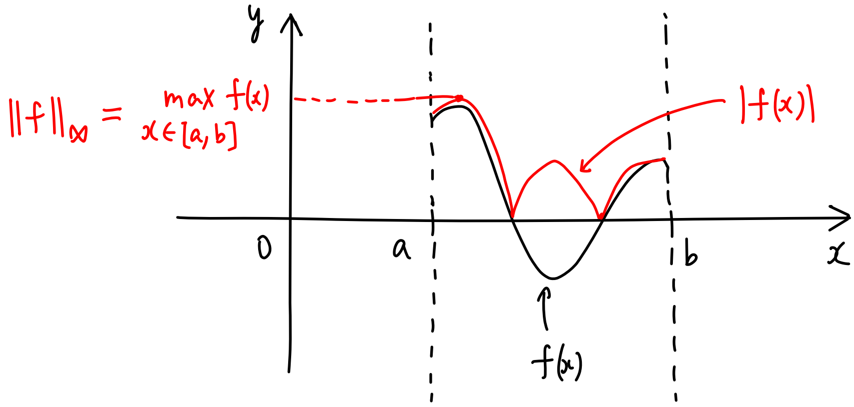
$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} (|f(x)|+|g(x)|) \leq \sup_{x,y\in[a,b]} (|f(x)|+|g(y)|)$$

$$= \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{y\in[a,b]} |g(y)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

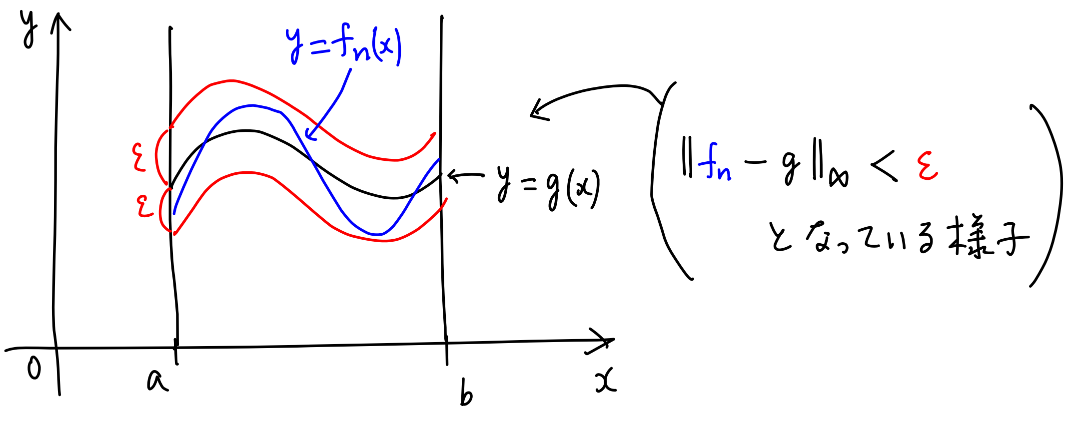
$f\in V, \alpha\in\mathbb{R}$ について,

$$\|\alpha f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |\alpha f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |\alpha||f(x)| = |\alpha| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = |\alpha|\,\|f\|_\infty.$$

$f\in V$ について, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0$ ならばすべての $x\in[a,b]$ について $f(x)=0$ となるので $f=0$. □



注意 後で詳しく説明するが sup ノルムに関する収束は一様収束に等しい.



□

例 $V = C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{は連続}\}$ $(a<b)$ とする。$p \geqq 1$ と仮定する。

$f \in V$ の L^p ノルムを

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

と定めることができる。(これが実際にノルムを定めることは自分で示せ。)

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \leqq \left(\int_a^b \|f\|_\infty^p dx\right)^{1/p} = (b-a)^{1/p}\|f\|_\infty .$$

$\alpha > p$ であるとし、連続函数列 $f_n \in V$ を次のように定める:

$$f_n(x) = \begin{cases} (x-a)^{-1/\alpha} & \left(a+\frac{1}{n} \leqq x \leqq b\right) \\ n^{1/\alpha} & \left(a \leqq x \leqq a+\frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

このとき、

$$\|f_n\|_\infty = n^{1/\alpha} \to \infty \quad (n \to \infty),$$

$$\|f_n\|_p \leqq \left(\int_a^b (x-a)^{-p/\alpha} dx\right)^{1/p} = \left(\left[\frac{(x-a)^{1-p/\alpha}}{1-p/\alpha}\right]_a^b\right)^{1/p} = \frac{(b-a)^{1/p-1/\alpha}}{(1-p/\alpha)^{1/p}} .$$

なので、正の定数 C で $\|f_n\|_\infty \leqq C\|f_n\|_p$ $(n=1,2,\dots)$ をみたすものは存在しない

特に、$\|\cdot\|_\infty$ と $\|\cdot\|_p$ は同値ではない。 □

これは本質的に Hölder の不等式　　これの $p=r,\ q=\infty,\ f=1$ の場合が上に出てきた

問題 $p,q,r \geqq 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$ のとき、$\|fg\|_r \leqq \|f\|_p\|g\|_q$ となることを示せ。

略解 $p' = \frac{p}{r}$, $q' = \frac{q}{r}$ とおくと、$p', q' \geqq 1$ かつ $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$。$\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}$, $\tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_q}$ とおく。

$a = |\tilde{f}(x)|^r$, $b = |\tilde{g}(x)|^r$ に Youn の不等式を適用すると、

$$|\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)|^r = ab \leqq \frac{a^{p'}}{p'} + \frac{b^{q'}}{q'} = \frac{|\tilde{f}(x)|^p}{p'} + \frac{|\tilde{g}(x)|^q}{q'} .$$

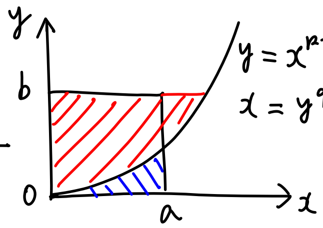
これを $x \in [a,b]$ で積分すると、$\left(\|\tilde{f}\tilde{g}\|_r\right)^r \leqq \frac{1}{p'}\left(\|\tilde{f}\|_p\right)^p + \frac{1}{q'}\left(\|\tilde{g}\|_q\right)^q = \frac{1}{p'}+\frac{1}{q'} = 1.$ □

問題 $\infty > p > q \geqq 1$ のとき、$V = C([a,b],\mathbb{R})$ において、$\|\cdot\|_p$ と $\|\cdot\|_q$ が同値でないことを示せ。

略解 $p > \alpha > q$ であるとし、$f_n(x) = \begin{cases} (x-a)^{-1/\alpha} & \left(a+\frac{1}{n} \leqq x \leqq b\right) \\ n^{1/\alpha} & \left(a \leqq x \leqq a+\frac{1}{n}\right) \end{cases}$ を使えば示せる。 □

Youngの不等式 $a,b \geqq 0$, $p,q \geqq 0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ のとき、$p-1 = \frac{p}{q} = \frac{1}{q-1}$ なので、

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = \int_0^a x^{p-1}dx + \int_0^b y^{q-1}dy \geqq ab$$



$y = x^{p-1} = x^{\frac{1}{q-1}}$

$x = y^{q-1} = y^{\frac{1}{p-1}}$

□

距離空間

定義 (距離空間, metric space) 集合 X と函数 $d: X\times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ の組 (X, d) で以下の条件をみたすものを<u>距離空間</u>と呼ぶ: $x, y, z \in X$ について,

(1) $d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z)$ (三角不等式)

(2) $d(y,x) = d(x,y)$ (対称性)

(3) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ ($\Rightarrow$ を非退化性と呼ぶ)

このとき, $d: X\times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を<u>距離函数</u>と呼び, $d(x,y)$ を x と y の<u>距離</u>と呼ぶ □

例 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし, $\|\cdot\|$ をそのノルムとするとき, 距離函数を

$$d(a,b) = \|a-b\| \quad (a, b \in V)$$

と定めると, (V, d) は距離空間になる. 実際,

$$\begin{cases} d(a,c) = \|a-c\| = \|a-b+b-c\| \leqq \|a-b\| + \|b-c\| = d(a,b) + d(b,c), \\ d(b,a) = \|b-a\| = \|-1(a-b)\| = |-1|\,\|a-b\| = \|a-b\| = d(a,b), \\ d(a,b) = \|a-b\| = 0 \iff a-b=0 \iff a=b. \end{cases}$$

□

定義 集合 X の2つの距離函数 $d, d': X\times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して, 正の定数 c_1, c_2 で

$$c_1 d(x,y) \leqq d'(x,y) \leqq c_2 d(x,y) \quad (x, y \in X)$$

をみたすものが存在するとき, d と d' は<u>同値</u>であるという. (これは同値関係になる.) □

例 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間上の同値なノルムは同値な距離函数を与える. □

注意 同値な距離は同値な"解析学"を与えると考えられることが後でわかる.
たとえば, $\mathbb{R}^n$ の ℓ^p ノルム

$$\|a\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \quad (a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ 1 \leqq p \leqq \infty)$$

の各々ごとに ℓ^p 距離

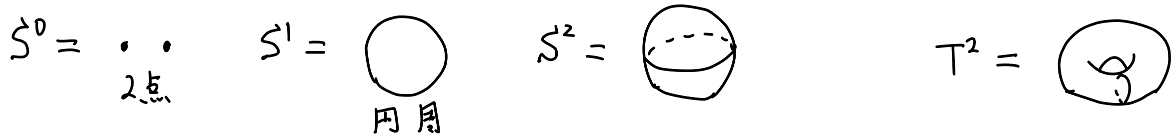
$$d(a,b) = \|a-b\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|^p\right)^{1/p} \quad (a, b \in \mathbb{R}^n,\ 1 \leqq p \leqq \infty)$$

が定義される. $\mathbb{R}^n$ の ℓ^p ノルムは (実際には $\mathbb{R}^n$ のすべてのノルムは) 互いに同値なので, これらは同値な"解析学"を与える. たとえば, 点列の収束性はどのノルム, どの距離についても同値になる. □

$\boxed{\text{定義}}$ (部分空間) 距離空間 (X, d_X) と X の部分集合 Y について、距離函数 $d_X : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ の $Y \times Y$ 上への制限を $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ と書くと、(Y, d_Y) も距離空間になる。
この (Y, d_Y) を X の <u>距離部分空間</u> (metric subspace) と呼ぶ。 □

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{R}^n$ は Euclid ノルム $\|\cdot\|_2$ によって距離空間とみなされる。
$\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合も上の定義によって距離空間とみなされる。 □

$\boxed{\text{例}}$ $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ は <u>$n-1$ 次元球面</u> と呼ばれる。$S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ なので S^{n-1} は距離空間とみなされる。 □



$\boxed{\text{例}}$ $T^n = \{x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = \cdots = x_{2n-1}^2 + x_n^2 = 1\}$ は <u>n 次元トーラス</u> と呼ばれる。$T^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ なので T^n は距離空間とみなされる。 □

$\boxed{\text{例}}$ 体 K 係数の形式べき級数全体の集合を $K[[x]]$ と書く:

$$K[[x]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, \dots \in K \right\}.$$

この例に類似した距離空間に $\mathbb{Z}_p = (p\text{進整数環})$ がある。p 進体 $\mathbb{Q}_p$ と形式 Laurent 級数体 $K((x))$ は似ている。

$K[[x]]$ には自然に K 上のベクトル空間の構造が入る:
$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, $f, g \in K[[x]]$, $\alpha \in K$ について、

$$f + g := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k, \quad \alpha f = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k) x^k.$$

(さらに、$fg = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ によって環の構造が入る。)

$f \in K[[x]]$ について、$|f| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$|f| = \begin{cases} 0 & (f = 0) \\ e^{-r} & (f = a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \cdots,\ a_r \neq 0) \end{cases}$$

$0 = e^{-\infty}$

← この $|\cdot|$ を <u>付値</u> (valuation) と呼ぶ

と定めると、$|f + g| \leq \max\{|f|, |g|\} \leq |f| + |g|$ が成立していることより、$K[[x]]$ に距離函数を $d(f, g) = |f - g|$ と定めることによって、$K[[x]]$ は距離空間とみなされる。

この距離に関して、f が 0 に近いことは、$f = a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \cdots$, $a_r \neq 0$ と表わしたときに $r = (f \text{ の } x = 0 \text{ での位数})$ が大きいことと同じになる。 □

$\boxed{\text{注意}}$ 上の $K[[x]]$ は完備距離空間の例にもなっている。 □

距離空間のあいだの写像の連続性と距離空間内の点列の収束

定義 (等長写像) 距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) のあいだの写像 $f: X \to Y$ が <u>等長的</u> (isometric) であるとは, 任意の $x, x' \in X$ に対して, $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ が成立することだと定める. 等長的な写像を <u>等長写像</u> と呼ぶ. □

距離空間のあいだの「よい写像」として, よく使われるのは, 等長写像よりもずっと弱い非自明な条件で定義される連続写像である. 以下では距離空間のあいだの写像の連続性について順番に説明して行く.

$f: X \to Y$ が点 $a \in X$ において連続であるとは, おおざっぱに言えば,

$x \in X$ が a にいくらでも近付くとき, $f(x)$ が $f(a)$ にいくらでも近付く

ことである. これを正確に言い直すと次の定義になる! (非自明! 半年位考えるべきこと!)

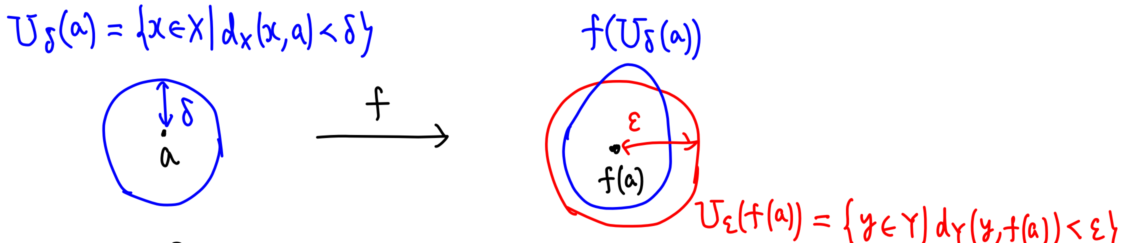
定義 (写像の一点での連続性) 距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) のあいだの写像 $f: X \to Y$ が点 $a \in X$ において連続であるとは, 次の条件をみたしていることである:

(☆) 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して,
$x \in X$ かつ $d_X(x, a) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる. □

注意 「$d_X(x, a) < \delta$」と「$d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$」をそれぞれ「$d_X(x, a) \leqq \delta$」と「$d_Y(f(x), f(b)) \leqq \varepsilon$」でおきかえても (☆) と同値な条件が得られる. さらに正の定数 K, L について, 「$d_X(x, a) < \delta$」と「$d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$」をそれぞれ「$d_X(x, a) \leqq K\delta$」と「$d_Y(f(x), f(b)) \leqq L\varepsilon$」におきかえても (☆) と同値な条件が得られる. □

注意 上の $f: X \to Y$ が点 $a \in X$ で連続でないという条件は次と同値になる:

(☆☆) ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $\delta > 0$ について,
ある $x \in X$ で $d_X(x, a) < \delta$ かつ $d_Y(f(x), f(a)) \geqq \varepsilon$ をみたすものが存在する.



どんなに $\delta > 0$ を小さくしても
$U_\varepsilon(a)$ の f による像 $f(U_\delta(a))$ のある部分が $U_\varepsilon(f(a))$ の外にはみだす場合に, f は点 a で連続ではない. □

定理 距離空間のあいだの写像 $f: X \to Y$ の点 $a \in X$ で連続であるという条件は、X と Y の距離函数を同値な別の距離函数に変えても同値なまま不変である。

証明 距離函数の同値性の対称性より、X の距離函数 d_X, d'_X がある正の定数 C_X について $d_X(x,x') \leqq C_X d'_X(x,x')$ $(x,x' \in X)$ をみたしており、Y の距離函数 d_Y, d'_Y がある正の定数 C_Y について $d'_Y(y,y') \leqq C_Y d_Y(y,y')$ $(y,y' \in Y)$ をみたしているときに（$'$ のついている場所が d_X と d_Y で逆になっていることに注意）、$f: X \to Y$ が a で d_X, d_Y について連続ならば d'_X, d'_Y についても連続になることを示せば十分である。

そのような仮定のもとで任意に $a \in X$ と $\varepsilon > 0$ をとる。

f の a での d_X, d_Y に関する連続性より、ある $\delta > 0$ が存在して、$x \in X$ が $d_X(x,a) < \delta$ をみたしているならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon / C_Y$ をみたしている。このとき、$d'_X(x,a) < \delta / C_X$ ならば $d_X(x,a) \leqq C_X d'_X(x,a) < \delta$ となるので、$d'_Y(f(x), f(a)) \leqq C_Y d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる。ゆえに、f は d'_X, d'_Y についても a で連続である。

□

注意 上の証明は以下の議論を ε-δ 論法で言い直しただけである。

- $d_X(x,a) \leqq C_X d'_X(x,a)$ より、$d'_X(x,a) \to 0$ ならば $d_X(x,a) \to 0$ となる。
- f が d_X, d_Y について連続より、$d_X(x,a) \to 0$ から $d_Y(f(x), f(a)) \to 0$ となる。
- $d'_Y(f(x), f(a)) \leqq C_Y d_Y(f(x), f(a))$ より、$d_Y(f(x), f(a)) \to 0$ から $d'_Y(f(x), f(a)) \to 0$ となる。
- 以上を合わせると、$d'_X(x,a) \to 0$ ならば $d'_Y(f(x), f(a)) \to 0$ となる。

ε-δ 論法による証明を直接的に作れない場合には、一度このように考えてから、内容を ε-δ に変換すればよい。

□

以下、めんどうなので距離函数 d_X, d_Y を両方単に d と書くことにする。

$\boxed{\text{定義}}$ (点列の収束) 距離空間 (X, d) において，X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $b \in X$ に収束するとは次の条件をみたすことである：

(*) 任意の $\varepsilon > 0$ について，ある番号 N が存在して，
$n \geqq N$ ならば $d(a_n, b) < \varepsilon$ となる． □

$\boxed{\text{注意}}$ 「$d(a_n,b)<\varepsilon$」を「$d(a_n,b) \leqq \varepsilon$」や定数 $C>0$ に関する「$d(a_n,b) \leqq C\varepsilon$」でおきかえても (*) と同値な条件が得られることに注意せよ．
(どうして同値になるか自分で考えてみよ．) □

$\boxed{\text{注意}}$ 距離空間 X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ があるb$\in X$ に収束するとき，点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するという．収束する点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束先は一意に定まる．収束先を $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ と書く． □

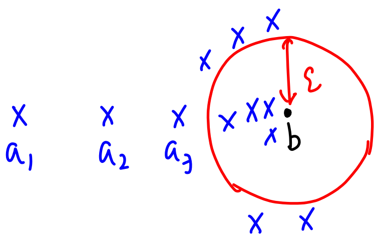
$\boxed{\text{注意}}$ 点列 $\{a_n\}_{n=1}^{n}$ が $b \in X$ に収束しないという条件は次と同値である．

(**) ある $\varepsilon > 0$ が存在して，任意の番号 N について，
ある $n \geqq N$ で $d(a_n, b) \geqq \varepsilon$ をみたすものが存在する．

この収束しないという条件は次のようにも言い換えられる：

無限個の意味

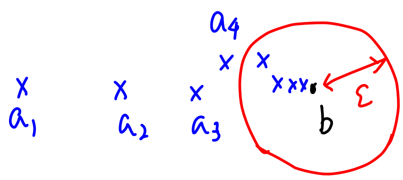
(**)′ ある $\varepsilon > 0$ で $d(a_n, b) \geqq \varepsilon$ をみたす n が無数にあるものが存在する．



$\varepsilon>0$ を十分に小さくすると，
b から ε 以上離れている
a_n が無限個あると，
a_n は b に収束していない．

点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が b に収束するという条件も次のように言い換えられる：

(*)′ 任意の $\varepsilon > 0$ について，$d(a_n, b) \geqq \varepsilon$ をみたす n は有限個しかない．



どんなに小さな $\varepsilon>0$ についても
b から ε 以上離れている
a_n が有限個しかないと，
a_n は b に収束している．

以上の ε-N 論法による点列の収束の定義について，ピンときていない人は，論理的な作業と図を描きながらの直観的作業をくりかえしていれば，いつかはピンとくるようになるだろう． □

補題 距離空間 X 上の点 a と点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について以下の2つの条件は互いに同値である.

(1) 点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束する.

(2) 数列 $\{d(a_n, a)\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する.

$\square$

これはほぼ自明なので自分で証明してほしい.

特に, 0 に収束する非負実数列 $c_n \to 0$ について $d(a_n, a) \leqq c_n$ が成立しているならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束している.

定理 集合 X 上の2つの距離函数 d, d' 同値であると仮定する. このとき, X 上の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $b \in X$ に距離函数 d について収束することと, 距離函数 d' について収束することは同値である.

証明 距離函数の同値性の対称性より, ある正の定数 C が存在して, $d'(x, y) \leqq C\,d(x, y)$ $(x, y \in X)$ が成立しているとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が b に d について収束していれば d' についても収束していることを示せばよい.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が b に d について収束していることは, $\{d(a_n, b)\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することは同値である. そのとき, $d'(a_n, b) \leqq C\,d(a_n, b)$ より, $\{d'(a_n, b)\}_{n=1}^{\infty}$ も 0 に収束するので, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が b に d' についても収束する.

$\square$

有界性 X は空でない距離空間であるとし，$A \subset X$ とする．

A が有界であるとは，ある $x_0 \in X$ とある $L > 0$ が存在して，
任意の $a \in A$ について $d(a, x_0) \leqq L$ が成立することであると定める．
$X = \phi$ のときにも $A = \phi$ は有界とみなす． □

注意 $x_0 \in X$, $L > 0$ について「任意の $a \in A$ について $d(a, x_0) \leqq L$」が成立していれば，
$x_1 \in X$, $M = L + d(x_0, x_1)$ について「任意の $a \in A$ について $d(a, x_1) \leqq M$」も成立している．

証明 三角不等式より，$d(a, x_0) \leqq d(a, x_0) + d(x_0, x_1) \leqq L + d(x_0, x_1) = M$． □

注意 距離空間 X の部分集合 A について，以下の2つの条件は互いに同値である：

(a) A は有界である．

(b) ある $M > 0$ が存在して，任意の $x, x' \in A$ について $d(x, x') \leqq M$．

証明 $A = \phi$ のとき，(a) $\Leftrightarrow$ (b) は自明なので $A \neq \phi$ と仮定してよい．

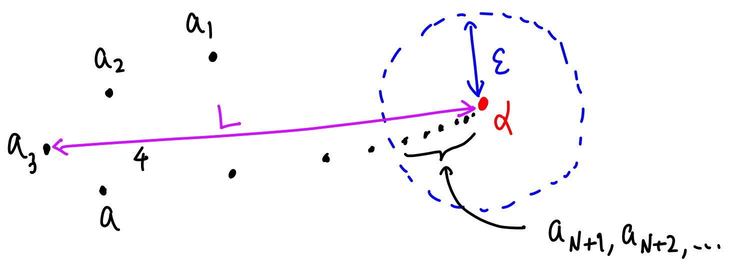
(a) $\Rightarrow$ (b)： (a) を仮定する．そのとき ある $x_0 \in X$ と $L > 0$ が存在して，
任意の $a \in A$ について $d(a, x_0) \leqq L$ となる．ゆえに，$M = 2L$ とおくと，$a, a' \in A$ に対して，

$$d(a, a') \leqq d(a, x_0) + d(x_0, a') = d(a, x_0) + d(a', x_0) \leqq L + L = M.$$

(b) $\Rightarrow$ (a)： (b) を仮定する．そのとき，ある $M > 0$ が存在して，任意の $a, a' \in A$ について
$d(a, a') \leqq M$ となる．特に $x_0 \in A$ を任意にとると，任意の $a \in A$ について $d(a, x_0) \leqq M$． □

命題 距離空間における収束する点列は有界である．

証明 X は距離空間であるとし，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X における $\alpha \in X$ に収束する点列であるとする．$\varepsilon > 0$ とする．ある N が存在して，$n \geqq N$ のとき $d(a_n, \alpha) < \varepsilon$ となる．
残りの $d(a_1, \alpha), \ldots, d(a_{N-1}, \alpha)$ の最大値と ε の大きい方を L とすると，すべての
$n = 1, 2, \ldots$ について，$d(a_n, \alpha) \leqq L$ となる．



ポイント：有限個の
$d(a_1, \alpha), \ldots, d(a_{N-1}, \alpha)$
であれば最大値をとれる．

□

$\boxed{\text{定理}}$ 距離空間のあいだの写像 $f: X \to Y$ と点 $a \in X$ について以下の2つの条件は互いに同値である.

