Laboratorio II – I modulo
Lezione 4

Esercizi

Indice

- Deviazione standard della media di numeri casuali estratti da una distribuzione di probabilità

- Metodi Monte Carlo:
  - Il metodo Hit or Miss per l'integrazione numerica di funzioni
  - Incertezza statistica associata alla stima di un integrale con metodo Hit or Miss

- Esercizi

Deviazione standard della media

Nella scorsa lezione abbiamo visto diverse tecniche per generare numeri casuali secondo diverse distribuzioni di probabilità

Abbiamo anche calcolato la media e la varianza dei numeri casuali estratti

La media e la varianza stimate con questa procedura sono anch'esse variabili random

Quanto vale la deviazione standard della media?

Il Teorema del Limite Centrale fornisce la risposta a questa domanda…

Possiamo calcolare l'incertezza della media attraverso il seguente esercizio e confrontare il risultato numerico con quanto previsto dal TLC

Deviazione standard della media

1. Estraggo M=10^4 numeri casuali da una distribuzione uniforme nel range `[a,b]` e calcolo la media degli M numeri estratti

… fin qui tutto uguale a quanto visto nella scorsa lezione

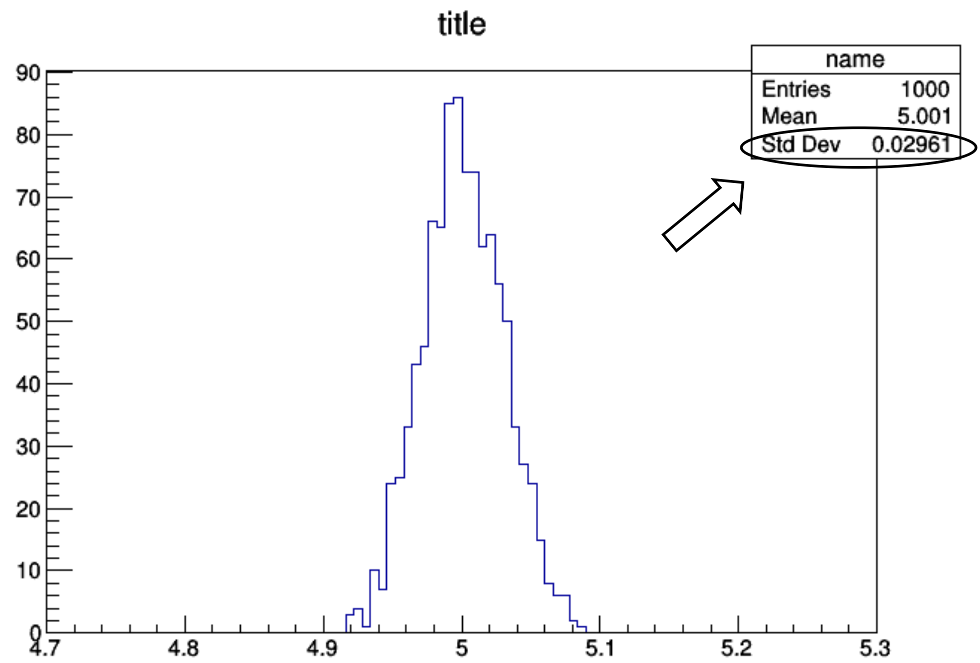
2. Ripeto la procedura al punto 1 per N=1000 volte e inserisco i valori medi ottenuti in un istogramma `TH1F`:

```
TH1F h1 ("name", "title", 100, 4.7, 5.3);
double mean, random, a=0., b=10.;
for (int i=0; i<N; i++) {
   mean=0;
   for (int j=0; j<M; j++) {
      random = rand_range(a,b);
      mean += random;
   }
   mean /= M;
   h1.Fill(mean);
}
```

