(b) 任意の点列が収束する部分列を持つ $\Rightarrow$ (c) 全有界かつ完備の証明

(b) を仮定する.

<u>Xの完備性</u>　$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 内の Cauchy 列であると仮定する.

(b) より, ある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ である $\alpha \in X$ に収束するものが存在する.

任意に $\varepsilon > 0$ をとる.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列なので, ある N が存在して, $m, n \geqq N$ ならば $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は α に収束しているので, ある K が存在して, $k \geqq K$ ならば $d(x_{n_k}, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$.

ある $k \geqq K$ で $n_k \geqq N$ となるものをとれる.

このとき, $m \geqq N$ ならば

$$d(x_m, \alpha) \leqq d(x_m, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これで $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ も α に収束することを示せた.

（注　Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$ をみたすので, ある部分列が α に収束しているならばもとの Cauchy 列も α に収束することは直観的には当然であろう.）

<u>Xの全有界性</u>　Xが全有界でないならば(b)に反することを示せばよい。

Xは全有界でないと仮定する。すなわち、ある$\varepsilon>0$が存在して、有限個の$U_\varepsilon(x)$たちでXをおおえないと仮定する。

帰納的に $x_n\in X\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}U_\varepsilon(x_i)$ $(n=1,2,\dots)$ をみたす $x_1,x_2,\ldots\in X$ を作ろう。

$X=\phi$ ならば X は全有界になるので $X\neq\phi$。任意に $x_1\in X$ をとる。

$x_k\in X\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}U_\varepsilon(x_i)$ $(k=1,\dots,n)$ をみたす $x_1,x_2,\dots,x_n\in X$ がすでにとれていると仮定する。このとき、εの取り方より、$X\neq\bigcup_{i=1}^{n}U_\varepsilon(x_i)$ となるので、ある $x_{n+1}\in X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}U_\varepsilon(x_i)$ をとれる。

これで $x_n\in X\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}U_\varepsilon(x_i)$ $(n=1,2,\dots)$ をみたすX内の点列$\{x_n\}_{n=1}^\infty$を作れた。

このとき、$m<n$ ならば $d(x_n,x_m)\geqq\varepsilon$ となるので、$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列でCauchy列を作れない。収束列はCauchy列なので、$\{x_n\}_{n=1}^\infty$の収束部分列を作れない。これは(b)に反する。

以上で (b) $\Rightarrow$ (c) を示せた。 $\square$