(1) f は点 a で連続である.

(2) a に収束する X 上の任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, Y 上の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束する. ← $a_n \to a \Rightarrow f(a_n) \to f(a)$ と略記できる.

$\boxed{\text{証明}}$ $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$ f は点 a で連続であると仮定し, X 上の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束していると仮定する. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. f は点 a で連続なので, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$x \in X, \ d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon,$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束するので, ある N が存在して, $n \geqq N$ のとき, $d(a_n, a) < \delta$ となり, $d(f(a_n), f(a)) < \varepsilon$ となる. これは Y 上の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(a)$ に収束することを意味する.

$\underline{(2) \Rightarrow (1) \text{の対偶}}$ f は a で連続ではないと仮定する. すなわち, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $\delta > 0$ について, ある $x \in X$ で $d(x, a) < \delta$ かつ $d(f(x), f(a)) \geqq \varepsilon$ をみたすものが存在する. $n = 1, 2, \dots$ について, $\delta = \frac{1}{n}$ のときのそのような x のひとつを a_n と書くと,

$$d(a_n, a) < \frac{1}{n} \quad \text{かつ} \quad d(f(a_n), f(a)) \geqq \varepsilon.$$

このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束し, $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束しない. これで(2)の否定が得られた. □

$\boxed{\text{定義}}$ (連続写像) 距離空間のあいだの写像 $f: X \to Y$ が<u>連続</u> (continuous) であるとは X のすべての点において f が連続であることである. □

この講義では距離空間と連続写像が主役になる.
以下に述べる上の定理の系は点列の収束を保つことによって連続写像を特徴付けている.
連続写像写像の特徴付けは他にもたくさんある. ←(これ大事)

$\boxed{\text{上の定理の系}}$ (連続写像の点列の収束による特徴付け)
距離空間のあいだの写像 $f: X \to Y$ について以下の2つの条件は互いに同値である.

(1) f は連続である.

(2) X 上の収束する任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について Y 上の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して,

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

が成立する. □

四則演算の連続性

問題 以下の写像が連続であることを示せ。

(1) $f_+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_+(x,y) = x+y$,

(2) $f_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_-(x) = -x$,

(3) $f_\times : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_\times(x,y) = xy$,

(4) $f_{inv} : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R},\ f_{inv}(x) = x^{-1}$.

この問題の結果から
$\mathbb{R}^2$での点列 $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^\infty$ が $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}$ に収束していれば $\{a_n+b_n\}_{n=1}^\infty$ と $\{a_nb_n\}_{n=1}^\infty$ も収束して、

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \alpha+\beta$$

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \alpha\beta$$

などが成立することもわかる。

解答例 (1) $\varepsilon>0$ とする。$(a,b),(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $d((x,y),(a,b)) = ((x-a)^2+(y-b)^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$ とすると、

$$d(f_+(x,y), f_+(a,b)) = |(x+y)-(a+b)| \leqq |x-a|+|y-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) $\varepsilon>0$ とする。$a,x\in\mathbb{R}$, $d(x,a)=|x-a|<\varepsilon$ とすると、

$$d(f_-(x), f_-(a)) = |(-x)-(-a)| = |x-a| < \varepsilon.$$

(3) $\varepsilon>0$ とする。$(a,b),(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$d((x,y),(a,b)) = ((x-a)^2+(y-b)^2)^{\frac{1}{2}} < \min\left\{\underset{\text{①}}{\frac{\varepsilon/2}{1+|a|}},\ \underset{\text{②}}{1},\ \underset{\text{③}}{\frac{\varepsilon/2}{1+|b|}}\right\}$$

とすると、

$$|y| = |y-b|+|b| < \overset{\text{①}}{1}+|b|, \leftarrow \text{④}$$

$$d(f_\times(x,y), f_\times(a,b)) = |xy-ab| = |xy-ay+ay-ab| = |xy-ay|+|ay-ab|$$

$$\leqq |x-a||y| + |a||y-b| < \underset{\text{③}}{\frac{\varepsilon/2}{1+|b|}}\underset{\text{④}}{(1+|b|)} + |a|\underset{\text{②}}{\frac{\varepsilon/2}{1+|a|}} \leqq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(4) $\varepsilon>0$ とする。$a,x\in\mathbb{R}_{\neq 0}$,

$$d(x,a) = |x-a| < \min\left\{\underset{\text{①}}{\frac{|a|}{2}},\ \underset{\text{②}}{\frac{|a|^2}{2}\varepsilon}\right\}$$

とすると、

$$|x| = |x-a+a| \geqq |a|-|x-a| > |a| - \overset{\text{①}}{\frac{|a|}{2}} = \overset{\text{④}}{\frac{|a|}{2}}$$

三角不等式は
$|a\pm b| \geqq |a|-|b|$
$|a\pm b| \geqq |b|-|a|$
の形でも使われる。

$$d(f_{inv}(x), f_{inv}(a)) = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{|a||x|} < \frac{\overset{\text{②}}{|a|^2/2\cdot\varepsilon}}{\underset{\text{④}}{|a|\cdot|a|/2}} = \varepsilon.$$

□

注意 以上のように四則演算の連続性は一応非自明である。
証明をどのようにして見付けたかについても考えてみよ。
こういうことを理解するためには長時間の試行錯誤が必要になる。

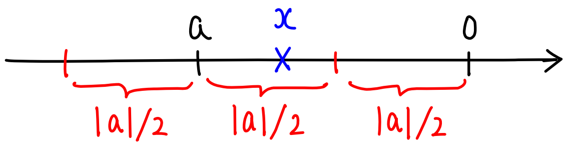
□

$\boxed{\text{証明の作り方}}$ (4) を例に説明。$a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, $\varepsilon > 0$ とする。

① $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ を a にどれだけ近付ければ, $d(f_{inv}(x), f_{inv}(a)) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$ とできるかを考える

② $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{|a||x|}$ を小さくするためには, まず $|x|$ をある一定以上0から離して, $|x-a|$ を小さくすればよい。

③ $a \neq 0$ なので $|x-a|$ を十分小さくすれば $|x|$ をある一定以上0から離せる。
たとえば $|x-a| < \frac{|a|}{2}$ とすれば $|x| > \frac{|a|}{2}$ となる。そのとき, $\frac{|x-a|}{|a||x|} < \frac{|x-a|}{|a|\cdot|a|/2}$.



三角不等式
$|x| = |x-a+a| \geqq |a| - |x-a|$ を使う。

④ $\frac{|x-a|}{|a||a|/2} < \varepsilon$ とするためには $|x-a| < \frac{|a|^2}{2}\varepsilon$ とすればよい。

⑤ $|x-a|$ を $\frac{|a|}{2}$ と $\frac{|a|^2}{2}\varepsilon$ よりも小さくするには, $\delta = \min\left\{\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2}{2}\varepsilon\right\} > 0$ より小さくすればよい。

⑥ 以上をまとめると, $a, x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, $\varepsilon > 0$, $d(x,a) = |x-a| < \min\left\{\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2}{2}\varepsilon\right\}$ のとき,
$$d(f_{inv}(x), f_{inv}(a)) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{|a||x|} > \frac{|a|^2/2 \cdot \varepsilon}{|a|\cdot|a|/2} = \varepsilon$$ となることがわかる。

⑦ これは, 任意の $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ と $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \min\left\{\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2}{2}\varepsilon\right\}$ とおくと, $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, $d(x,a) < \delta$ ならば $d(f_{inv}(x), f_{inv}(a)) < \varepsilon$ となることを意味している。
したがって, $f_{inv} : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ の連続性が証明された。 □

$\boxed{\text{注意}}$ $\delta > 0$ は a と ε に依存していてもよいが, x に依存していてはいけない。 □

$\boxed{\text{問題}}$ (1), (2), (3) についても以上と同じようなことを自分で考えてみよ。 □

Cesàro和 (チェザロ和)

$a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ が Cesàro総和可能 (Cesàro summable) であるとは、
$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ たちの平均の数列 $\left\{\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することであると定める。
そのとき、$\left\{\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ の収束先を $a_1, a_2, \dots$ の Cesàro和 (Cesàro sum) と呼ぶ。
($\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束していることは、部分和の数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束していることである。)

定理 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が σ に収束していれば、$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は Cesàro総和可能で Cesàro和は σ になる。

証明 数列 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ が σ に収束しているならば $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ が σ に収束することを示せばよい。

$\mathring{s}_n = s_n - \sigma$ とおく。$\mathring{s}_n$ が 0 に収束することと s_n が σ に収束することは同値であり、
$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathring{s}_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k - \sigma$ が 0 に収束することと $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ が σ に収束することは同値である。
ゆえに、$\mathring{s}_n$ が 0 に収束すると仮定して、$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathring{s}_k$ が 0 に収束することを示せばよい。

数列 $\{\mathring{s}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束すると仮定し、$\varepsilon > 0$ を任意にとる。

あるNが存在して、$n \geqq N$ のとき $d(\mathring{s}_n, 0) = |\mathring{s}_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる。ゆえに、$n \geqq N$ のとき

$$d\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathring{s}_k, 0\right) = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathring{s}_k\right| \overset{①}{\leqq} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\mathring{s}_k| \overset{②}{=} \frac{|\mathring{s}_1| + \cdots + |\mathring{s}_{N-1}|}{n} + \frac{|\mathring{s}_N| + \cdots + |\mathring{s}_n|}{n}$$

$$\overset{③}{\leqq} \frac{|\mathring{s}_1| + \cdots + |\mathring{s}_{N-1}|}{n} + \frac{|\mathring{s}_N| + \cdots + |\mathring{s}_n|}{n-N+1} \overset{④}{<} \frac{|\mathring{s}_1| + \cdots + |\mathring{s}_{N-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

① は三角不等式より、② は和の分割、③ は $n-N+1 \leqq n$ より、④ は $|\mathring{s}_N|, \dots, |\mathring{s}_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ より。

さらに、N' を $2(|\mathring{s}_1| + \cdots + |\mathring{s}_{N-1}|)/\varepsilon$ より大きい整数とすると $n \geqq N' > \frac{2}{\varepsilon}(|\mathring{s}_1| + \cdots + |\mathring{s}_n|)$ のとき、
$\frac{|\mathring{s}_1| + \cdots + |\mathring{s}_{N-1}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

ゆえに、$n \geqq \max\{N, N'\}$ のとき、$d\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathring{s}_k, 0\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ となる。

これで $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathring{s}_k$ も 0 に収束することが示された。 □

例 $a_n = (-1)^{n-1}$ のとき、$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \begin{cases} 1 & (n\text{は奇数}) \\ 0 & (n\text{は偶数}) \end{cases}$ となるので $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ は $\frac{1}{2}$ に収束する。$1-1+1-1+1-1+\cdots$ は収束していないが、Cesàro総和可能で Cesàro和は $\frac{1}{2}$ になる。 □

発散級数であっても適切な総和法で意味付け可能な場合が多数存在する。

$\boxed{\text{証明の見つけ方}}$ $s_n \to 0$ のとき、$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k \to 0$ を示したい。

① $s_n \to 0$ なので 大きな n について $|s_n|$ は小さい。

② $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = \underbrace{\frac{1}{n}(\underbrace{s_1 + \cdots + s_{N-1}}_{\substack{n\text{によらない。}\\ n\text{でわって}\\ n\text{を大きくすると}\\ \text{小さくなる。}}} + \underbrace{s_N + s_{N+1} + \cdots + s_n}_{\substack{\text{各々の絶対値は小さい}\\ \text{これらの平均は小さい。}}})}_{\substack{N\text{を大きくしてから}\\ n\text{を大きくすると小さくできる。}}}$$

③ 以上を ε-N 論法を使って正確に記述すれば $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k \to 0$ を証明できる。 □

Cesàro 和の話は ε-N 論法による収束の定義の応用の定番である。

Cesàro 和の応用例については

https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/06%20Taylor%27s%20theorems.pdf

の第4.3節を参照せよ。

$\boxed{\varepsilon\text{近傍系}}$ X は距離空間であるとする。点 $a \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して、

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

を点 a の ε近傍 (ε-neighborhood) と呼ぶ。それら全体

$$\{U_\varepsilon(a)\}_{\varepsilon > 0} = \{U_\varepsilon(a) \mid \varepsilon > 0\}$$

を a の ε近傍系と呼ぶ。点列の収束や写像の連続性の定義は、距離函数を使わずに ε近傍系のみを使って書き直される。

$\boxed{\text{点列の収束}}$ X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ と点 $b \in X$ について、

(1) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は b に収束する

$\iff$ 任意の $\varepsilon > 0$ について、ある N が存在して、$\{a_n\}_{n=N}^\infty \subset U_\varepsilon(b)$。 □

$\iff$ 任意の $\varepsilon > 0$ について、$a_n \notin U_\varepsilon(b)$ をみたす n は有限個しかない。

(2) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は b に収束しない

$\iff$ ある $\varepsilon > 0$ が存在して、任意の N について、$\{a_n\}_{n=N}^\infty \not\subset U_\varepsilon(b)$。

$\iff$ ある $\varepsilon > 0$ が存在して、$a_n \notin U_\varepsilon(b)$ をみたす n は無限個ある。

$\boxed{\text{写像の連続性}}$ 距離空間のあいだの写像 $f: X \to Y$ について、

(1) f は連続である

$\iff$ 任意の $a \in X$ と $\varepsilon > 0$ について、ある $\delta > 0$ が存在して、$f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$。

(2) f は連続ではない

$\iff$ ある $a \in X$ とある $\varepsilon > 0$ が存在して、任意の $\delta > 0$ について、$f(U_\delta(a)) \not\subset U_\varepsilon(f(a))$。 □

$\boxed{\text{例}}$ (1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ $(a_k \in \mathbb{R})$ と定めると f は連続である。

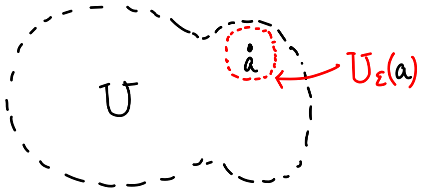
(2) $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \geq 0)$ と定めると f は連続である。

(3) $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ と $\log: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ はどちらも連続で互いに相手の逆写像である。 □

$\boxed{\text{問題}}$ これらを証明せよ。 □ ← けっこう基本的で大事。

開集合系　Xは距離空間であるとし，Uはその部分集合であるとする．

定義　UがXの<u>開集合</u>(open subset)であるとは，任意の$a\in U$に対して
ある$\varepsilon>0$で$U_\varepsilon(a)\subset U$となるものが存在することであると定める．



Xの開集合全体の集合 $\mathcal{U}_X=\mathcal{U}(X,d)$
Xの<u>開集合系</u>と呼ぶ．　□

$\mathcal{U}$は筆記体のU
何かの略ではない．

定理　(1) $\emptyset$とXは開集合である．
(2) Xの開集合たちの和集合もXの開集合である．
(3) Xの有限個の開集合の共通部分もXの開集合である．

開集合系の基本性質！
(位相空間論では
これを出発点にしたりする．)

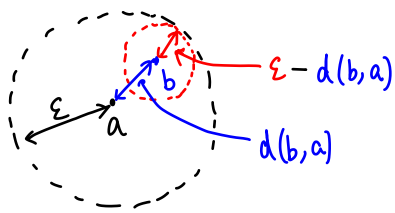
証明　(1) $a\in\emptyset$となることはないの自動的に$\emptyset$は開集合である．← これはなぜか？
$a\in X$と任意の$\varepsilon>0$について，$U_\varepsilon(a)\subset X$なので$X$も開集合である．

(2) $U=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$，$U_\lambda$は$X$の開集合とする．$a\in U$はどれかの$U_\lambda$に含まれる．$U_\lambda$は開集合なのである$\varepsilon>0$で$U_\varepsilon(a)\subset U_\lambda$となるものがある．そのとき，$U_\varepsilon(a)\subset U$なので$U$は開集合になる．

(3) $U=\bigcap_{i=1}^{n}U_i$，U_iはXの開集合とする．$a\in U$はすべてのU_iに含まれる．U_iは開集合なのである$\varepsilon_i>0$で$U_{\varepsilon_i}(a)\subset U_i$となるものがある．$\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}>0$とおくと，すべての$i$について$U_\varepsilon(a)\subset U_{\varepsilon_i}(a)\subset U_i$となるので$U_\varepsilon(a)\subset U$なので$U$は開集合である．　□

命題　$a\in X$，$\varepsilon>0$について，$U_\varepsilon(a)$はXの開集合である．

証明　$b\in U_\varepsilon(a)$とすると，$d(b,a)<\varepsilon$となる．ゆえに，$\delta=\varepsilon-d(b,a)>0$とおくと，
$x\in U_\delta(b)$のとき，$d(x,a)\leqq d(x,b)+d(b,a)<\delta+d(b,a)=\varepsilon$なので$x\in U_\varepsilon(a)$．
これで$U_\delta(b)\subset U_\varepsilon(a)$が示された．　□



命題　UがXの開集合 $\Leftrightarrow$ Uは$U_a(\varepsilon)$の形の集合の和集合で書ける．

証明　$\Rightarrow$を示そう．UはXの開集合であるとする．$a\in U$に対して，ある$\varepsilon_a>0$で$U_{\varepsilon_a}(a)\subset U$をみたすものが存在する．このとき，$U=\bigcup_{a\in U}U_{\varepsilon_a}(a)$となる．

$\Leftarrow$を示そう．$U=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_{\varepsilon_\lambda}(a_\lambda)$，$\varepsilon_\lambda>0$，$a_\lambda\in X$と仮定する．開集合の和集合も開集合なので開集合になる．　□

定理 (開集合系による連続写像の特徴付け)

距離空間のあいだの写像 $f: X \to Y$ について以下の2つの条件は同値である:

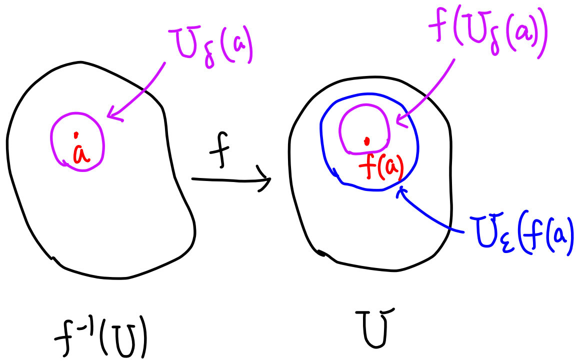
(1) f は連続である.

(2) Y の任意の開集合 U について, $f^{-1}(U)=\{x\in X \mid f(x)\in U\}$ は X の開集合になる.

証明 (1)⇒(2) f は連続であるとし, U は Y の開集合であるとする.
$a\in f^{-1}(U)$ を任意にとる. $f(a)\in U$ と U が開集合であることより, ある $\varepsilon>0$ が存在して, $U_\varepsilon(f(a))\subset U$ となる. f の連続性より, ある $\delta>0$ が存在して, $f(U_\delta(a))\subset U_\varepsilon(f(a))\subset U$ となり, $U_\delta(a)\subset f^{-1}(U)$ となる. これで $f^{-1}(U)$ が X の開集合であることがわかった.

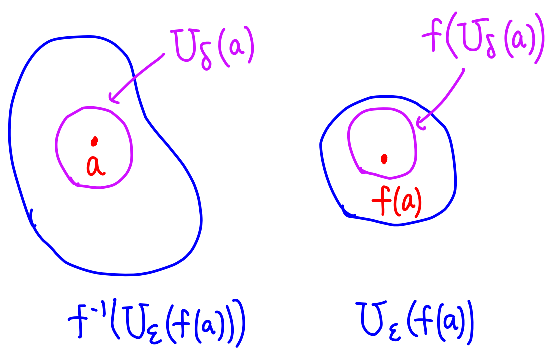
(2)⇒(1) (2) を仮定し, 任意に $a\in X$ と $\varepsilon>0$ をとる. $U_\varepsilon(f(a))$ は Y の開集合なので (2) より $f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$ は X の開集合になる. ゆえに, $a\in f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$ より, ある $\delta>0$ が存在して, $U_\delta(a)\subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$ となり, $f(U_\delta(a))\subset U_\varepsilon(f(a))$ を得る. これで, f が連続であることが示された. □

(1)⇒(2)の図 f は連続と仮定.



黒青赤紫の順序に描いた.

(2)⇒(1)の図 (2) を仮定



青赤紫の順序に描いた.

これらの図を自分で描きながら上の証明を追うとよい.

系 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ は距離空間のあいだの連続写像であるとする. このとき, $g\circ f: X\to Z$ も連続写像になる.

証明 U を Z の開集合とする. g の連続性より $g^{-1}(U)$ は Y の開集合になり, f の連続性より $f^{-1}(g^{-1}(U))$ は X の開集合になる. そして,

$$(g\circ f)^{-1}(U)=\{x\in X \mid g(f(x))\in U\} = \{x\in X \mid f(x)\in g^{-1}(U)\} = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

なので, $(g\circ f)^{-1}(U)$ が X の開集合であることがわかり, $g\circ f$ が連続であることが示される. □

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{R}^n$ に Euclid ノルムで距離を定義する. このとき,

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\}$ (半径 r の開球体)

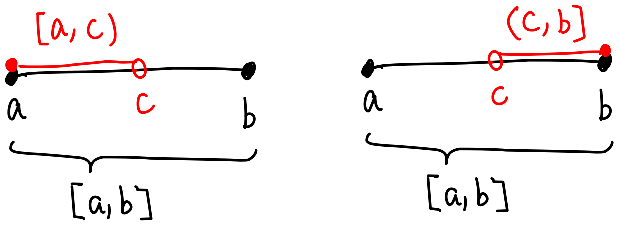
$\{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x > 0\}$ (半空間)

は $\mathbb{R}^n$ の開集合になる. □

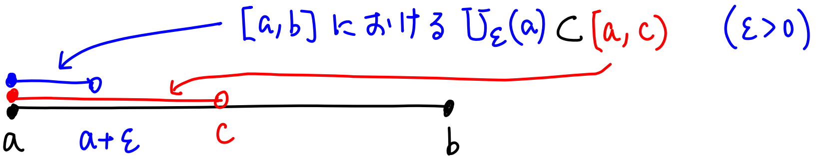
$\boxed{\text{例}}$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, 閉区間 $[a,b]$ を考える. 差の絶対値で距離を定義することによって, $[a,b]$ は距離空間とみなされる.

(1) $[a,b]$ は $[a,b]$ の開集合である.

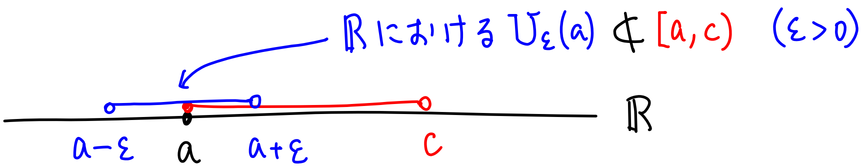
(2) $c \in [a,b]$ について, $[a,c)$ と $(c,b]$ は $[a,b]$ の開集合である.



$[a,c)$ と $(c,b]$ は $[a,b]$ の開集合である.

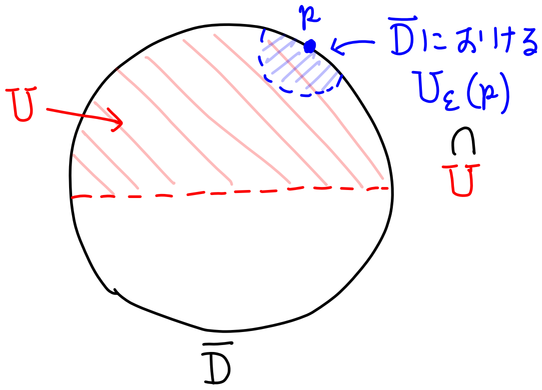


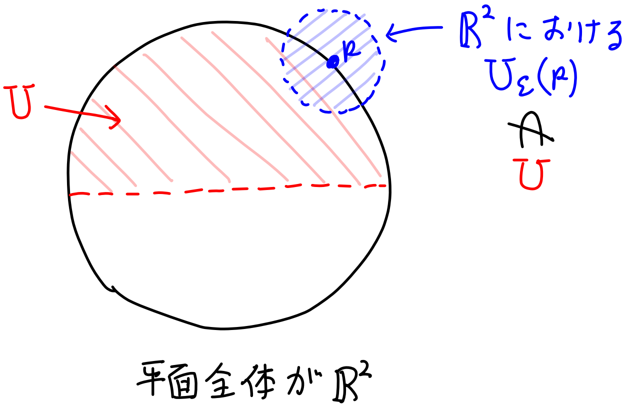
(3) $a < c < b$ のとき $[a,c)$ と $(c,b]$ は $\mathbb{R}$ の開集合ではない.



