UNIVERSITÀ DI TRENTO

# Greither unit undex

Giacomo Borin
Dipartimento di Matematica
23 aprile 2021

# Introduzione

In questo lavoro ho rielaborato l'articolo:

Cornelius Greither. "Improving Ramachandra's and Levesque's unit index". English. In: *Number theory. Fifth conference of the Canadian Number Theory Association, Ottawa, Ontario, Canada, August 17–22, 1996*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999, pp. 111–120. ISBN: 0-8218-0964-4/pbk

Completando i prerequisiti richiesti per la comprensione e implementando alcuni calcoli in

In questo lavoro ho rielaborato l'articolo:

Cornelius Greither. "Improving Ramachandra's and Levesque's unit index". English. In: *Number theory. Fifth conference of the Canadian Number Theory Association, Ottawa, Ontario, Canada, August 17–22, 1996*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999, pp. 111–120. ISBN: 0-8218-0964-4/pbk

Completando i prerequisiti richiesti per la comprensione e implementando alcuni calcoli in sage

# Bibliografia I


- K. Ramachandra. "On the units of cyclotomic fields". English. In: *Acta Arith.* 12 (1966), pp. 165–173. ISSN: 0065-1036; 1730-6264/e.
- W. Sinnott. *On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field*. English. Theorie des nombres, Semin. Delange-Pisot-Poitou, Paris 1979-80, Prog. Math. 12, 277-286 (1981). 1981.
- Lawrence C. Washington. *Introduction to cyclotomic fields*. English. Vol. 83. Springer, New York, NY, 1982.

# Prereqisiti

**Primo oggetto di interesse: $E_K$**

Il gruppo delle unità di $K$, il sottocampo reale massimo di $\mathbb{Q}(\zeta_n)$

- $\zeta_n$ l'$n$-esima radice ciclotomica (con $n \not\equiv 2 \mod 4$)
- $K = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$
- $O_K = \mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$
- $E_K = O_K^*$ , cioè l'insieme degli elementi invertibili

Salta dimostrazione

**Primo oggetto di interesse: $E_K$**

Il gruppo delle unità di $K$, il sottocampo reale massimo di $\mathbb{Q}(\zeta_n)$

- $\zeta_n$ l'$n$-esima radice ciclotomica (con $n \not\equiv 2 \mod 4$)
- $K = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$
- $O_K = \mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$
- $E_K = O_K^*$ , cioè l'insieme degli elementi invertibili

Salta dimostrazione

# Il gruppo delle unità

**Primo oggetto di interesse: $E_K$**

Il gruppo delle unità di $K$, il sottocampo reale massimo di $\mathbb{Q}(\zeta_n)$

- $\zeta_n$ l'$n$-esima radice ciclotomica (con $n \not\equiv 2 \mod 4$)
- $K = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$
- $O_K = \mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$
- $E_K = O_K^*$ , cioè l'insieme degli elementi invertibili

Salta dimostrazione

**Primo oggetto di interesse: $E_K$**

Il gruppo delle unità di $K$, il sottocampo reale massimo di $\mathbb{Q}(\zeta_n)$

- $\zeta_n$ l'$n$-esima radice ciclotomica (con $n \not\equiv 2 \mod 4$)
- $K = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$
- $O_K = \mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$
- $E_K = O_K^*$ , cioè l'insieme degli elementi invertibili

Salta dimostrazione

**Primo oggetto di interesse: $E_K$**

Il gruppo delle unità di $K$, il sottocampo reale massimo di $\mathbb{Q}(\zeta_n)$

- $\zeta_n$ l'$n$-esima radice ciclotomica (con $n \not\equiv 2 \mod 4$)
- $K = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$
- $O_K = \mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$
- $E_K = O_K^*$ , cioè l'insieme degli elementi invertibili

Salta dimostrazione

## Dimostrazione.

- $\zeta_n + \zeta_n^{-1}$ è **reale**:

$$\overline{\zeta_n + \zeta_n^{-1}} = \overline{\zeta_n} + \overline{\zeta_n}^{-1} = \zeta_n^{-1} + \zeta_n$$

