Prezzare le opzioni call e put attraverso una simulazione Montecarlo e breve compendio teorico di riferimento

Giorgio Bella - 26 gennaio 2022

Tassi d'interesse

Il tasso d'interesse permette di determinare la variazione che subisce un capitale investito al tempo T in un tempo successivo $T + \Delta T$.

Ad esempio, quando una banca presta del denaro ad un cliente viene fissato un tasso attraverso il quale l'importo oggetto del finanziamento viene rivalutato periodicamente finché il debito non viene estinto dal contraente. O ancora, se un investitore decide di comprare dei titoli di stato, è dichiarato un tasso che consente di determinare, a scadenza dell'investimento, quale sarà l'importo spettante.

In tutti questi esempi la sola dichiarazione del tasso d'interesse creerebbe ambiguità, perché il suo significato dipende dal modo in cui il tasso d'interesse viene misurato.

Supponendo, ad esempio, che gli interessi vengano calcolati una volta all'anno, l'investimento del capitale $C = 100€$ ad un tasso del $i = 10\%$, frutta dopo un anno il montante M:

$$M = C \cdot (1 + i) = 100€ \cdot 1.1 = 110€$$

Se gli interessi venissero però capitalizzati due volte all'anno, ipotizzando di tenere fissa la durata dell'investimento ad un anno, ogni 6 mesi andrebbe applicato $i' = \frac{10\%}{2} = 5\%$, costituendo quindi un montante pari a:

$$M = C \cdot (1 + i') \cdot (1 + i') = C \cdot (1 + 1')^2 = 100 \cdot 1.05^2 = 110.25€$$

Per analogia, se gli interessi venissero capitalizzati m volte all'anno, si otterrebbe:

$$M = C \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

Se l'investimento si protraesse per n anni, considerano una capitalizzazione m volte all'anno, si avrebbe un montate pari a:

$$M = C \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Risulta evidente che se la capitalizzazione degli interessi avvenisse nel continuo si avrebbe:

$$M = \lim_{m \to +\infty} C \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = C \cdot e^{i \cdot n}$$

Questo caso approssima molto bene il caso di una capitalizzazione applicata ogni giorno dell'anno e quindi questa formulazione viene largamente utilizzata per praticità di calcolo.

Invertendo l'espressione, è possibile calcolare il valore attuale di un importo futuro. Nel caso nella capitalizzazione applicata m volte all'anno per n anni si ha:

$$A = M \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-m \cdot n}$$

E nel continuo:

$$A = M \cdot e^{-i \cdot n}$$

Nel caso specifico del problema di *Option Pricing*, questa espressione è utile perché la determinazione del prezzo del contratto derivato acquistato oggi è di fatto calcolato come il valore attuale del possibile profitto futuro.

Contratti derivati: le opzioni

Le opzioni sono strumenti finanziari il cui valore non è autonomo ma deriva dal prezzo di una attività sottostante di varia natura (reale come nel caso di materie prime quali grano, oro, petrolio, ecc. , oppure finanziaria come nel caso di azioni, obbligazioni, tassi di cambio, indici, ecc.). Il termine “derivato” indica questa dipendenza.

Possiamo quindi definire le opzioni come dei contratti finanziari che danno il diritto, ma non l’obbligo, all’acquirente dietro il pagamento di un prezzo (premio), di esercitare o meno la facoltà di acquistare (Call) o vendere (Put) una data quantità di una determinata attività finanziaria, detta sottostante, a una determinata data di scadenza o entro tale data e a un determinato prezzo di esercizio (strike price).

Con l'acquisto di opzioni call ci si tutela perciò dal rischio che il valore del sottostante cresca oltre la propria soglia di accettazione, mentre con l'acquisto di opzioni put che scenda al costo del premio pagato per l'acquisto dello strumento.

In sintesi:

- Nel caso dell'acquisto di opzioni call, lo strumento garantisce un profitto linearmente crescente al crescere del prezzo del sottostante a scadenza oltre lo strike price concordato (perché permette di acquistare il sottostante ad un prezzo inferiore a quello di mercato e rivenderlo immediatamente a prezzo più alto).

- Nel caso di acquisto di opzioni put, secondo un profitto linearmente crescente al decrescere del prezzo del sottostante al di sotto dello strike price concordato (perché permette di vendere istantaneamente a prezzo più alto il sottostante acquistabile a prezzo inferiore).

In entrambi casi di dice che il contratto è *in the money* quando il valore del sottostante rende conveniente esercitare il diritto di opzione perché il suo valore è superiore (nel caso di acquisto di opzione call) o inferiore (nel caso di acquisto di opzione put) allo strike price concordato.

E' anche possibile vendere (spesso riferito come "scrivere" contratti, se ci si mette nei panni dell'intermediario) opzioni put e call. In questo caso, chi vende l'opzione incassa subito il potenziale profitto e si espone ad una potenziale perdita futura per compensare la controparte qualora il contratto risulti *in the money* per l'acquirente.

Per comprendere il funzionamento di questi strumenti seguono alcuni esempi.

