Nghiên cứu khoa học sinh viên

Đề tài:

"KHAI TRIỂN SVD VÀ ỨNG DỤNG TRONG PHÂN TÍCH ẢNH"

Nhóm nghiên cứu khoa học :

Vương Đình Tùng (Lớp XDCTGT tiên tiến K51)

Trần Thị Hằng (Lớp XDCTGT tiên tiến K51)

Phạm Anh Dũng (Lớp XDCTGT tiên tiến K51)

Nguyễn Đình Khánh (Lớp XDCTGT tiên tiến K51)

Giáo viên hướng dẫn :

TS. Trần Văn Long

MỤC LỤC: trang

Lời mở đầu:

SVD (singular value decomposition) là một dạng khai triển của ma trận có rất nhiều ứng dụng trong những vấn đề liên quan đến nghịch đảo và số hóa các dữ liệu.Hiện nay phân tích SVD của ma trận xuất hiện rất nhiều trong các ứng dụng thực tế như về tín hiệu số, tính các giá trị xấp xỉ trong kĩ thuật, công nghệ thông tin, và được ứng dụng trong các công cụ tìm kiếm trên các website.Tuy nhiên, tài liệu liên quan đến SVD còn chưa nhiều, chưa gần gũi và chưa dễ hiểu cho sinh viên cần nghiên cứu về mảng đề tài thú vị này, do đó nhóm nghiên cứu khoa học với đề tài " Khai triển SVD và ứng dụng trong kĩ thuật phân tích ảnh" thực hiện nghiên cứu này nhằm mục đích đưa đến cho người đọc những kiến thức cơ bản nhất về khai triển SVD và tạo một cái nhìn tổng quan về cách khai triển cũng như một số tính chất, hệ quả quan trọng liên quan đến dạng khai triển này.Cùng với cơ sở lí thuyết nhóm nghiên cứu cũng đi vào một ứng dụng cụ thể là ứng dụng của SVD trong kĩ thuật phân tích ảnh.

Nhóm nghiên cứu cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến thầy giáo, TS Trần Văn Long bộ môn toán trường Đại Học Giao Thông Vận Tải đã nhiệt tình giúp đỡ, giải đáp thắc mắc cũng như cung cấp tài liệu để nhóm có thể hoàn thành đề tài nghiên cứu.

Hà Nội, ngày   tháng   năm 2012

Nhóm nghiên cứu khoa học lớp XDCTGTTT K51

CHƯƠNG I: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1. Ma trận

a) <u>Định nghĩa 1:</u> Ma trận một bảng gồm mxn số thực được sắp xếp thành m dòng, n cột và gọi là ma trận cấp mxn.

Ký hiệu ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

hoặc

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

hoặc

$$A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$$

Trong đó a_{ij} là phần tử của ma trận nằm trên dòng i, cột j,

$i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n.$

Các phần tử a_{ii} gọi là phần tử nằm trên đường chéo chính.

b) Ma trận đơn vị

<u>Định nghĩa 2:</u> Ma trận đơn vị là ma trận có mọi phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1, các phần tử khác bằng 0, và có dạng sau:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

c) Ma trận đường chéo

Định nghĩa 3: Ma trận đường chéo là ma trận vuông có các phần tử nằm trên đường chéo chính khác 0, mọi phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng 0.

Ma trận đường chéo có dạng

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d) Ma trận dòng, cột

Ma trận dòng có dạng:

$$X = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Ma trận cột có dạng:

$$Y = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

e) Ma trận chuyển vị

Định nghĩa 4: Ma trận A^T của ma trận A có các dòng là các cột của ma trận A (giữ nguyên thứ tự) gọi là ma trận chuyển vị của ma trận A.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Ma trận trực giao

Định nghĩa 5: Ma trận vuông A được gọi là ma trận trực giao nếu

$$A^T.A = I$$

Tính chất:

a) Ma trận A = $\left[a_{\text{ij}}\right]$ là ma trận trực giao khi và chỉ khi

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.a_{jk} = \delta_{\text{ij}} = \begin{cases} 1, \ \text{i=j} \\ 0, \ \text{i} \neq j \end{cases}$$

Trong đó δ_{ij} là kí hiệu Kronecker.

b) Như vậy ma trận trực giao A là khả nghịch và có $A^{-1} = A^T$.

c) Mặt khác ta cũng thấy ma trận A trực giao khi và chỉ khi các vec tơ cột và các hàng của A tạo thành các hệ trực chuẩn.

d) Ta có: $\left|A^T A\right| = \left|I\right| = 1 \to \left|A\right| = \pm 1$

3. Vec tơ riêng – Giá trị riêng

Định nghĩa 6: Cho A là ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Khi đó:

- Đa thức bậc n của biến λ:

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda.I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n.\ \lambda^n + a_{n-1}.\ \lambda^{n-1} + \ldots + a_1.\ \lambda_1 + a_0$$

  được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận A.

- Các nghiệm của đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ gọi là giá trị riêng của ma trận A.
- Nếu λ là một giá trị riêng của A thì det (A-λ.I) = 0. Khi đó hệ phương trình thuần nhất:

$$(A-\lambda.I)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

có vô số nghiệm.

