UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Gregor Kikelj

PREVERJANJE KROMATIČNEGA ŠTEVILA GRAFOV Z DOKAZOVALNIM POMOČNIKOM LEAN

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Andrej Bauer

Ljubljana, 2024

Kazalo

Preverjanje kromatičnega števila grafov z dokazovalnim pomočnikom Lean

Povzetek

V dokazovalniku in programskem jeziku Lean 4, formaliziramo osnove teorije grafov, barvanj in kromatičnega števila. Implementiramo tudi dokazano pravilen algoritem za računanje kromatičnega števila ter analiziramo čas izvajanja. Na koncu implementiramo in dokažemo pravilnost algoritma za preverjanje 2 barvljivosti v polinomskem času.

Verification of chromatic number of a graph with Lean proof assistant

Abstract

In the Lean 4 proof assistant and programming language, we formalize the basics of graph theory, colorings, and chromatic numbers. We also implement a proven correct algorithm for computing the chromatic number and analyze its running time. Finally, we implement and prove the correctness of an algorithm for checking 2-colorability in polynomial time.

Math. Subj. Class. (2020): 68R10

Ključne besede: Lean, Lean 4, graf, kromatično število

Keywords: Lean, Lean 4, graph, chromatic number

1 Uvod

Raziskovanje kromatičnega števila grafov je pomemben problem teorije grafov. Kromatično število grafa nam pove najmanj koliko barv potrebujemo za barvanje vozlišč grafa, tako da dve sosednji vozlišči nista enake barve. Ta problem ni zanimiv le matematično, ampak ima uporabe tudi pri drugih področjih, predvsem v povezavi z računalništvom. Iskanje kromatičnega števila je sicer računsko težek problem v smislu, da ne poznamo algoritma, ki bi ga računal v polinomskem času v odvisnosti od števila vozlišč grafa.

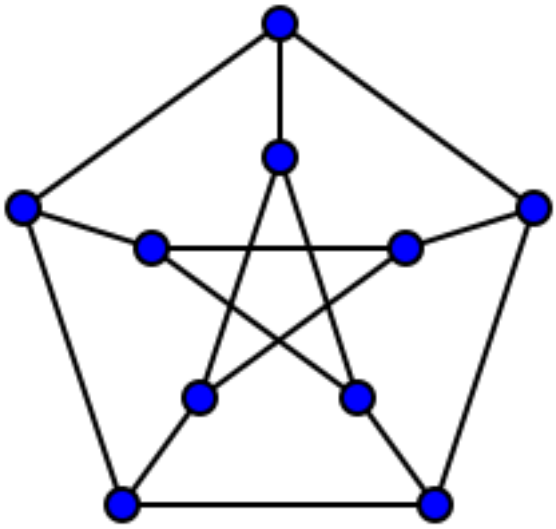
V tej diplomski nalogi se osredotočimo na iskanje kromatičnega števila, skupaj z dokazom da smo res našli pravo vrednost. Da to dosežemo, si bomo pomagali z dokazovalnikom Lean. V prvem delu naloge natančno definiramo pojme iz teorije grafov, ki jih potrebujemo za dokazovanje. Nato na kratko opišemo osnove uporabe dokazovalnika Lean, ter matematične definicije konstruiramo znotraj Leana. Na koncu definiramo nekaj algoritmov za iskanje kromatičnega števila in dokažemo njihovo pravilnost.

2 Osnove teorije grafov in kromatično število

Definicija 2.1. Graf je urejen par $G = (V, E)$, kjer je

- $V \neq \emptyset$ končna množica vozlišč,
- E množica povezav, kjer je vsaka povezava množica dveh različnih vozlišč iz V.

Če sta različni vozlišči u, v elementa neke povezave iz E, to pišemo kot $u \sim v$ ter pravimo, da sta sosednji vozlišči in da sta krajišči povezave $uv \in E$.



Slika 1: Primer grafa

Definicija 2.2. Naj bo $v \in V$. Stopnja vozlišča v je število elementov E, ki vsebujejo v, oziroma z besedami število povezav, ki vsebujejo v.

- Največjo stopnjo v grafu označimo z

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} deg(v)$$

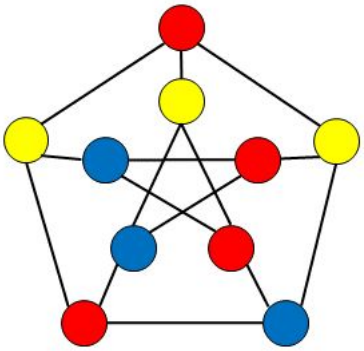
- Najmanjšo stopnjo v grafu označimo z

$$\delta(G) = \min_{v \in V} deg(v)$$

Definicija 2.3. Definiramo oznako $[k] = \{0, 1, 2 \ldots, k-1\}$ za množico naravnih števil, manjših od k.

Definicija 2.4. Naj bo G graf in $k \in \mathbb{N}$. Preslikava $f : V(G) \to [k]$ je k barvanje grafa G, če za vse $u, v \in V$ velja $u \sim v \implies f(u) \neq f(v)$.

Z besedami: barvanje grafa s k barvami je preslikava, ki vsakemu vozlišču priredi eno izmed k barv tako, da sta sosednji vozlišči vedno pobarvani z različnima barvama.



Slika 2: Primer barvanja grafa

Definicija 2.5. Kromatično število grafa G, ki ga označimo kot $\chi(G)$, je najmanjše število, da obstaja $\chi(G)$ barvanje grafa G.

Lema 2.6. *Naj bo G graf. Potem kromatično število grafa G obstaja.*

Dokaz. Dovolj je, da dokažemo, da obstaja neko število k za katerega obstaja k barvanje grafa G. Dokažimo, da je $k = |V|$ dovolj, kjer je V množica vozlišč grafa G. Ker je V končna množica lahko vozlišča oštevilčimo kot $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}\}$. Poglejmo si barvanje

$$f : V \to [k], f(v_i) = i$$

Dokazati moramo $\forall v_i, v_j \in V, v_i \sim v_j \implies f(v_i) \neq f(v_j)$. Po definiciji f je dovolj dokazati $\forall v_i, v_j \in V, v_i \sim v_j \implies i \neq j$. Obrnemo implikacijo in dokazujemo $\forall v_i, v_j \in V, i = j \implies v_i \nsim v_j$. To sledi iz definicije množice povezav grafa, kjer je povezava množica dveh različnih vozlišč. □

Definicija 2.7. Naj bosta G in H grafa. Pravimo, da je H podgraf G, če je $V(H) \subset V(G)$ in $E(H) \subset E(G)$.

Lema 2.8. *Naj bo G graf in H njegov podgraf. Naj bo f barvanje grafa G. Potem je omejitev barvanja f na vozlišča grafa H veljavno barvanje grafa H.*

Dokaz. Naj bo $f : V(G) \to [k]$ barvanje grafa G. Dokažimo, da je omejitev barvanja f na vozlišča grafa H veljavno barvanje grafa H. Dovolj je dokazati $\forall v_i, v_j \in V(H), v_i \sim v_j \implies f(v_i) \neq f(v_j)$. Naj bosta torej $v_i, v_j \in V(H)$ da velja $v_i \sim v_j$. Ker je H podgraf G velja tudi $v_i, v_j \in V(G)$ ter $v_i \sim v_j$ v G. Ker je f veljavno barvanje grafa G je $f(v_i) \neq f(v_j)$. □

Lema 2.9. *Naj bo G graf in H njegov podgraf. Potem velja $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Dokaz. Naj bosta C_G in C_H množici, kjer je $k \in C_G$, čee obstaja k barvanje grafa G. Potem je kromatično število grafa G enako najmanšemu elementu C_G. Dovolj

je dokazati, da je $C_H \subset C_G$, ker je minimum podmnožice vedno manjši ali enak minimumu celotne množice. Ker je H podgraf G, je vsako barvanje grafa G, tudi barvanje grafa H. Torej, če obstaja k barvanje grafa G, obstaja tudi k barvanje grafa H, zato je $C_H \subset C_G$. □

3 Dokazovalni pomočnik Lean

Dokazovalni pomočniki so orodja, ki omogočajo formalizacijo matematičnih izrekov in dokazov ter algoritmov znotraj nekega logičnega okvira. Ti programi so koristni predvsem v matematiki in računalništvu, saj nudijo formalno verifikacijo dokazov, s tem pa povečujejo zanesljivost algoritmov. Med številnimi dokazovalnimi pomočniki, kot so Coq, Agda in Isabelle, smo za naše delo izbrali Lean iz več razlogov, predvsem zaradi enostavnosti uporabe, aktivne skupnosti in primernosti za dokazovanje pravilnosti algoritmov.

Lean je interaktivni dokazovalni pomočnik. Uporabljali bomo verzijo Lean 4, ki je razvita pri Microsoftu in temelji na teoriji tipov s čimer se ne bomo ukvarjali, ker je tema te diplomske naloge teorija grafov. Lean 4 bomo uporabljali tudi kot funkcijski programski jezik. Za bolj natančne podrobnosti o Leanu priporočamo ogled uradne dokumentacije.

3.1 Računanje izrazov

Kot ostali običajni programski jeziki tudi Lean podpira računanje osnovnih aritmetičnih izrazov.

```
#eval 1 + 1
```

Lean nam v informacijskem oknu pove, da se izraz evaluira v 2. Lean upošteva tudi vrstni red operacij, na primer

```
#eval 1 + 2 * 3
```

se izračuna v 7. Če želimo uporabiti drugačen vrstni red operacij, lahko to naredimo z oklepaji

```
#eval (1 + 2) * 3
```

ki se izračuna v 9.

3.2 Tipi

Tipe poznamo iz drugih programskih jezikov (npr. Python, Java), so pa v Leanu bolj pomembni in imajo nekaj več funkcionalnosti.

Osnovni tipi, s katerimi se bomo največ ukvarjali, so:

- `Nat` naravna števila

- `Int` cela števila
- `String` nizi
- `List` seznami

Lean načeloma tipe izrazov ugotovi sam, lahko pa jih tudi podamo. Na primer

```
#eval 2
```

se izračuna v 2, Lean pa nam pove, da je tip izraza `Nat`. Če pa želimo izraz izračunati kot `Int`, lahko to naredimo z

```
#eval (2 : Int)
```

kar nam potem predstavlja 2 kot celo število. Lean ponavadi namesto `Nat` uporabi oznako $\mathbb{N}$ in namesto `Int` oznako $\mathbb{Z}$, to pa lahko uporabljamo tudi mi da se program bolj ujema z matematičnim zapisom.

Poglejmo si sedaj, kako definiramo funkcije

```
def f (x : ℕ) : ℕ := x + 1
```

Definirali smo funkcijo `f`, ki sprejme naravno število in vrne naravno število. Funkcijo lahko poračunamo podobno kot izraze

```
#eval f 2
```

ki se izračuna v 3. Če nismo prepričani kakšen tip ima nek objekt v Leanu lahko to ugotovimo z ukazom

```
#check f
```

ki nam vrne $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, torej je funkcija f preslikava iz naravnih števil v naravna števila.

