Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Estatística

Números Índices

Ana Maria Lima de Farias
Departamento de Estatística

Agosto 2015

Sumário

Capítulo 1

Índices Simples

1.1 Introdução

De forma simplificada, podemos dizer que um *índice* ou *número índice* é um quociente que expressa a variação relativa entre os valores de qualquer medida. Mais especificamente, iremos lidar com índices que medem variações verificadas em uma dada variável ao longo do *tempo*.

Quando lidamos com grandezas simples (um único item ou variável), o índice é chamado *índice simples*; por outro lado, quando pretendemos fazer comparações de um conjunto de produtos ou serviços, estamos lidando com o que é chamado *índice sintético* ou *índice composto*. é neste segundo caso que temos a parte mais complexa do problema, uma vez que desejamos "uma expressão quantitativa para um conjunto de mensurações individuais, para as quais não existe uma medida física comum"[1].

Nestas notas de aula, será dada ênfase aos índices econômicos, que envolvem variações de preços, quantidades e valores ao longo do tempo. Muitos comentários e observações serão feitos tomando-se o preço como exemplo, mas tais comentários e observações análogos também serão válidos para quantidades e valores.

1.2 Relativos

Os *relativos*, ou *índices simples* fazem comparação entre duas épocas – época atual e época base – para um único produto.

1. Relativo de preço

   Denotando por p_0 e p_t os preços na época base e na época atual (de interesse), define-se o relativo de preço – $p_{0,t}$ – como:

$$p_{0,t} = \frac{p_t}{p_0} \tag{1.1}$$

[1] Ragnar Frisch (1936). *The problem of index numbers*, Econometrica.

2. Relativo de quantidade

   Analogamente, denotando por q_0 e q_t as quantidades na época base e na época atual (de interesse), define-se o relativo de quantidade – $q_{0,t}$ – como:

$$q_{0,t} = \frac{q_t}{q_0} \tag{1.2}$$

3. Relativo de valor

   Vale lembrar que

$$\text{Valor} = \text{Preço} \ \times \ \text{Quantidade} \tag{1.3}$$

   Denotando por v_0 e v_t os valores na época base e na época atual (de interesse), define-se o relativo de valor – $v_{0,t}$ – como:

$$v_{0,t} = \frac{v_t}{v_0} \tag{1.4}$$

   Das definições acima, podemos ver que:

$$v_{0,t} = \frac{v_t}{v_0} = \frac{p_t q_t}{p_0 q_0} = \frac{p_t}{p_0} \times \frac{q_t}{q_0} = p_{0,t} \times q_{0,t} \tag{1.5}$$

O relativo de preço compara os preços nos dois períodos; como estão sendo comparadas grandezas positivas, os valores possíveis dos relativos estão no intervalo $(0, +\infty)$. Valores menores que 1 indicam que o preço atual é menor que o preço base; valores maiores que 1 indicam que preço atual é maior que o preço base e, finalmente, um relativo igual a 1 indica que o preço atual é igual ao preço base.

Atente para a notação: $p_{0,t}$ faz a comparação entre o preço no mês t com relação ao preço no mês 0; definições análogas para $q_{0,t}$ e $v_{0,t}$. Então, o primeiro subscrito indica o período base e o segundo subscrito, o período "atual". Essas notações podem variar em diferentes livros; assim, é importante prestar atenção nas definições apresentadas.

1.3 Taxa de variação

Podemos avaliar, também, a diferença entre os preços nas épocas atual e base, ou seja, a diferença $p_t - p_0$. Essa diferença mede a *variação absoluta* de preços entre os dois instantes. Considere, agora, dois bens cujos preços na época base eram 10 e 1000, respectivamente, e cuja varição absoluta de preços foi de 10. Isso significa que o primeiro produto passou a custar 20 e o segundo, 1010. Ou seja, o primeiro dobrou de preço, enquanto o segundo teve um aumento de 1%. Isso nos leva à necessidade de uma medida de *variação relativa*. Definimos, então, a *variação relativa* ou *taxa de variação* como

$$p\% = \frac{p_t - p_0}{p_0} \tag{1.6}$$

que é normalmente apresentada em forma percentual, ou seja, multiplica-se o valor por 100. Note que no numerador temos a variação absoluta de preços. Definições análogas valem para quantidade e valor.

Podemos escrever, também

$$p\% = \frac{p_t}{p_0} - 1 = p_{0,t} - 1 \tag{1.7}$$

e isso nos dá a relação entre a taxa de variação e o relativo.

EXEMPLO 1.1 Preço de arroz

Na tabela a seguir temos o preço (em unidades monetárias, u.m.) e a quantidade (em kg) de arroz consumida por uma família no último trimestre de determinado ano:

	Outubro		Novembro		Dezembro	
	Preço	Quant.	Preço	Quant.	Preço	Quant.
Arroz (kg)	2	5	2	8	3	8
Valor	$2 \times 5 =$ 10		$2 \times 8 = 16$		$3 \times 8 = 24$	

Tomando Outubro como base, temos os seguintes relativos:

$$p_{\text{O,N}} = \frac{2}{2} = 1,0 \qquad q_{\text{O,N}} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$p_{\text{O,D}} = \frac{3}{2} = 1,5 \qquad q_{\text{O,D}} = \frac{8}{5} = 1,6$$

Não houve variação de preços entre Novembro e Outubro, isto é, o preço de Novembro é igual ao preço de Outubro, mas o preço de Dezembro é uma vez e meia o preço de Outubro, o que corresponde a um aumento de 50% – essa é a taxa de variação dos preços no período em questão, obtida de acordo com a equação (1.7):

$$50\% = (1,5 - 1) \times 100\%$$

Com relação à quantidade, tanto em novembro como em dezembro, houve um aumento de 60% com relação a outubro.

Os relativos são, em geral, apresentados multiplicados por 100. Assim, as séries de relativos de preço e quantidade com base Outubro = 100 são:

Relativos - Out=100	Out	Nov	Dez
Preço	100	100	150
Quantidade	100	160	160

Com relação ao valor, temos que

$$v_{\text{O,N}} = \frac{16}{10} \times 100 = 160 = 1,0 \times 1,6 \times 100 = p_{\text{O,N}} \times q_{\text{O,N}} \times 100$$
$$v_{\text{O,D}} = \frac{24}{10} \times 100 = 240 = 1,5 \times 1,6 \times 100 = p_{\text{O,D}} \times q_{\text{O,D}} \times 100$$

Se mudarmos a base para Dezembro, teremos:

$$
\begin{aligned}
p_{D,O} &= \frac{p_O}{p_D} = \frac{2}{3} = 0,6667 \Rightarrow p\% \ = (0,6667 - 1) \times 100 = -33,\ 33\% \\
p_{D,N} &= \frac{p_N}{p_D} = \frac{2}{3} = 0,6667 \Rightarrow p\% \ = (0,6667 - 1) \times 100\% = -33,33\% \\
q_{D,O} &= \frac{q_O}{q_D} = \frac{5}{8} = 0,625 \Rightarrow q\% \ = (0,625 - 1) \times 100\% = -37,5\% \\
q_{D,N} &= \frac{q_N}{q_D} = \frac{8}{8} = 1 \Rightarrow q\% \ = (1 - 1) \times 100\% = 0\%
\end{aligned}
$$

♦♦

1.4 Critérios de avaliação da fórmula de um índice

Os relativos satsifazem uma série de propriedades, que são propriedades desejadas e buscadas quando da construção de fórmulas alternativas de números índices. Vamos representar por $I_{0,t}$ um índice qualquer – pode ser um relativo de preço ou um índice de preços qualquer, por exemplo (nas seções seguintes veremos a definição de outros índices). As propriedades ideais básicas são:

1. Identidade

$$I_{t,t} = 1 \tag{1.8}$$

Se a data-base coincidir com a data atual, o índice é sempre 1 (ou 100, no caso de se trabalhar com base 100).

2. Reversão (ou inversão) no tempo

$$I_{0,t} = \frac{1}{I_{t,0}} \Leftrightarrow I_{0,t} \times I_{t,0} = 1 \tag{1.9}$$

Invertendo-se os períodos de comparação, os índices são obtidos um como o inverso do outro.

3. Circular

$$I_{0,1} \times I_{1,2} \times I_{2,3} \times \cdots \times I_{t-1,t} = I_{0,t} \tag{1.10}$$

Se o intervalo de análise é decomposto em vários subintervalos, o índice pode ser obtido como o produto dos índices nos subintervalos. A propriedade circular é importante no seguinte sentido: se um índice a satisfaz e se conhecemos os índices nas épocas intermediárias, o índice de *todo o período* pode ser calculado sem que haja necessidade de recorrer aos valores que deram origem aos cálculos individuais. Note que, como decorrência desta propriedade, podemos escrever:

$$I_{0,t} = I_{0,t-1} \times I_{t-1,t} \tag{1.11}$$

Se o índice satisfizer também o princípio de reversibilidade, então (1.10) é equivalente a

$$I_{0,1} \times I_{1,2} \times I_{2,3} \times \cdots \times I_{t-1,t} \times I_{t,0} = 1$$

4. Decomposição das causas (ou reversão dos fatores)

   Denotando por I_V, I_P e I_Q os índices de valor, preço e quantidade respectivamente, o critério da decomposição das causas requer que

$$I_V = I_P \times I_Q \tag{1.12}$$

5. Homogeneidade

   Mudanças de unidade não alteram o valor do índice.

6. Proporcionalidade

   Se todas as variáveis envolvidas no índice tiverem a mesma variação, então o índice resultante terá a mesma variação.

Todas essas propriedades são satisfeitas pelos relativos. De fato:

- identidade

$$p_{t,t} = \frac{p_t}{p_t} = 1$$

- reversibilidade

$$p_{t,0} = \frac{p_0}{p_t} = \frac{1}{\frac{p_t}{p_0}}$$

- circular

$$p_{0,t} = \frac{p_t}{p_0} = \frac{p_t}{p_{t-1}} \times \frac{p_{t-1}}{p_{t-2}} \times \cdots \times \frac{p_2}{p_1} \times \frac{p_1}{p_0}$$

- decomposição das causas

$$p_{0,t} \times q_{0,t} = \frac{p_t}{p_0} \times \frac{q_t}{q_0} = \frac{p_t\, q_t}{p_0\, q_0} = \frac{v_t}{v_0}$$

Mudanças de unidade envolvem multiplicação por uma constante (quilo para tonelada, reais para milhões de reais, etc). Tais operações não alteram o valor do relativo, uma vez que numerador e denominador são multiplicados pelo mesmo valor.

EXEMPLO 1.2 Preço de arroz – continuação

$$\left.\begin{aligned} p_{\mathrm{O,N}} &= \frac{2}{2} = 1,0 \\ p_{\mathrm{N,D}} &= \frac{3}{2} = 1,5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_{\mathrm{O,D}} = 1,0 \times 1,5 = 1,5 = \frac{p_{\mathrm{D}}}{p_{\mathrm{O}}} = \frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} q_{\mathrm{O,N}} &= \frac{8}{5} = 1,6 \\ q_{\mathrm{N,D}} &= \frac{8}{8} = 1,0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow q_{\mathrm{O,D}} = 1,6 \times 1,0 = 1,6 = \frac{p_{\mathrm{D}}}{p_{\mathrm{O}}} = \frac{8}{5}$$

♦♦

1.5 Elos de relativo e relativos em cadeia

Na apresentação da propriedade circular, aparecem índices envolvendo épocas adjacentes. No caso de relativos, tais relativos são, às vezes, denominados *elos de relativos*, ou seja, os elos relativos estabelecem comparações binárias entre épocas adjacentes

$$\frac{p_t}{p_{t-1}} \qquad \frac{q_t}{q_{t-1}} \qquad \frac{v_t}{v_{t-1}}$$

A mesma propriedade circular envolve a multiplicação desses índices; para os relativos, tal operação é denominada *relativos em cadeia* e como a propriedade circular é satisfeita pelos relativos, tal multiplicação resulta no relativo do período.

$$\text{elos relativos :} \quad p_{1,2} \quad p_{2,3} \quad p_{3,4} \quad \dots \quad p_{t-1,t}$$

$$\text{relativos em cadeia :} \quad p_{1,2} \times p_{2,3} \times p_{3,4} \times \cdots \times p_{t-1,t} = p_{1,t}$$

EXEMPLO 1.3

Na tabela a seguir temos dados de preço para 5 anos e calculam-se os elos de relativos e os relativos em cadeia, ano a ano.

Ano	Preço	Elos relativos p_t/p_{t-1}	Relativos em cadeia
1	200		
2	250	$250/200 = 1,25$	$1,25 = p_{1,2}$
3	300	$300\,/\,250 = 1,20$	$1,2 \times 1,25 = 1,5 = p_{1,3}$
4	390	$390\,/\,300 = 1,30$	$1,2 \times 1,25 \times 1,3 = 1,95 = p_{1,4}$
5	468	$468\,/\,390 = 1,20$	$1,2 \times 1,25 \times 1,3 \times 1,2 = 2,34 = p_{1,5}$

o que está em concordância com:

Ano	Relativo de preço Base: Ano 1=100
1	100
2	$100 \times 250\,/\,200 = 125 \Rightarrow 25\%$
3	$100 \times 300\,/\,200 = 150 \Rightarrow 50\%$
4	$100 \times 390\,/\,200 = 195 \Rightarrow 95\%$
5	$100 \times 468\,/\,200 = 234 \Rightarrow 134\%$

♦♦

1.6 Mudança de base

Considere a seguinte série de relativos de preço com base 100 em 2010:

Ano	2010	2011	2012	2013	2014
Relativo	100	110	115	116	118

$p^{0,t} = \frac{p^t}{p^0}$

$p^{0,2} = \frac{p^2}{p^0} = \frac{\frac{p^2}{p^1}}{\frac{p^0}{p^1}} = \frac{p^{1,2}}{p^{1,0}}$

$p^{0,t} = \frac{p^{1,t}}{p^{1,0}}$

Isso significa que

$$\frac{p_{11}}{p_{10}} = 1,1 \quad \frac{p_{12}}{p_{10}} = 1,15 \quad \frac{p_{13}}{p_{10}} = 1,16 \quad \frac{p_{14}}{p_{10}} = 1,18$$

Suponhamos, agora, que queiramos colocar essa série com base em 2014, para atualizar o sistema de comparação. Como proceder? Na verdade, o que queremos é

$$\frac{p_t}{p_{14}}, \qquad t = 10, 11, 12, 13$$

Como os relativos satisfazem as propriedades de reversão e circular, temos que:

$$\frac{p_{10}}{p_{14}} = \frac{1}{\frac{p_{14}}{p_{10}}} = \frac{1}{p_{10,14}} = \frac{p_{10,10}}{p_{10,14}} = \frac{100}{118}$$

$$\frac{p_{11}}{p_{14}} = \frac{p_{11}}{p_{10}} \times \frac{p_{10}}{p_{14}} = p_{10,11} \times \frac{1}{p_{14,10}} = \frac{p_{10,11}}{p_{10,14}} = \frac{110}{118}$$

$$\frac{p_{12}}{p_{14}} = \frac{p_{12}}{p_{10}} \times \frac{p_{10}}{p_{14}} = p_{10,12} \times \frac{1}{p_{14,10}} = \frac{p_{10,12}}{p_{10,14}} = \frac{115}{118}$$

$$\frac{p_{13}}{p_{14}} = \frac{p_{13}}{p_{10}} \times \frac{p_{10}}{p_{14}} = p_{10,13} \times \frac{1}{p_{14,10}} = \frac{p_{10,13}}{p_{10,14}} = \frac{116}{118}$$

$$\frac{p_{14}}{p_{14}} = \frac{p_{14}}{p_{10}} \times \frac{p_{10}}{p_{14}} = p_{10,14} \times \frac{1}{p_{14,10}} = \frac{p_{10,14}}{p_{10,14}} = \frac{118}{118}$$

Logo, a série de relativos na nova base é obtida dividindo-se a série original pelo valor do relativo no ano da base desejada.

Na Tabela 1.1 ilustra-se o procedimento geral de mudança de base de uma série de relativos.

Tabela 1.1 – Procedimento de mudança de base para série de relativos

Período	Relativo	
	Base: $t_1 = 1$	Base: $t_2 = 1$
1	$p_{t_1,1}$	$p_{t_2,1} = \dfrac{p_{t_1,1}}{p_{t_2,t_1}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_1	$p_{t_1,t_1} = 1$	$p_{t_2,t_1} = \dfrac{p_{t_1,t_1}}{p_{t_2,t_1}} = \dfrac{1}{p_{t_2,t_1}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_2	$\boxed{p_{t_2,t_1}}$	$p_{t_2,t_2} = \dfrac{p_{t_2,t_1}}{p_{t_2,t_1}} = 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T	$p_{t_1,T}$	$p_{t_2,T} = \dfrac{p_{t_1,T}}{p_{t_2,t_1}}$

Capítulo 2

Índices agregativos simples

Consideremos agora a situação em que temos mais de um produto e estamos interessados em estudar variações de preços ou quantidade para *todos* os produtos conjuntamente.

Vamos utilizar a seguinte notação:

- p_t^i, q_t^i, v_t^i – preço, quantidade e valor do produto i no mês t;
- $p_{0,t}^i$, $q_{0,t}^i$, $v_{0,t}^i$ – relativos de preço, quantidade e valor do produto i no mês t com base em $t = 0$.

Note que o sobrescrito i indica o produto; vamos assumir que temos n produtos.

2.1 Índice agregativo simples (Bradstreet)

Uma primeira tentativa para resolver o problema de agregação de produtos diferentes foi o índice agregativo simples, que é a razão entre o preço, quantidade ou valor total na época atual e o preço, quantidade ou valor total na época base. Mais precisamente,

$$PA_{0,t} = \frac{p_t^1 + p_t^2 + \cdots + p_t^n}{p_0^1 + p_0^2 + \cdots + p_0^n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0^i} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_0^i}{n}} = \frac{\overline{p}_t}{\overline{p}_0}$$

$$QA_{0,t} = \frac{q_t^1 + q_t^2 + \cdots + q_t^n}{q_0^1 + q_0^2 + \cdots + q_0^n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_t^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_0^i} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} q_t^i}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^{n} q_0^i}{n}} = \frac{\overline{q}_t}{\overline{q}_0}$$

$$VA_{0,t} = \frac{v_t^1 + v_t^2 + \cdots + v_t^n}{v_0^1 + v_0^2 + \cdots + v_0^n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} v_t^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} v_0^i} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_t^i}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_0^i}{n}} = \frac{\overline{v}_t}{\overline{v}_0}$$

Então, o índice de Bradstreet é um relativo das médias aritméticas simples.

O índice de Bradstreet tem sérias limitações, a principal sendo o fato de se estar somando preços ou quantidades expressos em diferentes unidades. Tal limitação faz com que o índice de preço ou quantidade de Bradstreet não seja útil na prática, sendo apresentado aqui por razões históridas e também pelo fato de o índice de valor não apresentar esse problema, uma vez que todos os valores estão expressos na mesma unidade monetária. Na verdade, esse é o índice usado para comparar valores em diferentes épocas, independente de como se calculam os índices de preço e quantidade, ou seja, o índice de valor é definido como

$$V_{0,t} = \frac{V_t}{V_0} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t^i q_t^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0^i q_0^i} \tag{2.1}$$

Uma solução para resolver a limitação do índice agregativo de Bradstreet foi a proposta de se trabalhar com médias dos relativos de preço e quantidade, que são números adimensionais.

2.2 Índice da média aritmética simples (índice de Sauerbeck)

Sauerbeck propôs que se trabalhasse com a média aritmética dos relativos, dando origem aos seguintes índices:

- $\overline{p}_{0,t}$ – índice de preço baseado na média aritmética simples dos relativos

$$\overline{p}_{0,t} = \frac{p_{0,t}^1 + p_{0,t}^2 + \cdots + p_{0,t}^n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{0,t}^i}{n} \tag{2.2}$$

- $\overline{q}_{0,t}$ – índice de quantidade baseado na média aritmética simples dos relativos

$$\overline{q}_{0,t} = \frac{q_{0,t}^1 + q_{0,t}^2 + \cdots + q_{0,t}^n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{0,t}^i}{n} \tag{2.3}$$

2.3 Índice da média harmônica simples

A mesma idéia se aplica, trabalhando com a média harmônica dos relativos.

- $\overline{p}^H_{0,t}$ – índice de preço baseado na média harmônica simples dos relativos

$$\overline{p}^H_{0,t} = \frac{n}{\frac{1}{p^1_{0,t}} + \frac{1}{p^2_{0,t}} + \cdots + \frac{1}{p^n_{0,t}}} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p^i_{0,t}}} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{p^i_0}{p^i_t}} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} p^i_{t,0}} \tag{2.4}$$

- $\overline{q}^H_{0,t}$ – índice de quantidade baseado na média harmônica simples dos relativos

$$\overline{q}^H_{0,t} = \frac{n}{\frac{1}{q^1_{0,t}} + \frac{1}{q^2_{0,t}} + \cdots + \frac{1}{q^n_{0,t}}} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{q^i_{0,t}}} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{q^i_0}{q^i_t}} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} q^i_{t,0}} \tag{2.5}$$

2.4 Índice da média geométrica simples

Aqui considera-se a média geométrica dos relativos.

- $\overline{p}^G_{0,t}$ – índice de preço baseado na média geométrica simples dos relativos

$$\overline{p}^G_{0,t} = \sqrt[n]{\frac{p^1_t}{p^1_0} \times \frac{p^2_t}{p^2_0} \times \cdots \times \frac{p^n_t}{p^n_0}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} p^i_{0,t}} \tag{2.6}$$

- $\overline{q}^G_{0,t}$ – índice de quantidade baseado na média geométrica simples dos relativos

$$\overline{q}^G_{0,t} = \sqrt[n]{\frac{q^1_t}{q^1_0} \times \frac{q^2_t}{q^2_0} \times \cdots \times \frac{q^n_t}{q^n_0}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} q^i_{0,t}} \tag{2.7}$$

EXEMPLO 2.1

Considere os dados da tabela a seguir, em que temos preços (em unidades monetárias) e quantidades de três produtos em três instantes de tempo consecutivos:

Produto	t_1		t_2		t_3	
	P	Q	P	Q	P	Q
Carne (kg)	8,50	10	8,50	12	9,00	15
Feijão (kg)	1,20	5	1,80	6	1,80	7
Pão (unid.)	0,10	200	0,12	220	0,14	240

Vamos calcular os índices de preço, quantidade e valor, com base $t_1 = 100$, baseados nas três médias vistas.

Os valores gastos com cada produto estão calculados na tabela abaixo.

	Valor		
	t_1	t_2	t_3
Carne	$8,5 \times 10 = 85$	$8,5 \times 12 = 102,0$	$9 \times 15 = 135$
Feijão	$1,2 \times 5 = 6$	$1,8 \times 6 = 10,8$	$1,8 \times 7 = 12,6$
Pão	$0,1 \times 200 = 20$	$0,12 \times 220 = 26,4$	$0,14 \times 240 = 33,6$
Total	$85 + 6 + 20 = 111$	$102 + 10,8 + 26,4 = 139,2$	$135 + 12,6 + 33,6 = 181,2$

e os índices de valor são

$$
\begin{aligned}
V_{1,2} &= \frac{139,2}{111} \times 100 = 125,41 \\
V_{1,3} &= \frac{181,2}{111} \times 100 = 163,24
\end{aligned}
$$

Como os relativos satisfazem a propriedade da identidade, no período base todos são iguais a 1 ou 100, se estivermos trabalhando com base 100. Para os demais períodos, os relativos com base 1 em $t_1 = 1$ são:

Relativos -$t_1 = 1$				
Produto	t_2		t_3	
	P	Q	P	Q
Carne (kg)	$8,5/8,5 = 1,0$	$12/10 = 1,2$	$9/8,5 = 1,0588$	$15/10 = 1,5$
Feijão (kg)	$1,8/1,2 = 1,5$	$6/5 = 1,2$	$1,8/1,2 = 1,5$	$7/5 = 1,4$
Pão (unid,)	$0,12/0,10 = 1,2$	$220/200 = 1,1$	$0,14/0,10 = 1,4$	$240/200 = 1,2$

e os índices de preço, com base $t_1 = 100$, baseados nas três médias são:

$$
\begin{aligned}
\overline{p}_{1,2} &= \frac{1,0 + 1,5 + 1,2}{3} \times 100 = 123,33 \\
\overline{p}_{1,3} &= \frac{1,0588 + 1,5 + 1,4}{3} \times 100 = 131,96
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{p}^H_{1,2} &= \frac{3}{\frac{1}{1,0} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,2}} \times 100 = 120,00 \\
\overline{p}^H_{1,3} &= \frac{3}{\frac{1}{1,0588} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,4}} \times 100 = 129,01
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{p}^G_{1,2} &= \sqrt[3]{1,0 \times 1,5 \times 1,2} \times 100 = 121,64 \\
\overline{p}^G_{1,3} &= \sqrt[3]{1,0588 \times 1,5 \times 1,4} \times 100 = 130,52
\end{aligned}
$$

Para quantidade, temos os seguintes índices:

$$
\begin{aligned}
\overline{q}_{1,2} &= \frac{1,2 + 1,2 + 1,1}{3} \times 100 = 116,67 \\
\overline{q}_{1,3} &= \frac{1,5 + 1,4 + 1,2}{3} \times 100 = 136,67
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{q}^H_{1,2} &= \frac{3}{\frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,1}} \times 100 = 116,47 \\
\overline{q}^H_{1,3} &= \frac{3}{\frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,4} + \frac{1}{1,2}} \times 100 = 135,48
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\overline{q}^G_{1,2} &= \sqrt[3]{1,2 \times 1,2 \times 1,1} \times 100 = 116,57 \\
\overline{q}^G_{1,3} &= \sqrt[3]{1,5 \times 1,4 \times 1,2} \times 100 = 136,08
\end{aligned}$$

Já o índice agregativo de Bradstreet é:

$$\begin{aligned}
PA_{1,2} &= \frac{8,5 + 1,8 + 0{,}12}{8,5 + 1,2 + 0,10} \times 100 = 106,33 \\
PA_{1,3} &= \frac{9,0 + 1,8 + 0,14}{8,5 + 1,2 + 0,10} \times 100 = 111,63
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
QA_{1,2} &= \frac{12 + 6 + 220}{10 + 5 + 200} \times 100 = 110,698 \\
QA_{1,3} &= \frac{15 + 7 + 240}{10 + 5 + 200} \times 100 = 121,86
\end{aligned}$$

Note que, no índice de quantidade, estamos somando valores expressos em kg e em unidades simples e no índice de preço, estamos somandos valores em R$/kg e R$/unidade. A partir de agora, não iremos mais trabalhar com os índices agregativos de Bradstreet.

