

Issue XXVIII: Categories with Families

Максим Сохацький¹

¹ Національний технічний університет України
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського
29 квітня 2025 р.

Анотація

Категорійна семантика залежної теорії типів.

Ключові слова: теорія категорій, категорії з сім'ями, залежна теорія типів

Зміст

1 Категорії з сім'ями	2
1.1 Основні визначення	2
1.2 Семантика залежної теорії типів	3
1.3 Формалізація в Anders	4
1.4 Висновки	5

1 Категорії з сім'ями

Тут подано короткий неформальний опис категорійної семантики залежної теорії типів, запропонований Пітером Диб'єром. Категоріальна абстрактна машина Диб'єра на Haskell описана тут¹.

1.1 Основні визначення

Визначення 1.1 (Fam). Категорія Fam — це категорія сімей множин, де об'єкти є залежними функціональними просторами $(x : A) \rightarrow B(x)$, а морфізми з доменом $\Pi(A, B)$ і кодоменом $\Pi(A', B')$ — це пари функцій $\langle f : A \rightarrow A', g(x : A) : B(x) \rightarrow B'(f(x)) \rangle$.

Визначення 1.2 (П-похідність). Для контексту Γ і типу A позначимо $\Gamma \vdash A = (\gamma : \Gamma) \rightarrow A(\gamma)$.

Визначення 1.3 (Σ -охоплення). Для контексту Γ і типу A маємо $\Gamma; A = (\gamma : \Gamma) * A(\gamma)$. Охоплення не є асоціативним:

$$\Gamma; A; B \neq \Gamma; B; A$$

Визначення 1.4 (Контекст). Категорія контекстів C — це категорія, де об'єкти є контекстами, а морфізми — підстановками. Термінальний об'єкт $\Gamma = 0$ у C називається порожнім контекстом. Операція охоплення контексту $\Gamma; A = (x : \Gamma) * A(x)$ має елімінатори: $p : \Gamma; A \vdash \Gamma$, $q : \Gamma; A \vdash A(p)$, що задовольняють універсальну властивість: для будь-якого $\Delta : ob(C)$, морфізму $\gamma : \Delta \rightarrow \Gamma$ і терму $a : \Delta \rightarrow A$ існує єдиний морфізм $\theta = \langle \gamma, a \rangle : \Delta \rightarrow \Gamma; A$, такий що $p \circ \theta = \gamma$ і $q(\theta) = a$. Твердження: підстановка є асоціативною:

$$\gamma(\gamma(\Gamma, x, a), y, b) = \gamma(\gamma(\Gamma, y, b), x, a)$$

Визначення 1.5 (CwF-об'єкт). CwF-об'єкт — це пара $\Sigma(C, C \rightarrow Fam)$, де C — категорія контекстів з об'єктами-контекстами та морфізмами-підстановками, а $T : C \rightarrow Fam$ — функтор, який відображає контекст Γ у C на сім'ю множин термів $\Gamma \vdash A$, а підстановку $\gamma : \Delta \rightarrow \Gamma$ — на пару функцій, що виконують підстановку γ у термах і типах відповідно.

Визначення 1.6 (CwF-морфізм). Нехай $(C, T) : ob(C)$, де $T : C \rightarrow Fam$. CwF-морфізм $m : (C, T) \rightarrow (C', T')$ — це пара $\langle F : C \rightarrow C', \sigma : T \rightarrow T'(F) \rangle$, де F — функтор, а σ — натуральна трансформація.

Визначення 1.7 (Категорія типів). Для CwF з об'єктами (C, T) і морфізмами $(C, T) \rightarrow (C', T')$, для заданого контексту $\Gamma \in Ob(C)$ можна побудувати категорію $Type(\Gamma)$ — категорію типів у контексті Γ , де об'єкти — множина типів у контексті, а морфізми — функції $f : \Gamma; A \rightarrow B(p)$.

¹<https://www.cse.chalmers.se/~peterd/papers/Ise2008.pdf>

1.2 Семантика залежної теорії типів

Визначення 1.8 (Терми та типи). У CwF для контексту Γ терми $\Gamma \vdash a : A$ є елементами множини $A(\gamma)$, де $\gamma : \Gamma$. Типи $\Gamma \vdash A$ є об'єктами в $\text{Type}(\Gamma)$, а підстановка $\gamma : \Delta \rightarrow \Gamma$ діє на типи та терми через функтор T .

