

# Випуск IV: Вищі індуктивні типи

Максим Сохацький<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Національний технічний університет України

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського

4 травня 2019

## Анотація

SW-комплекси є ключовими як в теорії гомотопій так і в теорії гомотопічних типів (HoTT) і кодуються в кубічних системах доведення теорем як вищі індуктивні типи (НІТ) подібно до рекурсивних дерев для (ко)індуктивних типів. Ми досліджуємо базові приміти гомотопічної теорії, які розглядаються як фундаційний базис в системах доведення теорем.

**Ключові слова:** Теорія гомотопій, Теорія типів

## Зміст

<b>1</b>	<b>SW-комплекси</b>	<b>2</b>
1.1	Мотивація вищих індуктивних типів . . . . .	3
1.2	НІТ зі зліченими конструкторами . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Вищі індуктивні типи</b>	<b>3</b>
2.1	Суспензія . . . . .	4
2.2	Розшарована сума . . . . .	5
2.3	Сфери . . . . .	6
2.4	Хаб і шпиці . . . . .	7
2.5	Відсікання . . . . .	8
2.6	Фактор-простори . . . . .	9
2.7	Букет . . . . .	10
2.8	Смеш-добуток . . . . .	11
2.9	З'єднання . . . . .	12
2.10	Кограниця . . . . .	13
2.11	Коеквалайзери . . . . .	14
2.12	$K(G, n)$ . . . . .	16
2.13	Локалізація . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Висновок</b>	<b>17</b>

## 1 CW-комплекси

CW-комплекси — це простори, побудовані шляхом приєднання клітин різних розмірностей. У HoTT вони кодуються як вищі індуктивні типи (HIT), де клітини є конструкторами для точок і шляхів.

**Означення 1.** (Приєднання клітини). Приєднання  $n$ -клітини до простору  $X$  вздовж  $f : S^{n-1} \rightarrow X$  є розширеною сумою:

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \iota & & \downarrow j \\ D^n & \xrightarrow{g} & X \cup_f D^n \end{array}$$

Тут  $\iota : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  — включення межі, а  $X \cup_f D^n$  — розширена сума, що приклеює  $n$ -клітину до  $X$  через  $f$ . Результат залежить від гомотопічного класу  $f$ .

**Означення 2.** (CW-комплекс). CW-комплекс — це простір  $X$ , побудований індуктивно шляхом приєднання клітин, із скелетною фільтрацією:

- $(-1)$ -скелет:  $X_{-1} = \emptyset$ .
- Для  $n \geq 0$ ,  $n$ -скелет  $X_n$  отримується приєднанням  $n$ -клітин до  $X_{n-1}$ . Для індексів  $J_n$  та відображень  $\{f_j : S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}\}_{j \in J_n}$ ,  $X_n$  є розширеною сумою:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{j \in J_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod f_j} & X_{n-1} \\ \downarrow \coprod \iota_j & & \downarrow i_n \\ \coprod_{j \in J_n} D^n & \xrightarrow{\coprod g_j} & X_n \end{array}$$

де  $\coprod_{j \in J_n} S^{n-1}$ ,  $\coprod_{j \in J_n} D^n$  — диз'юнктні об'єднання, а  $i_n : X_{n-1} \hookrightarrow X_n$  — включення.

- $X$  — кограниця:

$$\emptyset = X_{-1} \hookrightarrow X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X,$$

де  $X_n$  —  $n$ -скелет, а  $X = \operatorname{colim}_{n \rightarrow \infty} X_n$ . Послідовність є скелетною фільтрацією.

У HoTT CW-комплекси є вищими індуктивними типами (HIT) із конструкторами для клітин і шляхів для приклеювання.