Acquisto di opzioni call

Ipotizziamo di voler acquistare un *opzione call* su un titolo α a mercato. Il nostro intermediario espone la seguente tabella:

Strike price	*June*		*September*		*December*	
($)	*Bid*	*Offer*	*Bid*	*Offer*	*Bid*	*Offer*
820	56.00	57.50	76.00	77.80	88.00	90.30
840	39.50	40.70	62.90	63.90	75.70	78.00
860	25.70	26.50	51.20	52.30	65.10	66.40
880	15.00	15.60	41.00	41.60	55.00	56.30
900	7.90	8.40	32.10	32.80	45.90	47.20
920	n.a.	n.a.	24.80	25.60	37.90	39.40

Per ogni scadenza desiderata (giugno, settembre, dicembre, etc.) sono presenti le quotazioni per acquistare ("offer" in tabella o "denaro" in italiano) e per vendere ("bid" o "lettera" in italiano) in funzione dello strike price desiderato per la scadenza scelta.

I prezzi listati si riferiscono ad opzioni di acquisto di una singola azione del relativo sottostante α.

Ad esempio, se si desidera comprare il diritto di acquistare 100 azioni del sottostante α al prezzo di $880\$$ a dicembre, dovremo pagare $100 \cdot 56.30\$ = 5600\$$ all'intermediario per acquistare la relativa opzione con queste caratteristiche.

A dicembre sono possibili due scenari:

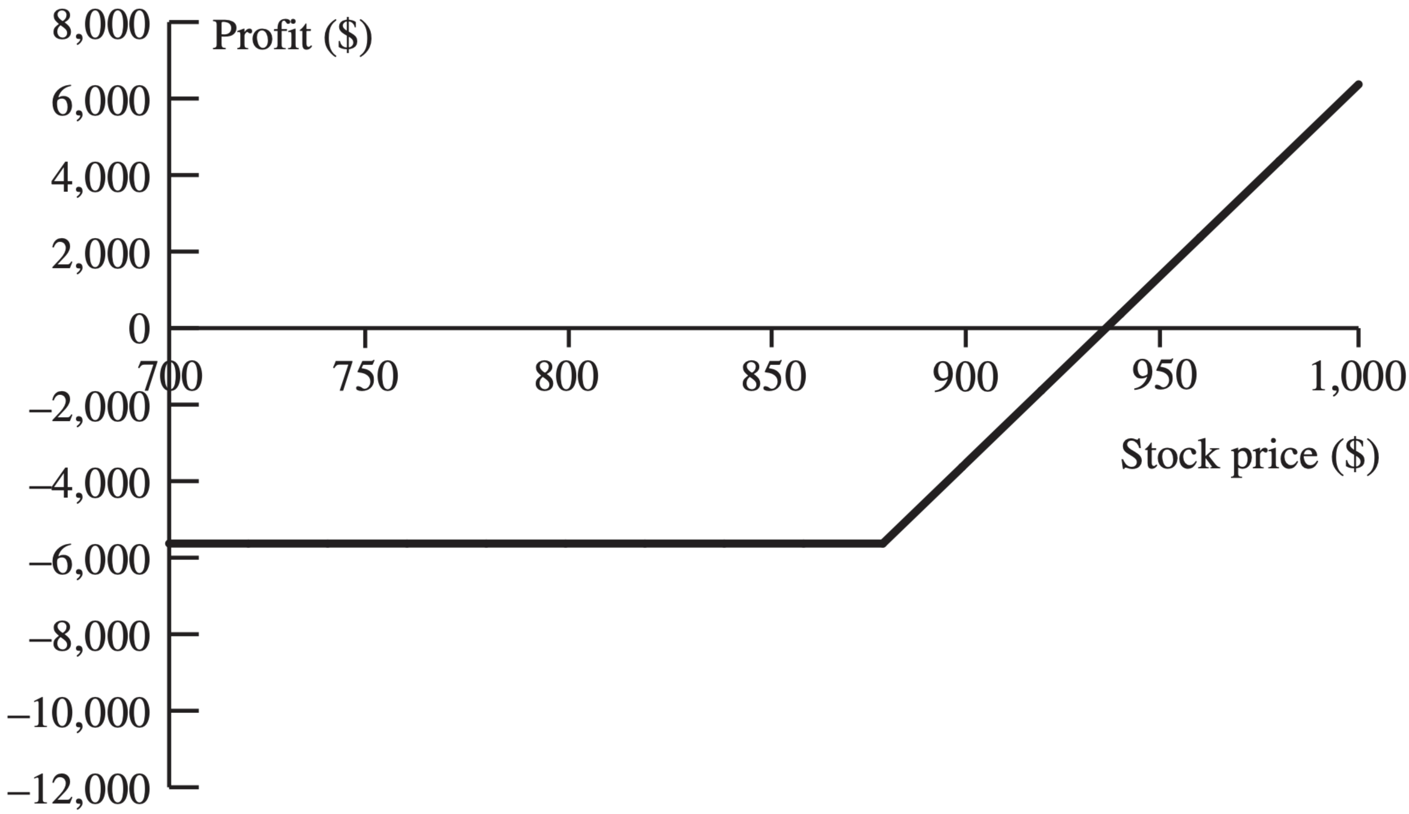
1. il prezzo del sottostante α non ha superato il valore di $880\$$ per azione, quindi l'opzione non ha ragione di essere esercitata e l'investitore realizzerà una perdita pari al costo del derivato acquistato ($5600\$$)
2. il prezzo del sottostante α ha superato il valore di $880\$$ per azione, quindi l'opzione di acquisto viene esercitata e si ha il diritto di acquistare 100 azioni di α per un valore, lo *strike price*, inferiore a quello di mercato. Questo comporterà un profitto se la differenza tra il prezzo del sottostante e lo *strike price* è tale da coprire il costo sostenuto per l'acquisto nell'opzione. Nel nostro caso, se l'azione α ha un valore a scadenza $\geq 880 + 56.30 = 936.30$ l'investitore ottiene un profitto.