- Không gian của hệ (1) gọi là không gian con riêng của ma trận A tương ứng với giá trị riêng λ.
- Các vec tơ khác không là nghiệm của hệ (1) gọi là vec tơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ.
- Các cơ sở tạo thành một cơ sở của không gian riêng (tức là các vec tơ tạo thành hệ nghiệm cơ bản của hệ (1)) gọi là các vec tơ riêng độc lập tuyến tính ứng với giá trị riêng λ.

4. Chuẩn của vec tơ

Định nghĩa 7: Cho vec tơ x, chuẩn của x kí hiệu là $\|x\|$ được xác định là một số không âm thỏa mãn các tính chất sau:

a) $\|x\| \geq 0$ và $\|x\| = 0$ khi và chỉ khi x=0.

b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ với mọi $\alpha \in R$.

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Bất đẳng thức tam giác).

Chuẩn Euclide:

Chuẩn Euclide của vec tơ x được xác định như sau:

$$\|x\|_E = \|x\| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

5. Chuẩn của ma trận

Định nghĩa 8: Cho ma trận A kích thước $m \times n$, chuẩn của A kí hiệu $\|A\|$ là một số không âm thỏa mãn:

a) $\|A\| \geq 0$ và $\|A\| = 0$ khi và chỉ khi A=0.

b) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ với mọi $\alpha \in R$.

c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (Bất đẳng thức tam giác).

- Chuẩn F (Frobeneous):

Cho $A = \left(a_{\mathrm{ij}}\right)_{mxn}$ ta định nghĩa chuẩn F của ma trận A là

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{\mathrm{ij}}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ví dụ1: Cho ma trận A =

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{20}$$

- Chuẩn 2 của ma trận:

Chuẩn 2 của ma trận A là căn bậc 2 của giá trị riêng lớn nhất của ma trận $A^T.A$

6. Hạng của ma trận

Định nghĩa 9: (Định thức con của ma trận)

Xét ma trận $A = \left(a_{\text{ij}}\right)_{mxn}$ Từ A ta lấy các phần tử trên giao của s dòng và s cột thì ma trận thu được gọi là ma trận vuông con cấp s của A với s là số nguyên dương và $s \le \min\left(m, n\right)$.

Định thức của ma trận con đó được gọi là định thức con cấp s của ma trận A.

Kí hiệu: $D_{i_1 i_2 \ldots i_s}^{j_1 j_2 \ldots j_s}$ gọi là định thức con cấp s của A.

Định nghĩa 10: (Hạng của ma trận)

Định thức con cấp cao nhất khác không của ma trận A gọi là định thức con cơ sở của ma trận A.

Một ma trận A có thể có nhiều định thức con cơ sở đều có cùng cấp.

Hạng của ma trận A là cấp của định thức con cơ sở.

Ký hiệu hạng của ma trận A là rank (A) hay r(A).

Một số tính chất về hạng của ma trận:

- $rank(A_{mxn}.B_{nxl}) = rank(A_{mxn})$ nếu $rank(B_{nxl}) = n$

- $rank(C_{mxn}.A_{nxk}) = rank(A_{nxk})$ nếu $rank(C_{mxn}) = n$

7. Vết của ma trận

Vết của một ma trận vuông A bậc *nxn* được xác định bằng tổng các phần tử trên đường chéo chính (đường nối từ góc trên bên trái xuống góc dưới bên phải) của A.

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

với a_{ii} là ký hiệu phần tử ở hàng thứ *i* và cột thứ *i* của *A*. Tương đương với vết của ma trận là tổng của các trị riêng của nó, và nó bất biến khi thay đổi cơ sở. Sự đặc trưng hóa này có thể sử dụng để xác định vết cho các toán tử tuyến tính trong trường hợp tổng quát.

Ký hiệu của nó thường là Sp hoặc Tr.

CHƯƠNG II: KHAI TRIỂN SVD CỦA MA TRẬN

Trong chương này chúng tôi sẽ trình bày khai triển SVD, một số tính chất và hệ quả liên quan.

ĐỊNH LÍ 1

Với mọi ma trận $A_{m\times n}$ bất kỳ, khi đó mọi giá trị riêng của ma trận $A^T A$ đều không âm.

CHỨNG MINH:

Gọi λ là giá trị riêng của ma trận $A^T A$ và v là vec tơ riêng tương ứng. Dễ thấy:

$$\|Av\|^2 = (Av)^T(Av) = v^T A^T Av$$

Do λ là giá trị riêng của ma trận $A^T A$:

$$(A^T A - \lambda I).v = 0$$

$$\Rightarrow \quad A^T A.v = \lambda I v = \lambda v$$

$$\Rightarrow \; v^T A^T Av = v^T \lambda v = \lambda \|v\|^2 = \lambda$$

$$\Rightarrow \; \|Av\|^2 = \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq 0.$$

Như ta đã chứng minh trên mọi giá trị riêng của $A^T A$ đều không âm.