- L'indice $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : K]$ vale **2**, ed è quindi minimale. Il suo polinomio minimo è:

$$f(x) = (x - \zeta)(x - \zeta^{-1}) = x^2 - (\zeta + \zeta^{-1})x + 1$$

## Dimostrazione.

- $\zeta_n + \zeta_n^{-1}$ è **reale**:

$$\overline{\zeta_n + \zeta_n^{-1}} = \overline{\zeta_n} + \overline{\zeta_n}^{-1} = \zeta_n^{-1} + \zeta_n$$

- L'indice $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : K]$ vale **2**, ed è quindi minimale. Il suo polinomio minimo è:

$$f(x) = (x - \zeta)(x - \zeta^{-1}) = x^2 - (\zeta + \zeta^{-1})x + 1$$

## Dimostrazione.

- $\zeta_n + \zeta_n^{-1}$ è **reale**:

$$\overline{\zeta_n + \zeta_n^{-1}} = \overline{\zeta_n} + \overline{\zeta_n}^{-1} = \zeta_n^{-1} + \zeta_n$$

- L'indice $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : K]$ vale **2**, ed è quindi minimale. Il suo polinomio minimo è:

$$f(x) = (x - \zeta)(x - \zeta^{-1}) = x^2 - (\zeta + \zeta^{-1})x + 1$$

## Dimostrazione.

- Un sottocampo con queste caratteristiche è **unico**:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\zeta) & \\
K \arrow[ur, "2"] \arrow[r] & H \arrow[u, "2"] & K' \arrow[ul, "2"'] \arrow[l] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

## Dimostrazione.

- Un sottocampo con queste caratteristiche è **unico**:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q}(\zeta) & \\ K \arrow[ur, "2"] \arrow[r] & H \arrow[u, "2"] & K' \arrow[ul, "2"'] \arrow[l] \\ & \mathbb{Q} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\square$

## Gruppo di Galois di $K$

**Proposizione**

*Il gruppo di Galois di $K/\mathbb{Q}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_n^*/\{\pm 1\}$*

D'ora in poi indicheremo $G_0 := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ e $G := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$

### Proposizione

*Il gruppo di Galois di $K/\mathbb{Q}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_n^*/\{\pm 1\}$*

D'ora in poi indicheremo $G_0 := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ e $G := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$

### Definizione

Se $\mathbb{K}$ è un campo numerico possiamo definire l'**ideal class group** come il quoziente $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}/\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ dove:

$\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ è il gruppo degli ideali frazionari non nulli di $O_{\mathbb{K}}$,

$\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ è il gruppo degli ideali principali

Si può mostrare che questo gruppo è finito e definiamo il **numero delle classi** come:

$$h_K = |\mathcal{F}_{\mathbb{K}}/\mathcal{P}_{\mathbb{K}}|$$

**Definizione**

Se $\mathbb{K}$ è un campo numerico possiamo definire l'**ideal class group** come il quoziente $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}/\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ dove:

$\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ è il gruppo degli ideali frazionari non nulli di $O_{\mathbb{K}}$,

$\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ è il gruppo degli ideali principali

Si può mostrare che questo gruppo è finito e definiamo il **numero delle classi** come:

$$h_K = |\mathcal{F}_{\mathbb{K}}/\mathcal{P}_{\mathbb{K}}|$$

Se considero il gruppo generato da $\{-1, \zeta, 1-\zeta^a \text{ for } a = 1, ..., n-1\}$ e lo interseco con $E_K$ ottengo il gruppo delle **unità circolari**

Sinnot ha mostrato che esiste $a \in \mathbb{Z}$ tale che:

$$[E_K : C_K] = 2^a k_K$$

# Unità circolari

Se considero il gruppo generato da $\{-1, \zeta, 1-\zeta^a \text{ for } a = 1, ..., n-1\}$ e lo interseco con $E_K$ ottengo il gruppo delle **unità circolari**

Sinnot ha mostrato che esiste $a \in \mathbb{Z}$ tale che:

$$[E_K : C_K] = 2^a k_K$$

Costruire **esplicitamente** un gruppo $C'$ con indice $[E_K : C']$ finito che sia **ottimale**

**Definizione**

Dato un gruppo $X$ e un campo $\mathbb{F}$ un carattere di Dirchlet è un omomorfismo di gruppi $\chi : X \to \mathbb{F}^*$

