不等式の話

三角不等式が重要. 三角不等式たちがどこから来たか.

(1) 絶対値 $|x+y| \leqq |x|+|y|$.

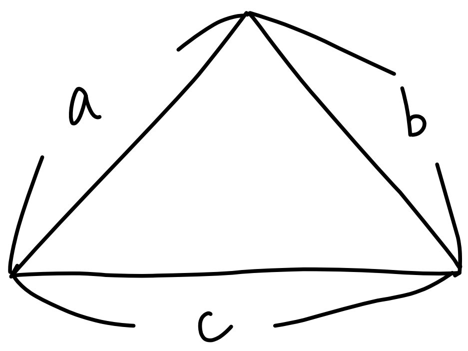
これは $|x-y| \geqq \max\{|x|-|y|,\ |y|-|x|\}$ の形でも使われる.

$|x| = |x-y+y| \leqq |x-y|+|y| \quad \therefore\ |x-y| \geqq |x|-|y|$

$|x-y| = |y-x| \geqq |y|-|x|$.

$|x-y| = |x-z+z-y| \leqq |x-z|+|z-y|$ の形でもよく使われる.

(2) 平面上での直線距離 (Euclid距離)



$c \leqq a+b$

(3) $\mathbb{R}^2$上の 2つの点 $(0,0)$ と (x,y) の距離 $\|(x,y)\|_1$ を

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$$

と定めることもできる(ℓ^1 ノルム, ℓ^1 距離)。このとき,

$$\left.\begin{aligned}\|(x,y)+(x',y')\|_1 &= \|(x+x', y+y')\|_1 = |x+x'| + |y+y'| \\ &\leqq |x| + |x'| + |y| + |y'| = \|(x,y)\|_1 + \|(x',y')\|_1.\end{aligned}\right)\text{三角不等式}$$

(4) 一般に $p \geqq 1$ に対して, $\mathbb{R}^2$ 上の ℓ^p ノルム $\|\cdot\|_p$ を

$$\|(x,y)\|_p = \left(|x|^p + |y|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

と定めることができる。これの三角不等式は Minkowskiの不等式の特別な場合になっている。

これを証明したい。

$\boxed{\text{Jensenの不等式}}$

Iは$\mathbb{R}$内の区間であるとし，$\mathcal{F}$はI上の実数値函数からなるベクトル空間で1とxを含むものとする．写像$E[\cdot]:\mathcal{F}\to\mathbb{R},\ f(x)\mapsto E[f(x)]$は$E[x]\in I$および以上の条件をみたしていると仮定する：

(E1) 線形性：$E[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha E[f(x)]+\beta E[g(x)]$ $(f,g\in\mathcal{F},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R})$

(E2) 単調性：$f,g\in\mathcal{F}$がI上で$f\leqq g$をみたす$\Longrightarrow E[f(x)]\leqq E[g(x)]$.

(E3) 規格化：$E[1]=1$.

このとき，$E[\cdot]:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$を期待値汎函数と呼ぶ．

$\boxed{\text{定理}}$ $f\in\mathcal{F}$が$\overset{\text{下}}{\text{上}}$に凸な函数ならば$E[f(x)]\overset{\geqq}{\leqq}f(E[x])$. □

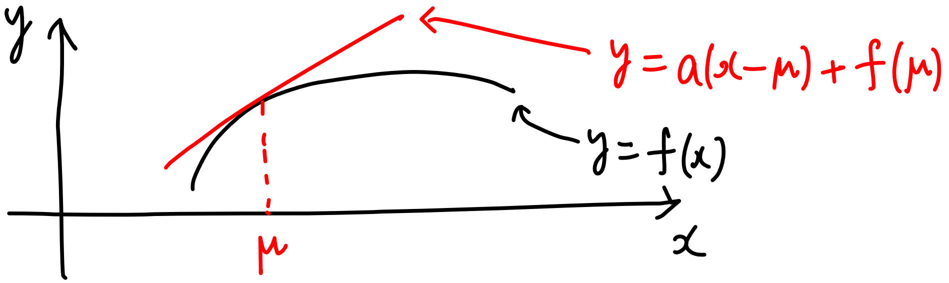
$\boxed{\text{例}}$ $I=\mathbb{R}_{>0}$, $x_1,\dots,x_n\in I$, $E[f(x)]=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n f(x_i)$のとき，$f(x)=\log x$にJensenの不等式を適用すると，$\log(x_1\cdots x_n)^{1/n}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n\log x_i\leqq\log\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)$

ゆえに，$(x_1\cdots x_n)^{1/n}\leqq\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i$ (相加相乗平均の不等式！) □

$\boxed{\text{定理}}$ $f\in\mathcal{F}$ が$\overset{\text{下}}{\text{上}}$に凸な関数ならば $E[f(x)]\overset{\geqq}{\leqq} f(E[x])$. □

$\boxed{\text{証明}}$ この講義では f が C^2 級で I 上で $f''\leqq 0$ となる場合にのみ証明しておけば十分なので，そのように仮定する.

このとき，$\mu := E[x]\in I$ における $y=f(x)$ の接線 $y=a(x-\mu)+f(\mu)$ が存在して，I 上で $f(x)\leqq a(x-\mu)+f(\mu)$ となる.



ゆえに (E2), (E1), (E3) を順番に使えば

$$
\begin{aligned}
E[f(x)] &\leqq E[a(x-\mu)+f(\mu)] && \text{by 単調性 (E2)}\\
&= a(E[x]-\mu E[1]) + f(\mu)E[1] && \text{by 線形性 (E1)}\\
&= a(E[x]-\mu) + f(\mu) && \text{by 規格化 (E3)}\\
&= f(E[x]) && \text{by } \mu = E[x].
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

Youngの不等式　$p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする。このとき、

$$a, b \geqq 0 \implies ab \leqq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

証明　$ab = 0$ の場合は自明なので $a, b > 0$ と仮定してよい。

$E[f(x)] = \frac{1}{p} f(a^p) + \frac{1}{q} f(b^q)$ と $f(x) = \log x$ に Jensenの不等式を使うと、

$$\log(ab) = \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q = E[\log x] \leqq \log E[x] = \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right).$$

$$\therefore \quad ab \leqq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{Hölderの不等式}}$

$p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする。

$$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geqq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

$p = q = 2$ の場合の Cauchy-Schwarz の不等式の一般化

$\boxed{\text{証明}}$ $a_1 = \cdots = a_n = 0$ または $b_1 = \cdots = b_n = 0$ のときは自明なので、

そうではないと仮定し、

$$A_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}}, \quad B_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}}$$

$$A_i B_i \leqq \frac{A_i^p}{p} + \frac{B_i^q}{q}$$

とおいて、$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leqq 1$ を示せばよい。このとき、Young の不等式より、

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leqq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{A_i^p}{p} + \frac{B_i^q}{q}\right) = \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_i^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} B_i^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{Minkowskiの不等式}}$ $p>1$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ のとき、 三角不等式の一種

$$(**) \quad \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p},$$

$\boxed{\text{証明}}$ $a_i=|x_i|$, $b_i=|y_i|$ とおくと、$\left((**)\text{の左辺}\right) \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p}$ なので

$$(**)' \quad \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}$$

を示せばよい。

$q>1$ を $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ で定めると、$p+q=pq$, $p=(p-1)q$ なので

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \overset{\text{ポイント}}{=} \sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{p-1}$$

Hölderの不等式

$$\leqq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

なので両辺を $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$ でわると $(**)'$ を得る。

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

Gibbsの情報不等式 $p_i, q_i > 0,\ \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n q_i \log \frac{q_i}{p_i} \geqq 0.$

証明 $E[f(x)] = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{q_i}{p_i}\right) p_i$ と $f(x) = x\log x$ (下に凸) にJensenの不等式を使う. $f'(x) = \log x + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ $(x>0)$ なので $f(x)$ は下に凸である. ゆえに,

$$\sum_{i=1}^n q_i \log\frac{q_i}{p_i} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{q_i}{p_i} \log\frac{q_i}{p_i} = E[f(x)] \geqq f(E[x]) = f\left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{p_i} p_i\right) = f(1) = 0. \quad \square$$

注意 $D(q\|p) = \sum_{i=1}^n q_i \log\frac{q_i}{p_i}$ は確率分布 p と q のちがいの大きさを測る量としてよく使われ, Kullback-Leibler情報量と呼ばれる. $D(q\|p)$ は p と q について対称ではないが, Sanovの定理という「KL情報量は p による q のシミュレーションの誤差の大きさと解釈できること」を意味する良い性質を持つ. 後で説明する「距離」の性質をみたさないが距離のように使われるものとして非常に重要である. $\square$

$\boxed{\text{写像による像と逆像}}$

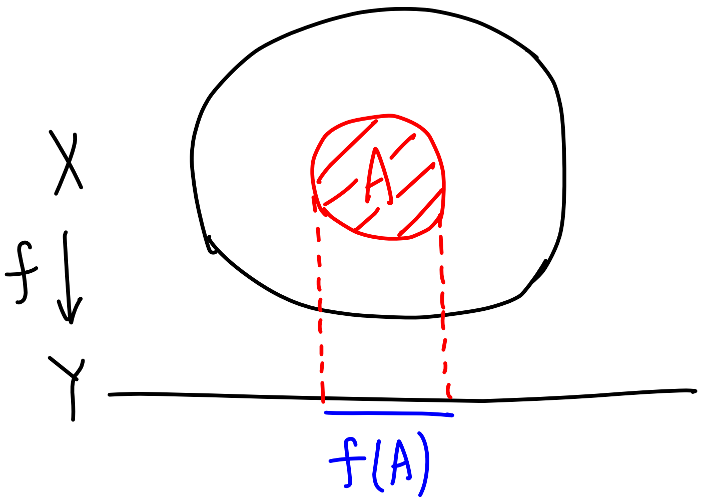
図を使った説明

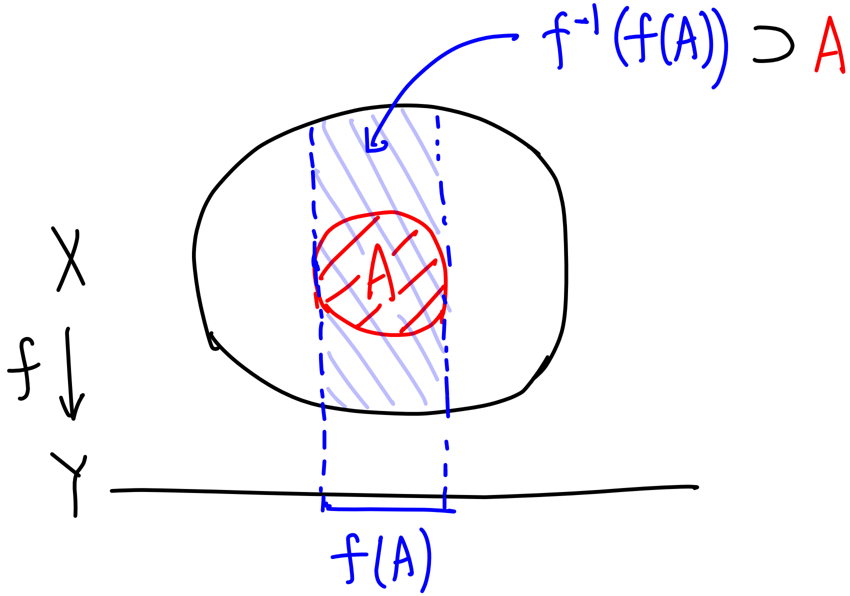
$f: X \to Y,\ A \subset X,\ B \subset Y$ について,

$$\begin{cases} f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \text{ある } x \in A \text{ が存在して } f(x) = y\} \\ f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}. \end{cases}$$

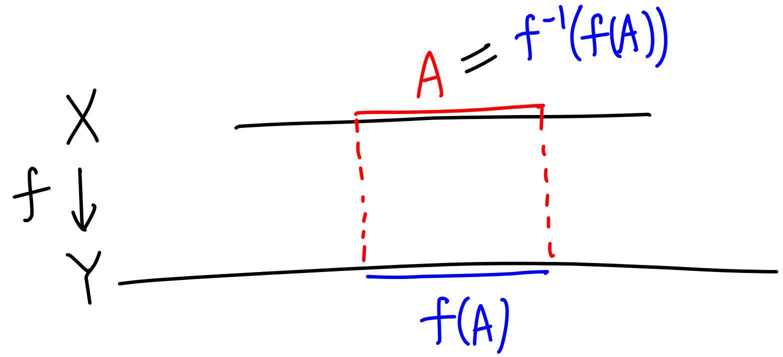
これらの性質は以下のような図を描くと理解し易い。

$\boxed{\text{例}}$ $A \subset f^{-1}(f(A))$

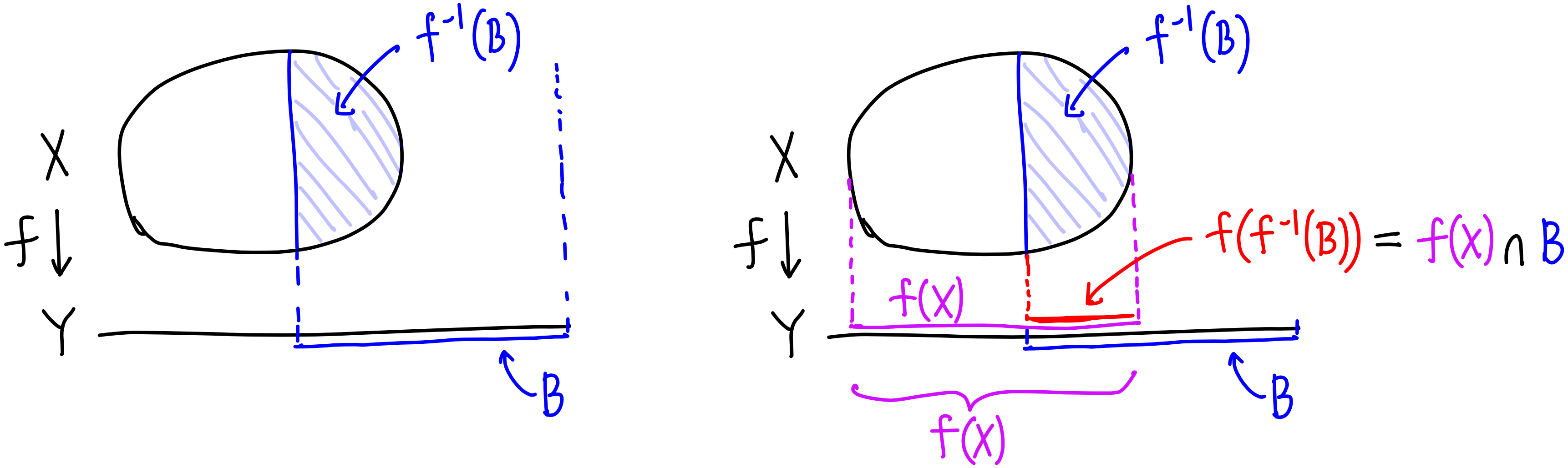




$\boxed{\text{例}}$ fが単射ならば $A=f^{-1}(f(A))$



$\boxed{\text{例}}$ $f(f^{-1}(B))=f(X)\cap B$　（特に f が全射ならば $f(f^{-1}(B))=B$）



図を描き，証明も書き，直観と論理がかみあうようにしておいてほしい．

ℝ上のベクトル空間のノルム

V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であるとする.

例 $V=\mathbb{R}^n=\{(a_1,\dots,a_n)\mid a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}\}$.

例 $V=C([a,b],\mathbb{R})=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\mid f$ は連続$\}$.

定義 $\|\cdot\|: V\to\mathbb{R}_{\geq 0}=\{\alpha\in\mathbb{R}\mid\alpha\geq 0\}$ が<u>ノルム</u>であるとは以下の条件をみたすことであると定める: $u, v\in V$ と $\alpha\in\mathbb{R}$ について

(N1) $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$ (三角不等式)

(N2) $\|\alpha v\|=|\alpha|\,\|v\|$

(N3) $\|v\|=0 \iff v=0$ ($\Leftarrow$ は (N2) から出る) □

例 $p\geq 1$ のとき, $\mathbb{R}^n$ における<u>ℓ^p ノルム</u> $\|\cdot\|_p$ を

$$\|a\|_p=\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \quad (a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n)$$

Minkowskiの不等式から三角不等式が得られる.

と定めることができる. さらに<u>ℓ^∞ ノルム</u> $\|\cdot\|_\infty$ を次のように定めることができる:

$$\|a\|_\infty=\max\{|a_1|,\dots,|a_n|\}.$$ □

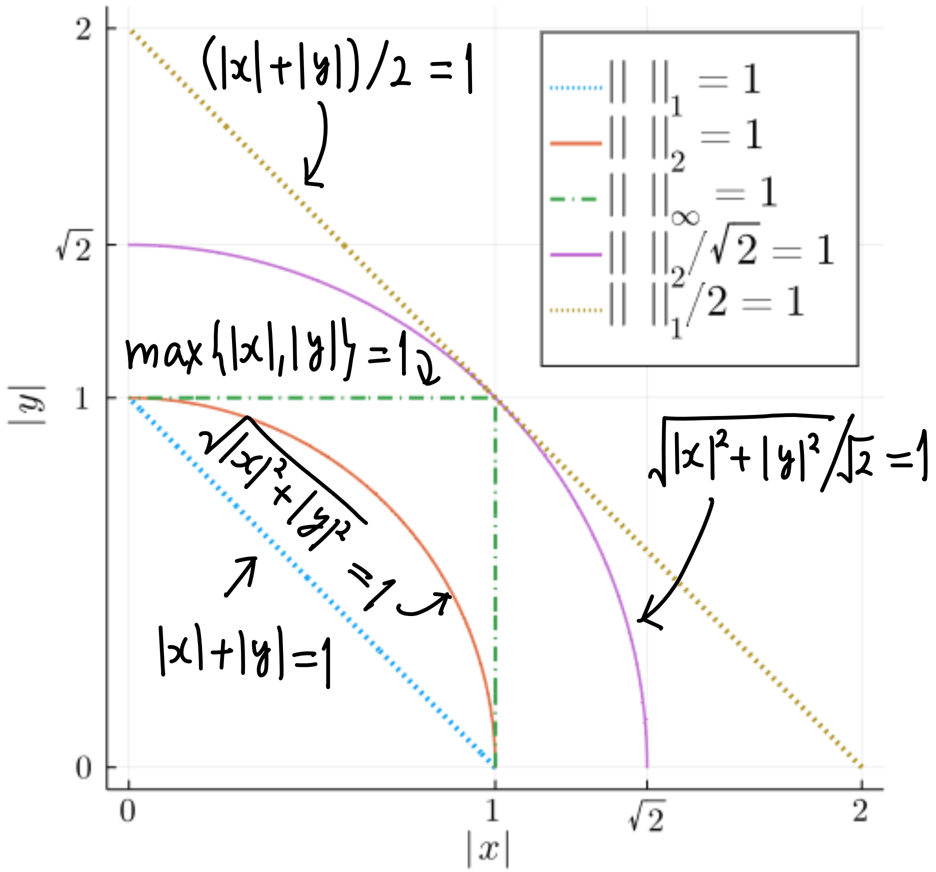
問題 $1\leq p\leq q<\infty$ のとき $\|a\|_p\geq\|a\|_q$ でかつ $\lim_{p\to\infty}\|a\|_p=\|a\|_\infty$ となることを示せ. □

答えは MetricSpaces.pdf にある

$\boxed{\text{例}}$ ($\mathbb{R}^2$の場合) $(x,y)\in\mathbb{R}^2$とする.

$1\leqq p<\infty$について $\|(x,y)\|_p=\left(|x|^p+|y|^p\right)^{1/p}$, $\|(x,y)\|_\infty=\max\{|x|,|y|\}$.

$\|(x,y)\|_p=1$ となる $(|x|,|y|)\in\mathbb{R}^2_{\geqq 0}$ 全体のグラフは次のようになる.



左図より $a=(x,y)\in\mathbb{R}^2$について

$$\begin{cases}\|a\|_1\geqq\|a\|_2\geqq\|a\|_\infty\\ \frac{1}{2}\|a\|_1\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}\|a\|_2\leqq\|a\|_\infty\end{cases}$$

$\boxed{\text{問題}}$ $a\in\mathbb{R}^n$について以下を示せ.

$1\leqq p\leqq q<\infty$のとき,

(1) $\|a\|_p\geqq\|a\|_q\geqq\|a\|_\infty$,

(2) $n^{-1/p}\|a\|_p\leqq n^{-1/q}\|a\|_q\geqq\|a\|_\infty$. □

答えは MetricSpaces.pdf にある.

定義 Vにおけるノルム$\|\cdot\|$と$\|\cdot\|'$が同値であるとは、

ある正の定数c_1, c_2で $c_1\|a\| \leqq \|a\|' \leqq c_2\|a\|$ $(a\in V)$をみたすものが

存在することだと定める。 □

定理 (易) $\mathbb{R}^n$のℓ^pノルム$(1\leqq p\leqq \infty)$はすべて互いに同値である。 □

1つ前のページの問題を参照。

定理 (難) $\mathbb{R}^n$におけるすべてのノルムは互いに同値である。 □

証明略

注意 Vが無限次元ならばVは互いに同値でないノルムが無数に持つ。 □

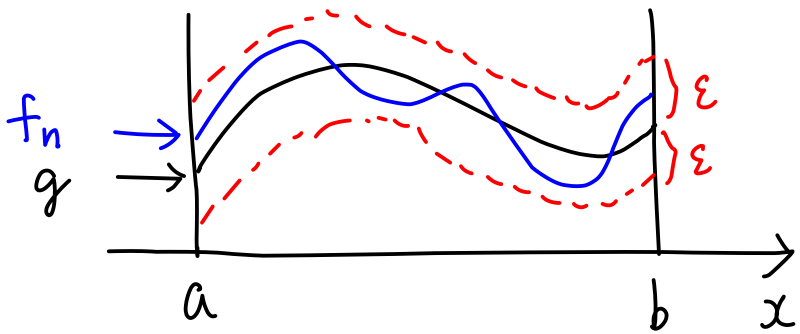
$\boxed{\text{例}}$ $V = C([a,b], \mathbb{R})$ の <u>L^p ノルム</u> $\|\cdot\|_p$ を以下のように定められる；

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} & (1 \leqq p < \infty) \\ \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| & (p = \infty) \end{cases} \quad (f \in V = C([a,b], \mathbb{R})).$$

これは $\max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ に等しい。

$\|\cdot\|_\infty$ は <u>sup ノルム</u> とも呼ばれる。 □

$\boxed{\text{注意}}$ $\|f_n - g\|_\infty < \varepsilon$ は以下の図のような状況である；



$$g(x) - \varepsilon < f_n(x) < g(x) + \varepsilon \quad (a \leqq x \leqq b)$$

となっている状況。

後で説明することになるが，$\|f_n - g\|_\infty \to 0$ は f_n が g に <u>一様収束</u> することと同値になる。 □

距離空間

← 数学の多くの分野で役に立つ　$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

定義 集合 X と写像 $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ の組 (X, d) で以下の条件をみたすものを<u>距離空間</u>(<u>metric space</u>)と呼ぶ: $x, y, z \in X$ に対して,

(M1) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$　(三角不等式)

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$　(対称性)

(M3) $d(x,y) = 0 \iff x = y$　($\Rightarrow$ を d の非退化性と呼ぶ).

(定義はノートにも書くべきである.)

このとき, d を<u>距離函数</u>と呼ぶ. さらに文脈的に混乱しない場合には単に X を距離空間と呼ぶ(むしろ, そうすることが多い). □

例 V が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間で $\|\cdot\|$ が V 上のノルムのとき,

$d(x,y) = \|x-y\|$ $(x, y \in V)$ と定めると, (V, d) は距離空間になる.

このようにノルムから自然に距離函数を作れる. □

$\boxed{\text{定義}}$ 集合Xにおける2つの距離函数d, d'が同値であるとは

ある定数$c_1, c_2 > 0$で

同値関係になる

$$c_1 d(x,y) \leqq d'(x,y) \leqq c_2 d(x,y) \quad (x, y \in X)$$

をみたすものが存在することだと定める。 □

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{R}$上のベクトル空間Vにおける互いに同値なノルムは互いに同値な距離函数を与える。 □

$\boxed{\text{注意}}$ 同値な距離函数に関する点列の収束や写像の連続性などの定義は互いに同値になる。 □

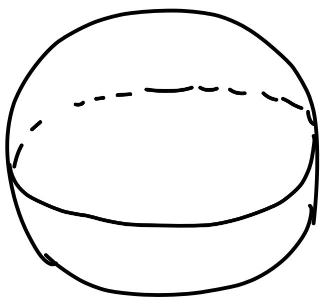
$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{R}^n$におけるℓ^pノルム$(1 \leqq p \leqq \infty)$はすべて互いに同値(実際には$\mathbb{R}^n$におけるすべてのノルムは互いに同値)なので、ℓ^pノルムが与えるℓ^p距離たちもすべて互いに同値になる。 □

$\boxed{\text{定義}}$ (X, d_X) が距離空間で $A \subset X$ のとき, $d_A(x,y) = d_X(x,y)$ $(x, y \in A)$ と $d_A : A \times A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を定めると, (A, d_A) も距離空間になる. (A, d_A) を (X, d_X) の距離部分空間 (metric subspace) と呼ぶ. □

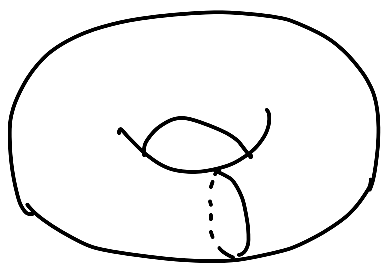
$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{R}^n$ を Euclid ノルムで距離空間とみなそう.

(1) $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ ($n-1$ 次元球面) は $\mathbb{R}^n$ の距離部分空間とみなされる.

(2) $T^n = \{(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + y_1^2 = \cdots = x_n^2 + y_n^2 = 1\}$ (n 次元トーラス) は $\mathbb{R}^{2n}$ の距離部分空間とみなされる.



S^2



T^2

たいていの図形は距離空間とみなされる.

□

$\boxed{例}$ (代数学に出て来る距離空間) 多項式の次数から作られる距離.

K は任意の体であるとし, 1変数多項式環 $K[x]$ を考える.

$f \in K[x]$ の次数(degree)を $\deg f$ と書く. ($\deg 0 = -\infty$ と約束)

f の付値 $|f|_\infty$ を次のように定める:

$$|f|_\infty = e^{\deg f} \quad (e^{-\infty} = 0 \text{ と約束}).$$

「絶対値のようなもの」を付値 (valuation) と呼ぶことが多い.
付値からも距離函数を作れる.

このとき, $f, g \in K[x]$ について

$$\deg(f+g) \leqq \max\{\deg f, \deg g\}$$

より,

$$|f+g|_\infty \leqq \max\{|f|_\infty, |g|_\infty\} \leqq |f|_\infty + |g|_\infty$$

となることがわかる. このことから,

$$d_\infty(f,g) = |f-g|_\infty \quad (f, g \in K[x])$$

$f-g$ の次数が大きいほど f と g が離れていると考える.

と定めると, $(K[x], d_\infty)$ が距離空間になることがわかる. □

上の例で証明をサボった部分を自分で埋めよ.