Resumindo os outros índices:

	Preço			Quantidade			Valor		
	t_1	t_2	t_3	t_1	t_2	t_3	t_1	t_2	t_3
Média aritmética	100	123, 33	131, 96	100	116, 67	136, 67			
Média geométrica	100	121, 64	130, 52	100	116, 57	136, 08			
Média harmônica	100	120, 00	129, 01	100	116, 47	135, 48			

Podemos ver que

$$\overline{p} \geq \overline{p}^G \geq \overline{p}^H$$

uma consequência direta da relação entre as médias aritmética, geométrica e harmônica de números positivos.

♦♦

2.5 Propriedades dos índices agregativos simples

2.5.1 Identidade

A propriedade de identidade é obviamente satisfeita por todos os índices agregativos simples.

2.5.2 Reversibilidade

Vamos mostrar com os dados do Exemplo 2.1 que os índices das médias aritmética e harmônica simples não satisfazem a propriedade de reversibilidade. Para isso, vamos calcular esses índices com base em t_2.

$$\overline{p}_{2,1} = \frac{\frac{8,5}{8,5} + \frac{1,2}{1,8} + \frac{0,1}{0,12}}{3} \times 100 = 83,33 \neq \frac{1}{\overline{p}_{1,2}} = \frac{1}{1,2333} \times 100 = 81,08$$

$$\overline{p}^H_{2,1} = \frac{3}{\frac{8,5}{8,5} + \frac{1,8}{1,2} + \frac{0,12}{0,1}} \times 100 = 81,081 \neq \frac{1}{\overline{p}^H_{1,2}} = \frac{100}{120,00} \times 100 = 83,33$$

Com relação à média geométrica simples, temos que

$$\frac{1}{\overline{p}^G_{0,t}} = \frac{1}{\sqrt[n]{p^1_{0,t} \times \cdots \times p^n_{0,t}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{p^1_t}{p^1_0} \times \cdots \times \frac{p^n_t}{p^n_0}}} = \sqrt[n]{\frac{p^1_0}{p^1_t} \times \cdots \times \frac{p^n_0}{p^n_t}} = \overline{p}^G_{t,0}$$

ou seja, o índice baseado na média geométrica simples satisfaz a propriedade de reversibilidade.

2.5.3 Circularidade

Os índices da média aritmética e da média harmônica simples não satisfazem a propriedade circular. Vamos mostrar este resultado através de um contra-exemplo, baseado nos dados do Exemplo 2.1.

$$\begin{aligned}
\overline{p}_{2,3} &= \frac{\frac{9}{8,5} + \frac{1,8}{1,8} + \frac{0,14}{0,12}}{3} \times 100 = 107,52 \\
\overline{p}_{1,2} \times \overline{p}_{2,3} &= 1,2333 \times 1,0752 \times 100 = 132,60 \neq 131,96 = \overline{p}_{1,3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{p}^H_{2,3} &= \frac{3}{\frac{8,5}{9} + \frac{1,8}{1,8} + \frac{0,12}{0,14}} \times 100 = 107,08 \\
\overline{p}^H_{1,2} \times \overline{p}^H_{2,3} &= 1,2000 \times 1,0708 \times 100 = 128,496 \neq 129,01 = \overline{p}^H_{1,3}
\end{aligned}$$

Com relação ao índice da média geométrica, temos que:

$$\begin{aligned}
\overline{p}^G_{0,1} \times \overline{p}^G_{1,2} &= \sqrt[n]{\frac{p^1_1}{p^1_0} \times \cdots \times \frac{p^n_1}{p^n_0}} \times \sqrt[n]{\frac{p^1_2}{p^1_1} \times \cdots \times \frac{p^n_2}{p^n_1}} \\
&= \sqrt[n]{\frac{p^1_1}{p^1_0} \times \frac{p^1_2}{p^1_1} \times \cdots \times \frac{p^n_1}{p^n_0} \times \frac{p^n_2}{p^n_1}} = \sqrt[n]{\frac{p^1_2}{p^1_0} \times \cdots \times \frac{p^n_2}{p^n_0}} = \overline{p}^G_{0,2}
\end{aligned}$$

ou seja, o índice baseado na média geométrica simples satisfaz a propriedade de circularidade.

2.5.4 Decomposição das causas

Vamos analisar agora a propriedade da decomposição das causas para esses índices. Esta propriedade exige que o produto do índice de preço pelo índice de quantidade seja igual ao índice simples de valor $V_{0,t}$ definido em (2.1)

Usando os dados do Exemplo 2.1, temos:

$$\overline{p}_{99,00} \times \overline{q}_{99,00} = 1.2333 \times 131.96 = 162,75 \neq V_{99,00} = 125,41$$

Logo, o índice de média aritmética simples *não* satisfaz o critério de decomposição das causas.

$$\overline{p}^{H}_{99,01} \times \overline{q}^{H}_{99,01} = 129.01 \times 135.48 = 174,78 \neq V_{99,01} = 163,24$$

Analogamente, concluímos que o índice de média harmônica simples também *não* satisfaz o critério de decomposição das causas.

$$\overline{p}^{G}_{99,00} \times \overline{q}^{G}_{99,00} = 1.2927 \times 116.57 = 150,69 \neq V_{99,00} = 125,41$$
$$\overline{p}^{G}_{99,01} \times \overline{q}^{G}_{99,01} = 1.3976 \times 136.08 = 190,18 \neq V_{99,01} = 163,24$$

Logo, o índice de média geométrica simples *não* satisfaz o critério de decomposição das causas.

2.5.5 Resumo das propriedades dos índices agregativos simples

A seguir temos o resumo das propriedades dos índices:

Índice agregativo simples	Critério			
	Identidade	Reversibilidade	Circularidade	Decomposição das causas
Média Aritmética	Sim	Não	Não	Não
Média Harmônica	Sim	Não	Não	Não
Média Geométrica	Sim	Sim	Sim	Não

2.6 Relações entre índices agregativos simples

Note que

$$\begin{aligned}
\overline{p}_{0,t} &= \frac{p^1_{0,t} + \cdots + p^n_{0,t}}{n} = \frac{\frac{p^1_t}{p^1_0} + \cdots + \frac{p^n_t}{p^n_0}}{n} \\
\overline{p}_{t,0} &= \frac{p^1_{t,0} + \cdots + p^n_{t,0}}{n} = \frac{\frac{p^1_0}{p^1_t} + \cdots + \frac{p^n_0}{p^n_t}}{n}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{\overline{p}_{0,t}} = \frac{n}{\frac{p^1_t}{p^1_0} + \cdots + \frac{p^n_t}{p^n_0}} = \frac{n}{\frac{1}{p^1_{t,0}} + \cdots + \frac{1}{p^n_{t,0}}}$$

ou seja,

$$\frac{1}{\overline{p}_{0,t}} = \overline{p}^{H}_{t,0} \tag{2.8}$$

Analogamente, obtemos que

$$\frac{1}{\overline{p}_{t,0}} = \overline{p}^{H}_{0,t} \tag{2.9}$$

Capítulo 3

Índices agregativos ponderados

Uma forte limitação dos índices baseados em médias simples é o fato de se dar o mesmo peso para todos os produtos. Surgem, então, os índices agregativos ponderados, em que cada produto tem um peso diferente. A forma mais comum de se definir os pesos é tomar a participação do valor de cada bem no valor total, ou seja, os pesos são definidos como

$$w^i = \frac{v^i}{\sum\limits_{j=1}^{n} v^j} = \frac{p^i q^i}{\sum\limits_{j=1}^{n} p^j q^j} \tag{3.1}$$

Como um número índice compara preços e quantidades em dois instantes de tempo, uma questão relevante aqui é definir a que momento se referem os preços e quantidades que aparecem na definição dos pesos. Temos, então, que especificar a *base de ponderação*.

3.1 Índice de Laspeyres ou índice da época base

O índice de Laspeyres é definido como uma *média aritmética ponderada dos relativos*, com os pesos sendo definidos na *época base*. Então, os pesos são

$$w_0^i = \frac{v_0^i}{\sum\limits_{j=1}^{n} v_0^j} = \frac{v_0^i}{V_0} = \frac{p_0^i q_0^i}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_0^j q_0^j} \tag{3.2}$$

em que $V_0 = \sum\limits_{j=1}^{n} v_0^j$ é o valor total na é poca base, um valor constante. Note que

$$\sum_{i=1}^{n} w_0^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_0^i}{\sum\limits_{j=1}^{n} v_0^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_0^i}{V_0} = \frac{1}{V_0} \sum_{i=1}^{n} v_0^i = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} v_0^i}{\sum\limits_{j=1}^{n} v_0^j} = \frac{V_0}{V_0} = 1 \tag{3.3}$$

3.1.1 Índice de Laspeyres de preço

O índice de preços de Laspeyres é definido por:

$$L_{0,t}^{P} = \sum_{i=1}^{n} w_0^i \, p_{0,t}^i \tag{3.4}$$

Essa expressão pode ser simplificada, bastando, para isso, substituir os termos envolvidos pelas respectivas definições:

$$\begin{aligned} L_{0,t}^{P} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{v_0^i}{\sum\limits_{j=1}^{n} v_0^j} \times \frac{p_t^i}{p_0^i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{v_0^i}{V_0} \times \frac{p_t^i}{p_0^i} \right) \\ &= \frac{1}{V_0} \times \sum_{i=1}^{n} \left(v_0^i \frac{p_t^i}{p_0^i} \right) = \frac{1}{V_0} \times \sum_{i=1}^{n} \left(p_0^i q_0^i \frac{p_t^i}{p_0^i} \right) = \frac{1}{V_0} \times \sum_{i=1}^{n} q_0^i p_t^i \quad . \end{aligned}$$

Logo,

$$L_{0,t}^{P} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_0^i p_t^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_0^i p_0^i} \tag{3.5}$$

Vamos analisar essa última expressão: no denominador temos o valor total no mês base. Já no numerador, temos os valores das quantidades da época base aos preços atuais. Então, comparando esses dois termos, estamos comparando a variação de preços da mesma cesta de produtos, *a cesta da época base*, nos dois instantes de tempo.

Note que as quantidades ou a cesta de produtos é a cesta da época base e, portanto, fica fixa, enquanto não houver mudança de base. Note também que o fato de os pesos serem fixados na época base não significa que temos um sistema fixo de ponderação, o que só acontece quando os pesos independem da base de comparação. No caso do índice de Laspeyres, os pesos mudam quando mudamos a base de comparação.

3.1.2 Índice de Laspeyres de quantidade

O índice de Laspeyres de quantidade é definido por:

$$L_{0,t}^{Q} = \sum_{i=1}^{n} w_0^i \, q_{0,t}^i \tag{3.6}$$

Como antes, essa expressão pode ser simplificada, substituindo-se os termos envolvidos pelas respectivas definições:

$$\begin{aligned} L^Q_{0,t} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{v_0^i}{\sum\limits_{j=1}^{n} v_0^j} \times \frac{q_t^i}{q_0^i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_0^i}{V_0} \frac{q_t^i}{q_0^i} \\ &= \frac{1}{V_0} \times \sum_{i=1}^{n} \left(p_0^i q_0^i \frac{q_t^i}{q_0^i} \right) = \frac{1}{V_0} \times \sum_{i=1}^{n} p_0^i q_t^i \end{aligned}$$

Logo,

$$L^Q_{0,t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0^i q_t^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0^i q_0^i} \tag{3.7}$$

Como antes, no denominador temos o valor total no mês base. Já no numerador, temos os valores das quantidades da época atual aos preços da época base. Então, comparando esses dois termos, estamos comparando a variação no valor gasto para aquisição das diferentes quantidades aos mesmos *preços da época base*. Os preços aqui são os preços da época base, também permanecendo fixos enquanto não houver mudança de base.

No índice de preços, a variação no valor gasto é devida à variação de preços (as quantidades estão fixas), enquanto no índice de quantidade, o valor total varia em função da variação nas quantidades (os preços estão fixos).

3.2 Índice de Paasche ou índice da época atual

O índice de Paasche é uma média harmônica dos relativos, ponderada na época atual, isto é, os pesos são definidos como

$$w_t^i = \frac{v_t^i}{\sum\limits_{j=1}^{n} v_t^j} = \frac{v_t^i}{V_t} = \frac{p_t^i q_t^i}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_t^j q_t^j} \tag{3.8}$$

onde $V_t = \sum\limits_{j=1}^{n} v_t^j$ é o valor total da época atual. Como antes, $\sum\limits_{i=1}^{n} w_t^i = 1$.

3.2.1 Índice de Paasche de preços

O índice de preços de Paasche é definido como

$$P^P_{0,t} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_t^i \frac{1}{p_{0,t}^i}} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_t^i \, p_{t,0}^i} \tag{3.9}$$

Note a inversão dos relativos, uma vez que $\frac{1}{p^i_{0,t}} = p^i_{t,0}$. A simplificação é feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
P^P_{0,t} &= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{v^i_t}{\sum\limits_{j=1}^{n} v^j_t} \times \dfrac{p^i_0}{p^i_t}\right)} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{v^i_t}{V_t} \times \dfrac{p^i_0}{p^i_t}\right)} = \\
&= \frac{1}{\dfrac{1}{V_t}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(v^i_t \dfrac{p^i_0}{p^i_t}\right)} = \frac{V_t}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(q^i_t\, p^i_t \dfrac{p^i_0}{p^i_t}\right)} = \frac{V_t}{\sum\limits_{i=1}^{n} q^i_t\, p^i_0}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$P^P_{0,t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q^i_t\, p^i_t}{\sum\limits_{i=1}^{n} q^i_t\, p^i_0} \tag{3.10}$$

Nessa fórmula fica clara a comparação sendo feita: estamos analisando a *variação de preços da cesta atual*. No numerador temos o valor gasto na época atual e no denominador temos o valor que seria gasto para comprar a cesta atual (quantidade atual) aos preços da época base.

Uma séria limitação no emprego dos índices de Paasche é o fato de as ponderações variarem em cada período; note que os pesos são dados pelo valor da época atual.

3.2.2 Índice de Paasche de quantidade

O índice de quantidades de Paasche é definido como

$$P^Q_{0,t} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{w^i_t}{q^i_{0,t}}} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} w^i_t\, q^i_{t,0}} \tag{3.11}$$

A simplificação é feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
P^Q_{0,t} &= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{v^i_t}{\sum\limits_{j=1}^{n} v^j_t} \times \dfrac{q^i_0}{q^i_t}\right)} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{v^i_t}{V_t} \times \dfrac{q^i_0}{q^i_t}\right)} \\
&= \frac{V_t}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(v^i_t \dfrac{q^i_0}{q^i_t}\right)} = \frac{V_t}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(q^i_t\, p^i_t \dfrac{q^i_0}{q^i_t}\right)}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$P^Q_{0,t} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p^i_t \, q^i_t}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p^i_t \, q^i_0} \tag{3.12}$$

Nesse fórmula fica clara a comparação sendo feita: estamos analisando a *variação da quantidade aos preços atuais*. No numerador temos o valor gasto na época atual e no denominador temos o valor que seria gasto para comprar a cesta da época base (quantidade da época base) aos preços atuais. A ponderação é definida pelos valores atuais, mudando a cada período.

3.3 Índice de Fisher

O índice de Fisher é definido como a média geométrica dos índices de Laspeyres e Paasche.

$$F^P_{0,t} = \sqrt{L^P_{0,t} \times P^P_{0,t}} \tag{3.13}$$

$$F^Q_{0,t} = \sqrt{L^Q_{0,t} \times P^Q_{0,t}} \tag{3.14}$$

3.4 Índice de Marshall-Edgeworth

Com os índices de Laspeyres e Paasche de quantidades, estamos analisando a variação no valor gasto, em função da variação das quantidades, para adquirir os produtos aos preços da época base e da época atual, respectivamente.

O índice de Marshall-Edgeworth considera as médias desses preços e quantidades. Mais precisamente, define-se o índice de preços de Marshall-Edgeworth como um índice que mede a variação no valor gasto, em função da variação dos preços, para adquirir a quantidade definida pela quantidade média da época base e da época atual: $\dfrac{q^i_0 + q^i_t}{2}$, ou seja, o índice de preços é:

$$M^P_{0,t} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q^i_0 + q^i_t}{2}\right) p^i_t}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q^i_0 + q^i_t}{2}\right) p^i_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(q^i_0 p^i_t + q^i_t p^i_t\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(q^i_0 p^i_0 + q^i_t p^i_0\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(q^i_0 + q^i_t\right) p^i_t}{\sum_{i=1}^{n} \left(q^i_0 + q^i_t\right) p^i_0} \tag{3.15}$$

Para o índice de quantidade, toma-se o preço médio da época base e da época atual

$\dfrac{p_0^i + p_t^i}{2}$. Logo,

$$M_{0,t}^Q = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{p_0^i + p_t^i}{2} \right) q_t^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{p_0^i + p_t^i}{2} \right) q_0^i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(p_0^i q_t^i + p_t^i q_t^i \right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(p_0^i q_0^i + p_t^i q_0^i \right)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(p_0^i + p_t^i \right) q_t^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(p_0^i + p_t^i \right) q_0^i} \tag{3.16}$$

3.5 Índice de Divisia

Esse índice é definido como uma média geométrica ponderada dos relativos, com sistema de pesos fixo na época base.

$$D_{0,t}^P = \left(\frac{p_t^1}{p_0^1} \right)^{w_0^1} \times \left(\frac{p_t^2}{p_0^2} \right)^{w_0^2} \times \cdots \times \left(\frac{p_t^n}{p_0^n} \right)^{w_0^n} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_t^i}{p_0^i} \right)^{w_0^i} \tag{3.17}$$

$$D_{0,t}^Q = \left(\frac{q_t^1}{q_0^1} \right)^{w_0^1} \times \left(\frac{q_t^2}{q_0^2} \right)^{w_0^2} \times \cdots \times \left(\frac{q_t^n}{q_0^n} \right)^{w_0^n} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{q_t^i}{q_0^i} \right)^{w_0^i} \tag{3.18}$$

EXEMPLO 3.1

Vamos considerar os seguintes dados, já trabalhados no capítulo anterior:

Produto	t_1		t_2		t_3	
	P	Q	P	Q	P	Q
Arroz (kg)	2,50	10	3,00	12	3,25	15
Feijão (kg)	1,20	5	1,80	6	1,80	7
Pão (unid.)	0,10	200	0,12	220	0,14	240

Com base nesses dados, vamos calcular os índices de Laspeyres, Paasche, Fisher, Marshall-Edgeworth e Divisia, tanto de preços quanto de quantidade. Vamos tomar t_1 como base. Na tabela a seguir, temos os valores em forma absoluta e relativa (pesos).

Produto	t_1		t_2	
	Valor	Peso	Valor	Peso
Arroz (kg)	$2,5 \times 10 = 25,0$	$25/51 = 0,490196$	$3 \times 12 = 36,0$	$36,0/73,2 = 0,491803$
Feijão (kg)	$1,2 \times 5 = 6,0$	$6/51 = 0,117647$	$1,8 \times 6 = 10,8$	$10,8/73,2 = 0,147541$
Pão (unid.)	$0,10 \times 200 = 20,0$	$20/51 = 0,392157$	$0,12 \times 220 = 26,4$	$26,4/73,2 = 0,360656$
Soma	$51,0$	$1,000000$	$73,2$	$1,000000$

Produto	t_3	
	Valor	Peso
Arroz (kg)	$3,25 \times 15 = 48,75$	$48,75/94,95 = 0,513428$
Feijão (kg)	$1,8 \times 7 = 12,60$	$12,60/94,95 = 0,132701$
Pão (unid.)	$0,14 \times 240 = 33,60$	$33,60/94,95 = 0,353870$
Soma	$94,95$	$1,000000$

Os relativos são:

Relativos - $t_1 = 100$		
Produto	t_1	
	P	Q
Arroz (kg)	$2,5/2,5 \times 100 = 100$	$10/10 \times 100 = 100$
Feijão (kg)	$1,2/1,2 \times 100 = 100$	$5/5 \times 100 = 100$
Pão (unid.)	$0,10/0,10 \times 100 = 100$	$200/200 \times 100 = 100$
Produto	t_2	
	P	Q
Arroz (kg)	$3/2,5 \times 100 = 120$	$12/10 \times 100 = 120$
Feijão (kg)	$1,8/1,2 \times 100 = 150$	$6/5 \times 100 = 120$
Pão (unid.)	$0,12/0,10 \times 100 = 120$	$220/200 \times 100 = 110$
Produto	t_3	
	P	Q
Arroz (kg)	$3,25/2,5 \times 100 = 130$	$15/10 \times 100 = 150$
Feijão (kg)	$1,80/1,2 \times 100 = 150$	$7/5 \times 100 = 140$
Pão (unid.)	$0,14/0,10 \times 100 = 140$	$240/200 \times 100 = 120$

Usando ambas as fórmulas (3.4) e (3.5), temos que:

$$\begin{aligned} L^P_{1,2} &= 0,490196 \times 120 + 0,117647 \times 150 + 0,392157 \times 120 = 123,529412 \\ &= \frac{10 \times 3 + 5 \times 1,8 + 200 \times 0,12}{51} \times 100 = \frac{30 + 9 + 24}{51} \times 100 = \frac{63}{51} \times 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^P_{1,3} &= 0,490196 \times 130 + 0,117647 \times 150 + 0,392157 \times 140 = 136,274510 \\ &= \frac{10 \times 3,25 + 5 \times 1,8 + 200 \times 0,14}{51} \times 100 = \frac{32,5 + 9 + 28}{51} \times 100 = \frac{69,5}{51} \times 100 \end{aligned}$$

Usando as fórmulas (3.6) e (3.7), temos que:

$$\begin{aligned} L^Q_{1,2} &= 0,490196 \times 120 + 0,117647 \times 120 + 0,392157 \times 110 = 116,078431 \\ &= \frac{2,5 \times 12 + 1,2 \times 6 + 0,1 \times 220}{51} \times 100 = \frac{30 + 7,2 + 22}{51} \times 100 = \frac{59,2}{51} \times 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^Q_{1,3} &= 0,490196 \times 150 + 0,117647 \times 140 + 0,392157 \times 120 = 137,058824 \\ &= \frac{2,5 \times 15 + 1,2 \times 7 + 0,1 \times 240}{51} \times 100 = \frac{37,5 + 8,4 + 24}{51} \times 100 = \frac{69,9}{51} \times 100 \end{aligned}$$

Analogamente, usando as fórmulas (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12), temos que:

$$\begin{aligned}
P_{1,2}^{P} &= \frac{1}{\frac{0{,}491803}{120}+\frac{0{,}147541}{150}+\frac{0{,}360656}{120}} = 123,648649 \\
&= \frac{73,2}{12\times 2,5+6\times 1,2+220\times 0,1}\times 100 = \frac{73,2}{30+7,2+22}\times 100 = \frac{73,2}{59,2}\times 100
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{1,3}^{P} &= \frac{1}{\frac{0{,}513428}{150}+\frac{0{,}132701}{140}+\frac{0,353870}{120}} = 135,836910 \\
&= \frac{94,95}{15\times 2,5+7\times 1,2+240\times 0,1}\times 100 = \frac{94,95}{37,5+8,4+24}\times 100 = \frac{94,95}{69,9}\times 100
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{1,2}^{Q} &= \frac{1}{\frac{0{,}491803}{120}+\frac{0,147541}{120}+\frac{0,360656}{110}} = 116,190476 \\
&= \frac{73,2}{3\times 10+1,8\times 5+0,12\times 200}\times 100 = \frac{73,2}{30+9+24}\times 100 = \frac{73,2}{63}\times 100
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{1,3}^{Q} &= \frac{1}{\frac{0,513428}{150}+\frac{0,132701}{140}+\frac{0{,}353870}{120}} = 136,618705 \\
&= \frac{94,95}{3,25\times 10+1,80\times 5+0,14\times 200}\times 100 = \frac{94,95}{32,5+9+28}\times 100 = \frac{94,95}{69,5}\times 100
\end{aligned}$$

Note que é mais fácil (e mais preciso numericamente) calcular os índices de Laspeyres e Paasche pelas fórmulas (3.5), (3.7), (3.10) e (3.12).

$$\begin{aligned}
F_{1,2}^{P} &= \sqrt{123,529412\times 123,648649} = 123,589016 \\
F_{1,3}^{P} &= \sqrt{136,274510\times 135,836910} = 136,055534
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{1,2}^{Q} &= \sqrt{116,078431\times 116,190476} = 116,134440 \\
F_{1,3}^{Q} &= \sqrt{137,058824\times 136,618705} = 136,838588
\end{aligned}$$

$$M_{1,2}^{P} = \frac{(10+12)\times 3+(5+6)\times 1,8+(200+220)\times 0,12}{(10+12)\times 2,5+(5+6)\times 1,2+(200+220)\times 0,10} = \frac{136,2}{110,2}\times 100 = 123,593466$$

$$M_{1,3}^{P} = \frac{(10+15)\times 3,25+(5+7)\times 1,8+(200+240)\times 0,14}{(10+15)\times 2,5+(5+7)\times 1,2+(200+240)\times 0,10} = \frac{164,45}{120,9} = 136,021505$$

$$M_{1,2}^{Q} = \frac{(3+2,5)\times 12 + (1,8+1,2)\times 6 + (0,12+0,10)\times 220}{(3+2,5)\times 10 + (1,8+1,2)\times 5 + (0,12+0,10)\times 200} = \frac{132,4}{114} = 116,140351$$

$$M_{1,3}^{Q} = \frac{(3,25+2,5)\times 15 + (1,8+1,2)\times 7 + (0,14+0,10)\times 240}{(3,25+2,5)\times 10 + (1,8+1,2)\times 5 + (0,14+0,10)\times 200} = \frac{164,85}{120,5} = 136,804979$$

$$D_{1,2}^{P} = (120)^{0,490196} \times (150)^{0,117647} \times (120)^{0,392157} = 123,191977$$

$$D_{1,3}^{P} = (130)^{0,490196} \times (150)^{0,117647} \times (140)^{0,392157} = 136,105701$$

$$D_{1,2}^{Q} = (120)^{0,490196} \times (120)^{0,117647} \times (110)^{0,392157} = 115,974418$$

$$D_{1,3}^{Q} = (150)^{0,490196} \times (140)^{0,117647} \times (120)^{0,392157} = 136,\ 320\,8$$

Como exercício, você deve calcular esses mesmos índices com base $t_2 = 100$; o resultado é dado na tabela abaixo, onde se excluem os resultados para o período base:

	Índices - $t_2 = 100$			
	t_1		t_3	
	P	Q	P	Q
Laspeyres	$L_{2,1}^{P} = 80,8743$	$L_{2,1}^{Q} = 86,0656$	$L_{2,3}^{P} = 110,109$	$L_{2,3}^{Q} = 118,033$
Paasche	$P_{2,1}^{P} = 80,9524$	$P_{2,1}^{Q} = 86,1486$	$P_{2,3}^{P} = 109,896$	$P_{2,3}^{Q} = 117,804$
Fisher	$F_{2,1}^{P} = 80,9133$	$F_{2,1}^{Q} = 86,1071$	$F_{2,3}^{P} = 110,003$	$F_{2,3}^{Q} = 117,918$
Marshall-Edgeworth	$M_{2,1}^{P} = 80,9104$	$M_{2,1}^{Q} = 86,1027$	$M_{2,3}^{P} = 109,994$	$M_{2,3}^{Q} = 117,913$
Divisia	$D_{2,1}^{P} = 80,6344$	$D_{2,1}^{Q} = 85,9899$	$D_{2,3}^{P} = 109,962$	$D_{2,3}^{Q} = 117,806$

♦♦

3.6 Propriedades dos índices agregativos ponderados

Vamos verificar agora quais critérios os índices acima satisfazem.

