Στοχαστικές Διαδικασίες
3η Γραπτή Σειρά Ασκήσεων

Ιωάννης Δάρας (03115018, el15018@central.ntua.gr, daras.giannhs@gmail.com)

"So much of life, it seems to me, is determined by pure randomness."
—Sidney Poitier

Άσκηση 42

(α)

Ο στοχαστικός πίνακας της διαδικασίας φαίνεται ακολούθως:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο χώρος καταστάσεων είναι

$$\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Στην άσκηση 24 διαπιστώσαμε ότι η στοχαστική αυτή διαδικασία διαμερίζεται στις κλάσεις επικοινωνίας $\mathcal{C}_1 = \{1, 2\}, \mathcal{C}_2 = \{3, 4, 5\}, \mathcal{C}_3 = \{6, 7, 8\}$, εκ των οποίων η $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3$ είναι κλειστές και η $\mathcal{C}_2$ είναι ανοικτή.

Ορίζουμε τα σύνολα

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{6, 7, 8\}$$

Ορίζουμε ακόμη τον χρόνο πρώτης άφιξης στα σύνολα A, B ως:

$$T_A = \inf\{k \geq 0 : X_k \in A\}, \qquad T_B = \inf\{k \geq 0 : X_k \in B\}$$

Η πιθανότητα η διαδικασία να καταλήξει στην κλειστή κλάση A ξεκινώντας από μια κατάσταση x είναι:

$$P[T_A < \infty | X_0 = x] = P_x[T_A < \infty] = \Phi_A(x)$$

Για την $\Phi_A(x)$, από το Πόρισμα 3, έχουμε:

$$\Phi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in B \\ \sum_y p(x,y)\Phi_A(y), & x \notin A \cup B \end{cases}$$

<u>Σημαντική σημείωση:</u> Ο δεύτερος κλάδος της $\Phi_A(x)$ μπορεί να υπολογιστεί από τον τρίτο, όπως ακριβώς περιγράφεται στο Πόρισμα 3, αφήνοντας το $x \in B$. Όμως, αναμένουμε τα $\Phi_A(x) = 0, \forall x \in B$ καθώς η κλάση B είναι μια ξεχωριστή κλειστή κλάση επικοινωνίας και συνεπώς μπορούμε να γλυτώσουμε κάποιες πράξεις.

Έτσι, προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} \Phi_A(3) = 1/4\Phi_A(1) + 1/4\Phi_A(2) + 1/8\Phi_A(4) + 3/8\Phi_A(5) \\ \Phi_A(4) = 1/4\Phi_A(3) + 3/4\Phi_A(5) \\ \Phi_A(5) = 1/5\Phi_A(3) + 1/5\Phi_A(4) + 1/5\Phi_A(5) + 1/5\Phi_A(6) + 1/5\Phi_A(7) \end{cases}$$

Όμως από τον ορισμό της Φ_A έχουμε ότι: $\Phi_A(1) = \Phi_A(2) = 1$ και $\Phi_A(6) = \Phi_A(7) = \Phi_A(8) = 0$ οπότε και προκύπτει η λύση του συστήματος:

$$\Phi_A(3) = 26/41 \approx 0.634, \quad \Phi_A(4) = 14/41 \approx 0.341, \quad \Phi_A(5) = 10/41 \approx 0.244$$

(β)

Αντίστοιχα, η πιθανότητα να καταλήξει στην κλειστή κλάση B ξεκινώντας από μια κατάσταση x είναι:

$$P[T_A < \infty | X_0 = x] = P_x[T_A < \infty] = \Phi(x)$$

Για την $\Phi_B(x)$ έχουμε:

$$\Phi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \in A \\ \sum_y p(x,y)\Phi_B(y), & x \notin A \cup B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_B(3) = 1/4\Phi_B(1) + 1/4\Phi_B(2) + 1/8\Phi_B(4) + 3/8\Phi_B(5) \\ \Phi_B(4) = 1/4\Phi_B(3) + 3/4\Phi_B(5) \\ \Phi_B(5) = 1/5\Phi_B(3) + 1/5\Phi_B(4) + 1/5\Phi_B(5) + 1/5\Phi_B(6) + 1/5\Phi_B(7) \end{cases}$$

Όμως από τον ορισμό της Φ έχουμε ότι: $\Phi(1) = \Phi(2) = 0$ και $\Phi(6) = \Phi(7) = \Phi(8) = 1$
οπότε και προκύπτει η λύση του συστήματος:

$$\Phi(3) = 15/41 \approx 0.366, \quad \Phi(4) = 27/41 \approx 0.658, \quad \Phi(5) = 31/41 \approx 0.756$$

Παρατηρούμε ότι

$$\Phi_A(x) + \Phi_B(x) = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{X}$$

Αυτό είναι αναμενόμενο από την κλειστότητα των κλάσεων καθώς αν φτάσεις σε μια κλειστή κλάση η πιθανότητα να δραπετεύσεις είναι 0 και άρα 0 ειναι και η πιθανότητα να φτάσεις σε μια άλλη κλειστή κλάση.

