閉包の直接的特徴付け 距離空間Xと$A \subset X$と$x \in X$について以下は互いに同値:

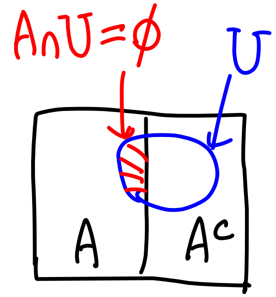
(1) $x \in \overline{A}$.

(2) xを含むXの任意の開集合Uについて$U \cap A \neq \phi$.

一般の位相空間Xで互いに同値

(3) 任意$\varepsilon > 0$について, $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \phi$. ⟵ (2)の$U$を$x$の$\varepsilon$近傍に制限した場合

(4) Aに含まれる点列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$でxに収束するものが存在する.



証明 (1)$\Leftrightarrow$(2)

$(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$ ← すでに示していた

(1) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin (\overline{A})^c \Leftrightarrow x \notin (A^c)^\circ$

A^cの開核の定義より

$\Leftrightarrow$ xを含む開集合Uで$U \subset A^c$となるものが存在しない.

$\Leftrightarrow$ xを含む任意の開集合Uについて, $U \not\subset A^c$. $\Leftrightarrow U \cap A \neq \phi$

$\Leftrightarrow$ (2) xを含む任意の開集合Uについて, $U \cap A \neq \phi$.

(2)$\Rightarrow$(3) xのε近傍$U_\varepsilon(x)$ $(\varepsilon > 0)$はxを含むXの開集合なので

(2)$\Rightarrow$(3)となることは自明である.

つづく

(3)⇒(2)　(3)を仮定し，Uはxを含むXの開集合であるとする．

Uはxを含むXの開集合なので，ある$\varepsilon>0$が存在して$U_\varepsilon(x)\subset U$となる．
(3)を仮定していたので$U_\varepsilon(x)\cap A\neq\phi$．　$U_\varepsilon(x)\subset U$なので$U\cap A\neq\phi$．
これで(2)を示せた．

1/nは2^{-n}でもよい．

(3)⇒(4)　(3)を仮定する．$n=1,2,3,\dots$に対して，$U_{1/n}(x)\cap A\overset{(3)}{\neq}\phi$なので，
ある$a_n\in U_{1/n}(x)\cap A$をとれる．このとき，点列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はAに含まれ，
$d(a_n,x)<\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$なので，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$は$x$に収束する．(4)を示せた．

(4)⇒(3)　(4)を仮定する．そのとき，A内の点列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$でxに収束するものが存在する．任意に$\varepsilon>0$をとる．ある番号Nが存在して，$n\geq N$ならば
$d(a_n,x)<\varepsilon$すなわち$a_n\in U_\varepsilon(x)$となる．すなわち，$\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$は$U_\varepsilon(x)\cap A$
に含まれる．ゆえに，$U_\varepsilon(x)\cap A\neq\phi$．　これで(3)を示せた．

以上によって，(1)⇔(2)⇄(3)⇄(4)が示せたので(1),(2),(3),(4)は
同値であることがわかった．

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

自分で図を描きながら証明を書いてみよ．

$\boxed{\text{閉包を使った連続写像の特徴付け}}$ 位相空間(距離空間)のあいだの写像 $f: X \to Y$ について，以下の条件は互いに同値である：

(1) f は連続である．

(2) 任意の $A \subset X$ について，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$．

$x \in X$ が A にくっついている ($x \in \overline{A}$) ならば $f(x)$ は $f(A)$ にくっついている ($f(x) \in \overline{f(A)}$)

$\boxed{\text{証明}}$

(1)⇒(2)　(1) と $A \subset X$ を仮定する．$\overline{f(A)}$ は Y の閉集合になり，f は連続なので $f^{-1}(\overline{f(A)})$ は X の閉集合になる．$A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ も成立している．ゆえに，$\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ となる．ゆえに，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$．

(2)⇒(1)　(2) を仮定し，F は Y の閉集合であるとする．$f^{-1}(F)$ が X の閉集合であることを示せば (1) が得られる．$A = f^{-1}(F)$ とおく．(2) を仮定したので，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(F))} = \overline{F} = F$ となり，$\overline{A} \subset f^{-1}(F) = A$ となる．$\overline{A} \supset A$ なので，$\overline{A} = A$．ゆえに，$A = f^{-1}(F)$ は X の閉集合になる

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

別証明を色々考えてみよ．