Ta có định nghĩa và cách xác định của giá trị kì dị của ma trận A:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} = \|Av_i\|$$

ĐỊNH LÍ 2 **(**Về sự phân tích SVD của ma trận)

Với mọi ma trận $A_{m\times n}$ bất kỳ đều có thể phân tích dưới dạng:

$$A = U.\Sigma.V^T$$

Với U và V^T là các ma trận trực giao. Ma trận $\sum$ được xây dựng:

$$\sum_{m\times n} = \begin{bmatrix} D_{r\times r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{với } D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix}$$

CHỨNG MINH:

Từ định lí 1 thì ma trận A có các giá trị kì dị $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

do $\lambda_i \geq 0 \Rightarrow \exists\, r: \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_r > 0, \lambda_i = 0, \quad i > r$

$\Rightarrow \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots. \sigma_r > 0$ và $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \ldots = \sigma_n = 0$

- Ma trận V được xây dựng dựa trên các véc tơ riêng của ma trận A^TA.

Cụ thể: $V = [\, v_1 \ldots v_n \,]$

-Xây dựng ma trận U:

Với các σ_i (i : 1 → r) là các giá trị kì dị của ma trận A. Đặt $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ (i = 1, …, r). Từ đó ta xây dựng được ma trận $U = [\, u_1 \ldots u_m \,]$ (m > r).

Với các ma trận U, Σ , V được xác định như trên thì ta sẽ chứng minh:

$A = U.\Sigma.V^T \iff A V = U\Sigma$

Ta có: $Av_i = \sigma_i u_i$ với i = 1, …., r và $\|Av_i\| = 0$ với i = r +1, r + 2, …, n

$\Rightarrow Av_i = 0$ với i = r +1, r + 2, …, n

Ta có: $AV = A\,[\, v_1 \ldots v_n \,]$

$= [Av_1 \ldots A\, v_n]$

$$= \quad [Av_1 \ldots A\ v_r \ ; 0,0,0\ldots 0]$$

$$= \quad [\sigma_1 u_1 \ldots \sigma_r u_r \ ;0,0,0\ldots 0]$$

$$= [u_1 \ldots u_m]\begin{bmatrix} D_{r\times r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= U\ \Sigma$$

<u>Ví dụ 2</u>:

Tìm khai triển SVD của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Giải:

Ta tìm các giá trị riêng của ma trận $A^T A$.

Ta có $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Giải phương trình det (A- λ.I) = 0 ta được các giá trị riêng của ma trận $A^T A$ là
$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$.

Với mỗi giá trị riêng λ_i, giải phương trình (A - λ_i I)x = 0 ta được các vec tơ riêng tương ứng là:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ta được ma trận $V^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

Các giá trị kì dị của ma trận A là $\sigma_1 = \sqrt{2}$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$

Từ đó ta được ma trận $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Tìm ma trận U:

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A\, v \qquad \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Phân tích SVD của ma trận A là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U.\Sigma.V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ĐỊNH LÍ 3 (Về dạng khai triển của phân tích SVD)

Mọi ma trận A có dạng khai triển: $A = U.\Sigma.V^T = \sigma_1 u_1\ v_1^T + \ldots.. + \sigma_r\ u_r\ v_r^T$

Với σ_i, u_i, v_i là các giá trị đã được nói đến ở định lí 2.

CHỨNG MINH:

Ta có:

$$U.\Sigma.V^T = [u_1 \ldots u_m]\begin{bmatrix} D_{r\times r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

$$= [u_1 \ldots u_r,\ u_{r+1} \ldots u_m]\begin{bmatrix} D_{r\times r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \\ \hline v_{r+1}^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

$$= [u_1 \ldots u_r]\begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{bmatrix} + [u_{r+1} \ldots u_m][0]\begin{bmatrix} v_{r+1}^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

Đặt $U_r = [u_1, u_2, \ldots, u_r]$, $V_r = [v_1, v_2, \ldots, v_r]$

$$= [u_1 \ldots u_r]\begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{bmatrix} = U_r . D. V_r$$

$$= [\sigma_1 u_1 \ldots \sigma_r u_r]\begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{bmatrix} = \sigma_1 u_1\ v_1^T + \ldots + \sigma_r\ u_r\ v_r^T$$

ĐỊNH LÍ 4

Với ma trận A = $U.\Sigma.V^T$ và σ_1 , σ_2 , …. $\sigma_r > 0$ là các giá trị đặc biệt của A.

Khi đó: Rank (A) = r.

CHỨNG MINH:

Theo tính chất của hạng ma trận thì:

$\text{Rank}(U_r) = \text{rank}(U_r.\,U_r^T) = \text{rank}(I_{r\times r}) = r$

$\text{Rank}(V_r^T) = \text{rank}(V_r^T.V_r) = \text{rank}(I_{r\times r}) = r$

$\Longrightarrow$ Rank (A) = rank (U. Σ. V^T) =rank(U_r. D.V_r^T) (xem ở định lí 3)

= rank (Σ.V_r^T) = rank (Σ) = r.

ĐỊNH LÍ 5:

Với $\|A\|_F$ là chuẩn Frobeneous của ma trận A và $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r > 0$ là các giá trị kì dị của A.

Khi đó: $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2}$

CHỨNG MINH:

Đầu tiên ta chứng minh tính chất sau:

$\|QA\|_F = \|A\|_F$ với $Q_{m\times m}$ là ma trận trực giao và $A_{m\times n}$ là ma trận bất kì.