3.6.1 Identidade

É fácil verificar que todos os índices vistos satisfazem o princípio da identidade.

3.6.2 Reversibilidade

- **Laspeyres e Paasche**

  Com os dados do exemplo 3.1, vamos mostrar que esses índices não satisfazem a propriedade de reversão. De fato:

$$\begin{aligned}
L^P_{1,2} \times L^P_{2,1} &= 1,23529412 \times 0,808743 = 99,90354725 \neq 1 \\
P^P_{1,2} \times P^P_{2,1} &= 1,23648649 \times 0,809524 = 100,0965489 \neq 1
\end{aligned}$$

- **Fisher**

  O índice de Fisher satisfaz o critério de reversibilidade, como provamos a seguir:

$$\begin{aligned}
F^P_{0,t} \times F^P_{t,0} &= \sqrt{L^P_{0,t} \times P^P_{0,t}} \times \sqrt{L^P_{t,0} \times P^P_{t,0}} \\
&= \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_0^i p_t^i}{\sum\limits_{i=1}^n q_0^i p_0^i} \times \frac{\sum\limits_{i=1}^n q_t^i\, p_t^i}{\sum\limits_{i=1}^n q_t^i\, p_0^i} \times \frac{\sum\limits_{i=1}^n q_t^i p_0^i}{\sum\limits_{i=1}^n q_t^i p_t^i} \times \frac{\sum\limits_{i=1}^n q_0^i\, p_0^i}{\sum\limits_{i=1}^n q_0^i\, p_t^i}} \\
&= \sqrt{\underbrace{\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_0^i p_t^i}{\sum\limits_{i=1}^n q_0^i\, p_t^i}}_{1} \times \underbrace{\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_t^i\, p_t^i}{\sum\limits_{i=1}^n q_t^i p_t^i}}_{1} \times \underbrace{\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_t^i p_0^i}{\sum\limits_{i=1}^n q_t^i\, p_0^i}}_{1} \times \underbrace{\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_0^i\, p_0^i}{\sum\limits_{i=1}^n q_0^i p_0^i}}_{1}} = 1
\end{aligned}$$

  De forma análoga, prova-se para o índice de quantidade.

- **Marshall-Edgeworth**

  O índice de Marshall-Edgeworth satisfaz o critério de reversibilidade, como provamos a seguir:

$$\begin{aligned}
M^P_{0,t} \times M^P_{t,0} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^n \left(q_0^i + q_t^i\right) p_t^i}{\sum\limits_{i=1}^n \left(q_0^i + q_t^i\right) p_0^i} \times \frac{\sum\limits_{i=1}^n \left(q_0^i + q_t^i\right) p_0^i}{\sum\limits_{i=1}^n \left(q_0^i + q_t^i\right) p_t^i} \\
&= \underbrace{\frac{\sum\limits_{i=1}^n \left(q_0^i + q_t^i\right) p_t^i}{\sum\limits_{i=1}^n \left(q_0^i + q_t^i\right) p_t^i}}_{1} \times \underbrace{\frac{\sum\limits_{i=1}^n \left(q_0^i + q_t^i\right) p_0^i}{\sum\limits_{i=1}^n \left(q_0^i + q_t^i\right) p_0^i}}_{1} = 1
\end{aligned}$$

- **Divisia**

O importante a notar aqui é que o sistema de pesos, no índice de Divisia, é fixo. Sendo assim, o índice de Divisia satisfaz o critério de reversibilidade, como provamos a seguir:

$$D^P_{0,t} \times D^P_{t,0} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p^i_t}{p^i_0} \right)^{w^i_0} \times \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p^i_0}{p^i_t} \right)^{w^i_0} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p^i_t}{p^i_0} \times \frac{p^i_0}{p^i_t} \right)^{w^i_0} = 1$$

Note que temos o mesmo peso, independente da base de comparação!

3.6.3 Circularidade

- **Laspeyres e Paasche**

  Vamos usar os dados do exemplo 3.1 para mostrar que esses índices não satisfazem o princípio da circularidade. Temos que:

$$L^P_{1,2} \times L^P_{2,3} = 1,23529412 \times 1,10109 \times 100 = 136,017 \neq 136,274510 = L^P_{1,3}$$

$$P^P_{1,2} \times P^P_{2,3} = 1,23648649 \times 1,09896 \times 100 = 135,88 \neq 135,836910 = P^P_{1,3}$$

- **Fisher**

  Vamos usar os dados do exemplo 3.1 para mostrar que esse índice também não satisfaz o princípio da circularidade. Temos que:

$$\begin{aligned} F^P_{1,2} \times F^P_{2,3} &= \sqrt{1,23529412 \times 1,23648649} \times \sqrt{1,10109 \times 1,09896} \times 100 \\ &= 135,9509\,437 \neq 136,055534 = F^P_{1,3} \end{aligned}$$

- **Marshall-Edgeworth**

  Com os dados do mesmo exemplo, temos:

$$M^P_{1,2} \times M^P_{2,3} = 1,23593466 \times 1,09994 \times 100 = 135,945397 \neq 136,021505 = M^P_{1,3}$$

- **Divisia**

  Como na propriedade de reversão, note que os pesos são fixos, independente da época de comparação. Assim, o índice de Divisia satisfaz o princípio da circularidade, como se mostra a seguir:

$$D^P_{0,1} \times D^P_{1,2} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p^i_1}{p^i_0} \right)^{w^i_0} \times \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p^i_2}{p^i_1} \right)^{w^i_0} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p^i_1}{p^i_0} \times \frac{p^i_2}{p^i_t} \right)^{w^i_0} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p^i_2}{p^i_0} \right)^{w^i_0} = D^P_{0,2}$$

3.6.4 Decomposição das Causas

- **Laspeyres e Paasche**

  Esses índices não satisfazem esse critério, conforme se mostra a seguir com os dados do exemplo:

$$L^P_{2,1} \times L^Q_{2,1} = \frac{59,2}{73,2} \times \frac{63}{73,2} \neq \frac{51}{73,2} = V_{2,1}$$

$$P^P_{2,1} \times P^Q_{2,1} = \frac{51}{63} \times \frac{51}{59,2} \neq \frac{51}{73,2} = V_{2,1}$$

- **Fisher**

  Esse índice satisfaz o critério da decomposição das causas, como se mostra a seguir:

$$
\begin{aligned}
F_{0,t}^{P} \times F_{0,t}^{Q} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} q_0^i p_t^i}{\sum_{i=1}^{n} q_0^i p_0^i} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t^i p_t^i}{\sum_{i=1}^{n} q_t^i p_0^i} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_0^i q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i q_0^i} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_t^i q_0^i}} \\
&= \sqrt{\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} q_0^i p_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_t^i q_0^i}}_{1} \times \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_0^i q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} q_t^i p_0^i}}_{1} \times \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} q_t^i p_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i q_0^i} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t^i p_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i q_0^i}}_{\text{iguais}}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} q_t^i p_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i q_0^i}\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t^i p_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i q_0^i} = V_{0,t}
\end{aligned}
$$

- **Marshall-Edgeworth**

  Esse índice não satisfaz o critério da decomposição das causas, como mostra o contra-exemplo abaixo.

$$M_{99,00}^{P} \times M_{99,00}^{Q} = 1,23593466 \times 1,16140351 \times 100 = 143,541885 \neq \frac{73,2}{51} \times 100 = 143,529411 = V_{99,00}$$

- **Divisia**

  Esse índice não satisfaz o critério da decomposição das causas, conforme mostra o contra-exemplo a seguir:

$$D_{99,00}^{P} \times D_{99,00}^{Q} = 1,23191977 \times 1,15974418 \times 100 = 142,871178 \neq \frac{73,2}{51} \times 100 = 143,529411 = V_{99,00}$$

No quadro a seguir apresentamos o resumo das propriedades dos índices:

Índice	Critério			
	Identidade	Reversibilidade	Circularidade	Decomposição das causas
Laspeyres	SIM	NÃO	NÃO	NÃO
Paasche	SIM	NÃO	NÃO	NÃO
Fisher	SIM	SIM	NÃO	SIM
Marshall-Edgeworth	SIM	SIM	NÃO	NÃO
Divisia	SIM	SIM	SIM	NÃO

3.7 Relações entre índices

3.7.1 Laspeyres e Paasche

- Relação 1

  Vimos, na seção anterior, que os índices de Laspeyres e Paasche não satisfazem o princípio da decomposição das causas. No entanto, esses índices satisfazem a propriedade de decomposição das causas, desde que se mescle os índices. Mais precisamente,

$$L_{0,t}^{P} \times P_{0,t}^{Q} = L_{0,t}^{Q} \times P_{0,t}^{P} = V_{0,t} \tag{3.19}$$

  conforme se mostra a seguir:

$$L_{0,t}^{P} \times P_{0,t}^{Q} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_0^i p_t^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_0^i p_0^i} \times \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t^i q_t^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t^i q_0^i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t^i q_t^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_0^i p_0^i} = V_{0,t}$$

$$L_{0,t}^{Q} \times P_{0,t}^{P} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0^i q_t^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0^i q_0^i} \times \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_t^i p_t^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_t^i p_0^i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t^i q_t^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_0^i p_0^i} = V_{0,t}$$

  Esse resultado propicia uma maneira mais elegante de provar o índice de Fisher satisfaz a propriedade da decomposição das causas:

$$\begin{aligned} F_{0,t}^{P} \times F_{0,t}^{Q} &= \sqrt{L_{0,t}^{P} \times P_{0,t}^{P}} \times \sqrt{L_{0,t}^{Q} \times P_{0,t}^{Q}} = \sqrt{L_{0,t}^{P} \times P_{0,t}^{P} \times L_{0,t}^{Q} \times P_{0,t}^{Q}} \\ &= \sqrt{L_{0,t}^{P} \times P_{0,t}^{Q} \times P_{0,t}^{P} \times L_{0,t}^{Q}} = \sqrt{V_{0,t} \times V_{0,t}} = V_{0,t} \end{aligned}$$

- Relação 2

  Vamos, agora, analisar a relação entre os índices de Laspeyres e Paasche. Para isso, recordemos que o estimador do coeficiente de correlação para dados agrupados é dado por

$$r_{xy} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{1}{n} \sum\limits_i n_i \left(X_i - \overline{X}\right) \left(Y_i - \overline{Y}\right)}{s_x s_y} \tag{3.20}$$

  em que n_i é a frequência absoluta e σ_x e σ_y são, respectivamente, os desvios padrão de X e Y. Sabemos também que a covariância pode ser reescrita como

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum_i f_i X_i Y_i - \left(\sum_i f_i X_i \right) \left(\sum_i f_i Y_i \right). \tag{3.21}$$

  onde $f_i = \frac{n_i}{n}$ é a frequência relativa (lembre-se: covariância é a média dos produtos menos o produto das médias).

Para o caso específico dos números índices, consideremos que os X's e Y's sejam, respectivamente, os relativos de preço e quantidade e as frequencias relativas sejam os pesos definidos pelos valores na época base. Mais precisamente,

$$X_i = \frac{p_t^i}{p_o^i} \qquad Y_i = \frac{q_t^i}{q_o^i} \qquad f_i = \frac{p_o^i q_o^i}{\sum_j p_o^j q_o^j} \tag{3.22}$$

o que significa que estamos interessados em analisar a covariância (ou correlação entre os relativos de preço e quantidade.

Substituindo (3.22) em (3.21), obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X,Y) &= \sum_i \frac{p_o^i q_o^i}{\sum_j p_o^j q_o^j} \times \frac{p_t^i}{p_o^i} \times \frac{q_t^i}{q_o^i} - \left(\sum_i \frac{p_o^i q_o^i}{\sum_j p_o^j q_o^j} \times \frac{p_t^i}{p_o^i} \right) \left(\sum_i \frac{p_o^i q_o^i}{\sum_j p_o^j q_o^j} \times \frac{q_t^i}{q_o^i} \right) \\ &= \frac{\sum_i p_t^i q_t^i}{\sum_i p_o^i q_o^i} - \frac{\sum_i q_o^i p_t^i}{\sum_i q_o^i p_o^i} \times \frac{\sum_i p_o^i q_t^i}{\sum_i p_o^i q_o^i} = V_{0,t} - L_{0,t}^P \times L_{0,t}^Q \end{aligned} \tag{3.23}$$

Mas, por 3.19, sabemos que $V_{0,t} = L_{0,t}^P \times P_{0,t}^Q$. Substituindo em (3.23), obtemos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X,Y) &= \sigma_x \sigma_y r_{xy} = L_{0,t}^P \times P_{0,t}^Q - L_{0,t}^P \times L_{0,t}^Q \Rightarrow \\ \frac{\sigma_x \sigma_y r_{xy}}{L_{0,t}^P \times P_{0,t}^Q} &= 1 - \frac{L_{0,t}^P \times L_{0,t}^Q}{L_{0,t}^P \times P_{0,t}^Q} = 1 - \frac{L_{0,t}^Q}{P_{0,t}^Q} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{L_{0,t}^Q}{P_{0,t}^Q} = 1 - r_{xy} \frac{\sigma_x \sigma_y}{V_{0,t}} \tag{3.24}$$

Analisando essa equação, podemos ver que os índices de Laspeyres e Paasche serão idênticos quando $r_{xy} = 0$ ou $\sigma_x = 0$ ou $\sigma_y = 0$. As duas últimas condições significam que, tanto os relativos de preço, quanto os relativos de quantidade são constantes (não têm variabilidade), uma hipótese bastante irrealista. A condição $r_{xy} = 0$ significa que os relativos de preço e de quantidade são não correlacionados, hipótese também bastante improvável de ocorrer na prática. Assim, na prática, os índices de Laspeyres e Paasche serão diferentes. Nesse caso, como $\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$ e $V_{0,t} > 0$, a relação entre os índices dependerá de r_{xy}. Se $r_{xy} > 0$ (relativos de preço positivamente correlacionados com os relativos de quantidade, o que acontece quando estamos analisando um problema pelo lado da oferta, por exemplo), o índice de Laspeyres será menor que o de Paasche. Caso contrário, isto é, relativos de preço negativamente correlacionados com os relativos de quantidade (análise pelo lado da demanda), o índice de Laspeyres será maior que o de Paasche.

A situação mais comum, na prática, é termos $r_{xy} < 0$ e, portanto, $P_{0,t}^P < L_{0,t}^P$ e $P_{0,t}^Q \leq L_{0,t}^Q$.

Neste caso, temos que

$$P^P_{0,t} \leq L^P_{0,t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^n q^i_t p^i_t}{\sum_{i=1}^n q^i_t p^i_0} \leq \frac{\sum_{i=1}^n q^i_0 p^i_t}{\sum_{i=1}^n q^i_0 p^i_0} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n p^i_t q^i_t \times \frac{\sum_{i=1}^n q^i_t p^i_t}{\sum_{i=1}^n q^i_t p^i_0} \leq \sum_{i=1}^n p^i_t q^i_t \times \frac{\sum_{i=1}^n q^i_0 p^i_t}{\sum_{i=1}^n q^i_0 p^i_0} \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n p^i_t q^i_t}{\sum_{i=1}^n p^i_t q^i_0} \times \frac{\sum_{i=1}^n q^i_t p^i_t}{\sum_{i=1}^n q^i_t p^i_0} \leq \frac{\sum_{i=1}^n p^i_t q^i_t}{\sum_{i=1}^n q^i_0 p^i_0}$$

ou

$$P^Q_{0,t} \times P^P_{0,t} \leq V_{0,t}$$

Analogamente,

$$P^Q_{0,t} \leq L^Q_{0,t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^n p^i_t q^i_t}{\sum_{i=1}^n p^i_t q^i_0} \leq \frac{\sum_{i=1}^n p^i_0 q^i_t}{\sum_{i=1}^n p^i_0 q^i_0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sum_{i=1}^n p^i_0 q^i_0} \times \frac{\sum_{i=1}^n p^i_t q^i_t}{\sum_{i=1}^n p^i_t q^i_0} \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n p^i_0 q^i_0} \times \frac{\sum_{i=1}^n p^i_0 q^i_t}{\sum_{i=1}^n p^i_0 q^i_0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^n p^i_t q^i_t}{\sum_{i=1}^n p^i_0 q^i_0} \leq \frac{\sum_{i=1}^n p^i_t q^i_0}{\sum_{i=1}^n p^i_0 q^i_0} \times \frac{\sum_{i=1}^n p^i_0 q^i_t}{\sum_{i=1}^n p^i_0 q^i_0}$$

ou

$$V_{0,t} \leq L^P_{0,t} \times L^Q_{0,t}$$

Vemos, assim, que, em geral

$$P^Q_{0,t} \times P^P_{0,t} \leq V_{0,t} \leq L^P_{0,t} \times L^Q_{0,t}$$

ou seja, o índice de Paasche tende a subestimar o valor, enquanto o índice de Laspeyres tende a superestimar.

3.7.2 Fisher, Laspeyres e Paasche

O índice de Fisher é definido como a média geométrica dos índices de Laspeyres e Paasche. Então

$$F = \sqrt{L \times P} \quad .$$

Pelo resultado anterior, temos que, em geral, os índices de Laspeyres e Paasche são diferentes. Se eles são iguais, obviamente temos $F = L = P$.

Das propriedades da função $f(x) = \sqrt{x}$ segue que $x < \sqrt{x} < 1$ para $0 < x < 1$. Veja a Figura 3.1.

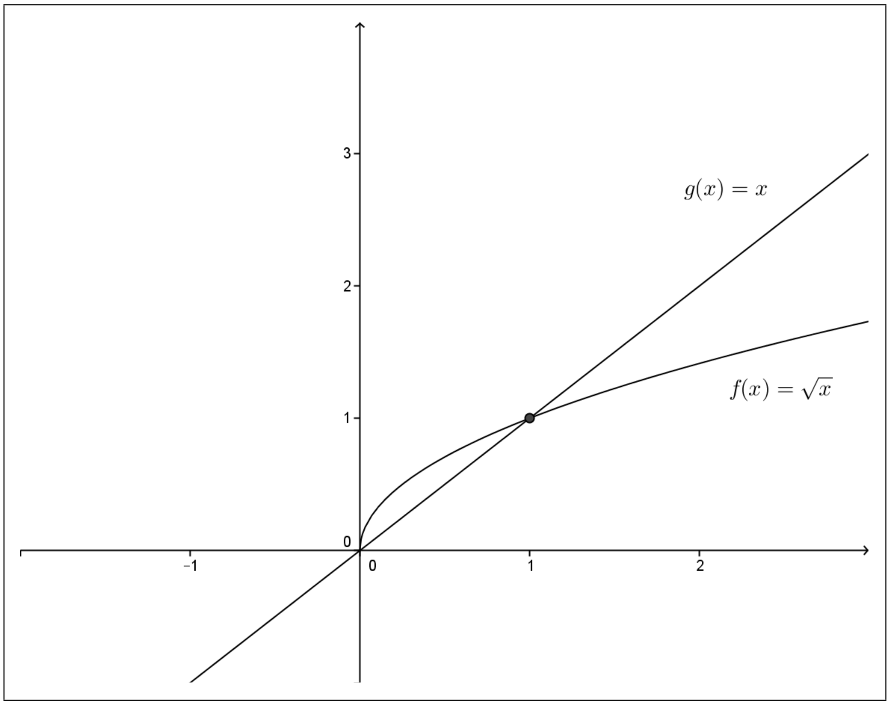

Figura 3.1 – $x < \sqrt{x} < 1 \qquad 0 < x < 1$

Suponhamos, inicialmente, que $L < P$. Então, como L e P são positivos, segue que $0 < \dfrac{L}{P} < 1$. Então

$$\frac{L}{P} < \sqrt{\frac{L}{P}} < 1 \Rightarrow P\frac{L}{P} < P\sqrt{\frac{L}{P}} < P \Rightarrow L < \sqrt{L \times P} < P$$

ou seja, $L < F < P$.

Se $P < L$, obtemos, de forma análoga, que $P < F < L$. Em resumo, se os índices de Laspeyres e Paasche são diferentes, então o índice de Fisher está compreendido entre eles:

$$\begin{array}{rcccl} L & < & P & \Rightarrow & L < F < P \\ P & < & L & \Rightarrow & P < F < L \\ L & = & P & \Rightarrow & L = F = P \end{array} \qquad (3.25)$$

3.7.3 Marshall-Edgeworth, Laspeyres e Paasche

O índice de Marshall-Edgeworth é definido como

$$M_{0,t}^{P} = \frac{\sum_i \left(q_t^i + q_o^i\right) p_t^i}{\sum_i \left(q_t^i + q_o^i\right) p_o^i} \quad .$$

Vamos provar que esse índice se encontra sempre entre os índices de Laspeyres e Paasche. Mas para isso precisamos do seguinte resultado.

RESULTADO 3.1 *Sejam X_1, X_2, Y_1 e Y_2 são números* positivos. *Então*

$$\frac{X_1}{X_2} \leq \frac{Y_1}{Y_2} \Rightarrow \frac{X_1}{X_2} \leq \frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2} \leq \frac{Y_1}{Y_2} \quad .$$

Demonstração

Como os números são positivos, temos que

$$\begin{aligned} \frac{X_1}{X_2} \leq \frac{Y_1}{Y_2} &\Rightarrow X_1 Y_2 \leq X_2 Y_1 \Rightarrow X_1 Y_2 + X_1 X_2 \leq X_2 Y_1 + X_1 X_2 \Rightarrow \\ & X_1 \left(X_2 + Y_2\right) \leq X_2 \left(X_1 + Y_1\right) \Rightarrow \frac{X_1}{X_2} \leq \frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2} \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{X_1}{X_2} \leq \frac{Y_1}{Y_2} &\Rightarrow X_1 Y_2 \leq X_2 Y_1 \Rightarrow X_1 Y_2 + Y_1 Y_2 \leq X_2 Y_1 + Y_1 Y_2 \Rightarrow \\ & Y_2 \left(X_1 + Y_1\right) \leq Y_1 \left(X_2 + Y_2\right) \Rightarrow \frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2} \leq \frac{Y_1}{Y_2} \end{aligned}$$

■

Note que esse resultado não vale quando algum dos números é negativo. Por exemplo, se fizermos $X_1 = -2$, $X_2 = 3$, $Y_1 = 1$ e $Y_2 = -2$, então

$$\frac{X_1}{X_2} = -\frac{2}{3} < \frac{Y_1}{Y_2} = -\frac{1}{2}$$

mas

$$\frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2} = -1 < \frac{X_1}{X_2}$$

Para provar a relação entre os índices de Laspeyres, Paasche e Marshall-Edgeworth, basta fazer

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_i q_o^i p_t^i \qquad Y_1 = \sum_i q_t^i p_t^i \\ X_2 &= \sum_i q_o^i p_o^i \qquad Y_2 = \sum_i q_t^i p_o^i \end{aligned}$$

Nesse caso, os índices de Laspeyres e Paasche de preço são:

$$L = L_{0,t}^{p} = \frac{X_1}{X_2} \qquad P = P_{0,t}^{p} = \frac{Y_1}{Y_2}$$

e se $L < P$, então

$$\frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2} \Rightarrow L < \frac{\sum\limits_i q_o^i p_t^i + \sum\limits_i q_t^i p_t^i}{\sum\limits_i q_o^i p_o^i + \sum\limits_i q_t^i p_o^i} = \frac{\sum\limits_i \left(q_o^i + q_t^i\right) p_t^i}{\sum\limits_i \left(q_o^i + q_t^i\right) p_o^i} < P$$

ou seja, $L < M < P$. Se, ao contrário , temos $P < L$ então

$$\frac{Y_1}{Y_2} < \frac{X_1}{X_2} \Rightarrow P < \frac{\sum\limits_i q_o^i p_t^i + \sum\limits_i q_t^i p_t^i}{\sum\limits_i q_o^i p_o^i + \sum\limits_i q_t^i p_o^i} = \frac{\sum\limits_i \left(q_o^i + q_t^i\right) p_t^i}{\sum\limits_i \left(q_o^i + q_t^i\right) p_o^i} < L$$

e, portanto, $P < M < L$. E se $L = P$, então $L = P = M$. Resumindo, o índice de Marshall-Edegeworth está entre os índices de Laspeyres e Paasche:

$$\begin{aligned} L &< P \quad \Rightarrow \quad L < M < P \\ P &< L \quad \Rightarrow \quad P < M < L \\ L &= P \quad \Rightarrow \quad P = M = L \end{aligned} \tag{3.26}$$

Capítulo 4

Mudança de base

4.1 Método prático

O procedimento de mudança de base, apresentado na Seção 1.6 para relativos, será sempre válido *se o índice satisfizer as propriedades circular e de reversão*.

