Capítulo 1
Conceitos Básicos de Teoria dos Conjuntos

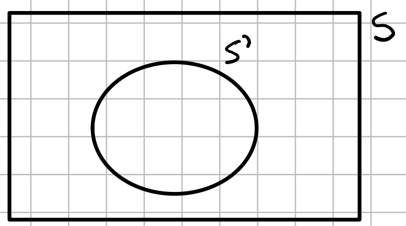
Definição:

- Seja S uma coleção de objetos distintos que são denotados por s.

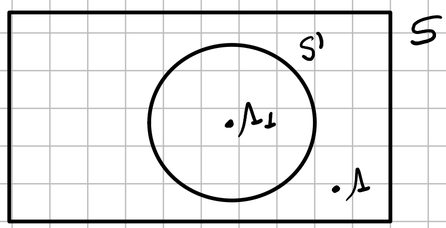
Notação: s pertence a S – $s \in S$; s não pertence a S – $s \notin S$.

- $S' \subseteq S$ (S' é um subconjunto de S ou S' está contido em S), se $\forall s \in S'$, temos que $s \in S$.
- S' é um subconjunto próprio, se $S' \subseteq S$ e $\exists s \in S$ tal que $s \notin S'$.

$S' \subseteq S$



$S' \subset S$



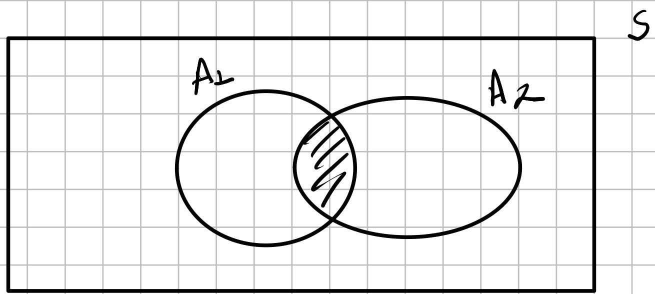
- Conjunto Universal (ou espaço) S é o conjunto onde todos os conjuntos são subconjuntos.

1.1.1 – Operação de conjuntos

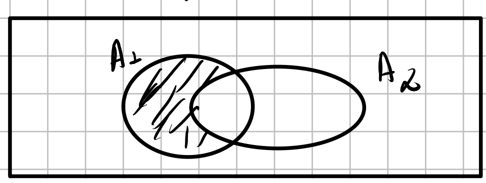
1. O Complemento (com respeito a S) do conjunto A, denotado por A^c, é definido por $A^c = \{s \in S \mid s \notin A\}$.

2. A união dos conjuntos A_j, $j = 1, \dots, n$, denotada por $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$, é definida por $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \{s \in S \mid s \in A_j$ para algum j, $j = 1, \dots, n\}$.

3. A intersecção dos conjuntos A_j, $j = 1, \dots, n$, denotada por $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ é definida por $\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \{s \in S \mid s \in A_j$, para todos j, $j = 1, \dots, n\}$.



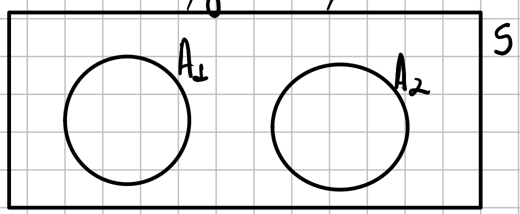
4. A diferença $A_1 - A_2$ é definida por $A_1 - A_2 = \{s \in S \mid s \in A_1$ e $s \notin A_2\}$.



5. A diferença simétrica $A_1 \Delta A_2$ é definida por $A_1 \Delta A_2 = A_1 - A_2 \cup A_2 - A_1$.
Note que $A_1 \Delta A_2 = A_1 \cup A_2 - A_1 \cap A_2$.

1.1.2 – Definições adicionais e notações.

- O conjunto sem elementos é denotado por $\emptyset$ e é chamado de conjunto vazio.
- A_1 e A_2 são disjuntos se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.



- $A_1 = A_2$ se $A_1 \subseteq A_2$ e $A_2 \subseteq A_1$.
- $A_j, j=1,\dots,n$ são mutuamente disjuntos se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Neste caso, usamos a seguinte notação:

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n} A_j = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

- Escrevemos $\sum_j A_j$, $\bigcup_j A_j$ e $\bigcap_j A_j$ quando não queremos especificar n ou 1, por exemplo.

