Greither unit index

May 26, 2021

1 Greither unit index, a Sagemath implementation

Here we will implement some of the calculation from the article of Cornelius Greither: *"Improving Ramachandra's and Levesque's unit index"*.
In particular we will evaluate the index i_β in a very efficient way and the generators $\xi_a(\beta)$ of the group C_β

1.1 Definition of n end its factorization

[63]:
```
n=693
fn = factor(n)
show(fn)
```

$3^2 \cdot 7 \cdot 11$

Also we define these simple functions that we will use later to have a simple overview of the quatity used.

[64]:
```
def p(i):
    return fn[i-1][0]
def e(i):
    return fn[i-1][1]
def pe(i):
    return p(i)**e(i)
```

[65]:
```
pe(1)
```

[65]: 9

1.1.1 Definition of the Power set P_S

[66]:
```
s = len(fn)
S = [ i +1 for i in range(s)]
PS = Subsets(S).list()
PS.remove(Set(S))
```

[67]:
```
PS
```

[67]:
```
[{}, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}]
```

`nI(I)` evaluate the quantity $n = \prod_{i \in I} p_i^{e_i}$

[68]:
```
def nI(I):
    ret = 1
    for i in I:
        ret *= pe(i)
    return ret
```

[69]:
```
nI({1,3})
```

[69]:
```
99
```

1.2 Definition of ζ and the group G

Here we define the Cyclotomic Field $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ and the variable z is assigned to ζ_n.

[70]:
```
Qn.<z>=CyclotomicField(n)
(Qn)
```

[70]:
```
Cyclotomic Field of order 693 and degree 360
```

We could directly evaluate the group G_0 as the Galois group of the Field, but it uses a long computational time, so we will follows a different approach: defining G directly from its elements. Also I have done some functions to do some operations in G, but in the end I have not used them

[ ]:
```
G_0 = Qn.galois_group() #loooooong time
```

[71]:
```
G = [ a for a in [1..n//2] if gcd(a,n)==1]
```

[72]:
```
show(G)
```

$$[1, 2, 4, 5, 8, 10, 13, 16, 17, 19, 20, 23, 25, 26, 29, 31, 32, 34, 37, 38, 40, 41, 43, 46, 47, 50, 52, 53, 58, 59, 61, 62, 64, 65, 67, 68, 71, 73, 74, 76, 79, 80, 82, 83, 85, 86, 89, 92, 94, 95, 97, 100, 101, 103, 104, 106, 107, 109, 113, 115, 116, 118, 122, 124, 125, 127, 128, 130, 131, 134, 136, 137, 139, 142, 145, 146, 148, 149, 151, 152, 155, 157, 158, 160, 163, 164, 166, 167, 169, 170, 172, 173, 178, 179, 181, 184, 185, 188, 190, 191, 193, 194, 197, 199, 200, 202, 205, 206, 208, 211, 212, 214, 215, 218, 221, 223, 226, 227, 229, 230, 232, 233, 235, 236, 239, 241, 244, 247, 248, 250, 251, 254, 256, 257, 260, 262, 263, 265, 268, 269, 271, 272, 274, 277, 278, 281, 283, 284, 289, 290, 292, 293, 295, 296, 298, 299, 302, 304, 305, 307, 310, 311, 313, 314, 316, 317, 320, 323, 325, 326, 328, 331, 332, 334, 335, 337, 338, 340, 344, 346]$$

[84]:
```
def corr(r):
    if r not in G:
```

```
        r = n-r
    return r

def power(x,a):
    r = power_mod(x,a,n)
    return corr(r)

def molt(x,y):
    r = mod(x*y,n)
    return corr(r)
```

[85]:
```
molt(166,50)
```

[85]: 16

2 Calculation of the index

First we define the number field K as the Maximal Real subfield of $\mathbb{Q}(\zeta_n)$, using that is equal to $\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$

[86]:
```
zz = z + z.conjugate()
```

[87]:
```
K = NumberField(zz.minpoly(),'a')
```

We define ϵ_i knowing that is equal to $\phi(p_i^{e_i})$ and g_i using its definition: we embed the the prime p_i in O_K and we factor it

[88]:
```
def eps(i):
    return euler_phi(pe(i))
```

[89]:
```
def g(i):
    I = K.ideal(p(i))
    return len(I.factor())
```

For f_i we use the equality $[K:\mathbb{Q}] = \epsilon\_ig\_if\_i$ since we know the other three elements.
Memo: $[K:\mathbb{Q}] = \phi(n)/2$
Later we will see another possible evaluation (a bit slower) using the Frobenious morphism.