□

$\boxed{\text{例}}$ $\bar{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$ において, $U = \{(x,y) \in \bar{D} \mid y > 0\}$ は $\bar{D}$ の開集合だが, $\mathbb{R}^2$ の開集合ではない.





□

入れものが何であるかによって開集合になったりならなかったりする!

位相空間

開集合系の基本性質を出発点にして，位相空間が定義される．

定義 集合 X とその部分集合の集合 $\mathcal{U}_X$ の組 $(X, \mathcal{U}_X)$ で以下の条件をみたすものを<u>位相空間</u>（topological space）と呼び，$\mathcal{U}_X$ の要素を X の<u>開集合</u>（open subset）と呼ぶ：

(1) $\phi \in \mathcal{U}_X$ かつ $X \in \mathcal{U}_X$．

(2) $U_\lambda \in \mathcal{U}_X$ $(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}_X$．

(3) $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}_X$ ならば $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{U}_X$．

$\mathcal{U}_X$ を X の<u>位相</u>（topology）と呼ぶこともある．

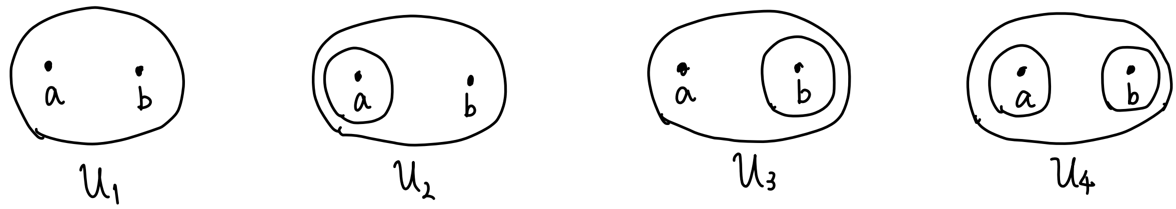
□

注意 開集合系 $\mathcal{U}_X$ のデータで位相空間を定義したが，閉集合系，閉包，開核，など多数の方法で同等な位相空間を定義できる．位相空間の概念は多くの応用場面で一般的すぎるので，適当に条件を追加したものが使用されることが多い．そして，「図形」の概念の抽象化として不十分な場合もあるので，さらなる別の抽象化が使われることもある．□

例 距離空間 X について，$\mathcal{U}_X = \{X$の開集合全体$\}$ とおくと，$(X, \mathcal{U}_X)$ は位相空間である．□

例 2点集合 $X = \{a, b\}$ $(a \neq b)$ の開集合系の全体は以下の4つである．

$\mathcal{U}_1 = \{\phi, X\}$，$\mathcal{U}_2 = \{\phi, X, \{a\}\}$，$\mathcal{U}_3 = \{\phi, X, \{b\}\}$，$\mathcal{U}_4 = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}\}$．



これらの直観的意味は以下の通り：

$\boxed{\mathcal{U}_4}$ a のみを含む開集合があるので，a から見て a は b から離れている．
b のみを含む開集合があるので，b から見て b は a から離れている．
a と b がばらばらに離れている様子が位相空間で表現されている．

（点 x を含むある開集合の外側に点 y があるとき，x から見て x は y から離れているように見えると考える．）

離散位相

$\boxed{\mathcal{U}_3}$ a から見ると a は b にくっついているように見えるが
b から見ると b は a からはなれているように見える． ←（片思い？）

$\boxed{\mathcal{U}_1}$ a と b は互いに相手にくっついている． ← 密着位相

□

距離空間のあいだの写像が ε-δ の意味で連続であることは，
その写像による開集合の引き戻し（逆像）が常に開集合になることと同値であった．
これを位相空間に次のように一般化する．

定義 $(X, \mathcal{U}_X)$, $(Y, \mathcal{U}_Y)$ は位相空間であるとする．写像 $f: X \to Y$ が連続であるとは Y の任意の開集合 $U \in \mathcal{U}_Y$ に対して，その f による逆像 $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ が X の開集合になること（$f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_X$）だと定める． □

この定義は「連続」という言葉の日常的意味から相当に離れているように感じられるかもしれないが，多くの議論を単純化するために役に立つ良い定義の仕方であることがわかっている．

以下においては，一般の位相空間でも成立する議論を距離空間の特別な場合のみについて説明してしまう場合が多いが，一般的な議論が好きな人は自分ですべてを一般の位相空間の場合に再構成してみるとよいだろう．

注意 有界性や様々な「一様性」（一様収束，一様連続など）の概念は，一般の位相空間では定義できないことには注意せよ． □

定義（同相写像）位相空間 X, Y のあいだに連続写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ で互いに相手の逆写像になる（$g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ となる）ものが存在するとき，f と g は <u>同相写像</u>（homeomorphism）であるといい，X は Y に <u>同相である</u>（homeomorphic to）という． □

例 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ と $g: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = e^x$, $g(y) = \log x$ と定めると，f, g は連続で互いに相手の逆写像になるので，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}_{>0}$ は同相である．

例 $F: \mathbb{R}_{>0} \to (0,1)$, $G: (0,1) \to \mathbb{R}_{>0}$ を $F(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $G(y) = \dfrac{y}{1-y}$ と定めると，F, G は連続で互いに相手の逆写像になるので，$\mathbb{R}_{>0}$ と $(0,1)$ は同相である． □

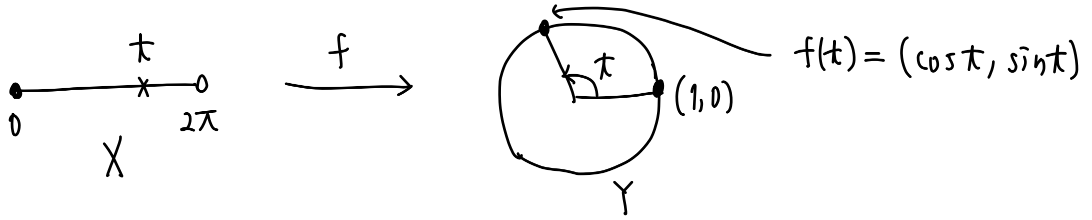
例 $F \circ f: \mathbb{R} \to (0,1)$, $g \circ G: (0,1) \to \mathbb{R}$ は $F \circ f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$, $g \circ G(y) = \log \dfrac{y}{1-y}$ となり，ともに連続で互いに相手の逆写像になるので，$\mathbb{R}$ と $(0,1)$ は同相である． □

注意 コンピューターで計算するとき，$y > 0$ や $0 < y < 1$ に制限して計算するより，上の例の方法で制限のない変数 $x \in \mathbb{R}$ に変換した方が楽な場合がある． □

例 (全単射連続だが同相でない写像)

$X=[0,2\pi)$, $Y=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$, $f:X\to Y$, $t\mapsto f(t)=(\cos t,\sin t)$

のとき, f は全単射連続だが, 逆写像は $(x,y)=(1,0)$ で連続ではない.



$f^{-1}:Y\to X$ は点 $(1,0)$ で円周を切ってまっすぐにする写像になる.

つながっていた部分を切っているので f^{-1} は連続ではない. □

問題 上の例の結果を証明せよ. □

後述

注意 X がコンパクト位相空間で Y が Hausdorff 空間ならば全単射連続写像 $f:X\to Y$ は同相写像になる. 上の X はコンパクトではない. □

例 $X=Y=C([a,b],\mathbb{R})$ とおき, X の距離を sup ノルム $\|\cdot\|_\infty$ で定め, Y の距離を L^1 ノルム $\|f\|_1=\int_a^b |f(x)|\,dx$ で定めると, 恒等写像 $id:X\to Y$ は全単射連続になるが, 逆写像 $id:Y\to X$ は連続ではない.

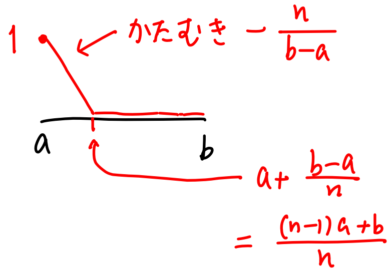
証明 $f(x)\leq \sup_{x'\in[a,b]}|f(x')|=\|f\|_\infty$ より

$$\|f\|_1=\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty\,dx=(b-a)\|f\|_\infty .$$

これより, $id:X\to Y$ は連続である.

Y 内の点列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を次のように定める:

$$f_n(x)=\begin{cases} -\dfrac{n}{b-a}(x-a)+1 & \left(a\leq x\leq a+\dfrac{b-a}{n}\right) \\ 0 & \left(a+\dfrac{b-a}{n}\leq x\leq b\right). \end{cases}$$



このとき, $\|f_n\|_1=\dfrac{b-a}{2n}\to 0$ $(n\to\infty)$ なので Y において $f_n\to 0$ となる.

しかし, $\|f_n\|_\infty=1$ なので X において $f_n\to 0$ とならない.

ゆえに, $id:Y\to X$ は連続ではない. □

$\boxed{\text{定義}}$ (相対位相) $(X, \mathcal{U}_X)$ は位相空間であるとし, $A \subset X$ と仮定する.

$\mathcal{U}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{U}_X\} = \{A$ と X の開集合の共通部分の全体$\}$ とおく.

$(A, \mathcal{U}_A)$ は位相空間になる. $\mathcal{U}_A$ を X における部分集合 A の相対位相 (relative topology) と呼ぶ. (位相空間の部分集合は通常相対位相によって位相空間とみなす.) □

$\boxed{\text{問題}}$ 上の $(A, \mathcal{U}_A)$ が位相空間になることを示せ.

$\boxed{\text{証明}}$ (1) $\phi, X \in \mathcal{U}_X$, $A \cap \phi = \phi$, $A \cap X = A$ より, $\phi, A \in \mathcal{U}_A$.

(2) $V_\lambda \in \mathcal{U}_A$ $(\lambda \in \Lambda)$ と仮定する. $V_\lambda = A \cap U_\lambda$, $U_\lambda \in \mathcal{U}_X$ と書ける. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}_X$ なので

$$\mathcal{U}_A \ni A \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap U_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda.$$

(3) $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{U}_A$ と仮定する. $V_i = A \cap U_i$, $U_i \in \mathcal{U}_X$ と書ける. $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U}_X$ なので

$$\mathcal{U}_A \ni A \cap \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcap_{i=1}^n (A \cap U_i) = \bigcap_{i=1}^n V_i.$$

□

$\boxed{\text{問題}}$ X は距離空間であるとし, $A \subset X$ であると仮定する. このとき, A には部分距離空間としての位相 $\mathcal{U}_A$ と X の相対位相 $\mathcal{U}'_A$ が定まる. $\mathcal{U}_A = \mathcal{U}'_A$ となることを示せ.

$\boxed{\text{証明}}$ $a \in A$ と $\varepsilon > 0$ に対して, $V_\varepsilon(a) = \{x \in A \mid d(x, a) < \varepsilon\} = A \cap U_\varepsilon(a)$ とおく. このとき,

$$\mathcal{U}_X = \{U \subset X \mid \text{任意の } x \in U \text{ に対してある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して } U_\varepsilon(x) \subset U\},$$

$$\mathcal{U}_A = \{V \subset A \mid \text{任意の } a \in V \text{ に対してある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して } V_\varepsilon(a) \subset V\},$$

$$\mathcal{U}'_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{U}_X\}.$$

$V \in \mathcal{U}_A$ と仮定する. 任意の $a \in V$ に対してある $\varepsilon_a > 0$ が存在して $V_{\varepsilon_a}(a) \subset V$ となる. $U = \bigcup_{a \in V} U_{\varepsilon_a}(a)$ とおく. U は X の開集合の和集合なので X の開集合になる $(U \in \mathcal{U}_X)$. ゆえに, $\mathcal{U}'_A \ni A \cap U = \bigcup_{a \in V} (A \cap U_{\varepsilon_a}(a)) = \bigcup_{a \in V} V_{\varepsilon_a}(a) = V$. したがって, $\mathcal{U}_A \subset \mathcal{U}'_A$.

$V' \in \mathcal{U}'_A$ と仮定する. ある $U \in \mathcal{U}_X$ が存在して, $V' = A \cap U$ となる. 任意に $a \in V'$ をとる. $a \in U$ なのである $\varepsilon > 0$ が存在して, $U_\varepsilon(a) \subset U$ となる. ゆえに, $V_\varepsilon(a) = A \cap U_\varepsilon(a) \subset A \cap U = V'$ となるので $V' \in \mathcal{U}_A$ である. したがって, $\mathcal{U}'_A \subset \mathcal{U}_A$.

これで $\mathcal{U}_A = \mathcal{U}'_A$ を示せた. □

閉集合系 X は距離空間であるとし，F はその部分集合であるとする。

定義 F が X の<u>閉集合</u> (closed subset) であるとは F の X における補集合 $F^c = X \setminus F = \{x \in X \mid x \notin F\}$ が X の開集合になることであると定める。← 位相空間の場合も同様に定義する。

すなわち，X の開集合の補集合を X の閉集合と呼ぶ。

X の閉集合全体の集合 $\mathcal{F}_X = \mathcal{F}(X, d)$ を X の<u>閉集合系</u>と呼ぶ。 □

$\mathcal{F}$ は F の筆記体 fermé の略 ← 仏語の閉

X の開集合系の基本性質を補集合をとる操作でよみかえることによって次の定理が得られる。

定理 (1) $\emptyset$ と X は X の閉集合である。

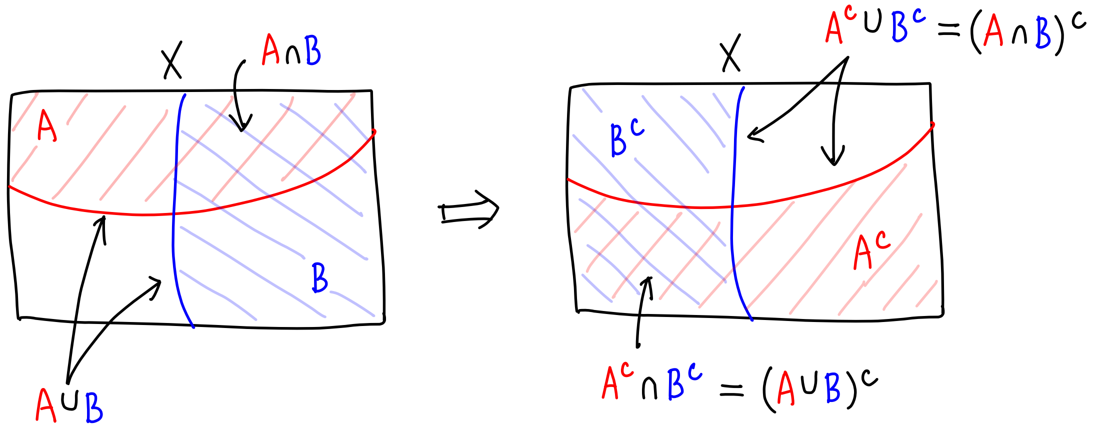
(2) X の閉集合たちの共通部分も X の閉集合である。

(3) X の有限個の閉集合の和集合も X の閉集合である。 □

注意 補集合をとる操作で，和集合と共通部分はひっくりかえる。

$A \subset X$ に対して，$A^c = X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$ と書くと，

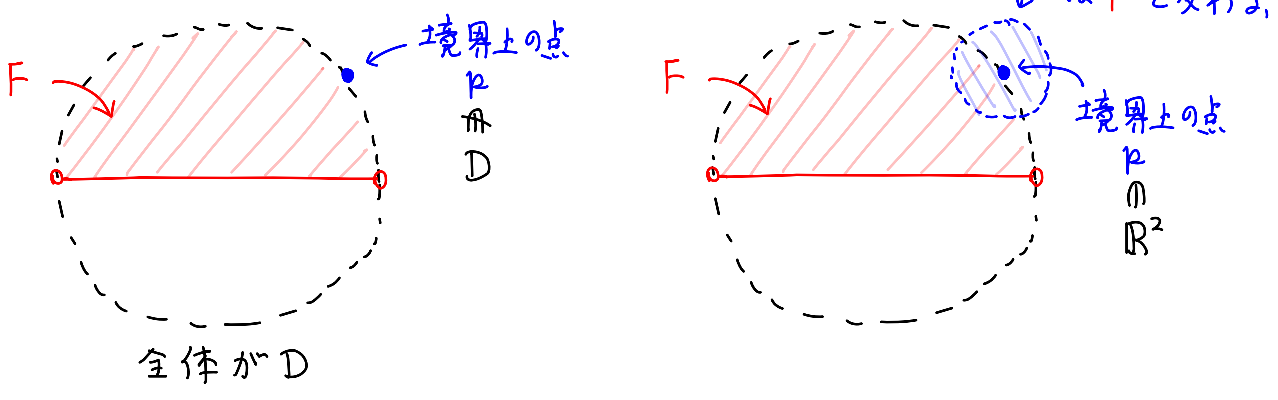
$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda^c, \qquad \left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right)^c = \bigcup_{i=1} U_i^c.$$



これ以外の図の描き方もある。自分で工夫して図を描いてみよ。 □

例 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $F = \{(x, y) \in D \mid y \geqq 0\}$ とおく。

このとき，F は D の閉集合だが，$\mathbb{R}^2$ の閉集合ではない。



□

例 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の開集合かつ閉集合である. 一般に位相空間 X において ϕ と X は常に X の開集合かつ閉集合になる. □

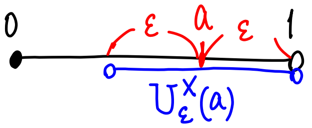
例 $[0,1)=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\leqq x<1\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合でも閉集合でもない. □

例 $[0,1)$ は $[0,1)$ 自身の開集合かつ閉集合である. □

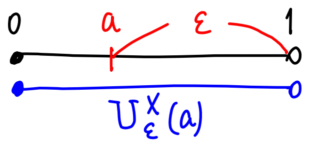
例 $X=[0,1)\cup(1,2]=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\leqq x\leqq 2$ かつ $x\neq 1\}$ とおく.
$[0,1)$ と $(1,2]$ は X の開集合かつ閉集合である.

証明 $[0,1)$ と $(1,2]$ が X の開集合であることを示せば十分である.
(そのとき, それらの補集合 $(1,2]$, $[0,1)$ は X の閉集合になる.)
$[0,1)$ が X の開集合になることのみを示そう. ($(1,2]$についても同様である.)
X における $a\in X$ の ε 近傍を $U_\varepsilon^X(a)=\{x\in X \mid |x-a|<\varepsilon\}$ と書くことにする.
$a\in[0,1)$ を任意にとる. $\varepsilon=|1-a|>0$ とおくと, $U_\varepsilon^X(a)\subset[0,1)$ となる:

(i) $a\geqq\frac{1}{2}$ の場合



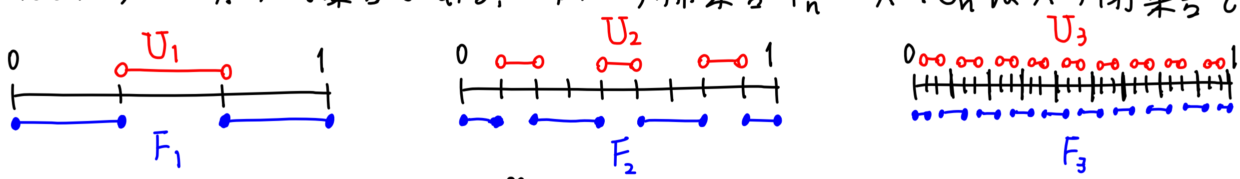
(ii) $a<\frac{1}{2}$ の場合



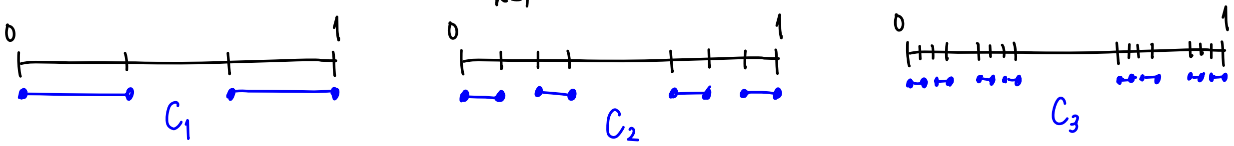
($U_\varepsilon^X(a)=[0,1)$ となる.)

ゆえに, $[0,1)$ は $X=[0,1)\cup(1,2]$ の開集合である. □

例 $X=[0,1]=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\leqq x\leqq 1\}$ とおく.
$U_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $U_2=\bigcup_{k=0}^{2}\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{9},\frac{k}{3}+\frac{2}{9}\right)$, …, $U_n=\bigcup_{k=0}^{3^n-1}\left(\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n},\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{2}{3}\right)$, … とおく.
U_n たちはすべて X の開集合である. ゆえに, 補集合 $F_n=X\setminus U_n$ は X の閉集合である



したがって, $C_n:=\bigcap_{k=1}^{n}F_k$ と $C_\infty:=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k$ は X の閉集合である.



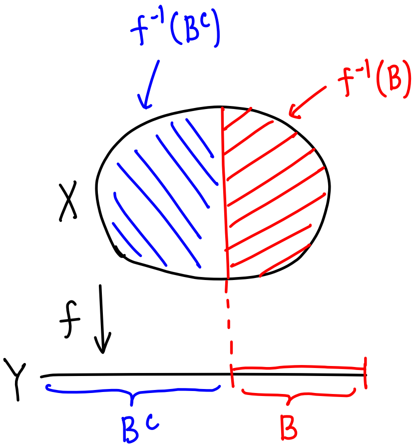
C_∞ を <u>Cantor 集合</u>と呼ぶ. Cantor 集合は $\mathbb{R}$ の有界閉集合でかつ測度零(長さが0)でかつ $\mathbb{R}$ と同じ濃度(=基数)を持ち, 例としてよく出て来る. □

連続写像の開集合系による特徴付けから次が得られる。

$\boxed{\text{定理}}$ (閉集合系による連続写像の特徴付け)
距離空間のあいだの写像 $f: X \to Y$ について以下の2つの条件は同値である:
(1) f は連続である。
(2) Y の任意の閉集合 F について, $f^{-1}(F)=\{x\in X \mid f(x)\in F\}$ は X の閉集合になる。 □

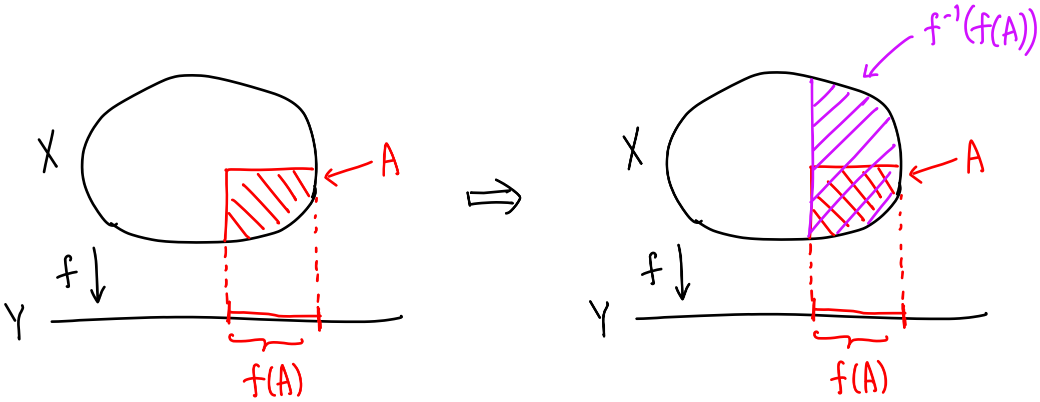
$\boxed{\text{注意}}$ 写像 $f: X\to Y$ と $B\subset Y$ について以下が成立している:

$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$.