1.1.3 – Propriedades de operações de conjuntos

0. $\emptyset \subseteq A$ para qualquer conjunto A (por convenção).
1. $S^c = \emptyset$; $\emptyset^c = S$; e $(A^c)^c = A$.
2. $S \cup A = S$; $\emptyset \cup A = A$; $A \cup A^c = S$; $A \cup A = A$.
3. $S \cap A = A$; $\emptyset \cap A = \emptyset$; $A \cap A^c = \emptyset$; $A \cap A = A$.
4. Leis de Associação: $A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$ e $A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cap A_2) \cap A_3$.
5. Leis de Comutatividade: $A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$ e $A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1$.
6. Leis de distribuição: $A \cap (\bigcup_j A_j) = \bigcup_j (A \cap A_j)$
7. Identidade útil: $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 + A_2 \cap A_1^c + A_3 \cap A_1 \cap A_2 + \dots + A_n \cap A_1^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c$

$$= A_1 + \sum_{j=2}^{\infty} A_j \cap \left(\bigcap_{k=1}^{j-1} A_k^c \right)$$

<u>Demonstração</u>: Tem que provar que $A_1 + \sum_{j=2}^{\infty} A_j \cap \left(\bigcap_{k=1}^{j-1} A_k^c \right) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ e

$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset A_1 + \sum_{j=2}^{\infty} A_j \cap \left(\bigcap_{k=1}^{j-1} A_k^c \right)$

Seja $s \in A_1 + \sum_{j=2}^{\infty} A_j \cap \left(\bigcap_{k=1}^{j-1} A_k^c \right)$ então $\exists j$ tal $s \in A_j$ e, consequentemente, $s \in \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.

Seja $s \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, então $\exists j$ tal que $s \in A_j$. Considere $J = \{ j \mid s \in A_j \}$ e $i = \min\{J\}$.

Temos 2 opções:

a) $i = 1$, e $s \in A_1 + \sum_{j=2}^{\infty} A_j \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^c \right)$.

b) $i > 1$. Neste caso $s \notin A_1, s \notin A_2, \ldots, s \notin A_{i-1}$ e $s \in A_i \cap \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k^c \right)$ e $A_1 + \sum_{j=2}^{\infty} A_j \cap \left(\bigcap_{k=1}^{j-1} A_k^c \right)$. ■

Lei de De Morgan:

a) $(\cup_j A_j)^c = \cap_j A_j^c$

b) $(\cap_j A_j)^c = \cup_j A_j^c$.

Demonstração:

a) $(\cup_j A_j)^c \subseteq \cap_j A_j^c$.

$s \notin \cup_j A_j$.

Definição de $s \in \cup_j A_j$: $s \in A_j$ para algum j.

Negação de ($s \in \cup_j A_j$): $s \notin A_j$ para todos $j \Rightarrow s \in A_j^c, \forall j \Rightarrow s \in \cap_j A_j^c$

b) $\cap_j A_j^c \subseteq (\cup_j A_j)^c$.

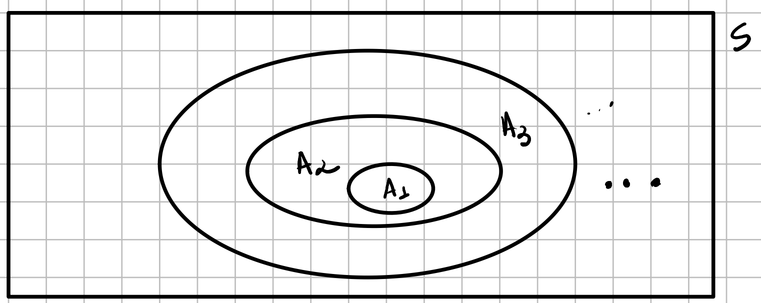
$s \in \cap_j A_j^c \Rightarrow s \in A_j^c, \forall j \Rightarrow s \notin A_j$ para todos j, ou seja, não existe j tal que $s \in A_j$.

$\therefore s \notin (\cup_j A_j)^c$. ■

Exercício: provar ii).

