



CICLO DIAGNÓSTICO - MATEMÁTICA

TURMA IME-ITA

2022



GABARITO

1. 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99

2. a. $\frac{49}{38}$
b. 20

3. $1 + \sqrt{5}$

4. -

5. a. $\frac{1}{24}$
b. $\frac{11}{24}$

1ª QUESTÃO

Valor: 2,00

Sejam $P(n)$ e $S(n)$ o produto e a soma, respectivamente, dos dígitos do número inteiro n . Por exemplo, $P(23) = 6$ e $S(23) = 5$.

Suponha que N seja um número de dois dígitos tal que $N = P(N) + S(N)$. Determine todos os possíveis valores de N de acordo com as condições enunciadas.

Gabarito

> Utilizando a representação de um número de dois dígitos na base 10, > obtemos:

$$> 10a + b = ab + a + b > ab = 9a > b = 9 >$$

Dessa forma, o número N de dois algarismos deve terminar com 9. > Como o seu primeiro algarismo pode variar, obtemos as seguintes > possibilidades:

$$> N = 19 \Rightarrow P(19) + S(19) = 9 + 10 = 19 > N = 29 \Rightarrow P(29) + S(29) = 18 + 11 = 29 > N = 39 \Rightarrow P(39) + S(39) = 27 + 12 = 39$$

2ª QUESTÃO

Valor: 2,00

Seja o sistema:

$$\begin{cases} ax + by = 3 \\ ax^2 + by^2 = 7 \\ ax^3 + by^3 = 16 \\ ax^4 + by^4 = 42 \end{cases}$$

Calcule o valor numérico de

a. $a + b$

b. $ax^5 + by^5$

Gabarito

> Tomando a primeira equação e multiplicando por $(x + y)$:

$$> (ax + by)(x + y) = ax^2 + by^2 + xy(a + b) > \Rightarrow 3(x + y) = 7 + xy(a + b) >$$

Fazendo o mesmo com a segunda equação:

$$> (ax^2 + by^2)(x + y) = ax^3 + by^3 + xy(ax + by) > \Rightarrow 7(x + y) = 16 + 3xy >$$

E com a terceira equação

$$> (ax^3 + by^3)(x + y) = ax^4 + by^4 + xy(ax^2 + by^2) > \Rightarrow 16(x + y) = 72 + 7xy >$$

Das duas últimas equações obtidas:

$$> \begin{cases} >> 7(x + y) = 16 + 3xy \\ >> 16(x + y) = 42 + 7xy > \end{cases} >$$

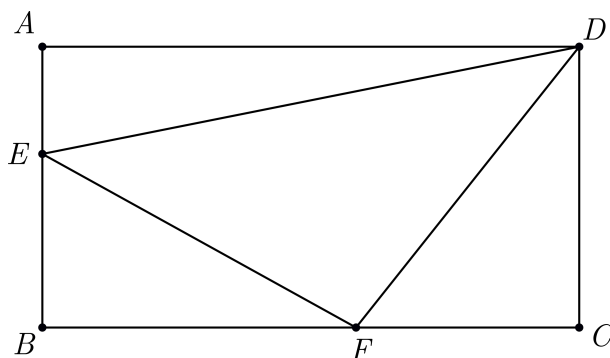
1. Na primeira equação obtida:

$$> 3(-14) = 7 - 38(a + b) \Rightarrow \boxed{a + b = \frac{49}{38}} >$$

3ª QUESTÃO

Valor: 2,00

No retângulo $ABCD$ abaixo, os triângulos ADE , BEF e CDF possuem áreas iguais, e a medida do segmento CF é de 2 unidades.



Determine a medida do segmento BF .

Gabarito

> Considere a medida do segmento CD igual a y unidades e a do segmento BF pedido de x unidades. Obtemos, assim, as seguintes áreas para os triângulos equivalentes:

$$> \text{(i)} \quad [CDF] = \frac{2y}{2} = y > \text{(ii)} \quad [BEF] = y \Rightarrow \frac{BE \cdot x}{2} = y \Rightarrow BE = \frac{2y}{x} > \text{(iii)} \quad [ADE] = y \Rightarrow \frac{AD \cdot DE}{2} = y >$$

Como a medida deve ser um valor real positivo, então:

$$> \boxed{BF = x = 1 + \sqrt{5}} >$$

Sejam os inteiros positivos n e k tais que $n \geq 2$ e $1 \leq k \leq n$. Dessa forma, definimos o polinômio P de grau $n - 1$ por:

$$P(x) = \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{(x+k)}$$

- Determine o polinômio correspondente a $n = 5$ e $k = 3$.
- Construa todos os possíveis polinômios tais que $n = 4$.
- Certo polinômio possui o coeficiente de x^{n-2} igual a 67, determine os valores de n e k para tal polinômio.
- Calcule a soma de todos os coeficientes de todos os possíveis polinômios de grau 5.
- Para um polinômio de grau n , determine a expressão do menor coeficiente possível de x^{n-3} .

