

- ① 上限 sup と下限 inf
- ② 基本的な不等式 (Jensenの不等式, Young, Hölder, Minkowski の不等式, Gibbの情報不等式)
- ③ 写像による像と逆像
- ④ \mathbb{R} 上のベクトル空間のノルム (ℓ^p ノルム, \mathbb{R}^n のすべてのノルムは同値, supノルム, L^p ノルム)
- ⑤ 距離空間 (定義, 同値な距離函数, 部分空間, $\mathbb{R}^n, S^{n-1}, T^n, K[[x]]$)
- ⑥ 連続写像と点列の収束 (等長性, $\varepsilon-\delta$, $\varepsilon-N$, 収束点列の有界性, 点列による連續性の特徴付け, 有界性)
- ⑦ 四則演算の連續性 ($\varepsilon-\delta$ の証明の作り方)
- ⑧ Cesàro 和 ($\varepsilon-N$ の証明の見付け方)
- ⑨ ε 近傍系 $U_\varepsilon(a)$
- ⑩ 開集合系
- ⑪ 位相空間 (2点集合の離散, 片思い, 密着位相, 連続写像, 同相写像, 相対位相)
- ⑫ 閉集合系 (\mathbb{R} の有界閉集合は最大値と最小値を持つこと, Cantor集合)
- ⑬ 閉包 (開核も同時に定義, 開円盤, 閉円盤, 半開区間, etc., 閉包の直接的特徴付け)
- ⑭ 点の部分へのくつき方 (直観的な説)
- ⑮ 連続写像のたくさんの特徴付けのまとめ
- ⑯ 集積点
- ⑰ 濃密性 ($\Omega \subset \mathbb{R}$, Weierstrass の多項式近似定理(結果のみ), $K[[x]] \subset K[[t]]$)
- ⑱ 一様収束 (\sup 距離, 一様収束が ε 函数の連續性を保つこと, $\frac{\varepsilon}{3}$ 論法)
- ⑲ コンパクト性 (連続写像の像でコンパクト性が保たれること, \mathbb{R} の有界閉集合)
- ⑳ 距離空間のHausdorff性 (コンパクト部分集合が閉集合になること)
- ㉑ 全有界性 (コンパクト距離空間が全有界になること)
- ㉒ コンパクト位相空間上の実数値連続函数は最大値と最小値を持つ。
応用: Lebesgueの被覆補題
- ㉓ 一様連續性 (階段函数による一様近似)
- ㉔ 完備性 (Cauchy列)
- ㉕ 完備な距離空間の例 (実数の完備性, Banach空間, $\mathbb{R}^n, C([a,b], \mathbb{R})$)
- ㉖ 絶対収束
- ㉗ 縮小写像
- ㉘ コンパクト性の特徴付け (\mathbb{R}^n の有界閉集合)
- ㉙ Weierstrass の多項式近似定理
- ㉚ 完備化 ($\Omega \subset \mathbb{R}, \mathbb{R}[x] \hookrightarrow C([a,b], \mathbb{R}), \Omega \hookrightarrow \Omega_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_p, K[[x]] \hookrightarrow K[[t]], K(x) \hookrightarrow K((x))$)

上限 $\sup = \text{最小上界}$ と 下限 $\inf = \text{最大下界}$

$A \subset \mathbb{R}$ であるとする。

$a \in \mathbb{R}$ が A の 上界 (upper bound) であるとは、任意の $x \in A$ について $x \leq a$ が成立することである。

A の上界が存在するとき、 A は 上に有界 (bounded above) であるといふ。

不等式の向きを逆にすることにより、下界 (lower bound) と 下に有界 (bounded below) が定義される。

A の上界全体の集合の最小値を A の 上限 (supremum) または 最小上界 (minimum upper bound) と呼び、 $\sup A$ と表わす。

同様に、 A の 下限 (infimum) = 最大下界 (maximum lower bound) $\inf A$ が定義される。

$\sup A$ が A の中に存在するならば $\sup A$ は A の最大値に一致する ($\inf A$ についても同様)。

実数の連続性の1つの表現 空でない下に有界な \mathbb{R} の部分集合には上限が存在する。□

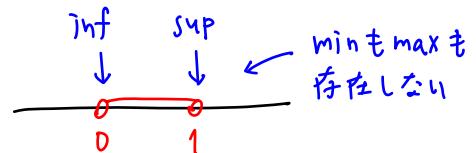
A キウかつ A が上に有界なら実数の連続性より、 A の上限 $\sup A$ が存在する。
下限 $\inf A$

$A = \emptyset$ ならば A の上界全体の集合は \mathbb{R} になる。そのとき $\sup \emptyset = -\infty$ と約束しておく。
 A が上に有限でない場合に $\sup A = \infty$ と約束しておく。

集合 X 上の函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ について、 $\sup_{x \in X} f(x) = \sup f(X) = \sup \{f(x) | x \in X\}$ とかき、
函数 f の値の X 上での上限 と呼ぶ。

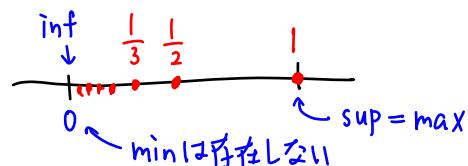
\inf についても同様に定義しておく。

例 (1) $\sup(0, 1) = \sup \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\} = 1$, $\inf(0, 1) = 0$.



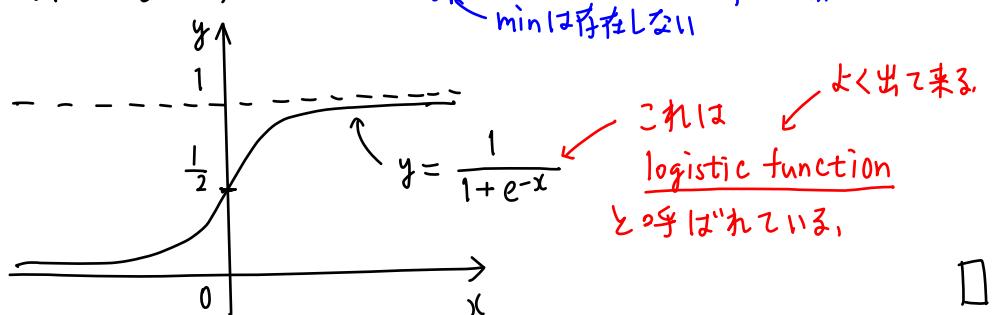
(2) $\inf \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\} = 0$

$\sup \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\} = \max \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\} = 1$



(3) $\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1$,

$\inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 0$.



定理 有界な単調増加実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。(単調減少の場合も同様。)

証明 実数の連続性(の1つの表現)より, $\alpha = \sup \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ が存在する。

このとき, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq \alpha$ となってい。もしも $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束しないのであれば, ある実数 β で $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq \beta < \alpha$ をみたすものが存在し, より真に小さな $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界 β が存在することになってしまい, α が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上限 = 最小上界であることに反する。ゆえに $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はその上限 α に収束する。□

例 $a_n = (\sqrt{2}$ の小数点第 n 衡目まで) のとき, $a_1 = 1.4, a_2 = 1.41, a_3 = 1.414, \dots$ は

有界な単調増加有理数列であり, 有理数には収束しないが, 実数 $\sqrt{2}$ に収束する。□

上極限 \limsup と下極限 \liminf

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界な実数列であるとする。このとき, $\{a_k\}_{k=n}^{\infty} = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ も有界である。ゆえに実数の連続性(の1つの表現)より, 下限 $b_n = \inf_{k \geq n} a_k$ と上限 $c_n = \sup_{k \geq n} b_k$ が存在する。一般に実数の有界集合 $A \subset B$ について, $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$ が成立している。ゆえに, $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots \leq c_3 \leq c_2 \leq c_1$ が成立している。

特に, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上の定理より, それぞれ $\beta = \sup \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \leq \gamma = \inf \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ に収束する。

定義 $\beta = \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k$ と $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k$ をそれぞれ点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の下極限 (limit infimum), 上極限 (limit supremum) と呼び, それぞれを

$$\beta = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \gamma = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

と書く。有界な実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 収束していなければ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と書いてはいけないが, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ とはいつでも書くことが許される。これは非常に便利である。□

例 $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & (n \text{ は正の奇数}) \\ -1 - \frac{1}{n} & (n \text{ は正の偶数}) \end{cases}$ とおく。このとき, $\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1 + \frac{1}{1}, a_3 = 1 + \frac{1}{3}, a_5 = 1 + \frac{1}{5}, \dots \\ a_2 = -1 - \frac{1}{2}, a_4 = -1 - \frac{1}{4}, a_6 = -1 - \frac{1}{6}, \dots \end{array} \right.$

なので $\sup_{k \geq n} a_k = 1 + \frac{1}{(n \text{ 以上の最小の奇数})}$, $\inf_{k \geq n} a_k = -1 - \frac{1}{(n \text{ 以上の最小の偶数})}$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1. \quad \square$$

定理 有界な実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $d \in \mathbb{R}$ について以下の2つの条件は互いに同値である。

- (a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は d に収束する。
- (b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = d$.

証明 よく使う (b) \Rightarrow (a) の証明の手を以下に示す。

(b) を仮定する。このとき、 $\inf_{k \geq n} a_k \leq a_n \leq \sup_{k \geq n} a_k$ が成立しており、 $\inf_{k \geq n} a_k$ と $\sup_{k \geq n} a_k$ は単調に同じ値 d に収束している。ゆえにそれらには含まれた a_n も d に収束する。これで (b) \Rightarrow (a) が示された。 \square

注意 この辺の説明は本当は ε -N 論法でしかり証明を書いておいた方がよいことである。しかし、この段階でこのノートでは ε -N 論法による収束の定義を述べておらず、以上のようなスタイルになっている。

参考のために上の定理の (a) \Rightarrow (b) の " ε -N" による証明も以下に書いておく。後でこのページまでもどって勉強し直してほしい。

(a) \Rightarrow (b) の証明 (a) を仮定し、 $\varepsilon > 0$ を任意にとる。ある番号 n が存在して、

$k \geq n$ ならば $d - \frac{\varepsilon}{2} < a_k < d + \frac{\varepsilon}{2}$ となり、 $d - \varepsilon < \inf_{k \geq n} a_k \leq \sup_{k \geq n} a_k < d + \varepsilon$ となる。

これより、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = d$ となることがわかる。 \square

基本的な不等式

たとえば I 上で有界かつ連続な函数

\mathbb{R} の区間 I 上の（適当な条件をみたす）函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ に実数 $E[f]$ を対応させる函数 $f \mapsto E[f]$ は以下の条件をみたしていると仮定する: $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ について,

$$(1) E[\alpha f + \beta g] = \alpha E[f] + \beta E[g] \quad (\text{線形性})$$

$$(2) I \text{ 全体で } f \leq g \text{ ならば } E[f] \leq E[g] \quad (\text{単調性})$$

$$(3) \text{ 定数 } \alpha \text{ に値を持つ定数函数 } \alpha \text{ について } E[\alpha] = \alpha. \quad (\text{規格化})$$

このような $E[\cdot]$ を期待値汎函数と呼ぶ。

E は expectation の頭文字。

例 以下の $E[\cdot]$ は上の条件をみたしている。

$$\bullet x_1, \dots, x_n \in I \text{ について, } E[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

$$\bullet p_1, \dots, p_n \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ のとき, } E[f] = \sum_{i=1}^n f(x_i) p_i.$$

$$\bullet I = (a, b), p(x) \geq 0 (x \in (a, b)), \int_a^b p(x) dx = 1 \text{ のとき, } E[f] = \int_a^b f(x) p(x) dx. \quad \square$$

$x \in I$ を $x \in \mathbb{R}$ に対応させる函数を x と書き, $\mu = E[x]$ とおく。

$\mu \in I$ が成立していると仮定する。 ($I = (0, 1)$, $E[f] = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ のとき, $E[x] = 0 \notin I$)

Jensen の不等式 I 上の上に凸な函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ について, $E[f] \leq f(E[x])$ \square

証明 簡単のため f は C^2 級で $f'' \leq 0$ をみたしていると仮定する。

$y = f(x) \ (x \in I)$ の $\mu = E[x] \in I$ での接線を $y = a(x - \mu) + f(\mu)$ と書くと, f が上に凸であることより, $f(x) \leq a(x - \mu) + f(\mu) \ (x \in I)$ が成立している。
）ここがポイント

$$\text{ゆえに, } E[f] \stackrel{\geq}{\leq} E[a(x - \mu) + f(\mu)] = a(E[x] - \mu) + f(\mu) = f(E[x]).$$

↑
単調性
↑
線形性・規格化
↑
 $\mu = E[x]$

\square

例 $I = \mathbb{R}_{>0} = (0, \infty) \ni x_i, E[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), f(x) = \log x$ のとき,

$$E[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i = \log(x_1 \cdots x_n)^{1/n}, \quad E[x] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ と Jensen の不等式より}$$

$$\log(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

$\log x$ は単調増加函数なので

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{相加相乗平均の不等式})$$

\square

Youngの不等式

$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a, b > 0$ のとき, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

証明 $E[f] = \frac{f(a^p)}{p} + \frac{f(b^q)}{q} \geq f(x) = \log x$ について,

$$E[f] = \frac{\log a^p}{p} + \frac{\log b^q}{q} = \log a + \log b = \log(ab), \quad f(E[x]) = \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right).$$

Jensenの不等式 $E[f] \leq f(E[x])$ と $\log x$ の単調増加性より, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. \square

Hölderの不等式

$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a_i, b_i \geq 0$ のとき,

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}.$$

証明

$$A = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p}, \quad B = \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}, \quad A_i = \frac{a_i}{A}, \quad B_i = \frac{b_i}{B} \text{ とおく.}$$

(*) は $\sum_{i=1}^n A_i B_i \leq 1$ と同値であるので, $\sum_{i=1}^n A_i B_i \leq 1$ を示そう. ）ここがポイント

Youngの不等式と $\sum_{i=1}^n A_i^p = \sum_{i=1}^n B_i^q = 1$ が成立していることより,

$$\sum_{i=1}^n A_i B_i \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i^p}{p} + \frac{B_i^q}{q} \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n A_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n B_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

\square

Minkowskiの不等式

$p > 1, x_i, y_i \in \mathbb{R}$ のとき

$$(**) \quad \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

証明 $a_i = |x_i|, b_i = |y_i|$ とおくと, $|x_i + y_i| \leq a_i + b_i$ より $(**)$ の左辺 $\leq \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p}$ なので

$$(**)' \quad \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p}$$

を示せばよい. $q > 1$ を $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ で定めると, $(p-1)q = pq\left(1 - \frac{1}{p}\right) = pq\frac{1}{q} = p$ なので

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p &= \sum_{i=1}^n a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i (a_i + b_i)^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1-\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Hölderの不等式

$$\left\{ \begin{array}{l} (p-1)q = p \\ \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \end{array} \right.$$

なので, 両辺を $\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1-\frac{1}{p}}$ でわって $(**)'$ を得る. \square

ギブス

Gibbs の情報不等式 $p_i, q_i > 0, \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$ のとき, $\sum_{i=1}^n q_i \log \frac{q_i}{p_i} \geq 0$.

証明 $f(x) = x \log x$ とおくと, $f'(x) = \log x + 1, f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ より, $f(x)$ は下に凸である.

$E[f] = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{q_i}{p_i}\right) p_i$ の場合の Jensen の不等式より

$$\sum_{i=1}^n q_i \log \frac{q_i}{p_i} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{q_i}{p_i} \log \frac{q_i}{p_i} = E[f] \geq f(E[x]) = f\left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{p_i} p_i\right) = f(1) = 0. \quad \square$$

注意 $x, y > 0$ の凸関数 $\frac{x}{y}$ と $x \log y$ を $0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq \infty$ に

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ \infty & (0 < x < \infty \text{ かつ } y=0) \\ 0 & (0 < x < \infty \text{ かつ } y=\infty) \\ x/y & (0 < x < \infty \text{ かつ } 0 < y < \infty) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ -\infty & (0 < x < \infty \text{ かつ } y=0) \\ \infty & (0 < x < \infty \text{ かつ } y=\infty) \\ x \log y & (0 < x < \infty \text{ かつ } 0 < y < \infty) \end{cases}$$

によって拡張すると, $0 \leq q_i < \infty, 0 \leq p_i < \infty, \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n p_i = 1$ のとき,
 $\sum_{i=1}^n g\left(q_i, f(q_i, p_i)\right) \geq 0$

が成立している. この形で Gibbs の情報不等式が使われることが多い. \square

注意 $\Delta^{n-1} = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \mid \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ とおく. $p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n) \in \Delta^{n-1}$ に対して, $D(q \| p) = \sum_{i=1}^n q_i \log \left(\frac{q_i}{p_i}\right)$ を Kullback-Leibler 情報量 (KL 情報量) と呼ぶ. KL 情報量は「確率分布 p による確率分布 q のシミュレーションの誤差の大きさ」という意味を持っている (Sanov の定理について調べてみよ). KL 情報量 $D(q \| p)$ は p と q について対称でないが, p との距離のようによく使われる. \square

注意 以上で証明した不等式は和 $\sum_{i=1}^n$ を積分 $\int_a^b dx$ で書きかえた場合も成立している.

Hölder $\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \quad (p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$

Minkowski $\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (p \geq 1)$

Gibbs $p(x) \geq 0, q(x) \geq 0, \int_a^b p(x) dx = \int_a^b q(x) dx = 1$ のとき, $\int_a^b q(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx \geq 0$. \square

問題 以上の不等式を示せ. \square

距離空間の話は解析学の話ともみなされる.

そこでは基本的な不等式はもっとも基本的な道具になる.

写像による像と逆像

$$(f(A) = \{f(x) | x \in A\}, f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}, X \setminus A = \{x \in X | x \notin A\})$$

問題 集合間の写像 $f: X \rightarrow Y$ と $A_i \subset X$ ($i \in I$) と $B_j \subset Y$ ($j \in J$) について以下を示せ。

$$(1) f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j), \quad f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B).$$

$$(2) \begin{cases} f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i), \\ f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} f(A_i) \end{cases} \text{かつ} \begin{array}{l} f \text{は単射} \Leftrightarrow \forall x, x' \in X \text{ に} \exists! f(x) = f(x') \text{ すなはち } x = x' \\ \Leftrightarrow \forall x, x' \in X \text{ に} \exists! x \neq x' \text{ すなはち } f(x) \neq f(x') \end{array}$$

$$(3) A \subset f^{-1}(f(A)) \text{ かつ} \begin{array}{l} f \text{が単射ならば } A = f^{-1}(f(A)) \\ f \text{は全射} \Leftrightarrow \forall y \in Y \text{ に} \exists x \in X \text{ ある } x \in X \text{ で } y = f(x) \end{array}$$

$$(4) f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B \text{ かつ} \begin{array}{l} f \text{が全射ならば } f(f^{-1}(B)) = B \\ \text{となるものが存在する。} \end{array}$$

解答

(1) $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$ のとき, $f(x) \in \bigcup_{j \in J} B_j$ なので, ある $j \in J$ で $f(x) \in B_j$ となるのがあり,
 $x \in f^{-1}(B_j)$ となるので, $x \in \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$, 逆に $x \in \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$ のとき, ある $j \in J$ が存在して
 $x \in f^{-1}(B_j)$ となる $\Rightarrow f(x) \in B_j$ となるので $f(x) \in \bigcup_{j \in J} B_j$ となる $\Rightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$.

$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)$ のとき, $f(x) \in \bigcap_{j \in J} B_j$ なので $\forall j \in J$ に $f(x) \in B_j$ となる $\Rightarrow x \in f^{-1}(B_j)$ となり,
 $x \in \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$ を得る. 逆に $x \in \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$ のとき, $\forall j \in J$ に $x \in f^{-1}(B_j)$ となる $\Rightarrow f(x) \in B_j$ となり,
 $f(x) \in \bigcap_{j \in J} B_j$ となる $\Rightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)$ を得る.

$x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ のとき, $f(x) \in Y \setminus B$ なので $f(x) \notin B$ となる $\Rightarrow x \notin f^{-1}(B)$,
 逆に $x \in X \setminus f^{-1}(B)$ のとき, $x \notin f^{-1}(B)$ となる $\Rightarrow f(x) \notin B$ なので $f(x) \in Y \setminus B$ となる $\Rightarrow x \in f^{-1}(Y \setminus B)$,

(2) $y \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ のとき, $y = f(x)$, $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ と書け, ある $i \in I$ で $x \in A_i$ をみたすものがある
 $y = f(x) \in f(A_i) \subset \bigcup_{i \in I} f(A_i)$, 逆に $y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ のとき, ある $i \in I$ で $y \in f(A_i)$ をみたすものがある
 ので, $y = f(x)$, $x \in A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ と書けるので $y \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$. ゆえに $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

$y \in f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$ のとき, $y = f(x)$, $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ と書け, $\forall i \in I$ に $x \in A_i$ なので $y = f(x) \in f(A_i)$
 となる, $y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ を得る. ゆえに $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

$A_i \subset X$ ($i \in I$) のとき常に $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ となると仮定する. $x, x' \in X$, $x \neq x'$ と仮定する.

$A_1 = \{x\}$, $A_2 = \{x'\}$ とおくと $\emptyset = f(\emptyset) = f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x)\} \cap \{f(x')\}$ なので $f(x) \neq f(x')$.
 ゆえに f は単射である.

f は単射であるとし, $A_i \subset X$ ($i \in I$) とする. $y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ を任意に取る. $y = f(x_i)$, $x_i \in A_i$ ($i \in I$)
 と表わせる. f は単射なので x_i たゞ1つは互いに等しい. $x = x_i$ ($i \in I$) は $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ で $x \in f(A_i)$, $y = f(x)$
 をみたす. ゆえに $y \in f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$ ので $\bigcap_{i \in I} f(A_i) \subset f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$. f は常に成立するのでを得る.

(3) $x \in A$ のとき, $f(x) \in f(A)$ なら $x \in f^{-1}(f(A))$, ゆえに $A \subset f^{-1}(f(A))$.

f は単射であると仮定し, $x \in f^{-1}(f(A))$ とする. $f(x) \in f(A)$ となるので $f(x) = f(x')$, $x' \in A$ と書ける,
 f は単射なので $x = x' \in A$, ゆえに $f^{-1}(f(A)) \subset A$. これは常に成立するので = を得る.

(4) $y \in f(f^{-1}(B))$ のとき, ある $x \in f^{-1}(B)$ が存在して $y = f(x)$ と書け, $x \in f^{-1}(B)$ により $y = f(x) \in f(X) \cap B$.

ゆえに $f(f^{-1}(B)) \subset f(X) \cap B$, 逆に $y \in f(X) \cap B$ のとき, $y = f(x) \in B$, $x \in X$ と書ける, そのとき, $x \in f^{-1}(B)$ であるので $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. ゆえに $f(X) \cap B \subset f(f^{-1}(B))$, したがって, $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$,

f が全射のとき, $f(X) = Y$ なので $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B = Y \cap B = B$.

□

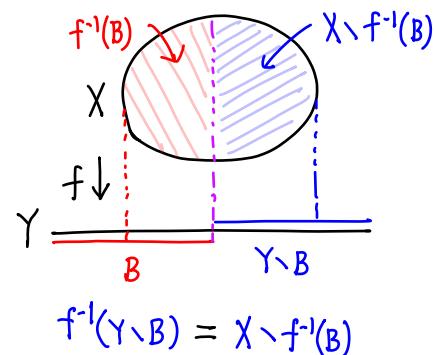
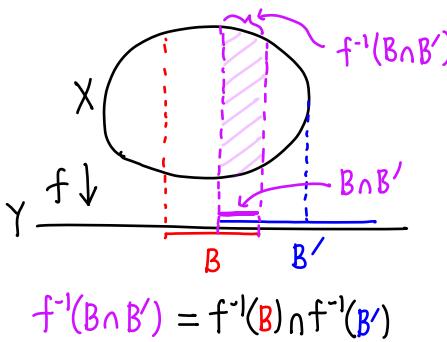
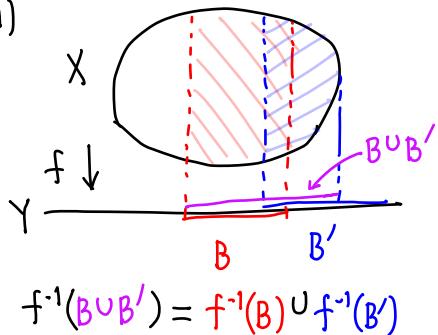
注意 以上は急のために略証を書いただけで、読者の全員が内容を解説することを意図していない! 時間をかけて自分で証明を作つほしい。そのとき、どうしても証明のアイデアが思い浮かばない場合には以上の略証を参照してもよい。

□

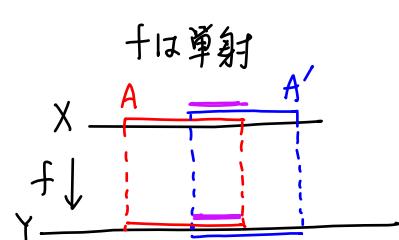
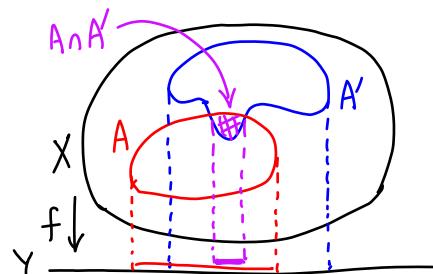
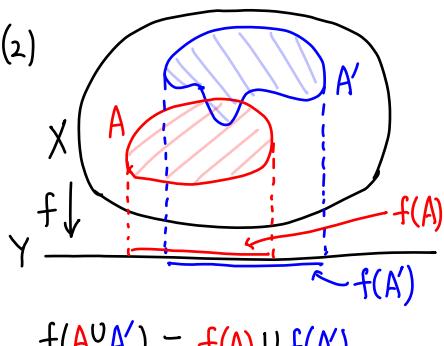
問題 以上の図と上の問題の関係について考えてみよ。

一般的な写像はある物体 X がある Y への射影の図で表わすと便利である。

(1)

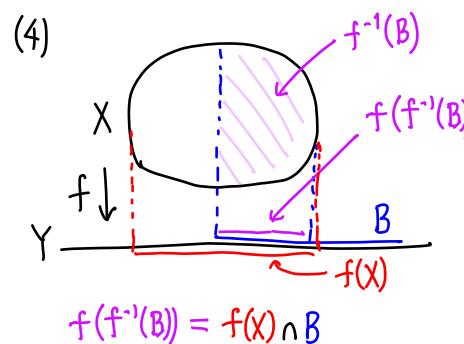
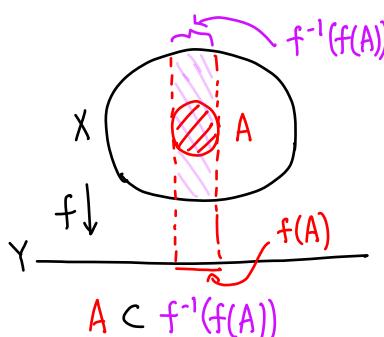


(2)



$$f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$$

(3)



自分でこのような図をたくさん描いてみよ

□

R 上のベクトル空間のノルム

V は \mathbb{R} 上のベクトル空間であるとする。

例 $V = \mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$, \square

例 $V = C([a, b], \mathbb{R}) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ ($a < b$), \square

定義 $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ がノルムであるとは、以下の条件を満たすことである； $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ について、

$$(1) \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (\text{三角不等式})$$

$$(2) \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$$

$$(3) \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0, \quad (\Rightarrow \text{は非退化性と呼ばれている。} \Leftrightarrow \text{は (2) から出る。})$$

例 $p \geq 1$ のとき、 \mathbb{R}^n におけるノルム $\|\cdot\|_p$ を

$$\|a\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \quad (a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n).$$

と定めることができ、 $\|\cdot\|_\infty$ を

$$\|a\|_\infty = \max \{|a_1|, \dots, |a_n|\}$$

と定めることもできる。これらを ℓ^p ノルムと呼ぶ。 \square

定義 ノルムが与えられたベクトル空間を ノルム空間 と呼ぶ。

問題 (1) 上の例の $\|\cdot\|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) が \mathbb{R}^n のノルムになることを示せ。

(2) $\lim_{p \rightarrow \infty} \|a\|_p = \|a\|_\infty$ を示せ。 \square

解説 (1) で非自明なのは 三角不等式の証明だけであるが、Minkowski の不等式としてすでに証明されている。

(2) を示そう。 $|a_1| = \dots = |a_r| > |a_{r+1}| \geq \dots \geq |a_n|$ と仮定してよい。そのとき、

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^p = |a_1|^p r \left(1 + \frac{1}{r} \sum_{i=r+1}^n \left(\frac{|a_i|}{|a_1|} \right)^p \right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} = |a_1| r^{1/p} \left(1 + \frac{1}{r} \sum_{i=r+1}^n \left(\frac{|a_i|}{|a_1|} \right)^p \right)^{1/p} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} |a_1| = \max \{|a_1|, \dots, |a_n|\}. \quad \square$$

定義 \mathbb{R} 上のベクトル空間 V におけるノルム $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|'$ に対して、ある正の定数 C_1, C_2 で

$$C_1 \|a\| \leq \|a\|' \leq C_2 \|a\| \quad (a \in V)$$

が成立しているとき、2つのノルム $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ は 同値であるという。

→ これは同値関係になる。

問題

$\infty \geq p > q \geq 1$ のとき、 $a \in \mathbb{R}^n$ について次が成立することを示せ：

$$\|a\|_p \leq \|a\|_q \leq n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|a\|_p.$$

特に、 \mathbb{R}^n のノルム $\|\cdot\|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) は互いにすべて同値である。 (例えば $\|a\|_2 \leq \|a\|_1 \leq \sqrt{2} \|a\|_2$)

解説

$\alpha = \|a\|_q > 0$ と仮定してよい。 $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{R}$ と書く。 $|a_i| \leq \alpha$ とある。

$p = \infty$ と仮定する。このとき、

$$\|a\|_p = \|a\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| = \left(\max_{1 \leq i \leq n} |a_i|^q \right)^{1/q} \leq (\|a\|_q^q)^{1/q} = \|a\|_q.$$

$$\|a\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q \right)^{1/q} \leq \left(n \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|^q \right)^{1/q} = n^{1/q} \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| = n^{1/q} \|a\|_\infty.$$

