極限と四則演算の可換性（前回のつづき）

問題 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束していると仮定する。以下を示せ。

(1) $\{x_n+y_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して、$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n$.

(2) $\{-x_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して、$\lim_{n\to\infty}(-x_n)=-\lim_{n\to\infty}x_n$.

(3) $\{x_ny_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して、$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}y_n\right)$.

(4) $\lim_{n\to\infty}x_n\neq 0$ のとき、ある N_0 が存在して、$n\geqq N_0$ ならば $x_n\neq 0$ となり、
実数列 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=N_0}^{\infty}$ は収束して、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}x_n}$.

□

距離空間のあいだの写像 $f:X\to Y$ が連続であることと、
距離空間内 X 内の収束する任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、
Y 内の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して、$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)$ が成立することは同値なので、上の問題の結果は四則演算の連続性と同値である。
しかし、直接の証明も見せておこう。

$\boxed{\text{証明}}$ $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} y_n$ とおく。

(1) 任意に $\varepsilon > 0$ をとる。

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束しているので、ある N_1 が存在して、$n \geqq N_1$ ならば $|x_n - \alpha| \overset{1}{<} \frac{\varepsilon}{2}$.

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は β に収束しているので、ある N_2 が存在して、$n \geqq N_2$ ならば $|y_n - \beta| \overset{2}{<} \frac{\varepsilon}{2}$,

ゆえに、$n \geqq \max\{N_1, N_2\}$ ならば

$$|x_n + y_n - (\alpha+\beta)| = |(x_n - \alpha) + (y_n - \beta)| \leqq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| \overset{1,2}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha+\beta$ に収束することが示された。

(2) 任意に $\varepsilon > 0$ をとる。

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束しているので、ある N が存在して、$n \geqq N$ ならば $|x_n - \alpha| \overset{1}{<} \varepsilon$.

ゆえに、$n \geqq N$ ならば $|(-x_n) - (-\alpha)| = |x_n - \alpha| \overset{1}{<} \varepsilon$,

これで $\{-x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $-\alpha$ に収束することが示された。

(3) 任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は β に収束しているので, ある N_2 が存在して, $n \geqq N_2$ ならば $|y_n - \beta| < 1$ となり, $|y_n| = |y_n - \beta + \beta| \leqq |y_n - \beta| + |\beta| \overset{②}{<} 1 + |\beta|$ となる.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束しているので, ある N_3 が存在して, $n \geqq N_3$ ならば $|x_n - \alpha| \overset{③}{<} \dfrac{\varepsilon/2}{1+|\beta|}$.

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は β に収束しているので, ある N_1 が存在して, $n \geqq N_1$ ならば $|y_n - \beta| \underset{①}{<} \dfrac{\varepsilon/2}{1+|\alpha|}$,

ゆえに, $n \geqq \max\{N_1, N_2, N_3\}$ のとき,

$$|x_n y_n - \alpha\beta| = |x_n y_n - \alpha y_n + \alpha y_n - \alpha\beta| \leqq |x_n y_n - \alpha y_n| + |\alpha y_n - \alpha\beta|$$

$$= |x_n - \alpha|\,|y_n| + |\alpha|\,|y_n - \beta|$$

$$< \frac{\varepsilon/2}{1+|\beta|}(1+|\beta|) + (1+|\alpha|)\frac{\varepsilon/2}{1+|\alpha|} = \varepsilon,$$

これで $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha\beta$ に収束することが示された.

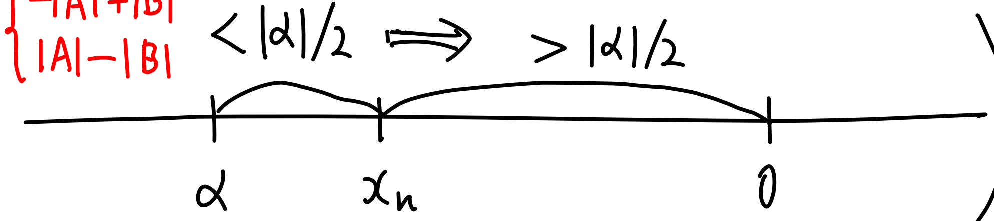
(4) $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ より，$|\alpha| > 0$ である．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束するので，ある N_1 が存在して，$n \geqq N_1$ ならば $|x_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2}$

となり，$|x_n| = |x_n - \alpha + \alpha| \geqq -|x_n - \alpha| + |\alpha| > -\frac{|\alpha|}{2} + |\alpha| = \frac{|\alpha|}{2}$．①

$|A+B| \leqq |A| + |B|$，$|A \pm B| \geqq \begin{cases} -|A| + |B| \\ |A| - |B| \end{cases}$

(注) 図を描けば自明



$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束しているので，ある N_2 が存在して，$n \geqq N_2$ ならば $|x_n - \alpha| < \frac{|\alpha|^2 \varepsilon}{2}$，②

ゆえに，$n \geqq \max\{N_1, N_2\}$ とすると，$|x_n| > \frac{|\alpha|}{2} > 0$ より特に $x_n \neq 0$ であり，

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{|x_n - \alpha|}{|\alpha||x_n|} < \frac{|\alpha|^2 \varepsilon / 2}{|\alpha| \cdot |\alpha|/2} = \varepsilon.$$

これで，$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=N_1}^{\infty}$ が $\frac{1}{\alpha}$ に収束することが示された．

$\boxed{\text{q.e.d.}}$