

# Issue XXVII: Quillen Model Categories

Namdak Tonpa

15 травня 2025 р.

## Анотація

Ця стаття є оглядом теорії модельних категорій, започаткованої Деніелом Квілленом у його новаторській праці 1967 року "Гомотопічна алгебра". Ми розглядаємо історичний контекст, основні аксіоми та застосування модельних категорій у топології та суміжних галузях, зокрема у доведенні кон'єктур Мілнора та Блоха-Като Воеводським. Також обговорюються сучасні узагальнення, такі як інфініті-категорії та модельні структури на симпліційних і кубічних множинах, з акцентом на їхню релевантність у математиці та теоретичній інформатиці.

## Зміст

### 1 Model Categories

PhD Деніела Квілена була присвячена диференціальним рівнянням, але відразу після цього він перевівся в МІТ і почав працювати в алгебраїчній топології, під впливом Дена Кана. Через три роки він видає Шпрінгеровські лекції з математики "Гомотопічна алгебра" [?], яка назавжди трансформувала алгебраїчну топологію від вивчення топологічних просторів з точністю до гомотопій до загального інструменту, що застосовується в інших галузях математики.

Модельні категорії вперше були успішно застосовані Воеводським на підтвердження кон'юнктури Мілнора [?] (для 2) і потім мотивної кон'юнктури Блоха-Като [?] (для  $n$ ). Для доказу для 2 була побудована зручна гомотопічна стабільна категорія узагальнених схем. Інфініті категорії Джояля, досить добре досліджені Лур'є [?], є прямим узагальненням модельних категорій.

#### 1.1 Означення модельних категорій

До часу, коли Квіллен написав "Гомотопічну алгебру" вже було деяке уявлення про те, як має виглядати теорія гомотопій. Починаємо ми з категорії  $\mathcal{C}$  та колекції морфізмів  $W$  – слабкими еквівалентностями.

Завдання вправи інвертувати  $W$  морфізму щоб отримати гомотопічну категорію. Хотілося б мати спосіб, щоб можна було конструювати похідні функтори. Для топологічного простору  $X$ , його апроксимації  $LX$  і слабкої еквівалентності  $LX \rightarrow X$  це означає, що ми повинні замінити  $X$  на  $LX$ . Це аналогічно до заміни модуля або ланцюгового комплексу на проективну резольвенту. Подвійним чином, для симпліційної множини  $K$ , Кан комплексу  $RK$ , і слабкої еквівалентності  $K \rightarrow RK$  ми повинні замінити  $K$  на  $RK$ . У цьому випадку це аналогічно до заміни ланцюгового комплексу ін'єктивною резольвентою.

```
modelStructure (C: category): U
= (fibrations: fib C)
  * (cofibrations: cofib C)
  * (weakEquivalences: weak C)
  * unit
```

Таким чином Квілену потрібно було окрім поняття слабкої еквівалентності ще й поняття розшарованого (RK) та корозшарованого (LX) об'єктів. Ключовий інстайт з топології тут наступний, в неабелевих ситуаціях об'єкти не надають достатньої структури поняття точної послідовності. Тому стало зрозуміло, що для відновлення структури необхідно ще два класи морфізмів: розшарування та корозшарування на додаток до слабких еквівалентностей, яким ми повинні інвертувати для розбудови гомотопічної категорії. Природно ці три колекції морфізмів повинні задовольняти набору умов, званих аксіомами модельних категорій: 1) наявність малих лімітів і колімітів; 2) правило 3-для-2; 3) правило ректрактів; 4) правило підйому; 5) правило факторизації.

**Definition 1.** Модельна категорія — це категорія  $\mathcal{C}$ , оснащена трьома класами морфізмів: 1)  $\text{fib}(\mathcal{C})$  — розшарування; 2)  $\text{cof}(\mathcal{C})$  — корозшарування; 3)  $W(\mathcal{C})$  — слабкі еквівалентності, які задовольняють аксіоми, наведені вище.

Цікавою властивістю модельних категорій є те, що дуальні до них категорії перевертають розшарування та корозшарування, таким чином реалізуючи дуальність Екманна-Хілтона. Розшарування та корозшарування пов'язані, тому взаємовизначені. Корозшарування є морфізми, що мають властивість лівого гомотопічного підйому по відношенню до ациклічних розшарування і розшарування є морфізми, що мають властивість правого гомотопічного підйому по відношенню до ациклічних кофібрацій.