[91]:
```
def f(i):
    return euler_phi(n)/(2*g(i)*eps(i))
```

So we have that:

[92]:
```
def i_b():
    i_b=1
    for i in S:
        i_b *= (eps(i)**(g(i)-1)) * (f(i)**(2*g(i) -1))
```

```
    return i_b
```

[93]:
```
i = i_b()
i
```

[93]: 699840000

[94]:
```
show(factor(i))
```

$2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^4$

Here we have another evaluation of i_β that compress all the calculation to optimize the result

[95]:
```
def i_b_compressed(n):
    fn = factor(n)
    s = len(fn)
    S = [ i +1 for i in range(s)]
    K.<z> = CyclotomicField(n)
    zz = z + z.conjugate()
    K = NumberField(zz.minpoly(),'a')
    ibb=1
    for j in S:
        eps = euler_phi(fn[j-1][0]**fn[j-1][1])
        g = len(K.ideal(fn[j-1][0]).factor())
        f = euler_phi(n)/(2*g*eps)
        ibb *= (eps**(g-1)) * (f**(2*g-1))
    return ibb
```

[100]:
```
show(factor(i_b_compressed(3*5*49)))
```

$2^6 \cdot 3^4 \cdot 7^4$

3 Generators construction

Now with several steps we proceed in the costruction of the generators, starting with the definition of β

3.1 Definition the Frobenious morphism

Given $i \in S$ we want to find a lift in G_0 of the frobenious morphism:

$$\begin{aligned} F_i : \mathbb{Q}(\zeta_{n/p_i^{e_i}})^+ &\longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_{n/p_i^{e_i}})^+ \\ \zeta_{n/p_i^{e_i}} &\longmapsto \zeta_{n/p_i^{e_i}}^{p_i} \end{aligned}$$

So we need an element f that sends $\zeta_{n/p_i^{e_i}} \simeq \zeta_n^{p_i^{e_i}}$ in $\zeta_n^{p_i^{e_i+1}} = \zeta_n^{p_i^{e_i} p_i}$

First we can see it as an integer in the list `G`

[101]:
```
def frob(i):
    zi = z^pe(i)
    for f in G:
        if zi^f==zi^p(i):
            return f
```

But also we can give the result directly as an automorphism of $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ (so an element in G_0).
Remark: With this costruction we directly considerate a lifting of the function without defining it on the field $\mathbb{Q}(\zeta_{n/p_i^{e_i}})^+$.
Memo: We have seen that the final results does not depends on the particular lifting

[102]:
```
def frobhom(i):
    zi = z^pe(i)
    for f in G:
        if zi^f==zi^p(i):
            return Qn.hom([z**f])
```

[104]:
```
(frobhom(2))
```

[104]:
```
Ring endomorphism of Cyclotomic Field of order 693 and degree 360
  Defn: z |--> z^106
```

Now to find the trace elements we need to have the order of the element f in G_i.
We already know that this is the inertia degree of the prime p_i, but now we will follow a different approach. Also here we define the morphism on $\mathbb{Q}(\zeta_{n/p_i^{e_i}})$ and we check when its generator (zz) is fixed.
Remark: is not the same of checking when ζ is fixed

[105]:
```
def ford(i):
    Qi.<zi>=CyclotomicField(n/pe(i))
    f = Qi.hom([zi^p(i)])
    o = 1
    zz=zi+zi.conjugate()
    while (not (f**o)(zz)==zz) :
        o += 1
    return o
```

We can see that the two results are indeed equivalent

[107]:
```
[ford(i)==f(i) for i in S]
```

[107]:
```
[True, True, True]
```

3.2 Definition of β and its evaluation

We start defining its value on the singletons $\{i\}$. Also to have an elements in $\mathbb{Z}[G_0]$ we simply use a list of elements in G_0, since we only need to evalutate them and we can simply use a recursive evalutation.
Remark: we use `f(i)` instead of `ford(i)` because it is faster

[113]:
```
def beta0(i : int):
    fi = frobhom(i)
    return [ fi**j for j in range(f(i))]
```

