

Lezione 6

Metodi Monte Carlo

<http://idefix.mi.infn.it/~palombo/didattica/Lab-TNDS/CorsoLab/LezioniFrontali>

Fernando Palombo

Stimatori Monte Carlo dell'Integrale

- ❑ Vogliamo calcolare l'integrale definito:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

- ❑ Consideriamo una sequenza di N punti casuali uniformemente distribuiti nell'intervallo [a,b] (**Uniform Sampling**). Il metodo Monte Carlo (MC) stima un valore approssimato dell'integrale utilizzando lo stimatore media (aritmetica):

$$\hat{I} = (b - a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

- ❑ Questo stimatore è non distorto e consistente. Al crescere di N il valore stimato tende al valore vero dell'integrale.

- ❑ La varianza dello stimatore della media è: $\sigma_{\bar{f}}^2 = \frac{\sigma_f^2}{N} = \frac{\bar{f}^2 - \bar{f}^2}{N}$

con $\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$ e $\bar{f}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^2(x_i)$

Stimatori Monte Carlo dell'Integrale

$\frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$ è detto **errore standard della media**. Quindi tenendo conto dell'errore il valore dell'integrale stimato dal metodo MC è:

$$I \approx (b - a) \bar{f} \pm (b - a) \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$$

□ Se volessimo calcolare un integrale di volume, il valore approssimato sarebbe : $I \approx V \bar{f} \pm V \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$

□ Notiamo che indipendentemente dalle dimensioni dello spazio di integrazione l'errore scala come $\frac{1}{\sqrt{N}}$

□ Nell'integrazione numerica (con N passi) :
dimensione spazio = 1 \rightarrow formula trapezi $\frac{1}{N^2}$ e Simpson $\frac{1}{N^4}$
dimensione spazio = d \rightarrow formula trapezi $\frac{1}{N^{2/d}}$ e Simpson $\frac{1}{N^{4/d}}$

Stimatori Monte Carlo dell'Integrale

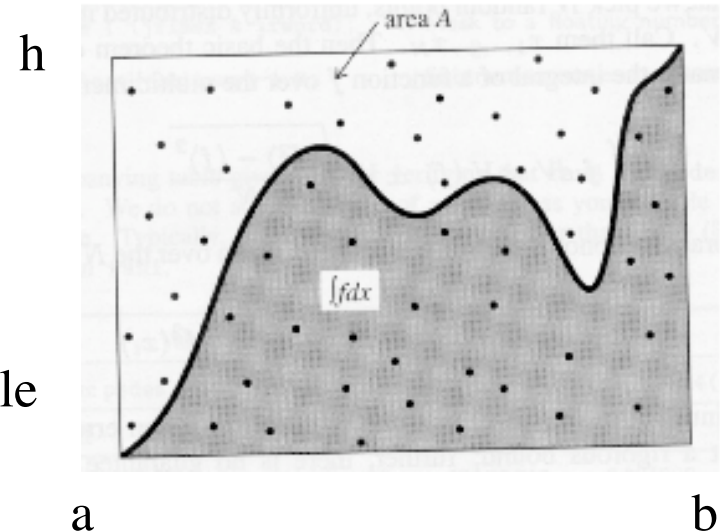
- ❑ Per avere una idea quantitativa: Se uno considera un numero di punti = 5 (un numero di soglia molto basso !!) in un integrale ad 1 dimensione, allora in un integrale in 10 dimensioni devo avere almeno 5^{10} (circa 10 milioni di punti nella formula dei trapezi !)
- ❑ Ma 5 punti sono in genere troppo pochi.
- ❑ Nelle stime MC degli integrali l'incertezza sulla misura dell'integrale scala come la radice quadrata del numero di punti N .
- ❑ Per integrazioni su spazi di dimensione ≤ 5 le integrazioni numeriche sono generalmente da preferire
- ❑ Le stime MC sono da preferire quando si è in spazi di dimensioni maggiori (≥ 5) ed anche in presenza di funzioni integrande particolarmente complesse!

Incertezza nella Stima dell'Integrale

- ❑ La precisione della stima MC dell'integrale può essere migliorata ripetendo il calcolo approssimato diverse volte con sequenze diverse di punti e poi prendendo la media dei valori ottenuti per l'integrale e la media degli errori dei valori degli integrali ottenuti.
- ❑ Tenere presente che nel metodo MC l'errore stimato sull'integrale è di tipo probabilistico. Esso rappresenta una deviazione standard sulla media ($\pm 1 \sigma = 68.3 \%$) mentre nel caso dell'integrazione numerica noti i valori massimi delle derivate è possibile dare un valore esatto al massimo dell'errore che commettiamo nella quadratura.
- ❑ Che l'errore sulla stima dell'integrale scali come l'inverso della radice quadrata di N **non è gran che !** $\frac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$
Ma la varianza sulla funzione f può essere diminuita (come vedremo)

Integrazione MC con hit or miss

- ❑ Area del rettangolo $A = (b-a) h$
- ❑ Scelgo un numero r_i casuale distribuito uniformemente tra 0 e 1 $\rightarrow x_i = a + (b-a) r_i$
- ❑ Per ogni x_i scelgo un secondo numero casuale u_i tra 0 e 1 e considero $y_i = u_i h$.



