Kalman filtering of position and speed from observing just position

(using the notation from the Wikipedia article on Kalman filters)

State vector $\hat{\mathbf{x}}_{i,j} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i,j} \\ \hat{\dot{x}}_{i,j} \end{bmatrix}$

Covariance matrix $\mathbf{P}_{i,j} = \begin{bmatrix} w_{i,j}^2 & e_{i,j} \\ \dot{e}_{i,j} & \dot{w}_{i,j}^2 \end{bmatrix}$

State transition matrix (/model) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Process noise covariance matrix $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dot{x}}^2 \end{bmatrix}$

Observation $\mathbf{z}_k = [\tilde{x}_k]$

Observation matrix (/model) $\mathbf{H} = [1 \quad 0]$

Observation noise covariance $\mathbf{R}_k = [\tau_k^2]$

Intermediate variables:

"Innovation" $\tilde{\mathbf{y}}_k = [\tilde{y}_k]$

Innovation covariance $\mathbf{S}_k = [s_k]$

Kalman gain $\mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} k_k \\ \dot{k}_k \end{bmatrix}$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \mathbb{F}\hat{x}_{k-1|k-1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ \hat{\dot{x}}_{k|k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k-1} \\ \hat{\dot{x}}_{k-1|k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k-1} + \Delta t\, \hat{\dot{x}}_{k-1|k-1} \\ \hat{\dot{x}}_{k-1|k-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}_{k|k-1} = \mathbb{F}\,\mathbb{P}_{k-1|k-1}\,\mathbb{F}^T + \mathbb{Q}$$

$$\begin{bmatrix} \omega^2_{k|k-1} & \rho_{k|k-1} \\ \dot{\rho}_{k|k-1} & \dot{\omega}^2_{k|k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^2_{k-1|k-1} & \rho_{k-1|k-1} \\ \dot{\rho}_{k-1|k-1} & \dot{\omega}^2_{k-1|k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dot{x}}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega^2_{k-1|k-1} + \Delta t\, \dot{\rho}_{k-1|k-1} & \rho_{k-1|k-1} + \Delta t\, \dot{\omega}^2_{k-1|k-1} \\ \dot{\rho}_{k-1|k-1} & \dot{\omega}^2_{k-1|k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dot{x}}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega^2_{k-1|k-1} + \Delta t\, \dot{\rho}_{k-1|k-1} + \Delta t\, \rho_{k-1|k-1} + \Delta t^2\, \dot{\omega}^2_{k-1|k-1} & \rho_{k-1|k-1} + \Delta t\, \dot{\omega}^2_{k-1|k-1} \\ \dot{\rho}_{k-1|k-1} + \Delta t\, \dot{\omega}^2_{k-1|k-1} & \dot{\omega}^2_{k-1|k-1} + \sigma_{\dot{x}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{y}_k = z_k - \mathbb{H}_k \hat{x}_{k|k-1}$$

$$\tilde{y}_k = \tilde{x}_k - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ \hat{\dot{x}}_{k|k-1} \end{bmatrix} = \tilde{x}_k - \hat{x}_{k|k-1}$$

$$\mathbb{S}_k = \mathbb{H}\,\mathbb{P}_{k|k-1}\,\mathbb{H}^T + \mathbb{R}_k$$

$$s_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^2_{k|k-1} & p_{k|k-1} \\ \dot{p}_{k|k-1} & \dot{\omega}^2_{k|k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_k^2$$

$$= \begin{bmatrix} \omega^2_{k|k-1} & p_{k|k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_k^2$$

$$= \omega^2_{k|k-1} + \tau_k^2$$

$$\mathbb{K}_k = \mathbb{P}_{k|k-1}\,\mathbb{H}^T\,\mathbb{S}_k^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} K_k \\ \dot{K}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2_{k|k-1} & p_{k|k-1} \\ \dot{p}_{k|k-1} & \dot{\omega}^2_{k|k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} s_k^{-1}$$

$$= \frac{1}{s_k} \begin{bmatrix} \omega^2_{k|k-1} \\ \dot{p}_{k|k-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbb{X}}_{k|k} = \hat{\mathbb{X}}_{k|k-1} + \mathbb{K}_k \tilde{\mathbb{Y}}_k$$

$$\begin{bmatrix} x_{k|k} \\ \dot{x}_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{k|k-1} + K_k \tilde{y}_k \\ \dot{x}_{k|k-1} + \dot{K}_k \tilde{y}_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}_{k|k} = (\mathbb{I} - \mathbb{K}_k \mathbb{H})\,\mathbb{P}_{k|k-1}$$

$$\begin{bmatrix} \omega^2_{k|k} & p_{k|k} \\ \dot{p}_{k|k} & \dot{\omega}^2_{k|k} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_k \\ \dot{K}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \omega^2_{k|k-1} & p_{k|k-1} \\ \dot{p}_{k|k-1} & \dot{\omega}^2_{k|k-1} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_k & 0 \\ \dot{k}_k & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - k_k & 0 \\ -\dot{k}_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^2_{k|k-1} & e_{k|k-1} \\ \dot{e}_{k|k-1} & \dot{\omega}^2_{k|k-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 - k_k)\,\omega^2_{k|k-1} & (1 - k_k)\,e_{k|k-1} \\ -\dot{k}_k \omega^2_{k|k-1} + \dot{e}_{k|k-1} & -\dot{k}_k e_{k|k-1} + \dot{\omega}^2_{k|k-1} \end{bmatrix}$$