

Випуск IV: Вищі індуктивні типи

Максим Сохацький¹

¹ Національний технічний університет України
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського
4 травня 2019

Анотація

SW-комплекси є ключовими як в теорії гомотопій так і в теорії гомотопічних типів (HoTT) і кодуються в кубічних системах доведення теорем як вищі індуктивні типи (HIT) подібно до рекурсивних дерев для (ко)індуктивних типів. Ми досліджуємо базові приміти гомотопічної теорії, які розглядаються як фундаційний базис в системах доведення теорем.

Ключові слова: Теорія гомотопій, Теорія типів

Зміст

1	SW-комплекси	2
1.1	Мотивація вищих індуктивних типів	3
1.2	HIT зі зліченими конструкторами	3
2	Вищі індуктивні типи	3
2.1	Суспензія	4
2.2	Розшарована сума	5
2.3	Сфери	6
2.4	Хаб і шпиці	7
2.5	Відсікання	8
2.6	Фактор-простори	9
2.7	Букет	10
2.8	Смеш-добуток	11
2.9	З'єднання	12
2.10	Кограниця	13
2.11	Коеквалайзери	14
2.12	$K(G, n)$	16
2.13	Локалізація	17
3	Висновок	17

1 CW-комплекси

CW-комплекси — це простори, побудовані шляхом приєднання клітин різних розмірностей. У НОТТ вони кодуються як вищі індуктивні типи (НІТ), де клітини є конструкторами для точок і шляхів.

Означення 1. (Приєднання клітини). Приєднання n -клітини до простору X вздовж $f : S^{n-1} \rightarrow X$ є розширеною сумою:

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \iota & & \downarrow j \\ D^n & \xrightarrow{g} & X \cup_f D^n \end{array}$$

Тут $\iota : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ — включення межі, а $X \cup_f D^n$ — розширена сума, що приклеює n -клітину до X через f . Результат залежить від гомотопічного класу f .

Означення 2. (CW-комплекс). CW-комплекс — це простір X , побудований індуктивно шляхом приєднання клітин, із скелетною фільтрацією:

- (-1) -скелет: $X_{-1} = \emptyset$.
- Для $n \geq 0$, n -скелет X_n отримується приєднанням n -клітин до X_{n-1} . Для індексів J_n та відображень $\{f_j : S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}\}_{j \in J_n}$, X_n є розширеною сумою:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{j \in J_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod f_j} & X_{n-1} \\ \downarrow \coprod \iota_j & & \downarrow i_n \\ \coprod_{j \in J_n} D^n & \xrightarrow{\coprod g_j} & X_n \end{array}$$

де $\coprod_{j \in J_n} S^{n-1}$, $\coprod_{j \in J_n} D^n$ — диз'юнктні об'єднання, а $i_n : X_{n-1} \hookrightarrow X_n$ — включення.

- X — кограниця:

$$\emptyset = X_{-1} \hookrightarrow X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X,$$

де X_n — n -скелет, а $X = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} X_n$. Послідовність є скелетною фільтрацією.

У НОТТ CW-комплекси є вищими індуктивними типами (НІТ) із конструкторами для клітин і шляхів для приклеювання.

1.1 Мотивація вищих індуктивних типів

НІТ у HoTT дозволяють безпосередньо кодувати топологічні простори, такі як CW-комплекси. У теорії гомотопій простори будуються шляхом приклеювання клітин через відображення приєднання. HoTT розглядає типи як простори, елементи як точки, а рівності як шляхи, що робить НІТ природним вибором. Стандартні індуктивні типи не можуть захопити вищі гомотопії, але НІТ дозволяють конструктори для точок і шляхів. Наприклад, коло S^1 (Означення 2) має базову точку і петлю, кодуючи його фундаментальну групу \mathbb{Z} . НІТ уникають використання множинних фактор-просторів, зберігаючи синтетичну природу HoTT. У кубічній теорії типів шляхи є інтервалами (наприклад, $< i >$) з обчислювальним змістом, на відміну від пропозиційних рівностей, що забезпечує ефективну перевірку типів у таких інструментах, як Agda Cubical.

1.2 НІТ зі зліченими конструкторами

Деякі НІТ потребують нескінченної кількості конструкторів для просторів, таких як простори Ейленберга-МакЛейна або нескінченна сфера S^∞ .

```
def S∞ : U
  := inductive { base
                | loop (n: ℕ) : base ≡ base
                }
```

Виклики включають перевірку типів, обчислення та виразність.

Agda Cubical використовує кубічні примітиви для роботи з НІТ, підтримуючи нескінченні конструктори через НІТ індексовані натуральними числами, як кограниці.

2 Вищі індуктивні типи

CW-комплекси є центральними в HoTT і з'являються в кубічних перевіряльниках типів як НІТ. На відміну від індуктивних типів (рекурсивних дерев), НІТ кодують CW-комплекси, захоплюючи точки (0-клітини) та вищі шляхи (n-клітини). Означення НІТ визначає CW-комплекс через кубічну композицію, початкову алгебру в кубічній моделі.

2.1 Суспензія

Суспензія ΣA типу A — це вищий індуктивний тип, який конструює новий тип, додаючи дві точки, звані полюсами, і шляхи, що з'єднують кожену точку A з цими полюсами. Це фундаментальна конструкція в теорії гомотопій, яка часто використовується для зсуву гомотопічних груп, наприклад, для отримання S^{n+1} з S^n .

Означення 3. (Формація). Для будь якого типу $A : \mathcal{U}$, існує тип суспензії $\Sigma A : \mathcal{U}$.

