Mecânica quântica não-linear em um espaço de Hilbert q-deformado

Bruno Gomes da Costa (IF Sertão-PE)
Ernesto Pinheiro Borges (UFBA e INCT-SC)

XXXIV Encontro de Físicos do Norte e Nordeste
Novembro, 2019
Maceió – AL

INSTITUTO FEDERAL
Sertão Pernambucano
Campus Petrolina

Sumário

Funções q-deformadas e álgebra não aditiva

Funções generalizadas

$$\exp_q u \equiv [1 + (1-q)u]^{1/(1-q)} \qquad \ln_q u \equiv \frac{u^{1-q} - 1}{1-q} \qquad (\exp_1 u = e^u, \ln_1 = \ln u)$$

Operadores algébricos generalizados

- q-adição: $a \oplus_q b \equiv a + b + (1-q)ab$
- q-diferença: $a \ominus_q b \equiv \dfrac{a-b}{1+(1-q)b}$
- q-produto: $a \otimes_q b \equiv [a^{1-q} + b^{1-q} - 1]_+^{1/(1-q)} \qquad (a, b > 0)$
- q-razão: $a \oslash_q b \equiv [a^{1-q} - b^{1-q} + 1]_+^{1/(1-q)} \qquad (a, b > 0)$

Algumas propriedades da q-álgebra

(1) $\exp_q(a) \exp_q(b) = \exp_q(a \oplus_q b)$
(2) $\exp_q(a) / \exp_q(b) = \exp_q(a \ominus_q b)$
(3) $\exp_q(a) \otimes_q \exp_q(b) = \exp_q(a + b)$
(4) $\exp_q(a) \oslash_q \exp_q(b) = \exp_q(a - b)$
(5) $\ln_q(ab) = \ln_q(a) \oplus_q \ln_q(b)$
(6) $\ln_q(a/b) = \ln_q(a) \ominus_q \ln_q(b)$
(7) $\ln_q(a \otimes_q b) = \ln_q(a) + \ln_q(b)$
(8) $\ln_q(a \oslash_q b) = \ln_q(a) - \ln_q(b)$

• L. Nivanen, A. Le Méhauté, Q. A. Wang, *Rep. Math. Phys.* **52**, 437 (2003)
• E. P. Borges, *Physica A* **340**, 95 (2004)

Funções trigonométricas q-espirais: $\cos_q(u)$ e $\sin_q(u)$

$$\boxed{\cos_q(u) \equiv \frac{\exp_q(iu) + \exp_q(-iu)}{2}}$$

$$\boxed{\sin_q(u) \equiv \frac{\exp_q(iu) - \exp_q(-iu)}{2i}}$$

$$\boxed{\cos_q(u) = \rho_q(u)\cos[\varphi_q(u)]}$$

$$\boxed{\sin_q(u) = \rho_q(u)\sin[\varphi_q(u)]}$$

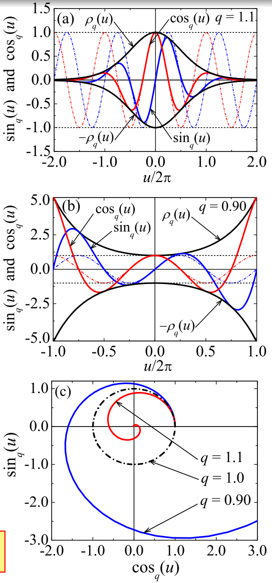
com $\rho_q^2(u) = \exp_q(iu)\exp_q(-iu) = [1+(1-q)^2u^2]^{1/(1-q)}$

$$\varphi_q(u) = \frac{1}{1-q}\text{atan}[(1-q)u].$$

$$\boxed{\cos_q^2(u) + \sin_q^2(u) = \rho_q^2(u)}$$

onde $\rho_q(u) \neq 1$ para $q \neq 1$.

$$\boxed{\text{Vetor } \vec{v}_q = (\cos_q(u), \sin_q(u)) \text{ descreve uma espiral para } q \neq 1.}$$



Propriedades das funções trigonométricas q-deformadas

- Identidades trigonométricas q-deformadas:

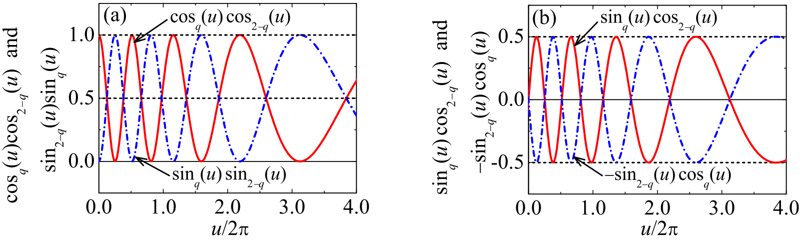
$$\cos_q(u)\cos_{2-q}(u) = \cos^2[\varphi_q(u)],$$

$$\sin_q(u)\sin_{2-q}(u) = \sin^2[\varphi_q(u)],$$

$$\sin_q(u)\cos_{2-q}(u) = \sin_{2-q}(u)\cos_q(u) = \frac{1}{2}\sin[2\varphi_q(u)].$$

- Teorema de Pitágoras, complexo conjugado e produto interno q-deformados:

$$\boxed{\begin{aligned} 1 &= \cos_q(u)\cos_{2-q}(u) + \sin_q(u)\sin_{2-q}(u) \\ &= \exp_q(iu)\exp_{2-q}(-iu) \\ &= \vec{v}_q \cdot \vec{v}_{2-q}, \end{aligned}}$$



Mecânica quântica não-linear q-deformada

Estudos de não extensividade em mecânica quântica na literatura:

- Equação de Schrödinger não-linear
- Operador evolução temporal generalizado
- Equação de Liouville-von Neumann generalizada
- Decoerência quântica
- Teoria quântica de muitos-corpos

Nossa contribuição sobre o tema...

ELSEVIER
Physics Letters A
Volume 383, Issue 23, 12 August 2019, Pages 2729-2738

Nonlinear quantum mechanics in a q-deformed Hilbert space

Bruno G. da Costa [a], Ernesto P. Borges [b]

[a] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, 56316-686 Petrolina-PE, Brazil
[b] Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Rua Barao de Jeremoabo, 40170-115 Salvador-BA, Brazil

Received 1 May 2019, Revised 31 May 2019, Accepted 31 May 2019, Available online 4 June 2019.

Espaço de Hilbert q-deformado

Vetor $\vec{v}_q = (\cos_q(u), \sin_q(u))$ é q-normalizado: $\boxed{\vec{v}_q \cdot \vec{v}_{2-q} = 1,}$

Espaço de Hilbert q-deformado

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \langle w_q | v_q \rangle = \langle v_{2-q} | w_{2-q} \rangle^*, \\
(ii) \quad & \langle w_q | \lambda_{q,1} v_{q,1} + \lambda_{q,2} v_{q,2} \rangle = \lambda_{q,1} \langle w_q | v_{q,1} \rangle + \lambda_{q,2} \langle w_q | v_{q,2} \rangle, \\
(iii) \quad & \langle \lambda_{q,1} w_{q,1} + \lambda_{q,2} w_{q,2} | v_q \rangle = \lambda^*_{2-q,1} \langle w_{q,1} | v_q \rangle + \lambda^*_{2-q,2} \langle w_{q,2} | v_q \rangle.
\end{aligned}$$

Vetores ket e bra

$|v_q\rangle = \sum_k c_{q,k} |k\rangle$ e $\langle v_q| = \sum_k \langle k | c^*_{2-q,k}$ ($\{|k\rangle\}$ é uma base ortonormal)

q-Norma

$$||v_q||^2 = \langle v_q | v_q \rangle = \sum_k c^*_{2-q,k} c_{q,k}.$$

Operadores q-unitários

$$\hat{\Omega}^\dagger_{2-q} \hat{\Omega}_q = \hat{1}$$

Operador evolução temporal q-deformado

$$\boxed{\hat{U}_q(t, t_0) = \exp_q\left[-\frac{i\hat{H}(t-t_0)}{\hbar}\right]}$$