We anticipate the valutations on the singletons to save computational time later

[115]:
```
vbeta = [beta0(i) for i in S]
```

For our costruction the only thing we need is $\zeta^{\beta(I)}$ (`valbeta(base,I)`), that we can evaluate starting from $\zeta^{\beta(i)}$ (`valbeta0(base,i)`) using that $\beta(I) = \prod_{i \in S} \beta(i)$ and $\zeta^{\gamma\delta} = (\zeta^\gamma)^\delta$

[118]:
```
def valbeta0(base,i):
    v = 1
    for vf in vbeta[i-1]:
        v *= vf(base)
    return v
```

[119]:
```
def valbeta(base,I):
    if I.is_empty():
        return base
    for i in I:
        base = valbeta0(base,i)
    return base
```

4 Calculation of the generators

We proceed now with the evalutation of

$$z(\beta) := \prod_{I \in P_S} z_I^{\beta(I)}$$

where $z_I := 1 - \zeta^{n\_I}$

[120]:
```
def zbeta():
    ret = 1
    for I in PS:
        zI= 1 - z**nI(I)
        ret *= valbeta(zI,I)
    return ret
```

We store it in the memory to save computational time later, also we can see that this is a very long and complicate element

[121]:
```
zb = zbeta()
```

[122]:
```
zb
```

[122]:

```
-2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971
8275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^359 + 2465587991975972
40999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296
88534353553899890762466013670947676001*z^358 - 246558799197597240999785570340008
12672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890
762466013670947676001*z^357 + 24655879919759724099978557034000812672844780638247
25976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076246601367094767
6001*z^355 - 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910
1008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^354 + 2465
58799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097182754
929514763296885343535538998907624660136709476760 01*z^353 - 246558799197597240999
78557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329688534
353553899890762466013670947676001*z^344 + 24655879919759724099978557034000812672
84478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076246
6013670947676001*z^343 + 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976
1479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*
z^338 - 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891010087
80009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^337 + 246558799
19759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492951
4763296885343535538998907624660136709476760 01*z^336 - 24655879919759724099978557
03400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435355
389989076246601367094767 6001*z^334 + 2465587991975972409997855703400081267284478
06382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624660136
70947676001*z^326 - 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614793
0668910100878000971827549295147632968853435355389989076246601367094767 6001*z^325
+ 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009 7
182754929514763296885343535538998907624660136709476760 01*z^324 + 246558799197597
24099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329
6885343535538998907624660136709476760 01*z^323 - 49311759839519448199957114068001
62534568956127649451952295861337820201756001943655098590295265937706870710779978
152493202734189535200 2*z^322 + 2465587991975972409997855703400081267284478063824
72597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624660136709476
76001*z^321 + 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891
0100878000971827549295147632968853435355389989076246601367094767 6001*z^320 - 493
11759839519448199957114068001625345689561276494519522958613378202017560019436550
98590295265937706870710779978152493202734189535200 2*z^319 + 24655879919759724099
97855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853
4353553899890762466013670947676001*z^312 - 2465587991975972409997855703400081267
28447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624
66013670947676001*z^310 - 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976
147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076246601367094767 6001
*z^305 + 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008
78000971827549295147632968853435355389989076246601367094767 6001*z^304 - 24655879
```

```
91975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295
1476329688534353553899890762466013670947676001*z^303 + 2465587991975972409997855
70340008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535
5389989076246601367094767600 1*z^301 - 24655879919759724099978557034000812672844 7
80638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013
670947676001*z^296 + 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479
30668910100878000971827549295147632968853435355389989076246601367094767600 1*z^29
5 - 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780 00
9718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^294 + 2465587991975
97240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763
2968853435355389989076246601367094767600 1*z^292 - 246558799197597240999785570340
00812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899
89076246601367094767600 1*z^291 + 246558799197597240999785570340008126728447806 38
24725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076246601367094
7676001*z^289 + 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306 68
91010087800097182754929514763296885343535538998907624660136709476760 01*z^287 - 2
46558799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097182
7549295147632968853435355389989076246601367094767600 1*z^286 - 246558799197597240
99978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329688
5343535538998907624660136709476760 01*z^281 + 2465587991975972409997855703400081 2
67284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076
24660136709476760 01*z^280 - 246558799197597240999785570340008126728447806382472 5
97614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624660136709476760
01*z^279 + 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910 10
0878000971827549295147632968853435355389989076246601367094767600 1*z^278 - 246558
79919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492
95147632968853435355389989076246601367094767600 1*z^276 + 49311759839519448199957
11406800162534568956127649451952295861337820201756001943655098590295265937706870
710779978152493202734189535200 2*z^275 - 24655879919759724099978557034000812672 84
47806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624660
1367094767600 1*z^274 + 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614
7930668910100878000971827549295147632968853435355389989076246601367094767600 1*z^
273 - 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780
0097182754929514763296885343535538998907624660136709476760 01*z^271 + 24655879919
75972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147
63296885343535538998907624660136709476760 01*z^263 - 2465587991975972409997855703
40008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538
998907624660136709476760 01*z^262 + 246558799197597240999785570340008126728447806
38247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670
947676001*z^261 - 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614793 06
6891010087800097182754929514763296885343535538998907624660136709476760 01*z^259 -
24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718
27549295147632968853435355389989076246601367094767600 1*z^257 + 24655879919759724
09997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968
8534353553899890762466013670947676001*z^256 - 2465587991975972409997855703400081
26728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907
6246601367094767600 1*z^255 - 2465587991975972409997855703400081267284478063824 72
```

