定理 Xは完備距離空間であるとし，$A \subset X$であるとする．（AをXの距離部分空間とみなす）

このとき，Aは完備 $\Leftrightarrow$ AはXの閉集合．

（注 完備性の条件はAの入れもののXと無関係に定義されるが，閉集合であるという条件はAの入れもののXを指定しないと確定しない．）

証明 Aは完備 $\Rightarrow$ AはXの閉集合 の証明　対偶を示す．（$\Rightarrow$の証明ではXの完備性を使わない）

AはXの閉集合でないと仮定する．このとき，$\alpha \in X \setminus A$が存在して，任意の$\varepsilon > 0$について$U_\varepsilon(\alpha) \cap A \neq \phi$．（$X \setminus A$が$X$の開集合でないという条件）

ゆえに，A内の点列$\{a_n\}_{n=1}^\infty$で$a_n \in U_{1/n}(\alpha) \cap A$ $(n=1,2,\dots)$をみたすものを作れる．

このとき，$d(a_n, \alpha) < \frac{1}{n}$ $(n=1,2,\dots)$なので$\{a_n\}_{n=1}^\infty$は$\alpha \in X \setminus A$に収束する．

ゆえに，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$はX内のCauchy列でもある．← 収束列 $\Rightarrow$ Cauchy列

Aの距離函数はXの距離函数の制限なので，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$はA内のCauchy列でもある．

しかし，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$の収束先αはAに含まれないので，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$はA内では収束しない．

ゆえに，Aは完備でないことがわかった．

A は X の閉集合 $\Rightarrow$ A は完備 の証明

A は X の閉集合であると仮定する。

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は A 内の任意の Cauchy 列であるとする。

X の距離関数は A の距離関数の拡張になっているので、
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 内での Cauchy 列でもある。

X は完備だと仮定していたので、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある $\alpha \in X$ に収束する。

A は閉集合だと仮定したので、$\alpha \in A$ となる。 ← 以前証明した。

これで、A 内の任意の Cauchy 列が A 内に収束することがわかった。

ゆえに A は完備である。

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

証明を読むときには

- 1つひとつの文を正確に解釈していく。
- 定義や同値な条件を忘れていたら必ず調べる。
- 1つの文を読むのに数十分かかることは普通。