$\boxed{\text{例}}$ (代数学に出て来る距離空間)

K は任意の体であるとし，1変数多項式環 $K[x]$ を考える．

$\alpha \in K$ を任意に固定する．任意の $f(x) \in K[x]$ は

$$f(x) = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + \cdots \quad (\text{有限和},\ a_i \in K)$$

と一意に表わされる．$f(x)=0$ のとき，$\operatorname{ord}_\alpha f(x) = \infty$，$f(x) \neq 0$ のとき，

$\operatorname{ord}_\alpha f(x) = (a_i \neq 0$ となる最小の $i)$ と $\operatorname{ord}_\alpha f(x) \in \{0,1,2,\ldots\} \cup \{\infty\}$ を

$\operatorname{ord}_\alpha f(x)$ を $f(x)$ の $x=\alpha$ での 位数 (order) と呼ぶ

定め，$|f(x)|_\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$f(x)$ の α 付値と呼ぶ (絶対値のようなもの)

$$|f(x)|_\alpha = e^{-\operatorname{ord}_\alpha f(x)} \quad (\text{ただし},\ e^{-\infty} = 0 \text{ とおく})$$

付値 = valuation

と定める．このとき，$f(x), g(x) \in K[x]$ について

$$\operatorname{ord}_\alpha (f(x)+g(x)) \geq \min\{\operatorname{ord}_\alpha f(x),\ \operatorname{ord}_\alpha g(x)\},$$

$$|f(x)+g(x)|_\alpha \leq \max\{|f(x)|_\alpha,\ |g(x)|_\alpha\} \leq |f(x)|_\alpha + |g(x)|_\alpha$$

が成立しているので，$d_\alpha(f(x),g(x)) = |f(x)-g(x)|_\alpha$ とおくと，$(K[x], d_\alpha)$ は距離空間になる．

$\square$

$|a| = |a|_\infty$ と書く

例 (p進距離) (有理)整数環 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ では通常の絶対値が与える距離以外に以下で説明する距離を考えることができる。

p は素数であるとする。0でない $a \in \mathbb{Z}$ は $a = p^k m$ $(k \geq 0, m \in \mathbb{Z}, p \nmid m)$ と一意に表わされる。そのとき、$\mathrm{ord}_p a = k$ と定める。$\mathrm{ord}_p 0 = \infty$ とおく。

$a \in \mathbb{Z}$ の p進付値 (p-adic valuation) $|a|_p$ を

$$|a|_p = p^{-\mathrm{ord}_p a} \quad (p^{-\infty} = 0 \text{ とおく})$$

と定める。このとき、$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\mathrm{ord}_p(a+b) \geq \min\{\mathrm{ord}_p a, \mathrm{ord}_p b\}$$

a と b が p^k でわりきれれば $a+b$ も p^k でわりきれる

より、

$$|a+b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\} \leq |a|_p + |b|_p.$$

これより、$d_p(a, b) = |a-b|_p$ とおくと、$(\mathbb{Z}, d_p)$ は距離空間になる。 $\square$

$a-b$ が p でたくさんわりきれるほど a と b は近いと考える。

点列の収束

以下，(X,d) は距離空間であるとする．

定義 $a_1, a_2, \ldots$ がすべて X の点であるとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X 内の点列と呼ぶ．□

空間の元を点と呼ぶ (sequence)

定義 X 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとは，ある $\alpha \in X$ が存在して，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある番号 N が存在して，$n \geqq N$ ならば $d(a_n, \alpha) < \varepsilon$ が成立することだと定める．このとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束するという．□

収束先の一意性 X 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha \in X$ と $\beta \in X$ に収束しているならば $\alpha = \beta$ となる．（$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき，その収束先を $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ と書く．）

証明 $\varepsilon > 0$ を任意にとる．

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束していることより，ある番号 N_1 が存在して，$n \geqq N_1$ ならば $d(a_n, \alpha) < \varepsilon$．

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が β に収束していることより，ある番号 N_2 が存在して，$n \geqq N_2$ ならば $d(a_n, \beta) < \varepsilon$．

$n \geqq \max\{N_1, N_2\}$ とする．このとき，

$$d(\alpha, \beta) \underset{(M1)}{\leqq} d(\alpha, a_n) + d(a_n, \beta) \underset{(M2)}{=} d(a_n, \alpha) + d(b_n, \alpha) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

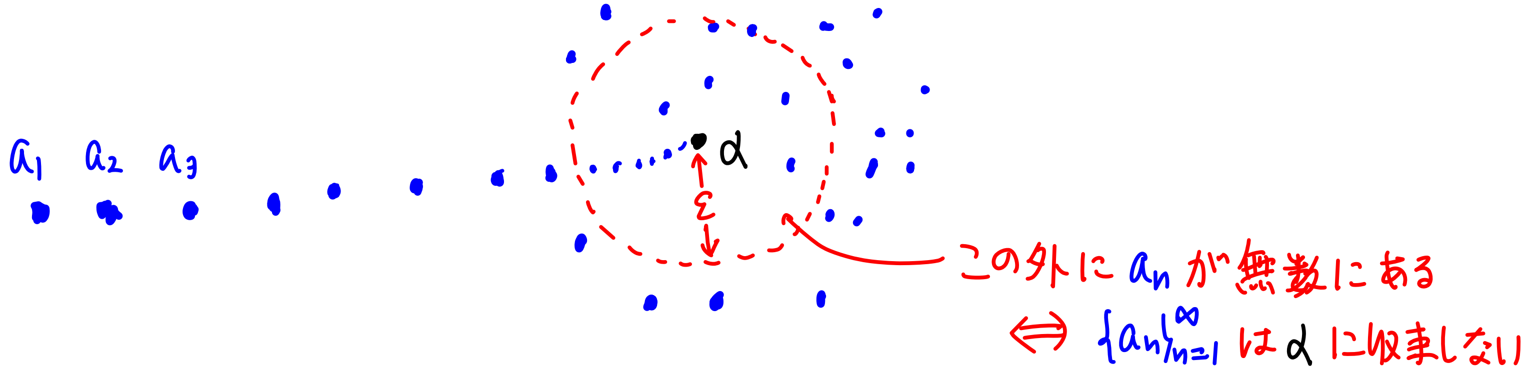
$\varepsilon > 0$ は任意だったので $d(\alpha, \beta) = 0$．ゆえに$^{(M3)}$ $\alpha = \beta$．□

$\boxed{\text{注意}}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束しないことは次のように言い換えられる：

(*) $\begin{cases} \text{ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して，どんなに番号 } N \text{ を大きくしても，} \\ N \text{ 以上のある } n \text{ で } d(a_n, \alpha) \geq \varepsilon \text{ をみたすものが存在する。} \end{cases}$

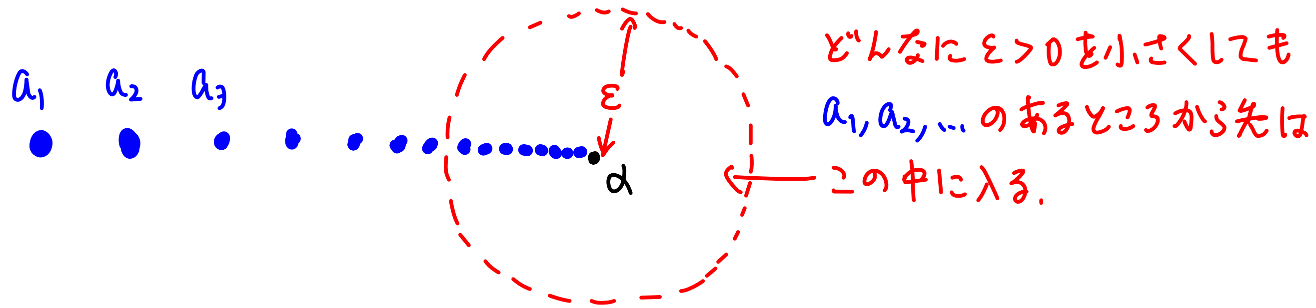
これは次と同値である：

(**) ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$d(a_n, \alpha) \geq \varepsilon$ をみたす n が無限個ある。



$\boxed{\text{注意}}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束することは次のように言い換えられる：

(☆) $\begin{cases} \text{どんなに } \varepsilon > 0 \text{ を小さくしても，} \\ \text{点列 } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ のある番号以降は } \alpha \text{ から距離 } \varepsilon \text{ 未満の範囲に入る。} \end{cases}$



□

$\boxed{\text{点列の収束と距離の0への収束の同値性}}$ (X, d) は距離空間であるとし, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 内の点列であるとし, $\alpha \in X$ とする. このとき, 以下の2つの条件は互いに同値である;

(a) 点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束する.

(b) 実数列 $\{d(a_n, \alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する.

$\boxed{\text{証明}}$ 条件(a), (b) を定義通りに忠実に書き直すと, それぞれ以下のようになる;

(a)' 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば $d(a_n, \alpha) < \varepsilon$.

(b)' 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある番号 N が存在して, $n \geqq N$ ならば $|d(a_n, \alpha) - 0| < \varepsilon$.

しかし, $d(a_n, \alpha) \geqq 0$ なので, $|d(a_n, \alpha) - 0| < \varepsilon$ と $d(a_n, \alpha)$ は同値であり, (a)' と (b)' が同値であることがわかる. □

具体的な計算では, $a_n \to 0$ を示すために, 0 に収束する実数列 c_n で $d(a_n, \alpha) \leqq \underbrace{\cdots}_{\text{不等式の計算}} \leqq c_n$ をみたすものを見付けることがよくある.

$\boxed{例}$ ノルム $\|\cdot\|$ を持つ $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V における点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，

"無限和" $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を級数 (series) と呼ぶ．

級数の(通常の)収束は部分和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ の点列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束で定義される．

(1) $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ が $n\to\infty$ で収束しているならば，a_n は 0 に収束している．

(2) その逆は一般には成立していない．

$\boxed{証明}$ (1) $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ は $n\to\infty$ で $\sigma \in V$ に収束していると仮定する．

任意に $\varepsilon > 0$ をとる．ある N が存在して，$n \geqq N$ ならば $\|s_n - \sigma\| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる．

このとき，$n \geqq N+1$ ならば

$a_n = s_n - s_{n-1}$

$n-1 \geqq N$ としたい

$$\|a_n\| = \|s_n - s_{n-1}\| = \|s_n - \sigma - (s_{n-1} - \sigma)\|$$

$$\leqq \|s_n - \sigma\| + \|s_{n-1} - \sigma\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Euler's gamma

$\gamma = 0.5772\cdots$

これで a_n が 0 に収束することが示された．

(2) $V = \mathbb{R}$，$a_n = \frac{1}{n}$ が反例になっている． $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \varepsilon_n$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. $\square$

有界性 Xは距離空間であるとし，$A\subset X$であるとする．

$X\neq\phi$のとき，Aが<u>有界</u>であるとは，ある$x_0\in X$と$L>0$が存在して，

任意の$a\in A$に対して，$d_X(a,x_0)\leqq L$となることだと定める．

$X=\phi$のときにも$\underset{\phi}{\overset{}{A}}$ ($A=\phi$) は<u>有界</u>であるとみなす． □

注意 距離空間Xの部分集合Aについて，以下の2つの条件は同値である：

(a) Aは有界である．

(b) ある$M>0$が存在して，任意の$a,a'\in A$について$d_X(a,a')\leqq M$．

証明 $A=\phi$のとき，(a)$\Leftrightarrow$(b)は自明なので$A\neq\phi$と仮定する．

(a)$\Rightarrow$(b)：ある$x_0\in X$と$L>0$が存在して，$d_X(a,x_0)\leqq L$ $(a\in A)$となっているならば

$a,a'\in A$について，$d_X(a,a')\leqq d_X(a,x_0)+d(x_0,a')\leqq 2L$．

(b)$\Rightarrow$(a)：ある$M>0$が存在して，$d_X(a,a')\leqq M$ $(a,a'\in A)$となっているならば

$x_0\in A$を任意にとると，$a\in A$について，$d_X(a,x_0)\leqq M$． □

収束点列の有界性 距離空間 (X,d) 内の収束する点列は有界である.

証明 X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a\in X$ に収束していると仮定する.

このとき, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある N が存在して, $n\geqq N$ ならば $d(x_n,a)<\varepsilon$ となる.

これを $\varepsilon=1$ に適用すると, ある N が存在して, $n\geqq N$ ならば $d(x_n,a)<1$ となる.

$L=\max\{1, d(x_1,a), d(x_2,a), \dots, d(x_{N-1},a)\}$ とおくと, $d(x_n,a)\leqq L$ $(n=1,2,\dots)$ となる.

ゆえに, $\{x_n \mid n=1,2,\dots\}$ は有界である. □

a に収束する点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 内の点は有限個を除いて a に"近い".
このことから $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の有界性が出る.

注意 後で収束点列よりも弱い条件で <u>Cauchy列</u> を定義するが Cauchy列も有界になる:

収束点列 $\Longrightarrow$ Cauchy列 $\Longrightarrow$ 有界点列

$\Longleftarrow$

(距離空間の完備性の定義)

□

$\boxed{\boxed{\text{連続写像}}}$

(X, d_X), (Y, d_Y) は距離空間であるとし, 写像 $f: X \to Y$ について考える.

$\boxed{\text{定義}}$ (等長写像) f が等長写像 (isometric mapping) であるとは,
任意の $x, x' \in X$ について $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ が成立することだと定める. □

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V を任意のノルム $\|\cdot\|$ によって距離空間とみなすとき,
$a \in V$ に対して, $f_a : V \to V$ を $f_a(v) = v + a$ $(v \in V)$ と定めると, f_a は等長写像になる. □

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{R}^2$ をEuclidノルムで距離空間とみなすとき, $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を
$f_\theta(x, y) = ((\cos\theta)x + (-\sin\theta)y,\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)y)$ と定めると, f_θ は等長写像になる. □

等長写像という条件は非常に強い.

continuous mapping

その条件を大幅にゆるめて, 連続写像 (および後で一様連続写像) が定義される.

$\boxed{\text{定義}}$ (連続写像) f が連続であるとは, 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in X$ について, $d_X(x, a) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ になることだと定める. □

出た! ε-δ だ!

おおざっぱな定義 $f: X \to Y$ が**連続**であるとは、任意の $a \in X$ において、$x \in X$ が a にいくらでも近付くとき、$f(x)$ も $f(a)$ にいくらでも近付くことだと定める。 □

近付き方は任意

これを定義として採用しようとすると、「いくらでも近付く」の意味があいまいなせいでこまる場合が出て来る。そこで次の ε-δ 論法による定義を採用することが標準的になっている。

定義 $f: X \to Y$ が連続であるとは、任意の X の点 a と任意に小さな許される誤差 $\varepsilon > 0$ に対して、(a と ε ごとにちがっていてもよい) ある $\delta > 0$ が存在して、点 $x \in X$ を点 a に距離 δ 未満まで近付ければ、$f(x)$ が $f(a)$ に距離 ε 未満まで近付くことであると定める。 □

問題 前ページとこのページを比較して、同じことを言っていることを納得するまで考えつづけよ。(数ヶ月の時間が必要かもしれない!) □

点列の収束との関係 $f: X \to Y$ について以下の2つの条件は同値である。

(a) f は連続である。

(b) 任意の $a \in X$ と a に収束する X 内の任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、
Y 内の点列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束している; $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

証明 <u>(a) ⇒ (b) を示そう。</u> f は連続であるとし、$a \in X$ と $\varepsilon > 0$ を任意にとる。
このとき、ある $\delta > 0$ が存在して、$x \in X$ かつ $d_X(x, a) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる。
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束する X 内の点列であるとする。このとき、ある番号 N が存在して、
$n \geqq N$ ならば $d_X(x_n, a) < \delta$ となり、ゆえに、$d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ となる。
これで $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(a)$ に収束することがわかった。 □

<u>準備</u> f が連続でないことは次の条件になる;
ある $a \in X$ とある $\varepsilon > 0$ が存在して、任意の $\delta > 0$ に対して、
ある $x \in X$ が存在して、$d_X(x, a) < \delta$ かつ $d_Y(f(x), f(a)) \geqq \varepsilon$ となる。

つづく

(b)⇒(a)の対偶を示そう。 fは連続でないと仮定する。このとき、ある$a \in X$とある$\varepsilon > 0$が存在して、次をみたす：

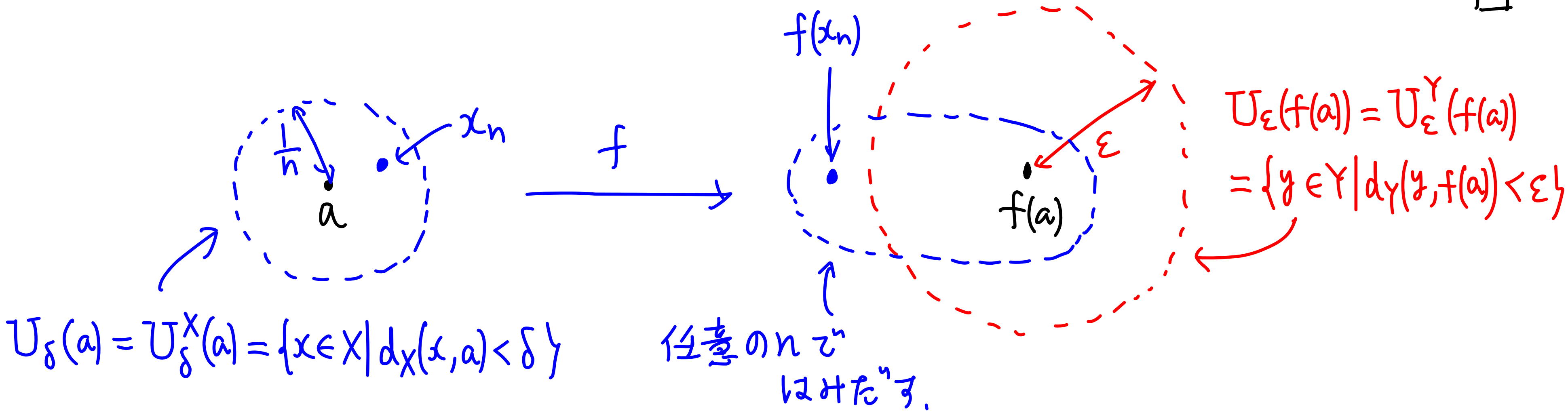
任意の$\delta > 0$に対して、ある$x \in X$が存在して、$d_X(x, a) < \delta$かつ$d_Y(f(x), f(a)) \geqq \varepsilon$となる。

これを$n = 1, 2, 3, \ldots$に対する$\delta = \frac{1}{n}$に適用すると、ある$x_n \in X$が存在して、$d_X(x_n, a) < \frac{1}{n}$かつ$d_Y(f(x_n), f(a)) \geqq \varepsilon$となる。

このとき、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$はaに収束するが、$f(x_n)$と$f(a)$の距離は決してε未満にならないので、$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$は$f(a)$に収束しない。

これで(b)⇒(a)の対偶が示された。

$\square$



$\boxed{\text{四則演算の連続性}}$ $\mathbb{R}$を通常の絶対値によって距離空間とみなし，

$\mathbb{R}^2$をEuclidノルムで距離空間とみなす．次の不等式を後で無断で用いる：

$$|x| \leqq \sqrt{x^2+y^2}, \quad |y| \leqq \sqrt{x^2+y^2}, \quad \sqrt{x^2+y^2} \leqq |x|+|y|.$$

自明　自明　$(右辺)^2 - (左辺)^2 = 2|x||y| \geqq 0$.

$\boxed{\text{定理}}$ 以下の写像はすべて連続である：

(1) $f_+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_+(x,y) = x+y$, (2) $f_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_-(x) = -x$,

(3) $f_\times : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_\times(x,y) = xy$, (4) $f_{inv} : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$, $f_{inv}(x) = \dfrac{1}{x}$.

$\boxed{\text{証明}}$ (できれば以下を参照せずにまず自分で証明を考えた方がよい.)

(1) 任意に$\varepsilon > 0$をとる．$(a,b), (x,y) \in \mathbb{R}^2$ かつ $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ならば

$$\begin{aligned}
|f_+(x,y) - f_+(a,b)| &= |(x+y)-(a+b)| = |(x-a)+(y-b)| \\
&\leqq |x-a| + |y-b| \\
&\leqq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} + \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

これでf_+の連続性が示された．

(2) 任意に $\varepsilon > 0$ をとる。このとき, $a, x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \varepsilon$ ならば

$$|f_-(x) - f_-(a)| = |-x-(-a)| = |x-a| < \varepsilon.$$

← f_- は等長写像

これで f_- が連続であることがわかった。

(3) 任意に $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ と $\varepsilon > 0$ をとり, $\delta = \min\left\{ \underset{①}{\frac{\varepsilon/2}{1+|a|}}, \underset{②}{1}, \underset{③}{\frac{\varepsilon/2}{1+|b|}} \right\}$ とおく。

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ かつ $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ のとき,

$$|y| \leqq |y-b| + |b| \leqq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} + |b| < \delta + |b| \overset{②}{\leqq} 1 + |b|.$$

$$\begin{aligned}
|f_\times(x,y) - f_\times(a,b)| &= |xy - ab| = |xy - ay + ay - ab| \\
&\leqq |xy - ay| + |ay - ab| \\
&= |x-a||y| + |a||y-b| \\
&\leqq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\,|y| + |a|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \\
&\leqq \delta(1+|b|) + (1+|a|)\delta \\
&< \varepsilon/2 \;③ + \varepsilon/2 \;① = \varepsilon.
\end{aligned}$$

これで $f_\times$ の連続性が示された。

(4) 任意に $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ と $\varepsilon > 0$ をとり, $\delta = \min\left\{ \frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2 \varepsilon}{2} \right\}$ とおく.

$x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ かつ $|x-a| < \delta$ のとき,

$$\begin{cases} |A+B| \geqq |A| - |B| \\ |A+B| \geqq |B| - |A| \end{cases}$$

$$|x| = |x-a+a| \geqq |a| - |x-a| > |a| - \delta \overset{①}{\geqq} |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}.$$

$$|f_{inv}(x) - f_{inv}(a)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x-a|}{|a||x|} < \frac{\delta}{|a| \cdot \frac{|a|}{2}} \underset{②}{\leqq} \frac{\frac{|a|^2 \varepsilon}{2}}{|a| \cdot \frac{|a|}{2}} = \varepsilon.$$

これで f_{inv} の連続性が示された, □

$\boxed{\text{問題}}$ 上の証明の本質は青の波線 〰 の部分をどのようにして,見付けたかである. どのようにして見付けることができるか自分で考えてみよ! □

来週, この点についての詳しい解説を追加する.

この点を突破できるか否かは解析学を理解できるかどうかについて非常に重要な段階になる!

来週までに以下の問題についても考えてほしい。

直接的に

$\boxed{\text{問題}}$ 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束していると仮定する。以下を示せ。

(1) $\{x_n+y_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n$.

(2) $\{-x_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-x_n)=-\lim_{n\to\infty}x_n$.

(3) $\{x_ny_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_ny_n=\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}y_n\right)$.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n\neq 0$ のとき、ある N_0 が存在して、$n\geqq N_0$ ならば $x_n\neq 0$ となり、実数列 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}_{n=N_0}^{\infty}$ は収束して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n}$. $\square$

これも来週解説する。

極限と四則演算の可換性　(前回のつづき)

問題　実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束していると仮定する. 以下を示せ.

(1) $\{x_n+y_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して, $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n$.

(2) $\{-x_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して, $\lim_{n\to\infty}(-x_n)=-\lim_{n\to\infty}x_n$.

(3) $\{x_ny_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して, $\lim_{n\to\infty}x_ny_n=\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}y_n\right)$.

(4) $\lim_{n\to\infty}x_n\neq 0$ のとき, ある N_0 が存在して, $n\geqq N_0$ ならば $x_n\neq 0$ となり,
実数列 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=N_0}^{\infty}$ は収束して, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}x_n}$. □

距離空間のあいだの写像 $f: X\to Y$ が連続であることと,
距離空間内 X 内の収束する任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して,
Y 内の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して, $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)$ が成立することは同値
なので, 上の問題の結果は四則演算の連続性と同値である.
しかし, 直接の証明も見せておこう.

$\boxed{\text{証明}}$ $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} y_n$ とおく.

(1) 任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束しているので, ある N_1 が存在して, $n \geqq N_1$ ならば $|x_n - \alpha| \overset{①}{<} \frac{\varepsilon}{2}$.

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は β に収束しているので, ある N_2 が存在して, $n \geqq N_2$ ならば $|y_n - \beta| \overset{②}{<} \frac{\varepsilon}{2}$.

ゆえに, $n \geqq \max\{N_1, N_2\}$ ならば

$$|x_n + y_n - (\alpha + \beta)| = |(x_n - \alpha) + (y_n - \beta)| \leqq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| \overset{①,②}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha + \beta$ に収束することが示された.

(2) 任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束しているので, ある N が存在して, $n \geqq N$ ならば $|x_n - \alpha| \overset{①}{<} \varepsilon$.

ゆえに, $n \geqq N$ ならば $|(-x_n) - (-\alpha)| = |x_n - \alpha| \overset{①}{<} \varepsilon$.

これで $\{-x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $-\alpha$ に収束することが示された.

(3) 任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は β に収束しているので，ある N_2 が存在して，$n \geqq N_2$ ならば $|y_n - \beta| < 1$ となり，$|y_n| = |y_n - \beta + \beta| \leqq |y_n - \beta| + |\beta| \overset{(2)}{<} 1 + |\beta|$ となる.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束しているので，ある N_3 が存在して，$n \geqq N_3$ ならば $|x_n - \alpha| \overset{(3)}{<} \dfrac{\varepsilon/2}{1+|\beta|}$.

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は β に収束しているので，ある N_1 が存在して，$n \geqq N_1$ ならば $|y_n - \beta| \underset{(1)}{<} \dfrac{\varepsilon/2}{1+|\alpha|}$.

ゆえに，$n \geqq \max\{N_1, N_2, N_3\}$ のとき，

$$|x_n y_n - \alpha\beta| = |x_n y_n - \alpha y_n + \alpha y_n - \alpha\beta| \leqq |x_n y_n - \alpha y_n| + |\alpha y_n - \alpha\beta|$$

$$= |x_n - \alpha|\,|y_n| + |\alpha|\,|y_n - \beta|$$

$$< \frac{\varepsilon/2}{1+|\beta|}(1+|\beta|) + (1+|\alpha|)\frac{\varepsilon/2}{1+|\alpha|} = \varepsilon.$$

これで $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha\beta$ に収束することが示された.