## 1.2 Застосування в топології

Основним застосуванням модельних категорій у роботі Квілена було присвячено категоріям топологічних просторів. Для топологічних просторів існує дві модельні категорії: Квілена (1967) та Строма (1972). Перша як розшарований використовує розшарування Серра, а як корозшарування морфізму які мають лівий гомотопічний підйом по відношенню до

ациклічних розшарування Серра, еквівалентно це ретракти відповідних CW-комплексів, а як слабка еквівалентність виступає слабка гомотопічна. Друга модель Строма як розшарування використовуються розшарування Гуревича, як корозшарування стандартні корозшарування, і як слабка еквівалентність — сильна гомотопічна еквівалентність.

```
quillen67
  : modelStructure Top
  = ( serreFibrations ,
      retractsCW ,
      weakHomotopyEquivalence )

strom1972
  : modelStructure Top
  = ( hurewiczFibrations ,
      cofibrations ,
      strongHomotopyEquivalence )
```

### 1.3 Модельні категорії для множин

Найпростіші модельні категорії можна побудувати для категорії множин, де кількість ізоморфних моделей зростає до дев'яти. Наведемо деякі конфігурації модельних категорій для категорії множин:

```
set0 : modelStructure Set = ( all , all , bijections )
set1 : modelStructure Set = ( bijections , all , all )
set2 : modelStructure Set = ( all , bijections , all )
set3 : modelStructure Set = ( surjections , injections , all )
set4 : modelStructure Set = ( injections , surjections , all )
```

### 1.4 Застосування в алгебраїчній геометрії

Модельні категорії вперше були успішно застосовані Воєводським на підтвердження кон'юнктури Мілнора [?] (для 2) і потім мотивної кон'юнктури Блоха-Като [?] (для n). Для доказу для 2 була побудована зручна гомотопічна стабільна категорія узагальнених схем.

### 1.5 Інфініті-категорії та сучасні узагальнення

Для переходу від модельних категорій до  $(\infty, 1)$ -категорій необхідно перейти до категорій де морфізми утворюють не множини, а симпліційні множини. Потім можна переходити до локалізації.

```
simplicial
  : modelStructure sSet
  = ( kanComplexes ,
      monos ,
      simplicialBijections )
```

Але для нас, для програмістів найцікавішими є модельні категорії симпліціальних множин та модельні категорії кубічних множин, саме в

цьому сеттингу написано ССНМ пейпер 2016 року, де показано модельну структуру категорії кубічних множин [?].

```
cubical
  : modelStructure cSet
  = ( kanComplexes ,
      monos ,
      geometricRealisation )
```

де  $cSet = [\square^{\text{op}}, \text{Set}]$ , а  $\square$  — категорія збагачена структурою алгебри де Моргана.

## 1.6 Висновки

Модельні категорії, запроваджені Квілленом, стали фундаментальним інструментом у сучасній математиці, забезпечуючи гнучкий фреймворк для роботи з гомотопіями в різних категоріях. Їхні застосування варіюються від топології до алгебраїчної геометрії та теоретичної інформатики, а узагальнення, такі як інфініті-категорії, відкривають нові горизонти для досліджень. Подальший розвиток теорії, ймовірно, буде пов'язаний із застосуванням модельних структур у комп'ютерних науках, зокрема в семантиці мов програмування та гомотопічній теорії типів.

## Література

- [1] Д. Квіллен, *Гомотопічна алгебра*, Springer Lecture Notes in Mathematics, 1967.
- [2] В. Воеводський, *The Milnor conjecture*, 1996.
- [3] В. Воеводський, *Bloch-Kato conjecture for  $\mathbb{Z}/2$  coefficients and algebraic Morava K-theories*, 2003.
- [4] Дж. Лур'є, *Higher Topos Theory*, Princeton University Press, 2009.
- [5] Е. Кавалло, А. Мьортберг, А. Сван, *Model structure on cubical sets*, 2019.
- [6] А. Стром, *Note on cofibrations II*, Mathematische Zeitschrift, 1972.
- [7] Дж. Джардін, *Model structure on cubical sets*, 2002.
- [8] К. Капулкін, П. Ламсдейн, В. Воеводський, *Univalence in Simplicial Sets*, 2012.
- [9] Н. Гамбіно, К. Саттлер, К. Шуміло, *The constructive Kan-Quillen model structure: two new proofs*, 2019.
- [10] Д. Кан, А. Бусфілд, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, 1972.
- [11] Ф. Морель, В. Воеводський, *A1-homotopy theory of schemes*, 1999.