Possiamo anche usare l'isomorfismo $G_0 \simeq \mathbb{Z}_n^*$ e definire $\chi$ come omomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_n$ in $\mathbb{C}$ (con $\chi$ nulla sugli elementi invertibili)

Il 'periodo' di un caratte è detto conduttore (in inglese **conductor**) e si indica con $f_\chi$

### Definizione

Dato un gruppo $X$ e un campo $\mathbb{F}$ un carattere di Dirchlet è un omomorfismo di gruppi $\chi : X \to \mathbb{F}^*$

Possiamo anche usare l'isomorfismo $G_0 \simeq \mathbb{Z}_n^*$ e definire $\chi$ come omomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_n$ in $\mathbb{C}$ (con $\chi$ nulla sugli elementi invertibili)

Il 'periodo' di un caratte è detto conduttore (in inglese **conductor**) e si indica con $f_\chi$

**Definizione**

Dato un gruppo $X$ e un campo $\mathbb{F}$ un carattere di Dirchlet è un omomorfismo di gruppi $\chi : X \to \mathbb{F}^*$

Possiamo anche usare l'isomorfismo $G_0 \simeq \mathbb{Z}_n^*$ e definire $\chi$ come omomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_n$ in $\mathbb{C}$ (con $\chi$ nulla sugli elementi invertibili)

Il 'periodo' di un caratte è detto conduttore (in inglese **conductor**) e si indica con $f_\chi$

**Definizione**

Dati un gruppo moltiplicativo $X$ e un anello $R$ possiamo definire l'**anello gruppale** $R[X]$ come l'$R$-modulo libero con base $X$, sul quale definiamo un operazione di moltiplicazione inducendola da quella di $X$

Nel nostro caso useremo $\mathbb{Z}[G_0]$ e $\mathbb{Z}[G]$, sui quali possiamo sempre esterndere il carattere $\chi$ (perchè definito sulla base)

**Definizione**

Dati un gruppo moltiplicativo $X$ e un anello $R$ possiamo definire l'**anello gruppale** $R[X]$ come l'$R$-modulo libero con base $X$, sul quale definiamo un operazione di moltiplicazione inducendola da quella di $X$

Nel nostro caso useremo $\mathbb{Z}[G_0]$ e $\mathbb{Z}[G]$, sui quali possiamo sempre esterndere il carattere $\chi$ (perchè definito sulla base)

## Notazione

Dati $z \in \mathbb{Q}(\zeta)$ e $f \in \mathbb{Z}[G_0]$ è ben definita la nutazione esponenziale $x^f$, infatti dati $g \in G_0$ abbiamo una buona definizione per $z^g = g(z)$ e $z^{g_1+g_2} = z^{g_1} z^{g_2}$

**Notazione**

Dati $z \in \mathbb{Q}(\zeta)$ e $f \in \mathbb{Z}[G_0]$ è ben definita la nutazione esponenziale $x^f$, infatti dati $g \in G_0$ abbiamo una buona definizione per $z^g = g(z)$ e $z^{g_1+g_2} = z^{g_1} z^{g_2}$

# La costruzione di Greither

Dato $n = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$ definiamo:

- $S = \{1, ..., n\}$
- $\mathcal{P}_S = \{I \mid I \subsetneq S\}$
- $n_I = \prod_{i \in I} p_i^{e_i}$

Consideriamo una funzione

$$\beta : \mathcal{P}_S \to \mathbb{Z}[G_0]$$

che utilizzeremo per costruire il sottogruppo cercato.

**Definizione**

$\beta$ si dice moltiplicativa se $\beta(\emptyset) = 1$ e dati $I, J$ con intersezione vuota abbiamo $\beta(I \cup J) = \beta(I)\beta(J)$.

# La funzione $\beta$

Dato $n = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$ definiamo:

- $S = \{1, ..., n\}$
- $\mathcal{P}_S = \{I \mid I \subsetneq S\}$
- $n_I = \prod_{i \in I} p_i^{e_i}$

Consideriamo una funzione

$$\beta : \mathcal{P}_S \to \mathbb{Z}[G_0]$$

che utilizzeremo per costruire il sottogruppo cercato.

**Definizione**

$\beta$ si dice moltiplicativa se $\beta(\emptyset) = 1$ e dati $I, J$ con intersezione vuota abbiamo $\beta(I \cup J) = \beta(I)\beta(J)$.