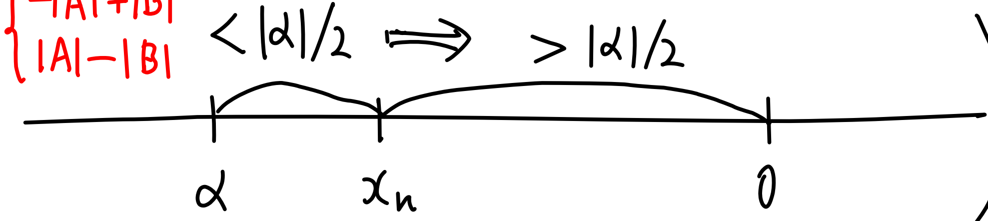
(4) $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ より, $|\alpha| > 0$ である. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束するので, ある N_1 が存在して, $n \geqq N_1$ ならば $|x_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2}$

となり, $|x_n| = |x_n - \alpha + \alpha| \geqq -|x_n - \alpha| + |\alpha| > -\frac{|\alpha|}{2} + |\alpha| = \frac{|\alpha|}{2}$. ①

($|A+B| \leqq |A|+|B|$, $|A \pm B| \geqq \begin{cases} -|A|+|B| \\ |A|-|B| \end{cases}$

注 図を描けば自明



)

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束しているので, ある N_2 が存在して, $n \geqq N_2$ ならば $|x_n - \alpha| < \frac{|\alpha|^2 \varepsilon}{2}$, ②

ゆえに, $n \geqq \max\{N_1, N_2\}$ とすると, $|x_n| > \frac{|\alpha|}{2} > 0$ より特に $x_n \neq 0$ であり,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|x_n - \alpha|}{|\alpha||x_n|} \underset{①}{\overset{②}{<}} \frac{|\alpha|^2 \varepsilon / 2}{|\alpha| \cdot |\alpha|/2} = \varepsilon.$$

これで, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=N_1}^{\infty}$ が $\frac{1}{\alpha}$ に収束することが示された.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

ε-δ や ε-N の証明の見付け方

R×R の距離は Euclid 距離としておく。

（ノルムで入れた距離ならなんでもよい。）

例 (3) $f_\times : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_\times(x,y)=xy$ の連続性を証明せよ。

$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$

証明の見付け方 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ と $\varepsilon>0$ を任意にとる。

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ を (a,b) に十分に近くすれば $|f_\times(x,y)-f_\times(a,b)|=|xy-ab|<\varepsilon$ となることを示したい。

$$
\left.\begin{aligned}
|xy-ab| &= |xy-ay+ay-ab| \leq |xy-ay|+|ay-ab| \\
&= |x-a||y| + |a||y-b|
\end{aligned}\right)\ ⓪
$$

この計算を最初にしてしまうことがポイント

ゆえに，(x,y) を (a,b) に十分近付ければ $|x-a||y|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|a||y-b|<\frac{\varepsilon}{2}$ となることを示せればよい。

$|a||y-b|<\frac{\varepsilon}{2}$ は $\underline{|y-b|<\frac{\varepsilon/2}{1+|a|}}$ ① ならば成立している。

$|x-a||y|<\frac{\varepsilon}{2}$ は，もしも $|y|\leq M$, $M>0$ とできていれば，$|x-a|<\frac{\varepsilon/2}{M}$ ならば成立している。

つづく

$|y-b| \leqq 1$ とできていれば $|y| = |y-b+b| \leqq |y-b| + |b| \leqq 1+|b|$.
②

そのとき, $|x-a| < \dfrac{\varepsilon/2}{1+|b|}$ ならば $|x-a||y| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる.
③

以上の ① $|y-b| \leqq \dfrac{\varepsilon/2}{1+|a|}$, ② $|y-b| \leqq 1$, ③ $|x-a| < \dfrac{\varepsilon/2}{1+|b|}$ が同時に成立する

ように, (x,y) と (a,b) の距離 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ を小さくすればよい.

そのためには, $|x-a|$ と $|y-b|$ が $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 以下になるので,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta = \min\left\{\frac{\varepsilon/2}{1+|a|},\ 1,\ \frac{\varepsilon/2}{1+|b|}\right\}$$

とすればよい. そのとき, ①, ②, ③ が成立するので ⓪ より $|xy-ab| < \varepsilon$ となる.

これで, $f_x(x,y) = xy$ の連続性の証明が得られた. □

$\boxed{\text{例}}$ (3) 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ がそれぞれ実数 α と β に収束するとき、
実数列 $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha\beta$ に収束することを示せ。

$\boxed{\text{証明の見付け方}}$ 任意に $\varepsilon > 0$ をとる。

n を十分に大きくすれば $|x_n y_n - \alpha\beta| < \varepsilon$ となることを示したい。

$$\left.\begin{aligned}|x_n y_n - \alpha\beta| &= |x_n y_n - \alpha y_n + \alpha y_n - \alpha\beta| \leqq |x_n y_n - \alpha y_n| + |\alpha y_n - \alpha\beta| \\ &= |x_n - \alpha||y_n| + |\alpha||y_n - \beta|.\end{aligned}\right\} ⓪$$

この計算を最初にしてしまうことがポイント。

ゆえに、n を十分大きくすれば $|x_n - \alpha||y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $|\alpha||y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ となることを示せればよい。

$|\alpha||y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ は $\underline{|y_n - \beta| < \frac{\varepsilon/2}{1+|\alpha|}}_{①}$ ならば成立する。

$|x_n - \alpha||y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ は、仮に $|y_n| \leqq M$, $M > 0$ となっているならば $|x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon/2}{M}$ のとき成立している。

$|y_n-\beta| \leqq 1$ ② とできていれば $|y_n| = |y_n-\beta+\beta| \leqq |y_n-\beta|+|\beta| \leqq 1+|\beta|$.

そのとき, $|x_n-\alpha| < \dfrac{\varepsilon/2}{1+|\beta|}$ ③ ならば $|x_n-\alpha||y| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成立している.

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は β に収束しているので, ある N_1 が存在して, $n \geqq N_1$ ならば $|y_n-\beta| \overset{①}{<} \dfrac{\varepsilon/2}{1+|\alpha|}$,

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は β に収束しているので, ある N_2 が存在して, $n \geqq N_2$ ならば $|y_n-\beta| \overset{②}{<} 1$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束しているので, ある N_3 が存在して, $n \geqq N_3$ ならば $|x_n-\alpha| \overset{③}{<} \dfrac{\varepsilon/2}{1+|\beta|}$.

ゆえに, $n \geqq \max\{N_1, N_2, N_3\}$ ならば ①, ②, ③ が成立しており, ⓪ より

$|x_n y_n - \alpha\beta| < \varepsilon$ となる.

これで $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha\beta$ に収束することの証明が得られた. $\square$

$\boxed{\text{Cesàro 和}}$ (チェザロ和)

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ の形であらわれる、

問題 実数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が σ に収束しているならば $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ も σ に収束していることを示せ。

証明の見付け方 実数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が σ に収束することは、$\{s_n-\sigma\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することと同値であり、$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k - \sigma = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s_k-\sigma)$ なので $\sigma=0$ の場合を示せば十分である。

実数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束すると仮定し、任意に $\varepsilon>0$ をとる。

n を十分に大きくすれば $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right| < \varepsilon$ となることを示せばよい。

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right| \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|s_k| = \underbrace{\frac{|s_1|+|s_2|+\cdots+|s_{N-1}|}{n}}_{②} + \underbrace{\frac{|s_N|+|s_{N+1}|+\cdots+|s_n|}{n}}_{①} \qquad (*)$$

② Nを固定して、
nを大きくすると
いくらでも小さくなる。

① Nを十分大きくすれば
$|s_N|, |s_{N+1}|, \ldots, |s_n|$ の各々は小さい。
和をnで割っても小さい。

nを十分大きくして、各々を $< \frac{\varepsilon}{2}$ とできればよい。

<u>①の処理</u>　$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は0に収束しているので、ある N が存在して、$k \geqq N$ ならば $|s_k| < \frac{\varepsilon}{2}$

となるので、$\underbrace{n \geqq N}_{\boxed{1}}$ ならば　$\dfrac{|s_N|+|s_{N+1}|+\cdots+|s_n|}{n} < \dfrac{\overbrace{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2}}^{n-N+1\text{個の和}}}{n} \leqq \dfrac{\varepsilon}{2}$,

<u>②の処理</u>　$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しているので有界である。ゆえにある $M>0$ で

任意の $k=1,2,\ldots$ について $|s_k| \leqq M$ となるものが存在する。

ゆえに、$\underbrace{n > \dfrac{(N-1)M}{\varepsilon/2}}_{\boxed{2}}$ ならば　$\dfrac{|s_1|+|s_2|+\cdots+|s_{N-1}|}{n} \leqq \dfrac{\overbrace{M+M+\cdots+M}^{N-1\text{個の和}}}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

ゆえに、$n > \max\left\{\underbrace{N}_{\boxed{1}}, \underbrace{\dfrac{(N-1)M}{\varepsilon/2}}_{\boxed{2}}\right\}$ ならば $(*)$ より、$\left|\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right| < \varepsilon$ となる。

これでほしい証明が得られた!　□

$\boxed{\text{証明の整書}}$ 実数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が σ に収束することは, $\{s_n-\sigma\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することと同値であり, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k-\sigma=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s_k-\sigma)$ なので $\sigma=0$ の場合を示せば十分である.

実数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束すると仮定し, 任意に $\varepsilon>0$ をとる.

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束していることより, ある N_1 が存在して, $k\geqq N_1$ ならば $|s_k|<\frac{\varepsilon}{2}$. ①

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列なので有界であり, ある $M>0$ が存在して, $|s_k|\leqq M$ ② $(k=1,2,\cdots)$,

$N_2>\dfrac{(N_1-1)M}{\varepsilon/2}$ ③ となる番号 N_2 をとり, $N=\max\{N_1,N_2\}$ とおく.

このとき, $n\geqq N$ ならば

② 分子 $\leqq (N_1-1)M$ ① 分子 $<(n-N_1+1)\frac{\varepsilon}{2}$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k\right|\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|s_k|=\frac{|s_1|+|s_2|+\cdots+|s_{N_1-1}|}{n}+\frac{|s_{N_1}|+|s_{N_1+1}|+\cdots+|s_n|}{n}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

これで $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することが示された.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{問題}}$ 収束しない実数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束するものの例を挙げよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ $s_n = (-1)^{n-1}$ のとき, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないが, $t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ は

$$t_1 = \frac{1}{1},\ t_2 = \frac{1-1}{2} = 0,\ t_3 = \frac{1-1+1}{3} = \frac{1}{3},\ t_4 = \frac{1-1+1-1}{4} = 0,\ \cdots$$

$$t_n = \begin{cases} 1/n & (n\text{は奇数}) \\ 0 & (n\text{は偶数}) \end{cases}$$

となるので $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right\}$ は 0 に収束する. □

$\boxed{\text{問題}}$ 有界でない実数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束するものの例を挙げよ.

$\boxed{\text{解答例}}$ $s_n = (-1)^{n-1}(\sqrt{n-1} + \sqrt{n})$ のとき, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非有界であり,

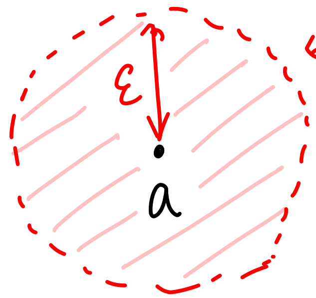
$s_1 = 1,\ s_1 + s_2 = 1 - (1+\sqrt{2}) = -\sqrt{2},\ s_1+s_2+s_3 = -\sqrt{2} + (\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \sqrt{3},\ \cdots$ なので

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = (-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$ □

来週はε近傍,開集合について

$\boxed{\varepsilon\text{近傍系}}$

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ は距離空間であると仮定する.



aの
ε近傍

$a \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して,

$$U_\varepsilon(a) = U^X_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid d_X(x, a) < \varepsilon\}$$

を a の X における <u>ε近傍</u> (<u>ε-neighborhood</u>) と呼ぶ.

$\{U_\varepsilon(a) \mid \varepsilon > 0\}$ を点 a の <u>ε近傍系</u> (<u>system of ε-neigborhoods of a</u>) と呼ぶ.

距離空間における点列の収束や写像の連続性は,
距離函数を直接的に使わずに,
ε近傍系の言葉だけを使って言い直すことができる.

$\boxed{\text{注意}}$ これから, このパターンをくりかえす.
距離空間の概念もすでにかなり抽象化されているが,
応用先を増やすためにさらに進んだ抽象化を行う. □

$\boxed{\text{点列の収束}}$ X内の点列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$と点$\alpha \in X$について,

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はαに収束する

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の$\varepsilon > 0$に対して,あるNが存在して,$n \geqq N$ならば$d_X(a_n, \alpha) < \varepsilon$.

$\Longleftrightarrow$ 点αの任意のε近傍$U_\varepsilon(\alpha)$に対して,あるNが存在して,$\{a_n\}_{n=N}^{\infty} \subset U_\varepsilon(\alpha)$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{点}\alpha\text{の任意の}\varepsilon\text{近傍}U_\varepsilon(\alpha)\text{に対して,} \\ U_\varepsilon(\alpha)\text{に含まれない}a_n\text{は有限個しかない.} \end{cases}$

直観的にも
わかりやすくなっている!

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はαに収束しない

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ある$\varepsilon > 0$が存在して,任意のNに対して,ある$n \geqq N$で$d_X(a_n, \alpha) \geqq \varepsilon$を
みたすものが存在する.

$\Longleftrightarrow$ 点αのあるε近傍$U_\varepsilon(\alpha)$が存在して,任意のNに対して$\{a_n\}_{n=N}^{\infty} \not\subset U_\varepsilon(\alpha)$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{点}\alpha\text{のある}\varepsilon\text{近傍}U_\varepsilon(\alpha)\text{が存在して,} \\ U_\varepsilon(\alpha)\text{に含まれない}a_n\text{は無限個ある.} \end{cases}$

$\boxed{\text{写像の連続性}}$ $f: X \to Y$ について,

(1) f は連続である

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} \text{任意の } a \in X \text{ と任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して,} \\ \text{ある } \delta > 0 \text{ が存在して, } x \in X \text{ かつ } d_X(x, a) < \delta \text{ ならば } d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon. \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{任意の } a \in X \text{ と } f(a) \text{ の任意の } \varepsilon \text{ 近傍 } U^Y_\varepsilon(f(a)) \text{ に対して,} \\ a \text{ のある } \underset{(\delta > 0)}{\delta} \text{ 近傍 } U^X_\delta(a) \text{ が存在して, } f(U^X_\delta(a)) \subset U^Y_\varepsilon(f(a)). \end{cases}$

(2) f は連続でない

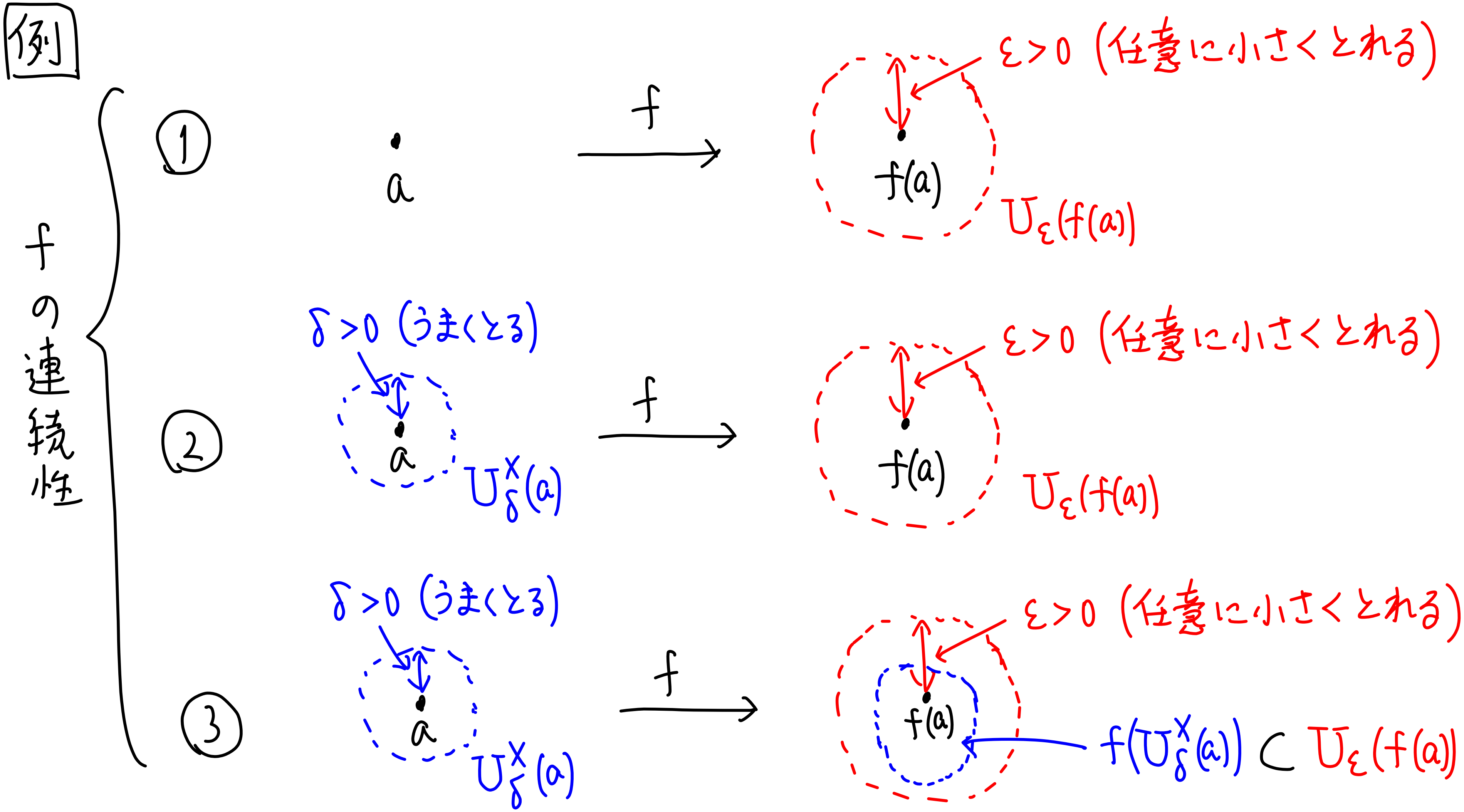
$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} \text{ある } a \in X \text{ と ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して,} \\ \text{任意の } \delta > 0 \text{ に対して, ある } x \in X \text{ で } d_X(x, a) < \delta \text{ かつ } d_Y(f(x), f(a)) \geqq \varepsilon \\ \text{となるものが存在する.} \end{cases}$

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} \text{ある } a \in X \text{ と } f(a) \text{ のある } \varepsilon \text{ 近傍 } U^Y_\varepsilon(f(a)) \text{ が存在して,} \\ a \text{ の任意の } \underset{(\delta > 0)}{\delta} \text{ 近傍 } U^X_\delta(a) \text{ について, } f(U^X_\delta(a)) \not\subset U^Y_\varepsilon(f(a)). \end{cases}$

$\boxed{\text{問題}}$ 以上で述べたことをさらに整理したり、詳しくしたりして、ノートにまとめよ。そのときに、すべての説明に図を追加せよ。□

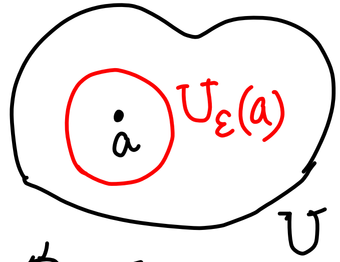
図を描くことは非常に大事です。

$\boxed{\text{例}}$



開集合と位相空間

(X, d_X), (Y, d_Y) は距離空間であるとする。



定義 X の部分集合 U が X の開集合 (open subset) であるとは、任意の $a \in U$ に対して、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、$U_\varepsilon(a) \subset U$ となることだと定める。

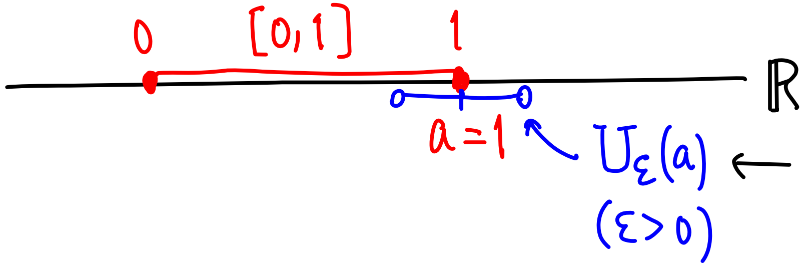
X の開集合全体の集合 $\mathcal{U}_X = \{U \mid U \text{ は } X \text{ の開集合}\}$ を X の開集合系と呼んだり、X の位相 (topology) と呼んだりする。 □

例 X と ϕ は X の開集合になる。

たとえば、$X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqq x \leqq 1\} = [0, 1]$ を差の絶対値を距離とすることによって距離空間とみなすとき、$X = [0, 1]$ は $X = [0, 1]$ 自身の開集合になる。 □

閉区間だが開集合になる。

例 $X = \mathbb{R}$ のとき、$[0, 1]$ は X の開集合ではない(下図)。



← 常に $[0, 1]$ をはみ出す。 □

注意 "入れ物" が何であるかによって開集合であるか否かは変化する。 □

$\boxed{例}$ 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $U_\varepsilon(a)$ は X の開集合である.

$\boxed{証明}$ $b \in U_\varepsilon(a)$ を任意にとる.

このとき, $d_X(b,a) < \varepsilon$ なので $\delta = \varepsilon - d_X(b,a)$ とおくと, $\delta > 0$ となり, $x \in U_\delta(b)$ ならば

$$\underbrace{d_X(x,a) \leqq d_X(x,b)}_{三角不等式} + \underbrace{d_X(b,a) < \delta}_{x \in U_\delta(b).} + d_X(b,a) = \varepsilon$$ なので $x \in U_\varepsilon(a)$.

これで $U_\delta(b) \subset U_\varepsilon(a)$ が示され, $U_\varepsilon(a)$ が X の開集合であることがわかった. $\square$

$\boxed{例}$ $\mathbb{R}^2$ を Euclid 距離で距離空間とみなすとき,

$$U = U_1((0,0)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の開集合である. $\square$

open disk は $\mathbb{R}^2$ の開集合

$\boxed{\text{定理}}$ 距離空間 X とその開集合系 $\mathcal{U}_X$ について，

(1) $\phi \in \mathcal{U}_X$ かつ $X \in \mathcal{U}_X$．

(2) $U_\lambda \in \mathcal{U}_X$ $(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}_X$．

(3) $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}_X$ ならば $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{U}_X$． (証明は後述) $\square$

$\boxed{\text{定義}}$ 集合 X にその部分集合の集合 $\mathcal{U}_X$ で上の定理の条件 (1), (2), (3) をみたすものが与えられているとき，X を<u>位相空間</u>と呼び，$\mathcal{U}_X$ をその<u>開集合系</u>と呼び，$\mathcal{U}_X$ の元を X の<u>開集合</u>と呼び，上の条件 (1), (2), (3) を<u>開集合系の公理</u>と呼ぶ． $\square$

トポロジーと呼ぶこともある

位相空間 ＝ <u>topological space</u>

位相空間 X の開集合系 $\mathcal{U}_X$ は <u>X の点のつながり方</u>を記述していると考えられる．

(トポロジー)

$\boxed{\text{注意}}$ 距離空間は常に自然に位相空間とみなせるが逆は成立しない．
たとえば $X = \{1, 2\}$，$\mathcal{U}_X = \{\phi, X\}$ で定まる位相空間は距離空間からは決して得られない． $\square$

$\boxed{\text{前ページの定理の証明}}$ (1) $a \in \phi$ となることはないので ϕ は X の開集合である.

任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $U_\varepsilon(a) \subset X$ なので X は X の開集合である.

(2) すべての $\lambda \in \Lambda$ について U_λ は X の開集合であると仮定し, $a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を任意にとる.

ある $\mu \in \Lambda$ が存在して, $a \in U_\mu$ となる.

U_μ は X の開集合なので, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $U_\varepsilon(a) \subset U_\mu \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となる.

ゆえに $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ も X の開集合である.

(3) 有限個の $U_1, U_2, \cdots, U_n$ は X の開集合であるとし, $a \in U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ を任意にとる.

各 U_i は X の開集合なので, ある $\varepsilon_i > 0$ が存在して, $U_{\varepsilon_i}(a) \subset U_i$ となる

$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\} > 0$ とおくと, $U_\varepsilon(a) \subset U_{\varepsilon_i}(a)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ となるので,

$U_\varepsilon(a) \subset U_{\varepsilon_1}(a) \cap U_{\varepsilon_2}(a) \cap \cdots \cap U_{\varepsilon_n}(a) \subset U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$.

ゆえに, $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ も X の開集合である. $\square$

$\boxed{\text{例}}$ $k = 1, 2, \cdots$ に対して, $X = \mathbb{R}$ の開集合 U_k を $U_k = U_{1/k}(0) = \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ と定めると,

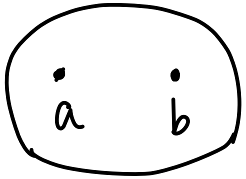
$U_1 \cap \cdots \cap U_n = U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ は $X = \mathbb{R}$ の開集合だが,

$\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \{0\}$ は $X = \mathbb{R}$ の開集合ではない. $\square$

$\boxed{\text{おまけ}}$ 2点集合 $X=\{a,b\}$ に入るすべての位相のリスト：

= topology
= 開集合系

$$\mathcal{U}_1=\{\phi, X\},\quad \mathcal{U}_2=\{\phi, X, \{a\}\},\quad \mathcal{U}_3=\{\phi, X, \{b\}\},\quad \mathcal{U}_4=\{\phi, X, \{a\}, \{b\}\},$$

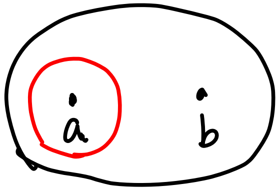


aとbを分離する開集合がない

aとbどちらから見ても相手は自分にくっついているように見える。

密着位相
concrete topology

a‥b くっついている

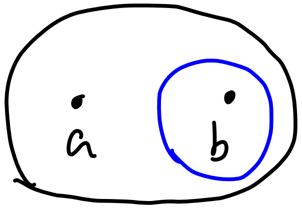


aから見ると自分だけを含む開集合が存在するので

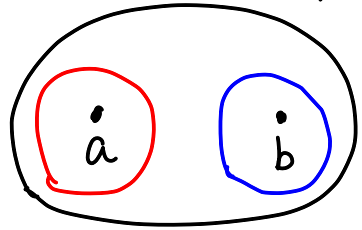
bは自分にくっついていないように見える。

しかし、bから見ると、自分を含む開集合は常にaも含むので、aは自分にくっついているように見える。

"片思い"位相



左と同様



aもbも相手は自分にくっついていないように見えている。

離散位相
discrete topology

開集合系による連続写像の特徴付け

X, Y は距離空間であるとする.

定理 写像 $f: X \to Y$ について, 以下の2つの条件は互いに同値である.

(1) f は連続である.

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して,
ある $\delta > 0$ が存在して, $x \in X$ かつ $d_X(x, a) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

$\iff$ 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して,
ある $\delta > 0$ が存在して, $f(U_\delta^X(a)) \subset U_\varepsilon^Y(f(a))$.

(2) Y の任意の開集合 U に対して, $f^{-1}(U)$ は X の開集合になる.　(証明は後述) $\square$

この条件は非常に抽象的だが, もとの ε-δ による定義よりシンプルである.