Означення 4. (Конструктори). Для типу $A : \mathcal{U}$, суспензія $\Sigma A : \mathcal{U}$ генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\begin{cases} \text{north} \\ \text{south} \\ \text{merid} : (a : A) \rightarrow \text{north} \equiv \text{south} \end{cases}$$

```
def  $\Sigma$  (A: U) : U
:= inductive { north
              | south
              | merid (a: A) : north  $\equiv$  south
              }
```

Теорема 1. (Елімінація). Для сімейства типів $B : \Sigma A \rightarrow \mathcal{U}$, точок $n : B(\text{north})$, $s : B(\text{south})$, і сімейства залежних шляхів

$$m : \Pi(a : A), \text{PathOver}(B, \text{merid}(a), n, s),$$

існує залежне відображення $\text{Ind}_{\Sigma A} : (x : \Sigma A) \rightarrow B(x)$, таке що:

$$\begin{cases} \text{Ind}_{\Sigma A}(\text{north}) = n \\ \text{Ind}_{\Sigma A}(\text{south}) = s \\ \text{Ind}_{\Sigma A}(\text{merid}(a, i)) = m(a, i) \end{cases}$$

```
def PathOver (B:  $\Sigma A \rightarrow U$ ) (a: A) (n: B north) (s: B south) : U
:= PathP ( $\lambda i$  , B (merid a @ i)) n s
```

```
def Ind $\Sigma A$  (A: U) (B:  $\Sigma A \rightarrow U$ ) (n: B north) (s: B south)
(m: (a: A)  $\rightarrow$  PathOver B (merid a) n s) : (x:  $\Sigma A$ )  $\rightarrow$  B x
:= split { north  $\rightarrow$  n | south  $\rightarrow$  s | merid a @ i  $\rightarrow$  m a @ i }
```

Теорема 2. (Обчислення).

```
def  $\Sigma$ - $\beta$  (A: U) (B:  $\Sigma A \rightarrow U$ ) (n: B north) (s: B south)
(m: (a: A)  $\rightarrow$  PathOver B (merid a) n s) (x:  $\Sigma A$ )
: Path (B x) ( $\Sigma$ -I A B n s m x)
split { north  $\rightarrow$  n | south  $\rightarrow$  s | merid a @ i  $\rightarrow$  m a @ i } x
= idp (B x) (Ind $\Sigma A$  A B n s m x)
```

Теорема 3. (Унікальність). Будь-які два відображення $h_1, h_2 : (x : \Sigma A) \rightarrow B(x)$ є гомотопними, якщо вони збігаються на north, south і merid, тобто, якщо $h_1(\text{north}) = h_2(\text{north})$, $h_1(\text{south}) = h_2(\text{south})$, і $h_1(\text{merid } a) = h_2(\text{merid } a)$ для всіх $a : A$.

2.2 Розшарована сума

Розшарована сума (амальгама) — це вищий індуктивний тип, що конструює тип шляхом склеювання двох типів A і B вздовж спільного типу C через відображення $f : C \rightarrow A$ і $g : C \rightarrow B$. Це фундаментальна конструкція в теорії гомотопій, використовується для моделювання приєднання клітин і кофібрантних об'єктів, узагальнюючи топологічне поняття розшарованої суми.

Означення 5. (Формація). Для типів $A, B, C : \mathcal{U}$ і відображень $f : C \rightarrow A$, $g : C \rightarrow B$, існує розшарована сума $\sqcup(A, B, C, f, g) : \mathcal{U}$.

Означення 6. (Конструктори). Розшарована сума генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\begin{cases} \text{po}_1 : A \rightarrow \sqcup(A, B, C, f, g) \\ \text{po}_2 : B \rightarrow \sqcup(A, B, C, f, g) \\ \text{po}_3 : (c : C) \rightarrow \text{po}_1(f(c)) \equiv \text{po}_2(g(c)) \end{cases}$$

```
def  $\sqcup$  (A B C : U) (f : C  $\rightarrow$  A) (g : C  $\rightarrow$  B) : U
:= inductive { po1 (a : A)
              | po2 (b : B)
              | po3 (c : C) : po1(f(c))  $\equiv$  po2(g(c))
            }
```

Теорема 4. (Елімінація). Для типу $D : \mathcal{U}$, відображень $u : A \rightarrow D$, $v : B \rightarrow D$, і сімейства шляхів $p : (c : C) \rightarrow u(f(c)) \equiv v(g(c))$, існує відображення $\text{Ind}_{\sqcup} : \sqcup(A, B, C, f, g) \rightarrow D$, таке що:

$$\begin{cases} \text{Ind}_{\sqcup}(\text{po}_1(a)) = u(a) \\ \text{Ind}_{\sqcup}(\text{po}_2(b)) = v(b) \\ \text{Ind}_{\sqcup}(\text{po}_3(c, i)) = p(c, i) \end{cases}$$

```
def PathOver (A B C : U) (f : C  $\rightarrow$  A) (g : C  $\rightarrow$  B)
(D :  $\sqcup$  A B C f g  $\rightarrow$  U)
(c : C) (u : D (po1 (f c))) (v : D (po2 (g c))) : U
:= PathP ( $\lambda$  i, D (po3 c i)) u v

def Ind $\sqcup$  : (A B C : U) (f : C  $\rightarrow$  A) (g : C  $\rightarrow$  B)
(D :  $\sqcup$  A B C f g  $\rightarrow$  U)
(u : (a : A)  $\rightarrow$  D (po1 a))
(v : (b : B)  $\rightarrow$  D (po2 b))
(p : (c : C)  $\rightarrow$  PathOver D c (u (f c)) (v (g c)))
: (x :  $\sqcup$  A B C f g)  $\rightarrow$  D x
:= split { po1 a  $\rightarrow$  u a | po2 b  $\rightarrow$  v b | po3 c @ i  $\rightarrow$  p c @ i }
```

