Universidad Autónoma de Madrid

Escuela Politécnica Superior

Ejercicios de Optimización

Estudiantes:

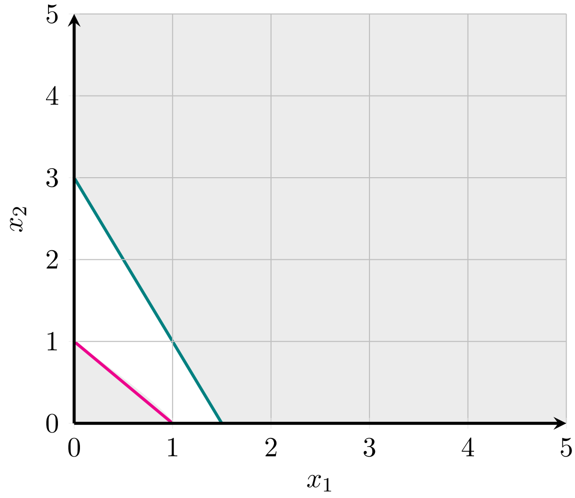
María Barroso Honrubia
maria.barrosoh@estudiante.uam.es
Gloria del Valle Cano
gloria.valle@estudiante.uam.es

23 de febrero de 2022

Ejercicio 3. Resolver geométricamente los problemas de programación lineal siguientes.

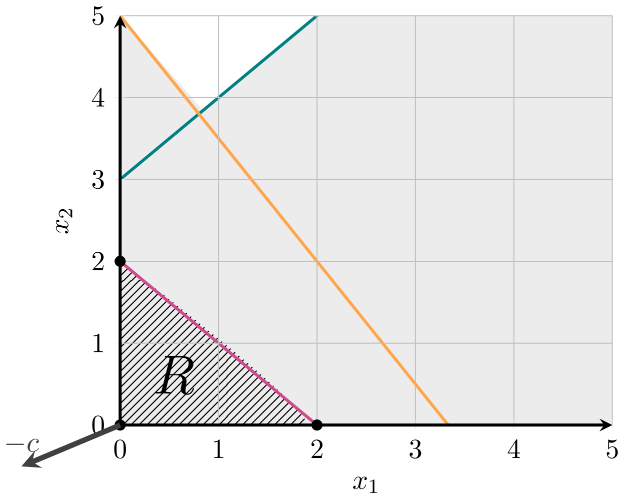
(Resuelto por Gloria del Valle Cano)

a) Minimizar $z = x_1 + x_2$, sujeto a $\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 & \geq 6 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$



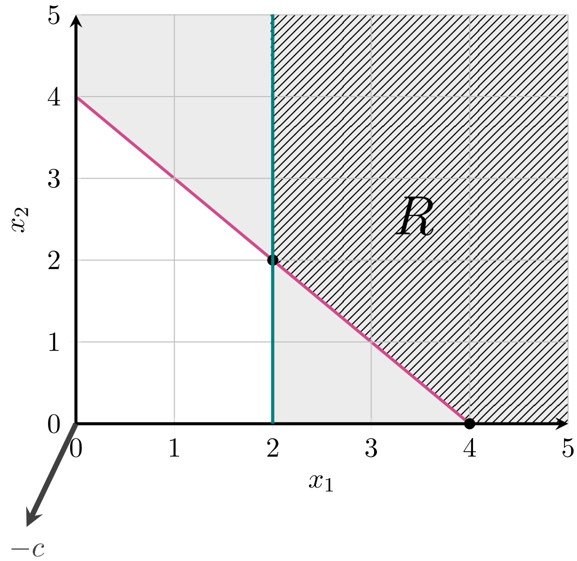
En este caso vemos que no existe región factible, por lo tanto el problema no tiene solución.

b) Minimizar $z = 2x_1 + x_2$, sujeto a $\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq 2 \\ -x_1 + x_2 & \leq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq 10 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$



Aquí vemos que la región factible existe y está además acotada. Los puntos en los que está acotada son `(0,0)`, `(2,0)` y `(0,2)`, de los cuales alguno de ellos pertenecerá a una SBF.

c) Minimizar $z = 2x_1 + 5x_2$, sujeto a $\begin{cases} x_1 + x_2 & \geq 4 \\ x_1 & \geq 2 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$



En el último caso tenemos que la región factible no está acotada, por lo que la solución óptima es única, viendo que por el punto `(4,0)`, con valor óptimo $z = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 0 = 8$. La intersección de ambas rectas nos delimita el siguiente punto `(2, 2)`, pero no lo tenemos en cuenta porque la función objetivo decrece más rápidamente hacia abajo que hacia la izquierda, tal y como indica el vector $-c$.

