

# Випуск I: Категорії з сім'ями

Максим Сохацький <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Національний технічний університет України  
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського  
22 квітня 2025 р.

## Анотація

Категорійна семантика залежної теорії типів.

**Ключові слова:** теорія категорій, категорії з сім'ями, залежна теорія типів

## Зміст

<b>1 Категорії з сім'ями</b>	<b>2</b>
1.1 Основні визначення . . . . .	2
1.2 Семантика залежної теорії типів . . . . .	3
1.3 Формалізація в Anders . . . . .	3
1.4 Висновки . . . . .	4

# 1 Категорії з сім'ями

Тут подано короткий неформальний опис категорійної семантики залежної теорії типів, запропонований Пітером Диб'єром. Категоріальна абстрактна машина Диб'єра на Haskell описана тут<sup>1</sup>.

## 1.1 Основні визначення

**Визначення 1.1** (Fam). Категорія  $Fam$  — це категорія сімей множин, де об'єкти є залежними функціональними просторами  $(x : A) \rightarrow B(x)$ , а морфізми з доменом  $\Pi(A, B)$  і кодоменом  $\Pi(A', B')$  — це пари функцій  $\langle f : A \rightarrow A', g(x : A) : B(x) \rightarrow B'(f(x)) \rangle$ .

**Визначення 1.2** (П-похідність). Для контексту  $\Gamma$  і типу  $A$  позначимо  $\Gamma \vdash A = (\gamma : \Gamma) \rightarrow A(\gamma)$ .

**Визначення 1.3** ( $\Sigma$ -охоплення). Для контексту  $\Gamma$  і типу  $A$  маємо  $\Gamma; A = (\gamma : \Gamma) * A(\gamma)$ . Охоплення не є асоціативним:

$$\Gamma; A; B \neq \Gamma; B; A$$

**Визначення 1.4** (Контекст). Категорія контекстів  $C$  — це категорія, де об'єкти є контекстами, а морфізми — підстановками. Термінальний об'єкт  $\Gamma = 0$  у  $C$  називається порожнім контекстом. Операція охоплення контексту  $\Gamma; A = (x : \Gamma) * A(x)$  має елімінатори:  $p : \Gamma; A \vdash \Gamma$ ,  $q : \Gamma; A \vdash A(p)$ , що задовольняють універсальну властивість: для будь-якого  $\Delta : ob(C)$ , морфізму  $\gamma : \Delta \rightarrow \Gamma$  і терму  $a : \Delta \rightarrow A$  існує єдиний морфізм  $\theta = \langle \gamma, a \rangle : \Delta \rightarrow \Gamma; A$ , такий що  $p \circ \theta = \gamma$  і  $q(\theta) = a$ . Твердження: підстановка є асоціативною:

$$\gamma(\gamma(\Gamma, x, a), y, b) = \gamma(\gamma(\Gamma, y, b), x, a)$$

**Визначення 1.5** (CwF-об'єкт). CwF-об'єкт — це пара  $\Sigma(C, C \rightarrow Fam)$ , де  $C$  — категорія контекстів з об'єктами-контекстами та морфізмами-підстановками, а  $T : C \rightarrow Fam$  — функтор, який відображає контекст  $\Gamma$  у  $C$  на сім'ю множин термів  $\Gamma \vdash A$ , а підстановку  $\gamma : \Delta \rightarrow \Gamma$  — на пару функцій, що виконують підстановку  $\gamma$  у термах і типах відповідно.

**Визначення 1.6** (CwF-морфізм). Нехай  $(C, T) : ob(C)$ , де  $T : C \rightarrow Fam$ . CwF-морфізм  $m : (C, T) \rightarrow (C', T')$  — це пара  $\langle F : C \rightarrow C', \sigma : T \rightarrow T'(F) \rangle$ , де  $F$  — функтор, а  $\sigma$  — натуральна трансформація.

