

# 位相数学 A (4/16 ①)

距離空間論 黒木 玄

成績は 期末の試験または  
レポート課題提出でつける。

→ ISTU に提出してもらう。  
毎週、1つ以上の証明または例  
についてよく考えること!

重

## 重要事項

- $\varepsilon$ - $N$  および  $\varepsilon$ - $\delta$
  - 開集合, 閉集合 ← 直観的な理解
  - コンパクト性 ←
  - 一様連続
  - 一様収束
  - 完備性
- これらは一般の位相空間  
ではあつかえない。  
距離空間ならあつかえる。

## 上限, 下限

上限の側のみを  
説明する。

$A \subset \mathbb{R}$ ,  $m, s \in \mathbb{R}$  とする。

$m$  が  $A$  の 上界  $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$  任意の  $x \in A$  に  
ついて  $x \leq m$ .

$s$  が  $A$  の 上限  $\stackrel{\text{def.}}{\iff} s$  は  $A$  の最小の上界。

上界も上限も存在するとは限らない。

$A$  は 上に有界  $\stackrel{\text{def.}}{\iff} A$  の上界が存在する。

実

A

A

sup

f

sup

x

## 実数の連続性 (の1つの表現)

空でない  $A \subset \mathbb{R}$  が上に有界ならば  
 $A$  の上限が存在する。

$A$  の上限が存在するとき,  $A$  の上限を  
 $\sup A$  と書く。

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$  について,  $f(X) \subset \mathbb{R}$  の上限を

$\sup_{x \in X} f(x)$  と書く。  $\{f(x) \mid x \in X\} \subset \mathbb{R}$   
← よく使う。

## 定理 上に有界な (広義) 単調増加

実数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  はある実数に収束  
する。 (証明略)  $\square$

## 上極限 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して,

実数列  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  を

$$c_n = \sup_{k \geq n} a_k = \sup \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$$

と定めると,  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  は  $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots$  となる。

$$b_n = \inf_{k \geq n} a_k \text{ とおくと, } b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が上下に有界ならば  $c_n$  と  $b_n$  も  
well-defined で,  $b_n \leq c_n$  となる。

$$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots \leq c_3 \leq c_2 \leq c_1$$

ゆえに, 次の極限が存在する:  $\swarrow$  下極限

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k (= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k (= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n) \end{cases}$$

上極限

上では次のようになっている。

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \leq \boxed{\phantom{0}} \leq c_n \leq \dots \leq c_2 \leq c_1$$

ここに  $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$   
が全部入っている。

もしも,  $n \rightarrow \infty$  で  $b_n$  と  $c_n$  が同じ値に収束した  
ならば,  $a_n$  も同じ値に収束する。つまり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n \iff \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ はそれと} \\ \text{同じ値に収束する。}$$

例

$$\text{例 } a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & (n \text{ は正の奇数}) \\ -1 - \frac{1}{n} & (n \text{ は正の偶数}) \end{cases} \text{ とおく。}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 + \frac{1}{1}, a_3 = 1 + \frac{1}{3}, a_5 = 1 + \frac{1}{5}, \dots \\ a_2 = -1 - \frac{1}{2}, a_4 = -1 - \frac{1}{4}, a_6 = -1 - \frac{1}{6}, \dots \end{cases}$$

$$\sup_{k \geq n} a_k = 1 + (n \text{ 以上の最小の奇数})^{-1}$$

$$\inf_{k \geq n} a_k = -1 - (n \text{ 以上の最小の偶数})^{-1}$$

$$\text{したがって, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = -1. \quad \square$$