Ejercicio 9. Resolver los problemas de programación lineal mediante el algoritmo simplex y el mismo algoritmo en formato de tabla. En el último de ellos realizar solo una iteración en la versión algebraica y la Fase 1, en el método de dos fases.

(Resuelto por Gloria del Valle Cano)

c) Maximizar $z = 2x_1 + 5x_2$, sujeto a $\begin{cases} x_1 + x_2 & \geq 4 \\ x_1 & \geq 2 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$

Primero añadimos las variables de holgura x_3 y x_4 y las variables artificiales x_5 y x_6, de manera que conseguimos llevar el problema de programación lineal a forma estándar. Para resolver el problema de maximización resolvemos el problema de minimización con el signo opuesto $z = -2x_1 - 5x_2$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad + x_5 \quad\quad &= 4 \\ x_1 + \quad\quad\quad + x_4 \quad\quad + x_6 &= 2 \\ x_i \geq 0 \; (1 \leq i &\leq 6) \end{aligned}$$

Ahora procedemos a resolver el problema de la solución óptima mediante tablas símplex.

FASE 1

	z	u x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	0	0	0	-1	-1	0
x_5	0	1	1	1	0	1	0	4
x_6	0	1	0	0	1	0	1	2

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD	LD/x_2
z	1	2	1	-1	-1	0	0	6	-
x_5	0	1	1	-1	0	1	0	4	4
x_6	0	**1**	0	0	-1	0	1	2	2

Elegimos la columna x_1 pivote al tener el mayor valor en la fila z. Además, elegimos la fila pivote x_6 al tener el mayor valor en la columna LD/x_2. Como consecuencia, x_1 entrará en nuestra base sustituyendo a x_6.

Procedemos ahora a actualizar la tabla en base a nuestro elemento pivote (marcado en negrita en la tabla anterior), plasmando como ejemplo las operaciones de la fila del pivote y de x_6, el resto de filas será análogo.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD	LD/x_2
z	1	0	1	-1	1	0	-2	2	-
x_5	0	0	**1**	-1	1	1	-1	2	2
x_1	0	1	0	0	-1	0	1	2	2

Elegimos la columna de x_2 ya que tiene el mayor valor en z, aunque también podríamos elegir x_4, si bien realizamos la primera elección ya que simplifica el problema. Ahora actualizamos la tabla en base al pivote, quedando la siguiente tabla.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	0	0	0	-1	-1	0
x_2	0	0	1	-1	1	1	-1	2
x_1	0	1	0	0	-1	0	1	2

Como ya no quedan elementos positivos en la fila z, damos por terminada la primera fase del algoritmo.

FASE 2

Ahora procedemos a eliminar la columna correspondiente a las variables artificiales y volvemos a la función objetivo. Para ello, sustituimos los valores de la fila de z, teniendo $-c = (2, 5)$.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	2	5	0	0	0
x_2	0	0	1	-1	1	2
x_1	0	1	0	0	-1	2

Finalmente, para las variables de la base distintas de cero, hacemos que $z_j - c_j = 0$, teniendo la ecuación $z + 2x_1 + 5x_2 = 0$.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	0	5	-3	-14
x_2	0	0	1	-1	1	2
x_1	0	1	0	0	-1	2

Como ya no quedan elementos positivos en la primera fila, damos el algoritmo por terminado. Vemos que el problema tiene una solución no acotada, siendo $z = -14$, con el punto `(2, 2)`.

MÉTODO ALGEBRAICO

Ahora procedemos a resolver el problema con el **método algebraico**.

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1\ x_2\ x_3, x_4)^T, \quad A = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Seleccionamos la matriz básica inicial $x_B = (a_2\ a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ya que x_1 y x_2 son variables básicas.