**Визначення 1.7** (Категорія типів). Для CwF з об'єктами  $(C, T)$  і морфізмами  $(C, T) \rightarrow (C', T')$ , для заданого контексту  $\Gamma \in Ob(C)$  можна побудувати категорію  $Type(\Gamma)$  — категорію типів у контексті  $\Gamma$ , де об'єкти — множина типів у контексті, а морфізми — функції  $f : \Gamma; A \rightarrow B(p)$ .

<sup>1</sup><https://www.cse.chalmers.se/~peterd/papers/Ise2008.pdf>

## 1.2 Семантика залежної теорії типів

**Визначення 1.8** (Терми та типи). У  $\text{CwF}$  для контексту  $\Gamma$  терми  $\Gamma \vdash a : A$  є елементами множини  $A(\gamma)$ , де  $\gamma : \Gamma$ . Типи  $\Gamma \vdash A$  є об'єктами в  $\text{Type}(\Gamma)$ , а підстановка  $\gamma : \Delta \rightarrow \Gamma$  діє на типи та терми через функтор  $T$ .

**Теорема 1.1** (Композиція підстановок). Підстановки в категорії контекстів  $C$  є асоціативними та мають одиницю (ідентичну підстановку). Формально, для  $\gamma : \Delta \rightarrow \Gamma$ ,  $\delta : \Theta \rightarrow \Delta$  і  $\epsilon : \Gamma \rightarrow \Lambda$  виконується:

$$(\gamma \circ \delta) \circ \epsilon = \gamma \circ (\delta \circ \epsilon), \quad id_\Gamma \circ \gamma = \gamma, \quad \gamma \circ id_\Delta = \gamma.$$

*Доведення.* Асоціативність випливає з універсальної властивості охоплення контексту (Визначення 1.4). Для будь-яких  $\gamma, \delta, \epsilon$  композиція морфізмів у  $C$  відповідає послідовному застосуванню підстановок, що зберігає структуру контекстів. Ідентична підстановка  $id_\Gamma$  діє як нейтральний елемент, оскільки  $p \circ id_\Gamma = id_\Gamma$  і  $q(id_\Gamma) = q$ .  $\square$

**Визначення 1.9** (Залежні типи). Залежний тип у контексті  $\Gamma$  — це відображення  $\Gamma \rightarrow \text{Fam}$ , де для кожного  $\gamma : \Gamma$  задається множина  $A(\gamma)$ . У категорії  $\text{Type}(\Gamma)$  залежні типи є об'єктами, а морфізми між  $A$  і  $B$  — це функції  $f : \Gamma; A \rightarrow B(p)$ , що зберігають структуру підстановок.

**Теорема 1.2** (Універсальна властивість залежних типів). Для будь-якого контексту  $\Gamma$ , типу  $A$  і терму  $a : \Gamma \vdash A$  існує унікальний морфізм  $\theta : \Gamma \rightarrow \Gamma; A$ , який задовольняє  $p \circ \theta = id_\Gamma$  і  $q(\theta) = a$ . Це забезпечує коректність залежної типізації в  $\text{CwF}$ .

*Доведення.* За Визначенням 1.4, універсальна властивість охоплення контексту гарантує існування  $\theta = \langle id_\Gamma, a \rangle$ . Унікальність випливає з того, що будь-який інший морфізм  $\theta'$  з тими ж властивостями ( $p \circ \theta' = id_\Gamma$ ,  $q(\theta') = a$ ) збігається з  $\theta$  через єдиність композиції в  $C$ .  $\square$