$p < \infty$ と仮定する。

$$0 \leq \left| \frac{a_i}{\alpha} \right| \leq 1 \text{ となるので}, p \geq q > 0 \text{ より} \quad \left| \frac{a_i}{\alpha} \right|^p \leq \left| \frac{a_i}{\alpha} \right|^q \text{ となる}, \text{ゆえに}$$

$$\begin{aligned} \|a\|_p &= \alpha \left\| \frac{1}{\alpha} a \right\|_p = \alpha \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{a_i}{\alpha} \right|^p \right)^{1/p} \leq \alpha \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{a_i}{\alpha} \right|^q \right)^{1/p} = \alpha \left(\left\| \frac{1}{\alpha} a \right\|_q \right)^{q/p} \\ &= \alpha \left(\frac{1}{\alpha} \|a\|_q \right)^{q/p} = \alpha \cdot 1 = \|a\|_q. \end{aligned}$$

これで $\|a\|_p \leq \|a\|_q$ を示せた。

$p \geq q > 0$ より、 $\frac{p}{q} \geq 1$ となるので、 $x > 0$ において函数 $x^{\frac{p}{q}}$ は下に凸である。

ゆえに Jensen の不等式より、

$$\left(\frac{1}{n} \|a\|_q^q \right)^{p/q} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i|^q \right)^{p/q} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|a_i|^q)^{p/q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i|^p = \frac{1}{n} (\|a\|_p)^p$$

$$\therefore n^{-1/q} \|a\|_q \leq n^{-1/p} \|a\|_p, \text{ i.e. } \|a\|_q \leq n^{1/q - 1/p} \|a\|_p.$$

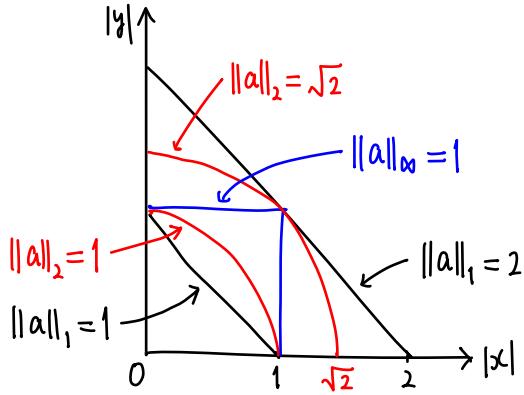
これで $\|a\|_q \leq n^{1/q - 1/p} \|a\|_p$ も示せた。

□

例

($n=2$ のときの $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ の比較) $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ について、

$$\|a\|_1 = |x| + |y|, \quad \|a\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \|a\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$



この図より、

$$\begin{cases} \|a\|_\infty \leq \|a\|_2 \leq \|a\|_1, \\ \|a\|_\infty \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|a\|_2 \geq \frac{1}{2} \|a\|_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max\{|x|, |y|\} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \\ \max\{|x|, |y|\} \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{|x| + |y|}{2} \end{cases}$$

□

定理 \mathbb{R}^n におけるすべてのノルムは互いにすべて同値である。

証明 $e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (i 番目のみが 1 で他は 0) とおく。

$\|\cdot\|$ は \mathbb{R}^n における任意のノルムであるとする。

$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ について、ノルム $\|\cdot\|$ の三角不等式と Cauchy-Schwarz の不等式より、

$$c_2 = \sqrt{\|e_1\|^2 + \dots + \|e_n\|^2}$$

$$\|a\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \|e_i\| \leq c_2 \|a\|_2.$$

ゆえに、 $a, b \in \mathbb{R}^n$ について、 $\|a - b\| \leq c_1 \sqrt{n} \|a - b\|_2$ なので「通常の Euclid ノルム $\|\cdot\|_2$ 」について、「ノルム $\|\cdot\|$ 」は連続になるので、 \mathbb{R}^n の有界閉集合 $\{a \in \mathbb{R}^n \mid \|a\|_2 = 1\}$ (単位球面) 上で「ノルム $\|a\|$ 」は最小値 c_2 を持つ。 $a \neq 0$ のとき $\|a\| > 0$ なので、 $c_2 > 0$ となる。

したがって、 $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ について、 $\alpha = \|a\|_2 > 0$ とおくと、 $\frac{1}{\alpha} a \in S^{n-1}$ となり、

$$\|a\| = \alpha \left\| \frac{1}{\alpha} a \right\| \geq \alpha c_2 = c_2 \|a\|_2.$$

これで、正の定数 c_1, c_2 が存在して、 $c_2 \|a\|_2 \leq \|a\| \leq c_1 \|a\|_2$ となること、つまり、 $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|_2$ が同値なノルムであることがわかった。ノルムの同値性は同値関係なので、 \mathbb{R}^n のすべてのノルムが同値になることもわかる。

□

注意 上の証明で、「 \mathbb{R}^n の有界閉集合上の実数値連続函数が最小値を持つ」という結果を使った。この主張に出て来る「閉集合」「連続函数」の定義とこの結果については、後で詳しく説明する。(22)を見よ。

□

約束 単に \mathbb{R}^n と書いて距離空間とみなす場合には Euclid ノルム

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

によって定めた距離函数を考えることにする。たとえば $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ の距離は

$$d(x, x') = |x - x'| \quad (x, x' \in \mathbb{R})$$

と定義されていると考える。さらに、 \mathbb{R}^n の部分集合を距離空間とみなす場合にも同様であるとする。

しかし、上の定理より、Euclid ノルム以外の任意のノルムで距離を定義してもほとんどの結論は同じになる。

□

例 $V = C([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ ($a < b$) とする.

$f \in V$ は閉区間上の連続函数なので、 $x \mapsto |f(x)|$ は閉区間 $[a, b]$ 上の $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 値の連続函数になるので、 V の $\sup \| \cdot \|_{L^1}$ が

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

(注) $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$
が成立することについては
㉚を見よ.

と定義される。これが実際にノルムであることを示す。

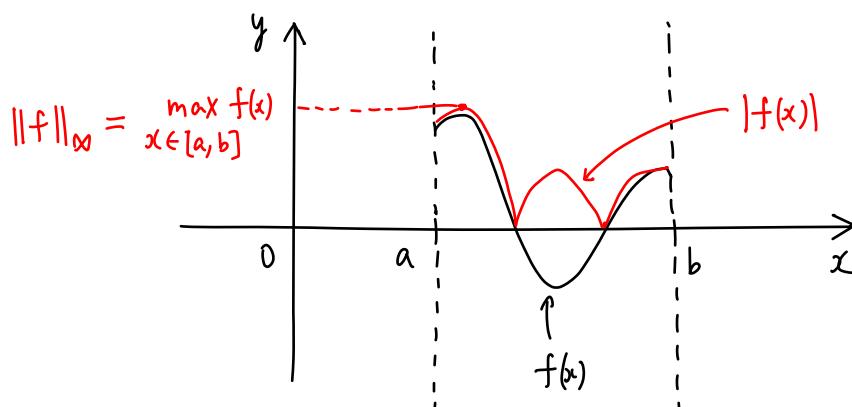
$f, g \in V$ について、

$$\begin{aligned} \|f+g\|_\infty &= \sup_{x \in [a, b]} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \sup_{x, y \in [a, b]} (|f(x)| + |g(y)|) \\ &= \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sup_{y \in [a, b]} |g(y)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

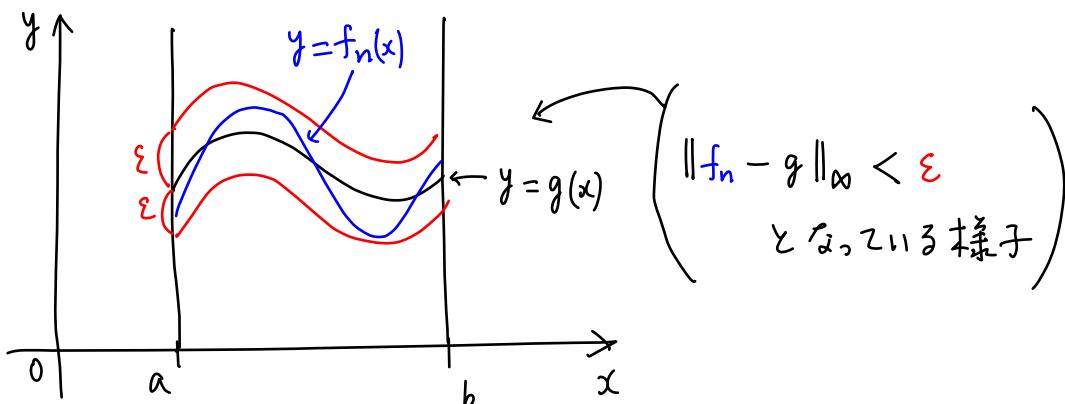
$f \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ について、

$$\|\alpha f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |\alpha f(x)| = \sup_{x \in [a, b]} |\alpha| |f(x)| = |\alpha| \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = |\alpha| \|f\|_\infty.$$

$f \in V$ について、 $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = 0$ ならば $\forall x \in [a, b]$ について $f(x) = 0$ となるので $f = 0$.



注意 後で詳しく説明するが、 $\sup \| \cdot \|_{L^1}$ に関する収束は一様収束に等しい。



例 $V = C([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{は連続}\}$ ($a < b$) とする. $p \geq 1$ を仮定する.

$f \in V$ の L^p ノルムを

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

と定めることができる. (これが実際にはノルムを定めることは自分で示せ.)

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b \|f\|_\infty^p dx \right)^{1/p} = (b-a)^{1/p} \|f\|_\infty.$$

$\alpha > p$ であるとし, 連続函数列 $f_n \in V$ を次のように定める:

$$f_n(x) = \begin{cases} (x-a)^{-1/\alpha} & (a+\frac{1}{n} \leq x \leq b) \\ n^{1/\alpha} & (a \leq x \leq a+\frac{1}{n}) \end{cases}$$

このとき,

$$\|f_n\|_\infty = n^{1/\alpha} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\|f_n\|_p \leq \left(\int_a^b (x-a)^{-p/\alpha} dx \right)^{1/p} = \left(\left[\frac{(x-a)^{1-p/\alpha}}{1-p/\alpha} \right]_a^b \right)^{1/p} = \frac{(b-a)^{1/p-1/\alpha}}{(1-p/\alpha)^{1/p}}.$$

なので, 正の定数 C で $\|f_n\|_\infty \leq C \|f_n\|_p$ ($n=1, 2, \dots$) を取たすものは存在しない
特に, $\|\cdot\|_\infty \asymp \|\cdot\|_p$ は同値ではない. \square

これは本質的に Hölder の不等式 \downarrow この $p=r, q=\infty, f=1$ の場合が

問題 $p, q, r \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ のとき, $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ となることを示せ. 上に出て来た

略解 $p' = \frac{p}{r}, q' = \frac{q}{r}$ とおくと, $p', q' \geq 1$ かつ $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$. $\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}, \tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_q}$ とおく.

$a = |\tilde{f}(x)|^r, b = |\tilde{g}(x)|^r$ に Young の不等式を適用すると,

$$|\tilde{f}(x) \tilde{g}(x)|^r = ab \leq \frac{a^{p'}}{p'} + \frac{b^{q'}}{q'} = \frac{|\tilde{f}(x)|^p}{p'} + \frac{|\tilde{g}(x)|^q}{q'}.$$

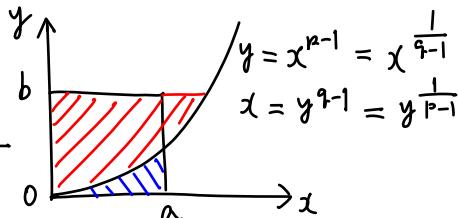
これを $x \in [a, b]$ で積分すると, $(\|\tilde{f}\tilde{g}\|_r)^r \leq \frac{1}{p'}(\|\tilde{f}\|_p)^p + \frac{1}{q'}(\|\tilde{g}\|_q)^q = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$. \square

問題 $\infty > p > q \geq 1$ のとき, $V = C([a, b], \mathbb{R})$ において, $\|\cdot\|_p \asymp \|\cdot\|_q$ が同値でないことを示せ.

略解 $p > \alpha > q$ であるとし, $f_n(x) = \begin{cases} (x-a)^{-1/\alpha} & (a+\frac{1}{n} \leq x \leq b) \\ n^{1/\alpha} & (a \leq x \leq a+\frac{1}{n}) \end{cases}$ を用いよ示せ. \square

Young の不等式 $a, b \geq 0, p, q \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ のとき, $p-1 = \frac{p}{q} = \frac{1}{q-1}$ とおいて,

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy \geq ab$$



距離空間

定義 (距離空間, metric space) 集合 X と函数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ の組 (X, d)

で以下の条件をみたすものを 距離空間 と呼ぶ: $x, y, z \in X$ について,

$$(1) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{三角不等式})$$

$$(2) \quad d(y, x) = d(x, y) \quad (\text{対称性})$$

$$(3) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (\Rightarrow \text{非退化性と呼ぶ})$$

これを, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を 距離函数 と呼び, $d(x, y)$ を x と y の 距離 と呼ぶ \square

例 V を \mathbb{R} 上のベクトル空間とし, $\|\cdot\|$ をそのノルムとするとき, 距離函数を

$$d(a, b) = \|a - b\| \quad (a, b \in V)$$

と定めると, (V, d) は距離空間になる. 実際,

$$\begin{cases} d(a, c) = \|a - c\| = \|a - b + b - c\| \leq \|a - b\| + \|b - c\| = d(a, b) + d(b, c), \\ d(b, a) = \|b - a\| = \|-1(a - b)\| = |-1| \|a - b\| = \|a - b\| = d(a, b), \\ d(a, b) = \|a - b\| = 0 \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b, \end{cases}$$

 \square

定義 集合 X の 2つの距離函数 $d, d': X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して, 正の定数 c_1, c_2 で

$$c_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \leq c_2 d(x, y) \quad (x, y \in X)$$

をみたすものが存在するとき, d と d' は 同値 であるといふ. (これは同値関係になる.) \square

例 \mathbb{R} 上のベクトル空間上の同値なノルムは同値な距離函数を与える. \square

注意 同値な距離は同値な“解析学”を与えると考えられることが後でわかる.

たとえば, \mathbb{R}^n の ℓ^p ノルム

$$\|a\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \quad (a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, 1 \leq p \leq \infty)$$

の各々ごとに ℓ^p 距離

$$d(a, b) = \|a - b\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|^p \right)^{1/p} \quad (a, b \in \mathbb{R}^n, 1 \leq p \leq \infty)$$

が定義される. \mathbb{R}^n の ℓ^p ノルムは (実際には \mathbb{R}^n のすべてのノルムは) 互いに同値なので, これらは同値な“解析学”を与える. たとえば, 点列の収束性はどのノルム, どの距離についても同値になる.

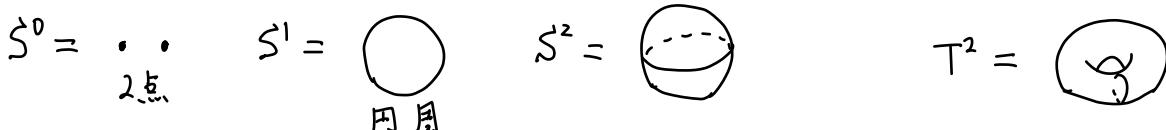
 \square

定義 (部分空間) 距離空間 (X, d_X) と X の部分集合 Y について、距離函数 $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ の $Y \times Y$ 上への制限を $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ と書くと、 (Y, d_Y) も距離空間になる。この (Y, d_Y) を X の 距離部分空間 (metric subspace) と呼ぶ。□

例 \mathbb{R}^n は Euclid ノルム $\| \cdot \|_2$ によって距離空間とみなされる。

\mathbb{R}^n の任意の部分集合も上の定義によって距離空間とみなされる。□

例 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ は $n-1$ 次元球面 と呼ばれる。 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ なので S^{n-1} は距離空間とみなされる。□



例 $T^n = \{x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = \dots = x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 1\}$ は n 次元トーラス と呼ばれる。 $T^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ なので T^n は距離空間とみなされる。□

例 体 K 係数の形式べき級数全体の集合を $K[[x]]$ と書く:

$$K[[x]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \mid a_0, a_1, a_2, \dots \in K \right\}.$$

$K[[x]]$ には自然に K 上のベクトル空間の構造が入る:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, f, g \in K[[x]], a \in K \text{ について},$$

$$f+g := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k, af = \sum_{k=0}^{\infty} (a a_k) x^k.$$

$$(さらに, fg = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_{j-i} \text{ によって環の構造が入る。})$$

$f \in K[[x]]$ について、 $|f| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$|f| = \begin{cases} 0 & (f=0) \\ e^{-r} & (f = a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \dots, a_r \neq 0) \end{cases}$$

と定めると、 $|f+g| \leq \max\{|f|, |g|\} \leq |f| + |g|$ が成立していることより、 $K[[x]]$ に距離函数 $d(f, g) = |f-g|$ を定めることにより、 $K[[x]]$ は距離空間とみなされる。

この距離に関して、 f が 0 に近いことは、 $f = a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \dots, a_r \neq 0$ と表わしたときの $r = (f の x=0 での位数)$ が大きいことと同じになる。□

二の例に類似した
距離空間に
 $\mathbb{Z}_p = (p\text{進整数環})$
がある。 p 進体 \mathbb{Q}_p と
形式 Laurent 級数体
 $K((x))$ は似てな。

注意 上の $K[[x]]$ は完備距離空間の例にもなっている。□

距離空間のあいだの写像の連続性と距離空間内の点列の収束

定義 (等長写像) 距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ のあいだの写像 $f: X \rightarrow Y$ が 等長的 (isometric) であるとは、任意の $x, x' \in X$ に対して、 $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ が成立することを定める。

等長的な写像を 等長写像 と呼ぶ。□

距離空間のあいだの「よい写像」として、よく使われるのは、等長写像よりもずっと弱い非自明な条件で定義される連続写像である。以下では距離空間のあいだの写像の連続性について順番に説明していく。

$f: X \rightarrow Y$ が点 $a \in X$ において連続であるとは、おおざっぱに言えば、

$x \in X$ が a にいくらでも近付くとき、 $f(x)$ が $f(a)$ にいくらでも近付く

ことである。これを正確に言い直すと次の定義になる！ (非自明！半年位考えるべきこと！)

定義 (写像の一までの連続性) 距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ のあいだの写像 $f: X \rightarrow Y$ が点 $a \in X$ において連続であるとは、次の条件を満たしていることである：

(*) 任意の $\varepsilon > 0$ について、ある $\delta > 0$ が存在して、

$x \in X$ かつ $d_X(x, a) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる。□

注意 「 $d_X(x, a) < \delta$ 」と「 $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ 」をそれぞれ「 $d_X(x, a) \leq \delta$ 」と「 $d_Y(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$ 」で書きかえても (*) と同値な条件が得られる。さらに正の定数 K, L について、「 $d_X(x, a) < \delta$ 」と「 $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ 」をそれぞれ「 $d_X(x, a) \leq K\delta$ 」と「 $d_Y(f(x), f(a)) \leq L\varepsilon$ 」で書きかえても (*) と同値な条件が得られる。□

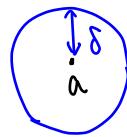
注意 上の $f: X \rightarrow Y$ が点 $a \in X$ で連続でないという条件は次と同値になる：

(**) ある $\varepsilon > 0$ が存在して、任意の $\delta > 0$ について、

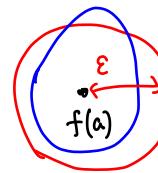
ある $x \in X$ で $d_X(x, a) < \delta$ かつ $d_Y(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$ を満たすものがある。

$$U_\delta(a) = \{x \in X \mid d_X(x, a) < \delta\}$$

$$f(U_\delta(a))$$



\xrightarrow{f}



$$U_\varepsilon(f(a)) = \{y \in Y \mid d_Y(y, f(a)) < \varepsilon\}$$

どんなに $\delta > 0$ を小さくしても

$U_\delta(a)$ の f による像 $f(U_\delta(a))$ のある部分が $U_\varepsilon(f(a))$ の外にはめたす場合に、 f は a で連続ではない。

□

定理 距離空間のあいたの写像 $f: X \rightarrow Y$ の点 $a \in X$ で連続であるという条件は、
 X と Y の距離函数を同値な別の距離函数に変えても同値なまま不変である。

証明 距離函数の同値性の対称性より、 X の距離函数 d_X, d'_X がある正の定数 C_X について $d_X(x, x') \leq C_X d'_X(x, x')$ ($x, x' \in X$) をみたしており、 Y の距離函数 d_Y, d'_Y がある正の定数 C_Y について $d'_Y(y, y') \leq C_Y d_Y(y, y')$ ($y, y' \in Y$) をみたしているときに ('のつ) いする場所が d_X と d_Y で逆になることに注意)、 $f: X \rightarrow Y$ が a で d_X, d_Y について連続ならば d'_X, d'_Y についても連続になることを示せば十分である。
 そのような仮定のもとで任意に $a \in X$ と $\varepsilon > 0$ をとる。

f の a での d_X, d_Y に関する連続性より、ある $\delta > 0$ が存在して、 $x \in X$ が $d_X(x, a) < \delta$ をみたしているならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon/C_Y$ をみたしている。このとき、 $d'_X(x, a) < \delta/C_X$ ならば $d_X(x, a) \leq C_X d'_X(x, a) < \delta$ となるので、 $d'_Y(f(x), f(a)) \leq C_Y d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる。
 ゆえに、 f は d'_X, d'_Y についても a で連続である。 \square

注意 上の証明は以下の論議論を $\varepsilon-\delta$ 論法で言い直しただけである。

- $d_X(x, a) \leq C_X d'_X(x, a)$ より、 $d'_X(x, a) \rightarrow 0$ ならば $d_X(x, a) \rightarrow 0$ となる。
- f が d_X, d_Y について連続より、 $d_X(x, a) \rightarrow 0$ から $d_Y(f(x), f(a)) \rightarrow 0$ となる。
- $d'_Y(f(x), f(a)) \leq C_Y d_Y(f(x), f(a))$ より、 $d_Y(f(x), f(a)) \rightarrow 0$ から $d'_Y(f(x), f(a)) \rightarrow 0$ となる。
- 以上を合わせると、 $d'_X(x, a) \rightarrow 0$ ならば $d'_Y(f(x), f(a)) \rightarrow 0$ となる。

$\varepsilon-\delta$ 論法による証明を直接的に作れない場合には、一度このように考えてから、内容を $\varepsilon-\delta$ に変換すればよい。

\square

以下、めんどうなので距離函数 d_X, d_Y を両方單に d と書くことにする。

定義 (点列の収束) 距離空間 (X, d) において、 X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $b \in X$ に収束するとは次の条件をみたすことである：

(*) 任意の $\varepsilon > 0$ について、ある番号 N が存在して、
 $n \geq N$ ならば $d(a_n, b) < \varepsilon$ となる。

□

注意 「 $d(a_n, b) < \varepsilon$ 」を「 $d(a_n, b) \leq \varepsilon$ 」や定数 $C > 0$ に関する「 $d(a_n, b) \leq C\varepsilon$ 」などと書く場合でも (*) と同値な条件が得られることに注意せよ。
(どうして同値になるか自分で考えてみよ。)

□

注意 距離空間 X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある $b \in X$ に収束するとき、点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するといふ。収束する点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束先は一意に定まる。収束先を $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と書く。

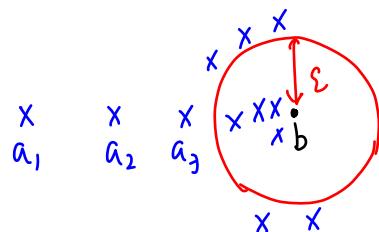
□

注意 点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $b \in X$ に収束しないという条件は次と同値である。

(**) ある $\varepsilon > 0$ が存在して、任意の番号 N について、
ある $n \geq N$ で $d(a_n, b) \geq \varepsilon$ をみたすものが存在する。

この収束しないという条件は次のようにも言い換えられる： 無限個の意味

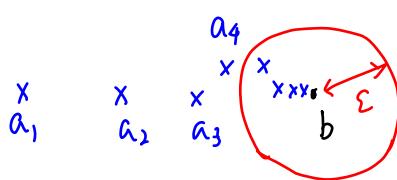
(**)' ある $\varepsilon > 0$ で $d(a_n, b) \geq \varepsilon$ をみたすものが無限個にある。



$\varepsilon > 0$ を十分に小さくすると、
 b から ε 以上離れてる
 a_n が無限個あると、
 a_n は b に収束していない。

点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が b に収束するという条件も次のように言い換えられる：

(*)' 任意の $\varepsilon > 0$ について、 $d(a_n, b) \geq \varepsilon$ をみたすのは有限個しかない。



どんなに小さな $\varepsilon > 0$ についても
 b から ε 以上離れてる
 a_n が有限個しかないと、
 a_n は b に収束している。

以上の ε - N 論法による点列の収束の定義について、ピンときていない人は、論理的な作業と図を描きながらの直観的作業をくりかえしていれば、いつかはピンとくるようになるだろう。

□

補題

距離空間 X 上の点 a と点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について以下の 2 つの条件は互いに同値である。

- (1) 点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束する。
- (2) 数列 $\{d(a_n, a)\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する。

□

これはほんと自明なので自分で証明してほしい。

特に、0 に収束する非負実数列 $c_n \rightarrow 0$ について $d(a_n, a) \leq c_n$ が成立しているならば、 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束している。

定理

集合 X 上の 2 つの距離函数 d, d' 同値であると仮定する。このとき、
 X 上の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $b \in X$ に距離函数 d について収束することと、距離函数 d' について
 収束することは同値である。

証明

距離函数の同値性の対称性より、ある正の定数 C が存在して、

$d'(x, y) \leq C d(x, y)$ ($x, y \in X$) が成立しているとき、 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が b に d について収束して
 いれば d' についても収束していることを示せばよい。

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が b に d について収束していることは、 $\{d(a_n, b)\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することには
 同値である。このとき、 $d'(a_n, b) \leq C d(a_n, b)$ より、 $\{d'(a_n, b)\}_{n=1}^{\infty}$ も 0 に収束するので、
 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が b に d' についても収束する。

□

有界性 X は空でない距離空間であるとし, $A \subset X$ とする.

A が「有界」であるとは, ある $x_0 \in X$ とある $L > 0$ が存在して,

任意の $a \in A$ について $d(a, x_0) \leq L$ が成立することであると定める.

$X = \emptyset$ のときにも $A = \emptyset$ は有界とみなす.

□

注意 $x_0 \in X$, $L > 0$ について「任意の $a \in A$ について $d(a, x_0) \leq L$ 」が成立していれば,
 $x_1 \in X$, $M = L + d(x_0, x_1)$ について「任意の $a \in A$ について $d(a, x_1) \leq M$ 」も 成立している.

証明 三角不等式より, $d(a, x_0) \leq d(a, x_0) + d(x_0, x_1) \leq L + d(x_0, x_1) = M$. □

注意 距離空間 X の部分集合 A について, 以下の 2 つの条件は互いに同値である:

(a) A は有界である.

(b) ある $M > 0$ が存在して, 任意の $x, x' \in A$ について $d(x, x') \leq M$.

証明 $A = \emptyset$ のとき, (a) \Leftrightarrow (b) は自明なので $A \neq \emptyset$ と仮定してもいい.

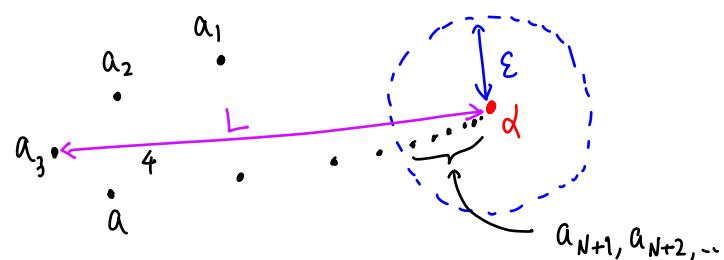
(a) \Rightarrow (b): (a) を仮定する. そのとき ある $x_0 \in X$ と $L > 0$ が存在して,

任意の $a \in A$ について $d(a, x_0) \leq L$ となる. ゆえに, $M = 2L$ とおくと, $a, a' \in A$ に対して,
 $d(a, a') \leq d(a, x_0) + d(x_0, a') = d(a, x_0) + d(a', x_0) \leq L + L = M$.

(b) \Rightarrow (a): (b) を仮定する. そのとき, ある $M > 0$ が存在して, 任意の $a, a' \in A$ について
 $d(a, a') \leq M$ となる. 特に $x_0 \in A$ を任意にとると, 任意の $a \in A$ について $d(a, x_0) \leq M$, □

命題 距離空間における収束する点列は有界である.

証明 X は距離空間であるとし, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X における $a \in X$ に収束する点列であるとする. $\varepsilon > 0$ とする. ある N が存在して, $n \geq N$ のとき $d(a_n, a) < \varepsilon$ となる,
残りの $d(a_1, a), \dots, d(a_{N-1}, a)$ の最大値とその大きい方を L とすると, すべての
 $n = 1, 2, \dots$ について, $d(a_n, a) \leq L$ となる.



ホイント: 有限個の
 $d(a_1, a), \dots, d(a_{N-1}, a)$
 であれば「最大値」とれる.

□

定理 距離空間のあいだの写像 $f: X \rightarrow Y$ とし, $a \in X$ について以下の2つの条件は互いに同値である.

(1) f は点 a で連続である.

(2) a に収束する X 上の任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について,
 Y 上の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束する.

$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \leftarrow a_n \rightarrow a \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(a)$
 と略記できる.

証明 (1) \Rightarrow (2) f は点 a で連続であると仮定し, X 上の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束していようと仮定する. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. f は点 a で連続なので, ある $\delta > 0$ が存在して,
 $x \in X, d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon,$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束するので, ある N が存在して, $n \geq N$ のとき, $d(a_n, a) < \delta$ となり,
 $d(f(a_n), f(a)) < \varepsilon$ となる. これは Y 上の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(a)$ に収束することを意味する.

