Ιωάννης Δάρας (03115018, el15018@central.ntua.gr, daras.giannhs@gmail.com)

Άσκηση 1

0.1

$$E[X_t] = E[Asin(\omega t + \Theta)] = E[A] \cdot E[sin(\omega t + \Theta)]$$

Στην παραπάνω παράσταση χρησιμοποιήσαμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1 *Αν δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε $E[XY] = E[X]E[Y]$*

$$E[X_t] = \frac{1}{\lambda} E[sin(\omega t + \Theta)] = E[sin(\omega t + \Theta)]$$

$$E[X_t] = \int_{-\infty}^{\infty} sin(\omega t + \theta) f_{\Theta}(\theta) \mathrm{d}\theta = \int_{0}^{2\pi} sin(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} \mathrm{d}\theta = 0$$

0.2

$$E[X_t \cdot X_s] = E[A^2 \cdot sin(\omega t + \Theta) \cdot sin(\omega s + \Theta)] = E[A^2] \cdot E[sin(\omega t + \Theta) \cdot sin(\omega s + \Theta)]$$

Στην παραπάνω παράσταση χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα 1 και το Θεώρημα 2 που παραθέτουμε παρακάτω.

Θεώρημα 2 *Αν δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες τότε και $g(X), f(Y)$ ανεξάρτητες όπου g, f οποιεσδήποτε συναρτήσεις.*

Τα θεωρήματα 1, 2 είναι γνωστά από το μάθημα των Πιθανοτήτων και συνεπώς η απόδειξη τους παραλείπεται. Έχουμε:

$$V(A) = E[A^2] - E[A]^2$$

Όμως: $A \sim Exp(\lambda)$ για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$V[A] = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$E[A] = \frac{1}{\lambda}$$

Άρα:

$$E[A^2] = \frac{2}{\lambda^2}$$

Έτσι, έχουμε:

$$E[X_t \cdot X_s] = E[sin(\omega t + \Theta) \cdot sin(\omega s + \Theta)] \cdot \frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} E[cos(\omega(t-s)) - cos(\omega(t+s) + 2\Theta)]$$

$$E[X_t \cdot X_s] = cos(\omega(t-s)) - E[cos(\omega(t+s) + 2\Theta)]$$

Στην παραπάνω παράσταση ο δεύτερος όρος μηδενίζεται με πανομοιότυπο με εκείνον που ακολουθήσαμε στο ερώτημα 1.1. Έτσι, προκύπτει τελικά ότι:

$$E[X_t \cdot X_s] = cos\big(\omega(t-s)\big)$$

Άσκηση 5

Η άσκηση αυτή αναλύθηκε στην 1η εργαστηριακή άσκηση. Μεταφέρουμε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης από την άσκηση αυτή:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 7

0.3

Η κάθε κατάσταση κωδικοποιεί τον αριθμό των συνεχόμενων 6αριών που έχουμε φέρει. Έτσι, από μια κατάσταση με πιθανότητα $\frac{1}{6}$ πάμε στην επόμενη της (αν φέρουμε 6) ή με πιθανότητα $\frac{5}{6}$ (αν φέρουμε οτιδήποτε άλλο) γυρίζουμε στην κατάσταση 0. Η κατάσταση 5 μένει με πιθανότητα 1 στον εαυτό της, αφού το πείραμα έχει τελειώσει. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

0.4

Σε αυτό το πείραμα, οι καταστάσεις $\mathbb{X}$ μοντελοποιούν τα ακόλουθα:

- 0: κανένα στοιχείο της ζητούμενης ακολουθίας
- 1: 6

- 2: 65
- 3: 656
- 4: 6565
- 5: 65656

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 4/6 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 12

Στο πείραμα αυτό κάθε κατάσταση του $\mathbb{X}$ μοντελοποιεί τον αριθμό των σωματιδίων που ανήκουν στη διαμέριση A. Αφού σε κάθε βήμα η διαμέριση μπορεί να έχει είτε ένα σωματίδιο λιγότερο είτε ένα σωματίδιο περισσότερο, οι πιθανότητες μετάβασης σε μη γειτονικές καταστάσεις είναι 0. Αντίθετα, για τις γειτονικές καταστάσεις η πιθανότητα είναι $\frac{1}{2}$. Φυσικά, για την πρώτη και την τελευταία κατάσταση (0 σωματίδια ή N σωματίδια αντίστοιχα) με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ μεταβαίνεις στη γειτονική τους κατάσταση και με $\frac{1}{2}$ μένεις στην ίδια.

Συνοπτικά:

$$p(i,j) = \begin{cases} 1/2 & |j-i| = 1 \wedge i > 0 \wedge i < N \\ 1/2 & j = i = 0 \wedge i = j = N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Βιβλιογραφία

[1] Λουλάκης, Μ., 2015. Στοχαστικές Διαδικασίες. [ηλεκτρ. βιβλ.] Αθήνα:Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών