点列の収束

以下，(X,d) は距離空間であるとする．

定義 $a_1, a_2, \ldots$ がすべて X の点であるとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X 内の点列 (sequence) と呼ぶ． □

空間の元を点と呼ぶ

定義 X 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとは，ある $\alpha \in X$ が存在して，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある番号 N が存在して，$n \geqq N$ ならば $d(a_n, \alpha) < \varepsilon$ が成立することだと定める．このとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束するという． □

収束先の一意性 X 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha \in X$ と $\beta \in X$ に収束しているならば $\alpha = \beta$ となる．（$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき，その収束先を $\lim_{n\to\infty} a_n$ と書く．）

証明 $\varepsilon > 0$ を任意にとる．

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束していることより，ある番号 N_1 が存在して，$n \geqq N_1$ ならば $d(a_n, \alpha) < \varepsilon$．

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が β に収束していることより，ある番号 N_2 が存在して，$n \geqq N_2$ ならば $d(a_n, \beta) < \varepsilon$．

$n \geqq \max\{N_1, N_2\}$ とする．このとき，

$$d(\alpha, \beta) \underset{(M1)}{\leqq} d(\alpha, a_n) + d(a_n, \beta) \underset{(M2)}{=} d(a_n, \alpha) + d(b_n, \alpha) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

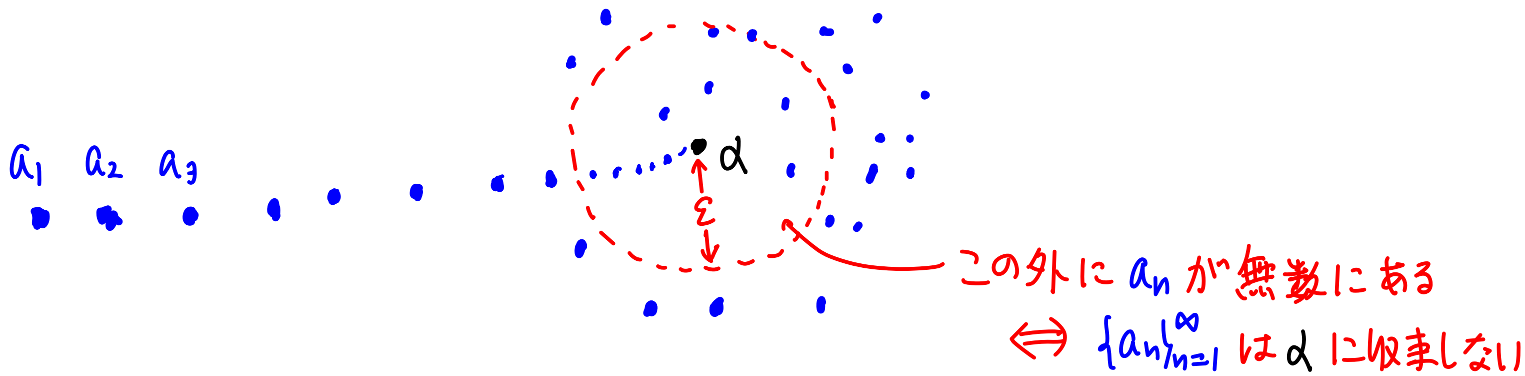
$\varepsilon > 0$ は任意だったので $d(\alpha, \beta) = 0$．ゆえに${}^{(M3)}$ $\alpha = \beta$． □

注意 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に<u>収束しない</u>ことは次のように言い換えられる:

(*) $\begin{cases} \text{ある } \varepsilon>0 \text{ が存在して，どんなに番号 } N \text{ を大きくしても，} \\ N \text{ 以上のある } n \text{ で } d(a_n,\alpha)\geqq\varepsilon \text{ をみたすものが存在する.} \end{cases}$