Lahko definiramo tudi funkcije več spremenljivk

```
def vsota (x: ℕ) (y: ℕ) : ℕ := x + y
```

ki ima tip $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ torej je preslikava iz naravnih števil v preslikave iz naravnih števil v naravna števila. Ker imata oba argumenta funkcije isti tip, lahko definicijo skrajšamo

```
def vsota (x y: ℕ) : ℕ := x + y
```

Ker zna Lean sam ugotoviti tip vsote dveh naravnih števil, tega ni potrebno podati, je pa včasih to bolj berljivo

```
def vsota (x y: ℕ) := x + y
```

Še krajše pa gre z lambda zapisom in spuščanjem nekoristnih presledkov.

```
λx y:ℕ=>x+y
```

Lean v funkcijah podpira tudi bolj "običajno"programiranje. Lahko recimo definiramo pomožne spremenljivke

```
def funkcija (a:Nat) : Nat :=
  let b := a+1
  b*b
```

Lahko tudi kličemo druge funkcije

```
def funkcija2 (a:Nat) : Nat :=
    let b := funkcija a
    b*b
```

Imamo tudi možnost uporabe stavka `if`

```
def funkcija3 (a:Nat) : Bool :=
  if a = 0 then
    true
  else
    false
```

Uporabljamo lahko tudi rekurzijo.

```
def funkcija4 (a:Nat) : Nat :=
    if a = 0 then
      0
    else
      1 + funkcija4 (a-1)
```

kjer pa moramo poskrbeti, da se rekurzija zaključi. Včasih Lean pri tem potrebuje nekaj pomoči, detajli o tem so izven obsega te diplomske naloge.

Stavke if, rekurzijo in pomožne spremenljivke uporabljamo tudi v funkcijah več spremenljivk.

```
def vecje (n : Nat) (k : Nat) : Nat :=
  if n < k then
    k
  else n
```

Ker ima funkcija `vecje` dva argumenta, je tip $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Kot v OCamlu lahko tudi tukaj funkciji podamo en argument da dobimo fukncijo tipa $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

```
def dodaj5 := vsota 5
```

Na primer `dodaj5 3` se izračuna v 8.

3.3 Podatkovne strukture

Podobno kot v večini programskih jezikov obstajajo razredi, lahko tudi v Leanu definiramo strukture, ki so ponavadi namenjene temu, da združimo več podatkov v en objekt.

```
structure Tocka :=
    x: Nat
    y: Nat
```

Objekt neke strukture definiramo tako, da navedemo vrednosti vseh polj

```
def izhodisce : Tocka := {x := 0, y := 0}
```

Tudi te tipe lahko uporabljamo kot argumente ali rezultate funkcij. Dostop do posameznih komponent strukture je podoben kot v večini programskih jezikov

```
#eval izhodisce.x
```

torej z `ime_objekta.ime_komponente`.

3.3.1 Induktivni tipi

Poleg struktur, ki zapakirajo več podatkov v en objekt, Lean podpira tudi induktivne tipe, ki nam omogočajo, da definiramo objekt nekega tipa kot eno izmed končne množice možnosti. Na primer tip `Bool` je induktivni tip, ki ima dve možnosti `true` in `false`.

```
inductive Bool where
| false : Bool
| true : Bool
```

Bolj realen primer bi bil recimo dan v tednu

```
inductive DanVTednu where
| ponedeljek : DanVTednu
| torek : DanVTednu
| sreda : DanVTednu
| cetrtek : DanVTednu
| petek : DanVTednu
| sobota : DanVTednu
| nedelja : DanVTednu
```

Induktivni tipi podpirajo `match` stavke, ki so nekoliko podobni `switch` stavkom v drugih programskih jezikih.

```
def negacija (b:Bool) : Bool :=
  match b with
  | true => false
  | false => true
```

```
def jeVikend (d:DanVTednu) : Bool :=
    match d with
    | DanVTednu.sobota => true
    | DanVTednu.nedelja => true
    | _ => false
```

Vidimo, da lahko podobno kot v OCamlu uporabljamo tudi _ kot "wildcard"v match stavku. Objekti induktivnega tipa so lahko definirani tudi rekuzivno.

```
inductive Nat where
    | zero : Nat
    | succ (n : Nat) : Nat
```

Torej, naravno število je lahko 0 ali pa naslednik naravnega števila. Tudi pri taki definiciji lahko uporabljamo `match` stavke in vsa ostala orodja, ki jih Lean ponuja.

Pomemben induktivni tip je tudi `List` ki predstavlja sezname in je primer parametričnega tipa.

```
inductive List (α : Type) where
    | nil : List α
    | cons : α → List α → List α
```

4 Formalizacija in računanje kromatičnega števila

4.1 Formalizacija kromatičnega števila

Pogjemo si definicijo kromatičnega števila v Leanu. Za berljivost bomo večino dokazov spuščali. Celotna koda je dostopna na https://github.com/grekiki2/Lean-tests. Vsekakor je v primerjavi s papirjem dokaze bolj smiselno in enostavno pregledovati znotraj urejevalnika, na primer VSCode, ki nam omogoča, da v vsakem delu dokaza vidimo trenutne predpostavke in željen rezultat.

Za začetek definiramo strukturo grafa.

```
structure Graph :=
    vertexSize : Nat
    connected: Fin vertexSize → Fin vertexSize → Pro
    connected_decidable: ∀ a b, Decidable (connected a b)
    irreflexive: ∀ n, ¬ connected n n
    symmetric: ∀ a b, connected a b → connected b a
```

Graf torej definiramo kot strukturo, kjer podamo število vozlišč, izračunljivo funkcijo, ki nam pove ali sta dve vozlišči povezani ter potrdilo, da je relacija povezanosti irefleksivna in simetrična.