No entanto, vários índices utilizados na prática não satisfazem tais propriedades. Os índices de Laspeyres e Paasche são um exemplo. Para fazer a mudança de base de uma série de índices de Laspeyres, por exemplo, é necessário mudar os pesos e isso significa trazer a antiga cesta base para a época atual. Esse procedimento, além de caro, nem sempre é viável. Assim, na prática, a mudança de base é feita *como se* o índice satisfizesse a propriedade circular, ou seja, obtém-se a série na nova base dividindo-se a antiga pelo valor do índice no ano da base desejada.

Vamos ilustrar os procedimentos correto e aproximado com os dados utilizados anteriormente no Exemplo 3.1.

EXEMPLO 4.1 Mudança de base para os dados do Exemplo 3.1

Calcule a série de índices com base em t_3 pelo método exato e pelo método aproximado para os dados do Exemplo 3.1, reapresentados a seguir.

Produto	t_1		t_2		t_3	
	P	Q	P	Q	P	Q
Arroz (kg)	2,50	10	3,00	12	3,25	15
Feijão (kg)	1,20	5	1,80	6	1,80	7
Pão (unid.)	0,10	200	0,12	220	0,14	240

Solução

Anteriormente, calculamos os índices de Laspeyres com base em t_1, obtendo, para os preços, a seguinte série:

Ano t	t_1	t_2	t_3
$L^P_{1,t}$	100	123,529412	136,274510

Vamos, agora, calcular os índices com base em t_3 pelo método exato:

$$L^P_{3,1} = \frac{15 \times 2,50 + 7 \times 1,20 + 240 \times 0,10}{15 \times 3,25 + 7 \times 1,80 + 240 \times 0,14} \times 100 = \frac{69,9}{94,95} \times 100 = 73,618$$

$$L^P_{3,2} = \frac{15 \times 3,00 + 7 \times 1,80 + 240 \times 0,12}{15 \times 3,25 + 7 \times 1,80 + 240 \times 0,14} \times 100 = \frac{86,4}{94,95} \times 100 = 90,995$$

Logo, pelo método exato a série de índices com base em t_3 é:

Ano t	t_1	t_2	t_3
$L^P_{3,t}$	$73,618$	$90,995$	100

Pelo método prático, temos:

$$L^P_{3,1} \approx \frac{1}{136,274510} \times 100 = 73,381$$

$$L^P_{3,2} \approx \frac{123,529412}{136,274510} \times 100 = 90,647$$

♦♦

4.2 Conjugação de séries de índices

Os institutos de pesquisa, como IBGE, FGV, responsáveis pela divulgação de séries de índices, periodicamente precisam atualizar a base das séries de índices de forma a retratar mais fielmente a realidade atual. No caso de índices de Lapeyres, essa atualização envolve, muitas vezes, considerar uma nova cesta de bens e serviços. Como resultado desse processo, temos 2 conjuntos de índices: um com a base antiga, e outro com a base nova. O procedimento usado para conjugar as duas séries consiste em manter as *mesmas taxas de variação* entre os períodos, independente de qual base foi utilizada. Para isso, é necessário que, para um período, seja feito o cálculo do índice nas duas bases.

EXEMPLO 4.2 Conjugação de séries de índices

Uma série de índices vinha sendo construída com base 100 em 1997. No ano de 1999, decidiu-se fazer uma mudança de base que resultou nas seguintes séries:

Ano	Série antiga	Série nova
1994	72	
1995	88	
1996	96	
1997	100	
1998	102	
1999	111	100
2000		105
2001		115
2002		132
2003		146
2004		155

Conjugue as duas séries, usando 1997 como base e depois mude a base para o ano de 2002.

Solução

A partir da série nova, obtemos os seguintes relativos:

$$
\begin{aligned}
I_{99,00} &= \frac{105}{100} = 1,05 \\
I_{99,01} &= \frac{115}{100} = 1,15 \\
I_{99,02} &= \frac{132}{100} = 1,32 \\
I_{99,03} &= \frac{146}{100} = 1,46 \\
I_{99,04} &= \frac{155}{100} = 1,55
\end{aligned}
$$

Aplicando essas variações na série com base em 1997, obtemos:

$$
\begin{aligned}
I_{97,00} &= 1,05 \times 111 = 116,55 \\
I_{97,01} &= 1,15 \times 111 = 127,65 \\
I_{97,02} &= 1,32 \times 111 = 146,52 \\
I_{97,03} &= 1,46 \times 111 = 162,06 \\
I_{97,04} &= 1,55 \times 111 = 172,05
\end{aligned}
$$

Logo, a série completa com base 100 em 1997 é

Ano	1997=100
1994	72,00
1995	88,00
1996	96,00
1997	100,00
1998	102,00
1999	111,00
2000	116,55
2001	127,65
2002	146,52
2003	162,06
2004	172,05

Com a série com base 1997=100 pronta, para calcular com base em 2002, basta dividir todos os índices pelo valor de 2002, que é 1,4652.

Ano	2002=100
1994	$72,00/1,4652 = 49,14$
1995	$88,00/1,4652 = 60,06$
1996	$96,00/1,4652 = 65,52$
1997	$100,00/1,4652 = 68,25$
1998	$102,00/1,4652 = 69,62$
1999	$111,00/1,4652 = 75,76$
2000	$116,55/1,4652 = 79,55$
2001	$127,65/1,4652 = 87,12$
2002	$146,52/1,4652 = 100,00$
2003	$162,06/1,4652 = 110,61$
2004	$172,05/1,4652 = 117,42$

♦♦

No cálculo de índices e taxas é importante realizar os cálculos intermediários com várias casas decimais, para que não se perca muita precisão nos resultados.

Capítulo 5

Deflacionamento e poder aquisitivo

5.1 Introdução

Suponhamos que, num período t_1, um quilo de carne custe R$8,00 e em $t_)2$, R$10,00. Se nos 2 períodos dispusermos da mesma quantia de R$250,00 para comprar essa carne, em t_1 podemos comprar

$$\frac{250\text{R\$}}{8\,\text{R\$}\,/\,\text{kg}} = 31,25\ \text{ kg}$$

e em t_2

$$\frac{250\,\text{R\$}}{10\,\text{R\$}\,/\,\text{kg}} = 25\,\text{kg}$$

Logo, a relação entre as quantidades é

$$\frac{25}{31,25} = 0,80$$

que corresponde a uma taxa de variação de

$$\left(\frac{25 - 31,25}{31,25}\right) \times 100 = \left(\frac{25}{31,25} - 1\right) \times 100 = (0,80 - 1) \times 100 = -20\%$$

Então, com esse aumento de preço, mantido o mesmo valor disponível, houve uma queda de 20% na quantidade de carne adquirida.

Consideremos, agora, uma situação mais geral, em que o salário de uma pessoa se mantém fixo em R$2.500,00 nos anos de 1999 e 2000, mas a inflação em 2000, medida pelo INPC, foi de 5,27%. Como avaliar a perda salarial desta pessoa? Primeiro, vamos interpretar o significado da inflação de 5,27% em 2000. Isto significa que o custo (preço) de uma cesta de produtos e serviços aumentou 5,27% em 2000, comparado com 1999, ou seja, o índice de preços de 2000 com base em 1999 é 1,0527. Por outro lado, como o salário é o mesmo, o índice de valor (salário) de 2000 com base em 1999 é 1. Usando a relação aproximada $IV \approx IP \times IQ$, resulta que o índice de quantidade de 2000 com base em 1999 é

$$IQ = \left(\frac{1}{1,0527}\right) = 0,94994$$

ou seja, esta pessoa, com o mesmo salário em 2000, consegue "comprar" 0,94994 do que comprava em 1999, o que representa uma taxa de $(0,94994 - 1) \times 100 = -5,006$. O índice 0,94994 é chamado *índice do salário real*, já que ele representa o que a pessoa pode realmente adquirir em 2000, com base em 1999.

Uma outra forma de olhar este mesmo problema é a seguinte: dizer que houve uma variação de preços de 5,27% em 2000 é o mesmo que dizer que 1,0527 reais em 2000 equivalem, em poder de compra, a 1 real em 1999. Então, para determinar quanto valem os 2500 reais de 2000 a preços de 1999, basta aplicarmos a regra de três simples:

1999	2000
1 R$	1,0527 R$
x	2500 R$

Logo,

$$x = \frac{2500}{1,0527} = 2374,85$$

o que significa que o salário de 2500 reais em 2000 equivale a um salário de 2374,85 reais em 1999, o que é lido como 2374,85 reais a preços de 1999. A perda salarial pode ser obtida como

$$\frac{2374,85}{2500} = 0,94994$$

mesmo valor obtido através do índice do salário real.

Estes exemplos ilustram o conceito de *deflacionamento* de uma série de valores, que permite equiparar valores monetários de diversas épocas ao valor monetário de uma época base, ou ainda, o deflacionamento permite eliminar uma das causas de variação de uma série de valores monetários, qual seja, a variação de preços.

5.2 Deflator

Um índice de preços usado para equiparar valores monetários de diversas épocas ao valor monetário de uma época base é chamado *deflator*.

Como visto acima, para obter a série de valores deflacionados ou valores a preços da época base, basta dividir a série de valores pelo respectivo índice de preço. Os valores estarão a preços constantes do ano base do índice de preços.

Podemos também dividir a série de índices de valores pelo respectivo índice de preço para obter o índice do valor real (quantidade) com base no período base do deflator.

EXEMPLO 5.1 Faturamento de uma empresa

Considere a série do faturamento nominal de uma empresa e o índice de preço apropriado, dados na tabela abaixo.

Ano	Faturamento nominal (Mil R$)	índice de preços 1999=100
1999	1600	100,000
2000	1800	105,272
2001	2400	115,212
2002	2800	132,194
2003	3000	145,921
2004	3200	154,870

Obtenha o faturamento real a preços de 1999.

Solução

Como visto anteriormente, basta aplicar uma regra de três, tendo em mente a interpretação do índice de preços: 100 R$ em 1999 equivalem a 105,272 R$ em 2000, a 115,212 em 2001, etc. Por exemplo, para o ano de 2002 temos:

$$\begin{array}{ll} \hline 1999 & 2002 \\ \hline 100 \text{ R\$} & 132{,}194 \text{ R\$} \\ x & 2800 \text{ R\$} \\ \hline \end{array} \Rightarrow x = \frac{2800}{132,194} \times 100 = 2118,099$$

Com o mesmo procedimento para os outros anos, obtemos a série do faturamento a preços de 1999 dada por:

Ano	Faturamento (Mil R$ de 1999)
1999	$(1600/100) \times 100 = 1600,0$
2000	$(1800/105,272) \times 100 = 1709,9$
2001	$(2400/115,212) \times 100 = 2083,1$
2002	$(2800/132,194) \times 100 = 2118,1$
2003	$(3000/145,921) \times 100 = 2055,9$
2004	$(3200/154,870) \times 100 = 2066,2$

Para obter o índice do faturamento real com base em 1999 temos que calcular o índice do faturamento nominal e dividí-lo pelo respectivo índice de preços. Para o ano de 2002, por exemplo, temos:

$$\frac{\frac{2800}{1600} \times 100}{132.194} \times 100 = 132,38$$

Completando para os outros anos obtemos:

Ano	índice do faturamento real (quantidade) 1999=100
1999	$\dfrac{\dfrac{1600}{1600} \times 100}{100} \times 100 = 100,000$
2000	$\dfrac{\dfrac{1800}{1600} \times 100}{105.272} \times 100 = 106,87$
2001	$\dfrac{\dfrac{2400}{1600} \times 100}{115.212} \times 100 = 130,19$
2002	$\dfrac{\dfrac{2800}{1600} \times 100}{132.194} \times 100 = 132,38$
2003	$\dfrac{\dfrac{3000}{1600} \times 100}{145.921} \times 100 = 128,49$
2004	$\dfrac{\dfrac{3200}{1600} \times 100}{154.870} \times 100 = 129,14$

Note a seguinte equivalência (ano de 2002):

$$\frac{\dfrac{2800}{1600} \times 100}{132,194} \times 100 = \frac{\dfrac{2800}{132,194} \times 100}{1600} \times 100$$

O termo no numerador é o faturamento de 2002 a preços de 1999, enquanto o termo no denominador é o faturamento de 1999 a preços de 1999. Ou seja, podemos obter a série de índices do faturamento real a preços de 1999 simplesmente dividindo a série de faturamento a preços de 1999 pelo faturamento real do ano base:

Ano	índice do faturamento real 1999=100
1975	$\frac{1600}{1600} \times 100 = 100,000$
1976	$\frac{1709,9}{1600} \times 100 = 106,87$
1977	$\frac{2083,1}{1600} \times 100 = 130,19$
1978	$\frac{2118,1}{1600} \times 100 = 132,38$
1979	$\frac{2055,9}{1600} \times 100 = 128,49$
1980	$\frac{2066,2}{1600} \times 100 = 129,14$

Se no exemplo tivessem sido dadas as taxas de variação do faturamento e do preço, o deflacionamento seria feito, primeiro transformando as taxas em índices.

Taxa		índice	Deflacionamento
i (taxa nominal)	$\rightarrow$	$1+i$	
			$\frac{1+i}{1+j}$
j (taxa de inflação)	$\rightarrow$	$1+j$	

EXEMPLO 5.2

Uma pessoa aplicou determinada quantia a uma taxa de juros de 5% ao semestre. A inflação no semestre apresentou uma variação de 7%. Quanto ela perdeu em duzentos reais aplicados no semestre?

Solução

Ao final do semestre, cada real aplicado resulta em 1,05. Mas como a inflação é de 7%, cada real, ao final do semestre, em termos de poder de compra, equivale a 1,07. Logo, cada real aplicado ao final do semestre corresponde a

$$\frac{1,05}{1,07} = 0,981308$$

Duzentos reais correspondem a $200 \times 0,981308 = 196,2616$, o que equivale a uma perda de 3,7384 reais.

> **! Índices e taxas**
>
> Um erro comum consiste em dividir as taxas – $\frac{5\%}{7\%} = 0,71729$, um valor totalmente diferente. Lembre-se: *não se dividem nem se multiplicam taxas!*

EXEMPLO 5.3 Salário real e INPC

Na tabela abaixo temos o salário de um funcionário nos meses de janeiro a maio de 2002 e as respectivas taxas de inflação mensal medidas pelo INPC:

Mês	Salário (R$)	INPC (%)
dez-01	3868,81	0,74
jan-02	4060,03	1,07
fev-02	4797,79	0,31
mar-02	4540,89	0,62
abr-02	4436,14	0,68
mai-02	4436,14	0,09

Calcule o salário real a preços de dezembro de 2001 e também o índice do salário real com base em dez-01. As taxas de inflação medem a variação mensal $\frac{t}{t-1}$

Solução

O primeiro passo consiste em calcular a série do INPC com base em dezembro de 2001. Em janeiro de 2002 a taxa de inflação foi de 1,07%, com relação a dezembro de 2001, ou seja,

$$\frac{p_{jan-02}}{p_{dez-01}} = 1 + \frac{1,07}{100} = 1,0107$$

Em fevereiro, temos que

$$\frac{p_{fev-02}}{p_{jan-02}} = 1 + \frac{0,31}{100} = 1,0031$$

e

$$\frac{p_{fev-02}}{p_{dez-01}} = \frac{p_{fev-02}}{p_{jan-02}} \times \frac{p_{jan-02}}{p_{dez-01}} = 1,0107 \times 1,0031 = 1,01383$$

Para março, temos:

$$\frac{p_{mar-02}}{p_{dez-01}} = \frac{p_{mar-02}}{p_{fev-02}} \times \frac{p_{fev-02}}{p_{jan-02}} \times \frac{p_{jan-02}}{p_{dez-01}} = 1,0062 \times 1,0107 \times 1,0031 = 1,02012$$

Para abril:

$$\begin{aligned}\frac{p_{abr-02}}{p_{dez-01}} &= \frac{p_{abr-02}}{p_{mar-02}} \times \frac{p_{mar-02}}{p_{fev-02}} \times \frac{p_{fev-02}}{p_{jan-02}} \times \frac{p_{jan-02}}{p_{dez-01}} \\ &= 1,0068 \times 1,0062 \times 1,0107 \times 1,0031 = 1,027056\end{aligned}$$

Para maio:

$$\begin{aligned}\frac{p_{mai-02}}{p_{dez-01}} &= \frac{p_{mai-02}}{p_{abr-02}} \times \frac{p_{abr-02}}{p_{mar-02}} \times \frac{p_{mar-02}}{p_{fev-02}} \times \frac{p_{fev-02}}{p_{jan-02}} \times \frac{p_{jan-02}}{p_{dez-01}} \\ &= 1,0009 \times 1,0068 \times 1,0062 \times 1,0107 \times 1,0031 = 1,02798\end{aligned}$$

Obtida a série do INPC com base em dezembro de 2001, para obter o salário real basta dividir o salário nominal de cada mês pelo respectivo valor do índice:

Mês	Salário (R$)	INPC		Salário real	
		%	dez-01=100	a preços de dez-01	dez-01=100
dez-01	3868,81	0,74	100,000	$\frac{3868,81}{100} \times 100 = 3868,81$	$\frac{3868,81}{3868,81} \times 100 = 100,00$
jan-02	4060,03	1,07	101,070	$\frac{4060,03}{101,070} \times 100 = 4017,05$	$\frac{4017,05}{3868,81} \times 100 = 103,83$
fev-02	4797,79	0,31	101,383	$\frac{4797,79}{101,383} \times 100 = 4732,34$	$\frac{4732,34}{3868,81} \times 100 = 122,323$
mar-02	4540,89	0,62	102,012	$\frac{4540,89}{102,012} \times 100 = 4451,33$	$\frac{4451,33}{3868,81} \times 100 = 115,06$
abr-02	4436,14	0,68	102,706	$\frac{4436,14}{102,706} \times 100 = 4319,26$	$\frac{4319,26}{3868,81} \times 100 = 111,64$
mai-02	4436,14	0,09	102,798	$\frac{4436,14}{102,798} \times 100 = 4315,40$	$\frac{4315,40}{3868,81} \times 100 = 111,54$

Ao deflacionarmos esses salários, estamos colocando todos eles na "mesma moeda", ou seja, eles são comparáveis para efeitos de poder de compra. É como se tivéssemos duas pessoas em dezembro de 2001, uma ganhando R$ 3668,81 e a outra, R$ 4315,40; com essa comparação fica claro que a segunda pessoa ganha mais que a primeira, ou seja, em termos reais, o salário de maio de 2002 é maior que o salário de dezembro de 2001.

5.3 Poder aquisitivo

O poder aquisitivo de um determinado volume de unidades monetárias, com relação a uma certa época base, é o seu valor deflacionado com referência a essa época base.

Consideremos novamente o exemplo visto no início da seção: em t_1, um quilo de carne custava 8,00 reais e em t_2, 10 reais. Se nos 2 períodos dispuséssemos da mesma quantia de 250 reais para comprar essa carne, em t_1 poderíamos comprar

$$\frac{250 \text{ R\$}}{8 \,\text{R\$ / kg}} = 31,25 \text{ kg}$$

e em t_2

$$\frac{250\,\text{R\$}}{10\,\text{R\$ / kg}} = 25\,\text{kg}$$

Logo, a relação entre as quantidades é

$$\frac{25}{31,25} = 0,80$$

Isso significa que o poder aquisitivo (para esse único produto) caiu 20%. Note que:

$$\frac{25}{31,25} = \frac{\frac{250\,\text{R\$}}{10\,\text{R\$ / kg}}}{\frac{250\,\text{R\$}}{8\,\text{R\$ / kg}}} = \frac{8}{10} = \frac{1}{\frac{10}{8}}$$

No denominador da última fração temos o relativo de preço da carne com base em t_1, ou seja, o poder aquisitivo é obtido tomando-se o inverso do índice de preço escolhido.

EXEMPLO 5.4 Poder aquisitivo do real

Considere a série do IGP dada a seguir. Calcule o poder aquisitivo de 1R$ com base no real de 2000.

Ano	IGP - 2000=100
2000	100
2001	110
2002	140
2003	150
2004	168

Solução

Ano	IGP - 2000=100	Poder aquisitivo de 1R$ (2000=100)
2000	100	$(1/100) \times 100 = 1.00000$
2001	110	$(1/110) \times 100 = 0,90909$
2002	140	$(1/140) \times 100 = 0,71429$
2003	150	$(1/150) \times 100 = 0,66667$
2004	168	$(1/168) \times 100 = 0,59524$

Em 2002, 1R$ tem o mesmo poder aquisitivo de 0,71429 R$ de 2000, enquanto em 2004, 1R$ tem o poder aquisitivo de 0,59524 R$ em 2000.

EXEMPLO 5.5 Salário real

O salário de um trabalhador foi reajustado em 80% em um dado período, enquanto a inflação foi de 92% no mesmo período. Qual foi a perda do poder aquisitivo desse trabalhador?

Solução

Para resolver esse problema, temos que colocar ambas as taxas em forma de índice. Assim o índice do salário real é

$$\frac{1,8}{1,92} = 0,9375$$

Logo, o poder aquisitivo do salário no final do período é igual a 0,9375 do poder aquisitivo no início do período, o que equivale a uma perda de 6,25%.

Capítulo 6

Exercícios propostos

1. Nas tabelas abaixo temos o PIB nominal do Brasil em milhões de cruzados. Determine os índices e as taxas de crescimento nominal do PIB nos períodos.

Ano	PIB (1000 R$)	Ano	PIB (1000 R$)
1980	914.188	2002	1.346.028
2000	1.101.255	2004	1.769.202
Fonte: www.ipeadata.gov.br			

2. Na tabela abaixo temos as esperanças de vida no Brasil. Determine os índices com base em 1980 e as taxas de crescimento da esperança de vida nos períodos considerados.

Ano	Esperança de vida	Ano	Esperança de vida
1980	62,7	2000	70,4
1990	66,6	2005	71,9
Fonte:www.ibge.gov.br/Tábuas Completas de Mortalidade - Notas Técnicas - Tabela 10			

3. Considere os dados da tabela abaixo.

Anos	1994	1995	1996	1997	1998
Relativos de preço 1994=100	100	102	112	115	125
Relativos de quant. 1996=100	90	98	100	110	120

   (a) Calcule os relativos de preço e quantidade com base 1998=1. Que propriedades você utilizou nos seus cálculos?

   (b) Calcule os relativos de valor com base 1998=1. Que propriedade você utilizou nos seus cálculos?

4. Uma empresa deseja aumentar as vendas (quantidades) em 60%. Qual deve ser a variação de preço para que o faturamento duplique?

5. Se a queda esperada nas vendas de um produto de uma certa empresa for igual a 10% com relação ao desempenho atual, qual o aumento percentual de preços que permitirá manter o faturamento no mesmo nível do atual?

6. Um jornal publicou a tabela abaixo com o seguinte comentário: “A produção de soja aumentou 50% em 1978 com relação a 1976, e 117% em 1979 com relação a 1978”. Essa afirmação é correta?

Ano	Quantidade (t)
1976	750
1977	1.000
1978	1.500
1979	1.750

7. Se, em 2004, uma empresa vendeu uma quantidade de mercadoria 60% superior a de 2003, em quanto por cento a quantidade de mercadoria vendida em 2003 é inferior à de 2004? Que propriedade você usou?

8. Um vendedor vendeu em março 25% mais do que no mês anterior. Quanto por cento ele vendeu a menos em fevereiro, com relação a março? Que propriedade você usou?

9. Se o preço de um produto aumentou 20% e a quantidade vendida também aumentou em 20%, qual o aumento percentual do faturamento da empresa com esse produto? Que propriedade você usou?

10. (a) Uma companhia de turismo espera, para o próximo verão, um aumento de 50% na procura de seus pacotes turísticos. Em quanto ela deverá aumentar seus preços se desejar dobrar seu faturamento?

    (b) Se essa mesma companhia esperasse uma queda de 15% na procura de seus pacotes turísticos, em quanto ela deveria aumentar seus preços para manter inalterado seu faturamento?

    (c) Se essa companhia vender, este ano, 25% a menos de seus pacotes turísticos do que vendeu no ano passado, quantos por cento as vendas do ano passado serão maiores que as deste ano?

11. Em 2004, o preço de um produto aumentou 12% com relação ao preço de 2003, enquanto a quantidade vendida no mesmo período diminuiu de 6%. Qual foi a variação percentual do valor do produto nesse período?

12. Um veículo utilizando gasolina consegue andar, em média, 30% mais do que utilizando álcool.

    (a) Se o preço do álcool é 35% inferior ao da gasolina, para percorrer a mesma distância, qual o combustível mais econômico e em que porcentagem?

    (b) Se o proprietário do veículo gasta em média R$100 mensais com gasolina, qual será seu gasto mensal se trocar o veículo a gasolina por outro a álcool, supondo que percorrerá os mesmos trajetos sob as mesmas condições?

13. Se um veículo a gasolina percorre uma distância 30% superior a outro da mesma marca que se utiliza de álcool, quanto espa ço esse último anda menos do que o primeiro?

14. Considere as seguintes épocas: 1998, 2000 e 2004. Em 1998, o preço de um bem foi 10% menor do que o preço do mesmo bem em 2000 e, em 2004, 20% superior ao de 2000. Qual será o aumento de preço em 2004 com base em 1998? Que propriedades você usou?