Теорема 5. (Обчислення). Для $x : \sqcup(A, B, C, f, g)$,

$$\begin{cases} \text{Ind}_{\sqcup}(\text{po}_1(a)) \equiv u(a) \\ \text{Ind}_{\sqcup}(\text{po}_2(b)) \equiv v(b) \\ \text{Ind}_{\sqcup}(\text{po}_3(c, i)) \equiv p(c, i) \end{cases}$$

Теорема 6. (Унікальність). Будь-які два відображення $u, v : \sqcup(A, B, C, f, g) \rightarrow D$ є гомотопними, якщо вони збігаються на po_1 , po_2 і po_3 , тобто, якщо $u(\text{po}_1(a)) = v(\text{po}_1(a))$ для всіх $a : A$, $u(\text{po}_2(b)) = v(\text{po}_2(b))$ для всіх $b : B$, і $u(\text{po}_3(c)) = v(\text{po}_3(c))$ для всіх $c : C$.

Приклад 1. (Приєднання клітини) Розшарована сума моделює приєднання n -клітини до простору X . Дано $f : S^{n-1} \rightarrow X$ і включення $g : S^{n-1} \rightarrow D^n$, розшарована сума $\sqcup(X, D^n, S^{n-1}, f, g)$ є простором $X \cup_f D^n$, що приклеює n -диск до X вздовж f .

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & X \cup_f D^n \end{array}$$

2.3 Сфери

Сфери — це вищі індуктивні типи із шляхами вищої розмірності, що представляють фундаментальні топологічні простори.

Означення 7. (Одноточкові n -Сфери) n -сфера S^n визначається рекурсивно як тип у всесвіті \mathcal{U} за допомогою загальної рекурсії за розмірностями:

$$S^n := \begin{cases} \text{point} : \mathbb{S}^n, \\ \text{surface} : \langle i_1, \dots, i_n \rangle [(i_1 = 0) \rightarrow \text{point}, (i_1 = 1) \rightarrow \text{point}, \dots \\ (i_n = 0) \rightarrow \text{point}, (i_n = 1) \rightarrow \text{point}] \end{cases}$$

Означення 8. (n -Сфери з суспензій) n -сфера S^n визначається рекурсивно як тип у всесвіті \mathcal{U} за допомогою загальної рекурсії над натуральними числами \mathbb{N} . Для кожного $n \in \mathbb{N}$, тип $S^n : \mathcal{U}$ визначається так:

$$S^n := \begin{cases} S^0 = \mathbf{2}, \\ S^{n+1} = \Sigma(S^n). \end{cases}$$

`def sphere : $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U} := \mathbb{N}\text{-iter } \mathbf{2} \ \Sigma$`

Ця ітеративна означення застосовує функтор суспензії Σ до базового типу $\mathbf{2}$ (0-сфера) n разів, щоб отримати S^n .

Приклад 2. (Сфера як CW-комплекс) n -сфера S^n може бути побудована як CW-комплекс з однією 0-клітиною та однією n -клітиною:

$$\begin{cases} X_0 = \{\text{base}\}, \text{ одна точка} \\ X_k = X_0 \text{ для } 0 < k < n, \text{ без додаткових клітин} \\ X_n : \text{Приєднання } n\text{-клітини до } X_{n-1} = \{\text{base}\} \text{ вздовж } f : S^{n-1} \rightarrow \{\text{base}\} \end{cases}$$

Конструктор `cell` приклеює межу n -клітини до базової точки, отримуючи тип S^n .

2.4 Хаб і шпиці

Конструкція хаб і шпиці \odot визначає n -відсікання, гарантуючи, що тип не має нетривіальних гомотопічних груп вище розмірності n . Вона моделює тип як CW-комплекс із хабом (центральною точкою) і спицями (шляхами до точок).

Означення 9. (Формація). Для типів $S, A : \mathcal{U}$, існує тип Хаб і шпиці $\odot (S, A) : \mathcal{U}$.

Означення 10. (Конструктори). Хаб і шпиці вільно генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{base} : A \rightarrow \odot (S, A) \\ \text{hub} : (S \rightarrow \odot (S, A)) \rightarrow \odot (S, A) \\ \text{spoke} : (f : S \rightarrow \odot (S, A)) \rightarrow (s : S) \rightarrow \text{hub}(f) \equiv f(s) \\ \text{hubEq} : (x, y : A) \rightarrow (p : S \rightarrow x \equiv y) \rightarrow \text{base}(x) \equiv \text{base}(y) \\ \text{spokeEq} : (x, y : A) \rightarrow (p : S \rightarrow x \equiv y) \rightarrow (s : S) \rightarrow \text{hubEq}(x, y, p) \equiv \text{base}(p(s)) \end{array} \right.$$

```
def  $\odot$  (S A: U) : U
:= inductive { base (x: A)
| hub (f: S  $\rightarrow$   $\odot$  S A)
| spoke (f: S  $\rightarrow$   $\odot$  S A) (s:S) : hub f  $\equiv$  f s
| hubEq (x y: A) (p: S  $\rightarrow$  x  $\equiv$  y) : base x  $\equiv$  base y
| spokeEq (x y: A) (p: S  $\rightarrow$  x  $\equiv$  y) (s: S)
: hubEq x y p  $\equiv$  base (p s)
}
```

Теорема 7. (Елімінація). Для типу $B : \mathcal{U}$, відображення $g : A \rightarrow B$, точки $h : (S \rightarrow \odot SA) \rightarrow B$, і відображень шляхів, що забезпечують когерентність, існує $\text{Ind}_{\odot} : \odot SA \rightarrow B$, таке що $\text{Ind}_{\odot}(\text{base}(x)) = g(x)$ і $\text{Ind}_{\odot}(\text{hub}(f)) = h(f)$.