Ipotizzando, ad esempio, che il valore dell'azione α a scadenza sia pari a $940\$$, l'investitore realizzerebbe:

$$-5600\$ - 880\$ \cdot 100 + 940\$ \cdot 100 = -5600\$ - 88000\$ + 94000\$ = 400\$$$

L'addizione considera l'uscita di $5600\$$ per l'acquisto dell'opzione, l'uscita di $88000\$$ per l'acquisto delle azioni come da esercizio del diritto garantito dall'opzione e l'entrata di $94000\$$ frutto della vendita a mercato delle azioni appena acquistate.

Nel grafico a seguire una rappresentazione visuale del profitto dell'investitore in funzione della variazione di prezzo del sottostante.



Acquisto di opzioni put

Nel caso di acquisto un *opzione put* sul medesimo titolo α a mercato, il nostro intermediario espone la seguente tabella:

Strike price ($)	*June*		*September*		*December*	
	Bid	*Offer*	*Bid*	*Offer*	*Bid*	*Offer*
820	5.00	5.50	24.20	24.90	36.20	37.50
840	8.40	8.90	31.00	31.80	43.90	45.10
860	14.30	14.80	39.20	40.10	52.60	53.90
880	23.40	24.40	48.80	49.80	62.40	63.70
900	36.20	37.30	59.20	60.90	73.40	75.00
920	n.a.	n.a.	71.60	73.50	85.50	87.40

Per ogni scadenza desiderata (giugno, settembre, dicembre, etc.) sono presenti le quotazioni per acquistare ("offer" in tabella o "denaro" in italiano) e per vendere ("bid" o "lettera" in italiano) in funzione dello strike price desiderato per la scadenza scelta.

I prezzi listati si riferiscono ad opzioni di vendita di una singola azione del relativo sottostante α.

Ad esempio, se si desidera acquistare il diritto a vendere 100 azioni del sottostante α al prezzo di $860\$$ a giugno, dovremo pagare $100 \cdot 14.80\$ = 1480\$$ all'intermediario per acquistare la relativa opzione con queste caratteristiche.

A giugno sono possibili due scenari:

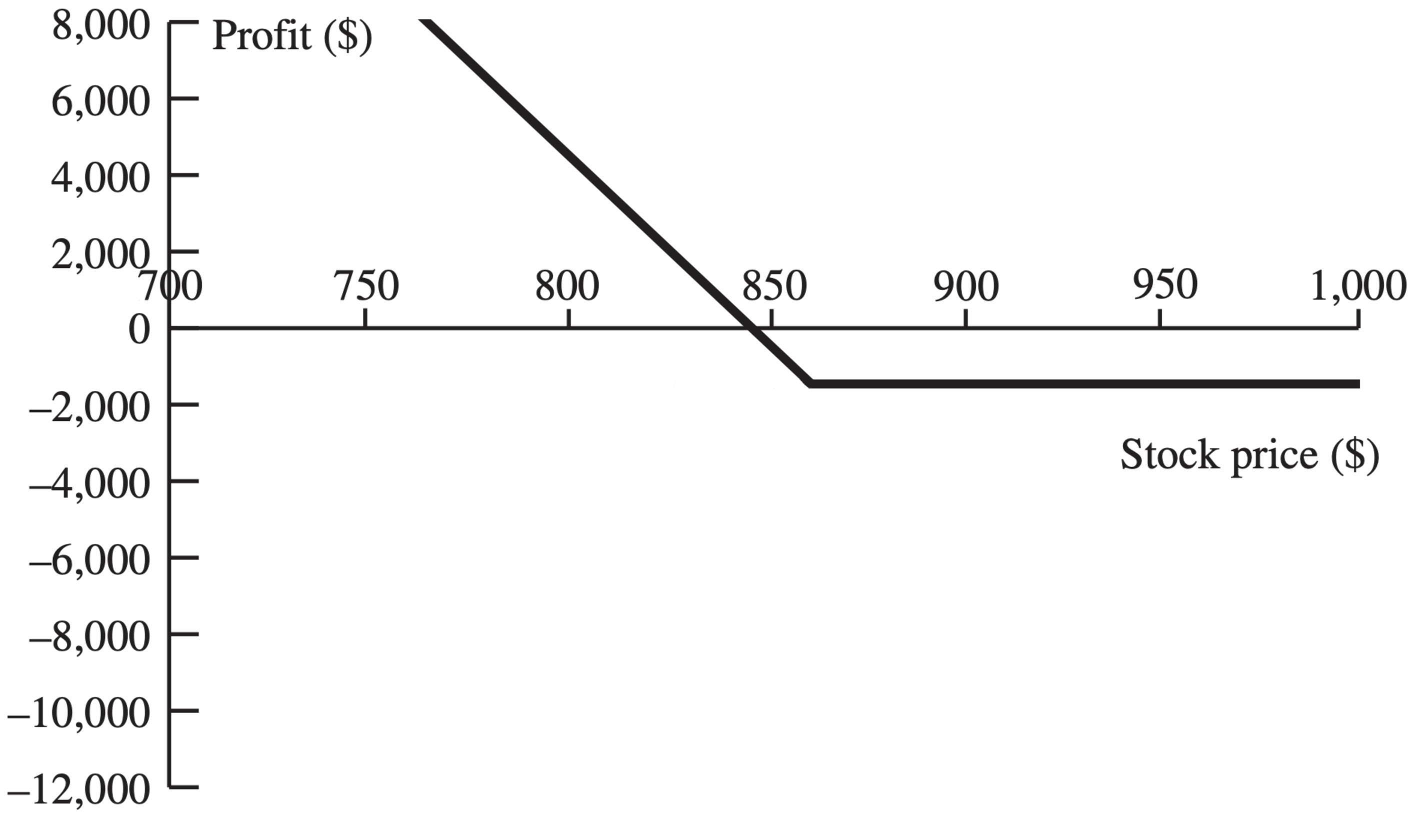
1. il prezzo del sottostante α ha superato il valore di $860\$$ per azione, quindi l'opzione non ha ragione di essere esercitata e l'investitore realizzerà una perdita pari al costo del derivato acquistato ($1480\$$);
2. il prezzo del sottostante α non ha superato il valore di $860\$$ per azione, quindi l'opzione di acquisto viene esercitata e si ha il diritto di vendere 100 azioni di α per un valore, lo *strike price*, superiore a quello di mercato. Questo comporterà un profitto se la differenza tra lo *strike price* e il prezzo del sottostante è tale da coprire il costo sostenuto per l'acquisto nell'opzione. Nel nostro caso, se l'azione α ha un valore a scadenza $\leq 860 - 14.80 = 845.20$ l'investitore ottiene un profitto.