# La funzione $\beta$

Dato $n = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$ definiamo:

- $S = \{1, \ldots, n\}$
- $\mathcal{P}_S = \{I \mid I \subsetneq S\}$
- $n_I = \prod_{i \in I} p_i^{e_i}$

Consideriamo una funzione

$$\beta : \mathcal{P}_S \to \mathbb{Z}[G_0]$$

che utilizzeremo per costruire il sottogruppo cercato.

**Definizione**

$\beta$ si dice moltiplicativa se $\beta(\emptyset) = 1$ e dati $I, J$ con intersezione vuota abbiamo $\beta(I \cup J) = \beta(I)\beta(J)$.

Definiamo ora, per ogni $a \in (1, n/2)$ coprimo con $n$ l'unità reale:

$$\xi_a(\beta) := \zeta^{d_a(\beta)} \frac{\sigma_a(z(\beta))}{z(\beta)} \text{ con } d_a(\beta) = (1-a)\frac{t}{2}$$

dove abbiamo che

- $z_I := 1 - \zeta^{n_I}$
- $z(\beta) := \prod_{i \in I} z_I^{\beta(I)}$
- $\sigma_a(\zeta) = \zeta^a$

$C_\beta$ è il gruppo generato da:

$$-1 \text{ e } \xi_a(\beta) \text{ per } 1 < a < n/2 \text{ e } (a, n) = 1$$

Per l'indice useremo la notazione

$$[E_K : C_\beta] = h_K i_\beta$$

$C_\beta$ è il gruppo generato da:

$$-1 \text{ e } \xi_a(\beta) \text{ per } 1 < a < n/2 \text{ e } (a,n) = 1$$

Per l'indice useremo la notazione

$$[E_K : C_\beta] = h_K i_\beta$$

Possiamo limitarci a definire $\beta$ su $\mathbb{Z}[G]$ e poi considerare un sollevamento (in inglese lift)

**Lemma**

*Se due funzioni $\beta_1$ e $\beta_2$ coincidono su $\mathbb{Q}(\zeta_{n/n_l})^a$ per ogni $l \in \mathcal{P}_S$ allora le unità $\xi_a(\beta)$ sono uniche a meno del segno*

[a] $\zeta_{n/n_l} = \zeta_n^{n_l}$

Possiamo limitarci a definire $\beta$ su $\mathbb{Z}[G]$ e poi considerare un sollevamento (in inglese lift)

### Lemma

*Se due funzioni $\beta_1$ e $\beta_2$ coincidono su $\mathbb{Q}(\zeta_{n/n_I})$*[a] *per ogni $I \in \mathcal{P}_S$ allora le unità $\xi_a(\beta)$ sono uniche a meno del segno*

[a] $\zeta_{n/n_I} = \zeta_n^{n_I}$

Dati due insiemi $Z$, $Y$ e una funzione $\phi : Y \to Z$ diciamo che $f' : X \to Y$ è un **sollevamento** di $f : X \to Z$ se commuta:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Nel nostro caso $\phi$ è il morfismo indotto dalla proiezione

$$G_0 \simeq \mathbb{Z}_n^* \to \mathbb{Z}_n^* / \pm 1 \simeq G$$

# Precisazione sul sollevamento

Dati due insiemi $Z$, $Y$ e una funzione $\phi : Y \to Z$ diciamo che $f' : X \to Y$ è un **sollevamento** di $f : X \to Z$ se commuta:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Nel nostro caso $\phi$ è il morfismo indotto dalla proiezione

$$G_0 \simeq \mathbb{Z}_n^* \to \mathbb{Z}_n^* / \pm 1 \simeq G$$

# Calcolo degli indici

### Teorema

*Data una funzione* $\beta : \mathcal{P}_S \to \mathbb{Z}[G]$ *segue che*

$$i_\beta = \prod_{\substack{\chi \neq 1 \\ pari}} \left( \sum_{\substack{I \in \mathcal{P}_S \\ (f_\chi, n_I) = 1}} \phi(n_I) \cdot \chi(\beta(I)) \cdot \prod_{i \notin I} (1 - \chi^{-1}(p_i)) \right) \quad (1)$$