2.5 Відсікання

Відсікання множин

Означення 11. (Формація). Відсікання множин (0-відсікання), позначене $\|A\|_0$, гарантує, що тип є множиною, з гомотопічними групами, що зникають вище розмірності 0.

Означення 12. (Конструктори). Для $A : \mathcal{U}$, $\|A\|_0 : \mathcal{U}$ визначається наступною вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\|_-\|_0 := \begin{cases} \text{inc} : A \rightarrow \|A\|_0 \\ \text{squash} : (a, b : \|A\|_0) \rightarrow (p, q : a \equiv b) \rightarrow p \equiv q \end{cases}$$

```
def \|_-\|_0 (A: U) : U
:= inductive { inc (a: A)
| squash (a b: \|A\|_0) (p q: Path (\|A\|_0) a b)
  <i j> [ (i = 0) -> p @ j, (i = 1) -> q @ j,
        (j = 0) -> a,      (j = 1) -> b ]
}
```

Теорема 8. (Елімінація $\|A\|_0$) Для множини $B : \mathcal{U}$ (тобто $\text{isSet}(B)$), відображення $f : A \rightarrow B$, існує $\text{setTruncRec} : \|A\|_0 \rightarrow B$, таке що $\text{Ind}_{\|A\|_0}(\text{inc}(a)) = f(a)$.

Відсікання групоїдів

Означення 13. (Формація). Відсікання групоїдів (1-відсікання), позначене $\|A\|_1$, гарантує, що тип є 1-групоїдом, з гомотопічними групами, що зникають вище розмірності 1.

Означення 14. (Конструктори). Для $A : \mathcal{U}$, $\|A\|_1 : \mathcal{U}$ визначається наступною вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\|_-\|_1 := \begin{cases} \text{inc} : A \rightarrow \|A\|_1 \\ \text{squash} : (a, b : \|A\|_1) \rightarrow (p, q : a \equiv b) \rightarrow (r, s : p \equiv q) \rightarrow r \equiv s \end{cases}$$

```
def \|_-\|_1 (A: U) : U
:= inductive { inc (a: A)
| squash (a b: \|A\|_1) (p q: Path (\|A\|_1) a b)
  (r s: Path (Path (\|A\|_1) a b) p q) <i j k>
  [ (i = 0) -> r @ j @ k, (i = 1) -> s @ j @ k,
    (j = 0) -> p @ k,      (j = 1) -> q @ k,
    (k = 0) -> a,          (k = 1) -> b ]
}
```

Теорема 9. (Елімінація $\|A\|_1$) Для 1-групоїда $B : \mathcal{U}$ (тобто $\text{isGroupoid}(B)$), відображення $f : A \rightarrow B$, існує $\text{Ind}_{\|A\|_1} : \|A\|_1 \rightarrow B$, таке що $\text{Ind}_{\|A\|_1}(\text{inc}(a)) = f(a)$.

2.6 Фактор-простори

Фактор-простори множин

Фактор-простори є потужним обчислювальним інструментом теорії типів який вбудовано в ядро Lean.

Означення 15. (Формація). Фактор-простори множин конструюють тип A , факторизований за відношенням $R : A \rightarrow A \rightarrow \mathcal{U}$, гарантуючи, що результат є множиною.

Означення 16. (Конструктори). Для типу $A : \mathcal{U}$ і відношення $R : A \rightarrow A \rightarrow \mathcal{U}$, фактор-простір множин $A/R : \mathcal{U}$ вільно генерується наступною вищою індуктивною композиційною структурою:

$$A/R := \begin{cases} \text{quot} : A \rightarrow A/R \\ \text{ident} : (a, b : A) \rightarrow Rab \rightarrow \text{quot}(a) \equiv \text{quot}(b) \\ \text{trunc} : (a, b : A/R) \rightarrow (p, q : a \equiv b) \rightarrow p \equiv q \end{cases}$$

```
def / (A: U) (R: A -> A -> U) : U
:= inductive { quot (a: A)
| ident (a b: A) (r: R a b) : quot(a) ≡ quot(b)
| trunc (a b : / A R) (p q : Path (/ A R) a b)
<i j> | (i = 0) -> p @ j , (i = 1) -> q @ j ,
(j = 0) -> a , (j = 1) -> b ]
}
```

Теорема 10. (Елімінація). Для сімейства типів $B : A/R \rightarrow \mathcal{U}$ з $\text{isSet}(Bx)$, і відображень $f : (x : A) \rightarrow B(\text{quot}(x))$, $g : (a, b : A) \rightarrow (r : R(a, b)) \rightarrow \text{PathP}(<i>i> > B(\text{ident}(a, b, r) @ i))(f(a))(f(b))$, існує $\text{Ind}_{A/R} : \Pi(x : A/R), B(x)$, таке що $\text{Ind}_{A/R}(\text{quot}(a)) = f(a)$.

Фактор-простори групоїдів

Означення 17. (Формація). Фактор-простори групоїдів розширюють фактор-простори множин для створення 1-групоїда, включаючи конструктори вищих шляхів. Фактор-простори групоїдів конструюють тип A , факторизований за відношенням $R : A \rightarrow A \rightarrow \mathcal{U}$, гарантуючи, що результат є групоїдом.

Означення 18. (Конструктори).. Для типу $A : \mathcal{U}$ і відношення $R : A \rightarrow A \rightarrow \mathcal{U}$, Фактор-простір групоїдів $A//R : \mathcal{U}$ включає конструктори для точок, шляхів і вищих шляхів, що забезпечують структуру 1-групоїда.