Deviazione standard della media

Alla fine si ottiene questo istogramma

Per il Teorema del Limite Centrale, la distribuzione dei valori medi ottenuti dall'estrazione di M numeri casuali tende ad una Normale, con varianza pari alla media delle varianze delle distribuzioni di partenza (pdf uniformi) divisa per M

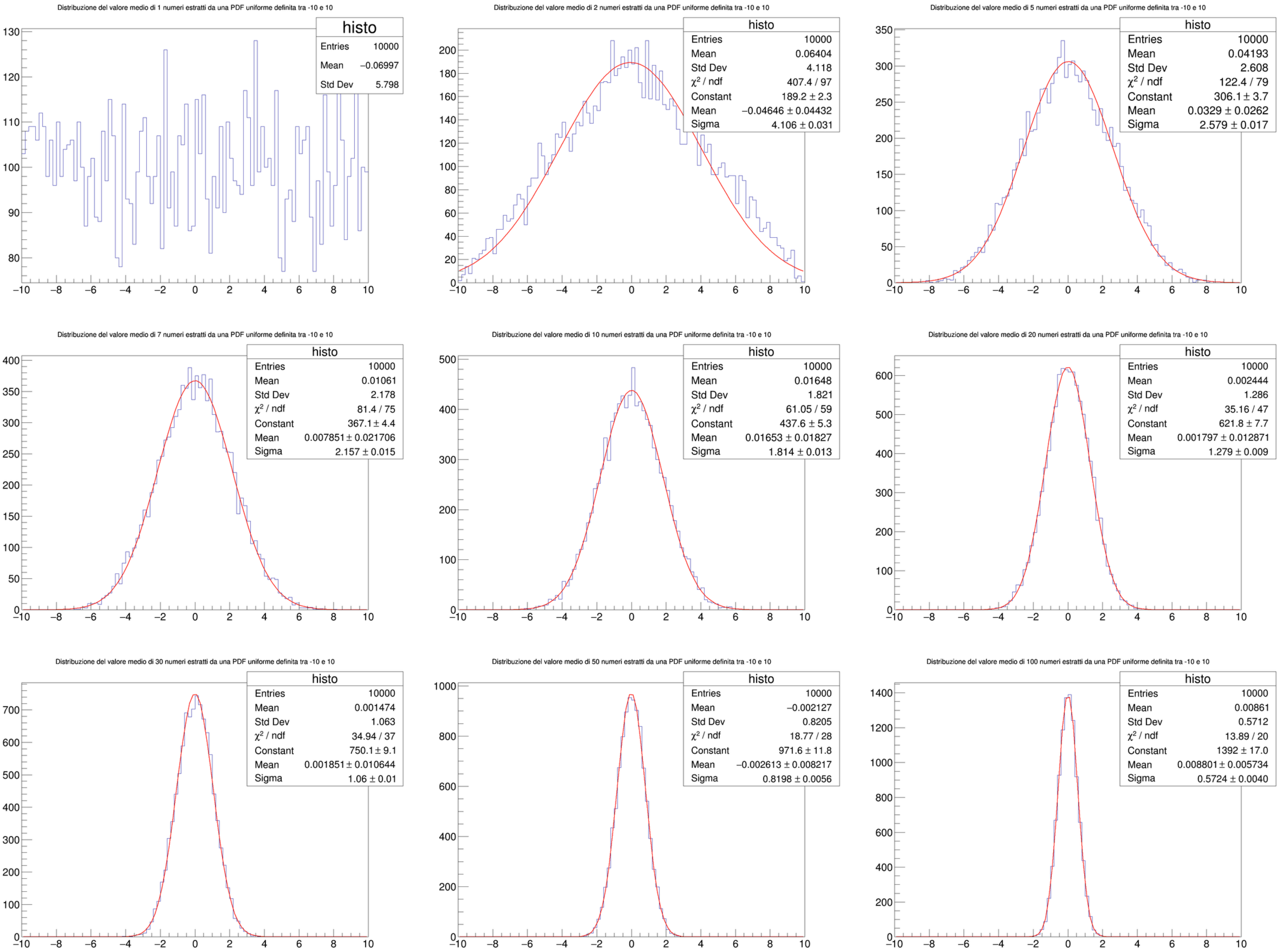


Abbiamo estratto e mediato $M=10^4$ numeri casuali da una pdf uniforme nel range `[0,10]`

