Exercício 5.2

Giovanni Guarnieri Soares

Junho 2020

Construa a equação de Navier-Stokes em sua forma mais simples com base na segunda lei de Newton:

$$\vec{F} = m.\vec{a}. \tag{1}$$

Para uma partícula em um campo de velocidades

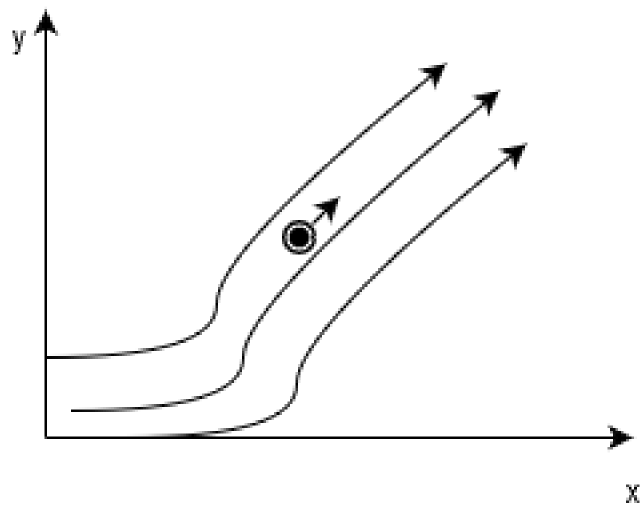

Figura 1: Partícula em um campo de velocidades.

A velocidade da partícula está ligada ao tempo e posição dela no campo de velocidades, fazendo assim $\vec{V}(x, y, t)$. Para uma generalização do espaço tridimensional fazemos $\vec{V}(x, y, z, t)$

Para uma partícula genérica, fazendo a derivada total:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}u + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}v + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}w + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \tag{2}$$

onde u, v e w são as velocidades em x, y e z respectivamente.

Então de volta a equação de Newton temos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}, \tag{3}$$

logo:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt}, \tag{4}$$

$$\vec{F} = m\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}u + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}v + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}w + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \tag{5}$$

Para a massa m:

$$m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z, \tag{6}$$

que substituindo

$$\vec{F} = \rho \Delta x \Delta y \Delta z(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}u + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}v + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}w + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}). \tag{7}$$

Agora para $\vec{F}$ levaremos em conta a força da gravidade agindo, decompondo-a em componentes:

$$\begin{aligned} \vec{F_x} = (K_{xx}|_{x+\Delta x} - g_{xx}|_x)\Delta y \Delta z \\ +(K_{yx}|_{y+\Delta y} - g_{yx}|_y)\Delta x \Delta z \\ +(K_{zx}|_{z+\Delta z} - g_{zx}|_z)\Delta x \Delta y \\ +g_x \rho \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned} \tag{8}$$

De maneira análoga para $\vec{F_y}$ e para $\vec{F_z}$.
Temos então que

$$\vec{F} = [\vec{F_x}, \vec{F_y}, \vec{F_z}], \tag{9}$$

e

$$\vec{v} = [u, v, w] \tag{10}$$

Substituindo 8 em 7 e dividindo por $\Delta x \Delta y \Delta z$ -¿ 0 temos:

$$\frac{\partial K_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial K_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial K_{zx}}{\partial z} + g_x \rho = \rho(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}). \tag{11}$$

E de forma análoga temos as mesmas equações para y e z:

$$\frac{\partial K_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial K_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial K_{zy}}{\partial z} + g_y \rho = \rho(\frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial K_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial K_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial K_{zz}}{\partial z} + g_z\rho = \rho(\frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}). \tag{13}$$

Assumindo um fluido Newtoniano com viscosidade μ

$$K_{xy} = Kyx = (\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}) \tag{14}$$

$$K_{zy} = Kyz = (\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}) \tag{15}$$

$$K_{xz} = Kzx = (\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}) \tag{16}$$

$$K_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\vec{v} + 2\mu\frac{du}{dz} \tag{17}$$

$$K_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\vec{v} + 2\mu\frac{dv}{dy} \tag{18}$$

$$K_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\vec{v} + 2\mu\frac{dw}{dz} \tag{19}$$

Substituindo K_{xx}, K_{yx} e K_{zx} em 11.

$$\begin{split}\frac{\partial(-p - \frac{2}{3}\mu\nabla\vec{v} + 2\mu\frac{du}{dz})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx})}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx})}{\partial z} + g_x\rho = \\ \rho(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}).\end{split} \tag{20}$$

Separando a pressão e para um μ constante temos:

$$\begin{split}\frac{-\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial(\nabla\vec{v} + 2\mu\frac{du}{dz})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx})}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx})}{\partial z} + g_x\rho = \\ \rho(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}).\end{split} \tag{21}$$

Assumindo um fluído incompressível, para a componente x:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 \bullet u + g_x\rho = \rho(\nabla \bullet u) \bullet (u, v, w) + \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{22}$$

e de maneira análoga para y e z

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\nabla^2 \bullet v + g_y\rho = \rho(\nabla \bullet v) \bullet (u, v, w) + \frac{\partial v}{\partial t}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\nabla^2 \bullet w + g_z\rho = \rho(\nabla \bullet w) \bullet (u, v, w) + \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{24}$$

Formando assim as equações simplificadas de Navier-Stokes