- ❑ Sia N il numero di punti considerati e N_s quelli tra questi N in cui y_i è minore o uguale a $f(x_i)$. Il valore approssimato dell'integrale è

$$I_n = A N_s / N$$

- ❑ Il metodo si generalizza ad integrali multidimensionali. L'efficienza può essere migliorata scegliendo opportunamente la figura in cui inscrivere la superficie (o il volume ecc) su cui si sta calcolando l'integrale!

Stima dell' Errore nell' Integrazione MC con Hit or Miss

□ L'errore standard su questa media è $\sigma_{\bar{f}} = \sqrt{\frac{\overline{f^2} - \bar{f}^2}{N}}$ $\bar{f} = \overline{f^2} = \frac{N_s}{N}$

$$\sigma_{\bar{f}} = \sqrt{\frac{(N_s/N) - (N_s/N)^2}{N}} = \sqrt{\frac{N_s - N_s^2/N}{N^2}} = \frac{\sqrt{N_s - N_s^2/N}}{N}$$

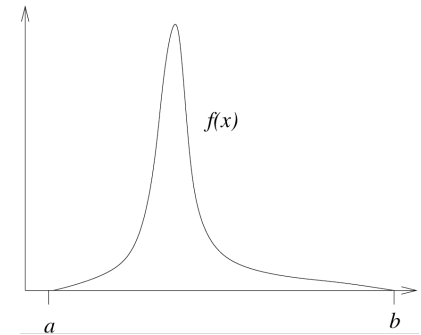
$$I = (b-a)h \frac{N_s}{N} \pm (b-a)h \frac{\sqrt{N_s - N_s^2/N}}{N}$$

□ Se $N_s \ll N$ $\rightarrow I = (b-a)h \frac{N_s}{N} \pm (b-a)h \frac{\sqrt{N_s}}{N}$ (N_s variabile poissoniana)

□ Tutto ciò vale indipendentemente dalle dimensioni dell'integrale (se per esempio è un integrale di volume, allora $(b-a)h \rightarrow V$ ed il resto non cambia)

Importance Sampling

- ❑ Il vantaggio enorme dell'integrazione MC è che scala come $\frac{1}{\sqrt{N}}$ indipendentemente dalle dimensioni dell'integrale.
- ❑ La velocità di convergenza è relativamente lenta però. Ci sono diversi metodi per ovviare a ciò e diminuire l'errore sulla stima.
- ❑ Questo può essere fatto diminuendo la varianza su f
- ❑ Con campionamento uniforme una gran parte dei punti di campionamento è fuori dall'area di integrazione.
- ❑ Le cose andrebbero molto meglio se la funzione da integrare fosse più piatta!! In questo caso la varianza diminuirebbe.
- ❑ Possiamo pensare di cambiare la variabile di integrazione in modo da integrare una funzione il più piatta possibile con la condizione che sappiamo poi tornare indietro per stimare l'integrale di partenza



Importance Sampling

❑ Si debba calcolare l'integrale definito della funzione $f(x)$ $I = \int_a^b f(x)dx$

❑ Consideriamo una “opportuna” funzione $p(x)$ **a valori positivi** e normalizzata ad 1 tra a e b :

$$\int_a^b p(x)dx = 1$$

❑ In questo modo la funzione $p(x)$ può essere pensata come una pdf

❑ Il nostro integrale (con un cambiamento di variabile) può essere riscritto così:

$$I = \int_a^b \frac{f(x)}{p(x)} (p(x)dx)$$

Importance Sampling

- ❑ La stima MC di questo integrale è semplicemente :

$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)}$$

dove i punti di campionamento x_i sono **scelti secondo la pdf $p(x)$**

- ❑ L deviazione standard della funzione $f(x)/p(x)$ è data da:

$$\sigma_{f/p} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{f(x_i)}{p(x_i)} \right)^2 - I^2}$$

- ❑ L'incertezza statistica sul calcolo dell'integrale è data dall'errore standard della media:

$$\frac{\sigma_{f/p}}{\sqrt{N}}$$

Importance Sampling

- ❑ La funzione $p(x)$ va scelta in modo opportuno. Se fosse piatta (distribuzione uniforme) allora $p(x) = 1/(b-a)$ e si otterrebbe il risultato già visto per il campionamento uniforme.
- ❑ La funzione $p(x)$ deve essere il più possibile vicina a $|f(x)|$ nella forma in modo che il rapporto $f(x)/p(x)$ sia il più piatto possibile e anche tale da avere basso costo computazionale.
- ❑ La cosa quasi ovvia sarebbe di prendere $p(x)$ proporzionale a $f(x)$ (se questa è a valori positivi) **$p(x) = C f(x)$** ma questo non è possibile. Essendo $p(x)$ una pdf allora si dovrebbe avere $p(x) = f(x)/I$
- ❑ Notiamo che noi non conosciamo I (altrimenti non avremmo bisogno di alcuna integrazione!) . Di conseguenza non possiamo campionare punti secondo $f(x)/I$