Ipotizzando, ad esempio, che il valore dell'azione α a scadenza sia pari a $820\$$, l'investitore realizzerebbe:

$$-1480\$ - 820\$ \cdot 100 + 860\$ \cdot 100 = -1480\$ - 82000\$ + 86000\$ = 2520\$$$

L'addizione considera l'uscita di $1480\$$ per l'acquisto dell'opzione, l'uscita di $82000\$$ per l'acquisto delle azioni sul mercato alla data di scadenza e l'entrata di $94000\$$ frutto della vendita immediata delle azioni appena acquistate come da esercizio del diritto garantito dall'opzione.

Nel grafico a seguire una rappresentazione visuale del profitto dell'investitore in funzione della variazione di prezzo del sottostante.



Vendita (scrittura) di opzioni

Nel caso di vendita (scrittura) di un *opzione put* sul medesimo titolo α a mercato, il nostro intermediario espone la seguente tabella:

Strike price	*June*		*September*		*December*	
($)	*Bid*	*Offer*	*Bid*	*Offer*	*Bid*	*Offer*
820	5.00	5.50	24.20	24.90	36.20	37.50
840	8.40	8.90	31.00	31.80	43.90	45.10
860	14.30	14.80	39.20	40.10	52.60	53.90
880	23.40	24.40	48.80	49.80	62.40	63.70
900	36.20	37.30	59.20	60.90	73.40	75.00
920	n.a.	n.a.	71.60	73.50	85.50	87.40

Per ogni scadenza desiderata (giugno, settembre, dicembre, etc.) sono presenti le quotazioni per acquistare ("offer" in tabella o "denaro" in italiano) e per vendere ("bid" o "lettera" in italiano) in funzione dello strike price desiderato per la scadenza scelta.

I prezzi listati si riferiscono ad opzioni di vendita di una singola azione del relativo sottostante α.

Ad esempio, se si desidera vendere il diritto di vendere 100 azioni del sottostante α al prezzo di $840\$$ a settembre, incasseremo subito $100 \cdot 31.00\$ = 3100\$$ per vendere la relativa opzione con queste caratteristiche da un certo acquirente.

A settembre sono possibili due scenari:

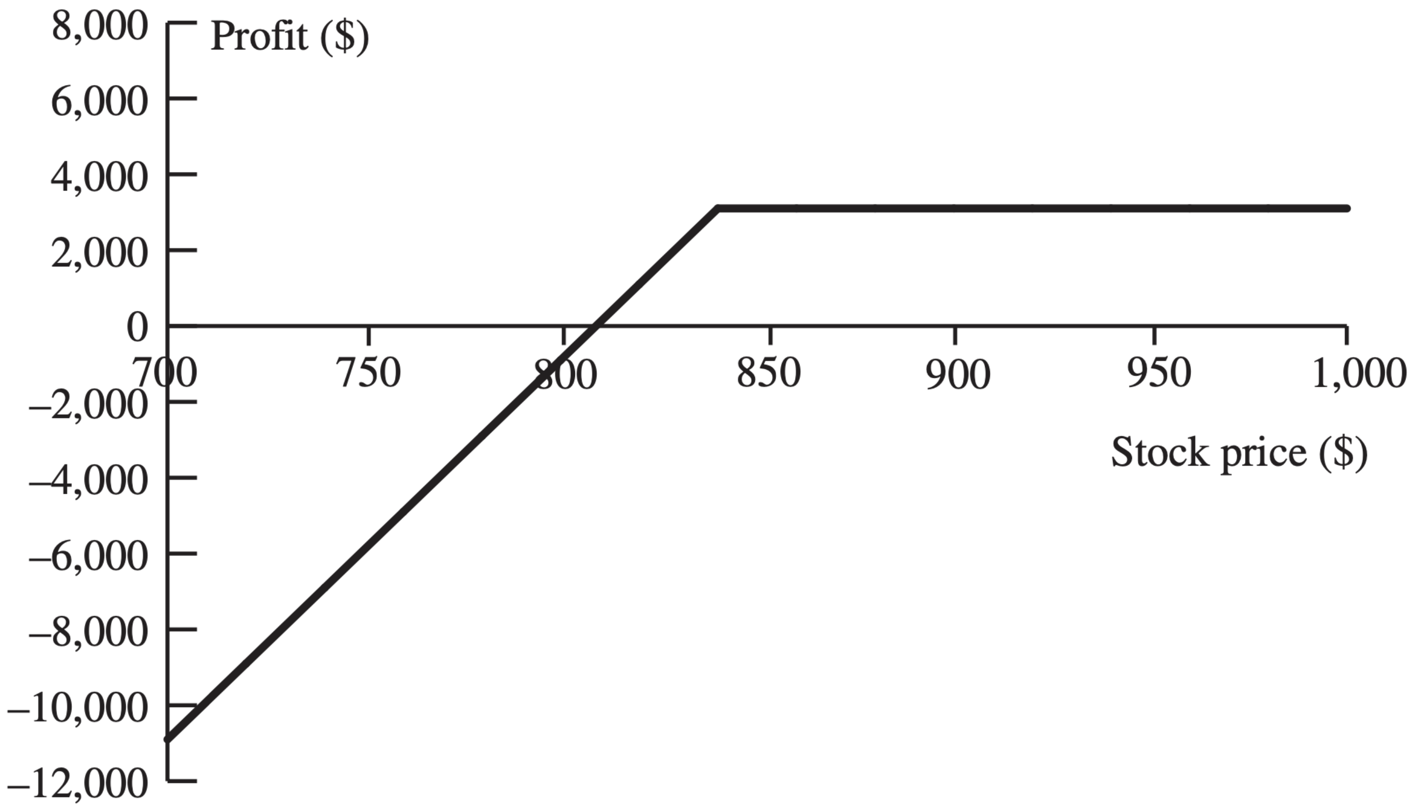
1. il prezzo del sottostante α ha superato il valore di $840\$$ per azione, quindi l'opzione non ha ragione di essere esercitata da parte del nostro acquirente e il denaro incassato inizialmente ($3100\$$) dal venditore è di fatto il profitto dell'operazione;
2. il prezzo del sottostante α è sceso al di sotto del valore di $840\$$ per azione, quindi l'opzione di acquisto viene esercitata dall'acquirente che avrà il diritto di acquistare 100 azioni di α per un valore, lo *strike price*, inferiore a quello di mercato. Questo comporterà una perdita per il venditore che dovrà coprire la differenza tra il prezzo del sottostante e lo *strike price*.

Ipotizzando, ad esempio, che il valore dell'azione α a scadenza sia pari a $800\$$, il venditore realizzerebbe la seguente perdita:

$$-5600\$ - (840\$ - 800\$) \cdot 100 = -5600\$ - 88000\$ + 94000\$ = -400\$$$

L'addizione considera l'entrata di $3100\$$ per l'acquisto dell'opzione, l'uscita di $4000\$$ per garantire all'acquirente l'esercizio dell'opzione di vendita di 100 azioni α al prezzo di $840\$$ l'una come concordato dal contratto di opzione, sebbene a mercato il titolo sia scambiato a $800\$$ ad azione.

Nel grafico a seguire una rappresentazione visuale del profitto del venditore dell'opzione put in funzione della variazione di prezzo del sottostante.



Prezzare le opzioni attraverso simulazione Montecarlo

Al fine di prezzare un'*opzione call* o un'*opzione put* emessa su un certo sottostante è necessario simulare l'evoluzione di prezzo del sottostante stesso giorno per giorno, calcolare il profitto atteso a data di scadenza e attualizzare quel valore ad oggi per determinare il prezzo del contratto.

Per simulare l'evoluzione nel tempo del prezzo del sottostante si utilizzia comunemente un moto browniano geometrico discreto, dove S_{t+dt} rappresenta il prezzo del sottostante al tempo $t + dt$, calcolato in funzione del prezzo dello stesso al tempo t (es. al giorno precedente se dt =1 giorno):

$$S_{t+dt} = S_t \cdot e^{(d+a \cdot X)}$$

X è una normale standard, $a = \sigma \cdot \sqrt{dt}$ e d è definito come il *drift* del moto browniano: $d = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot dt$.

Nell'espressione, dt rappresenta l'intervallo di tempo su cui avviene l'evoluzione del prezzo.