5976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076246601367094767 6
001*z^254 + 493117598395194481999571140680016253456895612764945195229586133782 02
017560019436550985902952659377068707107799781524932027341895352002*z^253 + 24655
87991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549
2951476329688534353553899890762466013670947676001*z^249 - 246558799197597240999 7
855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853 43
5355389989076246601367094767600 1*z^247 - 246558799197597240999785570340008126728
447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624 66
013670947676001*z^245 + 246558799197597240999785570340008126728447806382472597 61
479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z
^244 + 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878
0009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^243 - 4931175983
951944819995711406800162534568956127649451952295861337820201756001943655098590 29
5265937706870710779978152493202734189535200 2*z^242 + 2465587991975972409997855 70
340008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535 53
899890762466013670947676001*z^241 - 246558799197597240999785570340008126728447 80
638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013 67
0947676001*z^240 + 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614793 0
668910100878000971827549295147632968853435355389989076246601367094767600 1*z^239
+ 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000 97
18275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^237 - 246558799197597
2409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632 9
6885343535538998907624660136709476760 01*z^235 - 246558799197597240999785570340 00
812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899 89
0762466013670947676001*z^233 - 493117598395194481999571140680016253456895612764 9
451952295861337820201756001943655098590295265937706870710779978152493202734189 53
52002*z^232 + 49311759839519448199957114068001625345689561276494519522958613378 2
020175600194365509859029526593770687071077997815249320273418953520 02*z^231 + 246
558799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097182 75
4929514763296885343535538998907624660136709476760 01*z^229 - 24655879919759724099
978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329688 53
435355389989076246601367094767600 1*z^228 + 246558799197597240999785570340008126 7
284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076 24
66013670947676001*z^227 + 24655879919759724099978557034000812672844780638247259 7
614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624660136709476760 01
*z^225 + 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100 8
78000971827549295147632968853435355389989076246601367094767600 1*z^224 - 49311759
839519448199957114068001625345689561276494519522958613378202017560019436550985 90
295265937706870710779978152493202734189535200 2*z^223 + 2465587991975972409997855
703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435 35
5389989076246601367094767600 1*z^222 + 246558799197597240999785570340008126728447
806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624660 13
670947676001*z^221 - 4931175983951944819995711406800162534568956127649451952295 8
613378202017560019436550985902952659377068707107799781524932027341895352002*z^22
0 - 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000
9718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^218 + 2465587991975
9724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476 3

