

Состязательные мосты Шрёдингера на задаче трансляции домена

Ксенофонтов Григорий Сергеевич
Научный руководитель: к.ф.-м.н. Р. В. Исаченко

Кафедра интеллектуальных систем ФПМИ МФТИ
Специализация: Интеллектуальный анализ данных
Направление: 03.04.01 Прикладные математика и физика

2024

Состязательные мосты Шрёдингера

Задача

Найти прямое и обратное отображения между двумя наборами данных с использованием мостов Шрёдингера.

Проблема

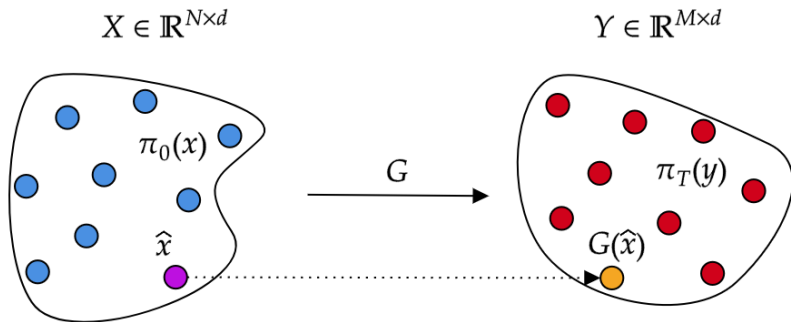
Современные подходы либо хорошо справляются с большой размерностью, либо используют вычислительно трудное моделирование стохастического процесса.

Решение

Решить задачу мостов Шрёдингера с помощью состязательного обучения.

Постановка задачи трансляции домена

Задача трансляции домена заключается в нахождении отображения $G : X \rightarrow Y$



Мост Шрёдингера

Пусть дано:

1. непарные наборы данных X и Y ;
2. $p^{\mathbb{W}^\gamma}(x_0, \dots, x_T)$ – совместное распределение Винеровского процесса \mathbb{W}^γ с коэффициентом волатильности $\sqrt{\gamma}$.

Тогда мост Шрёдингера:

$$q^*(x_0, \dots, x_T) = \arg \min_{q \in \mathcal{D}(\pi_0, \pi_T)} D_{KL}(q(x_0, \dots, x_T) || p^{\mathbb{W}^\gamma}(x_0, \dots, x_T)),$$

где $\mathcal{D}(\pi_0, \pi_T)$ – множество всех совместных распределений с маргиналами $\pi_0(x_0), \pi_T(x_T)$

Трансляция с помощью моста Шрёдингера

Для трансляции с помощью мостов Шрёдингера моделируется сопоставленный стохастический процесс заданный следующим СДУ:

$$G : dx_t = \underbrace{f(x_t)dt}_{\text{скорость}} + \underbrace{\sqrt{\gamma}dW_t}_{\text{разнообразие}},$$

где $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ – функция смещений, а W – винеровский процесс.

Эквивалентной задачей мостов Шрёдингера является:

$$\min_{q \in \mathcal{D}(\pi_0, \pi_T)} \frac{1}{2\gamma} \mathbb{E}_q \left[\int_0^T \|f(x_t)\|^2 dt \right]$$

Из этого следуют **преимущества** моста Шрёдингера:

- ▶ быстрая трансляция, за счет минимизации f ;
- ▶ контроль разнообразие транслированных объектов, за счет выбора γ .

Проблемы и предлагаемое решение

Проблемы

1. Моделирование процесса является вычислительно трудной задачей;
2. Методы, не моделирующие процесс, страдают от проклятия размерности.

Решение

Перейти к статической постановке задачи мостов Шрёдингера:

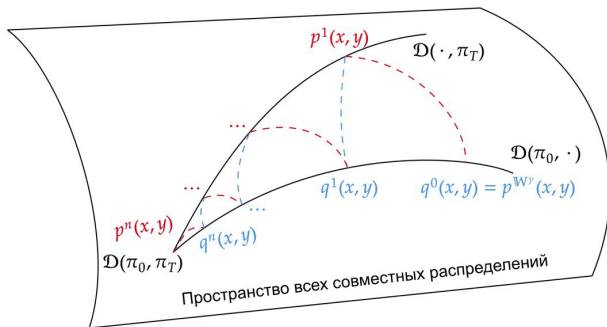
$$q^*(x, y) = \arg \min_{q \in \mathcal{D}(\pi_0, \pi_T)} D_{KL}(q(x, y) || p^{\mathbb{W}^\gamma}(x, y)),$$

и представить дивергенцию Кульбака-Лейблера в вариационном виде.