Per come è costruita, la variabile casuale $\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$ (equivalente al log-return della serie) ha distribuzione normale con valore atteso $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ e varainza $\sigma^2 \cdot dt$

Per la finalità dell'esempio, definiamo i parametri del sottostante arbitariarmente:

In [1]:

```
S = 100 # prezzo spot del sottostante
mu = 0.07 # log return del sottostante di riferimento
sigma = 0.2 #volatilità del sottostante
```

Per considerare i parametri di un titolo realmente presente sul mercato, bisogna utilizzare come `S` il prezzo a cui il titolo è attualmente scambiato, come `mu` il valore medio dei log-returns dei prezzi del titolo su un certo intervallo di tempo, come `sigma` la deviazione standard dei log-returns dei prezzi del titolo sul medesimo intervallo di tempo.

Ad esempio, se il sottostante fosse il titolo azionario *Starbucks*, per ottenere `S`, `mu` e `sigma` aggiornati si potrebbe eseguire la seguente cella (opzionale):

In [2]:

```
# Opzionale: eseguire solo se si preferisce utilizzare i dati reali di un titolo

# Import delle ibrerie necessarie
import pandas as pd
import numpy as np
from datetime import datetime
import yfinance as yf

# Definizione dell'intervallo di tempo
start_date = '2021-01-01'
end_date = datetime.today().strftime('%Y-%m-%d')

# Scelta del titolo
ticker = 'SBUX'

# Download dei prezzi del titolo nell'intervallo di tempo scelto
data = yf.download(ticker, start_date, end_date, progress=False)

# Calcolo dei log-return sui prezzi di chiusura: ln(P_t/P_(t-1))
data['Log Returns'] = np.log(data['Adj Close']/data['Adj Close'].shift(1))

# Parametri del sottostante
S = data['Adj Close'][-1] # ultimo prezzo del sottostante
mu = np.mean(data['Log Returns'])
sigma = np.std(data['Log Returns'])

print('Parametri del sottostante per il titolo ' + ticker + ': \n\n S = '
      + str(S) +'\n mu = ' + str(mu) + '\n sigma = ' + str(sigma))
```

```
Parametri del sottostante per il titolo SBUX:

 S = 106.9800033569336
 mu = 0.00014831357357194966
 sigma = 0.01860221417625409
```

Parametri del contratto di opzone sul sottostante:

In [3]:

```
T = 1 # tempo alla scadenza (in anni)
K = 100 # strike price
```

Parametri della simulazione:

In [4]:

```
Nsimulations = 5000
Nsteps = 250 # numero di giorni in cui il mercato è aperto nell'anno
```

Calcolo degli scalari presenti nella serie S_{t+dt}

In [5]:

```
import numpy as np

dt = T/Nsteps
drift = (mu-(sigma**2)/2)*dt
a = sigma*np.sqrt(dt)
```

Generiamo `Nsteps` estrazioni casuali da una normale standard (una per ciascuno step evolutivo del prezzo) e ripetiamo il processo per `Nsimulations` volte:

In [6]:

```
x = np.random.normal(0,1,(Nsimulations,Nsteps))
x
```

Out[6]:

```
array([[ 0.3829175 ,  1.83869318, -0.44792757, ..., -1.13583423,
         0.48124218,  0.61687073],
       [-0.72025507,  1.41699673, -1.62862766, ..., -1.59438464,
         1.16121044, -0.0440558 ],
       [ 1.6360137 , -1.42911448, -1.129907  , ..., -0.19916089,
        -0.39197841, -0.28888497],
       ...,
       [ 0.49347689, -0.17432837,  0.4314443 , ...,  0.53984322,
        -0.74193075,  0.32329058],
       [-0.31962278, -0.93049889,  0.47754748, ..., -1.14782572,
         0.65200289, -0.93338008],
       [ 1.6295633 , -0.69539113,  0.03212671, ...,  0.01052744,
        -0.83302763,  2.55434712]])
```

L'operazione di generazione di estrazioni casuali da una normale è alla radice della determinazione dell'insieme dei possibili scenari di evoluzione di prezzo del sottostante.

Calcolimo iterativamente tutti i S_{t+dt} steps (colonne) per ogni simulazione (righe):

In [7]:

```
Smat = np.zeros((Nsimulations,Nsteps))
Smat[:,0] += S

for i in range(1,Nsteps):
    Smat[:,i] += Smat [:,i-1]*np.exp(drift + a*x[:,i])
Smat
```

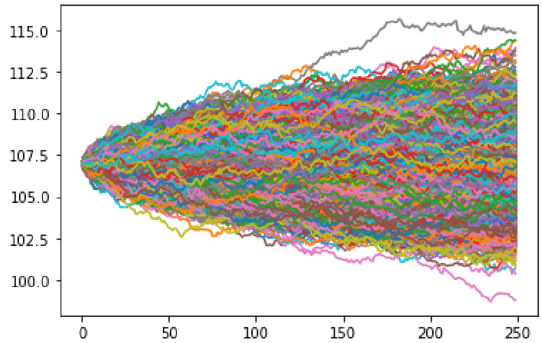
Out[7]:

```
array([[106.98000336, 107.21166625, 107.15517106, ..., 108.52570077,
        108.58715306, 108.66597837],
       [106.98000336, 107.15848863, 106.95334908, ..., 102.20129076,
        102.34100066, 102.33568615],
       [106.98000336, 106.80027164, 106.65838114, ..., 105.89490985,
        105.84607557, 105.81009676],
       ...,
       [106.98000336, 106.95805359, 107.01234842, ..., 107.65533884,
        107.56139827, 107.60230679],
       [106.98000336, 106.86294172, 106.9229877 , ..., 107.11873168,
        107.20092191, 107.08325555],
       [106.98000336, 106.89250474, 106.8965345 , ..., 108.83157754,
        108.72495723, 109.05217903]])
```

