Issue XXVII: Quillen Model Categories

Namdak Tonpa

18 травня 2025 р.

Анотація

Ця стаття є оглядом теорії модельних категорій, започаткованої Деніелом Квілленом у його новаторській праці 1967 року “Гомотопічна алгебра”. Ми розглядаємо історичний контекст, основні аксіоми та застосування модельних категорій у топології та суміжних галузях, зокрема у доведенні кон’єктур Мілнора та Блоха-Като Воєводським. Також обговорюються сучасні узагальнення, такі як інфініті-категорії та модельні структури на симпліційних і кубічних множинах, з акцентом на їхню релевантність у математиці та теоретичній інформатиці.

Зміст

1 Model Categories

PhD Деніела Квілена була присвячена диференціальним рівнянням, але відразу після цього він перевівся в MIT і почав працювати в алгебраїній топології, під впливом Дена Кана. Через три роки він видає Шпрінгеровські лекції з математики "Гомотопічна алгебра"[1], яка назавжди трансформувала алгебраїчну топологію від вивчення топологічних просторів з точністю до гомотопій до загального інструменту, що застосовується в інших галузях математики.

Модельні категорії вперше були успішно застосовані Воєводським на підтвердження кон’юнктури Мілнора [2] (для 2) і потім мотивної кон’юнктури Блоха-Като [3] (для n). Для доказу для 2 була побудована зручна гомотопічна стабільна категорія узагальнених схем. Інфініті категорії Джояля, досить добре досліджені Лур'є [4], є прямим узагальненням модельних категорій.

1.1 Означення модельних категорій

До часу, коли Квіллен написав "Гомотопічну алгебру вже було деяке уявлення про те, як має виглядати теорія гомотопій. Починаємо ми з категорії $\mathcal{C}$ та колекції морфізмів W – слабкими еквівалентностями. Завдання вправи інвертувати W морфізму щоб отримати гомотопічну категорію. Хотілося б мати спосіб, щоб можна було конструтувати похідні функтори. Для топологічного простору X, його апроксимації LX і слабкої еквівалентності $LX \to X$ це означає, що ми повинні замінити X на LX. Це аналогічно до заміни модуля або ланцюгового комплексу на проективну резольвенту. Подвійним чином, для симпліційної множини K, Кан комплексу RK, і слабкої еквівалентності $K \to RK$ ми повинні замінити K на RK. У цьому випадку це аналогічно до заміни ланцюгового комплексу ін'єктивною резольвентою.

```
modelStructure (C: category): U
   = (fibrations: fib C)
   * (cofibrations: cofib C)
   * (weakEqivalences: weak C)
   * unit
```

Таким чином Квілену потрібно було окрім поняття слабкої еквівалентності ще й поняття розшарованого (RK) та корозшарованого (LX) об'єктів. Ключовий інстайт з топології тут наступний, в неабелевих ситуаціях об'єкти не надають достатньої структури поняття точної послідовності. Тому стало зрозуміло, що для відновлення структури необхідно ще два класи морфізмів: розшарування та корозшарування на додаток до слабких еквівалентностей, яким ми повинні інвertувати для розбудови гомотопічної категорії. Природно ці три колекції морфізом повинні задовольняти набору умов, званих аксіомами модельних категорій: 1) наявність малих лімітів і колимітів; 2) правило 3-для-2; 3) правило ректрактів; 4) правило підйому; 5) правило факторизації.

Definition 1. Модельна категорія — це категорія $\mathcal{C}$, оснащена трьома класами морфізмів: 1) $\mathtt{fib}(\mathcal{C})$ — розшарування; 2) $\mathtt{cof}(\mathcal{C})$ — корозшарування; 3) $W(\mathcal{C})$ — слабкі еквівалентності, які задовольняють аксіоми, наведені вище.

Цікавою властивістю модельних категорій є те, що дуальні до них категорії
перевертають розшарування та корозшарування, таким чином реалізуючи дуальність Екманна-Хілтона. Розшарування та корозшарування пов'язані, тому взаємовизначені. Корозшарування є морфізми, що мають властивість лівого гомотопічного підйому по відношенню до ациклічних розшарування і розшарування є морфизми, що мають властивість правого гомотопічного підйому по відношенню до ациклічних кофібрацій.