□

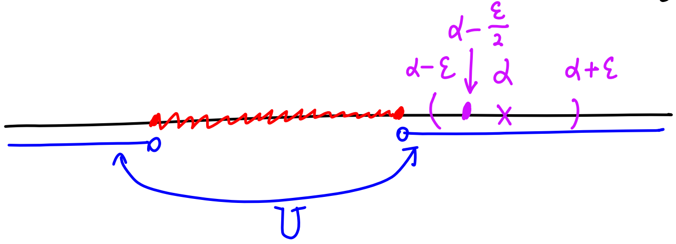
$\boxed{\text{注意}}$ 上の図より, $f(f^{-1}(B))=B$ となることも直観的にわかる。
しかし, $f^{-1}(f(A))\supset A$ で等号は一般に成立していない。



単に図を描いても証明にはならないが, 反例を作る方法が得られることがある。 □

$\boxed{\text{定理}}$ $\mathbb{R}$の空でない有界閉集合は最大値と最小値を持つ.

$\boxed{\text{証明}}$ Aは$\mathbb{R}$の空でない有界閉集合であるとする. Aが最大値を持つことを示す(最小値も同様). 実数の連続性(の1つの表現)より, Aは有界なのでAの上限(最小上界) $\alpha = \sup A$が存在する. 一般にAに含まれるAの上界はAの最大値になるので, $\alpha \in A$を示せば十分である. Aは$\mathbb{R}$の閉集合なので$U = \mathbb{R} \setminus A$とおくと$U$は$\mathbb{R}$の開集合になる. もしも$\alpha \notin A$すなわち$\alpha \in U$ならばある$\varepsilon > 0$で$U_\varepsilon(\alpha) \subset U$をみたすものが存在し, $U_\varepsilon(\alpha) \cap A = \phi$なので, 任意の$a \in A$について, $a < \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$となるので(次図), $\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$も$A$の上界になり, αがAの最小上界であることに反する. ゆえに$\alpha \in A$である.



□

$\boxed{\text{注意}}$ 上の定理と証明を「成立するかどうかまったくわからない定理とその証明」だと思いつづけてはいけない. 「直観的にもっともらしい定理を厳密に証明した」のように思えるようになるまで閉集合の概念について十分に考えなければいけない. □

閉包 Xは距離空間であるとし，$A\subset X$であるとする．

定義 Aを含むXの閉集合で最小のものをAの閉包(closure)と呼び，$\overline{A}$と表わす：

$$\overline{A} = \bigcap_{F\text{は}X\text{の閉集合},\ A\subset F} F.$$

□

定義 Aに含まれるXの開集合で最大のものAの開核(open kernel)と呼びA°と表わす：

$$A^\circ = \bigcup_{U\text{は}X\text{の開集合},\ U\subset A} U.$$

□

自明に次の命題が成立していることがわかる．

命題 (1) AはXの閉集合 $\iff$ $\overline{A}=A$.

(2) AはXの開集合 $\iff$ $A^\circ = A$.

命題 Aの閉包はAの補集合の開核の補集合に等しい：$\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$.

証明 $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$ を示せばよい：

$$(\overline{A})^c = \Bigl(\bigcap_{F\text{は}X\text{の閉集合},\ A\subset F} F\Bigr)^c = \bigcup_{F\text{は}X\text{の閉集合},\ A\subset F} F^c$$

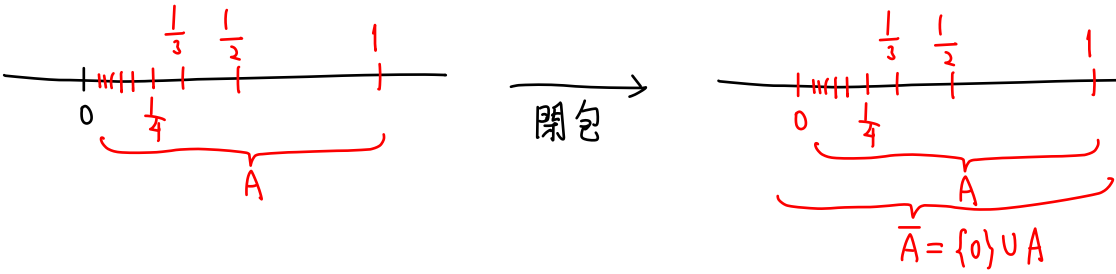
$$= \bigcup_{F\text{は}X\text{の閉集合},\ F^c\subset A^c} F^c = \bigcup_{U\text{は}X\text{の開集合},\ U\subset A^c} U = (A^c)^\circ.$$

□

例 開円盤 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ の $\mathbb{R}^2$ の中での閉包は閉円盤 $\overline{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqq 1\}$ になる。 □

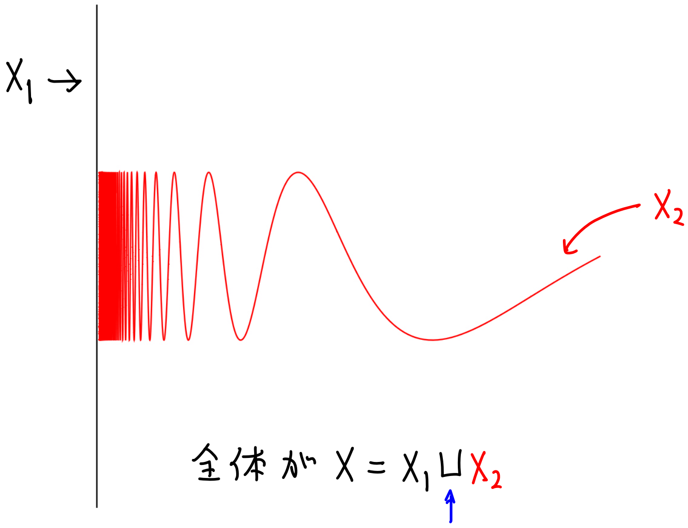
例 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とする。半開区間 $[a,b)$ の $\mathbb{R}$ の中での閉包は閉区間 $[a,b]$ になる。□

例 $A=\{\frac{1}{n} \mid n=1,2,3,\dots\}$ とおく。$\mathbb{R}$ の中で $\overline{A}=A\cup\{0\}$ となる。



□

例 $X_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$ (y軸), $X_2=\{(x,\sin\frac{1}{x}) \mid x>0\}$, $X=X_1\cup X_2$ とおき、X を $\mathbb{R}^2$ の距離部分空間とみなす。



全体が $X=X_1\sqcup X_2$

$\sqcup$ は交わりのない和集合 (disjoint union)

(1) X と $\mathbb{R}^2$ における X_2 の閉包はどちらも

$$\overline{X_2}=X_1\cup\{(x,y)\in X_1 \mid -1\leqq y\leqq 1\}$$

になる。

(2) $X_2 \subsetneqq \overline{X_2}$ なので X_2 は X と $\mathbb{R}^2$ のどちらにおいても閉集合ではない。ゆえに X における X_2 の補集合 X_1 は X の開集合ではない。

(3) X_1 は $\mathbb{R}^2$ の閉集合なので X_1 は X の閉集合でもある。ゆえに X_1 の X における補集合 X_2 は X の開集合である。

	Xで閉	Xで開
X_1	○	×
X_2	×	○

□

Xの閉集合をXの開集合の補集合で定義したので，このままだと閉包の計算のためには補集合を通して開集合を経由する必要が生じてしまう。
閉包の直接的計算には次が使える。

定理 距離空間 X と $A \subset X$ と $x \in X$ について以下の条件は互いに同値である：

(1) $x \in \overline{A}$.

(2) xを含むXの任意の開集合Uについて，$U \cap A \neq \phi$.

(3) 任意の$\varepsilon > 0$について，$U_\varepsilon(x) \cap A \neq \phi$.

(4) Aに含まれる点列$\{a_n\}_{n=1}^\infty$でxに収束するものが存在する。

証明 <u>(1)⇔(2)</u> 上の命題より，　　(1)⇔(2)⇔(3)⇔(4) を示す。

$x \in \overline{A} \iff x \notin (A^c)^\circ$

$\iff$ xを含むXの開集合Uで$U \subset A^c$となるものが存在<u>しない</u>。

$\iff$ xを含むXの任意の開集合Uについて$U \not\subset A^c$.

$\iff$ xを含むXの任意の開集合Uについて$U \cap A \neq \phi$.

<u>(2)⇒(3)</u>　$\varepsilon > 0$のとき$U_\varepsilon(x)$はxを含むXの開集合なので(2)から(3)が出る。

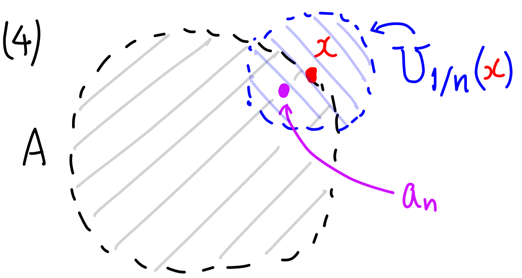
<u>(3)⇒(2)</u>　(3)を仮定し，Uはxを含むXの開集合であるとする。Uはxを含むXの開集合なのである$\varepsilon > 0$で$U_\varepsilon(x) \subset U$となるものが存在する。(3)より$U_\varepsilon(x) \cap A \neq \phi$.
このとき，$U_\varepsilon(x) \cap A \subset U \cap A$なので$U \cap A \neq \phi$.

<u>(3)⇒(4)</u>　(3)を仮定する。任意の$n = 1, 2, \ldots$について$U_{1/n}(x) \cap A \neq \phi$となるので，
$a_n \in U_{1/n} \cap A$をえらぶと，点列$\{a_n\}_{n=1}^\infty$はAに含まれ，$d(a_n, x) < \frac{1}{n}$よりxに収束する。

<u>(4)⇒(3)</u>　Aに含まれる点列$\{a_n\}_{n=1}^\infty$でxに収束するものが存在すると仮定し，任意に$\varepsilon > 0$をとる。$\{a_n\}$はxに収束しているので，あるNが存在して，$\{a_n\}_{n=N}^\infty \subset U_\varepsilon(x)$となる。
このとき，$\{a_n\}_{n=N}^\infty \subset U_\varepsilon(x) \cap A$となるので$U_\varepsilon(x) \cap A \neq \phi$.　□

問題 上の証明を図を描きながら説明せよ。　□

ヒント (3)⇒(4)



□

定理 (連続写像の閉包による特徴付け)
距離空間のあいだの写像 $f: X \to Y$ について以下の2つの条件は同値である:
(1) f は連続である.
(2) $A \subset X$ のとき, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

証明 (1)⇒(2) (1)と $A \subset X$ を仮定する. f の連続性と閉包の定義より, $f^{-1}(\overline{f(A)})$ は X の閉集合になり, A を含む. ゆえに, 閉包の定義より, $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. ゆえに $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(2)⇒(1) (2)を仮定し, F は Y の閉集合であるとし, $A = f^{-1}(F)$ とおく. このとき, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{F} = F$ より, $\overline{A} \subset f^{-1}(F) = A$. ゆえに, $\overline{A} = A$ となるので $A = f^{-1}(F)$ は X の閉集合であり, f が連続であることがわかった. □

問題 上の証明では連続写像の閉集合系による特徴付けを用いた.
他の特徴付けを用いた別証明を作ってみよ. □

距離や位相にかかわることはたくさんの易しい証明を書きまくると理解しやすい.
(図を描いて直観的に理解することと証明を書くことを無関係にしないこと!)

上の問題の部分的解答例 (1)⇒(2)の点列の収束を使った証明例
(1)と $A \subset X$ を仮定する. $y \in f(\overline{A})$ を任意にとる. $y = f(x)$, $x \in \overline{A}$ と書ける.
x に収束する A 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する. f の連続性より, $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(x)$ に収束する.
$y = f(x) \in \overline{f(A)}$. これで $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ が示された.

(2)⇒(1)の点列の収束を使った証明例
(2)⇒(1)の対偶を証明しよう. f は連続でないと仮定する.
ある $x \in X$ と X 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で x に収束するもので, $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(x)$ に収束しないものが存在する. そのとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $f(a_n) \notin U_\varepsilon(f(x))$ をみたす n が無限個存在する. ゆえに, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $k_1 < k_2 < \cdots$ で $f(a_{k_n}) \notin U_\varepsilon(f(x))$ をみたすものを取れる. $A = \{a_{k_n} \mid n = 1, 2, \ldots\}$ とおくと, $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ も x に収束するので $x \in \overline{A}$.
しかし, $f(A) \cap U_\varepsilon(f(x)) = \emptyset$ となるので $f(x) \notin \overline{f(A)}$. ゆえに $f(\overline{A}) \not\subset \overline{f(A)}$. □

これらについても図を描いて説明してみよ.

$\boxed{\text{定理}}$ 距離空間の開集合系, 閉集合系, 閉包・開核をとる操作は距離函数を同値なものに変えても不変である.

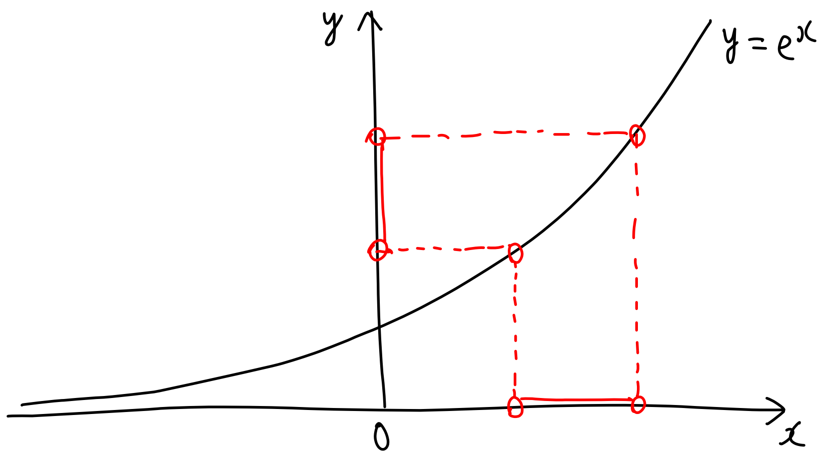
$\boxed{\text{証明}}$ 閉集合系, 閉包・開核をとる操作は開集合系のみを用いて構成されているので, 開集合系の不変性のみを示せば十分である.

距離函数の同値性の対称性より, 集合 X の距離函数 d, d' がある正の定数 $d(x,x') \leqq c\,d'(x,x')$ をみたすという仮定のもとで, d での開集合が d' での開集合になることを示せば十分である.

その仮定のもとで, U は d での開集合であると仮定し, $a \in U$ を任意にとる.
そのとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, (d に関する $U_\varepsilon(a)$) $= \{x \in X \mid d(x,a) < \varepsilon\} \subset U$ となる.
ゆえに, $d'(x,a) < \varepsilon/c$ のとき, $d(x,a) \leqq c\,d'(x,a) < \varepsilon$ となるので $x \in U$ となる.
これは (d' に関する $U_{\varepsilon/c}(a)$) $= \{x \in X \mid d'(x,a) < \varepsilon/c\} \subset U$ を意味する.
したがって, U は d' でも開集合になる. □

$\boxed{\text{注意}}$ 上の逆は成立しない. すなわち, 同じ開集合系を与える距離函数で同値でないものが存在する場合がある. 以下の例を見よ. □

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{R}$ に $d(x,x') = |x - x'|$ で距離を定め, $\mathbb{R}_{>0}$ をその距離部分空間とする.
$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ と $\log: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ はどちらも連続で互いに相手の逆写像になる.
ゆえに, $f(x) = \exp(x) = e^x$ とおき, $\mathbb{R}_{>0}$ の開集合 U を $\mathbb{R}$ の開集合 $f^{-1}(U)$ に対応させることによって, $\mathbb{R}_{>0}$ の開集合と $\mathbb{R}$ の開集合の一対一対応を作れる. そのとき, $f^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}$ における距離函数 $d'(x,x') = |f(x) - f(x')|$ に関する開集合に等しい.
すなわち, d と d' の開集合系は等しい. しかし, $\dfrac{d'(x,0)}{d(x,0)} = \dfrac{|e^x - 1|}{|x|} \to \infty\ (x \to \infty)$ なので d と d' は同値ではない. □



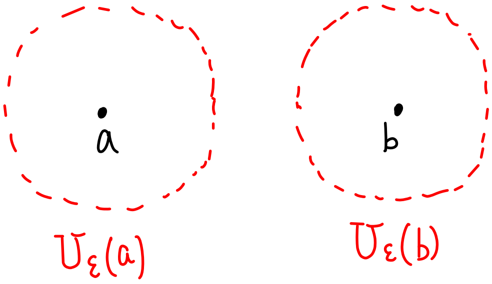
x 軸上の開区間と正の y 軸上の開区間が一対一に対応している.

点と部分のつながり方

以下，X は距離空間であるとする．

点と点

互いに異なる2点 $a, b \in X$ について，$\varepsilon = \frac{1}{3} d(a,b) > 0$ とおくと，$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \phi$ となる．



距離空間の異なる2点はこのように開集合 $U_\varepsilon(a)$, $U_\varepsilon(b)$ によって分離される．
（距離空間のHausdorff性）

□

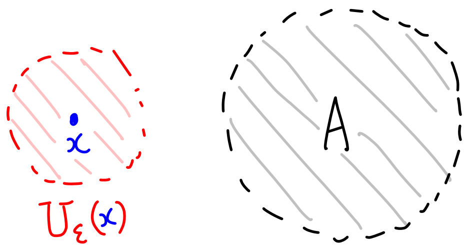
ポイント 点 a を含む開集合 U には，点 a と点 a から離れた点を分離するはたらきがある．距離空間では開集合一般を考えずに ε 近傍だけで用が足りることが多いが，一般の位相空間では点 a を含む任意の開集合を<u>点 a の開近傍</u>と呼んで利用することになる．

□

点と部分集合

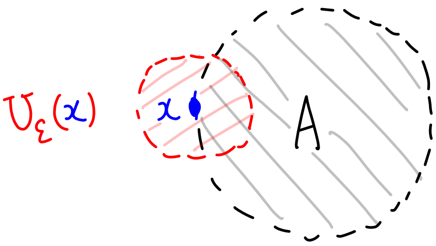
$A \subset X$ であるとする．

① 点 $x \in X$ に対してある $\varepsilon > 0$ が存在して，$U_\varepsilon(x) \cap A = \phi$ となるとき，点 x から見て部分集合 A は離れているように見える：



x から見ると
A は離れているように見える．

② 点 $x \in X$ に対して，任意の $\varepsilon > 0$ について $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \phi$ が成立していることは，$x \in \overline{A}$ と同値であり，点 x から見て x は部分集合 A にくっついているように見える．



x の任意の ε 近傍が
A と空でない共通部分を持つならば，
x から見ると
A は x にくっついているように見える．

□

ポイント $\overline{A} = \{A$ にくっついているように見える X の点の全体$\}$．

□

距離空間のあいだでの写像の連続性の特徴付け（まとめ）

"ε-δ" によって連続写像を定義し，以下が互いに同値になることを示して来た．
（X, Y は距離空間であるとし，$f: X \to Y$ は写像であるとする．）

(a) $f: X \to Y$ は連続である．

(b) 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，
任意の $x \in X$ について $d(x, a) < \delta$ ならば $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる．

(c) 収束する X 内の任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，Y 内の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ も収束し，
$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$ が成立する．

(d) 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，
ある $\delta > 0$ で $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$ をみたすものが存在する．

$\begin{cases} U_\delta(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < \delta\} \\ U_\varepsilon(f(a)) = \{y \in Y \mid d(y, f(a)) < \varepsilon\} \end{cases}$

(e) Y の任意の開集合 V について，
$U = f^{-1}(V)$ は X の開集合になる．

$f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$

$U \subset X$ が X の開集合 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\text{任意の } x \in U \text{ に対して，} \\ \text{ある } \delta > 0 \text{ で } U_\delta(x) \subset U \text{ を} \\ \text{みたすものが存在する．}\end{cases}$

(f) Y の任意の閉集合 G について，
$F = f^{-1}(G)$ は X の閉集合になる．

(閉集合) = (開集合の補集合)

(g) 任意の $A \subset X$ について，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$．

$\overline{A}$ = (A の閉包) = (A を含む X の最小の閉集合)

このように連続写像の概念にはたくさんの特徴付けがある．

$\boxed{\text{注意}}$ 以上の (a) から (g) までの条件の同値性の理解のためには，
自分で証明をやり直したり，図を描いて直観的な理解にも挑戦することを
くりかえす必要があるかもしれない．数ヶ月以上の時間が必要かもしれない．
すぐに理解できなくても心配する必要はない． □

$\boxed{\text{問題}}$ 自分自身で『距離空間のあいだの連続写像』のタイトルで「教科書」を書いてみよ．証明はとても詳しく書かれており，図や例を豊富に含む教科書を自分で書くと非常に勉強になる．写真をとってPDFファイル化して友人にくばってもよい． □

$\boxed{\text{注意}}$ 特に鉛筆で書かれたノートは写真をうまくとらないと読みにくいことが多い．
その点については各自工夫が必要だろう． □

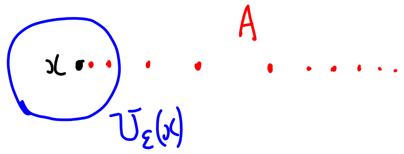
集積点 (accumulation point, limit point)

「集積点」は複素正則函数の一致の定理で使われる.

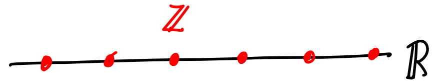
定義 位相空間 X とその部分集合 A について, $x \in X$ が A の集積点であるとは, x を含む X の任意の開集合が x 以外の A の点を含むことだと定める. □

注意 X が距離空間のとき, $x \in X$ が A の集積点であることは, 任意の $\varepsilon > 0$ について $U_\varepsilon(x)$ が x 以外の A の点を含むことは同値である. □

x 以外の A の点を考えることが重要

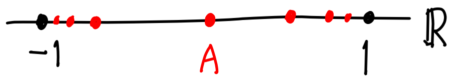


例 $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Z}$ のとき, A の集積点は存在しない. □



例 $X = \mathbb{R}$, $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ のとき, $0 \in \mathbb{R}$ は A の集積点である. □

例 $X = \mathbb{R}$, $A = \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \dots \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots \right\}$ のとき, $\mathbb{R}$ における A の集積点の全体の集合は $\{\pm 1\}$ になる. □



例 $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$ (open disc) のとき, $\mathbb{R}$ における A の集積点全体の集合は $\overline{A} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$ になる. □

定理 距離空間 X とその部分集合 A と点 $x \in X$ について以下は同値である.

(a) x は A の集積点である.

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ について, $U_\varepsilon(x)$ は x 以外の A の点を含む

(c) $x \in \overline{A \setminus \{x\}} = (\{ a \in A \mid a \neq x \}$ の閉包$)$.

証明 (a) ⇒ (b). x は A の集積点とし, $\varepsilon > 0$ を任意にとる. $U_\varepsilon(x)$ は x を含む X の開集合なので, 集積点の定義より, $U_\varepsilon(x)$ は x 以外の A の点を含む. これで (a) ⇒ (b) を示せた.

(b) ⇒ (c). (b) を仮定する. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ について, $U_\varepsilon(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ となる. ゆえに数ページ前に述べた点が閉包に点が含まれる同値な条件に関する定理より $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ となる. これで (b) ⇒ (c) を示せた.

(c) ⇒ (a). (c) を仮定し, U は x を含む X の開集合であるとする. (c) より $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. これは U が x 以外の A の点を含むことを意味している. これで (c) ⇒ (a) を示せた. □

稠密性 (denseness)

定義 Xの部分集合AがXで稠密(ちゅうみつ, dense)であるとは $\overline{A}=X$ が成立することであると定める。AがXで稠密になるための必要十分条件は以下の条件のどれかが成立することである。

(1) XのX以外の閉集合はAを含まない。

(2) Xの空でない任意の開集合はAと空でない交わりを持つ。

(3) 任意の$x\in X$と$\varepsilon>0$について$U_\varepsilon(x)\cap A\neq\phi$.