Ta có: $\|QA\|_F^{\,2} = \|[Qa_1; \ldots; Qa_n]\|_F^{\,2}$

$= \|Qa_1\|_E^{\,2} + \ldots + \|Qa_n\|_E^{\,2}$

$= \|a_1\|_E^{\,2} + \ldots + \|a_n\|_E^{\,2}$

$= \|A\|_F^{\,2}$

Xét ma trận $A_{m\times n}$ bất kì với SVD của nó là U. Σ. V^T:

$\|A\|_F^{\,2} = \|U.\Sigma.V^T\|_F^{\,2} = \|\Sigma.V^T\|_F^{\,2}$ (U là ma trận trực giao)

$= \|(\Sigma.V^T)^T\|_F^2 = \|V.\Sigma^T\|_F^2 = \|\Sigma^T\|_F^2$ (V là ma trận trực giao)

$$= \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2$$

$$\Rightarrow \|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2}$$

ĐỊNH LÍ 6 (Bài toán về ma trận nghịch đảo mở rộng)

Với ma trận $A_{m\times n}$ bất kỳ thì A^+ được gọi là ma trận nghịch đảo của A nếu ma trận A thỏa mãn:

$$A\,A^+A = A \qquad (1)$$

$$A^+\,A\,A^+ = A^+ \qquad (2)$$

$$(A\,A^+)^T = A\,A^+ \qquad (3)$$

$$(A^+A)^T = A^+A \qquad (4)$$

Với mọi ma trận A có phân tích SVD là $A = U.\Sigma.V^T$ thì ma trận $V.\Sigma^+.U^T$ là ma trận nghịch đảo mở rộng của ma trận A . Với Σ^+ là ma trận nghịch đảo mở rộng của Σ và

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} D^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Trong đó } D^+ = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & \mathrm{L} & 0 \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ 0 & \mathrm{K} & 1/\sigma_n \end{bmatrix}$$

CHỨNG MINH:

Tính chất 1: $A\,A^+A = U.\Sigma.V^T.V.\Sigma^+.U^T.U.\Sigma.V^T$

$$= U.\Sigma.I.\Sigma^+.I.\Sigma.V^T$$

$$= U.\Sigma.V^T$$

$$= A$$

Tính chất 2: $A^+\,A\,A^+ = V.\Sigma^+.U^T.U.\Sigma.V^T.V.\Sigma^+.U^T$

$= V.\, \Sigma^+.\, \Sigma.\ \ \Sigma^+.\, U^T$

$= V.\, \Sigma^+.\, U^T = A^+$

Tính chất 3: $(A\, A^+)^T = (U.\Sigma.V^T\, .V.\Sigma^+.U^T\ )^T$

$= (U.\Sigma.\Sigma^+.U^T\ )^T$

$= (U^T)^T\ .\ (U.\Sigma.\Sigma^+\, U^T)^T$

$= U\ .\ (\Sigma.\Sigma^+)^T\ .\ U^T$

$= U.\Sigma.\Sigma^+.U^T$

Mặt khác: $A\, A^+ = U.\Sigma.V^T\, .V.\Sigma^+.U^T = U.\Sigma\, .\Sigma^+.U^T$

$= (A\, A^+)^T$

Tính chất 4: $(\ A^+ A\,)^T = (\ V.\Sigma^+.U^T.U.\Sigma.V^T\ )^T$

$= (\ V.\Sigma^+.\Sigma.V^T\ )^T$

$= (V^T)^T\ .\ (V.\Sigma.\Sigma^+\, V^T)^T$

$= V\ .\ (\Sigma.\Sigma^+)^T\ .\ V^T$

$= V.\Sigma.\Sigma^+.V^T$

Mặt khác: $A^+ A = V.\Sigma^+.U^T.U.\Sigma.V^T = V.\Sigma^+.\Sigma.V^T$

$= (\ A^+ A\,)^T$

Ví dụ:

Tìm ma trận nghịch đảo mở rộng của $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Theo ví dụ ở Định lí 2 ta có:

$$A = U.\, \Sigma.\, V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Vì A^{+} = V. Σ^{+}. U^{T} với $\Sigma^{+} = \begin{bmatrix} D^{+} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Trong đó $D^{+} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & \mathrm{L} & 0 \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ 0 & \mathrm{K} & 1/\sigma_n \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^{+} = \mathrm{V}.\ \Sigma^{+}.\ U^{T} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ĐỊNH LÍ 7: Cho ma trận A với dạng khai triển của phân tích SVD là:

$$A = \sigma_1 u_1\ v_1^T + \ldots\ldots + \sigma_r\ u_r\ v_r^T$$

Xét ma trận $A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \ldots\ldots + \sigma_k\ u_k\ v_k^T$ (k < r)

Khi đó: Rank (A_k) = k

CHỨNG MINH:

Ta viết A_k về dưới dạng:

$$A_k = (\sigma_1 v_1^T\ , \ldots\ldots , \sigma_k\ v_k^T\ ) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_k \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_r \end{pmatrix}^T = I_r$$

Lại có: $\begin{pmatrix} u_1^T & u_2^T & \dots & u_r^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_r \end{pmatrix}^T$