2.7 Букет

Букет двох точкових типів A і B , позначена $A \vee B$, є вищим індуктивним типом (НІТ), який представляє об'єднання A і B з ідентифікованими базовими точками. Топологічно вона відповідає $A \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times B$, де x_0 і y_0 — базові точки A і B , відповідно.

Означення 19. (Формація). Для точкових типів $A, B : \text{pointed}$, Букет $\text{Wedge } AB : \mathcal{U}$.

Означення 20. (Конструктори). Букет генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\begin{cases} \text{winl} : A.1 \rightarrow \text{Wedge } AB \\ \text{winr} : B.1 \rightarrow \text{Wedge } AB \\ \text{wglue} : \text{Path}_{\text{Wedge } AB}(\text{winl } A.2, \text{winr } B.2) \end{cases}$$

```
data Wedge (A : pointed) (B : pointed)
  = winl (a : A.1)
  | winr (b : B.1)
  | wglue <x> [ (x = 0) -> winl A.2 , (x = 1) -> winr B.2 ]
```

Теорема 11. (Елімінація). Для типу $C : \mathcal{U}$, відображень $f : A.1 \rightarrow C$, $g : B.1 \rightarrow C$, і шляху $p : \text{Path}_C(f(A.2), g(B.2))$, існує відображення $\text{WedgeRec} : \text{Wedge } AB \rightarrow C$, таке що:

$$\begin{cases} \text{WedgeRec}(\text{winl } a) = f(a) \\ \text{WedgeRec}(\text{winr } b) = g(b) \\ \text{WedgeRec}(\text{wglue } @x) = p @x \end{cases}$$

```
WedgeRec (A B : pointed) (C : U) (f : A.1 -> C) (g : B.1 -> C)
  (p : Path C (f A.2) (g B.2))
  : Wedge A B -> C
= split
  winl a -> f a
  winr b -> g b
  wglue @ x -> p @ x
```

Теорема 12. (Обчислення). Для $z : \text{Wedge } AB$,

$$\begin{cases} \text{WedgeRec}(\text{winl } a) \equiv f(a) \\ \text{WedgeRec}(\text{winr } b) \equiv g(b) \\ \text{WedgeRec}(\text{wglue } @x) \equiv p @x \end{cases}$$

Теорема 13. (Унікальність). Будь-які два відображення $h_1, h_2 : \text{Wedge } AB \rightarrow C$ є гомотопними, якщо вони збігаються на winl , winr і wglue , тобто, якщо $h_1(\text{winl } a) = h_2(\text{winl } a)$ для всіх $a : A.1$, $h_1(\text{winr } b) = h_2(\text{winr } b)$ для всіх $b : B.1$, і $h_1(\text{wglue}) = h_2(\text{wglue})$.

2.8 Смеш-добуток

Смеш-добуток двох точкових типів A і B , позначений $A \wedge B$, є вищим індуктивним типом, який факторизує добуток $A \times B$ за розшарованою сумою $A \sqcup B$. Він представляє простір $A \times B / (A \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times B)$, зводячи букет до однієї точки.

Означення 21. (Формація). Для точкових типів $A, B : \text{pointed}$, Смеш-добуток $\text{Smash } AB : \mathcal{U}$.

Означення 22. (Конструктори). Смеш-добуток генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\begin{cases} \text{spair} : A.1 \rightarrow B.1 \rightarrow \text{Smash } AB \\ \text{smash} : (a : A.1) \rightarrow (b : B.1) \rightarrow \text{Path}_{\text{Smash } AB}(\text{spair } a \text{ } B.2, \text{spair } A.2 \text{ } b) \\ \text{smashpt} : \text{Path}_{\text{Smash } AB}(\text{smash } A.2 \text{ } B.2, \text{spair } A.2 \text{ } B.2) \end{cases}$$

```
data Smash (A : pointed) (B : pointed)
  = spair (a : A.1) (b : B.1)
  | smash (a : A.1) (b : B.1) <x> [(x=0) -> spair a B.2, (x=1) -> spair A.2 b]
  | smashpt <x y> [(x=0) -> smash A.2 B.2 @ y,
                   (x=1) -> spair A.2 B.2,
                   (y=0) -> spair A.2 B.2,
                   (y=1) -> spair A.2 B.2]
```

Теорема 14. (Елімінація). Для типу $C : \mathcal{U}$, відображення $f : A.1 \rightarrow B.1 \rightarrow C$, шляхів $g : (a : A.1) \rightarrow (b : B.1) \rightarrow \text{Path}_C(fa \text{ } B.2, fA.2 \text{ } b)$, і 2-шляху $h : \text{Path}_{\text{Path}_{\text{Smash } AB}}(fA.2 \text{ } B.2, fA.2 \text{ } B.2)(gA.2 \text{ } B.2, \text{idp } (fA.2 \text{ } B.2))$, існує відображення $\text{SmashRec} : \text{Smash } AB \rightarrow C$, таке що:

$$\begin{cases} \text{SmashRec}(\text{spair } a \text{ } b) = f(a, b) \\ \text{SmashRec}(\text{smash } a \text{ } b @ x) = g(a, b) @ x \\ \text{SmashRec}(\text{smashpt } @ x @ y) = h @ x @ y \end{cases}$$

Теорема 15. (Обчислення). Для $z : \text{Smash } AB$,

$$\begin{cases} \text{SmashRec}(\text{spair } a \text{ } b) \equiv f(a, b) \\ \text{SmashRec}(\text{smash } a \text{ } b @ x) \equiv g(a, b) @ x \\ \text{SmashRec}(\text{smashpt } @ x @ y) \equiv h @ x @ y \end{cases}$$

Теорема 16. (Унікальність). Будь-які два відображення $h_1, h_2 : \text{Smash } AB \rightarrow C$ є гомотопними, якщо вони збігаються на spair , smash і smashpt .