## 1.1 Мотивація вищих індуктивних типів

НІТ у HoTT дозволяють безпосередньо кодувати топологічні простори, такі як CW-комплекси. У теорії гомотопій простори будуються шляхом приклеювання клітин через відображення приєднання. HoTT розглядає типи як простори, елементи як точки, а рівності як шляхи, що робить НІТ природним вибором. Стандартні індуктивні типи не можуть захопити вищі гомотопії, але НІТ дозволяють конструктори для точок і шляхів. Наприклад, коло  $S^1$  (Означення 2) має базову точку і петлю, кодуючи його фундаментальну групу  $\mathbb{Z}$ . НІТ уникають використання множинних фактор-просторів, зберігаючи синтетичну природу HoTT. У кубічній теорії типів шляхи є інтервалами (наприклад,  $< i >$ ) з обчислювальним змістом, на відміну від пропозиційних рівностей, що забезпечує ефективну перевірку типів у таких інструментах, як Agda Cubical.

## 1.2 НІТ зі зліченими конструкторами

Деякі НІТ потребують нескінченної кількості конструкторів для просторів, таких як простори Ейленберга-МакЛейна або нескінченна сфера  $S^\infty$ .

```
def S∞ : U
:= inductive { base
              | loop (n: ℕ) : base ≡ base
              }
```

Виклики включають перевірку типів, обчислення та виразність.

Agda Cubical використовує кубічні примітиви для роботи з НІТ, підтримуючи нескінченні конструктори через НІТ індексовані натуральними числами, як кограниці.

## 2 Вищі індуктивні типи

CW-комплекси є центральними в HoTT і з'являються в кубічних перевірниках типів як НІТ. На відміну від індуктивних типів (рекурсивних дерев), НІТ кодують CW-комплекси, захоплюючи точки (0-клітини) та вищі шляхи (n-клітини). Означення НІТ визначає CW-комплекс через кубічну композицію, початкову алгебру в кубічній моделі.

## 2.1 Суспензія

Суспензія  $\Sigma A$  типу  $A$  — це вищий індуктивний тип, який конструює новий тип, додаючи дві точки, звані полюсами, і шляхи, що з'єднують кожну точку  $A$  з цими полюсами. Це фундаментальна конструкція в теорії гомотопій, яка часто використовується для зсуву гомотопічних груп, наприклад, для отримання  $S^{n+1}$  з  $S^n$ .

**Означення 3.** (Формація) Для типу  $A : \mathcal{U}$ , суспензія  $\Sigma A : \mathcal{U}$  генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\begin{cases} \text{north} \\ \text{south} \\ \text{merid} : (a : A) \rightarrow \text{north} \equiv \text{south} \end{cases}$$

**Означення 4.** (Конструктори)

```
def Σ (A: U) : U
:= inductive { north
              | south
              | merid (a: A) : north ≡ south
              }
```

**Теорема 1.** (Елімінація) Для сімейства типів  $B : \Sigma A \rightarrow \mathcal{U}$ , точок  $n : B(\text{north})$ ,  $s : B(\text{south})$ , і сімейства залежних шляхів

$$m : \Pi(a : A), \text{PathOver}(B, \text{merid}(a), n, s),$$

існує залежне відображення  $\text{Ind}_{\Sigma A} : (x : \Sigma A) \rightarrow B(x)$ , таке що:

$$\begin{cases} \text{Ind}_{\Sigma A}(\text{north}) = n \\ \text{Ind}_{\Sigma A}(\text{south}) = s \\ \text{Ind}_{\Sigma A}(\text{merid}(a, i)) = m(a, i) \end{cases}$$

```
def PathOver (B: Σ A → U) (a: A) (n: B north) (s: B south) : U
:= PathP (λ i , B (merid a @ i)) n s
```

```
def IndΣA (A: U) (B: Σ A → U) (n: B north) (s: B south)
(m: (a: A) → PathOver B (merid a) n s) : (x: Σ A) → B x
:= split { north → n | south → s | merid a @ i → m a @ i }
```

**Теорема 2.** (Обчислення)

```
def Σ-β (A: U) (B: Σ A → U) (n: B north) (s: B south)
(m: (a: A) → PathOver B (merid a) n s) (x: Σ A)
: Path (B x) (Σ-I A B n s m x)
split { north → n | south → s | merid a @ i → m a @ i } x
= idp (B x) (IndΣA A B n s m x)
```