Za namene testiranja definiramo še graf K_n, ki je graf z n vozlišči in povezavami med vsemi pari vozlišč.

```
def K_n (k:Nat): Graph :=
  {vertexSize:=k, connected:=(λ x y=>x ≠ y), connected_decidable := by
    simp; intro a b;apply Not.decidable, irreflexive := by simp,
    symmetric:= by apply Ne.symm }
```

Na podoben način definiramo tudi C_n, oziroma cikličen graf z n vozlišči, le da moramo podati še dokaz, da je $n \geq 2$.

Definicija grafa, ki smo jo navedli, je precej splošna in jo lahko uporabimo tudi za definicje grafov iz seznama povezav. Recimo, da imamo spremenljivko `edges : Array (Array (Fin n))`, ki predstavlja seznam sosednosti grafa. Potem lahko definiramo splošen graf kot

```
let g1 : Graph := {
    vertexSize := n
    , connected := λ x y => x≠y ∧ (y ∈ edges[x]'(by rw [h]; exact
   Fin.prop x) ∨ x ∈ edges[y]'(by rw [h]; exact Fin.prop y))
    , connected_decidable := by {
        intro x y
        simp
        apply And.decidable
    }
    , irreflexive := by {
        intro a
        simp
    }
    , symmetric := by {
        intro a b
        simp
        intro h h2
        constructor
        · exact Ne.symm h
        · exact Or.symm h2
    }
}
```

Podobno bi lahko naredili tudi z grafom, ki bi za seznam sosednjosti uporabljal tip `List`, vendar pa je uporaba `Array` bolj učinkovita.

Definiramo še tip, ki predstavlja k barvanje grafa

```
def Coloring (G:Graph) (k : Nat) := Fin G.vertexSize → Fin k
```

Predstavili smo k barvanje grafa kot preslikavo iz (indeksa) vozlišča v eno izmed k barv. Definiramo še, kdaj je k barvanje veljavno

```
def valid_coloring (G:Graph) {k:Nat} (coloring: Coloring G k): Prop :=
  ∀ a b, GraphConnected G a b → coloring a ≠ coloring b
```

Sledimo definiciji iz drugega poglavja. Torej z besedami, barvanje je veljavno, če sta sosednji vozlišči vedno pobarvani z različnima barvama.

Ker preslikava preverja povezanost za končno število elementov, se lahko uporablja za računanje. Drugače rečeno smiselno je napisati

```
#eval valid_coloring (K_n 5) (λ x => 0)
```

in pričakovati, da Lean to izračuna. Lean na žalost izračunljivosti tega izraza ne ugotovi sam, zato moramo pokazati da je `valid_coloring` izračunjiv oziroma v Leanu decidable.

```
instance (G: Graph) (k:Nat) (coloring: Coloring G k): Decidable
    (@valid_coloring G k coloring)
    exact Nat.decidableForallFin _
```

Zdaj lahko torej za neko barvanje z Leanom preverimo, ali je veljavno ali ne. Ker je množica barvanj grafa G s k barvami končna, lahko definiramo tudi izračunljivo funkcijo, ki nam za graf G pove, ali obstaja k barvanje

```
def is_k_colorable (G : Graph) (k: Nat) : Prop :=
  ∃ (coloring : Coloring G k), valid_coloring G coloring
```

Tudi ta funkcija je izračunljiva, ker je množica barvanj grafa G s k barvami končna.

```
instance {G : Graph} (k : Nat) : Decidable (is_k_colorable G k) :=
    Fintype.decidableExistsFintype
```

Sedaj lahko končno definiramo kromatično število grafa G kot najmanjše število k, da velja `is_k_colorable G k`. V Leanu(oziroma bolj natančno Mathlibu) to naredimo s pomočjo funkcije `Nat.find` ki kot argumente vzame:

- `p : Nat → Prop` Izračunljiv predikat, za katerega iščemo najmanjše število, da velja `p`
- `h : ∃ n, p n` dokaz, da obstaja neko naravno število, za katerega velja `p`

Definicija kromatičnega števila v Leanu je potem

```
def ChromaticNumber (G: Graph): ℕ :=
  @Nat.find (is_k_colorable G) _ (by {
    unfold is_k_colorable valid_coloring GraphConnected
    use G.vertexSize, λ i=>i
    intro a b hab
    by_contra h
    simp [← h] at hab
    exact (G.irreflexive a) hab
  })
```

Vzamemo torej najmanjše število barv, da je graf G k barvljiv, zraven pa dokažemo, da vsaj eno tako število obstaja. Najbolj preprosto to naredimo tako, da vzamemo število vozlišč grafa G in definiramo barvanje, ki vsakemu vozlišču priredi njegov indeks. V poglavju 2 smo se prepričali, da je to res veljavno barvanje.

4.2 Računanje kromatičnega števila

Funkcijo `chromatic_number` Lean prepozna kot izračunljivo in jo lahko že uporabljamo za interaktivno računanje kromatičnega števila. Na primer

```
#eval ChromaticNumber (K_n 8)
```

nam vrne 8 (po nekaj sekundah). Podobno nam

```
#eval ChromaticNumber (C_n 13 (by linarith))
```

vrne 3 in

```
#eval ChromaticNumber (C_n 14 (by linarith))
```

vrne 2. Za računanje kromatičnega števila seveda obstajo hitrejši algoritmi, kot je naša definicija, vendar pa je ta ki to dela na način, da preveri vsa možna barvanja pri nekem k, dokler ne najde veljavnega ali pa gre na naslednji k vendar pa je dokazovanje pravilnosti kompleksnejših algoritmov izredno kompleksno.