Importance Sampling

- ❑ Vediamo di chiarire con un esempio calcolando con questo metodo l'integrale

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

- ❑ La funzione integranda per x da 0 ad 1 decresce da 1 ad $1/e$ proprio come la funzione e^{-x} . Quindi scelgo questa come funzione $p(x)$. Normalizziamo ad 1 questa funzione:

$$\int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 1 = \frac{e-1}{e}$$

- ❑ $p(x)$ normalizzata : $p(x) = \frac{e}{e-1} e^{-x}$

- ❑ So simulare numeri casuali distribuiti secondo un esponenziale (metodo della trasformata)

Importance Sampling

- ❑ Sequenza di numeri casuali $x(r)$ distribuiti secondo la $p(x)$ sono dati da:

$$x(r) = -\log\left(1 - \frac{e-1}{e}r\right) \quad \text{dove } r \text{ è un numero distribuito uniformemente tra 0 e 1}$$

- ❑ Quindi genero N numeri x_i di questa sequenza e per ognuno di questi calcolo $f(x_i)$ e $p(x_i)$ e quindi uso questi valori nell'estima MC dell'integrale.
$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)}$$

- ❑ Per la stima dell'incertezza su I calcolo la deviazione standard di $f(x)/p(x)$

$$\sigma_{f/p} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{f(x_i)}{p(x_i)} \right)^2 - I^2}$$

- ❑ L'incertezza sul valore medio si ottiene dividendo questa quantità per la radice quadrata di N

Importance Sampling

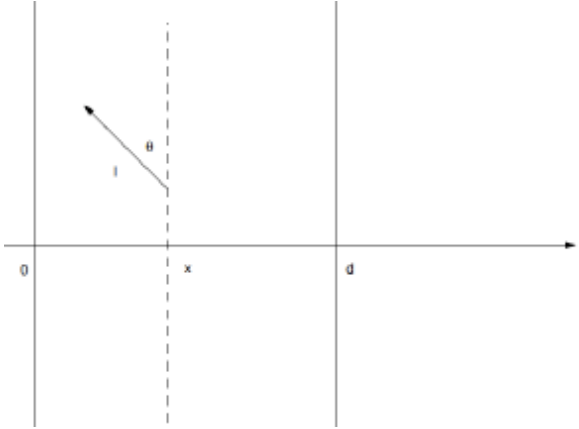
- ❑ Se non si può usare il metodo della trasformata per generare numeri secondo la pdf $p(x)$, allora si può usare il metodo hit or miss.
- ❑ Comunque è chiaro che la $p(x)$ va scelta anche sulla base che sia semplice e a basso costo computazionale la generazione di sequenze con questa pdf.
- ❑ Nella scelta della funzione $p(x)$ bisogna tener conto dell'andamento delle code delle distribuzioni. Se per esempio la funzione $p(x)$ va a zero molto più rapidamente della funzione $f(x)$, valori della funzione $f(x)$ lontano nelle code avranno un peso molto elevato nella determinazione del valore medio e questo crea una coda nella distribuzione dei valori dell'integrale.
- ❑ Per lo stesso motivo bisogna evitare funzioni $p(x)$ che in qualche punto sono nulle o tendono rapidamente a zero.

Vediamo ora una applicazione di questi metodi di integrazione con tecnica Monte Carlo ([/Applicazioni-Web/MCIntegration/](#))

Simulazione di Esperimenti

- ❑ Gli esperimenti devono essere progettati in modo tale da essere in grado di riuscire a fare la fisica per la quale sono stati progettati. Spesso devono migliorare risultati già presenti in letteratura.
- ❑ Per fare questo bisogna simulare l'apparato sperimentale e ottimizzarlo (scelta dei tipi di sottorivelatori, della geometria, ecc). Spesso le opzioni per lo stesso sottorivelatore sono diverse. Bisogna decidere quale opzione è la migliore.
- ❑ E non solo dal punto di vista della Fisica ma anche dal punto di vista dei costi. Quindi un costo molto maggiore va giustificato con la possibilità di un risultato molto migliore, di meno rischi durante la presa dati, ecc .
- ❑ Per studiare il comportamento dell'apparato devo simulare eventi. Anche questi li simulo con tecniche MC. Analizzo le possibili sorgenti di incertezze sistematiche, studio i bias, gli effetti di risoluzione finita dell'apparato, ecc