Nên $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T & u_2^T & \dots & u_r^T \end{pmatrix} = I_r$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_k \end{pmatrix}^T = I_k$$

$$\Rightarrow \text{ rank} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_k \end{pmatrix} = \text{rank}\left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_k \end{pmatrix}^T \right] = \text{k} \qquad (1)$$

Xét rank ($\sigma_1 v_1^T,\ \sigma_2 v_2^T$,….., $\sigma_k\ v_k^T$)

Ta có: $\begin{pmatrix} v_1^T & v_2^T & \dots & v_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_k \end{pmatrix}^T$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v_1^T & v_2^T & \dots & v_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{pmatrix} = I_k$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 v_1^T & \sigma_1 v_2^T & \dots & \sigma_1 v_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \dots \\ \sigma_k \end{pmatrix} I_k$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$$

Do Rank $\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$ = rank $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{pmatrix}$ = k

$\Rightarrow$ rank ($\sigma_1 v_1^T$, $\sigma_2 v_2^T$,….. , σ_k v_k^T) = k (2)

Từ (1), (2) ta có: rank(A_k) = k

ĐỊNH LÍ 8:

Giả sử A là ma trận cỡ $m \times n$ có $rank(A) = r$, và có khai triển kỳ dị SVD $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$.

Khi đó với mọi ma trận B có cỡ $m \times n$ và $rank(B) \le k$, ta có

$$\| A - B \|_F^2 \ge \| A \|_F^2 - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $B = A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$.

CHỨNG MINH:

Đầu tiên ta chứng minh bổ đề sau:

Giả sử A là ma trận cỡ $m \times n$ có $rank(A) = r$, và có khai triển kỳ dị SVD $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$

Khi đó với véc tơ x bất kỳ, $1 \le k \le r$ ta có:

$$\| Ax\|^2 \le \sigma_k^2 \| x \|^2 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 (v_i^T x)^2 - \sigma_k^2 \sum_{i=1}^{k} (v_i^T x)^2 . \qquad (*)$$

CHỨNG MINH:

Theo khai triển kỳ dị SVD của ma trận A ta có

$$Ax = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T x = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i (v_i^T x) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i (v_i^T x) u_i .$$

Do (u_i) là cơ sở trực chuẩn nên

$$\| Ax \|^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i{}^2 (v_i^T x)^2 \le \sum_{i=1}^{k} \sigma_i{}^2 (v_i^T x)^2 + \sigma_k{}^2 \sum_{i=k+1}^{r} (v_i^T x)^2 .$$

Mặt khác,

$$\sigma_k{}^2 \sum_{i=1}^{k} (v_i^T x)^2 + \sigma_k{}^2 \sum_{i=k+1}^{r} (v_i^T x)^2 = \sigma_k{}^2 \sum_{i=1}^{r} (v_i^T x)^2 \le \sigma_k{}^2 \sum_{i=1}^{n} (v_i^T x)^2 = \sigma_k{}^2 \| V^T x \|^2 = \sigma_k{}^2 \| x \|^2$$

Do đó,

$$\sigma_k{}^2 \sum_{i=k+1}^{r} (v_i^T x)^2 \le \sigma_k{}^2 \| x \|^2 - \sigma_k{}^2 \sum_{i=1}^{k} (v_i^T x)^2$$

Vậy

$$\| Ax\|^2 \le \sigma_k^2 \| x \|^2 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 (v_i^T x)^2 - \sigma_k^2 \sum_{i=1}^{k} (v_i^T x)^2 \qquad \text{(bổ đề được chứng minh)}$$

Trở lại chứng minh định lí 8:

Giả sử ma trận B có khai triển kỳ dị SVD dạng $B = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i^T$, trong đó $(x_1, x_2, ..., x_m)$ là hệ trực giao, $(y_1, y_2, ..., y_n)$ là hệ trực chuẩn.

Ta biết rằng $\| A-B\|_F^2 = Tr((A-B)(A-B)^T) = Tr(AA^T - AB^T - BA^T + BB^T)$, do tính tuyến tính của hàm vết nên vết của tổng bằng tổng các vết, và ta có:

$$\begin{aligned}
&BB^T - AB^T - BA^T \\
&= (\sum_{i=1}^{k} x_i y_i^T)(\sum_{i=1}^{k} y_i x_i^T) - A\sum_{i=1}^{k} y_i x_i^T - (\sum_{i=1}^{k} x_i y_i^T)A^T \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i x_i^T - \sum_{i=1}^{k} x_i y_i^T A^T - \sum_{i=1}^{k} Ay_i x_i^T + \sum_{i=1}^{k} Ay_i y_i^T A^T - \sum_{i=1}^{k} Ay_i y_i^T A^T \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i (x_i^T - y_i^T A^T) - \sum_{i=1}^{k} Ay_i (x_i^T - y_i^T A^T) - \sum_{i=1}^{k} Ay_i y_i^T A^T \\
&= \sum_{i=1}^{k} (x_i - Ay_i)(x_i^T - y_i^T A^T) - \sum_{i=1}^{k} Ay_i y_i^T A^T \\
&= \sum_{i=1}^{k} (x_i - Ay_i)(x_i - y_i A)^T - \sum_{i=1}^{k} (Ay_i)(Ay_i)^T
\end{aligned}$$

Vậy $\| A-B\|_F^2 = Tr(\mathrm{AA}^T) + \sum_{i=1}^{k} Tr((x_i - Ay_i)(x_i - y_i A)^T) - \sum_{i=1}^{k} \| Ay_i\|^2 \geq Tr(\mathrm{AA}^T) - \sum_{i=1}^{k} \| Ay_i\|^2$ (*)

Do $\sum_{i=1}^{k} Tr((x_i - Ay_i)(x_i - y_i A)^T) = \sum_{i=1}^{k} \| x_i - Ay_i\|^2 \geq 0$.

