Grafos

MSc Edson Ticona Zegarra

Campamento de Programación

Contenido

Contenido

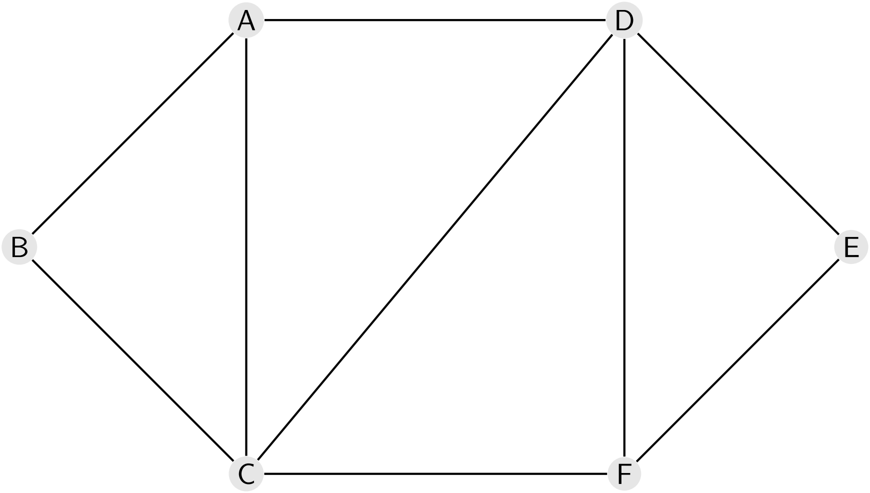
Grafo

- Un grafo es una estructura de datos definida por un par de conjuntos: los vértices V y las aristas E.

Grafo

- Un grafo es una estructura de datos definida por un par de conjuntos: los vértices V y las aristas E.
- Toda arista conecta un par de vértices, entonces decimos que $G = (V, E)$

Grafo



Grafo

- Para el grafo anterior, $V = \{A, B, C, D, E, F\}$

Grafo

- Para el grafo anterior, $V = \{A, B, C, D, E, F\}$
- $E = \{(D, A), (B, A), (B, C), (A, C), (D, C), (F, C), (F, E), (D, E), (D, F)\}$

Grafo

- Para el grafo anterior, $V = \{A, B, C, D, E, F\}$
- $E = \{(D, A), (B, A), (B, C), (A, C), (D, C), (F, C), (F, E), (D, E), (D, F)\}$
- formalmente $G = (V, E)$

Grafo

- Los grafos son útiles para representar: redes de comunicaciones, caminos, redes sociales, etc

Grafo

- Los grafos son útiles para representar: redes de comunicaciones, caminos, redes sociales, etc
- Usualmente consideramos a los grafos como no direccionados, es decir, si existe un vértice (u, v), se puede ir de u a v y viceversa

Grafo

- Los grafos son útiles para representar: redes de comunicaciones, caminos, redes sociales, etc
- Usualmente consideramos a los grafos como no direccionados, es decir, si existe un vértice (u, v), se puede ir de u a v y viceversa
- Por otro lado, si consideramos grafos direccionados, gráficamente utilizamos flechas para indicar la dirección y una arista (u, v) indica que se puede ir de u a v, pero **no** de v a u. En este caso usualmente utilizamos el término *arco* y no arista, así también decimos que $G = (V, A)$

Grafo

- Los grafos son útiles para representar: redes de comunicaciones, caminos, redes sociales, etc
- Usualmente consideramos a los grafos como no direccionados, es decir, si existe un vértice (u, v), se puede ir de u a v y viceversa
- Por otro lado, si consideramos grafos direccionados, gráficamente utilizamos flechas para indicar la dirección y una arista (u, v) indica que se puede ir de u a v, pero **no** de v a u. En este caso usualmente utilizamos el término *arco* y no arista, así también decimos que $G = (V, A)$
- Entre cualquier par de vértices u y v, solo existe a lo mucho una arista para grafos no direccionados.

