Задание для курсовой работы по курсу «Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов» на тему «Метод наименьших квадратов»

1. Смоделировать движение самолета в плоской декартовой системе координат Oxy и процесс его наблюдения наземным измерительным средством (НИС). Самолет движется прямолинейно и равномерно со скоростью $100 \div 300$ м/с на расстоянии $10 \div 200$ км от НИС, расположенного в начале координат Oxy. Проводятся $n = 20 \div 40$ измерений $\{Y_k\}$ дальности $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ с постоянным временным шагом $h = 2 \div 5$ с. Ошибки наблюдения не содержат систематической погрешности и образуют набор независимых случайных величин $\{W_k\}$, распределенных по нормальному закону с одинаковой дисперсией σ^2, где $\sigma = 100 \div 1000$ м.

Задать уровень значимости $\alpha = 0{,}01 \div 0{,}005$.

2. Используя метод наименьших квадратов (МНК), оценить параметры модели, считая, что наблюдения описываются моделью простой линейной регрессии

$$Y_k = \theta_1 + \theta_2 t_k + W_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где $\{\theta_j\}$ — неизвестные параметры, $t_1 = 0$, $t_2 = h$, $t_3 = 2h$, $\ldots$ — моменты измерений, $\{W_k\}$ — описанные выше ошибки наблюдений.

На одном графике изобразить: наблюдения в виде набора точек $\{(t_k, Y_k)\}$, истинную дальность $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$, ее МНК-оценку $\hat{r}(t) = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 t$, а также доверительные границы $\hat{r}(t) \pm u_\alpha \sqrt{D_r(t)}$, где $(x(t), y(t))$ — истинные координаты самолета, $D_r(t)$ — дисперсия МНК-оценки $\hat{r}(t)$, а u_α — граница симметричного промежутка, в который стандартная нормальная величина попадает с вероятностью $1 - \alpha$.

3. Найти МНК-оценки параметров и дальности, считая, что наблюдения описываются моделью параболической линейной регрессии

$$Y_k = \theta_1 + \theta_2 t_k + \theta_3 t_k^2/2 + W_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Представить графические данные (по аналогии с предыдущим пунктом).

4. На уровне значимости α для модели из предыдущего пункта проверить гипотезу о том, что $\theta_3 = 0$.

5. Для каждой их двух моделей построить остатки. По вектору остатков построить гистограмму. Изобразить полученные гистограммы на одном графике с плотностью $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Можно ли по этому графику сделать вывод о правильности выбора модели?