問題 図を描いてみよう。  $\square$

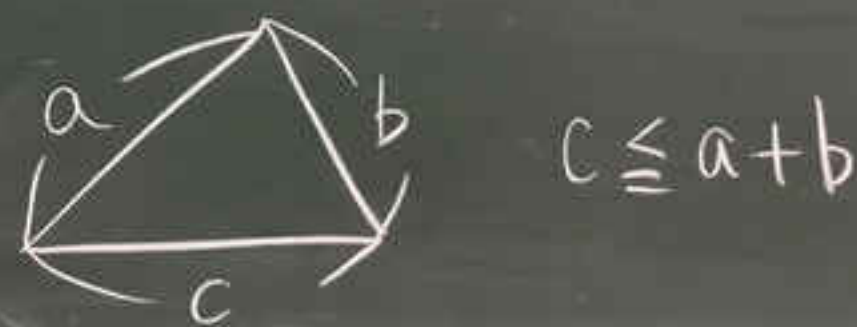


## 不等式の話

後で 三角不等式 が重要な役目を  
はたす。三角不等式たちがどこから

(1) 絶対値:  $|x+y| \leq |x|+|y|$

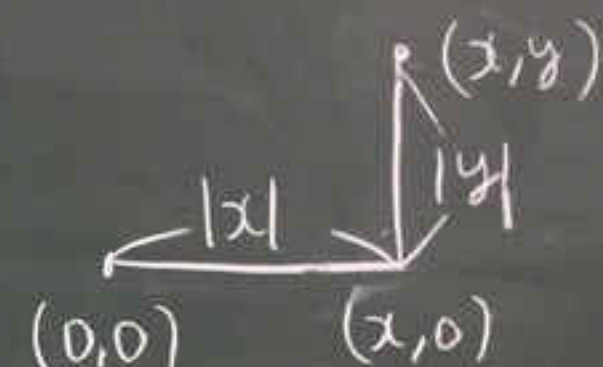
(2) 平面上での直線距離 (Euclid 距離):



$$c \leq a + b$$

$\mathbb{R}^2$  上の2つの点  $(0,0)$  と  $(x,y)$  の上の(3)の  
ような距離  $\|(x,y)\|_1$  を

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$$



と定めることができる。このとき、

$$\|(x,y) + (x',y')\|_1 = \|(x+x', y+y')\|_1$$

$$= |x+x'| + |y+y'|$$

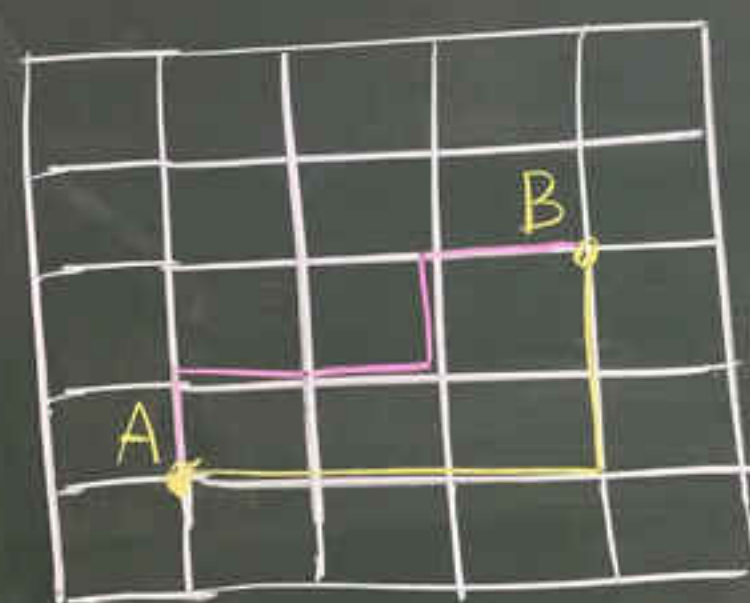
$$\leq |x| + |x'| + |y| + |y'|$$

$$= \|(x,y)\|_1 + \|(x',y')\|_1$$

三角不等式!

(3) 格子状に道のある町での  
みちのりの長さ、

← 正方格子



$$\left( \text{ } \right) \text{の長さ} = 5$$

$$\left( \text{ } \right) \text{の長さ} = 5$$

AとBの距離を 5 と定める、

この距離も三角不等式を満たしている。

の  
(x,y)  
|x|  
|y|  
0)

一般に  $p \geq 1$  について

$$\|(x,y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$$

は三角不等式を満たす。

これらの三角不等式は、Minkowskiの  
不等式の特別な場合になっている。

証明は Metric Spaces.pdf の ② の2ページ目  
にある。最新版を見ること。

## Jensen の不等式

函数  $f$  を実数  $E[f]$

に対応させる写像  $E[\cdot]$  は以下の条件  
を満たしているとする:  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  について、

(E1) 線形性:  $E[\alpha f + \beta g] = \alpha E[f] + \beta E[g]$

(E2) 単調性:  $f \leq g \Rightarrow E[f] \leq E[g]$

(E3) 規格化:  $E[1] = 1$

(たとえば  $E[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ )

期待値  
expectation  
value のイニシャル。

$f[f]$

件

たて、

$\beta E[g]$

期待値  
expectation  
value のイニシャル。

$f$  が区間  $I$  上の上に凸な函数のとき、

$$E[f(x)] \leq f(E[x]).$$

□

たとえば  $f(x) = \log x$  (← 上に凸) で

$$E[f] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (x_i > 0) \text{ のとき、}$$

