



# UNIVERSITÀ DI TRENTO

## L'indice delle unità di Greither

---

Giacomo Borin

[giacomoborin.github.io](https://giacomoborin.github.io)


Dipartimento di Matematica




10 giugno 2021



In questo lavoro ho rielaborato l'articolo:

Cornelius Greither. "Improving Ramachandra's and Levesque's unit index". English. In: *Number theory. Fifth conference of the Canadian Number Theory Association, Ottawa, Ontario, Canada, August 17–22, 1996*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999, pp. 111–120. ISBN: 0-8218-0964-4/pbk

Completando i prerequisiti richiesti per la comprensione e implementando alcuni calcoli in 

-  K. Ramachandra. "On the units of cyclotomic fields". English. In: *Acta Arith.* 12 (1966), pp. 165–173. ISSN: 0065-1036; 1730-6264/e.
-  W. Sinnott. *On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field*. English. *Theorie des nombres, Semin. Delange-Pisot-Poitou, Paris 1979-80, Prog. Math.* 12, 277-286 (1981). 1981.
-  Lawrence C. Washington. *Introduction to cyclotomic fields*. English. Vol. 83. Springer, New York, NY, 1982.



## Prerequisiti

Primo oggetto di interesse:  $E_K$

Il gruppo delle unità di  $K$ , il sottocampo reale massimo di  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$

- $\zeta_n$  l' $n$ -esima radice ciclotomica (con  $n \not\equiv 2 \pmod{4}$ )
- $K = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$
- $O_K = \mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$
- $E_K = O_K^*$ , cioè l'insieme degli elementi invertibili

► Salta dimostrazione

## Dimostrazione.

- $\zeta_n + \zeta_n^{-1}$  è **reale**:

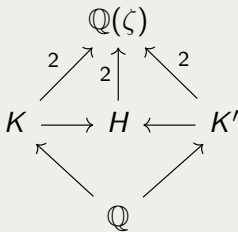
$$\overline{\zeta_n + \zeta_n^{-1}} = \overline{\zeta_n} + \overline{\zeta_n^{-1}} = \zeta_n^{-1} + \zeta_n$$

- L'indice  $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : K]$  vale **2**, ed è quindi minimale. Il suo polinomio minimo è:

$$f(x) = (x - \zeta)(x - \zeta^{-1}) = x^2 - (\zeta + \zeta^{-1})x + 1$$

## Dimostrazione.

- Un sottocampo con queste caratteristiche è **unico**:





## Proposizione

*Il gruppo di Galois di  $K/\mathbb{Q}$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}_n^*/\{\pm 1\}$*

D'ora in poi indicheremo  $G_0 := \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$  e  $G := \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$



## Definizione

Se  $\mathbb{K}$  è un campo numerico possiamo definire l'**ideal class group** come il quoziente  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}/\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$  dove:

$\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  è il gruppo degli ideali frazionari non nulli di  $O_{\mathbb{K}}$ ,

$\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$  è il gruppo degli ideali principali

Si può mostrare che questo gruppo è finito e definiamo il **numero delle classi** come:

$$h_K = |\mathcal{F}_{\mathbb{K}}/\mathcal{P}_{\mathbb{K}}|$$



Se considero il gruppo generato da  $\{-1, \zeta, 1 - \zeta^a \text{ for } a = 1, \dots, n - 1\}$  e lo interseco con  $E_K$  ottengo il gruppo delle **unità circolari**

Sinnot ha mostrato che esiste  $a \in \mathbb{Z}$  tale che:

$$[E_K : C_K] = 2^a h_K$$



Costruire **esplicitamente** un gruppo  $C'$  con indice  $[E_K : C']$  finito che sia **ottimale**

## Definizione

Dato un gruppo  $X$  e un campo  $\mathbb{F}$  un carattere di Dirichlet è un omomorfismo di gruppi  $\chi : X \rightarrow \mathbb{F}^*$

Possiamo anche usare l'isomorfismo  $G_0 \simeq \mathbb{Z}_n^*$  e definire  $\chi$  come omomorfismo di anelli da  $\mathbb{Z}_n$  in  $\mathbb{C}$  (con  $\chi$  nulla sugli elementi invertibili)