Abbiamo così simulato `Nsimulations` possibili traiettorie evolutive del prezzo del sottostante, visivalmente:

In [8]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
for i in range(Nsimulations):
    plt.plot(Smat[i,:])
```



Calcoliamo il potenziale payoff di un'*opzione call* per ciascuna simulazione e il payoff medio di tutte le simulazioni.

In [9]:

```
q = Smat[:,-1]-K # payoff opzione call per ogni simulazione
for i in range(len(q)): # escludiamo payoff negativi che implicano payoff = 0
    if q[i]<0:
        q[i]=0
    else:
        q[i]=q[i]

payoff_call = np.mean(q) # payoff medio considerando tutte le simulazioni
```

Calcoliamo il potenziale payoff di un'*opzione put* per ciascuna simulazione e il payoff medio di tutte le simulazioni.

In [10]:

```
p = K-Smat[:,-1] # payoff opzione put per ogni simulazione
for i in range(len(p)): # escludiamo payoff negativi che implicano payoff = 0
    if p[i]<0:
        p[i]=0
    else:
        p[i]=p[i]

payoff_put = np.mean(p) # payoff medio considerando tutte le simulazioni
```

Attualizzando il payoff medio per le due opzioni si ottengono i relativi prezzi ad oggi. Per effettuare l'attualizzazione possiamo utilizzare l'ipotesi di una capitalizzazione continua se il sottostante è negoziato quotidianamente:

In [11]:

```
call = payoff_call*np.exp(-mu*T)
put = payoff_put*np.exp(-mu*T)
```

In [12]:

```
print("Prezzo di acquisto opzione call: " + str(call))
print("Prezzo di acquisto opzione put: " + str(put))
```

```
Prezzo di acquisto opzione call: 6.9855971672375405
Prezzo di acquisto opzione put: 0.00024103541128981987
```

Caso di opzioni basate su più sottostanti

Nel caso in cui l'opzione sia più complessa ed il contratto preveda dei payoff basati su più di un sottostante, il procedimento generale resta invariato, al netto di generalizzare la costruzione del moto browniano generatore dei diversi scenari.

Riprendendo il caso monovariato utilizzato nel paragrafo precedente, definiamo il moto broewniano geometrico multivariato (ip. n-variato) $\bar{S}_{t+dt}$, dove $\bar{S}$ è un vettore di cardinalità n che rappresenta i prezzi degli n sottostanti nei diversi tempi $t + dt$.

$$\bar{S}_{t+dt} = \bar{S}_t \cdot e^{(\bar{d}+a \cdot \bar{X})}$$

$\bar{X}$ è una normale n-variata standard, $\bar{a} = \bar{\sigma} \cdot \sqrt{dt}$ e d è definito come il *drift* del moto browniano: $\bar{d} = \left(\bar{\mu} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right) \cdot dt$.

Nell'espressione, dt rappresenta l'intervallo di tempo su cui avviene l'evoluzione del prezzo.

Per ottenere $\bar{X}$ è possibile applicare la decomposizione di Cholesky alla matrice di covarianza dei sottostanti che permette così di ottenere variabili casuali correlate a partire da distribuzioni indiopendenti (che possiamo inferire individualmente dalle timeseries dei singoli sottodstanti).

Partiamo dal considerare alcuni titoli sul Nasdaq e ottenere lo storico dei loro prezzi per ricavare:

- `S` il vettore con gli ultimi prezzi dei titoli (base di partenza a T=0 per la nostra simulazione)
- `mu` il vettore delle medie dei log-return dei sottostanti considerati
- `sigma` la deviazione standard di ciascuno dei titoli

In [13]:

```
# Import delle ibrerie necessarie
import pandas as pd
import numpy as np
from datetime import datetime
import yfinance as yf

# Definizione dell'intervallo di tempo
start_date = '2021-01-01'
end_date = datetime.today().strftime('%Y-%m-%d')

# Scelta dei titoli
ticker = ['MSFT','AAPL','GOOG']
S0 = np.zeros(len(ticker))
mu = np.zeros(len(ticker))
sigma = np.zeros(len(ticker))
logRetSeries = np.zeros([len(ticker),])

# Download dei prezzi dei titolo nell'intervallo di tempo scelto
data = yf.download(ticker, start_date, end_date, progress=False)

# Calcolo dei log-return sui prezzi di chiusura: ln(P_t/P_(t-1))
returns = np.log(data['Adj Close']/data['Adj Close'].shift(1))

# Parametri dei sottostanti
for i in range(len(ticker)):
    S0[i] = data['Adj Close'].iloc[:, i][-1] # ultimo prezzo del sottostante
    mu[i] = np.mean(returns.iloc[:, i]) # media log-returns
    sigma[i] = np.std(returns.iloc[:, i]) # dev-std log-returns

cov_matrix = returns.cov()

print('Parametri dei sottostanti ' + str(ticker) + ': \n\nS0 = '
      + str(S0) +'\nmu = ' + str(mu) + '\nsigma = ' + str(sigma) +
      '\ncov_matrix = \n' + str(cov_matrix))
```