\# $\hat{U}_q(t, t_0)$ é não unitário ($\hat{U}_q^\dagger \hat{U}_q \neq \hat{1}$) $\longrightarrow$ **Decoerência quântica**.
\# $\hat{U}_q(t, t_0)$ é q-unitário ($\hat{U}_{2-q}^\dagger \hat{U}_q = \hat{1}$)

$$i\hbar\mathcal{D}_{q,t}\hat{U}_q(t, t_0) = \hat{H}\hat{U}_q(t, t_0) \qquad \mathcal{D}_{q,u}f(u) = [f(u)]^{1-q}\frac{df(u)}{du} \qquad \mathcal{D}_{q,u}\exp_q u = \exp_q u$$

Equação de Schrödinger não-linear:

$$\boxed{i\hbar\mathcal{D}_{q,t}|\psi_q(t)\rangle = \hat{H}|\psi_q(t)\rangle}$$

Evolução temporal do ket na base de autoestados de $\hat{H}$:

$$\boxed{|\psi_q(t)\rangle = \sum_n \exp_q\left[-\frac{iE_n(t-t_0)}{\hbar}\right]|n\rangle\langle n|\psi_q(t_0)\rangle}$$

onde $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ e $|\psi_q(t_0)\rangle$ é o estado inicial.

Equação de Schrödinger não-linear NRT

Equação de Schrödinger não-linear:

$$\boxed{i\hbar\mathcal{D}_{q,t}\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right] = \hat{H}\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right]}$$

Operador momento linear deformado:

$$\boxed{\hat{p}_q\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right] = -i\hbar\mathcal{D}_{q,\vec{r}}\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right]}$$

$$\hat{H}_q = \frac{1}{2m}\hat{p}_q^2 + \hat{V}, \qquad \mathcal{D}_{q,u}f(u) = [f(u)]^{1-q}\frac{df}{du}$$

$$i\hbar\mathcal{D}_{q,t}\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right] = -\frac{\hbar^2}{2m}\mathcal{D}^2_{q,\vec{r}}\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right] + V(\vec{r})\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right]$$

ou ainda, $$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right] = -\frac{1}{2-q}\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right]^{2-q} + V(\vec{r})\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right]^{q}}$$

Solução partícula livre ($V(\vec{r}) = 0$): $$\boxed{\Psi_q(r,t) = \Psi_0(q)\exp_q[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)]}$$

$$k = p/\hbar \qquad \omega = E/\hbar \qquad E = p^2/2m$$

- F. D. Nobre, M. A. Rego-Monteiro, C. Tsallis, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 140601 (2011)

Equação de Schrödinger não-linear NRT

$$i\hbar\mathcal{D}_{q,t}\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right] = -\frac{\hbar^2}{2m}\mathcal{D}^2_{q,\vec{r}}\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right] + V(\vec{r})\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right],$$

Equação de Schrödinger não-linear q-complexo conjugada:

$$-i\hbar\mathcal{D}_{2-q,t}\left[\frac{\Psi^*_{2-q}(\vec{r},t)}{\Psi^*_0(2-q)}\right] = -\frac{\hbar^2}{2m}\mathcal{D}^2_{2-q,\vec{r}}\left[\frac{\Psi^*_{2-q}(\vec{r},t)}{\Psi^*_0(2-q)}\right] + V(\vec{r})\left[\frac{\Psi^*_{2-q}(\vec{r},t)}{\Psi_0(2-q)}\right]$$

Para uma partícula submetida a um potencial constante V_0, e considerando o campo auxiliar

$$\frac{\Phi_q(\vec{r},t)}{\Phi_0(q)} = \left[\frac{\Psi^*_{2-q}(\vec{r},t)}{\Psi^*_0(2-q)}\right]^q = \left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right]^{-q},$$

obtemos

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\Phi_q(\vec{r},t)}{\Phi_0(q)}\right] = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right]^{1-q}\vec{\nabla}^2\left[\frac{\Phi_q(\vec{r},t)}{\Phi_0(q)}\right] - qV_0\left[\frac{\Psi_q(\vec{r},t)}{\Psi_0(q)}\right]^{q-1}\left[\frac{\Phi_q(\vec{r},t)}{\Phi_0(q)}\right].}$$

- F. D. Nobre, M. A. Rego-Monteiro e C. Tsallis, Europhys. Lett. **97**, 41001 (2012).
- F. D. Nobre and A. R. Plastino, Phys. Lett. A **381**, 2457 (2017).