Grafo

- Los grafos son útiles para representar: redes de comunicaciones, caminos, redes sociales, etc
- Usualmente consideramos a los grafos como no direccionados, es decir, si existe un vértice (u, v), se puede ir de u a v y viceversa
- Por otro lado, si consideramos grafos direccionados, gráficamente utilizamos flechas para indicar la dirección y una arista (u, v) indica que se puede ir de u a v, pero **no** de v a u. En este caso usualmente utilizamos el término *arco* y no arista, así también decimos que $G = (V, A)$
- Entre cualquier par de vértices u y v, solo existe a lo mucho una arista para grafos no direccionados.
- Para grafos direccionados, para cualquier par de vértices existe a lo mucho una arista (u, v) y una arista (v, u)

Grafo

- Adicionalmente una arista (u, v) puede recibir un *peso*, que puede representar el costo para ir de u a v y se representa por $c_{u,v}$

Grafo

- Adicionalmente una arista (u, v) puede recibir un *peso*, que puede representar el costo para ir de u a v y se representa por $c_{u,v}$
- A dichos grafos se les conoce como grafos con pesos

Grafo

- Adicionalmente una arista (u, v) puede recibir un *peso*, que puede representar el costo para ir de u a v y se representa por $c_{u,v}$
- A dichos grafos se les conoce como grafos con pesos
- Se conoce como grafo *conectado* a todo grafo cuyos vértices tienen al menos un camino entre sí

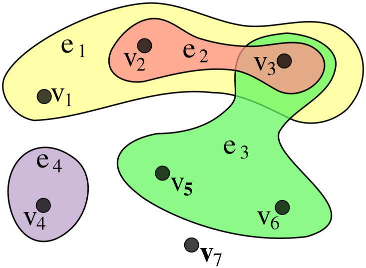
Grafo

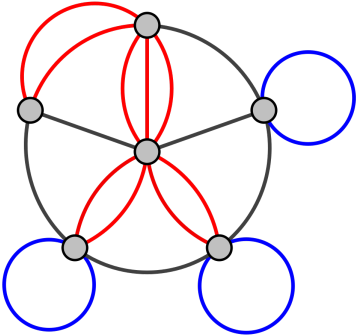
- Adicionalmente una arista (u, v) puede recibir un *peso*, que puede representar el costo para ir de u a v y se representa por $c_{u,v}$
- A dichos grafos se les conoce como grafos con pesos
- Se conoce como grafo *conectado* a todo grafo cuyos vértices tienen al menos un camino entre sí
- Un grafo cuyos vértices representan puntos en el plano se les conocen como grafos geométricos

Grafo

- Adicionalmente una arista (u, v) puede recibir un *peso*, que puede representar el costo para ir de u a v y se representa por $c_{u,v}$
- A dichos grafos se les conoce como grafos con pesos
- Se conoce como grafo *conectado* a todo grafo cuyos vértices tienen al menos un camino entre sí
- Un grafo cuyos vértices representan puntos en el plano se les conocen como grafos geométricos
- Grafos que contienen más de una arista por par de vértices se le conoce como multi-grafo. Grafos cuyas aristas conectan más de dos vértices se les conocen como hipergrafos.

Multigrafos e Hipergrafos





Fuente: Wikimedia. Creative Commons license.

Grafo

- Un grafo conectado con $|V| - 1$ aristas es un árbol

Grafo

- Un grafo conectado con $|V| - 1$ aristas es un árbol
- Un árbol es un caso particular de un grafo

Grafo

- Un grafo conectado con $|V| - 1$ aristas es un árbol
- Un árbol es un caso particular de un grafo
- Un grafo que tiene todas las posibles aristas se conoce como grafo *completo*

Grafo

- Un grafo conectado con $|V| - 1$ aristas es un árbol
- Un árbol es un caso particular de un grafo
- Un grafo que tiene todas las posibles aristas se conoce como grafo *completo*
- Un grafo es llamado de *denso* si es que $|E| >> |V|$ y es llamado de *esparso* si es que $|E| < |V|$. Esta definición es a veces difusa y depende del problema.