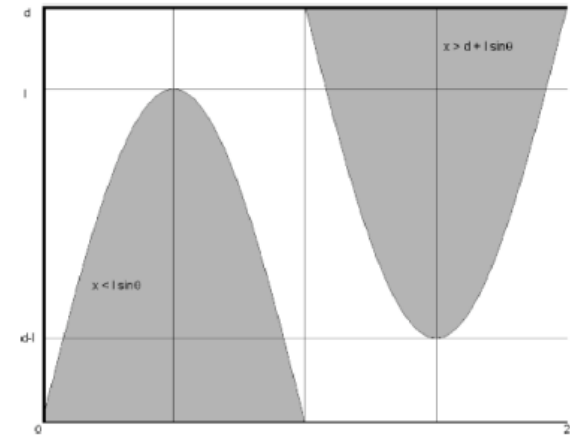
Esperimento dell'ago di Buffon

- ❑ Idea geniale (di Georges Louis Buffon, fine XVIII sec) per misurare manualmente il valore di π greco
 - ❑ Si consideri una tavola con su incise linee parallele a distanza d l'una dall'altra. Sulla tavola lanciamo un ago di lunghezza $l < d$ (in modo che non possa intersecare più di una linea). Vogliamo determinare qual è la probabilità che l'ago intersechi una linea (con x e θ scelti a caso tra le due linee consecutive)
- 
- ❑ L'ago interseca una linea nei due casi:
 - 1) contemporaneamente $x < l$ e $l \sin \theta > x$
 - 2) contemporaneamente $x > d-l$ e $l \sin (2\pi - \theta) > d-x$ ($\pi < \theta < 2\pi$)
 - ❑ Le regioni in cui si verifica l'evento sono quelle tratteggiate nella figura della prossima slide

Esperimento dell'ago di Buffon

- ❑ L'area di ognuna delle due figure tratteggiate è data dall'integrale

$$\int_0^{\pi} l \sin \theta d\theta = 2l$$



- ❑ La probabilità p che si verifichi l'evento successo è data dal rapporto dell'area tratteggiata A (pari a 4l) e l'area dello spazio campione S (pari a 2πd):

$$p = 2l/\pi d \quad \text{[semplicemente il rapporto di una area tratteggiata e metà dello spazio campione } (0 < \theta < \pi) \text{]}$$

- ❑ Invece che lanciare l'ago e contare manualmente la frazione di volte in cui l'ago interseca la linea, la probabilità p si può ottenere integrando l'area tratteggiata con un metodo MC [ad esempio col metodo della accettazione-reiezione (hit or miss)]

Esperimento dell'ago di Buffon

- Siano d ed l i valori scelti per la distanza tra righe consecutive e per la lunghezza dell'ago e realizziamo N esperimenti simulati (MC) in ognuno dei quali estraiamo due numeri casuali con distribuzione uniforme, x tra 0 e d e θ tra 0 e π .
- Sia N_s il numero di eventi che si trovano sotto la curva tratteggiata e che sono accettati. La probabilità che l'ago intersechi una linea è data da N_s/N e quindi ottengo la stima del valore del pi greco da:

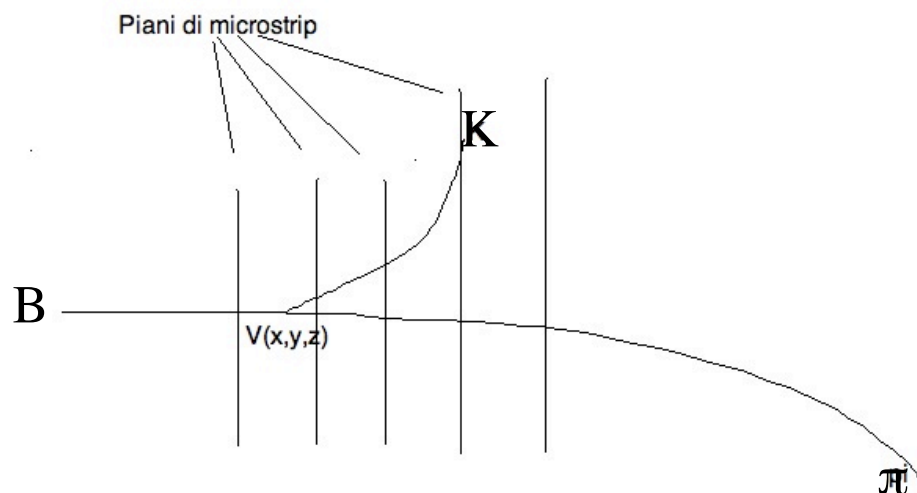
$$\pi \sim \frac{2l}{d} \frac{N}{N_s}$$

- L'incertezza statistica su questa stima è ottenuta dall'incertezza sulla probabilità N_s/N .
- Si può studiare come varia la stima di π e della sua incertezza al variare di l ($l < d$) e al variare del numero N di esperimenti simulati. La stima di π col metodo dell'ago di Buffon è **molto inefficiente!**

Esercizio: stimare π a partire dall'area di un cerchio inscritto in un quadrato

Un Esperimento Semplificato

- Supponiamo di voler misurare la vita media di una particella che decade in volo. Per esempio un mesone B che decade in un mesone K e un mesone π . La vita media del mesone B la posso dedurre da misure dei vertici di decadimento del B.



- Dalla misura dei vertici di decadimento in un rivelatore a microstrip è possibile risalire alla vita media della particella. In presenza di un campo magnetico posso usare le informazioni date dalle microstrip per ottenere gli impulsi delle particelle K e π e da questi risalire al vertice di decadimento del B.

- Qui ci limitiamo (in modo semplificato) solo al problema della ricostruzione delle traiettorie delle particelle e del vertice di decadimento (non tenendo conto per esempio del problema di identificazione delle due particelle).