La varianza della distribuzione uniforme è: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{100}{12}$

Quindi, la varianza che ci aspettiamo per la pdf dei valori medi è:

$$\sigma_\mu^2 = \frac{1}{M}\frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{1200} \quad \Rightarrow \quad \sigma_\mu = \sqrt{\frac{1}{1200}} \approx 0.029$$


Distribuzione del valore medio di 1 numeri estratti da una PDF uniforme definita tra -10 e 10
histo
Entries 10000
Mean −0.06997
Std Dev 5.798
Distribuzione del valore medio di 2 numeri estratti da una PDF uniforme definita tra -10 e 10
histo
Entries 10000
Mean 0.06404
Std Dev 4.118
χ² / ndf 407.4 / 97
Constant 189.2 ± 2.3
Mean −0.04646 ± 0.04432
Sigma 4.106 ± 0.031
Distribuzione del valore medio di 5 numeri estratti da una PDF uniforme definita tra -10 e 10
histo
Entries 10000
Mean 0.04193
Std Dev 2.608
χ² / ndf 122.4 / 79
Constant 306.1 ± 3.7
Mean 0.0329 ± 0.0262
Sigma 2.579 ± 0.017
Distribuzione del valore medio di 7 numeri estratti da una PDF uniforme definita tra -10 e 10
histo
Entries 10000
Mean 0.01061
Std Dev 2.178
χ² / ndf 81.4 / 75
Constant 367.1 ± 4.4
Mean 0.007851 ± 0.021706
Sigma 2.157 ± 0.015
Distribuzione del valore medio di 10 numeri estratti da una PDF uniforme definita tra -10 e 10
histo
Entries 10000
Mean 0.01648
Std Dev 1.821
χ² / ndf 61.05 / 59
Constant 437.6 ± 5.3
Mean 0.01653 ± 0.01827
Sigma 1.814 ± 0.013
Distribuzione del valore medio di 20 numeri estratti da una PDF uniforme definita tra -10 e 10
histo
Entries 10000
Mean 0.002444
Std Dev 1.286
χ² / ndf 35.16 / 47
Constant 621.8 ± 7.7
Mean 0.001797 ± 0.012871
Sigma 1.279 ± 0.009
Distribuzione del valore medio di 30 numeri estratti da una PDF uniforme definita tra -10 e 10
histo
Entries 10000
Mean 0.001474
Std Dev 1.063
χ² / ndf 34.94 / 37
Constant 750.1 ± 9.1
Mean 0.001851 ± 0.010644
Sigma 1.06 ± 0.01
Distribuzione del valore medio di 50 numeri estratti da una PDF uniforme definita tra -10 e 10
histo
Entries 10000
Mean −0.002127
Std Dev 0.8205
χ² / ndf 18.77 / 28
Constant 971.6 ± 11.8
Mean −0.002613 ± 0.008217
Sigma 0.8198 ± 0.0056
Distribuzione del valore medio di 100 numeri estratti da una PDF uniforme definita tra -10 e 10
histo
Entries 10000
Mean 0.00861
Std Dev 0.5712
χ² / ndf 13.89 / 20
Constant 1392 ± 17.0
Mean 0.008801 ± 0.005734
Sigma 0.5724 ± 0.0040

