$\boxed{\text{距離空間}}$ ← 数学の多くの分野で役に立つ

$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$\boxed{\text{定義}}$ 集合 X と写像 $d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ の組 (X, d) で以下の条件をみたすものを距離空間 (metric space) と呼ぶ； $x, y, z \in X$ に対して，

(M1) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ （三角不等式）

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ （対称性）

(M3) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ （⇒ を d の非退化性と呼ぶ）．

（定義はノートにも書くべきである．）

このとき，d を距離函数と呼ぶ．さらに文脈的に混乱しない場合には単に X を距離空間と呼ぶ（むしろ，そうすることが多い）． □

$\boxed{\text{例}}$ V が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間で $\|\cdot\|$ が V 上のノルムのとき，

$d(x, y) = \|x - y\|$ $(x, y \in V)$ と定めると，(V, d) は距離空間になる．

このようにノルムから自然に距離函数を作れる． □

$\boxed{\text{定義}}$ 集合 X における2つの距離函数 d, d' が同値であるとは

ある定数 $c_1, c_2 > 0$ で

同値関係になる

$$c_1 d(x,y) \leqq d'(x,y) \leqq c_2 d(x,y) \quad (x, y \in X)$$

をみたすものが存在することだと定める。 $\Box$

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V における互いに同値なノルムは互いに同値な距離函数を与える。 $\Box$

$\boxed{\text{注意}}$ 同値な距離函数に関する点列の収束や写像の連続性などの定義は互いに同値になる。 $\Box$

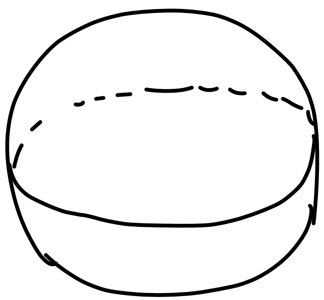
$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{R}^n$ における ℓ^p ノルム $(1 \leqq p \leqq \infty)$ はすべて互いに同値(実際には $\mathbb{R}^n$ におけるすべてのノルムは互いに同値)なので、ℓ^p ノルムが与える ℓ^p 距離たちもすべて互いに同値になる。 $\Box$

$\boxed{定義}$ (X, d_X) が距離空間で $A \subset X$ のとき, $d_A(x, y) = d_X(x, y)$ $(x, y \in A)$ と $d_A : A \times A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を定めると, (A, d_A) も距離空間になる. (A, d_A) を (X, d_X) の距離部分空間 (metric subspace) と呼ぶ. $\square$

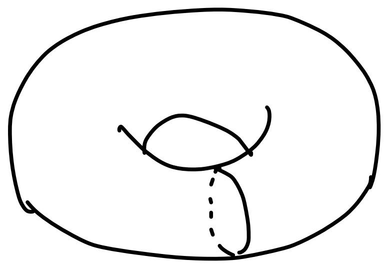
$\boxed{例}$ $\mathbb{R}^n$ を Euclid ノルムで距離空間とみなそう.

(1) $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ ($n-1$ 次元球面) は $\mathbb{R}^n$ の距離部分空間とみなされる.

(2) $T^n = \{(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + y_1^2 = \cdots = x_n^2 + y_n^2 = 1\}$ (n 次元トーラス) は $\mathbb{R}^{2n}$ の距離部分空間とみなされる.



S^2



T^2

たいていの図形は距離空間とみなされる. $\square$

$\boxed{\text{例}}$ (代数学に出て来る距離空間) 多項式の次数から作られる距離.

K は任意の体であるとし, 1変数多項式環 $K[x]$ を考える.

$f \in K[x]$ の次数(degree)を $\deg f$ と書く. ($\deg 0 = -\infty$ と約束)

f の付値 $|f|_\infty$ を次のように定める:

$$|f|_\infty = e^{\deg f} \quad (e^{-\infty} = 0 \text{ と約束}).$$

「絶対値のようなもの」を付値 (valuation) と呼ぶことが多い.