定義 位相空間 X, Y のあいだの写像 $f: X \to Y$ が連続であることを
上の定理の条件 (2) が成立していることだと定める. $\square$

前ページの定理の証明

$f(a)\in U$ $\Leftrightarrow$ 　$\{x\in X \mid f(x)\in U\}$ $=$

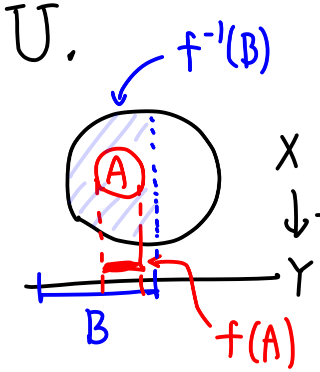
(1) ⇒ (2)　$f: X\to Y$ は連続であるとし，Yの開集合Uと $a\in f^{-1}(U)$ を任意にとる．

$f(a)\in U$ かつ U はYの開集合なので，ある$\varepsilon>0$が存在して，$U_\varepsilon^Y(f(a))\subset U$．

fは連続なので，ある$\delta>0$が存在して，$f(U_\delta^X(a))\subset U_\varepsilon^Y(f(a))\subset U$．

ゆえに，$U_\delta^X(a)\subset f^{-1}(U)$ となるので，$f^{-1}(U)$ はXの開集合になる．

(注 一般に $f: X\to Y$, $A\subset X$, $B\subset Y$, $f(A)\subset B$ ならば $A\subset f^{-1}(B)$．)



(2) ⇒ (1)　条件(2)を仮定し，$a\in X$ と $\varepsilon>0$ を任意にとる．

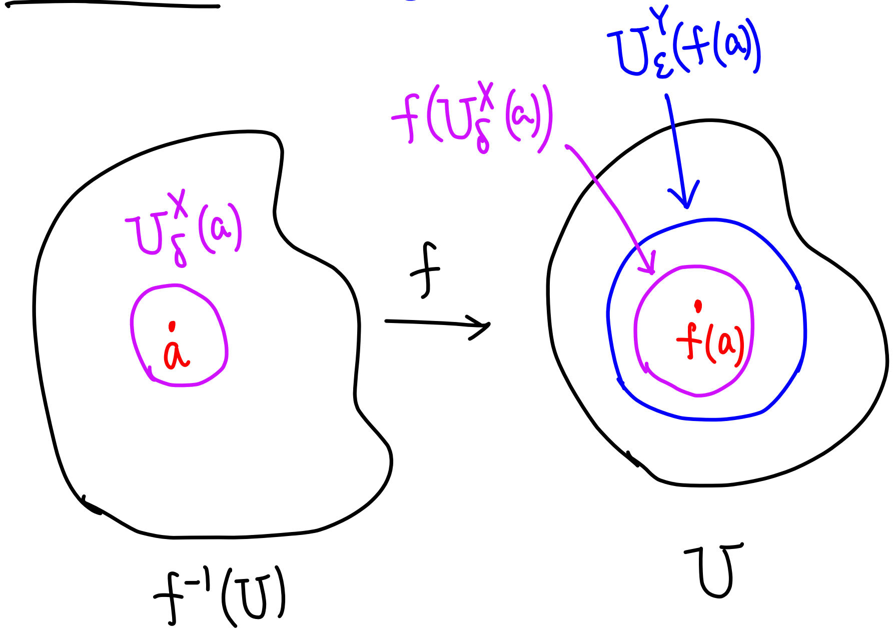
$U_\varepsilon^Y(f(a))$ はYの開集合なので，条件(2)より $f^{-1}(U_\varepsilon^Y(f(a)))$ はXの開集合になる．

$f(a)\in U_\varepsilon^Y(f(a))$より，$a\in f^{-1}(U_\varepsilon^Y(f(a)))$ となるので，$f^{-1}(U_\varepsilon^Y(f(a)))$が$X$の開集合であることより，ある$\delta>0$が存在して，$U_\delta^X(a)\subset f^{-1}(U_\varepsilon^Y(f(a)))$ となる．

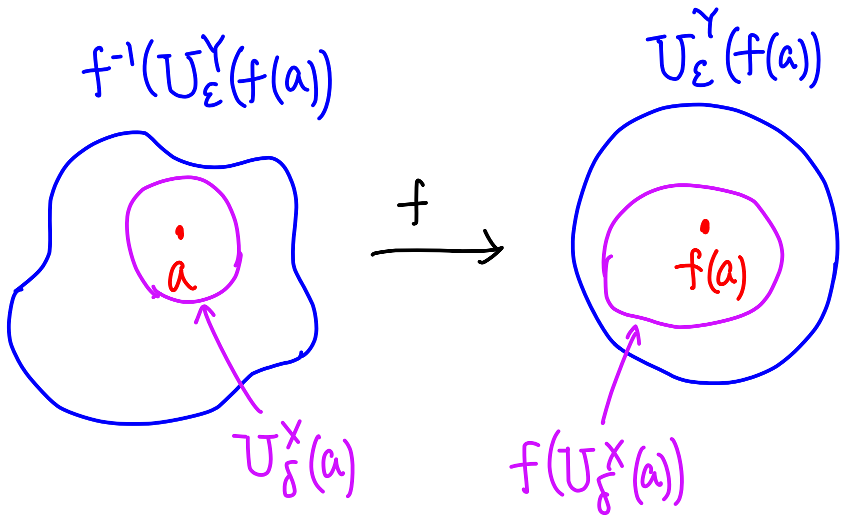
ゆえに，$f(U_\delta^X(a))\subset U_\varepsilon^Y(f(a))$ となるので，fが連続であることがわかる．　$\square$

証明の図による説明

(1) ⇒ (2)　① ② ③ ④



(2) ⇒ (1)　① ② ③

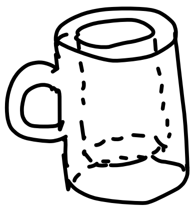
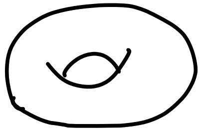


応用例　位相空間 X, Y, Z と連続写像たち $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ に対して、それらの合成 $g \circ f: X \to Z$ も連続写像になる.

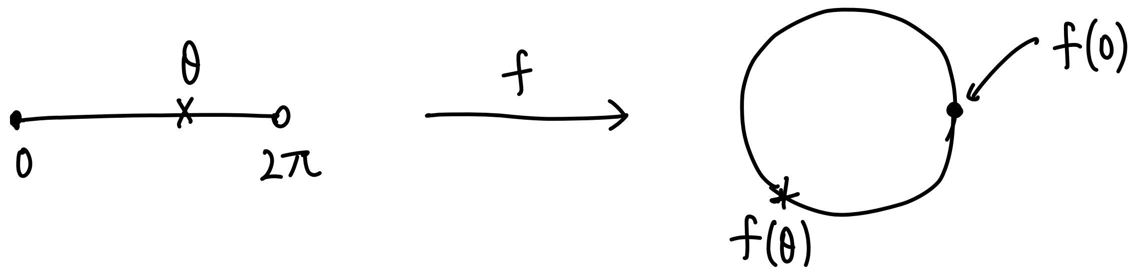
証明　U を Z の開集合とすると、g の連続性より $g^{-1}(U)$ は Y の開集合になり、f の連続性より、$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ は X の開集合になるので合成 $g \circ f: X \to Z$ も連続になる.　□

自分で示せ

$\boxed{\text{定義}}$ (同相, homeomorphic) 位相空間(たとえば距離空間) X と Y のあいだに連続写像たち $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ で互いに相手に逆写像になるものが存在するとき, X と Y は<u>同相</u> (<u>homeomorphic</u>) であるといい, f と g を<u>同相写像</u> (<u>homeomorphism</u>) と呼ぶ. □

$\boxed{\text{例}}$ コップ  とドーナツ  は同相である. □

$\boxed{\text{例}}$ $X = [0, 2\pi)$, $Y = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ のとき, $f: X \to Y$ を $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ と定めると, f は全単射連続写像になるが, 逆写像 $f^{-1}: Y \to X$ は連続にならない. ゆえに, f は同相写像ではない.



□

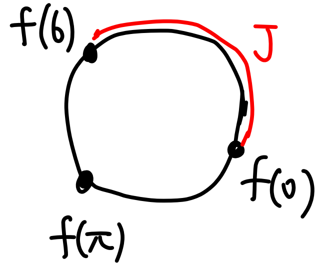
$\boxed{\text{問題}}$ $X=[0,2\pi)$ と $Y=S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ が同相でないことを示せ。

$\boxed{\text{解答例}}$ X と Y は同相であると仮定する。(矛盾をみちびけばよい。)

互いに相手の逆写像になる全単射連続写像たち $f:X\to Y$, $g:Y\to X$ が存在する。

f と g の $X\setminus\{\pi\}$ と $Y\setminus\{f(\pi)\}$ への制限は、$X\setminus\{\pi\}$ と $Y\setminus\{f(\pi)\}$ のあいだの同相写像になっている(自分で示せ)。

$f(0)=(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $f(\pi)=(\cos\beta, \sin\beta)$, $f(6)=(\cos\gamma, \sin\gamma)$, $\beta<\alpha<\gamma<\beta+2\pi$ をみたす $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ をとれる。



このとき、$J=\{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \alpha\leqq\theta\leqq\gamma\}$ は $f(\pi)=(\cos\beta,\sin\beta)$ を含まない。

$h:[\alpha,\gamma]\to J$, $\theta\mapsto h(\theta)=(\cos\theta, \sin\theta)$ は同相写像である。

これと $g:Y\to X$ と X の $\mathbb{R}$ への包含写像の合成 $\varphi:[\alpha,\gamma]\to\mathbb{R}$, $\theta\mapsto\varphi(\theta)=g(h(\theta))$ は連続でかつ、$\varphi(\alpha)=g(h(\alpha))=g(f(0))=0$, $\varphi(\gamma)=g(h(\gamma))=g(f(6))=6$ なので中間値の定理より、ある $\theta\in[\alpha,\gamma]$ が存在して、$\varphi(\theta)=g(h(\theta))=\pi=g(f(\pi))$。

しかし、$J=h([\alpha,\gamma])$ は $f(\pi)$ を含まないので、g が全単射であることに矛盾する。 $\square$

$\boxed{\text{相対位相}}$ X は開集合系 $\mathcal{U}_X$ が与えられた位相空間であるとする。このとき、

X の部分集合 A に対して、

$$\mathcal{U}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{U}_X\} = \{A \text{ と } X \text{ の開集合の共通部分}\}$$

とおくと、A は開集合系 $\mathcal{U}_A$ が与えられた位相空間とみなされる

このとき、$\mathcal{U}_A$ を部分集合 A の相対位相 (relative topology) と呼ぶ。

(位相空間の部分集合は通常相対位相によって位相空間とみなされる。)

$\boxed{\mathcal{U}_A \text{ が開集合の公理をみたすことの証明}}$ (1) $\phi, X \in \mathcal{U}_X$, $A \cap \phi = \phi$, $A \cap X = A$ なので $\phi, A \in \mathcal{U}_A$. (2) $V_\lambda \in \mathcal{U}_A$ ($\lambda \in \Lambda$) のとき、$V_\lambda = A \cap U_\lambda$, $U_\lambda \in \mathcal{U}_X$ と書けるので、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap U_\lambda) = A \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}_X$ なので $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \in \mathcal{U}_A$.

(3) $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{U}_A$ のとき、$V_i = A \cap U_i$, $U_i \in \mathcal{U}_X$ と書けて、$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{U}_X$ なので

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cap U_i) = A \cap \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{U}_A.$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{問題}}$ Xは距離空間とし，$A \subset X$であるとする．このとき，AをXの部分距離空間とみなしたときの開集合系$\mathcal{U}_A$とXを位相空間とみなしたときの相対位相$\mathcal{U}'_A$が等しいことを示せ．

$\boxed{\text{証明}}$ 記号の準備 $a \in A$，$\varepsilon > 0$に対して，$U^A_\varepsilon(a) = \{x \in A \mid d(x,a) < \varepsilon\} = A \cap U^X_\varepsilon(a)$．

このとき，
$$\begin{cases} \mathcal{U}_X = \{U \subset X \mid \text{任意の}x \in U\text{に対して，ある}\varepsilon>0\text{が存在して，}U^X_\varepsilon(x) \subset U\}, \\ \mathcal{U}_A = \{V \subset A \mid \text{任意の}x \in V\text{に対して，ある}\varepsilon>0\text{が存在して，}U^A_\varepsilon(x) \subset V\}, \\ \mathcal{U}'_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{U}_X\}. \end{cases}$$

$V \in \mathcal{U}_A$とする．任意の$x \in V$に対して，ある$\varepsilon_x > 0$が存在して，$U^A_\varepsilon(x) \subset V$となる．
ゆえに，$V = \bigcup_{x \in A} U^A_\varepsilon(x) = \bigcup_{x \in A}(A \cap U^X_\varepsilon(x)) = A \cap \bigcup_{x \in A} U^X_\varepsilon(x)$，$\bigcup_{x \in A} U^X_\varepsilon(x) \in \mathcal{U}_X$なので，
$V \in \mathcal{U}'_A$．したがって，$\mathcal{U}_A \subset \mathcal{U}'_A$．

$V \in \mathcal{U}'_A$とする．$V = A \cap U$，$U \in \mathcal{U}_X$．任意の$x \in V$に対して，ある$\varepsilon > 0$が存在して，$U^X_\varepsilon(x) \subset U$となるので，$U^A_\varepsilon(x) = A \cap U^X_\varepsilon(x) \subset A \cap U = V$となり，
$V \in \mathcal{U}_A$となる．したがって，$\mathcal{U}'_A \subset \mathcal{U}_A$．

これで$\mathcal{U}_A = \mathcal{U}'_A$であることがわかった．

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{閉集合系}}$ Xは位相空間であるとする．$F\subset X$とする．

$\boxed{\text{定義}}$ FがXの閉集合(closed subset)であるとは，$F^c = X\setminus F = \{x\in X \mid x\notin F\}$が$X$の開集合になることであると定める．すなわち，$X$の開集合の補集合を$X$の閉集合と呼ぶ．

$\mathcal{F}_X = \{F\subset X \mid F$は$X$の閉集合$\}$を$X$の閉集合系と呼ぶ．　□

$\boxed{\text{定理}}$ (1) ϕ, XはXの閉集合である．

(2) Xの閉集合達(無限個でもよい)の共通部分も閉集合である．

(3) Xの有限個の閉集合の和集合も閉集合である．　□

$\boxed{\text{証明}}$ (1) XとϕはXの開集合なので，$X^c=\phi$と$\phi^c = X$はXの閉集合になる．

(2) F_λ $(\lambda\in\Lambda)$たちがXの閉集合ならば，$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda^c$，$F_\lambda^c$は$X$の開集合なので$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right)^c$は$X$の開集合になるので，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$は$X$の閉集合になる．

(3) F_i $(i=1,\cdots,n)$たちがXの閉集合ならば$\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n F_i^c$，$F_i^c$は$X$の開集合なので，$\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)^c$は$X$の開集合になるので，$\bigcup_{i=1}^n F_i$は$X$の閉集合になる．　□

例 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の開集合かつ閉集合である。 □

例 $[0,1)=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leqq x<1\}$ は $\mathbb{R}$ は開集合でも閉集合でもない。 □

例 $[0,1)$ は $[0,1)$ 自身の開集合かつ閉集合である。 □

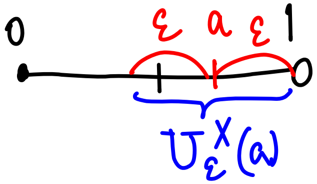
例 $[0,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leqq x\}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合だが、開集合ではない。 □

例 $X=[0,1)\cup(1,2]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leqq x\leqq 2,\ x\neq 1\}$ とおく。このとき、
$[0,1)$, $(1,2]$ はどちらも X の開集合かつ閉集合になる。

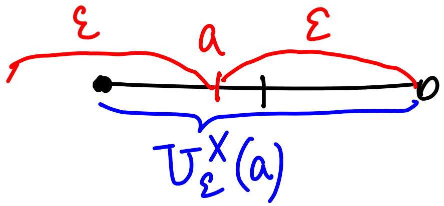
証明 $[0,1)$ と $(1,2]$ は互いに相手の補集合なので、$[0,1)$ と $(1,2]$ が X の開集合であることを示せば十分である。対称性より、$[0,1)$ が X の開集合であることを示せば、同様にして、$(1,2]$ が X の開集合であることもわかる。

$a\in[0,1)$ を任意にとる。$\varepsilon=|1-a|=1-a>0$ とおくと、$U_\varepsilon^X(a)\subset[0,1)$ となる。

(i) $a\geqq\frac{1}{2}$ のとき、



(ii) $a<\frac{1}{2}$ のとき、



ゆえに、$[0,1)$ は X の開集合である。 □

開集合による連続写像の特徴付け

位相空間のあいだの写像 $f: X \to Y$ について以下の2つの条件は同値である.

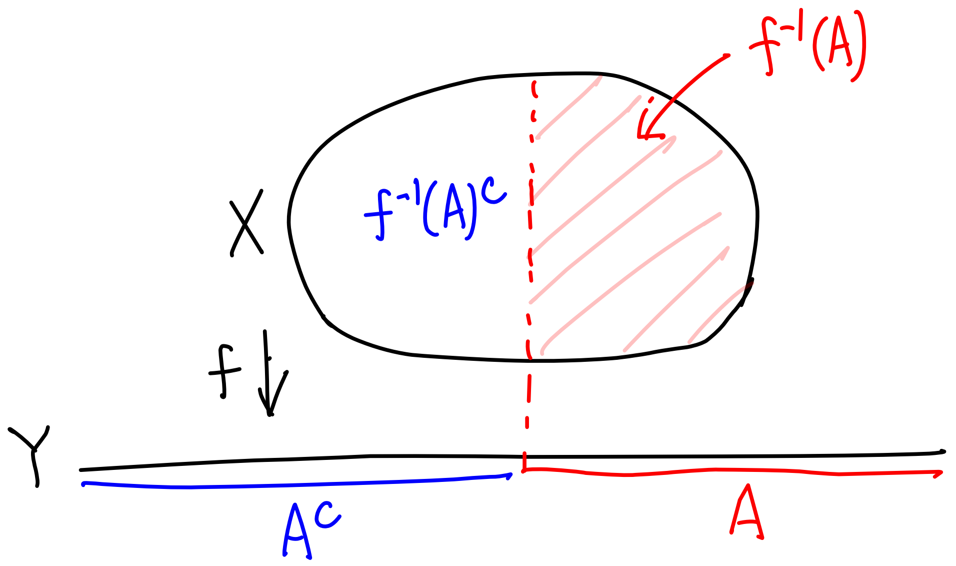
(1) f は連続である. (Y の任意の開集合 U に対して, $f^{-1}(U)$ は X の開集合になる.)

(2) Y の閉集合 F に対して, $f^{-1}(F)$ は X の閉集合になる.

証明の方針 閉集合は開集合の補集合であった. そして,

$$A \subset Y \Rightarrow f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c \quad (f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A))$$

なので, ほぼ自明である. $\square$



← この図ではたしかに

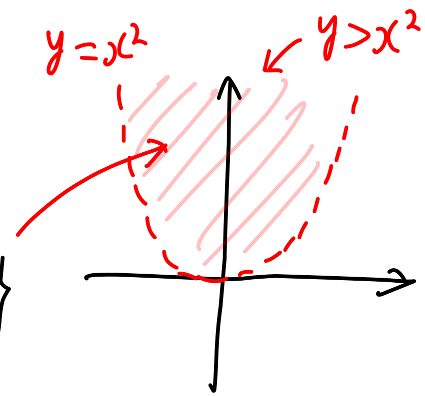
$f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$

となっている.

例（開集合・閉集合の作り方）

位相空間の間の連続写像 $f : X \to Y$ と Y の開集合 U と Y の閉集合 F に対して、$f^{-1}(U)$ は X の開集合になり、$f^{-1}(F)$ は X の閉集合になる。

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\pi x)$, $F = \{0\}$ のとき、$f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(\pi x) = 0\} = \mathbb{Z}$ なので $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合になる。



(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y - x^2$, $U = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}$ のとき、

$$f^{-1}(U) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の開集合になる。

$F = U^c = \{z \in \mathbb{R} \mid x \leqq 0\}$ とおくと、

$$f^{-1}(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \leqq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqq x^2\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の閉集合になる。 $\square$

問題 もっとたくさん例を作れ。 $\square$

$\boxed{\text{定理}}$ $\mathbb{R}$の空でない有界閉集合は最大値と最小値を持つ。　最小値も同様

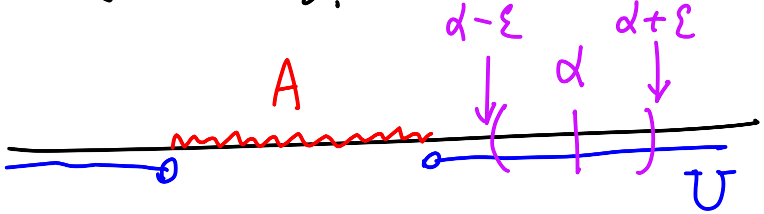
$\boxed{\text{証明}}$ Aは$\mathbb{R}$の空でない有界閉集合であるとする。最大値の存在のみを示す。

実数の連続性(の1つの表現)より、Aは有界なので上限(最小上界) $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$ が存在する。

閉集合でなくても成立

一般にAに含まれる上界はAの最大値になるので $\alpha \in A$ を示せば十分である。

Aは$\mathbb{R}$の閉集合なので、$U = A^c = \mathbb{R} \setminus A$ は$\mathbb{R}$の開集合になる。



$\alpha \notin A$ と仮定して矛盾を出せば十分である。

$\alpha \notin A$ は $\alpha \in U = A^c$ と同値である。

そのとき、Uは$\mathbb{R}$の開集合なので、ある$\varepsilon > 0$が存在して、$U_\varepsilon(\alpha) \subset U$ となる。

$U_\varepsilon(\alpha) = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ と A が共通部分を持たないので $\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$ もAの上界になる。

これはAの最小上界αより小さなAの上界$\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$が存在することを意味する。

これは矛盾である。

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

閉包と開核

X は位相空間(もしくは距離空間)であるとし, $A \subset X$ と仮定する.

定義 (閉包) A を含む閉集合で最小のもの(常に存在する)を A の閉包 (closure) と呼び, $\overline{A}$ と表わす:

$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{ は } X \text{ の閉集合}, A \subset F} F = \left(\begin{array}{l} A \text{ を含む } X \text{ の閉集合全体の} \\ \text{共通部分} \end{array}\right). \quad \square$$

定義 (開核) A に含まれる開集合で最大のもの(常に存在)を A の開核 ($\frac{\text{open}}{\text{kernel}}$) と呼び, A° と表わす:

$$A^\circ = \bigcup_{U \text{ は } X \text{ の開集合}, A \supset U} U = \left(\begin{array}{l} A \text{ に含まれる } X \text{ の開集合全体の} \\ \text{和集合} \end{array}\right). \quad \square$$

命題 (定義から自明)

(1) A は X の閉集合 $\iff$ $\overline{A} = A$.

(2) A は X の開集合 $\iff$ $A^\circ = A$. $\square$

記号 A の X における補集合を A^c と書く. complement

$A^c = X \setminus A$ $\square$

命題 Aの閉包はAの補集合の開核の補集合に等しい：$\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$.

証明 $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$ を証明すればよい.

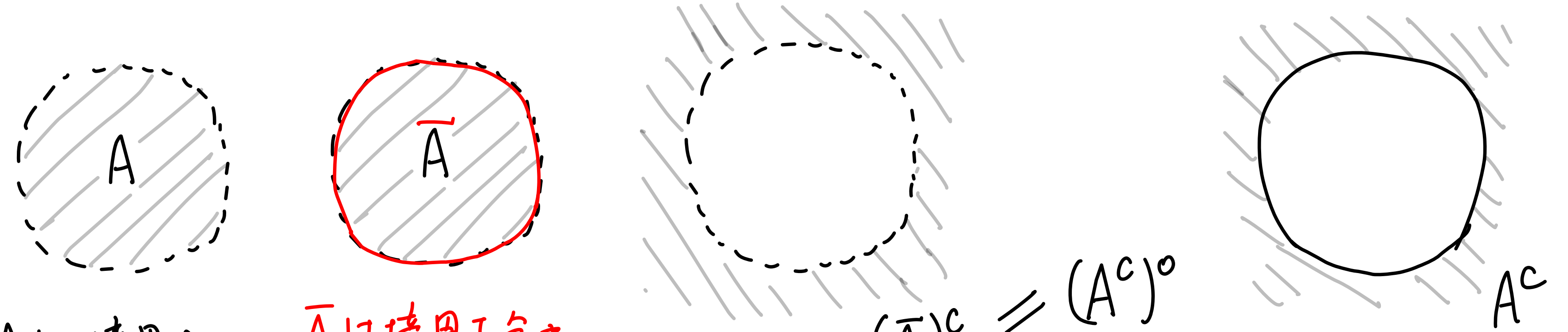
$$(\overline{A})^c = \Bigg(\bigcap_{F\text{はXの閉集合},\ A\subset F} F\Bigg)^c = \bigcup_{\underbrace{F\text{はXの閉集合}}_{\Leftrightarrow F^c\text{はXの開集合}},\ \underbrace{A\subset F}_{\Leftrightarrow A^c\supset F^c}} F^c$$

このF^cはA^cに含まれる開集合全体を動く.

$$= \bigcup_{U\text{はXの開集合},\ A^c\supset U} U = (A^c)^\circ.$$

□

例 $X=\mathbb{R}^2$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ のとき,



Aは境界を含まない

$\overline{A}$は境界を含む

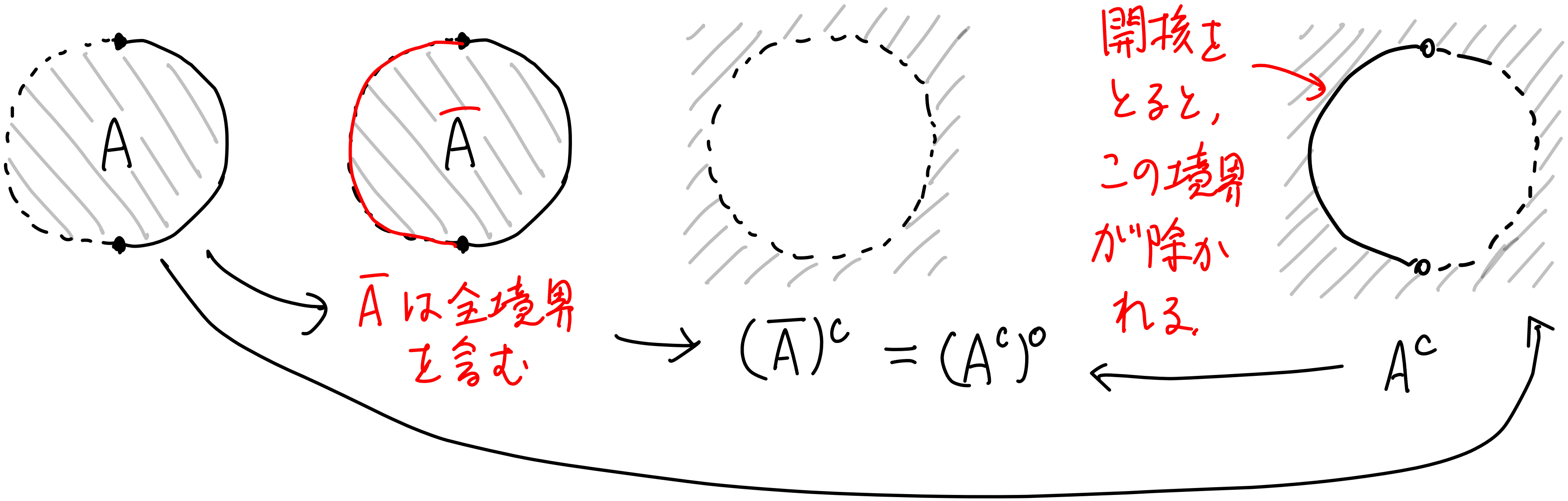
$(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$

$(\overline{A})^c$は境界を含まない

A^cは境界を含む

□

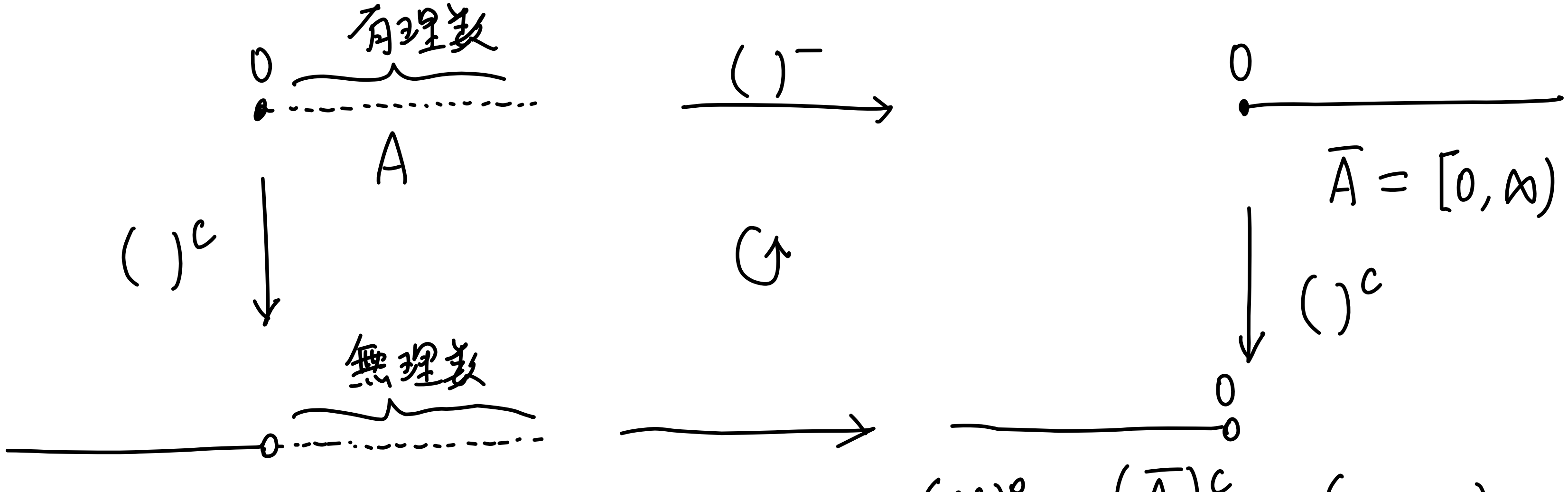
$\boxed{\text{例}}$ $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0,\ x^2+y^2=1\}$.



$$(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$$

□

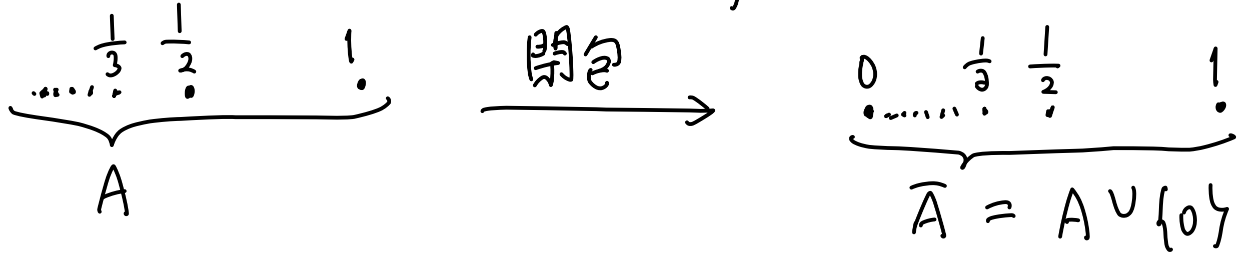
$\boxed{\text{例}}$ $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$.



$$(A^c)^\circ = (\overline{A})^c = (-\infty, 0)$$

□

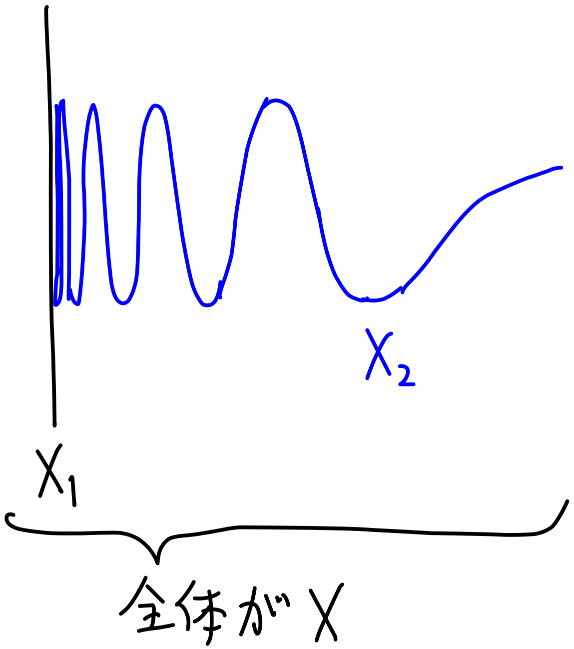
例 $X=\mathbb{R}$, $A=\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n=1,2,3,\dots\right\}$ のとき，



□

例 $X=X_1\cup X_2$, $X_1=(\mathbb{R}^2 \text{の} y \text{軸})=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$, $X_2=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\,\middle|\,x>0\right\}$.