29688534353553899890762466013670947676001*z^217 - 246558799197597240999785570340
00812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899
890762466013670947676001*z^216 + 24655879919759724099978557034000812672844780638
24725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076246601367094
7676001*z^215 + 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668
9101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^213 + 2
46558799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097182
75492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^212 - 493117598395194481
99957114068001625345689561276494519522958613378202017560019436550985902952659377
068707107799781524932027341895352002*z^211 + 24655879919759724099978557034000812
67284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076
2466013670947676001*z^210 - 2465587991975972409997855703400081267284478063824725
97614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624660136709476760
01*z^208 - 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891010
08780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^206 + 246558
79919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492
951476329688534353553899890762466013670947676001*z^205 - 24655879919759724099978
55703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435
3553899890762466013670947676001*z^204 + 2465587991975972409997855703400081267284
47806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624660
13670947676001*z^202 + 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614
79306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^
200 - 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780
009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^199 + 24655879919
75972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147
6329688534353553899890762466013670947676001*z^198 - 2465587991975972409997855703
40008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538
99890762466013670947676001*z^196 - 246558799197597240999785570340008126728447806
38247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670
947676001*z^194 + 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306
689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^193 -
24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718
275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^192 + 24655879919759724
09997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968
8534353553899890762466013670947676001*z^190 + 2465587991975972409997855703400081
26728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907
62466013670947676001*z^186 - 246558799197597240999785570340008126728447806382472
59761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676
001*z^184 - 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101
008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^182 + 24655
87991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549
2951476329688534353553899890762466013670947676001*z^181 - 2465587991975972409997
85570340008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343
53553899890762466013670947676001*z^180 + 246558799197597240999785570340008126728
44780638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466
013670947676001*z^178 + 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761
479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z

^174 - 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878
0009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^172 - 2465587991
97597240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514
76329688534353553899890762466013670947676001*z^170 + 24655879919759724099978557 0
340008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535 53
89989076246601367094767600 1*z^169 - 24655879919759724099978557034000812672844780
638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013 67
0947676001*z^168 + 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930
66891010087800097182754929514763296885343535538998907624660136709476760 01*z^166
- 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000 97
1827549295147632968853435355389989076246601367094767600 1*z^165 + 246558799197597
24099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329
6885343535538998907624660136709476760 01*z^164 + 24655879919759724099978557034000
81267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989
0762466013670947676001*z^162 - 2465587991975972409997855703400081267284478063824
72597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624660136709476
76001*z^160 - 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891
0100878000971827549295147632968853435355389989076246601367094767600 1*z^158 + 246
55879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275
4929514763296885343535538998907624660136709476760 01*z^157 - 2465587991975972409 9
97855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853
4353553899890762466013670947676001*z^156 - 24655879919759724099978557034000812 67
2844780638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762 4
66013670947676001*z^155 + 4931175983951944819995711406800162534568956127649451 95
229586133782020175600194365509859029526593770687071077997815249320273418953520 02
*z^154 - 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100 8
7800097182754929514763296885343535538998907624660136709476760 01*z^153 + 24655879
9197597240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097182754929 5
1476329688534353553899890762466013670947676001*z^152 + 2465587991975972409997855
7034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353 5
538998907624660136709476760 01*z^150 + 246558799197597240999785570340008126728447
8063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076246601 3
670947676001*z^149 - 49311759839519448199957114068001625345689561276494519522958
6133782020175600194365509859029526593770687071077997815249320273418953520 02*z^14
8 + 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780 00
9718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^147 - 2465587991975
97240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763
29688534353553899890762466013670947676001*z^146 + 2465587991975972409997855703 40
0081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389 9
89076246601367094767600 1*z^144 - 4931175983951944819995711406800162534568956127 6
49451952295861337820201756001943655098590295265937706870710779978152493202734189
5352002*z^143 + 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306 68
91010087800097182754929514763296885343535538998907624660136709476760 01*z^142 - 2
46558799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097182
754929514763296885343535538998907624660136709476760 01*z^141 + 246558799197597240
99978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329688
5343535538998907624660136709476760 01*z^140 + 2465587991975972409997855703400081 2

67284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076
2466013670947676001*z^138 + 2465587991975972409997855703400081267284478063824725
9761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676O
01*z^137 - 493117598395194481999571140680016253456895612764945195229586133782020
17560019436550985902952659377068707107799781524932027341895352002*z^136 + 246558
79919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492
951476329688534353553899890762466013670947676001*z^135 - 24655879919759724099978
55703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435
3553899890762466013670947676001*z^133 - 2465587991975972409997855703400081267284
47806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624660
13670947676001*z^131 + 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614
79306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^
130 - 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780
009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^129 + 24655879919
75972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147
6329688534353553899890762466013670947676001*z^127 + 2465587991975972409997855703
40008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538
99890762466013670947676001*z^125 - 246558799197597240999785570340008126728447806
38247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670
947676001*z^124 + 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306
689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^123 -
24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718
275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^121 - 24655879919759724
09997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968
8534353553899890762466013670947676001*z^119 + 2465587991975972409997855703400081
26728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907
62466013670947676001*z^118 - 246558799197597240999785570340008126728447806382472
59761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676
001*z^117 + 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101
008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^115 + 49311
75983951944819995711406800162534568956127649451952295861337820201756001943655098
5902952659377068707107799781524932027341895352002*z^111 - 2465587991975972409997
85570340008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343
53553899890762466013670947676001*z^110 - 246558799197597240999785570340008126728
44780638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466
013670947676001*z^109 - 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761
479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z
^107 + 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878
0009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^106 - 2465587991
97597240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514
76329688534353553899890762466013670947676001*z^105 + 246558799197597240999785570
34000812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553
899890762466013670947676001*z^103 - 24655879919759724099978557034000812672844780
63824725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076246601367
0947676001*z^102 + 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930
6689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^101
+ 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097