**Теорема 3.** (Унікальність) Будь-які два відображення  $h_1, h_2 : (x : \Sigma A) \rightarrow B(x)$  є гомотопними, якщо вони збігаються на  $\text{north}$ ,  $\text{south}$  і  $\text{merid}$ , тобто, якщо  $h_1(\text{north}) = h_2(\text{north})$ ,  $h_1(\text{south}) = h_2(\text{south})$ , і  $h_1(\text{merid } a) = h_2(\text{merid } a)$  для всіх  $a : A$ .

## 2.2 Розшарована сума

Розшарована сума (амальгама) — це вищий індуктивний тип, що конструює тип шляхом склеювання двох типів  $A$  і  $B$  вздовж спільного типу  $C$  через відображення  $f : C \rightarrow A$  і  $g : C \rightarrow B$ . Це фундаментальна конструкція в теорії гомотопій, використовується для моделювання приєднання клітин і кофібрантних об'єктів, узагальнюючи топологічне поняття розшарованої суми.

**Означення 5.** (Формація) Для типів  $A, B, C : \mathcal{U}$  і відображень  $f : C \rightarrow A$ ,  $g : C \rightarrow B$ , існує розшарована сума  $\sqcup(A, B, C, f, g) : \mathcal{U}$ .

**Означення 6.** (Конструктори) Розшарована сума генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\begin{cases} \text{po}_1 : A \rightarrow \sqcup(A, B, C, f, g) \\ \text{po}_2 : B \rightarrow \sqcup(A, B, C, f, g) \\ \text{po}_3 : (c : C) \rightarrow \text{po}_1(f(c)) \equiv \text{po}_2(g(c)) \end{cases}$$

```
def  $\sqcup$  (A B C : U) (f : C  $\rightarrow$  A) (g : C  $\rightarrow$  B) : U
:= inductive {
  | po1 (a : A)
  | po2 (b : B)
  | po3 (c : C) : po1(f(c))  $\equiv$  po2(g(c))
}
```

**Теорема 4.** (Елімінація) Для типу  $D : \mathcal{U}$ , відображень  $u : A \rightarrow D$ ,  $v : B \rightarrow D$ , і сімейства шляхів  $p : (c : C) \rightarrow u(f(c)) \equiv v(g(c))$ , існує відображення  $\text{Ind}_{\sqcup} : \sqcup(A, B, C, f, g) \rightarrow D$ , таке що:

$$\begin{cases} \text{Ind}_{\sqcup}(\text{po}_1(a)) = u(a) \\ \text{Ind}_{\sqcup}(\text{po}_2(b)) = v(b) \\ \text{Ind}_{\sqcup}(\text{po}_3(c, i)) = p(c, i) \end{cases}$$

```
def PathOver (A B C : U) (f : C  $\rightarrow$  A) (g : C  $\rightarrow$  B)
  (D :  $\sqcup$  A B C f g  $\rightarrow$  U)
  (c : C) (u : D (po1 (f c))) (v : D (po2 (g c))) : U
:= PathP ( $\lambda$  i, D (po3 c i)) u v

def Ind $\sqcup$  : (A B C : U) (f : C  $\rightarrow$  A) (g : C  $\rightarrow$  B)
  (D :  $\sqcup$  A B C f g  $\rightarrow$  U)
  (u : (a : A)  $\rightarrow$  D (po1 a))
  (v : (b : B)  $\rightarrow$  D (po2 b))
  (p : (c : C)  $\rightarrow$  PathOver D c (u (f c)) (v (g c)))
  : (x :  $\sqcup$  A B C f g)  $\rightarrow$  D x
:= split { po1 a  $\rightarrow$  u a | po2 b  $\rightarrow$  v b | po3 c @ i  $\rightarrow$  p c @ i }
```

**Теорема 5.** (Обчислення) Для  $x : \sqcup(A, B, C, f, g)$ ,

$$\begin{cases} \text{Ind}_{\sqcup}(\text{po}_1(a)) \equiv u(a) \\ \text{Ind}_{\sqcup}(\text{po}_2(b)) \equiv v(b) \\ \text{Ind}_{\sqcup}(\text{po}_3(c, i)) \equiv p(c, i) \end{cases}$$

**Теорема 6.** (Унікальність) Будь-які два відображення  $u, v : \sqcup(A, B, C, f, g) \rightarrow D$  є гомотопними, якщо вони збігаються на  $\text{po}_1$ ,  $\text{po}_2$  і  $\text{po}_3$ , тобто, якщо  $u(\text{po}_1(a)) = v(\text{po}_1(a))$  для всіх  $a : A$ ,  $u(\text{po}_2(b)) = v(\text{po}_2(b))$  для всіх  $b : B$ , і  $u(\text{po}_3(c)) = v(\text{po}_3(c))$  для всіх  $c : C$ .

**Приклад 1.** (Приєднання клітини) Розшарована сума моделює приєднання  $n$ -клітини до простору  $X$ . Дано  $f : S^{n-1} \rightarrow X$  і включення  $g : S^{n-1} \rightarrow D^n$ , розшарована сума  $\sqcup(X, D^n, S^{n-1}, f, g)$  є простором  $X \cup_f D^n$ , що приклеює  $n$ -диск до  $X$  вздовж  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & X \cup_f D^n \end{array}$$

## 2.3 Сфери

Сфери — це вищі індуктивні типи із шляхами вищої розмірності, що представляють фундаментальні топологічні простори.

**Означення 7.** (Точкові  $n$ -сфери)  $n$ -сфера  $S^n$  визначається рекурсивно як тип у всесвіті  $\mathcal{U}$  за допомогою загальної рекурсії за розмірностями:

$$S^n := \begin{cases} \text{point} : \mathbb{S}^n, \\ \text{surface} : \langle i_1, \dots, i_n \rangle [ (i_1 = 0) \rightarrow \text{point}, (i_1 = 1) \rightarrow \text{point}, \dots \\ (i_n = 0) \rightarrow \text{point}, (i_n = 1) \rightarrow \text{point} ] \end{cases}$$

**Означення 8.** (Суспендовані  $n$ -сфери)  $n$ -сфера  $S^n$  визначається рекурсивно як тип у всесвіті  $\mathcal{U}$  за допомогою загальної рекурсії над натуральними числами  $\mathbb{N}$ . Для кожного  $n \in \mathbb{N}$ , тип  $S^n : \mathcal{U}$  визначається так:

$$S^n := \begin{cases} S^0 = \mathbf{2}, \\ S^{n+1} = \Sigma(S^n). \end{cases}$$

`def sphere :  $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U} := \mathbb{N}\text{-iter } \mathbf{2} \ \Sigma$`

Ця ітеративна означення застосовує функтор суспензії  $\Sigma$  до базового типу  $\mathbf{2}$  (0-сфера)  $n$  разів, щоб отримати  $S^n$ .

**Приклад 2.** (Сфера як CW-комплекс)  $n$ -сфера  $S^n$  може бути побудована як CW-комплекс з однією 0-клітиною та однією  $n$ -клітиною:

$$\begin{cases} X_0 = \{\text{base}\}, \text{ одна точка} \\ X_k = X_0 \text{ для } 0 < k < n, \text{ без додаткових клітин} \\ X_n : \text{Приєднання } n\text{-клітини до } X_{n-1} = \{\text{base}\} \text{ вздовж } f : S^{n-1} \rightarrow \{\text{base}\} \end{cases}$$

Конструктор `cell` приклеює межу  $n$ -клітини до базової точки, отримуючи тип  $S^n$ .

## 2.4 Хаб і шпиці

Конструкція хаб і шпиці  $\odot$  визначає  $n$ -відсікання, гарантуючи, що тип не має нетривіальних гомотопічних груп вище розмірності  $n$ . Вона моделює тип як CW-комплекс із хабом (центральною точкою) і спицями (шляхами до точок).

