全有界性 （一般の位相空間ではできない距離空間の話）

X は距離空間であるとする。

定義 X が全有界 (totally bounded) であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、有限個の $x_1, \dots, x_n \in X$ が存在して $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_\varepsilon(x_i)$ となることであると定める。□

注意 各 $U_\varepsilon(x_i)$ は有界で、有界な有限個の部分集合の和集合も有界になるので、全有界ならば有界になる。

□

ほぼ自明な定理 コンパクト距離空間 X は全有界である。

証明 $\varepsilon > 0$ を任意にとる。このとき、$X = \bigcup_{x \in X} U_\varepsilon(x)$ であり、X はコンパクトなので、ある有限個の点 $x_1, \dots, x_n \in X$ で $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_\varepsilon(x_i)$ をみたすものが存在する。ゆえに、X は全有界である。

q.e.d.

例 X は無限集合であるとし、$d(x,y) = \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}$ $(x, y \in X)$ とおくと、(X, d) は距離空間になる。X は自明に有界。しかし、$0 < \varepsilon \leqq 1$ とすると、$U_\varepsilon(x) = \{x\}$ $(x \in X)$ となるので、$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_\varepsilon(x_i)$ $(x_i \in X)$ とはできない。X は全有界でない。□

$\boxed{\text{問題}}$ $\mathbb{R}^n$の有界部分集合が全有界になることを示せ。 $\square$

$\boxed{\text{問題}}$ Xが全有界距離空間ならばその部分集合も全有界になることを示せ。$\square$

MetricSpaces.pdf の 21 (p.56) に略証がある。