18275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^99 - 2465587991975972
4099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329 6
88534353553899890762466013670947676001*z^97 + 2465587991975972409997855703400081
26728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907
62466013670947676001*z^89 - 2465587991975972409997855703400081267284478063824725
97614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624660136709476760
01*z^88 + 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100
8780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^87 + 24655879
91975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295
1476329688534353553899890762466013670947676001*z^86 - 49311759839519448199957114
06800162534568956127649451952295861337820201756001943655098590295265937706870710
7799781524932027341895352002*z^85 + 24655879919759724099978557034000812672844780
63824725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076246601367
0947676001*z^84 - 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306
689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^83 -
24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718
275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^78 + 246558799197597240
99978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329688
534353553899890762466013670947676001*z^77 + 24655879919759724099978557034000812 6
72844780638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762
466013670947676001*z^75 - 24655879919759724099978557034000812672844780638247259 7
61479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001
*z^73 - 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891010087
80009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^68 + 2465587991
97597240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514
76329688534353553899890762466013670947676001*z^67 - 2465587991975972409997855703
40008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538
99890762466013670947676001*z^66 + 2465587991975972409997855703400081267284478063
82472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624660136709
47676001*z^64 - 2465587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668
9101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^59 + 24
65587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827
5492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^58 - 24655879919759724099
97855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853
4353553899890762466013670947676001*z^57 - 2465587991975972409997855703400081267 2
84478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076246
6013670947676001*z^56 + 49311759839519448199957114068001625345689561276494519522
958613378202017560019436550985902952659377068707107799781524932027341895352002*z
^55 - 24655879919759724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780
0097182754929514763296885343535538998907624660136709476760 01*z^54 + 246558799197
59724099978557034000812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476
3296885343535538998907624660136709476760 01*z^52 - 246558799197597240999785570340
00812672844780638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899
890762466013670947676001*z^45 + 246558799197597240999785570340008126728447806382
47259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947
676001*z^43 - 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891
01008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^42 + 2465

```
587991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549
2951476329688534353553899890762466013670947676001*z^41 + 2465587991975972409997
855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853 43
53553899890762466013670947676001*z^38 - 2465587991975972409997855703400081267284
4780638247259761479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466 0
13670947676001*z^37 + 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614 7
9306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^3
6 - 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800 0
9718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^34 + 24655879919759
7240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763 2
9688534353553899890762466013670947676001*z^26 - 2465587991975972409997855703400 0
8126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998 9
0762466013670947676001*z^25 + 246558799197597240999785570340008126728447806382 47
2597614793066891010087800097182754929514763296885343535538998907624660136709476 7
6001*z^24 - 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891 01
008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^22 + 246558
7991975972409997855703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549 2
951476329688534353553899890762466013670947676001*z^21 - 246558799197597240999785
5703400081267284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435 3
553899890762466013670947676001*z^20 + 246558799197597240999785570340008126728447
8063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076246601 3
670947676001*z^12 - 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614793
06689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^10
- 246558799197597240999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097
18275492951476329688534353553899890762466013670947676001*z^5 + 246558799197597 24
0999785570340008126728447806382472597614793066891010087800097182754929514763296 8
8534353553899890762466013670947676001*z^4 - 246558799197597240999785570340008126
7284478063824725976147930668910100878000971827549295147632968853435355389989076 2
466013670947676001*z^3 + 246558799197597240999785570340008126728447806382472597 6
1479306689101008780009718275492951476329688534353553899890762466013670947676001*
z
```