(2) \Rightarrow (1) の対偶 f は a で連続ではないと仮定する. すなわち, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $\delta > 0$ について, ある $x \in X$ で $d(x, a) < \delta$ かつ $d(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$ をめたものが存在する. $n = 1, 2, \dots$ について, $\delta = \frac{1}{n}$ のときのそのような x の一つを a_n と書く,
 $d(a_n, a) < \frac{1}{n}$ かつ $d(f(a_n), f(a)) \geq \varepsilon$.

このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束し, $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束しない. これで(2)の否定が得られた. \square

定義 (連続写像) 距離空間のあいだの写像 $f: X \rightarrow Y$ が 連続 (continuous) であるとは X のすべての点において f が連続であることである.

\square

この講義では距離空間と連続写像が主役になる.

以下に述べる上の定理の系は点列の収束を保つことによって連続写像を特徴付けている.
 連続写像の特徴付けは他にもたくさんある. \leftarrow (これ大事)

上の定理の系 (連続写像の点列の収束による特徴付け)

距離空間のあいだの写像 $f: X \rightarrow Y$ について以下の2つの条件は互いに同値である.

(1) f は連続である.

(2) X 上の収束する任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について Y 上の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して,

$$f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

が成立する.

\square

四則演算の連続性

問題 以下の写像が連続であることを示せ。

$$(1) f_+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_+(x, y) = x + y,$$

$$(2) f_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_-(x) = -x,$$

$$(3) f_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_x(x, y) = xy,$$

$$(4) f_{\text{inv}} : \mathbb{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}, f_{\text{inv}}(x) = x^{-1}.$$

この問題の結果から

\mathbb{R}^2 の点列 $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ に収束すれば $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$$

などが成立することもわかる。

解答例 (1) $\varepsilon > 0$ とする。 $(a, b), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $d((x, y), (a, b)) = ((x-a)^2 + (y-b)^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$ とするとき、

$$d(f_+(x, y), f_+(a, b)) = |(x+y)-(a+b)| \leq |x-a| + |y-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) $\varepsilon > 0$ とする。 $a, x \in \mathbb{R}$, $d(x, a) = |x-a| < \varepsilon$ とするとき、

$$d(f_-(x), f_-(a)) = |(-x) - (-a)| = |x-a| < \varepsilon.$$

(3) $\varepsilon > 0$ とする。 $(a, b), (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$d((x, y), (a, b)) = ((x-a)^2 + (y-b)^2)^{\frac{1}{2}} < \min \left\{ \frac{\varepsilon/2}{1+|a|}, 1, \frac{\varepsilon/2}{1+|b|} \right\}$$

とするとき、

$$|y| = |y-b| + |b| < 1 + |b|, \quad \text{①} \quad \text{④}$$

$$\begin{aligned} d(f_x(x, y), f_x(a, b)) &= |xy - ab| = |xy - ay + ay - ab| = |xy - ay| + |ay - ab| \\ &\leq |x-a||y| + |a||y-b| < \frac{\varepsilon/2}{1+|b|} (1+|b|) + |a| \frac{\varepsilon/2}{1+|a|} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(4) $\varepsilon > 0$ とする。 $a, x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$,

$$d(x, a) = |x-a| < \min \left\{ \frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2}{2} \varepsilon \right\}$$

とするとき、

$$|x| = |x-a+a| \geq |a| - |x-a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} \quad \text{①} \quad \text{④}$$

$$d(f_{\text{inv}}(x), f_{\text{inv}}(a)) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x-a|}{|a||x|} < \frac{|a|^2/2 \cdot \varepsilon}{|a| \cdot |a|/2} = \varepsilon. \quad \text{②}$$

三角不等式は
 $|a \pm b| \geq |a| - |b|$
 $|a \pm b| \geq |b| - |a|$
の形でも使われる。

注意 以上のように四則演算の連続性は一応非自明である。

証明をどのようにして具付けたかについても考えてみよ。

こういうことを理解するためには長時間の試行錯誤が必要になる。

□

□

証明の作り方

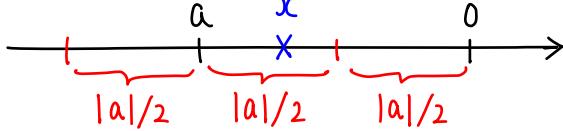
(4) を例に説明。 $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, $\varepsilon > 0$ とする。

① $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ を a にどれだけ近付ければ、 $d(f_{inv}(x), f_{inv}(a)) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon$ とできるかを考える

② $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x-a|}{|a||x|}$ を小さくするためには、まず $|x|$ をある一定以上 0 から離して、 $|x-a|$ を小さくすればよい。

③ $a \neq 0$ なので $|x-a|$ を十分小さくすれば $|x|$ をある一定以上 0 から離せる。

たとえば $|x-a| < \frac{|a|}{2}$ とすれば $|x| > \frac{|a|}{2}$ となる。そのとき、 $\frac{|x-a|}{|a||x|} < \frac{|x-a|}{|a|\cdot|a|/2}$ 。



$$\begin{cases} \text{三角不等式} \\ |x| = |x-a+a| \geq |a| - |x-a| \text{ を使う。} \end{cases}$$

④ $\frac{|x-a|}{|a||a|/2} < \varepsilon$ とするためには $|x-a| < \frac{|a|^2}{2} \varepsilon$ とすればよい。

⑤ $|x-a|$ を $\frac{|a|}{2}$ と $\frac{|a|^2}{2} \varepsilon$ よりも小さくするには、 $\delta = \min\left\{\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2}{2} \varepsilon\right\} > 0$ より小さくすればよい。

⑥ 以上をまとめると、 $a, x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, $\varepsilon > 0$, $d(x, a) = |x-a| < \min\left\{\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2}{2} \varepsilon\right\}$ のとき、
 $d(f_{inv}(x), f_{inv}(a)) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x-a|}{|a||x|} > \frac{|a|^2/2 \cdot \varepsilon}{|a|\cdot|a|/2} = \varepsilon$ となることがわかる。

⑦ これは、任意の $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ と $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta = \min\left\{\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2}{2} \varepsilon\right\}$ とおくと、
 $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, $d(x, a) < \delta$ ならば $d(f_{inv}(x), f_{inv}(a)) < \varepsilon$ となることを意味している。
 したがって、 $f_{inv} : \mathbb{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ の連続性が証明された。 □

注意

$\delta > 0$ は a と ε に依存していてもよいが、 x に依存していいけない。 □

問題

(1), (2), (3)についても以上と同じようなことを自分で考えてみよ。 □

Cesàro 和 (チエサ"ロ和)

$a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が Cesàro 総和可能 (Cesàro summable) であるとは,

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ たちの平均の数列 $\left\{ \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することであると定める。

そのとき, $\left\{ \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ の収束先を a_1, a_2, \dots の Cesàro 和 (Cesàro sum) と呼ぶ。

$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right)$ が収束していることは, 部分和の数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束していることである。)

定理

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が σ に収束していれば, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は Cesàro 総和可能で Cesàro 和は σ になる。

証明

数列 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ が σ に収束しているならば $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$ が σ に収束することを示せばよい。

$S_n = s_n - \sigma$ とおく。 S_n が 0 に収束することと s_n が σ に収束することは同値であり,

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k - \sigma$ が 0 に収束することと $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k$ が σ に収束することは同値である。

ゆえに, S_n が 0 に収束すると仮定して, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$ が 0 に収束することを示せばよい。

数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束すると仮定し, $\varepsilon > 0$ を任意にとる。

ある N が存在して, $n \geq N$ のとき $d(S_n, 0) = |S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる。 ゆえに, $n \geq N$ のとき

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k, 0\right) &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k \right| \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_k| \stackrel{(2)}{=} \frac{|S_1| + \dots + |S_{N-1}|}{n} + \frac{|S_N| + \dots + |S_n|}{n} \\ &\stackrel{(3)}{\leq} \frac{|S_1| + \dots + |S_{N-1}|}{n} + \frac{|S_N| + \dots + |S_n|}{n-N+1} \stackrel{(4)}{<} \frac{|S_1| + \dots + |S_{N-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

(1) は三角不等式より, (2) は和の分割, (3) は $n-N+1 \leq n$ より, (4) は $|S_N|, \dots, |S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ より。

さらに, N' を $2(|S_1| + \dots + |S_{N-1}|)/\varepsilon$ より大きい整数とすると $n \geq N' > \frac{2}{\varepsilon}(|S_1| + \dots + |S_n|)$ のとき,

$$\frac{|S_1| + \dots + |S_{N-1}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ゆえに, $n \geq \max\{N, N'\}$ のとき, $d\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k, 0\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ となる。

これで $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$ も 0 に収束することが示された。 □

例 $a_n = (-1)^{n-1}$ のとき, $S_n = a_1 + \dots + a_n = \begin{cases} 1 & (n \text{ は奇数}) \\ 0 & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$ となるので $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$ は $\frac{1}{2}$ に収束する。 $1-1+1-1+\dots$ は収束していないが, Cesàro 総和可能で Cesàro 和は $\frac{1}{2}$ になる。 □

発散級数であっても適切な総和法で意味付け可能な場合が多数存在する。

証明の見つけ方

$S_n \rightarrow 0$ のとき, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k \rightarrow 0$ を示したい。

① $S_n \rightarrow 0$ なので 大きな n について $|S_n|$ は小さい。

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = \frac{1}{n} \left(\underbrace{S_1 + \dots + S_{N-1}}_{n \text{ によらない。}} + \underbrace{S_N + S_{N+1} + \dots + S_n}_{\substack{n \text{ でわって} \\ n \text{ を大きくすると} \\ \text{小さくなる。}}} \right)$$

n によらない。 各々の絶対値は小さい

n でわって これらの平均は小さい。

n を大きくすると

小さくなる。

N を大きくしてから

n を大きくすると小さくできる。

③ 以上を $\varepsilon-N$ 論法を使って正確に記述すれば " $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k \rightarrow 0$ を証明できる。 □

Cesàro 和の言葉は $\varepsilon-N$ 論法による収束の定義の応用の定番である。

Cesàro 和の応用例については

<https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/06%20Taylor%27s%20theorems.pdf>

の第4,3節を参照せよ。

ε 近傍系

X は距離空間であるとする. 点 $a \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して,

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

を点 a の ε 近傍 (ε -neighborhood) と呼ぶ. それら全体

$$\{U_\varepsilon(a)\}_{\varepsilon > 0} = \{U_\varepsilon(a) \mid \varepsilon > 0\}$$

を a の ε 近傍系 と呼ぶ. 点列の収束や写像の連続性の定義は、距離函数を使わずに ε 近傍系のみを使つて書き直される.

点列の収束 X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ と点 $b \in X$ について,

(1) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は b に収束する

\Leftrightarrow 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある N が存在して, $\{a_n\}_{n=N}^\infty \subset U_\varepsilon(b)$. \square

\Leftrightarrow 任意の $\varepsilon > 0$ について, $a_n \notin U_\varepsilon(b)$ をみたす n は有限個しかない,

(2) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は b に収束しない

\Leftrightarrow ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の N について, $\{a_n\}_{n=N}^\infty \notin U_\varepsilon(b)$.

\Leftrightarrow ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $a_n \notin U_\varepsilon(b)$ をみたす n は無限個ある.

写像の連続性 距離空間のあいだの写像 $f: X \rightarrow Y$ について,

(1) f は連続である

\Leftrightarrow 任意の $a \in X$ と $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して, $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$.

(2) f は連続でない

\Leftrightarrow ある $a \in X$ とある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $\delta > 0$ について, $f(U_\delta(a)) \not\subset U_\varepsilon(f(a))$. \square

例 (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ($a_k \in \mathbb{R}$) と定めると f は連続である.

(2) $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \geq 0$) と定めると f は連続である.

(3) $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ と $\log: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ はどうも連続で互いに相手の逆写像である. \square

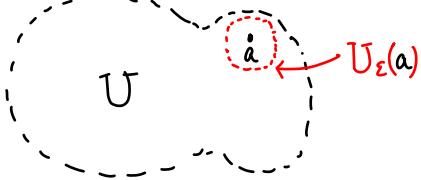
問題 これらを証明せよ. \square ← け、こう基本的で大事.

開集合系

X は距離空間であるとし、 U はその部分集合であるとする。

定義 U が X の開集合 (open subset) であるとは、任意の $a \in U$ に対して

ある $\varepsilon > 0$ で $U_\varepsilon(a) \subset U$ となるものが存在することであると定める。



X の開集合全体の集合 $U_X = \{U(X, d)\}$

X の開集合系と呼ぶ。

U は筆記体の U
何かの略ではない。

□

定理

(1) \emptyset と X は開集合である。

(2) X の開集合たちの和集合も X の開集合である。

(3) X の有限個の開集合の共通部分も X の開集合である。

開集合系の基本性質!
(位相空間論では
これを出発点にしたりする。)

証明 (1) $a \in \emptyset$ となることはない。自動的に \emptyset は開集合である。←これはなぜか?

$a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ について、 $U_\varepsilon(a) \subset X$ なので X も開集合である。

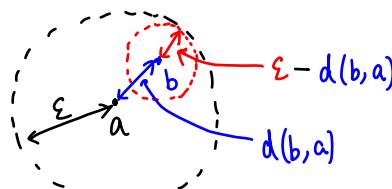
(2) $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, U_λ は X の開集合とする。 $a \in U$ はどれかの U_λ に含まれる。 U_λ は開集合なのである $\varepsilon > 0$ で $U_\varepsilon(a) \subset U_\lambda$ となるものがある。このとき、 $U_\varepsilon(a) \subset U$ なので U は開集合になる。

(3) $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$, U_i は X の開集合とする。 $a \in U$ はすべての U_i に含まれる。 U_i は開集合なのである $\varepsilon_i > 0$ で $U_{\varepsilon_i}(a) \subset U_i$ となるものがある。 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} > 0$ とおくと、すべての i について $U_\varepsilon(a) \subset U_{\varepsilon_i}(a) \subset U_i$ となるので $U_\varepsilon(a) \subset U$ なので U は開集合である。□

命題

$a \in X$, $\varepsilon > 0$ について、 $U_\varepsilon(a)$ は X の開集合である。

証明 $b \in U_\varepsilon(a)$ とすると、 $d(b, a) < \varepsilon$ となる。ゆえに、 $\delta = \varepsilon - d(b, a) > 0$ とおくと、 $x \in U_\delta(b)$ のとき、 $d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a) < \delta + d(b, a) = \varepsilon$ なので $x \in U_\varepsilon(a)$ 。これで $U_\delta(b) \subset U_\varepsilon(a)$ が示された。



□

命題

U が X の開集合 $\Leftrightarrow U$ は $U_a(\varepsilon)$ の形の集合の和集合で書ける。

証明 \Rightarrow を示す。 U は X の開集合であるとする。 $a \in U$ に対して、ある $\varepsilon_a > 0$ で $U_{\varepsilon_a}(a) \subset U$ をみたすものが存在する。このとき、 $U = \bigcup_{a \in U} U_{\varepsilon_a}(a)$ となる。

\Leftarrow を示す。 $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\varepsilon_\lambda}(a_\lambda)$, $\varepsilon_\lambda > 0$, $a_\lambda \in X$ と仮定する。開集合の和集合も開集合なので開集合になる。□

定理 (開集合系による連續写像の特徴付け)

距離空間のあいだの写像 $f: X \rightarrow Y$ について以下の2つの条件は同値である:

(1) f は連続である,

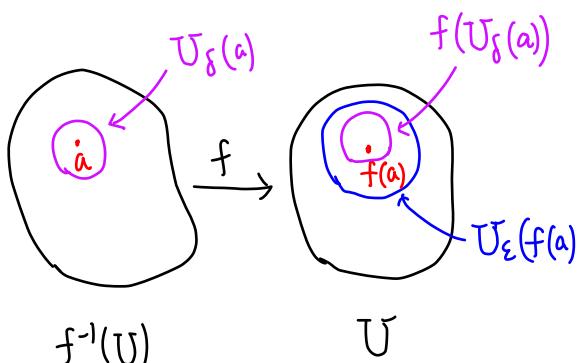
(2) Y の任意の開集合 U について, $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ は X の開集合になる.

証明 (1) \Rightarrow (2) f は連続であるとし, U は Y の開集合とする.

$a \in f^{-1}(U)$ を任意にとる. $f(a) \in U$ と U が開集合であることより, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $U_\varepsilon(f(a)) \subset U$ となる. f の連続性より, ある $\delta > 0$ が存在して, $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a)) \subset U$ となり, $U_\delta(a) \subset f^{-1}(U)$ となる. これで $f^{-1}(U)$ が X の開集合であることがわかった.

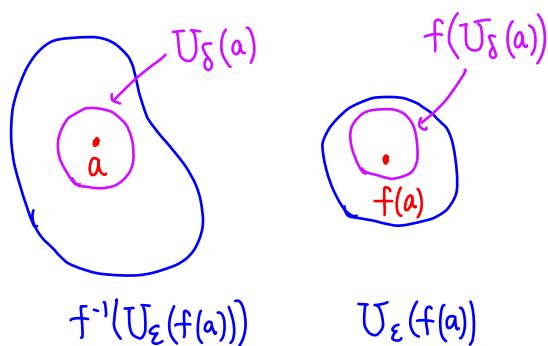
(2) \Rightarrow (1) (2) を仮定し, 任意に $a \in X$ と $\varepsilon > 0$ をとる. $U_\varepsilon(f(a))$ は Y の開集合なので (2) より $f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$ は X の開集合になる. ゆえに, $a \in f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$ より, ある $\delta > 0$ が存在して, $U_\delta(a) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$ となり, $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$ を得る. これで, f が連続であることが示された. \square

(1) \Rightarrow (2) の図 f は連続と仮定.



黒青赤紫の順序に描いた.

(2) \Rightarrow (1) の図 (2) を仮定



青赤紫の順序に描いた.

これらの図を自分で描きながら上の証明を追うとよい.

系 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ は距離空間のあいだの連続写像であるとする. このとき, $g \circ f: X \rightarrow Z$ も連続写像になる.

証明 U を Z の開集合とする. g の連続性より $g^{-1}(U)$ は Y の開集合になり, f の連続性より $f^{-1}(g^{-1}(U))$ は X の開集合になる. そして,

$$(g \circ f)^{-1}(U) = \{x \in X \mid g(f(x)) \in U\} = \{x \in X \mid f(x) \in g^{-1}(U)\} = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

なので, $(g \circ f)^{-1}(U)$ が X の開集合であることがわかり, $g \circ f$ が連続であることが示される. \square

例 \mathbb{R}^n に Euclid ルイで距離を定義する。このとき、

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\} \quad (\text{半径 } r \text{ の開球体})$$

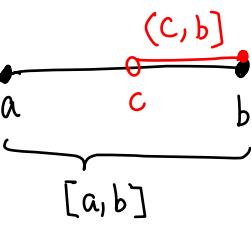
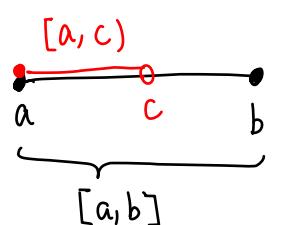
$$\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x > 0\} \quad (\text{半空間})$$

は \mathbb{R}^n の開集合になる。 \square

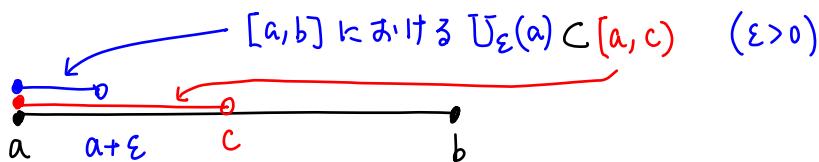
例 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし、開区間 $[a, b]$ を考える。差の絶対値で距離を定義することによって、 $[a, b]$ は距離空間とみなされる。

(1) $[a, b]$ は $[a, b]$ の開集合である。

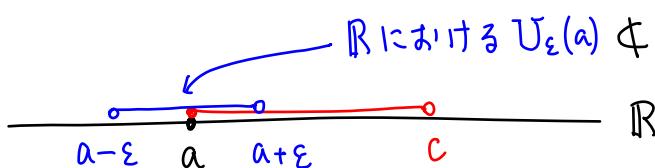
(2) $c \in [a, b]$ について、 $[a, c)$ と $(c, b]$ は $[a, b]$ の開集合である。



$[a, c)$ と $(c, b]$ は $[a, b]$ の開集合である。

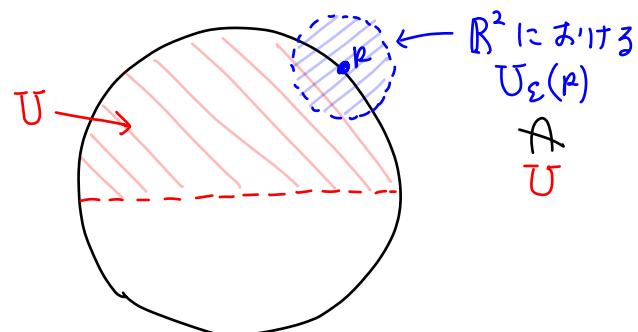
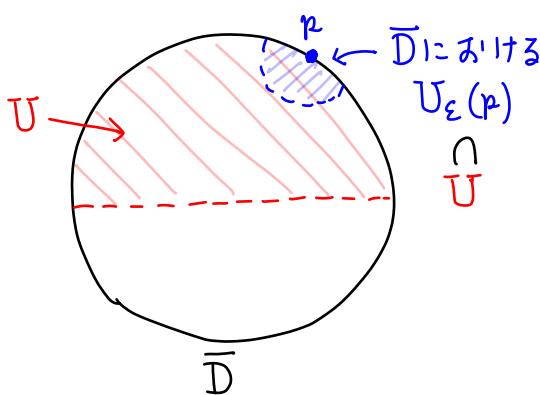


(3) $a < c < b$ のとき $[a, c)$ と $(c, b]$ は \mathbb{R} の開集合ではない。



\square

例 $\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ において、 $U = \{(x, y) \in \bar{D} \mid y > 0\}$ は \bar{D} の開集合たが、 \mathbb{R}^2 の開集合ではない。



平面全体が \mathbb{R}^2

入れ物が何であるかによって開集合になたりならなかったりする！

\square

位相空間

開集合系の基本性質を出発点にして、位相空間が定義される。

定義

集合 X とその部分集合の集合 \mathcal{U}_X の組 (X, \mathcal{U}_X) で以下の条件をみたすものを位相空間 (topological space) と呼ぶ; \mathcal{U}_X の要素を X の開集合 (open subset) と呼ぶ:

$$(1) \emptyset \in \mathcal{U}_X \text{ かつ } X \in \mathcal{U}_X.$$

\mathcal{U}_X を X の位相 (topology) と呼ぶこともある。

$$(2) U_\lambda \in \mathcal{U}_X (\lambda \in \Lambda) \text{ ならば } \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}_X.$$

$$(3) U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}_X \text{ ならば } \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U}_X.$$

注意

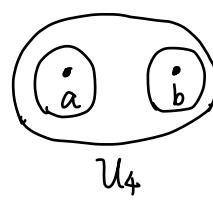
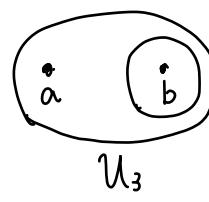
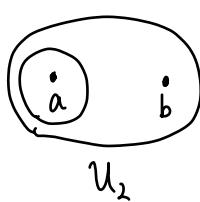
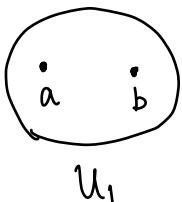
開集合系 \mathcal{U}_X のデータで位相空間を定義したが、閉集合系、閉包、閉核、など多数の方法で同等な位相空間を定義できる。位相空間の概念は多くの応用場面で一般的すぎる所以、適当に条件を追加したものが使用されることが多い。そして、「図形」の概念の抽象化として不十分な場合もあるので、さらなる別の抽象化が使われることもある。

例

距離空間 X について、 $\mathcal{U}_X = \{X\text{の開集合全体}\}$ とおくと、 (X, \mathcal{U}_X) は位相空間である。□

例 2点集合 $X = \{a, b\}$ ($a \neq b$) の開集合系の全体は以下の4つである。

$$\mathcal{U}_1 = \{\emptyset, X\}, \quad \mathcal{U}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}\}, \quad \mathcal{U}_3 = \{\emptyset, X, \{b\}\}, \quad \mathcal{U}_4 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}.$$



これらの直観的意味は以下の通り:

\mathcal{U}_4 : a のみを含む開集合があるので、 a から見て a は b から離れている。

b のみを含む開集合があるので、 b から見て b は a から離れている。

a と b が「はらはら」に離れている様子が位相空間で表現されている。

(点 x を含む開集合の外側に点 y があるとき、
 x から見て x は y から離れているように見えると考える。) → 離散位相

\mathcal{U}_3 : a から見ると a は b にくついているように見えるが ←(片思い?)
 b から見ると b は a からはなれているように見える。

\mathcal{U}_1 : a と b は互いに相手にくついている。 ← 密着位相

距離空間のあいだの写像が ε - δ の意味で連続であることは、

その写像による開集合の引き戻し(逆像)が常に開集合になることと同値である。これを位相空間に次のように一般化する。

定義 $(X, \mathcal{U}_X), (Y, \mathcal{U}_Y)$ は位相空間であるとする。写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるとは Y の任意の開集合 $J \in \mathcal{U}_Y$ に対して、その f による逆像 $f^{-1}(J) = \{x \in X \mid f(x) \in J\}$ が X の開集合になること ($f^{-1}(J) \in \mathcal{U}_X$) だと定める。□

この定義は「連続」という言葉の日常的意味から相当に離れているように感じられるかもしれないが、多くの議論を单纯化するために役に立つ良い定義の仕方であることがわかる。

以下においては、一般的位相空間でも成立する議論を距離空間の特別な場合のみについて説明してしまう場合が多いが、一般的な議論が好きな人は自分ですべてを一般的位相空間の場合に再構成してみるとよいだろう。

注意 有理性や様々な「一様性」(一様収束、一様連続など)の概念は、一般的位相空間では定義できないことには注意せよ。□

定義 (同相写像) 位相空間 X, Y のあいだに連続写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ で互いに相手の逆写像になる ($g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ となる) ものが存在するとき、 f と g は 同相写像 (homeomorphism) であるといい、 X は Y に 同相である (homeomorphic to) という。□

例 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ と $g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = e^x, g(y) = \log y$ と定めると、 f, g は連続で互いに相手の逆写像になるので、 \mathbb{R} と $\mathbb{R}_{>0}$ は同相である。

例 $F: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow (0, 1), G: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を $F(x) = \frac{x}{x+1}, G(y) = \frac{y}{1-y}$ と定めると、 F, G は連続で互いに相手の逆写像になるので、 $\mathbb{R}_{>0}$ と $(0, 1)$ は同相である。□

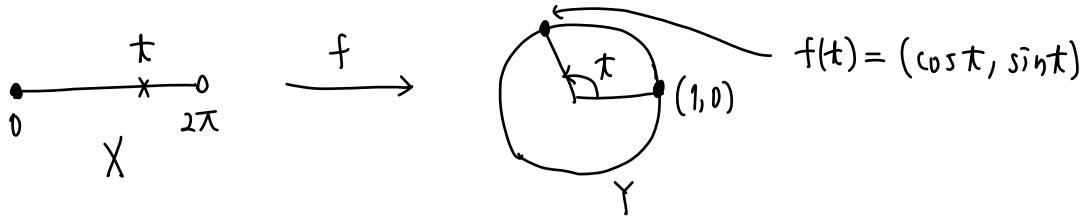
例 $F \circ f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1), g \circ G: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ は $F \circ f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}, g \circ G(y) = \log \frac{y}{1-y}$ となり、ともに連続で互いに相手の逆写像になるので、 \mathbb{R} と $(0, 1)$ は同相である。□

注意 コンピューターで計算するとき、 $y > 0$ や $0 < y < 1$ に制限して計算するより、上の例の方法で制限のない変数 $x \in \mathbb{R}$ に変換した方が楽な場合がある。□

例 (全単射連続だが同相でない写像)

$$X = [0, 2\pi], Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, f: X \rightarrow Y, t \mapsto f(t) = (\cos t, \sin t)$$

のとき, f は全単射連続だが, 逆写像は $(x, y) = (1, 0)$ の連続ではない,



$f^{-1}: Y \rightarrow X$ は点 $(1, 0)$ の円周を切ってまっすぐにする写像になる,

つながっていた部分を切っているので f^{-1} は連続でない,

□

問題 上の例の結果を証明せよ, □

注意 X がコンパクト位相空間で Y が Hausdorff 空間ならば "全単射連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は同相写像になる, 上の X はコンパクトではない,"

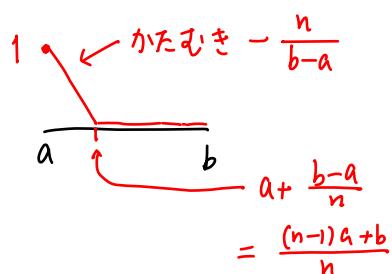
□

例 $X = Y = C([a, b], \mathbb{R})$ とおき, X の距離を $\sup_{1 \leq n \leq N} \| \cdot \|_n$ で定め, Y の距離を $L^1/\| \cdot \|_1$ で定めると, 恒等写像 $\text{id}: X \rightarrow Y$ は全単射連続になるが, 逆写像 $\text{id}: Y \rightarrow X$ は連続ではない,

証明 $f(x) \leq \sup_{x' \in [a, b]} |f(x')| = \|f\|_\infty$ より

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty dx = (b-a)\|f\|_\infty.$$

これより, $\text{id}: X \rightarrow Y$ は連続である,



Y 内の点列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を次のように定める:

$$f_n(x) = \begin{cases} -\frac{n}{b-a}(x-a) + 1 & (a \leq x \leq a + \frac{b-a}{n}) \\ 0 & (a + \frac{b-a}{n} \leq x \leq b). \end{cases}$$

このとき, $\|f_n\|_1 = \frac{b-a}{2n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ので Y において $f_n \rightarrow 0$ となる,

しかし, $\|f_n\|_\infty = 1$ ので X において $f_n \rightarrow 0$ とならない,

ゆえに, $\text{id}: Y \rightarrow X$ は連続でない,

□

定義 (相対位相) (X, \mathcal{U}_X) は位相空間であるとし, $A \subset X$ と仮定する.