X_1とX_2の閉包は何になっているだろうか？



Xは連結だが弧状連結ではない → 位相数学B

(1) X_1は$\mathbb{R}^2$の閉集合になっている．

Xの閉集合全体は$\mathbb{R}^2$の閉集合とXの共通部分全体に等しいのでX_1はXの閉集合でもある．

ゆえに，X_2はXの開集合になっている．

(2) X_2の$\mathbb{R}^2$における閉包は

$$X_1\cup\{(x,y)\in X_1 \mid -1\leq y\leq 1\}$$

になっており，これはX内におけるX_2の閉包にもなっている．X_2はXの閉集合ではない．

□

$\boxed{\text{閉包の直接的特徴付け}}$ 距離空間 X と $A\subset X$ と $x\in X$ について以下は互いに同値:

(1) $x\in\overline{A}$.

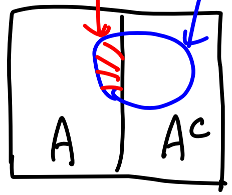
(2) x を含む X の任意の開集合 U について $U\cap A\neq\phi$.

一般の位相空間 X で互いに同値

(3) 任意 $\varepsilon>0$ について, $U_\varepsilon(x)\cap A\neq\phi$. ⟵ (2)の U を x の ε 近傍に制限した場合

(4) A に含まれる点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ で x に収束するものが存在する.

$A\cap U=\phi$ U



$\boxed{\text{証明}}$ $\underline{(1)\Leftrightarrow(2)}$

$(\overline{A})^c=(A^c)^\circ$ ← すでに示していた

(1) $x\in\overline{A}$ $\Leftrightarrow$ $x\notin(\overline{A})^c$ $\Leftrightarrow$ $x\notin(A^c)^\circ$

A^c の開核の定義より

$\Leftrightarrow$ x を含む開集合 U で $U\subset A^c$ となるものが存在しない.

$\Leftrightarrow$ x を含む任意の開集合 U について, $U\not\subset A^c$. $\Leftrightarrow U\cap A\neq\phi$

$\Leftrightarrow$ (2) x を含む任意の開集合 U について, $U\cap A\neq\phi$.

$\underline{(2)\Rightarrow(3)}$ x の ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$ $(\varepsilon>0)$ は x を含む X の開集合なので

(2) $\Rightarrow$ (3) となることは自明である.

つづく

<u>(3)⇒(2)</u>　(3)を仮定し, U は x を含む X の開集合であるとする.

U は x を含む X の開集合なので, ある $\varepsilon>0$ が存在して $U_\varepsilon(x)\subset U$ となる.
(3)を仮定していたので $U_\varepsilon(x)\cap A\neq\phi$. $U_\varepsilon(x)\subset U$ なので $U\cap A\neq\phi$.
これで(2)を示せた.

1/n は 2^{-n} でもよい.

<u>(3)⇒(4)</u>　(3)を仮定する. $n=1,2,3,\ldots$ に対して, $U_{1/n}(x)\cap A\overset{(3)}{\neq}\phi$ なので,
ある $a_n\in U_{1/n}(x)\cap A$ をとれる. このとき, 点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は A に含まれ,
$d(a_n,x)<\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$ なので, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は x に収束する. (4)を示せた.

<u>(4)⇒(3)</u>　(4)を仮定する. そのとき, A 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で x に収束するもの
が存在する. 任意に $\varepsilon>0$ をとる. ある番号 N が存在して, $n\geq N$ ならば
$d(a_n,x)<\varepsilon$ すなわち $a_n\in U_\varepsilon(x)$ となる. すなわち, $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ は $U_\varepsilon(x)\cap A$
に含まれる. ゆえに, $U_\varepsilon(x)\cap A\neq\phi$. これで(3)を示せた.

以上によって, (1) ⇔ (2) $\rightleftarrows$ (3) $\rightleftarrows$ (4) が示せたので (1), (2), (3), (4) は
同値であることがわかった.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

自分で図を描きながら証明を書いてみよ.

$\boxed{\text{閉包を使った連続写像の特徴付け}}$ 位相空間(距離空間)のあいだの写像 $f: X \to Y$ について，以下の条件は互いに同値である：

(1) f は連続である．

(2) 任意の $A \subset X$ について，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$．

$x \in X$ が A にくっついている $(x \in \overline{A})$ ならば $f(x)$ は $f(A)$ にくっついている $(f(x) \in \overline{f(A)})$

$\boxed{\text{証明}}$

(1)⇒(2)　(1) と $A \subset X$ を仮定する．$\overline{f(A)}$ は Y の閉集合になり，f は連続なので $f^{-1}(\overline{f(A)})$ は X の閉集合になる．$A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ も成立している．ゆえに，$\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ となる．ゆえに，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$．

(2)⇒(1)　(2) を仮定し，F は Y の閉集合であるとする．$f^{-1}(F)$ が X の閉集合であることを示せば (1) が得られる．$A = f^{-1}(F)$ とおく．(2) を仮定したので，

$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(F))} = \overline{F} = F$ となり，$\overline{A} \subset f^{-1}(F) = A$ となる．

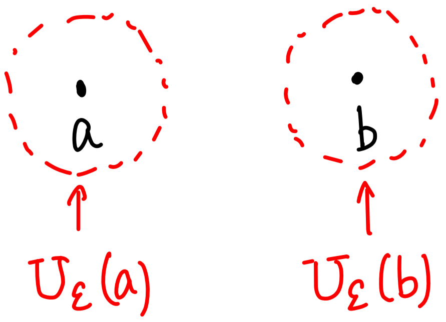
$\overline{A} \supset A$ なので，$\overline{A} = A$．ゆえに，$A = f^{-1}(F)$ は X の閉集合になる

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

別証明を色々考えてみよ．

点の部分へのくっつき方 (直観的な話とHausdorff空間の定義)

点の点へのくっつき方　距離空間Xの互いに異なる点$a, b \in X$の図



十分に$\varepsilon > 0$を小さくした.

距離空間Xの異なる2点に対して,
各々の点のε近傍を十分に小さくとると,
そのε近傍たちは共通部分を持たない.

注　ε近傍は開集合の特別な場合になっているので, 距離空間においては, 2つの異なる点a, bに対して,
aを含む開集合Uとbを含む開集合Vで$U \cap V = \phi$となるものが存在する.

$\square$

$\boxed{\text{定義}}$ 位相空間 X が Hausdorff空間（ハウスドルフ）であるとは、
その任意の互いに異なる2点 $a, b \in X$ に対して
a を含む開集合 U と b を含む開集合 V で $U \cap V = \phi$ をみたすものが
存在することであると定める。 □

$\boxed{\text{例}}$ 距離空間は Hausdorff空間である。 □

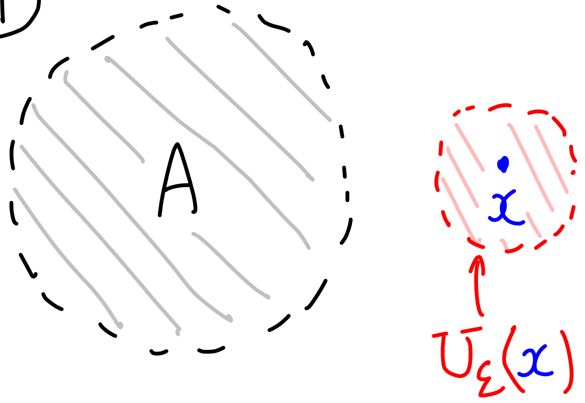
注 Hausdorff空間の定義の条件は点と点がどれくらい開集合で
分離されるかを記述する条件になっている。
後で位相空間Bで分離公理たちについて学ぶであろう。 □

$\boxed{\text{ポイント}}$ 距離空間での点 a の ε 近傍 $U_\varepsilon(a)$ と一般での位相空間
での点を含む開集合は点 a と空間の部分のくっつき方（分離の仕方）
を記述していると考えられる。 □

点と部分集合のくっつき方

Xは距離空間とし，$A \subset X$であるとする．

①



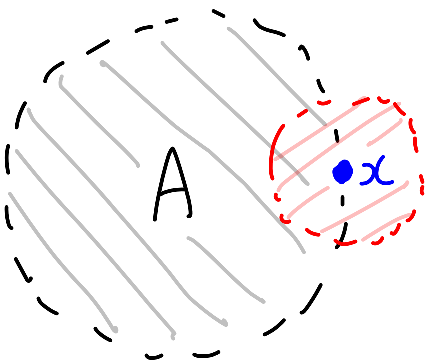
点xの十分小さなε近傍$U_\varepsilon(x)$をとると，

$A \cap U_\varepsilon(x) = \phi$となっているとする．

点xは部分集合Aにくっついて<u>いない</u>ように見える．

$(x \notin \overline{A})$

②



点xのどんなに小さなε近傍$U_\varepsilon(x)$をとっても

$A \cap U_\varepsilon(x) \neq \phi$となっているとする．

点xは部分集合Aにくっついて<u>いる</u>ように見える．

$(x \in \overline{A})$

（点xはAの内側に描いてもよい．）

$\boxed{\text{まとめ}}$ (距離空間の間の連続写像)

X, Y は距離空間であるとする. 写像 $f: X \to Y$ について以下は互いに同値;

(a) f は連続.

(b) (定義) 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して,
任意の $x \in X$ について, $d(x, a) < \delta$ ならば $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる.

(c) X 内の収束する点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, Y 内の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して,
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$$ となる.

(d) 任意 $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$.

(e) Y の任意の開集合 V に対して, $f^{-1}(V)$ も X の開集合になる. 非自明!

(f) 〃 閉 〃 〃 閉 〃 .

この2つの同値性はそうむずかしくない!

(g) 任意の X の部分集合 A に対して, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ となる.

注 (g) は, 「A にくっついている点 x を f でうつすと $f(A)$ にくっついている」という意味.
連続写像とはくっついている点を切りはなさない写像のことである.

集積点 (accumulation point, limit point) 複素解析の一致の定理で使われる.

X は位相空間であるとする. (例えば X は距離空間であるとする.)

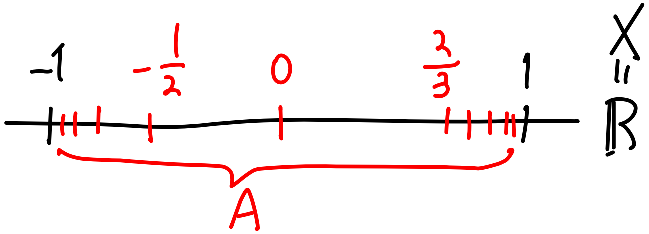
定義 点 $x \in X$ が部分集合 $A \subset X$ の集積点であるとは, x を含む X の任意の開集合が x 以外の A の点を含むことであると定める. □

注意 X が距離空間のとき, 点 $x \in X$ が $A \subset X$ の集積点であることと, x を含む任意の ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$ $(\varepsilon > 0)$ が x 以外の点を含むことは同値. □

例 $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Z}$ のとき, A の集積点は存在しない.

例 $X = \mathbb{R}$, $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ のとき, $0 \in \mathbb{R}$ は A の唯一の集積点である.

例 $X = \mathbb{R}$, $A = \left\{ (-1)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n = 1, 2, \dots \right\}$ のとき, A の集積点全体の集合は $\{\pm 1\}$ になる.



例 $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ ならば A の集積点全体の集合は $\mathbb{R}$ になる.

他にも自分で色々例を考えてみよ.

$\boxed{\text{定理}}$ 距離空間 X と部分集合 $A \subset X$ について以下は互いに同値になる：

(a) x は A の集積点である．

(b) 任意に $\varepsilon > 0$ に対して，$U_\varepsilon(x)$ は x 以外の A の点を含む．

(c) $x \in \overline{A \setminus \{x\}} = \overline{\{a \in A \mid a \neq x\}}$．

$\boxed{\text{証明}}$ (自明に近い) $\underline{(a) \Rightarrow (b)}$ (a)を仮定し，任意に $\varepsilon > 0$ をとる．
$U_\varepsilon(x)$ は X の開集合になるので，集積点の定義より，$U_\varepsilon(x)$ は x 以外の A の点を含む．

$\underline{(b) \Rightarrow (c)}$ (b)を仮定する．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．(b)より $U_\varepsilon(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$．
これより，$x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ であることがわかる(閉包の点の特徴付けからわかる)．

$\underline{(c) \Rightarrow (a)}$ (c)を仮定し，U は x を含む X の任意の開集合であるとする．
(c)(と閉包の点の特徴付け)より，$U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$．
これは U が x 以外の A の点を含むことを意味する．ゆえに x は A の集積点．

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{稠密性}}$ (denseness) Xは距離空間であるとする。

$\boxed{\text{定義}}$ 部分集合 $A \subset X$ が X において稠密(ちゅうみつ) (dense) であるとは、$\overline{A} = X$ となることであると定める。 □

$\boxed{\text{定理}}$ $A \subset X$ が X において稠密であることと以下の条件の各々は同値：

(1) X の X 以外の任意の閉集合は A を含まない。

(2) X の空でない任意の開集合は A と空でない交わりを持つ。

位相空間でも同値。

(3) 任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$U_\varepsilon(x) \cap A \neq \phi$.

(4) 任意の $x \in X$ に対して、A 内の点列で x に収束するものが存在する。 □

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ において稠密である。 □

$\boxed{\text{例}}$ $\underbrace{\mathbb{Z}\left[\frac{1}{10}\right] = \left\{ \frac{a}{10^n} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ n = 0, 1, 2, \dots \right\}}_{\text{10進有限小数全体の集合}}$ も $\mathbb{R}$ において稠密である。 □

$\boxed{\text{例}}$ (Weierstrass(ワイエルシュトラス)の多項式近似定理) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする.

$C([a,b], \mathbb{R}) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ は連続 (continuous)$\}$ とおく.

$C([a,b], \mathbb{R})$ を次の sup ノルムで距離空間とみなす;

$$\|f\|_{\sup} = \|f\|_{\infty} = \sup_{a \leqq x \leqq b} |f(x)| \left(= \max_{a \leqq x \leqq b} |f(x)| \right).$$

そして, $C([a,b], \mathbb{R})$ の部分集合 P を次のように定める;

$$P = \{ f \in C([a,b], \mathbb{R}) \mid \text{ある } p \in \mathbb{R}[x] \text{ が存在して, } f(x) = p(x) \ (a \leqq x \leqq b) \},$$

このとき, P は $C([a,b], \mathbb{R})$ において稠密になる.

これは, 多項式函数で任意の閉区間上の函数を sup ノルムの意味でいくらでも近似できることを意味している. $\square$

証明はここでは略す.

一様収束

X は集合であるとし，Y は距離空間であるとする．

写像(函数) $f_n : X \to Y$ の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と写像 $f : X \to Y$ を任意にとる．

定義 (各点収束) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に各点収束する (converges pointwise to) とは，各点 $x \in X$ について，Y 内の点列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が Y の点 $f(x)$ に収束することであると定める．すなわち，

(P) 任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，
　ある番号 N が存在して，任意の $n \geq N$ について $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ となる．

が成立するとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に各点収束するという． □

定義 (一様収束) 次の条件が成立するとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束する (converges uniformly to) という：

(U) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある番号 N が存在して，
　任意の $x \in X$ と任意の $n \geq N$ について，$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ となる． □

$\boxed{\text{これらのちがい}}$

- 各点収束では，番号 N は点 $x \in X$ ごとに別にとればよい．

  (番号 N は $\varepsilon > 0$ だけではなく，$x \in X$ にも依存する．)

- 一様収束では，番号 N は点 $x \in X$ と無関係にとれなければいけない．

  (番号 N は $\varepsilon > 0$ のみで決まり，$x \in X$ とは無関係．)

- 一様収束ならば各点収束となるが，逆は成立しない．

$\boxed{\text{例}}$ $X = [0, 1]$，$Y = \mathbb{R}$，$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ と $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

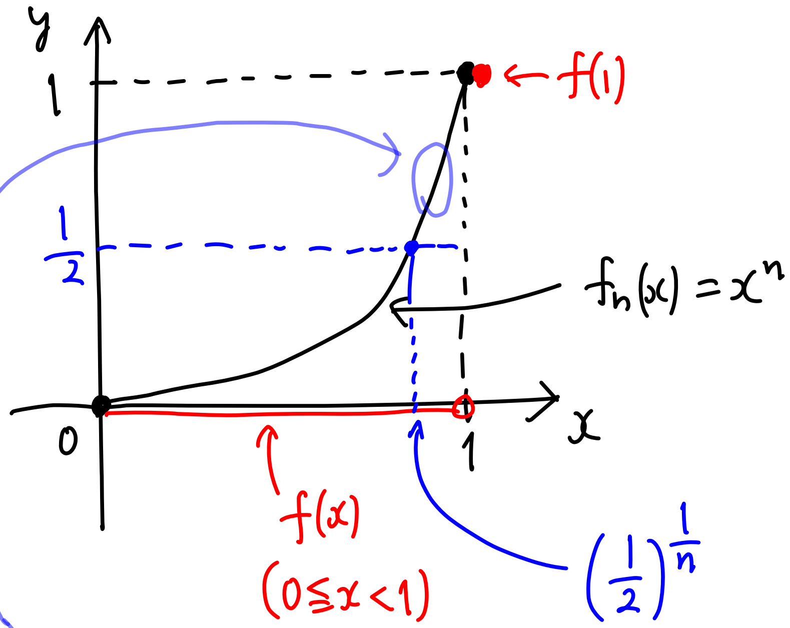
$$f_n(x) = x^n \quad (0 \leqq x \leqq 1), \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 1) \\ 0 & (0 \leqq x < 1) \end{cases}$$ と定める．

このとき，各点 $x \in [0,1]$ ごとに，$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(x)$ に収束する．

すなわち，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に各点収束する．

つづく

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束はしていない。



$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束しているためには任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について、ある N_ε をとれて、$n \geqq N$ ならば、すべての $x \in [0,1]$ について $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ とならなければいけない。

ここでは $0 \leqq x < 1$ で $x^n \to 0$ $(n \to \infty)$ なのに、
どんなに n を大きくしても $x^n \geqq \frac{1}{2}$ となっている。

これは $0 \leqq x < 1$ をみたすすべての x について同時に

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n - 0 = x^n < \frac{1}{2}$$

となるようにできないことを意味している。

これより、$\{f_n\}$ は f に一様収束していないことがわかる。

$\boxed{\text{練習問題}}$ 上の例で $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\{f\}$ に一様収束していないことの厳密な証明を書き下せ. □

$\boxed{\text{例}}$ $0<\alpha<1$ を任意にとって固定する. $g_n : [0,\alpha] \to \mathbb{R}$, $g : [0,\alpha] \to \mathbb{R}$ を $g_n(x) = x^n$ $(0 \leqq x \leqq \alpha)$, $g(x) = 0$ $(0 \leqq x \leqq \alpha)$ と定めると, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は g に一様収束している.

$\boxed{\text{証明}}$ 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. 番号 N を $\alpha^N < \varepsilon$ となるようにとれる. このとき, 任意の $x \in [0,\alpha]$ と任意の $n \geqq N$ について,

$$|g_n(x) - g(x)| = x^n - 0 = x^n \leqq \alpha^n \leqq \alpha^N < \varepsilon.$$

□

一様収束が函数の連続性を保つこと

X と Y は距離空間であるとする.

定理 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X から Y への連続写像の列であるとし, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f: X \to Y$ に一様収束しているとする. このとき, f も連続写像になる.

証明 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ をとる.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束しているので, ある N が存在して,

$$n \geqq N \text{ かつ } x \in X \implies d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

($\frac{\varepsilon}{3}$-argument を使う)

f_N は連続なので, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$x \in X \text{ かつ } d(x, a) < \delta \implies d(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ゆえに, $x \in X$ かつ $d(x, a) < \delta$ のとき,

三角不等式

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leqq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

したがって, f は連続である.

q.e.d.

$\boxed{\text{証明の見つけ方}}$ ① x を a に近付けたとき $f(x)$ が $f(a)$ に近付くことを示したい。小さくなってほしいのは $d(f(x), f(a))$ である。

② $d(f(x), f(a))$ を三角不等式を使って、「小さくなりそうなものたちの和」による分解(で上からおさえること)を考える：

$$d(f(x), f(a)) \leqq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a))$$

x によらずに N を大きくすると小さくできる(一様収束より)

x を a に近付けると小さくなる。(f_N の連続性より)

③ 以上を発見を ε-N や ε-δ で書き直せば証明ができあがる。 □

$\boxed{\text{有限区間上での積分と一様収束極限の交換}}$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする.

$\boxed{\text{定理}}$ $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続函数であるとし, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に一様収束していると仮定する. (f も連続になる.) このとき,
数列 $\left\{\int_a^b f_n(x)\,dx\right\}_{n=1}^{\infty}$ は $\int_a^b f(x)\,dx$ に収束する. すなわち,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{= f(x)}\,dx.$$

$\boxed{\text{証明}}$ 任意に $\varepsilon > 0$ をとる.
$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束しているので, ある N が存在して,
$n \geqq N$ かつ $x \in [a, b]$ のとき, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{b-a}\frac{\varepsilon}{2}$, すなわち,

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) < f(x) + \frac{1}{b-a}\frac{\varepsilon}{2}$$

となるので

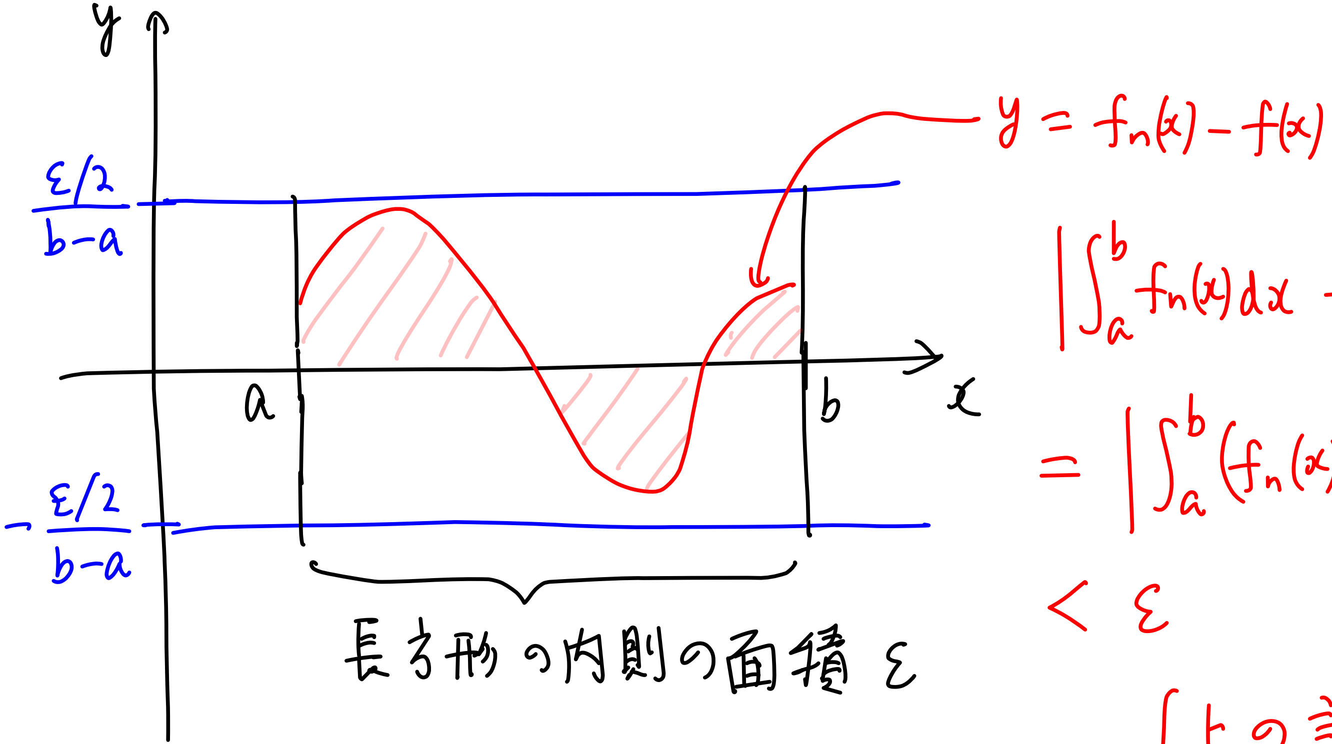
$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} \leqq \int_a^b f_n(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

つづく

すなわち，

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

これは $\int_a^b f_n(x)\,dx$ が $\int_a^b f(x)\,dx$ に $n\to\infty$ で収束することを意味する． $\boxed{\text{q.e.d.}}$



$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right|$$

$$< \varepsilon$$

上の証明はこのように考えてもよい．

sup ノルムによる一様収束の特徴付け X を集合とし，V を $\mathbb{R}$ 上のノルム空間とする．

関数 $f: X \to V$ の sup ノルム $\|f\|_\infty$ を次のように定める：

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\| \quad \text{(有限の上限が存在しないとき ∞ と約束)}.$$

値が ∞ になる場合もあることを除けば，$\|\cdot\|_\infty$ はノルムの性質をみたす：

(1) $\|f+g\|_\infty \leqq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (2) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$ (3) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

ここで，$f, g: X \to V$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

定理 X から V への関数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ と $f: X \to V$ について以下の2つは互いに同値：

(1) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は f に一様収束する． (2) $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$.