(4) 任意の$x\in X$について、Aに含まれる点列でxに収束するものが存在する。 □

例 $\mathbb{Q}$は$\mathbb{R}$において稠密である。

証明 任意の実数に収束する有理数列が存在するので$\mathbb{Q}$は$\mathbb{R}$で稠密である。 □

例 (Weierstrassの多項式近似定理)

$C([a,b],\mathbb{R})=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\mid f\text{は連続}\}$ $(a<b)$ に sup ノルムで距離を入れるとき、多項式 $g\in\mathbb{R}[x]$ を閉区間$[a,b]$上の函数とみなしたもの全体の集合

$$P=\{f\in C([a,b],\mathbb{R})\mid f\text{は多項式で書ける}\}$$

は$C([a,b],\mathbb{R})$で稠密である。すなわち、閉区間$[a,b]$上の任意の連続函数fに対して、多項式函数の列で$[a,b]$上fに一様収束するものが存在する。 □

Weirstrassの多項式近似定理は重要なので後で詳しく扱う予定である。

例 体K上の形式べき級数環$K[[x]]$に

$$|f|=\begin{cases}0 & (f=0)\\ e^{-r} & (f=a_rx^r+a_{r+1}x^{r+1}+\cdots,\ a_r\neq0)\end{cases}\qquad (f\in K[[x]])$$

注 $e^{-\infty}=0$

によって距離を入れるとき、多項式環$K[x]$は$K[[x]]$で稠密である。

証明 任意に$f=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\in K[[x]]$をとる。$f_n=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i\in K[x]$と定める。このとき、

$$d(f,f_n)=|f-f_n|=|a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots|\leq e^{-n}\to0\quad(n\to\infty)$$

なので$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$はfに収束する。 □

このように純代数の世界においても代数的に定義された距離に関する収束を考えて稠密性を考えることができる。

一様収束性 距離空間に値を持つ函数の列には一様収束が定義される.

定義域は単なる集合でよい

集合 X から距離空間 Y への写像の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (函数の列) と 写像 $f: X \to Y$ (函数) を任意にとる.

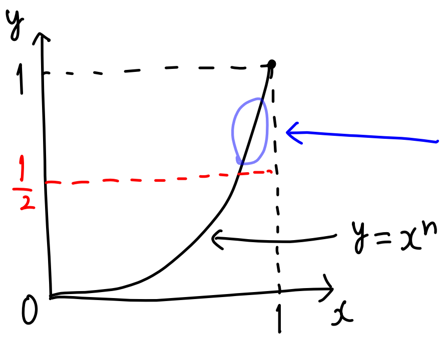
定義 (各点収束) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に <u>各点収束する</u> (converges pointwise to) とは,
任意の $x \in X$ について, Y 内の点列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が Y の点 $f(x)$ に収束することであると定める. □

定義 (一様収束) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に <u>一様収束する</u> (converges uniformly to) とは,
任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある番号 N が存在して, <u>任意の $x \in X$</u> と任意の $n \geqq N$ について
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成立することだと定める. □

これらのちがい $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の f への各点収束することは,
<u>任意の $x \in X$</u> と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある番号 N が存在して, 任意の $n \geqq N$ について
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成立することであると言い換えられる.

- 各点収束では番号 N は点 $x \in X$ ごとに別々に取ればよい.
- 一様収束では番号 N は ε のみで決まり, $x \in X$ に依存してはいけない.
- 一様収束していれば各点収束している. □

例 $f_n, f: [0,1] \to [0,1]$ を $f_n(x) = x^n$, $f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ と定めると,
$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に各点収束しているが, 一様収束はしていない.



$0 \leqq x < 1$ ならば x^n は 0 に収束するが, どんなに大きな n についても 0 との距離が $\frac{1}{2}$ 以上の $0 \leqq x < 1$ をみたす x たちが残ってしまう. □

例 $0 < \alpha < 1$ と仮定する. $f_n, f: [0,\alpha] \to [0,\alpha]$ を $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$ と定めると,
$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f = 0$ に一様収束している. 実際, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, N を $\alpha^N < \varepsilon$ となるようにとると, 任意の $x \in [0,\alpha]$ と任意の $n \geqq N$ について,
$|f_n(x) - f| = x^n \leqq \alpha^n \leqq \alpha^N < \varepsilon$. □

X は集合であるとし，Y は距離空間であるとする．

写像(函数) $f, g : X \to Y$ に対して，<u>sup 距離</u> $d_\infty(f,g) \in [0,\infty] = \mathbb{R}_{\geqq 0} \cup \{\infty\}$ を

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

と定める．sup が存在しないときにこれの値は ∞ になると約束しておく．

$d_\infty(f,g)$ は値が ∞ になる場合があることを除けば距離函数の性質をみたしている：

$f, g, h : X \to Y$ について，

(1) $d_\infty(f,h) \leqq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$，

(2) $d_\infty(g,f) = d_\infty(f,g)$，

(3) $d_\infty(f,g) = 0 \iff f = g$．

定理 集合 X から距離空間 Y への函数の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ と函数 $f : X \to Y$ について，以下の2つの条件は同値である：

(1) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は f に一様収束する．

(2) $\{d_\infty(f_n, f)\}_{n=1}^\infty$ は 0 に収束する．

証明 <u>(1) ⇒ (2)</u> (1) を仮定し，任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は f に一様収束するので，ある N が存在して，任意の $x \in X$ と任意の $n \geqq N$ について，$d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる．

ゆえに，$n \geqq N$ のとき，$d_\infty(f_n, f) = \sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ となる．

これで $\{d_\infty(f_n,f)\}_{n=1}^\infty$ が 0 に収束することが示された．

<u>(2) ⇒ (1)</u> (2) を仮定し，任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$\{d_\infty(f_n,f)\}_{n=1}^\infty$ は 0 に収束するので，ある N が存在して，$n \geqq N$ のとき，$d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$ となる．このとき，任意の $x \in N$ と任意の $n \geqq N$ について，$d(f_n(x), f(x)) \leqq \sup_{x' \in X} d(f_n(x'), f(x')) = d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$．

これで $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が f に一様収束することが示された． □

注意 一様収束の ε-N による定義にもどらずに，sup 距離 $d_\infty(f,g)$ に関する収束で一様収束について考えた方が易しくなる場合が多い． □

注意 上の (1) ⇒ (2) の証明では "$\frac{\varepsilon}{2}$" を使っているが，不等号 $<$ と $\leqq$ のささいなちがいを気にせずに次のように証明を書いてもよい．

〜，任意の $x \in X$ と任意の $n \geqq N$ について，$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ となる．

ゆえに，$n \geqq N$ のとき，$d_\infty(f_n, f) = \sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) \leqq \varepsilon$ となる．

これで $\{d_\infty(f_n,f)\}_{n=1}^\infty$ が 0 に収束することが示された． □

$\boxed{\text{注意}}$ Yが$\mathbb{R}$上のベクトル空間でノルム$\|\cdot\|$によって距離が定義されている場合には
sup距離を直接考えずにsupノルム $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$ を考えた方が議論が
シンプルになる。$f: X\to Y$が有界でないと$\|f\|_\infty = \infty$となってしまうことを除けば
supノルムはノルムの性質をみたしている：$\|f\|_\infty \in [0,\infty]$で，$f,g: X\to Y$と$\alpha\in\mathbb{R}$について

(1) $\|f+g\|_\infty \leqq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

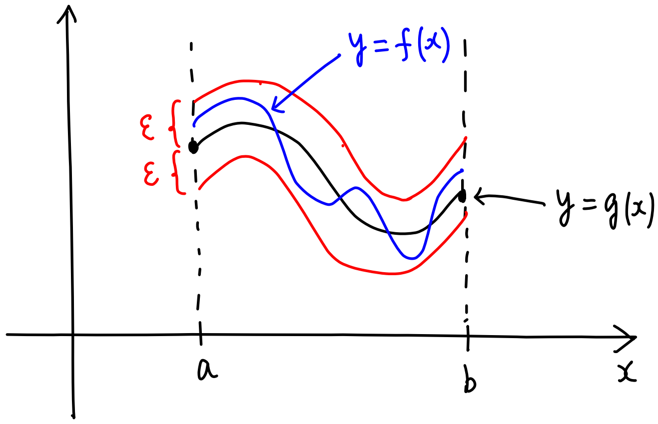
(2) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\,\|f\|_\infty$

(3) $\|f\|_\infty = 0 \iff f=0$. □

$\boxed{\text{例}}$ $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$と仮定する。$\varepsilon>0$と$g:[a,b]\to\mathbb{R}$について，

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| < \varepsilon$$

をみたす$f:[a,b]\to\mathbb{R}$は次のように図示される。



この図で$\varepsilon>0$を0に近付ければfがgに一様収束することを直観的に理解できる。□

$\boxed{\text{例}}$ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$を任意の函数であるとし，$f_n(x) = g(x) + \frac{1}{n}\sin(nx)$ $(x\in\mathbb{R})$と定めると，
$\|f_n - g\|_\infty = \frac{1}{n}$なので$\{f_n\}_{n=1}^\infty$は$g$に一様収束する。 □

$\boxed{\text{例}}$ $g:[0,1]\to[0,1]$を$g(x) = \begin{cases} 0 & (0\leqq x<1) \\ 1 & (x=1)\end{cases}$と定め，$f_n:[0,1]\to[0,1]$を$f_n(x)=x^n$と定めると，
$\|f_n - g\|_\infty = \sup_{0\leqq x<1} x^n = 1$なので$\{f_n\}_{n=1}^\infty$は$g$に一様収束しない。 □

次の定理は一様収束に関する最も基本的な結果である.

定理 (一様収束が函数の連続性を保つこと)

X と Y は距離空間であるとする. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は X から Y への連続写像の列であり, $f: X \to Y$ に一様収束しているとする. このとき, f も連続写像になる.

証明 任意に $a \in X$ と $\varepsilon > 0$ をとる.

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は f に一様収束しているので, ある N が存在して,

$$n \geqq N \text{ かつ } x \in X \implies d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$\frac{\varepsilon}{3}$-argument を使う.

f_N は連続なので, ある $\delta > 0$ が存在して

$$x \in X \text{ かつ } d(x, a) < \delta \implies d(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ゆえに, $x \in X$ かつ $d(x, a) < \delta$ のとき,

$$d(f(x), f(a)) \leqq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a))$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

この三角不等式を使った行がポイント

これで f も連続であることが示された. □

証明の見つけ方 ① x を a に近付けたとき, $f(x)$ が $f(a)$ に近付くことを示したい.

x が a に近いときに小さくなってほしいのは $d(f(x), f(a))$ である.

② $d(f(x), f(a))$ を三角不等式を使って「小さくなりそうなものたち」の和に分解することを考える. すると次の分解を発見できる:

$$d(f(x), f(a)) \leqq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)).$$

x によらずに N を大きくすると小さくできる.

f_N は連続なので x を a に近付けると小さくできる.

N を大きくすると小さくできる.

③ 以上の発見を論理的な証明に書き直す. □

例 $f_n, f: [0,1] \to [0,1]$ を $f_n(x) = x^n$, $f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ とおくと,

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は f に各点収束する. 各 f_n は連続だが, f は不連続なので $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は f に一様収束していない. (もしも一様収束しているなら, f も連続になり矛盾する.) □

$\boxed{\text{問題}}$ この問題中では $\int_a^b f(x)\,dx$ が適切に定義されている函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ のみを扱う。そのような函数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束していれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

が成立することを示せ。

$\boxed{\text{証明}}$ 任意に $\varepsilon>0$ をとって固定する。

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束しているので、ある N が存在して、$n\geqq N$ ならば任意の $x\in[a,b]$ について、

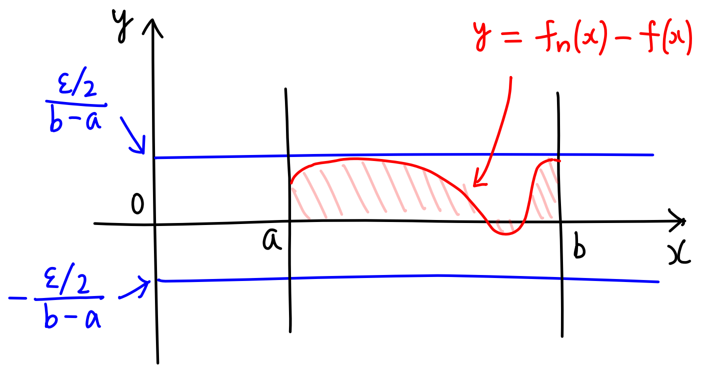
$$f(x)-\frac{1}{b-a}\frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) < f(x)+\frac{1}{b-a}\frac{\varepsilon}{2}$$

となるので、

$$\int_a^b f(x)\,dx-\frac{\varepsilon}{2}\leqq\int_a^b f_n(x)\,dx\leqq\int_a^b f(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore\ \left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

これは $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$ が成立することを意味している。 □



函数の差がこのあいだに入っていれば（差の積分の絶対値）$\leqq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ となる。

コンパクト性

←おそらくこのノートの内容でコンパクト性は最重要概念.

位相空間(たとえば距離空間) X に対して, その開集合達 U_λ $(\lambda\in\Lambda)$ が $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ をみたしているとき, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆 (open covering) と呼ぶ.
有限個の開集合で構成された開被覆を有限開被覆 (finite open covering) と呼ぶ.
X の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\Lambda'\subset\Lambda$ に対して, $\{U_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ も X の開被覆になるとき, $\{U_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ を $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の部分被覆 (subcovering) と呼び, Λ' が有限集合になっていれば有限部分被覆 (finite subcovering) と呼ぶ.

定義 位相空間(たとえば距離空間) X がコンパクトであるとは, X の任意の開被覆の有限部分被覆が存在することだと定める. □

例 $X=(0,1]$ のとき, $U_k=\left(\frac{1}{k},1\right]$ とおくと, $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ は X の開被覆でその有限部分被覆は存在しない. ゆえに半開区間 $X=(0,1]$ はコンパクトではない.
$\left(\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,2,3,\dots\}\right.$ で $\max\{k_1,\dots,k_n\}=k$ のとき, $\left.\bigcup_{i=1}^{n}U_{k_i}=\left(\frac{1}{k},1\right]\subsetneq(0,1].\right)$ □

例 閉区間 $X=[a,b]$ $(a<b)$ はコンパクトである.

証明 $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ を X の任意の開被覆であるとし, その有限部分被覆が存在しないと仮定して矛盾をみちびこう. その仮定のもとで, $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ と $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ の少なくともどちらか片方は有限個の U_λ でおおうことはできない. おおうことができない側を X_1 とする.

帰納的に $X_k=[a_k,b_k]$ を中点で分割して得られる長さが半分の閉区間 $X_{k+1}=[a_{k+1},b_{k+1}]$ で有限個の U_λ でおおうことができないものを作れる.

このとき, $a_1\leqq a_2\leqq\cdots$, $\cdots\leqq b_2\leqq b_1$ となっており, $b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}$ なので a_k と b_k は同じ値 c に収束する. $X=[a,b]$ は $\mathbb{R}$ の閉集合で $a_k,b_k\in X$ なので $c\in X$ となっている.

$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ なのである $\lambda\in\Lambda$ で $c\in U_{\lambda_0}$ となるものが存在する. U_{λ_0} は開集合なのである $\varepsilon>0$ が存在して, $U_\varepsilon(c)\subset U_{\lambda_0}$ となる.

k を十分大きくして, $\frac{b-a}{2^k}<\varepsilon$ となるようにすると, $X_k\subset U_{\lambda_0}$ となって, X_k が有限個の U_λ たちでおおえないことに矛盾する. □

注意 コンパクト位相空間の例を作ることは非自明な問題である. □

定理 (コンパクト性が連続写像による像で保たれること)

$f: X \to Y$ が位相空間のあいだの連続写像で, X がコンパクトならばその像 $f(X)$ も (Y における相対位相について) コンパクトになる.

証明 Y における相対位相に関する $f(X)$ の開被覆 $f(X) = \bigcup_{i \in I} V_i$ を任意に与える.
各 V_i は $V_i = f(X) \cap U_i$ (U_i は Y の開集合) と書ける. f は連続なので $f^{-1}(U_i)$ は X の開集合になる. 任意の $x \in X$ について, $f(x) \in f(X)$ を含む U_i が存在し, $x \in f^{-1}(U_i)$ となる.
ゆえに X の開被覆 $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ が得られた. X のコンパクト性より, 有限個の $i_1, \dots, i_n \in I$ が存在して, $X = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k})$ となる. そのとき, $f(X) = \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(U_{i_k})) = \bigcup_{k=1}^{n} (f(X) \cap U_{i_k}) = \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$.
これで $f(X)$ がコンパクトになることが示された. □

定理 コンパクト位相空間の閉集合は相対位相についてコンパクトになる.

証明 X はコンパクト位相空間でかつ F はその閉集合であると仮定する.
V_i ($i \in I$) は相対位相に関する F の開集合であるとし, F の開被覆になっているとする.
V_i たちは $V_i = F \cap U_i$, U_i は X の開集合と書ける. $U_\infty = X \setminus F$ とおくと, U_∞ も X の開集合になる. $X = U_\infty \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ という X の開被覆がえられた. X はコンパクトなので有限個の $i_1, \dots, i_n \in I$ が存在して, $X = U_\infty \cup \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$ が成立する. このとき, $F = F \cap X = \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$ が成立する. ゆえに F は相対位相についてコンパクトである. □

定理 コンパクト位相空間の無限部分集合は集積点を持つ.

証明 X はコンパクト位相空間で $A \subset X$ であるする. A が集積点を持たないと仮定し, A が有限集合であることを示せばよい. A は集積点を持たないと仮定する.
任意の $x \in X \setminus A$ は A の集積点でないので X のある開集合 U で $x \in U$ かつ $U \cap A \neq \phi$ となるものが存在する. ゆえに, $X \setminus A$ は X の開集合になるので, A は X の閉集合である.
ゆえに上の定理より, A はコンパクトになる.
任意の $a \in A$ は A の集積点ではないので, X のある開集合 U_a で $A \cap U_a = \{a\}$ となるものが存在する. $A = \bigcup_{a \in A} (A \cap U_a) = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ は A の開被覆になり, A はコンパクトなので, 有限個の $a_1, \dots, a_n \in A$ が存在して, $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} = \{a_1, \dots, a_n\}$ となる。A は有限集合である. □

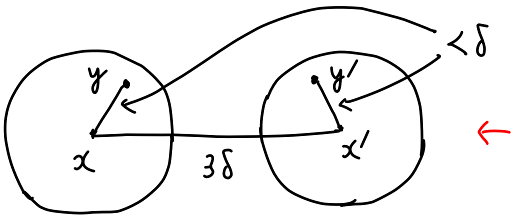
Hausdorff性

← Hausdorff位相空間を<u>Hausdorff空間</u>と呼ぶ

定義 位相空間 X が <u>Hausdorff</u> (もしくは <u>T_2</u>) であるとは，任意の異なる2点 $x, x' \in X$ に対して，x を含む開集合 U と x' を含む開集合 U' で $U \cap U' = \phi$ をみたすものが存在することである。□

自明な定理 距離空間は Hausdorff 空間である。

証明 異なる2点 $x, x' \in X$ に対して，$\delta = \frac{1}{3} d(x, x') > 0$ とおくと，$U_\delta(x) \cap U_\delta(x') = \phi$.
($y \in U_\delta(x)$, $y' \in U_\delta(x')$ のとき，$\underline{d(y, y') \geqq d(x, x') - d(y, x) - d(x', y')} > 3\delta - \delta - \delta = \delta > 0$ なので $y \neq y'$.)
$U_\delta(x)$, $U_\delta(x')$ はそれぞれ x, x' を含む開集合なので示すべきことが示された。□



← この図から上の赤の下線の部分が出る。

定義 位相空間 X の部分集合 A に $\{A \cap U \mid U$ は X の開集合$\}$ によって開集合系を定め，A を位相空間とみなせる。この位相空間 A の位相を X の位相の<u>相対位相</u>と呼ぶ。□

問題 距離空間 X の部分集合 A を X の距離空間としての部分空間とみなしたときの A の開集合系と X の相対位相における A の開集合系が一致することを示せ。□

問題 Hausdorff空間 X の部分集合 K が相対位相についてコンパクトならば K は X の閉集合になることを示せ。□

これらの問題の結果より，特に距離空間 X のコンパクト部分空間 K は X の閉集合になっていることがわかる。直接の証明を与えておく。(以上の問題のヒントにもなっている。)

定理 距離空間 X のコンパクト部分空間 K は X の閉集合になる。

証明 X は距離空間であり，K はそのコンパクト部分距離空間であるとする。$X \setminus K$ が X の開集合であることを示せばよい。そのためには $a \in X \setminus K$ を任意にとって，a を含む開集合で K と交わらないものを作ればよい。$a \in X \setminus K$ とし，$x \in K$ に対して，$\delta_x = \frac{1}{3} d(x, a) > 0$ とおく。このとき，$V_x = \{y \in K \mid d(y, x) < \delta_x\}$ とおくと，$K = \bigcup_{x \in K} V_x$ は K の開被覆になる。K はコンパクトなので有限個の $x_1, \dots, x_n \in K$ で $K = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ をみたすものが存在する。δ_x の定義より，$U_{\delta_x}(a) \cap V_x = \phi$ なので $\delta = \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}\} > 0$ とおくと，$U_\delta(a) \cap V_{x_i} = \phi$ $(i = 1, \dots, n)$ となる。そのとき，$U_\delta(a) \cap K = U_\delta(a) \cap \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = \bigcup_{i=1}^n (U_\delta(a) \cap V_{x_i}) = \phi$. これで a を含む X の開集合 $U_\delta(a)$ で K と交わらないものを作れた。□

全有界性

定義 距離空間 X が<u>全有界</u> (totally bounded) であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，有限個の $x_1,\cdots,x_n\in X$ で $X=\bigcup_{i=1}^{n}U_\varepsilon(x_i)$ をみたすものが存在することであると定める． □

注意 各 $U_\varepsilon(x_i)$ は有界であり，有界な部分集合の有限和も有界になるので，全有界ならば有界になる． □

問題 全有界ならば有界になることの詳しい証明を書き下せ． □

ほぼ自明な定理 コンパクト距離空間は全有界である．

証明 X はコンパクト距離空間であるとし，$\varepsilon>0$ を任意に取る．このとき，$X=\bigcup_{x\in X}U_\varepsilon(x)$ は X の開被覆になる．X のコンパクト性より，有限個の $x_1,\cdots,x_n\in X$ で $X=\bigcup_{i=1}^{n}U_\varepsilon(x_i)$ をみたすものが存在する．ゆえに X は全有界である． □

例 X は無限集合であるとし，$x,y\in X$ について，$d(x,y)=\begin{cases}1 & (x\neq y)\\ 0 & (x=y)\end{cases}$ と定めると，(X,d) は距離空間になる．X は自明に有界である．しかし，$0<\varepsilon\leqq 1$ ならば $U_\varepsilon(x)=\{x\}$ $(x\in X)$ となることから，有限個の $x_1,\cdots,x_n\in X$ について，$\bigcup_{i=1}^{n}U_\varepsilon(x_i)=\{x_1,\cdots,x_n\}\neq X$ となる．ゆえに X は全有界ではない．(特にコンパクトでもない．) □

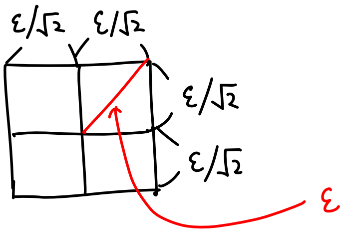
問題 X が全有界距離空間のとき，その部分空間 A も全有界になることを示せ．

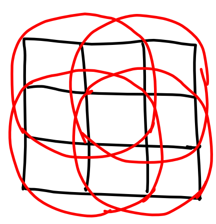
略証 $\varepsilon>0$ を任意にとる．ある $x_1,\cdots,x_n$ が存在して，$X=\bigcup_{i=1}^{n}U_{\varepsilon/2}(x_i)$ となる．
A における $a\in A$ の $\delta>0$ 近傍を $U^A_\delta(a)=U_\delta(a)\cap A$ と書く．$U_{\varepsilon/2}(x_i)\cap A\neq\phi$ となる $i=1,\cdots,n$ の全体を J と書き，各 $j\in J$ について $a_j\in U_{\varepsilon/2}(x_j)\cap A$ をえらんでおく．このとき，$U_{\varepsilon/2}(x_j)\subset U_\varepsilon(a_j)$ となるので
$A\subset\bigcup_{j\in J}U_{\varepsilon/2}(x_j)\subset\bigcup_{j\in J}U_\varepsilon(a_j)$．ゆえに $A=A\cap\bigcup_{j\in J}U_\varepsilon(a_j)=\bigcup_{j\in J}U^A_\varepsilon(a_j)$． □

問題 $\mathbb{R}^n$ の有界部分集合は全有界になることを示せ．

略証 上の問題の結果より，$M>0$ について，$[-M,M]^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}\mid -M\leqq x_1,\cdots,x_n\leqq M\}$ が全有界であることを示せば十分である．任意に $\varepsilon>0$ をとる．
$\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\mathbb{Z}^n=\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}k_1,\cdots,\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}k_n\right)\,\middle|\,k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{Z}\right\}$ と書き，$A=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\mathbb{Z}^n\cap[-M,M]^n$ とおくと，A は $[-M,M]$ の有限部分集合になり，$[-M,M]\subset\bigcup_{a\in A}U_\varepsilon(a)$ となること示せる． □

$n=2$ の場合の図





コンパクト位相空間上の実数値連続函数

重要

定理 コンパクト位相空間上の実数値連続函数は最大値と最小値を持つ.