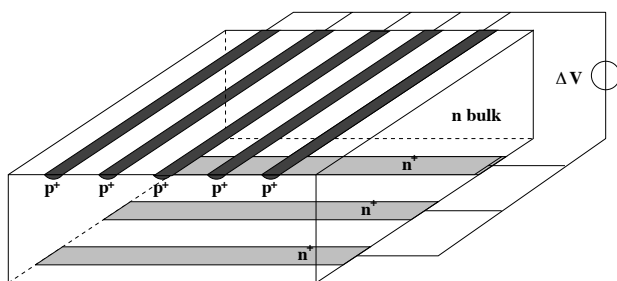
Come facciamo a simulare un evento con un MC?

Un Esperimento Semplificato

- ❑ La pdf di un decadimento in volo di una particella è quella esponenziale. Un possibile vertice (supposto essere sull'asse x) lo posso simulare con la formula: $x(r) = -\xi \log r$, con r numero uniformemente distribuito tra 0 e 1 e con ξ vita media della mia particella B
- ❑ ξ è una quantità che è stata misurata da altri in precedenza oppure ha un valore suggerito dalla teoria. Se non so niente faccio qualche supposizione e simulo esperimenti con diversi valori di ξ .
- ❑ Generato il vertice $V(x,y,z)$ faccio decadere in questo punto il mesone B (di cui conosco la quantità di moto) nelle due particelle K e π . A queste particelle assegno quantità di moto che rispettino le leggi di conservazione di energia e quantità di moto). Genero così (p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}) e (p_{2x}, p_{2y}, p_{2z}) delle due particelle K e π .
- ❑ Io devo ora ricostruire l'evento così generato con il mio rivelatore (apparato sperimentale) in modo da estrarre la vita media ξ

Un Esperimento Semplificato

- ❑ Poiché conosco il vertice di decadimento e le quantità di moto del mesone B e delle due particelle K e π posso calcolarmi le traiettorie di queste particelle e simulare l'interazione con i rivelatori a microstrip (codice di trasporto)



- ❑ In figura lo schema di un rivelatore al silicio doppio strato a piani ortogonali. Una particella carica passando attraverso una striscia produce coppie $e^+ e^-$ e quindi lascia un segnale che viene letto. L'informazione ci dice che una particella carica è passata attraverso quella striscia

- ❑ Non sapendo dove è realmente passata la particella assumiamo una distribuzione uniforme e assegniamo alla particella come coordinata il valore centrale della striscia e come incertezza la larghezza d della striscia diviso la radice quadrata di 12. Ogni doppio strato permette di determinare le coordinate (x, y) della particella che ha attraversato il doppio strato.
- ❑ Supponiamo che il nostro tracciatore di vertice al silicio abbia per esempio 5 doppi strati.

Un Esperimento Semplificato

- ❑ Utilizzo l'informazione dei piani di microstrip (cioè l'insieme delle 5 coordinate (x,y) sui vari piani di microstrip) per ricostruire le tracce delle due particelle (pattern recognition) e quindi dalla curvatura delle tracce calcolare le quantità di moto delle due particelle $(p_{1x}', p_{1y}', p_{1z}')$ e $(p_{2x}', p_{2y}', p_{2z}')$ ricostruite dall'apparato.
- ❑ Con un fit al vertice di tutte le tracce ricostruite mi determino il vertice di decadimento $V'(x,y,z)$
- ❑ Simulo molti eventi di decadimento e per ognuno di questi ricostruisco il vertice di decadimento. L'istogramma dei vertici ricostruiti viene fittato con una curva esponenziale ottenendo così il valore misurato della vita media ξ'
- ❑ Si noti che sono partito col fissare il valore di ξ , generare il vertice $V(x,y,z)$ e le quantità di moto (p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}) e (p_{2x}, p_{2y}, p_{2z}) (tutti questi sono i valori **veri** nel MC) e dopo la ricostruzione nell'apparato ottengo i valori MC $V'(x,y,z)$, $(p_{1x}', p_{1y}', p_{1z}')$, $(p_{2x}', p_{2y}', p_{2z}')$ e ξ' misurati nell'apparato.

Un Esperimento Semplificato

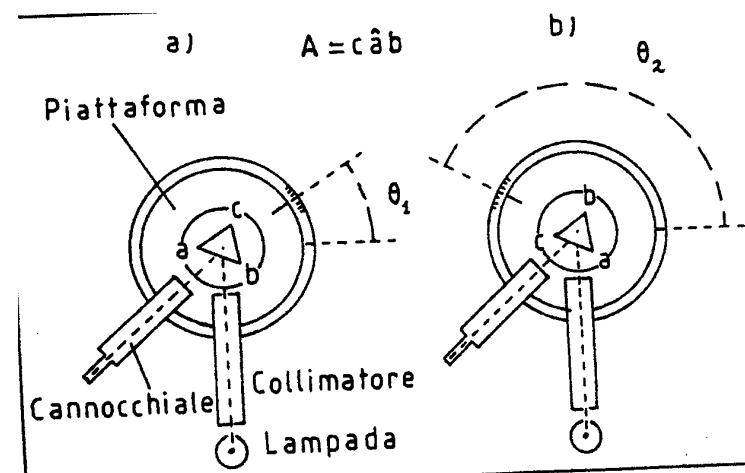
- ❑ Questi effetti di distorsione sono dovuti alla **risoluzione finita** dell'apparato. In un rivelatore (**ideale**) a risoluzione infinita il valore di una quantità misurata coincide col valore vero
- ❑ Poiché gli eventi MC seguono la stessa catena di ricostruzione degli eventi reali, questi subiscono effetti di distorsione simili a quelli degli eventi MC.
- ❑ Quindi io simulo eventi MC, studio su questi eventi l'effetto dell'apparato e poi da questo studio imparo come correggere i dati e come devo ottimizzare il rivelatore (per esempio numero di piani di microstrip per avere una buona efficienza di ricostruzione, la larghezza delle strisce, la distanza tra i piani, ecc.), eventualmente se cambiare tipo di rivelatore, ecc (controllo dati/MC)
- ❑ Questi eventi simulati poi mi sono molto utili nell'analisi dei dati per l'analisi delle correlazione tra le variabili in gioco, calcolo di efficienze, per la validazione dei vari fit, per lo studio della bontà del fit, ecc.