Grafo

- Un grafo conectado con $|V| - 1$ aristas es un árbol
- Un árbol es un caso particular de un grafo
- Un grafo que tiene todas las posibles aristas se conoce como grafo *completo*
- Un grafo es llamado de *denso* si es que $|E| >> |V|$ y es llamado de *esparso* si es que $|E| < |V|$. Esta definición es a veces difusa y depende del problema.
- Alternativamente, un grafo es esparso si $|E| = O(|V|)$ o $|E| = O(|V| \log |V|)$

Contenido

Lista de adyacencia

- La representación básica de un grafo es con una lista de adyacencia o con una matriz de adyacencia

Lista de adyacencia

- La representación básica de un grafo es con una lista de adyacencia o con una matriz de adyacencia
- Una lista de adyacencia es un vector, con un elemento por vértice i. El elemento i-ésimo almacena a su vez otro vector que contiene la lista de vértices con los cuales el vértice i está conectado

Lista de adyacencia

- La representación básica de un grafo es con una lista de adyacencia o con una matriz de adyacencia
- Una lista de adyacencia es un vector, con un elemento por vértice i. El elemento i-ésimo almacena a su vez otro vector que contiene la lista de vértices con los cuales el vértice i está conectado
- Para el grafo mostrado anteriormente, la lista se verá: $G = \{[D, B, C], [A, C], [B, A, D, F], [A, C, E, F], [D, F], [D, E]\}$

Lista de adyacencia

- La representación básica de un grafo es con una lista de adyacencia o con una matriz de adyacencia
- Una lista de adyacencia es un vector, con un elemento por vértice i. El elemento i-ésimo almacena a su vez otro vector que contiene la lista de vértices con los cuales el vértice i está conectado
- Para el grafo mostrado anteriormente, la lista se verá: $G = \{[D, B, C], [A, C], [B, A, D, F], [A, C, E, F], [D, F], [D, E]\}$
- Para un grafo con pesos, cada elemento del vector puede contener un par, indicando el vértice al que se conecta la arista y el peso de dicha arista. Note que no hay ningún órden en particular al momento de guardar los vértices

Matriz de adyacencia

- Una matriz de adyacencia es un matriz, tal que la arista u, v será representada por un valor de 1 en la fila u y la columna v

Matriz de adyacencia

- Una matriz de adyacencia es un matriz, tal que la arista u, v será representada por un valor de 1 en la fila u y la columna v

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de adyacencia

- Una matriz de adyacencia es un matriz, tal que la arista u, v será representada por un valor de 1 en la fila u y la columna v

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Para un grafo con pesos puede guardarse el peso directamente en la matriz. Note que la matriz tiene una diagonal con ceros

Matriz de adyacencia

- Una matriz de adyacencia es un matriz, tal que la arista u, v será representada por un valor de 1 en la fila u y la columna v

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Para un grafo con pesos puede guardarse el peso directamente en la matriz. Note que la matriz tiene una diagonal con ceros
- Un grafo no direccionado tiene una matriz simétrica

Representaciones

- Estás no son las únicas maneras de representar un grafo, aunque sí las más comunes

Representaciones

- Estás no son las únicas maneras de representar un grafo, aunque sí las más comunes
- El uso depende de la situación, algunos algoritmos o problemas se facilitan con una u otra representación

Representaciones

- Estás no son las únicas maneras de representar un grafo, aunque sí las más comunes
- El uso depende de la situación, algunos algoritmos o problemas se facilitan con una u otra representación
- Para un grafo no direccionado completo, ambas representaciones serán iguales

Representaciones

- Estás no son las únicas maneras de representar un grafo, aunque sí las más comunes
- El uso depende de la situación, algunos algoritmos o problemas se facilitan con una u otra representación
- Para un grafo no direccionado completo, ambas representaciones serán iguales
- La lista de adyacencia es más eficiente en el uso de memoria