Tiếp theo ta đánh giá về số hạng $\sum_{i=1}^{k} \| Ay_i\|^2$ trong bất đẳng thức trên. Theo Bổ đề trên ta có $\| \mathrm{A}y_j\|^2 \leq \sigma_k^2 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 (v_i^T y_j)^2 - \sigma_k^2 \sum_{i=1}^{k} (v_i^T y_j)^2$, lấy tổng theo chỉ số j ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \| \mathrm{A}y_j\|^2 &\leq k\sigma_k^2 + \sum_{j=1}^{k} \left[\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 (v_i^T y_j)^2 - \sigma_k^2 \sum_{i=1}^{k} (v_i^T y_j)^2 \right] \\
&= k\sigma_k^2 + \sum_{j=1}^{k} \left[\sum_{i=1}^{k} (\sigma_i^2 - \sigma_k^2)(v_i^T y_j)^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left[\sigma_k^2 + \sum_{j=1}^{k} (\sigma_i^2 - \sigma_k^2)(v_i^T y_j)^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left[\sigma_k^2 + (\sigma_i^2 - \sigma_k^2) \sum_{j=1}^{k} (v_i^T y_j)^2 \right]
\end{aligned}$$

Mặt khác, $\sum_{j=1}^{k}(v_i^T y_j)^2 \le \sum_{j=1}^{n}(v_i^T y_j)^2 = \| v_i^T Y \|^2 = \| v_i^T \|^2 = 1$, với Y là ma trận trực giao có các cột là các véc-tơ (y_i). Vậy ta có $\sum_{j=1}^{k} \| \mathrm{A} y_j \|^2 \le \sum_{i=1}^{k} \sigma_k^2$, thay vào bất đẳng thức (*) ta được

$$\| A - B \|_F^2 \ge Tr(\mathrm{AA}^T) - \sum_{i=1}^{k} \| Ay_i \|^2 \ge \| A \|_F^2 - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2.$$

Khi $B = A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$, ta có $A - A_k = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$ và lấy chuẩn ta được

$$\| A - A_k \|^2 = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 = \| A \|_F^2 - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2.$$

ĐỊNH LÍ 9:

Giả sử A là ma trận cỡ $m \times n$ có $rank(A) = r$, và có khai triển kỳ dị SVD $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$ .Khi đó với mọi ma trận B có cỡ $m \times n$ và $rank(B) \le k$, ta có

$$\| A - B \|_2 \ge \sigma_{k+1}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $B = A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$

CHỨNG MINH:

Giả sử tồn tại ma trận B có rank (B) ≤ k và $\|A - B\|_2 < \sigma_{k+1}$ .Vì rank(B)≤ k nên tồn tại một không gian con W cỡ (r – k) (W ⊆ $\mathbb{C}^r$) mà với w ∈ W thì Bw = 0.

Do đó với mọi w ∈ W thì Aw = (A – B)w và:

$\|Aw\|_2 = \|(A - B)w\|_2 \leq \|A - B\|_2 \, \|w\|_2 < \sigma_{k+1}\|w\|_2.$

Vì vậy W là không gian con cỡ (r - k) mà $\|Aw\| < \sigma_{k+1}\|w\|$ (*). Mặt khác, lại tồn tại một không gian con cỡ (k +1) mà $\|Aw\| \geq \sigma_{k+1}\|w\|$(**) được xây dựng từ (k+1) giá trị kì dị đầu tiên của ma trận A. Do đó tổng kích thước của hai không gian con này là: (r-k) + (k+1) = r+1 > r $\Rightarrow$ $\exists$ vec tơ $w' \neq 0$ thuộc cả hai không gian con nói trên.

$\Longrightarrow \|Aw'\| < \sigma_{k+1}\|w'\|$ theo (*)

Và $\|Aw'\| \geq \sigma_{k+1}\|w'\|$ theo (**)

Vì vậy giả thiết ban đầu là sai. Vậy với mọi ma trận B cỡ m.n có rank(B)≤k thì $\|A - B\|_2 \geq \sigma_{k+1}$.

Dễ thấy với B = A_k thì $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$.

ĐỊNH LÍ 10

Cho hệ: Ax = b với A là ma trận bất kì.

Với x = $\bar{x} = A^+ b$ thì $\|Ax - b\|$ nhỏ nhất và $\|\bar{x}\|$ có độ dài nhỏ nhất.