$\mathcal{U}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{U}_X\} = \{A \text{ と } X \text{ の開集合の共通部分の全体}\}$ とおく.

(A, \mathcal{U}_A) は位相空間になる, \mathcal{U}_A を X における部分集合 A の 相対位相 (relative topology) と呼ぶ. (位相空間の部分集合は通常相対位相によって位相空間となる.) □

問題 上の (A, \mathcal{U}_A) が位相空間になることを示せ.

証明 (1) $\emptyset, X \in \mathcal{U}_X$, $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap X = A$ より, $\emptyset, A \in \mathcal{U}_A$.

(2) $V_\lambda \in \mathcal{U}_A$ ($\lambda \in \Lambda$) と仮定する, $V_\lambda = A \cap U_\lambda$, $U_\lambda \in \mathcal{U}_X$ と書ける, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \in \mathcal{U}_X$ なので
 $\mathcal{U}_A \ni A \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap U_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$.

(3) $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{U}_A$ と仮定する, $V_i = A \cap U_i$, $U_i \in \mathcal{U}_X$ と書ける, $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{U}_X$ なので
 $\mathcal{U}_A \ni A \cap \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcap_{i=1}^n (A \cap U_i) = \bigcap_{i=1}^n V_i$. □

問題 X は距離空間であるとし, $A \subset X$ であると仮定する. このとき, A には部分距離空間としての位相 \mathcal{U}_A と X の相対位相 \mathcal{U}'_A が定まる. $\mathcal{U}_A = \mathcal{U}'_A$ となることを示せ.

証明 $a \in A$ と $\varepsilon > 0$ に対して, $V_\varepsilon(a) = \{x \in A \mid d(x, a) < \varepsilon\} = A \cap U_\varepsilon(a)$ とおく. このとき,
 $\mathcal{U}_X = \{U \subset X \mid \text{任意の } x \in U \text{ に対してある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して } U_\varepsilon(x) \subset U\}$,
 $\mathcal{U}_A = \{V \subset A \mid \text{任意の } a \in V \text{ に対してある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して } V_\varepsilon(a) \subset V\}$,
 $\mathcal{U}'_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{U}_X\}$.

$V \in \mathcal{U}_A$ と仮定する. 任意の $a \in V$ に対してある $\varepsilon_a > 0$ が存在して $V_{\varepsilon_a}(a) \subset V$ となる.

$U = \bigcup_{a \in V} U_{\varepsilon_a}(a)$ とおく. U は X の開集合の和集合なので X の開集合になる ($U \in \mathcal{U}_X$).

ゆえに, $\mathcal{U}'_A \ni A \cap U = \bigcup_{a \in V} (A \cap U_{\varepsilon_a}(a)) = \bigcup_{a \in V} U_{\varepsilon_a}(a) = V$. したがって, $\mathcal{U}_A \subset \mathcal{U}'_A$.

$V' \in \mathcal{U}'_A$ と仮定する. ある $U \in \mathcal{U}_X$ が存在して, $V' = A \cap U$ となる. 任意に $a \in V'$ をとる,
 $a \in U$ なのである $\varepsilon > 0$ が存在して, $U_\varepsilon(a) \subset U$ となる. ゆえに, $V_\varepsilon(a) = A \cap U_\varepsilon(a) \subset A \cap U = V'$
>となるので $V' \in \mathcal{U}'_A$ である. したがって, $\mathcal{U}'_A \subset \mathcal{U}_A$.

これで $\mathcal{U}_A = \mathcal{U}'_A$ を示せた. □

閉集合系

X は距離空間であるとし, F はその部分集合であるとする.

定義

F が X の閉集合 (closed subset) であるとは F の X における補集合 $F^c = X \setminus F = \{x \in X \mid x \notin F\}$ が X の開集合になることであると定める.

すなわち, X の開集合の補集合を X の閉集合と呼ぶ.

X の開集合全体の集合 $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}(X, d)$ を X の閉集合系と呼ぶ. \$\mathcal{O}\$ は \$F\$ の筆記体 fremé の略 □ 14語の閉

X の閉集合系の基本性質を補集合をとる操作でよみかえることにより, 次の定理が得られる.

定理 (1) \emptyset と X は X の閉集合である.

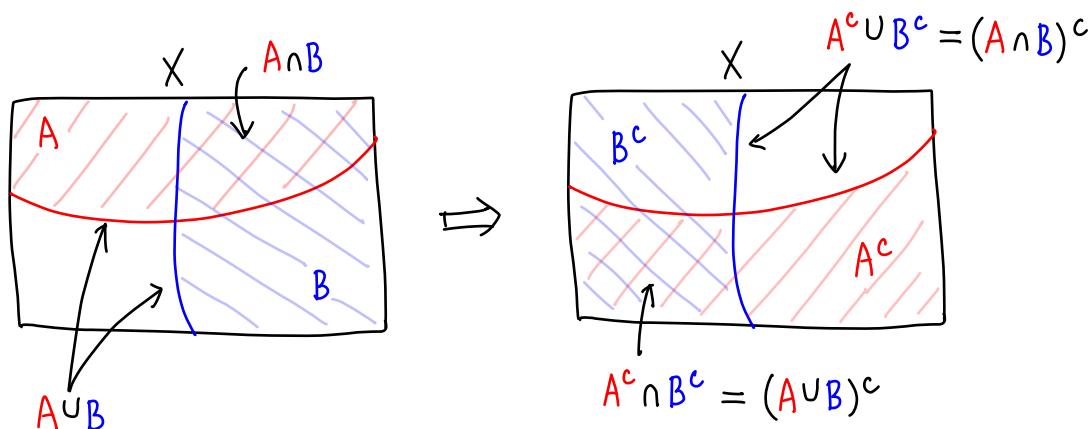
(2) X の閉集合たちの共通部分も X の閉集合である.

(3) X の有限個の閉集合の和集合も X の閉集合である. □

注意 補集合をとる操作で, 和集合と共通部分はいきりかかる.

$A \subset X$ に対して, $A^c = X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$ と書くと,

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda^c, \quad \left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^n U_i^c.$$

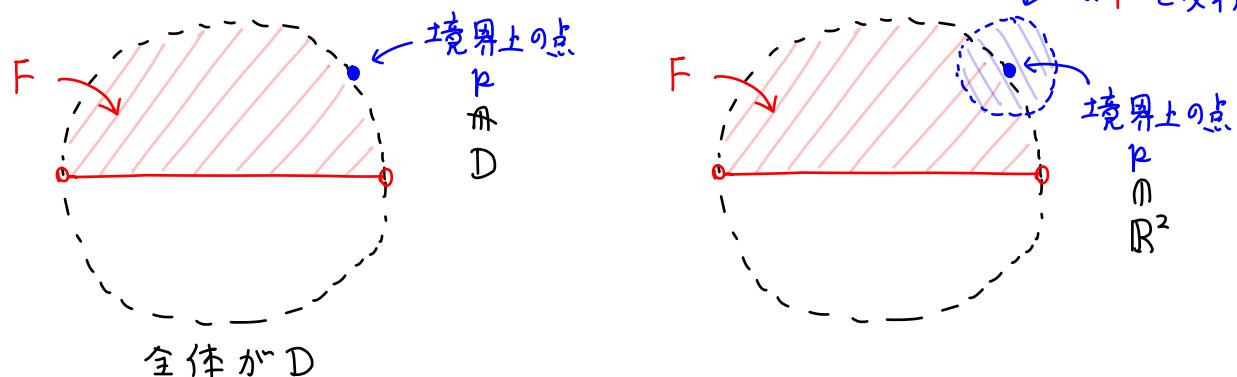


これ以外の図の描き方もある. 自分で工夫して図を描いてみよ.

例 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $F = \{(x, y) \in D \mid y \geq 0\}$ とおく.

このとき, F は D の閉集合だが, \mathbb{R}^2 の閉集合ではない.

\mathbb{R}^2 における $U_\varepsilon(p)$
↓ は F と交わる.



□

例 \mathbb{R} は \mathbb{R} の開集合かつ閉集合である。一般に位相空間 X において \emptyset と X は常に X の開集合かつ閉集合になる。 \square

例 $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ は \mathbb{R} の開集合でも閉集合でもない。 \square

例 $[0, 1]$ は $[0, 1]$ 自身の開集合かつ閉集合である。 \square

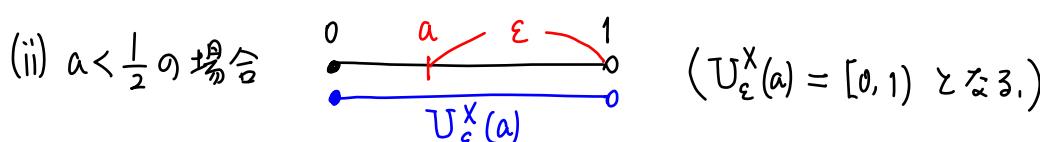
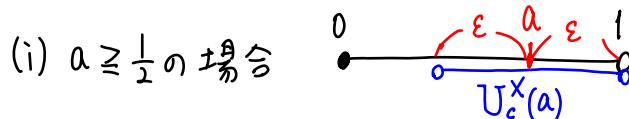
例 $X = [0, 1] \cup (1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ かつ } x \neq 1\}$ とおく。
 $[0, 1]$ と $(1, 2]$ は X の開集合かつ閉集合である。

証明 $[0, 1]$ と $(1, 2]$ が X の開集合であることを示せば十分である。
(そのとき、それらの補集合 $(1, 2]$, $[0, 1]$ は X の閉集合になる。)

$[0, 1]$ が X の開集合になることを示す。($(1, 2]$ についても同様である。)

X における $a \in X$ の ε 近傍を $U_\varepsilon^X(a) = \{x \in X \mid |x - a| < \varepsilon\}$ と書くことにする。

$a \in [0, 1]$ を任意にとる。 $\varepsilon = |1 - a| > 0$ とおくと、 $U_\varepsilon^X(a) \subset [0, 1]$ となる。

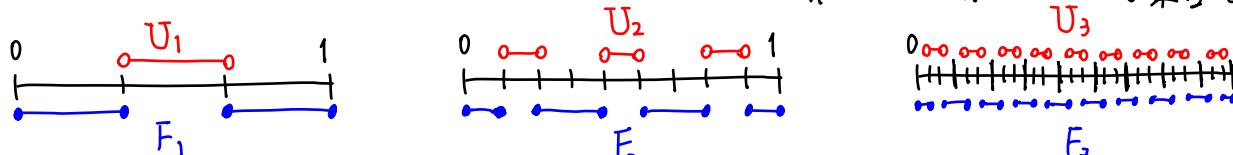


ゆえに、 $[0, 1]$ は $X = [0, 1] \cup (1, 2]$ の開集合である。 \square

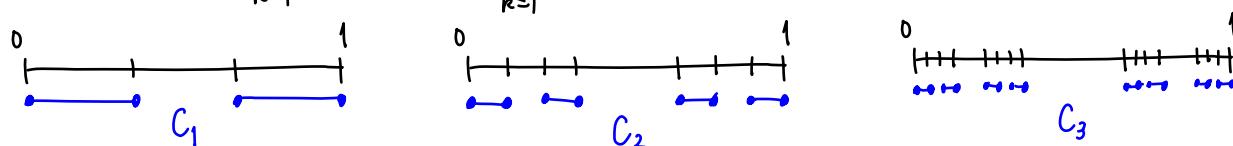
例 $X = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ とおく。

$U_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $U_2 = \bigcup_{k=0}^2 (\frac{k}{3} + \frac{1}{9}, \frac{k}{3} + \frac{2}{9})$, ..., $U_n = \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}} (\frac{k}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}, \frac{k}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n})$, ... とおく。

U_n たちはすべて X の開集合である。ゆえに、補集合 $F_n = X \setminus U_n$ は X の閉集合である。



したがって、 $C_n := \bigcap_{k=1}^n F_k$ と $C_\infty := \bigcap_{k=1}^\infty F_k$ は X の閉集合である。



C_∞ を Cantor 集合 と呼ぶ。Cantor 集合は \mathbb{R} の有界閉集合でかつ測度零(長さが0)でかつ \mathbb{R} と同じ濃度(=基数)を持ち、例としてよく出て来る。 \square

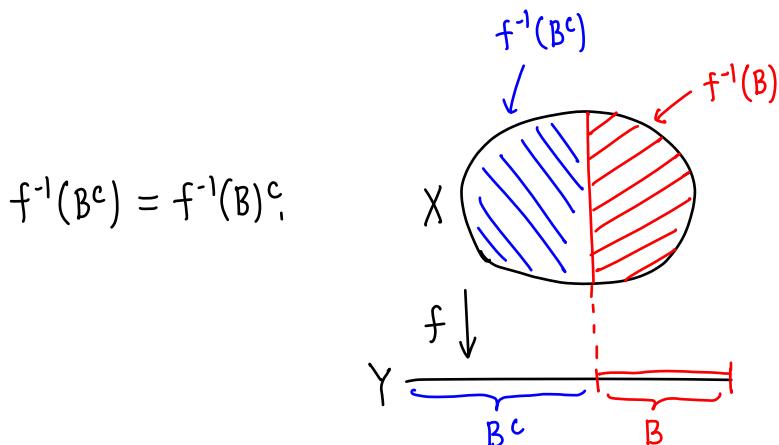
連続写像の開集合系による特徴付けから次が得られる。

定理 (閉集合系による連続写像の特徴付け)

距離空間のあいだの写像 $f: X \rightarrow Y$ について以下の2つの条件は同値である:

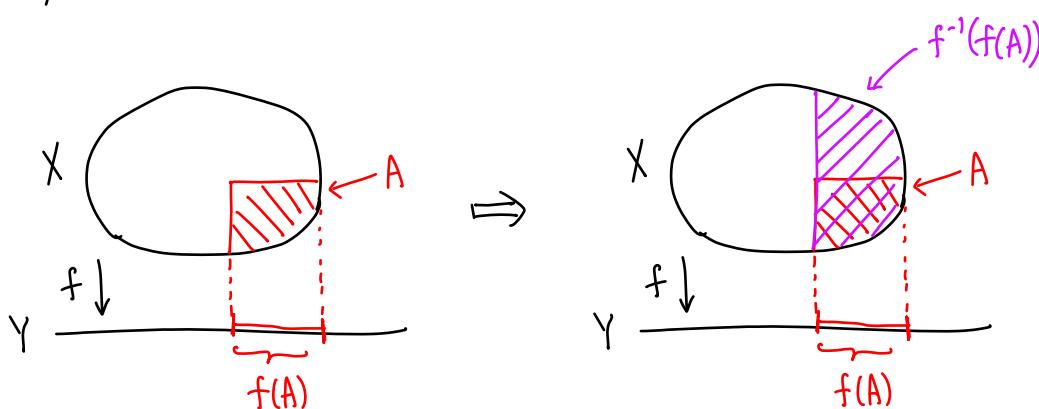
- (1) f は連続である。
- (2) Y の任意の閉集合 F について, $f^{-1}(F) = \{x \in X \mid f(x) \in F\}$ は X の閉集合になる。 \square

注意 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $B \subset Y$ について以下が成立している:

 \square

注意 上の図より, $f(f^{-1}(B)) = B$ となることも直観的にわかる。

しかし, $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ で等号は一般に成立しない。

 \square

単に図を描いても証明にはならないか, 反例を作る方法が得られることがある。

定理 \mathbb{R} の空でない有界閉集合は最大値と最小値を持つ。

証明 A は \mathbb{R} の空でない有界閉集合であるとする。 A が最大値を持つことを示す（最小値も同様）。

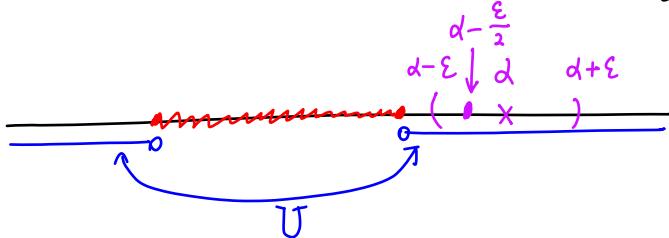
実数の連続性（の1つの表現）より、 A は有界なので A の上限（最小上界） $d = \sup A$ が存在する。

一般に A に含まれる A の上界は A の最大値になるので、 $d \in A$ を示せば十分である。

A は \mathbb{R} の閉集合なので $U = \mathbb{R} \setminus A$ とおくと U は \mathbb{R} の開集合になる。

もしも $d \notin A$ すなわち $d \in U$ ならばある $\varepsilon > 0$ で $U_\varepsilon(d) \subset U$ をめたものが存在し、

$U_\varepsilon(d) \cap A \neq \emptyset$ なので、任意の $a \in A$ について、 $a < d - \frac{\varepsilon}{2}$ となるので（次図）、 $d - \frac{\varepsilon}{2} \notin A$ の上界になり、 d が A の最小上界であることに反する。ゆえに $d \in A$ である。



□

注意 上の定理と証明を「成立するかどうかまったくわからない定理とその証明」だと思いつづけてはいけない。「直観的にもっともらしい定理を厳密に証明した」のように思えるようになるまで閉集合の概念について十分に考えなければいけない。

□

閉包

X は距離空間であるとし、 $A \subset X$ であるとする。

定義

A を含む X の開集合で最小のものを A の閉包 (closure) と呼ぶ、 \bar{A} と表わす：

$$\bar{A} = \bigcap_{F \text{ は } X \text{ の開集合}, A \subset F} F.$$

□

定義 A に含まれる X の開集合で最大のものを A の開核 (open kernel) と呼ぶ、 A° と表わす：

$$A^\circ = \bigcup_{U \text{ は } X \text{ の開集合}, U \subset A} U.$$

□

自明に次の命題が成立していることがわかる。

命題 (1) A は X の閉集合 $\Leftrightarrow \bar{A} = A$.(2) A は X の開集合 $\Leftrightarrow A^\circ = A$.**命題** A の閉包は A の補集合の開核の補集合に等しい： $\bar{A} = ((A^c)^\circ)^c$.**証明** $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$ を示せばよい：

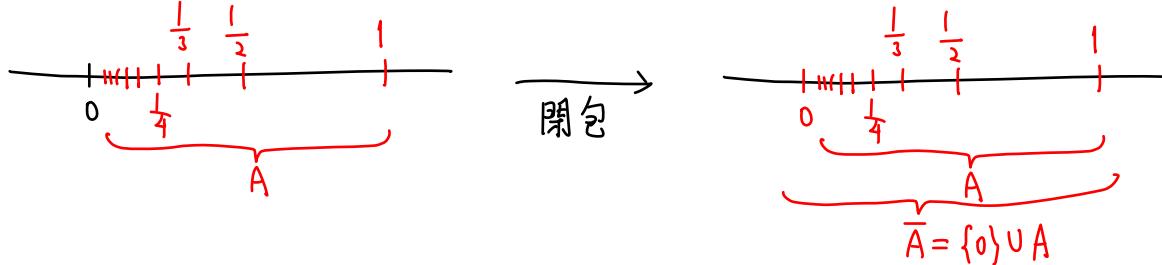
$$\begin{aligned} (\bar{A})^c &= \left(\bigcap_{F \text{ は } X \text{ の開集合}, A \subset F} F \right)^c = \bigcup_{F \text{ は } X \text{ の開集合}, A \subset F} F^c \\ &= \bigcup_{F \text{ は } X \text{ の開集合}, F^c \subset A^c} F^c = \bigcup_{U \text{ は } X \text{ の開集合}, U \subset A^c} U = (A^c)^\circ. \end{aligned}$$

□

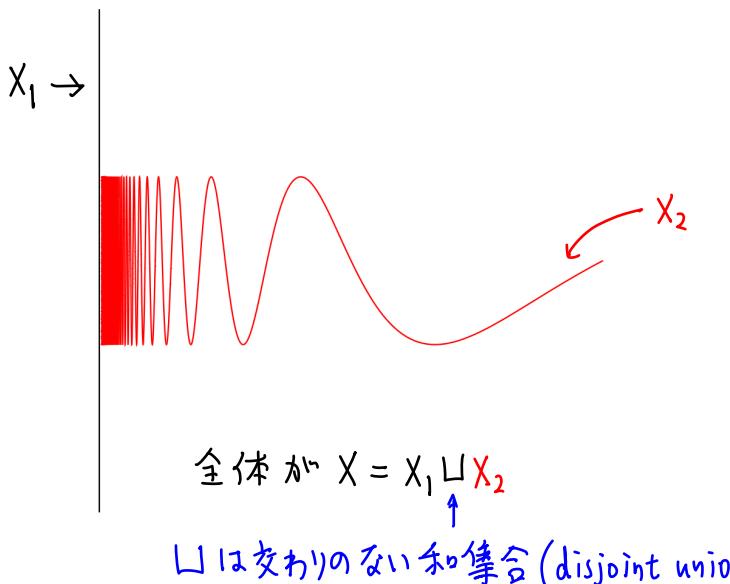
例 開円盤 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ の \mathbb{R}^2 の中で^ての閉包は閉円盤 $\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ になる。 \square

例 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ とする。半開区間 $[a, b)$ の \mathbb{R} の中で^ての閉包は閉区間 $[a, b]$ になる。 \square

例 $A = \{\frac{1}{n} \mid n=1, 2, 3, \dots\}$ とおく。 \mathbb{R} の中で^て $\bar{A} = A \cup \{0\}$ となる。

 \square

例 $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0\}$ (y 軸), $X_2 = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$, $X = X_1 \cup X_2$ とき,
 X を \mathbb{R}^2 の距離部分空間とみなす。



(3) X_1 は \mathbb{R}^2 の閉集合なので X_1 は X の閉集合^てもある。
ゆえに X_1 の X における補集合 X_2 は X の開集合^てある。

(1) X と \mathbb{R}^2 における X_2 の閉包は
どうなるも

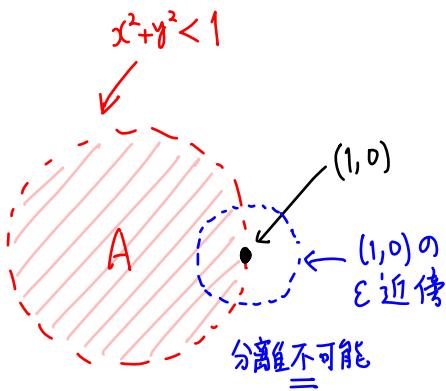
$\bar{X}_2 = X_1 \cup \{(x, y) \in X_1 \mid -1 \leq y \leq 1\}$
になる。

(2) $X_2 \neq \bar{X}_2$ なので X_2 は X と \mathbb{R}^2 の
ど^うともにおいても閉集合ではない。
ゆえに X における X_2 の補集合 X_1 は
 X の開集合^てはない。

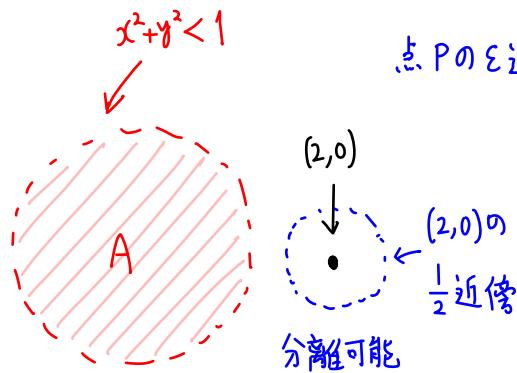
	X で閉	X で開
X_1	○	✗
X_2	✗	○

 \square

閉包の直観的理解



\mathbb{R}^2 において、
 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ に
 点 $(1, 0)$ は ε -近傍で A の内側に位置するように見える。
 これを ε -近傍の言葉で言い直すと、
 任意の $\varepsilon > 0$ について、
 点 $(1, 0)$ の ε -近傍と A は共通点を持つ、



点 $(2, 0)$ は A にくっついていないように見える。
 実際、 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ について、
 点 $(2, 0)$ の ε -近傍と A は共通点を持たない、

このように、 \mathbb{R}^2 の部分集合 A に点 P が“くっついて見えない”か“くっついで見える”かは、
 点 P の ε -近傍で A を P から分離できるかどうかで“言い直される”。
 \mathbb{R}^2 の開集合の定義より、以下も言える： \mathbb{R}^2 の部分集合 A について、

点 P は A にくっついでない
 \Leftrightarrow 点 P を含むある開集合で A と共通点を持たないものが存在する。

このように点 P を含む開集合 U は、点 P と U の外側を分離する役目を果す。

位相空間 X とその部分集合 A と点 $P \in X$ について、

$$P \notin \overline{A} = (A \text{ の } X \text{ における閉包}) = (A \text{ を含む } X \text{ の最小の閉集合})$$

$$\Leftrightarrow P \in X \setminus \overline{A} = (A \text{ と交わらない } X \text{ の最大の開集合})$$

$\Leftrightarrow X$ のある開集合 U で P を含め A と交わらないものが存在する

であり、直観的には

\Leftrightarrow 点 P は A にくっついでない。

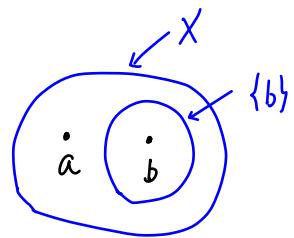
換わり直観的には

$$\overline{A} = (A \text{ にくっついでいる点全体の集合})$$

例 集合 $X = \{a, b\}$ ($a \neq b$) の開集合全体の集合を $\{\emptyset, X, \{b\}\}$ と定めることによって X に位相を定めることができる。

点 a を含む開集合は $X = \{a, b\}$ しか存在しないので、
点 a は集合 $\{b\}$ にくついていようとみなされる。ゆえに、
 $\overline{\{b\}} = \{a, b\}$

点 b を含む開集合として $\{b\}$ とされるので、
点 b は集合 $\{a\}$ にくついていなないとみなされる。ゆえに、
 $\overline{\{a\}} = \{a\}$, $\overline{\{b\}} = \{a, b\}$
「片思い」に似ている。

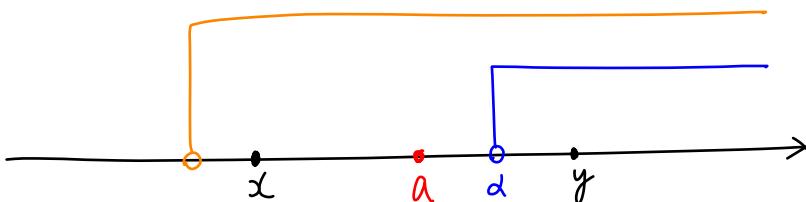


□

例 \mathbb{R} の開集合全体の集合を $\{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ と定めることによって \mathbb{R} の位相を定義できる。以下、この位相を考える。

$a, x, y \in \mathbb{R}$, $x < a < y$ であるとする。

x を含む任意の開集合は a を含むので、
点 x は集合 $\{a\}$ にくついていなるとみなされる。
 $a = \frac{x+y}{2}$ とおくと、 (a, ∞) は y を含む開集合で a を含まないので、
点 y は集合 $\{a\}$ にくついていなないとみなされる。



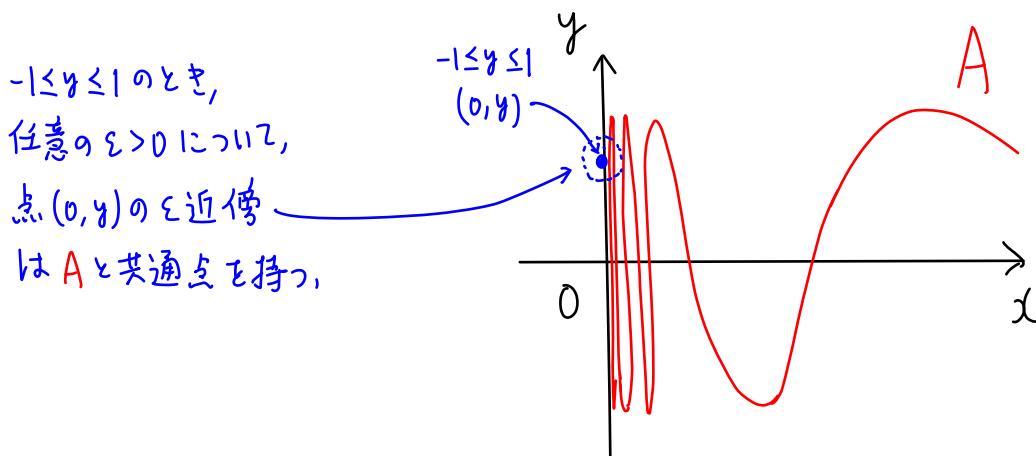
点 x は $\{a\}$ にくついていな
点 y は $\{a\}$ にくついていな

ゆえに、

$$\overline{\{a\}} = (\{a\} \text{ にくついていな} \cup \text{点全体の集合}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\},$$

例 \mathbb{R}^2 の通常の位相で考える、 $A = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ とおく。

このとき、 $-1 \leq y \leq 1$ ならば点 $(0, y)$ は集合 A にくっついているように見える：



ただし、これは、 ε 近傍（もしくは同じことだが開集合）による分離という考え方で判断した場合の「くっついてるかどうか」の判断であることに注意せよ。

（しかし、点 $(0, y) (-1 \leq y \leq 1)$ を ε 近傍によって集合 A を分離できないことは直観的にも明瞭かだろう。）
 $B = \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ とおく。

集合 $A \cup B$ 内の連続的な path で集合 A 内の点と B 内の点 $(0, y)$ を結ぶものは存在しない、
（証明せよ！）

証明 $x > 0, -1 \leq y \leq 1$ と仮定する。

連続写像 $p : [0, 1] \rightarrow A \cup B$ で $p(0) = (x, \sin \frac{1}{x}) \in A, p(1) = (0, y)$ を満たすものが存在すると仮定して矛盾を導けばよい。 $p(t) = (f(t), g(t))$ とおく。

B は \mathbb{R}^2 の閉集合なので $A \cup B$ の閉集合にもなるので、 A は $A \cup B$ の開集合になる。

p の連続性より $p^{-1}(B)$ は $[0, 1]$ の閉集合になり、 $p^{-1}(A)$ は $[0, 1]$ の開集合になる。

$0 \in p^{-1}(A), 1 \in p^{-1}(B)$ より、 A も B も空でない。

$p^{-1}(B)$ は \mathbb{R} の有界閉集合なので最小値 β を持つ。 $y_0 = g(\beta)$ とおく。 $f(\beta) = 0$ かつ $-1 \leq y_0 \leq 1$ 。

このとき、 $t \in [\beta, 1]$ ならば $p(t) \in A$ となる。

p の連続性より、 β に収束する $[0, \beta]$ 内の任意の点列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ につれて、 $f(t_k) \rightarrow 0, g(t_k) \rightarrow y_0$ となる。

f に中間値の定理を適用することによつて、 $f([t_k, \beta]) \subset (f(\beta), f(t_k)) = (0, f(t_k))$ 。

$y_0 \geq 0$ ならば $0 < x_k < f(t_k)$ かつ $\sin \frac{1}{x_k} = -1$ となる x_k につれて $f(s_k) = x_k$ となる $s_k \in [t_k, \beta]$ をとり、

$y_0 < 0$ ならば $0 < x_k < f(t_k)$ かつ $\sin \frac{1}{x_k} = 1$ となる x_k につれて $f(s_k) = x_k$ となる $s_k \in [t_k, \beta]$ をとる。

このとき、 $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ は β に収束する $(0, \beta)$ 内の点列となり、 $g(s_k) \rightarrow y_0$ となる。

これで矛盾が導かれた。

q.e.d.