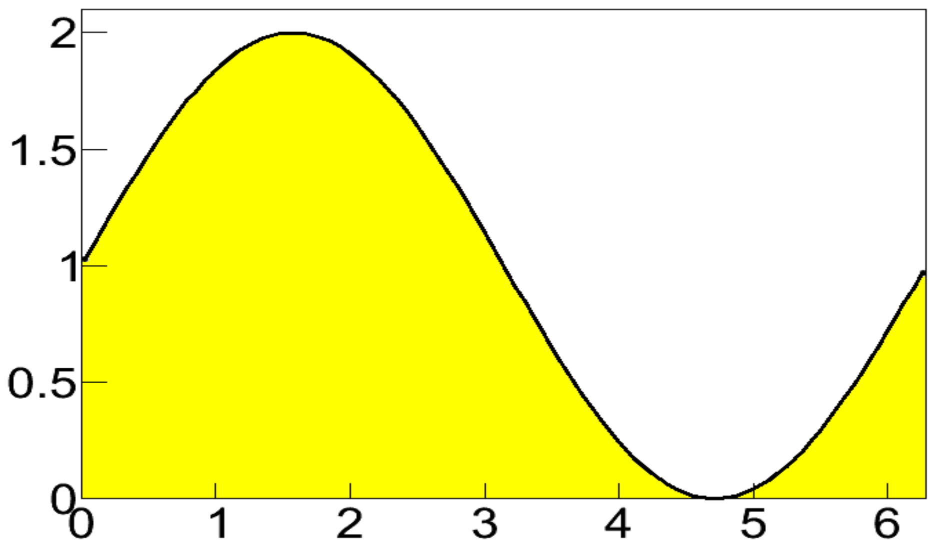
Metodi Monte Carlo

- Tecniche di calcolo basate sulla generazione di numeri casuali prendono il nome di metodi Monte Carlo (MC)
- Il nome deriva dal famoso casinò di Monte Carlo i cui giochi sono basati, appunto, sull'estrazione di numeri casuali
- I metodi MC sono ampiamente utilizzati in fisica per simulare e risolvere problemi complessi (ad esempio la propagazione di fasci di particelle e la loro interazione con la materia)
- Un semplice esempio è l'applicazione del metodo Monte Carlo per il calcolo numerico dell'integrale di una funzione

Integrazione con metodo MC

- Assumiamo funzioni regolari (continue su un compatto)
- Consideriamo funzioni definite positive
- Utilizziamo come esempio la funzione:

$$f(x) = \sin(x) + 1$$



Codice C++:

```
double f_sin (double x)
{
  return 1 + sin(x);
}
```

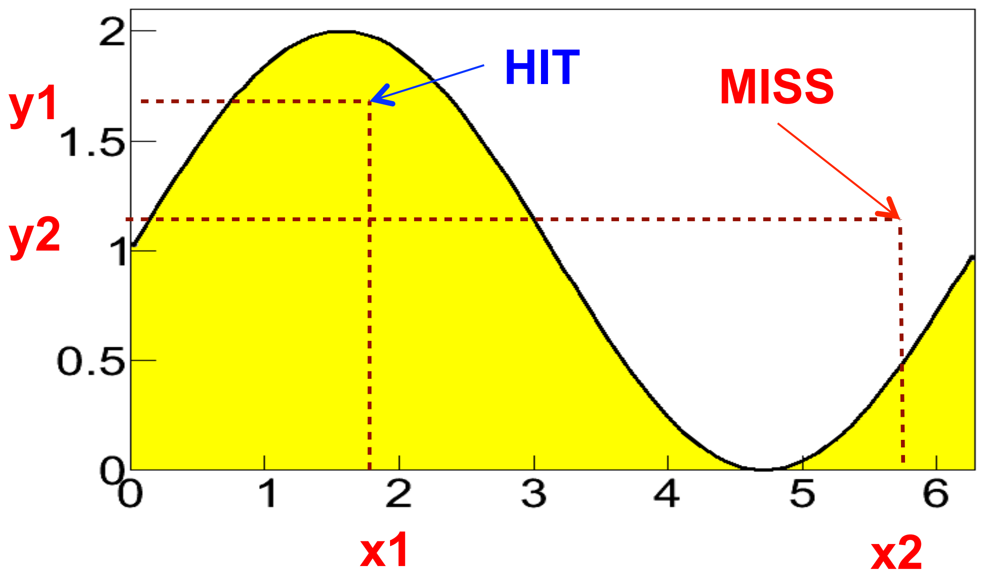
$$\int_0^{2\pi} 1 + \sin(x) dx = 2\pi$$

Integrazione MC con metodo Hit or Miss

- La logica è la stessa del metodo Try&Catch: si generano coppie di numeri casuali che identificano un punto casuale in una porzione rettangolare del piano che includa completamente la parte di funzione di cui si vuole calcolare l'integrale

- Genero **`N`** punti nel piano e uso un contatore **`n_hit`** per contare quanti punti si trovano al di sotto della funzione

`n_hit / N` ≈ Integrale / Area rettangolo



- Questo metodo di integrazione numerica fornisce una stima approssimata dell'integrale
- Tale stima è tanto più precisa quanto maggiore è il numero di punti campionati

Incertezza statistica di Hit or Miss

- Dato che Hit or Miss è un processo binomiale, **`n_hit`** è una variabile random che segue la distribuzione binomiale:

  E [**`n_hit`**] = **`N`**p   V [**`n_hit`**] = **`N`**p(1-p)

  dove *p* è la probabilità di ottenere un hit, che può essere stimata dal rapporto **`n_hit/N`**

- L'integrale definito di `f(x)` nell'intervallo `[a,b]`, stimato con metodo MC è a sua volta una variabile random che segue la stessa distribuzione di probabilità di **`n_hit`**:

$$I = \frac{A}{N}\mathrm{n\_hit} \quad \Rightarrow \quad V[I] = \frac{A^2}{N^2}V[\mathrm{n\_hit}] = \frac{A^2}{N}p(1-p)$$

dove *A* è l'area del rettangolo in cui ho generato i punti casuali

Implementazione metodo Hit or Miss

File .cc
implementazione delle funzioni esterne al main

```cpp
double fsin (double x) {
        return 1.+sin(x);
}

bool HitMiss(double xMin, double xMax,
             double yMin, double yMax) {
        double x=0., y=0.;
        x = rand_range(xMin, xMax);
        y = rand_range(yMin, yMax);
        if (y < fsin(x)) return true;
        else return false;
}
```

```cpp
int main()
{
  srand(time(NULL));
  int N        = 100000;
  int nHit     = 0;
  double xMin = 0., xMax = 2*M_PI;
  double yMin = 0., yMax = 2.;

  for (int i = 0; i < N; i++)
    {
      if (HitMiss(xMin, xMax, yMin, yMax)==true)
          nHit++;
    }

  double Area      = (xMax-xMin)*(yMax-yMin);
  double Integral = nHit*Area/(double)N;
  double p         = nHit/ (double)N;
  double Var       = Area*Area/(double)N * p * (1.-p);
  double StdDev    = sqrt(Var);

  std::cout << "Integral = " << Integral
            << " +- "<< StdDev<< std::endl;
  return 0;
}
```

File .cpp

Come debuggare il codice

- Programmi sempre più complicati richiedono tecniche di *debug* sempre più sofisticate

- Nella prima lezione abbiamo visto come leggere i messaggi che il compilatore ci fornisce in caso di errore durante la fase di compilazione. Il messaggio racchiude in se la riga in cui il compilatore ha trovato una inconsistenza con la sintassi del linguaggio, in maniera tale che il programmatore sa immediatamente dove andare a guardare per rimediare

- Errori logici, procedurali, sono più difficili da trovare perché in genere si verificano a runtime. Per individuare questi errori è opportuno mettere delle stampe nel codice in maniera tale da individuare esattamente quale riga è responsabile dell'arresto del programma. Le stampe possono essere di questo tipo:

```
std::cout << "file_name row: " << __LINE__ << std::endl;
```

dove `file_name` è il nome del file `.cpp` o `.cc` o `.h` in cui avete inserito la riga di stampa