Gabarito

> 1. Substituindo na expressão para P obtemos:

$$> P(x) = (x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = \boxed{x^4 + 12x^3 + 49x^2 + 78x + 40}. >$$

> 2. Para $n = 4$, temos a seguinte expressão:

$$> P(x) = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{(x+k)} >$$

Abrindo nos casos para os valores de k :

$$> \begin{cases} > k = 1 : P(x) = (x+2)(x+3)(x+4) = x^3 + 9x^2 + 26x + 24 \\ > k = 2 : P(x) = (x+1)(x+3)(x+4) = x^3 + 8x^2 + 19x + 12 \\ > k = 3 : P(x) = (x+1)(x+2)(x+4) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8 \\ > k = 4 : P(x) = (x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 > \end{cases} >$$

> 3. Como o polinômio P possui grau $n - 1$, o coeficiente de x^{n-2} > é dado pela soma:

$$> 1 + 2 + \dots + (k-1) + (k+1) + \dots + n = 1 + \dots + n - k = \frac{(1+n)n}{2} - k. >$$

Testando os possíveis valores para n que mais aproximam a > soma acima de 67:

$$> \begin{cases} > n = 10 : \frac{11 \cdot 10}{2} - k = 67 \Rightarrow k = -12 \\ > n = 11 : \frac{12 \cdot 11}{2} - k = 67 \Rightarrow k = -1 \\ > n = 12 : \frac{13 \cdot 12}{2} - k = 67 \Rightarrow k = 11 \\ > n = 13 : \frac{14 \cdot 13}{2} - k = 67 \Rightarrow k = 24 > \end{cases} >$$

Como k é um inteiro positivo menor ou igual a n , temos que > $\boxed{n = 12}$ e $\boxed{k = 11}$. > 4. Se o grau é 5, então $n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$. Dessa forma: > $P(x) = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)}{(x+k)}$. Observe > que, para obter a soma dos coeficientes de um polinômio, basta > impor $x = 1$:

$$> P(1) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{(1+k)} = \frac{7!}{(1+k)}. >$$

Finalmente, para obter a soma dos coeficientes de todos os > possíveis polinômios P , basta variar k de 1 a 6 e ir somando > os resultados:

$$> 7! \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) = \boxed{8028}. >$$

> 5. Sabendo que o polinômio de grau n é representado por:

$$> P(x) = \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)(x+n+1)}{(x+k)}, >$$

com $1 \leq k \leq n+1$. O coeficiente líder corresponde ao > monômio x^{n-1} e o coeficiente de x^{n-3} será formado pelo > produto dois a dois. Para obter o menor coeficiente possível, > basta impor $k = n+1$:

$$> P(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+n). >$$

Portanto:

$$> 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n-1) = \frac{(1 + \dots + n)^2 - (1^2 + \dots + n^2)}{2} = \boxed{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{(1+n)n}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]}. >$$

Na escola de Carlos, um conceito A vale 4 pontos, um B vale 3 pontos, um C vale 2 pontos e um D vale apenas 1 ponto. Sua média final nos quatro cursos que ele está matriculado é calculada como a soma total de pontos dividida por 4. Ele tem certeza de que obterá A's em Matemática e em Ciências, e pelo menos um C em Inglês e História. Ele acha que tem uma chance de $\frac{1}{6}$ de obter um A em Inglês e uma chance de $\frac{1}{4}$ de obter um B. Em História, ele tem $\frac{1}{4}$ de chance de conseguir um A e $\frac{1}{3}$ de chance de obter um B, independentemente do que ele recebe em Inglês.

Dessa forma, responda:

- Qual a probabilidade de Carlos obter média final igual a 4?
- Se para ser aprovado a média final deve ser de ao menos 3,5, qual a probabilidade de Carlos obter aprovação?

Gabarito

> Sejam e e h suas respectivas pontuações em Inglês e em > História: 1. Se a média final for de 4 pontos, significa que Carlos > obteve conceito A em todos os cursos. Dado que o conceito A já era > garantido em Matemática e em Ciências, para que consiga A também em > Inglês e em História tem-se:

$$>> \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{24}} \cdot >>$$

2. Para obter aprovação final, de acordo com as condições: >

$$>> \frac{4 + 4 + e + h}{4} \geq 3,5 \Rightarrow e + h \geq 6 >>$$

Portanto, sabendo que Carlos não tirará um D, abrimos em > casos:

$$>> \left\{ \begin{array}{ll} >> e = h = 3 : & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \text{ de probabilidade} \\ >> e = 4 \text{ e } h = 2, 3, 4 : & \frac{1}{6} \text{ de probabilidade} \\ >> h = 4 \text{ e } e = 2, 3, 4 : & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \text{ de probabilidade} >> \\ >> e = h = 3 : & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \text{ de probabilidade} \\ >> & \end{array} \right.$$

O caso $e = h = 4$ foi contado duas vezes: $> \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ de probabilidade. > Logo, obtemos como a probabilidade de a média ser de ao menos 3,5: >

$$>> \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \boxed{\frac{11}{24}} >>$$