(c) 全有界かつ完備 ⇒ (a) コンパクト の証明

定義 位相空間 X が第二可算公理をみたすとは，X の開集合の高々可算な集合 $\mathcal{B}$ で以下の条件をみたすものが存在することであると定める；

(B) X の任意の開集合は $\mathcal{B}$ に含まれる開集合たちの和集合で書ける． □

例 $\mathbb{R}^n$ は第二可算公理をみたす．たとえば

$$\mathcal{B} = \left\{ U_\varepsilon(x) \,\middle|\, x \in \mathbb{Q}^n,\ \varepsilon \in \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\} \right\}$$

がとれる． □

例 位相空間 X が第二可算公理をみたせば，その部分集合も相対位相について第二可算公理をみたす． □

$\boxed{\text{補題1}}$ 全有界な距離空間 X は第二可算公理をみたす。

$\boxed{\text{証明}}$ X は全有界なので、任意の $N=1,2,\ldots$ に対して、

X の有限部分集合 A_N で $X = \bigcup_{a \in A_N} U_{\frac{1}{N}}(a)$ をみたすものが存在する。

$\mathcal{B} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \{ U_{\frac{1}{N}}(a) \mid a \in A_N \}$ とおく。$\mathcal{B}$ は高々可算な集合である。

U は X の任意の開集合であるとする。

任意に $x \in U$ をとる。ある $\varepsilon > 0$ で $U_\varepsilon(x) \subset U$ となるものが存在する。

$\frac{1}{N} \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ となるように N をとれる。ある $a \in A_N$ で $x \in U_{\frac{1}{N}}(a)$ をみたすものがある。

このとき、任意の $y \in U_{\frac{1}{N}}(a)$ について

$$d(y,x) \leqq d(y,a) + d(a,x) < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

なので、$y \in U_\varepsilon(x)$。すなわち、$U_{\frac{1}{N}}(a) \subset U_\varepsilon(x) \subset U$。

この $U_{\frac{1}{N}}(a)$ を $B_x \in \mathcal{B}$ と書く。$x \in U$ について $x \in B_x$ かつ $B \subset U$。

ゆえに、$U = \bigcup_{x \in U} B_x$。 $\square$

補題2　全有界距離空間 X 内の任意の点列は Cauchy 部分列を持つ。

証明（対角線論法！）

X は全有界なので，任意の $k=1,2,\dots$ に対して，X の有限部分集合 A_k で

$X=\bigcup_{a\in A_k} U_{1/k}(a)$ をみたすものが存在する。

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 内の任意の点列であるとする。$k=1,2,\dots$ について，

(∗) $\quad d(x_m^{(k)}, x_n^{(k)}) < \dfrac{1}{k} \quad (m,n=1,2,\dots)$

をみたす $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ で，$\{x_n^{(k+1)}\}_{n=1}^{\infty}$ が $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列になっているものを作ろう。

<u>$k=1$ の場合</u>　$X=\bigcup_{a\in A_2} U_{1/2}(a)$ で A_2 は有限集合なので，ある $a\in A_2$ が存在して，無限個の m について $x_m\in U_{1/2}(a)$ となるものが存在する。

そのような x_m たち全体を $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列とみなしたものを $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ と書こう。このとき，$x_m^{(1)}, x_n^{(1)}\in U_{1/2}(a)$ なので，次のように (∗) をみたす：

$$d(x_m^{(1)}, x_n^{(1)}) \leqq d(x_m^{(1)}, a) + d(a, x_n^{(1)}) < \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{1}.$$

<u>$k \geqq 1$ の場合</u> $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ で (*) をみたしているものがすでに得られていると仮定する。

$X = \bigcup_{a \in A_{2(k+1)}} U_{1/(2(k+1))}(a)$ で $A_{2(k+1)}$ は有限集合なので、ある $a \in A_{2(k+1)}$ が存在して、無限個の m について $x_m^{(k)} \in U_{1/(2(k+1))}(a)$ となる。

