$\boxed{例}$ $f(x)=x$ $(x\in\mathbb{R})$ と $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を定めると, f は等長写像なので一様連続である. □

$\boxed{例}$ $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ と $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を定めると, f は連続だが一様連続ではない.

一様連続でないことの証明: $\varepsilon=1$ とし, $\delta>0$ を任意にとり, $a>0$ と仮定する.
このとき, $\left|f(a+\frac{\delta}{2})-f(a)\right| = \left|(a+\frac{\delta}{2})^2-a^2\right| = \delta a+\frac{\delta^2}{4} > \delta a$ となるので,
$a=\frac{1}{\delta}$ のとき, $x=a+\frac{\delta}{2}$ とおくと, $|x-a|=\frac{\delta}{2}<\delta$ なのに $|f(x)-f(a)|>\delta a=1=\varepsilon$
となる. これで, $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ が一様連続でないことが示された. □

$\boxed{例}$ $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ と $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ を定めると, f は一様連続ではない.

証明 $\varepsilon=1$ とし, $\delta>0$ を任意にとり, $0<a<\delta$ と仮定する. このとき,

$$\left|f(a-\tfrac{\delta}{2})-f(a)\right| = \frac{1}{a-\frac{\delta}{2}}-\frac{1}{a} = \frac{\delta/2}{a(a-\frac{\delta}{2})} > \frac{1}{2}\,\frac{1}{a-\frac{\delta}{2}}$$

$0<a<\delta$ より $\delta/a>1$.

ゆえに, $a=\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}$, $x=a-\frac{\delta}{2}$ とおくと, $|x-a|=\frac{\delta}{2}<\delta$ なのに

$$|f(x)-f(a)| > \frac{1}{2}\,\frac{1}{a-\frac{\delta}{2}} = 1 = \varepsilon$$

となり, $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ が一様連続でないことがわかる. □

$\boxed{例}$ $\alpha>0$ を固定する. $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\geqq\alpha)$ と $f:\mathbb{R}_{\geqq\alpha}\to\mathbb{R}_{>0}$ を定めると, f は一様連続である.

証明 任意に $\varepsilon>0$ をとる. $\delta=\alpha-\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}>0$ とおく. このとき, $x,a\in\mathbb{R}_{\geqq\alpha}$ について, $|x-a|<\delta$ のとき,

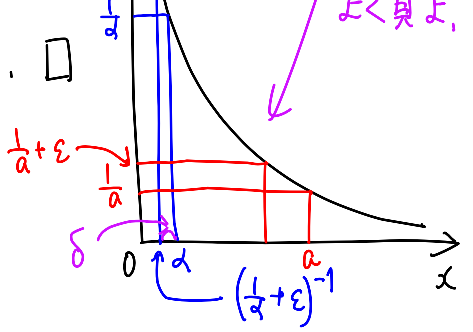
f(x)が下に凸で単調減少であることより

$$|f(x)-f(a)| < \max\{|f(a+\delta)-f(a)|, |f(a-\delta)-f(a)|\} = f(a-\delta)-f(a)$$

$$\leqq f(\alpha-\delta)-f(\alpha) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}-\frac{1}{\alpha}=\varepsilon.$$

これで, $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\geqq\alpha>0)$ の一様連続性が示された. □

この図をよく見よ.



$\boxed{問題}$ $f(x)=\sqrt{x}$ $(x\geqq 0)$ で $f:\mathbb{R}_{\geqq 0}\to\mathbb{R}_{\geqq 0}$ を定めると,
$f(x)$ が一様連続であることを示せ. □