# CICLO DIAGNÓSTICO - MATEMÁTICA

**TURMA IME-ITA**

**2022**

**GABARITO**

**1.** 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99

**2.** a. $\frac{49}{38}$

b. 20

**3.** $1 + \sqrt{5}$

**4.** -

**5.** a. $\frac{1}{24}$

b. $\frac{11}{24}$

| **1ª QUESTÃO** | **Valor: 2,00** |
|---|---|

Sejam $P(n)$ e $S(n)$ o produto e a soma, respectivamente, dos dígitos do número inteiro $n$. Por exemplo, $P(23) = 6$ e $S(23) = 5$.
Suponha que $N$ seja um número de dois dígitos tal que $N = P(N) + S(N)$. Determine todos os possíveis valores de $N$ de acordo com as condições enunciadas.

## Gabarito

> Utilizando a representação de um número de dois dígitos na base 10, > obtemos:

$$> 10a + b = ab + a + b > ab = 9a > b = 9 >$$

Dessa forma, o número $N$ de dois algarismos deve terminar com 9. > Como o seu primeiro algarismo pode variar, obtemos as seguintes > possibilidades:

$> N = 19 \Rightarrow P(19)+S(19) = 9+10 = 19 > N = 29 \Rightarrow P(29)+S(29) = 18+11 = 29 > N = 39 \Rightarrow P(39)+S(39) = 2$

| **2ª QUESTÃO** | **Valor: 2,00** |
|---|---|

Seja o sistema:

$$\begin{cases} ax + by = 3 \\ ax^2 + by^2 = 7 \\ ax^3 + by^3 = 16 \\ ax^4 + by^4 = 42 \end{cases}$$

Calcule o valor numérico de

a) $a + b$

b) $ax^5 + by^5$

**Gabarito**

> Tomando a primeira equação e multiplicando por $(x+y)$:

$$> (ax+by)(x+y) = ax^2+by^2+xy(a+b) >\Rightarrow 3(x+y) = 7+xy(a+b) >$$

Fazendo o mesmo com a segunda equação:

$$> (ax^2+by^2)(x+y) = ax^3+by^3+xy(ax+by) >\Rightarrow 7(x+y) = 16+3xy >$$

E com a terceira equação

$$> (ax^3+by^3)(x+y) = ax^4+by^4+xy(ax^2+by^2) >\Rightarrow 16(x+y) = 72+7xy >$$

Das duas últimas equações obtidas:

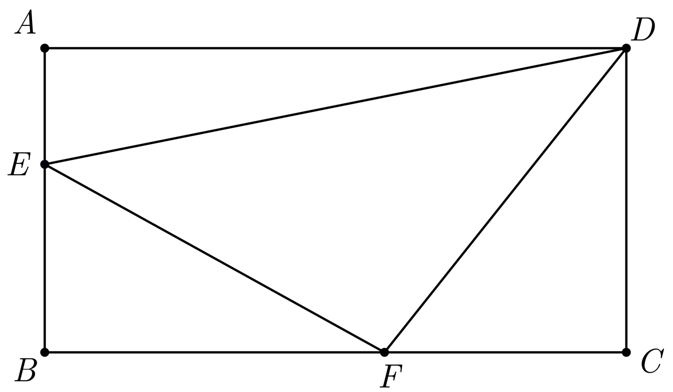
$$> \begin{cases} >> 7(x+y) = 16+3xy) \\ >> 16(x+y) = 42+7xy > \end{cases} >$$

1. Na primeira equação obtida:

$$> 3(-14) = 7-38(a+b) \Rightarrow \boxed{a+b = \frac{49}{38}} >$$

| **3ª QUESTÃO** | **Valor: 2,00** |
|---|---|

No retângulo $ABCD$ abaixo, os triângulos $ADE$, $BEF$ e $CDF$ possuem areas iguais, e a medida do segmento $CF$ é de $2$ unidades.




Determine a medida do segmento $BF$.

**Gabarito**

> Considere a medida do segmento CD igual a $y$ unidades e a do segmento > $BF$ pedido de $x$ unidades. Obtemos, assim, as seguites áreas apra os > triângulos equivalentes:

> (i) $[CDF] = \frac{2y}{2} = y >$ (ii) $[BEF] = y \Rightarrow \frac{BE \cdot x}{2} = y >\Rightarrow BE = \frac{2y}{x} >$ (iii) $[ADE] = y >\Rightarrow \frac{AD \cdot DE}{2} = y >$

Como a medida deve ser um valor real positivo, então:

$$> \boxed{BF = x = 1+\sqrt{5}} >$$

| 4ª QUESTÃO | Valor: 2,00 |
|---|---|

Sejam os inteiros positivos $n$ e $k$ tais que $n \geq 2$ e $1 \leq k \leq n$. Dessa forma, definimos o polinômio $P$ de grau $n-1$ por:

$$P(x) = \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{(x+k)}$$

a) Determine o polinômio correspondente a $n = 5$ e $k = 3$.

b) Construa todos os possíveis polinômios tais que $n = 4$.

c) Certo polinômio possui o coeficiente de $x^{n-2}$ igual a $67$, determine os valores de $n$ e $k$ para tal polinômio.

d) Calcule a soma de todos os coeficientes de todos os possíveis polinômios de grau $5$.

e) Para um polinômio de grau $n$, determine a expressão do menor coeficiente possível de $x^{n-3}$.