付値からも距離函数を作れる.

このとき, $f, g \in K[x]$ について

$$\deg(f+g) \leqq \max\{\deg f, \deg g\}$$

より,

$$|f+g|_\infty \leqq \max\{|f|_\infty, |g|_\infty\} \leqq |f|_\infty + |g|_\infty$$

となることがわかる. このことから,

$f-g$ の次数が大きいほど f と g が離れていると考える.

$$d_\infty(f,g) = |f-g|_\infty \quad (f, g \in K[x])$$

と定めると, $(K[x], d_\infty)$ が距離空間になることがわかる. □

上の例で証明をサボった部分を自分で埋めよ.

$\boxed{\text{例}}$ (代数学に出て来る距離空間)

K は任意の体であるとし，1変数多項式環 $K[x]$ を考える．

$\alpha \in K$ を任意に固定する．任意の $f(x) \in K[x]$ は

$$f(x) = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + \cdots \quad (\text{有限和},\ a_i \in K)$$

と一意に表わされる．$f(x)=0$ のとき，$\operatorname{ord}_\alpha f(x) = \infty$，$f(x) \neq 0$ のとき，

$\operatorname{ord}_\alpha f(x) = (a_i \neq 0$ となる最小の $i)$ と $\operatorname{ord}_\alpha f(x) \in \{0,1,2,\dots\} \cup \{\infty\}$ を

$\operatorname{ord}_\alpha f(x)$ を $f(x)$ の $x=\alpha$ での位数 (order) と呼ぶ

定め，$|f(x)|_\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$f(x)$ の α 付値と呼ぶ (絶対値のようなもの)

$$|f(x)|_\alpha = e^{-\operatorname{ord}_\alpha f(x)} \quad (\text{ただし},\ e^{-\infty} = 0 \text{ とおく})$$

付値 = valuation

と定める．このとき，$f(x), g(x) \in K[x]$ について

$$\operatorname{ord}_\alpha (f(x)+g(x)) \geq \min\{\operatorname{ord}_\alpha f(x),\ \operatorname{ord}_\alpha g(x)\},$$

$$|f(x)+g(x)|_\alpha \leq \max\{|f(x)|_\alpha,\ |g(x)|_\alpha\} \leq |f(x)|_\alpha + |g(x)|_\alpha$$

が成立しているので，$d_\alpha(f(x), g(x)) = |f(x)-g(x)|_\alpha$ とおくと，$(K[x], d_\alpha)$ は距離空間になる．

$\square$

|a| = $|a|_\infty$ と書く

$\boxed{例}$ (p進距離) (有理)整数環 $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$ では通常の絶対値が与える距離以外に以下で説明する距離を考えることができる。

p は素数であるとする。0でない $a\in\mathbb{Z}$ は $a=p^k m$ $(k\geq 0, m\in\mathbb{Z}, p\nmid m)$ と一意に表わされる。そのとき、$\mathrm{ord}_p a = k$ と定める。$\mathrm{ord}_p 0=\infty$ とおく。

$a\in\mathbb{Z}$ の p進付値 (p-adic valuation) $|a|_p$ を

$$|a|_p = p^{-\mathrm{ord}_p a} \quad (p^{-\infty}=0 \text{ とおく})$$

と定める。このとき、$a,b\in\mathbb{Z}$ に対して、

a と b が p^k でわりきれれば a+b も p^k でわりきれる

$$\mathrm{ord}_p(a+b) \geq \min\{\mathrm{ord}_p a, \mathrm{ord}_p b\}$$

より、

$$|a+b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\} \leq |a|_p+|b|_p.$$

これより、$d_p(a,b)=|a-b|_p$ とおくと、$(\mathbb{Z}, d_p)$ は距離空間になる。 □

a−b が p でたくさんわりきれるほど a と b は近いと考える。