そのような $x_m^{(k)}$ たち全体を $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列とみなしたものを $\{x_n^{(k+1)}\}_{n=1}^{\infty}$ と書く。このとき、$x_m^{(k+1)}, x_n^{(k+1)} \in U_{1/(2(k+1))}(a)$ なので

$$d(x_m^{(k+1)}, x_n^{(k+1)}) \leqq d(x_m^{(k+1)}, a) + d(a, x_n^{(k+1)}) < \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{k+1}.$$

すなわち、$\{x_n^{(k+1)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $k+1$ に対する (*) をみたす。

これでほしい $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ を作れた。

$l \geqq k$ のとき、$\{x_n^{(l)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\{x_m^{(k)}\}_{m=1}^{\infty}$ の部分列なので $d(x_n^{(l)}, x_m^{(k)}) < \frac{1}{k}$.

$\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列になる。（$\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ を考えることが対角線論法！）

任意に $\varepsilon > 0$ をとる。$\frac{1}{N} < \varepsilon$ となるように番号 N をとる。

このとき，$m, n \geqq N$ について，

$$d(x_m^{(m)}, x_n^{(n)}) < \frac{1}{\min\{m, n\}} \leqq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

ゆえに $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である。 $\square$

$\boxed{\text{(c)} \Rightarrow \text{(a) の証明}}$ (c)を仮定する(Xは全有界完備と仮定する).

$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は X の任意の開被覆であるとする.

補題1より, X の開集合の高々可算な集合 $\mathcal{B}$ が存在して, X の任意の開集合は $\mathcal{B}$ に含まれる開集合たちの和集合で書ける.

$\mathcal{A}_\lambda = \{ B \in \mathcal{B} \mid B \subset U_\lambda \}$ とおくと, $U_\lambda = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_\lambda} B$ となる.

$\mathcal{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とおくと, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ なので $\mathcal{A}$ は高々可算である.

$X = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$ となっている.

($X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ に関する問題を $X = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$ に関する問題におきかえる.)

もしも有限個の $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ で $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ をみたすものが存在することを示れば, 各 i について $B_i \subset U_{\lambda_i}$ をみたす $\lambda_i \in \Lambda$ をとれば $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$ となって, X がコンパクトであることがわかる.

ゆえに，有限個の$\mathcal{A}$の元たちでXをおおえないと仮定して矛盾をみちびけば証明が終わる．

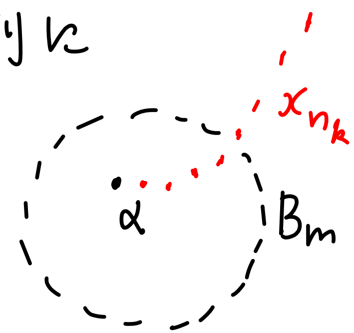
有限個の$\mathcal{A}$の元たちでXをおおえないと仮定する．

そのとき$\mathcal{A}$は無限集合になり，$\mathcal{A}$は高々可算なので，$\mathcal{A}$は可算になる．

$\mathcal{A}=\{B_1, B_2, B_3, \dots\}$と書く．$X \supsetneq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ $(n=1,2,\dots)$となっている．

ゆえに，$x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i$をみたす$X$の点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$をとれる．

Xの全有界性と補題2より，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$の部分列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$でCauchy列になるものが存在する．



Xの完備性より，$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$はある$\alpha \in X$に収束する．

$X = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$より，ある$m$が存在して，$\alpha \in B_m$となる．

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$は$\alpha$に収束するので，ある$K$が存在して，$k \geq K$ならば$x_{n_k} \in B_m$．

$x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} B_i$より，$n \geq m$ならば$x_n \notin B_m$，$\left(x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} B_i \supset B_m\right)$

$k = \max\{m, K\}$とおくと，$k \geq K$なので$x_{n_k} \in B_m$となるはずなのに

$n_k \geq k \geq m$なので$x_{n_k} \notin B_m$となって矛盾する．

□