一様収束　X は集合であるとし，Y は距離空間であるとする．

写像（函数）$f_n : X \to Y$ の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と写像 $f : X \to Y$ を任意にとる．

定義（各点収束）$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に各点収束する（converges pointwise to）とは，各点 $x \in X$ について，Y 内の点列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が Y の点 $f(x)$ に収束することであると定める．すなわち，

(P) 任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，
ある番号 N が存在して，任意の $n \geqq N$ について $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ となる．

が成立するとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に各点収束するという．□

定義（一様収束）次の条件が成立するとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束する（converges uniformly to）という：

(U) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある番号 N が存在して，
任意の $x \in X$ と任意の $n \geqq N$ について，$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ となる．□

$\boxed{\text{これらのちがい}}$

- 各点収束では，番号 N は点 $x \in X$ ごとに別にとればよい．
  （番号 N は $\varepsilon > 0$ だけではなく，$x \in X$ にも依存する．）
- 一様収束では，番号 N は点 $x \in X$ と無関係にとれなければいけない．
  （番号 N は $\varepsilon > 0$ のみで決まり，$x \in X$ とは無関係．）
- 一様収束ならば各点収束となるが，逆は成立しない．

$\boxed{\text{例}}$ $X = [0,1]$，$Y = \mathbb{R}$，$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ と $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

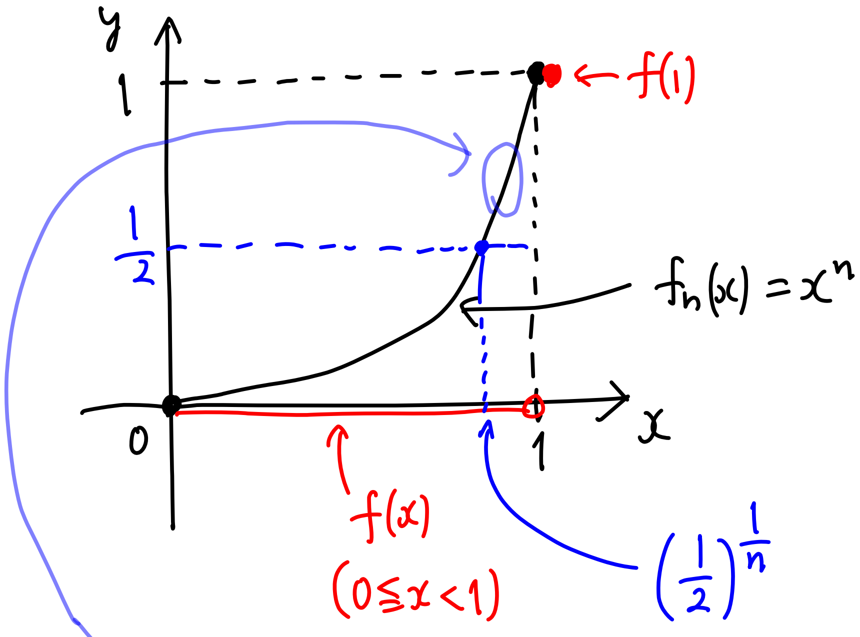
$f_n(x) = x^n \ (0 \leqq x \leqq 1)$，$f(x) = \begin{cases} 1 & (x=1) \\ 0 & (0 \leqq x < 1) \end{cases}$ と定める．

このとき，各点 $x \in [0,1]$ ごとに，$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(x)$ に収束する．

すなわち，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に各点収束する．

つづく

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束はしていない。



$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束しているためには

任意に与えられた $\varepsilon > 0$ について、

ある N_ε をとれて、 $n \geqq N$ ならば

すべての $x \in [0,1]$ について $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

とならなければいけない。

ここでは $0 \leqq x < 1$ で $x^n \to 0$ $(n \to \infty)$ なのに、

どんなに n を大きくしても $x^n \geqq \frac{1}{2}$ となっている。

これは $0 \leqq x < 1$ をみたすすべての x について同時に

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n - 0 = x^n < \frac{1}{2}$$

となるようにできないことを意味している。

これより、$\{f_n\}$ は f に一様収束していないことがわかる。

$\boxed{\text{練習問題}}$ 上の例で $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\{f\}$ に一様収束していないことの厳密な証明を書き下せ. □

$\boxed{\text{例}}$ $0<\alpha<1$ を任意にとって固定する. $g_n:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$, $g:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ を $g_n(x)=x^n$ $(0\leqq x\leqq\alpha)$, $g(x)=0$ $(0\leqq x\leqq\alpha)$ と定めると, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は g に一様収束している.

$\boxed{\text{証明}}$ 任意に $\varepsilon>0$ をとる. 番号 N を $\alpha^N<\varepsilon$ となるようにとれる.
このとき, 任意の $x\in[0,\alpha]$ と任意の $n\geqq N$ について,

$$|g_n(x)-g(x)| = x^n-0 = x^n \leqq \alpha^n \leqq \alpha^N < \varepsilon.$$

□