$\boxed{\text{稠密性}}$ (denseness) X は距離空間であるとする.

$\boxed{\text{定義}}$ 部分集合 $A \subset X$ が X において稠密(ちゅうみつ) (dense) であるとは, $\overline{A} = X$ となることであると定める. □

$\boxed{\text{定理}}$ $A \subset X$ が X において稠密であることと以下の条件の各々は同値:

(1) X の X 以外の任意の閉集合は A を含まない.

(2) X の空でない任意の開集合は A と空でない交わりを持つ.

位相空間でも同値.

(3) 任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \phi$.

(4) 任意の $x \in X$ に対して, A 内の点列で x に収束するものが存在する. □

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ において稠密である. □

$\boxed{\text{例}}$ $\underbrace{\mathbb{Z}\left[\frac{1}{10}\right] = \left\{ \frac{a}{10^n} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ n = 0, 1, 2, \dots \right\}}_{\text{10進有限小数全体の集合}}$ も $\mathbb{R}$ において稠密である. □

例 (Weierstrass（ワイエルシュトラス）の多項式近似定理) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする.

$C([a,b], \mathbb{R}) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ は連続 (continuous)$\}$ とおく.

$C([a,b], \mathbb{R})$ を次の sup ノルムで距離空間とみなす;

$$\|f\|_{\sup} = \|f\|_{\infty} = \sup_{a \leqq x \leqq b} |f(x)| \left(= \max_{a \leqq x \leqq b} |f(x)| \right).$$

そして, $C([a,b], \mathbb{R})$ の部分集合 P を次のように定める;

$$P = \{ f \in C([a,b], \mathbb{R}) \mid \text{ある } p \in \mathbb{R}[x] \text{ が存在して, } f(x) = p(x) \ (a \leqq x \leqq b) \},$$

このとき, P は $C([a,b], \mathbb{R})$ において稠密になる.

これは, 多項式函数で任意の閉区間上の函数を sup ノルムの意味でいくらでも近似できることを意味している. □

証明はここでは略す.