15. Suponha que um índice de preços tenha tido as seguintes variações com relação ao ano imediatamente anterior:

1999:	cresceu 9%
2000:	cresceu 6%
2001:	cresceu 8%

Qual o aumento de preço de 2001 com relação a 1998? Que propriedades você usou?

16. Uma funcionária tem um salário anual de R$10.000,00, mas é informada de que terá uma redução salarial de 10% em virtude da queda dos lucros da empresa. Entretanto, ela é informada de que terá um aumento de 10% no próximo ano. Ela aceita, acreditando que a situação não se afigura tão ruim, pois a redução inicial de 10% será compensada pelo aumento posterior de 10%.

    (a) Qual será a renda anual da funcionária após a redução de 10%?

    (b) No próximo ano, qual será a renda anual da funcionária após o aumento de 10%?

    (c) A redução inicial de 10% seguida do aumento posterior de 10% restitui à funcionária a renda anual de R$10.000,00?

    (d) Qual deverá ser o aumento adicional para que a funcionária volte a ter uma renda anual de R$10.000,00?

17. Um dono de hotel informou que, em setembro, iria reduzir o preço das diárias de seu hotel em 25%, em comparação com o mês anterior. Ele não disse, mas tal medida teve que ser tomada porque, em agosto, os hóspedes o denunciaram ao Procon (é que, aí, o dono do hotel tinha reajustado as diárias em 50%, em relação a julho). Determine os preços relativos das diárias em agosto e setembro, tomando julho como mês de referência.

18. As lojas Pirani venderam, em novembro, 50 televisores Colorado, ao preço unitário de US$350,00. Em dezembro, os mesmos televisores eram vendidos a US$500,00 a unidade, razão pela qual só foram vendidas 30 unidades. Determine os índices de preço, quantidade e valor com base em novembro.

19. Dada a tabela abaixo, determine os relativos de preço, quantidade e valor, tomando como data-base:

    (a) janeiro

    (b) julho

    (c) dezembro

Mês	Preço	Quantidade	Mês	Preço	Quantidade
jan.	5.292	201	jul.	6.891	229
fev.	5.436	215	ago.	7.156	226
mer.	5.949	210	set.	7.616	228
abr.	6.411	219	out.	8.315	217
mai.	6.407	230	nov.	9.223	225
jun.	6.869	227	dez.	9.815	231

20. Considere os seguintes elos de relativo (ou índice ano/ano anterior):

Anos	1995	1996	1997	1998
Índices	122	109	104	102

Calcule os índices com base em 1996 e 1994. Que propriedades você usou?

21. O índice constante da tabela abaixo foi calculado com base móvel, isto é, são dados os elos de relativos:

Anos	1998	1999	2000	2001
Índices	102	109	106	108

Calcule os índices com base em 2001, 1999 e 1997. Que propriedades você usou?

22. A inflação acumulada até o mês de abril (inclusive) de determinado ano foi 24,73%. Em abril, a taxa de inflação foi de 5,7% sobre março. Se essa taxa se mantiver para os próximos 8 meses, qual será a taxa de inflação do ano?

23. Dadas as variações mensais de um índice de preços, isto é, os elos de relativos, calcule:

    (a) a variação acumulada até o mês de dezembro;

    (b) a taxa média mensal de variação.

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
%	2,0	3,2	-2,5	5,1	10,2	-5,8	-4,3	1,5	6,0	7,1	8,3	15,1

24. O valor do salário de um operário em janeiro de determinado ano é de R$482,00. Segundo as planilhas da empresa, haverá aumentos de 3%, 4,2% e 5% a cada trimestre (aumentos nos salários de abril, julho e outubro). Em dezembro, qual o valor do 13º salário deste operário?

25. A tabela a seguir apresenta a evolução do IGP, no período de 1995 a 2004. Calcular a taxa de variação média anual do IGP no período.

Ano	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
IGP-DI (ago/94=100)	117	131	141	146	163	185	205	232	285	312
Fonte: www.ipeadata.gov.br										

26. A tabela abaixo refere-se à produção brasileira de laminados de aço, em milhares de toneladas, no período de 1995 a 2000. Calcule os relativos de quantidade para o período considerado, tomando 2000 como base.

Anos	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Produção de laminados (1000t)	15889	16733	17452	16336	16810	18202
Fonte: www.ipeadata.gov.br (IBS/IE)						

27. A quantidade relativa de certo produto no ano de 2000, referida ao de 1991, é igual a 105, enquanto que a de 2000, referida a 1995, é 140. Determine a quantidade relativa de 1995, tomando como base o ano de 1991.

28. Sejam os seguintes elos de relativos de preços no período de 2000 a 2004: 105, 103, 108, 110 e 104.

(a) Determinar o preço relativo de 2002, tomando por base o ano de 1999.

(b) Encadear os elos relativos, tomando por base o ano de 2000.

(c) Qual a interpretação do valor obtido para o ano de 2004?

29. Dados os preços de cinco produtos, determinar o índice de preço usando o método agregativo simples (Bradstreet) e tomando o ano de 2000 como base.

	Preços		
Bens	2000	2001	2002
A	17,00	26,01	27,52
B	19,36	41,88	29,99
C	15,18	15,81	14,46
D	99,32	101,26	96,17
E	12,15	13,49	11,40

30. Com os dados do problema anterior, determine os índices de preço, com base em 2000, usando os métodos das médias aritmética, geométrica e harmônica simples.

31. Dadas as tabelas abaixo, calcular os índices agregativos, com base em T_0, baseados nas médias aritmética, geométrica e harmônica.

(a)

		T_0		T_1	
Produtos	Unidade	Preço	Quantidade	Preço	Quantidade
carnes	kg	155,70	2,0	191,50	1,3
frutas	un.	15,00	4,0	20,00	5,0
azeite	lata	122,25	1,0	170,00	1,0
bebidas	gr.	42,00	6,0	50,00	10,0
limpeza	vd.	35,00	2,0	40,60	1,0
legumes	bc.	10,00	2,0	10,00	3,0
ovos	dz.	46,00	1,0	66,40	2,0
amendoim	sc.	30,00	1,0	35,00	1,0
sal	kg	25,00	1,0	28,00	1,0
un.=unidade; vd=vidro; gr.=garrafa; bc=bacia; sc.=saco					

(b)

		T_0		T_1	
Produtos	Unidade	Preço	Quantidade	Preço	Quantidade
leite	lt.	36,00	2	42,00	3
pão	un.	6,00	3	8,00	5
café	g.	76,00	500	92,00	500
açucar	kg	19,00	2	25,00	1

32. Verifique se os índices baseados nas médias artimética, geométrica e harmônica simples satisfazem o critério da decomposição das causas.

33. Usando o fato de que podemos escrever

$$n = \sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_0^i}{p_0^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_t^i}{p_t^i}$$

mostre que os índices de preço baseados nas médias artimética e harmônica podem ser escritos como:

$$\overline{p}_{0,t}^{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \times \frac{1}{p_0^i}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \times \frac{1}{p_0^i}} \qquad \overline{p}_{0,t}^{H} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \times \frac{1}{p_t^i}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \times \frac{1}{p_t^i}}$$

Dê uma interpretação para os termos $\frac{1}{p_0^i}$ e $\frac{1}{p_t^i}$, lembrando que $valor = preço \times quantidade$. Usando esse fato, interprete o significado de cada um dos índices de preço.

34. Resolva o exercício anterior, trabalhando agora com índices de quantidade.

35. Suponha que um índice de preços, comparando os preços entre o instante base $t = 0$ e um instante posterior $t = 1$, e baseado na média artimética simples, tenha sido calculado com base em n produtos. Suponha que se queira acrescentar um novo produto. Mostre como obter o novo índice.

36. Resolva o problema anterior, trabalhando agora com o índice baseado na média geométrica simples.

37. Considere os dados da tabela abaixo.

Produto	Unidade	$t = 0$		$t = 1$		$t = 2$	
		Preço	Quant.	Preço	Quant.	Preço	Quant.
batata	kg	65,00	5,0	90,00	2,00	120,00	3,0
carne	kg	560,00	1,5	795,00	2,00	999,00	3,0
óleo	l	155,00	2,0	205,00	5,00	280,00	1,0
queijo	kg	350,00	0,5	500,00	0,25	690,00	1,0
cerveja	garrafa	95,00	12,0	130,00	6,00	150,00	18,0
vinho	garrafa	470,00	2,0	685,00	3,00	865,00	1,0

(a) Obtenha os pesos para o cálculo dos índices de Laspeyres e Paasche com base em $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$.

(b) Calcule os índices de preço e quantidade de Laspeyres e Paasche com base em $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$.

(c) Use esses resultados para mostrar que os índices de Laspeyres e Paasche não satisfazem as propriedades de circularidade e reversibilidade.

(d) Calcule os índices de valor com base em $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$.

(e) Use os resultados para mostrar que os índices de Laspeyres e Paasche não satisfazem a propriedade de decomposição das causas.

(f) Verifique, com esses dados, que os índices cruzados de Laspeyres e Paasche satisfazem a propriedade de decomposição das causas.

38. Os dados abaixo referem-se às quantidades produzidas (toneladas) e os preços médios por quilograma recebidos por certos produtores.

Produtos	2001		2002		2003	
	p_t	q_t	p_t	q_t	p_t	q_t
A	5,00	100	6,00	100	10,00	120
B	10,00	50	15,00	60	15,00	70
C	3,50	120	5,80	130	6,60	110
D	4,10	200	6,00	250	7,00	260
E	8,00	180	10,80	200	11,50	200

Calcule:

(a) os índices de preço e quantidade de Sauerbeck com base em 2001;

(b) os índices de preço e quantidade de Laspeyres com base em 2001;

(c) os índices de preço e quantidade de Paasche com base em 2001.

39. De acordo com o princípio da decomposição das causas, qual a variação de um índice de valor se o índice de preços de Paasche cresceu 20% e o de quantidade de Laspeyres decresceu 20%?

40. Dados $V_{0,t} = 108$ e $L^P_{0,t} = 102$, de que modo poderíamos obter um índice de quantidade de Paasche?

41. A partir dos resultados do exercício 37, calcule o índice de Fisher com base em t_0.

42. Com os dados do exercício 38, calcule os índices de preço e de quantidade de Marshall-Edgeworth e de Divisia, tomando 2001 como base.

43. Mostre que, se o índice de Laspeyres for igual ao de Paasche, então ele também será igual ao de Fisher e de Marshall-Edgeworth.

44. Dadas as tabelas abaixo, determine os índices de preço e de quantidade de Laspeyres, Paasche, Fisher, Marshall-Edgeworth e Divisia. Tome 1990 como base.

Produto	Preço		Quantidade	
	1990	1994	1990	1994
papel	7,00	14,80	5,0	8,0
almofada	3,00	3,50	10,0	16,0
caneta	6,00	6,80	8,0	12,0
lápis	4,20	4,90	5,0	6,0
clipes	7,10	9,00	0,3	0,4
borracha	2,80	7,90	4,0	3,0
cola	3,70	5,00	3,0	4,0
tinta	6,80	7,70	2,5	5,0

45. A tabela abaixo apresenta os índices de preço no varejo de frutas e legumes no período de 86 a 92. Determinar os índices de preços desses produtos tomando como base:

(a) 1986

(b) 1989

(c) 1992

Data	Índice de preços (1980=100)	
	Frutas	Legumes
1986	113,3	111,9
1987	116,9	117,5
1988	118,7	123,3
1989	129,6	140,6
1990	154,0	163,6
1991	165,6	171,9
1992	190,5	193,1
1993	195,2	198,6

46. Sabendo-se que os índices de preço ao consumidor de quatro períodos consecutivos são: 119,12; 116,16; 118,02 e 121,75, determinar o índice de preços relativo ao período todo. (Os valores dados são índices do tipo $\frac{t}{t-1}$.)

47. Dada a tabela a seguir, determinar os relativos de preço, quantidade e valor, tomando por base:

    (a) 1980

    (b) 1989.

Ano	Preço	Quant.	Ano	Preço	Quant.	Ano	Preço	Quant.
1980	471	94	1985	754	117	1990	969	108
1981	518	99	1986	785	104	1991	1015	105
1982	613	95	1987	825	107	1992	1070	102
1983	707	104	1988	893	111	1993	1663	99
1984	710	113	1989	927	110	1994	1745	94

48. A tabela abaixo apresenta uma série de números-índice cuja base é 1990=100. Mudá-la, considerando como base:

    (a) 1994=100

    (b) 1992=100

    (c) 1989=100.

Ano	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Índice	94,1	100,0	105,8	112,3	118,9	124,8

49. Os preços médios por tonelada de cana de açucar pagos ao produtor encontram-se na tabela abaixo.

Anos	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Preço médio da cana de açucar (R$/ton)	15,06	18,68	25,24	26,15	30,07	28,46
Fonte: www.ipeadata.gov.br (FGV - Agroanalysis - média anual)						

(a) Tomando a média do período de 1999 a 2000 como base, determine a série dos relativos de preço para todos os anos.

(b) Tomando 2004 como base, determine a série dos relativos de preço para todos os anos.

50. O salário do gerente geral de uma empresa, em dezembro de 2004, era de R$15.000,00. O ICV de dezembro de 2004, com base em dezembro de 1999, variou 56,34%. Qual o poder aquisitivo do salário desse gerente em dezembro de 2004, com base em dezembro de 1999?

51. Utilizando os dados da tabela abaixo, calcular

(a) a série de índices dos salários reais, com base 2001=100.

(b) a série dos salários reais a preços de 2001.

(c) a série das taxas de variação anual dos salários nominais e reais.

Anos	Salário (u.m.)	ICV 1996=100
2001	3.200	137
2002	4.600	155
2003	5.200	170
2004	6.400	183

52. Dadas as séries

	2000	2001	2002
Valor das vendas industriais - 1000 R$ (1)	590.978.128	690.748.956	797.226.731
Salários na indústria - 1000 R$ (1)	57.266.221	63.909.526	70.277.206
Pessoal ocupado na Indústria (1)	5.315.408	5.453.460	5.680.111
ICV - 1996=100 (2)	125	137	155
Índice de preços industriais - 2001=100 (3)	90	100	115

(1) Pesquisa Anual da Indústria - IBGE
(2) www.ipeadata.gov.br - ICV-SP
(3) Índice de Preços por Atacado - Oferta Global - FGV

pede-se

(a) o valor das vendas industriais a preços constantes de 2000.

(b) o salário real médio, a preços constantes de 2000.

53. Para uma taxa de inflação de 25%, qual a perda percentual do poder aquisitivo da moeda?

54. A inflação, medida pelo ICV, no período de um ano (março 04-março 05), acusou variação de 8,01%, enquanto os funcionários públicos de certo estado tiveram seus vencimentos reajustados em 5,63% em março de 2005. Qual a perda percentual de poder aquisitivo dos salários dos funcionários públicos em março de 2005, com base em março de 2004? Em quanto por cento os salários deveriam ser reajustados para recompor o poder aquisitivo de março do ano anterior?

55. Uma empresa apresentou os seguintes dados relativos ao faturamento de 2000 a 2004 exibidos na tabela a seguir, enquanto o IGP no mesmo período, apresentou os valores aí exibidos:

Ano	2000	2001	2002	2003	2004
Faturamento (1000 R$)	800	850	950	1050	1350
IGP-DI - 1995=100	157	174	220	237	265

   (a) Calcular o faturamento real da empresa, a preços de 2000.

   (b) Calcular a taxa de variação anual do faturamento real no período.

   (c) Calcular a taxa média anual de variação do faturamento real.

56. Se um indivíduo aplicou determinada quantia durante certo período a uma taxa nominal de 4,5% e a uma taxa real negativa de 5%, estime a taxa de inflação no período.

57. Se o PIB cresceu 10% em determinado período, enquanto a população cresceu 5%, qual a variação do PIB per capita no período?

58. O salário médio de determinada classe operária em certa localidade, em 2004, foi de R$850. O índice de custo de vida neste mesmo ano era igual a 156 e o de 1997 era igual a 90, ambos referidos ao período básico de 1997-99. Determine o salário real dessa classe operária em 2004, tomando 1997 como base.

Capítulo 7

Solução dos exercícios propostos

1.

Ano	PIB (1000R$)	Índice: 1980=100	Índice: 2000=100
1980	914.188	$100 \times 914188/914188 = 100,00$	$100 \times 914188/1101255 = 83,01$
2000	1.101.255	$100 \times 1101255/914188 = 120,46$	$100 \times 1101255/1101255 = 100,00$
2002	1.346.028	$100 \times 1346028/914188 = 147,24$	$100 \times 1346028/1101255 = 122,23$
2004	1.769.202	$100 \times 1769202/914188 = 193,53$	$100 \times 1769202/1101255 = 160,65$

Ano	Índice: 2002=100	Índice: 2004=100
1980	$100 \times 914188/1346028 = 67,917$	$100 \times 914188/1769202 = 51,672$
2000	$100 \times 1101255/1346028 = 81,815$	$100 \times 1101255/1769202 = 62,246$
2002	$100 \times 1346028/1346028 = 100,000$	$100 \times 1346028/1769202 = 76,081$
2004	$100 \times 1769202/1346028 = 131,439$	$100 \times 1769202/1769202 = 100,000$

Ano	Taxa de variação (%)
1980	
2000	$\left(\dfrac{1101255}{914188} - 1\right) \times 100 = 20,463$
2002	$\left(\dfrac{1346028}{1101255} - 1\right) \times 100 = 22,227$
2004	$\left(\dfrac{1769202}{1346028} - 1\right) \times 100 = 31,439$

Note que as mesmas taxas de variação podem ser obtidas através de qualquer uma das séries de números índices, devendo-se apenas ter cuidado com os arredondamentos.

2.

Ano	Expectativa de vida	Índice: 1980=100	Taxa de variação(%)
1980	62,7	$100 \times \dfrac{62,7}{62,7} = 100,00$	
1990	66,6	$100 \times \dfrac{66,6}{62,7} = 106,22$	$\left(\dfrac{66,6}{62,7} - 1\right) \times 100 = 6,22$
2000	70,4	$100 \times \dfrac{70,4}{62,7} = 112,28$	$\left(\dfrac{70,4}{66,6} - 1\right) \times 100 = 5,71$
2005	71,9	$100 \times \dfrac{71,9}{62,7} = 114,67$	$\left(\dfrac{71,9}{70,4} - 1\right) \times 100 = 2,13$

Para 2005, houve um aumento de 14,67% na esperança de vida com relação à mesma estimativa em 1980.

3. (a) Para calcular os índices com base 1998, temos que calcular

$$p_{98,t} = \frac{p_t}{p_{98}}, \qquad t = 94, 95, 96, 97, 98$$

Pelas propriedades de reversão e circular , temos que:

$$\frac{p_t}{p_{98}} = \frac{p_t}{p_{94}} \times \frac{p_{94}}{p_{98}} = \frac{\frac{p_t}{p_{94}}}{\frac{p_{98}}{p_{94}}} = \frac{p_{94,t}}{p_{94,98}} \qquad t = 94, 95, 96, 97, 98$$

o mesmo valendo para quantidade.

(b) Pela propriedade da decomposição das causas, temos que

$$v_{0,t} = p_{0,t} \times q_{0,t} = \frac{p_t}{p_0} \times \frac{q_t}{q_0} = \frac{p_t \times q_t}{p_0 \times q_0}$$

Note as duas expressões na equação acima. Embora matematicamente equivalentes, em termos numéricos a última é mais exata pois só fazemos uma divisão. Em termos de arredondamentos, quanto menos divisões fizermos, melhor. Usando essas propriedades obtemos os resultados da tabela a seguir. (Obs.: Os índices com base 1998=100 são obtidos multiplicando-se os resultados da tabela por 100.)

	Relativos - 1998=1		
	P	Q	V
1994	$100/125 = 0,800$	$90/120 = 0,750$	$(100 \times 90)/(125 \times 120) = 0,6000$
1995	$102/125 = 0,816$	$98/120 = 0,817$	$(102 \times 98)/(125 \times 120) = 0,66640$
1996	$112/125 = 0,896$	$100/120 = 0,833$	$(112 \times 100)/(125 \times 120) = 0,7467$
1997	$115/125 = 0,920$	$110/120 = 0,917$	$(115 \times 110)/(125 \times 120) = 0,8433$
1998	$125/125 = 1,000$	$120/120 = 1,000$	$(125 \times 120)/(125 \times 120) = 1,0000$

Se calcularmos o relativo de valor multiplicando os relativos de preço e quantidade arredondados, obtemos, por exemplo, para o ano 1997 o seguinte:

$$0,920 \times 0,917 = 0,84364 \neq 0,84333$$

4. Aumento de vendas (quantidade): 60%

$$\left(\frac{q_t}{q_0} - 1\right) \times 100 = 60 \Rightarrow \frac{q_t}{q_0} = 1 + \frac{60}{100} = 1,6$$

Faturamento duplicado: aumento de 100%

$$\left(\frac{v_t}{v_0} - 1\right) \times 100 = 100 \Rightarrow \frac{v_t}{v_0} = 1 + \frac{100}{100} = 2,0$$

Como os relativos satisfazem a propriedade da decomposição das causas, resulta que

$$\frac{v_t}{v_0} = \frac{q_t}{q_0} \times \frac{p_t}{p_0} \Rightarrow \frac{p_t}{p_0} = \frac{\frac{v_t}{v_0}}{\frac{q_t}{q_0}} = \frac{2}{1,6} = 1,25$$

que corresponde a uma taxa de $100 \times (1,25 - 1) = 25\%$

5. Queda nas vendas (quantidade): 10%, ou seja, taxa de -10%. Logo,

$$\left(\frac{q_t}{q_o} - 1\right) \times 100 = -10 \Rightarrow \frac{q_t}{q_o} = 1 - \frac{10}{100} = 0,9$$

Faturamento mantido no mesmo nível:

$$\frac{v_t}{v_0} = 1$$

Assim, como

$$\frac{v_t}{v_0} = \frac{q_t}{q_0} \times \frac{p_t}{p_0} \Rightarrow 1 = 0,9 \times \frac{p_t}{p_0} \Rightarrow \frac{p_t}{p_0} = \frac{1}{0,9} = 1,1111$$

que corresponde a uma taxa de $100\times\ (1,1111 - 1) = 11,11\%$ de aumento nos preços.

6.

$$\frac{q_{78}}{q_{76}} = \frac{1500}{750} = 2,00 \longrightarrow \text{Aumento de } (2-1) \times 100 = 100\%$$

$$\frac{q_{79}}{q_{78}} = \frac{1750}{1500} = 1,1667 \longrightarrow \text{Aumento de } (1,1667 - 1) \times 100 = 16,67\%$$

O crescimento de 1978 com relação a 1976 é de 100%, enquanto o crescimento de 1979 com relação a 1978 é de 16,67%. A informação dada está incorreta.

7. Temos que

$$\left(\frac{q_{04}}{q_{03}} - 1\right) \times 100 = 60 \Rightarrow \frac{q_{04}}{q_{03}} = 1 + \frac{60}{100} \Rightarrow q_{03,04} = 1,60$$

Usando a propriedade de reversibilidade, temos que

$$\frac{q_{03}}{q_{04}} = \frac{1}{q_{03,04}} = \frac{1}{1,6} = 0,625$$

e isso corresponde à taxa

$$(0,625 - 1) \times 100 = -37,5\%$$

ou seja, a quantidade de 2003 é 37,5% inferior à de 2004.

8. Temos que

$$\left(\frac{q_{mar}}{q_{fev}} - 1\right) \times 100 = 25 \Rightarrow \frac{q_{mar}}{q_{fev}} = 1 + \frac{25}{100} \Rightarrow q_{fev,mar} = 1,25$$

Pela propriedade da reversão, temos que

$$q_{mar,fev} = \frac{1}{q_{fev,mar}} = \frac{1}{1,25} = 0,80$$

e isso corresponde à taxa

$$(0,8 - 1) \times 100 = -20,0\%$$

ou seja, ele vendeu 20% a menos em fevereiro comparado com março.

9. Houve um aumento de 20% tanto em preço quanto em quantidade. Então $p_{0,1} = 1,20$ e $q_{0,1} = 1,20$.

   Pela propriedade da decomposição das causas, sabemos que $V_{0,1} = P_{0,1} \times Q_{0,1} = 1,20 \times 1,20 = 1,44$, ou seja, o faturamento aumentou em $(1,44 - 1) \times 100 = 44,0\%$.

10. (a) Aumento de 50% na quantidade

$$\left(\frac{q_1}{q_0} - 1\right) \times 100 = 50 \Rightarrow \frac{q_1}{q_0} = 1,5$$

Duplicar faturamento: aumento de 100%

$$\left(\frac{v_1}{v_0} - 1\right) \times 100 = 100 \Rightarrow \frac{v_1}{v_0} = 2$$

Como

$$\frac{v_t}{v_0} = \frac{q_t}{q_0} \times \frac{p_t}{p_0} \Rightarrow 2 = 1,5 \times \frac{p_t}{p_0} \Rightarrow \frac{p_t}{p_0} = \frac{2}{1,5} = 1,3333$$

ou seja, o preço deverá ser aumentado em 33,33%.

(b) Queda na quantidade de 15%:

$$\left(\frac{q_1}{q_0} - 1\right) \times 100 = -15 \Rightarrow \frac{q_1}{q_0} = 0,85$$

Faturamento inalterado:

$$\frac{v_t}{v_0} = 1$$

Logo,

$$\frac{v_t}{v_0} = \frac{q_t}{q_0} \times \frac{p_t}{p_0} \Rightarrow 1 = 0,85 \times \frac{p_t}{p_0} \Rightarrow \frac{p_t}{p_0} = \frac{1}{0,85} = 1,1765$$

ou aumento de 17,65% nos preços.

(c) Redução de 25% nos pacotes:

$$100 \times \left(\frac{q_1}{q_0} - 1\right) = -25 \Rightarrow \frac{q_1}{q_0} = 0,75 \Rightarrow \frac{q_0}{q_1} = \frac{1}{0,75} = 1,33$$

ou seja, as vendas foram 33,33% maiores.

11. Temos o seguinte:

$$\left(\frac{p_{04}}{p_{03}} - 1\right) \times 100 \quad = 12 \Rightarrow \tfrac{p_{04}}{p_{03}} = 1,12$$
$$\left(\frac{q_{04}}{q_{03}} - 1\right) \times 100 \quad = -6 \Rightarrow \tfrac{q_{04}}{q_{03}} = 0,94$$

Logo,
$$\frac{v_{04}}{v_{03}} = \frac{p_{04}}{p_{03}} \times \frac{q_{04}}{q_{03}} = 1,12 \times 0,94 = 1,0528$$
ou seja, o valor cresceu em $5,28\%$.

12. Suponha que para andar uma distância de x km seja necessário 1 ℓ de gasolina; pelos dados do problema, seriam necessários $1,3\ell$ de álcool. Como o álcool é 35% mais barato que a gasolina, temos a situação ilustrada na tabela a seguir:

	Quantidade		Preço por litro	
Distância	Gasolina	Álcool	Gasolina	Álcool
x km	1 ℓ	$1,3\ell$	1	$0,65$

Então a relação entre os valores gastos para percorrer essa distância usando álcool e gasolina é
$$\frac{v_A}{v_G} = \frac{1,3 \times 0,65}{1 \times 1} = 0,65 \times 1,3 = 0,845$$
ou seja, o álcool é $(1-0,845) \times 100 = 15,5\%$ mais econômico que a gasolina. Se o gasto com gasolina é de R$100,00, trocando por um carro a álcool, ele gastará 84,5% desse valor, ou seja, gastará R$ 84,50.

13. Temos que:
$$D_G = 1,3D_A \Rightarrow D_A = \frac{1}{1,3}D_G = 0,7692D_G \equiv -23,08\%$$
O carro a álcool anda uma distância 23,08 menor.

14. Temos que:
$$\frac{p_{98}}{p_{00}} = 0,90 \qquad\qquad \frac{p_{04}}{p_{00}} = 1,20$$
Usando as propriedades circular e da reversão, obtemos
$$\frac{p_{04}}{p_{98}} = \frac{p_{04}}{p_{00}} \times \frac{p_{00}}{p_{98}} = \frac{\frac{p_{04}}{p_{00}}}{\frac{p_{98}}{p_{00}}} = \frac{1,2}{0,9} = 1,333$$
ou seja, o aumento do preço de 2004 em relação ao de 1998 é de $33,3\%$.

15. Os índices dados são do tipo p_t/p_{t-1}. Pela propriedade circular, temos que:
$$p_{98,01} = p_{98,99} \times p_{99,00} \times p_{00,01} = 1,09 \times 1,06 \times 1,08 = 1,247832$$
ou seja, os preços são 24,78% mais altos em 2001 que em 1998.

16. Vamos considerar os seguintes salários: s_0 = salário atual; s_1 = salário depois da redução de 10%; s_2 = salário depois do aumento de 10%; s_3 = salário que ela deveria ter para recuperar o valor inicial. Pelos dados do problema, temos que

$$s_0 = 10000 \qquad \frac{s_1}{s_0} = 0,9 \qquad \frac{s_2}{s_1} = 1,1$$

(a)
$$\frac{s_1}{10000} = 0,9 \Rightarrow s_1 = 9000$$

(b)
$$\frac{s_2}{s_1} = 1,1 \Rightarrow \frac{s_2}{9000} = 1,1 \Rightarrow s_2 = 9900$$

(c) Não. A diferença é de R$ 100,00.

(d) Queremos que

$$\frac{s_3}{s_0} = 1 \Leftrightarrow \frac{s_3}{s_2} \times \frac{s_2}{s_1} \times \frac{s_1}{s_0} = 1 \Leftrightarrow \frac{s_3}{s_2} \times 1,1 \times 0,9 = 1 \Leftrightarrow \frac{s_3}{s_2} = \frac{1}{1,1 \times 0,9} = 1,010101$$

Ou seja, ela tem que ter um reajuste de $(1,010101 - 1) \times 100 = 1,01\%$ para recuperar o salário de R$10000,00.

17. Redução de preços de 25% em setembro com relação a agosto $p_{\text{ago,set}} = 0,75$

Aumento de preço de 50% em agosto com relação a julho $\Longrightarrow p_{\text{jul,ago}} = 1,50$

Mês	Base móvel	Base Julho=1
Julho		$p_{\text{jul,jul}} = 1$
Agosto	$1,5$	$p_{\text{jul,ago}} = 1,50$
Setembro	$0,75$	$p_{\text{jul,set}} = p_{\text{jul,ago}} \times p_{\text{ago,set}} = 0,75 \times 1,5 = 1,125$

Embora a redução de setembro com relação a agosto tenha sido de 25%, com relação a julho ainda houve um aumento de 12,5%.

18. Na tabela abaixo resumem-se os dados do problema:

Mês	Preço	Quantidade	Valor
Novembro	350	50	$350 \times 50 = 17500$
Dezembro	500	30	$500 \times 30 = 15000$

Como os relativos satisfazem a propriedade da identidade, no mês base todos são iguais a 1. Para o mês de dezembro temos:

$$P_{\text{Nov,Dez}} = \frac{500}{350} \times 100 = \frac{10}{7} \times 100 = 142,86$$

$$Q_{\text{Nov,Dez}} = \frac{30}{50} \times 100 = 60$$

$$V_{\text{Nov,Dez}} = \frac{10}{7} \times \frac{3}{5} \times 100 = 85,71$$

Em dezembro, os preços subiram 42,86%, a quantidade caiu 40% e o faturamento caiu 14,29%.

19. (a) Jan=1,0

Mês Jan	Preço 1,0	Quantidade 1,0	Valor 1,0
Fev	$\frac{5436}{5292} = 1,0272$	$\frac{215}{201} = 1,0697$	$\frac{5436 \times 215}{5292 \times 201} = 1,0988$
Mar	$\frac{5949}{5292} = 1,1241$	$\frac{210}{201} = 1,0448$	$\frac{5949 \times 210}{5292 \times 201} = 1,1745$
Abr	$\frac{6411}{5292} = 1,2115$	$\frac{219}{201} = 1,0896$	$\frac{6411 \times 219}{5292 \times 201} = 1,3199$
Mai	$\frac{6407}{5292} = 1,2107$	$\frac{230}{201} = 1,1443$	$\frac{6407 \times 230}{5292 \times 201} = 1,3854$
Jun	$\frac{6869}{5292} = 1,298$	$\frac{227}{201} = 1,1294$	$\frac{6869 \times 227}{5292 \times 201} = 1,4659$
Jul	$\frac{6891}{5292} = 1,3022$	$\frac{229}{201} = 1,1393$	$\frac{6891 \times 229}{5292 \times 201} = 1,4835$
Ago	$\frac{7156}{5292} = 1,3522$	$\dfrac{226}{201} = 1,1244$	$\frac{7156 \times 226}{5292 \times 201} = 1,5204$
Set	$\frac{7616}{5292} = 1,4392$	$\frac{228}{201} = 1,1343$	$\frac{7616 \times 228}{5292 \times 201} = 1,6325$
Out	$\frac{8315}{5292} = 1,5712$	$\frac{217}{201} = 1,0796$	$\frac{8315 \times 217}{5292 \times 201} = 1,6963$
Nov	$\frac{9223}{5292} = 1,7428$	$\frac{225}{201} = 1,1194$	$\frac{9223 \times 225}{5292 \times 201} = 1,9509$
Dez	$\frac{9815}{5292} = 1,8547$	$\frac{231}{201} = 1,1493$	$\frac{9815 \times 231}{5292 \times 201} = 2,1315$

É interessante notar a questão do arredondamento neste exercício. Suponha, por exemplo, que tivéssemos calculado o relativo de valor usando a propriedade de composição das causas, arredondando os relativos de preço e quantidade para 2 casas decimais. Então, por exemplo, para o mês de janeiro obteríamos

$$1,03 \times 1,07 = 1,1021$$

que, quando comparado com o valor mais correto 1,0987579, dá uma diferença percentual de

$$\frac{1,1021 - 1,0987579}{1,0987579} \times 100 = 0,3\%$$

(b) Para os meses de julho e dezembro, o procedimento é análogo; os resultados são dados na tabela a seguir.

	Base: Julho=1			Base: Dezembro=1		
Mês	Preço	Quantidade	Valor	Preço	Quantidade	Valor
Jan	0,76796	0,87773	0,67406	0,53917	0,87013	0,46915
Fev	0,78886	0,93886	0,74063	0,55385	0,93074	0,51548
Mar	0,86330	0,91703	0,79167	0,60611	0,90909	0,55101
Abr	0,93034	0,95633	0,88972	0,65318	0,94805	0,61925
Mai	0,92976	1,00437	0,93382	0,65278	0,99567	0,64995
Jun	0,99681	0,99127	0,98810	0,69985	0,98268	0,68773
Jul	1,00000	1,00000	1,00000	0,70209	0,99134	0,69601
Ago	1,03846	0,98690	1,02485	0,72909	0,97835	0,71331
Set	1,10521	0,99563	1,10038	0,77596	0,98701	0,76588
Out	1,20665	0,94760	1,14342	0,84717	0,93939	0,79583
Nov	1,33841	0,98253	1,31503	0,93968	0,97403	0,91528
Dez	1,42432	1,00873	1,43676	1,00000	1,00000	1,00000

20. Se o índice dado foi construído com base móvel, isso significa que os valores dados são do tipo $\dfrac{p_t}{p_{t-1}}$. Para obter o índice de base fixa aplicamos os princípios da reversão e da circularidade.

Base 1996=100

$$
\begin{aligned}
p_{96,95} &= \tfrac{p_{95}}{p_{96}} = \tfrac{1}{p_{95,96}} = \tfrac{1}{1{,}22} \times 100 = 81{,}97 \\
p_{96,96} &= 100{,}00 \\
p_{96,97} &= \tfrac{p_{97}}{p_{96}} = 104{,}00 \\
p_{96,98} &= \tfrac{p_{98}}{p_{96}} = \tfrac{p_{98}}{p_{97}} \times \tfrac{p_{97}}{p_{96}} = 1{,}05 \times 1{,}04 \times 100 = 109{,}20
\end{aligned}
$$

Base 1994=100

$$
\begin{aligned}
p_{94,95} &= 122{,}00 \\
p_{94,96} &= \tfrac{p_{96}}{p_{94}} = \tfrac{p_{96}}{p_{95}} \times \tfrac{p_{95}}{p_{94}} = 1{,}09 \times 1{,}22 \times 100 = 132{,}98 \\
p_{94,97} &= \tfrac{p_{97}}{p_{94}} = \tfrac{p_{97}}{p_{96}} \times \tfrac{p_{96}}{p_{95}} \times \tfrac{p_{95}}{p_{94}} = 1{,}04 \times 1{,}09 \times 1{,}22 \times 100 = 138{,}30 \\
p_{94,98} &= \tfrac{p_{98}}{p_{94}} = \tfrac{p_{98}}{p_{97}} \times \tfrac{p_{97}}{p_{96}} \times \tfrac{p_{96}}{p_{95}} \times \tfrac{p_{95}}{p_{94}} = 1{,}02 \times 1{,}04 \times 1{,}09 \times 1{,}22 \times 100 = 141{,}07
\end{aligned}
$$

Resumindo os resultados:

Ano	Base móvel	1996=100	1994=100
1995	122	81,97	122,00
1996	109	100,00	132,98
1997	104	104,00	138,30
1998	102	109,20	141,07

21. Com procedimento análogo ao empregado no exercício 20, obtemos os resultados a

seguir:

Ano	Base			
	Móvel	1997=100	1999=100	2001=100
1998	102	102,00	91,74	80,14
1999	109	111,18	100,00	87,35
2000	106	117,85	106,00	92,59
2001	108	127,28	114,48	100,00

22. Até abril: 24,73% Maio até dezembro: 5,70%

Inflação acumulada: $1,2473 \times 1,057^8 = 1,94344 \equiv \mathbf{94,34}\%$

23. Os valores da tabela são do tipo $\dfrac{p^t}{p_{t-1}}$. Para acumular a inflação, temos, primeiro, que transformar as taxas em índice e depois multiplicar pois, pela propriedade circular, sabemos que

$$\frac{p_t}{p_0} = \frac{p_1}{p_0} \times \frac{p_2}{p_1} \times \cdots \times \frac{p_t}{p_{t-1}}$$

Obtemos, então:

	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
%	2,0	3,2	-2,5	5,1	10,2	-5,8	-4,3	1,5	6,0	7,1	8,3	15,1
Relativo	1,02	1,032	0,975	1,051	1,102	0,942	0,957	1,015	1,06	1,071	1,083	1,151
dez=1	1,02	1,053	1,0263	1,079	1,187	1,120	1,072	1,088	1,153	1,235	1,337	1,539

A inflação no período é de 53,9% e a taxa média é $(\sqrt[12]{1,539} - 1) \times 100 = 3,66\%$

24. Salário em janeiro = R$482,00.

Transformando as taxas de aumento em índice: $1,03$; $1,042$; $1,05$

A cada trimestre iremos multiplicar o valor do salário inicial pelo índice correspondente, observando que os mesmos são acumulativos.

$$\begin{aligned} \text{Salários de abril a junho} &: 482 \times 1,03 = 496,46 \\ \text{Salários de julho a setembro} &: 496,46 \times 1,042 = 517,31 \\ \text{Salários de outubro a dezembro e } 13^{\underline{o}} &: 517,31 \times 1,05 = 543,18 \end{aligned}$$

que equivale a $482 \times (1,03 \times 1,042 \times 1,05) = 543,18$.

Nota: o 13º salário é igual ao salário do mês de dezembro.

25. Como os valores dados são do índice de base fixa, dividir o valor do ano 2004 pelo do ano 1995 equivale a comparar preços com a mesma base, ou seja:

$$\frac{IGP_{0,04}}{IGP_{0,95}} = \frac{\frac{P_{04}}{P_0}}{\frac{P_{95}}{P_0}} = \frac{P_{04}}{P_{95}} = \frac{312}{117} = 2,6667$$

e isso nos dá a inflação acumulada no período de 9 anos. Para esse índice a taxa de inflação é $(2,6667 - 1) \times 100 = 166,67\%$! A inflação média anual nesse período é de $(\sqrt[9]{2,6667} - 1) \times 100 = 11,51\%$.

26.

Ano	Quantidade (1000t)	Relativos 2000=100
1995	15889	$15889/18202 \times 100 = 87,293$
1996	16733	$16733/18202 \times 100 = 91,929$
1997	17452	$17452/18202 \times 100 = 95,880$
1998	16336	$16336/18202 \times 100 = 89,748$
1999	16810	$16810/18202 \times 100 = 92,352$
2000	18202	$18202/18202 \times 100 = 100,000$

27.

$$\frac{q_{00}}{q_{91}} = 1,05 \qquad \frac{q_{00}}{q_{95}} = 1,40$$

$$\frac{q_{95}}{q_{91}} = \frac{q_{95}}{q_{00}} \times \frac{q_{00}}{q_{91}} = \frac{\frac{q_{00}}{q_{91}}}{\frac{q_{00}}{q_{95}}} = \frac{1,05}{1,40} \times 100 = 75$$

ou seja, a quantidade de 1995 é 25% inferior à quantidade de 1991.

28.

. Ano	Elos relativos	Encadeamento 1999=1	2000=1
1999		$1,00$	$1/1,05 = 0,9524$
2000	105	$1 \times 1,05 = \mathbf{1,0500}$	$1,05/1,05 = 1,0$
2001	103	$1,05 \times 1,03 = 1,0815$	$1,0815/1,05 = 1,03$
2002	108	$1,0815 \times 1,08 = 1,168$	$1,168/1,05 = 1,1124$
2003	110	$1,168 \times 1,10 = 1,2848$	$1,2848/1,05 = 1,2236$
2004	104	$1,2848 \times 1,04 = 1,3362$	$1,3362/1,05 = 1,2726$

Para o ano de 2004 temos que

$$\frac{p_{04}}{p_{00}} = 1,2726 \Rightarrow 100 \times \left(\frac{p_{04}}{p_{00}} - 1\right) = 27,26\%$$

ou seja, os preços de 2004 são 27,26% maiores que os de 2000.

29.

Bens	Preços 2000	2001	2002
A	17,00	26,01	27,52
B	19,36	41,88	29,99
C	15,18	15,81	14,46
D	99,32	101,26	96,17
E	12,15	13,49	11,40
Soma	163,01	198,45	179,54

$$B_{00,00} = \frac{163,01}{163,01} \times 100 = 100,0$$

$$B_{00,01} = \frac{198,45}{163,01} \times 100 = 121,74$$

$$B_{00,02} = \frac{179,54}{163,01} \times 100 = 110,14$$

30. Como temos 5 produtos, $n = 5$.

A tabela a seguir fornece o cálculo dos relativos de preço com base em 2000, mediante o uso da fórmula: $p^i_{o,t} = \dfrac{p^i_t}{p^i_o}$. Como os relativos satisfazem a propriedade da identidade, os relativos no ano-base são todos iguais a 1.

	Relativos de preço (2000=1)	
Bens	2001	2002
A	$26,01/17 = 1,530000$	$27,52/17 = 1,618824$
B	$41,88/19,36 = 2,163223$	$29,99/19,36 = 1,549070$
C	$15,81/15,18 = 1,041502$	$14,46/15,18 = 0,952569$
D	$101,26/99,32 = 1,019533$	$96,17/99,32 = 0,968284$
E	$13,49/12,15 = 1,110288$	$11,40/12,15 = 0,938272$
SOMA	$6,864546$	$6,027019$

Os índices das médias simples satisfazem a propriedade da identidade. Assim, todos eles são iguais a 1 no ano-base.O índice de média artitmética é dado por:

$$\overline{p}_{o,t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p^i_{0,t}$$

$$\begin{aligned} \overline{p}_{00,01} &= 6,864546/5 = 1,3729 \\ \overline{p}_{00,02} &= 6,027019/5 = 1,2054 \end{aligned}$$

O índice de média geométrica simples é dado por

$$\overline{p}^G_{o,t} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} p^i_{o,t}}$$

$$\begin{aligned} \overline{p}^G_{00,01} &= \sqrt[5]{1,53 \times 2,163223 \times 1,041502 \times 1,019533 \times 1,110288} = 1,3130 \\ \overline{p}^G_{00,02} &= \sqrt[5]{1,618824 \times 1,549070 \times 0,952569 \times 0,968284 \times 0,938272} = 1,1676 \end{aligned}$$

O índice de média harmônica simples é dado por

$$\overline{p}^H_{o,t} = \frac{n}{\sum_{i}^{n} \frac{1}{p^i_{0,t}}}$$

$$\begin{aligned} \overline{p}^H_{00,01} &= \frac{5}{\frac{1}{1,53}+\frac{1}{2,163223}+\frac{1}{1,041502}+\frac{1}{1,019533}+\frac{1}{1,110288}} = 1,2634 \\ \overline{p}^H_{00,02} &= \frac{5}{\frac{1}{1,618824}+\frac{1}{1,549070}+\frac{1}{0,952569}+\frac{1}{0,968284}+\frac{1}{0,938272}} = 1,1334 \end{aligned}$$

Os índices calculados estão com base 2000=1. Para transformar para base 100, basta multiplicá-los por 100.

31. Os relativos e os índices baseados nas três médias simples satisfazem a propriedade da identidade; assim, no período base todos são iguais 1 (ou 100).

(a) Calculando os relativos com base $T_0 = 1$ obtemos

	Relativos	
Produto	Preço	Quantidade
Carnes	$191,5/155,7 = 1,229929$	$1,3/2 = 0,650000$
Frutas	$20/15 = 1,333333$	$5/4 = 1,250000$
Azeite	$170/122,25 = 1,390593$	$1/1 = 1,000000$
Bebidas	$50/42 = 1,190476$	$10/6 = 1,666667$
Limpeza	$40,6/35 = 1,160000$	$1/2 = 0,500000$
Legumes	$10/10 = 1,000000$	$3/2 = 1,500000$
Ovos	$66,4/46 = 1,443478$	$2/1 = 2,000000$
Amendoim	$35/30 = 1,166667$	$1/1 = 1,000000$
Sal	$28/25 = 1,120000$	$1/1 = 1,000000$
SOMA	$11,034476$	$10,566667$

$$\overline{p}_{0,1} = \frac{11,034476}{9} = 1,22605$$
$$\overline{q}_{0,1} = \frac{10,566677}{9} = 1,17407$$

$$\overline{p}^G_{0,1} = \sqrt[9]{1,229929 \times 1,333333 \times 1,390593 \times 1,190476 \times 1,16 \times 1 \times 1,443478} = \times\sqrt[9]{1,166667 \times 1,12} = 1,21892$$

$$\overline{q}^G_{0,1} = \sqrt[9]{0,65 \times 1,25 \times 1 \times 1,666667 \times 0,5 \times 1,5 \times 2 \times 1 \times 1} = 1,08192$$

$$\overline{p}^H_{0,1} = \frac{9}{\frac{1}{1,229929}+\frac{1}{1,333333}+\frac{1}{1,390593}+\frac{1}{1,190476}+\frac{1}{1,16}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1,443478}+\frac{1}{1,166667}+\frac{1}{1,12}} = 1,21179$$

$$\overline{q}^H_{0,1} = \frac{9}{\frac{1}{0,65}+\frac{1}{1,25}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1,666667}+\frac{1}{0,5}+\frac{1}{1,5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}} = 0,98845$$

(b) De maneira análoga obtemos os seguintes índices com base $T_0 = 1$:
Média aritmética simples

$$\overline{p}_{0,1} = 1,25658 \qquad \overline{q}_{0,1} = 1,16667$$

$$\overline{p}^G_{0,1} = 1,25462 \qquad \overline{q}^G_{0,1} = 1,05737$$

$$\overline{P}^H_{0,1} = 1,25265 \qquad \overline{q}^H_{0,1} = 0,9375$$

32. O critério de decomposição das causas exige que o produto do índice de preço pelo índice de quantidade seja igual ao índice agregativo simples de valor $V_{0,t} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i q_0^i}$

(a) Os índices baseados na média aritmética não satisfazem o critério da decomposição das causas

Prova:

$$\begin{aligned}
\overline{p}_{0,t} \times \overline{q}_{0,t} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{0,t}}{n} \times \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{0,t}}{n} = \frac{\frac{p_t^1}{p_0^1} + \frac{p_t^2}{p_0^2} + \cdots + \frac{p_t^n}{p_0^n}}{n} \times \frac{\frac{q_t^1}{q_0^1} + \frac{q_t^2}{q_0^2} + \cdots + \frac{q_t^n}{q_0^n}}{n} \\
&= \frac{\left(\frac{p_t^1}{p_0^1} + \frac{p_t^2}{p_0^2} + \cdots + \frac{p_t^n}{p_0^n}\right) \times \left(\frac{q_t^1}{q_0^1} + \frac{q_t^2}{q_0^2} + \cdots + \frac{q_t^n}{q_0^n}\right)}{n^2} \\
&\neq \frac{p_t^1 q_t^1 + p_t^2 q_t^2 + \cdots + p_t^n q_t^n}{p_0^1 q_0^1 + p_0^2 q_0^2 + \cdots + p_0^n q_0^n} = V_{0,t}
\end{aligned}$$

(b) Os índices baseados na média geométrica não satisfazem o critério da decomposição das causas

Prova:

$$\begin{aligned}
\overline{p}^G_{0,t} \times \overline{q}^G_{0,t} &= \sqrt[n]{\frac{p_t^1}{p_0^1} \times \frac{p_t^2}{p_0^2} \times \cdots \times \frac{p_t^n}{p_0^n}} \times \sqrt[n]{\frac{q_t^1}{q_0^1} \times \frac{q_t^2}{q_0^2} \times \cdots \times \frac{q_t^n}{q_0^n}} \\
&= \sqrt[n]{\frac{p_t^1 q_t^1}{p_0^1 q_0^1} \times \frac{p_t^2 q_t^2}{p_0^2 q_0^2} \times \cdots \times \frac{p_t^n q_t^n}{p_0^n q_0^n}} \\
&= \sqrt[n]{\frac{V_t^1}{V_0^1} \times \frac{V_t^2}{V_0^2} \times \cdots \times \frac{V_t^n}{V_0^n}} \\
&= \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} V_{0,t}^i} \neq V_{0,t} = \frac{\sum\limits_i p_t^i q_t^i}{\sum\limits_i p_0^i q_0^i}
\end{aligned}$$

(c) Os índices baseados na média harmônica não satisfazem o critério da decomposição das causas

Prova:

$$\begin{aligned}
\overline{p}^H_{0,t} \times \overline{q}^H_{0,t} &= \frac{n}{\frac{1}{p_{0,t}^1} + \frac{1}{p_{0,t}^2} + \cdots + \frac{1}{p_{0,t}^n}} \times \frac{n}{\frac{1}{q_{0,t}^1} + \frac{1}{q_{0,t}^2} + \cdots + \frac{1}{q_{0,t}^n}} \\
&= \frac{n^2}{\left(\frac{p_0^1}{p_t^1} + \frac{p_0^2}{p_t^2} + \cdots + \frac{p_0^n}{p_t^n}\right) \times \left(\frac{q_0^1}{q_t^1} + \frac{q_0^2}{q_t^2} + \cdots + \frac{q_0^n}{q_t^n}\right)} \\
&\neq V_{0,t} = \frac{\sum\limits_i p_t^i q_t^i}{\sum\limits_i p_0^i q_0^i}
\end{aligned}$$

33. Como $n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{p_t^i}{p_t^i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{p_0^i}{p_0^i}$, resulta que

$$\overline{p}_{0,t}^A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_{o,t}^i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_t^i}{p_0^i} =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{p_0^i}{p_0^i}} \times \sum_{i=1}^{n}\frac{p_t^i}{p_0^i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t^i \times \frac{1}{p_0^i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0^i \times \frac{1}{p_0^i}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t^i \times \frac{V}{p_0^i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0^i \times \frac{V}{p_0^i}}$$

Analogamente,

$$\overline{p}_{0,t}^H = n\frac{1}{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{o,t}^i}} = n\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{p_0^i}{p_t^i}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{p_t^i}{p_t^i} \times \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{p_0^i}{p_t^i}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t^i \times \frac{1}{p_t^i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0^i \times \frac{1}{p_t^i}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t^i \times \frac{V}{p_t^i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0^i \times \frac{V}{p_t^i}}$$

Como $V = PQ$, os termos $\frac{1}{p_0^i}$ e $\frac{1}{p_t^i}$ podem ser vistos como a quantidade adquirida com *uma* unidade monetária aos preços do ano base e do ano corrente, respectivamente. Ou seja, no caso do índice média aritmética, estamos acompanhando o preço de uma cesta de produtos definida na época base, supondo que o valor gasto é o mesmo para todos os produtos. No caso da média harmônica, a situação é análoga, só que a cesta muda a cada período.