Dove abbiamo che:

- $\phi$ è la funzione di Eulero
- $\chi$ si dice *pari* se $\chi(-1) = 1$
- Con $\chi^{-1}$ si intende il carattere che vale $1/\chi$ sugli elementi invertibili

### Teorema

*Data una funzione* $\beta : \mathcal{P}_S \to \mathbb{Z}[G]$ *segue che*

$$i_\beta = \prod_{\substack{\chi \neq 1 \\ pari}} \left( \sum_{\substack{I \in \mathcal{P}_S \\ (f_\chi, n_I)=1}} \phi(n_I) \cdot \chi(\beta(I)) \cdot \prod_{i \notin I} (1 - \chi^{-1}(p_i)) \right) \tag{1}$$

Dove abbiamo che:

- $\phi$ è la funzione di Eulero
- $\chi$ si dice *pari* se $\chi(-1) = 1$
- Con $\chi^{-1}$ si intende il carattere che vale $1/\chi$ sugli elementi invertibili

# Caso generale

Dato un campo numerico $L$ consideriamo un insieme di unità indipendenti $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_r\} \subset L$ e siano $\{\sigma_1, ..., \sigma_{r+1}\}$ le sue immersioni (embedding) in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Poniamo $\delta_j$ uguale a 1 se $\sigma_j$ è reale e a 2 altrimenti. Allora il suo **regolatore** è definito come

$$R_L(\epsilon_1, ..., \epsilon_r) = |\det(\delta_i \log|\epsilon_j^{\sigma_i}|)_{1 \le i,j \le r}|$$

**Lemma**

*Dati i gruppi $A \subset B$ di indice finito e generati da unità indipendenti di $L$ vale che:*

$$[B : A] = \frac{R_L(\epsilon_1, ..., \epsilon_r)}{R_L(\mu_1, ..., \mu_r)} \tag{2}$$

# Caso generale

Dato un campo numerico $L$ consideriamo un insieme di unità indipendenti $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_r\} \subset L$ e siano $\{\sigma_1, ..., \sigma_{r+1}\}$ le sue immersioni (embedding) in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Poniamo $\delta_j$ uguale a 1 se $\sigma_j$ è reale e a 2 altrimenti. Allora il suo **regolatore** è definito come

$$R_L(\epsilon_1, ..., \epsilon_r) = \left| \det(\delta_i \log |\epsilon_j^{\sigma_i}|)_{1 \leq i,j \leq r} \right|$$

## Lemma

*Dati i gruppi $A \subset B$ di indice finito e generati da unità indipendenti di $L$ vale che:*

$$[B : A] = \frac{R_L(\epsilon_1, ..., \epsilon_r)}{R_L(\mu_1, ..., \mu_r)} \tag{2}$$

Usando l'ultimo lemma possiamo vedere che per dimostrare il teorema basta mostrare che

$$R(\xi_a(\beta)) = \pm R_K h_K A$$

con $(a, n) = 1$ , $1 < a < n/2$ e $A$ è la parte destra dell'equazione 1.
Inoltre poi si procede (in modo molto tecnico) come nel capitolo 8 di [4] e usando:

Formula

$$\sum_{(a,n)=1} \chi^{-1}(a) \log |z^{\sigma_a \gamma}| = \chi(\gamma) \sum_{(a,n)=1} \chi^{-1}(a) \log |z^{\sigma_a}| \qquad (3)$$

Usando l'ultimo lemma possiamo vedere che per dimostrare il teorema basta mostrare che

$$R(\xi_a(\beta)) = \pm R_K h_K A$$

con $(a, n) = 1$ , $1 < a < n/2$ e $A$ è la parte destra dell'equazione 1. Inoltre poi si procede (in modo molto tecnico) come nel capitolo 8 di [4] e usando:

## Formula

$$\sum_{(a,n)=1} \chi^{-1}(a) \log |z^{\sigma_a \gamma}| = \chi(\gamma) \sum_{(a,n)=1} \chi^{-1}(a) \log |z^{\sigma_a}| \quad (3)$$