Lahko pa si pomagamo s tako imenovanimi pričami. Vemo, da če imamo neko barvanje grafa s tremi barvami, je kromatično število največ 3. Barvanje lahko poišče nek kompleksen algoritem, Lean pa mora potem le preveriti, da je veljavno. Da si bomo lahko pomagali s takimi prijemi pa potrebujemo nekaj pomožnih lem.

Najprej bomo pokazali, da če obstaja k barvanje grafa G, je kromatično število grafa G največ k. Da to storimo, pa potrebujemo lemo, ki nam pove, da iz barvanja grafa G s k barvami lahko tvorimo barvanje grafa G z l barvami, če je le $l \geq k$.

```
def extend_coloring (G:Graph) (k1 k2: Nat) (h:k2≥k1) (coloring: Coloring
    G k1) (h2: valid_coloring G coloring):∃ coloring2:Coloring G k2,
    valid_coloring G coloring2
```

Nato lahko dokažemo, da k barvanje grafa G obstaja, če in samo če je kromatično število grafa G največ k.

```
lemma colorable_gives_ub (G: Graph) (k: Nat):
    is_k_colorable G k ↔ chromatic_number G ≤ k
```

Dokaz. Najprej dokažimo implikacijo v desno. Kromatično število smo definirali kot najmanjši i, da je graf G i barvljiv. Če je torej graf G k barvljiv, potem je kromatično število grafa G največ k. V levo če vemo, da je kromatično število grafa G največ k, potem obstaja barvanje grafa G z največ k barvami ki ga lahko razširimo do barvanja s k barvami po lemi `extend_coloring`. □

Posledica je, da če in samo če barvanje s k barvami ne obstaja, je k manjši od kromatičnega števila grafa G.

```
lemma not_colorable_gives_lb (G: Graph) (k: Nat) :
    ¬ is_k_colorable G k ↔ k < chromatic_number G
```

Iz navedenega dobimo glavno posledico. Če najdemo nek k, da graf G ni k barvljiv, je pa $k+1$, barvljiv potem je kromatično število grafa G enako $k+1$.

```
theorem bounds_give_chromatic (G:Graph) (k: Nat):
    ¬is_k_colorable G k ∧ is_k_colorable G (k+1) ↔ chromatic_number G =
    k+1
```

Če sedaj na dokazano gledamo iz vidika uporabnosti, je precej preprosto Leanu razložiti, da je graf G k barvljiv (če je to res razlaganje napačnih stvari, načeloma naj ne bi bilo mogoče), recimo tako, da najdemo neko barvanje. Večji problem pa je s spodnjo mejo kromatičnega števila. V tem delu se bomo spodnje meje lotili s pomočjo podgrafov.

4.3 Podgrafi

Dokažimo naslednji izrek

```
theorem subgraph_chromatic_number_le (G G2:Graph) (f:Fin G2.vertexSize →
    Fin G.vertexSize) (f_inherits: ∀ a b, G2.connected a b → G.connected
    (f a) (f b)):
    ChromaticNumber G2 ≤ ChromaticNumber G
```

Uporabili smo definicijo podgrafa, ki je bolj primerna za Lean kot standardna definicija. Graf $G2$ je podgraf grafa G, če obstaja preslikava f, ki vozlišča $G2$ preslika v vozlišča G, tako da če sta vozlišči v $G2$ povezani, sta povezani tudi preslikani verziji teh vozlišč v G.

Izrek pravi, da če je G' podgraf G, potem je kromatično število grafa G' manjše ali enako kromatičnemu številu grafa G.

Dokaz. Po definiciji kromatičnega števila je dovolj dokazati, da lahko graf G' pobarvamo z $\chi(G)$ barvami. Naj bo c_G neko $\chi(G)$ barvanje grafa G. Trdimo, da je $c_{G'}$ definirano kot $c_{G'}(i) = c_G(f(i))$ veljavno barvanje grafa G'. Barvanje je veljavno, če sta sosednji vozlišči vedno pobarvani z različnima barvama. Naj bosta a, b sosednji vozlišči grafa G'. Potem sta po definiciji podgrafa sosednji tudi vozlišči $f(a), f(b)$ v grafu G. Ker je c_G veljavno barvanje grafa G, je $c_G(f(a)) \neq c_G(f(b))$. Ker je $c_{G'}(a) = c_G(f(a))$ in $c_{G'}(b) = c_G(f(b))$, je tudi $c_{G'}(a) \neq c_{G'}(b)$. □

Opomba: pri definiciji podgrafa bi načeloma morali zahtevati injektivnost, vendar pa tega nikjer v dokazih ne potrebujemo zato tega v Leanu nismo naredili.

Zdaj si lahko pomagamo pri iskanju spodnjih mej kromatičnega števila, tako da najdemo nek manjši podgraf, ki ima čim večje kromatično število. V praksi se recimo pogosto uporablja K_n klike, ki imajo kromatično število n, ali pa C_n ciklični grafi, ki imajo kromatično število 2, če je n sodo in 3, če je n liho število.

V delu se bomo osredotočili na ciklične grafe.

4.4 Kromatično število cikličnih grafov

Dokažimo, da je kromatično število cikličnega grafa s sodim številom vozlišč enako 2.

```
theorem chromatic_number_of_C_n_even (n:Nat) (h:2*n≥2):
    chromatic_number (C_n (2*n) h) = 2
```

Dokaz. Potrebno je dokazati, da barvanje z 1 barvo ni mogoče in da obstaja barvanje z 2 barvama. Prvi del je očiten dovolj je pokazati, da ima graf vsaj eno povezavo, kar lahko naredimo, ker ima graf vsaj dve vozlišči.