証明 X はコンパクト位相空間であるとし, f は X 上の実数値連続函数であるとする.

一般に連続写像によるコンパクト位相空間の像もコンパクトになる(⑲)ので, f による X の像 $f(X)$ は $\mathbb{R}$ の相対位相についてコンパクトになる.

一般に Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉集合になる(⑳)ので, $f(X)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合になる.

一般にコンパクト距離空間は全有界(特に有界)になる(㉑)ので, $f(X)$ は有界になる.

一般に $\mathbb{R}$ の有界部分集合は実数の連続性より最大値と最小値を持つ(⑫)ので, $f(X)$ は最大値と最小値を持つ. □

系 (Corollary) $\mathbb{R}$ の有界閉集合上の実数値連続函数は最大値と最小値を持つ.

証明 一般に $\mathbb{R}$ 上の閉区間 $[a, b]$ は実数の連続性よりコンパクトになる(⑲).
一般にコンパクト位相空間の閉集合もコンパクトになる(⑲).
ゆえに $\mathbb{R}$ の有界閉集合は $\mathbb{R}$ のある閉区間の閉集合になるのでコンパクトになる.
したがって, 上の定理からこの系がしたがう. □

注意 以上の2つの証明より, $\mathbb{R}$ の部分集合 A について,

$$A \text{ はコンパクト} \iff A \text{ は } \mathbb{R} \text{ の有界閉集合}$$

が成立することがわかる. より一般に $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A について

$$A \text{ はコンパクト} \underset{(*)}{\iff} A \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の有界閉集合}$$

となることもよく知られている. □

問題 (*) を示せ.

ヒント 「コンパクト ⇒ 全有界かつ閉」は距離空間の部分集合について成立している.
(*) の ⇐ については, 高木貞治『解析概論』第1章定理11の証明を参考にせよ. □

一様連続性 距離空間では連続写像だけではなく<u>一様連続写像</u>も定義できる。

定義 距離空間のあいだの写像 $f: X \to Y$ が一様連続であるとは、
任意の $\varepsilon > 0$ について、ある $\delta > 0$ が存在して、任意の $x, x' \in X$ について、
$d(x, x') < \delta$ ならば $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ が成立することだと定める。 □

連続写像と一様連続写像のちがい

・f は連続 $\Longleftrightarrow$
- 任意の $\underline{a} \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して、
- ある $\delta > 0$ が存在して、任意の $x \in X$ について、
- $d(x, a) < \delta$ ならば $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる

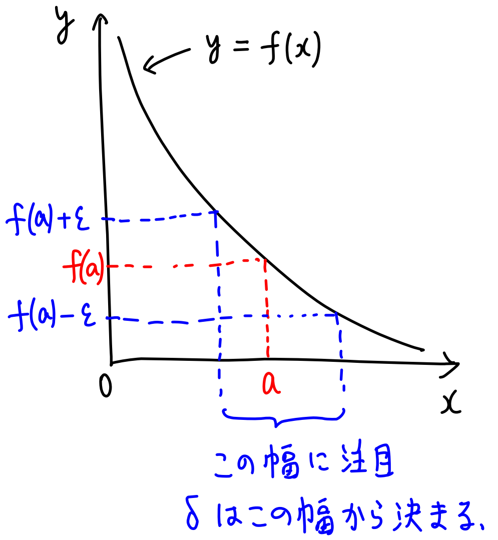
δは連続であることを確認する点 $a \in X$ ごとに別々に取れれば十分

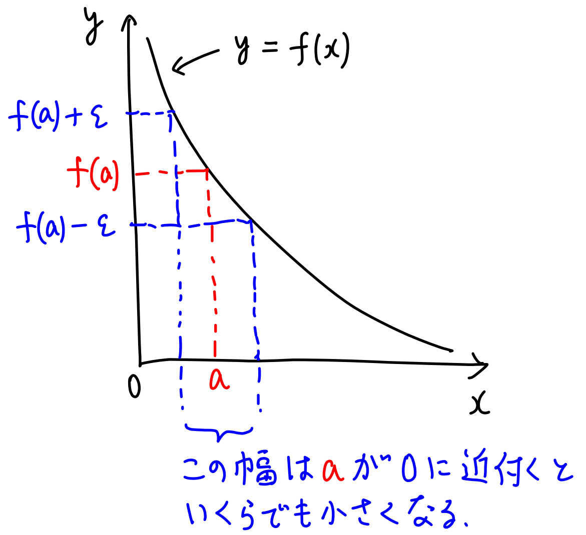
・f は一様連続 $\Longleftrightarrow$
- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、
- ある $\delta > 0$ が存在して、任意の $\underline{a}, x \in X$ について、
- $d(x, a) < \delta$ ならば $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる。

δはεだけから決まり、a に依存してはいけない。

・一様連続ならば連続である。 □

例 関数 $f(x) = x$ $(x > 0)$ は $\mathbb{R}_{>0}$ 上で連続だが一様連続ではない。





$\therefore$ $f(x) = \frac{1}{x}$ は $x > 0$ で一様連続ではない。 □

注意 任意に $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ を固定すれば $f(x) = \frac{1}{x}$ は $x \geq \alpha$ においては一様連続になる。 □

注意 一般の位相空間のあいだの写像について一様連続性を定義できない。

コンパクト距離空間から距離空間への連続写像の一様連続性

証明はそうむずかしくない.

定理 X はコンパクト距離空間であり, Y は距離空間であるとする. このとき, $f: X \to Y$ が連続写像であるならば f は一様連続になる.

証明 $f: X \to Y$ は連続であると仮定し, 任意に $\varepsilon > 0$ をとる.
各 $a \in X$ に対して, ある $\delta_a > 0$ が存在して,
$x \in X$, $d(x, a) < \delta_a$ ならば $d(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる.

$\{U_{\delta_a/2}(a)\}_{a \in X}$ は X の開被覆になる.

各点の十分小さな開近傍を集めて開被覆を作ってコンパクト性を適用することは基本パターンである.

X のコンパクト性より, 有限個の $a_1, \dots, a_n \in X$ が存在して, $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\delta_{a_i}/2}(a_i)$ となる.

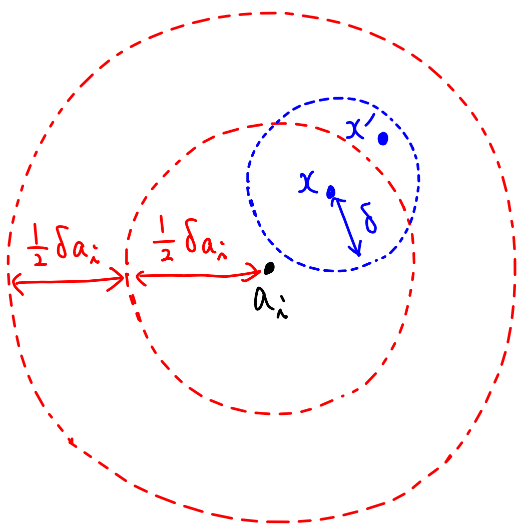
$\delta = \min\{\delta_{a_i}/2 \mid i = 1, \dots, n\} > 0$ とおき, $x, x' \in X$, $d(x, x') < \delta$ と仮定する.

ある $i = 1, \dots, n$ で $x \in U_{\delta_{a_i}/2}(a_i)$ すなわち $d(x, a_i) < \frac{1}{2}\delta_{a_i}$ をみたすものが存在する.
そのとき, $d(x, a_i) < \delta_{a_i}$ なので $d(f(x), f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる.

さらに, $d(x', a_i) \leqq d(x', x) + d(x, a_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{a_i} \leqq \frac{1}{2}\delta_{a_i} + \frac{1}{2}\delta_{a_i} = \delta_{a_i}$ なので,
$d(f(x'), f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ ともなる.

ゆえに, $d(f(x), f(x')) \leqq d(f(x), f(a_i)) + d(f(a_i), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

これで f の一様連続性を示せた. □



$\delta \leqq \frac{1}{2}\delta_{a_i}$

注意 連続函数(写像)の定義域のコンパクト性の仮定から出発する上の定理の証明は, コンパクト空間の例を作る問題よりも相対的にずっと易しい. □

階段函数による一様近似　$a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ であり, Y は距離空間であると仮定する.

定義 $f:[a,b]\to Y$ が階段函数 (step function) であるとは, 閉区間 $[a,b]$ のある分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_L=b$ と $y_1,\ldots,y_L\in Y$ で

$$f(x)=y_i \quad \text{if } x_{i-1}<x<x_i \quad (i=1,\ldots,L)$$

をみたすものが存在することである. ($f(x_i)$の値には制限を付けない.)

定理 任意の連続函数 $f:[a,b]\to Y$ に対して, 階段函数 $f_n:[a,b]\to Y$ たちで函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に $[a,b]$ 上一様収束するものが存在する.

証明 階段函数 $f_n:[a,b]\to Y$ で任意の $x\in[a,b]$ について $d(f(x),f_n(x))<\frac{1}{n}$ をみたすものを作れることを示せば十分である. 以下, 正の整数 n を任意にとって固定する.

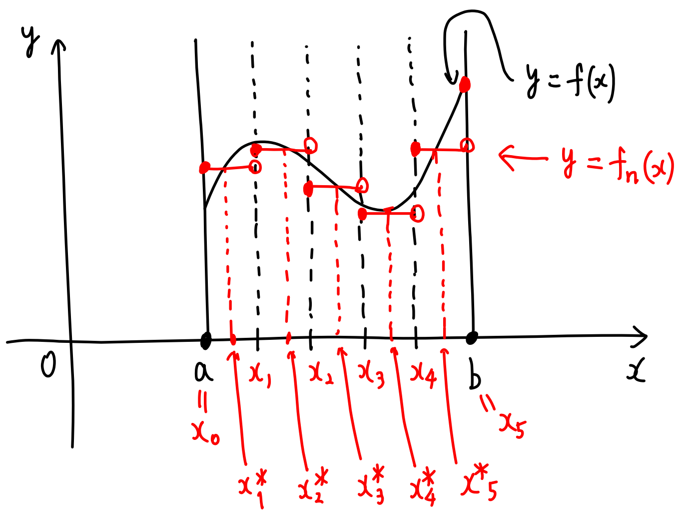
$[a,b]$ はコンパクト距離空間なので連続函数 $f:[a,b]\to Y$ は一様連続になる. ゆえに, ある $\delta>0$ が存在して, $x,x'\in[a,b]$ かつ $|x-x'|<\delta$ ならば $d(f(x),f(x'))<\frac{1}{n}$ となる.

閉区間 $[a,b]$ の分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_L=b$ を $\max\{x_i-x_{i-1}\mid i=1,\ldots,L\}<$ をみたされるようにとり, $x_i^*\in(x_{i-1},x_i)$ $(i=1,\ldots,L)$ を任意にえらび $y_i=f(x_i^*)$ とおく.

このとき, 任意の $x\in[x_{i-1},x_i]$ に対して, $|x-x_i^*|<\delta$ となるので $d(f(x),y_i)<\frac{1}{n}$ となる. ゆえに, 階段函数 $f_n:[a,b]\to Y$ を

$$f_n(x)=\begin{cases} y_i & (x\in[x_{i-1},x_i),\ i=1,\ldots,L) \\ f(b) & (x=b) \end{cases}$$

とおくと, 任意の $x\in[a,b]$ について $d(f(x),f_n(x))<\frac{1}{n}$. □



注意 階段函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ($f(x)=y_i$ if $x_{i-1}<x<x_i$, $a=x_0<x_1<\cdots<x_L=b$) の積分を $\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{L} y_i(x_i-x_{i-1})$ と定義でき, 階段函数列の一様収束先になっている函数についても, その極限で積分を定義できる. □

完備性 以下，X は距離空間であるとする． ($m,n \geqq N$ は $m \geqq N$ かつ $n \geqq N$ の意味)

定義 X 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy列 (Cauchy sequence) もしくは基本列 (fundamental sequence) であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある番号 N が存在して，$m,n \geqq N$ ならば $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ となることであると定める． □

この略記の仕方も理解の参考になるはず．

注意 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy列であるという条件を $d(a_m, a_n) \to 0$ as $m,n \to \infty$ や $\lim_{m,n\to\infty} d(a_m, a_n) = 0$ と略記することがある． □

収束列は Cauchy列 距離空間内の収束点列は Cauchy列である．

証明 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は距離空間 X 内の収束点列であるとし，$\alpha \in X$ に収束していると仮定する．
$\varepsilon > 0$ を任意にとる． ある番号 N が存在して，$k \geqq N$ ならば $d(a_n, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる．
このとき，$m, n \geqq N$ ならば $d(a_m, a_n) \leqq d(a_m, \alpha) + d(\alpha, a_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$，
ゆえに $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy列である． □

例 $X = \mathbb{Q}$，$d(x,y) = |x-y|$ $(x,y \in \mathbb{Q})$ とおくと $(\mathbb{Q}, d)$ は距離空間である．
$a_n = (\sqrt{2}$ を小数点以下第 n 桁目で切って得られる数$)$ とおく $(a_1 = 1.4,\ a_2 = 1.41,\ a_3 = 1.414, \ldots)$．
このとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $X = \mathbb{Q}$ 内の Cauchy列 だが，$X = \mathbb{Q}$ 内では収束しない $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$． □
この例のように，Cauchy列は収束するとは限らない．
しかし，上の例の Cauchy列は 距離空間 $X = \mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ まで拡大すれば収束する．

定義 距離空間 X 内の任意の Cauchy列が収束するとき，X は完備 (complete) であるという． □

Cauchy列は有界 Cauchy列は有界になる．

証明 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy列であると仮定する． $\varepsilon = 1$ に対して，ある N が存在して，
$m, n \geqq N$ ならば $d(a_m, a_n) \leqq 1$ となる． $M = \max\{d(a_1, a_N), \ldots, d(a_{N-1}, a_N)\}$ とおくと，
$n \geqq N$ のとき，$d(a_n, a_N) \leqq 1$ となり，$n < N$ のとき，$d(a_n, a_N) \leqq M$ となる． ゆえに任意の番号 n について，$d(a_n, a_N) \leqq \max\{1, M\}$． ゆえに $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である． □

Cauchy列の直観的意味 実際には収束するとは限らないが，収束しているように見える点列を Cauchy列と呼ぶ． 後で 距離空間を適切に拡大すれば すべての Cauchy列を収束するようにできることも説明する (完備化)． □

$\boxed{\text{定理}}$ Xは完備距離空間であるとし，Aはその距離部分空間であるとする．
このとき，以下の2つの条件は互いに同値である：

(a) Aは完備である．

(b) AはXの閉集合である．

$\boxed{\text{証明}}$ (a) ⇒ (b) 対偶を示そう．$\underbrace{A\text{は}X\text{の閉集合ではない}}_{X \setminus A\text{が}X\text{の開集合でないことと同値}}$と仮定する．
このとき，ある$\alpha \in X \setminus A$が存在して，任意の$\varepsilon > 0$について$U_\varepsilon(\alpha) \cap A \neq \phi$となる．
ゆえにA内の点列$\{a_n\}_{n=1}^\infty$で$a_n \in U_{1/n}(\alpha) \cap A$ $(n=1,2,\ldots)$をみたすものを作れる．
$d(a_n, \alpha) < \frac{1}{n}$ $(n=1,2,\ldots)$なのでX内の点列として$\{a_n\}_{n=1}^\infty$はαに収束する．
ゆえに$\{a_n\}_{n=1}^\infty$はX内のCauchy列になる．Aの距離函数はXのそれの制限になっているので$\{a_n\}_{n=1}^\infty$はA内のCauchy列にもなっている．しかし，収束先は$\alpha \notin A$なので，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$はA内で収束しない．ゆえにAは完備ではない．これで(a)⇒(b)の対偶を示せた．

(b) ⇒ (a) AはXの閉集合であると仮定し，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$はA内のCauchy列であるとする．
Xは完備なので$\{a_n\}_{n=1}^\infty$はある$\alpha \in X$に収束する．AはXの閉集合なので$\alpha \in A$となる(13で示した)．A内のCauchy列$\{a_n\}_{n=1}^\infty$がA内の点に収束することがわかった．
ゆえにAは完備である．これで(b)⇒(a)も示せた．

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

定理 Xは全有界な距離空間ならば X内の任意の点列はCauchy部分列を持つ.

証明 (対角線論法を使う!)

Xは全有界距離空間であると仮定する. 任意の $k=1,2,\ldots$ について, Xの有限部分集合 A_k で $X=\bigcup_{a\in A_k} U_{1/k}(a)$ をみたすものが存在する.

$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は X内の任意の点列であるとする. $k=1,2,3,\ldots$ について帰納的に

(*) $\quad d(x_m^{(k)}, x_n^{(k)}) < \dfrac{1}{k} \quad (m,n=1,2,3,\ldots)$

をみたす $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$ を構成しよう.

$k=1$のとき, $X=\bigcup_{a\in A_2} U_{1/2}(a)$ で A_2は有限集合なのである $a\in A_2$ で無限個の n について $x_n\in U_{1/2}(a)$ をみたすものが存在する. そのような x_n 全体を部分列とみなしたものを $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$ と定める. $x_m^{(1)}, x_n^{(1)}\in U_{1/2}(a)$ なので $d(x_m^{(1)}, x_n^{(1)}) \leqq d(x_m^{(1)}, a) + d(a, x_n^{(1)}) < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

$k\geqq 2$のとき, $\{x_n^{(k-1)}\}_{n=1}^\infty$ が得られているならば $X=\bigcup_{a\in A_{2k}} U_{1/(2k)}(a)$ で A_{2k}が有限集合なので, ある $a\in A_{2k}$ で無限個の n について $x_n^{(k-1)}\in U_{1/(2k)}(a)$ をみたすものが存在する. そのような $x_n^{(k-1)}$ の全体を部分列とみなしたものを $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$ と定める. このとき, $x_m^{(k)}, x_n^{(k)}\in U_{1/(2k)}(a)$ なので $d(x_m^{(k)}, x_n^{(k)}) \leqq d(x_m^{(k)}, a) + d(a, x_n^{(k)}) < \frac{1}{2k}+\frac{1}{2k}=\frac{1}{k}$.

$l\geqq k$のとき, $\{x_n^{(l)}\}_{n=1}^\infty$ は $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$ の部分列なので $d(x_m^{(l)}, x_n^{(k)}) < \frac{1}{k}$ となることに注意せよ.

対角線論法!

$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ を考え, 任意に $\varepsilon>0$ をとり, $\frac{1}{N}<\varepsilon$ となるように N をとると, $m,n\geqq N$のとき,

$$d(x_m^{(m)}, x_n^{(n)}) < \frac{1}{\min\{m,n\}} \leqq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

となるので, 部分列 $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ はCauchy列である. $\square$

上の定理よりただちに次の系が得られる.

系 Xが全有界完備な距離空間であれば X内の任意の点列は収束部分列を持つ. $\square$

完備な距離空間の例

(高木貞治『解析概論』第1章も参照せよ.)

例 $\mathbb{R}$ は距離函数 $d(x,y)=|x-y|$ について完備な距離空間である. □

注意 これは実数の連続性を意味する互いに同値な条件の1つになっている.

(a) $\mathbb{R}$ の空でない $\frac{上}{下}$ に有界な部分集合の $\frac{上限}{下限}$ が $\mathbb{R}$ 内に存在する.

(b) $\mathbb{R}$ 内の Cauchy列は収束する.

(a) ⇒ (b) の証明 (a) を仮定し, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbb{R}$ 内の Cauchy列であるとする. ゆえに上で示したように $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は有界になり, その部分 $\{a_k\}_{k=n}^\infty=\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ も有界になり, その下限 $b_n=\inf_{k\geqq n} a_k$ と上限 $c_n=\sup_{k\geqq n} a_k$ が (a) の仮定より $\mathbb{R}$ の中に存在する.

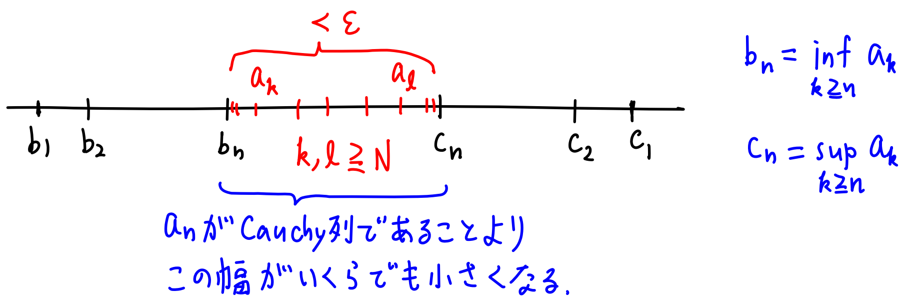
このとき, $b_1\leqq b_2\leqq b_3\leqq\cdots\leqq c_3\leqq c_2\leqq c_1$ となっているので, 再び(a)の仮定より, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ と $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ は収束する. それらの極限を $\liminf_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$, $\limsup_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c_n$ と書くのであった.

任意に $\varepsilon>0$ をとる. $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は Cauchy列なので, ある N が存在して, $k,l\geqq N$ ならば $|a_k-a_l|<\varepsilon$ となる. これより, $n\geqq N$ ならば $0\leqq c_n-b_n\leqq\varepsilon$ となることがわかる.

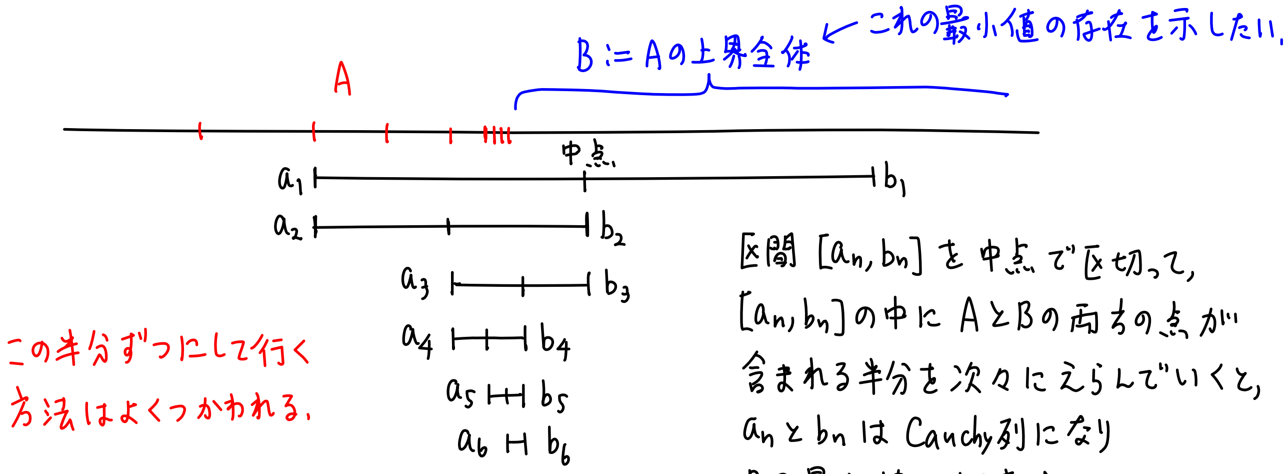
$\varepsilon>0$ はいくらでも小さくとれるので, $\liminf_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$, $\limsup_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c_n$ は同じ値になる.

ゆえに①で示したことより, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ はそれらと同じ値に収束する. これで (a) ⇒ (b) が示された.

以上の方針は次の図にまとめられる.



(b) ⇒ (a) の証明の方針 (a) ⇒ (b) の証明より文字数的に長くなるのでまず方針だけを先に示しておこう. (b) ⇒ (a) の証明の方針は次の図にまとめられる.



区間 $[a_n, b_n]$ を中点で区切って, $[a_n, b_n]$ の中に A と B の両方の点が含まれる半分を次々にえらんでいくと, a_n と b_n は Cauchy列になり B の最小値に収束する.