CHỨNG MINH:

Xét ma trận A bất kì có rank (A) = r và phân tích SVD của nó là

$$A = U.\Sigma.V^T \qquad (\Rightarrow A^+ = V.\Sigma^+.U^T)$$

Đặt y = V^Tx và c = U^Tb

Ta viết y và c dưới dạng: y = $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ và c = $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

Ta có $\|Ax-b\|^2 = \|b-Ax\|^2 = \|U^T(b-Ax)\|^2$ (do U^T là ma trận trực giao)

$$= \|U^T(b - U.\Sigma.V^T.x)\|^2 = \|U^Tb - U^TU.\Sigma.V^T.x)\|^2$$

$$= \|c - \Sigma y\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\|^2$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} c_1 - Dy_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \right\|^2$$

$\Rightarrow$ $\|b-Ax\|^2$ min khi:

$$c_1 - Dy_1 = 0 \Leftrightarrow y_1 = D^{-1}.c_1$$

$$\Rightarrow x = Vy = V\begin{bmatrix} D^{-1}.c_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Với mọi giá trị y_2 thì $\|Ax-b\|^2$ vẫn đạt giá trị nhỏ nhất

Đặt $\bar{x}$ = V$\bar{y}$ = $\begin{bmatrix} D^{-1}.c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ta sẽ chứng minh $\|\bar{x}\|$ min:

Với x' bất kì khác $\bar{x}$ thì x' = $\begin{bmatrix} D^{-1}.c_1 \\ y'_2 \end{bmatrix}$

Dễ thấy: $\|\bar{x}\| = \|V\bar{y}\| = \|\bar{y}\| < \|\overline{y'}\| = \|V\overline{y'}\| = \|x'\|$ (đpcm)

Mặt khác: $\bar{x}$ = V$\bar{y}$ = V$\begin{bmatrix} D^{-1}.c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ = V $\begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$$= V.\Sigma^+.c = V.\Sigma^+.V^T.b = A^+b$$

(Định lí được chứng minh)

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \qquad (*)$$

Khi giải bằng phương pháp cơ bản thì phương trình đã cho vô nghiệm. Chúng ta áp dụng Định lý 10 để tìm nghiệm tốt nhất có thể có của hệ đã cho.

Hệ (*) $\Leftrightarrow$ Ax = b với $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ và b= $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Tìm khai triển SVD của ma trận A:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 19 \\ 19 & 25 \end{pmatrix}$$

Giải phương trình det $(A^T A - \lambda I) = 0$, ta tìm được các giá trị riêng λ của $A^T A$:

$$\lambda_1 = 44, \text{ và } \lambda_2 = 6$$

Ta có các giá trị kỳ dị của ma trận A lần lượt là $\sigma_1 = \sqrt{44}$, và $\sigma_1 = \sqrt{6}$

Giải hệ: $(A^T A - \lambda_1 I)x = 0$ ta được $v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$(A^T A - \lambda_2 I)x = 0$ ta được $v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{88}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{88}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận U:

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} \text{ A v} \qquad \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{88}} \\ \frac{8}{\sqrt{88}} \\ \frac{7}{\sqrt{88}} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{88}} & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{88}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{7}{\sqrt{88}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{44} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{88}} & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{88}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{7}{\sqrt{88}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{44} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Ma trận nghịch đảo mở rộng A^+

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{44}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{88}} & \frac{5}{\sqrt{88}} & \frac{7}{\sqrt{88}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{88}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{88}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{88}} & \frac{5}{\sqrt{88}} & \frac{7}{\sqrt{88}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{2}{88} & \frac{1}{12}+\frac{5}{88} & \frac{1}{12}+\frac{7}{88} \\ \frac{2}{88} & \frac{-1}{12}+\frac{5}{88} & \frac{-1}{12}+\frac{7}{88} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = A^{+}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{88} & \frac{1}{12}+\frac{5}{88} & \frac{1}{12}+\frac{7}{88} \\ \frac{2}{88} & \frac{-1}{12}+\frac{5}{88} & \frac{-1}{12}+\frac{7}{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{61}{88}+\frac{3}{4} \\ \frac{61}{88}-\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{127}{88} \\ \frac{-5}{88} \end{pmatrix}$$

Chính là nghiệm xấp xỉ tốt nhất của phương trình đã cho.

CHƯƠNG 3: ỨNG DỤNG CỦA PHÂN TÍCH SVD TRONG XỬ LÍ ẢNH.

3.1 Phân tích SVD trong xử lí ảnh.

Như đã nói, phân tích SVD là dạng phân tích có rất nhiều ứng dụng, một trong những ứng dụng ấn tượng nhất đó chính là sử dụng SVD trong hiệu chỉnh hình ảnh kĩ thuật số. Nhờ đó hình ảnh kĩ thuật số được truyền đi một cách hiệu quả bằng vệ tinh, internet….