Paso 1

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuya inversa B^{-1} es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Paso 2

$x_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$z = cB^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 14.$

$z_3 - c_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -5.$

$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = 3.$

Elegimos x_3 para calcular la nueva x_B que es la negativa.

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_3 x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_3.$

Como deberíamos escoger un mínimo entre $2/0$ y $2/-1$, pero como no podemos dividir entre un número no positivo, vemos que la solución no está acotada.

Ejercicio 10. Dado el siguiente PPL, se pide:

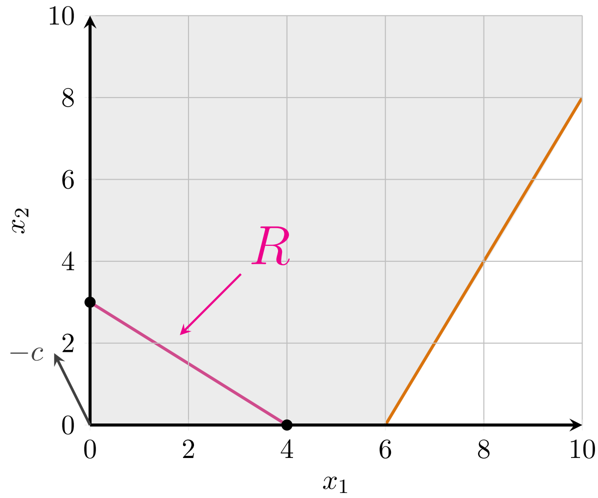
$$\text{mín } x_1 - 2x_2 \quad \text{sujeto a} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 & = 12, \\ 2x_1 - x_2 & \leq 12, \\ x_1, x_2 & \geq 0. \end{cases}$$

a) Plantear el PPL en forma estándar.

Para plantear el PPL en forma estándar añadimos una variable de holgura para eliminar la desigualdad de la segunda restricción.

$$\text{mín } x_1 - 2x_2 \quad \text{sujeto a} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 & = 12, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = 12, \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0. \end{cases}$$

b) Resolver geométricamente. Expresar la región factible, el vector de costes, la función objetivo, los puntos extremos y sus coordenadas, el punto o puntos solución y el valor óptimo en el/los mismo/s.



La solución factible a este problema coincide con la semirrecta de la primera restricción $3x_1 + 4x_2 = 12$ en el primer cuadrante. Por su parte, el vector de costes es $c = (1, -2)^T$ y la función objetivo a minimizar es $c^T x = x_1 - 2x_2$. Los dos puntos extremos son las intersecciones de la región factible con los ejes coordenadas, es decir, $(4, 0)^T$ y $(0, 3)^T$. Al movernos en la dirección $-c = (-1, 2)^T$ alcanzamos el punto solución $x^* = (0, 3)^T$. Para este punto, el valor óptimo de la función es -6.

c) Resuélvelo aplicando el algoritmo símplex algebraico a la SBF inicial dada por la submatriz básica $B = (a_2 \;\; a_3)$. Debes indicar la solución y el valor objetivo óptimo, justificando por qué lo son.

En primer lugar, reescribimos el problema de programación lineal en forma matricial

$$\min c^T x \text{ s.a. } Ax = b \text{ con } x \geq 0$$

siendo

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1 \; x_2 \; x_3)^T, \quad A = (a_1 \; a_2 \; a_3) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

La matriz básica inicial es $x_B = (a_2 \; a_3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, con x_2, x_3 variables básicas y x_1 la variable no básica. El resto de elementos básicos son $c_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la solución básica factible inicial $x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} \geq 0$.

Se calcula $z_j - c_j$ para la única variable no básica del problema x_1 cuyo índice es $j = 1$:

$$z_1 - c_1 = c_B^T B^{-1} a_1 - c_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2} < 0$$

.

Dado que $z_1 - c_1 \leq 0$ (siendo x_1 la única variable no básica), el algoritmo símplex ha terminado y la solución inicial básica x_B es la solución óptima. Para esta solución, el valor óptimo de la función es

$$z = c_B^T x_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} = -6.$$

Ejercicio 11. Resolver por el método de las dos fases el PPL correspondiente al ejercicio 10.