Representaciones

- Estás no son las únicas maneras de representar un grafo, aunque sí las más comunes
- El uso depende de la situación, algunos algoritmos o problemas se facilitan con una u otra representación
- Para un grafo no direccionado completo, ambas representaciones serán iguales
- La lista de adyacencia es más eficiente en el uso de memoria
- Grafos densos son naturalmente mejor representados por una matriz de adyacencia; grafos esparsos por listas de adyacencia

Contenido

Búsqueda

- Es una forma de visitar todos los vértices de un grafo hasta encontrar el valor deseado

Búsqueda

- Es una forma de visitar todos los vértices de un grafo hasta encontrar el valor deseado
- A diferencia de una arreglo, los grafos pueden ser recorridos de diversas maneras

Búsqueda

- Es una forma de visitar todos los vértices de un grafo hasta encontrar el valor deseado
- A diferencia de una arreglo, los grafos pueden ser recorridos de diversas maneras
- Cada forma tiene sus ventajas y sus aplicaciones

Breadth First Search (BFS): Búsqueda en amplitud

- Se comienza en un vértice v y se avanza como una "gota de agua", recorriendo primero los vecinos de v, luego los vértices que están a dos saltos de v, luego los que están a tres saltos, y así hasta recorrer todo el grafo.

Breadth First Search (BFS): Búsqueda en amplitud

- Se comienza en un vértice v y se avanza como una "gota de agua", recorriendo primero los vecinos de v, luego los vértices que están a dos saltos de v, luego los que están a tres saltos, y así hasta recorrer todo el grafo.
- La complejidad es $O(|V| + |E|)$

Breadth First Search (BFS): Búsqueda en amplitud

```
toVisit.push(u) ;      // toVisit puede ser una cola y se
comienza en un vértice arbitrario u
while !toVisit.empty() do
    u = toVisit.front() /* Adj(u) adyacentes a u          */
    for v ∈ Adj(u) do
        /* colorear los vértices                          */
        if !visited(v) then
            toVisit.push(v) ;
            dist[v] = dist [u] + 1 ;
            mark u as visited ;
        end
    end
    toVisit.pop()
end
```

Breadth First Search (BFS): Búsqueda en amplitud

- ¿Qué pasa si el grafo no esta conectado?

Breadth First Search (BFS): Búsqueda en amplitud

- ¿Qué pasa si el grafo no esta conectado?
- ¿Cómo hallar la distancia mínima entre dos vértices para un grafo sin pesos?

Depth First Search (DFS): Búsqueda en profundidad

- Se comienza desde un vértice v y se trata de llegar lo más lejos posible en número de saltos, luego se regresa hasta el último nodo visitado que tenga vecinos aún sin visitar, y se vuelve a intentar llegar lo más lejos posible en número de saltos hasta recorrer todo el grafo.

Depth First Search (DFS): Búsqueda en profundidad

- Se comienza desde un vértice v y se trata de llegar lo más lejos posible en número de saltos, luego se regresa hasta el último nodo visitado que tenga vecinos aún sin visitar, y se vuelve a intentar llegar lo más lejos posible en número de saltos hasta recorrer todo el grafo.
- La complejidad es $O(|V| + |E|)$

Depth First Search (DFS): Búsqueda en profundidad

mark u as visited ;
for $v \in Adj(u)$ **do**
  if $!visited(v)$ **then**
    $DFS(v)$
  end
end

Depth First Search (DFS): Búsqueda en profundidad

- ¿Qué pasa si el grafo no esta conectado?

Depth First Search (DFS): Búsqueda en profundidad

- ¿Qué pasa si el grafo no esta conectado?
- ¿Cómo podríamos hacer el ordenamiento topológico en un grafo direccionado?

Depth First Search (DFS): Búsqueda en profundidad

- ¿Qué pasa si el grafo no esta conectado?
- ¿Cómo podríamos hacer el ordenamiento topológico en un grafo direccionado?
- ¿Cómo hallamos los componentes fuertemente conectados para un grafo direccionado?