X の閉集合を X の開集合の補集合で定義したので、このままだと 閉包の計算のために補集合を通して開集合を経由する必要が生じてしまう。閉包の直接的計算には次が使える。

定理 距離空間 X と $A \subset X$ と $x \in X$ について以下の条件は互いに同値である：

- (1) $x \in \bar{A}$.
- (2) x を含む X の任意の開集合 U について、 $U \cap A \neq \emptyset$.
- (3) 任意の $\varepsilon > 0$ について、 $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.
- (4) A に含まれる点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ で x に収束するものが存在する。

証明 (1) \Leftrightarrow (2) 上の命題より, (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) を示す。

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} &\Leftrightarrow x \notin (A^c)^\circ \\ &\Leftrightarrow x \text{ を含む } X \text{ の開集合 } U \text{ で } U \subset A^c \text{ となるものが存在しない。} \\ &\Leftrightarrow x \text{ を含む } X \text{ の任意の開集合 } U \text{ について } U \not\subset A^c. \\ &\Leftrightarrow x \text{ を含む } X \text{ の任意の開集合 } U \text{ について } U \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

(2) \Rightarrow (3) $\varepsilon > 0$ のとき $U_\varepsilon(x)$ は x を含む X の開集合なので (2) から (3) が出来る。

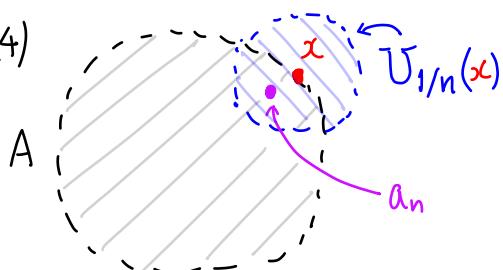
(3) \Rightarrow (2) (3) を仮定し、 U は x を含む X の開集合であるとする。 U は x を含む X の開集合なのである $\varepsilon > 0$ で $U_\varepsilon(x) \subset U$ となるものが存在する。 (3) より $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ このとき、 $U_\varepsilon(x) \cap A \subset U \cap A$ なので $U \cap A \neq \emptyset$ 。

(3) \Rightarrow (4) (3) を仮定する。任意の $n=1, 2, \dots$ について $U_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$ となるので、 $a_n \in U_{1/n} \cap A$ をえらぶと、点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は A に含まれ、 $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$ より x に収束する。

(4) \Rightarrow (3) A に含まれる点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ で x に収束するものが存在すると仮定し、任意に $\varepsilon > 0$ をとる。 $\{a_n\}$ は x に収束しているので、ある N が存在して、 $\{a_n\}_{n=N}^\infty \subset U_\varepsilon(x)$ となる。このとき、 $\{a_n\}_{n=N}^\infty \subset U_\varepsilon(x) \cap A$ となるので $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ 。 \square

問題 上の証明を図を描きながら説明せよ。 \square

ヒント (3) \Rightarrow (4)



\square

定理 (連続写像の閉包による特徴付け)

距離空間のあいたいの写像 $f: X \rightarrow Y$ について以下の2つの条件は同値である:

(1) f は連続である.

(2) $A \subset X$ のとき, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

証明 (1) \Rightarrow (2) (1) と $A \subset X$ を仮定する. f の連続性と閉包の定義より, $f^{-1}(\overline{f(A)})$ は X の閉集合になり, A を含む. ゆえに, 閉包の定義より, $\bar{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. ゆえに $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(2) \Rightarrow (1) (2) を仮定し, F は Y の閉集合であるとし, $A = f^{-1}(F)$ とおく. このとき, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{F} = F$ より, $\bar{A} \subset f^{-1}(F) = A$. ゆえに, $\bar{A} = A$ となるので $A = f^{-1}(F)$ は X の閉集合であり, f が連続であることがわかった. \square

問題 上の証明では連続写像の閉集合系による特徴付けを用いた.

他の特徴付けを用いた別証明を作成せよ.

\square

距離や位相にかかることはたくさんあるので証明を書きまとめて理解しやすい,
(図を描いて直観的に理解することと証明を書くことを無関係にしないこと!)

上の問題の部分的解答例 (1) \Rightarrow (2) の点列の収束を作った証明例

(1) と $A \subset X$ を仮定する. $y \in f(\bar{A})$ を任意にとる. $y = f(x)$, $x \in \bar{A}$ と書ける.

X に収束する A 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する. f の連続性より, $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(x)$ に収束する. $y = f(x) \in \overline{f(A)}$. ここで $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ が示された.

(2) \Rightarrow (1) の点列の収束を作った証明例

(2) \Rightarrow (1) の対偶を証明しよう. f は連続でないと仮定する.

ある $x \in X$ と X 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で x に収束するもので, $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(x)$ に収束しないもののが存在する. そのとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $f(a_n) \notin U_{\varepsilon}(f(x))$ をみたす n が無限個存在する. ゆえに, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $k_1 < k_2 < \dots$ で $f(a_{k_n}) \notin U_{\varepsilon}(f(x))$ をみたすものを取れる. $A = \{a_{k_n} \mid n=1, 2, \dots\}$ とおくと, $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ も X に収束するので $x \in \bar{A}$. しかし, $f(A) \cap U_{\varepsilon}(f(x)) = \emptyset$ となるので $f(x) \notin \overline{f(A)}$. ゆえに $f(\bar{A}) \not\subset \overline{f(A)}$. \square

これらについても図を描いて説明してみよ.

定理 距離空間の開集合系、閉集合系、閉包・閉核をとる操作は距離函数を同値なものに変えても不变である。

証明 閉集合系、閉包・閉核をとる操作は開集合系のみを用いて構成されているので、開集合系の不变性のみを示せば十分である。

距離函数の同値性の対称性より、集合 X の距離函数 d, d' がある正の定数 c で $d(x, x') \leq c d'(x, x')$ を満たすという仮定のもとで、 d での開集合が d' での開集合になることを示せば十分である。

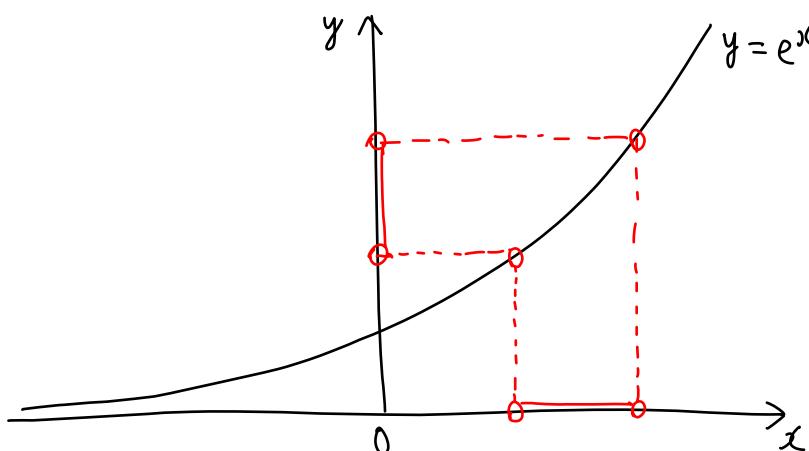
その仮定のもとで、 U は d での開集合であると仮定し、 $a \in U$ を任意にとる。このとき、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、 $(d \text{ に関する } U_\varepsilon(a)) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\} \subset U$ となる。ゆえに、 $d'(x, a) < \varepsilon/c$ のとき、 $d(x, a) \leq c d'(x, a) < \varepsilon$ となるので $x \in U$ となる。これは $(d' \text{ に関する } U_{\varepsilon/c}(a)) = \{x \in X \mid d'(x, a) < \varepsilon/c\} \subset U$ を意味する。したがって、 U は d' でも開集合になる。□

注意 上の逆は成立しない。すなわち、同じ開集合系を与える距離函数で同値でないもののが存在する場合がある。以下の例を見よ。□

例 \mathbb{R} に $d(x, x') = |x - x'|$ で距離を定め、 $\mathbb{R}_{>0}$ とその距離部分空間とする。

$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ と $\log: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ はともに連続で互いに相手の逆写像になる。

ゆえに、 $f(x) = \exp(x) = e^x$ とき、 $\mathbb{R}_{>0}$ の開集合 U を \mathbb{R} の開集合 $f^{-1}(U)$ に対応させることによって、 $\mathbb{R}_{>0}$ の開集合と \mathbb{R} の開集合の一対一対応を作れる。このとき、 $f^{-1}(U)$ は \mathbb{R} における距離函数 $d'(x, x') = |f(x) - f(x')|$ に関する開集合に等しい。すなわち、 d と d' の開集合系は等しい。しかし、 $\frac{d'(x, 0)}{d(x, 0)} = \frac{|e^x - 1|}{|x|} \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$) ので d と d' は同値ではない。□



x 軸上の開区間と
正の y 軸上の開区間が
一対一に対応している。

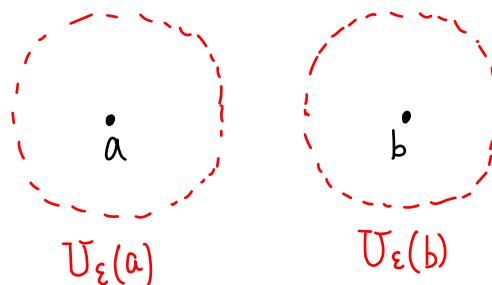
点の部分へのくっつき方

以下、 X は距離空間であるとする。

点と点

互いに異なる 2 点 $a, b \in X$ について、 $\varepsilon = \frac{1}{3}d(a, b) > 0$ とおくと、

$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ となる。



距離空間の異なる 2 点はこのように開集合 $U_\varepsilon(a), U_\varepsilon(b)$ によって離される。
(距離空間の Hausdorff 性)

□

ポイント

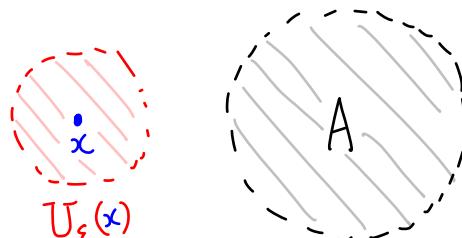
点 a を含む開集合 U には、点 a と点 a から離れた点を分離するはたらきがある。距離空間では開集合一般を考える"に近傍だけ"で用が足りることが多いが、一般的の位相空間では点 a を含む任意の開集合を点 a の開近傍と呼んで利用することになる。

□

点と部分集合

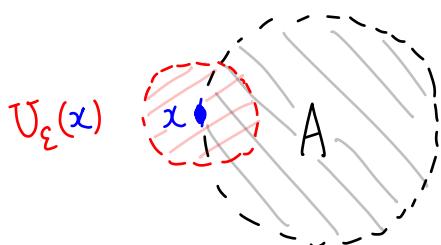
$A \subset X$ であるとする。

① 点 $x \in X$ に対してある $\varepsilon > 0$ が存在して、 $U_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ となるとき、点 x から見て部分集合 A は離れているように見える：



x から見ると
 A は離れているように見える。

② 点 $x \in X$ に対して、任意の $\varepsilon > 0$ について $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ が成立していることは、 $x \in \bar{A}$ と同値であり、点 x から見て x は部分集合 A にくっついているように見える。



x の任意の ε 近傍が
 A と空でない共通部分を持つならば、
 x から見ると
 A は x にくっついているように見える。

□

ポイント

$\bar{A} = \{A \text{ にくついているように見える } X \text{ の点の全体}\}$

□

距離空間のあいだでの写像の連続性の特徴付け（まとめ）

“ $\varepsilon-\delta$ ”によって連続写像を定義し、以下が互いに同値になることを示して来る。
(X, Y は距離空間であるとし, $f: X \rightarrow Y$ は写像であるとする.)

- (a) $f: X \rightarrow Y$ は連続である.
- (b) 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して,
任意の $x \in X$ について $d(x, a) < \delta$ ならば $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる.
- (c) 収束する X 内の任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, Y 内の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ も収束し,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$ が成立する.
- (d) 任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して,
ある $\delta > 0$ で $f(U_{\delta}(a)) \subset U_{\varepsilon}(f(a))$ をみたすものが存在する. $\begin{cases} U_{\delta}(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < \delta\} \\ U_{\varepsilon}(f(a)) = \{y \in Y \mid d(y, f(a)) < \varepsilon\} \end{cases}$
- (e) Y の任意の開集合 V について,
 $U = f^{-1}(V)$ は X の開集合になる. $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$
 $U \subset X$ が X の開集合 $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{任意の } x \in U \text{ に対して}, \\ \text{ある } \delta > 0 \text{ で } U_{\delta}(x) \subset U \text{ を} \\ \text{みたすものが存在する.} \end{cases}$
- (f) Y の任意の閉集合 G について,
 $F = f^{-1}(G)$ は X の閉集合になる. $(\text{閉集合}) = (\text{開集合の補集合})$
- (g) 任意の $A \subset X$ について, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. $\overline{A} = (A \text{ の閉包}) = (A \text{ を含む } X \text{ の最小の閉集合})$

このように連続写像の概念にはたくさんの特徴付けがある.

注意 以上の (a) から (g) までの条件の同値性の理解のためには,
自分で証明をやり直したり, 図を描いて直観的な理解にも挑戦することを
くりかえす必要があるかもしれない. 数ヶ月以上の時間が必要かもしれない,
すぐに理解できなくても心配する必要はない. □

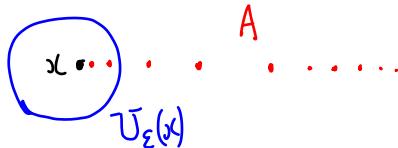
問題 自分自身で『距離空間のあいだの連続写像』のタイトルで「教科書」を書いてみよ. 証明はとても詳しく書かれており, 図や例を豊富に含む教科書を自分で書くと非常に勉強になる. 写真をとって PDF ファイル化して友人に見せてもよい. □

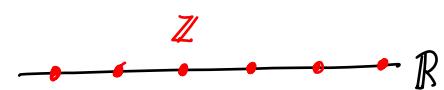
注意 特に鉛筆で書かれたノートは写真をうまくとらないと読みにくいくことが多い,
その点については各自工夫が必要だろう. □

集積点 (accumulation point, limit point) 「集積点」は複素正則函数の一致の定理で使われる。

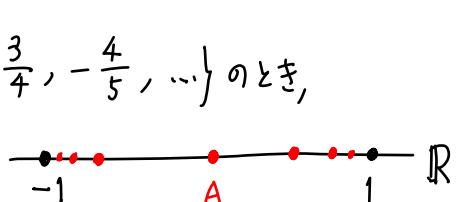
定義 位相空間 X とその部分集合 A について, $x \in X$ が A の集積点であるとは, x を含む X の任意の開集合が x 以外の A の点を含むこと と定める。 \square

注意 X が距離空間のとき, $x \in X$ が A の集積点であることは, 任意の $\varepsilon > 0$ について $U_\varepsilon(x)$ が x 以外の A の点を含むこと は同値である。 \square



例 $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Z}$ のとき, A の集積点は存在しない。 \square 

例 $X = \mathbb{R}$, $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ のとき, $0 \in \mathbb{R}$ は A の集積点である。 \square

例 $X = \mathbb{R}$, $A = \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots \right\}$ のとき, \mathbb{R} における A の集積点の全体の集合は $\{\pm 1\}$ となる。 \square 

例 $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ (open disc) のとき, \mathbb{R} における A の集積点全体の集合は $\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ となる。 \square

定理 距離空間 X とその部分集合 A と点 $x \in X$ について以下は同値である。

- (a) x は A の集積点である。
- (b) 任意の $\varepsilon > 0$ について, $U_\varepsilon(x)$ は x 以外の A の点を含む。
- (c) $x \in \overline{A \setminus \{x\}} = (\{a \in A \mid a \neq x\}$ の閉包),

証明 (a) \Rightarrow (b). x は A の集積点とし, $\varepsilon > 0$ を任意にとる, $U_\varepsilon(x)$ は x を含む X の開集合なので, 集積点の定義より, $U_\varepsilon(x)$ は x 以外の A の点を含む。これで (a) \Rightarrow (b) を示せた。

(b) \Rightarrow (c). (b) を仮定する。このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ について, $U_\varepsilon(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ となる。ゆえに数ページ前に述べた「点が閉包に点が含まれる同値な条件に関する定理より」 $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ となる。これで (b) \Rightarrow (c) を示せた。

(c) \Rightarrow (a). (c) を仮定し, U は x を含む X の開集合であるとする。 (c) より $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ 。これは U が x 以外の A の点を含むことを意味している。これで (c) \Rightarrow (a) を示せた。 \square

稠密性

(densemess)

 X は距離空間であるとする。

定義

 X の部分集合 A が X で 稠密 (ちゅうみつ, dense) であるとは $\overline{A} = X$ が成立することであると定める。 A が X で稠密になるための必要十分条件は以下の条件のどれかが成立することである。(1) X の X 以外の開集合は A を含まない,(2) X の空でない任意の開集合は A と空でない交わりを持つ,(3) 任意の $x \in X$ と $\varepsilon > 0$ について $\bigcup_{y \in A} B_\varepsilon(y) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$.(4) 任意の $x \in X$ について, A に含まれる点列で x に収束するものが存在する。

この2つは位相空間

でも同値。

□

例 \mathbb{Q} は \mathbb{R} において稠密である。証明 任意の実数に収束する有理数列が存在するので \mathbb{Q} は \mathbb{R} で稠密である。 □

例 (Weierstrass の多項式近似定理)

 $C([a, b], \mathbb{R}) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ ($a < b$) に \sup ノルムで距離を入れると、多項式 $g \in \mathbb{R}[x]$ を閉区間 $[a, b]$ 上の函数とみなしたもの全体の集合

$$P = \{f \in C([a, b], \mathbb{R}) \mid f \text{ は多項式で書ける}\}$$

は $C([a, b], \mathbb{R})$ で稠密である。すなわち、閉区間 $[a, b]$ 上の任意の連続函数 f に対して、多項式函数の列で $[a, b]$ 上 f に一様収束するものが存在する。

□

Weierstrass の多項式近似定理は重要なので後で詳しく扱う予定である。

例 体 K 上の形式べき級数環 $K[[x]]$ に

$$|f| = \begin{cases} 0 & (f=0) \\ e^{-r} & (f = a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \dots, a_r \neq 0) \end{cases} \quad \text{注 } e^{-\infty} = 0 \quad (f \in K[[x]])$$

によって距離を入れると、多項式環 $K[x]$ は $K[[x]]$ で稠密である。証明 任意に $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in K[[x]]$ をとる、 $f_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in K[x]$ と定める。このとき、

$$d(f, f_n) = |f - f_n| = |a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots| \leq e^{-n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

なので $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に収束する。

□

このように純代数の世界においても代数的に定義された距離に関する収束を考えて稠密性を考えることができます。

一様収束性

距離空間に値を持つ函数の列には一様収束が定義される。

定義域は单なる集合でよい

集合 X から距離空間 Y への写像の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と写像 $f: X \rightarrow Y$ を任意にとる。
 (函数の列) (函数)

定義 (各点収束) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に 各点収束する (converges pointwise to) とは、

任意の $x \in X$ について、 Y 内の点列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が Y の点 $f(x)$ に収束することであると定める。□

定義 (一様収束) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に 一様収束する (converges uniformly to) とは、

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある番号 N が存在して、任意の $x \in X$ と 任意の $n \geq N$ について $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ が成立することだと定める。□

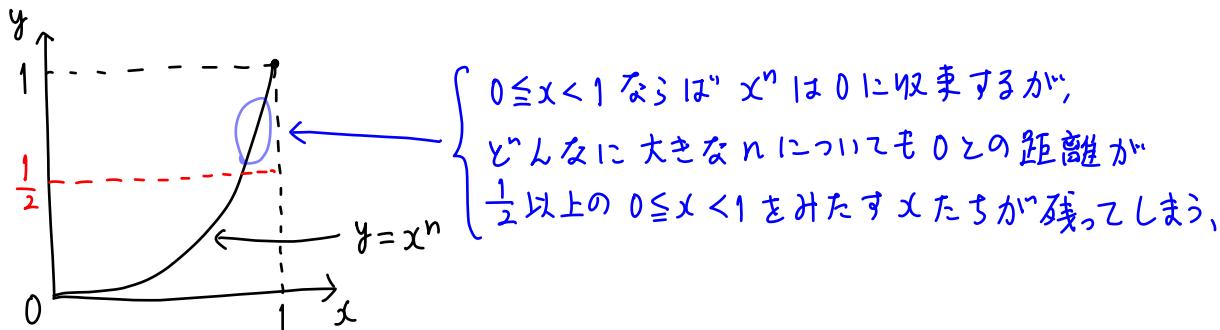
これらちがい、 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の f への各点収束することは、

任意の $x \in X$ と 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある番号 N が存在して、任意の $n \geq N$ について $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ が成立することであると言えられる。

- 各点収束では番号 N は点 $x \in X$ ごとに別々に取ればよい。
- 一様収束では番号 N は ε のみで決まり、 $x \in X$ に依存してはいけない。
- 一様収束していれば各点収束している。

例 $f_n, f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を $f_n(x) = x^n$, $f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ と定めると、

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に各点収束しているが、一様収束はしていない。



例 $0 < \alpha < 1$ と仮定する。 $f_n, f: [0, \alpha] \rightarrow [0, \alpha]$ を $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$ と定めると、

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f = 0$ に一様収束している。実際、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 N を $\alpha^N < \varepsilon$ となるようにとると、任意の $x \in [0, \alpha]$ と任意の $n \geq N$ について、

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n \leq \alpha^n \leq \alpha^N < \varepsilon.$$

X は集合であるとし, Y は距離空間であるとする.

写像(函数) $f, g : X \rightarrow Y$ に対して, $\sup_{\text{距離}} d_\infty(f, g) \in [0, \infty] = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ を

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

と定める, \sup が"存在しないときにこの値は ∞ になると約束しておく.

$d_\infty(f, g)$ は値が ∞ になる場合があることを除けば"距離函数の性質を満たしている":
 $f, g, h : X \rightarrow Y$ について,

- (1) $d_\infty(f, h) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h),$
- (2) $d_\infty(g, f) = d_\infty(f, g),$
- (3) $d_\infty(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g.$

定理 集合 X から距離空間 Y への函数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と函数 $f : X \rightarrow Y$ について,

以下の2つの条件は同値である:

- (1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束する.
- (2) $\{d_\infty(f_n, f)\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する.

証明 (1) \Rightarrow (2) (1) を仮定し, 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束するので, ある N が存在して, 任意の $x \in X$ と任意の $n \geq N$ について, $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる.

ゆえに, $n \geq N$ のとき, $d_\infty(f_n, f) = \sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ となる.

これで $\{d_\infty(f_n, f)\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することが示された

(2) \Rightarrow (1) (2) を仮定し, 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. $\{d_\infty(f_n, f)\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束するので, ある N が存在して, $n \geq N$ のとき, $d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$ となる. このとき, 任意の $x \in X$ と任意の $n \geq N$ について, $d(f_n(x), f(x)) \leq \sup_{x' \in X} d(f_n(x'), f(x')) = d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$. これで $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束することが示された. □

注意 一様収束の ε - N による定義にもどろす"に, \sup 距離 $d_\infty(f, g)$ に関する
収束で一様収束について考えた方が易しくなる場合が多い.

□

□

注意 上の (1) \Rightarrow (2) の証明では " $\frac{\varepsilon}{2}$ " を使っているが, 不等式 $<$ と \leq のささいなちがいを気にせず"に次のように証明を書いてもよい,

$\left\{ \begin{array}{l} \sim, \text{ 任意の } x \in X \text{ と任意の } n \geq N \text{ について, } d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \text{ となる.} \\ \text{ゆえに, } n \geq N \text{ のとき, } d_\infty(f_n, f) = \sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \text{ となる.} \\ \text{これで } \{d_\infty(f_n, f)\}_{n=1}^{\infty} \text{ が } 0 \text{ に収束することが示された.} \end{array} \right.$

□

注意

Y が \mathbb{R} 上のベクトル空間で $\| \cdot \|$ によって距離が定義されている場合には \sup 距離を直接考えずに $\sup_{x \in X} \| f(x) \| = \| f \|_\infty$ を考えた方が議論がシンプルになる。 $f: X \rightarrow Y$ が有界でないと $\| f \|_\infty = \infty$ となってしまうことを除けば \sup の性質は $\| \cdot \|$ の性質をみたしている: $\| f \|_\infty \in [0, \infty]$ で, $f, g: X \rightarrow Y$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ について

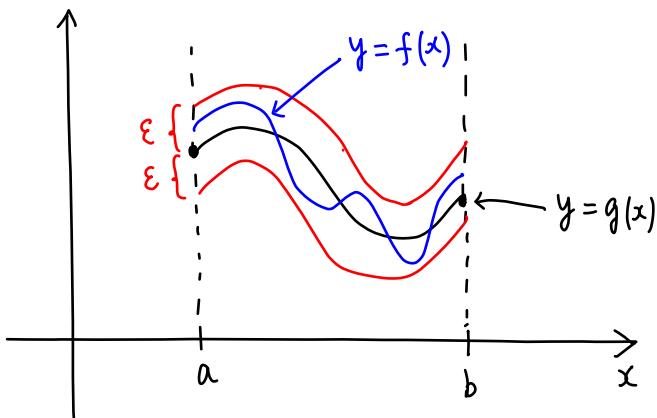
- (1) $\| f + g \|_\infty \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$
- (2) $\| \alpha f \|_\infty = |\alpha| \| f \|_\infty$
- (3) $\| f \|_\infty = 0 \iff f = 0$.

□

例 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ と仮定する。 $\varepsilon > 0$ と $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ について,

$$d_\infty(f, g) = \| f - g \|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

をみたす $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は次のように図示される。



この図で $\varepsilon > 0$ を 0 に近付ければ “ f が g に一様収束すること” を直観的に理解できる。□

例

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の函数であるとし, $f_n(x) = g(x) + \frac{1}{n} \sin(nx)$ ($x \in \mathbb{R}$) と定めると $\| f_n - g \|_\infty = \frac{1}{n}$ なので $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は g に一様収束する。□

例

$g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を $g(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ と定め, $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ で $f_n(x) = x^n$ と定めると, $\| f_n - g \|_\infty = \sup_{0 \leq x < 1} x^n = 1$ なので $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は g に一様収束しない。□

次の定理は一様収束に関する最も基本的な結果である。

定理 (一様収束が函数の連続性を保つこと)

X と Y は距離空間であるとする。 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X から Y への連続写像の列であり,
 $f: X \rightarrow Y$ に一様収束しているとする。このとき, f も連続写像になる。

証明 任意に $a \in X$ と $\varepsilon > 0$ をとる。

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束しているので, ある N が存在して,
 $n \geq N$ かつ $x \in X \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

$\frac{\varepsilon}{3}$ -argument
を使う。

f_N は連続なので, ある $\delta > 0$ が存在して

$$x \in X \text{かつ } d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ゆえに, $x \in X$ かつ $d(x, a) < \delta$ のとき,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

これで f も連続であることが示された。□

この三角不等式を
使った行がポイント

証明の見つけ方 ① x を a に近付けるとき, $f(x)$ が $f(a)$ に近付くことを示したい。

x が a に近づくときに小さくなってほしいのは $d(f(x), f(a))$ である。

② $d(f(x), f(a))$ を三角不等式を使って「小さくなりそうなものたち」の和に分解することを考える。すると次の分解を発見できる:

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)).$$

\uparrow \uparrow \uparrow

x によらずに f_N は連続なので N を大きくすると
 N を大きくすると x を a に近づけると 小さくできる,
 小さくできる。 小さくできる,

③ 以上の発見を論理的な証明に書き直す。□

例 $f_n, f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ と $f_n(x) = x^n$, $f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$ とおくと,

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に各点収束する。各 f_n は連続だが, f は不連続なので $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束していない。(もしも一様収束しているなら, f も連続になり矛盾する。) □

問題 この問題中では $\int_a^b f(x) dx$ が適切に定義されている函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ のみ

を扱う。そのような函数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が " f に一様収束していれば"

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

が成立することを示せ。

証明 任意に $\varepsilon > 0$ をとって固定する。

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束しているので、ある N が存在して、 $n \geq N$ ならば 任意の $x \in [a, b]$ について、

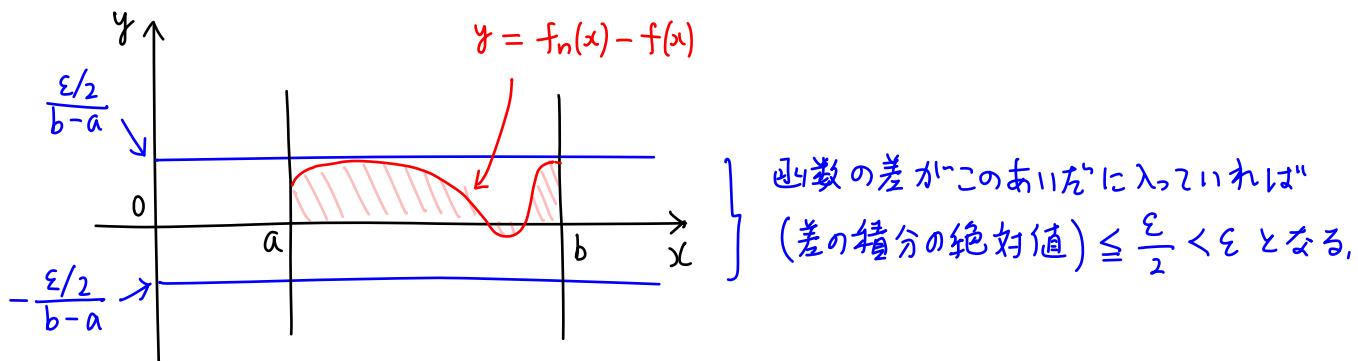
$$f(x) - \frac{1}{b-a} \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) < f(x) + \frac{1}{b-a} \frac{\varepsilon}{2}$$

となるので、

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b f_n(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

これは $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ が成立することを意味している。 \square



コンパクト性

← おそらくこのノートの内容でコンパクト性は最重要概念.