証明 $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$ (1)を仮定し，任意に $\varepsilon > 0$ をとる．(1)より，ある N が存在して，$n \geqq N$ かつ $x \in X$ ならば $\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる．ゆえに，$n \geqq N$ ならば

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

となる．これで，$\|f_n - f\|_\infty \to 0$ が示された．

つづく．

<u>(2) ⇒ (1)</u>　(2) を仮定し，任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$\|f_n - f\|_\infty \to 0$ より，

ある N が存在して，$n \geqq N$ ならば $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ となる．

ゆえに，$n \geqq N$ かつ $x \in X$ のとき，

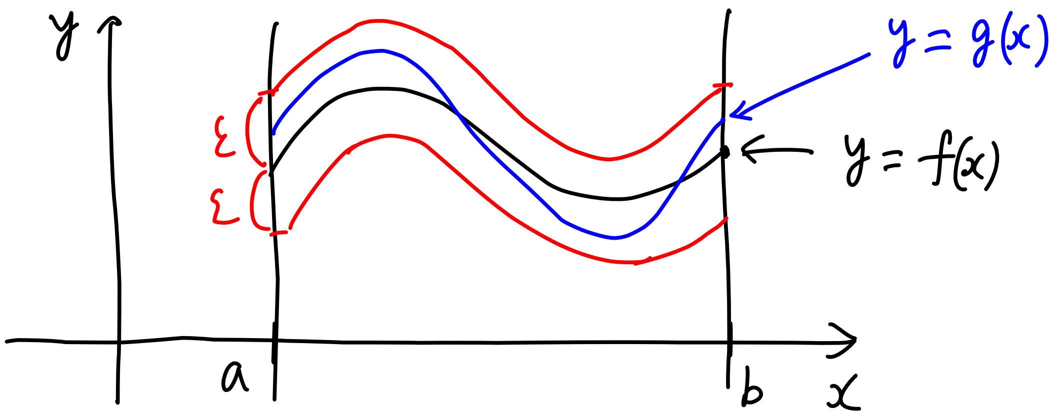
$$\|f_n(x) - f(x)\| \leqq \sup_{y \in X} \|f_n(y) - f(y)\| = \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

これで，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束することが示された．　□

$\boxed{\text{図}}$　$a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$ とする．$X = [a, b]$，$V = \mathbb{R}$，$\|\cdot\| = |\cdot|$ としておく．

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ について，$\|g - f\|_\infty = \sup_{a \leqq x \leqq b} |g(x) - f(x)| < \varepsilon$ となる $g : [a, b] \to \mathbb{R}$

は次のように図示される：



□

$\boxed{\text{コンパクト性}}$ ← 位相数学AとBにおける最重要概念!!!

X は位相空間であるとする.(たとえば,X は距離空間であるとする.)

U_λ $(\lambda \in \Lambda)$ たちが X の開集合たちで,$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ が成立しているとき,
$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆 (open covering) と呼ぶ.($X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ を開被覆と言うこともある.)

有限個の開集合たちで構成された開被覆を有限開被覆 (finite open covering) と呼ぶ.

X の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して,$\Lambda' \subset \Lambda$ のとき,$\{U_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ を $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の部分被覆 (subcovering) と呼ぶ.

たとえば,X の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して,$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ のとき,$\{U_{\lambda_i}\}_{i=1}^n$ を $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆 (finite subring) と呼ぶ.

$\boxed{\text{定義}}$ X がコンパクトであるとは,X の任意の開被覆の有限部分被覆が存在することであると定める. (compact) $\square$

$\boxed{例}$ 易 $X=(0,1]$ はコンパクトではない。 $U_k=\left(\frac{1}{k}, 1\right]$ $(k=1,2,3,\ldots)$ とおくと、 $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ は X の開被覆(開ヒフク)になる。 $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ の有限部分被覆は存在しないので X はコンパクトではない。

□

$\boxed{例}$ 難 閉区間 $X=[a,b]$ $(a<b)$ はコンパクトである。

(注 一般に $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合たちと $\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合たちは一致する。)

$\boxed{証明}$ $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ を X の任意の開被覆であるとし、その有限部分被覆が存在しないと仮定する。矛盾をみちびけば証明が終わる。

その仮定のもとで、 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ と $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ の少なくともどちらか片方は有限個の U_λ たちでおおうことをできない。そのおおえない側を X_1 と書く。

以下、同様にして、 X から X_1 を作ったのと同じ方法で、 $X_k=[a_k, b_k]$ から、 $X_{k+1}=[a_{k+1}, b_{k+1}]$ を作ることができる。

つづく

このとき，$X_k=[a_k,b_k]$ $(k=1,2,\dots)$ の各々は有限個の U_λ たちでおおうことができず，

$$a\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq\cdots\leqq b_3\leqq b_2\leqq b_1\leqq b,\qquad b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}$$

となっている．

ゆえに，a_k と b_k は $k\to\infty$ とすると同じ値 c に収束する．

$a_k,b_k\in X=[a,b]$ でかつ，X は $\mathbb{R}$ の閉集合なので，$c\in X$ となる．

$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ なので，ある $\lambda_0\in\Lambda$ が存在して，$c\in U_{\lambda_0}$ となる． $U^X_\varepsilon(c)=\{x\in X\mid |x-c|<\varepsilon\}$

U_{λ_0} は X の開集合なので，ある $\varepsilon>0$ が存在して，$U^X_\varepsilon(c)\subset U_{\lambda_0}$ となる．

k を十分大きくして，$b_k-a_k=\dfrac{b-a}{2^k}<\varepsilon$ となるようにできる．

$a_k,a_{k+1},a_{k+2},\dots$ と $b_k,b_{k+1},b_{k+2},\dots$ は $X_k=[a_k,b_k]$ に含まれ，X_k は $\mathbb{R}$ の閉集合なので，それらの収束先 c も X_k に含まれる： $c\in X_k=[a_k,b_k]$．

このとき，$X_k\subset U_{\lambda_0}$ となる．

これ X_k が有限個の U_λ たちでおおえないことに矛盾する．

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

コンパクト性の性質 (易しいことのみ)

定理 (コンパクト性が連続写像の像で保たれること)

$f: X \to Y$ は位相空間のあいだの連続写像で, X がコンパクトのとき,

$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$ も (Y における相対位相について) コンパクトになる

証明 Y における相対位相に関する $f(X)$ の開被覆 $f(X) = \bigcup_{\lambda \in I} V_\lambda$ を任意にとる.

相対位相の定義より, $V_\lambda = f(X) \cap U_\lambda$, U_λ は Y の開集合と書ける.

f は連続なので, $f^{-1}(U_\lambda)$ は X の開集合になる.

任意の $x \in X$ について, $f(x) \in f(X) = \bigcup_{\lambda \in I} V_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda$ なので, ある $\lambda \in I$ で $f(x) \in U_\lambda$

となるものが存在し, $x \in f^{-1}(U_\lambda)$ となる. ゆえに, $X = \bigcup_{\lambda \in I} f^{-1}(U_\lambda)$.

X はコンパクトなので, ある $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in I$ が存在して, $X = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{\lambda_k})$.

このとき, $f(X) = \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(U_{\lambda_k})) = \bigcup_{k=1}^{n} (f(X) \cap U_{\lambda_k}) = \bigcup_{k=1}^{n} V_{\lambda_k}$.

これで $f(X)$ のコンパクト性が示された.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{定理}}$ コンパクト位相空間 X の閉集合 F も(相対位相について)コンパクトになる.

$\boxed{\text{証明}}$ F の相対位相における開被覆 $F = \bigcup_{i \in I} V_i$ を任意にとる.

相対位相の定義より, $V_i = F \cap U_i$, U_i は X の開集合と書ける.

$U_\infty = X \setminus F = F^c = \{x \in X \mid x \notin F\}$ とおくと, F は X の閉集合なので, U_∞ は X の開集合になる.

このとき, $X = U_\infty \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ という X の開被覆が得られる.

X はコンパクトなので, $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ が存在して, $X = U_\infty \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

このとき, $F = F \cap X = (F \cap U_\infty) \cup (F \cap U_{i_1}) \cup \cdots \cup (F \cap U_{i_n}) = V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n}$.

これで, F のコンパクト性が示された. $\square$

$\boxed{\text{定理}}$ コンパクト位相空間 X の無限部分集合は集積点を持つ.

$\boxed{\text{証明}}$ $A \subset X$ とし, A が集積点を持たないならば A が有限集合になることを示せばよい. $A \subset X$ は集積点を持たないと仮定する.

任意の $x \in X \setminus A$ は A の集積点ではないので, X のある開集合 U で $x \in U$ かつ $U \cap A = \phi$ となるものが存在する. ゆえに, $X \setminus A$ は X の開集合になり, A は X の閉集合になる.

ゆえに, 1つ前の定理より, A は X のコンパクト部分集合になる.

任意の $a \in A$ は A の集積点でないので, X のある開集合 U_a で $A \cap U_a = \{a\}$ となるものが存在する.

このとき, $A = \bigcup_{a \in A} (A \cap U_a) = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ は A の (相対位相での) 開被覆になる.

A はコンパクトなのである $a_1, \dots, a_n \in A$ が存在して, $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} = \{a_1, \dots, a_n\}$.

これで A が有限集合であることが示された.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

重要

$\boxed{\text{定理}}$ Hausdorff空間X（特に距離空間X）のコンパクト部分集合KはXの閉集合になる.

$\boxed{\text{証明}}$ $X \setminus K$がXの開集合になることを示せばよい.

$a \in X \setminus K$を任意にとる.

（aを含むXの開集合Uで$U \cap K = \phi$となるものを作ればよい.）

各$x \in K$に対して, $x \neq a$なので, Xの開集合U_xとV_xで$a \in U_x$, $x \in V_x$で

かつ$U_x \cap V_x = \phi$をみたすものが存在する.

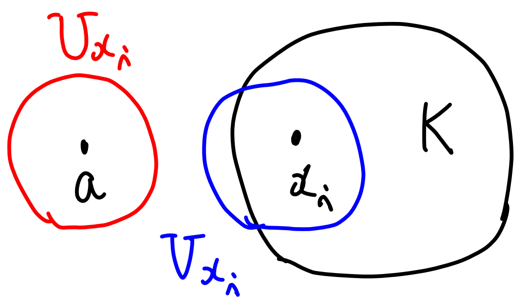
このとき, $K = \bigcup_{x \in K} (K \cap V_x)$は$K$の相対位相に関する開被覆になっている

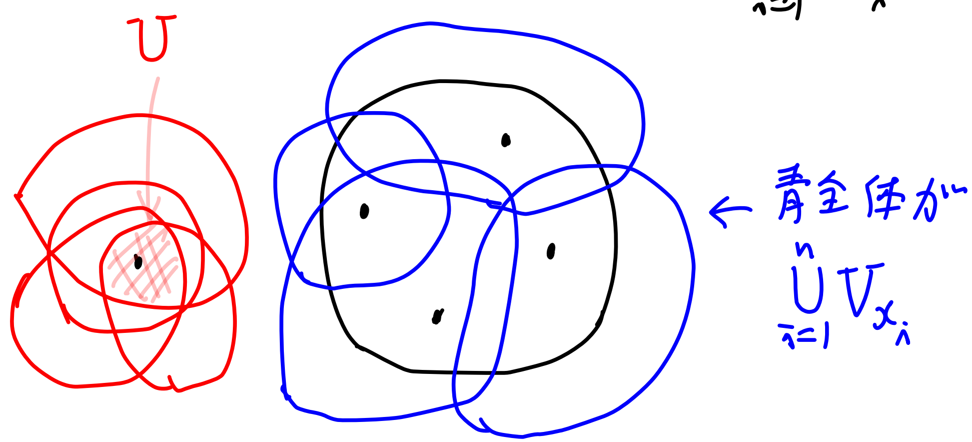
Kはコンパクトなので, ある$x_1, \dots, x_n \in K$が存在して, $K = \bigcup_{i=1}^{n} (K \cap V_{x_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$

$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$とおくと, UはXの開集合になり, $a \in U$と$U \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} = \phi$.

特に, $U \cap K = \phi$となる.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$





全有界性 (一般の位相空間ではできない距離空間の話)

Xは距離空間であるとする。

定義 Xが<u>全有界</u> (<u>totally bounded</u>) であるとは、任意の$\varepsilon>0$に対して、有限個の$x_1,\dots,x_n\in X$が存在して$X=\bigcup_{i=1}^{n}U_\varepsilon(x_i)$となることであると定める。 □

注意 各$U_\varepsilon(x_i)$は有界で、有界な有限個の部分集合の和集合も有界になるので、全有界ならば有界になる。

□

ほぼ自明な定理 コンパクト距離空間Xは全有界である。

証明 $\varepsilon>0$を任意にとる。このとき、$X=\bigcup_{x\in X}U_\varepsilon(x)$であり、$X$はコンパクトなので、ある有限個の点$x_1,\dots,x_n\in X$で$X=\bigcup_{i=1}^{n}U_\varepsilon(x_i)$をみたすものが存在する。ゆえに、$X$は全有界である。

q.e.d.

例 Xは無限集合であるとし、$d(x,y)=\begin{cases}0 & (x=y)\\ 1 & (x\neq y)\end{cases}$ $(x,y\in X)$とおくと、(X,d)は距離空間になる。Xは自明に有界。しかし、$0<\varepsilon\leqq 1$とすると、$U_\varepsilon(x)=\{x\}$ $(x\in X)$となるので、$X=\bigcup_{i=1}^{n}U_\varepsilon(x_i)$ $(x_i\in X)$とはできない。Xは全有界でない。 □

$\boxed{\text{問題}}$ $\mathbb{R}^n$の有界部分集合が全有界になることを示せ. □

$\boxed{\text{問題}}$ Xが全有界距離空間ならばその部分集合も全有界になることを示せ. □

MetricSpaces.pdf の 21 (p.56) に略証がある.

コンパクト空間上の実数値連続函数

重要!

準備

① コンパクト位相空間の連続写像による像もコンパクトになる。 ← 今日やった。

② Hausdorff空間 Y のコンパクト部分集合は Y の閉集合になる。 ← 今日やった。

③ コンパクト距離空間は全有界（特に有界）になる。 ← 今日やった。

④ $\mathbb{R}$ の有界閉部分集合は最大値と最小値を持つ。 ← 2021-05-28 03 でやった。 □

準備がおわっている!

$\boxed{\text{定理}}$ コンパクト位相空間 X 上の実数値連続函数 f は最大値と最小値を持つ。

$\boxed{\text{証明}}$

① X はコンパクトで $f: X \to \mathbb{R}$ は連続なので $f(X)$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合になる。

② $\mathbb{R}$ は Hausdorff 空間で $f(X)$ はそのコンパクト部分集合なので、$f(X)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合になる。

③ $f(X)$ はコンパクトなので全有界（特に有界）になる。

④ 以上によって、$f(X)$ は $\mathbb{R}$ の有界閉集合なので最大値と最小値を持つ。

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

例 X はコンパクト位相空間であるとし，V は $\mathbb{R}$ 上のノルム空間であるとする．このとき，連続写像 $f: X \to V$ に対して，$\{\|f(x)\| \mid x \in X\} \subset \mathbb{R}_{\geqq 0}$ は最大値を持ち，$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\| = \max_{x \in X} \|f(x)\| = \|f(a)\|$ （a は X のある点）が成立する．

証明 前ページの定理より，$F: X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|f(x)\|$ が連続であること示せば十分である．$F: X \to \mathbb{R}$ は $f: X \to V$ と $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\geqq 0},\ v \mapsto \|v\|$ の合成写像で，f は連続だと仮定しているので，$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ が連続であることを示せばよい．しかし，任意の $\varepsilon > 0$ について，$v, w \in V$，$\|v-w\| < \varepsilon$ ならば三角不等式より

$$\big|\|v\| - \|w\|\big| \leqq \|v-w\| < \varepsilon$$

となるので，$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ は連続であることがわかる． □

補足 $\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ （三角不等式）で，x を $x-y$ でおきかえると，$\|x\| \leqq \|x-y\| + \|y\|$ なので $\|x\| - \|y\| \leqq \|x-y\|$．同様にして，$\|y\| - \|x\| \leqq \|x-y\|$．ゆえに，$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqq \|x-y\|$．三角不等式はこの形でもよく使われる． □

$\boxed{\text{一様連続性}}$ 距離空間では，連続写像だけではなく一様連続写像を定義できる．

f_n：(集合) $\longrightarrow$ (距離空間)，$n=1,2,3,\dots$ について一様収束を定義できる．

(f_n：(集合) $\longrightarrow$ (位相空間)，$n=1,2,3,\dots$ については一様収束を定義できない．)

f：(距離空間) $\longrightarrow$ (距離空間) が一様連続であることを定義できる．

(f：(位相空間) $\longrightarrow$ (位相空間) については一様連続性を定義できない．)

$\boxed{\text{定義}}$ X と Y は距離空間であるとする．写像 $f: X \to Y$ が一様連続であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ について，ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $x, x' \in X$ について，$d(x, x') < \delta$ ならば $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ となることをいう． $\square$

次ページでただの連続性とのちがいについて説明する．

連続写像と一様連続写像のちがい

$f: X \to Y$, X, Y は距離空間とする.

- f は連続

$\Leftrightarrow$ 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ について
ある $\delta > 0$ が存在して, 任意 $x \in X$ について, $d(x, a) < \delta$ ならば $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

δ は各 a ごとに別々にとればよい.

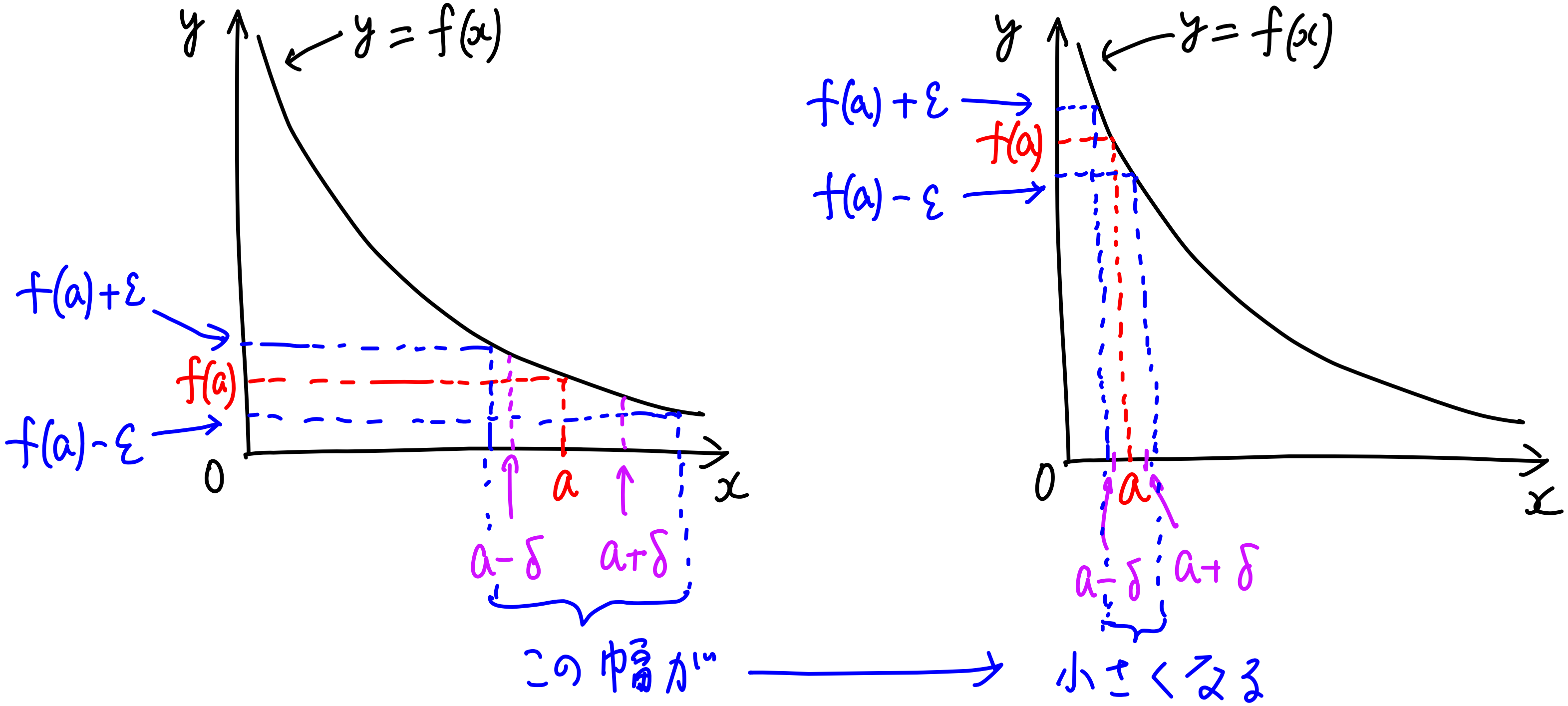
- f は一様連続

$\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ について,
ある $\delta > 0$ が存在して, 任意 $x, a \in X$ について, $d(x, a) < \delta$ ならば $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

δ を a と無関係に決めなければいけない.

これより, 一様連続ならば連続であることもわかる.

$\boxed{\text{例}}$ $f(x) = x^{-1}$ $(x>0)$ で $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ を定める。
このfは$\mathbb{R}_{>0}$で連続だが一様連続ではない。

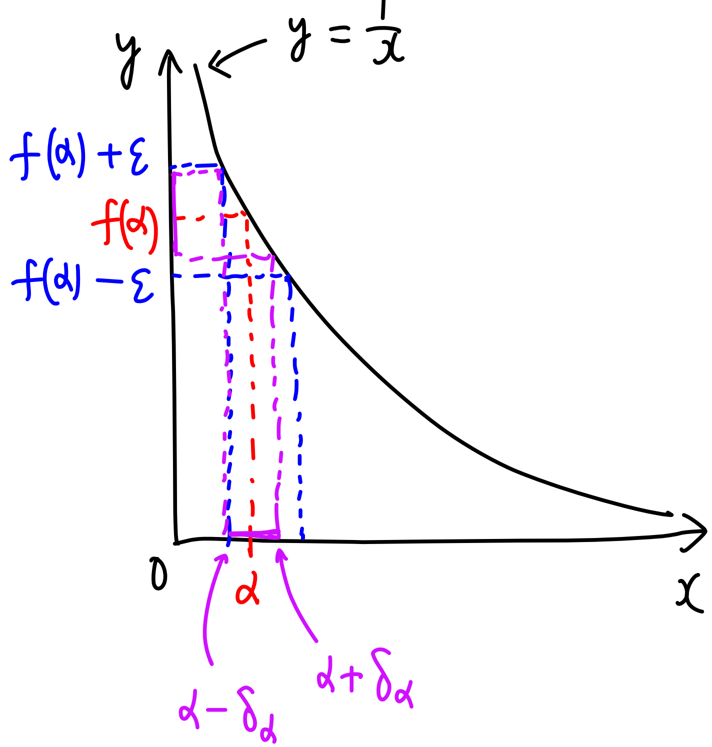


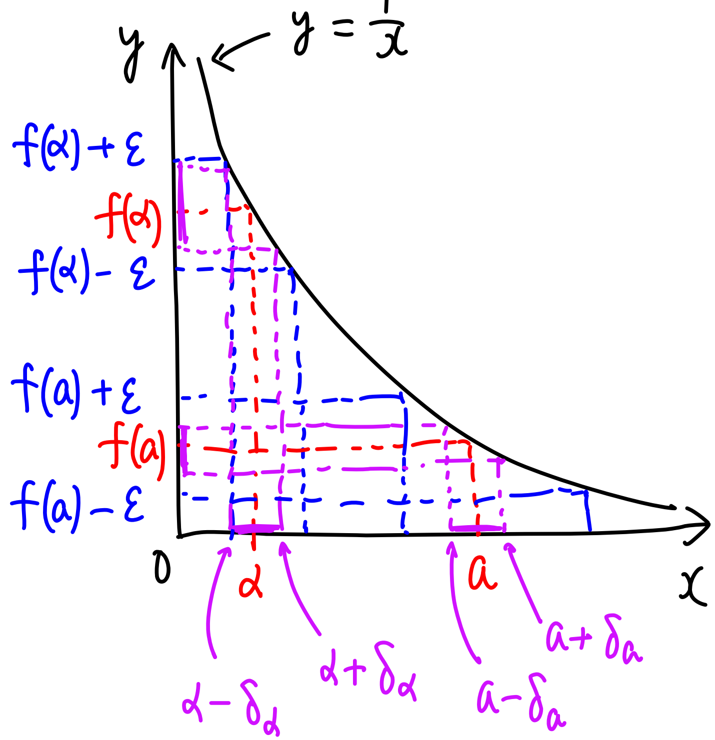
aが0に近付くと、同じεに対するδをより小さく取る必要がある。
しかも、aを0に近付けると同じεに対するほしいδは0にいくらでも近づく。

このことから $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x>0)$ は $x>0$ で一様連続でないことがわかる。 □
重要

$\boxed{\text{注意}}$ $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ の定義域を，固定された $\alpha>0$ について，$x\geqq\alpha$ に制限すると一様連続になる。

なぜならば $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ について，$a=\alpha$ における $\varepsilon>0$ に対する $\delta_\alpha>0$ は，$a>\alpha$ についても通用する δ になっているからである。





□

$\boxed{\text{例}}$ $f(x)=x$ $(x\in\mathbb{R})$ と $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を定めると，f は等長写像なので一様連続である．□

$\boxed{\text{例}}$ $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ と $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を定めると，f は連続だが一様連続ではない．

<u>一様連続でないことの証明</u>：$\varepsilon=1$ とし，$\delta>0$ を任意にとり，$a>0$ と仮定する．

このとき，$\left|f(a+\frac{\delta}{2})-f(a)\right| = \left|(a+\frac{\delta}{2})^2-a^2\right| = \delta a+\frac{\delta^2}{4}>\delta a$ となるので，

$a=\frac{1}{\delta}$ のとき，$x=a+\frac{\delta}{2}$ とおくと，$|x-a|=\frac{\delta}{2}<\delta$ なのに $|f(x)-f(a)|>\delta a=1=\varepsilon$

となる．これで，$f(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ が一様連続でないことが示された．□

$\boxed{\text{例}}$ $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ と $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ を定めると，f は一様連続ではない．

<u>証明</u>　$\varepsilon=1$ とし，$\delta>0$ を任意にとり，$0<a<\delta$ と仮定する．このとき，

$$\left|f(a-\tfrac{\delta}{2})-f(a)\right| = \frac{1}{a-\frac{\delta}{2}}-\frac{1}{a} = \frac{\delta/2}{a(a-\frac{\delta}{2})} > \frac{1}{2}\,\frac{1}{a-\frac{\delta}{2}}$$

$0<a<\delta$ より $\delta/a>1$．

ゆえに，$a=\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}$，$x=a-\frac{\delta}{2}$ とおくと，$|x-a|=\frac{\delta}{2}<\delta$ なのに

$$|f(x)-f(a)|>\frac{1}{2}\,\frac{1}{a-\frac{\delta}{2}}=1=\varepsilon$$

となり，$f(x)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ が一様連続でないことがわかる．□

$\boxed{\text{例}}$ $\alpha>0$ を固定する．$f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\geqq\alpha)$ と $f:\mathbb{R}_{\geqq\alpha}\to\mathbb{R}_{>0}$ を定めると，f は一様連続である．

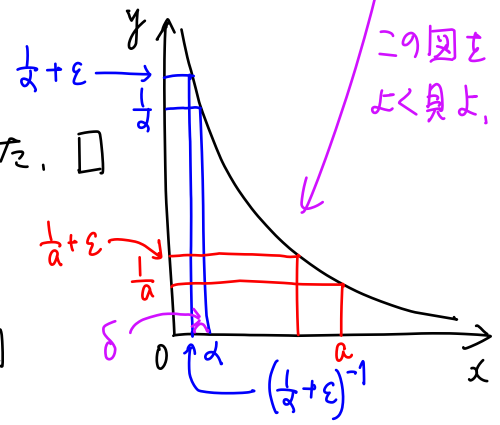
<u>証明</u>　任意に $\varepsilon>0$ をとる．$\delta=\alpha-\dfrac{1}{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}>0$ とおく．このとき，$x,a\in\mathbb{R}_{\geqq\alpha}$ について，$|x-a|<\delta$ のとき，

$f(x)$ が下に凸で単調減少であることより

$$|f(x)-f(a)|<\max\{|f(a+\delta)-f(a)|,\ |f(a-\delta)-f(a)|\} = f(a-\delta)-f(a)$$

$$\leqq f(\alpha-\delta)-f(\alpha) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}\cdot\!\!{}^{-1}\!\!\ldots$$

これで，$f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\geqq\alpha>0)$ の一様連続性が示された．□



この図をよく見よ．

$\boxed{\text{問題}}$ $f(x)=\sqrt{x}$ $(x\geqq0)$ で $f:\mathbb{R}_{\geqq0}\to\mathbb{R}_{\geqq0}$ を定めると，$f(x)$ が一様連続であることを示せ．□

導函数が有界な函数の一様連続性

定理 $I\subset\mathbb{R}$ は区間であると仮定する (例: $I=\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{R}_{\geqq 0}$, $[a,b]$, $[a,b)$).
$f: I\to\mathbb{R}$ は C^1 級函数で $\{f'(x)\mid x\in I\}$ は有界であると仮定する.
このとき, $f: I\to\mathbb{R}$ は一様連続になる.