Теорема 1.1 (Композиція підстановок). Підстановки в категорії контекстів \mathcal{C} є асоціативними та мають одиницю (ідентичну підстановку). Формально, для $\gamma : \Delta \rightarrow \Gamma$, $\delta : \Theta \rightarrow \Delta$ і $\epsilon : \Gamma \rightarrow \Lambda$ виконується:

$$(\gamma \circ \delta) \circ \epsilon = \gamma \circ (\delta \circ \epsilon), \quad id_\Gamma \circ \gamma = \gamma, \quad \gamma \circ id_\Delta = \gamma.$$

Доведення. Асоціативність випливає з універсальної властивості охоплення контексту (Визначення 1.4). Для будь-яких γ, δ, ϵ композиція морфізмів у \mathcal{C} відповідає послідовному застосуванню підстановок, що зберігає структуру контекстів. Ідентична підстановка id_Γ діє як нейтральний елемент, оскільки $p \circ id_\Gamma = id_\Gamma$ і $q(id_\Gamma) = q$. \square

Визначення 1.9 (Залежні типи). Залежний тип у контексті Γ — це відображення $\Gamma \rightarrow \text{Fam}$, де для кожного $\gamma : \Gamma$ задається множина $A(\gamma)$. У категорії $\text{Type}(\Gamma)$ залежні типи є об'єктами, а морфізми між A і B — це функції $f : \Gamma; A \rightarrow B(p)$, що зберігають структуру підстановок.

Теорема 1.2 (Універсальна властивість залежних типів). Для будь-якого контексту Γ , типу A і терму $a : \Gamma \vdash A$ існує унікальний морфізм $\theta : \Gamma \rightarrow \Gamma; A$, який задовольняє $p \circ \theta = id_\Gamma$ і $q(\theta) = a$. Це забезпечує коректність залежної типізації в CwF .

Доведення. За Визначенням 1.4, універсальна властивість охоплення контексту гарантує існування $\theta = \langle id_\Gamma, a \rangle$. Унікальність випливає з того, що будь-який інший морфізм θ' з тими ж властивостями ($p \circ \theta' = id_\Gamma$, $q(\theta') = a$) збігається з θ через єдиність композиції в \mathcal{C} . \square

