位相数学A (4/16 1)

距離空間論　黒木玄

成績は期末の試験または
レポート課題提出でつける。
→ ISTUに提出してもらう。
毎週、1つ以上の証明または例
についてよく考えること!

重要事項

- ε-N および ε-δ
- 開集合, 閉集合 ← 直観的な理解
- コンパクト性
- 一様連続
- 一様収束
- 完備性

これらは一般の位相空間
ではあつかえない。
距離空間ならあつかえる。

上限, 下限

上限の側のみを
説明する。

$A \subset \mathbb{R}$, $m, s \in \mathbb{R}$ とする。

m が A の上界 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $x \in A$ に
ついて $x \leq m$.

s が A の上限 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ s は A の最小の上界.

上界も上限も存在するとは限らない。

A は上に有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A の上界が存在する。

実数の連続性(の1つの表現)

空でない $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界ならば
A の上限が存在する。

A の上限が存在するとき, A の上限を
$\sup A$ と書く。

$f: X \to \mathbb{R}$ について, $f(X) \subset \mathbb{R}$ の上限を

$\boxed{\sup_{x \in X} f(x)}$ と書く。← よく使う。

$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset \mathbb{R}$

定理

上に有界な(広義)単調増加
実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ はある実数に収束
する。(証明略) $\square$

上極限

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対して,
実数列 $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ を

$$c_n = \sup_{k \geq n} a_k = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$$

と定めると, $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ は $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \cdots$ となる。

$b_n = \inf_{k \geq n} a_k$ とおくと, $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \cdots$.

$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が上下に有界ならば c_n も b_n も
well-defined で, $b_n \leq c_n$ となる。

$$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \cdots\cdots \leq c_3 \leq c_2 \leq c_1$$

ゆえに, 次の極限が存在する: ↙ 下極限

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k \geq n} a_k \ (=: \liminf_{n\to\infty} a_n) \\ \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} a_k \ (=: \limsup_{n\to\infty} a_n) \end{cases}$$

↖ 上極限

上では次のようになっている。

$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq \boxed{\quad\quad} \leq c_n \leq \cdots \leq c_2 \leq c_1$$

ここに $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$
が全部入っている。

もしも, $n \to \infty$ で b_n と c_n が同じ値に収束した
ならば, a_n も同じ値に収束する。つまり,

$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \Rightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ はそれらと
同じ値に収束する。

例

$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & (n\text{は正の奇数}) \\ -1 - \frac{1}{n} & (n\text{は正の偶数}) \end{cases}$$ とおく。

$$\begin{cases} a_1 = 1 + \frac{1}{1},\ a_3 = 1 + \frac{1}{3},\ a_5 = 1 + \frac{1}{5},\ \dots \\ a_2 = -1 - \frac{1}{2},\ a_4 = -1 - \frac{1}{4},\ a_6 = -1 - \frac{1}{6},\ \dots \end{cases}$$

$\sup_{k \geq n} a_k = 1 + (n\text{以上の最小の奇数})^{-1}$

$\inf_{k \geq n} a_k = -1 - (n\text{以上の最小の偶数})^{-1}$

したがって, $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$. $\square$

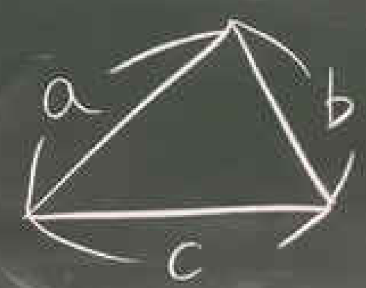
問題 図を描いてみよ。$\square$

不等式の話

後で三角不等式が重要な役目をはたす。三角不等式たちがどこから

(1) 絶対値: $|x+y| \le |x|+|y|$

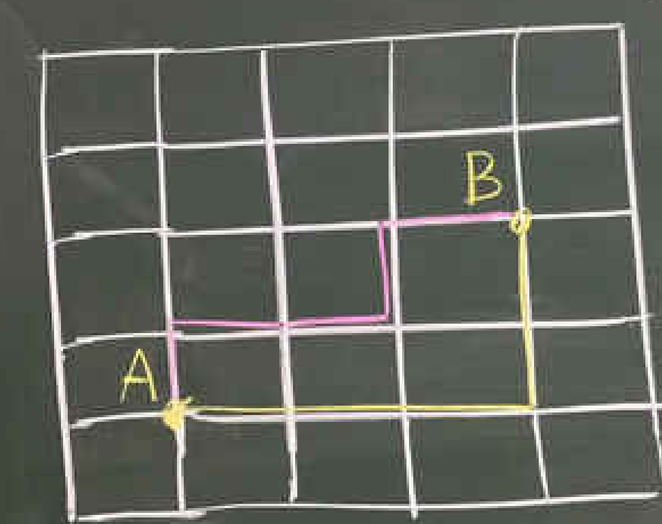
(2) 平面上での直線距離(Euclid距離):