Esperienza del Prisma

- ❑ Nella esperienza del prisma si studia la dipendenza dell'indice di rifrazione di un materiale dalla lunghezza d'onda (fenomeno della dispersione).
- ❑ Questa dipendenza è data in buona approssimazione dalla formula di Cauchy:

$$n^2(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

- ❑ Si misura l'indice di rifrazione per alcune righe emesse nel visibile da un tubo Plucker a vapori di mercurio
- ❑ Nella esperienza di laboratorio si verifica questa legge e si estraggono i valori di A e B caratteristici del materiale



Misura degli indici di rifrazione

□ Data una riga di lunghezza d'onda λ emessa dal tubo di Plucker, nell'apparato vengono misurate:

- 1- la posizione della riga al minimo di deflessione $\theta_m(\lambda)$
- 2- la posizione del fascio non deflesso θ_0 in assenza del prisma

□ L'angolo di deflessione minima $\delta_m(\lambda)$ è dato da:

$$\delta_m(\lambda) = \theta_m(\lambda) - \theta_0$$

□ Si noti che θ_0 non dipende dalla lunghezza d'onda della linea considerata ed è arbitrario.

□ L'indice di rifrazione $n(\lambda)$ è legato all'angolo di deflessione minima $\delta_m(\lambda)$ e all'angolo α di apertura del prisma dalla relazione :

$$n(\lambda) = \frac{\sin \frac{\delta_m(\lambda) + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad ****$$

Simulazione di Esperienza del Prisma

- ❑ Vediamo come possiamo simulare eventi MC nel caso della esperienza del prisma.
- ❑ In questo caso molto semplice non c'è un apparato da progettare, ottimizzare , da calibrare. Lo strumento di misura è già pronto per fare misure. Noi vogliamo vedere come sia possibile **simulare** con tecnica MC misure su questo strumento e utilizzare gli eventi simulati per verificare le ipotesi di partenza, studiare le caratteristiche degli eventi, verificare modelli teorici, controllare se l'analisi dei dati (procedure adottate e fit) è corretta, ecc
- ❑ Definisco i valori veri o supposti veri e aspettati dal mio modello teorico (in questo caso la formula di Cauchy) da usare nella simulazione MC:
 - $\alpha_{\text{vero}} = \pi/3$ rad angolo di apertura del prisma
 - $A_{\text{vero}} = 2.7$ e $B_{\text{vero}} = 6 \cdot 10^4 \text{ nm}^2$ sono i valori che nel mio apparato mi aspetto per i coefficienti A e B della formula di Cauchy.
 - $\theta_{0\text{vero}}$ è arbitrario e lo fisso uguale a $\pi/4$

Simulazione di Esperienza del Prisma

- ❑ Per una **data** riga di lunghezza d'onda λ l'indice di rifrazione vero (aspettato dal nostro modello) è :

$$n_{vero}(\lambda) = \sqrt{A_{vero} + \frac{B_{vero}}{\lambda^2}}$$

- ❑ Fissati i valori veri $n_{vero}(\lambda)$ e α_{vero} dalla formula *** posso ricavarvi il valore vero (aspettato) dell'angolo di deflessione minima $\delta_{mvero}(\lambda)$
- ❑ $\theta_{mvero}(\lambda) = \delta_{mvero}(\lambda) + \theta_{0vero}$
- ❑ Fissati i valori MC veri (che sono valori iniziali in ingresso nel MC) devo ora introdurre le incertezze dovute alla procedura di misura.
- ❑ Tutte le mie misure angolari col prisma sono affette da incertezze gaussiane con deviazione standard σ_0 di 0.3 mrad. Le misure MC α_{MC} , θ_{0MC} e $\theta_{mMC}(\lambda)$ le estraggo da distribuzioni gaussiane centrate su α_{vero} , θ_{0vero} e $\theta_{mvero}(\lambda)$ e con $\sigma = 0.3$ mrad.

Simulazione degli indici di rifrazione

- ❑ Dai valori MC simulati mi determino il valore di $\delta_{mMC}(\lambda)$ e sostituendo le quantità MC simulate nella formula dell'indice di rifrazione ottengo il valore simulato $n_{MC}(\lambda)$
- ❑ Per ogni riga di lunghezza d'onda λ emessa emessa da un tubo Plucker posso simulare tanti **esperimenti MC** in ognuno dei quali simulo i valori MC, posso istogrammare le quantità simulate e ottenere i loro valori medi e le deviazioni standard
- ❑ Posso anche propagare le incertezze da α e $\delta m(\lambda)$ a $n(\lambda)$:

$$\sigma_{n(\lambda)} = \sqrt{\left(\frac{\partial n(\lambda)}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_{\alpha}^2 + \left(\frac{\partial n(\lambda)}{\partial \delta_m(\lambda)}\right)^2 \sigma_{\delta_m(\lambda)}^2}$$

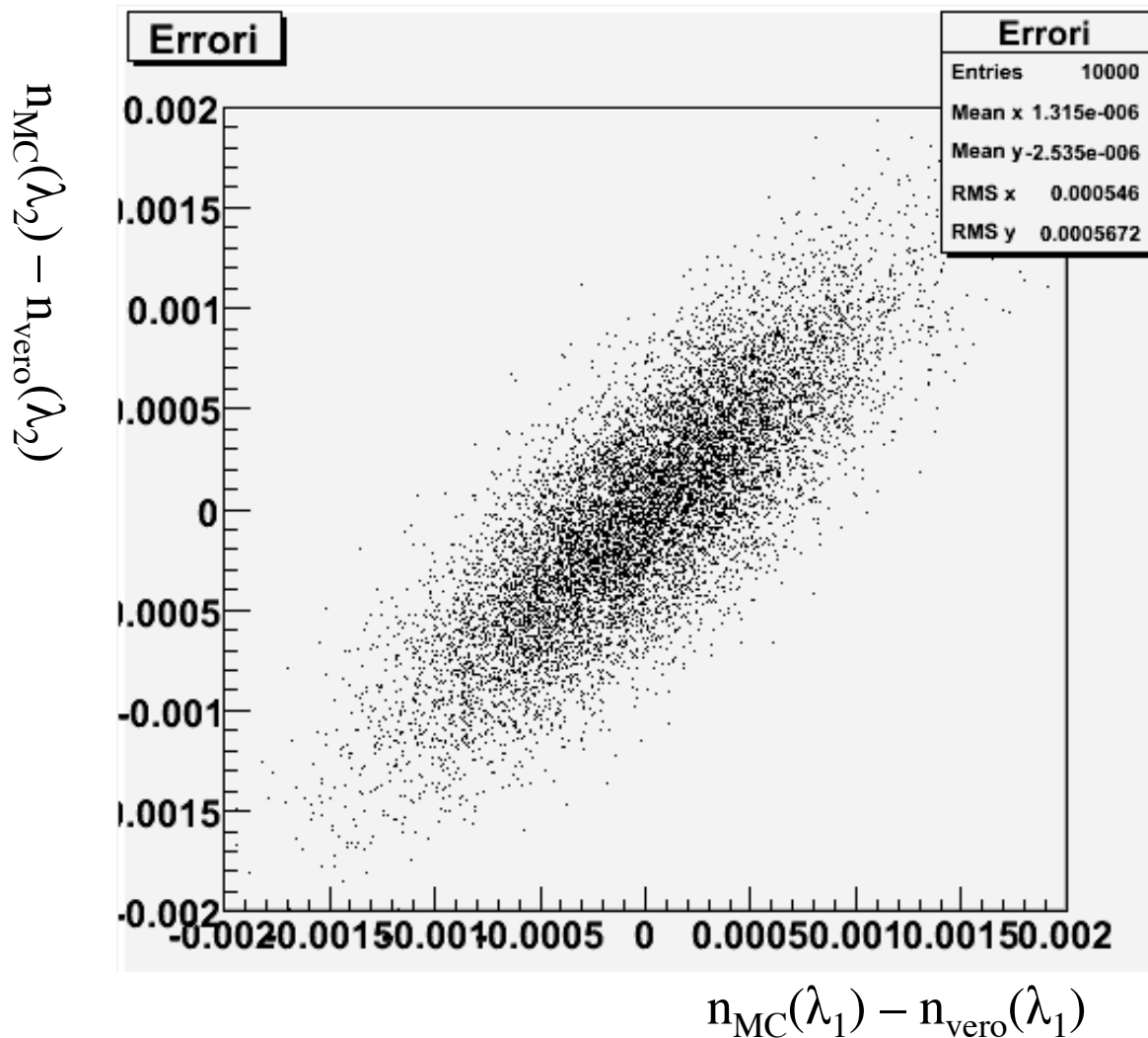
dove le derivate parziali sono calcolate nei valori di aspettazione dei parametri

- ❑ Questa incertezza può essere confrontata con quella valutata dalla distribuzione dei valori simulati di $n_{MC}(\lambda)$

