

# Introdução ao teste de hipóteses

Gilberto Pereira Sassi

Universidade Federal da Bahia  
Instituto de Matemática e Estatística  
Departamento de Estatística

# Conceito iniciais

## Objetivo

- ▶ Decidir entre  $H_0$  e  $H_1$  usando as evidências presentes na amostra (tomando a melhor decisão possível ou decisão ótima usando as informações presentes na amostra);
- ▶  $H_0$  e  $H_1$  são hipóteses complementares, ou seja, a negação da hipótese  $H_0$  é  $H_1$ ;
- ▶  $H_0$  e  $H_1$  são declarações sobre um parâmetro (ou vários parâmetros) de uma população (ou duas ou mais populações);
- ▶  $H_0$  é chamada de hipótese nula;
- ▶  $H_1$  é chamada de hipótese alternativa.

Observe que podemos tomar duas decisões erradas:

- i. **Erro tipo I:** Aceitar  $H_1$  quando  $H_0$  é verdadeira, ou seja, rejeitar  $H_0$  quando  $H_0$  é verdadeira;
- ii. **Erro tipo II:** Aceitar  $H_0$  quando  $H_1$  é verdadeira, ou seja, não rejeitar  $H_0$  quando  $H_1$  é verdadeira;

**Tabela 1:** Erro tipo I e II.

		Decisão	
		$H_0$	$H_1$ (Negação de $H_0$ )
Situação na população	$H_0$	Sem erro (verdadeiro negativo)	Erro tipo I (Falso positivo)
	$H_1$ (Negação de $H_0$ )	Erro tipo II (Falso negativo)	Sem erro (Verdadeiro positivo)

# Conceitos iniciais

## Uso mais comuns

- ▶ Verificar se o parâmetro mudou de valor em um novo cenário;
- ▶ Validar uma teoria ou modelo;
- ▶ Checar especificações (valor padrão estabelecido do mercado ou valor estabelecido por um regulador);

## Roteiro para especificar as hipóteses

- ▶ Coloque em  $H_0$  o valor padrão ou o valor padrão de mercado ou valor especificado por órgão regulador;
- ▶ Coloque em  $H_1$  sua hipótese de pesquisa;
- ▶ **Dica:** Na dúvida, pense que a igualdade sempre vai na hipótese nula por construção da regra decisão entre  $H_0$  e  $H_1$ .

## Notação

O erro com a consequência mais grave geralmente indica quem será o  $H_1$  (falso positivo é mais grave), pois controlamos  $P(\text{Decidir por } H_1 \mid H_0 \text{ é verdadeira})$ .

**Exemplo:** Em um julgamento, temos as seguintes hipóteses,

- ▶  $H_0$  : réu é inocente. (Se não tem certeza da culpa, declare inocência);
- ▶  $H_1$  : réu é culpado. (Precisa ser uma decisão com muita certeza).

Em um julgamento, o juiz decidiu por  $H_1$  se tivermos provas robustas e convincentes. Se não existir provas, o juiz não pode decidir por  $H_1$  e ele conclui por  $H_0$  por falta de evidência mas o réu pode ser culpado, você apenas não conseguiu provas e decisão por  $H_0$  é "mais fraca". Neste contexto, usamos a seguinte notação:

- ▶ "Decisão por  $H_0$ ": não rejeitamos  $H_0$  Não rejeitamos a inocência do réu;
- ▶ "Decisão por  $H_1$ ": rejeitamos  $H_0$  Rejeitamos a inocência do réu. (Rejeitamos  $H_0$  apenas se tivermos forte evidência).

## Exemplo de motivação. (Procedimento de Neyman-Pearson)

Imagine que no ano de 2017, 10.000 alunos das universidades federais cursaram “Estatística Básica”. No ano de 2016, a nota final média dos alunos foi 5 e queremos decidir entre duas hipóteses

$H_0$ : A nota final em 2017 permaneceu a mesma de 2016 ( $\mu = 5$ );

$H_1$ : A nota final em 2017 foi diferente de 2016 ( $\mu \neq 5$ ).

Descobrir a nota de 10.000 alunos pode ser difícil, então podemos escolher aleatoriamente 1.000 alunos e precisamos decidir entre  $H_0$  e  $H_1$ .

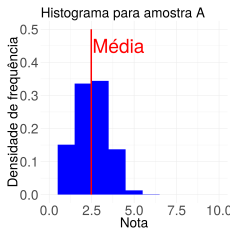
Imagine três amostras distintas:

**Amostra A:** nota média na amostra A é 2,5;

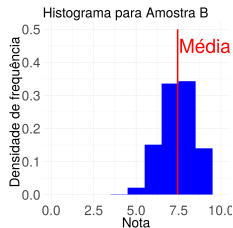
**Amostra B:** nota média na amostra A é 5;

**Amostra C:** nota média na amostra A é 7,5;

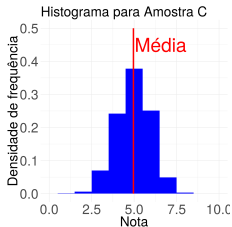
# Exemplo de motivação (Procedimento de Neyman-Pearson)



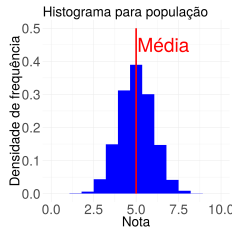
(a) Amostra A



(b) Amostra B



(c) Amostra C



(d) População

## Exemplo de motivação (Procedimento de Neyman-Pearson)

**Amostra A:** A média da amostra A é menor que 5, então decidimos que a média população é menor que 5, ou seja, decidimos por  $H_1$ ;

**Amostra B:** A média da amostra B é maior que 5, então decidimos que a média da população é maior que 5, ou seja, decidimos por  $H_1$ ;

**Amostra C:** A média da amostra C é igual a 5, então decidimos que a média da população é igual a 5, ou seja, decidimos por  $H_0$ .

### Problema

Quão longe a média da amostra precisa estar de 5 para rejeitar  $H_0 : \mu = 5$ ?

### Solução

Usamos *métrica*, chamada de **estatística de teste**, para determinar quão longe a média da amostra precisa estar de 5 para rejeitar  $H_0 : \mu = 5$ .

A probabilidade do erro tipo I e II são denotadas por

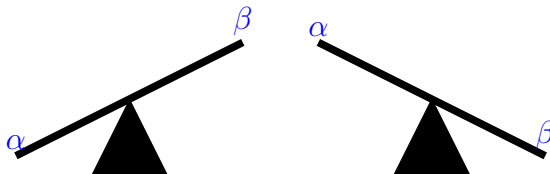
$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P(H_1 | H_0),$$

$$\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P(H_0 | H_1).$$

**Ideia:** Tomar uma decisão que minimize simultaneamente  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Problema:** Não é possível tomar uma decisão que minimize simultaneamente  $\alpha$  e  $\beta$ , conforme ilustrado na figura.

**Figura 1:** trade-off entre  $\alpha$  e  $\beta$ .



**Solução:** fixar a probabilidade do erro tipo I e encontrar a decisão que minimize  $\beta$ .

**Notações:**

- ▶  $\alpha$ : nível de significância, erro  $\alpha$  ou tamanho do teste. Geralmente, usamos  $\alpha = 0,05$ ;
- ▶  $\beta$ : erro  $\beta$ ;
- ▶  $1 - \beta$ : poder do teste de hipóteses.

## Tamanho de amostra e o erro $\beta$ e erro $\alpha$ .

Quando aumentamos o tamanho da amostra, o erro  $\beta$  diminui. Abaixo usamos a seguinte regra de decisão:

- ▶ Se  $4,80 \leq \bar{x} \leq 5,20$ , então decidimos por  $H_0$ ;
- ▶ Se  $4,80 < \bar{x}$  ou  $\bar{x} > 5,20$ , então decidimos por  $H_1$ .

Na tabela 2, note que ao aumentarmos o tamanho da amostra, as probabilidades dos erros tipo I e II diminuem.

**Tabela 2:** Erro  $\alpha$  e  $\beta$  ao aumentarmos o tamanho da amostra.

Tamanho da amostra	$\alpha$	$\beta(\mu = 4,3)$	$\beta(\mu = 5,3)$
n = 25	0,42371	0,02259	0,32183
n = 50	0,25790	0,00234	0,28346
n = 75	0,16586	0,00027	0,24395
n = 100	0,10960	0,00003	0,21182
n = 250	0,01141	0,00000	0,10295
n = 500	0,00035	0,00000	0,03682
n = 750	0,00001	0,00000	0,01423
n = 1000	0,00000	0,00000	0,00571

Para calcular os erros  $\alpha$  e  $\beta$ , assumimos que a variável  $X \sim N(\mu, 1, 25^2)$  ( $X = \text{nota}$ ). Ou seja,  $\alpha = P(\bar{X} \leq 4,80 \mid \mu = 5) + P(\bar{X} \geq 5,20 \mid \mu = 5)$  e  $\beta = P(4,80 \leq \bar{X} \leq 5,20 \mid \mu)$ ,  $\mu \in \{4,3; 5,3\}$ .

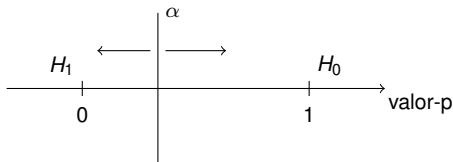


# Valor-p

## Definição

- ▶ Vamos chamar a possibilidade ou plausibilidade ou indicação da hipótese alternativa ( $H_1$ ) de *estatística do teste*;
- ▶ O valor-p ou nível crítico é a probabilidade de coletar uma amostra com *estatística do teste* igual ou mais extrema do que a amostra observada quando  $H_0$  é verdadeira. Lembre que consideramos o erro tipo I (falso positivo) tem graves consequências e as nossas decisões focam em controlar este erro;
- ▶ Rejeitamos  $H_0$  quando o valor-p é pequeno, e usamos como valor de referência o nível de significância  $\alpha$ . Ilustramos essa ideia na Figura 2.

**Figura 2:** Uso do valor-p.



## P-valor como variável aleatória

### Exemplo

Imagine que temos um amostra com quatro valores de uma variável aleatória contínua com distribuição normal com desvio padrão  $\sigma^2 = 1$  e considere as hipóteses

$H_0 : \mu = 0$  e  $H_1 : \mu \neq 0$ . Usamos a seguinte ideia para decidir: Se a média da

amostra  $\bar{x}$  estiver longe de  $\mu = 0$  rejeitamos  $H_0$ , ou seja, rejeitamos  $H_0$  se  $\left| \frac{(\bar{x}-0)\sqrt{n}}{\sigma} \right|$

for grande. A estatística de teste neste caso é  $\left| \frac{(\bar{x}-0)\sqrt{n}}{\sigma} \right|$ .

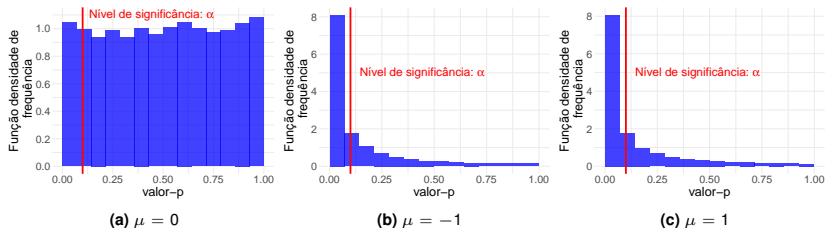
- ▶ O valor-p é calculado usando  $P\left(\left| \frac{(\bar{X}-0)\sqrt{n}}{\sigma} \right| > \left| \frac{(\bar{x}-0)\sqrt{n}}{\sigma} \right| \mid H_0 : \mu = 0\right)$ .
- ▶ Ao mudarmos a amostra, também mudamos o valor-p. Como ilustrado na Tabela 3.

	Valor 1	Valor 2	Valor 3	Valor 4	Estatística do teste	P-valor	Decisão
Amostra 1	0,477	1,965	0,762	2,997	3,101	0,002	Rejeitamos $H_0$
Amostra 2	-1,125	0,335	-3,063	-2,394	-3,123	0,002	Rejeitamos $H_0$
Amostra 3	0,412	-1,294	0,220	0,751	0,045	0,964	Não rejeitamos $H_0$
Amostra 4	0,448	-1,183	0,299	0,329	-0,054	0,957	Não rejeitamos $H_0$

**Tabela 3:** Valor-p calculado para várias amostras de tamanho  $n = 4$  de uma variável aleatória aleatória com distribuição normal com variância  $\sigma^2 = 1$ , quando  $H_0 : \mu = 0$  é verdadeira.

# Valor-p

Valor-p, de forma similar a média  $\bar{x}$ , tem um valor diferente para cada amostra, e, então, podemos interpretar o valor-p como uma observação de uma variável aleatória. Como ilustração, as Figura 3a, Figura 3b e Figura 3c mostram histogramas para 10.000 valores-p provenientes de 10.000 amostras de tamanho amostral  $n = 4$  de uma variável aleatória contínua com distribuição normal com desvio padrão  $\sigma = 1$ .



**Figura 3:** Histograma de valores-p para 10.000 amostras quando (a)  $H_0 : \mu = 0$  é verdadeira, (b)  $H_1 : \mu \neq 0$  é verdadeira e  $\mu = -1$ , e (c)  $H_1 : \mu \neq 0$  é verdadeira e  $\mu = 1$ .

# Testes de hipóteses

Nesse curso, vamos determinar a regra de decisão, chamada de “Teste de Hipóteses” para os seguintes problemas:

1. Uma variável ou população:

- a. Teste para média  $\mu$ , para distribuição normal com  $\sigma^2$  conhecido (teste  $Z$ );
- b. Teste para média  $\mu$ , para distribuição com  $\sigma^2$  desconhecido (teste  $t$ );
- c. Teste para  $\sigma^2$  (teste qui-quadrado para variância);
- d. Teste para proporção  $p$ , para distribuição Bernoulli quando  $n \geq 40$ .

2. Duas variáveis ou duas populações:

- a. Teste para diferença de médias  $\mu_1 - \mu_2$ , para distribuição normal com  $\sigma^2$  conhecido;
- b. Teste para razão de variâncias  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ , para distribuição normal (teste  $F$ );
- c. Teste para diferenças de médias  $\mu_1 - \mu_2$ , para distribuição normal com  $\sigma^2$  desconhecido;
  - i. Variâncias das duas populações ou variáveis são iguais;
  - ii. Variâncias das duas populações ou variáveis são diferentes;
- d. Teste  $t$  pareado;
- e. Teste para diferença de proporções  $p_1 - p_2$ , para distribuição Bernoulli quando  $n \geq 40$ ;
- f. Teste de associação entre duas variáveis qualitativas;
- g. Teste de associação entre duas variáveis quantitativas.

## Etapas para construir em um Teste de Hipóteses.

### Procedimento de Neyman-Pearson

Usando o procedimento de Neymann-Pearson:

- 1) Estabelecer as hipóteses  $H_0$  e  $H_1$ ;
- 2) Estabelecer o nível de significância  $\alpha$ ;
- 3) Identificar a *ideia* da decisão (estatística do teste);
- 4) Encontrar o(s) valor(es) crítico(s);
- 5) Tomar a decisão.

### valor-p

Usando o valor-p

- 1) Estabelecer as hipóteses  $H_0$  e  $H_1$ ;
- 2) Estabelecer o nível de significância  $\alpha$ ;
- 3) Encontrar o valor-p;
- 4) Decidir usando o valor-p e o nível de significância.

Observação:

- ▶ Alguns livros chamam o “Procedimento de Neyman-Pearson” de “Procedimento Geral de Testes de hipóteses.”

## Distribuição normal com $\sigma^2$ conhecido (Teste Z).

Sejam

- ▶  $x_1, \dots, x_n$  valores amostrados de  $N(\mu, \sigma^2)$ ;
- ▶  $\sigma^2$  conhecido;
- ▶  $\alpha$  é o nível de significância (estabelecido pelo pesquisador e geralmente  $\alpha = 5\%$ ).

Queremos testar as seguintes hipóteses:

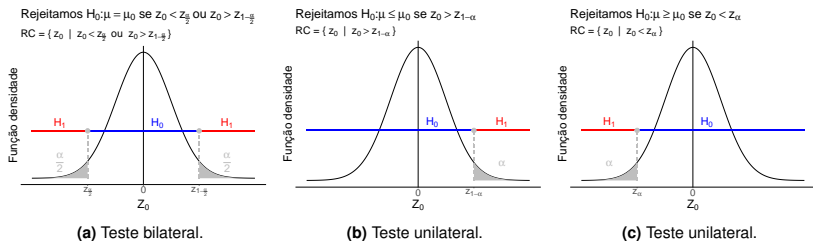
- ▶ Teste bilateral:  $H_0 : \mu = \mu_0$  e  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ;
- ▶ Teste unilateral:  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  e  $H_1 : \mu > \mu_0$ ;
- ▶ Teste unilateral:  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  e  $H_1 : \mu < \mu_0$ .

**Ideia:** Primeiro calculamos a distância padronizada de  $\bar{x}$  e  $\mu_0$ :

$Z_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$ . Então,

- ▶ Teste bilateral: Rejeitamos  $H_0 : \mu - \mu_0 = 0$  se  $|Z_0|$  for grande;
- ▶ Teste unilateral: Rejeitamos  $H_0 : \mu - \mu_0 \leq 0$  se  $Z_0$  for grande;
- ▶ Teste unilateral: Rejeitamos  $H_0 : \mu - \mu_0 \geq 0$  se  $Z_0$  for pequeno.

## Distribuição normal com $\sigma^2$ conhecido (Teste Z).



**Figura 4:** Região crítica para o teste Z.

## Distribuição normal com $\sigma^2$ conhecido (Teste Z).

- Na Figura 4a, testamos  $H_0 : \mu = \mu_0$  versus  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ .

Rejeitamos  $H_0$  se  $z_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \in$

$RC = \{z_0 \mid z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ , em que  $\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$  e  $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ;

- Na Figura 4b, testamos  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  versus  $H_1 : \mu > \mu_0$ .

Rejeitamos  $H_0$  se  $z_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \in RC = \{z_0 \mid z_0 > z_{1-\alpha}\}$ , em que  $\Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ ;

- Na Figura 4c, testamos  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  versus  $H_1 : \mu < \mu_0$ .

Rejeitamos  $H_0$  se  $z_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \in RC = \{z_0 \mid z_0 < z_{\alpha}\}$ , em que  $\Phi(z_{\alpha}) = \alpha$ .

Chamamos  $z_{\alpha}$ ,  $z_{1-\alpha}$ ,  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  e  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  são chamados de valores críticos.



## Distribuição normal com $\sigma^2$ conhecido (Teste Z).

### Exemplo

Um pesquisador deseja estudar o efeito de certa substância no tempo de reação de seres vivos a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido com cobaias que são inoculadas com a substância e submetidas a um estímulo elétrico, com seu tempo de reação (em segundos) anotados. Os seguintes valores foram obtidos: 9,1; 7,2; 13,3; 10,9; 7,2; 9,9; 8,0; 8,6; 8,0; 7,1. Admite-se que o tempo de reação tem desvio padrão de 2 segundos. Além disso, da literatura médica, o pesquisador sabe que o tempo de reação ao estímulo é, em média, 8 segundos. O pesquisador desconfia que o tempo médio sofre alteração por influência da substância. Usando um nível de significância 5%, o pesquisador está correto?

## Distribuição normal com $\sigma^2$ conhecido (Teste Z).

### Solução

**Passo 1)** Temos duas hipóteses:  $H_0 : \mu = \mu_0$  e  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ , em que  $\mu_0 = 8$ .

**Passo 2)**  $\alpha = 0,05$ .

**Passo 3)** Rejeitamos  $H_0$  se  $|z_0| = \left| \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sigma}{\sqrt{n}} \right|$  for grande. Ou seja,

$$RC = \{z_0 \mid z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}.$$

**Passo 4)** Vamos encontrar os valores críticos da região crítica:

$$\blacktriangleright \Phi\left(z_{\frac{0,05}{2}}\right) = \Phi(z_{0,025}) = z_{\frac{0,05}{2}} = z_{0,025} = 0,025, \text{ então } z_{0,025} = -1,96;$$

$$\blacktriangleright \Phi\left(z_{1-\frac{0,05}{2}}\right) = \Phi(z_{0,975}) = z_{1-\frac{0,05}{2}} = z_{0,975} = 0,975, \text{ então } z_{0,975} = 1,96.$$

**Passo 5)** Como  $\bar{x} = \frac{9,1+7,2+13,3+10,9+7,2+9,9+8+8,6+8+7,1}{10} = 8,93$ ,

$z_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(8,93-8)\sqrt{10}}{2} = 1,47$  e  $|1,47| = 1,47$ . Então,  $z_0 \notin RC$  e não rejeitamos  $H_0$ .

Ou seja, ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , a substância não altera o tempo de reação.

## Distribuição normal com $\sigma^2$ conhecido (Teste Z).

### Solução (valor-p)

O valor-p é calculado através da equação

$$p = P\left(\left|\frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right| > \left|\frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right| \mid H_0\right) = 2 \left[1 - \Phi\left(\frac{|\bar{x} - \mu_0|\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right].$$

Como  $\mu_0 = 8$ ,  $n = 10$ ,  $\bar{x} = 8,93$  e  $\sigma = 8$ , temos que

$$\begin{aligned} p &= 2 \left[1 - \Phi\left(\frac{|8,93 - 8|\sqrt{10}}{8}\right)\right] \\ &= 2[1 - \Phi(1,47)] \\ &= 2[1 - 0,9292] \\ &= 0,1416. \end{aligned}$$

Como  $p = 0,1416 \geq \alpha = 0,05$ , não rejeitamos  $H_0$  ao nível de significância  $\alpha = 0,05$ . Em outras palavras, ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , não temos evidência estatística que a substância altera o tempo de reação das cobaias.

## Distribuição normal com $\sigma^2$ conhecido (Teste Z).

### Exemplo

Devido ao surgimento de um novo vírus, uma empresa começou a fabricar em gel anti-séptico para as mãos. Uma máquina controla a quantidade do produto nos frascos com desvio padrão  $10ml$ . Um órgão de defesa do consumidor desconfia que os frascos tem menos de  $60ml$ . Para checar as hipóteses, coletou-se 16 frascos com os seguintes valores: 57,31; 78,97; 75,27; 56,21; 68,74; 65,30; 53,50; 66,87; 67,35; 54,05; 70,82; 71,00; 48,52; 62,22; 70,32; 68,67. Ao nível de significância 5%, o órgão de defesa do consumidor está correto?

Distribuição normal com  $\sigma^2$  conhecido (Teste Z).

## Solução

**Passo 1)** Temos as seguintes hipóteses:  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  e  $H_1 : \mu < \mu_0$ , em que  $\mu_0 = 60$ ;

**Passo 2)**  $\alpha = 0,05$

**Passo 3)** Rejeitamos  $H_0$  se  $z_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$  for pequeno. Ou seja,  $RC = \{z_0 \mid z_0 < z_\alpha\}$ ;

**Passo 4)** Neste contexto, o valor crítico  $z_\alpha$  é calculado por

►  $\Phi(z_\alpha) = \Phi(z_{0,05}) = \alpha = 0,05$ , então  $z_{0,05} = -1,65$ .

**Passo 5)** Note que  $\bar{x} = 64,71$ ,  $z_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(64,71 - 60)\sqrt{16}}{10} = 1,884$  e  $z_0 = 1,884 \geq -1,65$ , então não rejeitamos  $H_0$ .

Ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , o órgão de defesa do consumidor não tem evidência estatística para afirmar que os frascos têm, em média, menos de 60ml.

## Distribuição normal com $\sigma^2$ conhecido (Teste Z).

### Solução (valor-p)

Neste contexto, o p-valor é dado pela equação

$$p = P\left(\frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \mid H_0\right) = \Phi\left(\frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Como  $\bar{x} = 64,71$ ,  $n = 16$  e  $\sigma = 10$ , então

$$\begin{aligned} p &= \Phi\left(\frac{(64,71 - 60)\sqrt{16}}{10}\right), \\ &= \Phi(1,88), \\ &= 0,9699. \end{aligned}$$

Como  $p = 0,9699 > 0,05 = \alpha$ , ao nível de significância 5% não rejeitamos  $H_0$ . Ou seja, ao nível de significância 5%, podemos afirmar que os frascos têm, em média, pelo menos 60ml.

## Distribuição normal com $\sigma^2$ conhecido (Teste Z).

### Exemplo

Imagine que um pesquisador tem uma amostra com 16 observações de uma variável aleatória com distribuição normal com desvio padrão dado por  $\sigma = 10$ . Na Tabela 4, apresentamos algumas informações para testar as hipóteses  $H_0 : \mu \leq 8$  e  $H_1 : \mu > 8$ . Complete a Tabela 4. Ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , você rejeitaria  $H_0$ ?

tamanho da amostra	Média	Desvio padrão populacional	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$Z_0$	valor-p
16	14,37	10			

**Tabela 4:** Algumas informações do experimento.

Distribuição normal com  $\sigma^2$  conhecido (Teste Z).

## Solução (valor-p)

**Passo 1)** Pelo enunciado do exemplo, temos as seguintes hipóteses:

$H_0 : \mu \leq \mu_0$  e  $H_1 : \mu > \mu_0$ , em que  $\mu_0 = 8$ ;

**Passo 2)**  $\alpha = 5\%$ .

**Passo 3)** Rejeitamos  $H_0$  se  $z_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$  for grande. Ou seja,  
 $RC = \{z_0 \mid z_0 > z_{1-\alpha}\}$ .

**Passo 4)** Vamos encontrar o valor crítico:

►  $\Phi(z_{1-\alpha}) = \Phi(z_{0,95}) = 1 - \alpha = 0,95$ , então  $z_{0,95} = 1,65$ .

**Passo 5)** Note que  $\bar{x} = 14,37$ ,  $z_0 = \frac{(14,37-8)\sqrt{16}}{10} = 2,548$  e  
 $z_0 = 2,548 > 1,65$ , então rejeitamos  $H_0$ .

Ao nível de significância de 5%, rejeitamos  $H_0$ .



## Solução: valor-p (teste Z unilateral)

### Solução (valor-p)

Neste contexto, o valor p é dado pela equação

$$p = P\left(\frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} > \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \mid H_0\right) = 1 - \Phi\left(\frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Como  $x = 14,37$ ,  $n = 16$  e  $\sigma = 10$ , então

$$\begin{aligned} p &= 1 - \Phi\left(\frac{(14,37 - 8)\sqrt{16}}{10}\right), \\ &= 1 - \Phi(2,55), \\ &= 1 - 0,9946 \\ &= 0,0054. \end{aligned}$$

Como  $p = 0,0054 < \alpha = 0,05$ , ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , rejeitamos  $H_0$ .

## Distribuição normal com $\sigma^2$ desconhecido (Teste t).

Sejam

- ▶  $x_1, \dots, x_n$  valores amostrados de  $N(\mu, \sigma^2)$ ;
- ▶  $\sigma^2$  desconhecido;
- ▶  $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$ ;
- ▶  $\alpha$  é o nível de significância (geralmente  $\alpha = 5\%$ ).

Queremos testar as seguintes hipóteses:

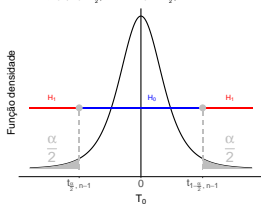
- ▶ Teste bilateral:  $H_0 : \mu = \mu_0$  e  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ;
- ▶ Teste unilateral:  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  e  $H_1 : \mu > \mu_0$ ;
- ▶ Teste unilateral:  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  e  $H_1 : \mu < \mu_0$ .

**Ideia:** Primeiro calculamos a distância padronizada de  $\bar{x}$  e  $\mu_0$ :  $T_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$ . Então,

- ▶ Teste bilateral: Rejeitamos  $H_0 : \mu - \mu_0 = 0$  se  $|T_0|$  for grande;
- ▶ Teste unilateral: Rejeitamos  $H_0 : \mu - \mu_0 \leq 0$  se  $T_0$  for grande;
- ▶ Teste unilateral: Rejeitamos  $H_0 : \mu - \mu_0 \geq 0$  se  $T_0$  for pequeno.

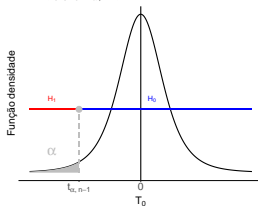
## Distribuição normal com $\sigma^2$ desconhecido (Teste t).

Rejeitamos  $H_0: \mu = \mu_0$  se  $t_0 < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$  ou  $t_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ .  
 $RC = \{ t_0 \mid t_0 < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \text{ ou } t_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \}$



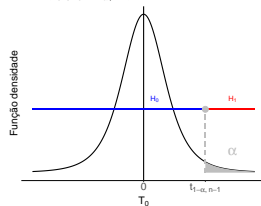
(a) Teste bilateral.

Rejeitamos  $H_0: \mu \geq \mu_0$  se  $t_0 < t_{\alpha, n-1}$ .  
 $RC = \{ t_0 \mid t_0 < t_{\alpha, n-1} \}$



(b) Teste unilateral.

Rejeitamos  $H_0: \mu \leq \mu_0$  se  $t_0 > t_{1-\alpha, n-1}$ .  
 $RC = \{ t_0 \mid t_0 > t_{1-\alpha, n-1} \}$



(c) Teste unilateral.

**Figura 5:** Região crítica para o teste t.

Distribuição normal com  $\sigma^2$  desconhecido (Teste t).

- Na Figura 5a, testamos  $H_0 : \mu = \mu_0$  versus  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ .

Rejeitamos  $H_0$  se  $t_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} \in$

$RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \text{ ou } t_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\}$ , em que

$P(t_{n-1} \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}) = \frac{\alpha}{2}$  e  $P(t_{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ;

- Na Figura 5b, testamos  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  versus  $H_1 : \mu < \mu_0$ .

Rejeitamos  $H_0$  se  $t_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} \in RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\alpha, n-1}\}$ , em que

$P(t_{n-1} \leq t_{\alpha}) = \alpha$ ;

- Na Figura 5c, testamos  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  versus  $H_1 : \mu > \mu_0$ .

Rejeitamos  $H_0$  se  $t_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} \in RC = \{t_0 \mid t_0 > t_{1-\alpha, n-1}\}$ , em que  $P(t_{n-1} \leq t_{1-\alpha, n-1}) = 1 - \alpha$ .

Chamamos  $t_{\alpha, n-1}$ ;  $t_{1-\alpha, n-1}$ ;  $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$  e  $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$  de valores críticos.

## Distribuição normal com $\sigma^2$ desconhecido (Teste t).

### Exemplo

Deseja-se investigar se um certa moléstia, que ataca o rim, altera o consumo do oxigênio desse órgão. Para indivíduos sadios, admite-se que esse consumo tem distribuição normal com média  $12\text{cm}^3/\text{min}$ . Os valores medidos em cinco pacientes com a moléstia foram: 14,4; 12,9; 15,0; 13,7; e 13,5. Qual seria a conclusão, ao nível de significância de 1%?

## Distribuição normal com $\sigma^2$ desconhecido (Teste t).

### Solução

**Passo 1)** Queremos testar as hipóteses:  $H_0 : \mu = \mu_0$  e  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ , em que  $\mu_0 = 12$ ;

**Passo 2)** Pelo enunciado, temos que o nível de significância é  $\alpha = 1\%$ .

**Passo 3)** Rejeitamos  $H_0$  se  $|t_0| = \left| \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} \right|$  for grande. Ou seja,

$$RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \text{ ou } t_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\}.$$

**Passo 4)** Vamos encontrar os valores críticos:

$$\blacktriangleright P(t_{n-1} \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}) = P(t_4 \leq t_{0,005,4}) = \frac{\alpha}{2} = 0,005, \text{ então } t_{0,005,4} = -4,604;$$

$$\blacktriangleright P(t_{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}) = P(t_4 \leq t_{0,995,4}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995, \text{ então } t_{0,995,4} = 4,604.$$

**Passo 5)** Note que  $\bar{x} = 13,9$ ,  $s = 0,8155$  e  $t_0 = \frac{(13,9-12)\sqrt{5}}{0,8155} = 5,21$ , então  $t_0 \in RC$  e rejeitamos  $H_0$ . Ou seja, ao nível de significância  $\alpha = 1\%$ , a moléstia altera o consumo de oxigênio.

## Distribuição normal com $\sigma^2$ desconhecido (Teste t).

### Solução: p-valor (teste t bilateral)

O p-valor é calculado através da equação

$$p = P\left(\left|\frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}\right| > \left|\frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}\right| \mid H_0\right) = 2[1 - P(t_{n-1} \leq |t_0|)].$$

Como  $\bar{x} = 13,9$ ,  $s = 0,8155$ ,  $n = 5$  e  $t_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} = 5,21$ , então

$$\begin{aligned} p &= 2[1 - P(t_{n-1} \leq |t_0|)] \\ &= 2[1 - P(t_4 \leq |5,21|)], \quad \text{Aqui precisamos usar o R, Python, excel ou MATLAB.} \\ &= 2[1 - 0.9968] \\ &= 0,0065. \end{aligned}$$

Como  $p = 0,0066 < 0,01 = \alpha$ , ao nível de significância 1%, não rejeitamos  $H_0$ . Ou seja, ao nível de significância 1%, podemos afirmar que a moléstia altera o consumo de oxigênio pelo rim.

## Distribuição normal com $\sigma^2$ desconhecido (Teste t).

### Exemplo

O crescimento de bebês, durante o primeiro mês de vida, pode ser modelado pela distribuição Normal. Admita que, em média, um crescimento de 5 centímetros ou mais seja considerado satisfatório. Deseja-se verificar se o crescimento de bebês de famílias em um bairro de periferia de São Paulo acompanha o padrão esperado ao nível de significância  $\alpha = 1\%$ . Para tanto, 10 recém-nascidos na região foram sorteados e sua altura acompanhada, fornecendo as seguintes de crescimento em centímetros: 5,03; 5,02; 4,95; 4,96; 5,01; 4,97; 4,90; 4,91; 4,90 e 4,93.



## Distribuição normal com $\sigma^2$ desconhecido (Teste t).

### Solução

**Passo 1)** Queremos testar as hipóteses:  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  e  $H_1 : \mu < \mu_0$ , em que  $\mu_0 = 5$ ;

**Passo 2)** Pelo enunciado, o nível de significância é  $\alpha = 1\%$ .

**Passo 3)** Rejeitamos  $H_0$  se  $t_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$  for pequeno. Ou seja, rejeitamos  $H_0$  se  $t_0 < t_{\alpha, n-1}$ , em que  $P(t_{n-1} \leq t_{\alpha, n-1}) = \alpha$ . Então,

$$RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\alpha, n-1}\}.$$

**Passo 4)** Vamos encontrar o valor crítico da região crítica:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P(t_{n-1} \leq t_{\alpha, n-1}) &= P(t_9 \leq t_{0,01,9}) = \alpha = 0,01, \text{ então} \\ t_{0,01,9} &= -2,821. \end{aligned}$$

**Passo 5)** Note que  $\bar{x} = 4,958$ ,  $s = 0,05$ ,  $n = 10$  e

$t_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} = -2,70$ . Como  $t_0 \notin RC$ , não rejeitamos  $H_0$  ao nível de significância  $\alpha = 1\%$ .

Ao nível de significância  $\alpha = 1\%$ , os bebês da periferia tem crescimento de, no mínimo, 5 centímetros.

Distribuição normal com  $\sigma^2$  desconhecido (Teste t).

## Solução (p-valor)

O p-valor é calculado através da equação

$$p = P\left(\frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} < \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} \mid H_0\right) = P(t_{n-1} < t_0).$$

Como  $\bar{x} = 4,958$ ,  $s = 0,05$ ,  $n = 10$  e  $t_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} = -2,70$ , temos que

$$\begin{aligned} p &= P(t_{n-1} \leq t_0) \\ &= P(t_9 \leq -2,70) \text{ Aqui precisamos usar o R ou python.} \\ &= 0,01. \end{aligned}$$

Como  $p = 0,01 \geq 0,01 = \alpha$ , ao nível de significância  $\alpha = 1\%$ , então não rejeitamos  $H_0$ , ou seja, o crescimento dos bebês na periferia é, no mínimo, 5 centímetros.

Distribuição normal com  $\sigma^2$  desconhecido (Teste t).

## Exemplo

Imagine que um pesquisador tem uma amostra com 25 observações de uma variável aleatória com distribuição normal. Na Tabela 5, apresentamos algumas informações para testar as hipóteses  $H_0 : \mu \leq 15$  e  $H_1 : \mu > 15$ . Complete a Tabela 5. Ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , você rejeitaria  $H_0$ ?

tamanho da amostra	$\bar{x}$	s	$t_0$	valor-p
25	20,69	2,10		

Tabela 5: Algumas informações do experimento.

## Distribuição normal com $\sigma^2$ desconhecido (Teste t).

### Solução (procedimento de Neymann-Pearson)

**Passo 1)** Pelo enunciado, temos as hipóteses:  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  e  $H_1 : \mu > \mu_0$ , em que  $\mu_0 = 15$ ;

**Passo 2)** Pelo enunciado, o nível de significância é  $\alpha = 5\%$ .

**Passo 3)** Rejeitamos  $H_0$  se  $t_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$  for grande. Ou seja,  $RC = \{t_0 \mid t_0 > t_{1-\alpha, n-1}\}$ .

**Passo 4)** Vamos calcular o valor crítico:

$$\blacktriangleright P(t_{n-1} < t_{1-\alpha, n-1}) = P(t_{24} < t_{0,95;24}) = 1 - \alpha = 0,95, \text{ então } t_{0,95,24} = 1,711.$$

**Passo 5)** Note que  $\bar{x} = 20,69$ ,  $s = 2,10$  e  $n = 25$ , então

$t_0 = \frac{(20,69 - 15)\sqrt{25}}{2,10} = 13,55$  e  $t_0 \in RC$ , ou seja, rejeitamos  $H_0$  ao nível de significância 5%.

## Distribuição normal com $\sigma^2$ desconhecido (Teste t).

### Solução (p-valor)

O valor-p é calculado através da equação

$$p = P\left(\frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} > \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}\right) = 1 - P\left(t_{n-1} \leq \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}\right) = 1 - P(t_{n-1} \leq t_0).$$

Como  $\bar{x} = 20,69$ ,  $s = 2,10$ ,  $n = 25$  e  $t_0 = 13,55$ , temos que

$$\begin{aligned} p &= 1 - P(t_{n-1} \leq t_0) \\ &= 1 - P(t_{24} \leq 13,55) \quad \text{Aqui precisamos usar o R ou python.} \\ &= 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como  $p = 0 < 0,05 = \alpha$ , ao nível de significância  $\alpha = 5\%$  rejeitamos  $H_0$ .

## Distribuição normal: teste da variância.

Sejam

- ▶  $x_1, \dots, x_n$  valores amostrados de  $N(\mu, \sigma^2)$ ;
- ▶  $\alpha$  é o nível de significância (estabelecido pelo pesquisador e geralmente  $\alpha = 5\%$ ).

Queremos testar as seguintes hipóteses:

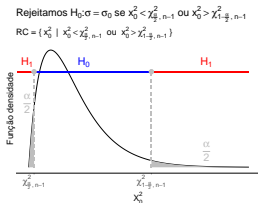
- ▶ Teste bilateral:  $H_0 : \sigma = \sigma_0$  e  $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ ;
- ▶ Teste unilateral:  $H_0 : \sigma \leq \sigma_0$  e  $H_1 : \sigma > \sigma_0$ ;
- ▶ Teste unilateral:  $H_0 : \sigma \geq \sigma_0$  e  $H_1 : \sigma < \sigma_0$ .

**Ideia:** Primeiro calculamos  $X_0^2 = \frac{S^2(n-1)}{\sigma_0^2}$ , em que  $X_0^2 = \frac{S^2(n-1)}{\sigma_0^2}$  e

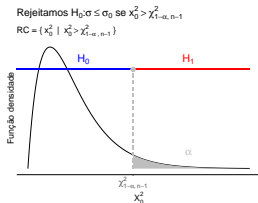
$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}. \text{ Então,}$$

- ▶ Teste bilateral: Rejeitamos  $H_0 : \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = 1$  se  $X_0^2$  for grande ou for pequeno;
- ▶ Teste unilateral: Rejeitamos  $H_0 : \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \leq 1$  se  $X_0^2$  for grande;
- ▶ Teste unilateral: Rejeitamos  $H_0 : \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \geq 1$  se  $X_0^2$  for pequeno.

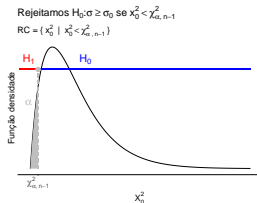
## Distribuição normal: teste da variância.



(a) Teste bilateral.



(b) Teste unilateral.



(c) Teste unilateral.

**Figura 6:** Região crítica para o teste de variância.

## Distribuição normal: teste da variância.

- ▶ Na Figura 6a, testamos  $H_0 : \sigma = \sigma_0$  versus  $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ . Rejeitamos  $H_0$  se  $x_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \in RC = \{x_0^2 \mid x_0^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}; n-1}^2 \text{ ou } x_0^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}^2\}$ , em que  $P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}; n-1}^2\right) = \frac{\alpha}{2}$  e  $P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}^2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ;
  - ▶ Na Figura 6b, testamos  $H_0 : \sigma \leq \sigma_0$  versus  $H_1 : \sigma > \sigma_0$ . Rejeitamos  $H_0$  se  $x_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \in RC = \{x_0^2 \mid x_0^2 > \chi_{1-\alpha; n-1}^2\}$ , em que  $P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{1-\alpha; n-1}^2\right) = 1 - \alpha$ ;
  - ▶ Na Figura 6c, testamos  $H_0 : \sigma \geq \sigma_0$  versus  $H_1 : \sigma < \sigma_0$ . Rejeitamos  $H_0$  se  $x_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \in RC = \{x_0^2 \mid x_0^2 < \chi_{\alpha; n-1}^2\}$ , em que  $P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{\alpha; n-1}^2\right) = \alpha$ .
- Chamamos  $\chi_{\alpha; n-1}$ ,  $\chi_{1-\alpha; n-1}$ ,  $\chi_{\frac{\alpha}{2}; n-1}$  e  $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}$  de valores críticos.



## Distribuição normal: teste da variância.

### Exemplo

Uma máquina é usada para encher garrafas com álcool gel. Em uma amostra com  $n = 20$  garrafas obtemos  $s^2 = 0,0117m^2$ . Se a variância for maior que 0,01, a proporção de garrafas fora da especificação é inaceitável (pouco ou muito álcool gel), e se a variância for menor que 0,01, o desgaste da máquina é grande e desnecessária. A máquina está regulamente corretamente ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ ?

## Distribuição normal: teste da variância.

### Solução

**Passo 1)** Pelo enunciado, temos que testar as hipóteses:  $H_0 : \sigma = \sigma_0$  e  $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ , em que  $\sigma_0 = 0,01$ .

**Passo 2)** Nível de significância:  $\alpha = 5\%$ .

**Passo 3)** Rejeitamos  $H_0$  se  $x_0^2$  for grande ou pequeno. Ou seja, rejeitamos  $H_0$  se  $x_0^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}; n-1}^2$  e  $x_0^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}^2$ . Então,

$$RC = \{x_0^2 \mid x_0^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}; n-1}^2 \text{ ou } x_0^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}^2\}.$$

**Passo 4)** Vamos encontrar o valor crítico da região crítica:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}; n-1}^2\right) &= P\left(\chi_{19}^2 \leq \chi_{0,025; 19}^2\right) = \frac{\alpha}{2} = 0,025, \text{ então} \\ \chi_{0,025; 19}^2 &= 8,9065165; \end{aligned}$$

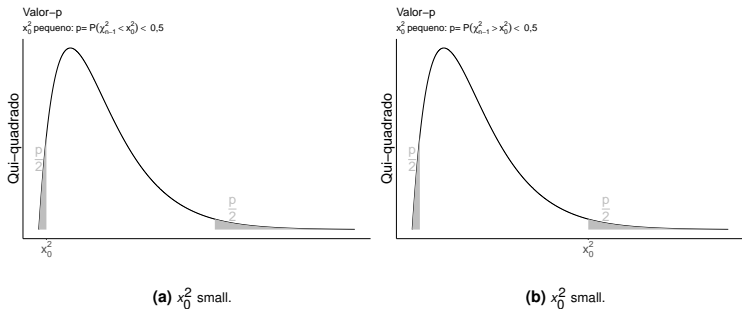
$$\begin{aligned} \blacktriangleright P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{\frac{1-\alpha}{2}; n-1}^2\right) &= P\left(\chi_{19}^2 \leq \chi_{0,975; 19}^2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975, \text{ então} \\ \chi_{0,975; 19}^2 &= 32,8523269. \end{aligned}$$

**Passo 5)** Como  $x_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} = \frac{0,0117 \cdot 19}{0,01} = 22,23 \notin RC$ , concluímos que não podemos rejeitar  $H_0$ .

Ou seja, ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , então a variância populacional é aproximadamente  $0,01 \text{ ml}^2$ .

# Distribuição normal: teste da variância.

## Solução (valor-p)



**Figura 7:** Valor-p depende se  $P(\chi_{n-1}^2 < x_0^2) < 0,5$  ou se  $P(\chi_{n-1}^2 > x_0^2) < 0,5$ .

## Distribuição normal: teste da variância.

### Solução (valor-p)

O valor-p é calculado através da equação:

$$p = 2 \cdot \min \left( P \left( \chi_{n-1}^2 < x_0^2 \right); P \left( \chi_{n-1}^2 > x_0^2 \right) \right).$$

Como  $x_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0} = 22,23$  e  $x_0^2 = 22,23$ . Note que

- ▶  $P \left( \chi_{n-1}^2 < x_0^2 \right) = 0,7270$ ;
- ▶  $P \left( \chi_{n-1}^2 > x_0^2 \right) = 1 - P \left( \chi_{n-1}^2 < x_0^2 \right) = 0,2730$ .

Então

$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot \min \left( P \left( \chi_{n-1}^2 < x_0^2 \right); P \left( \chi_{n-1}^2 > x_0^2 \right) \right) = 2 \cdot \min (0,7270; 0,2730), \\ &= 2 \cdot 0,2730 = 0,546. \end{aligned}$$

Como  $p = 0,546 > \alpha = 0,05$ , ao nível de significância, a variância é aproximadamente 0,01.

## Distribuição normal: teste da variância.

### Exemplo

Uma indústria precisa comprar uma peça em formato cilíndrico e, para cumprir as especificações do INMETRO, o desvio padrão desse diâmetro deve ser, no máximo,  $0,5\text{cm}$ . Um fornecedor do sudeste asiático promete um preço competitivo e afirma que cumpre as especificações do INMETRO. Esta indústria coletou  $n = 16$  amostras disponíveis no mercado desta peça e obteve um desvio padrão  $s = 0,646\text{cm}$ . Ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , você acha que a indústria pode (ou deveria) contratar este fornecedor do sudeste asiático?

## Distribuição normal: teste da variância.

### Solução

**Passo 1)** Queremos testar as hipóteses:  $H_0 : \sigma \leq 0,5$  e  $H_1 : \sigma > 0,5$ ;

**Passo 2)** Nível de significância:  $\alpha = 5\%$ ;

**Passo 3)** Rejeitamos  $H_0$  se  $X_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2}$  for grande. Ou seja, a região crítica é

$$RC = \{x_0^2 \mid x_0^2 > \chi_{1-\alpha; n-1}^2\}.$$

**Passo 4)** O valor crítico é dado por

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{1-\alpha; n-1}^2\right) &= P\left(\chi_{15}^2 \leq \chi_{0,95;15}^2\right) = 1 - \alpha = 0,95, \text{ então} \\ \chi_{0,95;15}^2 &= 24,57901. \end{aligned}$$

**Passo 5)** Como  $s = 0,646$  e  $x_0 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} = 25,04$ , rejeitamos  $H_0$  ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ .

Ou seja, ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , o fornecedor do sudeste asiático não cumpre as especificações do INMETRO e esta indústria não deveria contratar este fornecedor.

## Distribuição normal: teste da variância.

### Solução (valor-p)

O valor-p é dado por

$$p = P\left(X_0^2 \geq x_0^2 \mid H_0\right) = 1 - P\left(\chi_{n-1}^2 \leq x_0^2\right).$$

Como  $s = 0,646$  e  $x_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} = \frac{0,0646^2 \cdot 15}{0,5^2} = 25,04$ , então

$$p = 1 - P\left(\chi_{n-1}^2 \leq x_0^2\right) = 1 - P\left(\chi_{15}^2 \leq 25,04\right) = 1 - 0,951 = 0,049.$$

Então, como  $p = 0,049 < \alpha = 0,05$ , ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , rejeitamos  $H_0$  e não é aconselhável contratar o fornecedor do sudeste asiático.

## Distribuição normal: teste de variância.

### Exemplo

Imagine que um pesquisador coletou uma amostra com 16 observações de uma variável aleatória contínua com distribuição normal. Na Tabela 6, apresentamos algumas sobre as hipóteses  $H_0 : \sigma \geq 1$  e  $H_1 : \sigma < 1$ . Você rejeitaria  $H_0$  ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ ?

tamanho da amostra	$s^2$	$x_0^2$	valor-p	Decisão	$\chi_{1-\alpha; n-1}^2$	$\alpha$
16	1,738					5%

**Tabela 6:** Algumas informações do experimento.



## Distribuição normal: teste de variância.

### Solução

**Passo 1)** Pelo enunciado, temos as seguintes hipóteses:  $H_0 : \sigma \geq 1$  e  $H_1 : \sigma < 1$ .

**Passo 2)** Nível de significância  $\alpha = 5\%$ .

**Passo 3)** Rejeitamos  $H_0$  se  $x_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2}$  for grande. Ou seja, a região crítica é

$$RC = \{x_0^2 \mid x_0^2 < \chi_{\alpha;n-1}^2\}.$$

**Passo 4)** Vamos encontrar o valor crítico dado por

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{\alpha;n-1}^2\right) &= P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{0,05;15}^2\right) = \alpha = 0,05, \text{ então} \\ \chi_{0,05;15}^2 &= 7,2609439. \end{aligned}$$

**Passo 5)** Como  $s^2 = 1,738$  e  $x_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} = 26,07$ , como  $x_0^2 \notin RC$  não rejeitamos  $H_0$ .

Ou seja, ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , não rejeitamos  $H_0$ .

## Distribuição normal: teste de variância.

### Solução (valor-p)

O valor-p é dado por

$$p = P\left(X_0^2 \leq x_0^2 \mid H_0\right) = P\left(\chi_{n-1}^2 \leq x_0^2\right).$$

Como  $s^2 = 1,738$  e  $x_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} = 26,07$ , então

$$p = P\left(\chi_{n-1}^2 \leq 26,07\right) = 0,9627.$$

Então, como  $p = 0,9627 > 0,05 = \alpha$ , ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , não rejeitamos  $H_0$ .

## Teste para proporção.

Sejam

- ▶  $x_1, \dots, x_n$  valores amostrados de *Bernoulli*( $p$ );
- ▶  $\alpha$  é o nível de significância (estabelecido pelo pesquisador e geralmente  $\alpha = 5\%$ ).

Queremos testar as seguintes hipóteses:

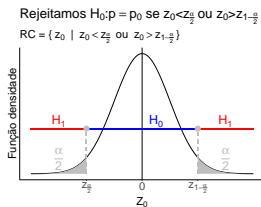
- ▶ Teste bilateral:  $H_0 : p = p_0$  e  $H_1 : p \neq p_0$ ;
- ▶ Teste unilateral:  $H_0 : p \leq p_0$  e  $H_1 : p > p_0$ ;
- ▶ Teste unilateral:  $H_0 : p \geq p_0$  e  $H_1 : p < p_0$ .

**Ideia:** Primeiro calculamos a distância padronizada de  $\hat{p} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$  e  $p_0$ :

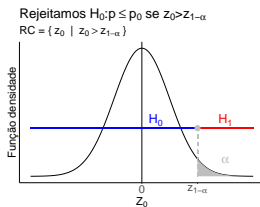
$$z_0 = \frac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}. \text{ Então,}$$

- ▶ Teste bilateral: Rejeitamos  $H_0 : p - p_0 = 0$  se  $|z_0|$  for grande;
- ▶ Teste unilateral: Rejeitamos  $H_0 : p - p_0 \leq 0$  se  $z_0$  for grande;
- ▶ Teste unilateral: Rejeitamos  $H_0 : p - p_0 \geq 0$  se  $z_0$  for pequeno.

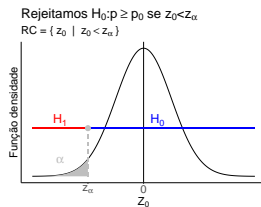
## Teste para proporção.



(a) Teste bilateral.



(b) Teste unilateral.



(c) Teste unilateral.

**Figura 8:** Região crítica para o teste Z.

## Teste para proporção.

- ▶ Na Figura 8a, testamos  $H_0 : p = p_0$  versus  $H_1 : p \neq p_0$ . Rejeitamos  $H_0$  se  $z_0 = \frac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \in RC = \{z_0 \mid z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ , em que  $\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$  e  $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ;
  - ▶ Na Figura 8b, testamos  $H_0 : p \leq p_0$  versus  $H_1 : p > p_0$ . Rejeitamos  $H_0$  se  $z_0 = \frac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \in RC = \{z_0 \mid z_0 > z_{1-\alpha}\}$ , em que  $\Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ ;
  - ▶ Na Figura 8c, testamos  $H_0 : p \geq p_0$  versus  $H_1 : p < p_0$ . Rejeitamos  $H_0$  se  $z_0 = \frac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \in RC = \{z_0 \mid z_0 < z_{\alpha}\}$ , em que  $\Phi(z_{\alpha}) = \alpha$ .
- Chamamos  $z_{\alpha}$ ,  $z_{1-\alpha}$ ,  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  e  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  são chamados de valores críticos.

## Teste para proporção.

### Exemplo

Suponha que uma marca entrevistou 1000 consumidores, e 850 afirmaram estarem satisfeitos com a marca. Ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , decida entre as hipóteses  $H_0 : p = 0,9$  e  $H_1 : p \neq 0,9$ , em que  $p$  é a proporção populacional de consumidores satisfeitos com a marca. Calcule o valor-p.

## Teste para proporção.

### Solução

**Passo 1)** Pelo enunciado, queremos testar as seguintes hipóteses:  $H_0 : p = 0,9$  e  $H_1 : p \neq 0,9$ ;

**Passo 2)** Nível de significância  $\alpha = 5\%$ ;

**Passo 3)** Rejeitamos  $H_0$  se  $|z_0| = \left| \frac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \right|$  for grande. Ou seja,

$$RC = \left\{ z_0 \mid z_{\frac{\alpha}{2}} < z_0 < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}.$$

**Passo 4)** Vamos encontrar os valores críticos:

►  $\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,025}\right) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$ , então  $z_{0,025} = -1,96$ ;

►  $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,975}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$ , então  $z_{0,975} = 1,96$ .

**Passo 5)** Como  $\hat{p} = \frac{850}{1000} = 0,850$ ,  $p_0 = 0,9$  e  $z_0 = \frac{(0,850-0,9)\sqrt{1000}}{\sqrt{0,9 \cdot 0,1}} = -5,27 \in RC$ , então rejeitamos  $H_0$  ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ .

Ao nível de significância 5%, a proporção de consumidores satisfeitos com a marca não é 90%.

## Teste para proporção.

### Solução (valor-p)

O valor-p é calculado através de

$$p = P(|Z| > |z_0| \mid H_0) = 2[1 - \Phi(|z_0|)],$$

em que  $Z \sim N(0, 1)$ .

Como  $\hat{p} = 0,850$ ,  $n = 1000$ ,  $p_0 = 0,9$  e  $z_0 = -5,27$ , então

$$\begin{aligned} p &= 2[1 - \Phi(|z_0|)] \\ &= 2[1 - 1] = 0. \end{aligned}$$

Como  $p = 0 < \alpha = 5\%$ , rejeitamos  $H_0$  ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , ou seja, a proporção de consumidores satisfeitos com a marca não é 90% ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ .



## Teste para proporção.

### Exemplo

Um pesquisador afirma que pelo menos 10% dos capacetes usados pelos jogadores de futebol americano têm sérios problemas de fabricação que podem causar sérios danos físicos aos atletas. Uma amostra com 200 capacetes foram testados e 16 apresentaram falhas de produção. Esta amostra suporta a afirmação do pesquisador ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ ? Calcule o valor-p.