<u>(b) ⇒ (a)の証明</u>　(b)を仮定し，Aは$\mathbb{R}$の空でない上に有界な部分集合であるとする．Aの上界全体の集合をBと書くことにする．Aの有界性より，Bも空でない．$a\in A$と$b\in B$を任意にとり，$a_0=a$, $b_0=b$とおき，a_n, b_n $(n=0,1,2,\dots)$を帰納的に以下のように定める：

(i) $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]\cap B\neq\phi$のとき　$a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$とおく．

(ii) $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]\cap B=\phi$のとき　$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=b_n$とおく．

帰納的に$[a_n,b_n]\cap A\neq\phi$かつ$[a_n,b_n]\cap B\neq\phi$となることを示そう．

$n=0$のとき，$[a_0,b_0]\cap A\ni a$かつ$[a_0,b_0]\cap B\ni b$なのでそれは成立している．

$n\geqq 0$とし，$[a_n,b_n]\cap A\neq\phi$かつ$[a_n,b_n]\cap B\neq\phi$となっていると仮定する．

(i)の場合：$[a_{n+1},b_{n+1}]\cap B=\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\cap B\neq\phi$．　$[a_n,b_n]\cap A\neq\phi$で$\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]$が$A$の上界を含むので　$[a_{n+1},b_{n+1}]\cap A=\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\cap A=[a_n,b_n]\cap A\neq\phi$．

(ii)の場合：もしも$[a_{n+1},b_{n+1}]=\left[\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right]$が$A$の元を含んでいなければ$\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]$に$A$の上界が含まれることになるので(ii)の条件に反するので，$[a_{n+1},b_{n+1}]\cap A\neq\phi$となる．

$\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\cap B=\phi$より$[a_{n+1},b_{n+1}]\cap B=\left[\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right]\cap B=[a_n,b_n]\cap B\neq\phi$．

$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq b_2\leqq b_1$となり，$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$より，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$と$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$はCauchy列になるので(b)の仮定よりそれらは収束し，その収束先は同じ値になる．$\beta=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$とおく．

　βが$B=\{A$の上界全体$\}$の最小値であることを示せば証明が終わる．

　$\beta\in B$を示そう．任意に$\alpha\in A$をとる．各b_nはAの上界なので$\alpha\leqq b_n$となる．ゆえに$\alpha\leqq\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$．これで$\beta\in B$が示された．

　βがBの最小値であることを示そう．$\gamma\in\mathbb{R}$, $\gamma<\beta$と仮定する．$\gamma\notin B$を示せばよい．$\beta=\lim_{n\to\infty}a_n$なので$\gamma<a_n\leqq\beta$をみたす$n$が存在する．$a_n$の作り方より$a_n$以上の$A$の元が存在する．これは$\gamma\notin B$を意味する．

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{問題}}$ (中間値の定理) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ かつ f は閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続函数であるとし, $f(a)f(b) < 0$ ($f(a)$ と $f(b)$ は異符号) であると仮定する. このとき, ある $\alpha \in (a,b)$ で $f(\alpha) = 0$ をみたすものが存在することを示せ.

$\boxed{\text{略解}}$ (二分法) 上の (b) ⇒ (a) の証明と似た方法を使う.

$a_0 = a$, $b_0 = b$ とおき, $a_n, b_n \in (a,b)$ $(n = 0,1,2,\dots)$ を帰納的に以下のように定める:

(i) $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leqq 0$ のとき, $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ とおく.

(ii) $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$ のとき, $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = b_n$ とおく.

帰納法で $f(a_n)f(b_n) \leqq 0$ となることを示そう.

$f(a_0)f(b_0) < 0$ なので $n = 0$ では成立している.

$n \geqq 0$ かつ $f(a_n)f(b_n) \leqq 0$ と仮定する. (i) の場合には自明に $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leqq 0$ となる.

(ii) の場合には $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = \dfrac{f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\ f(a_n)f(b_n)}{f(a_n)^2} \leqq 0$.

$a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq b_2 \leqq b_1 \leqq b_0$ かつ $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ $(n \to \infty)$ なので $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ は同じ値 $\alpha \in [a,b]$ に収束する.

$f(a_n)f(b_n) \leqq 0$ で $n \to \infty$ とすると f の連続性より $f(\alpha)^2 \leqq 0$ が得られる. ゆえに $f(\alpha) = 0$.

$f(a)f(b) < 0$ より $\alpha \neq a$, $\alpha \neq b$ なので $\alpha \in (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. □

$\boxed{\text{注意}}$ 二分法は区間上の連続函数の零点の数値計算でも使える.
しかし, Newton法などのもっと高速な計算法が使える場合が多い. □

$\boxed{\text{問題}}$ $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ は 0 に収束する実数列であり, $c_0 \geqq c_1 \geqq c_2 \geqq \cdots \geqq 0$ をみたすと仮定し,
$s_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_i = s_{n-1} + (-1)^n c_n$ とおく. $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ が収束することを示せ.

$\boxed{\text{略解}}$ $s_{2k+1} = s_{2k} - c_{2k-1} \leqq s_{2k}$, $s_{2k+2} = s_{2k} \overbrace{- c_{2k-1} + c_{2k}}^{\leqq 0} \leqq s_{2k}$, $s_{2k+3} = s_{2k+1} + \overbrace{c_{2k+2} - c_{2k+3}}^{\geqq 0} \geqq s_{2k+1}$ より

$$s_1 \leqq s_3 \leqq s_5 \leqq \cdots \leqq s_4 \leqq s_2 \leqq s_0, \quad |s_{2k+1} - s_{2k}| = |c_{2k+1}| \to 0 \ (k \to \infty)$$

となっていることがわかる. ゆえに $\{s_{2k}\}_{k=0}^{\infty}$ と $\{s_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ は同じ値 α に収束する.
このことから, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ が α に収束することがわかる. □

$\boxed{\text{例}}$ 以下の有名な例を自分で証明してみよ:

(1) $\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \log 2$.

(2) $\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$. □

これらの左辺の和を
そのまま足し上げる数値計算を
すると収束は非常に遅くなる.
交代級数の収束を加速する
方法として, Euler法が広く
知られている.

定義 ノルムが与えられた$\mathbb{R}$上のベクトル空間を$\mathbb{R}$上の<u>ノルム空間</u> (normed (vector) space) と呼び，完備なノルム空間を<u>Banach空間</u>（バナッハ）(Banach space) と呼ぶ． □

例 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ は1次元のBanach空間である． □

例 $\mathbb{R}^n$に任意のノルムを入れたものはBanach空間になる．

証明 $\mathbb{R}^n$の任意のノルムは互いに同値なので，たとえばEuclidノルムについて完備であることを示せば十分である．$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$と書き，$\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$はEuclidノルムに関するCauchy列であるとする．

各$i = 1, 2, \dots, n$について，$\mathbb{R}$内の点列$\{x_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$がCauchy列になっていることを示そう．任意に$\varepsilon > 0$をとる．$\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$はEuclidノルムに関するCauchy列なので，あるNが存在して，$k, l \geqq N$ならば$\|x^{(k)} - x^{(l)}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - x_i^{(l)})^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$となり，

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(l)}| = \left((x_i^{(k)} - x_i^{(l)})^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \|x^{(k)} - x^{(l)}\|$$

となるので各iごとに$\{x_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$は$\mathbb{R}$内のCauchy列になる．

ゆえにそれらは収束する．$\alpha_i = \lim_{k \to \infty} x_i^{(k)}$，$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$とおく．

$\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$が$\alpha$にEuclidノルムについて収束することを示そう．$\varepsilon > 0$を任意にとる．各iごとにあるN_iが存在して，$k \geqq N$ならば$|x_i^{(k)} - \alpha_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$となる．ゆえに$k \geqq \max\{N_1, \dots, N_n\}$ならば，

$$\|x^{(k)} - \alpha\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - \alpha_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon,$$

これで示すべきことがすべて示された． q.e.d.

例 $C([a,b],\mathbb{R})$ に sup ノルム $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ を入れると Banach 空間になる.

閉区間 $[a,b]$ はコンパクトでなので $[a,b]$ 上の連続函数 $x \mapsto |f(x)|$ は最大値を持つ.
(このことは⑲を見ればわかる.) このことから sup ノルムが well-defined であることがわかる.

完備性の証明 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $C([a,b],\mathbb{R})$ における sup ノルムに関する Cauchy 列であるとする.

各点 $x\in[a,b]$ に対して, $\mathbb{R}$ 内の点列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ が Cauchy 列になることを示そう.

$x\in[a,b]$ と $\varepsilon>0$ を任意にとる. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は sup ノルムに関する Cauchy 列なので,
ある番号 N が存在して, $m,n\geqq N$ ならば $\|f_m - f_n\|_\infty = \sup_{y\in[a,b]} |f_m(y)-f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$,

$$|f_m(x)-f_n(x)| \leqq \sup_{y\in[a,b]} |f_m(y)-f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

となる. ゆえに $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbb{R}$ 内の Cauchy 列である.

$\mathbb{R}$ の完備性より, $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ は収束するので, 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ によって定めることができる.

$m,n\geqq N$ ならば $|f_m(x)-f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ なので, $n\to\infty$ の極限をとることによって,
$m\geqq N$ ならば $|f_m(x)-f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ となることがわかる. $x\in[a,b]$ は任意にとっていたので,
$m\geqq N$ ならば $\sup_{x\in[a,b]} |f_m(x)-f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ となることもわかる.

$f\in C([a,b],\mathbb{R})$ すなわち f が連続であることを示そう. f_N は連続なのである $\delta>0$ が存在して, $x'\in[a,b]$ かつ $|x-x'|<\delta$ ならば $|f_N(x)-f_N(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$ なるので

$$|f(x)-f(x')| \leqq \underbrace{|f(x)-f_N(x)|}_{\leqq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(x)-f_N(x')|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(x')-f(x')|}_{\leqq \varepsilon/3} < \varepsilon$$

となる. これで f が連続であることがわかった.

そして, $m\geqq N$ ならば

$$\|f_m - f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f_m(x)-f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

となるので, $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ が f に sup ノルムについて収束することも示された.

これで $C([a,b],\mathbb{R})$ の sup ノルムに関する完備性が示された. □

絶対収束 完備性は絶対収束の概念の基礎になっている。

定理 V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であるとし、$\|\cdot\|$ は V 上のノルムであるとし、そのノルムによって V を距離空間とみなす。このとき、以下の2つの条件は互いに同値である。

(a) V は完備である。(すなわち、$(V, \|\cdot\|)$ は Banach 空間である。)

(b) V 内の任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、$\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|$ が有限の値に収束するならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ が V 内で収束する。

証明 <u>(a)⇒(b)</u> V は完備であると仮定し、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は V 内の点列で $\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|$ は有限の値に収束するとし、$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。V の完備性より、$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示すためには、それが Cauchy 列であることを示せば十分である。任意に $\varepsilon > 0$ をとる。
$\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|$ が収束することより、$S_n = \sum_{k=1}^{n}\|a_k\|$ とおくと、$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し、ゆえに Cauchy 列になる。したがって、ある番号 N が存在して、$N \leqq m \leqq n$ ならば $S_n - S_m < \varepsilon$ となり、

$$\|s_n - s_m\| = \|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n\| \leqq \|a_{m+1}\| + \|a_{m+2}\| + \cdots + \|a_n\| = S_n - S_m < \varepsilon$$

となる。ゆえに $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列となり、V の完備性より収束する。

<u>(b)⇒(a)</u> (b) を仮定し、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は V における Cauchy 列であるとする。
そのとき、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $(1 \leqq n_1 < n_2 < \cdots)$ で $\|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ をみたすものが存在する。$b_1 = a_{n_1}$, $b_k = a_{n_k} - a_{n_{k-1}}$ $(k = 2, \quad)$ とおくと、$a_{n_k} = \sum_{i=1}^{k} b_i$
$\sum_{i=1}^{k}\|b_i\| = \|a_{n_1}\| + \sum_{i=2}^{k}\|a_{n_i} - a_{n_{i-1}}\| < \|a_{n_1}\| + \sum_{i=2}^{k}\frac{1}{2^{i-1}} < \|a_{n_1}\| + 1$ となるので、
$\sum_{i=1}^{\infty}\|b_i\|$ は有限の値に収束し、(b) の仮定より、$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ はある $\alpha \in V$ に収束する。
任意に $\varepsilon > 0$ をとる。$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列なのである N_1 が存在して、$m, n \geqq N_1$ ならば $\|a_n - a_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる。$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は α に収束するのである N_2 が存在して、$k \geqq N_2$ ならば $\|a_{n_k} - \alpha\| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる。k を $k \geqq N_2$ と $n_k \geqq N_1$ をみたすようにとる。このとき、$n \geqq N_1$ ならば

$$\|a_n - \alpha\| \leqq \|a_n - a_{n_k}\| + \|a_{n_k} - \alpha\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も α に収束することが示された。 □

定義 上の定理の条件(b)のもとで、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は<u>絶対収束</u> (absolutely converge) という。 □

注意 絶対収束級数は和の順序によらないことを示せる。このことについては
高木貞治『解析概論』第4章§43に実数列の場合についての詳しい解析がある。
以下の場所に私が書いた解説がある。

https://github.com/genkuroki/Calculus

→ 02 級数 https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/02%20series.pdf

それらの結果はBanach空間の場合に容易に一般化可能である。
自分でノートをまとめてみよ。 □

例 $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上の2次元のベクトル空間とみなせ，絶対値をノルムとみなすことによってノルム空間とみなせ，$\mathbb{R}^n$ に任意のノルムを入れたものは完備になる（25の例）ので，$\mathbb{C}$ は完備でもある。$z\in\mathbb{C}$ について，$|z|<1$ ならば $\sum_{n=0}^\infty z^n$ は $\dfrac{1}{1-z}$ に絶対収束する。 □

例（絶対収束しないが収束する級数の例）

非負の実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は単調に0に収束していると仮定する（$a_0\geqq a_1\geqq a_2\geqq\cdots\geqq 0$, $a_n\to 0$）。
$z\in\mathbb{C}$, $|z|=1$, $z\neq 1$ と仮定する。このとき，$b_n=\sum_{k=0}^n z^k=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$, $b_{-1}=0$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n a_k z^k &= \sum_{k=0}^n a_k(b_k-b_{k-1}) \\
&= (a_0b_0+a_1b_1+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}+a_nb_n)-(a_1b_0+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})b_k + a_nb_n.
\end{aligned}
$$

そして，$|b_n|=\dfrac{|1-z^{n+1}|}{|1-z|}\leqq\dfrac{|1|+|z|^{n+1}}{|1-z|}=\dfrac{2}{|1-z|}$ で，$a_n\to 0$ なので $|a_nb_n|=a_n|b_n|\to 0$.

さらに，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|(a_k-a_{k+1})b_k|=\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})|b_k|\leqq\frac{2}{|1-z|}\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})=\frac{2}{|1-z|}(a_0-a_n)\leqq\frac{2a_0}{|1-z|}$.

ゆえに，$\sum_{k=0}^\infty(a_k-a_{k+1})b_k$ は絶対収束する。

以上を合わせれば $\sum_{n=0}^\infty a_nz^n$ が収束することがわかる。

(i) $a_n=\dfrac{1}{n+1}$, $z=-1$ のとき，$\sum_{n=0}^\infty a_nz^n=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots$ は収束する。

(ii) $a_n=\dfrac{1}{2n+1}$, $z=-1$ のとき，$\sum_{n=0}^\infty a_nz^n=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$ は収束する。

しかし，(i), (ii) の場合に $\sum_{n=0}^\infty|a_nz^n|=\sum_{n=0}^\infty a_n=\infty$ となるので，$\sum_{n=0}^\infty a_nz^n$ は絶対収束しない。 □

問題 $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots=\log 2$ と $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$ を示せ。 □

縮小写像

完備距離空間でよく使われる。

定義 Xは距離空間であるとする。写像$f: X \to X$に対して、$0 \leqq c < 1$をみたすある実数cが存在して、任意の$x, x' \in X$について$d(f(x), f(x')) \leqq c\, d(x, x')$が成立しているとき、$f$は<u>縮小写像</u>(contraction mapping)であるという。 □

注意 縮小写像は一様連続になる。 □

写像$f: X \to X$について、$a \in X$が$f(a) = a$をみたすとき、aはfの<u>不動点</u>(fixed point)であるという。

定理 Xが完備距離空間でfがその縮小写像であるとき、fの不動点がただひとつ存在する。

証明 $f: X \to X$をn個合成してできる写像を$f^n = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n\text{個}} : X \to X$と書く。

$0 \leqq c < 1$でかつ、任意の$x, x' \in X$について$d(f(x), f(x')) \leqq c\, d(x, x')$となっていると仮定する。このとき、$d(f^n(x), f^n(x')) \leqq c^n d(x, x') \to \infty$ $(n \to \infty)$となる。

<u>一意性</u> $a, b \in X$がfの不動点ならば$d(a, b) = d(f^n(a), f^n(b)) \leqq c^n d(a, b) \to 0$なので$d(a, b) = 0$。ゆえに、$a = b$。

<u>存在</u> $a \in X$を任意にとり、$a_n = f^n(a)$とおく。このとき、$m \leqq n$ならば

$$\begin{aligned} d(a_n, a_0) &\leqq d(a_n, a_{n-1}) + d(a_{n-1}, a_{n-2}) + \cdots + d(a_1, a_0) \\ &= d(f^{n-1}(a_1), f^{n-1}(a_0)) + d(f^{n-2}(a_1), f^{n-2}(a_0)) + \cdots + d(a_1, a_0) \\ &\leqq c^{n-1} d(a_1, a_0) + c^{n-2} d(a_1, a_0) + \cdots + d(a_1, a_0) \\ &= (c^{n-1} + c^{n-2} + \cdots + 1)\, d(a_1, a_0) \leqq \frac{d(a_1, a_0)}{1-c}. \end{aligned}$$

$$d(a_n, a_m) = d(f^m(a_{n-m}), f^m(a_0)) \leqq c^m d(a_{n-m}, a_0) \leqq c^m \frac{d(a_1, a_0)}{1-c}.$$

ゆえに、$m \leqq n$, $m \to \infty$のとき、$d(a_n, a_m) \to 0$。

これで$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$がCauchy列であることがわかった。Xが完備ならば$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はある$\alpha \in X$に収束する。このとき、$f(\alpha) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$なので$\lim_{n\to\infty} f^n(a) = \alpha$は$f$の不動点になる。 □

例 (ピカールPicardの逐次近似法, Picard iteration)

$X = C([a,b], \mathbb{R})$ は sup ノルム $\|\cdot\|_\infty$ について完備であった.

$f: [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($f(t,u)$ と書く) は次の条件をみたすと仮定する:

(Lipschitz条件) ある $K>0$ が存在して, 任意の $t\in[a,b]$ と $u, v\in\mathbb{R}$ に対して,

$$|f(t,u)-f(t,v)| \leqq K|u-v|.$$

$\alpha\in\mathbb{R}$ を固定し, 写像 $T: X\to X$ を $Tu(t) = \alpha + \int_a^t f(s,u(s))\,ds$ と定める.

このとき, $t\in[a,b]$, $u, v\in X$ について,

$$|Tu(t)-Tv(t)| = \left|\int_a^t (f(s,u(s))-f(s,v(s)))\,ds\right| \leqq \int_a^t |f(s,u(s))-f(s,v(s))|\,ds$$

$$\leqq \int_a^t K|u(s)-v(s)|\,ds \leqq \int_a^t K\|u-v\|_\infty\,ds = K(t-a)\|u-v\|_\infty.$$

$$|T^2u(t)-T^2v(t)| \leqq \int_a^t K|Tu(s)-Tv(s)|\,ds \leqq \int_a^t K^2(s-a)\|u-v\|_\infty\,ds = K^2\frac{(t-a)^2}{2!}\|u-v\|_\infty,$$

$$|T^3u(t)-T^3v(t)| \leqq \int_a^t K|T^2u(s)-T^2v(s)|\,ds \leqq \int_a^t K^3\frac{(s-a)^2}{2!}\|u-v\|_\infty\,ds = K^3\frac{(t-a)^3}{3!}\|u-v\|_\infty.$$

以下, 同様にして, $n=0,1,2,\dots$ について次を示せる:

$$|T^nu(t)-T^nv(t)| \leqq K^n\frac{(t-a)^n}{n!}\|u-v\|_\infty \leqq \frac{K^n(b-a)^n}{n!}\|u-v\|_\infty.$$

$$\therefore\ \|T^nu-T^nv\|_\infty \leqq \frac{K^n(b-a)^n}{n!}\|u-v\|_\infty$$

n を十分大きくすれば $0\leqq \frac{K^n(b-a)^n}{n!}<1$ となり, $T^n: X\to X$ は縮小写像になる.

このことから, ゆえに, $T^nu=u$ をみたす $u\in X$ が唯一つ存在する.

$$\|Tu-u\|_\infty = \|T^{n+1}u-T^nu\|_\infty \leqq \frac{K^n(b-a)^n}{n!}\|Tu-u\|_\infty \to 0 \quad (n\to\infty)$$

なので $Tu=u$ も成立している. このとき,

$$u(t) = Tu(t) = \alpha + \int_a^t f(s,u(s))\,ds.$$

これは

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t,u(t)), \quad u(a)=\alpha$$

同値である. 以上のようにして, Lipschitz条件のもとで, 常微分方程式の初期値問題の解の一意存在を示せる.

□

例 上の例で $f(t,u)=A(t)u$, $[a,b]=[0,b]$ の場合に $T^n u(t)$ を求めてみよう.

$\int_0^t g(s)\,ds$ を $\int_0^t ds\, g(s)$ と書く.

Picardの逐次近似法については, まず, この例を計算しておくと納得しやすい.

$$Tu(t) = \alpha + \int_0^t ds_1\, A(s_1)\, u(s_1)$$

$$T^2 u(t) = \alpha + \int_0^t ds_1\, A(s_1)\left(\alpha + \int_0^{s_1} ds_2\, A(s_2)\, u(s_2)\right)$$

$$= \alpha + \int_0^t ds_1\, A(s_1)\,\alpha + \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2\, A(s_1) A(s_2)\, u(s_2)$$

$$T^3 u(t) = \alpha + \int_0^t ds_1\, A(s_1)\,\alpha + \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2\, A(s_1)A(s_2)\,\alpha + \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3\, A(s_1)A(s_2)A(s_3)\, u(s_3)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$T^n u(t) = \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{n-2}} ds_{n-1}\, A(s_1)A(s_2)\cdots A(s_{n-1})\right)\alpha + R_n$$

ここで,

$$R_n = \int_0^t ds_1 \int_0^{s_2} ds_2 \cdots \int_0^{s_{n-2}} ds_{n-1} \int_0^{s_{n-1}} ds_n\, A(s_1)A(s_2)\cdots A(s_{n-1})A(s_n)\,u(s_n).$$

$A(t)$ がスカラー値ならば

$0 \leqq s_k \leqq \cdots \leqq s_2 \leqq s_1 \leqq t$ での積分

$$\int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{k-1}} ds_k\, A(s_1)A(s_2)\cdots A(s_k) = \frac{1}{k!}\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)^k$$

どうしてこうなるか自分で考えてみよ.

なので,

$$\lim_{n\to\infty} T^n u(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)^k\right)\alpha = e^{\int_0^t A(s)\,ds}\,\alpha.$$

これの右辺をあらためて, $u(t) = \exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)\alpha$ とおくと, $Tu=u$ であり,

$$\frac{du(t)}{dt} = A(t)\, e^{\int_0^t A(s)\,ds}\,\alpha = A(t)\,u(t), \quad u(0)=\alpha. \qquad \square$$

例 $\dfrac{du(t)}{dt} = 2\sqrt{u(t)}$ $(t \geqq 0)$, $u(0)=0$ という微分方程式を考える.

$u(t)=0$ $(t\geqq 0)$ も $u(t)=t^2$ $(t \geqq 0)$ も解になっている. $a \geqq 0$ について,

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq t \leqq a) \\ (t-a)^2 & (a \leqq t) \end{cases}$$

も解になっている. $f(t,u) = 2\sqrt{u}$ $(t\geqq 0,\ u \geqq 0)$ は Lipschitz 条件をみたしていない. $\square$

文献 常微分方程式の初期値問題の解の一意性については次が基本文献である:

- 岡村 博『微分方程式序説』共立出版 (2003). $\square$

コンパクト性の特徴付け

(この節のような長い証明はノートにくりかえし書くことによって理解が少しずつ進んで行くことが多い，けっこう大変！)

数年かかる場合がある!!!