(γ)

Έχουμε:

$$P[T_A < \infty] = P_3[T_A < \infty] \cdot P[X_0 = 3] + P_4[T_A < \infty] \cdot P[X_0 = 4] + P_5[T_A < \infty] \cdot P[X_0 = 5] \iff$$

Αφού διαλέγει ισοπίθανα ανάμεσα στις καταστάσεις: $\{3, 4, 5\}$ έχουμε: $P[X_0 = 3] = P[X_0 = 4] = P[X_0 = 5] = 1/3$

Άρα:

$$P[T_A < \infty] = 1/3P_3[T_A < \infty] + 1/3P_4[T_A < \infty] + 1/3P_5[T_A < \infty] \iff$$
$$P[T_A < \infty] = 1/3 \cdot (\Phi_A(3) + \Phi_A(4) + \Phi_A(5)) \approx 0.406$$

(δ)

Δουλεύουμε ακριβώς όπως παραπάνω.

$$P[T_B < \infty] = P_3[T_B < \infty] \cdot P[X_0 = 3] + P_4[T_B < \infty] \cdot P[X_0 = 4] + P_5[T_B < \infty] \cdot P[X_0 = 5]$$

Αφού διαλέγει ισοπίθανα ανάμεσα στις καταστάσεις $\{3, 4, 5\}$ έχουμε: $P[X_0 = 3] = P[X_0 = 4] = P[X_0 = 5] = 1/3$

Άρα:

$$P[T_B < \infty] = 1/3P_3[T_B < \infty] + 1/3P_4[T_B < \infty] + 1/3P_5[T_B < \infty] \iff$$
$$P[T_B < \infty] = 1/3\,(\Phi_B(3) + \Phi_B(4) + \Phi_B(5)) \approx 0.5853$$

(ε)

Μέχρι στιγμής, έχουμε υπολογίσει το:

$$\Phi_A(x) = P_x[T_A < \infty]$$

Όμως, αφού αν μπείς στην κλάση A δεν μπορείς να πάς στην κλάση B και αντίστοιχα αν μπεις στην κλάση B δεν μπορείς να μπείς στην κλάση A, έχουμε ότι:

$$\Phi_A(x) = P_x[T_A < \infty] = P_x[T_A < T_B] = \Phi_{A,B}(x)$$

Επίσης, αν φτάσεις μέσα σε μια πεπερασμένη κλειστή κλάση, η πιθανότητα να επισκεφθείς μια κατάσταση της είναι 1 όπως είδαμε σε προήγουμενο κεφάλαιο. Άρα:

$$P_x[\quad \inf\{k \geq 0 : X_k = 1\} < \quad \inf\{k \geq 0 : X_k = 8\}] = P_x[T_A < T_B] = \Phi_{A,B}(x) = \Phi_A(x)$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι αυτή που υπολογίσαμε στο υποερώτημα (γ), δηλαδή:

$$P_x[\quad \inf\{k \geq 0 : X_k = 1\} < \quad \inf\{k \geq 0 : X_k = 8\}] = 0.406$$

Άσκηση 44

Ο στοχαστικός πίνακας είναι ο ακόλουθος:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο χώρος καταστάσεων είναι:

$$\mathbb{X} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 3 κλάσεις επικοινωνίας: $\mathcal{C}_1 = \{s_1\}, \mathcal{C}_2\{s_2, s_3, s_4\}, \mathcal{C}_3 = \{s_5\}$
Οι κλάσεις $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3$ είναι κλειστές ενώ η κλάση $\mathcal{C}_2$ είναι ανοικτή.