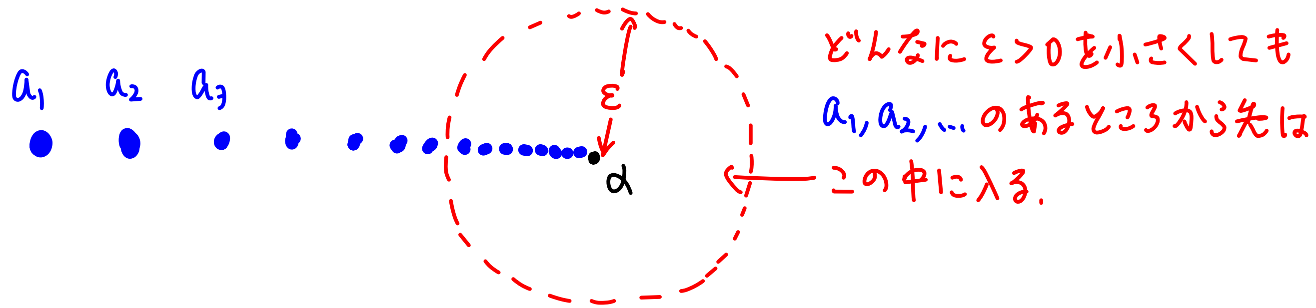
これは次と同値である:

(**) ある $\varepsilon>0$ が存在して，$d(a_n,\alpha)\geqq\varepsilon$ をみたす n が無限個ある.



注意 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束することは次のように言い換えられる:

(☆) $\begin{cases} \text{どんなに } \varepsilon>0 \text{ を小さくしても，} \\ \text{点列 } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ のある番号以降は } \alpha \text{ から距離 } \varepsilon \text{ 未満の範囲に入る.} \end{cases}$



□

$\boxed{\text{点列の収束と距離の0への収束の同値性}}$ (X, d)は距離空間であるとし，

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はX内の点列であるとし，$\alpha \in X$とする。このとき，以下の2つの条件は互いに同値である；

(a) 点列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$はαに収束する。

(b) 実数列$\{d(a_n, \alpha)\}_{n=1}^{\infty}$は0に収束する。

$\boxed{\text{証明}}$ 条件(a), (b)を定義通りに忠実に書き直すと，それぞれ以下のようになる；

(a)' 任意の$\varepsilon > 0$に対して，ある番号Nが存在して，$n \geqq N$ならば$d(a_n, \alpha) < \varepsilon$.

(b)' 任意の$\varepsilon > 0$に対して，ある番号Nが存在して，$n \geqq N$ならば$|d(a_n, \alpha) - 0| < \varepsilon$.

しかし，$d(a_n, \alpha) \geqq 0$なので，$|d(a_n, \alpha) - 0| < \varepsilon$と$d(a_n, \alpha)$は同値であり，(a)'と(b)'が同値であることがわかる。 □

具体的な計算では，$a_n \to 0$を示すために，0に収束する実数列c_nで

$d(a_n, \alpha) \leqq \underbrace{\cdots}_{\text{不等式の計算}} \leqq c_n$をみたすものを見付けることがよくある。

$\boxed{\text{例}}$ ノルム $\|\cdot\|$ を持つ $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V における点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，

"無限和" $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を級数 (series) と呼ぶ．

級数の(通常の)収束は部分和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ の点列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束で定義される．

(1) $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ が $n \to \infty$ で収束しているならば，a_n は 0 に収束している．

(2) その逆は一般には成立していない．

$\boxed{\text{証明}}$ (1) $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ は $n \to \infty$ で $\sigma \in V$ に収束していると仮定する．

任意に $\varepsilon > 0$ をとる．ある N が存在して，$n \geqq N$ ならば $\|s_n - \sigma\| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる．

このとき，$n \geqq N+1$ ならば

$a_n = s_n - s_{n-1}$

$n-1 \geqq N$ としたい

$$\|a_n\| = \|s_n - s_{n-1}\| = \|s_n - \sigma - (s_{n-1} - \sigma)\|$$

$$\leqq \|s_n - \sigma\| + \|s_{n-1} - \sigma\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Euler's gamma

$\gamma = 0.5772\cdots$

これで a_n が 0 に収束することが示された．

(2) $V = \mathbb{R}$，$a_n = \frac{1}{n}$ が反例になっている．$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \varepsilon_n$，$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$．$\square$