## Teste para proporção.

### Solução

**Passo 1)** Temos que decidir entre as hipóteses:  $H_0 : p \leq 0,1$  e  $H_1 : p > 0,1$ ;

**Passo 2)** Nível de significância  $\alpha = 5\%$ ;

**Passo 3)** Rejeitamos  $H_0$  se  $z_0$  for grande. Ou seja,  $RC = \{z_0 \mid z_0 > z_{1-\alpha}\}$ ;

**Passo 4)** O valor crítico é dado por:

$$\blacktriangleright \Phi(z_{1-\alpha}) = \Phi(z_{0,95}) = 1 - \alpha = 0,95, \text{ então } z_{0,95} = 1,65.$$

**Passo 5)** Como  $p_0 = 0,1$ ,  $n = 200$ ,  $\hat{p} = \frac{16}{200} = 0,08$  e

$z_0 = \frac{(0,08-0,1)\sqrt{200}}{\sqrt{0,1 \cdot 0,9}} = -0,94 \notin RC$ , então, ao nível de significância 5%, não rejeitamos  $H_0$ .

Ao nível de significância 5%, o pesquisador não tem evidência estatística para afirmar que pelo menos 10% tem defeitos de fabricação.

## Teste para proporção.

### Solução (valor-p)

O valor-p pode ser calculado por

$$p = P(Z > z_0 \mid H_0) = 1 - \Phi(z_0),$$

em que  $Z \sim N(0, 1)$ .

Como  $p_0 = 0,1$ ,  $\hat{p} = 0,08$ ,  $n = 200$  e  $z_0 = \frac{(-\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = -0,94$ , então

$$p = 1 - \Phi(-0,94) = 1 - 0,1729 = 0,82.$$

Como  $p = 0,82 > \alpha = 0,05$ , não rejeitamos  $H_0$  e não temos evidência estatística para afirmar que pelo menos 10% dos capacetes usados pelos jogadores de futebol têm sérios problemas de fabricação.

## Teste para proporção.

### Exemplo

Imagine que temos uma amostra de uma variável aleatória discreta com distribuição Bernoulli com probabilidade de  $p$ . Complete as informações da Tabela 7. Ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , qual a decisão para as hipóteses  $H_0 : p \geq 0,4$  e  $H_1 : p < 0,4$ ?

$\hat{p}$	Tamanho da amostra	valor-p	$z_0$	$IC(p; 95\%)$	$\alpha$
				(0,4907; 0,6293)	5%

**Tabela 7:** Algumas informações do experimento.

## Teste para proporção.

### Solução

Lembre das aulas de intervalo de confiança com coeficiente de confiança  $\gamma = 95\%$ :

$$\begin{aligned} IC(p, 95\%) &= \left( \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}} + \hat{p}; \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}} + \hat{p} \right) \\ &= \left( \frac{-1,96}{2\sqrt{n}} + \hat{p}; \frac{1,96}{2\sqrt{n}} + \hat{p} \right) = (0,4907; 0,6293). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \frac{0,4907 + 0,6293}{2} = 0,56 \\ n &= \left\lceil \left[ \frac{1,96}{0,6293 - 0,4907} \right]^2 \right\rceil = 200. \end{aligned}$$

## Teste para proporção.

### Solução

**Passo 1)** Queremos ter as hipóteses:  $H_0 : p \geq 0,4$  e  $H_1 : p < 0,4$ ;

**Passo 2)** Nível de significância  $\alpha = 5\%$ ;

**Passo 3)** Rejeitamos  $H_0$  se  $z_0 = \frac{(\hat{p}-p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$  for grande. Ou seja,

$$RC = \{z_0 \mid z_0 < z_\alpha\};$$

**Passo 4)** O valor crítico é dado por

$$\blacktriangleright \Phi(z_\alpha) = \Phi(z_{0,05}) = \alpha = 0,05, \text{ então } z_{0,05} = -1,64;$$

**Passo 5)** Como  $\hat{p} = 0,56$ ,  $n = 200$ ,  $p_0 = 0,4$  e

$$z_0 = \frac{(\hat{p}-p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = \frac{(0,56-0,4)\sqrt{200}}{\sqrt{0,4 \cdot 0,6}} = 4,62, \text{ então } z_0 \notin RC \text{ e não}$$

rejeitamos  $H_0$  ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ .

## Teste para proporção.

### Solução (valor-p)

O valor-p é dado por

$$p = P(Z < z_0) = \Phi(z_0),$$

em que  $Z \sim N(0, 1)$ .

Como  $\hat{p} = 0,56$ ,  $n = 200$ ,  $p_0 = 0,4$  e  $z_0 = 4,62$ , então

$$p = \Phi(z - 0) = \Phi(4,62) = 1.$$

Como  $p = 1 > \alpha = 0,05$ , ao nível de significância  $\alpha = 5\%$ , não rejeitamos  $H_0$ .

# Roteiro: Procedimento de Neymann-Pearson e valor-p.

distribuição	$\sigma^2$ conhecido?	$H_1$	região crítica	valor-p
Normal	Sim	$\mu \neq \mu_0$	$RC = \{z_0 \mid z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2[1 - \Phi( z_0 )]$
Normal	Sim	$\mu < \mu_0$	$RC = \{z_0 \mid z_0 < z_\alpha\}$	$\Phi(z_0)$
Normal	Sim	$\mu > \mu_0$	$RC = \{z_0 \mid z_0 > z_{1-\alpha}\}$	$1 - \Phi(z_0)$
Normal	Não	$\mu \neq \mu_0$	$RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \text{ ou } t_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}\}$	$2[1 - P(t_{n-1} \leq  t_0 )]$
Normal	Não	$\mu < \mu_0$	$RC = \{t_0 \mid t_0 < t_{\alpha; n-1}\}$	$P(t_{n-1} \leq t_0)$
Normal	Não	$\mu > \mu_0$	$RC = \{t_0 \mid t_0 > t_{1-\alpha; n-1}\}$	$1 - P(t_{n-1} \leq t_0)$
Normal	Não	$\sigma \neq \sigma_0$	$RC = \{x_0^2 \mid x_0^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}; n-1}^2 \text{ ou } x_0^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}^2\}$	$2 \cdot \min\left(P\left(\chi_{n-1}^2 < x_0^2\right); P\left(\chi_{n-1}^2 > x_0^2\right)\right)$
Normal	Não	$\sigma < \sigma_0$	$RC = \{x_0^2 \mid x_0^2 < \chi_{\alpha; n-1}^2\}$	$P\left(\chi_{n-1}^2 \leq x_0^2\right)$
Normal	Não	$\sigma > \sigma_0$	$RC = \{x_0^2 \mid x_0^2 > \chi_{1-\alpha; n-1}^2\}$	$1 - P\left(\chi_{n-1}^2 \leq x_0^2\right)$
Bernoulli*	—	$p \neq p_0$	$RC = \{z_0 \mid z_0 < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2 \cdot [1 - \Phi( z_0 )]$
Bernoulli*	—	$p < p_0$	$RC = \{z_0 \mid z_0 < z_\alpha\}$	$\Phi(z_0)$
Bernoulli*	—	$p > p_0$	$RC = \{z_0 \mid z_0 > z_{1-\alpha}\}$	$1 - \Phi(z_0)$

**Tabela 8:** Região crítica do procedimento de Neymann-Pearson e valor-p.



## Roteiro: Procedimento de Neymann-Pearson e valor-p.

### Observação:

Na Tabela 8, temos que:

$$\blacktriangleright z_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}, t_0 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} \text{ e } \chi_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2}, \text{ em que } s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}};$$

$$\blacktriangleright \text{Quando queremos testar a proporção (distribuição = Bernoulli), temos que } z_0 = \frac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}};$$

$$\blacktriangleright \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}, \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \Phi(z_\alpha) = \alpha \text{ e } \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha;$$

$$\blacktriangleright P\left(t_{n-1} \leq t_{\frac{\alpha}{2}; n-1}\right) = \frac{\alpha}{2}, P\left(t_{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}, P(t_{n-1} \leq t_{\alpha; n-1}) = \alpha \text{ e } P(t_{n-1} \leq t_{1-\alpha; n-1}) = 1 - \alpha;$$

$$\blacktriangleright P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}; n-1}^2\right) = \frac{\alpha}{2}, P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}^2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}, P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{\alpha; n-1}^2\right) = \alpha \text{ e } P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \chi_{1-\alpha; n-1}^2\right) = 1 - \alpha$$