(α)

Ορίζουμε τα σύνολα:

$$A = \{1\}, \quad B = \{5\}$$

Αντίστοιχα, ορίζουμε τους χρόνους άφιξης στα A, B:

$$T_A = \inf\{k \geq 0 : X_k = 1\}, \quad T_B = \inf\{k \geq 0 : X_k = 5\}$$

Έχουμε:

$$P_x[T_A < T_B] = P[T_A < T_B | X_0 = x] = \Phi_{A,B}(x)$$

Η $\Phi_{A,B}$ ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} h(x) = 1, & x \in A \\ h(x) = 0, & x \in B \\ \mathcal{L}h(x) = 0, & \forall x \notin A \cup B \end{cases}$$

Έτσι, προκύπτει:

$$\begin{cases} h(1) = h(5) = 0 \\ h(2) = h(1) \cdot p + h(3) \cdot (1-p) \\ h(3) = h(2) \cdot (1-p) + h(4) \cdot p \\ h(4) = h(3) \cdot p + h(5) \cdot (1-p) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} h(2) = p + h(3)(1-p), \qquad (1) \\ h(3) = h(2) \cdot (1-p) + h(4) \cdot p, \qquad (2) \\ h(4) = h(3) \cdot p, \qquad (3) \end{cases}$$

Από την (3) στην (2):

$$h(3) = h(2) \cdot (1-p) + h(3) \cdot p^2 \iff$$

$$h(2) = \frac{h(3) \cdot (1-p^2)}{1-p} = h(3) \cdot (1+p), \qquad (4)$$

Από την (4) στην (1):

$$h(3) \cdot (1+p) = p + h(3)(1-p) \iff$$

$$h(3)(1+p-1+p) = p \iff$$

$$h(3) = \frac{1}{2}$$

Έτσι, από τις (4), (3) προκύπτει:

$$h(2) = \frac{1+p}{2}, \qquad h(4) = \frac{p}{2}$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P[T_1 < T_5 | X_0 = s_3] = P_{s_3}[T_A < T_B] = \Phi_{A,B}(s_3) = h(3) = \frac{1}{2}$$

(β)

Ο αλγόριθμος φαίνεται ακολούθως:

Result: 0,1 depending on the fair coin simulation
state $\leftarrow s_3$;
while *state* $\notin s_1, s_5$ **do**
  state $\leftarrow$ *move_state*(state, unfair_coin);
end
if *state* $== s_1$ **then**
  return 0
else
  return 1
end

Algorithm 1: Fair coin simulation with unfair coin

Η επεξήγηση του είναι απλή: ξεκινάμε από το state s_3 της στοχαστικής διαδικασίας του (α) και όταν το άτιμο νόμισμα φέρει κορώνα πάμε στο state που μας πάει ο στοχαστικός πίνακας από την τρέχουσα κατάσταση με πιθανότητα p ενώ όταν φέρει γράμματα στο state που μας πάει ο στοχαστικός πίνακας από την τρέχουσα κατάσταση με πιθανότητα $1-p$. Γνωρίζουμε ότι οι ανοικτές κλάσεις είναι παρωδικές, δηλαδή ο αλγόριθμος με πιθανότητα 1 θα πάει τελικά σε κάποια τελική κατάσταση. Ακόμη, γνωρίζουμε ότι αυτή η διαδικασία προσομοιώνει τη ρίψη ενός τίμιου νομίσματος, αφού δείξαμε στο ερώτημα (α) ότι με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ θα τερματίσει στην s_3, ενώ με πιθανότητα πάλι $\frac{1}{2}$ θα τερματίσει στην μοναδική άλλη κατάσταση που ανήκει σε κλειστή κλάση, στην s_5.

Άσκηση 45

Αριθμούμε τις καταστάσεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έτσι, προκύπτει ότι:

$$p(x,y) = \begin{cases} 1, & x=0, \quad y=1 \\ 0, & x=0, \quad y\neq 1 \\ 1/3, & x\neq 0, \quad y=2\cdot x \\ 1/3, & x\neq 0, \quad y=2\cdot x+1 \\ 1/3, & x\neq 0, \quad y=(x/2) \\ 0, & x\neq 0, \quad y\notin \{2x, 2x+1, x/2\} \end{cases}$$

Ορίζουμε το χρόνο πρώτης άφιξης στην κατάσταση 0 ως εξής:

$$T_0 = \inf\{k\geq 0 : X_k = 0\}$$

Εμάς μας ενδιαφέρει η πιθανότητα:

$$P_x[T_0 < \infty] = \Phi_0(x)$$

Από το Πόρισμα 3, η Φ_0 ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} \Phi_0(0) = 1 \\ L\Phi_0(x) = 0, \quad x\neq 0 \end{cases}$$