Simulazione degli indici di rifrazione

- ❑ Questa procedura di simulazione MC viene ripetuta per l'indice di rifrazione di ogni riga emessa dal tubo Plucker che si vuole simulare
- ❑ La precedente formula di propagazione degli errori è valida solo se non ci sono correlazioni (lineari) tra α e $\delta_m(\lambda)$.
- ❑ La deviazione standard su $n_{MC}(\lambda)$ ottenuta dalle simulazioni è compatibile con quella ottenuta dalla propagazione degli errori ? Si noti che spesso è tutt'altro che banale propagare gli errori e in molti casi non è noto a priori se due variabili sono correlate e quanto sono correlate
- ❑ Analizzare i residui $[n_{MC}(\lambda_1) - n_{vero}(\lambda_1)]$ tra le quantità MC simulate $n_{MC}(\lambda)$ e quelle vere $n_{vero}(\lambda)$ per le varie lunghezze d'onda considerate nello studio fatto.
- ❑ Considerare l'istogramma bidimensionale con il residuo sulla stima di $n_{MC}(\lambda_1)$ su un asse e quello sulla stima di $n_{MC}(\lambda_2)$ sull'altro asse

Correlazioni



- ☐ In figura i residui di $n(\lambda_1)$ e $n(\lambda_2)$ sono correlati (positivamente).
- ☐ Da qualche parte c'è qualcosa che correla i due residui!
- ☐ Quanto vale il coefficiente di correlazione?

Determinazione delle costanti A e B

❑ Supponiamo sia N il numero di lunghezze d'onda considerate nella nostra analisi

❑ Gli indici di rifrazione simulati $n_{MC}(\lambda)$ sono legati a λ dalla formula di Cauchy:

$$n_{MC}^2(\lambda) = A_{MC} + \frac{B_{MC}}{\lambda^2}$$

❑ In questa formula la relazione tra $n_{MC}^2(\lambda)$ e $1/\lambda^2$ è di tipo lineare

❑ Indicando con $x_i = 1/\lambda_i^2$, $y_i = n_{MC}^2(\lambda_i)$ e σ_i l'incertezza su y_i l'equazione della retta del modello teorico (formula di Cauchy) è data da:

$$y_i = A_{MC} + B_{MC} x_i$$

❑ Per stimare i due parametri A_{MC} e B_{MC} possiamo definire la funzione χ^2

$$\chi^2 = \sum_i^N \left(\frac{y_i - A_{MC} - B_{MC} x_i}{\sigma_i} \right)^2$$

Determinazione delle costanti A e B

- Come stime dei parametri A_{MC} e B_{MC} prendiamo quei valori dei parametri che minimizzano la funzione χ^2 (stimatore dei minimi quadrati)
- Le stime in questo stimatore, quando il fit è di tipo lineare, si possono ottenere per via analitica. Bisogna trovare i valori dei parametri che annullano le derivate parziali del χ^2 rispetto ai due parametri A_{MC} e B_{MC}

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad X = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}, \quad Y = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}$$

$$XX = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, \quad XY = \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \quad \Delta = W \cdot XX - X^2$$

$$A_{MC} = \frac{XX \cdot Y - X \cdot XY}{\Delta} \quad \sigma_{AMC}^2 = \frac{XX}{\Delta}$$

$$B_{MC} = \frac{W \cdot XY - X \cdot Y}{\Delta} \quad \sigma_{BMC}^2 = \frac{W}{\Delta}$$

Determinazione delle costanti A e B

- ❑ Molto più comodamente si può trovare il minimo del χ^2 per via numerica
- ❑ Nel caso di misure di indice di rifrazione di due sole righe di lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 , possiamo ottenere i parametri A_{MC} e B_{MC} direttamente applicando la formula di Cauchy alle due simulazioni MC:

$$\begin{cases} n_{MC}^2(\lambda_1) = A_{MC} + B_{MC}/\lambda_1^2 \\ n_{MC}^2(\lambda_2) = A_{MC} + B_{MC}/\lambda_2^2 \end{cases}$$

❑ Risolvendo per A_{MC} e B_{MC} si ha:

$$\begin{cases} A_{MC} = \frac{\lambda_2^2 n_{MC}^2(\lambda_2) - \lambda_1^2 n_{MC}^2(\lambda_1)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \\ B_{MC} = \frac{n_{MC}^2(\lambda_2) - n_{MC}^2(\lambda_1)}{\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}} \end{cases}$$

- ❑ Anche qui si possono studiare i residui di A_{MC} e B_{MC} con i valori assunti veri nel MC e cioè A e B, calcolare il coefficiente di correlazione, ecc

Simulazioni Monte Carlo

- ❑ La simulazione dell'esperienza del prisma serve a dare una idea del modo in cui si simulano misure sperimentali. La complessità della simulazione in un esperimento è generalmente molto maggiore.
- ❑ Le quantità che si misurano possono dipendere da altre e queste essere tra di loro correlate. Propagare le incertezze è spesso improbo o impossibile. Le simulazioni permettono di determinare le incertezze delle quantità che si vogliono misurare in modo “relativamente” semplice.
- ❑ È possibile studiare il peso che hanno i vari parametri sulle incertezze finali e concludere che sia inutile considerare il contributo all'errore dovuto ad un parametro (semplificando così l'analisi)
- ❑ È possibile ottimizzare un esperimento cambiando la geometria del rivelatore o il tipo di rivelatore (non trascurando complessità e costo del rivelatore)
- ❑ Il teorico spesso simula l'effetto del proprio modello favorendo il confronto con le misure sperimentali.