34. Como $n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{q_t^i}{q_t^i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{q_0^i}{q_0^i}$, resulta

$$\overline{q}_{0,t}^A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_{0,t}^i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_t^i}{q_0^i} =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{q_0^i}{q_0^i}} \times \sum_{i=1}^{n}\frac{q_t^i}{q_0^i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_t^i \times \frac{1}{q_0^i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_0^i \times \frac{1}{q_0^i}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_t^i \times \frac{V}{q_0^i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_0^i \times \frac{V}{q_0^i}}$$

e

$$\overline{q}_{0,t}^H = n\frac{1}{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{0,t}^i}} = n\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{q_0^i}{q_t^i}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{q_t^i}{q_t^i} \times \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{q_0^i}{q_t^i}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_t^i \times \frac{1}{q_t^i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_0^i \times \frac{1}{q_t^i}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_t^i \times \frac{V}{q_t^i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_0^i \times \frac{V}{q_t^i}}$$

Como antes, estamos acompanhando a variação da quantidade de uma cesta de produto comprada aos preços da época base e da época atual, respectivamente, supondo que o valor gasto com cada produto da cesta é o mesmo.

35. O índice baseado em n produtos é:

$$\overline{p}^A_{0,t} = \frac{p^1_{0,t} + p^2_{0,t} + \cdots + p^n_{0,t}}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p^i_{0,t}}{n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p^i_{0,t} = n \times \overline{p}_{0,t}$$

Ao acrescentar um produto, temos que

$$\begin{aligned} \overline{p}^A_{0,t} &= \frac{p^1_{0,t} + \cdots + p^n_{0,t} + p^{n+1}_{0,t}}{n+1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p^i_{0,t} + p^{n+1}_{0,t}}{n+1} = \\ &= \tfrac{n \times \overline{p}_{0,t} + p^{n+1}_{0,t}}{n+1} \end{aligned}$$

Note que essa última expressão é uma média aritmética ponderada dos preços médios (de n produtos e de 1 produto), tendo como ponderação o número de produtos que entra em cada média.

36. O índice baseado em n produtos é:

$$\overline{p}^G_{0,t} = \sqrt[n]{p^1_{0,t} \times p^2_{0,t} \cdots \times p^n_{0,t}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} p^i_{0,t}} \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n} p^i_{0,t} = \left(\overline{p}^G_{0,t}\right)^n$$

Ao acrescentar um produto, temos que:

$$\begin{aligned} \overline{p}^G_{0,t} &= \sqrt[n+1]{p^1_{0,t} \times p^2_{0,t} \cdots \times p^n_{0,t} \times p^{n+1}_{0,t}} = \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n} p^i_{0,t} \times p^{n+1}_{o,t}} = \\ &= \sqrt[n+1]{\left(\overline{p}^G_{0,t}\right)^n \times p^{n+1}_{0,t}} = \left(\overline{p}^G_{0,t}\right)^{\frac{n}{n+1}} \times \left(p^{n+1}_{0,t}\right)^{\frac{1}{n+1}} \end{aligned}$$

Note que essa última expressão é a média geométrica ponderada dos preços médios (de n produtos e de 1 produto, respectivamente), tendo como ponderação o número de produtos que entra em cada média.

37. (a) Os pesos dos índices de Laspeyres e Paasche são definidos na época base e na época atual, respectivamente. Nas tabelas a seguir temos os pesos em todos os períodos.

Produto	$t = 0$			
	Preço	Quant.	Valor	w^i
batata	65	5,0	325	$325/3730 = 0,08713$
carne	560	1,5	840	$840/3730 = 0,22520$
óleo	155	2,0	310	$310/3730 = 0,08311$
queijo	350	0,5	175	$175/3730 = 0,04692$
cerveja	95	12,0	1140	$1140/3730 = 0,30563$
vinho	470	2,0	940	$940/3730 = 0,25201$
SOMA			3730	1

Produto	$t = 1$			
	Preço	Quant.	Valor	w^i
batata	90	2,00	180	$180/5755 = 0,03128$
carne	795	2,00	1590	$1590/5755 = 0,27628$
óleo	205	5,00	1025	$1025/5755 = 0,17811$
queijo	500	0,25	125	$125/5755 = 0,02172$
cerveja	130	6,00	780	$780/5755 = 0,13553$
vinho	685	3,00	2055	$2055/5755 = 0,35708$
SOMA			5755	1

Produto	$t = 2$			
	Preço	quant.	Valor	w^i
batata	120	3	360	$360/7892 = 0,04562$
carne	999	3	2997	$2997/7892 = 0,37975$
óleo	280	1	280	$280/7892 = 0,03548$
queijo	690	1	690	$690/7892 = 0,08743$
cerveja	150	18	2700	$2700/7892 = 0,34212$
vinho	865	1	865	$865/7892 = 0,10960$
SOMA			7892	1

(b) Como

$$L^p_{0,t} = \sum_{i=1}^{n} w_0^i p_{0,t}^i = \sum_{i=1}^{n} w_0^i \frac{p_t}{p_0} \qquad L^q_{0,t} = \sum_{i=1}^{n} w_0^i q_{0,t}^i = \sum_{i=1}^{n} w_0^i \frac{q_t}{q_0}$$

então os índices com base $t = 0$ são:

$$\begin{aligned} L^P_{0,1} &= 0,08713 \times \tfrac{90}{65} + 0,2252 \times \tfrac{795}{560} + 0,08311 \times \tfrac{205}{155} + 0,04692 \times \tfrac{500}{350} + \\ &\quad 0,30563 \times \tfrac{130}{95} + 0,25201 \times \tfrac{685}{470} \\ &= \mathbf{1,4028} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^P_{0,2} &= 0,08713 \times \tfrac{120}{65} + 0,2252 \times \tfrac{999}{560} + 0,08311 \times \tfrac{280}{155} + 0,04692 \times \tfrac{690}{350} \\ &\quad +0,30563 \times \tfrac{150}{95} + 0,25201 \times \tfrac{865}{470} \\ &= \mathbf{1,7516} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^Q_{0,1} &= 0,08713 \times \tfrac{2}{5} + 0,2252 \times \tfrac{2}{1,5} + 0,08311 \times \tfrac{5}{2} + 0,04692 \times \tfrac{0,25}{0,5} + \\ &\quad 0,30563 \times \tfrac{6}{12} + 0,25201 \times \tfrac{3}{2} \\ &= \mathbf{1,0972} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^Q_{0,2} &= 0,08713 \times \tfrac{3}{5} + 0,2252 \times \tfrac{3}{1,5} + 0,08311 \times \tfrac{1}{2} + 0,04692 \times \tfrac{1}{0,5} \\ &\quad +0,30563 \times \tfrac{18}{12} + 0,25201 \times \tfrac{1}{2} \\ &= \mathbf{1,2225} \end{aligned}$$

Os índices com base $t = 1$ são:

$$\begin{aligned} L^P_{1,0} &= 0,03128 \times \tfrac{65}{90} + 0,27628 \times \tfrac{560}{795} + 0,17811 \times \tfrac{155}{205} + 0,02172 \times \tfrac{350}{500} \\ &\quad +0,13553 \times \tfrac{95}{130} + 0,35708 \times \tfrac{470}{685} \\ &= \mathbf{0,71112} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^P_{1,2} &= 0,03128 \times \tfrac{120}{90} + 0,27628 \times \tfrac{999}{795} + 0,17811 \times \tfrac{280}{205} + 0,02172 \times \tfrac{690}{500} \\ &\quad +0,13553 \times \tfrac{150}{130} + 0,35708 \times \tfrac{865}{685} \\ &= \mathbf{1,2694} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^Q_{1,0} &= 0,03128 \times \tfrac{5}{2} + 0,27628 \times \tfrac{1,5}{2} + 0,17811 \times \tfrac{2}{5} + 0,02172 \times \tfrac{0,5}{0,25} \\ &\quad +0,13553 \times \tfrac{12}{6} + 0,35708 \times \tfrac{2}{3} \\ &= \mathbf{0,9092} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^Q_{1,2} &= 0,03128 \times \tfrac{3}{2} + 0,276281 \times \tfrac{3}{2} + 0,178106 \times \tfrac{1}{5} + 0,02172 \times \tfrac{1}{0,25} \\ &\quad +0,135534 \times \tfrac{18}{6} + 0,357081 \times \tfrac{1}{3} \\ &= \mathbf{1,1095} \end{aligned}$$

Os índices com base $t = 2$ são:

$$\begin{aligned} L^P_{2,0} &= 0,04562 \times \tfrac{65}{120} + 0,37975 \times \tfrac{560}{999} + 0,03548 \times \tfrac{155}{280} + 0,08743 \times \tfrac{350}{690} \\ &\quad +0,34212 \times \tfrac{95}{150} + 0,1096 \times \tfrac{470}{865} \\ &= \mathbf{0,5778} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^P_{2,1} &= 0,04562 \times \tfrac{90}{120} + 0,37975 \times \tfrac{795}{999} + 0,03548 \times \tfrac{205}{280} + 0,08743 \times \tfrac{500}{690} \\ &\quad +0,34212 \times \tfrac{130}{150} + 0,1096 \times \tfrac{685}{865} \\ &= \mathbf{0,8091} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^Q_{2,0} &= 0,04562 \times \tfrac{5}{3} + 0,37975 \times \tfrac{1,5}{3} + 0,03548 \times \tfrac{2}{1} + 0,08743 \times \tfrac{0,5}{1} \\ &\quad +0,34212 \times \tfrac{12}{18} + 0,1096 \times \tfrac{2}{1} \\ &= \mathbf{0,8279} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^Q_{2,1} &= 0,04562 \times \tfrac{2}{3} + 0,37975 \times \tfrac{2}{3} + 0,035479 \times \tfrac{5}{1} + 0,08743 \times \tfrac{0,25}{1} \\ &\quad +0,34212 \times \tfrac{6}{18} + 0,1096 \times \tfrac{3}{1} \\ &= \mathbf{0,9257} \end{aligned}$$

Os índices de Paasche são dados por

$$P^P_{0,t} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w^i_t \frac{1}{p_{0,t}}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w^i_t \frac{p_0}{p_t}} \qquad P^Q_{0,t} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w^i_t \frac{1}{q_{0,t}}} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w^i_t \frac{q_0}{q_t}}$$

Então, os índices com base $t = 0$ são:

$$P^P_{0,1} = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} 0,03128 \times \frac{65}{90} + 0,27628 \times \frac{560}{795} + 0,17811 \times \frac{155}{205} \\ +0,02172 \times \frac{350}{500} + 0,13553 \times \frac{95}{130} + 0,35708 \times \frac{470}{685} \end{array} \right)} = \mathbf{1,4062}$$

$$P^P_{0,2} = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} 0,04562 \times \frac{65}{120} + 0,37975 \times \frac{560}{999} + 0,03548 \times \frac{155}{280} \\ +0,08743 \times \frac{350}{690} + 0,34212 \times \frac{95}{150} + 0,1096 \times \frac{470}{865} \end{array}\right)} = \mathbf{1,7307}$$

$$P^Q_{0,1} = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} 0,03128 \times \frac{5}{2} + 0,27628 \times \frac{1,5}{2} + 0,17811 \times \frac{2}{5} \\ +0,02172 \times \frac{0,5}{0,25} + 0,13553 \times \frac{12}{6} + 0,35708 \times \frac{2}{3} \end{array}\right)} = \mathbf{1,0999}$$

$$P^Q_{0,2} = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} 0,04562 \times \frac{5}{3} + 0,37975 \times \frac{1,5}{3} + 0,03548 \times \frac{2}{1} \\ +0,08743 \times \frac{0,5}{1} + 0,34212 \times \frac{12}{18} + 0,1096 \times \frac{2}{1} \end{array}\right)} = \mathbf{1,2079}$$

Os índices de Paasche com base $t = 1$ são:

$$P^P_{1,0} = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} 0,08713 \times \frac{90}{65} + 0,2252 \times \frac{795}{560} + 0,08311 \times \frac{205}{155} \\ +0,04692 \times \frac{500}{350} + 0,30563 \times \frac{130}{95} + 0,25201 \times \frac{685}{470} \end{array}\right)} = \mathbf{0,7129}$$

$$P^P_{1,2} = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} 0,04562 \times \frac{90}{120} + 0,37975 \times \frac{795}{999} + 0,03548 \times \frac{205}{280} \\ +0,08743 \times \frac{500}{690} + 0,34212 \times \frac{130}{150} + 0,1096 \times \frac{685}{865} \end{array}\right)} = \mathbf{1,236}$$

$$P^Q_{1,0} = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} 0,08713 \times \frac{2}{5} + 0,2252 \times \frac{2}{1,5} + 0,08311 \times \frac{5}{2} \\ +0,04692 \times \frac{0,25}{0,5} + 0,30563 \times \frac{6}{12} + 0,25201 \times \frac{3}{2} \end{array}\right)} = \mathbf{0,9114}$$

$$P^Q_{1,2} = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} 0,04562 \times \frac{2}{3} + 0,37975 \times \frac{2}{3} + 0,035479 \times \frac{5}{1} \\ +0,08743 \times \frac{0,25}{1} + 0,34212 \times \frac{6}{18} + 0,1096 \times \frac{3}{1} \end{array}\right)} = \mathbf{1,080}$$

Os índices de Paasche com base $t = 2$ são:

$$P^P_{2,0} = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} 0,08713 \times \frac{120}{65} + 0,2252 \times \frac{999}{560} + 0,08311 \times \frac{280}{155} \\ +0,04692 \times \frac{690}{350} + 0,30563 \times \frac{150}{95} + 0,25201 \times \frac{865}{470} \end{array}\right)} = \mathbf{0,5709}$$

$$P^P_{2,1} = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} 0,03128 \times \frac{120}{90} + 0,27628 \times \frac{999}{795} + 0,17811 \times \frac{280}{205} \\ +0,02172 \times \frac{690}{500} + 0,13553 \times \frac{150}{130} + 0,35708 \times \frac{865}{685} \end{array}\right)} = \mathbf{0,7878}$$

$$P^Q_{2,0} = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} 0,087131 \times \frac{3}{5} + 0,2252 \times \frac{3}{1,5} + 0,083110 \times \frac{1}{2} \\ +0,046917 \times \frac{1}{0,5} + 0,30563 \times \frac{18}{12} + 0,25201 \times \frac{1}{2} \end{array}\right)} = \mathbf{0,81798}$$

$$P^Q_{2,1} = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} 0,03128 \times \frac{3}{2} + 0,27628 \times \frac{3}{2} + 0,17811 \times \frac{1}{5} \\ +0,02172 \times \frac{1}{0,25} + 0,13553 \times \frac{18}{6} + 0,35708 \times \frac{1}{3} \end{array}\right)} = \mathbf{0,9013}$$

(c) Trabalhando com os índices de preço temos que:

$$P^P_{0,1} \times P^P_{1,2} = 1,4062 \times 1,236 = 1,7381 \neq 1,7307 = P^P_{0,2}$$

Logo, o índice de Paasche não satisfaz a propriedade circular. Analogamente,

$$L^P_{0,1} \times L^P_{1,2} = 1,4028 \times 1,2694 = 1,7807 \neq 1,7516 \neq L^P_{0,2}$$

ou seja,o índice de Laspeyres também não satisfaz a propriedade circular.
Para satisfazer a propriedade da reversão no tempo, teríamos que ter

$$\begin{aligned} L_{0,t} &= \tfrac{1}{L_{t,0}} \\ P_{0,t} &= \tfrac{1}{P_{t,0}} \end{aligned}$$

mas

$$L^P_{0,2} = 1,7516 \neq \frac{1}{L^P_{2,0}} = \frac{1}{0,57780} = 1,7307$$

e

$$P^P_{0,2} = 1,7298 \neq \frac{1}{P^P_{2,0}} = \frac{1}{0,5709} = 1,7516$$

Note que

$$\frac{1}{L^P_{0,t}} = \frac{1}{\dfrac{\sum q^i_0 p^i_t}{\sum q^i_0 p^i_0}} = \frac{\sum q^i_0 p^i_0}{\sum q^i_0 p^i_t} = P^P_{t,0}$$

e

$$\frac{1}{P^P_{0,t}} = \frac{1}{\dfrac{\sum q^i_t p^i_t}{\sum q^i_t p^i_0}} = \frac{\sum q^i_t p^i_0}{\sum q^i_t p^i_t} = L^P_{t,0}$$

(d)

$$V_{0,t} = \frac{\sum p^i_t q^i_t}{\sum p^i_0 q^i_0}$$

Base $t = 0$:

$$V_{0,1} = \frac{(90 \times 2) + (795 \times 2) + (205 \times 5) + (500 \times 0,25) + (130 \times 6) + (685 \times 3)}{(65 \times 5) + (560 \times 1,5) + (155 \times 2) + (350 \times 0,5) + (95 \times 12) + (470 \times 2)} = \mathbf{1,5429}$$

$$V_{0,2} = \frac{(120 \times 3) + (999 \times 3) + (280 \times 1) + (690 \times 1) + (150 \times 18) + (865 \times 1)}{(65 \times 5) + (560 \times 1,5) + (155 \times 2) + (350 \times 0,5) + (95 \times 12) + (470 \times 2)} = \mathbf{2,1158}$$

Base $t = 1$:

$$V_{1,0} = \frac{(65 \times 5) + (560 \times 1,5) + (155 \times 2) + (350 \times 0,5) + (95 \times 12) + (470 \times 2)}{(90 \times 2) + (795 \times 2) + (205 \times 5) + (500 \times 0,25) + (130 \times 6) + (685 \times 3)} = \mathbf{0,64813}$$

$$V_{1,2} = \frac{(120 \times 3) + (999 \times 3) + (280 \times 1) + (690 \times 1) + (150 \times 18) + (865 \times 1)}{(90 \times 2) + (795 \times 2) + (205 \times 5) + (500 \times 0,25) + (130 \times 6) + (685 \times 3)} = \mathbf{1,3713}$$

Base $t = 2$:

$$V_{2,0} = \frac{(65 \times 5) + (560 \times 1,5) + (155 \times 2) + (350 \times 0,5) + (95 \times 12) + (470 \times 2)}{(120 \times 3) + (999 \times 3) + (280 \times 1) + (690 \times 1) + (150 \times 18) + (865 \times 1)} = \mathbf{0,47263}$$

$$V_{2,1} = \frac{(90 \times 2) + (795 \times 2) + (205 \times 5) + (500 \times 0,25) + (130 \times 6) + (685 \times 3)}{(120 \times 3) + (999 \times 3) + (280 \times 1) + (690 \times 1) + (150 \times 18) + (865 \times 1)} = \mathbf{0,72922}$$

(e)

$$L_{0,1}^P \times L_{0,1}^Q = 1,4028 \times 1,0972 = 1,5392 \neq 1,5429 = V_{0,1}$$

$$P_{0,1}^P \times P_{0,1}^Q = 1,4062 \times 1,0999 = 1,1499 \neq 1,5429 = V_{0,1}$$

Logo, Laspeyres e Paasche não satisfazem a propriedade da decomposição das causas.

(f)

$$L_{0,1}^P \times P_{0,1}^Q = 1,4028 \times 1,0999 = 1,5429 = V_{0,1}$$

$$L_{0,1}^Q \times P_{0,1}^P = 1,0972 \times 1,4062 = 1,5429 = V_{0,1}$$

38. Época base

	2001					
	p_t	p_t/p_{10}	q_t	q_t/q_{01}	v_t	v_t
A	5,0	1	100	1	500	0,136
B	10,0	1	50	1	500	0,136
C	3,5	1	120	1	420	0,114
D	4,1	1	200	1	820	0,223
E	8,0	1	180	1	1440	0,391
SOMA					3680	1

Época atual:

	2002						2003					
	p_t	p_t/p_{01}	q_t	q_t/q_{01}	v_t	v_t	p_t	p_t/p_{01}	q_t	q_t/q_{10}	v_t	v_t
A	6,0	1,200	100	1,000	600	0,101	10,0	2,000	120	1,200	1200	0,169
B	15,0	1,500	60	1,200	900	0,152	15,0	1,500	70	1,400	1050	0,148
C	5,8	1,657	130	1,083	754	0,127	6,6	1,886	110	0,917	726	0,102
D	6,0	1,463	250	1,250	1500	0,254	7,0	1,707	260	1,300	1820	0,256
E	10,8	1,350	200	1,111	2160	0,365	11,5	1,438	200	1,111	2300	0,324
SOMA					5914	1					7096	1

(a) Índice de Sauerbeck: média aritmética dos relativos

$$\overline{p}_{01,02} = S_{01,02}^P = \frac{1,2 + 1,5 + 1,657 + 1,463 + 1,35}{5} = 1,434$$

$$\overline{p}_{01,03} = S_{01,03}^P = \frac{2 + 1,5 + 1,886 + 1,707 + 1,438}{5} = 1,7062$$

$$\overline{q}_{01,02} = S_{01,02}^Q = \frac{1 + 1,2 + 1,083 + 1,250 + 1,111}{5} = 1,1288$$

$$\overline{q}_{01,03} = S_{01,03}^Q = \frac{1,2 + 1,4 + 0,917 + 1,3 + 1,111}{5} = 1,1856$$

(b) Laspeyres: média aritmética ponderada na época base

$$\begin{aligned} L_{01,02}^P &= 0,136 \times 1,2 + 0,136 \times 1,5 + 0,114 \times 1,657 + 0,223 \times 1,463 + 0,391 \times 1,35 \\ &= 1,4102 \end{aligned}$$

$$L^P_{01,03} = 0,136 \times 2 + 0,136 \times 1,5 + 0,114 \times 1,886 + 0,223 \times 1,707 + 0,391 \times 1,438 = 1,6339$$

$$L^Q_{01,02} = 0,136 \times 1 + 0,136 \times 1,2 + 0,114 \times 1,083 + 0,223 \times 1,25 + 0,391 \times 1,111 = 1,1358$$

$$L^Q_{01,03} = 0,136 \times 1,2 + 0,136 \times 1,4 + 0,114 \times 0,917 + 0,223 \times 1,3 + 0,391 \times 1,111 = 1,1824$$

(c) Paasche: média harmônica ponderada na época atual

$$P^P_{01,02} = \frac{1}{0,101\times\frac{1}{1,2}+0,152\times\frac{1}{1,5}+0,127\times\frac{1}{1,657}+0,254\times\frac{1}{1,463}+0,365\times\frac{1}{1,35}} = 1,4162$$

$$P^P_{01,03} = \frac{1}{0,169\times\frac{1}{2}+0,148\times\frac{1}{1,5}+0,102\times\frac{1}{1,886}+0,256\times\frac{1}{1,707}+0,324\times\frac{1}{1,438}} = 1,6326$$

$$P^Q_{01,02} = \frac{1}{0,101\times\frac{1}{1}+0,152\times\frac{1}{1,2}+0,127\times\frac{1}{1,083}+0,254\times\frac{1}{1,25}+0,365\times\frac{1}{1,111}} = 1,1407$$

$$P^Q_{01,03} = \frac{1}{0,169\times\frac{1}{1,2}+0,148\times\frac{1}{1,4}+0,102\times\frac{1}{0,917}+0,256\times\frac{1}{1,3}+0,324\times\frac{1}{1,111}} = 1,1816$$

Note que os índices de Laspeyres e Paasche podem ser calculados, de forma mais fácil e precisa, pela fórmula alternativa:

$$L^P_{01,02} = \frac{100 \times 6 + 50 \times 15 + 120 \times 5,8 + 200 \times 6 + 180 \times 10,8}{3680} = \frac{5190}{3680} = 1,4103$$

$$L^P_{01,03} = \frac{100 \times 10 + 50 \times 15 + 120 \times 6,6 + 200 \times 7 + 180 \times 11,5}{3680} = \frac{6012}{3680} = 1,6337$$

$$L^Q_{01,02} = \frac{100 \times 5 + 60 \times 10 + 130 \times 3,5 + 250 \times 4,1 + 200 \times 8}{3680} = \frac{4180}{3680} = 1,1359$$

$$L^Q_{01,03} = \frac{120 \times 5 + 70 \times 10 + 110 \times 3,5 + 260 \times 4,1 + 200 \times 8}{3680} = \frac{4351}{3680} = 1,1823$$

$$P^P_{01,02} = \frac{5914}{100 \times 5 + 60 \times 10 + 130 \times 3,5 + 250 \times 4,1 + 200 \times 8} = \frac{5914}{4180} = 1,4148$$

$$P^P_{01,03} = \frac{7096}{120 \times 5 + 70 \times 10 + 110 \times 3,5 + 260 \times 4,1 + 200 \times 8} = \frac{7096}{4351} = 1,6309$$

$$P^Q_{01,02} = \frac{5914}{6 \times 100 + 15 \times 50 + 5,8 \times 120 + 6 \times 200 + 10,8 \times 180} = \frac{5914}{5190} = 1,1395$$

$$P^Q_{01,03} = \frac{7096}{10 \times 100 + 15 \times 50 + 6,6 \times 120 + 7 \times 200 + 11,5 \times 180} = \frac{7096}{6012} = 1,1803$$

As diferenças são maiores nos índices de Paasche, porque o cálculo desses índices pela média harmônica ponderada envolve mais divisões: divisões para calcular os pesos e divisões para calcular o inverso dos relativos. É claro que, em vez de calcularmos os inversos dos relativos $1/p_{0,t}$, poderíamos ter calculado $p_{t,0}$ e isso poderia melhorar um pouco os arredondamentos, uma vez que neste caso faríamos apenas uma divisão e, portanto, apenas um arredondamento.