Za drugi del pa moramo najti barvanje z dvema barvama, edina rešitev (do permutacije barv) je, da vozlišče n pobarvamo z $n \bmod 2$. Dokaz, da je barvanje pravilno je sicer v Leanu nekoliko dolg, ni pa se o tem težko prepričati, preveriti je

potrebno le, da sta vozlišči 0 in $2n-1$ ter za vsak $0 \leq i < 2n-1$, i in $i+1$ različne barve. □

Za pokritje vseh cikličnih grafov potrebujemo še dokaz, da je kromatično število cikličnega grafa s lihim številom vozlišč enako 3.

```
theorem chromatic_number_of_C_n_odd (n:Nat) (h:2*n+1≥2):
    chromatic_number (C_n (2*n+1) h) = 3
```

Dokaz. Kot prej je dovolj dokazati, da 2 barvanje ne obstaja, ter najti 3 barvanje. Za 3 barvanje vzamemo preslikavo, ki vozlišče i slika v i mod 2, razen če je $i = 0$, ki ga slika v 2. Podobno kot pri sodem številu vozlišč se je precej enostavno prepričati da je to barvanje res veljavno.

Sedaj moramo dokazati, da 2 barvanje ne obstaja. Brez škode za splošnost je vozlišče 0 pobarvano z barvo 0. Z indukcijo po i bomo pokazali, da je vozlišče i pobarvano z barvo $i \bmod 2$. Za $i = 0$ je to res. Predpostavimo, da je za nek i vozlišče i pobarvano z barvo i mod 2. Ker sta vozlišči i in $i+1$ povezani, je vozlišče $i+1$ pobarvano z barvo $i \bmod 2 + 1 = (i+1) \bmod 2$. S tem smo končali indukcijo. Poglejmo si sedaj vozlišči 0 in $2n$. Po lemi sta obe pobarvani z barvo 0, vendar pa sta povezani, kar je protislovje. Torej 2 barvanje ne obstaja. □

4.5 2 barvljivost

Hitri algoritmi za računanje kromatičnega števila v splošnem niso znani, ve se, da je na primer problem določiti ali je graf 3 barvljiv, NP poln. Za 2 barvljivost pa hiter algoritem obstaja in ga bomo tudi implementirali v Leanu ter dokazali njegovo pravilnost. Naš trenuten algoritem porabi $O(n^2 2^n)$ časa, kjer je n število vozlišč grafa, ker mora pregledati vsa možna barvanja.

Implementacija hitrejše verzije je dostopna na https://github.com/grekiki2/Lean-tests/blob/chromatic-2/Graph/2Colorable.lean, tukaj pa bomo opisali princip delovanja. Za enostavnost predpostavimo, da je graf povezan. Algoritem vozlišče 0 pobarva z barvo 0 in začne z iskanjem v širino. Za vsako vozlišče razen vozlišča 0, se tudi beleži predhodnika oziroma vozlišče, iz katerega smo prišli. Ko obiščemo novo vozlišče, ga poskusimo pobarvati drugače od vseh sosedov. Če barvanje vseh vozlišč uspe, potem vrnemo barvanje, ki ga Lean lahko preveri in s tem dokaže, da je graf 2 barvljiv. Če barvanje ne uspe, potem obstaja vozlišče i s sosedoma j in k, ki sta različnih barv. To pa pomeni, da imata vozlišči j in k tudi različno parnost razdalje do vozlišča 0, ker so vsa vozlišča barve 0 na sodi razdalji, vsa vozlišča barve 1 pa na lihi razdalji. Iz tega sledi, da lahko tvorimo lih cikel kot pot $0 \to j \to i \to k \to 0$. Lih cikel pa lahko obravnavamo kot pograf, enak C_{2n+1}, za katerega vemo, da ima kromatično število 3, to pa nam pove, da graf ni 2 barvljiv.

Lean v obeh primerih(torej, da funkcija vrne barvanje ali pa lih cikel) preveri veljavnost priče. Če priča ni veljavna Lean uporabi počasno verzijo algoritma za iskanje barvanja. Kot bomo videli v naslednjem poglavju, se to pri realnem testiranju

ne zgodi. S tem dobimo hiter in pravilen algoritem za določanje 2 barvljivost grafa, je pa res, da smo uspeli dokazati le pravilnost ne pa tudi hitrosti.

5 Rezultati in meritve

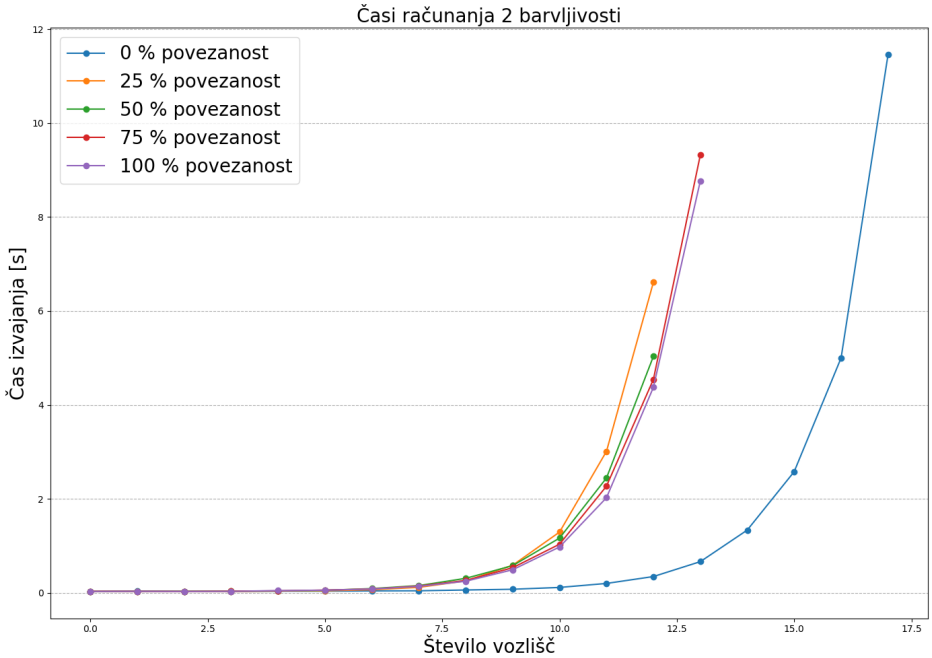
V tem poglavju bomo predstavili rezultate in meritve. Ker kromatično število vedno računamo s tem, da gledamo, ali je graf k barvljiv, bodo tudi ocene hitrosti zaradi enostavnosti primerjale hitrosti implementacij k barvljivosti za različne k in različne algoritme, ki smo jih implementirali.