Ý tưởng cơ sở của việc hiệu chỉnh ảnh là giảm số lượng thông tin truyền đi mà không làm mất đi những thông tin thực chất. Trong một bức ảnh kĩ thuật số, mỗi điểm ảnh được thể hiện bởi 3 giá trị màu Blue, Green, Red với các trị số từ 0 đến 255. Như vậy với một hình ảnh có độ lớn là 340 × 280 pixels thì chúng ta phải lưu trữ 3 ma trận (thể hiện màu sắc của các điểm) có cùng độ lớn là 340 × 280 tức là phải lưu trữ **285600** số. Tuy nhiên trong thực tế, khi truyền, lưu trữ thông tin ảnh chúng ta có thể không cần những hình ảnh, hoặc một số phần của hình ảnh đó có độ nét quá lớn. Sử dụng phân tích SVD chúng ta có thể loại bỏ rất nhiều thông tin không cần thiết đó. Ví dụ một hình ảnh 340 × 280 pixels được phân tích thành 3 ma trận A, B, C có cùng độ lớn 340 × 280. Giả sử ma trận A có phân tích SVD là:

A= U. Σ. V^T=$\sigma_1 u_1 \ v_1^T$+…..+$\sigma_r \ u_r \ v_r^T$ với giá trị k < r bất kì thì

A_k= $\sigma_1 u_1 \ v_1^T$+…..+$\sigma_k \ u_k \ v_k^T$ như đã được chứng minh ở Định lí 8 là xấp xỉ tốt nhất được xây dựng từ k giá trị kì dị đầu tiên của ma trận A. Ví dụ với k = 20 thì ma trận A_k thể hiện các dữ liệu của ma trận A tương ứng với 20 giá trị kì dị đầu tiên. Như vậy chúng ta chỉ cần lưu trữ 20 giá trị kì dị, 20 vec tơ u_i, 20 vec tơ v_i tương đương với 20+ 20×280 +20×340 = 12420 số. Tương tự với 2 ma trận B, C thì số lượng các số phải lưu trữ là 12420×3 =**37260** số. Rõ ràng phân tích SVD đã giúp giảm lượng thông tin cần lưu trữ một cách đáng kể.

3.2 Ứng dụng Matlab trong xử lí ảnh

Trong ứng dụng này chúng ta sẽ hiệu chỉnh độ nét của một ảnh gốc theo tham số k tùy chọn. Ảnh gốc:

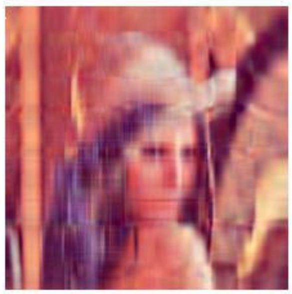
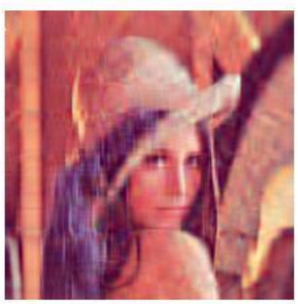
Dòng lệnh chương trình trong Matlab:

```
close all
L=imread('Lenna220.png');
L1=L(:,:,1);
L2=L(:,:,2);
L3=L(:,:,3);
I1=im2double(L1);
I2=im2double(L2);
I3=im2double(L3);
[u1,s1,v1]=svd(I1);
[u2,s2,v2]=svd(I2);
[u3,s3,v3]=svd(I3);
C1=zeros(size(I1));
C2=zeros(size(I2));
C3=zeros(size(I3));
k=100;
for j=1:k
    C1=C1+s1(j,j)*u1(:,j)*v1(:,j).';
end
for j=1:k
    C2=C2+s2(j,j)*u2(:,j)*v2(:,j).';
end
for j=1:k
    C3=C3+s3(j,j)*u3(:,j)*v3(:,j).';
end
C1(k)=1;
C2(k)=1;
C3(k)=1;
R1=im2uint8(C1);
R2=im2uint8(C2);
R3=im2uint8(C3);
Q(:,:,1)=R1;
Q(:,:,2)=R2;
Q(:,:,3)=R3;
imshow(Q,[])
```

Với các giá trị khác nhau của tham số k chương trình sẽ cho ra các ảnh hiệu chỉnh có độ nét khác nhau:

K= 10	K= 20
	
K= 50	K=100
	

Vì các hình ảnh trên được xây dựng từ k giá tri kì dị đầu tiên nên so với ảnh gốc sẽ có những sai số nhất định. Chúng ta cùng xem xét sự khác nhau giữa ảnh hiệu chỉnh và ảnh sai số với các giá trị k khác nhau:

	Ảnh hiệu chỉnh	Ảnh sai số
K = 5		
K = 10		
K= 15		

KẾT LUẬN:

Khai triển SVD là dạng khai triển cơ bản và có tính ứng dụng cao của ma trận cần được tìm hiểu và nghiên cứu rộng rãi. Nhóm thực hiện đề tài hi vọng qua những gì đã trình bày ở các chương bạn đọc có thể nắm được các kiến thức cơ bản về ma trận, tổng quan về khai triển SVD, cách khai triển SVD cùng các tính chất (các Định lí) quan trọng liên quan đến khai triển SVD. Bên cạnh đó, nhóm cũng đã giới thiệu một ứng dụng thú vị của SVD trong phân tích ảnh trên cơ sở lí thuyết đã trình bày. Một điều tất yếu, trong quá trình thực hiện đề tài dù đã cố gắng nhưng cũng không thể tránh được sai sót mong thầy cô và bạn đọc bỏ qua.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Trong quá trình thực hiện đề tài nhóm nghiên cứu đã sử dụng các tài liệu:

1. Toán cao cấp – Nhà xuất bản Giáo Dục

2. Đại số tuyến tính – Nhà xuất bản Giao Thông Vận Tải

3.

--- THE END ---