$\boxed{\text{四則演算の連続性}}$ $\mathbb{R}$を通常の絶対値によって距離空間とみなし、

$\mathbb{R}^2$をEuclidノルムで距離空間とみなす。次の不等式を後で無断で用いる：

$$|x| \leqq \sqrt{x^2+y^2}, \quad |y| \leqq \sqrt{x^2+y^2}, \quad \sqrt{x^2+y^2} \leqq |x|+|y|.$$

自明　　自明　　$(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 = 2|x||y| \geqq 0.$

$\boxed{\text{定理}}$ 以下の写像はすべて連続である：

(1) $f_+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_+(x,y) = x+y,$　　(2) $f_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_-(x) = -x,$

(3) $f_\times : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_\times(x,y) = xy,$　　(4) $f_{\mathrm{inv}} : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R},\ f_{\mathrm{inv}}(x) = \dfrac{1}{x}.$

$\boxed{\text{証明}}$ (できれば以下を参照せずにまず自分で証明を考えた方がよい。)

(1) 任意に$\varepsilon > 0$をとる。$(a,b), (x,y) \in \mathbb{R}^2$かつ$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ならば

$$\begin{aligned}
|f_+(x,y) - f_+(a,b)| &= |(x+y)-(a+b)| = |(x-a)+(y-b)| \\
&\leqq |x-a| + |y-b| \\
&\leqq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} + \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

これでf_+の連続性が示された。

(2) 任意に $\varepsilon>0$ をとる. このとき, $a, x\in\mathbb{R}$, $|x-a|<\varepsilon$ ならば

$$|f_-(x)-f_-(a)| = |-x-(-a)| = |x-a| < \varepsilon.$$

← f_- は等長写像

これで f_- が連続であることがわかった.

(3) 任意に $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ と $\varepsilon>0$ をとり, $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon/2}{1+|a|}, 1, \frac{\varepsilon/2}{1+|b|}\right\}$ とおく.

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ かつ $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ のとき,

$$|y| \leqq |y-b|+|b| \leqq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+|b| < \delta+|b| \leqq 1+|b|.$$

$$\begin{aligned}
|f_\times(x,y)-f_\times(a,b)| &= |xy-ab| = |xy-ay+ay-ab| \\
&\leqq |xy-ay| + |ay-ab| \\
&= |x-a||y| + |a||y-b| \\
&\leqq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\,|y| + |a|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \\
&\leqq \delta(1+|b|) + (1+|a|)\delta \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

これで $f_\times$ の連続性が示された.

(4) 任意に $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ と $\varepsilon > 0$ をとり，$\delta = \min\left\{ \overset{①}{\frac{|a|}{2}}, \overset{②}{\frac{|a|^2\varepsilon}{2}} \right\}$ とおく．

$x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ かつ $|x-a| < \delta$ のとき，

$$|x| = |x-a+a| \geq |a| - |x-a| > |a| - \delta \overset{①}{\geq} |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |A+B| \geq |A| - |B| \\ |A+B| \geq |B| - |A| \end{array} \right.$$

$$|f_{inv}(x) - f_{inv}(a)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x-a|}{|a||x|} < \frac{\delta}{|a| \cdot \frac{|a|}{2}} \underset{②}{\leq} \frac{\frac{|a|^2\varepsilon}{2}}{|a| \cdot \frac{|a|}{2}} = \varepsilon.$$

これで f_{inv} の連続性が示された． □

$\boxed{\text{問題}}$ 上の証明の本質は青の波線 〰 の部分をどのようにして，見付けたかである． どのようにして見付けることができるか自分で考えてみよ！ □

来週，この点についての詳しい解説を追加する．

この点を突破できるか否かは解析学を理解できるかどうかについて非常に重要な段階になる！

来週までに以下の問題についても考えてほしい。

$\boxed{\text{問題}}$ 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束していると仮定する。以下を直接的に示せ。

(1) $\{x_n+y_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して、$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$.

(2) $\{-x_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して、$\lim_{n\to\infty}(-x_n) = -\lim_{n\to\infty} x_n$.

(3) $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して、$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$.

(4) $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ のとき、ある N_0 が存在して、$n \geqq N_0$ ならば $x_n \neq 0$ となり、実数列 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=N_0}^{\infty}$ は収束して、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n}$. $\square$

これも来週解説する。