$c \le a+b$

(3) 格子状に道のある町でのみちのりの長さ。

← 正方格子



(　の長さ) = 5

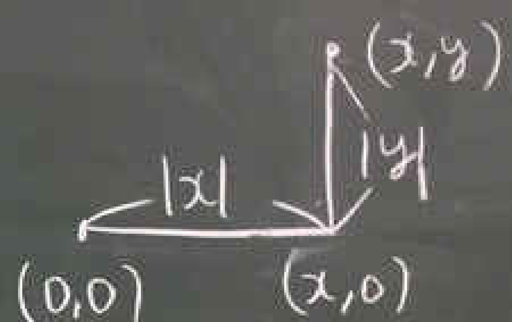
(　の長さ) = 5

AとBの距離を5と定める。

この距離も三角不等式をみたしている。

$\mathbb{R}^2$上の2つの点$(0,0)$と(x,y)の上の(3)のような距離 $\|(x,y)\|_1$ を

$$\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$$



と定めることができる。このとき、

$$\begin{aligned}\|(x,y)+(x',y')\|_1 &= \|(x+x',y+y')\|_1 \\ &= |x+x'|+|y+y'| \\ &\le |x|+|x'|+|y|+|y'| \\ &= \|(x,y)\|_1+\|(x',y')\|_1.\end{aligned}$$

三角不等式!

一般に $p \ge 1$ について

$$\|(x,y)\|_p = (|x|^p+|y|^p)^{\frac{1}{p}}$$

は三角不等式をみたす。

これの三角不等式は、Minkowskiの不等式の特別な場合になっている。

証明は MetricSpaces.pdf の ② の2ページ目にある。

↖最新版を見ること。

Jensenの不等式

函数 f を実数 $E[f]$ に対応させる写像 $E[\ ]$ は以下の条件をみたしているとする: $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ について,

(E1) 線形性: $E[\alpha f+\beta g] = \alpha E[f]+\beta E[g]$.

(E2) 単調性: $f \le g \Rightarrow E[f] \le E[g]$

(E3) 規格化: $E[1]=1$.

(たとえば $E[f] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$)

期待値 $E[\ ]$のEはexpectation valueのイニシャル。

fが区間I上の上に凸な函数のとき、

$$E[f(x)] \le f(E[x]). \quad \square$$

たとえば $f(x)=\log x$ (←上に凸)で

$E[f] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ $(x_i>0)$のとき、

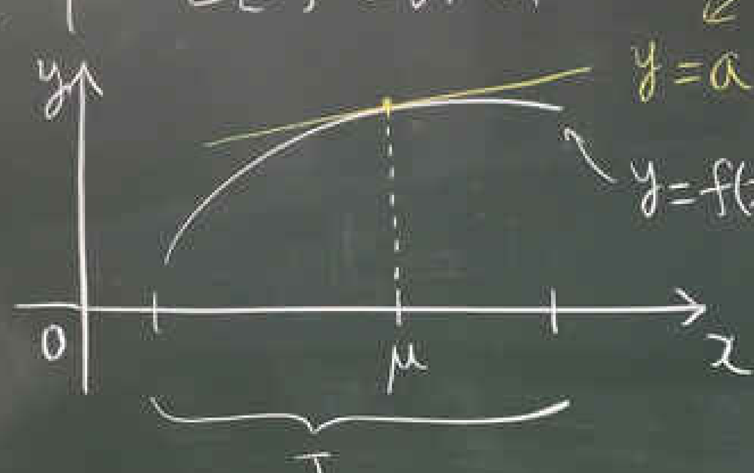
$$E[f(x)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i = \log(x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$f(E[x]) = \log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

≧ ←上のJensenの不等式より

$$\therefore\ (x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

証明 $\mu = E[x]$ とおく。



← C^2級なら容易に接線の存在を示せる。

この図の状況のもとで、$f(x) \le a(x-\mu)+f(\mu)$.

この両辺に$E[\ ]$を作用させると、(E1,2,3)のみを使って、

$$\begin{aligned}E[f(x)] &\le a(E[x]-\mu E[1])+f(\mu)E[1] \quad (\text{by (E2),(E1)}) \\ &= a\underbrace{(\mu-\mu)}_{=0}+f(\mu) \quad (\text{by (E3)}, \mu=E[x]).\end{aligned}$$

$$\therefore\ E[f(x)] \le f(\mu) = f(E[x]). \quad \text{q.e.d.}$$

Youngの不等式

$p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ とする。

このとき、$a,b>0 \Rightarrow ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

証明 $E[f(x)] = \frac{1}{p}f(a^p)+\frac{1}{q}f(b^q)$ とする。

これは(E1)~(E3)をみたす。$f(x)=\log x$ のとき、

Jensenの不等式より、

$$E[f(x)] = \frac{1}{p}\log a^p+\frac{1}{q}\log b^q = \log(ab)$$

$$f(E[x]) = \log\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right)$$

≧ $\therefore\ ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$. $\square$

Hölderの不等式　$p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$とする.

$$a_i, b_i \geqq 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p}\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{q}\right)^{1/q}.$$

証明　$a_i, b_i > 0$としてよい.

$$A_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p}\right)^{1/p}}, \quad B_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{q}\right)^{1/q}}$$ とおいて,

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leqq 1$$ を示せばよい.

する.
$b_i^{q})^{1/q}$.
おいて,

Youngの不等式より,

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leqq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{A_i^{p}}{p} + \frac{B_i^{q}}{q}\right)$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{p}}{\sum_{j=1}^{n} a_j^{p}} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^{q}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{q}}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \square$$

Minkowskiの不等式は来週やる.

つづく.