## 1.3 Формалізація в Anders

Для формалізації  $\text{CwF}$  у Agda чи Lean необхідно визначити категорію  $C$  як запис із полями для об'єктів, морфізмів, композиції та ідентичності, а також функтор  $T : C \rightarrow \text{Fam}$ . Нижче наведено псевдокод для Anders<sup>2</sup>:

```
def algebra : U1 :=  $\Sigma$ 
  — a semicategory of contexts and substitutions:
  (Con: U)
  (Sub: Con  $\rightarrow$  Con  $\rightarrow$  U)
  ( $\diamond$ :  $\Pi$  (  $\Gamma \Theta \Delta$  : Con ), Sub  $\Theta \Delta \rightarrow$  Sub  $\Gamma \Theta \rightarrow$  Sub  $\Gamma \Delta$ )
  ( $\diamond$ -assoc:  $\Pi$  (  $\Gamma \Theta \Delta \Phi$  : Con ) (  $\sigma$ : Sub  $\Gamma \Theta$  ) (  $\delta$ : Sub  $\Theta \Delta$  )
    (  $\nu$ : Sub  $\Delta \Phi$  ), PathP (  $\_$ Sub  $\Gamma \Phi$  ) (  $\diamond$   $\Gamma \Delta \Phi \nu$  (  $\diamond$   $\Gamma \Theta \Delta \delta \sigma$  ))
    (  $\diamond$   $\Gamma \Theta \Phi$  (  $\diamond$   $\Theta \Delta \Phi \nu \delta$  )  $\sigma$  ))
  — identity morphisms as identity substitutions:
```

<sup>2</sup><https://anders.groupoid.soace/lib/mathematics/categories/meta/kraus.anders>

```

(id: Π (Γ : Con), Sub Γ Γ)
(id-left: Π (Θ Δ : Con) (δ : Sub Θ Δ),
  Path (Sub Θ Δ) δ (◇ Θ Δ Δ (id Δ) δ))
(id-right: Π (Θ Δ : Con) (δ : Sub Θ Δ),
  Path (Sub Θ Δ) δ (◇ Θ Θ Δ δ (id Θ)))
— a terminal object as empty context:
(•: Con)
(ε: Π (Γ : Con), Sub Γ •)
(•η: Π (Γ: Con) (δ: Sub Γ •), Path (Sub Γ •) (ε Γ) δ)
(Ty: Con → U)
(⟦_⟦T: Π (Γ Δ : Con), Ty Δ → Sub Γ Δ → Ty Γ)
(⟦id⟦T: Π (Δ : Con) (A : Ty Δ), Path (Ty Δ) (⟦_⟦T Δ Δ A (id Δ)) A)
(⟦◇⟦T: Π (Γ Δ Φ: Con) (A : Ty Φ) (σ : Sub Γ Δ) (δ : Sub Δ Φ),
  PathP (⟦Ty Γ) (⟦_⟦T Γ Φ A (◇ Γ Δ Φ δ σ))
    (⟦_⟦T Γ Δ (⟦_⟦T Δ Φ A δ) σ))
— a (covariant) presheaf on the category of elements as terms:
(Tm: Π (Γ : Con), Ty Γ → U)
(⟦_⟦t: Π (Γ Δ : Con) (A : Ty Δ) (B : Tm Δ A)
  (σ : Sub Γ Δ), Tm Γ (⟦_⟦T Γ Δ A σ))
(⟦id⟦t: Π (Δ : Con) (A : Ty Δ) (t: Tm Δ A),
  PathP (⟦i⟦ Tm Δ (⟦id⟦T Δ A @ i))
    (⟦_⟦t Δ Δ A t (id Δ)) t)
(⟦◇⟦t: Π (Γ Δ Φ: Con) (A : Ty Φ) (t: Tm Φ A)
  (σ : Sub Γ Δ) (δ : Sub Δ Φ),
  PathP (⟦i⟦ Tm Γ (⟦◇⟦T Γ Δ Φ A σ δ @ i))
    (⟦_⟦t Γ Φ A t (◇ Γ Δ Φ δ σ))
    (⟦_⟦t Γ Δ (⟦_⟦T Δ Φ A δ) (⟦_⟦t Δ Φ A t δ) σ))

```

Ця структура дозволяє реалізувати Визначення 1.1–1.11, а Теореми 1.10 і 1.12 доводяться через перевірку асоціативності та універсальних властивостей.

## 1.4 Висновки

Категорії з сім'ями (CwF) є потужним інструментом для моделювання залежної теорії типів. Вони забезпечують чітку семантику для контекстів, підстановок і залежних типів, що полегшує формалізацію в системах типу Agda чи Lean. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розширення CwF для підтримки гомотопічної теорії типів або оптимізацію бібліотек для програмування.