証明 f' は I 上有界なので, ある $M>0$ が存在して, $|f'(x)|\leqq M$ $(x\in I)$.
任意に $\varepsilon>0$ をとる. $x, a\in I$ のとき,

$$|f(x)-f(a)|=\left|\int_a^x f'(t)\,dt\right|\leqq\left|\int_a^x |f'(t)|\,dt\right|\leqq\left|\int_a^x M\,dt\right|=M|x-a|.$$

$\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$ とおくと, $|x-a|<\delta$ のとき,

$$|f(x)-f(a)|\leqq M|x-a|<M\delta=M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

これで $f: I\to\mathbb{R}$ の一様連続性が示された. □

例 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ は $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ なので, $\alpha>0$ について, $|f'(x)|\leqq\dfrac{1}{\alpha^2}$ $(x\geqq\alpha)$ なので
$f(x)=\dfrac{1}{x}$ は $x\geqq\alpha$ で一様連続になる ($x>0$ では一様連続ではない). □

コンパクト距離空間から距離空間への連続写像の一様連続性

（証明は易しい）

定理 X, Y は距離空間であるとし，$f: X \to Y$ は連続写像であるとする．

このとき，X がコンパクトならば $f: X \to Y$ は一様連続になる．

証明 任意に $\varepsilon > 0$ をとる．

f の連続性より，各 $a \in X$ に対して，ある $\delta_a > 0$ が存在して，

$$x \in X \text{ かつ } d(x, a) < \delta_a \text{ ならば } d(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

このとき，$\{U_{\delta_a/2}(a)\}_{a \in X}$ は X の開被覆 (open covering) になる．

X のコンパクト性より，有限個の $a_1, \dots, a_n \in X$ が存在して，$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\delta_{a_i}/2}(a_i)$．

$\delta = \min\left\{ \frac{\delta_{a_i}}{2} \,\middle|\, i = 1, \dots, n \right\} > 0$ とおく．$x, x' \in X$ とし，$d(x, x') < \delta$ と仮定する．

ある $i = 1, \dots, n$ で，$x \in U_{\delta_{a_i}/2}(a_i)$ すなわち $d(x, a_i) < \frac{\delta_{a_i}}{2}$ をみたすものがある

このとき $d(x, a_i) < \delta_{a_i}$ でもあるので，$d(f(x), f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる．

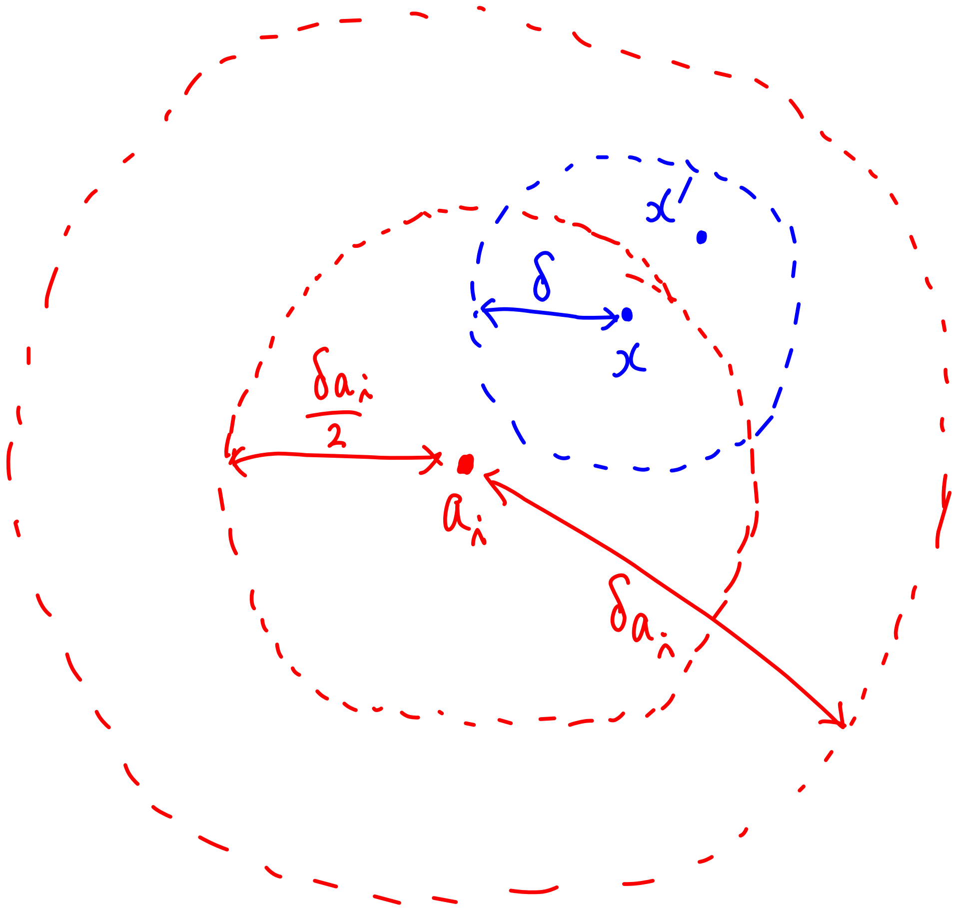
次ページにつづく．

さらに，$d(x', a_i) \leqq d(x', x) + d(x, a_i) < \delta + \dfrac{\delta_{a_i}}{2} \leqq \dfrac{\delta_{a_i}}{2} + \dfrac{\delta_{a_i}}{2} = \delta_{a_i}$ となるので
$d(f(x'), f(a_i)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となることもいえる．

したがって，以上の状況（$d(x, x') < \delta$）のもとで，

$$d(f(x), f(x')) \leqq d(f(x), f(a_i)) + d(f(a_i), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで，f の一様連続性が示された． $\square$



$\delta \leqq \dfrac{\delta_{a_i}}{2}$

$\boxed{\text{完備性}}$ (位相空間の完備性は定義されないが, 距離空間では定義される.)

X は距離空間であるとする.

$\boxed{\text{定義}}$ X 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が <u>Cauchy列</u> (<u>Cauchy sequence</u>) もしくは <u>基本列</u> $\left(\frac{\text{fundamental}}{\text{sequence}}\right)$

であるとは, 任意 $\varepsilon>0$ に対して, ある番号 N が存在して,

$$\underline{m,n \geqq N} \text{ ならば } d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

となることであると定める.

「$m \geqq N$ かつ $n \geqq N$」という意味.

これを「$n \geqq m \geqq N$」に強めても定義と同値 □

$\boxed{\text{注意}}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy列であることを以下のように略記することがある:

- $d(a_m, a_n) \to 0 \quad \text{as} \quad m,n \to \infty \qquad (\text{as } m \geqq n \to \infty)$

- $\displaystyle\lim_{m,n\to\infty} d(a_m,a_n) = 0 \qquad \left(\lim_{m\geqq n\to\infty} d(a_m,a_n) = 0\right)$ □

$\boxed{\text{収束列はCauchy列である}}$ 距離空間 X 内の収束列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はCauchy列になる.

$\boxed{\text{証明}}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha \in X$ に収束しているとする. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる

あるNが存在して, $k \geqq N$ ならば $d(a_k, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる.

このとき, $m, n \geqq N$ ならば, $d(a_m, a_n) \leqq d(a_m, \alpha) + d(\alpha, a_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

これで, 収束列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がCauchy列であることが示された. □

$\boxed{\text{収束しないCauchy列の例}}$ (収束しているように見えるが, 収束先がない点列)

$X = \mathbb{Q}$, $d(x, y) = |x - y|$ で距離空間 (X, d) を定める.

$a_n = (\sqrt{2}$ を小数点以下第n桁目で切って得られる数$) \in \mathbb{Q}$ とおく

このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $X = \mathbb{Q}$ 内のCauchy列になる.

しかし, その収束先の $\sqrt{2}$ は $X = \mathbb{Q}$ に含まれないので,

$X = \mathbb{Q}$ の中で $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しない. □

$\boxed{\text{Cauchy列は有界}}$ 距離空間 X 内の Cauchy列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である.

$\boxed{\text{証明}}$ $\varepsilon = 1$ とすると, ある N が存在して, $m, n \geqq N$ ならば $d(a_m, a_n) < \varepsilon = 1$.

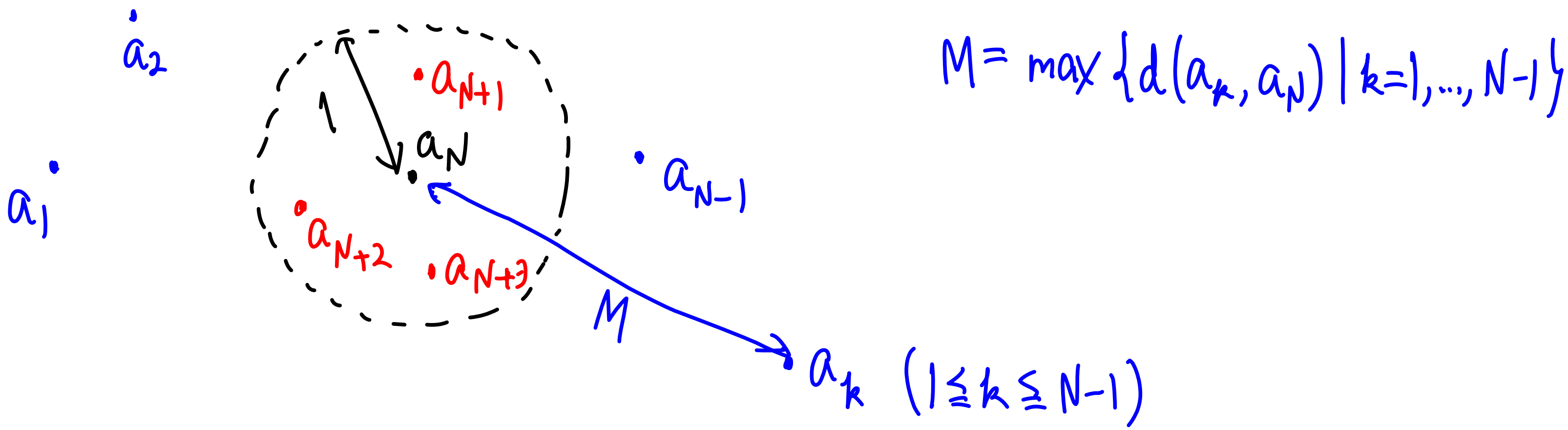
$M = \max\{d(a_1, a_N), d(a_2, a_N), \ldots, d(a_{N-1}, a_N)\}$ とおく.

以上の状況では, 以下のようになっている;

- $n = N, N+1, N+2, \ldots$ のとき, $d(a_n, a_N) < 1$.
- $n = 1, 2, \ldots, N-1$ のとき, $d(a_n, a_N) \leqq M$.

ゆえに, 任意の番号 n について, $d(a_n, a_N) \leqq \max\{1, M\}$.

これで $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることがわかった. $\square$



$\boxed{\text{7/9 追加}}$

$\boxed{\text{定義}}$ 距離空間 X が完備 (complete) であるとは,

X 内の任意の Cauchy 列が X 内のある点に収束することであると定める. $\square$

$\boxed{\text{例}}$ 絶対値に関する通常の距離について $\mathbb{R}$ は完備である.

これは, 実数の連続性を特徴付ける互いに同値な条件のひとつ. $\square$

定理 Xは完備距離空間であるとし，$A\subset X$であるとする．（AをXの距離部分空間とみなす）

このとき，Aは完備 $\Leftrightarrow$ AはXの閉集合．

（注 完備性の条件はAの入れもののXと無関係に定義されるが，閉集合であるという条件はAの入れもののXを指定しないと確定しない．）

証明 Aは完備 $\Rightarrow$ AはXの閉集合の証明　対偶を示す．（$\Rightarrow$の証明ではXの完備性を使わない）

AはXの閉集合でないと仮定する．このとき，$\alpha\in X\setminus A$が存在して，

任意の$\varepsilon>0$について$U_\varepsilon(\alpha)\cap A\neq\phi$．（$X\setminus A$が$X$の開集合でないという条件）

ゆえに，A内の点列$\{a_n\}_{n=1}^\infty$で$a_n\in U_{1/n}(\alpha)\cap A$ $(n=1,2,\dots)$をみたすものを作れる．

このとき，$d(a_n,\alpha)<\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\dots)$なので$\{a_n\}_{n=1}^\infty$は$\alpha\in X\setminus A$に収束する．

ゆえに，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$はX内のCauchy列でもある．← 収束列 $\Rightarrow$ Cauchy列

Aの距離函数はXの距離函数の制限なので，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$はA内のCauchy列でもある．

しかし，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$の収束先αはAに含まれないので，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$はA内では収束しない．

ゆえに，Aは完備でないことがわかった．

AはXの閉集合 ⇒ Aは完備 の証明

AはXの閉集合であると仮定する。

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はA内の任意のCauchy列であるとする。

Xの距離函数はAの距離函数の拡張になっているので、

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はX内でのCauchy列でもある。

Xは完備だと仮定していたので、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はある$\alpha \in X$に収束する。

Aは閉集合だと仮定したので、$\alpha \in A$となる。← 以前証明した。

これで、A内の任意のCauchy列がA内に収束することがわかった。

ゆえにAは完備である。

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

証明を読むときには

- 1つひとつの文を正確に解釈していく。
- 定義や同値な条件を忘れていたら必ず調べる。
- 1つの文を読むのに数十分かかることは普通。

完備距離空間の例

定義 ノルムが与えられた$\mathbb{R}$上のベクトル空間を$\mathbb{R}$上の<u>ノルム空間</u>という。
ノルム$\|\cdot\|$によって、距離函数を$d(x,y)=\|x-y\|$と定めることによって、
ノルム空間は自然に距離空間とみなされる。
完備なノルム空間を<u>Banach空間</u>(Banach space(バナッハ))と呼ぶ。 $\square$

例 $(\mathbb{R},|\cdot|)$は完備であり、1次元Banach空間とみなされる。(実数の連続性) $\square$

例 $\mathbb{R}^n$に任意のノルムを入れたものはBanach空間になる。

$\mathbb{R}^n$のノルムはすべて互いに同値なので、1つのノルムについてBanach空間になることを示せば十分である。ノルム

ℓ^∞-norm

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}, \quad x=[x_i]_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$$

に関する$\mathbb{R}^n$の完備性は$\mathbb{R}$の完備性に容易に帰着する。 $\square$

例 $\mathbb{R}^n$の閉集合は完備距離空間とみなされる。$\square$ (後でコンパクト距離空間も完備であることを説明する。)

$\boxed{\text{定理}}$ $C([a,b],\mathbb{R})=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\mid f\text{は連続}\}$ は自然に $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなされる。これに sup ノルム

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)| \qquad (f\in C([a,b],\mathbb{R}))$$

を入れたものは Banach空間になる。

注 $[a,b]$ はコンパクトで、$f\in C([a,b],\mathbb{R})$ について、$x\mapsto|f(x)|$ という写像は $[a,b]$ 上の実数値連続函数になるので、最大値を持つ。ゆえに、

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]}|f(x)| < \infty \qquad (f\in C([a,b],\mathbb{R})).$$

これより、$\|\cdot\|_\infty$ がノルムとして well-defined であることがわかる。

$\boxed{\text{証明}}$ (完備性の証明)

19世紀初頭の数学者(仏)

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ の高校教科書の証明

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $C([a,b],\mathbb{R})$ における $\|\cdot\|_\infty$ に関する Cauchy列であると仮定する。

① 各$x\in[a,b]$について，実数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$がCauchy列になることを示そう。

任意に$\varepsilon>0$をとる。

関数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$は$\|\cdot\|_{\infty}$してCauchy列なので，

ある番号Nが存在して，$m,n\geqq N$ならば$\|f_m-f_n\|_{\infty}=\sup_{y\in[a,b]}|f_m(y)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$,

$$|f_m(x)-f_n(x)|\leqq\sup_{y\in[a,b]}|f_m(y)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon\qquad(x\in[a,b]).$$

特に，各$x\in[a,b]$ごとに実数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$はCauchy列になる。

② $\mathbb{R}$の完備性より，各$x\in[a,b]$ごとに$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$は収束するので，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\qquad(x\in[a,b])$$

によって，関数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$を定義できる。

③ $m,n\geqq N$のとき，$|f_m(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ $(x\in[a,b])$なので，$n\to\infty$の極限によって，

$$m\geqq N \text{ ならば } |f_m(x)-f(x)|\leqq\frac{\varepsilon}{3}\quad(x\in[a,b])$$

を得る。

つづく。

④ ゆえに、

注 fの連続性はまだ示されていない。

$m \geqq N$ ならば $\displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f_m(x) - f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$.

⑤ $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ すなわち f が連続であることを示そう。 $x \in [a,b]$ とする。

f_N は連続なので、ある $\delta > 0$ が存在して、

$x' \in [a,b]$ かつ $|x'-x| < \delta$ ならば、 $|f_N(x') - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ となるので、

$$|f(x') - f(x)| \leqq \underbrace{|f(x') - f_N(x')|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(x') - f_N(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(x) - f(x)|}_{\leqq\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

これで、fの連続性を示せた。 $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ である。

⑥ したがって、 $m \geqq N$ ならば

$$\|f_m - f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f_m(x) - f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

これで、$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ が $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ に $\|\cdot\|_\infty$ について収束することがわかった。

ゆえに、$C([a,b],\mathbb{R})$ は $\|\cdot\|_\infty$ について Banach 空間である。

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

完備性と絶対収束の概念は表裏一体

定理 $(V, \|\cdot\|)$ は $\mathbb{R}$ 上のノルム空間であるとする。以下の2つの条件は互いに同値である。

(a) $(V, \|\cdot\|)$ は Banach空間である(完備である)。

(b) V 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ が有限の値に収束するならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ は $\|\cdot\|$ について収束する。

注 (b)の状況のもとで級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという。

例 収束するが絶対収束していない級数の例。

(1) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$ のときの $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2$.

(2) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ $(n=1, 2, \cdots)$ のときの $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. □

$\boxed{\text{定理の証明}}$ $\underline{(a)\Rightarrow(b)}$ $(V, \|\cdot\|)$ は完備であると仮定する.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は V 内の点列で $\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|a_k\|$ は有限の値に収束していると仮定する.

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく. V 内の点列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示したい.

$(V, \|\cdot\|)$ は完備だと仮定したので, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることを示せば十分.

$S_n = \sum_{k=1}^{n}\|a_k\|$ とおくと, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある実数に収束しているので, ゆえに Cauchy 列にもなっている. ゆえに, ある N が存在して, $N \leqq m \leqq n$ ならば $S_n - S_m < \varepsilon$ となり,

$$\|s_n - s_m\| = \|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n\| \leqq \|a_{m+1}\| + \|a_{m+2}\| + \cdots + \|a_n\| = S_n - S_m < \varepsilon.$$

これで, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることがわかった.

以上で $(a)\Rightarrow(b)$ が示された.

(b) ⇒ (a)　(b)を仮定する．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $(V, \|\cdot\|)$ の Cauchy列であるとする．

m, n を十分大きくすると $\|a_m - a_n\|$ を小さくできる．

このとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $(1 \leqq n_1 < n_2 < \cdots)$ をうまくとって，

$$\|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

となるようにできる．

証明のポイント

$b_1 = a_{n_1}$，$b_i = a_{n_i} - a_{n_{i-1}}$ $(i = 2, 3, \ldots)$ とおく．このとき，$a_{n_k} = \sum_{i=1}^{k} b_i$，

$$\sum_{i=1}^{k} \|b_i\| = \|a_{n_1}\| + \sum_{i=2}^{k} \|a_{n_i} - a_{n_{i-1}}\| \leqq \|a_{n_1}\| + \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{2^{i-1}} < \|a_{n_1}\| + 1.$$

ゆえに，$\sum_{i=1}^{\infty} \|b_i\|$ は $\|a_{n_1}\| + 1$ 以下の実数に収束する．

したがって，部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は (b)の仮定よりある $\alpha \in V$ に収束する．

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も α に収束することを示そう.

$\varepsilon > 0$ を任意にとる.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列だと仮定していたので, ある N_1 が存在して,

$$m, n \geqq N_1 \text{ ならば } \|a_n - a_m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は $\alpha \in V$ に収束していたので, ある N_2 が存在して,

$$k \geqq N_2 \text{ ならば } \|a_{n_k} - \alpha\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

k を $k \geqq N_2$ かつ $n_k \geqq N_1$ をみたすようにとると, $n \geqq N_1$ のとき,

$$\|a_n - \alpha\| \leqq \|a_n - a_{n_k}\| + \|a_{n_k} - \alpha\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

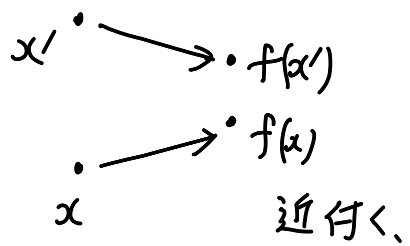
これで, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も α に収束していることがわかった.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

縮小写像

完備距離空間で非常によく使われる!

定義 X は距離空間であるとし, 写像 $f: X \to X$ を考える.



$0 \leqq c < 1$ をみたすある実数 c が存在して,

任意の $x, x' \in X$ について $d(f(x), f(x')) \leqq c\, d(x, x')$

となるとき, f は縮小写像 (contracting mapping) であるという. □

注 縮小写像は(一様)連続になる. □

定義 集合 X と写像 $f: X \to X$ について, $f(x) = x$ をみたす $x \in X$ を f の不動点 (fixed point) であるという. □

定理 X が完備距離空間で f がその縮小写像であるとき, f の不動点がただ1つ存在する. □

⇑ 完備性

← 不動点定理の一種

応用

- 常微分方程式論における Lipschitz 条件のもとでの Picard の逐次近似法,
- 逆写像定理の証明.

定理の証明 $f: X \to X$ を n 個合成してできる写像を $f^n = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n}$ と書く。

$0 \leqq c < 1$ でかつ $d(f(x), f(x')) \leqq c\, d(x, x')$ $(x, x' \in X)$ と仮定する。

このとき、$d(f^n(x), f^n(x')) \leqq c^n d(x, x') \to 0$ $(n \to \infty)$ となる。

不動点の一意性 $\alpha, \beta \in X$ が f の不動点ならば、

$d(\alpha, \beta) = d(f^n(\alpha), f^n(\beta)) \leqq c^n d(\alpha, \beta) \to 0$ $(n \to \infty)$ なので $d(\alpha, \beta) = 0$. $\therefore\ \alpha = \beta$.

