コンパクト空間上の実数値連続函数

重要!

準備

① コンパクト位相空間の連続写像による像もコンパクトになる。← 今日やった。

② Hausdorff空間 Y のコンパクト部分集合は Y の閉集合になる。← 今日やった。

③ コンパクト距離空間は全有界（特に有界）になる。← 今日やった。

④ $\mathbb{R}$ の有界閉部分集合は最大値と最小値を持つ。← 2021-05-28 03でやった。 □

準備がおわっている!

定理 コンパクト位相空間 X 上の実数値連続函数 f は最大値と最小値を持つ.

証明

① X はコンパクトで $f: X \to \mathbb{R}$ は連続なので $f(X)$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合になる.

② $\mathbb{R}$ は Hausdorff 空間で $f(X)$ はそのコンパクト部分集合なので, $f(X)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合になる.

③ $f(X)$ はコンパクトなので全有界 (特に有界) になる.

④ 以上によって, $f(X)$ は $\mathbb{R}$ の有界閉集合なので最大値と最小値を持つ.

q.e.d.

$\boxed{例}$ X はコンパクト位相空間であるとし, V は $\mathbb{R}$ 上のノルム空間であるとする.
このとき, 連続写像 $f: X \to V$ に対して, $\{\|f(x)\| \mid x \in X\} \subset \mathbb{R}_{\geqq 0}$ は最大値を持ち, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\| = \max_{x \in X} \|f(x)\| = \|f(a)\|$ (a は X のある点) が成立する.

$\boxed{証明}$ 前ページの定理より, $F: X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|f(x)\|$ が連続であること示せば十分である. $F: X \to \mathbb{R}$ は $f: X \to V$ と $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\geqq 0},\ v \mapsto \|v\|$ の合成写像で, f は連続だと仮定しているので, $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ が連続であることを示せばよい. しかし, 任意の $\varepsilon > 0$ について, $v, w \in V$, $\|v - w\| < \varepsilon$ ならば三角不等式より

$$\big|\|v\| - \|w\|\big| \leqq \|v - w\| < \varepsilon$$

となるので, $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ は連続であることがわかる. $\square$

$\boxed{補足}$ $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式) で, x を $x - y$ でおきかえると, $\|x\| \leqq \|x - y\| + \|y\|$ なので $\|x\| - \|y\| \leqq \|x - y\|$. 同様にして, $\|y\| - \|x\| \leqq \|x - y\|$. ゆえに, $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqq \|x - y\|$. 三角不等式はこの形でもよく使われる. $\square$