Il 'periodo' di un caratte è detto conduttore (in inglese **conductor**) e si indica con  $f_\chi$

## Definizione

Dati un gruppo moltiplicativo  $X$  e un anello  $R$  possiamo definire l'**anello grupale**  $R[X]$  come l' $R$ -modulo libero con base  $X$ , sul quale definiamo un'operazione di moltiplicazione inducendola da quella di  $X$

Nel nostro caso useremo  $\mathbb{Z}[G_0]$  e  $\mathbb{Z}[G]$ , sui quali possiamo sempre estendere il carattere  $\chi$  (perchè definito sulla base)

## Notazione

Dati  $z \in \mathbb{Q}(\zeta)$  e  $f \in \mathbb{Z}[G_0]$  è ben definita la nutazione esponenziale  $x^f$ , infatti dati  $g \in G_0$  abbiamo una buona definizione per  $z^g = g(z)$  e  $z^{g_1+g_2} = z^{g_1} z^{g_2}$



Dato  $n = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$  definiamo:

- $S = \{1, \dots, n\}$
- $\mathcal{P}_S = \{I \mid I \subsetneq S\}$
- $n_I = \prod_{i \in I} p_i^{e_i}$

Consideriamo una funzione

$$\beta : \mathcal{P}_S \rightarrow \mathbb{Z}[G_0]$$

che utilizzeremo per costruire il sottogruppo cercato.

## Definizione

$\beta$  si dice moltiplicativa se  $\beta(\emptyset) = 1$  e dati  $I, J$  con intersezione vuota abbiamo  $\beta(I \cup J) = \beta(I)\beta(J)$ .



Definiamo ora, per ogni  $a \in (1, n/2)$  coprimo con  $n$  l'unità reale:

$$\xi_a(\beta) := \zeta^{d_a(\beta)} \frac{\sigma_a(z(\beta))}{z(\beta)} \text{ con } d_a(\beta) = (1 - a) \frac{t}{2}$$

dove abbiamo che

- $z_I := 1 - \zeta^{n_I}$
- $z(\beta) := \prod_{i \in I} z_I^{\beta(i)}$
- $\sigma_a(\zeta) = \zeta^a$



$C_\beta$  è il gruppo generato da:

$$-1 \text{ e } \xi_a(\beta) \text{ per } 1 < a < n/2 \text{ e } (a, n) = 1$$

Per l'indice useremo la notazione

$$[E_K : C_\beta] = h_K i_\beta$$

Possiamo limitarci a definire  $\beta$  su  $\mathbb{Z}[G]$  e poi considerare un sollevamento (in inglese lift)

## Lemma

*Se due funzioni  $\beta_1$  e  $\beta_2$  coincidono su  $\mathbb{Q}(\zeta_{n/n_l})^a$  per ogni  $l \in \mathcal{P}_S$  allora le unità  $\xi_a(\beta)$  sono uniche a meno del segno*

---

$$^a\zeta_{n/n_l} = \zeta_n^{n_l}$$

Dati due insiemi  $Z$ ,  $Y$  e una funzione  $\phi : Y \rightarrow Z$  diciamo che  $f' : X \rightarrow Y$  è un **sollevamento** di  $f : X \rightarrow Z$  se commuta:

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ f' \nearrow & \downarrow \phi & \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Nel nostro caso  $\phi$  è il morfismo indotto dalla proiezione

$$G_0 \simeq \mathbb{Z}_n^* \rightarrow \mathbb{Z}_n^* / \pm 1 \simeq G$$



## Calcolo degli indici

## Teorema

Data una funzione  $\beta : \mathcal{P}_S \rightarrow \mathbb{Z}[G]$  segue che

$$i_\beta = \prod_{\substack{\chi \neq 1 \\ \text{pari}}} \left( \sum_{\substack{I \in \mathcal{P}_S \\ (f_\chi, n_I)=1}} \phi(n_I) \cdot \chi(\beta(I)) \cdot \prod_{i \notin I} (1 - \chi^{-1}(p_i)) \right) \quad (1)$$

Dove abbiamo che:

- $\phi$  è la funzione di Eulero
- $\chi$  si dice *pari* se  $\chi(-1) = 1$
- Con  $\chi^{-1}$  si intende il carattere che vale  $1/\chi$  sugli elementi invertibili

Dato un campo numerico  $L$  consideriamo un insieme di unità indipendenti  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_r\} \subset L$  e siano  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{r+1}\}$  le sue immersioni (embedding) in  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . Poniamo  $\delta_j$  uguale a 1 se  $\sigma_j$  è reale e a 2 altrimenti. Allora il suo **regolatore** è definito come

$$R_L(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r) = |\det(\delta_j \log |\epsilon_j^{\sigma_i}|)_{1 \leq i, j \leq r}|$$

## Lemma

*Dati i gruppi  $A \subset B$  di indice finito e generati da unità indipendenti di  $L$  vale che:*

$$[B : A] = \frac{R_L(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)}{R_L(\mu_1, \dots, \mu_r)} \quad (2)$$

Lemma (Lemma 5.26 in [4])

Sia  $X$  un gruppo abeliano finito e  $f$  una funzione su  $X$  a valori in  $\mathbb{C}$

$$\det(f(\sigma\tau^{-1}) - f(\sigma))_{\sigma, \tau \neq 1} = \prod_{\substack{\chi \in \hat{X} \\ \chi \neq 1}} \sum_{\sigma \in X} \chi(\sigma) f(\sigma) \quad (3)$$

Dove  $\hat{X}$  è l'insieme dei caratteri da  $X$  in  $\mathbb{C}^*$

Nel  $X$  sarà  $G \simeq \mathbb{Z}_n / \pm 1$ .



Usando l'ultimo lemma possiamo vedere che per dimostrare il teorema basta mostrare che

$$R(\xi_a(\beta)) = \pm R_K h_K A$$

con  $(a, n) = 1$ ,  $1 < a < n/2$  e  $A$  è la parte destra dell'equazione 1. Inoltre poi si procede (in modo molto tecnico) come nel capitolo 8 di [4] e usando:

### Formula

$$\sum_{(a,n)=1} \chi^{-1}(a) \log |z^{\sigma_a \gamma}| = \chi(\gamma) \sum_{(a,n)=1} \chi^{-1}(a) \log |z^{\sigma_a}| \quad (4)$$

## Teorema

*Se assumiamo che  $\beta : \mathcal{P}_S \rightarrow \mathbb{Z}[G]$  sia moltiplicativa abbiamo che:*

$$i_\beta = \prod_{\substack{\chi \neq 1 \\ \text{pari}}} \left( \prod_{p_i \nmid f_\chi} (\phi(p_i^{e_i}) \cdot \chi(\beta(i)) + 1 - \chi^{-1}(p_i)) \right) \quad (5)$$

Dove  $\beta(i)$  indica  $\beta(\{i\})$

Se poniamo  $\beta$  costante ad 1 otteniamo l'indice delle unità per Ramachandra da [2]:

$$[E_K : C_R] = h_K \cdot \prod_{\substack{\chi \neq 1 \\ \text{even}}} \left( \prod_{p_i \nmid f_\chi} (\phi(p_i^{e_i}) + 1 - \chi(p_i)) \right) \quad (6)$$

Dove  $C_R$  è il gruppo generato da  $-1$  e le unità della forma

$$\xi_a := \zeta^{d_a} \prod_{I \in \mathcal{P}_S} \frac{1 - \zeta^{a n_I}}{1 - \zeta^{n_I}} \text{ con } d_a = \frac{1}{2}(1 - a) \sum_{I \in \mathcal{P}_S} n_I$$



## Un nuovo sistema di unità



Costruiamo  $\beta$  moltiplicativa, quindi definendo  $\beta(i)$  per ogni  $i \in \{1, \dots, s\}$  :

Definiamo  $G_i$  come il gruppo di Galois:  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{n/p_i^{e_i}})^+/\mathbb{Q})$  e consideriamo l'isomorfismo di Frobenius:

$$F_i : \mathbb{Q}(\zeta_{n/p_i^{e_i}})^+ \rightarrow \mathbb{Q}(\zeta_{n/p_i^{e_i}})^+ \text{ con } \alpha \mapsto \alpha^{p_i}$$