Equação de Liouville-von Neumann q-deformada

Operador matriz densidade q-deformado:

$$\hat{\varrho}_q(t) = |\psi_q(t)\rangle\langle\psi_q(t)|$$

com $\varrho_{q,nm} = c^*_{2-q,m}(t)c_{q,n}(t)$.

Valor esperado de um observável:

$$\langle\hat{\Omega}\rangle_q = \langle\psi_q|\hat{\Omega}|\psi_q\rangle = \sum_{n,m} \varrho_{q,nm}\Omega_{mn} = \mathrm{tr}(\hat{\varrho}_q\hat{\Omega})$$

Equação de Liouville-von Neumann q-deformada:

$$\mathcal{D}_{q,t}\hat{\varrho}_q = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{\varrho}_q]$$

Seja $i\hbar\hat{\mathcal{L}}_q\hat{\varrho}_q \equiv [\hat{H}, \hat{\varrho}_q]$, a solução torna-se

$$\hat{\varrho}_q(t) = \exp_q(\hat{\mathcal{L}}t)\hat{\varrho}_q(0) = [1 + (1-q)\hat{\mathcal{L}}t]_+^{1/(1-q)}\hat{\varrho}_q(0)$$

- A. Vidiella-Barranco and H. Moya-Cessa, Phys. Lett. A **279**, 56 (2001).

Operador rotação q-deformado

$$\boxed{\hat{\mathcal{R}}_{q,\hat{n}}(\phi) \equiv \exp_q\left(-\frac{i\vec{J}\cdot\vec{\phi}}{\hbar}\right)}$$

onde $\vec{\phi} \equiv \phi\hat{n}$, ϕ é ângulo de rotação, $\hat{n}$ é um vetor unitário, e $\vec{J}$ é o gerador de rotações.

Para uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ ($\vec{J} = \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, σ_j são as matrizes de Pauli):

$$\boxed{\hat{\mathcal{R}}_{q,\hat{n}}(\phi) = I\cos_q(\phi/2) - i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\sin_q(\phi/2)}$$

Operadores rotação em torno dos eixos x, y e z:

$$\hat{\mathcal{R}}_{q,x}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos_q(\phi/2) & -i\sin_q(\phi/2) \\ -i\sin_q(\phi/2) & \cos_q(\phi/2) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{q,y}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos_q(\phi/2) & -\sin_q(\phi/2) \\ \sin_q(\phi/2) & \cos_q(\phi/2) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{q,z}(\phi) = \begin{pmatrix} e_q^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e_q^{i\phi/2} \end{pmatrix}.$$

Rotação em torno do eixo z

Efeito sobre o estado:

$$|\psi_q'\rangle = \exp_q\left(-\frac{i\hat{S}_z\phi}{\hbar}\right)[a_q|+\rangle + b_q|-\rangle] = \rho_q(\phi/2)\left[a_q e^{-i\varphi_q(\phi/2)}|+\rangle + b_q e^{i\varphi_q(\phi/2)}|-\rangle\right]$$

Efeito da rotação sobre os valores esperados das componentes de $\vec{S}$:

$$\begin{aligned}
\langle\hat{S}_x\rangle_q &\longrightarrow \langle\hat{S}_x\rangle_q\cos[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi)] - \langle\hat{S}_y\rangle_q\sin[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi)],\\
\langle\hat{S}_y\rangle_q &\longrightarrow \langle\hat{S}_x\rangle_q\sin[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi)] + \langle\hat{S}_y\rangle_q\cos[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi)],\\
\langle\hat{S}_z\rangle_q &\longrightarrow \langle\hat{S}_z\rangle_q.
\end{aligned}$$

Matriz rotação deformada: $\langle\hat{S}_i\rangle_q \longrightarrow \sum_j R_{ij}\langle\hat{S}_j\rangle_q$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi)] & -\sin[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi)] & 0 \\ \sin[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi)] & \cos[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi)] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi_q(\phi/2) = \frac{1}{1-q}\mathrm{atan}[(1-q)\phi/2] = \frac{1}{2}\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi)$$

$$\boxed{\text{Ângulo de rotação de } |\psi_q\rangle = \tfrac{1}{2} \text{ ângulo de rotação de } \vec{S}.}$$