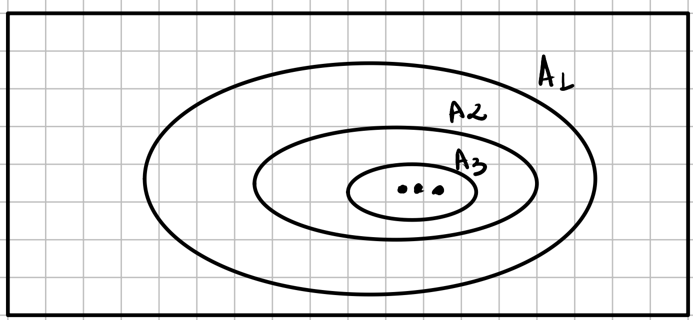
Definição 1: A sequência de conjuntos é uma sequência monótona de conjuntos se

i) $A_i \subseteq A_{i+1}, \forall i$ (sequência crescente) – $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq A_4 \cdots$



Notação: $A_n \uparrow$

ii) $A_i \supseteq A_{i+1}, \forall i$ (sequência decrescente) – $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \cdots$



Notação: $A_n \downarrow$

Os limites de sequências monótonas são definidos por:

i) Se $A_n \uparrow$, então $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_n A_n$;

ii) Se $A_n \downarrow$, então $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_n A_n$.

Para uma sequência de conjuntos $\{A_n\}$, podemos definir

$$\underline{A} = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} A_j$$

e

$$\bar{A} = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$$

Chamamos $\underline{A}$ de limite inferior e $\bar{A}$ de limite superior.

1.2 - Álgebra e σ-álgebras

Definição: Uma classe (ou conjunto) $\mathcal{F}$ de subconjuntos de S é uma álgebra se:

($\mathcal{F}_1$) $\mathcal{F}$ não está vazio.

($\mathcal{F}_2$) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

($\mathcal{F}_3$) $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$

1.2.1 - Consequências da definição de álgebra

1. $\emptyset, S \in \mathcal{F}$

2. If A_j, $j=1,\dots,n$, $A_j \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$ e $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$.

Demonstração:

1. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup A^c = S \in \mathcal{F}$

$S^c = \emptyset \in \mathcal{F}$

2. $n=2$ ($\mathcal{F}_3$) - Prova por indução.

Assuma que 2. é verdade para $n = k-1$.

Então $\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \in \mathcal{F}$ e $A_k \in \mathcal{F}$, então $\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \cup A_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \in \mathcal{F}$.

$A_j^c \in \mathcal{F}$, $j = 1,\dots,k \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j^c \Rightarrow \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j^c\right)^c = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$. ■

1.2.3 - Exemplos de álgebra

i) $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, S\}$, $\mathcal{C}_1$ é chamada de álgebra trivial

ii) $\mathcal{C}_2 = \{$ todos os subconjuntos de $S\}$

$\mathcal{C}_2$ é chamada de álgebra discreta

iii) $\mathcal{C}_3 = \{\emptyset, A, A^c, S\}$ para $\emptyset \subset A \subset S$.

iv) $\mathcal{C}_4 = \{A \subset S \mid A$ é finito ou A^c é finito$\}$

Demonstração:

i) $\phi, S \in \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_1$ é não vazio

$S^c = \phi \in \mathcal{C}_1$

$S \cup \phi = S \in \mathcal{C}_1$

ii) $\phi, S \in \mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_2$ não é vazio

$A^c \in \mathcal{C}_2$ (por definição)

$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{C}_2$ (por definição)

iii) $\phi, S \in \mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_3$ não é vazio

$A^c \in \mathcal{C}_3$; $(A^c)^c = A \in \mathcal{C}_3$; $\phi^c = S \in \mathcal{C}_3$; e $S^c = \phi \in \mathcal{C}_3$

$\phi \cup S \in \mathcal{C}_3$; $\phi \cup A \in \mathcal{C}_3$; $\phi \cup A^c \in \mathcal{C}_3$; $S \cup A \in \mathcal{C}_3$; $S \cup A^c \in \mathcal{C}_3$; $A \cup A^c \in \mathcal{C}_3$

iii) $\phi \in \mathcal{C}_4$; $S^c = \phi$ é finito

$A \in \mathcal{C}_4$ e A é finito $\Rightarrow (A^c)^c = A$ é finito $\Rightarrow A^c \in \mathcal{C}_4$

$A \in \mathcal{C}_4$ e A^c é finito $\Rightarrow A^c$ é finito $\Rightarrow A^c \in \mathcal{C}_4$ $\blacksquare$

Theorem 1: Seja I um conjunto de índices e $\mathcal{F}_j, j \in I$ é uma álgebra. Defina $\mathcal{F} = \bigcap_{j \in I} \mathcal{F}_j = \{A \mid A \in \mathcal{F}_j, \forall j \in I\}$. Então $\mathcal{F}$ é uma álgebra.