An interesting wall of numbers, however now we can use it to evaluate the elements

$$\zeta^{\frac{(1-a)}{2} n_I \beta(I)}$$

and

$$\zeta^{(1-a)\frac{t}{2}} \text{ with } t = \sum_{I \in P_S} n_I \beta(I) \tag{1}$$

[123]:
```
def zdbeta(a,I):
    d = (1-a)*nI(I)/2
    valbeta(z^d,I)
```

[124]:
```
def zdbeta(a):
    ret = 1
    d= (1-a)/2
    for I in PS:
```

```
        ret *= valbeta(z^(d*nI(I)),I)
    return ret
```

And finally we can evaluate

$$\xi_a(\beta) := \zeta^{d_a(\beta)} \frac{\sigma_a(z(\beta))}{z(\beta)} \text{ with } d_a(\beta) = (1-a)\frac{t}{2} \tag{2}$$

[125]:
```
def xibeta(a):
    sa = Qn.hom([z**a])
    return zdbeta(a)*sa(zb)/zb
```

Consider a particulare case, we can easly see that the result is in the ring of integer $\mathbb{Z}[\zeta]$ and that it is real comparing itself with the conjugate

[127]:
```
a = G[42]
xi = xibeta(a)
```

[129]:
```
show(xi)
```

$$-43z^{359} - 72z^{358} - 80z^{357} - 123z^{356} - 138z^{355} - 146z^{354} - 189z^{353} - 189z^{352} - 173z^{351} - 173z^{350} - 174z^{349} - 174z^{348} - 174z^{347} - 174z^{346} - 194z^{345} - 194z^{344} - 194z^{343} - 194z^{342} - 194z^{341} - 180z^{340} - 156z^{339} - 113z^{338} - 84z^{337} - 76z^{336} - 33z^{335} - 33z^{334} - 45z^{333} - 11z^{332} - 11z^{331} - 27z^{330} - 27z^{329} - 27z^{328} - 12z^{327} + 31z^{326} + 60z^{325} + 88z^{324} + 131z^{323} + 146z^{322} + 134z^{321} + 177z^{320} + 163z^{319} + 147z^{318} + 147z^{317} + 141z^{316} + 141z^{315} + 141z^{314} + 156z^{313} + 176z^{312} + 176z^{311} + 175z^{310} + 175z^{309} + 175z^{308} + 161z^{307} + 137z^{306} + 114z^{305} + 85z^{304} + 77z^{303} + 34z^{302} + 34z^{301} + 46z^{300} + 3z^{299} + 3z^{298} - 5z^{297} - 48z^{296} - 77z^{295} - 85z^{294} - 128z^{293} - 143z^{292} - 151z^{291} - 194z^{290} - 194z^{289} - 158z^{288} - 158z^{287} - 144z^{286} - 144z^{285} - 144z^{284} - 137z^{283} - 157z^{282} - 157z^{281} - 172z^{280} - 172z^{279} - 172z^{278} - 149z^{277} - 125z^{276} - 82z^{275} - 53z^{274} - 45z^{273} - 2z^{272} - 2z^{271} - 14z^{270} + 29z^{269} + 29z^{268} + 13z^{267} + 19z^{266} + 19z^{265} + 43z^{264} + 86z^{263} + 115z^{262} + 128z^{261} + 128z^{260} + 114z^{259} + 94z^{258} + 94z^{257} + 65z^{256} + 41z^{255} - 2z^{254} - 2z^{253} + 14z^{252} + 14z^{251} + 37z^{250} + 57z^{249} + 57z^{248} + 57z^{247} + 37z^{246} + 37z^{245} + 17z^{244} - 7z^{243} - 50z^{242} - 65z^{241} - 49z^{240} - 49z^{239} - 20z^{238} - 20z^{234} - 28z^{233} - 57z^{232} - 81z^{231} - 124z^{230} - 139z^{229} - 131z^{228} - 131z^{227} - 102z^{226} - 58z^{225} - 15z^{224} + 14z^{223} + 2z^{222} + 45z^{221} + 31z^{220} - 5z^{219} - 5z^{218} - 26z^{217} - 26z^{216} - 26z^{215} + 3z^{214} + 47z^{213} + 90z^{212} + 119z^{211} + 