Έτσι, έχουμε ότι:

$$\Phi_0(x) = 1/3\cdot \big(\Phi_0(2x) + \Phi_0(2x+1) + \Phi_0(x/2)\big), \quad x\neq 0$$

Παρατηρούμε ότι το $\Phi_0(x) = c$ ικανοποιεί την παραπάνω αναδρομική σχέση. Επίσης:

$$\Phi_0(1) = 1/3\cdot (\Phi_0(2) + \Phi_0(3) + \Phi_0(0)) \iff$$
$$c = 1/3\cdot \big(c + c + 1\big) \iff$$
$$c = 1$$

Άρα:

$$\Phi_0(x) = 1, \forall x\in \mathbb{N}$$

Συνεπώς:

$$P_x[T_0 < \infty] = P_1[T_0 < \infty] = P[T_0 < infty | X_0 = 1] = 1$$

άρα ο περίπατος είναι **επαναληπτικός**.

Άσκηση 52

Ορισμός Προβλήματος

- Έχουμε την μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ στο $\mathbb{X} = \mathbb{N}$ με πιθανότητες μετάβασης $p_{k,k-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$ και $p_{k,k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$
- Ορίζουμε το ενδεχόμενο πρώτου πέρσματος από την κατάσταση 1 ως εξής $T_1 = inf\{n\geq 0 : X_n = 1\}$, ενώ αναζητούμε την πιθανότητα το να φτάσει η $\{X_n\}$ στην κατάσταση k αφού πρώτα έχει περάσει από την κατάσταση 1 ή ισοδύναμα $\mathbb{P}_k[T_1 < +\infty] =?$

Επίλυση Προβλήματος

- Η ζητούμενη πιθανότητα $p(k) = \mathbb{P}_k[T_1 < +\infty]$ ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:
$\begin{cases} Lp(k) = 0, k \in \mathbb{Z} - \{1\} \\ p(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(k) = \frac{k-1}{2k}p(k-1) + \frac{k+1}{2k}p(k+1) \\ p(1) = 1 \end{cases}$

- **1ος Τρόπος**

  - Η τελευταία εξίσωση γράφεται ως $\boxed{p(k)-p(k+1) = \frac{k-1}{k+1}(p(k+1)-p(k))}$ **(1.1)**
  - Εφαρμόζοντας διαδοχικά την τελευταία σχέση για k, k - 1, ..., 2 έχουμε $p(k) - p(k+1) = \frac{k-1}{k+1}\frac{k-2}{k}(p(k-2) - p(k-1)) = ... = \frac{2}{k(k+1)}(p(1) - p(2))$
  - Αθροίζοντας τώρα τις παραπάνω σχέσεις για k = 1,...,m - 1τελικά λαμβάνουμε:
  $p(1) - p(m) = 2(p(1) - p(2)) \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k(k+1)} = 2(p(1) - p(2)) \sum_{k=1}^{m-1}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$
  - Επομένως επειδή
  $\boxed{p(1) = 1}$ έχουμε ότι

    $1 - p(m) = 2(1 - p(2))\frac{m-1}{m}$ (από υπολογισμό των παραπάνω αθροισμάτων), $\forall m \in \mathbb{N}$.

    Όμως αξίζει να σημειωθεί πως καθώς $\frac{m-1}{m} \to 1$, οι λύσεις για να μην είναι αρνητικές θα πρέπει $\forall m \in \mathbb{N}$ να ισχύει ότι $2(1 - p(2)) \leq 1$ και κατ'επέκταση $\boxed{p(2) \geq 1/2}$
  - Συκγεκριμένα η $p(k)$ ελαχιστοποιείται όταν $h(2) = 1/2$, άρα η σχέση μας λαμβάνει την εξής μορφή:
  $p(k) = \mathbb{P}_k[T_1 < +\infty] = 1 - 2(1 - \frac{1}{2})\frac{k-1}{k} \Rightarrow \boxed{p(k) = \frac{1}{k}}$.