位相空間(たとえば距離空間) X に対して、その開集合達 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を満たしているとき、 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の 開被覆 (open covering) と呼ぶ。

有限個の開集合で構成された開被覆を 有限開被覆 (finite open covering) と呼ぶ。

X の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と $\Lambda' \subset \Lambda$ に対して、 $\{U_\lambda\}_{\lambda' \in \Lambda'}$ も X の開被覆となるとき、 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ を $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の 部分被覆 (subcovering) と呼ぶ、 Λ' が有限集合にないときは 有限部分被覆 (finite subcovering) と呼ぶ。

定義 位相空間(たとえば距離空間) X がコンパクトであるとは、 X の任意の開被覆の有限部分被覆が存在することだと定める。 \square

例 $X = (0, 1]$ のとき、 $U_k = (\frac{1}{k}, 1]$ とおくと、 $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ は X の開被覆でその有限部分被覆は存在しない。ゆえに半開区間 $X = (0, 1]$ はコンパクトではない。

$(\{k_1, \dots, k_n\} \subset \{1, 2, 3, \dots\} \text{ で } \max \{k_1, \dots, k_n\} = k \text{ のとき, } \bigcup_{i=1}^n U_{k_i} = (\frac{1}{k}, 1] \subseteq (0, 1].)$ \square

例 開区間 $X = [a, b]$ ($a < b$) はコンパクトである。

証明 $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を X の任意の開被覆であるとして、その有限部分被覆が存在しないと仮定して矛盾を打ち消す。その仮定のもとで、 $[a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b]$ の少なくともどちらか片方は有限個の U_λ であらうことはできない。あらうことができない側を X_1 とする。

帰納的に $X_k = [a_k, b_k]$ を中点で分割して得られる長さが $\frac{1}{2^k}$ の開区間 $X_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ で有限個の U_λ であらうことができないものを作れる。

このとき、 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ となるより、 $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ なので a_k と b_k は同じ値 c に収束する。 $X = [a, b]$ は \mathbb{R} の開集合で $a_k, b_k \in X$ なので $c \in X$ となっている。

$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ なるある $\lambda_0 \in \Lambda$ で $c \in U_{\lambda_0}$ となるものが存在する。 U_{λ_0} は開集合なのである $\varepsilon > 0$ が存在して、 $U_\varepsilon(c) \subset U_{\lambda_0}$ となる。

k を十分大きくして、 $\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$ となるようにすると、 $X_k \subset U_{\lambda_0}$ となって、 X_k が有限個の U_λ たちでおさえなれることに矛盾する。 \square

注意 コンパクト位相空間の例を作ることは非自明な問題である。 \square

定理 (コンパクト性が連続写像による像で保たれること)

$f: X \rightarrow Y$ が「位相空間のあいだ」の連続写像で、 X がコンパクトならばその像 $f(X)$ も (Y における相対位相について) コンパクトになる。

証明 Y における相対位相に関する $f(X)$ の開被覆 $f(X) = \bigcup_{i \in I} V_i$ を任意に与える。

各 V_i は $V_i = f(X) \cap U_i$ (U_i は Y の開集合) と書ける。 f は連続なので $f^{-1}(U_i)$ は X の開集合になる。 任意の $x \in X$ について、 $f(x) \in f(X)$ を含む U_i が存在し、 $x \in f^{-1}(U_i)$ となる。 ゆえに X の開被覆 $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ が得られた。 X のコンパクト性より、有限個の $i_1, \dots, i_n \in I$ が存在して、 $X = \bigcup_{k=1}^n f^{-1}(U_{i_k})$ となる。 そのとき、 $f(X) = \bigcup_{k=1}^n f(f^{-1}(U_{i_k})) = \bigcup_{k=1}^n (f(X) \cap U_{i_k}) = \bigcup_{k=1}^n V_{i_k}$ 。 これで $f(X)$ がコンパクトになることが示された。 \square

定理 コンパクト位相空間の閉集合は相対位相についてコンパクトになる。

証明 X はコンパクト位相空間かつ F はその閉集合であると仮定する。

V_i ($i \in I$) は相対位相に関する F の開集合であるとし、 F の開被覆になつているとすると、 V_i たちは $V_i = F \cap U_i$ 、 U_i は X の開集合と書ける。 $U_\infty = X \setminus F$ とおくと、 U_∞ も X の開集合になる。 $X = U_\infty \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ という X の開被覆がえられた。 X はコンパクトなので有限個の $i_1, \dots, i_n \in I$ が存在して、 $X = U_\infty \cup \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$ が成立する。 このとき、 $F = F \cap X = \bigcup_{k=1}^n V_{i_k}$ が成立する。 ゆえに F は相対位相についてコンパクトである。 \square

定理 コンパクト位相空間の無限部分集合は集積点を持つ。

証明 X はコンパクト位相空間で $A \subset X$ であるとする。 A が集積点を持たないと仮定し、 A が有限集合であることを示せばよい。 A は集積点を持たないと仮定する。

任意の $x \in X \setminus A$ は A の集積点ではないので X のある開集合 U で $x \in U$ かつ $U \cap A = \emptyset$ なるものが存在する。 ゆえに、 $X \setminus A$ は X の開集合になるので、 A は X の閉集合である。 ゆえに上の定理より、 A はコンパクトになる。

任意の $a \in A$ は A の集積点ではないので、 X のある開集合 U_a で $A \cap U_a = \{a\}$ なるもののが存在する。 $A = \bigcup_{a \in A} (A \cap U_a) = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ は A の開被覆になり、 A はコンパクトなので、有限個の $a_1, \dots, a_n \in A$ が存在して、 $A = \bigcup_{i=1}^n \{a_i\} = \{a_1, \dots, a_n\}$ となる。 A は有限集合である。 \square

Hausdorff空間

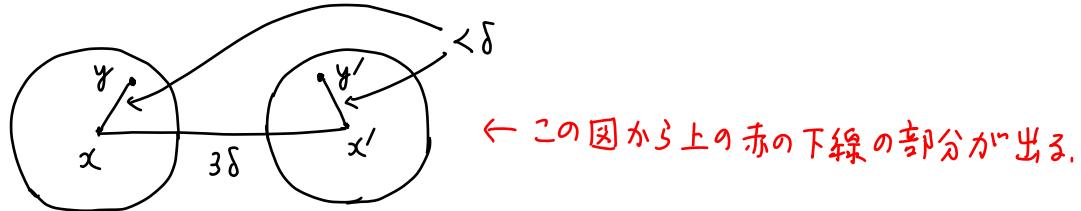
Hausdorff位相空間を Hausdorff空間と呼ぶ

定義 位相空間 X が Hausdorff (もしくは T_2) であるとは、任意の異なる2点 $x, x' \in X$ に対して、 x を含む開集合 U と x' を含む開集合 U' で $U \cap U' = \emptyset$ をめたすものが存在することである。□

自明な定理 距離空間は Hausdorff 空間である。

証明 異なる2点 $x, x' \in X$ に対して、 $\delta = \frac{1}{3} d(x, x') > 0$ とおくと、 $U_\delta(x) \cap U_\delta(x') = \emptyset$ 。
 $(y \in U_\delta(x), y' \in U_\delta(x')$ のとき、 $d(y, y') \geq d(x, x') - d(y, x) - d(x', y') > 3\delta - \delta - \delta = \delta > 0$ なので $y \neq y'$.)

$U_\delta(x), U_\delta(x')$ はそれぞれ x, x' を含む開集合なので示すべきことが示された。□



定義 位相空間 X の部分集合 A に $\{A \cap U \mid U \text{ は } X \text{ の開集合}\}$ によって開集合系を定め、 A を位相空間とみなせる。この位相空間 A の位相を X の位相の相対位相と呼ぶ。□

問題 距離空間 X の部分集合 A を X の距離空間としての部分空間とみなしたときの A の開集合系と X の相対位相における A の開集合系が一致することを示せ。□

問題 Hausdorff 空間 X の部分集合 K が相対位相についてコンパクトならば K は X の開集合になることを示せ。□

これら問題の結果より、特に距離空間 X のコンパクト部分空間 K は X の開集合になっていることがわかる。直接の証明を与えておく。(以上の問題のヒントにもなっている。)

定理 距離空間 X のコンパクト部分空間 K は X の閉集合になる。

証明 X は距離空間であり、 K はそのコンパクト部分距離空間であるとする。 $X \setminus K$ が X の開集合であることを示せばよい。そのためには $a \in X \setminus K$ を任意にとって、 a を含む開集合で K と交わらないものを作れればよい。 $a \in X \setminus K$ とし、 $x \in K$ に対して、 $\delta_x = \frac{1}{3} d(x, a) > 0$ とおく。このとき、 $V_x = \{y \in K \mid d(y, x) < \delta_x\}$ とおくと、 $K = \bigcup_{x \in K} V_x$ は K の開被覆になる。 K はコンパクトなので有限個の $x_1, \dots, x_n \in K$ で $K = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ をめたすものが存在する。 δ_x の定義より、 $U_{\delta_x}(a) \cap V_x = \emptyset$ なので $\delta = \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}\} > 0$ とおくと、 $U_\delta(a) \cap V_{x_i} = \emptyset$ ($i = 1, \dots, n$) となる。そのとき、 $U_\delta(a) \cap K = U_\delta(a) \cap \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = \bigcup_{i=1}^n (U_\delta(a) \cap V_{x_i}) = \emptyset$ 。これで a を含む X の開集合 $U_\delta(a)$ で K と交わらないものを作れた。□

全有界性

定義 距離空間 X が全有界 (totally bounded) であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、有限個の $x_1, \dots, x_n \in X$ で $X = \bigcup_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i)$ をみたすものが存在することであると定める。□

注意 各 $U_\varepsilon(x_i)$ は有界であり、有界な部分集合の有限和も有界になるので、全有界ならば有界になる。□

問題 全有界ならば有界になることの詳しい証明を書き下せ。□

ほぼ自明な定理 コンパクト距離空間は全有界である。

証明 X はコンパクト距離空間であるとし、 $\varepsilon > 0$ を任意に取る。このとき、 $X = \bigcup_{x \in X} U_\varepsilon(x)$ は X の開被覆になる。 X のコンパクト性より、有限個の $x_1, \dots, x_n \in X$ で $X = \bigcup_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i)$ をみたすものが存在する。ゆえに X は全有界である。□

例 X は無限集合であるとし、 $x, y \in X$ について、 $d(x, y) = \begin{cases} 1 & (x \neq y) \\ 0 & (x = y) \end{cases}$ と定めると、 (X, d) は距離空間になる。 X は自明に有界である。しかし、 $0 < \varepsilon \leq 1$ ならば $U_\varepsilon(x) = \{x\}$ ($x \in X$) となることから、有限個の $x_1, \dots, x_n \in X$ について、 $\bigcup_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i) = \{x_1, \dots, x_n\} \neq X$ となる。ゆえに X は全有界ではない。(特にコンパクトでもない。) □

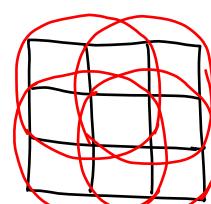
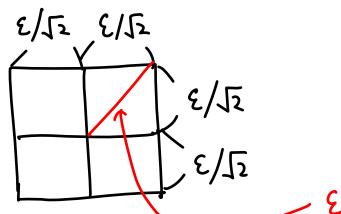
問題 X が全有界距離空間のとき、その部分空間 A も全有界になることを示せ。

略証 $\varepsilon > 0$ を任意にとる。ある x_1, \dots, x_n が存在して、 $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\varepsilon/2}(x_i)$ となる。 A における $a \in A$ の $\delta > 0$ 近傍を $U_\delta^A(a) = U_\delta(a) \cap A$ と書く。 $U_{\varepsilon/2}(x_i) \cap A = \emptyset$ となる $i = 1, \dots, n$ の全体を J と書き、各 $j \in J$ について $a_j \in U_{\varepsilon/2}(x_j) \cap A$ をえらんでおく。このとき、 $U_{\varepsilon/2}(x_j) \subset U_\varepsilon(a_j)$ となるので $A \subset \bigcup_{j \in J} U_{\varepsilon/2}(x_j) \subset \bigcup_{j \in J} U_\varepsilon(a_j)$ 。ゆえに $A = A \cap \bigcup_{j \in J} U_\varepsilon(a_j) = \bigcup_{j \in J} U_\varepsilon^A(a_j)$ 。□

問題 \mathbb{R}^n の有界部分集合は全有界になることを示せ。

略証 上の問題の結果より、 $M > 0$ について、 $[-M, M]^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -M \leq x_1, \dots, x_n \leq M\}$ が全有界であることを示せば十分である。任意に $\varepsilon > 0$ をとる。
 $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \mathbb{Z}^n = \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} k_1, \dots, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} k_n \right) \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \right\}$ と書き、 $A = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \mathbb{Z}^n \cap [-M, M]^n$ とおくと、 A は $[-M, M]$ の有限部分集合になり、 $[-M, M] \subset \bigcup_{a \in A} U_\varepsilon(a)$ となることを示せる。□

$n=2$ の場合の図



コンパクト位相空間上の実数値連続函数

重要

定理 コンパクト位相空間上の実数値連続函数は最大値と最小値を持つ。

証明 X はコンパクト位相空間であるとし, f は X 上の実数値連続函数であるとする,

一般に連続写像によるコンパクト位相空間の像もコンパクトになる(19)ので,
 f による X の像 $f(X)$ は \mathbb{R} の相対位相についてコンパクトになる。

一般に Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉集合になる(20)ので,
 $f(X)$ は \mathbb{R} の閉集合になる。

一般にコンパクト距離空間は全有界(特に有界)になる(21)ので,
 $f(X)$ は有界になる。

一般に \mathbb{R} の有界閉部分集合は実数の連続性より最大値と最小値を持つ(12)ので,
 $f(X)$ は最大値と最小値を持つ。 \square

系 (Corollary) \mathbb{R} の有界閉集合上の実数値連続函数は最大値と最小値を持つ。

証明 一般に \mathbb{R} 上の閉区間 $[a, b]$ は実数の連続性よりコンパクトになる(19)。

一般にコンパクト位相空間の閉集合もコンパクトになる(19)。

ゆえに \mathbb{R} の有界閉集合は \mathbb{R} のある閉区間の閉集合になるのでコンパクトになる。

したがって、上の定理からこの系がしたがう。 \square

注意 以上の 2 つの証明より、 \mathbb{R} の部分集合 A について、

$$A \text{ はコンパクト} \Leftrightarrow A \text{ は } \mathbb{R} \text{ の有界閉集合}$$

が成立することがわかる。より一般に \mathbb{R}^n の部分集合 A について

$$A \text{ はコンパクト} \Leftrightarrow A \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の有界閉集合}$$

となることもよく知られている。 \square

問題 (*) を示せ。

ヒント 「コンパクト \Rightarrow 全有界かつ閉」は距離空間の部分集合について成立している。

(*) の \Leftarrow については、高木貞治『解析概論』第 1 章 定理 11 の証明を参考にせよ。 \square

(X, d) は距離空間であるとし, $\emptyset \neq A \subset X$ であるとする.

部分集合への距離 点 $x \in X$ と部分集合 A の距離 $d(x, A)$ を $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ と定める. \square

(1) 任意の $x, y \in X$ について, $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. 獨に $d(x, A)$ は x について連続である.

証明 任意の $a \in A$ について, $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ なので $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$, すなわち $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. x と y を交換すると, $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$. したがって, $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. \square

(2) $x \in X$ について, $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$. $\exists a \in A$ s.t. $d(x, a) < \varepsilon$.

証明 $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ について $\bigcup_{a \in A} U_\varepsilon(a) \ni x \Rightarrow x \in \overline{A}$. \square

直径 A の直径 $\text{diam } A$ を $\text{diam } A = \sup_{a, b \in A} d(a, b) \in [0, \infty]$ と定める.

Lebesgue の被覆補題 (X, d) はコンパクト距離空間であるとし, $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は X の開被覆であるとする.

このとき, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $A \subset X$ について, $\text{diam } A \leq \delta$ ならばある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $A \subset U_\lambda$ となる.

証明 X はコンパクトなのである $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して, $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$.

もしもある x について $U_{\lambda_i} = X$ ならば結論の成立は自明なので, $U_{\lambda_i} \neq X$ ($i=1, \dots, n$) と仮定する.

$x \in X$ について, $f(x) = \max_{i=1, \dots, n} d(x, X \setminus U_{\lambda_i})$ とおく.

上の(1)より f は X 上の連続函数であり, (2) と $U_{\lambda_i} \neq X$ ($i=1, \dots, n$) より $f(x) > 0$ ($x \in X$) である.

X はコンパクトなので, f の最小値 $\delta > 0$ が存在する.

$\emptyset \neq A \subset X$, $\text{diam } A < \delta$ と仮定する. このとき, $a, x \in A$ について $d(a, x) \leq \text{diam } A < \delta$ より, $A \subset U_\delta(a)$.

$f(a) \geq \delta$ なので, ある x が存在して, $d(x, X \setminus U_{\lambda_i}) \geq \delta$ となり, $U_\delta(a) \subset U_{\lambda_i}$ が成立する.

このとき, $A \subset U_{\lambda_i}$.

q.e.d.

一様連続性

距離空間では連続写像だけではなく一様連続写像も定義できる。

定義

距離空間のあいだの写像 $f: X \rightarrow Y$ が「一様連続」であるとは、
任意の $\varepsilon > 0$ について、ある $\delta > 0$ が存在して、任意の $x, x' \in X$ について、
 $d(x, x') < \delta$ ならば $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ が成立することだと定める。 \square

連続写像と一様連続写像のちがい

- f は連続 $\iff \begin{cases} \text{任意の } a \in X \text{ と } \varepsilon > 0 \text{ に対して}, \\ \text{ある } \delta > 0 \text{ が存在して, 任意の } x \in X \text{ について}, \\ d(x, a) < \delta \text{ ならば } d(f(x), f(a)) < \varepsilon \text{ となる} \end{cases}$

δ は連続であることを確認する点 $a \in X$ ごとに
別々に取れれば十分

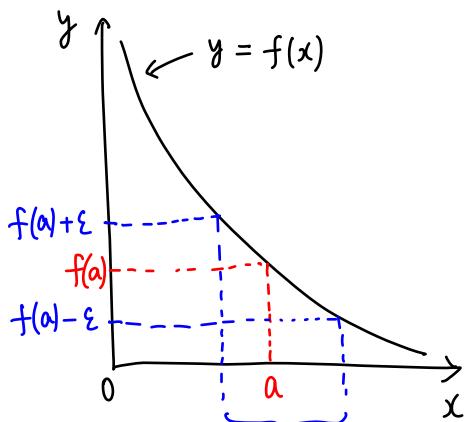
- f は一様連続 $\iff \begin{cases} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して}, \\ \text{ある } \delta > 0 \text{ が存在して, 任意の } a, x \in X \text{ について}, \\ d(x, a) < \delta \text{ ならば } d(f(x), f(a)) < \varepsilon \text{ となる} \end{cases}$

δ は ε だけから決まり, a に依存してはいけない。

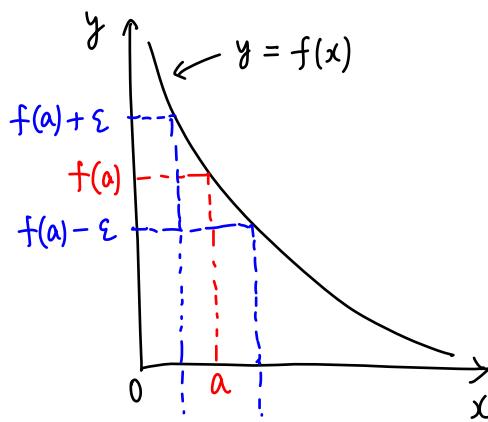
- 一様連続ならば連続である。

\square

例 函数 $f(x) = x^{-1} (x > 0)$ は $\mathbb{R}_{>0}$ 上で連続ながら一様連続ではない。



この幅に注目
 δ はこの幅から決まる。



この幅は a が 0 に近づくと
いくらでも小さくなる。

$\therefore f(x) = \frac{1}{x}$ は $x > 0$ で一様連続ではない。 \square

注意 任意に $d \in \mathbb{R}_{>0}$ を固定すれば " $f(x) = \frac{1}{x}$ は $x \geq d$ においては一様連続になる。 \square

注意 一般の位相空間のあいだの写像について一様連続性を定義できない。

例 $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) と $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を定めると, f は等長写像なので一様連続である。□

例 $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) と $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を定めると, f は連続だが一様連続ではない、一様連続でないことの証明: $\varepsilon = 1$ とし, $\delta > 0$ を任意にとり, $a > 0$ を仮定する。このとき, $|f(a + \frac{\delta}{2}) - f(a)| = |(a + \frac{\delta}{2})^2 - a^2| = \delta a + \frac{\delta^2}{4} > \delta a$ となるので, $a = \frac{1}{\delta}$ のとき, $x = a + \frac{\delta}{2}$ とおくと, $|x - a| = \frac{\delta}{2} < \delta$ の間に $|f(x) - f(a)| > \delta a = 1 = \varepsilon$ となる。これで, $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) が一様連続でないことが示された。□

例 $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) と $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を定めると, f は一様連続ではない。

証明 $\varepsilon = 1$ とし, $\delta > 0$ を任意にとり, $0 < a < \delta$ を仮定する。このとき,

$$|f(a - \frac{\delta}{2}) - f(a)| = \frac{1}{a - \frac{\delta}{2}} - \frac{1}{a} = \frac{\frac{\delta}{2}}{a(a - \frac{\delta}{2})} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a - \frac{\delta}{2}}$$

$0 < a < \delta \Leftrightarrow \delta/a > 1$.

つまり, $a = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}$, $x = a - \frac{\delta}{2}$ とおくと, $|x - a| = \frac{\delta}{2} < \delta$ の間に

$$|f(x) - f(a)| > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a - \frac{\delta}{2}} = 1 = \varepsilon$$

となり, $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) が一様連続でないことがわかる。□

例 $\alpha > 0$ を固定する。 $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \geq \alpha$) と $f: \mathbb{R}_{\geq \alpha} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を定めると, f は一様連続である。

証明 任意に $\varepsilon > 0$ をとる。 $\delta = \alpha - \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} > 0$ とおく。このとき, $x, a \in \mathbb{R}_{\geq \alpha}$ について, $|x - a| < \delta$ のとき,

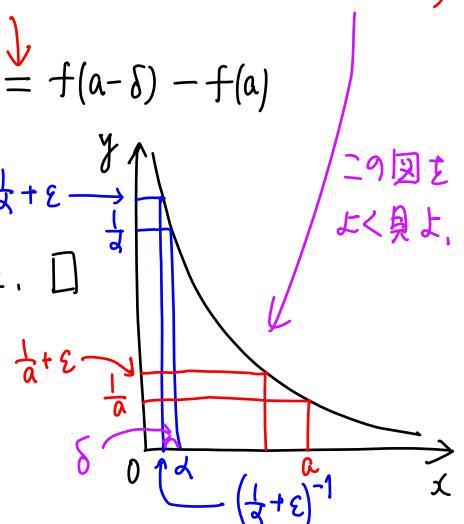
f(x) が下に凸で単調減少であることより

$$|f(x) - f(a)| < \max \{ |f(a + \delta) - f(a)|, |f(a - \delta) - f(a)| \} = f(a - \delta) - f(a)$$

$$\leq f(\alpha - \delta) - f(\alpha) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} - \frac{1}{\alpha} = \varepsilon.$$

これで, $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \geq \alpha > 0$) の一様連続性が示された。□

問題 $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) と $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を定めると, $f(x)$ は一様連続であることを示せ。□



定理 $I \subset \mathbb{R}$ は区間であるとし, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級函数であるとする.

$\{f'(x) | x \in I\}$ が有界ならば $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ は一様連續である.

証明 ある定数 $M > 0$ が存在して, $|f'(x)| \leq M$ ($x \in I$). このとき, $x, a \in I$ について,

$$|f(x) - f(a)| = \left| \int_a^x f'(t) dt \right| \leq M|x-a|$$

なので, $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ とおくと, $|x-a| < \delta$ のとき,

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x-a| < M\delta = \varepsilon.$$

これで, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ の一様連續性が示された. \square

例 $f(x) = \log x$ ($x \geq 1$) と $f: \mathbb{R}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を定めると, $f'(x) = \frac{1}{x} \leq 1$ ($x \geq 1$)

となるので, f は ($x \geq 1$ において) 一様連續になる. \square

例 $\alpha > 0$ を固定する. $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \geq \alpha$) と $f: \mathbb{R}_{\geq \alpha} \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ を定めると,

$|f'(x)| = \left| -\frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\alpha^2}$ ($x \geq \alpha$) なので, f は ($x \geq \alpha$ において) 一様連續である. \square

コンパクト距離空間から距離空間への連続写像の一様連続性

証明はもうむずかしくない。

定理 X はコンパクト距離空間であり, Y は距離空間であるとする。このとき,

$f: X \rightarrow Y$ が連続写像であるならば f は一様連続になる。

証明 $f: X \rightarrow Y$ は連続であると仮定し, 任意に $\varepsilon > 0$ をとる。

各 $a \in X$ に対して, ある $\delta_a > 0$ が存在して,

$x \in X$, $d(x, a) < \delta_a$ ならば $d(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる。

$\{U_{\delta_{a_i}/2}(a_i)\}_{a_i \in X}$ は X の開被覆になる。

X のコンパクト性より, 有限個の $a_1, \dots, a_n \in X$ が存在して, $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\delta_{a_i}/2}(a_i)$ となる。

$\delta = \min\{\delta_{a_i}/2 \mid i=1, \dots, n\} > 0$ とおき, $x, x' \in X$, $d(x, x') < \delta$ と仮定する。

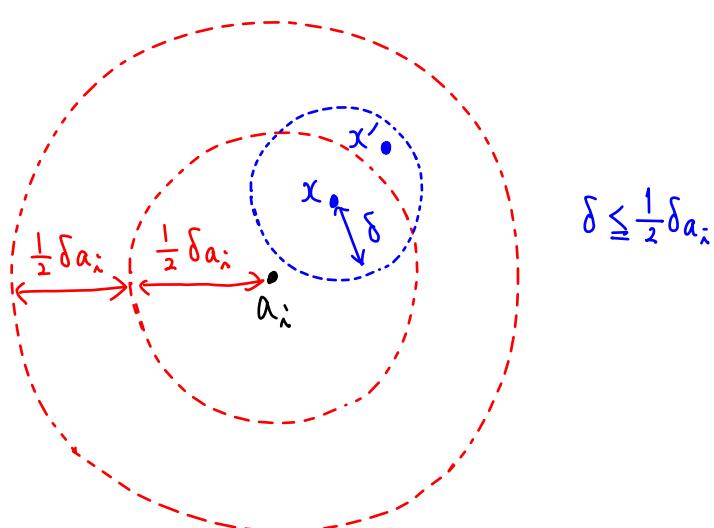
ある $i=1, \dots, n$ で $x \in U_{\delta_{a_i}/2}(a_i)$ ならわち $d(x, a_i) < \frac{1}{2}\delta_{a_i}$ を満たすものが存在する。

このとき, $d(x, a_i) < \delta_{a_i}$ なので $d(f(x), f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる。

さらに, $d(x', a_i) \leq d(x', x) + d(x, a_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{a_i} \leq \frac{1}{2}\delta_{a_i} + \frac{1}{2}\delta_{a_i} = \delta_{a_i}$ なので,
 $d(f(x'), f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる。

ゆえに, $d(f(x), f(x')) \leq d(f(x), f(a_i)) + d(f(a_i), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

これで f の一様連続性を示せた。 □



注意 連続函数(写像)の定義域のコンパクト性の仮定から出発する上の定理の証明は、コンパクト空間の例を作る問題よりも相対的にずっと易しい。 □

階段函数による一様近似

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ であり, Y は距離空間であると仮定する.

定義 $f: [a, b] \rightarrow Y$ が "階段函数" (step function) であるとは, 開区間 $[a, b]$ のある分割

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_L = b \quad \text{且} \quad y_1, \dots, y_L \in Y$$

$$f(x) = y_i \quad \text{if } x_{i-1} < x < x_i \quad (i=1, \dots, L)$$

をみたすものが存在することである. ($f(x_i)$ の値には制限を付けない.)

定理 任意の連続函数 $f: [a, b] \rightarrow Y$ に対して, 階段函数 $f_n: [a, b] \rightarrow Y$ たゞで" 函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に $[a, b]$ 上一様収束するものが存在する.

証明 階段函数 $f_n: [a, b] \rightarrow Y$ で" 任意の $x \in [a, b]$ について $d(f(x), f_n(x)) < \frac{1}{n}$ をみたすものを作れることを示せば十分である. 以下, 正の整数 n を任意にとって固定する.