Poglejmo si najprej osnovni algoritem za preverjanje k barvljivosti.

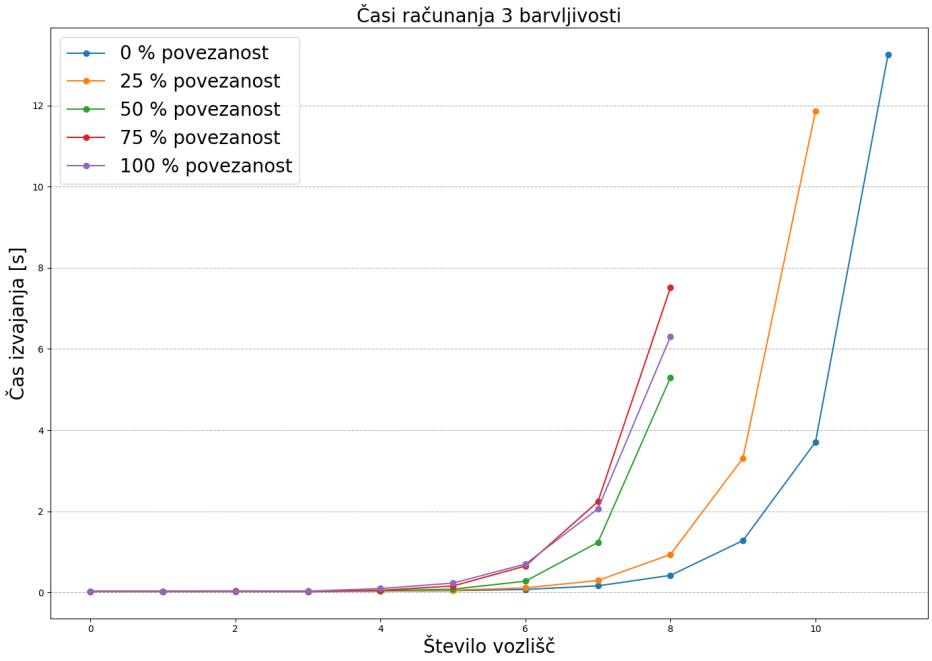
```
def is_k_colorable (G : Graph) (k: Nat) : Prop :=
    ∃ (coloring : Coloring G k), valid_coloring G coloring
```

Barvljivost torej preverimo tako, da preverimo, ali izmed vseh mogočih barvanj obstaja barvanje z k barvami.

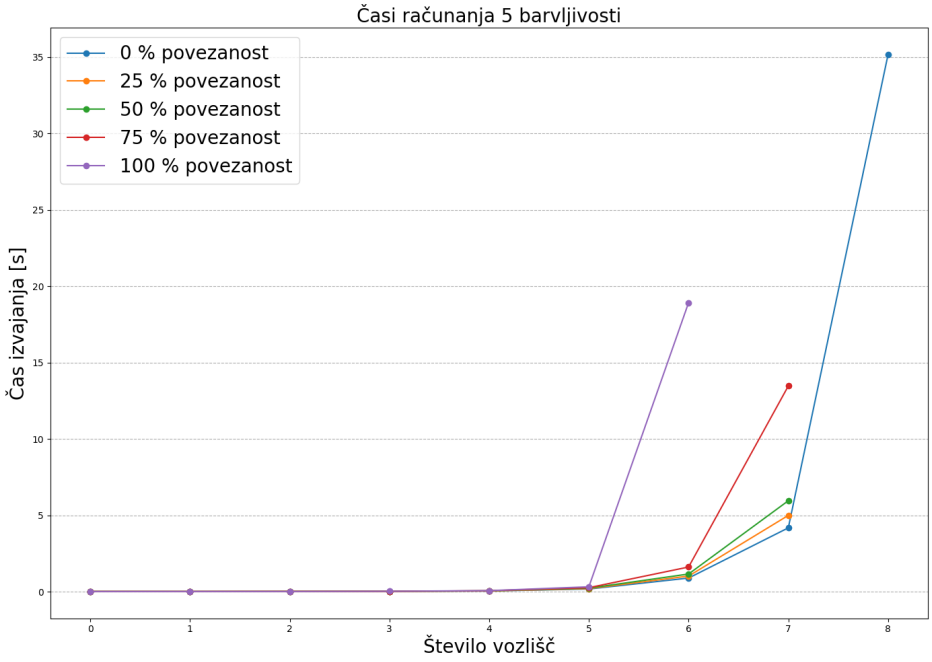
Poglejmo si nekaj grafov porabe časa tega algoritma. Za testiranje algoritma bomo uporabili Erdős–Rényijeve grafe ki jih označimo z $G(n, p)$. Model $G(n, p)$ nam vrne naključen graf z n vozlišči, kjer je vsaka povezava prisotna z verjetnostjo p.