Demonstração:

i) $S, \phi \in \mathcal{F}_j, \forall j \in I \Rightarrow S, \phi \in \mathcal{F}$

ii) Se $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}_j, \forall j \in I \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_j, \forall j \in I \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

iii) se $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1, A_2 \in \mathcal{F}_j, \forall j \in I \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}_j, \forall j \in I \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$ $\blacksquare$

Theorem 2: Let $\mathcal{C}$ be uma classe de subconjuntos de S. Então existe uma única álgebra mínima $\mathcal{F}$ contendo $\mathcal{C}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é gerada por $\mathcal{C}$ e denotamos por $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$.

Demonstração: $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_0$, onde $\mathcal{A}_0$ é álgebra discreta.

Seja $\{\mathcal{F}_j \mid j \in I\}$ a classe de todas álgebras que contém $\mathcal{C}$. Pelo Teorema 2, temos que

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{C}) = \bigcap_{j \in I} \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{A}_0, \forall j.$$

e $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ é a menor álgebra contendo $\mathcal{C}$ e é a única. $\blacksquare$

Definition 3: Uma classe de subconjuntos é dita uma σ-álgebra é denotada por $\mathcal{A}_0$ se

($\mathcal{F}_1$) $\mathcal{A}_0$ não é vazia;

($\mathcal{F}_2$) $A \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_0$;

$(\mathcal{F}_3)$ $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ é fechada sob união enumerável).

1.2.3 - Consequências da Definição de σ-álgebra

1. Se $A_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_j A_j \in \mathcal{A}$
2. Toda σ-álgebra é uma álgebra, mas o contrário não é verdade.

<u>Demonstração:</u>

1. Se $A_j \in \mathcal{A} \Rightarrow A_j^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_j A_j^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_j (A_j^c)^c = \bigcap_j A_j \in \mathcal{A}$.
2. Direto por definição.

1.2.4 - Exemplos

1. $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, S\}$ é uma σ-álgebra.
2. $\mathcal{C}_2 = \{$todos subconjuntos de $S\}$ é uma σ-álgebra.
3. $\mathcal{C}_3 = \{\emptyset, A, A^c, S\}$ é uma σ-álgebra. $(\emptyset \subset A \subset S)$
4. $\mathcal{C}_4 = \{A \subset S \mid A$ é enumerável ou A^c é enumerável$\}$ (S enumerável)

   . $\emptyset, S \in \mathcal{C}_4$.

   . Se $A \in \mathcal{C}_4$, temos 2 opções:
   i) A é enumerável, então $(A^c)^c$ é enumerável $\Rightarrow A^c \in \mathcal{C}_4$
   ii) A^c é enumerável $\Rightarrow A^c \in \mathcal{C}_4$

   . Se $A_n \in \mathcal{C}_4 \Rightarrow A_n^c \in \mathcal{C}_4$. Temos duas opções:

   . A_n^c não é enumerável para todo n. Neste caso,
   (A_n é enumerável)
   $$\bigcup_n A_n = (\bigcap_n A_n^c)^c \text{ é enumerável.}$$

   . Pelo menos um A_n^c é enumerável. Neste caso,
   $$(\bigcup_n A_n)^c = \bigcap_n A_n^c \text{ é enumerável.}$$

   $\therefore \bigcup_n A_n \in \mathcal{C}_4$.

5) $\mathcal{C}_5 = \{A \subset S \mid A$ é finito ou A^c é finito$\}$ é uma álgebra, mas não é uma σ-álgebra.

   Considere $S = \mathbb{R}$ e $A_j = [-j, j] \cap \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$. Então $A_j \in \mathcal{C}_5$, mas
   $$\bigcup_j A_j = \mathbb{Z} \notin \mathcal{C}_5.$$

<u>Theorem 3</u>: Seja I um conjunto de índices e assuma que $\mathcal{A}_j$, $j \in I$ seja uma σ-álgebra. Então $\mathcal{A} \triangleq \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$.

<u>Demonstração:</u>

. $\emptyset, S \in \mathcal{A}_j, \forall j \in I \Rightarrow \emptyset, S \in \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$.

. $A \in \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_j, \forall j \in I \Rightarrow A^c \in \bigcap_j \mathcal{A}_j$.

- $A_n \in \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}_j, \forall j \in I \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$. $\blacksquare$

Theorem 4: Seja $\mathcal{C}$ uma classe de subconjuntos de S. Então existe uma única σ-álgebra mínima contendo $\mathcal{C}$.

