Greither unit undex

Giacomo Borin

Università di Trento

13 aprile 2021

Introduzione

In questo lavoro ho rielaborato l'articolo:

Cornelius Greither. "Improving Ramachandra's and Levesque's unit index". English. In: *Number theory. Fifth conference of the Canadian Number Theory Association, Ottawa, Ontario, Canada, August 17–22, 1996.* Providence, RI: American Mathematical Society, 1999, pp. 111–120. ISBN: 0-8218-0964-4/pbk

Completando i prerequisiti richiesti per la comprensione e implementando alcuni calcoli in

Introduzione

In questo lavoro ho rielaborato l'articolo:

Cornelius Greither. "Improving Ramachandra's and Levesque's unit index". English. In: *Number theory. Fifth conference of the Canadian Number Theory Association, Ottawa, Ontario, Canada, August 17–22, 1996*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999, pp. 111–120. ISBN: 0-8218-0964-4/pbk

Completando i prerequisiti richiesti per la comprensione e implementando alcuni calcoli in sage

Introduzione

In questo lavoro ho rielaborato l'articolo:

Cornelius Greither. "Improving Ramachandra's and Levesque's unit index". English. In: *Number theory. Fifth conference of the Canadian Number Theory Association, Ottawa, Ontario, Canada, August 17–22, 1996*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999, pp. 111–120. ISBN: 0-8218-0964-4/pbk

Completando i prerequisiti richiesti per la comprensione e implementando alcuni calcoli in sage

Section 1

Prereqisiti

Il gruppo delle unità

Primo oggetto di interesse: E_K

Il gruppo delle unità di K, il sottocampo reale massimo di $\mathbb{Q}(\zeta_n)$

- ζ_n l'n-esima radice ciclotomica (con $n \not\equiv 2 \mod 4$)
- $K = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$
- $O_K = \mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$
- $E_K = O_K^*$, cioè l'insieme degli elementi invertibili

Il gruppo delle unità

Primo oggetto di interesse: E_K

Il gruppo delle unità di K, il sottocampo reale massimo di $\mathbb{Q}(\zeta_n)$

- ζ_n l'n-esima radice ciclotomica (con $n \not\equiv 2 \mod 4$)
- $K = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$
- $O_K = \mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$
- $E_K = O_K^*$, cioè l'insieme degli elementi invertibili

Il gruppo delle unità

Primo oggetto di interesse: E_K

Il gruppo delle unità di K, il sottocampo reale massimo di $\mathbb{Q}(\zeta_n)$

- ζ_n l'n-esima radice ciclotomica (con $n \not\equiv 2 \mod 4$)
- $K = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$
- $O_K = \mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$
- $E_K = O_K^*$, cioè l'insieme degli elementi invertibili

Il gruppo delle unità

Primo oggetto di interesse: E_K

Il gruppo delle unità di K, il sottocampo reale massimo di $\mathbb{Q}(\zeta_n)$

- ζ_n l'n-esima radice ciclotomica (con $n \not\equiv 2 \mod 4$)
- $K = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$
- $O_K = \mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$
- $E_K = O_K^*$, cioè l'insieme degli elementi invertibili

Primo oggetto di interesse: E_K

Il gruppo delle unità di K, il sottocampo reale massimo di $\mathbb{Q}(\zeta_n)$

- ζ_n l'n-esima radice ciclotomica (con $n \not\equiv 2 \mod 4$)
- $K = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$
- $O_K = \mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$
- $E_K = O_K^*$, cioè l'insieme degli elementi invertibili

Dimostrazione:

- $\zeta_n + \zeta_n^{-1}$ è **reale**:

$$\overline{\zeta_n + \zeta_n^{-1}} = \overline{\zeta_n} + \overline{\zeta_n}^{-1} = \zeta_n^{-1} + \zeta_n$$

- L'indice $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : K]$ vale $\mathbf{2}$, ed è quindi minimale. Il suo polinomio minimo è:

$$f(x) = (x - \zeta)(x - \zeta^{-1}) = x^2 - (\zeta + \zeta^{-1})x + 1$$

Dimostrazione:

- $\zeta_n + \zeta_n^{-1}$ è **reale**:

$$\overline{\zeta_n + \zeta_n^{-1}} = \overline{\zeta_n} + \overline{\zeta_n}^{-1} = \zeta_n^{-1} + \zeta_n$$

- L'indice $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : K]$ vale **2**, ed è quindi minimale. Il suo polinomio minimo è:

$$f(x) = (x - \zeta)(x - \zeta^{-1}) = x^2 - (\zeta + \zeta^{-1})x + 1$$

Dimostrazione:

- $\zeta_n + \zeta_n^{-1}$ è **reale**:

$$\overline{\zeta_n + \zeta_n^{-1}} = \overline{\zeta_n} + \overline{\zeta_n}^{-1} = \zeta_n^{-1} + \zeta_n$$

- L'indice $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : K]$ vale **2**, ed è quindi minimale. Il suo polinomio minimo è:

$$f(x) = (x - \zeta)(x - \zeta^{-1}) = x^2 - (\zeta + \zeta^{-1})x + 1$$

- Un sottocampo con queste caratteristiche è **unico**

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\zeta) & \\
K \arrow[ur, "2"] \arrow[r] & H \arrow[u, "2"] & K' \arrow[ul, "2"'] \arrow[l] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

- Un sottocampo con queste caratteristiche è **unico**

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\zeta) & \\
K \arrow[ur, "2"] \arrow[r] & H \arrow[u, "2"] & K' \arrow[ul, "2"'] \arrow[l] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$