- **2ος Τρόπος**

  - Λόγω μορφής της παραπάνω αναδρομικής σχέσης η επίλυσή περιγράφεται γραμμικά μέσω της σχέσης $\boxed{p(k) = a\frac{k-1}{k} + b}$ **(1.2)**
  - **Εύρεση του b**
  Όμως γνωρίζουμε ότι για $k = 1, p(1) = 1 \Rightarrow a * 0 + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$. Επομένως προκύπτει $p(k) = a\frac{k-1}{k} + 1$
  - **Εύρεση του a**
  Αν η στοχαστική διαδικασία ξεκινήσει από το $+\infty$ (ή ισοδύναμα βρεθεί εκεί κάποια τιμή έστω n, και ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία $\{Y_k\} = \{X_{k+n}\}$, η οποία επίσης θα είναι μαρκοβιανή αλυσίδα λόγω ισχύος της μαρκοβιανής ιδιότητας) τότε η πιθανότητα να βρεθεί στο 1 είναι ίση με 0 ή ισοδύναμα:

    $\mathbb{P}_k[T_1 < +\infty] = 0 \Rightarrow lim_{k\to+\infty}(a\frac{k-1}{k} + 1) = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$
  - Επομένως προκύπτει ότι $p(k) = (-1)\frac{k-1}{k} + 1 = \frac{k-k+1}{k} \Rightarrow \boxed{p(k) = \frac{1}{k}}$.

Συμπερασματικά παρατηρούμε ότι η $\{X_n\}$ διαφέρει από τον απλό συμμετρικό τυχαίο περίπατο σε αυτήν την ιδιότητα. Βλέπουμε δηλαδή ότι η $\{X_n\}$ δεν φτάνει οπωσδήποτε στο 1. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να δούμε ότι η κατάσταση 1 είναι **παροδική** εφόσον $p_{12} = 1$ και άρα εάν $'_1 = inf\{k \geq 0 : X_k = 1\}$ αποτελεί τον χρόνο επανόδου στο 1 τότε:

$\mathbb{P}_1[T_1^{'} < +\infty] = \mathbb{P}_2[T_2^{'} < +\infty] = \frac{1}{2} < 1$

Επομένως παρατηρούμε ότι όλο το είναι μία κλάση επικοινωνίας και άρα όλες οι καταστάσεις είναι παροδικές. Για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{N}$ η αλυσίδα με πιθανότητα 1, εκτελεί πεπερασμένου πλήθους επισκέψεις στο k. Εναλλακτικά αυτό σημαίνει ότι $\mathbb{P}[X_n \to \infty] = 1$

Άσκηση 56

Ορισμός Προβλήματος

- Γνωρίζουμε ότι $p(x,y) = \mathbb{P}[X_{n+1} = y|X_n = x, n < T_A < T_B]$. Μπορεί να υπολογιστεί από την δεσμευμένη κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X_{n+1} δοθέντων X_n και των χρόνων αφίξεων στα σύνολα A, B ως T_A και T_B.
- Τόσο η πρώτη όσο και η δεύτερη πληροφορία αφορά τη δυναμική του συστήματος, την εξέλιξη του στον χρόνο, εφόσον ικανοποιείται η ανισοτική σχέση μεταξύ των χρόνων αφίξεων στα σύνολα A,B

Επίλυση Προβλήματος

- Σε αρχικό στάδιο, χωρίς βλάβη της γενικότητας γίνεται η υπόθεση ότι $A \cap B = \emptyset$, με την έννοια της ανυπαρξίας κάποιας κατάστασης του συστήματος και στα δύο υπό εξέταση σύνολα αφίξεων.
- Στην περίπτωση αυτή η ζητούμενη πιθανότητα $\mathbb{P}[X_{n+1} = y|X_n = x, n < T_A < T_B]$ γράφεται ως εξής $p(x,y) = \mathbb{P}[X_{n+1} = y|X_n = x, 0 < T_A - n < T_B - n]$
- Για διευκόλυνση του υπολογισμού, θέτουμε $T'_A = T_A - n$ και $T'_B = T_B - n$ επομένως αναζητούμε την πιθανότητα $\boxed{p(x,y) = \mathbb{P}[X_{n+1} = y|X_n = x, T'_A < T'_B]}$. [1]. Και προφανώς διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις, για την κατάσταση y.

    1. Εάν $y \in A \cup B$ τότε γνωρίζουμε από *Ισχυρή Μαρκοβιανή Ιδιότητα*:
    $\mathbb{P}[T_A < T_B|X_0 = y] = \Phi_,(y) = 1$.

       Επομένως $\boxed{\tilde{p}(x,y) = p(x,y)\Phi_,(y)}$
    2. Εάν $y \notin A \cup B$ τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από το ενδεχόμενο $\{T'_A < T'_B\}$, δηλαδή $\Omega = \{T'_A < T'_B\}$

       Σε αυτήν την περίπτωση διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για την κατάσταση x, η οποία δεν είχε διαδραματίσει κάποιο ρόλο έως τώρα.