**Teorema**

*Se assumiamo che $\beta : \mathcal{P}_S \to \mathbb{Z}[G]$ sia moltiplicativa abbiamo che:*

$$i_\beta = \prod_{\substack{\chi \neq 1 \\ pari}} \left( \prod_{p_i \nmid f_\chi} \left( \phi(p_i^{e_i}) \cdot \chi(\beta(i)) + 1 - \chi^{-1}(p_i) \right) \right) \qquad (4)$$

Dove $\beta(i)$ indica $\beta(\{i\})$

Se poniamo $\beta$ costante ad 1 otteniamo l'indice delle unità per Ramachandra da [2]:

$$[E_K : C_R] = h_K \cdot \prod_{\substack{\chi \neq 1 \\ \text{even}}} \left( \prod_{p_i \nmid f_\chi} \left( \phi(p_i^{e_i}) + 1 - \chi(p_i) \right) \right) \tag{5}$$

Dove $C_R$ è il gruppo generato da $-1$ e le unità della forma

$$\xi_a := \zeta^{d_a} \prod_{I \in \mathcal{P}_S} \frac{1 - \zeta^{a n_I}}{1 - \zeta^{n_I}} \text{ con } d_a = \frac{1}{2}(1-a) \sum_{I \in \mathcal{P}_S} n_I$$

# Definizione di $\beta$

Costruiamo $\beta$ moltiplicativa, quindi definendo $\beta(i)$ per ogni $i \in \{1, ..., s\}$ :
Definiamo $G_i$ come il gruppo di Galois: $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{n/p_i^{e_i}})^+/\mathbb{Q})$ e consideriamo l'isomofismo di Frobenius:

$$F_i : G_i \to G_i \text{ con } \alpha \mapsto \alpha^{p_i}$$

Definiamo il suo elemento traccia $N_{F_i}$ come:

$$N_{F_i} := 1 + F_i + ... + F_i^{\mathrm{ord}(F_i)-1} \in \mathbb{Z}[G_i]$$

Costruiamo $\beta$ moltiplicativa, quindi definendo $\beta(i)$ per ogni $i \in \{1, ..., s\}$ :
Definiamo $G_i$ come il gruppo di Galois: $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{n/p_i^{e_i}})^+/\mathbb{Q}))$ e consideriamo l'isomofismo di Frobenius:

$$F_i : G_i \to G_i \text{ con } \alpha \mapsto \alpha^{p_i}$$

Definiamo il suo elemento traccia $N_{F_i}$ come:

$$N_{F_i} := 1 + F_i + ... + F_i^{\mathrm{ord}(F_i)-1} \in \mathbb{Z}[G_i]$$

# Definizione di $\beta$

Consideriamo ora un sollevamento (lift) $\overline{N_i}$ di $N_{F_i}$ in $\mathbb{Z}[G_0]$ e definiamo

$$\beta(i) = \overline{N_i}$$

Ovviamente $\beta$ non è unica, ma per il lemma visto prima lo sono le unità a meno di un segno, quindi lo è $C_\beta$

Consideriamo ora un sollevamento (lift) $\overline{N_i}$ di $N_{F_i}$ in $\mathbb{Z}[G_0]$ e definiamo

$$\beta(i) = \overline{N_i}$$

Ovviamente $\beta$ non è unica, ma per il lemma visto prima lo sono le unità a meno di un segno, quindi lo è $C_\beta$

Dato un primo $p$ in $\mathbb{Z}$ e la sua estensione come ideale $pO_{\mathbb{K}}$ in $O_K$, dato che qeusto è un dominio di Dedekin possiamo fattorizzare:

$$pO_{\mathbb{K}} = \prod_{j=1}^{g} \mathfrak{p}_j^{\epsilon_j} \tag{6}$$

**Definizione**

Il numero $g$ si dice essere **grado di decomposizione** di $p$ nell'estensione $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$.
Per ogni $j = 1, ..., g$, $\epsilon_j$ si dice essere **indice di ramificazione** di $\mathfrak{p}_j$ in $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$.
Per ogni $j = 1, ..., g$, $f_j := [O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}_j : \mathbb{Z}_p]$ si dice **grado di inerzia**.