定理 X は距離空間であるとする．このとき，以下の3条件は互いに同値である：

(a) X はコンパクトである．

(b) X 内の任意の点列は収束する部分列を持つ．← 点列コンパクト性

(c) X は全有界かつ完備である．

証明 (a)⇒(b) X はコンパクト距離空間であるとし，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 内の点列であるとする．

$A=\{x_n \mid n=1,2,\dots\}$ が有限集合ならばある $\alpha\in X$ が存在して無限個の n について $x_n=\alpha$ となるので，そのような n に対する x_n の全体からなる部分列が α に収束する．

$A=\{x_n \mid n=1,2,\dots\}$ が無限集合ならば，X のコンパクト性より，それは集積点 $\alpha\in X$ を持つ(19)．易しい

$n_1<n_2<\cdots$ で $x_{n_k}\in U_{1/k}(\alpha)$ $(k=1,2,\dots)$ をみたすものを帰納的に構成しよう．

α は A の集積点なので $U_{1/1}(\alpha)$ はある x_n を含む．それを x_{n_1} とする．

$n_1<n_2<\cdots<n_k$ で $x_{n_k}\in U_{1/k}(\alpha)$ をみたすものがすでに構成されていると仮定する．もしも，ある $n>n_k$ で $x_n\in U_{1/(k+1)}(\alpha)$ をみたすものが存在しないとすると，$x_1, x_2, \dots, x_{n_k}$ の中で α 以外のものと α の最短距離と $\frac{1}{k+1}$ の小さい方を ε とすると，$U_\varepsilon(\alpha)$ は A の α 以外の点を含まなくなり，α が A の集積点であることに反する．ゆえに，ある $n_{k+1}>n_k$ で $x_{n_{k+1}}\in U_{1/(k+1)}(\alpha)$ をみたすものをとれる．

以上のようにして作った部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は $d(x_{n_k},\alpha)<\frac{1}{k}$ をみたすので α に収束する．□

(b)⇒(c) (b)を仮定して，X の完備性を示そう．$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 内の Cauchy列であると仮定する．(b)を仮定しているので，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ である $\alpha\in X$ に収束するものが存在する．任意に $\varepsilon>0$ をとる．$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy列なので，ある N が存在して，$n, n_k\geqq N$ ならば $d(x_n, x_{n_k})<\frac{\varepsilon}{2}$ となり，$k\to\infty$ とすることによって，$d(x_n,\alpha)\leqq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ を得る．これで $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束することを示せた．X は完備である．

X が全有界でないならば(b)が成立しないことを示そう．X が全有界でなければ，ある $\varepsilon>0$ が存在して，X を有限個の $U_\varepsilon(x)$ でおおえなくなる．任意に $x_1\in X$ をとる．$x_2\in X\setminus U_\varepsilon(x_1)$ がとれる．帰納的に $x_{n+1}\in X\setminus\bigcup_{m=1}^{n}U_\varepsilon(x_m)$ $(n=1,2,\dots)$ をみたす X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を作れる．このとき，$m<n$ ならば $d(x_m,x_n)\geqq\varepsilon$ となるので，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列で Cauchy列になるものを作れない．収束列は Cauchy列なので $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束部分列も作れない．X が全有界でないならば(b)は成立しない．これで(b)⇒(c)を示せた．

(c) ⇒ (a)　X は全有界完備距離空間であるとする. (a) を示したい.

X は全有界なので, 各 $N=1,2,\dots$ に対して, X の有限部分集合 A_N で $X=\bigcup_{a\in A_N} U_{1/N}(a)$ をみたすものが存在する. $\mathcal{B}=\bigcup_{N=1}^{\infty}\{U_{1/N}(a)\mid a\in A_N\}$ とおく.

X の任意の開集合 U が $\mathcal{B}$ に含まれる開集合の和集合になることを示そう. そのためには任意の $x\in U$ に対して, ある $\mathcal{B}$ の元 $U_{1/N}(a)$ で $x\in U_{1/N}(a)\subset U$ をみたすものの存在を示せば十分である. 任意に $x\in U$ をとる. U は開集合なのである $\varepsilon>0$ で $U_\varepsilon(x)\subset U$ をみたすものが存在する. $\frac{1}{N}\leqq\frac{\varepsilon}{2}$ となるように N をとれる. ある $a\in A_N$ で $x\in U_{1/N}(a)$ をみたすものが存在する. このとき, 任意の $y\in U_{1/N}(a)$ について

$$d(y,x)\leqq d(y,a)+d(a,x)<\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\leqq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\quad\therefore\ y\in U_\varepsilon(x).$$

これで $x\in U_{1/N}(a)\subset U_\varepsilon(x)\subset U$ が示された.

全有界 ⇒ 第2可算公理をみたす.

$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ は X の開被覆であるとする. 各 U_λ は U_λ に含まれる $\mathcal{B}$ の元達でおおうことができる. $\mathcal{B}$ は高々可算集合なので, どれかの U_λ に含まれる高々可算個の $\mathcal{B}$ の元たち $B_i=U_{1/N_i}(a_i)$ ($a_i\in A_{N_i}$, $i=1,2,\dots$) で X をおおうことができる.

もしも $X=\bigcup_{k=1}^{n}B_{i_k}$ とできるならば $B_{i_k}\subset U_{\lambda_k}$ をみたす λ_k たちをえらべば $X=\bigcup_{k=1}^{n}U_{\lambda_k}$ となって (a) を示せたことになる.

ゆえに, 有限個の B_i たちで X をおおうことができないと仮定して矛盾が得られれば証明が終わる.

このとき $X=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$ と書ける

有限個の B_i たちで X をおおうことができないと仮定する. $x_n\notin\bigcup_{i=1}^{n}B_i$ となるような X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとれる. X の全有界性より, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ で Cauchy 列になるものが存在する (24 で対角線論法を使って示した). X の完備性より, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ はある $\alpha\in X$ に収束する.

非自明

本質的に 24 の内容

$X=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$ より, ある m で $\alpha\in B_m$ をみたすものが存在する.

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は α に収束するので, ある K が存在して, $k\geqq K$ ならば $x_{n_k}\in B_m$ となる.

$n_k\geqq k$ であることと, $x_n\notin\bigcup_{i=1}^{n}B_i$ より $x_m,x_{m+1},x_{m+2},\dots\notin B_m$ となることに注意せよ.

ゆえに, $k=\max\{m,K\}$ とおくと, $k\geqq K$ なのに $x_{n_k}\notin B_m$ となって上に矛盾する.

これでほしい矛盾が得られたので証明が完了した. 　q.e.d.

注意 (c) ⇒ (b) は 24 の"系"ですでに示していたことをここで注意しておく. □

定理 X が $\mathbb{R}^n$ の距離部分空間であるとき，以下の条件は互いに同値である．

(a) X はコンパクトである．

(b) X 内の任意の点列は収束する部分列を持つ．

(c′) X は $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合である．

証明 前定理より，条件(c′)が条件「(c) X は全有界完備であること」と同値であることを示せば十分である．

一般に全有界ならば有界であり，$\mathbb{R}^n$ の部分集合については逆も成立する（21で示した）．すなわち，$\mathbb{R}^n$ の部分集合 X について全有界性と有界性は同値である．

$\mathbb{R}^n$ は完備である（25で $\mathbb{R}^n$ は任意のノルムについて完備で Banach空間になることを示した）．ゆえに，$\mathbb{R}^n$ の距離部分空間 X について，完備性と $\mathbb{R}^n$ の閉集合になることは同値である（24で示した）．

これで (c′) と (c) の同値性が示された． □

注意 上の定理を距離空間論を経由せずに直接証明できるようになっておくことが望ましい．例えば高木貞治『解析概論』第1章定理11（Heine-Borelの被覆定理：$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合はコンパクトである）の証明を参照せよ．

距離空間論のように抽象化されていない $\mathbb{R}^n$ 特有の議論にも慣れておくことは解析学の理解で役に立つ．

19で示した「$\mathbb{R}$ 内の閉区間はコンパクトである」の証明を高次元化すれば，$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合がコンパクトであることを示せる．自分で色々考えてみよ． □

Weierstrass の多項式近似定理

定理 (Weierstrass の多項式近似定理)

閉区間 $[a,b]$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$ 上の任意の連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して、
多項式函数たち $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ で $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束するものが存在する。

証明 (高木貞治『解析概論』第6章 §78 で紹介されている Serge Bernstein の方法)

多項式 $\varphi_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ $(k=0,1,\dots,n)$ を Bernstein 多項式と呼ぶ。

ここで $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ は二項係数である。 ($\varphi_k(x)$ は二項分布における確率を表わす。)

1 $\displaystyle\sum_{k=0}^n\varphi_{n,k}(x)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\overset{\text{二項定理}}{=}(x+(1-x))^n=1.$ ←(全確率の和)=1

2 $\displaystyle\sum_{k=0}^n k\,\varphi_{n,k}(x)=nx$ を示そう。

$$(\text{左辺})=\sum_{k=1}^n\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}=nx\underbrace{\sum_{k=1}^n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}}_{\text{二項定理より}=1}=nx,$$

(期待値)$=nx$

3 $\displaystyle\sum_{k=0}^n k(k-1)\varphi_{n,k}(x)=n(n-1)x^2$ を示そう。

$$(\text{左辺})=\sum_{k=2}^n\frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}=n(n-1)x^2\underbrace{\sum_{k=2}^n\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!}x^{k-2}(1-x)^{n-k}}_{\text{二項定理より}=1}=n(n-1)x^2$$

4 $\displaystyle\sum_{k=0}^n k^2\varphi_{n,k}(x)=\sum_{k=0}^n k(k-1)\varphi_k(x)+\sum_{k=0}^n k\,\varphi_k(x)=n(n-1)x^2+nx$ (by 2, 3).

5
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n(k-nx)^2\varphi_{n,k}(x)&=\sum_{k=0}^n k^2\varphi_{n,k}(x)-2nx\sum_{k=0}^n k\,\varphi_{n,k}(x)+n^2x^2\sum_{k=0}^n\varphi_{n,k}(x)\quad\text{by 1, 2, 4}\\&=n(n-1)x^2+nx-2nx\cdot nx+n^2x^2\\&=\cancel{n^2x^2}-nx^2+nx-\cancel{2n^2x^2}+\cancel{n^2x^2}\\&=nx(1-x).\end{aligned}$$

(分散)$=nx(1-x)$

$x'=(1-x)a+xb=a+(b-a)x$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続であると仮定する。

$g(x)=f((1-x)a+xb)$ とおくと、連続函数 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ が定まり、$f(x)=g\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$.
f の代わりに g について定理を示せば十分である。

多項式 $g_n(x)$ を

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_{n,k}(x)\qquad(n=1,2,3,\dots)$$

と定める。$g_n(x)$ が $[0,1]$ 上の函数として、$g(x)$ に一様収束することを示そう。 つづく

$\boxed{6}$ $M = \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$ とおく。(㉒より $\{|g(x)| \mid x\in[0,1]\}$ には最大値が存在する。)

$\varepsilon>0$ を任意にとって固定する。

$\boxed{7}$ ㉓より, $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ は一様連続になる。ゆえに, ある $\delta>0$ が存在して,

$$x,y\in[0,1] \text{ かつ } |x-y|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$\boxed{8}$ 正の整数 N を十分大きくして, $\frac{M}{2N\delta^2}<\frac{\varepsilon}{2}$ (*) となるようにしておき, $n\geqq N$ と仮定する。
$x\in[0,1]$ を任意にとって固定する。

$\boxed{9}$

$$g(x)-g_n(x) \overset{\boxed{1}}{=} \sum_{k=0}^{n} g(x)\varphi_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right)\varphi_{n,k}(x).$$

$\varphi_{n,k}(x)\geqq 0$ なので

$$|g(x)-g_n(x)| \leqq \sum_{k=0}^{n}\left|g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|\varphi_{n,k}(x).$$

右辺の和を $\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta$ と $\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqq\delta$ の場合に分割する。

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqq\delta \Leftrightarrow \left(x-\frac{k}{n}\right)^2\geqq\delta^2 \Leftrightarrow \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}\geqq 1$$

$\boxed{10}$

$$\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta}\left|g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|\varphi_{n,k}(x) < \sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2}\varphi_{n,k}(x) \overset{\boxed{1}}{=} \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\boxed{11}$ 上の $\boxed{8}$ より,

$\boxed{6}$ より $|g(x)|\leqq M$

$$\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqq\delta}\left|g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|\varphi_{n,k}(x) \leqq 2M\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqq\delta}\varphi_{n,k}(x) \leqq 2M\sum_{k=0}^{n}\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}\varphi_{n,k}(x)$$

$$\overset{\boxed{5}}{=} \frac{2M}{n^2\delta^2}nx(1-x) \leqq \frac{M}{2n\delta^2} \leqq \frac{M}{2N\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$0\leqq x\leqq 1$ で $x(1-x)\leqq\frac{1}{4}$　　$\boxed{8}$

$\boxed{12}$ 以上より, $n\geqq N$ のとき, 任意の $x\in[0,1]$ について, $|g(x)-g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

これで, $[0,1]$ 上の多項式関数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $g(x)$ に $[0,1]$ 上一様収束することがわかった。□

問題 $\max_{x\in[0,1]}\varphi_{n,k}(x) = \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ と $y=\varphi_{n,k}(x)$ のグラフの形が単峰型になることを実際にグラフを描いて確認せよ。

注意 上の証明の $\boxed{8}$ の (*) を見ればわかるように, $\|g-g_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|g(x)-g_n(x)|$ は $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ オーダーで小さくできることがわかる。この収束は全然速くない。もっと高速な多項式近似は $g(x)$ が C^∞ 級であるというような強い条件を課せば可能である。Remez algorithm について調べてみよ。$\sin x$ は数値計算では多項式近似で計算されている。($g_n(x)$ は高々 n 次多項式になる。) □

距離空間の完備化

定義 X は距離空間であるとする. 距離空間 $\tilde{X}$ と写像 $i: X \to \tilde{X}$ の組が以下の3つの条件をみたすとき, $(\tilde{X}, i: X \to \tilde{X})$ を X の<u>完備化</u> (completion) と呼ぶ:

(C1) $\tilde{X}$ は完備距離空間である.

(C2) $i: X \to \tilde{X}$ は等長写像である. ㊟ 等長写像は単射になる.

(C3) $i(X)$ は $\tilde{X}$ において<u>稠密</u> (ちゅうみつ) である.

$(\tilde{X}, i: X \to \tilde{X})$ が X の完備化のとき, $i: X \to \tilde{X}$ を通して, $i(X)$ と X を同一視することが普通である. $X \subset \tilde{X}$ とみなすとき, $\tilde{X}$ は X の完備化であるという. □

注意 距離空間の完備化が本質的に一意的に存在することを示せる. □

例 $\mathbb{Q}$ を $d(x, x') = |x - x'|$ によって距離空間とみなすとき, $\mathbb{R}$ と包含写像 $i: \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ の組は $\mathbb{Q}$ の完備化になっている. □

実係数の多項式全体の集合

例 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ であるとする. $\mathbb{R}[x]$ にノルム $\|\cdot\|_{L^\infty([a,b])}$

$$\|f\|_{L^\infty([a,b])} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad (f(x) \in \mathbb{R}[x])$$

によって定める. このとき, $\mathbb{R}[x]$ はこのノルムによって距離空間とみなされる.
$C([a,b], \mathbb{R}) = \{f: [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ と多項式をそれに対応する $[a,b]$ 上の函数に対応させる写像 $i: \mathbb{R}[x] \to C([a,b], \mathbb{R})$ の組は $\mathbb{R}[x]$ の完備化になっていることが Weierstrass の多項式近似定理からみちびかれる. □

例 ⑤における体 K 上の形式べき級数環 $K[[x]]$ を x 進付値

$$|f| = \begin{cases} 0 & (f = 0) \\ e^{-r} & (f = a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \cdots,\ a_r \neq 0) \end{cases}$$

㊟ $e^{-\infty} = 0$

によって距離空間とみなしたものは完備である. このことから, $K[[x]]$ は多項式環 $K[x]$ の完備化になっていることがみちびかれる. □

注意 $K((x)) = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i x^i \,\middle|\, a_i \in K,\ \text{ある } r \in \mathbb{Z} \text{ が存在して, } a_i = 0\ (i < r) \right\}$ を形式 Laurent (ローラン) 級数体と呼ぶ. x 進付値によって, $K((x))$ は完備距離空間になり, 有理函数体 $K(x)$ の完備化になっていることも示せる. これの $\mathbb{Q}$ での類似物が次に説明する p 進体 $\mathbb{Q}_p$ である. □

例 (p進体 $\mathbb{Q}_p$) pは素数であるとする。0でない有理数 $x\in\mathbb{Q}$ は

$$x=\pm p^N\frac{a}{b},\quad N\in\mathbb{Z},\ a,b\in\mathbb{Z}_{>0},\ a,b\text{は互いに素で}p\text{で割り切れない}$$

と一意に表わされる。この記号のもとで、<u>p進付値</u> (p-adic valuation) $|\cdot|_p$ を

$$|x|_p=p^{-N},\qquad |0|_\infty=0$$

と定める。$|\cdot|_p$ は次をみたしている: $x,y\in\mathbb{Q}$ について

$$|xy|_p=|x|_p|y|_p,\qquad |x+y|_p\leqq\max\{|x|_p,|y|_p\}\ (\leqq|x|_p+|y|_p).$$

ゆえに、$\mathbb{Q}$ に(通常に絶対値に代わりに) p進付値を使って

$$d_p(x,y)=|x-y|_p\qquad (x,y\in\mathbb{Q})$$

と距離函数を定めることができる。距離空間 $(\mathbb{Q},d_p)$ の完備化を $\mathbb{Q}_p$ と書く。
$\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ の中で p進付値の意味で稠密であり、$\mathbb{Q}$ の体構造は自然に $\mathbb{Q}_p$ に拡張されるので、$\mathbb{Q}_p$ は p進体 (p-adic field) と呼ばれる。

$\mathbb{Q}_p$ は以下のように構成可能である。

(1) $\mathbb{Q}_p:=\left\{\begin{array}{l} a_Np^N+a_{N+1}p^{N+1}+a_{N+2}p^{N+2}+\cdots\ (a_i\in\{0,1,\dots,p-1\},\ N\in\mathbb{Z})\\ \text{の形の形式的な和全体}\end{array}\right\}$

(2) $x=\sum_i a_ip^i\in\mathbb{Q}_p$ $(a_i\in\{0,1,\dots,p-1\})$ に対して、$(\mathbb{Q},d_p)$ における Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ を
$x_k=\sum_{i\leqq n}a_ip^i=\underbrace{\cdots+a_{n-2}p^{n-2}+a_{n-1}p^{n-1}+a_np^n}_{\text{有限和}}$ と定めることができる。
$x,y\in\mathbb{Q}_p$ の距離を $d_p(x,y)=\lim_{n\to\infty}d_p(x_n,y_n)$ と定める。このとき、$\lim_{n\to\infty}x_n=x$ $(x\in\mathbb{Q}_p)$.

(3) $x\in\mathbb{Q}$ に対する $i(x)\in\mathbb{Q}_p$ を次のように定める。まず $i(0)=0$. $x\neq0$ と仮定する。
x を $x=p^Ny$ ($N\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Q}$, yはpで割り切れない整数たちの商) と表わす。
$a_i\in\{0,1,\dots,p-1\}$ を $y\equiv a_N+a_{N+1}p+\cdots+a_{N+k-1}p^{k-1}\pmod{p^k}$ という条件で定める。
$i(x)=\sum_{i\leqq N}a_ip^i$ と定める。以下、$x\in\mathbb{Q}$ と $i(x)\in\mathbb{Q}_p$ を同一視する。

<u>例</u> $\frac{1}{1-p}=1+p+p^2+\cdots,\qquad -1=(p-1)+(p-1)p+(p-1)p^2+\cdots.$

(4) $\mathbb{Q}_p$ の和,差,積を $x\pm y=\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)$, $xy=\lim_{n\to\infty}x_ny_n$ と定める。 □

参考文献 p進体については、J.P.セール著『数論講義』(岩波書店)などを参照せよ。 □

例 (p進整数環) 1つ前の例のつづき.

p進体 $\mathbb{Q}_p$ の中での $\mathbb{Z}$ の閉包を $\mathbb{Z}_p$ と書き, p進整数環と呼ぶ.

$\mathbb{Z}_p$ は次のように表わされる:

$$\mathbb{Z}_p = \{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots \ (a_i \in \{0,1,\dots,p-1\}) \text{ の形式の和の全体}\}.$$

$\mathbb{Q}_p$ は完備なので, その閉集合である $\mathbb{Z}_p$ も完備になる.

$\mathbb{Z}_p$ がコンパクトになることを示そう.

そのためには $\mathbb{Z}_p$ が全有界であることを示せば十分である.

$N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を任意にとる. このとき, $a = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{N-1} p^{N-1}$ $(a_i \in \{0,1,\dots,p-1\})$ に対して, $x = a + a_N p^N + a_{N+1} p^{N+1} + \cdots \in \mathbb{Z}_p$ の距離は p^{-N} 以下になる. ゆえに p^N 個の a に対する $U_{p^{-N+1}}(a)$ たちで $\mathbb{Z}_p$ 全体をおおうことができる. p^{-N+1} はいくらでも小さくなりえるので $\mathbb{Z}_p$ は全有界である.

これで $\mathbb{Z}_p$ がコンパクトであることがわかった.

$\mathbb{Z}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ の部分環でもあるので, $\mathbb{Z}_p$ はコンパクトな位相環になっている. □

注意 以上の $\mathbb{Q}_p$ と $\mathbb{Z}_p$ は $\mathbb{R}$ と共に整数論で基本的な役目を果たす.
各素数ごとに $\mathbb{Q}$ は異なる完備化 $\mathbb{Q}_p$ を持つ. □

注意 以上のように完備化は, 実数論 $(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$, 数論 $(\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p)$, 代数学 $(K(x) \subset K((x)))$, 解析学 $(\mathbb{R}[x] \subset C([a,b],\mathbb{R}))$ で役に立つ. 具体例を知っていることは抽象的な概念がどこでどのように役に立ちそうかを理解するために役に立つ. □

完備化が本質的に一意であること

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & Y \\ \tilde{X} \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(完備化の普遍性) universality

定理 $(\tilde{X}, i: X \to \tilde{X})$ は距離空間 X の完備化であるとし, $f: X \to Y$ は X から任意の完備距離空間 Y への連続写像であるとする. このとき, ある連続写像 $\tilde{f}: \tilde{X} \to Y$ で $\tilde{f} \circ i = f$ をみたすものが一意に存在する. (以下, $i(X)$ と X を同一視する.)

略証 任意の $\tilde{x} \in \tilde{X}$ に対して, X 内のある点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\tilde{x}$ に収束するものが存在する. $f: X \to Y$ の連続性より, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は Y における Cauchy 列になり, Y の完備性より収束する. さらに $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ は $\tilde{x}$ に収束する X 内点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のとり方によらないことを示せる. したがって, $\tilde{f}(\tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ で写像 $\tilde{f}: \tilde{X} \to Y$ を定義できる. この $\tilde{f}$ は連続で $\tilde{f} \circ i = f$ をみたしている.

そのような $\tilde{f}$ の一意性は, もしも存在するとしたら, 上の記号で $\tilde{f}(\tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ とならなければいけないことからわかる □

系 $(\tilde{X}_\nu, i_\nu: X \to \tilde{X}_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$ は距離空間 X の完備化であるとする. このとき, 2つの等長写像 $\tilde{i}_2: \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, $\tilde{i}_1: \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1$ で互いに相手の逆写像になっているものが一意的に存在する.

略証 上の定理を $f = i_1, i_2$ の場合に適用すればよい.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \arrow[ur, dashed, "\tilde{i}_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & \tilde{X}_1 \arrow[dl, dashed, "\tilde{i}_2"] \\ \tilde{X}_2 & \end{tikzcd}$$

□

完備化の存在

定理 任意の距離空間の完備化が存在する.

Cauchy 列を点とみなせれば Cauchy 列の収束先の点を作れるというアイデア

略証 距離空間 X における Cauchy 列全体の集合を C と書く. C に同値関係 $\sim$ を

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{\mathrm{def}}{\iff} \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

と定めることができる. $\tilde{X} = C/\sim$ とおき, $i: X \to \tilde{X}$ を $i(x) = [\{x\}_{n=1}^{\infty}]$ と定める. ここで $\{x\}_{n=1}^{\infty}$ は $x, x, x, \ldots$ と x だけがつづく点列である. $[\ ]$ は同値類を意味する. $\tilde{X}$ に距離函数を $d([\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ と定めることができる. $(\tilde{X}, i: X \to \tilde{X})$ が X の完備化であることを示せる. □

参考文献 より詳しい説明については, 内田伏一（ふいち）著『集合と位相』裳華房などを参照せよ. □