127z^{210} + 170z^{209} + 156z^{208} + 120z^{207} + 120z^{206} + 91z^{205} + 67z^{204} + 24z^{203} + 24z^{202} + 60z^{201} + 54z^{200} + 83z^{199} + 103z^{198} + 103z^{197} + 89z^{196} + 60z^{195} + 60z^{194} + 31z^{193} + 7z^{192} - 36z^{191} - 36z^{190} + 29z^{187} + 49z^{186} + 49z^{185} + 50z^{184} + 30z^{183} + 30z^{182} + z^{181} - 23z^{180} - 66z^{179} - 66z^{178} - 50z^{177} - 50z^{176} - 21z^{175} - z^{174} - z^{173} - z^{172} - 21z^{171} - 21z^{170} - 50z^{169} - 74z^{168} - 102z^{167} - 117z^{166} - 101z^{165} - 101z^{164} - 72z^{163} - 37z^{162} - 37z^{161} - 37z^{160} - 57z^{159} - 57z^{158} - 86z^{157} - 110z^{156} - 153z^{155} - 168z^{154} - 152z^{153} - 152z^{152} - 116z^{151} - 72z^{150} - 29z^{149} - 12z^{147} + 31z^{146} + 11z^{145} - 25z^{144} - 25z^{143} - 40z^{142} - 40z^{141} - 40z^{140} - 11z^{139} + 33z^{138} + 76z^{137} + 105z^{136} + 113z^{135} + 147z^{134} + 133z^{133} + 97z^{132} + 97z^{131} + 68z^{130} + 59z^{129} + 16z^{128} + 16z^{127} + 52z^{126} + 52z^{125} + 81z^{124} + 81z^{123} + 81z^{122} + 67z^{121} + 47z^{120} + 47z^{119} + 17z^{118} - 7z^{117} - 50z^{116} - 50z^{115} - 34z^{114} - 34z^{113} - 14z^{112} + 6z^{111} + 6z^{110} + 6z^{109} - 14z^{108} - 14z^{107} - 43z^{106} - 67z^{105} - 110z^{104} - 125z^{103} - 109z^{102} - 109z^{101} - 80z^{100} - 60z^{99} - 60z^{98} - 60z^{97} - 80z^{96} - 37z^{95} - 37z^{94} - 53z^{93} - 53z^{92} - 53z^{91} - 29z^{90} + 14z^{89} + 43z^{88} + 71z^{87} + 114z^{86} + 129z^{85} + 117z^{84} + 160z^{83} + 146z^{82} + 130z^{81} + 130z^{80} + 122z^{79} + 122z^{78} + 122z^{77} + 137z^{76} + 157z^{75} + 157z^{74} + 157z^{73} + 157z^{72} + 157z^{71} + 143z^{70} + 119z^{69} + 91z^{68} + 62z^{67} + 54z^{66} + 11z^{65} + 11z^{64} + 38z^{63} - 5z^{62} - 5z^{61} - 13z^{60} - 56z^{59} - 85z^{58} - 93z^{57} - 136z^{56} - 151z^{55} - 159z^{54} - 202z^{53} - 187z^{52} - 171z^{51} - 171z^{50} - 157z^{49} -$$

$157z^{48} - 157z^{47} - 148z^{46} - 168z^{45} - 168z^{44} - 183z^{43} - 183z^{42} - 183z^{41} - 169z^{40} - 145z^{39} - 102z^{38} - 73z^{37} - 65z^{36} - 16z^{35} - 16z^{34} - 28z^{33} + 15z^{32} + 15z^{31} + 8z^{30} + 8z^{29} + 8z^{28} + 32z^{27} + 75z^{26} + 104z^{25} + 112z^{24} + 155z^{23} + 170z^{22} + 158z^{21} + 201z^{20} + 180z^{19} + 164z^{18} + 164z^{17} + 164z^{16} + 164z^{15} + 164z^{14} + 179z^{13} + 199z^{12} + 199z^{11} + 199z^{10} + 199z^{9} + 199z^{8} + 185z^{7} + 161z^{6} + 118z^{5} + 89z^{4} + 81z^{3} + 31z^{2} + 31z + 43$

[130]:
```
xi.conjugate()==xi
```

[130]: True

Without looking to the the monomials we can also direclty look for coefficents not in $\mathbb{Z}$

[139]:
```
[i for i in range(euler_phi(n)) if not (xi[i] in ZZ) ]
```

[139]: []

Infact the list is empty