Приклад 3. (Смеш-добуток сфер) Смеш-добуток $S^1 \wedge S^1$ є гомотопічно еквівалентним S^2 , оскільки він факторизує тор $S^1 \times S^1$ за клин $S^1 \vee S^1$, зводячи базові точки та їхні волокна.

2.9 З'єднання

З'єднання двох типів A і B , позначене $A * B$, є вищим індуктивним типом, який конструює тип шляхом з'єднання кожної точки A з кожною точкою B через шлях. Топологічно воно відповідає з'єднанню просторів, формуючи простір, що інтерполює між A і B .

Означення 23. (Формація). Для типів $A, B : \mathcal{U}$, з'єднання $\text{Join } AB : \mathcal{U}$.

Означення 24. (Конструктори). З'єднання генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\begin{cases} \text{joinl} : A \rightarrow \text{Join } AB \\ \text{joinr} : B \rightarrow \text{Join } AB \\ \text{join} : (a : A) \rightarrow (b : B) \rightarrow \text{Path}_{\text{Join } AB}(\text{joinl } a, \text{joinr } b) \end{cases}$$

```
data Join (A : U) (B : U)
  = joinl (a : A)
  | joinr (b : B)
  | join (a:A) (b:B) <i> [(i=0) -> joinl a, (i=1) -> joinr b]
```

Теорема 17. (Елімінація). Для типу $C : \mathcal{U}$, відображень $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow C$, і сімейства шляхів $h : (a : A) \rightarrow (b : B) \rightarrow \text{Path}_C(fa, gb)$, існує відображення $\text{JoinRec} : \text{Join } AB \rightarrow C$, таке що:

$$\begin{cases} \text{JoinRec}(\text{joinl } a) = f(a) \\ \text{JoinRec}(\text{joinr } b) = g(b) \\ \text{JoinRec}(\text{join } a b @ i) = h(a, b) @ i \end{cases}$$

```
JoinRec (A B C : U) (f : A -> C) (g : B -> C)
  (h : (a : A) -> (b : B) -> Path C (f a) (g b))
  : Join A B -> C
= split
  joinl a -> f a
  joinr b -> g b
  join a b @ i -> h a b @ i
```

Теорема 18. (Обчислення). Для $z : \text{Join } AB$,

$$\begin{cases} \text{JoinRec}(\text{joinl } a) \equiv f(a) \\ \text{JoinRec}(\text{joinr } b) \equiv g(b) \\ \text{JoinRec}(\text{join } a b @ i) \equiv h(a, b) @ i \end{cases}$$

Теорема 19. (Унікальність). Будь-які два відображення $h_1, h_2 : \text{Join } AB \rightarrow C$ є гомотопними, якщо вони збігаються на joinl , joinr і join .

Приклад 4. (З'єднання сфер) З'єднання $S^0 * S^0$ є гомотопічно еквівалентним S^1 , оскільки воно з'єднує дві точки (з кожної S^0) шляхами, формуючи структуру, подібну до кола.

2.10 Кограниця

Кограниці конструюють границю послідовності типів, з'єднаних відображеннями, наприклад, пропозиційні відсікання.

Означення 25. (Кограниця) Для послідовності типів $A : \text{nat} \rightarrow \mathcal{U}$ і відображень $f : (n : \mathbb{N}) \rightarrow A n \rightarrow A(\text{succ}(n))$, тип кограниця $\text{colimit}(A, f) : \mathcal{U}$.

$$\begin{cases} \text{ix} : (n : \text{nat}) \rightarrow A n \rightarrow \text{colimit}(A, f) \\ \text{gx} : (n : \text{nat}) \rightarrow (a : A(n)) \rightarrow \text{ix}(\text{succ}(n), f(n, a)) \equiv \text{ix}(n, a) \end{cases}$$

```
def colimit (A : nat → U) (f : (n : nat) → A n → A (succ n)) : U
:= inductive { ix (n : nat) (x : A n)
| gx (n : nat) (a : A n)
  <i> [ (i=0) → ix (succ n) (f n a),
      (i=1) → ix n a ]
}
```

Теорема 20. (Елімінація colimit) Для типу $P : \text{colimit } Af \rightarrow \mathcal{U}$, з $p : (n : \text{nat}) \rightarrow (x : A n) \rightarrow P(\text{ix}(n, x))$ і $q : (n : \text{nat}) \rightarrow (a : A n) \rightarrow \text{PathP}(\langle i \rangle P(\text{gx}(n, a) @ i))(p(\text{succ } n)(f n a))(p n a)$, існує $i : \prod_{x : \text{colimit } Af} P(x)$, таке що $i(\text{ix}(n, x)) = p n x$.

2.11 Коеквалайзери

Коеквалайзер

Коеквалайзер двох відображень $f, g : A \rightarrow B$ — це вищий індуктивний тип (НІТ), який конструює тип, що складається з елементів у B , де f і g збігаються, разом із шляхами, що забезпечують цю рівність. Це фундаментальна конструкція в теорії гомотопій, яка захоплює підпростір B , де $f(a) = g(a)$ для $a : A$.

Означення 26. (Формація). Для типів $A, B : \mathcal{U}$ і відображень $f, g : A \rightarrow B$, Коеквалайзер $\text{coe}q\ ABfg : \mathcal{U}$.