Operador matriz densidade q-deformado

Qubit q-deformado:

$$|\psi_q\rangle = e_q^{-i\delta/2}\cos_q(\gamma/2)|0\rangle + e_q^{i\delta/2}\sin_q(\gamma/2)|1\rangle = \begin{pmatrix} e_q^{-i\delta/2}\cos_q(\gamma/2) \\ e_q^{i\delta/2}\sin_q(\gamma/2) \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle = |-\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1\rangle = |+\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriz densidade q-deformada:

$$\begin{aligned} \hat{\varrho}_q &= |\psi_q\rangle\langle\psi_q| \\ &= \begin{pmatrix} e_q^{-i\delta/2}\cos_q(\gamma/2) \\ e_q^{i\delta/2}\sin_q(\gamma/2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e_{2-q}^{i\delta/2}\cos_{2-q}(\gamma/2) & e_{2-q}^{-i\delta/2}\sin_{2-q}(\gamma/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2[\varphi_q(\gamma/2)] & e^{-2i\varphi_q(\delta/2)}\sin[\varphi_q(\gamma/2)]\cos[\varphi_q(\gamma/2)] \\ e^{2i\varphi_q(\delta/2)}\sin[\varphi_q(\gamma/2)]\cos[\varphi_q(\gamma/2)] & \sin^2[\varphi_q(\gamma/2)] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\varphi_q(u) = \frac{1}{1-q}\mathrm{atan}[(1-q)u] \text{ (fase } q\text{-deformada)} \qquad \mathrm{tr}(\hat{\varrho}_q) = 1$$

Vetor e esfera de Bloch q-deformados

$$\hat{\varrho}_q = \begin{pmatrix} \cos^2[\varphi_q(\gamma/2)] & e^{-2i\varphi_q(\delta/2)} \sin[\varphi_q(\gamma/2)] \cos[\varphi_q(\gamma/2)] \\ e^{2i\varphi_q(\delta/2)} \sin[\varphi_q(\gamma/2)] \cos[\varphi_q(\gamma/2)] & \sin^2[\varphi_q(\gamma/2)] \end{pmatrix}$$

Vetor de Bloch q-deformado:

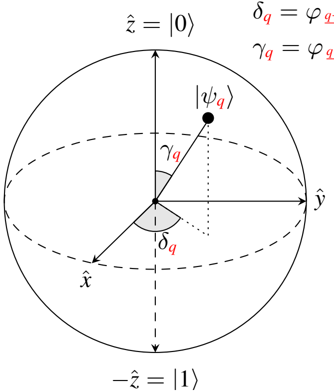
$$\vec{\eta}_q = (\eta_{q,x}, \eta_{q,y}, \eta_{q,z})$$

$$\boxed{\begin{cases} \eta_{q,x} = \sin[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\gamma)] \cos[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\delta)] \\ \eta_{q,y} = \sin[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\gamma)] \sin[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\delta)] \\ \eta_{q,z} = \cos[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\gamma)] \end{cases}}$$

Operador matriz densidade pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \hat{\varrho}_q &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \eta_{q,z} & \eta_{q,x} + i\eta_{q,y} \\ \eta_{q,x} - i\eta_{q,y} & 1 - \eta_{q,z} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(I + \vec{\eta}_q \cdot \vec{\sigma}) \end{aligned}$$

$$\delta_q = \varphi_{\frac{q+1}{2}}(\delta)$$
$$\gamma_q = \varphi_{\frac{q+1}{2}}(\gamma)$$



Precessão q-deformada

Problema de um sistema de dois níveis em um campo magnético uniforme:

$$\hat{H} = -\frac{e}{mc}\vec{S}\cdot\vec{B} = \omega_0 \hat{S}_z,$$

com $\vec{B} = B\hat{z}$ e $\omega_0 = |e|B/mc$ (frequência de Larmor).