Demonstração: Considere $\{\mathcal{A}_j \mid j\in I\}$ a coleção de σ-álgebra contendo $\mathcal{C}$.

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j \qquad \blacksquare$$

Observação:

1. $\mathcal{A}_A = \{ C \mid C = B\cap A,\ B\in \mathcal{A}\}$ é σ-álgebra, onde o complementar é tomado considerando A. (o espaço amostral agora é A).
2. $(S, \mathcal{A})$ é chamado de espaço mensurável.
3. Se S não é enumerável, usamos $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ onde $\mathcal{C}$ é a σ-álgebra discreta.
4. Se S é enumerável, usamos $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ onde $\mathcal{C}$ é a σ-álgebra discreta.

1.2.5 - Casos especiais de espaços mensuráveis

1. $S = \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_0 = \{\text{todos intervalos de } \mathbb{R}\}$

$$= \{(-\infty, x], (-\infty, x), [x,\infty), (x,\infty), (x,y), [x,y), (x,y], [x,y] \mid x,y\in\mathbb{R},\ x<y\}$$

$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C}_0)$ é chamada de σ-álgebra de Borel e usamos a notação $\mathcal{B}$.

$(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ é chamado de espaço mensurável real.

Theorem 5: Cada uma das classes geram a σ-álgebra de Borel:

$\mathcal{C}_1 = \{(x,y]\}$; $\mathcal{C}_2 = \{[x,y)\}$; $\mathcal{C}_3 = \{[x,y]\}$; $\mathcal{C}_4 = \{(x,\infty)\}$; $\mathcal{C}_5 = \{(x,y)\}$; $\mathcal{C}_6 = \{[x,\infty)\}$

$\mathcal{C}_7 = \{(-\infty, x)\}$; $\mathcal{C}_8 = \{(-\infty, x]\}$.

Demonstração: Basta mostrar que $\mathcal{C}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_j)$, $j = 1,\dots,7$.

Vamos fazer $\mathcal{C}_1$.

$$(-\infty, x] = \bigcup_{j=1}^{\infty} (-j, x] \in \sigma(\mathcal{C}_1)$$

$$(-\infty, x) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(-\infty, x+\frac{1}{j}\right] \in \sigma(\mathcal{C}_1)$$

$$(x,y) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(x, y+\frac{1}{j}\right] \in \sigma(\mathcal{C}_1)$$

$$[x;y) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left(x-\frac{1}{j}, y\right) \in \sigma(\mathcal{C}_1)$$

$$[x,\infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [x, j) \in \sigma(\mathcal{C}_1)$$

$$[x,y] = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left(x-\frac{1}{j}; y+\frac{1}{j}\right) \in \sigma(\mathcal{C}_1)$$

$$\therefore \mathcal{C}_j \subset \mathcal{C}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_j) \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_0) = \sigma(\mathcal{C}_j) \qquad \blacksquare$$

2. $S = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, e defina

$\mathcal{C}_0 = \{\text{all rectangles on } \mathbb{R}^2\}$

$\mathcal{C}_0 = \{ (-\infty, x) \times (-\infty, x'), (-\infty, x) \times (-\infty, x'], (-\infty, x] \times (-\infty, x'), (-\infty, x] \times (-\infty, x'],$
$(x, \infty) \times (x', \infty), (x, \infty) \times [x', \infty), [x, \infty) \times (x', \infty), [x, \infty) \times [x', \infty), (x, y) \times (x', y'),$
$(x, y) \times (x', y'], (x, y] \times (x', y'), (x, y] \times (x', y'], [x, y) \times (x', y'), [x, y) \times [x', y'),$
$(x, y) \times [x', y'), [x, y] \times [x', y'] \mid x, y, x', y' \in \mathbb{R}, x < y, x' < y' \}.$

$\mathcal{B}^2 = \sigma(\mathcal{C}_0)$ - σ-álgebra bidimensional de Borel.
$\mathcal{C}_1 = \{ (-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R} \}$ e $\sigma(\mathcal{C}_0) = \sigma(\mathcal{C}_1)$. (Versão do Teorema 5)

3. $S = \mathbb{R}^k$

$\mathcal{C}_0 = \{$ all cubes in $\mathbb{R}^k \}$

$\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{C}_0)$ - σ-álgebra k-dimensional de Borel.

$\mathcal{C}_1 = \{ (-\infty, x) \times (-\infty, x') \times (-\infty, x'') \}$ e $\sigma(\mathcal{C}_0) = \sigma(\mathcal{C}_1)$. (Versão do Teorema 5).