Attenzione: anche se individuate la riga responsabile dell'arresto del programma non è detto che l'errore sia a quella riga, vi fornisce però ulteriori indizi per capire dove potrebbe essere il problema

Esercizi

Svolgere gli esercizi seguenti organizzando le funzioni esterne al `main` in un'unica libreria, composta da un file con l'implementazione delle funzioni (`.cc`) e da un header file (`.h`) contenente i prototipi delle funzioni

Esercizio 1: Completare l'esercizio sull'incertezza della media:

1. Estrarre $M=10^4$ numeri casuali da una distribuzione uniforme nel range `[a,b]` e calcolare la media dei M numeri estratti
2. Ripetere la procedura al punto 1 per N=1000 volte e inserire i valori medi ottenuti in un istogramma `TH1F`
3. Calcolare la media e la deviazione standard dei valori medi calcolati al punto 2
4. Confrontare il risultato ottenuto con quanto previsto dal Teorema del Limite Centrale
5. Ripetere l'esercizio variando il valore di M e verificare che la deviazione standard della media è proporzionale a $1/\sqrt{M}$

Esercizi

Esercizio 2: Ripetere l'esercizio 1, estraendo numeri casuali da una distribuzione Normale (usate il metodo Try&Catch) invece che da una distribuzione uniforme

Qual è il rapporto tra la deviazione standard della pdf Normale di partenza e la deviazione standard della media?

Esercizio 3:

1. Generare $N=10^4$ numeri casuali da una pdf Normale con $\mu=0$, $\sigma=0.5$. Inserire questi numeri in un istogramma `TH1F`
2. Generare $N=10^4$ numeri casuali da una pdf Normale con $\mu=0$, $\sigma=2$. Inserire questi numeri nello stesso istogramma definito al punto 1
3. Disegnare l'istogramma risultante

È una distribuzione Normale? Perché?

Esercizi

Esercizio 4:

1. Generare $N=10^4$ numeri casuali da una pdf Normale con $\mu=0$, $\sigma=0.5$
2. Generare $N=10^4$ numeri casuali da una pdf Normale con $\mu=0$, $\sigma=2$
3. Per ogni coppia di numeri estratti ai punti 1 e 2 calcolare la media ed inserire il risultato in un istogramma
4. Disegnare l'istogramma risultante

È una distribuzione Normale? Perché?

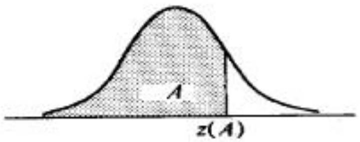
Esercizi

Esercizio 5: Utilizzare il metodo Hit or Miss per stimare l'integrale sotteso ad una pdf Normale con $\mu=0$, $\sigma=1$ in un generico range `[a,b]`:

$$\int_a^b dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Calcolare l'integrale su diversi intervalli `[a,b]` con `a=-5` e `b` variabile, e confrontare i risultati ottenuti con quelli riportati nella tabella accanto

Entry is area A under the standard normal curve from $-\infty$ to $z(A)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Esercizi

Esercizio 6: Implementare il seguente metodo Monte Carlo per l'integrazione di una funzione `f(x)` (e.g. Normale) definita nell'intervallo `[a,b]`:

1. Estrarre una variabile x_i aleatoria uniforme nell'intervallo `[a,b]`
2. Valutare $y_i = f(x_i)$

Ripetere il procedimento N=10^4 volte e calcolando, al termine del ciclo di estrazione, la media e la varianza di `y`

Valutare l'integrale come:

$$I = (b-a)\left(\mathrm{Mean}(y) \pm \sqrt{\mathrm{Var}(y)/N}\right)$$