Operador rotação:

$$\hat{\mathcal{R}}_{q,\hat{n}}(\phi) = \exp_q\left(-\frac{i\vec{J}\cdot\vec{\phi}}{\hbar}\right)$$

$$|\psi_q'\rangle = \sqrt{\rho_{\frac{q+1}{2}}(\phi)}\left[a_q e^{-\frac{i}{2}\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi)}|+\rangle + b_q e^{\frac{i}{2}\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi)}|-\rangle\right]$$

Operador evolução temporal:

$$\hat{U}_q(t,0) = \exp_q\left[-\frac{i\hat{S}_z}{\hbar}(\omega_0 t)\right]$$

$$|\psi_q(t)\rangle = \sqrt{\rho_{\frac{q+1}{2}}(\omega_0 t)}\left[e^{-\frac{i}{2}\Theta_q(\omega_0 t)}|+\rangle\langle+|\psi_q\rangle + e^{\frac{i}{2}\Theta_q(\omega_0 t)}|-\rangle\langle-|\psi_q\rangle\right]$$

Precessão q-deformada

Evolução temporal de $\langle \vec{S}(t) \rangle_q$

$$\langle \hat{S}_x(t)\rangle_q = \langle \hat{S}_x(0)\rangle_q \cos[\Theta_q(\omega_0 t)] - \langle \hat{S}_y(0)\rangle_q \sin[\Theta_q(\omega_0 t)]$$
$$\langle \hat{S}_y(t)\rangle_q = \langle \hat{S}_x(0)\rangle_q \sin[\Theta_q(\omega_0 t)] + \langle \hat{S}_y(0)\rangle_q \cos[\Theta_q(\omega_0 t)]$$
$$\langle \hat{S}_z(t)\rangle_q = \langle \hat{S}_z(0)\rangle_q$$

com
$$\frac{d\langle \vec{S}(t)\rangle_q}{dt} = \left[1 + \frac{1}{4}(1-q)^2(\omega_0 t)^2\right]^{-1} \vec{\omega}_0 \times \langle \vec{S}(t)\rangle_q = \left[\rho^{(s)}(t)/\rho^{(s)}(0)\right]^{q-1} \vec{\omega}_0 \times \langle \vec{S}(t)\rangle_q,$$

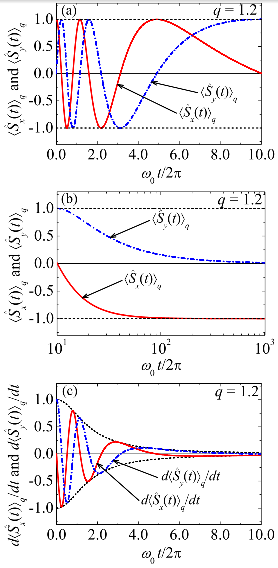
$$\Theta_q(\omega_0 t) = \varphi_{\frac{1+q}{2}}(\omega_0 t) = \frac{\mathrm{atan}\left[(1-q)\omega_0 t/2\right]}{(1-q)/2},$$

e $\rho^{(s)}(t)$ é o traço da matriz densidade usual $\hat{\varrho}^{(s)}$.

Estado estacionário para as componentes x and y

$$\lim_{t\to\infty} \langle \hat{S}_x(t)\rangle_q = \langle \hat{S}_x(0)\rangle_q \cos\left(\frac{\pi}{1-q}\right) - \langle \hat{S}_y(0)\rangle_q \sin\left(\frac{\pi}{1-q}\right),$$

$$\lim_{t\to\infty} \langle \hat{S}_y(t)\rangle_q = \langle \hat{S}_x(0)\rangle_q \sin\left(\frac{\pi}{1-q}\right) + \langle \hat{S}_y(0)\rangle_q \cos\left(\frac{\pi}{1-q}\right).$$



Conclusões

- Introduzimos um espaço de Hilbert q-deformado dentro de uma estrutura algébrica que emerge da mecânica estatística não extensiva.
- Operadores q-unitários conservam uma q-norma associada a definição de um produto interno q-deformado.
- A formulação da equação de Schrödinger não-linear NRT pode ser substituída apenas pelo campo $\Psi_q(\vec{r}, t)$ e seu q-complexo conjugado $\Psi^*_{2-q}(\vec{r}, t)$.
- Generalizações do operador matriz densidade e vetor de Bloch, uma possível alternativa para descrever fenômenos de decoerência quântica.
- Revisitamos o problema da precessão de uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ em um campo magnético uniforme dentro do formalismo q-deformado.