39. Sabemos que

$$L^Q \times P^P = L^P \times P^Q = I^V$$

Logo,

$$V_{0,t} = 1,2 \times 0,8 = 0,96 \text{ ou queda de } 4\%$$

40. Sabemos que

$$V_{0,t} = L^P_{0,t} \times P^Q_{0,t} \Rightarrow P^Q_{0,t} = \frac{V_{0,t}}{L^P_{0,t}} = \frac{108}{102} \times 100 = 105,88$$

41. Como

$$F_{0,t} = \sqrt{L_{0,t} \times P_{0,t}}$$

usando os resultados do exercício 37, obtemos:

$$\begin{aligned} F^P_{0,1} &= \sqrt{1,4028 \times 1,4062} = 1,4045 \\ F^P_{0,2} &= \sqrt{1,7516 \times 1,7298} = 1,7407 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^Q_{0,1} &= \sqrt{1,0972 \times 1,0999} = 1,0985 \\ F^Q_{0,2} &= \sqrt{1,2225 \times 1,2079} = 1,2152 \end{aligned}$$

42. Como

$$\begin{aligned} M^P_{0,t} &= \frac{\sum_i (q_0^i + q_t^i) p_t^i}{\sum_i (q_0^i + q_t^i) p_0^i} \\ M^Q_{0,t} &= \frac{\sum_i (p_0 + p_t) q_t}{\sum_i (p_0 + p_t) q_0} \end{aligned}$$

então:

$$M^P_{01,02} = \frac{\left[\begin{array}{c}(100+100)\times 6 + (50+60)\times 15 + (120+130)\times 5,8 \\ +(200+250)\times 6 + (180+200)\times 10,8\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{c}(100+100)\times 5 + (50+60)\times 10 + (120+130)\times 3,5 \\ +(200+250)\times 4,1 + (180+200)\times 8\end{array}\right]} = \frac{11104}{7860} = 1,4127$$

$$M^P_{01,03} = \frac{\left[\begin{array}{c}(100+120)\times 10 + (50+70)\times 15 + (120+110)\times 6,6 \\ +(200+260)\times 7 + (180+200)\times 11,5\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{c}(100+120)\times 5 + (50+70)\times 10 + (120+110)\times 3,5 \\ +(200+260)\times 4,1 + (180+200)\times 8\end{array}\right]} = \frac{13108}{8031} = 1,6322$$

$$M^Q_{01,02} = \frac{\begin{bmatrix} (5+6)\times 100 + (10+15)\times 60 + (3,5+5,8)\times 130 \\ +(4,1+6)\times 250 + (8+10,8)\times 200 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (5+6)\times 100 + (10+15)\times 50 + (3,5+5,8)\times 120 \\ +(4,1+6)\times 200 + (8+10,8)\times 180 \end{bmatrix}} = \frac{10094}{8870} = 1,1380$$

$$M^Q_{01,03} = \frac{\begin{bmatrix} (5+10)\times 120 + (10+15)\times 70 + (3,5+6,6)\times 110 \\ +(4,1+7)\times 260 + (8+11,5)\times 200 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (5+10)\times 100 + (10+15)\times 50 + (3,5+6,6)\times 120 \\ +(4,1+7)\times 200 + (8+11,5)\times 180 \end{bmatrix}} = \frac{11447}{9692} = 1,1811$$

Como

$$\begin{aligned} D^P_{0,t} &= \textstyle\prod_{i=1}^n \left(\frac{p_t}{p_0}\right)^{w_0} \\ D^Q_{0,t} &= \textstyle\prod_{i=1}^n \left(\frac{q_t}{q_0}\right)^{w_0} \end{aligned}$$

então

$$D^P_{01,02} = \left(\frac{6}{5}\right)^{0,136} \times \left(\frac{15}{10}\right)^{0,136} \times \left(\frac{5,8}{3,5}\right)^{0,114} \times \left(\frac{6}{4,1}\right)^{0,223} \times \left(\frac{10,8}{8}\right)^{0,391} = 1,4046$$

$$D^P_{01,03} = \left(\frac{10}{5}\right)^{0,136} \times \left(\frac{15}{10}\right)^{0,136} \times \left(\frac{6,6}{3,5}\right)^{0,114} \times \left(\frac{7}{4,1}\right)^{0,223} \times \left(\frac{11,5}{8}\right)^{0,391} = 1,6208$$

$$D^Q_{01,02} = \left(\frac{100}{100}\right)^{0,136} \times \left(\frac{60}{50}\right)^{0,136} \times \left(\frac{130}{120}\right)^{0,114} \times \left(\frac{250}{200}\right)^{0,223} \times \left(\frac{200}{180}\right)^{0,391} = 1,133$$

$$D^Q_{01,03} = \left(\frac{120}{100}\right)^{0,136} \times \left(\frac{70}{50}\right)^{0,136} \times \left(\frac{110}{120}\right)^{0,114} \times \left(\frac{260}{200}\right)^{0,223} \times \left(\frac{200}{180}\right)^{0,391} = 1,1739$$

43. Como $F_{0,t} = \sqrt{L_{0,t} \times P_{0,t}}$, se $L_{0,t} = P_{0,t}$, então

$$\begin{aligned} F_{0,t} &= \sqrt{L_{0,t} \times L_{0,t}} = \sqrt{(L_{0,t})^2} = L_{0,t} \\ &= \sqrt{P_{0,t} \times P_{0,t}} = \sqrt{(P_{0,t})^2} = P_{0,t} \end{aligned}$$

Logo,

$$F_{0,t} = P_{0,t} = L_{0,t}$$

Definindo

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{i=1}^n q_0^i p_t^i & Y_1 &= \sum_{i=1}^n q_t^i p_t^i \\ X_2 &= \sum_{i=1}^n q_0^i p_0^i & Y_2 &= \sum_{i=1}^n q_t^i p_0^i \end{aligned}$$

temos que

$$L^p_{0,t} = \frac{X_1}{X_2} \qquad P^p_{0,t} = \frac{Y_1}{Y_2}$$

Se $L = P$, então

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} \Rightarrow \frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{X_1+Y_1}{X_2+Y_2} \Rightarrow$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_0^i p_t^i + \sum_{i=1}^{n} q_t^i p_t^i}{\sum_{i=1}^{n} q_0^i p_0^i + \sum_{i=1}^{n} q_t^i p_0^i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (q_0^i + q_t^i) p_t^i}{\sum_{i=1}^{n} (q_0^i + q_t^i) p_0^i} \Rightarrow$$

$$L_{0,t}^p = P_{0,t}^p = M_{0,t}^p$$

44. Cálculo dos pesos

Produto	Preço		Quantidade		Valor	w_0
	1990	1994	1990	1994	1990	1990
papel	7,00	14,80	5,0	8,0	$7 \times 5 = 35,0$	$35/175,43 = 0,200$
almofada	3,00	3,50	10,0	16,0	$3 \times 10 = 30,0$	$30/175,43 = 0,171$
caneta	6,00	6,80	8,0	12,0	$6 \times 8 = 48,0$	$48/175,43 = 0,274$
lápis	4,20	4,90	5,0	6,0	$4,2 \times 5 = 21,0$	$21/175,43 = 0,200$
clipes	7,10	9,00	0,3	0,4	$7,1 \times 0,3 = 2,13$	$2,13/175,43 = 0,012$
borracha	2,80	7,90	4,0	3,0	$2,8 \times 4 = 11,2$	$11,2/175,43 = 0,064$
cola	3,70	5,00	3,0	4,0	$3,7 \times 3 = 11,1$	$11,1/175,43 = 0,063$
tinta	6,80	7,70	2,5	5,0	$6,8 \times 2,5 = 17,0$	$17/175,43 = 0,097$
SOMA					175,43	1,000

Laspeyres::

$$L_{90,94}^P = \frac{14{,}8\times5+3{,}5\times10+6{,}8\times8+4{,}9\times5+9\times0{,}3+7{,}9\times4+5\times3+7{,}7\times2{,}5}{7\times5+3\times10+6\times8+4{,}2\times5+7{,}1\times0{,}3+2{,}8\times4+3{,}7\times3+6{,}8\times2{,}5} = 1,46184$$

$$L_{90,94}^Q = \frac{8\times7+16\times3+12\times6+6\times4{,}2+0{,}4\times7{,}1+3\times2{,}8+4\times3{,}7+5\times6{,}8}{7\times5+3\times10+6\times8+4{,}2\times5+7{,}1\times0{,}3+2{,}8\times4+3{,}7\times3+6{,}8\times2{,}5} = 1,48914$$

Paasche:

$$P_{90,94}^P = \frac{8\times14{,}8+16\times3{,}5+12\times6{,}8+6\times4{,}9+0{,}4\times9+3\times7{,}9+4\times5+5\times7{,}7}{8\times7+16\times3+12\times6+6\times4{,}2+0{,}4\times7{,}1+3\times2{,}8+4\times3{,}7+5\times6{,}8} = 1,42092$$

$$P_{90,94}^Q = \frac{8\times14{,}8+16\times3{,}5+12\times6{,}8+6\times4{,}9+0{,}4\times9+3\times7{,}9+4\times5+5\times7{,}7}{14{,}8\times5+3{,}5\times10+6{,}8\times8+4{,}9\times5+9\times0{,}3+7{,}9\times4+5\times3+7{,}7\times2{,}5} = 1,44746$$

Fisher:

$$F_{90,94}^P = \sqrt{1,46184 \times 1,42092} = 1,44123$$
$$F_{90,94}^Q = \sqrt{1,48914 \times 1,44746} = 1,46815$$

$$M^P_{90,94} = \frac{\left[\begin{array}{c}(5,0+8,0)\times 14,80+(10,0+16,0)\times 3,50+(8,0+12,0)\times 6,8\\ +(5,0+6,0)\times 4,9+(0,3+0,4)\times 9,00+(4,0+3,0)\times 7,90\\ +(3,0+4,0)\times 5,00+(2,5+5,0)\times 7,70\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{c}(5,0+8,0)\times 7,00+(10,0+16,0)\times 3,00+(8,0+12,0)\times 6,00\\ +(5,0+6,0)\times 4,20+(0,3+0,4)\times 7,10+(4,0+3,0)\times 2,80\\ +(3,0+4,0)\times 3,70+(2,5+5,0)\times 6,80\end{array}\right]} = 1,4374$$

$$M^Q_{90,94} = \frac{\left[\begin{array}{c}(7,00+14,80)\times 8,0+(3,00+3,50)\times 16,0+(6,00+6,80)\times 12,0\\ +(4,20+4,90)\times 6,0+(7,10+9,00)\times 0,4+(2,80+7,90)\times 3,0\\ +(3,70+5,00)\times 4,0+(6,80+7,70)\times 5,0\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{c}(7,00+14,80)\times 5,0+(3,00+3,50)\times 10,0+(6,00+6,80)\times 8,0\\ +(4,20+4,90)\times 5,0+(7,10+9,00)\times 0,3+(2,80+7,90)\times 4,0\\ +(3,70+5,00)\times 3,0+(6,80+7,70)\times 2,5\end{array}\right]} = 1,4644$$

$$\begin{aligned} D^P_{90,94} &= \left(\frac{14,80}{7,00}\right)^{0,200}\times\left(\frac{3,50}{3,00}\right)^{0,171}\times\left(\frac{6,80}{6,00}\right)^{0,274}\times\left(\frac{4,90}{4,20}\right)^{0,200}\\ &\quad\times\left(\frac{9,00}{7,10}\right)^{0,012}\times\left(\frac{7,90}{2,80}\right)^{0,064}\times\left(\frac{5,00}{3,70}\right)^{0,063}\times\left(\frac{7,70}{6,80}\right)^{0,097}\\ &= 1,407\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^Q_{90,94} &= \left(\frac{8,0}{5,0}\right)^{0,200}\times\left(\frac{16,0}{10,0}\right)^{0,171}\times\left(\frac{12,0}{8,0}\right)^{0,274}\times\left(\frac{6,0}{5,0}\right)^{0,200}\\ &\quad\times\left(\frac{0,4}{0,3}\right)^{0,012}\times\left(\frac{3,0}{4,0}\right)^{0,064}\times\left(\frac{4,0}{3,0}\right)^{0,063}\times\left(\frac{5,0}{2,5}\right)^{0,097}\\ &= 1,4804\end{aligned}$$

45. (a)

Data	1980=1		1986=1	
	Frutas	Legumes	Frutas	Legumes
1986	113,3	111,9	$113,3/113,3 = 1,0000$	$111,9/111,9 = 1,0000$
1987	116,9	117,5	$116,9/113,3 = 1,0318$	$117,5/111,9 = 1,0500$
1988	118,7	123,3	$118,7/113,3 = 1,0477$	$123,3/111,9 = 1,1019$
1989	129,6	140,6	$129,6/113,3 = 1,1439$	$140,6/111,9 = 1,2565$
1990	154,0	163,6	$154,0/113,3 = 1,3592$	$163,6/111,9 = 1,4620$
1991	165,6	171,9	$165,6/113,3 = 1,4616$	$171,9/111,9 = 1,5362$
1992	190,5	193,1	$190,5/113,3 = 1,6814$	$193,1/111,9 = 1,7256$
1993	195,2	198,6	$195,2/113,3 = 1,7229$	$198,6/111,9 = 1,7748$

(b)

Data	1980=1		1989=1,0	
	Frutas	Legumes	Frutas	Legumes
1986	113,3	111,9	$113,3/129,6 = 0,8742$	$111,9/140,6 = 0,7959$
1987	116,9	117,5	$116,9/129,6 = 0,9020$	$117,5/140,6 = 0,8357$
1988	118,7	123,3	$118,7/129,6 = 0,9159$	$123,3/140,6 = 0,8770$
1989	129,6	140,6	$129,6/129,6 = 1,0000$	$140,6/140,6 = 1,0000$
1990	154,0	163,6	$154,0/129,6 = 1,1883$	$163,6/140,6 = 1,1636$
1991	165,6	171,9	$165,6/129,6 = 1,2778$	$171,9/140,6 = 1,2226$
1992	190,5	193,1	$190,5/129,6 = 1,4699$	$193,1/140,6 = 1,3734$
1993	195,2	198,6	$195,2/129,6 = 1,5062$	$198,6/140,6 = 1,4125$

(c)

Data	1980=1		1992=1,0	
	Frutas	Legumes	Frutas	Legumes
1986	113,3	111,9	$113,3/190,5 = 0,5948$	$111,9/193,1 = 0,5795$
1987	116,9	117,5	$116,9/1905 = 0,6137$	$117,5/193,1 = 0,6085$
1988	118,7	123,3	$118,7/190,5 = 0,6231$	$123,3/193,1 = 0,6385$
1989	129,6	140,6	$129,6/190,5 = 0,6803$	$140,6/193,1 = 0,7281$
1990	154,0	163,6	$154,0/190,5 = 0,8084$	$163,6/193,1 = 0,8472$
1991	165,6	171,9	$165,6/190,5 = 0,8693$	$171,9/193,1 = 0,8902$
1992	190,5	193,1	$190,5/190,5 = 1,0000$	$193,1/193,1 = 1,0000$
1993	195,2	198,6	$195,2/190,5 = 1,0247$	$198,6/193,1 = 1,0285$

46. Se o índice dado é do tipo $\frac{t}{t+1}$, então é base móvel. Vamos transformá–lo em base fixa em t_0.

t	base móvel	base fixa ($t_0 = 1$)
0		$1,0000$
1	$1,1912$	$1,1912$
2	$1,1616$	$1,1912 \times 1,1616 = 1,3837$
3	$1,1802$	$1,3837 \times 1,1802 = 1,6330$
4	$1,2175$	$1,633 \times 1,2175 = 1,9882$

47. (a)

			Índice 1980=1		
Ano	Preço	Quant.	Preço	Quantidade	Valor
1980	471	94	$1,0$	$1,0$	$1 \times 1 = 1,0$
1981	518	99	$1,0998$	$1,0532$	$1,0998 \times 1,0532 = 1,1583$
1982	613	95	$1,3015$	$1,0106$	$1,3015 \times 1,0106 = 1,3153$
1983	707	104	$1,5011$	$1,1064$	$1,5011 \times 1,1064 = 1,6608$
1984	710	113	$1,5074$	$1,2021$	$1,5074 \times 1,2021 = 1,8120$
1985	754	117	$1,6008$	$1,2447$	$1,6008 \times 1,2447 = 1,9925$
1986	785	104	$1,6667$	$1,1064$	$1,6667 \times 1,1064 = 1,8440$
1987	825	107	$1,7516$	$1,1383$	$1,7516 \times 1,1383 = 1,9938$
1988	893	111	$1,8960$	$1,1809$	$1,8960 \times 1,1809 = 2,2390$
1989	927	110	$1,9682$	$1,1702$	$1,9682 \times 1,1702 = 2,3032$
1990	969	108	$2,0573$	$1,1489$	$2,0573 \times 1,1489 = 2,3636$
1991	1015	105	$2,1550$	$1,1170$	$2,1550 \times 1,117 = 2,4071$
1992	1070	102	$2,2718$	$1,0851$	$2,2718 \times 1,0851 = 2,4651$
1993	1663	99	$3,5308$	$1,0532$	$3,5308 \times 1,0532 = 3,7186$
1994	1745	94	$3,7049$	$1,0$	$3,7049 \times 1 = 3,7049$

(b)

			Índice 1989=1		
Ano	Preço	quant.	Preço	Quantidade	Valor
1980	471	94	$0,5081$	$0,8545$	$0,5081 \times 0,8545 = 0,4342$
1981	518	99	$0,5588$	$0,9000$	$0,5588 \times 0,9000 = 0,5029$
1982	613	95	$0,6613$	$0,8636$	$0,6613 \times 0,8636 = 0,5711$
1983	707	104	$0,7627$	$0,9455$	$0,7627 \times 0,9455 = 0,7211$
1984	710	113	$0,7659$	$1,0273$	$0,7659 \times 1,0273 = 0,7869$
1985	754	117	$0,8134$	$1,0636$	$0,8134 \times 1,0636 = 0,8651$
1986	785	104	$0,8468$	$0,9455$	$0,8468 \times 0,9455 = 0,8006$
1987	825	107	$0,8900$	$0,9727$	$0,8900 \times 0,9727 = 0,8657$
1988	893	111	$0,9633$	$1,0091$	$0,9633 \times 1,0091 = 0,9721$
1989	927	110	$1,0000$	$1,0000$	$1,0000 \times 1,0000 = 1,0000$
1990	969	108	$1,0453$	$0,9818$	$1,0453 \times 0,9818 = 1,0263$
1991	1015	105	$1,0949$	$0,9545$	$1,0949 \times 0,9545 = 1,0451$
1992	1070	102	$1,1543$	$0,9273$	$1,1543 \times 0,9273 = 1,0704$
1993	1663	99	$1,7940$	$0,9000$	$1,7940 \times 0,9000 = 1,6146$
1994	1745	94	$1,8824$	$0,8545$	$1,8824 \times 0,8545 = 1,6085$

48.

	Índice	(a)	(b)	(c)
Ano	90=100	94=100	92=100	89=100
1989	$94,1$	$75,401$	$83,793$	$100,000$
1990	$100,0$	$80,128$	$89,047$	$106,270$
1991	$105,8$	$84,776$	$94,212$	$112,433$
1992	$112,3$	$89,984$	$100,000$	$119,341$
1993	$118,9$	$95,272$	$105,877$	$126,355$
1994	$124,8$	$100,000$	$111,131$	$132,625$

49. A média dos preços no período 1999 a 2000 é: $\dfrac{15,06+18,68}{2} = 16,87$. Assim, os relativos de preço com base média 1999-2000=100 são obtidos dividindo-se a série dada por 16,87. Para obter a série com base em 2004 basta dividir a série original por 28,46.

	(a) Média 1999-2000=100	(b) 2004=100
1999	$15,06/16,87 \times 100 = 89,27$	$15,06/28,46 \times 100 = 52,926$
2000	$18,68/16,87 \times 100 = 110,73$	$18,68/28,46 \times 100 = 65,64$
2001	$25,24/16,87 \times 100 = 149,61$	$25,24/28,46 \times 100 = 88,69$
2002	$26,15/16,87 \times 100 = 155,01$	$26,15/28,46 \times 100 = 91,88$
2003	$30,07/16,87 \times 100 = 178,25$	$30,07/28,46 \times 100 = 105,66$
2004	$28,46/16,87 \times 100 = 168,71$	$28,46/28,46 \times 100 = 100,00$

50.

$$\begin{cases} \underline{1999} & & \underline{2000} \\ 1 & - & 1,5634 \\ x & - & 15000 \end{cases}$$

Logo, $x = \dfrac{15000}{1,5634} = 9594,47$, ou seja, o poder aquisitivo do salário do gerente com base em dezembro de 1999 é de $R\$9594,47$.

51. Temos que mudar a base para 2001 e calcular a série de índice do salário nominal:

Anos	Salário	ICV		Salário nominal
	(u.m.)	1996=100	2001=100	Índice 2001=100
2001	3.200	137	$137/137 = 100,00$	$3200/3200 \times 100 = 100,00$
2002	4.600	155	$155/137 = 113,14$	$4600/3200 \times 100 = 143,75$
2003	5.200	170	$170/137 = 124,09$	$5200/3200 \times 100 = 162,50$
2004	6.400	183	$183/137 = 133,58$	$6400/3200 \times 100 = 200,00$

Anos	Salário Real	
	Índice 2001=100 (a)	a preços de 2001 (b)
1970	$100/100 \times 100 = 100,000$	3200
1971	$(143,75/113,14) \times 100 = 127,05$	$4600/1,1314 = 4065,8$
1972	$(162,5/124,09) \times 100 = 130,96$	$5200/1,2409 = 4190,5$
1973	$(200/133,58) \times 100 = 149,73$	$6400/1,3358 = 4791,1$

Anos	Taxa de variação (c)	
	Nominal	Real
1970		
1971	$(1,4375-1) \times 100 = 43,75$	$(4065,8/3200-1) \times 100 = 27,056$
1972	$(5200/4600-1) \times 100 = 13,043$	$(4190,5/4065,8-1) \times 100 = 3,067$
1973	$(6400/5200-1)\,100 = 23,077$	$(4791,1/4190,5-1) \times 100 = 14,332$

52. As vendas devem ser deflacionadas pelo índice de preços industriais e os salários pelo índice do custo de vida. Temos que mudar a base para 2000. O salário médio é calculado

dividindo-se o total dos salários pelo pessoal ocupado.

Ano	Vendas Industriais (1000 R$)	Salário anual na Indústria (1000 R$)	Pessoal Ocupado na Indústria	ICV 1996=100	IPA-OG 2001=100
2000	590.978.128	57.266.221	5.315.480	125	90
2001	690.748.956	63.909.526	5.453.460	137	100
2002	797.226.731	70.277.206	5.680.111	155	115

	ICV 2000=100	IPA-I 2000=100	Salário médio na Ind. (R$).	Valor das vendas (1000 R$ de 2000)	Salário real médio R$ de 2000
2000	100, 00	100, 00	10773, 48	590.978.128	10773, 98
2001	109, 60	111, 11	11719, 08	621.680.277	10692, 59
2002	124, 00	127, 78	12372, 51	623.905.721	9977.83

53. Para calcular o poder aquisitivo de uma unidade monetária, basta calcular o inverso do índice de preço. Se a inflação foi de 25%, o índice é de 1,25. Logo, $\frac{1}{1,25} = 0,8$. A moeda passou a valer 80% do que valia antes; a perda percentual do poder aquisitivo, portanto, foi de $100 - 80 = 20\%$

54.

$$\begin{aligned} V_0 &= P_0 Q_0 \\ 1,0563 V_0 &= 1,0801 P_0 Q_1 \end{aligned}$$

$$1,0563 = 1,0801 \frac{P_0 Q_1}{V_0} = 1,0801 \frac{Q_1}{Q_0} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_0} = \frac{1,0563}{1,0801} = 0,97797$$

Perda do poder aquisitivo de 2,203: $[(0,97797 - 1) \times 100]$. Para recompor o poder aquisitivo, o reajuste total teria que ser de 8,01%. Como eles já tiveram 5,63%, fica faltando um reajuste de 2,25%. Esse valor é obtido da seguinte forma:

$$1,0801 = 1,0563 \times x \Rightarrow x = \frac{1,0801}{1,0563} = 1,022531 \text{ ou } 2,25\%$$

55.

	Faturamento	IGP		Faturamento.real	
	(1000 R$)	1995=100	2000=100	a preços de 2000	% anual
2000	800	157	100,00	800,00	
2001	850	174	110,83	766,94	-4,13
2002	950	220	140,13	677,94	-11,60
2003	1050	237	150,96	695,55	2,60
2004	1350	265	168,79	799,81	14,99

O faturamento real no período foi de

$$\frac{799,81}{800,00} = 0,999763$$

o que equivale a uma taxa média anual de $\left(\sqrt[4]{0,999763} - 1\right) \times 100 = (0,999941 - 1) \times 100 = -0,0059\%$

56. VR = valor real; VN = valor nominal; IP = índice de preço ou inflação

$$VR = \frac{VN}{IP} \Rightarrow IP = \frac{VN}{VR} \Rightarrow IP = \left(\frac{1,045}{0,95} - 1\right) \times 100 = 10\%$$

57. PIB $\quad POP$ = população $\quad PIBC = PIB$ per capita

$$PIBC_t = \frac{PIB_t}{POP_t} = \frac{1,10PIB_{t-1}}{1,05POP_{t-1}} = \frac{1,10}{1,05}PIBC_{t-1} \Rightarrow \frac{PIBC_t}{PIBC_{t-1}} = \frac{1,10}{1,05} = 1,0476$$

ou seja, o PIB per capita cresceu 4,76%.

58.

$$\begin{aligned}
Sal_{2004} &= 850 \\
IP_{97-99,2004} &= 156 \\
IP_{97-99,1997} &= 90 \\
IP_{1997,2004} &= \frac{156}{90} = 1,7333 \\
\text{Salário real de 2004 a preços de 1997} &= \frac{850}{1,7333} = 490,39
\end{aligned}$$