Dato un primo $p$ in $\mathbb{Z}$ e la sua estensione come ideale $pO_{\mathbb{K}}$ in $O_K$, dato che qeusto è un dominio di Dedekin possiamo fattorizzare:

$$pO_{\mathbb{K}} = \prod_{j=1}^{g} \mathfrak{p}_j^{\epsilon_j} \tag{6}$$

## Definizione

Il numero $g$ si dice essere **grado di decomposizione** di $p$ nell'estensione $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$.
Per ogni $j = 1, ..., g$, $\epsilon_j$ si dice essere **indice di ramificazione** di $\mathfrak{p}_j$ in $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$.
Per ogni $j = 1, ..., g$, $f_j := [O_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}_j : \mathbb{Z}_p]$ si dice **grado di inerzia**.

# Decomposizione in $\mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$

Si può provare che se $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$ è un'estensione di Galois (come $K/Q$) $\epsilon_j, f_j$ non dipendono da $j$ e quindi

$$n = \epsilon f g$$

Per $i \in 1, ..., s$ definiamo $g_i, f_i, \epsilon_i$ essere i gradi definiti prima per il primo $p_i$ in $K/\mathbb{Q}$.
Queste costanti sono fortemente in relazione con altri oggetti visti finora, ad esempio si può provare:

- Se $X$ è l'insieme dei carattari di $K/\mathbb{Q}$ vale $g_i = |\{\chi \in X \,|\, \chi(p_i) = 1\}$
- Il grado di inerzia $f_i$ è uguale all'ordine del morphismo di Frobenius $F_i$

Si può provare che se $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$ è un'estensione di Galois (come $K/Q$) $\epsilon_j, f_j$ non dipendono da $j$ e quindi

$$n = \epsilon f g$$

Per $i \in 1, ..., s$ definiamo $g_i, f_i, \epsilon_i$ essere i gradi definiti prima per il primo $p_i$ in $K/\mathbb{Q}$.

Queste costanti sono fortemente in relazione con altri oggetti visti finora, ad esempio si può provare:

- Se $X$ è l'insieme dei carattari di $K/\mathbb{Q}$ vale $g_i = |\{\chi \in X \,|\, \chi(p_i) = 1\}$
- Il grado di inerzia $f_i$ è uguale all'ordine del morphismo di Frobenius $F_i$

Si può provare che se $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$ è un'estensione di Galois (come $K/Q$) $\epsilon_j, f_j$ non dipendono da $j$ e quindi

$$n = \epsilon f g$$

Per $i \in 1, \ldots, s$ definiamo $g_i, f_i, \epsilon_i$ essere i gradi definiti prima per il primo $p_i$ in $K/\mathbb{Q}$.
Queste costanti sono fortemente in relazione con altri oggetti visti finora, ad esempio si può provare:

- Se $X$ è l'insieme dei carattari di $K/\mathbb{Q}$ vale $g_i = |\{\chi \in X \mid \chi(p_i) = 1\}$
- Il grado di inerzia $f_i$ è uguale all'ordine del morphismo di Frobenius $F_i$

# Risultato finale

**Teorema**

*Dato $C_\beta$ definito come prima abbiamo che*

$$i_\beta = \prod_{i=1}^{s} \epsilon_i^{g_i-1} f_i^{2g_i-1}$$

Questo indice si può dire ottimale perchè non solo rende più semplice la sua fattorizzazione (basta sapere quella di $\epsilon_i$ e $f_i$), ma inoltre sappiamo che questi dividono $n$, quindi i fattori di $i_\beta$ sono solo i fattori di $n$.

**Teorema**

*Dato $C_\beta$ definito come prima abbiamo che*

$$i_\beta = \prod_{i=1}^{s} \epsilon_i^{g_i - 1} f_i^{2g_i - 1}$$

Questo indice si può dire ottimale perchè non solo rende più semplice la sua fattorizzazione (basta sapere quella di $\epsilon_i$ e $f_i$), ma inoltre sappiamo che questi dividono $n$, quindi i fattori di $i_\beta$ sono solo i fattori di $n$.

# Implementazione dei calcoli

# Prova di inserimento codice

Vediamo ora l'implementazione di alcuni calcoli in Sage

```
sage: K.<b> =
        NumberField(x^3 - 3, 'a').galois_closure()
sage: G = K.galois_group()
sage: P = K.primes_above(3)[0]
sage: s = hom(K, K, 1/18*b^4 - 1/2*b)
sage: G(s).ramification_degree(P)
4
```

# Tabella dei contenuti