Slika 3: Poraba časa algoritma za preverjanje 2 barvljivosti grafa $G(n, p)$



Slika 4: Poraba časa algoritma za preverjanje 3 barvljivosti grafa $G(n, p)$



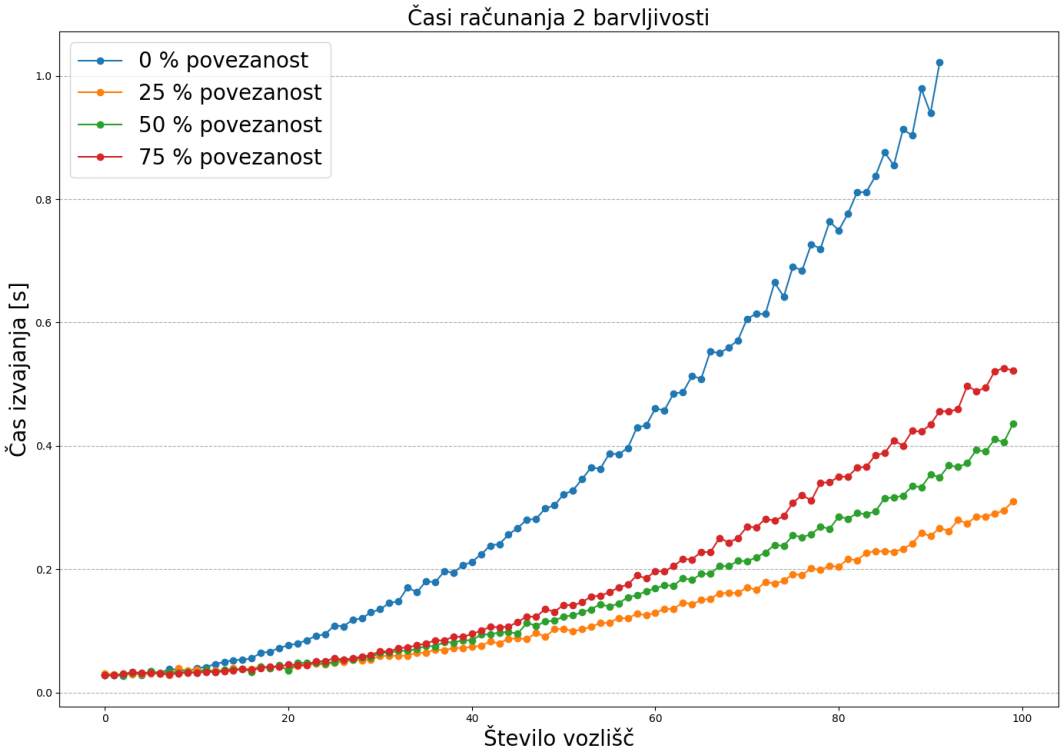
Slika 5: Poraba časa algoritma za preverjanje 5 barvljivosti grafa $G(n, p)$

Grafe smo pridobili tako, da je Python klical prevejeno Lean kodo in beležil čas izvajanja. Lean program je zgeneriral 1000 naključnih grafov $G(n, p)$ ter za vsakega preveril, ali je k barvljiv, kjer je bil k podan kot argument programa. Čas računanja torej opiše čas, porabljen za izračun na 1000 grafih za bolj stabilne rezultate. Program se je izvajal na računalniku z AMD Ryzen 9 7950x procesorjem in zadostno količino delavnega pomnilnika, kjer pa se nismo posebej trudili s tem da bi uporabljali več jeder.

Vidimo, da je poraba časa eksponentna v številu vozlišč grafa ter da je preverjanje k barvljivosti za večje k počasnejše. To je pričakovano, saj je število možnih barvanj eksponentno v številu vozlišč grafa. Opazimo, da je pri grafih brez povezav algoritem najhitrejši, vendar še vedno eksponenten. Domnevamo, da se to zgodi, ker Lean najprej generira vsa možna barvanja in šele nato preveri ali je katero veljavno.

Vidimo, da je za preverjanje 3 in 5 barvljivosti algoritem počasnejši, več kot je povezav, kar je smiselno, ker je pri velikem številu povezav verjetnost, da barvanje obstaja manjše, zato program ne more ustaviti izvajanja, ko najde veljavno barvanje. Pri 2 barvljivosti ta opazka o hitrosti iz neznanih razlogov ne velja.

Na podoben način smo preizkusili tudi hitrejši algoritem za preverjanje 2 barvljivosti.



Slika 6: Poraba časa hitrega algoritma za preverjanje 2 barvljivosti grafa $G(n, p)$

Vidimo da je algoritem za katerega smo trdili, da je hitrejši brez dokaza, (in do-

kazali pravilnost), res bistveno hitrejši. Še vedno ima nelinearno časovno zahtevnost, kar pa je smiselno, ker imamo recimo $O(n^2)$ povezav z našim $G(n, p)$ modelom.

6 Zaključek

Ugotovili smo, da je Lean 4 primeren jezik za implementacijo in dokazovanje pravilnosti algoritmov za računanje kromatičnega števila grafov. Dodatne teme, ki bi bile zanimive za raziskovanje, so dokazovanje, da hiter algoritem vedno deluje pravilno, (torej da vrne pravilno barvanje ali lih cikel in da se ne more zgoditi, da mora Lean uporabiti počasno verzijo algoritma), ugotavljanje večjega števila invariant na grafih ter implementacija hitrih algoritmov s pričami v hitrejših jezikih.

Slovar strokovnih izrazov

Chromatic number Kromatično število