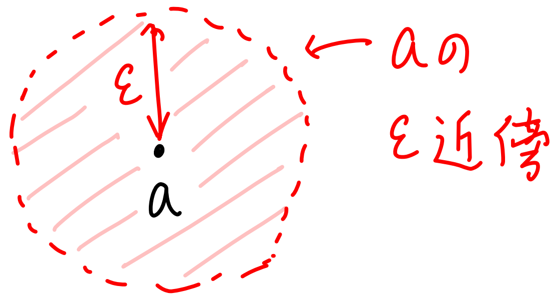
$\boxed{\boxed{\varepsilon\text{近傍系}}}$ $(X, d_X), (Y, d_Y)$ は距離空間であると仮定する.

$a \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して,



$$U_\varepsilon(a) = U_\varepsilon^X(a) = \{x \in X \mid d_X(x, a) < \varepsilon\}$$

を a の X における <u>ε近傍</u> (<u>ε-neighborhood</u>) と呼ぶ.

$\{U_\varepsilon(a) \mid \varepsilon > 0\}$ を点 a の <u>ε近傍系</u> (<u>system of ε-neigborhoods of a</u>) と呼ぶ.

距離空間における点列の収束や写像の連続性は,
距離函数を直接的に使わずに,
ε近傍系の言葉だけを使って言い直すことができる.

($\boxed{\text{注意}}$ これから, このパターンをくりかえす.
距離空間の概念もすでにかなり抽象化されているが,
応用先を増やすためにさらに進んだ抽象化を行う. □)

$\boxed{\text{点列の収束}}$　X内の点列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$と点$\alpha \in X$について,

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はαに収束する

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の$\varepsilon > 0$に対して, あるNが存在して, $n \geqq N$ならば$d_X(a_n, \alpha) < \varepsilon$.

$\Longleftrightarrow$ 点αの任意のε近傍$U_\varepsilon(\alpha)$に対して, あるNが存在して, $\{a_n\}_{n=N}^{\infty} \subset U_\varepsilon(\alpha)$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{点}\alpha\text{の任意の}\varepsilon\text{近傍}U_\varepsilon(\alpha)\text{に対して,} \\ U_\varepsilon(\alpha)\text{に含まれない}a_n\text{は有限個しかない.} \end{cases}$

直観的にも
わかりやすくなっている!

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はαに収束しない

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ある$\varepsilon > 0$が存在して, 任意のNに対して, ある$n \geqq N$で$d_X(a_n, \alpha) \geqq \varepsilon$をみたすものが存在する.

$\Longleftrightarrow$ 点αのあるε近傍$U_\varepsilon(\alpha)$が存在して, 任意のNに対して$\{a_n\}_{n=N}^{\infty} \not\subset U_\varepsilon(\alpha)$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{点}\alpha\text{のある}\varepsilon\text{近傍}U_\varepsilon(\alpha)\text{が存在して,} \\ U_\varepsilon(\alpha)\text{に含まれない}a_n\text{は無限個ある.} \end{cases}$

$\boxed{\text{写像の連続性}}$ $f : X \to Y$ について，

(1) f は連続である

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} \text{任意の } a \in X \text{ と任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して,} \\ \text{ある } \delta > 0 \text{ が存在して, } x \in X \text{ かつ } d_X(x, a) < \delta \text{ ならば } d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon. \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{任意の } a \in X \text{ と } f(a) \text{ の任意の } \varepsilon \text{ 近傍 } U_\varepsilon^Y(f(a)) \text{ に対して,} \\ a \text{ のある } \delta \text{ 近傍 } U_\delta^X(a) \text{ が存在して, } f(U_\delta^X(a)) \subset U_\varepsilon^Y(f(a)). \\ \qquad (\delta > 0) \end{cases}$

(2) f は連続でない

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} \text{ある } a \in X \text{ と ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して,} \\ \text{任意の } \delta > 0 \text{ に対して, ある } x \in X \text{ で } d_X(x, a) < \delta \text{ かつ } d_Y(f(x), f(a)) \geqq \varepsilon \\ \qquad \text{となるものが存在する.} \end{cases}$

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} \text{ある } a \in X \text{ と } f(a) \text{ のある } \varepsilon \text{ 近傍 } U_\varepsilon^Y(f(a)) \text{ が存在して,} \\ a \text{ の任意の } \delta \text{ 近傍 } U_\delta^X(a) \text{ について, } f(U_\delta^X(a)) \not\subset U_\varepsilon^Y(f(a)). \\ \qquad (\delta > 0) \end{cases}$

$\boxed{\text{問題}}$ 以上で述べたことをさらに整理したり，詳しくしたりして，ノートにまとめよ．そのときに，すべての説明に図を追加せよ．□

図を描くことは非常に大事です．

$\boxed{\text{例}}$