**Gabarito**

> 1. Substituindo na expressão para $P$ obtemos:

$$> P(x) = (x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = \boxed{x^4+12x^3+49x^2+78x+40}. >$$

> 2. Para $n=4$, temos a seguinte expressão:

$$> P(x) = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{(x+k)} >$$

Abrindo nos casos para os valores de $k$:

$$> \boxed{\begin{cases} > k=1: P(x) = (x+2)(x+3)(x+4) = x^3+9x^2+26x+24 \\ > k=2: P(x) = (x+1)(x+3)(x+4) = x^3+8x^2+19x+12 \\ > k=3: P(x) = (x+1)(x+2)(x+4) = x^3+7x^2+14x+8 \\ > k=4: P(x) = (x+1)(x+2)(x+3) = x^3+6x^2+11x+6 > \end{cases}} >$$

> 3. Como o polinômio $P$ possui grau $n-1$, o coeficiente de $x^{n-2}$ > é dado pela soma:

$$> 1+2+...+(k-1)+(k+1)+...+n = 1+...+n-k = \frac{(1+n)n}{2} - k. >$$

Testando os possíveis valores para $n$ que mais aproximam a > soma acima de 67:

$$> \begin{cases} > n=10: \frac{11\cdot10}{2} - k = 67 \Rightarrow k = -12 \\ > n=11: \frac{12\cdot11}{2} - k = 67 \Rightarrow k = -1 \\ > n=12: \frac{13\cdot12}{2} - k = 67 \Rightarrow k = 11 \\ > n=13: \frac{14\cdot13}{2} - k = 67 \Rightarrow k = 24 \\ > \end{cases} >$$

Como $k$ é um inteiro positivo menor ou igual a $n$, temos que > $\boxed{n=12}$ e $\boxed{k=11}$. > 4. Se o grau é 5, então $n-1=5 \Rightarrow n=6$. Dessa forma: > $P(x) = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)}{(x+k)}$. Observe > que, para obter a soma dos coeficientes de um polinômio, basta > impor $x=1$:

$$> P(1) = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{(1+k)} = \frac{7!}{(1+k)}. >$$

Finalmente, para obter a soma dos coeficientes de todos os > possíveis polinômios $P$, basta variar $k$ de 1 a 6 e ir somando > os resultados:

$$> 7!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) = \boxed{8028}. >$$

> 5. Sabendo que o polinômio de grau $n$ é representado por:

$$> P(x) = \frac{(x+1)(x+2)...(x+n)(x+n+1)}{(x+k)}, >$$

com $1 \le k \le n+1$. O coeficiente líder corresponde ao > monômio $x^{n-1}$ e o coeficiente de $x^{n-3}$ será formado pelo > produto dois a dois. Para obter o menor coeficiente possível, > basta impor $k=n+1$:

$$> P(x) = (x+1)(x+2)...(x+n). >$$

Portanto:

$$> 1\cdot2+1\cdot3+...+n\cdot(n-1) = \frac{(1+...+n)^2-(1^2+...+n^2)}{2} = = \boxed{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{(1+n)n}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]}. >$$

| 5ª QUESTÃO | Valor: 2,00 |
|---|---|

Na escola de Carlos, um conceito A vale 4 pontos, um B vale 3 pontos, um C vale 2 pontos e um D vale apenas 1 ponto. Sua média final nos quatro cursos que ele está matriculado é calculada como a soma total de pontos dividida por 4. Ele tem certeza de que obterá A's em Matemática e em Ciências, e pelo menos um C em Inglês e História. Ele acha que tem uma chance de $\frac{1}{6}$. de obter um A em Inglês e uma chance de $\frac{1}{4}$ de obter um B. Em História, ele tem $\frac{1}{4}$ de chance de conseguir um A e $\frac{1}{3}$ de chance de obter um B, independentemente do que ele recebe em Inglês.
Dessa forma, responda:

a) Qual a probabilidade de Carlos obter média final igual a 4?

b) Se para ser aprovado a média final deve ser de ao menos 3,5, qual a probabilidade de Carlos obter aprovação?

## Gabarito

> Sejam $e$ e $h$ suas respectivas pontuações em Inglês e em > História: 1. Se a média final for de 4 pontos, significa que Carlos > obteve conceito A em todos os cursos. Dado que o conceito A já era > garantido em Matemática e em Ciências, para que consiga A também em > Inglês e em História tem-se:

$$>> \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{24}}. >>$$

2. Para obter aprovação final, de acordo com as condições: >

$$>> \frac{4+4+e+h}{4} \geq \text{3,5} \Rightarrow e+h \geq 6 >>$$

Portanto, sabendo que Carlos não tirará um D, abrimos em > casos:

$$>> \begin{cases} >> e = h = 3: & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \text{ de probabilidade} \\ >> e = 4 \text{ e } h = 2,3,4: & \frac{1}{6} \text{ de probabilidade} \\ >> h = 4 \text{ e } e = 2,3,4: & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \text{ de probabilidade} \\ >> e = h = 3: & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \text{ de probabilidade} \\ >> \end{cases} >>$$

O caso $e = h = 4$ foi contado duas vezes: > $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ de probabilidade. > Logo, obtemos como a probabilidade de a média ser de ao menos 3,5: >

$$>> \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \boxed{\frac{11}{24}} >>$$