$\boxed{\text{コンパクト性の性質}}$ (易しいことのみ)

$\boxed{\text{定理}}$ (コンパクト性が連続写像の像で保たれること)

$f: X \to Y$ は位相空間のあいだの連続写像で，Xがコンパクトのとき，
$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$ も (Yにおける相対位相について) コンパクトになる

$\boxed{\text{証明}}$ Yにおける相対位相に関する$f(X)$の開被覆 $f(X) = \bigcup_{\lambda \in I} V_\lambda$ を任意にとる。
相対位相の定義より，$V_\lambda = f(X) \cap U_\lambda$，$U_\lambda$ はYの開集合と書ける。
fは連続なので，$f^{-1}(U_\lambda)$ はXの開集合になる。
任意の$x \in X$について，$f(x) \in f(X) = \bigcup_{\lambda \in I} V_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda$ なので，ある$\lambda \in I$で$f(x) \in U_\lambda$
となるものが存在し，$x \in f^{-1}(U_\lambda)$となる。ゆえに，$X = \bigcup_{\lambda \in I} f^{-1}(U_\lambda)$。
Xはコンパクトなので，ある$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in I$が存在して，$X = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{\lambda_k})$。
このとき，$f(X) = \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(U_{\lambda_k})) = \bigcup_{k=1}^{n} (f(X) \cap U_{\lambda_k}) = \bigcup_{k=1}^{n} V_{\lambda_k}$。
これで$f(X)$のコンパクト性が示された。 $\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{定理}}$ コンパクト位相空間Xの閉集合Fも(相対位相について)コンパクトになる.

$\boxed{\text{証明}}$ Fの相対位相における開被覆 $F = \bigcup_{i \in I} V_i$ を任意にとる.

相対位相の定義より, $V_i = F \cap U_i$, U_iはXの開集合と書ける.

$U_\infty = X \setminus F = F^c = \{x \in X \mid x \notin F\}$ とおくと, FはXの閉集合なので,
U_∞はXの開集合になる.

このとき, $X = U_\infty \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ というXの開被覆が得られる.

Xはコンパクトなので, $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ が存在して, $X = U_\infty \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

このとき, $F = F \cap X = (F \cap U_\infty) \cup (F \cap U_{i_1}) \cup \dots \cup (F \cap U_{i_n}) = V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$.

これで, Fのコンパクト性が示された. $\square$

$\boxed{\text{定理}}$ コンパクト位相空間 X の無限部分集合は集積点を持つ.

$\boxed{\text{証明}}$ $A \subset X$ とし, A が集積点を持たないならば A が有限集合になることを示せばよい. $A \subset X$ は集積点を持たないと仮定する.

任意の $x \in X \setminus A$ は A の集積点ではないので, X のある開集合 U で $x \in U$ かつ $U \cap A = \phi$ となるものが存在する. ゆえに, $X \setminus A$ は X の開集合になり, A は X の閉集合になる.

ゆえに, 1つ前の定理より, A は X のコンパクト部分集合になる.

任意の $a \in A$ は A の集積点でないので, X のある開集合 U_a で $A \cap U_a = \{a\}$ となるものが存在する.

このとき, $A = \bigcup_{a \in A} (A \cap U_a) = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ は A の(相対位相での)開被覆になる.

A はコンパクトなので ある $a_1, \ldots, a_n \in A$ が存在して, $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

これで A が有限集合であることが示された.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$