       (α′) Εάν $x \in A \setminus B$, τότε η τομή των ενδεχομένων
       $\mathbb{P}[X_{n+1} = y|X_n = x, n < T_A < T_B] \cap \mathbb{P}[T_A < T_B|X_0 = x] = \mathbb{P}[X_{n+1} = y|X_n = x]$, το οποίο ισχύει λόγω *Ισχυρής Μαρκοβιανής Ιδιότητας*.

       Επομένως, και εφόσον $\mathbb{P}[X_{n+1} = y|X_n = x] = p(x,y)$, προκύπτει ότι $\boxed{\tilde{p}(x,y) = p(x,y)\Phi_,(x)}$

       (β′) Εάν $x \in B \setminus A$, τότε με παρόμοια λογική διεκπεραίωση προκύπτει ότι $\boxed{\tilde{p}(x,y) = p(x,y)\frac{\Phi_,(y)}{\Phi_{A,B}(x)}}$

  Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $\boxed{\tilde{p}(x,y) = p(x,y)\frac{\Phi_,(y)}{\Phi_{A,B}(x)}}$

Εφαρμογή

- Ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία $X_n = \{$κέρματα της Αλίκης στο γύρο n$\}$
- Ορίζουμε επίσης τις εξής πιθανότητες μετάβασης: $\begin{cases} p_{n,n-1} = p_{n,n+1} = \frac{1}{2} \\ p_{20,n} = 0 \\ p_{20,20} = 1 \\ p_{0,n} = 0 \\ p_{0,0} = 1 \end{cases}$

[1] Το 0 σαφώς παραλείπεται καθώς αναφερόμαστε σε θετικούς χρόνους αφίξεων

- Βασιζόμενοι στην ανάλυση της πιθανότητας μετάβασης μιας αλυσίδας με δεσμεύσεις, θεωρούμε ως σύνολο A το ενδεχόμενο της στοχαστικής διαδικασίας να βρεθεί στην κατάσταση 1, δηλαδή στο ενδεχόμενο που η Αλίκη διαθέτει 1 κέρμα. Αντίστοιχα για το σύνολο B, που αφορά το ενδεχόμενο **τερματισμού**, δηλαδή η Αλίκης να διαθέτει 20 κέρματα. 'Αρα, $A = \{X_k = 1\}$ και $= \{X_k = 20\}$

- Βάσει των προηγούμενων, προκύπτει το εξής *Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών*:
$$\begin{cases} h(n) = p_{n,n-1}h(n-1) + p_{n,n+1}h(n+1) = \frac{1}{2}(h(n-1) + h(n+1)) \\ h(1) = 1 \\ h(20) = 0 \end{cases}$$

- Όπως έχει ήδη αναλυθεί και στην **Άσκηση 52**, η επίλυση της συγκεκριμένης αναδρομής επιδέχεται γραμμική λύση της μορφής $h(n) = a + bn$. Έτσι λοιπόν βάσει συνοριακών τιμών προκύπτει ότι $a = \frac{20}{19}$ και $b = -\frac{1}{19}$. Επομένως $\boxed{h(n) = \frac{20}{19} - \frac{n}{19}}$

- Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι η $h(n)$, αντιπροσωπεύει την συνάρτηση δυναμικού $\Phi_{A,B}(n)$, δηλαδή την πιθανότητα -δεδομένου ότι η Αλίκη έχει στην κατοχή της αυτήν την στιγμή n κέρματα - να βρεθούμε πρώτα στο σύνολο A, δηλαδή στο ενδεχόμενο που η Αλίκη έχει **1 κέρμα**, και μετ'επειτα στο σύνολο B, δηλαδή στο ενδεχόμενο τερματισμού που η Αλίκη έχει στην κατοχή της **20 κέρματα** και έχει νικήσει το παιχνίδι.

- Επομένως η δεσμευμένη πιθανότητα $\tilde{p}(x, y)$ που αναζητούμε βάσει της παραπάνω προϋπόθεσης είναι: $\tilde{p}(n, n+1) = p(n, n+1)\frac{\Phi_{,}(n+1)}{\Phi_{A,B}(n)} \Rightarrow \boxed{\tilde{p}(n, n+1) = \frac{1}{2}\frac{19-n}{20-n}}$