Iterational Proportional Fitting (IPF)

Задача мостов Шрёдингера решается с помощью итеративного алгоритма Iterational Proportional Fitting (IPF):

$$\underbrace{\min_{p \in \mathcal{D}(\cdot, \pi_T)} D_{KL}(p(x, y) \| q^*(x, y))}_{\text{обратный шаг}}; \underbrace{\min_{q \in \mathcal{D}(\pi_0, \cdot)} D_{KL}(q(x, y) \| p^*(x, y))}_{\text{прямой шаг}}$$



Предложенный метод

Обратный шаг

$$\min_{p(x|y)} \max_D \mathbb{E}_{y \sim \pi_T} \mathbb{E}_{x \sim p(x|y)} [D(x, y)] - \mathbb{E}_{x \sim \pi_0} \mathbb{E}_{y \sim q^*(y|x)} \left[e^{D(x, y) - 1} \right]$$

Прямой шаг

$$\min_{q(y|x)} \max_D \mathbb{E}_{x \sim \pi_0} \mathbb{E}_{y \sim q(y|x)} [D(x, y)] - \mathbb{E}_{y \sim \pi_T} \mathbb{E}_{x \sim p^*(x|y)} \left[e^{D(x, y) - 1} \right]$$

¹f-GAN: Training Generative Neural Samplers using Variational Divergence Minimization

²Conditional Generative Adversarial Nets

Постановка экспериментов

Эксперимент на 2D данных

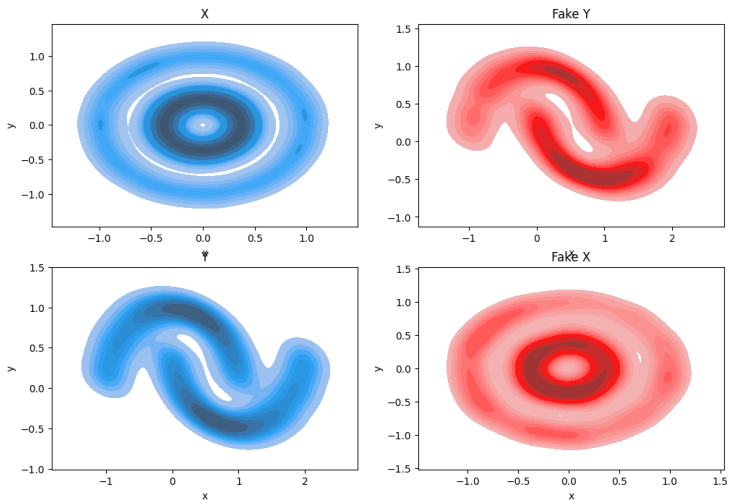
- ▶ **Цель:** санитарное тестирование предложенного метода и сравнение мостов с различной γ и с CycleGAN;
- ▶ **Данные:** точки из распределений колец, лун, рулета и стандартной гауссианы.

Эксперимент на EMNIST

- ▶ **Цель:** проверить работоспособность метода на данных большей размерности;
- ▶ **Данные:** X — буквы из EMNIST, Y — цифры из EMNIST.

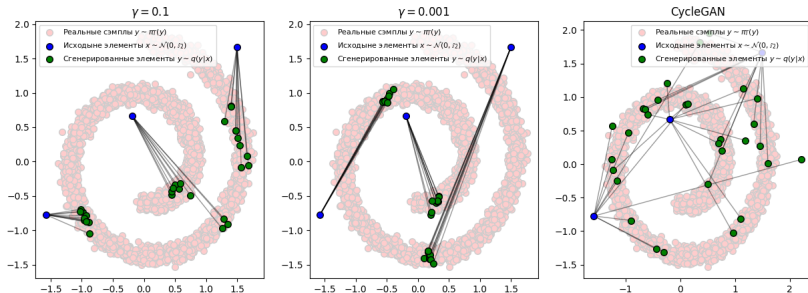
2D данные: санитарное тестирование

Данный эксперимент проводился на кольцах, X , и лунах, Y .



2D данные: сравнение мостов с различной γ

Данный эксперимент проводился на стандартной гауссиане, X , и рулете, Y . Результаты показывают, что предложенный метод справляется с малыми γ .



EMNIST

Эксперимент на EMNIST показывает, что предложенный метод справляется с данными большой размерностью.



(a) Буквы → цифры



(b) Цифры → буквы

Выносятся на защиту

1. Предложен новый метод нахождения мостов Шрёдингера, который не моделирует стохастический процесс, а также не обладает проблемой проклятия размерности;
2. Проведены эксперименты на 2D данных, сравнивающие трансляции с разными γ ;
3. Проведены эксперименты на 2D данных, сравнивающие предложенный метод с CycleGAN;
4. Проведены эксперименты на EMNIST, демонстрирующие способность предложенного метода работать с данными большой размерностью.