$\boxed{\text{有界性}}$ Xは距離空間であるとし，$A \subset X$であるとする．

$X \neq \phi$のとき，Aが<u>有界</u>であるとは，ある$x_0 \in X$と$L > 0$が存在して，

任意の$a \in A$に対して，$d_X(a, x_0) \leqq L$となることだと定める．

$X = \phi$のときにも $\underset{\phi}{\overset{A}{\shortparallel}}$ は<u>有界</u>であるとみなす． □

$\boxed{\text{注意}}$ 距離空間Xの部分集合Aについて，以下の2つの条件は同値である：

(a) Aは有界である．

(b) ある$M > 0$が存在して，任意の$a, a' \in A$について$d_X(a, a') \leqq M$．

$\boxed{\text{証明}}$ $A = \phi$のとき，(a) $\Leftrightarrow$ (b) は自明なので$A \neq \phi$と仮定する．

(a) $\Rightarrow$ (b)：ある$x_0 \in X$と$L > 0$が存在して，$d_X(a, x_0) \leqq L$ $(a \in A)$となっているならば

$a, a' \in A$について，$d_X(a, a') \leqq d_X(a, x_0) + d(x_0, a') \leqq 2L$．

(b) $\Rightarrow$ (a)：ある$M > 0$が存在して，$d_X(a, a') \leqq M$ $(a, a' \in A)$となっているならば

$x_0 \in A$を任意にとると，$a \in A$について，$d_X(a, x_0) \leqq M$． □

$\boxed{\text{収束点列の有界性}}$ 距離空間 (X, d) 内の収束する点列は有界である.

$\boxed{\text{証明}}$ X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a \in X$ に収束していると仮定する.

このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある N が存在して, $n \geqq N$ ならば $d(x_n, a) < \varepsilon$ となる.

これを $\varepsilon = 1$ に適用すると, ある N が存在して, $n \geqq N$ ならば $d(x_n, a) < 1$ となる.

$L = \max\{1, d(x_1, a), d(x_2, a), \dots, d(x_{N-1}, a)\}$ とおくと, $d(x_n, a) \leqq L$ $(n = 1, 2, \dots)$ となる.

ゆえに, $\{x_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ は有界である. □

a に収束する点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 内の点は有限個を除いて a に "近い".
このことから $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の有界性が出る.

$\boxed{\text{注意}}$ 後で収束点列よりも弱い条件で Cauchy列 を定義するが Cauchy列も有界になる:

$$\text{収束点列} \underset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \text{Cauchy列} \Longrightarrow \text{有界点列}$$

(距離空間の完備性の定義)

□