Означення 27. (Конструктори). Коеквалайзер генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою: $\text{Coe}q(A, B, f, g) :=$

$$\begin{cases} \text{inC} : B \rightarrow \text{Coe}q(A, B, f, g) \\ \text{glueC} : (a : A) \rightarrow \text{Path}_{\text{coe}q\ ABfg}(\text{inC}(fa), \text{inC}(ga)) \end{cases}$$

```
def Coeq (A B: U) (f g: A → B) : U
:= inductive { inC (b: B)
              | glueC (a: A) : inC (f a) ≡ inC (g a)
            }
```

Теорема 21. (Елімінація). Для типу $C : \mathcal{U}$, відображення $h : B \rightarrow C$, і сімейства шляхів $y : (x : A) \rightarrow \text{Path}_C(h(fx), h(gx))$, існує відображення $\text{coe}q\text{Rec} : \text{coe}q\ ABfg \rightarrow C$, таке що:

$$\begin{cases} \text{coe}q\text{Rec}(\text{inC } x) = h(x) \\ \text{coe}q\text{Rec}(\text{glueC } x @ i) = y(x) @ i \end{cases}$$

```
coe}qRec (A B C : U) (f g : A → B) (h: B → C) (y: (x : A) → Path C (h (f x)) (h (g x)))
: (z : coeq A B f g) → C
= split
  inC x → h x
  glueC x @ i → y x @ i
```

Теорема 22. (Обчислення). Для $z : \text{coe}q\ ABfg$,

$$\begin{cases} \text{coe}q\text{Rec}(\text{inC } x) \equiv h(x) \\ \text{coe}q\text{Rec}(\text{glueC } x @ i) \equiv y(x) @ i \end{cases}$$

Теорема 23. (Унікальність). Будь-які два відображення $h_1, h_2 : \text{coe}q\ ABfg \rightarrow C$ є гомотопними, якщо вони збігаються на inC і glueC , тобто, якщо $h_1(\text{inC } x) = h_2(\text{inC } x)$ для всіх $x : B$ і $h_1(\text{glueC } a) = h_2(\text{glueC } a)$ для всіх $a : A$.

Приклад 5. (Коеквалайзер як підпростір) Коеквалайзер $\text{coe}q\ ABfg$ представляє підпростір B , де $f(a) = g(a)$. Наприклад, якщо $A = B = \mathbb{R}$ і $f(x) = x^2, g(x) = x$, Коеквалайзер захоплює точки, де $x^2 = x$, тобто $\{0, 1\}$.

Коеквалайзер шляхів

Коеквалайзер шляхів — це вищий індуктивний тип, який узагальнює Коеквалайзер для роботи з парами шляхів у B . Дано відображення $p : A \rightarrow (b_1, b_2 : B) \times (\text{Path}_B(b_1, b_2)) \times (\text{Path}_B(b_1, b_2))$, він конструює тип, де елементи A породжують пари шляхів між точками в B , із шляхами, що з'єднують кінцеві точки цих шляхів.

Означення 28. (Формація). Для типів $A, B : \mathcal{U}$ і відображення $p : A \rightarrow (b_1, b_2 : B) \times (b_1 \equiv b_2) \times (b_1 \equiv b_2)$, існує коеквалайзер шляхів $\text{Coeq}_{\equiv}(A, B, p) : \mathcal{U}$.

Означення 29. (Конструктори). Коеквалайзер шляхів генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\begin{cases} \text{inP} : B \rightarrow \text{Coeq}_{\equiv}(A, B, p) \\ \text{glueP} : (a : A) \rightarrow \text{inP}(p(a).2.2.1@0) \equiv \text{inP}(p(a).2.2.2@1) \end{cases}$$

```
data Coeq≡ (A B : U) (p : A → Σ (b1 b2 : B), b1 ≡ b2 × b1 ≡ b2)
  = inP (b : B)
  | glueP (a : A) <i> [(i=0) → inP ((p a).2.2.1 @ 0),
                     (i=1) → inP ((p a).2.2.2 @ 1)]
```

Теорема 24. (Елімінація). Для типу $C : \mathcal{U}$, відображення $h : B \rightarrow C$, і сімейства шляхів $y : (a : A) \rightarrow h(p(a).2.2.1@0) \equiv h(p(a).2.2.2@1)$, існує відображення $\text{Ind-Coeq}_{\equiv} : \text{Coeq}_{\equiv}(A, B, p) \rightarrow C$, таке що:

$$\begin{cases} \text{coeqPRec}(\text{inP}(b)) = h(b) \\ \text{coeqPRec}(\text{glueP}(a, i)) = y(a, i) \end{cases}$$

```
def Ind-Coeq≡ (A B C : U)
  (p : A → Σ (b1 b2 : B) (x : Path B b1 b2), Path B b1 b2)
  (h : B → C) (y : (a : A) → Path C (h ((p a).2.2.1 @ 0)) (h ((p a).2.2.2 @ 1)))
  : (z : coeqP A B p) → C
:= split { inP b → h b | glueP a @ i → y a @ i }
```

Теорема 25. (Обчислення). Для $z : \text{coeqP } ABp$,

$$\begin{cases} \text{coeqPRec}(\text{inP } b) \equiv h(b) \\ \text{coeqPRec}(\text{glueP } a @ i) \equiv y(a) @ i \end{cases}$$

Теорема 26. (Унікальність). Будь-які два відображення $h_1, h_2 : \text{coeqP } ABp \rightarrow C$ є гомотопними, якщо вони збігаються на inP і glueP , тобто, якщо $h_1(\text{inP } b) = h_2(\text{inP } b)$ для всіх $b : B$ і $h_1(\text{glueP } a) = h_2(\text{glueP } a)$ для всіх $a : A$.