$[a, b]$ はコンパクト距離空間なので" 連続函数 $f: [a, b] \rightarrow Y$ は一様連続になる. ゆえに, ある $\delta > 0$ が存在して, $x, x' \in [a, b]$ かつ $|x - x'| < \delta$ ならば " $d(f(x), f(x')) < \frac{1}{n}$ となる.

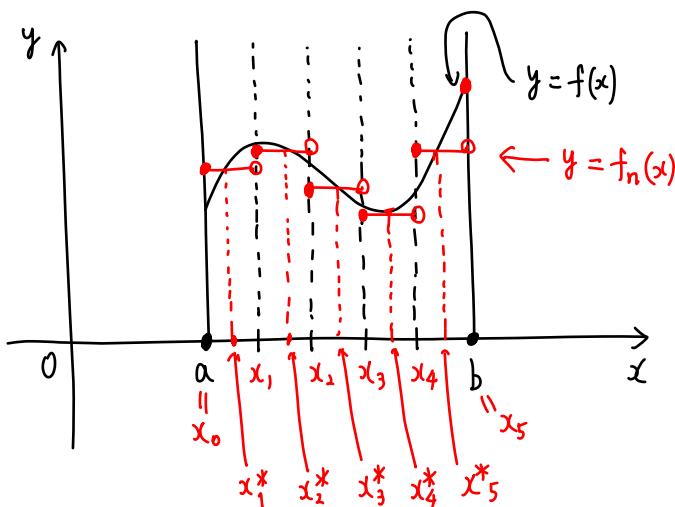
開区間 $[a, b]$ の分割 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_L = b$ を $\max\{x_i - x_{i-1} \mid i=1, \dots, L\} <$ をみたさるよう(とくに), $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$ ($i=1, \dots, L$) を任意に選び " $y_i = f(x_i^*)$ " とおく.

このとき, 任意の $x \in [x_{i-1}, x_i]$ に対して, $|x - x_i^*| < \delta$ となるので" $d(f(x), y_i) < \frac{1}{n}$ となる. ゆえに, 階段函数 $f_n: [a, b] \rightarrow Y$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} y_i & (x \in [x_{i-1}, x_i], i=1, \dots, L) \\ f(b) & (x=b) \end{cases}$$

とおくと, 任意の $x \in [a, b]$ について $d(f(x), f_n(x)) < \frac{1}{n}$.

□



注意 階段函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($f(x) = y_i$ if $x_{i-1} < x < x_i$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_L = b$) の積分を $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^L y_i (x_i - x_{i-1})$ と定義でき, 階段函数列の一様収束先になっている函数についても, その極限で積分を定義できる.

□

完備性

以下、 X は距離空間であるとする。

$m, n \geq N$ は $m \geq N$ かつ $n \geq N$ の意味

定義 X 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy列 (Cauchy sequence) もしくは 基本列 (fundamental sequence) であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある番号 N が存在して、 $m, n \geq N$ ならば $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ となることであると定める。

注意 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy列であるという条件を $d(a_m, a_n) \rightarrow 0$ as $m, n \rightarrow \infty$ かつ $\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(a_m, a_n) = 0$ と略記することがある。□

収束列は Cauchy列 距離空間内の収束点列は Cauchy列である。

証明 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は距離空間 X 内の収束点列であるとし、 $a \in X$ に収束していると仮定する。 $\varepsilon > 0$ を任意にとる。ある番号 N が存在して、 $k \geq N$ ならば $d(a_k, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる。このとき、 $m, n \geq N$ ならば $d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a, a_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ 。ゆえに $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy列である。□

例 $X = \mathbb{Q}$, $d(x, y) = |x - y|$ ($x, y \in \mathbb{Q}$) とおくと (\mathbb{Q}, d) は距離空間である。

$a_n = (\sqrt{2} を小数点以下第 n 行目で切って得られる数)$ とおく ($a_1 = 1.4, a_2 = 1.41, a_3 = 1.414, \dots$)。このとき、 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $X = \mathbb{Q}$ 内の Cauchy列たが、 $X = \mathbb{Q}$ 内では収束しない ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)。□

この例のように、Cauchy列は収束するとは限らない。

しかし、上の例の Cauchy列は距離空間 $X = \mathbb{Q}$ を \mathbb{R} まで拡大すれば収束する。

定義 距離空間 X 内の任意の Cauchy列が収束するとき、 X は 完備 (complete) であるといふ。□

Cauchy列は有界 Cauchy列は有界になる。

証明 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy列であると仮定する。 $\varepsilon = 1$ に対して、ある N が存在して、 $m, n \geq N$ ならば $d(a_m, a_n) \leq 1$ となる。 $M = \max \{d(a_1, a_N), \dots, d(a_{N-1}, a_N)\}$ とおくと、 $n \geq N$ のとき、 $d(a_n, a_N) \leq 1$ となり、 $n < N$ のとき、 $d(a_n, a_N) \leq M$ となる。ゆえに任意の番号 n について、 $d(a_n, a_N) \leq \max \{1, M\}$ 。ゆえに $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である。□

Cauchy列の直観的意味 実際には収束するとは限らないが、収束しているように見える点列を Cauchy列と呼ぶ。後で距離空間を適切に拡大すればすべての Cauchy列を収束するようにできることも説明する(完備化)。□

定理 X は完備距離空間であるとし, A はその距離部分空間であるとする.

このとき, 以下の2つの条件は互いに同値である:

- (a) A は完備である.
- (b) A は X の閉集合である.

$X \setminus A$ が X の閉集合でないことを同値

証明 $(a) \Rightarrow (b)$ 対偶を示そう. $\overbrace{A \text{ は } X \text{ の閉集合ではない} \Rightarrow}$

このとき, ある $\alpha \in X \setminus A$ が存在して, 任意の $\varepsilon > 0$ について $U_\varepsilon(\alpha) \cap A \neq \emptyset$ となる.

ゆえに A 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ で $a_n \in U_{1/n}(\alpha) \cap A$ ($n=1, 2, \dots$) をみたすものを作れる.

$d(a_n, \alpha) < \frac{1}{n}$ ($n=1, 2, \dots$) なので X 内の点列として $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は α に収束する.

ゆえに $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は X 内の Cauchy 列になる. A の距離函数は X のそれの制限になつてゐるのを $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は A 内の Cauchy 列にもなつてゐる. しかし, 収束先は $\alpha \notin A$ なので, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は A 内で収束しない. ゆえに A は完備ではない. これで $(a) \Rightarrow (b)$ の対偶を示せた.

$(b) \Rightarrow (a)$ A は X の閉集合であると仮定し, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は A 内の Cauchy 列であるとする.

X は完備なので $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ はある $\alpha \in X$ に収束する. A は X の閉集合なので $\alpha \in A$ となる (13) で示した). A 内の Cauchy 列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が A 内の点に収束することがわかった.

ゆえに A は完備である. これで $(b) \Rightarrow (a)$ も示せた.

q.e.d.

定理 X は全有界な距離空間ならば X 内の任意の点列は Cauchy 部分列を持つ.

証明 (対角線論法を使う!)

X は全有界距離空間であると仮定する. 任意の $k=1, 2, \dots$ について, X の有限部分集合 A_k で $X = \bigcup_{a \in A_k} U_{1/k}(a)$ をみたすものが存在する.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 内の任意の点列であるとする. $k=1, 2, 3, \dots$ について 勝手に

$$(*) \quad d(x_m^{(k)}, x_n^{(k)}) < \frac{1}{k} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたす $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ で $\{x_n^{(k+1)}\}_{n=1}^{\infty}$ が $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列にならざるものを作る.

$k=1$ のとき, $X = \bigcup_{a \in A_2} U_{1/2}(a)$ で A_2 は有限集合なのである $a \in A_2$ で 無限個の n について $x_n \in U_{1/2}(a)$ をみたすものが存在する. そのような x_n 全体を部分列とみなしたもの

を $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ と定める. $x_m^{(1)}, x_n^{(1)} \in U_{1/2}(a)$ なので $d(x_m^{(1)}, x_n^{(1)}) \leq d(x_m^{(1)}, a) + d(a, x_n^{(1)}) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

$k \geq 2$ のとき, $\{x_n^{(k-1)}\}_{n=1}^{\infty}$ が得られていくならば $X = \bigcup_{a \in A_{2k}} U_{1/(2k)}(a)$ で A_{2k} が有限集合なので, ある $a \in A_{2k}$ で 無限個の n について $x_n^{(k-1)} \in U_{1/(2k)}(a)$ をみたすものが存在する.

そのような $x_n^{(k-1)}$ の全体を部分列とみなしたもの $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ と定める. このとき,

$$x_m^{(k)}, x_n^{(k)} \in U_{1/(2k)}(a) \text{ なので } d(x_m^{(k)}, x_n^{(k)}) \leq d(x_m^{(k)}, a) + d(a, x_n^{(k)}) < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}.$$

$l \geq k$ のとき, $\{x_n^{(l)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列なので $d(x_m^{(l)}, x_n^{(l)}) < \frac{1}{k}$ となることを

注意せよ.

対角線論法!

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ を考え, 任意に $\varepsilon > 0$ をとり, $\frac{1}{N} < \varepsilon$ となるように N をとると, $m, n \geq N$ のとき,

$$d(x_m^{(n)}, x_n^{(n)}) < \frac{1}{\min\{m, n\}} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

となるので, 部分列 $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である.

□

上の定理より たゞちに次の系が得られる.

系 X が全有界完備な距離空間であれば X 内の任意の点列は収束部分列を持つ. □

完備な距離空間の例

(高木貞治『解析概論』第1章も参照せよ。)

例 \mathbb{R} は距離函数 $d(x, y) = |x - y|$ について完備な距離空間である。□

注意 これは 実数の連続性 を意味する互いに同値な条件の1つになっている。

(a) \mathbb{R} の空でない上に有界な部分集合の上限が \mathbb{R} 内に存在する。

(b) \mathbb{R} 内の Cauchy 列は収束する。

(a) \Rightarrow (b) の証明 (a) を仮定し, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は \mathbb{R} 内の Cauchy 列であるとする。ゆえに上で示したように $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界になり, その部分 $\{a_k\}_{k=n}^{\infty} = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ も有界になり,

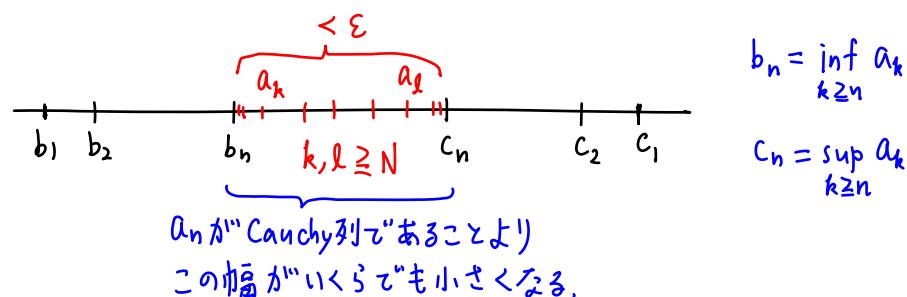
その下限 $b_n = \inf_{k \geq n} a_k$ と上限 $c_n = \sup_{k \geq n} a_k$ が (a) の仮定より \mathbb{R} の中には存在する。

このとき, $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots \leq c_3 \leq c_2 \leq c_1$ となるので, 再び(a)の仮定より, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。それらの極限を $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ と書くのである。

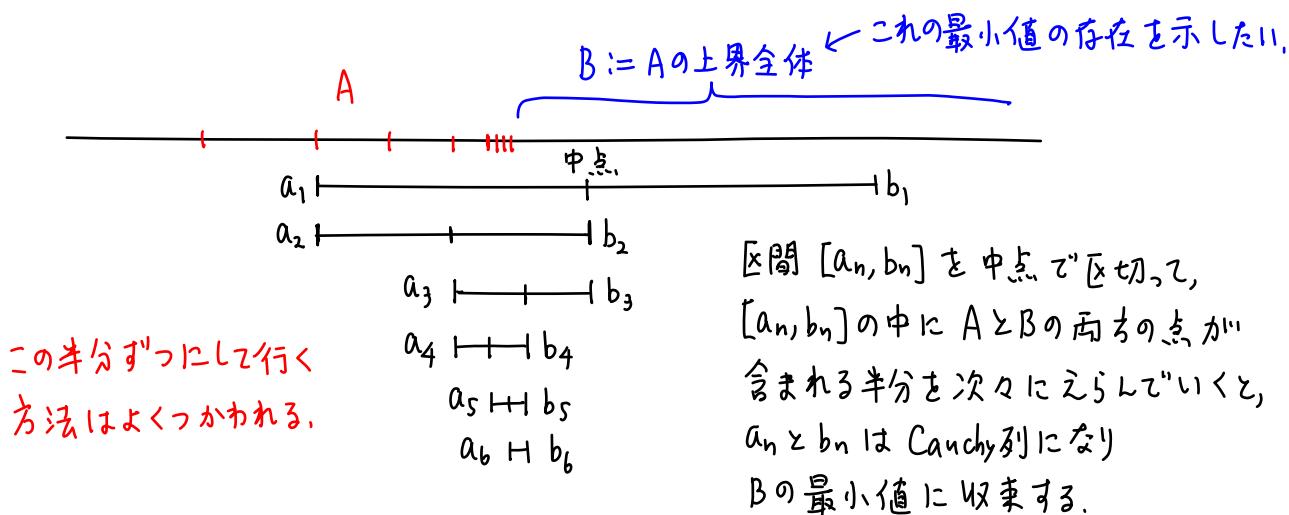
任意 $\varepsilon > 0$ をとる。 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列なので, ある N が存在して, $k, l \geq N$ のときは $|a_k - a_l| < \varepsilon$ となる。これより, $n \geq N$ のときは $0 \leq c_n - b_n \leq \varepsilon$ となることがわかる。

$\varepsilon > 0$ はいくらでも小さくとれるので, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ は同じ値になる。

ゆえに①で示したことより, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はこれらと同じ値に収束する。これで (a) \Rightarrow (b) が示された。以上の方針は次の図にまとめられる。



(b) \Rightarrow (a) の証明の方針 (a) \Rightarrow (b) の証明より文字数的に長くなるのでまず方針だけを先に示しておこう。 (b) \Rightarrow (a) の証明の方針は次の図にまとめられる。



(b) \Rightarrow (a) の証明 (b) を仮定し, A は \mathbb{R} の空でない上に有界な部分集合であるとする,
A の上界全体の集合を B と書くことにする. A の有界性より, B も空でない, $a \in A$ と $b \in B$ を任意にとり,
 $a_0 = a$, $b_0 = b$ とおく, $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \dots)$ を帰納的に以下のように定める:

$$(i) [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] \cap B \neq \emptyset \text{ のとき } a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ とおく.}$$

$$(ii) [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] \cap B = \emptyset \text{ のとき } a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = b_n \text{ とおく.}$$

帰納的に $[a_n, b_n] \cap A \neq \emptyset$ かつ $[a_n, b_n] \cap B \neq \emptyset$ となることを示す.

$n=0$ のとき, $[a_0, b_0] \cap A \ni a$ かつ $[a_0, b_0] \cap B \ni b$ なのでそれは成立している.

$n \geq 0$ とし, $[a_n, b_n] \cap A \neq \emptyset$ かつ $[a_n, b_n] \cap B \neq \emptyset$ となることを仮定する.

(i) の場合: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \cap B = [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] \cap B \neq \emptyset$. $[a_n, b_n] \cap A \neq \emptyset$ かつ $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] \cap A$ が A の上界を含むので $[a_{n+1}, b_{n+1}] \cap A = [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] \cap A = [a_n, b_n] \cap A \neq \emptyset$.

(ii) の場合: もしくは $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ が "A の元を含んでいなければ" $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] \cap A$ の上界が含まれることになるので (i) の条件に反するので, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \cap A \neq \emptyset$ となる.

$$[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] \cap B = \emptyset \text{ より } [a_{n+1}, b_{n+1}] \cap B = [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] \cap B = [a_n, b_n] \cap B \neq \emptyset.$$

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ となり, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ より, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列になるので

(b) の仮定よりこれらは収束し, その収束先は同じ値になる. $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ とおく.

β が "B = {A の上界全体} の最小値" であることを示せば "証明が終る".

$\beta \in B$ を示す. 任意に $d \in A$ をとる. 各 b_n は A の上界なので $d \leq b_n$ となる.

ゆえに $d \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$. これで " $\beta \in B$ " が示された.

β が B の最小値であることを示す. $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma < \beta$ と仮定する. $\gamma \notin B$ を示せばよし,

$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ なので $\gamma < a_n \leq \beta$ を満たすものが存在する. a_n の作り方より a_n 以上の A の元が

存在する. これは $\gamma \notin B$ を意味する.

Q.e.d.

問題 (中間値の定理) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ かつ f は閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続函数であるとし, $f(a)f(b) < 0$ ($f(a)$ と $f(b)$ は異符号) であると仮定する. このとき, ある $\alpha \in (a, b)$ で $f(\alpha) = 0$ をみたすものが存在することを示せ.

略解 (二分法) 上の (b) \Rightarrow (a) の証明と似た方法を使う.

$a_0 = a, b_0 = b$ とおき, $a_n, b_n \in (a, b)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を帰納的に以下のように定める:

$$(i) f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ とおく.}$$

$$(ii) f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = b_n \text{ とおく.}$$

帰納法で $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ となることを示そう.

$f(a_0)f(b_0) < 0$ なので $n=0$ では成立している.

$n \geq 0$ かつ $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ と仮定する. (i) の場合には自明に $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leq 0$ となる.

$$(ii) \text{の場合には } f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = \frac{f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) - f(a_n)f(b_n)}{f(a_n)^2} \leq 0,$$

$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$ かつ $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ので $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \cup \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$

は同じく値 $\alpha \in [a, b]$ に収束する.

$f(a_n)f(b_n) \leq 0$ で $n \rightarrow \infty$ とすると f の連続性より $f(\alpha)^2 \leq 0$ が得られる. ゆえに $f(\alpha) = 0$.

$f(a)f(b) < 0$ より $\alpha \neq a, \alpha \neq b$ なので $\alpha \in (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. □

注意 二分法は区間上の連続函数の零点の数値計算でも使える.

しかし, Newton法などのもっと高速な計算法が使える場合が多い.

問題 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ は 0 に収束する実数列であり, $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq 0$ をみたすと仮定し,

$$s_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i = s_{n-1} + (-1)^n c_n \text{ とおく. } \{s_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ が}^{\text{a}} \text{ 収束することを示せ.}$$

$$\text{略解} \quad s_{2k+1} = s_{2k} - c_{2k-1} \leq s_{2k}, \quad s_{2k+2} = s_{2k} - \overbrace{c_{2k-1} + c_{2k}}^{\leq 0} \leq s_{2k}, \quad s_{2k+3} = s_{2k+1} + \overbrace{c_{2k+2} - c_{2k+3}}^{\geq 0} \geq s_{2k+1} \text{ より}$$

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0, \quad |s_{2k+1} - s_{2k}| = |c_{2k+1}| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

となっていることがわかる. ゆえに $\{s_{2k}\}_{k=0}^{\infty} \cup \{s_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ は同じ値 α に収束する.

このことから, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ が α に収束することがわかる.

例 以下の有名な例を自分で証明してみよ:

$$(1) \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \log 2.$$

$$(2) \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

これらの左辺の和を
 そのまま足し上げる数値計算を
 すると収束は非常に遅くなる.
 交代級数の収束を加速する
 方法として, Euler法がよく
 知られている.

定義 ノルムが与えられた \mathbb{R} 上のベクトル空間を \mathbb{R} 上の ノルム空間 (normed (vector) space) と呼び、完備なノルム空間を Banach 空間 (Banach space) と呼ぶ。□

例 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ は 1 次元の Banach 空間である。□

例 \mathbb{R}^n に任意のノルムを入れたものは Banach 空間になる。

証明 \mathbb{R}^n の任意のノルムは互いに同値なので、たとえば“Euclid ノルムについて完備であることを示せば十分である。 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ と書き、 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ は Euclid ノルムに関する Cauchy 列であるとする。

各 $i = 1, 2, \dots, n$ について、 \mathbb{R} 内の点列 $\{x_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が Cauchy 列になることを示す。任意に $\varepsilon > 0$ をとる。 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ は Euclid ノルムに関する Cauchy 列なので、ある N が存在して、 $k, l \geq N$ なら $\|x^{(k)} - x^{(l)}\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i^{(l)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$ となり、

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| = ((x_n^{(k)} - x_n^{(l)})^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\|$$

となるので、各 i ごとに $\{x_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ は \mathbb{R} 内の Cauchy 列になる。

ゆえにこれらは収束する。 $d_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)}$ 、 $d = (d_1, \dots, d_n)$ とおく。

$\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が d に Euclid ノルムについて収束することを示す。 $\varepsilon > 0$ を任意にとる。各 i ごとにある N_i が存在して、 $k \geq N_i$ なら $|x_i^{(k)} - d_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ となる。ゆえに

$k \geq \max\{N_1, \dots, N_n\}$ ならば、

$$\|x^{(k)} - d\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - d_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon,$$

これで示すべきことがすべて示された。

q.e.d.

例 $C([a, b], \mathbb{R})$ に \sup ルム $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ を入れると Banach 空間になる。

閉区間 $[a, b]$ はコンパクトでないので $[a, b]$ 上の連続函数 $x \mapsto |f(x)|$ は最大値を持つ。(このことは⑯を見ればわかる。) このことから \sup ルムが well-defined であることがわかる。

完備性の証明 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $C([a, b], \mathbb{R})$ における \sup ルムに関する Cauchy 列であるとする。

各点 $x \in [a, b]$ に対して, \mathbb{R} 内の点列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ が Cauchy 列になることを示す。

$x \in [a, b]$ と $\varepsilon > 0$ を任意にとる。 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は \sup ルムに関する Cauchy 列なので, ある番号 N が存在して, $m, n \geq N$ ならば $\|f_m - f_n\|_\infty = \sup_{y \in [a, b]} |f_m(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sup_{y \in [a, b]} |f_m(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

となる。ゆえに $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{R} 内の Cauchy 列である。

\mathbb{R} の完備性より, $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ は収束するので, 函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ によって定めることができる。

$m, n \geq N$ ならば $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ので, $n \rightarrow \infty$ の極限をとることにより,

$m \geq N$ ならば $|f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ となることがわかる。 $x \in [a, b]$ は任意にとっていたので,

$m \geq N$ ならば $\sup_{x \in [a, b]} |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ となることもわかる。

$f \in C([a, b], \mathbb{R})$ すなはち f が連続であることを示す。 f_N は連続なのである $\delta > 0$ が存在して, $x' \in [a, b]$ かつ $|x - x'| < \delta$ ならば $|f_N(x) - f_N(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$ となるので

$$|f(x) - f(x')| \leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(x')|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(x') - f(x')|}_{\leq \varepsilon/3} < \varepsilon$$

となる。これで f が連続であることがわかった。

そして, $m \geq N$ ならば

$$\|f_m - f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

となるので, $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ が f に \sup ルムについて収束することも示された。

これで $C([a, b], \mathbb{R})$ の \sup ルムに関する完備性が示された。 \square

絶対収束

完備性は絶対収束の概念の基礎になっている。

定理

V は \mathbb{R} 上のベクトル空間であるとし, $\|\cdot\|$ は V 上のノルムであるとし, そのノルムによって V を距離空間とみなす。このとき, 以下の 2 つの条件は互いに同値である。

(a) V は完備である。(すなわち, $(V, \|\cdot\|)$ は Banach 空間である。)

(b) V 内の任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ が有限の値に収束するならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ が V 内で収束する。

証明

(a) \Rightarrow (b) V は完備であると仮定し, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は V 内の点列で $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ は有限の値に収束するとし, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく。 V の完備性より, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示すためには、それが Cauchy 列であることを示せば十分である。任意に $\varepsilon > 0$ をとる。

$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ が収束することより, $s_n = \sum_{k=1}^n \|a_k\|$ とおくと, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し、ゆえに Cauchy 列になる。したがって、ある番号 N が存在して, $N \leq m \leq n$ ならば $|s_n - s_m| < \varepsilon$ となり,

$$\|s_n - s_m\| = \|a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n\| \leq \|a_{m+1}\| + \|a_{m+2}\| + \dots + \|a_n\| = s_n - s_m < \varepsilon$$

となる。ゆえに $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列となり、 V の完備性より収束する。

(b) \Rightarrow (a) (b) を仮定し, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は V における Cauchy 列であるとする。

このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ($1 \leq n_1 < n_2 < \dots$) で $\|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$ ($k = 1, 2, \dots$)

とめたすものが存在する。 $b_1 = a_{n_1}$, $b_i = a_{n_i} - a_{n_{i-1}}$ ($i = 2, 3, \dots$) とおくと, $a_{n_k} = \sum_{i=1}^k b_i$
 $\sum_{i=1}^k \|b_i\| = \|a_{n_1}\| + \sum_{i=2}^k \|a_{n_i} - a_{n_{i-1}}\| < \|a_{n_1}\| + \sum_{i=2}^k \frac{1}{2^{i-1}} < \|a_{n_1}\| + 1$ となるので、

$\sum_{i=1}^{\infty} \|b_i\|$ は有限の値に収束し、(b) の仮定より, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ はある $\alpha \in V$ に収束する。

任意に $\varepsilon > 0$ をとる。 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列なのである N , が存在して, $m, n \geq N$, ならば

$\|a_n - a_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる。 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は α に収束するのである N_2 が存在して, $k \geq N_2$ ならば

$\|a_{n_k} - \alpha\| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる。 k を $k \geq N_2$ と $n_k \geq N$, をめたすようにとる。このとき, $n \geq N$, ならば

$$\|a_n - \alpha\| \leq \|a_n - a_{n_k}\| + \|a_{n_k} - \alpha\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も α に収束することが示された。 \square

定義

上の定理の条件(b)のもとで、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は 絶対収束 (absolutely converge) といふ。 \square

注意

絶対収束級数は和の順序によらないことを示せる。このことについては

高木貞治『解析概論』第4章 §43に実数列の場合についての詳しい解説がある。
以下の場所に私が書いた解説がある。

<https://github.com/genkuroki/Calculus>

→ 02 級数 <https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/02%20series.pdf>

それらの結果は Banach 空間の場合に容易に一般化可能である。
自分でノートをまとめてみよ。

□

例 \mathbb{C} は \mathbb{R} 上の 2 次元のベクトル空間とみなせ、絶対値をノルムとみなすことによって
ノルム空間とみなせ、 \mathbb{R}^n に任意のノルムを入れたものは完備になる (25 の例) ので、
 \mathbb{C} は完備である。 $z \in \mathbb{C}$ について、 $|z| < 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は $\frac{1}{1-z}$ に絶対収束する。□

例 (絶対収束しないが収束する級数の例)。

非負の実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調に 0 に収束していると仮定する ($a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0, a_n \rightarrow 0$)。

$z \in \mathbb{C}$, $|z|=1$, $z \neq 1$ と仮定する。このとき、 $b_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, $b_{-1} = 0$ とおくと、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k z^k &= \sum_{k=0}^n a_k (b_k - b_{k-1}) \\ &= (a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n) - (a_1 b_0 + a_2 b_1 + \dots + a_n b_{n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) b_k + a_n b_n. \end{aligned}$$

$$\text{そして, } |b_n| = \frac{|1-z^{n+1}|}{|1-z|} \leq \frac{|1| + |z|^{n+1}}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|} \quad \text{で}, \quad a_n \rightarrow 0 \text{ なので } |a_n b_n| = |a_n| b_n \rightarrow 0.$$

$$\text{また, } \sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) b_k| = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) |b_k| \leq \frac{2}{|1-z|} \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = \frac{2}{|1-z|} (a_0 - a_n) \leq \frac{2 a_0}{|1-z|}.$$

ゆえに、 $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) b_k$ は絶対収束する。

以上を合わせれば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が収束することわかる。

(i) $a_n = \frac{1}{n+1}$, $z = -1$ のとき、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ は収束する。

(ii) $a_n = \frac{1}{2n+1}$, $z = -1$ のとき、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ は収束する。

しかし、(i), (ii) の場合に $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ となるので、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束しない。□

問題

$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$ と $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ を示せ。□

縮小写像

完備距離空間でよく使われる。

定義

X は距離空間であるとする。写像 $f: X \rightarrow X$ に対して、

$0 \leq c < 1$ を満たすある実数 c が存在して、

任意の $x, x' \in X$ について $d(f(x), f(x')) \leq c d(x, x')$ が成立しているとき、

f は 縮小写像 (contraction mapping) であるという。

□

注意

縮小写像は一様連続になる。□

写像 $f: X \rightarrow X$ について、 $a \in X$ が $f(a) = a$ を満たすとき、 a は f の 不動点 (fixed point) であるという。

定理

X が完備距離空間で f がその縮小写像であるとき、 f の不動点がただひとつ存在する。

証明 $f: X \rightarrow X$ を n 個合成してできる写像を $f^n = \overbrace{f \circ \dots \circ f}^{n\text{個}} : X \rightarrow X$ と書く、

$0 \leq c < 1$ かつ、任意の $x, x' \in X$ について $d(f(x), f(x')) \leq c d(x, x')$ とするところを仮定する。このとき、 $d(f^n(x), f^n(x')) \leq c^n d(x, x') \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となる、

一意性 $a, b \in X$ が f の不動点ならば $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq c^n d(a, b) \rightarrow 0$ より $d(a, b) = 0$ 、つまりに、 $a = b$ 。

存在 $a \in X$ を任意にとり、 $a_n = f^n(a)$ とおく。このとき、 $m \leq n$ ならば

$$\begin{aligned} d(a_n, a_0) &\leq d(a_n, a_{n-1}) + d(a_{n-1}, a_{n-2}) + \dots + d(a_1, a_0) \\ &= d(f^{n-1}(a_1), f^{n-1}(a_0)) + d(f^{n-2}(a_1), f^{n-2}(a_0)) + \dots + d(a_1, a_0) \\ &\leq c^{n-1} d(a_1, a_0) + c^{n-2} d(a_1, a_0) + \dots + d(a_1, a_0) \\ &= (c^{n-1} + c^{n-2} + \dots + 1) d(a_1, a_0) \leq \frac{d(a_1, a_0)}{1-c}. \end{aligned}$$

$$d(a_n, a_m) = d(f^m(a_{n-m}), f^m(a_0)) \leq c^m d(a_{n-m}, a_0) \leq c^m \frac{d(a_1, a_0)}{1-c}.$$

ゆえに、 $m \leq n$, $m \rightarrow \infty$ のとき、 $d(a_n, a_m) \rightarrow 0$ 。

これで $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることがわかる。 X が完備ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある $a \in X$ に収束する。このとき、 $f(a) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$ のより $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(a) = a$ は f の不動点になる。

□

例 (Picardの逐次近似法, Picard iteration)

$X = C([a, b], \mathbb{R})$ は $\sup \|f\|_\infty$ について完備であった.