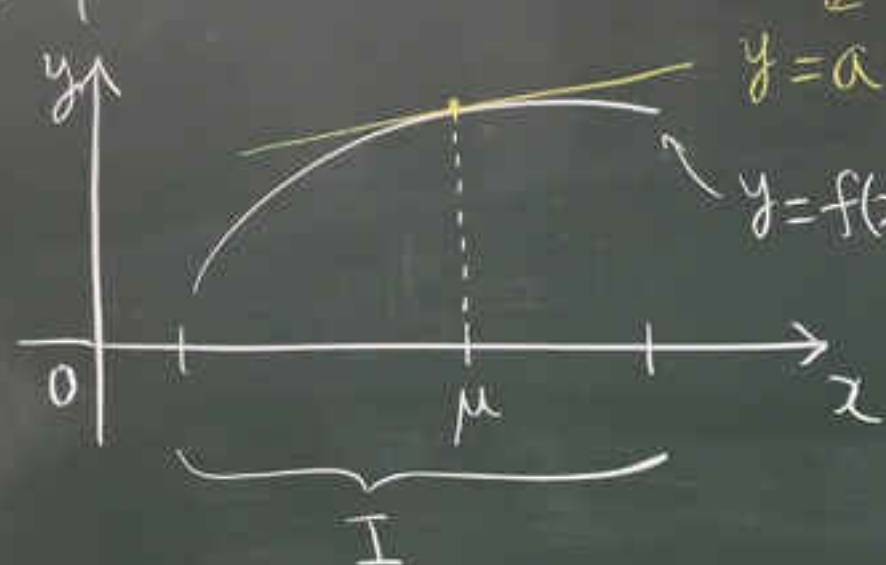
$$E[f(x)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i = \log(x_1 \cdots x_n)^{1/n}$$

$$f(E[x]) = \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \quad \text{上の Jensen の不等式より}$$

$$\therefore (x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

証明

$\mu = E[x]$  とおく。



$C^2$  級なら容易に  
接線の存在を示せる。

Y<sub>0</sub>

存在

示せる。

二

三

四

五

六

七

八

九

十

十一

十二

十三

十四

十五

十六

十七

十八

十九

二十

二十一

二十二

二十三

二十四

二十五

二十六

二十七

二十八

二十九

三十

三十一

三十二

三十三

三十四

三十五

三十六

三十七

三十八

三十九

四十

四十一

四十二

四十三

四十四

四十五

四十六

四十七

四十八

四十九

五十

五十一

五十二

五十三

五十四

五十五

五十六

五十七

五十八

五十九

六十

六十一

六十二

六十三

六十四

六十五

六十六

六十七

六十八

六十九

七十

七十一

七十二

七十三

七十四

七十五

七十六

七十七

七十八

七十九

八十

八十一

八十二

八十三

八十四

八十五

八十六

八十七

八十八

八十九

九十

九十一

九十二

九十三

九十四

九十五

九十六

九十七

九十八

九十九

一百

一百一

一百二

一百三

一百四

一百五

一百六

一百七

一百八

一百九

二百

二百一

二百二

二百三

二百四

二百五

二百六

二百七

二百八

二百九

三百

三百一

三百二

三百三

三百四

三百五

三百六

三百七

三百八

三百九

四百

四百一

四百二

四百三

四百四

四百五

四百六

四百七

四百八

四百九

五百

五百一

五百二

五百三

五百四

五百五

五百六

五百七

五百八

五百九

六百

六百一

六百二

六百三

六百四

六百五

六百六

六百七

六百八

六百九

七百

七百一

七百二

七百三

七百四

七百五

七百六

七百七

七百八

七百九

八百

八百一

八百二

八百三

八百四

八百五

八百六

八百七

八百八

八百九

九百

九百一

九百二

九百三

九百四

九百五

九百六

九百七

九百八

九百九

一千

一千一

一千二

一千三

一千四

一千五

一千六

一千七

一千八

一千九

二千

二千一

二千二

二千三

二千四

二千五

二千六

二千七

二千八

二千九

三千

三千一

三千二

三千三

三千四

三千五

三千六

三千七

三千八

三千九

四千

四千一

四千二

四千三

四千四

四千五

四千六



Hölder の不等式  $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  とする.

$$a_i, b_i \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}.$$

証明  $a_i, b_i > 0$  とする.

$$A_i = \frac{a_i}{\left( \sum_{j=1}^n a_j^p \right)^{1/p}}, \quad B_i = \frac{b_i}{\left( \sum_{j=1}^n b_j^q \right)^{1/q}} \text{ とおいて,}$$

$$\sum_{i=1}^n A_i B_i \leq 1 \text{ を示せばよい.}$$

とする.

$$\left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}.$$

Young の不等式より,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_i B_i &\leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{A_i^p}{p} + \frac{B_i^q}{q} \right) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{\sum_{j=1}^n a_j^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^q}{\sum_{j=1}^n b_j^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

□

Minkowski の不等式は来週やる.

つづく.