Referências

- B. G. da Costa e E. P. Borges, Phys. Lett. A, **383**, 2729 (2019).
- D. A. Lidar e K. B. Whaley, "Decoherence-Free Subspaces e Subsystem" in *Irreversible Quantum Dynamics* (Springer Lecture Notes in Physics, Berlin, 2003).
- U. Tırnaklı, S. F. Özeren, F. Büÿukkılıç, e D. Demirhan, Z. Phys. B **104**, 341 (1997).
- A. Lavagno, Braz. J. Phys. **35**(2B), 516 (2005).
- A. Vidiella-Barranco e H. Moya-Cessa, Phys. Lett. A **279**, 56 (2001).
- A. P. Santos, F. I. M. Pereira, R. Silva, e J. S. Alcaniz, Journal of Physics G: Nuclear e Particle Physics **41**(5), 055105 (2014).
- M. J. Bales, P. Fierlinger, e R. Golub, EPL **116**, 43002, (2017).
- F. D. Nobre, M. A. Rego-Monteiro, e C. Tsallis, Phys. Rev. Lett. **106**, 140601 (2011).
- F. D. Nobre, M. A. Rego-Monteiro, e C. Tsallis, EPL **97**, 41001 (2012).
- A. R. Plastino, A. M. C. Souza, F. D. Nobre, e C. Tsallis, Phys. Rev. A **90**, 062134 (2014).
- L. Nivanen, A. Le Méhauté, e Q. A. Wang, Rep. Math. Phys. **52**, 437 (2003).
- E. P. Borges, Physica A **340**, 95 (2004).
- E. P. Borges, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 5281 (1998).

Propagador q-deformado

Evolução temporal do estado:

$$|\psi_q(t)\rangle = \hat{U}_q(t,t_0)|\psi_q(t_0)\rangle = \exp_q\left[-\frac{i\hat{H}(t-t_0)}{\hbar}\right]|\psi_q(t_0)\rangle$$

$$\Psi_q(\vec{r},t) = \int d\vec{r}\,' K_q(\vec{r},t;\vec{r}\,',t_0)\Psi_q(\vec{r}\,',t_0)$$

com o propagador q-deformado: $\boxed{K_q(\vec{r},t;\vec{r}\,',t_0) \equiv \langle\vec{r}\,|\exp_q\left[-\frac{i\hat{H}(t-t_0)}{\hbar}\right]|\vec{r}\,'\rangle}$

Para $\vec{r}\,' = \vec{r}$ e $t_0 = 0$:

$$G_q(t) \equiv \int d\vec{r}\,' K_q(\vec{r}\,',t;\vec{r}\,',0) = G_q(0)\sum_n \exp_q\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right).$$

Fazendo $it/\hbar \to \beta$:

$$\boxed{Z_q = \frac{G_q(\hbar\beta/i)}{G_q(0)} = \sum_n \exp_q(-\beta E_n)} \qquad (q\text{-função de partição})$$

Fórmula de Euler-Rodrigues

Efeito de $\hat{\mathcal{R}}_{q,\hat{n}}(\phi) = \exp_q\left(-\frac{i\vec{\phi}\cdot\hat{n}}{2}\right)$:

$$|\psi_q\rangle \longrightarrow |\psi_q'\rangle = \hat{\mathcal{R}}_{q,\hat{n}}(\phi)|\psi_q\rangle$$

$$\hat{\varrho}_q = |\psi_q\rangle\langle\psi_q| \quad \text{e} \quad \hat{\varrho}_q' = |\psi_q'\rangle\langle\psi_q'|$$

$$\hat{\varrho}_q = \tfrac{1}{2}(I + \vec{\eta}_q\cdot\vec{\sigma}) \longrightarrow \hat{\varrho}_q' = \tfrac{1}{2}(I + \vec{\eta}_q'\cdot\vec{\sigma})$$

onde

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\eta}_q' \;=\; & \cos[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi)]\vec{\eta}_q + \sin[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi)](\hat{n}\times\vec{\eta}_q) \\ & +(1-\cos[\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi)])(\hat{n}\cdot\vec{\eta}_q)\hat{n}.\end{aligned}}$$

(fórmula de Euler-Rodrigues)

Ângulo de rotação:

$$\boxed{\varphi_{\frac{q+1}{2}}(\phi) = \frac{\operatorname{atan}[(1-q)\phi/2]}{(1-q)/2}}$$