$f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($f(t, u)$ と書く) は次の条件をみたすと仮定する:

(Lipschitz条件) ある $K > 0$ が存在して, 任意の $t \in [a, b]$ と $u, v \in \mathbb{R}$ に対して,

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K|u - v|.$$

$a \in \mathbb{R}$ を固定し, 写像 $T: X \rightarrow X$ を $Tu(t) = a + \int_a^t f(s, u(s)) ds$ と定める.

このとき, $t \in [a, b]$, $u, v \in X$ について,

$$\begin{aligned} |Tu(t) - Tv(t)| &= \left| \int_a^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \right| \leq \int_a^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\ &\leq \int_a^t K|u(s) - v(s)| ds \leq \int_a^t K\|u - v\|_\infty ds = K(t-a)\|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

$$|T^2 u(t) - T^2 v(t)| \leq \int_a^t K|Tu(s) - Tv(s)| ds \leq \int_a^t K^2(s-a)\|u - v\|_\infty ds = K^2 \frac{(t-a)^2}{2!}\|u - v\|_\infty,$$

$$|T^3 u(t) - T^3 v(t)| \leq \int_a^t K|T^2 u(s) - T^2 v(s)| ds \leq \int_a^t K^3 \frac{(s-a)^2}{2!}\|u - v\|_\infty ds = K^3 \frac{(t-a)^3}{3!}\|u - v\|_\infty.$$

以下, 同様にして, $n = 0, 1, 2, \dots$ について次を示せる:

$$|T^n u(t) - T^n v(t)| \leq K^n \frac{(t-a)^n}{n!}\|u - v\|_\infty \leq \frac{K^n(b-a)^n}{n!}\|u - v\|_\infty.$$

$$\therefore \|T^n u - T^n v\|_\infty \leq \frac{K^n(b-a)^n}{n!}\|u - v\|_\infty$$

n を十分大きくすれば $0 \leq \frac{K^n(b-a)^n}{n!} < 1$ となり, $T^n: X \rightarrow X$ は縮小写像になる.

このことから, ゆえに, $T^n u = u$ をみたす $u \in X$ が唯一つ存在する.

$$\|Tu - u\|_\infty = \|T^{n+1}u - T^n u\|_\infty \leq \frac{K^n(b-a)^n}{n!}\|Tu - u\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ゆえに $Tu = u$ も成立している このとき,

$$u(t) = Tu(t) = a + \int_a^t f(s, u(s)) ds.$$

これは

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)), \quad u(a) = a$$

同値である. 以上のようにして, Lipschitz条件のもとで, 常微分方程式の初期値問題の解の一意存在を示せる.

□

例 上の例で $f(t, u) = A(t)u$, $[a, b] = [0, b]$ の場合に $T^n u(t)$ を求めよう.

$$\int_0^t g(s) ds \text{ を } \int_0^t ds g(s) \text{ と書く.}$$

$$Tu(t) = a + \int_0^t ds, A(s_1)u(s_1)$$

$$T^2 u(t) = a + \int_0^t ds_1 A(s_1) \left(a + \int_0^{s_1} ds_2 A(s_2) u(s_2) \right)$$

$$= a + \int_0^t ds_1 A(s_1) a + \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 A(s_1) A(s_2) u(s_2)$$

$$T^3 u(t) = a + \int_0^t ds_1 A(s_1) a + \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 A(s_1) A(s_2) a + \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 A(s_1) A(s_2) A(s_3) u(s_3)$$

.....

$$T^n u(t) = \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-2}} ds_{n-1} A(s_1) A(s_2) \dots A(s_{n-1}) \right) a + R_n$$

ここで、

$$R_n = \int_0^t ds_1 \int_0^{s_2} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-2}} ds_{n-1} \int_0^{s_{n-1}} ds_n A(s_1) A(s_2) \dots A(s_{n-1}) A(s_n) u(s_n).$$

$A(t)$ が「スカラーフィルムならば」 $0 \leq s_k \leq \dots \leq s_2 \leq s_1 \leq t$ の積分

$$\int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{k-1}} ds_k A(s_1) A(s_2) \dots A(s_k) = \frac{1}{k!} \left(\int_0^t A(s) ds \right)^k$$

なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n u(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_0^t A(s) ds \right)^k \right) a = e^{\int_0^t A(s) ds} a.$$

どうしてこうなるか
自分で考えてみよ.

この右辺をあらためて、 $u(t) = \exp\left(\int_0^t A(s) ds\right) a$ とおくと、 $Tu = u$ であり、

$$\frac{du(t)}{dt} = A(t) e^{\int_0^t A(s) ds} a = A(t) u(t), \quad u(0) = a.$$

□

例 $\frac{du(t)}{dt} = 2\sqrt{u(t)}$ ($t \geq 0$), $u(0) = 0$ という微分方程式を考える

$u(t) = 0$ ($t \geq 0$) または $u(t) = t^2$ ($t \geq 0$) も解になっている。 $a \geq 0$ について、

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq a) \\ (t-a)^2 & (a \leq t) \end{cases}$$

も解になっている。 $f(t, u) = 2\sqrt{u}$ ($t \geq 0, u \geq 0$) は Lipschitz 条件を満たしていない。□

文献 常微分方程式の初期値問題の解の一意性については次が基本文献である：

- ・岡村博『微分方程式序説』共立出版 (2003). □

コンパクト性の特徴付け

(この節のような長い証明はノートにくりかえし書くこと
によって理解が少しずつ進んで行くことが多い、ほこうだめ!)

定理 X は距離空間であるとする。このとき、以下の 3 条件は互いに同値である：

数年
かかる
場合が
ある!!!

(a) X はコンパクトである。

(b) X 内の任意の点列は収束する部分列を持つ。 ← 点列コンパクト性

(c) X は全有界かつ完備である。

証明 (a) \Rightarrow (b) X はコンパクト距離空間であるとし、 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 内の点列であるとする。

$A = \{x_n \mid n=1, 2, \dots\}$ が有限集合ならばある $d \in X$ が存在して無限個の n について $x_n = d$ となるので、そのような n に対する x_n の全体からなる部分列が必ず収束する。

$A = \{x_n \mid n=1, 2, \dots\}$ が無限集合ならば、 X のコンパクト性より、それは集積点 $\alpha \in X$ を持つ (19)。易しい

$n_1 < n_2 < \dots$ で $x_{n_k} \in U_{1/k}(\alpha)$ ($k=1, 2, \dots$) をみたすものを帰納的に構成しよう。

α は A の集積点なので $U_{1/1}(\alpha)$ はある x_n を含む。それを x_{n_1} とする。

$n_1 < n_2 < \dots < n_k$ で $x_{n_k} \in U_{1/k}(\alpha)$ をみたすものがすでに構成されていると仮定する。

もしも、ある $n > n_k$ で $x_n \in U_{1/(k+1)}(\alpha)$ をみたすものが存在しないとすると、 x_1, x_2, \dots, x_{n_k} の中で α 以外のものとの最短距離と $\frac{1}{k+1}$ の小さい方を ε とすると、 $U_{\varepsilon}(\alpha)$ は A の α 以外の点を含まなくな(り)、 α が A の集積点であることに反する。ゆえに、ある $n_{k+1} > n_k$ で $x_{n_{k+1}} \in U_{1/(k+1)}(\alpha)$ をみたすものとれる。

以上のようにして作った部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は $d(x_{n_k}, \alpha) < \frac{1}{k}$ をみたすので α に収束する。□

(b) \Rightarrow (c) (b) を仮定して、 X の完備性を示そう。 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 内の Cauchy 列であると仮定する。

(b) を仮定しているので、 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ である $\alpha \in X$ に収束するものが存在する。任意に $\varepsilon > 0$ をとる。 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列なので、ある N が存在して、 $n, n_k \geq N$ ならば $d(x_n, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$ となり、 $k \rightarrow \infty$ とすることによて、 $d(x_n, \alpha) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ を得る。これで $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束することを示せた。 X は完備である。

X が全有界でないならば (b) が成立しないことを示そう。 X が全有界でなければ、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、 X を有限個の $U_{\varepsilon}(x)$ でおおえるくなる。任意に $x_1 \in X$ をとる。

$x_2 \in X \setminus U_{\varepsilon}(x_1)$ がとれる。帰納的に $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{m=1}^n U_{\varepsilon}(x_m)$ ($n=1, 2, \dots$) をみたす X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を作れる。このとき、 $m < n$ ならば $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ となるので、 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列で Cauchy 列になるものを作れない。収束列は Cauchy 列なので $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束部分列も作れない。 X が全有界でないならば (b) は成立しない。これで (b) \Rightarrow (c) を示せた。

全有界 \Rightarrow 第2可算公理を示す

(c) \Rightarrow (a) X は全有界完備距離空間であるとする。 (a) を示したい。

X は全有界なので、各 $N=1, 2, \dots$ に対して、 X の有限部分集合 A_N で $X = \bigcup_{a \in A_N} U_{1/N}(a)$ をみたすものが存在する。 $B = \bigcup_{N=1}^{\infty} \{U_{1/N}(a) \mid a \in A_N\}$ とおく。

X の任意の開集合 U が B に含まれる開集合の和集合になることを示そう。そのためには任意の $x \in U$ に対して、ある B の元 $U_{1/N}(a)$ で $x \in U_{1/N}(a) \subset U$ をみたすものの存在を示せば十分である。任意に $x \in U$ をとる。 U は開集合なのである $\varepsilon > 0$ で $U_\varepsilon(x) \subset U$ をみたすものが存在する。 $\frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ となるように N をとれる。ある $a \in A_N$ で $x \in U_{1/N}(a)$ をみたすものが存在する。このとき、任意の $y \in U_{1/N}(a)$ について

$$d(y, x) \leq d(y, a) + d(a, x) < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \therefore y \in U_\varepsilon(x).$$

これで $x \in U_{1/N}(a) \subset U_\varepsilon(x) \subset U$ が示された。

$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は X の開被覆であるとする。各 U_λ は U_λ に含まれる B の元達でおおうことができる。 B は高々可算集合なので、どれかの U_λ に含まれる高々可算個の B の元たち $B_\lambda = U_{1/N_\lambda}(a_\lambda)$ ($a_\lambda \in A_{N_\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \dots$) で X をおおうことができる。

もしも $X = \bigcup_{k=1}^n B_{n_k}$ とできるならば $B_{n_k} \subset U_{\lambda_k}$ をみたす λ_k たちをえらべば $X = \bigcup_{k=1}^n U_{\lambda_k}$ となって (a) を示せたことになる。

ゆえに、有限個の B_λ たちで X をおおうことかできないと仮定して矛盾が得られれば証明が終まる。

このとき $X = \bigcup_{\lambda=1}^n B_\lambda$ と書ける

有限個の B_λ たちで X をおおうことかできないと仮定する。 $x_n \notin \bigcup_{\lambda=1}^n B_\lambda$ となるような X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ をとれる。 X の全有界性より、 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ で Cauchy 列になるものが存在する (24) で対角線論法を使って示した)。 X の完備性より、 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ はある $d \in X$ に収束する。

$X = \bigcup_{\lambda=1}^\infty B_\lambda$ より、ある m で $d \in B_m$ をみたすものが存在する。

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ は d に収束するので、ある K が存在して、 $k \geq K$ ならば $x_{n_k} \in B_m$ となる。

$n_k \geq k$ であることと、 $x_n \notin \bigcup_{\lambda=1}^m B_\lambda$ より $x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots \notin B_m$ となることに注意せよ。

ゆえに、 $k = \max\{m, K\}$ とおくと、 $k \geq K$ のときに $x_{n_k} \notin B_m$ となって上に矛盾する。

これでほい矛盾が得られたので証明が完了した。

q.e.d.

本質的に(24)の内容

注意 (c) \Rightarrow (b) は (24) の "系" ですべてに示していたことをここで注意しておく。 \square

定理 X が \mathbb{R}^n の距離部分空間であるとき、以下の条件は互いに同値である。

- (a) X はコンパクトである。
- (b) X 内の任意の点列は収束する部分列を持つ。
- (c') X は \mathbb{R}^n の有界閉集合である。

証明 前定理より、条件(c')が条件「(c) X は全有界完備であること」と同値であることを示せば十分である。

一般に全有界ならば有界であり、 \mathbb{R}^n の部分集合については逆も成立する (21) で示した。すなわち、 \mathbb{R}^n の部分集合 X について全有界性と有界性は同値である。

\mathbb{R}^n は完備である (25) で \mathbb{R}^n は任意のノルムについて完備で Banach 空間になることを示した)。ゆえに、 \mathbb{R}^n の距離部分空間 X について、完備性と \mathbb{R}^n の閉集合になることは同値である (24) で示した)。

これで (c') と (c) の同値性が示された。 □

注意 上の定理を距離空間論を経由せず直接証明できるようになっておくことが望ましい。例えば高木貞治『解析概論』第1章定理11 (Heine-Borelの被覆定理: \mathbb{R}^n の有界閉集合はコンパクトである) の証明を参照せよ。

距離空間論のように抽象化されていない \mathbb{R}^n 特有の議論にも慣れておくことは解析学の理解で役に立つ。

(19) で示した「 \mathbb{R} 内の閉区間はコンパクトである」の証明を高次元化すれば、 \mathbb{R}^n の有界閉集合がコンパクトであることを示せる。自分で色々考えてみよ。 □

Weierstrass の多項式近似定理

(29)

定理 (Weierstrass の多項式近似定理)

開区間 $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$) 上の任意の連続函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して,

多項式函数たち $\varphi_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ が " f に一様収束するものが存在する。

証明 (高木貞治『解析概論』第6章 §78 で紹介されているSerge Bernsteinの方法)

多項式 $\varphi_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ ($k=0, 1, \dots, n$) を Bernstein 多項式と呼ぶ。

ここで $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ は二項係数である。 ($\varphi_k(x)$ は二項分布における確率を表す。)

$$\boxed{1} \quad \sum_{k=0}^n \varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \stackrel{\text{二項定理}}{=} (x + (1-x))^n = 1. \quad \leftarrow (\text{全確率の和}) = 1$$

$$\boxed{2} \quad \sum_{k=0}^n k \varphi_{n,k}(x) = nx \text{ を示す。} \quad \stackrel{\text{二項定理より}}{=} 1$$

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = nx \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}}_{\text{期待値}} = nx, \quad \text{期待値} = nx$$

$$\boxed{3} \quad \sum_{k=0}^n k(k-1) \varphi_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 \text{ を示す。} \quad \stackrel{\text{二項定理より}}{=} 1$$

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 \underbrace{\sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k}}_{\text{二項定理より}} = n(n-1)x^2$$

$$\boxed{4} \quad \sum_{k=0}^n k^2 \varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \varphi_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^n k \varphi_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx \quad (\text{by } \boxed{2}, \boxed{3}).$$

$$\boxed{5} \quad \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 \varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n k^2 \varphi_{n,k}(x) - 2nx \sum_{k=0}^n k \varphi_{n,k}(x) + n^2 x^2 \sum_{k=0}^n \varphi_{n,k}(x) \quad \downarrow \text{by } \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{4}$$

$$= n(n-1)x^2 + nx - 2nx \cdot nx + n^2 x^2$$

$$= \cancel{n^2 x^2} - \cancel{n x^2} + nx - \cancel{2 n^2 x^2} + \cancel{n^2 x^2}$$

$$(分散) = nx(1-x) \quad \downarrow = nx(1-x).$$

$$x' = (1-x)a + x b = \overset{a \uparrow}{(b-a)x}$$

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続であると仮定する。

$g(x) = f((1-x)a + xb)$ とおくと、連続函数 $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ が定まり、 $f(x) = g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ 。
 f の代わりに g について定理を示せば十分である。

多項式 $g_n(x)$ を

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \varphi_{n,k}(x) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

と定める。 $g_n(x)$ が $[0, 1]$ 上の函数として、 $g_n(x)$ に一様収束することを示す。ついで

[6] $M = \max_{x \in [0,1]} |g(x)|$ とおく。 (22)より $\{|g(x)| \mid x \in [0,1]\}$ には最大値が存在する。)

$\varepsilon > 0$ を任意にとって固定する。

[7] (23)より, $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ は一様連続になる。ゆえに, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$x, y \in [0,1] \text{かつ } |x-y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

[8] 正の整数 N を十分大きくして, $\frac{M}{2N\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ となるようにしておき, $n \geq N$ と仮定する。
 $x \in [0,1]$ を任意にとって固定する。 (*)

[9]
$$g(x) - g_n(x) = \sum_{k=0}^n g(x) \varphi_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \varphi_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n (g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)) \varphi_{n,k}(x),$$

 $\varphi_{n,k}(x) \geq 0$ なので

$$|g(x) - g_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)| \varphi_{n,k}(x).$$

右辺の和を $|x - \frac{k}{n}| < \delta$ と $|x - \frac{k}{n}| \geq \delta$ の場合に分割する。

[10]
$$\sum_{|x - \frac{k}{n}| < \delta} |g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)| \varphi_{n,k}(x) < \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon}{2} \varphi_{n,k}(x) \stackrel{[1]}{=} \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\begin{cases} |x - \frac{k}{n}| \geq \delta \\ \Leftrightarrow (x - \frac{k}{n})^2 \geq \delta^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(k-nx)^2}{n^2 \delta^2} \geq 1 \end{cases}$$

[11]
$$\sum_{|x - \frac{k}{n}| \geq \delta} |g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)| \varphi_{n,k}(x) \stackrel{[6] \text{ より } |g(x)| \leq M}{\leq} 2M \sum_{|x - \frac{k}{n}| \geq \delta} \varphi_{n,k}(x) \leq 2M \sum_{k=0}^n \frac{(k-nx)^2}{n^2 \delta^2} \varphi_{n,k}(x)$$

$$\stackrel{[5]}{=} \frac{2M}{n^2 \delta^2} n x (1-x) \stackrel{0 \leq x \leq 1 \text{ で } x(1-x) \leq \frac{1}{4}}{\leq} \frac{M}{2n\delta^2} \stackrel{M}{\leq} \frac{M}{2N\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$
8

[12] 以上より, $n \geq N$ のとき, 任意の $x \in [0,1]$ について, $|g(x) - g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

これで, $[0,1]$ 上の多項式函数列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ が $g(x)$ に $[0,1]$ 上一様収束することがわかった。 \square

問題 $\max_{x \in [0,1]} \varphi_{n,k}(x) = \varphi_{n,k}\left(\frac{k}{n}\right)$ 且 $y = \varphi_{n,k}(x)$ のグラフの形が単峰型になることを実際に

グラフを描いて確認せよ。

注意 上の証明の [8] の (*) を見ればわかるように, $\|g - g_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |g(x) - g_n(x)|$ は

$O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ オーダーで小さくできることがわかる。この収束は全然速くない、もっと高速な多項式近似は $g(x)$ が C^∞ 級であるというような強い条件を課せば可能である。 Remez algorithm について調べてみよ、 $\sin x$ は数値計算では多項式近似で計算されている。 $(g_n(x)$ は高々 n 次多項式になる。) \square

距離空間の完備化

定義 X は距離空間であるとする。距離空間 \tilde{X} と写像 $i: X \rightarrow \tilde{X}$ の組が以下の 3 つの条件をみたすとき、 $(\tilde{X}, i: X \rightarrow \tilde{X})$ を X の 完備化 (completion) とする：

- (C1) \tilde{X} は完備距離空間である。
- (C2) $i: X \rightarrow \tilde{X}$ は等長写像である。 (注) 等長写像は単射になる。
- (C3) $i(X)$ は \tilde{X} において稠密 (ちゆうみつ) である。

$(\tilde{X}, i: X \rightarrow \tilde{X})$ が X の完備化のとき、 $i: X \rightarrow \tilde{X}$ を通じて、 $i(X)$ と X を同一視することが普通である。 $X \subset \tilde{X}$ とみなすとき、 \tilde{X} は X の完備化であるという。 \square

注意 距離空間の完備化が本質的に一意的に存在することを示せる。 \square

例 ①を $d(x, x') = |x - x'|$ によって距離空間とみなすとき、 \mathbb{R} と包含写像 $i: \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ の組は ①の完備化になっている。 \square

例 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ であるとする。 $\mathbb{R}[x]$ にノルム $\| \cdot \|_{L^\infty([a, b])}$
 $\|f\|_{L^\infty([a, b])} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (f(x) \in \mathbb{R}[x])$

によって定める。このとき、 $\mathbb{R}[x]$ はこのノルムによって距離空間とみなされる。

$C([a, b], \mathbb{R}) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ と多項式をそれに対応する $[a, b]$ 上の函数 f に対応させる写像 $i: \mathbb{R}[x] \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$ の組は $\mathbb{R}[x]$ の完備化になっていることが Weierstrass の多項式近似定理からみづひかれる。 \square

例 ⑤における体 K 上の形式べき級数環 $K[[x]]$ を x 進付値

$$|f| = \begin{cases} 0 & (f=0) \\ e^{-r} & (f = a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \dots, a_r \neq 0) \end{cases} \quad (\text{注 } e^{-\infty} = 0)$$

によって距離空間とみなしたものは完備である。このことから、 $K[[x]]$ は多項式環 $K[x]$ の完備化になっていることがみづひかれる。 \square

注意 $K((x)) = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i x^i \mid a_i \in K, \text{ある } r \in \mathbb{Z} \text{ が存在して, } a_i = 0 \ (i < r) \right\}$ を形式 Laurent 級数体 と呼ぶ。 x 進付値によると、 $K((x))$ は完備距離空間になり、有理函数体 $K(x)$ の完備化になっていることも示せる。これの ④での類似物が次に説明する p 進体 \mathbb{Q}_p である。 \square

例 (p 進体 \mathbb{Q}_p) p は素数であるとする. $0 \neq x \in \mathbb{Q}$ は

$$x = \pm p^N \frac{a}{b}, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad a, b \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad a, b \text{ は互いに素で } p \text{ で割り切れない}$$

と一意に表わされる. この記号のもとで, p 進付値 (p -adic valuation) $| \cdot |_p$ を

$$|x|_p = p^{-N}, \quad |0|_\infty = 0$$

と定める. $|\cdot|_p$ は次を満たしている: $x, y \in \mathbb{Q}$ について

$$|xy|_p = |x|_p |y|_p, \quad |x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} (\leq |x|_p + |y|_p).$$

ゆえに, \mathbb{Q} に (通常に絶対値に代わりに) p 進付値を使って

$$d_p(x, y) = |x-y|_p \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

と距離函数を定めることができ. 距離空間 (\mathbb{Q}, d_p) の完備化を \mathbb{Q}_p と書く.

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ は \mathbb{Q}_p の中で " p 進付値の意味で稠密" であり, \mathbb{Q} の体構造は自然に \mathbb{Q}_p に拡張されるので, \mathbb{Q}_p は p 進体 (p -adic field) と呼ばれる.

\mathbb{Q}_p は以下のように構成可能である.

$$(1) \mathbb{Q}_p := \left\{ \sum_{i=N}^{\infty} a_i p^i \mid a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, N \in \mathbb{Z} \right\}$$

の形の形式的な和全体

$$(2) x = \sum_i a_i p^i \in \mathbb{Q}_p \quad (a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}) \text{ に対して, } (\mathbb{Q}, d_p) \text{ における Cauchy 列 } \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ を}$$

$$x_k = \sum_{i \leq n} a_i p^i = \underbrace{\dots + a_{n-2} p^{n-2}}_{\text{有限和}} + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n \text{ と定めることができ.}$$

$x, y \in \mathbb{Q}_p$ の距離を $d_p(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_p(x_n, y_n)$ と定める. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad (x \in \mathbb{Q}_p)$,

(3) $x \in \mathbb{Q}$ に対する $\lambda(x) \in \mathbb{Q}_p$ を次のように定める. まず $\lambda(0) = 0$, $x \neq 0$ と仮定する.

x を $x = p^N y$ ($N \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Q}$, y は p で割り切れない整数たちの商) と表わす,

$a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ を $y \equiv a_N + a_{N+1} p + \dots + a_{N+k-1} p^{k-1} \pmod{p^k}$ という条件で定める.

$\lambda(x) = \sum_{i \leq N} a_i p^i$ と定める. 以下, $x \in \mathbb{Q}$ と $\lambda(x) \in \mathbb{Q}_p$ が同一視する.

$$\underline{\text{例}} \quad \frac{1}{1-p} = 1 + p + p^2 + \dots, \quad -1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \dots$$

$$(4) \mathbb{Q}_p \text{ の和, 差, 積を } x \pm y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n), \quad xy = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \text{ と定める.} \quad \square$$

参考文献 p 進体については, J.P.セール著『数論講義』(岩波書店)などを参照せよ. \square

例 (p 進整数環) 1つ前の例のつづき.

\mathbb{Q}_p の中での \mathbb{Z} の閉包を \mathbb{Z}_p と書き, p 進整数環と呼ぶ.

\mathbb{Z}_p は次のように表わされる:

$$\mathbb{Z}_p = \{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots \mid (a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}) \text{ の形式の和の全体}\}.$$

\mathbb{Q}_p は完備なので, その閉集合である \mathbb{Z}_p も完備になる.

\mathbb{Z}_p がコンパクトになることを示そう.

そのためには \mathbb{Z}_p が全有界であることを示せば十分である.

$N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を任意にとる. このとき, $a = a_0 + a_1 p + \dots + a_{N-1} p^{N-1} \quad (a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\})$ に対して,
 $x = a + a_N p^N + a_{N+1} p^{N+1} + \dots \in \mathbb{Z}_p$ の距離は p^{-N} 以下になる. ゆえに p^N 個の a に対する $\bigcup_{p^{-N+1}}(a)$ たちで \mathbb{Z}_p 全体をあおうことができる. p^{-N+1} はいくらでも小さくなりえるので \mathbb{Z}_p は全有界である.

これで \mathbb{Z}_p がコンパクトであることがわかった.

\mathbb{Z}_p は \mathbb{Q}_p の部分環であるので, \mathbb{Z}_p はコンパクトな位相環になっている. □

注意 以上の \mathbb{Q}_p と \mathbb{Z}_p は \mathbb{R} と共に整数論で基本的な役目を果たす,

各素数ごとに \mathbb{Q} は異なる完備化 \mathbb{Q}_p を持つ.

□

□

注意 以上のように完備化は, 実数論 ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$), 数論 ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$), 代数学 ($K(x) \subset K((x))$), 解析学 ($\mathbb{R}[x] \subset C([a, b], \mathbb{R})$) で役に立つ. 具体例を知っていることは抽象的な概念がどうやってどのように役に立ちそうかを理解するために役に立つ. □

□

完備化が本質的に一意的であること

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \tilde{\iota} & G & \uparrow \tilde{f} \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \end{array}$$

(完備化の普遍性)
universality

定理 $(\tilde{X}, \tilde{\iota}: X \rightarrow \tilde{X})$ は距離空間 X の完備化であるとし, $f: X \rightarrow Y$ は X から任意の完備距離空間 Y への一様連続写像であるとする。このとき, ある連続写像 $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y$ で $\tilde{f} \circ \tilde{\iota} = f$ を満たすものが一意に存在する。(以下, $\tilde{\iota}(x)$ と X を同一視する。)

① $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{2}}$

略証 任意の $\tilde{x} \in \tilde{X}$ に対して, X 内のある点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で \tilde{x} に収束するものが存在する。
 $f: X \rightarrow Y$ の 一様連続性より, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は Y における Cauchy 列になり, Y の完備性より収束する。

さらに $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ は \tilde{X} に収束する X 内点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のとり方によらないことを示せる。

したがって, $\tilde{f}(\tilde{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ で写像 $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y$ を定義できる。この \tilde{f} は一様連続で $\tilde{f} \circ \tilde{\iota} = f$ を満たしていることを示せる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

そのような \tilde{f} の一意性は, もしも存在するとしたら, 上の記号で $\tilde{f}(\tilde{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ とならなければいけないことからわかる

□

系 $(\tilde{X}_v, \tilde{\iota}_v: X \rightarrow \tilde{X}_v)$ ($v=1, 2$) は距離空間 X の完備化であるとする。このとき, 2つの等長写像 $\tilde{\iota}_2: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$, $\tilde{\iota}_1: \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ で互いに相手の逆写像になっているものが一意的に存在する。

略証 上の定理を $f = \tilde{\iota}_1, \tilde{\iota}_2$ の場合に適用すればよい。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{\iota}_1} & \tilde{X}_1 \\ \downarrow \tilde{\iota}_2 & G & \uparrow \tilde{\iota}_1 \\ \tilde{X}_2 & \xrightarrow{\tilde{\iota}_2} & \tilde{X}_1 \end{array}$$

□

完備化の存在

定理 任意の距離空間の完備化が存在する。

Cauchy 列を点とみなせれば
Cauchy 列の収束先の点を作れる
というアイデア

略証 距離空間 X における Cauchy 列全体の集合を C と書く。 C に同値関係 \sim を

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

と定めることができる。 $\tilde{X} = C / \sim$ とおき、 $\tilde{\iota}: X \rightarrow \tilde{X}$ を $\tilde{\iota}(x) = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$ と定める。

ここで $\{x\}_{n=1}^{\infty}$ は x, x, x, \dots と x だけがつづく点列である。 $[]$ は同値類を意味する。

\tilde{X} に距離函数を $d([x_n], [y_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ と定めることができる

$(\tilde{X}, \tilde{\iota}: X \rightarrow \tilde{X})$ が X の完備化であることを示せる。

□

参考文献

より詳しい説明については、内田一著『集合と位相』裳華房などを参照せよ。□