(Resuelto por María Barroso Honrubia)

Partiendo del problema en la forma estándar, el primer paso para resolver el método de las dos fases es añadir una variable artificial x_4 de modo que el conjunto de restricciones contenga una submatriz identidad. Además, la nueva función a minimizar será $z = x_4$:

$$\text{mín } x_4 \quad \text{sujeto a} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_4 & = 12, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = 12, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0. \end{cases}$$

Procedemos ahora a encontrar la solución óptima del problema mediante tablas símplex. La tabla que corresponde a nuestro problema empieza con una base formada por la variable artificial x_3 y la variable de holgura x_4, siendo el objetivo de la primera fase minimizar x_4.

FASE 1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	0	0	-1	0
x_4	0	3	4	0	1	12
x_3	0	2	-1	1	0	12

El primer paso es hacer $z_j - c_j = 0$ para aquellas variables x_j que pertenezcan a la base. En este caso, transformamos $z_4 - c_4 = 0$ sumando la fila x_4 a la fila z:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD	LD/x_2
z	1	3	4	0	0	12	
x_4	0	3	**4**	0	1	12	$12/4 = 3$
x_3	0	2	-1	1	0	12	12/(-1) < 0

La variable x_2 es la candidata para entrar en la base ya que es aquella con mayor valor en la fila z. Por su parte, elegimos la fila x_4 al tener el menor valor en la columna LD/x_2. Como consecuencia, x_2 entrará en nuestra base sustituyendo a x_4.

Procedemos ahora a actualizar la tabla en base a nuestro pivote (marcado en negrita en la tabla anterior), que deberá ser igual a 1 (dividiendo entre 4), y el resto de elementos de su columna iguales a 0.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	0	0	-1	0
x_2	0	3/4	1	0	1/4	3
x_3	0	11/4	0	1	1/4	15

Como ya no quedan elementos positivos en la fila z, hemos terminado el algoritmo para la primera fase.

FASE 2

Podemos eliminar la columna correspondiente a la variable artificial y volver a nuestra función objetivo inicial. Para ello, sustituimos los valores de la fila z por $-c = (-1, 2, 0)^T$.

	z	x_1	x_2	x_3	LD
z	1	-1	2	0	0
x_2	0	3/4	1	0	3
x_3	0	11/4	0	1	15

A continuación, para las variables de la base distintas de cero, hacemos que $z_j - c_j = 0$. En este caso, hacemos $z_2 - c_2 = 0$ restándole el doble de la fila de x_2.

	z	x_1	x_2	x_3	LD
z	1	-5/2	0	0	-6
x_2	0	3/4	1	0	3
x_3	0	11/4	0	1	15

Ya no quedan elementos positivos en la primera fila, de modo que el algoritmo ha terminado. La solución óptima se consigue para $x = (x_1, x_2)^T = (0, 3)^T$, siendo el valor óptimo de la función $z = -6$.

Ejercicio 6. Formalizar el modelo asociado al siguiente problema de programación lineal:

Una compañía produce dos tipos de ratones para ordenador: láser e inerciales. El ratón láser necesita 2 horas para su fabricación y 1 para su control de calidad, mientras que el segundo requiere 1 hora para su fabricación y 3 para su control de calidad. El número de horas de fabricación disponibles durante la semana es de 200 y 300 horas para el control de calidad. Los costes de fabricación son de 30 y 20 unidades monetarias respectivamente para cada ratón. La compañía pretende optimizar el proceso productivo con el fin de maximizar sus beneficios.

(Resuelto por María Barroso Honrubia)

Sea x_1 el número de ratones láser fabricados y x_2 el número de ratones inerciales fabricados y sean k_1 y k_2 las unidades monetarias que la compañía gana por la venta de cada tipo de ratón (k_1 para láser y k_2 para inercial). El problema puede expresarse como un problema de programación lineal:

$$\text{Maximizar } (k_1 - 30)x_1 + (k_2 - 20)x_2 \quad \text{sujeto a} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq 200, \\ x_1 + 3x_2 & \leq 300, \\ x_1, x_2 & \geq 0. \end{cases}$$