1.2 Застосування в топології

Основним застосуванням модельних категорій у роботі Квілена було присвячено категоріям топологічних просторів. Для топологічних просторів існує дві модельні категорії: Квілена (1967) та Строма (1972). Перша як розшарований використовує розшарування Серра, а як корозшаровування морфізму які мають лівий гомотопічний підйом по відношенню до ациклічних розшарування Серра, еквівалентно це ретракти відповідних CW-комплексів, а як слабка еквівалентність виступає слабка гомотопічна. Друга модель Строма як розшарування використовуються розшарування Гуревича, як корозшарування стандартні корозшаровування, і як слабка еквівалентність — сильна гомотопічна еквівалентність.

```
quillen67
    : modelStructure Top
    = ( serreFibrations ,
        retractsCW ,
        weakHomotopyEquivalence )

strom1972
    : modelStructure Top
    = ( hurewiczFibrations ,
        cofibrations ,
        strongHomotopyEquivalence )
```

1.3 Модельні категорії для множин

Найпростіші модельні категорії можна побудувати для категорії множин, де кількість ізоморфних моделей зростає до дев'яти. Наведемо деякі конфігурації модельних категорій для категорії множин:

```
set0: modelStructure Set = (all,all,bijections)
set1: modelStructure Set = (bijections,all,all)
set2: modelStructure Set = (all,bijections,all)
set3: modelStructure Set = (surjections,injections,all)
set4: modelStructure Set = (injections,surjections,all)
```

1.4 Застосування в алгебраїчній геометрії

Модельні категорії вперше були успішно застосовані Воєводським на підтвердження кон'юнктури Мілнора [2] (для 2) і потім мотивної кон'юнктури Блоха-Като [3] (для n). Для доказу для 2 була побудована зручна гомотопічна стабільна категорія узагальнених схем.

1.5 Інфініті-категорії та сучасні узагальнення

Для переходу від модельних категорій до $(\infty,1)$-категорій необхідно перейти до категорій де морфізми утворюють не множини, а симпліційні множини. Потім можна переходити до локалізації.

```
simplicial
    : modelStructure sSet
    = ( kanComplexes ,
        monos ,
        simplicialBijections )
```

Але для нас, для програмістів найцікавішими є модельні категорії симпліціальних множин та модельні категорії кубічних множин, саме в цьому сеттингу написано CCHM пейпер 2016 року, де показано модельну структуру категорії кубічних множин [5].

```
cubical
    : modelStructure cSet
    = ( kanComplexes ,
        monos ,
        geometricRealisation )
```

де $\mathsf{cSet} = [\square^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]$, а $\square$ — категорія збагачена структурою алгебри де Моргана.

1.6 Висновки

Модельні категорії, запроваджені Квілленом, стали фундаментальним інструментом у сучасній математиці, забезпечуючи гнучкий фреймворк для роботи з гомотопіями в різних категоріях. Їхні застосування варіюються від топології до алгебраїчної геометрії та теоретичної інформатики, а узагальнення, такі як інфініті-категорії, відкривають нові горизонти для досліджень. Подальший розвиток теорії, ймовірно, буде пов'язаний із застосуванням модельних структур у комп'ютерних науках, зокрема в семантиці мов програмування та гомотопічній теорії типів.

Література

[1] Д. Квіллен, *Гомотопічна алгебра*, Springer Lecture Notes in Mathematics, 1967.

[2] В. Воєводський, *The Milnor conjecture*, 1996.

[3] В. Воєводський, *Bloch-Kato conjecture for $\mathbb{Z}/2$ coefficients and algebraic Morava K-theories*, 2003.

[4] Дж. Лур'є, *Higher Topos Theory*, Princeton University Press, 2009.

[5] Е. Кавалло, А. Мьортберг, А. Сван, *Model structure on cubical sets*, 2019.

[6] А. Стром, *Note on cofibrations II*, Mathematische Zeitschrift, 1972.

[7] Дж. Джардін, *Model structure on cubical sets*, 2002.

[8] К. Капулкін, П. Ламсдейн, В. Воєводський, *Univalence in Simplicial Sets*, 2012.

[9] Н. Гамбіно, К. Саттлер, К. Шуміло, *The constructive Kan-Quillen model structure: two new proofs*, 2019.

[10] Д. Кан, А. Бусфілд, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, 1972.

[11] Ф. Морель, В. Воєводський, *A1-homotopy theory of schemes*, 1999.