```
Parametri dei sottostanti ['MSFT', 'AAPL', 'GOOG']:

S0 = [141.86000061  96.73000336 240.61000061]
mu = [0.00020036 0.00021775 0.00022737]
sigma = [0.01932486 0.02032157 0.0183636 ]
cov_matrix =
          AAPL      GOOG      MSFT
AAPL  0.000374  0.000278  0.000273
GOOG  0.000278  0.000414  0.000301
MSFT  0.000273  0.000301  0.000338
```

Parametri del contratto di opzone sul sottostante:

In [14]:

```
T = 1 # tempo alla scadenza (in anni)
K = np.sum(S0) # strike price basket option
Kr = max(S0) # strike price rainbow option

print('Scadenza derivato (anni) = ' + str(T) +
      '\nStrike price basket option = ' + str(K) +
      '\nStrike price rainbow option = ' + str(Kr))
```

```
Scadenza derivato (anni) = 1
Strike price basket option = 479.2000045776367
Strike price rainbow option = 240.61000061035156
```

Parametri della simulazione:

In [15]:

```
Nsimulations = 5000
Nsteps = 250 # numero di giorni in cui il mercato è aperto nell'anno
dt = T/Nsteps
r = 0.05 # tasso di attualizzazione
```

Effettuiamo la decomposizione di Cholesky

In [16]:

```
cholesky = np.linalg.cholesky(cov_matrix)
```

In [17]:

```
X = np.random.normal(size=(Nsimulations, T*Nsteps, len(ticker)))
X = np.dot(X, cholesky)
```

In [18]:

```
S = np.zeros((Nsimulations, T*Nsteps, len(ticker)))
S[:,0] = S0
```

In [19]:

```
for i in range(1, int(T*Nsteps)):
    for j in range(len(ticker)):
        S[:, i, j] = S[:, i - 1, j] * np.exp((mu[j] - 0.5 * sigma[j] ** 2) * dt + sigma[j] * X[:, i-1, j])
```

`S` è un array di `Nsimulations` matrici, in cui ogni matrice riporta i prezzi di tutti i sottostanti in ogni istante di tempo.

In [20]:

```
print(S)
```

```
[[[141.86000061  96.73000336 240.61000061]
  [141.90975523  96.74771104 240.60496153]
  [141.90653651  96.74226567 240.65874633]
  ...
  [142.4807567   96.49909789 240.34685862]
  [142.5123876   96.47030867 240.29842679]
  [142.605969    96.52241393 240.36098895]]

 [[141.86000061  96.73000336 240.61000061]
  [141.94086767  96.76078642 240.67654931]
  [142.00237868  96.76289052 240.63272354]
  ...
  [141.32315972  97.07149353 240.41553173]
  [141.27792917  97.0828548  240.48199963]
  [141.17247981  97.00743827 240.42961958]]

 [[141.86000061  96.73000336 240.61000061]
  [141.83290733  96.76976239 240.65955584]
  [141.91510928  96.79928301 240.64477936]
  ...
  [140.17280867  96.87901862 240.80239184]
  [140.09941794  96.85848923 240.74585608]
  [140.13695996  96.86954789 240.77763288]]

 ...

 [[141.86000061  96.73000336 240.61000061]
  [141.92565043  96.78611229 240.6308916 ]
  [142.0484477   96.84230378 240.59722617]
  ...
  [141.73324342  96.7432593  241.56554905]
  [141.72576704  96.73143496 241.55821925]
  [141.82311289  96.79097967 241.58915173]]

 [[141.86000061  96.73000336 240.61000061]
  [141.85439099  96.72500153 240.60879753]
  [141.92988205  96.73541417 240.61142822]
  ...
  [142.44930888  97.16553721 241.48433648]
  [142.40052276  97.1625048  241.39119423]
  [142.16923071  97.07974553 241.32081581]]

 [[141.86000061  96.73000336 240.61000061]
  [141.87762062  96.72826433 240.62172273]
  [141.98687789  96.75838431 240.65466751]
  ...
  [143.30553343  97.09214642 241.38164735]
  [143.45888921  97.14740404 241.35244886]
  [143.36266775  97.09898597 241.34288709]]]
```

Per effettuare il pricing di una basket option, si calcola il payoff come differenza tra il valore complessivo di portafoglio a scadenza e lo strike price e, nei casi positivi, si attualizza il valore medio al tempo della sottoscrizione. Nel calcolo seguente si ipotizza che ogni titolo sia preso in quantità unitara all'interno del basket.

In [21]:

```
basket_price = np.average(np.maximum(np.sum(S[:,-1], axis=1) - K, 0)) * np.exp(-r*T)

print(basket_price)
```

```
0.7812560156036616
```

Per effettuare il pricing di una rainbow option, si calcola il payoff come differenza tra il max dei prezzi dei sottostanti considerati a scadenza e lo strike price. Nei casi positivi, si attualizza il valore medio al tempo della sottoscrizione:

In [22]:

```
rainbow_price = np.average(np.maximum(np.max(S[:,-1], axis=1) - Kr, 0)) * np.exp(-r*T)

print(rainbow_price)
```

```
0.26764847144237763
```

Fonti:

- *Options, Futures, and Other Derivatives*, John C. Hull - Pearson (2021)
- Borsa Italiana