導関数が有界な関数の一様連続性

定理 $I \subset \mathbb{R}$ は区間であると仮定する（例：$I = \mathbb{R}, \mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{\geqq 0}, [a,b], [a,b)$）.
$f: I \to \mathbb{R}$ は C^1 級関数で $\{f'(x) \mid x \in I\}$ は有界であると仮定する.
このとき, $f: I \to \mathbb{R}$ は一様連続になる.

証明 f' は I 上有界なので, ある $M > 0$ が存在して, $|f'(x)| \leqq M \quad (x \in I)$.
任意に $\varepsilon > 0$ をとる. $x, a \in I$ のとき,

$$|f(x) - f(a)| = \left|\int_a^x f'(t)\,dt\right| \leqq \left|\int_a^x |f'(t)|\,dt\right| \leqq \left|\int_a^x M\,dt\right| = M|x-a|.$$

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ とおくと, $|x-a| < \delta$ のとき,

$$|f(x) - f(a)| \leqq M|x-a| < M\delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

これで $f: I \to \mathbb{R}$ の一様連続性が示された. □

例 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ なので, $\alpha > 0$ について, $|f'(x)| \leqq \dfrac{1}{\alpha^2} \quad (x \geqq \alpha)$ なので
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $x \geqq \alpha$ で一様連続になる（$x > 0$ では一様連続ではない）. □