Definiamo il suo elemento traccia  $N_{F_i}$  come:

$$N_{F_i} := 1 + F_i + \dots + F_i^{\text{ord}(F_i)-1} \in \mathbb{Z}[G_i]$$



Consideriamo ora un sollevamento (lift)  $\overline{N_i}$  di  $N_{F_i}$  in  $\mathbb{Z}[G_0]$  e definiamo

$$\beta(i) = \overline{N_i}$$

Ovviamente  $\beta$  non è unica, ma per il lemma visto prima lo sono le unità a meno di un segno, quindi lo è  $C_\beta$

Dato un primo  $p$  in  $\mathbb{Z}$  e la sua estensione come ideale  $pO_K$  in  $O_K$ , dato che questo è un dominio di Dedekind possiamo fattorizzare:

$$pO_K = \prod_{j=1}^g \mathfrak{p}_j^{\epsilon_j} \quad (7)$$

### Definizione

Il numero  $g$  si dice essere **grado di decomposizione** di  $p$  nell'estensione  $K/\mathbb{Q}$ .

Per ogni  $j = 1, \dots, g$ ,  $\epsilon_j$  si dice essere **indice di ramificazione** di  $\mathfrak{p}_j$  in  $K/\mathbb{Q}$ .

Per ogni  $j = 1, \dots, g$ ,  $f_j := [O_K/\mathfrak{p}_j : \mathbb{Z}_p]$  si dice **grado di inerzia**.



Si può provare che se  $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$  è un'estensione di Galois (come  $K/\mathbb{Q}$ )  $\epsilon_j, f_j$  non dipendono da  $j$  e quindi

$$n = efg$$

Per  $i \in 1, \dots, s$  definiamo  $g_i, f_i, \epsilon_i$  essere i gradi definiti prima per il primo  $p_i$  in  $K/\mathbb{Q}$ .

Queste costanti sono fortemente in relazione con altri oggetti visti finora, ad esempio si può provare:

- Se  $X$  è l'insieme dei caratteri di  $K/\mathbb{Q}$  vale
$$g_i = |\{\chi \in X \mid \chi(p_i) = 1\}|$$
- Il grado di inerzia  $f_i$  è uguale all'ordine del morfismo di Frobenius  $F_i$



## Teorema

*Dato  $C_\beta$  definito come prima abbiamo che*

$$i_\beta = \prod_{i=1}^s \epsilon_i^{g_i-1} f_i^{2g_i-1}$$

Questo indice si può dire ottimale perchè non solo rende più semplice la sua fattorizzazione (basta sapere quella di  $\epsilon_i$  e  $f_i$ ), ma inoltre sappiamo che questi dividono  $n$ , quindi i fattori di  $i_\beta$  sono solo i fattori di  $n$ .



## Implementazione dei calcoli

Vediamo ora l'implementazione di alcuni calcoli in  sage

I principali calcoli usati sono stati:

- Creazione del campo ciclotomico e della radice  $\zeta$

```
1 sage: Qn.<z> = CyclotomicField(n)
```

- Creazione del massimo sottocampo reale  $K$ :

```
1 sage: zz = z + z.conjugate()  
2 sage: K = NumberField(zz.minpoly(), 'a')
```



- Creazione dell'ideale  $pO_K$  e sua fattorizzazione:

```
1 sage: I = K.ideal(p(i))  
2 sage: I.factor()
```

- Creazione dell'omomorfismo  $\zeta \mapsto \zeta^f$ :

```
1 sage: Qn.hom([z**f])
```

Comunque ora vedremo direttamente l'implementazione in

 dei calcoli, presentata tramite  jupyter



## 1 Prerequisiti

- Gruppo delle unità
- Numero delle classi
- Caratteri di Dirichlet e anelli gruppali

## 2 La costruzione di Greither

- Oggetti indotti da  $\beta$

## 3 Calcolo degli indici

- Primo teorema
- Teorema nel caso  $\beta$  moltiplicativa

## 4 Un nuovo sistema di unità



- Gradi di decomposizione

## 5 Implementazione dei calcoli