1 Movimiento

2 Movimiento bi y tridimensional

El desplazamiento será un vector con más de una componente distinta de cero:

$$\Delta\vec{r} = (\Delta x)\hat{x} + (\Delta y)\hat{y} + (\Delta z)\hat{z}. \tag{1}$$

Si el movimiento se restringe a un movimiento bidimensional una de las componentes del vector desplazamiento se anula. Por simplicidad, supondremos que $\Delta z = 0$. En esta situación la partícula se mueve a lo largo de una curva en el plano-xy.

Consideraremos que el desplazamiento del objeto en el intervalo Δt es $\Delta\vec{r}$. Si el intervalo de tiempo es finito, entonces es posible definir la **velocidad promedio** del movimiento en el plano-xy como:

$$\langle\vec{v}\rangle := \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{x} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{y} = \bar{v}_x\hat{x} + \bar{v}_y\hat{y}. \tag{2}$$

La magnitud del vector $\Delta\vec{r}$ es siempre la distancia entre los puntos P y Q, independiente de la trayectoria real efectuada por el móvil.

Si consideramos el límite en que el intervalo de tiempo tiende a cero podremos definir la **velocidad instantánea** como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{x} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{y} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}. \tag{3}$$

De esta forma la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria de la partícula en el plano-xy, en cada punto de la trayectoria.

2.1 Alcance horizontal y altura máxima en el lanzamiento de un proyectil con MUA en eje $\hat{y}$

En el lanzamiento de un proyectil la aceleración es (aproximadamente) constante e igual a la aceleración de gravedad, $\vec{g}$, que está dada por:

$$\vec{g} = -g\hat{y}. \tag{4}$$

Con $g \approx 9.8\,\mathrm{m/s^2}$. Por lo tanto, tenemos que

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2. \tag{5}$$

En este caso particular las expresiones para las componentes de la velocidad y posición se reducen a:

$$v_x = v_0 \cos\theta, \tag{6}$$

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt, \tag{7}$$

$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta)\, t, \tag{8}$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta)\, t - \frac{g}{2} t^2, \tag{9}$$

donde, por simplicidad, hemos supuesto que $t_0 = 0$.

La altura máxima se obtiene cuando la velocidad en el eje $\hat{y}$ se anula, es decir, en el tiempo

$$t_{\max} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}. \tag{10}$$

Evaluamos la ecuación para y en este tiempo, el resultado es:

$$y = y_0 + \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}. \tag{11}$$

El alcance, R, es la distancia que recorre la partícula hasta que alcanza el suelo, es decir, $y = 0$, lo que determina una ecuación cuadrática para el tiempo, cuyas soluciones son:

$$t = \frac{1}{g}\Big[v_0 \sin\theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gy_0}\Big]. \tag{12}$$

Sólo la solución positiva nos da el alcance máximo. Reemplazando este tiempo en la ecuación para x se obtiene:

$$R = x - x_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}\Big[1 + \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_0^2 \sin^2\theta}}\Big]. \tag{13}$$