Приклад 6. (Шляховий Коеквалайзер для гомотопії) Шляховий Коеквалайзер може моделювати простори, де елементи A задають пари шляхів між точками в B . Наприклад, якщо $p(a)$ надає два шляхи від b_1 до b_2 у B , coeqP конструює тип, що з'єднує початкові та кінцеві точки цих шляхів, корисний для вивчення гомотопічних класів.

2.12 $K(G, n)$

Простори Ейленберга-МакЛейна $K(G, n)$ мають єдину нетривіальну гомотопічну групу $\pi_n(K(G, n)) = G$. Вони визначаються за допомогою відсікань і суспензій.

Означення 30. ($K(G, n)$) Для абелевої групи $G : \text{abgroup}$, тип $KGnG : \text{nat} \rightarrow \mathcal{U}$.

$$\begin{cases} n = 0 : \text{discreteTopology}(G) \\ n \geq 1 : \text{succ}(n) = \text{nTrunc}(\text{suspension}(K1'(G.1, G.2.1))n)(\text{succ}n) \end{cases}$$

```
KGn (G: abgroup)
  : nat -> U
= split
  zero -> discreteTopology G
  succ n -> nTrunc (suspension (K1' (G.1, G.2.1)) n) (succ n)
```

Теорема 27. (Елімінація KGn) Для $n \geq 1$, типу $B : \mathcal{U}$ з $\text{isNGroupoid}(B, \text{succ } n)$, і відображення $f : \text{suspension}(K1'G) \rightarrow B$, існує $\text{rec}_{KGn} : KGnG(\text{succ } n) \rightarrow B$, визначене через nTruncRec .

2.13 Локалізація

Локалізація конструює F -локальний тип із типу X , щодо сімейства відображень $F_A : S(a) \rightarrow T(a)$.

Означення 31. (Модальність локалізації) Для сімейства відображень $F_A : S(a) \rightarrow T(a)$, F -локалізація $L_F^{AST}(X) : \mathcal{U}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{center} : X \rightarrow L_{F_A}(X) \\ \text{ext} : (a : A) \rightarrow (S(a) \rightarrow L_{F_A}(X)) \rightarrow T(a) \rightarrow L_{F_A}(X) \\ \text{isExt} : (a : A) \rightarrow (f : S(a) \rightarrow L_{F_A}(X)) \rightarrow (s : S(a)) \rightarrow \text{Path}_{L_{F_A}(X)}(\text{ext } af(Fas), fs) \\ \text{extEq} : (a : A) \rightarrow (g, h : T(a) \rightarrow L_{F_A}(X)) \rightarrow (p : (s : S(a)) \rightarrow \text{Path}_{L_{F_A}(X)}(g(Fas), h(Fas))) \rightarrow (t : T(a)) \rightarrow 1 \\ \text{isExtEq} : (a : A) \rightarrow (g, h : T(a) \rightarrow L_{F_A}(X)) \rightarrow (p : (s : S(a)) \rightarrow \text{Path}_{L_{F_A}(X)}(g(Fas), h(Fas))) \rightarrow (s : S(a)) \rightarrow 1 \end{array} \right.$$

```
data Localize (A X: U) (S T: A → U) (F : (x:A) → S x → T x)
= center (x: X)
| ext (a: A) (f: S a → Localize A X S T F) (t: T a)
| isExt (a: A) (f: S a → Localize A X S T F) (s: S a) <i>
  [ (i=0) → ext a f (F a s) , (i=1) → f s ]
| extEq (a: A) (g h: T a → Localize A X S T F)
  (p: (s : S a) → Path (Localize A X S T F) (g (F a s)) (h (F a s)))
  (t : T a) <i> [ (i=0) → g t , (i=1) → h t ]
| isExtEq (a: A) (g h : T a → Localize A X S T F)
  (p: (s : S a) → Path (T a → Localize A X S T F) (g (F a s)) (h (F a s)))
  (s : S a) <i> [ (i=0) → extEq a g h p (F a s) , (i=1) → p s ]
```

Теорема 28. (Індукція локалізації) Для будь-якого $P : \Pi_{X:U} L_{F_A}(X) \rightarrow U$ з $\{n, r, s\}$, що задовольняють умови когерентності, існує $i : \Pi_{x:L_{F_A}(X)} P(x)$, таке що $i \cdot \text{center}_X = n$.

3 Висновок

НІТ безпосередньо кодують CW-комплекси в НоТТ, поєднуючи топологію і теорію типів. За допомогою них відбувається аналіз і робота з гомотопічними типами.

Література

- [1] The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, IAS, 2013.
- [2] C. Cohen, T. Coquand, S. Huber, A. Mörtberg, *Cubical Type Theory*, Journal of Automated Reasoning, 2018.
- [3] A. Mörtberg et al., *Agda Cubical Library*, <https://github.com/agda/cubical>, 2023.
- [4] M. Shulman, *Higher Inductive Types in HoTT*, <https://arxiv.org/abs/1705.07088>, 2017.
- [5] J. D. Christensen, M. Opie, E. Rijke, L. Scoccola, *Localization in Homotopy Type Theory*, <https://arxiv.org/pdf/1807.04155.pdf>, 2018.
- [6] E. Rijke, M. Shulman, B. Spitters, *Modalities in Homotopy Type Theory*, <https://arxiv.org/pdf/1706.07526v6.pdf>, 2017.
- [7] M. Riley, E. Finster, D. R. Licata, *Synthetic Spectra via a Monadic and Comonadic Modality*, <https://arxiv.org/pdf/2102.04099.pdf>, 2021.