1.3 Формалізація в Anders

Для формалізації CwF у Agda чи Lean необхідно визначити категорію \mathcal{C} як запис із полями для об'єктів, морфізмів, композиції та ідентичності, а також функтор $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Fam}$. Нижче наведено псевдокод для Anders²:

```
def algebra : U1 :=  $\Sigma$ 
  — a semicategory of contexts and substitutions:
  (Con: U)
  (Sub: Con  $\rightarrow$  Con  $\rightarrow$  U)
  ( $\diamond$ :  $\Pi$  ( $\Gamma \Theta \Delta$  : Con), Sub  $\Theta \Delta \rightarrow$  Sub  $\Gamma \Theta \rightarrow$  Sub  $\Gamma \Delta$ )
  ( $\diamond$ -assoc:  $\Pi$  ( $\Gamma \Theta \Delta \Phi$  : Con) ( $\sigma$ : Sub  $\Gamma \Theta$ ) ( $\delta$ : Sub  $\Theta \Delta$ )
    ( $\nu$ : Sub  $\Delta \Phi$ ), PathP ( $\_$ Sub  $\Gamma \Phi$ ) ( $\diamond$   $\Gamma \Delta \Phi \nu$  ( $\diamond$   $\Gamma \Theta \Delta \delta \sigma$ ))
    ( $\diamond$   $\Gamma \Theta \Phi$  ( $\diamond$   $\Theta \Delta \Phi \nu \delta$ )  $\sigma$ ))
  — identity morphisms as identity substitutions:
  (id:  $\Pi$  ( $\Gamma$  : Con), Sub  $\Gamma \Gamma$ )
  (id-left:  $\Pi$  ( $\Theta \Delta$  : Con) ( $\delta$  : Sub  $\Theta \Delta$ ),
    Path (Sub  $\Theta \Delta$ )  $\delta$  ( $\diamond$   $\Theta \Delta \Delta$  (id  $\Delta$ )  $\delta$ ))
  (id-right:  $\Pi$  ( $\Theta \Delta$  : Con) ( $\delta$  : Sub  $\Theta \Delta$ ),
    Path (Sub  $\Theta \Delta$ )  $\delta$  ( $\diamond$   $\Theta \Theta \Delta \delta$  (id  $\Theta$ )))
  — a terminal object as empty context:
  ( $\bullet$ : Con)
  ( $\varepsilon$ :  $\Pi$  ( $\Gamma$  : Con), Sub  $\Gamma \bullet$ )
  ( $\bullet$ - $\eta$ :  $\Pi$  ( $\Gamma$ : Con) ( $\delta$ : Sub  $\Gamma \bullet$ ), Path (Sub  $\Gamma \bullet$ ) ( $\varepsilon$   $\Gamma$ )  $\delta$ )
  (Ty: Con  $\rightarrow$  U)
  ( $\_|\_$ |T:  $\Pi$  ( $\Gamma \Delta$  : Con), Ty  $\Delta \rightarrow$  Sub  $\Gamma \Delta \rightarrow$  Ty  $\Gamma$ )
  ( $|id|$ |T:  $\Pi$  ( $\Delta$  : Con) ( $A$  : Ty  $\Delta$ ), Path (Ty  $\Delta$ ) ( $\_|\_$ |T  $\Delta \Delta A$  (id  $\Delta$ ))  $A$ )
  ( $| \diamond |$ |T:  $\Pi$  ( $\Gamma \Delta \Phi$ : Con) ( $A$  : Ty  $\Phi$ ) ( $\sigma$  : Sub  $\Gamma \Delta$ ) ( $\delta$  : Sub  $\Delta \Phi$ ),
    PathP ( $\_$ Ty  $\Gamma$ ) ( $\_|\_$ |T  $\Gamma \Phi A$  ( $\diamond$   $\Gamma \Delta \Phi \delta \sigma$ ))
    ( $\_|\_$ |T  $\Gamma \Delta$  ( $\_|\_$ |T  $\Delta \Phi A \delta$ )  $\sigma$ ))
  — a (covariant) presheaf on the category of elements as terms:
  (Tm:  $\Pi$  ( $\Gamma$  : Con), Ty  $\Gamma \rightarrow$  U)
  ( $\_|\_$ |t:  $\Pi$  ( $\Gamma \Delta$  : Con) ( $A$  : Ty  $\Delta$ ) ( $B$  : Tm  $\Delta A$ )
    ( $\sigma$ : Sub  $\Gamma \Delta$ ), Tm  $\Gamma$  ( $\_|\_$ |T  $\Gamma \Delta A \sigma$ ))
  ( $|id|$ |t:  $\Pi$  ( $\Delta$  : Con) ( $A$  : Ty  $\Delta$ ) ( $t$ : Tm  $\Delta A$ ),
    PathP ( $\langle i \rangle$  Tm  $\Delta$  ( $|id|$ |T  $\Delta A @ i$ ))
    ( $\_|\_$ |t  $\Delta \Delta A t$  (id  $\Delta$ ))  $t$ )
  ( $| \diamond |$ |t:  $\Pi$  ( $\Gamma \Delta \Phi$ : Con) ( $A$  : Ty  $\Phi$ ) ( $t$ : Tm  $\Phi A$ )
    ( $\sigma$  : Sub  $\Gamma \Delta$ ) ( $\delta$  : Sub  $\Delta \Phi$ ),
    PathP ( $\langle i \rangle$  Tm  $\Gamma$  ( $| \diamond |$ |T  $\Gamma \Delta \Phi A \sigma \delta @ i$ ))
    ( $\_|\_$ |t  $\Gamma \Phi A t$  ( $\diamond$   $\Gamma \Delta \Phi \delta \sigma$ ))
    ( $\_|\_$ |t  $\Gamma \Delta$  ( $\_|\_$ |T  $\Delta \Phi A \delta$ ) ( $\_|\_$ |t  $\Delta \Phi A t \delta$ )  $\sigma$ ))
```

Ця структура дозволяє реалізувати Визначення 1.1–1.11, а Теореми 1.10 і 1.12 доводяться через перевірку асоціативності та універсальних властивостей.

²<https://anders.groupoid.space/lib/mathematics/categories/meta/kraus.anders>

1.4 Висновки

Категорії з сім'ями (CwF) є потужним інструментом для моделювання залежної теорії типів. Вони забезпечують чітку семантику для контекстів, підстановок і залежних типів, що полегшує аналіз і формалізацію.