不動点の存在 X の完備性を使う。$x_0 \in X$ を任意にとり、$x_n = f^n(x_0)$ とおく。

このとき $m \leqq n$ ならば

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_0) &\leqq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_1, x_0) \\
&= d(f^{n-1}(x_1), f^{n-1}(x_0)) + d(f^{n-2}(x_1), f^{n-2}(x_0)) + \cdots + d(x_1, x_0) \\
&\leqq c^{n-1} d(x_1, x_0) + c^{n-2} d(x_1, x_0) + \cdots + 1 \cdot d(x_1, x_0) \\
&= (c^{n-1} + c^{n-2} + \cdots + 1)\, d(x_1, x_0) \leqq \frac{d(x_1, x_0)}{1-c}
\end{aligned}
$$

$$
d(x_n, x_m) = d(f^m(x_{n-m}), f^m(x_0)) \leqq c^m d(x_{n-m}, x_0) \leqq c^m \frac{d(x_1, x_0)}{1-c} \to 0 \quad (m \to \infty).
$$

ゆえに、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列であるので、X の完備性より、ある $x_\infty \in X$ に収束する。

このとき、$f(x_\infty) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x_\infty$.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

コンパクト距離空間の特徴付け （重要だが証明をすべて理解するのは大変）

定理 Xは距離空間であるとする．このとき，以下の3条件は互いに同値である；

(a) Xはコンパクトである．（Xの任意の開被覆は有限部分被覆を持つ．）

(b) X内の任意の点列は収束する部分列を持つ．

(c) Xは全有界かつ完備である． $\square$

応用例 $\mathbb{R}^n$の部分集合Aについて

① Aは有界 $\Leftrightarrow$ Aは全有界 （$\Leftarrow$は自明，$\Rightarrow$は$A \subset \mathbb{R}^n$を使う．）

② $\mathbb{R}^n$は完備なので，Aは$\mathbb{R}^n$の閉集合 $\Leftrightarrow$ Aは完備．

ゆえに，

③ Aはコンパクト $\Leftrightarrow$ Aは有界閉集合．（$A \subset \mathbb{R}^n$とい前提が重要）． $\square$

準備

定理 (易しい) コンパクト位相空間Xの閉集合Fもコンパクトである。

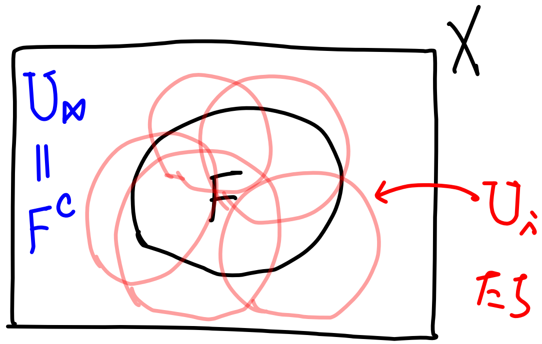
(相対位相について)

証明 V_i $(i \in I)$ は相対位相に関するFの開被覆であると仮定する。

相対位相の定義より、各V_iは$V_i = U_i \cap F$ (U_iはXの開集合)と書ける。

$U_\infty = F^c = X \setminus F$ はXの開集合である。

$X = U_\infty \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ というXの開被覆が得られる。



Xはコンパクトなので、ある有限個の$i_1, \dots, i_n \in I$ が存在して、$X = U_\infty \cup \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$ となる。

このとき、$F = X \cap F = \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$ となる。

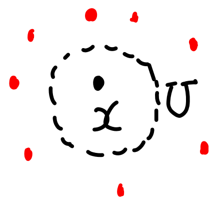
これでFがコンパクトであることを示せた。 $\square$

(a) コンパクト $\Rightarrow$ (b) 任意の点列は収束する部分列を持つ

補題 易 コンパクト位相空間 X の無限部分集合は集積点を持つ。

証明 $A \subset X$ かつ A は集積点を持たないと仮定し、A が有限集合になることを示せばよい。

任意の $x \in X \setminus A$ は A の集積点でないので、



x は A の集積点ではない。

X のある開集合 U で $x \in U$ かつ $U \cap A \neq \phi$ をみたすものが存在する。

ゆえに、A は X の閉集合である。

前ページの結果より、A はコンパクトになる。

任意の $a \in A$ は A の X における集積点でないので、X のある開集合 U_a で $a \in U_a$ かつ $U_a \cap A = \{a\}$ をみたすものが存在する。($U_a \cap A = \{a\}$ は A の開集合)

このとき、$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ は A の開被覆であり、A はコンパクトなので有限個の $a_1, \dots, a_n \in A$ が存在して $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} = \{a_1, \dots, a_n\}$ となり、A は有限集合であることがわかる。 □

(a) ⇒ (b)の証明　(a)を仮定する（Xはコンパクトと仮定する）.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ はX内の任意の点列であると仮定する.

$A = \{x_n \mid n=1,2,\ldots\}$ とおく、Aがもしも有限集合ならば、ある$\alpha \in X$が存在して、無限個の $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ について、$x_{n_k} = \alpha \quad (k=1,2,\ldots)$ をみたすものが存在する.
そのとき、部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ はαに収束する.

以下、Aは無限集合だと仮定する. そのとき、先の補題より、Aの集積点$\alpha \in X$が存在する. $n_1 < n_2 < \cdots$ で $x_{n_k} \in U_{1/k}(\alpha) \quad (k=1,2,\ldots)$ をみたすものを帰納的に作ろう.

αはAの集積点なので、$U_{1/1}(\alpha)$ はあるx_{n_1}を含む.

$n_1 < \cdots < n_k$ で $x_{n_j} \in U_{1/j}(\alpha) \quad (j=1,\ldots,k)$ をみたすものをすでに作れていると仮定する.

もしも、n_kよりも大きいすべてのnについて $x_n \notin U_{\frac{1}{k+1}}(\alpha)$ となってしまっているならば $x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}$ の中でα以外のものとαの最短距離と$\frac{1}{k+1}$の小さい方をεとすると、$U_\varepsilon(\alpha)$ はAのα以外の点を含まなくなる.（α以外の$x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}$のそれぞれと$\alpha$の距離は$\varepsilon$以上になり、$x_{n_k+1}, x_{n_k+2}, \ldots$ のそれぞれとαの距離もε以上になっている.）
これはαがAの集積点であることに反する.

ゆえにある $n_{k+1} > n_k$ で $x_{n_{k+1}} \in U_{\frac{1}{k+1}}(\alpha)$ をみたすものが存在する。

これで $n_1 < n_2 < \cdots$ で $x_{n_k} \in U_{1/k}(\alpha)$ $(k=1, 2, \cdots)$ をみたすものを作れた。

このとき、部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は α に収束している。 $\square$

(b) 任意の点列が収束する部分列を持つ ⇒ (c) 全有界かつ完備の証明

(b) を仮定する.

<u>Xの完備性</u>　$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 内の Cauchy 列であると仮定する.

(b) より, ある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ である $\alpha \in X$ に収束するものが存在する.

任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列なので, ある N が存在して, $m, n \geqq N$ ならば $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は α に収束しているので, ある K が存在して, $k \geqq K$ ならば $d(x_{n_k}, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$.

ある $k \geqq K$ で $n_k \geqq N$ となるものをとれる.

このとき, $m \geqq N$ ならば

$$d(x_m, \alpha) \leqq d(x_m, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ も α に収束することを示せた.

(注　Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$ をみたすので, ある部分列が α に収束しているならばもとの Cauchy 列も α に収束することは直観的には当然であろう.)

Xの全有界性　Xが全有界でないならば(b)に反することを示せばよい.

Xは全有界でないと仮定する. すなわち, ある$\varepsilon>0$が存在して, 有限個の$U_\varepsilon(x)$たちでXをおおえないと仮定する.

帰納的に$x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_\varepsilon(x_i)$ $(n=1,2,\dots)$をみたす$x_1, x_2, \dots \in X$を作ろう.

$X=\phi$ならばXは全有界になるので$X \neq \phi$. 任意に$x_1 \in X$をとる.

$x_k \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} U_\varepsilon(x_i)$ $(k=1,\dots,n)$をみたす$x_1, x_2, \dots, x_n \in X$がすでにとれていると仮定する. このとき, εの取り方より, $X \supsetneq \bigcup_{i=1}^{n} U_\varepsilon(x_i)$となるので, ある$x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_\varepsilon(x_i)$をとれる.

これで$x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_\varepsilon(x_i)$ $(n=1,2,\dots)$をみたすX内の点列$\{x_n\}_{n=1}^\infty$を作れた.

このとき, $m<n$ならば$d(x_n, x_m) \geqq \varepsilon$となるので, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$の部分列でCauchy列を作れない. 収束列はCauchy列なので, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$の収束部分列を作れない. これは(b)に反する.

以上で(b) $\Rightarrow$ (c)を示せた. $\square$

(c) 全有界かつ完備 ⇒ (a) コンパクト の証明

定義 位相空間 X が第二可算公理をみたすとは，X の開集合の高々可算な集合 $\mathcal{B}$ で以下の条件をみたすものが存在することであると定める：

(B) X の任意の開集合は $\mathcal{B}$ に含まれる開集合たちの和集合で書ける． □

例 $\mathbb{R}^n$ は第二可算公理をみたす．たとえば

$$\mathcal{B} = \left\{ U_\varepsilon(x) \,\middle|\, x \in \mathbb{Q}^n,\ \varepsilon \in \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \right\} \right\}$$

がとれる． □

例 位相空間 X が第二可算公理をみたせば，その部分集合も相対位相について第二可算公理をみたす． □

$\boxed{\text{補題1}}$ 全有界な距離空間 X は第二可算公理をみたす.

$\boxed{\text{証明}}$ X は全有界なので, 任意の $N=1,2,\dots$ に対して,
X の有限部分集合 A_N で $X=\bigcup_{a\in A_N} U_{\frac{1}{N}}(a)$ をみたすものが存在する.
$\mathcal{B}=\bigcup_{N=1}^{\infty}\{U_{\frac{1}{N}}(a)\mid a\in A_N\}$ とおく. $\mathcal{B}$ は高々可算な集合である.

U は X の任意の開集合であるとする.

任意に $x\in U$ をとる. ある $\varepsilon>0$ で $U_\varepsilon(x)\subset U$ となるものが存在する.
$\frac{1}{N}\leqq\frac{\varepsilon}{2}$ となるように N をとれる. ある $a\in A_N$ で $x\in U_{\frac{1}{N}}(a)$ をみたすものがある.
このとき, 任意の $y\in U_{\frac{1}{N}}(a)$ について

$$d(y,x)\leqq d(y,a)+d(a,x)<\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\leqq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

なので, $y\in U_\varepsilon(x)$. すなわち, $U_{\frac{1}{N}}(a)\subset U_\varepsilon(x)\subset U$.

この $U_{\frac{1}{N}}(a)$ を $B_x\in\mathcal{B}$ と書く. $x\in U$ について $x\in B_x$ かつ $B\subset U$.
ゆえに, $U=\bigcup_{x\in U}B_x$. $\square$

$\boxed{\text{補題 2}}$ 全有界距離空間 X 内の任意の点列は Cauchy 部分列を持つ.

$\boxed{\text{証明}}$ (対角線論法!)

X は全有界なので, 任意の $k=1,2,\ldots$ に対して, X の有限部分集合 A_k で
$X = \bigcup_{a\in A_k} U_{1/k}(a)$ をみたすものが存在する.

$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は X 内の任意の点列であるとする. $k=1,2,\ldots$ について,

$$(*) \qquad d(x_m^{(k)}, x_n^{(k)}) < \frac{1}{k} \quad (m,n=1,2,\ldots)$$

をみたす $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$ で, $\{x_n^{(k+1)}\}_{n=1}^\infty$ が $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$ の部分列になっているものを作ろう.

<u>$k=1$ の場合</u> $X = \bigcup_{a\in A_2} U_{1/2}(a)$ で A_2 は有限集合なので, ある $a\in A_2$ が存在して, 無限個の m について $x_m \in U_{1/2}(a)$ となるものが存在する.
そのような x_m たち全体を $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列とみなしたものを $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$ と書こう. このとき, $x_m^{(1)}, x_n^{(1)} \in U_{1/2}(a)$ なので, 次のように $(*)$ をみたす:

$$d(x_m^{(1)}, x_n^{(1)}) \le d(x_m^{(1)}, a) + d(a, x_n^{(1)}) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{1}.$$

$k \geqq 1$ の場合　$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ で(*)をみたしているものがすでに得られていると仮定する.

$X = \bigcup_{a \in A_{2(k+1)}} U_{1/(2(k+1))}(a)$ で $A_{2(k+1)}$ は有限集合なので, ある $a \in A_{2(k+1)}$ が存在して, 無限個の m について $x_m^{(k)} \in U_{1/(2(k+1))}(a)$ となる.

そのような $x_m^{(k)}$ たち全体を $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列とみなしたものを $\{x_n^{(k+1)}\}_{n=1}^{\infty}$ と書く. このとき, $x_m^{(k+1)}, x_n^{(k+1)} \in U_{1/(2(k+1))}(a)$ なので

$$d(x_m^{(k+1)}, x_n^{(k+1)}) \leqq d(x_m^{(k+1)}, a) + d(a, x_n^{(k+1)}) < \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{k+1}.$$

すなわち, $\{x_n^{(k+1)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $k+1$ に対する(*)をみたす.

これでほしい $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ を作れた.

$l \geqq k$ のとき, $\{x_n^{(l)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\{x_m^{(k)}\}_{m=1}^{\infty}$ の部分列なので $d(x_n^{(l)}, x_m^{(k)}) < \frac{1}{k}$.

$\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列になる。（$\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ を考えることが対角線論法！）

任意に $\varepsilon > 0$ をとる。$\frac{1}{N} < \varepsilon$ となるように番号 N をとる。

このとき，$m, n \geqq N$ について，

$$d(x_m^{(m)}, x_n^{(n)}) < \frac{1}{\min\{m, n\}} \leqq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

ゆえに $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である。 $\square$

$\boxed{\text{(c)} \Rightarrow \text{(a) の証明}}$ (c)を仮定する(Xは全有界完備と仮定する)。

$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は X の任意の開被覆であるとする。

補題1より、X の開集合の高々可算な集合 $\mathcal{B}$ が存在して、X の任意の開集合は $\mathcal{B}$ に含まれる開集合たちの和集合で書ける。

$\mathcal{A}_\lambda = \{ B \in \mathcal{B} \mid B \subset U_\lambda \}$ とおくと、$U_\lambda = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_\lambda} B$ となる。

$\mathcal{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とおくと、$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ なので $\mathcal{A}$ は高々可算である。

$X = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$ となっている。 ($X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ に関する問題を $X = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$ に関する問題におきかえる。)

もしも有限個の $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ で $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ をみたすものが存在することを示せば、各 i について $B_i \subset U_{\lambda_i}$ をみたす $\lambda_i \in \Lambda$ をとれば

$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$ となって、X がコンパクトであることがわかる。

ゆえに，有限個の$\mathcal{A}$の元たちでXをおおえないと仮定して矛盾をみちびけば証明が終わる．

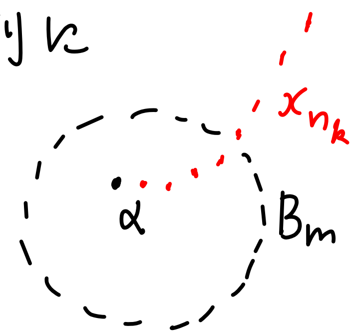
有限個の$\mathcal{A}$の元たちでXをおおえないと仮定する．

そのとき$\mathcal{A}$は無限集合になり，$\mathcal{A}$は高々可算なので，$\mathcal{A}$は可算になる．

$\mathcal{A}=\{B_1, B_2, B_3, \dots\}$と書く．$X \supsetneq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ $(n=1,2,\dots)$となっている．

ゆえに，$x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i$をみたす$X$の点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$をとれる．

Xの全有界性と補題2より，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$の部分列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$でCauchy列になるものが存在する．



Xの完備性より，$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$はある$\alpha \in X$に収束する．

$X = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$より，ある$m$が存在して，$\alpha \in B_m$となる．

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$は$\alpha$に収束するので，ある$K$が存在して，$k \geqq K$ならば$x_{n_k} \in B_m$．

$x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} B_i$より，$n \geqq m$ならば$x_n \notin B_m$，$\left(x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} B_i \supset B_m\right)$

$k=\max\{m, K\}$とおくと，$k \geqq K$なので$x_{n_k} \in B_m$となるはずなのに

$n_k \geqq k \geqq m$なので$x_{n_k} \notin B_m$となって矛盾する． □

距離空間の完備化 (completion)

X は距離空間であるとする.

おおざっぱな定義 距離空間 X のすきまをむだなく埋めて作られた完備距離空間を X の完備化と呼ぶ. □

定義 距離空間 $\tilde{X}$ と写像 $i: X \to \tilde{X}$ の組 $(\tilde{X}, i)$ が X の完備化とは以下の条件が成立していることだと定める:

(C1) $\tilde{X}$ は完備である. ← すきまを埋めた

(C2) $i: X \to \tilde{X}$ は等長写像(距離を保つ写像)である.

注 等長写像は単射になる.

(C1), (C2) は X が完備距離空間 $\tilde{X}$ の部分空間とみなせることを意味している.

(C3) $i(X)$ は $\tilde{X}$ において稠密(ちゅうみつ)である. ← むだがない. □

注意 $(\tilde{X}, i: X \hookrightarrow \tilde{X})$ が X の完備化のときには, 通常 $i(X)$ と X を同一視して, $X \subset \tilde{X}$ とみなし, X を $\tilde{X}$ の部分空間とみなす. □

注意 距離空間の完備化は常に存在し, 本質的に一意的である. □

例 $X=\mathbb{Q}$ (距離は通常の絶対値による距離) のとき, $\mathbb{R}$ はその完備化になる. □

例 p は素数であるとする. このとき, $x\in\mathbb{Q}^{\times}=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ は

$$x=\pm p^{N}\frac{a}{b},\ N\in\mathbb{Z},\ a,b\in\mathbb{Z}_{>0},\ a,b \text{ は互いに素で } p \text{ でわりきれない}$$

と一意に書ける. このとき, <u>p進付値</u> (p-adic valuation) $|x|_p$ を

$$|x|_p=p^{-N},\quad |0|_p=0$$

と定める. このとき, $x,y\in\mathbb{Q}$ について

$$|xy|_p=|x|_p|y|_p,\quad |x+y|_p\leqq\max\{|x|_p,|y|_p\}\underset{\text{自明}}{\leqq}|x|_p+|y|_p.$$

ゆえに $d_p(x,y)=|x-y|_p$ によって, $\mathbb{Q}$ に通常とは異なる距離を入れることができる. d_p を p進距離と呼ぶ.

$\mathbb{Q}$ の p進距離に関する完備化にも体の構造を入れることができ, $\mathbb{Q}_p$ と一般に書かれ, <u>p進体</u> (p-adic field) と呼ばれる. □

注 $\mathbb{Q}$ の"自然な"完備化は $\mathbb{R}$ 以外に $\mathbb{Q}_p$ もある! □

例 $\mathbb{R}$上のベクトル空間 V を

$$V=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\mid f\text{は多項式で表現できる}\}$$

と定め，V にノルムを

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\quad(f\in V)$$

と定める．このノルムで V を距離空間とみなす．これの完備化は

$$C([a,b],\mathbb{R})=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\mid f\text{は連続}\}$$

にノルムを

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\quad(f\in C([a,b],\mathbb{R}))$$

と定めたものになる．$C([a,b],\mathbb{R})$ は完備（Banach空間）であることをみとめると V が $C([a,b],\mathbb{R})$ の中で稠密であること（任意の $f\in C([a,b],\mathbb{R})$ が V の元でいくらでも一様近似できること）を示せれば，$C([a,b],\mathbb{R})$ が V の完備化であることがわかる．Weierstrassの多項式近似定理によってそのことがわかる． $\square$

完備化の構成の概略

Cachy列は
収束しているように"見える"点列
のことであった。

定理 任意の距離空間 X の完備化が存在する。

略証 X における Cauchy列全体の集合を C と書く。

C に同値関係 $\sim$ を次のように入れる:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

各Cauchy列ごとに
その収束先の点を作れば
完備化を作れる。

$\tilde{X} = C/\sim$ とおく。

{xに収束するX内の点列全体}
$\shortparallel$

$i: X \to \tilde{X}$ を $i(x) = [\{x\}_{n=1}^{\infty}] = $ (xだけからなる点列の同値類) と定める。

$\tilde{X}$ に距離函数を $\tilde{d}([\{x_n\}_{n=1}^{\infty}], [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ と定めることができる。

このとき, $(\tilde{X}, i)$ が X の完備化になることを示せる。

詳しい証明は長いので略す。 $\square$

例 $X = \mathbb{Q}$ (距離は通常の絶対値による距離) のとき, 上の方法で, $\pi \in \mathbb{R}$ は有理数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($x_1 = 3.1$, $x_2 = 3.14$, $x_3 = 3.141$, ...) の同値類として作られる。 $\square$

完備化の本質的な一意性 (完備化の普遍性 (universality))

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ \tilde{X} \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", near start, shift left=3] & \end{tikzcd}$$

定理 $(\tilde{X}, i: X \hookrightarrow \tilde{X})$ は X の完備化であるとする。

このとき、任意の完備距離空間 Y と一様連続写像 $f: X \to Y$ の組 $(Y, f: X \to Y)$ に対して、ある一様連続写像 $\tilde{f}: \tilde{X} \to Y$ で $\tilde{f} \circ i = f$ をみたすものが一意に存在する。(このような $(Y, f: X \to Y)$ の組全体の中で完備化が親玉であるということ。)

略証 以下、$i(X) = X$ と同一視しておく。そのとき、$\tilde{f} \circ i = f$ は $\tilde{f}$ が f の拡張になっていることを意味する。

X は $\tilde{X}$ で稠密なので、任意 $\tilde{x} \in \tilde{X}$ に対して、X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\tilde{x}$ に収束するものが存在する。

一様連続写像は Cauchy列を保つ (一様連続でない場合の反例 $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - \sqrt{2})^{-1}$)

$f: X \to Y$ は一様連続写像なので、$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は Y における Cauchy列になる。

Y は完備なので $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は Y の中で収束する。

$\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ は $\tilde{x}$ に収束する X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のとり方によらないことも示せる。

したがって、$\tilde{f}(\tilde{x}) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$ で写像 $\tilde{f}: \tilde{X} \to Y$ を定義できる。

これは $\tilde{f} \circ i = f$ をみたしている。この $\tilde{f}$ が存在を示したい $\tilde{f}$ である。

v ヴイ　ν ニュー

これで，$\tilde{f}$ の存在を示せた．

一意性は，$\tilde{f}\circ i = f$ をみたす(一様)連続写像 $\tilde{f}:\tilde{X}\to Y$ は，前ページの $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{f}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty}\tilde{f}(x_n) \underset{\uparrow \atop \tilde{f}\circ i = f}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

となり，上で作ったものと同じにならなければいけないことからわかる．　□

ニュー

$\boxed{\text{系}}$ $(\tilde{X}_\nu,\ i_\nu : X\to\tilde{X}_\nu)$ $(\nu=1,2)$ は距離空間 X の完備化であるとする．

このとき2つの等長写像 $\tilde{i}_2:\tilde{X}_1\to\tilde{X}_2$ と $\tilde{i}_1:\tilde{X}_2\to\tilde{X}_1$ で互いに相手の逆写像になっているものが一意的に存在する．

$\boxed{\text{略証}}$ 上の定理を $f = i_1, i_2$ の場合に使えばよい．

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "i_2"'] \arrow[d, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"] & \\
\tilde{X}_2 \arrow[r, dashed, "\tilde{i}_1"'] \arrow[ur, phantom, "G"] & \tilde{X}_1 \arrow[r, dashed, "\tilde{i}_2"'] \arrow[ur, phantom, "G"] & \tilde{X}_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "i_2"'] \arrow[dr, "i_2"] & \\
\tilde{X}_2 \arrow[rr, dashed, "\mathrm{id}_{\tilde{X}_2}"'] \arrow[rr, phantom, "G", yshift=4ex] & & \tilde{X}_2
\end{tikzcd}$$

の比較より，$\tilde{i}_2\circ\tilde{i}_1 = \mathrm{id}_{\tilde{X}_2}$　□

Weierstrassの多項式近似定理

$a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ とする。

定理 閉区間 $[a,b]$ 上の任意の連続函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して、多項式函数たち $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で f に一様収束するものが存在する。

証明 (高木貞治『解析概論』第6章§78で紹介されているSerge Bernsteinの方法)

準備 (確率論での二項分布に関する結果)

$\varphi_{n,k}(x)$ をBernsteinの多項式と呼ばれることもある。

多項式 $\varphi_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ $(k=0,1,2,\ldots,n)$ とおく。

ここで $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} =$ (n個からk個とる組み合わせの個数)、 ← ${}_nC_k$

$\boxed{1}$

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \overset{\text{二項定理}}{=} (x+(1-x))^n = 1^n = 1.$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,\varphi_{n,k}(x) = nx$ を示そう。 (平均)

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = nx \overbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}}^{1 \,\overset{\text{二項定理}}{=}} = nx.$$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\varphi_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$ を示そう。

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 \overbrace{\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}x^{k-2}(1-x)^{n-k}}^{\substack{1 \\ \shortparallel \ \leftarrow \text{二項定理}}} = n(n-1)x^2.$$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n}k(k-1)\varphi_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n}k\varphi_{n,k}(x)$

$$\overset{\boxed{2},\boxed{3}}{=} n(n-1)x^2 + nx.$$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n}k^2\varphi_{n,k}(x) - 2nx\sum_{k=0}^{n}k\varphi_{n,k}(x) + n^2x^2\sum_{k=0}^{n}\varphi_{n,k}$

$$\overset{\boxed{4},\boxed{2},\boxed{1}}{=} \underline{n(n-1)x^2}\boxed{+nx} - 2nx\cdot nx + n^2x^2$$

キャンセル

$$= n^2x^2 \boxed{-nx^2}$$

$$= nx - nx^2 = nx(1-x).$$ (分散)

以上で準備終。

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続であるとする。

$g(x)=f((1-x)a+xb)$ で、連続関数 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ を定める。

このとき、$f(x)=g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ $(a\leqq x\leqq b)$ となっている。

ゆえに、$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ の代わりに、$g:[0,1]\to\mathbb{R}$ について、定理を示せば十分である。(g に一様収束する多項式函数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ を作ればよい。)

多項式函数 $g_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ を

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_{n,k}(x) \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

と定める。

$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $[0,1]$ 上で g に一様収束することを示そう。

任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

$\boxed{6}$ g はコンパクトな $[0,1]$ 上の実数値連続函数なので, $M = \max_{x \in [0,1]} |g(x)|$ が存在する.

$\boxed{7}$ g はコンパクト距離空間 $[0,1]$ 上の実数値連続函数なので, 一様連続になる. ゆえに, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$x, y \in [0,1] \text{ かつ } |x-y| < \delta \Longrightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\boxed{8}$ 正の整数 N を十分大きくして, $\dfrac{M}{2N\delta^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となるようにしておく. そして, 以下, $n \geqq N$ と仮定し, $x \in [0,1]$ を任意にとって固定しておく.

$\boxed{9}$

$$g(x) - g_n(x) = g(x) \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \varphi_{n,k}(x)}_{\boxed{1}\text{より} \to = 1} - \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right) \varphi_{n,k}(x).$$

$\varphi_{n,k}(x) \geqq 0$ ($x \in [0,1]$ より) なので,

$$|g(x) - g_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \left(g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right) \varphi_{n,k}(x) \right| \overset{\text{三角不等式}}{\leqq} \sum_{k=0}^{n} \left| g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right| \varphi_{n,k}(x).$$

$\left|g(x)-g_n(x)\right| \leqq \sum_{k=0}^{n}\left|g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|\varphi_{n,k}(x)$ の右辺の和を以下で

$\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta$ の k たち　と　$\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqq\delta$ の k たち　に分割して考える.

$\boxed{10}$

$$\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta}\underbrace{\left|g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2}\ \leftarrow\ \boxed{7}\text{より}}\varphi_{n,k}(x) < \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta}\varphi_{n,k}(x)}_{\leqq 1\ \leftarrow\ \boxed{1}\text{より}} \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\boxed{11}$

$$\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqq\delta}\left|g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|\varphi_{n,k}(x) \leqq \sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqq\delta}\underbrace{\left(\left|g(x)\right|+\left|g\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right)}_{\leqq 2M\ \leftarrow\ \boxed{6}\text{より}}\varphi_{n,k}(x)$$

$$\leqq 2M\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqq\delta}1\cdot\varphi_{n,k}(x) \leqq 2M\sum_{k=0}^{n}\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}\varphi_{n,k}(x) \underset{\boxed{5}}{\leqq} \frac{2M}{n^2\delta^2}\,n\overbrace{x(1-x)}^{\frac{1}{4}\ \geqq\ \leftarrow\ x\in[0,1]}$$

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqq\delta \Leftrightarrow \left(x-\frac{k}{n}\right)^2\geqq\delta^2 \Leftrightarrow \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}\geqq 1$$

$$\leqq \frac{M}{2n\delta^2} \underset{n\geqq N}{\leqq} \frac{M}{2N\delta^2} \underset{\boxed{8}}{<} \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\boxed{12}$ 以上より，$n \geqq N$ のとき，任意の $x \in [0,1]$ について，

$$|g(x) - g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となることがわかった．これは $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が g に $[0,1]$ 上一様収束することを意味している．

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

$\boxed{\text{問題}}$ $\displaystyle\max_{x\in[0,1]} \varphi_{n,k}(x) = \varphi_{n,k}\left(\frac{k}{n}\right)$ となることを確認し，$y = \varphi_{n,k}(x)$ のグラフが単峰型になることを実際にグラフを描いて確認せよ．このことが上の証明にどのように関係しているかを考えよ．

$\square$