**Означення 9.** (Хаб і шпиці) Для типів  $S, A : \mathcal{U}$ , тип хаб і шпиці  $\odot(S, A) : \mathcal{U}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{base} : A \rightarrow \odot(S, A) \\ \text{hub} : (S \rightarrow \odot(S, A)) \rightarrow \odot(S, A) \\ \text{spoke} : (f : S \rightarrow \odot(S, A)) \rightarrow (s : S) \rightarrow \text{hub}(f) \equiv f(s) \\ \text{hubEq} : (x, y : A) \rightarrow (p : S \rightarrow x \equiv y) \rightarrow \text{base}(x) \equiv \text{base}(y) \\ \text{spokeEq} : (x, y : A) \rightarrow (p : S \rightarrow x \equiv y) \rightarrow (s : S) \rightarrow \text{hubEq}(x, y, p) \equiv \text{base}(p(s)) \end{array} \right.$$

```
def  $\odot$  (S A: U) : U
:= inductive { base (x: A)
| hub (f: S  $\rightarrow$   $\odot$  S A)
| spoke (f: S  $\rightarrow$   $\odot$  S A) (s:S) : hub f  $\equiv$  f s
| hubEq (x y: A) (p: S  $\rightarrow$  x  $\equiv$  y) : base x  $\equiv$  base y
| spokeEq (x y: A) (p: S  $\rightarrow$  x  $\equiv$  y) (s: S)
: hubEq x y p  $\equiv$  base (p s)
}
```

**Теорема 7.** (Елімінація hubSpokes) Для типу  $B : \mathcal{U}$ , відображення  $g : A \rightarrow B$ , точки  $h : (S \rightarrow \text{hubSpokes } SA) \rightarrow B$ , і відображень шляхів, що забезпечують когерентність, існує  $\text{rec}_{\text{hubSpokes}} : \text{hubSpokes } SA \rightarrow B$ , таке що  $\text{rec}_{\text{hubSpokes}}(\text{base } x) = g(x)$  і  $\text{rec}_{\text{hubSpokes}}(\text{hub } f) = h(f)$ .

## 2.5 Відсікання

### Відсікання множин

Відсікання множин (0-відсікання), позначене  $\|A\|_0$ , гарантує, що тип є множиною, з гомотопічними групами, що зникають вище розмірності 0.

**Означення 10.** (Відсікання множин) Для  $A : \mathcal{U}$ ,  $\|A\|_0 : \mathcal{U}$ .

$$\begin{cases} \text{inc} : A \rightarrow \|A\|_0 \\ \text{squash} : (a, b : \|A\|_0) \rightarrow (p, q : a \equiv b) \rightarrow p \equiv q \end{cases}$$

```
data setTrunc (A: U)
  = inc (a: A)
  | squash (a b: setTrunc A) (p q: Path (setTrunc A) a b)
    <i j> [ (i = 0) -> p @ j, (i = 1) -> q @ j,
           (j = 0) -> a,      (j = 1) -> b ]
```

**Теорема 8.** (Елімінація  $\|A\|_0$ ) Для множини  $B : \mathcal{U}$  (тобто  $\text{isSet}(B)$ ), відображення  $f : A \rightarrow B$ , існує  $\text{setTruncRec} : \|A\|_0 \rightarrow B$ , таке що  $\text{setTruncRec}(\text{inc}(a)) = f(a)$ .

### Відсікання групоїдів

Відсікання групоїдів (1-відсікання), позначене  $\|A\|_1$ , гарантує, що тип є 1-групоїдом, з гомотопічними групами, що зникають вище розмірності 1.

**Означення 11.** (Відсікання групоїдів) Для  $A : \mathcal{U}$ ,  $\|A\|_1 : \mathcal{U}$ .

$$\begin{cases} \text{inc} : A \rightarrow \|A\|_1 \\ \text{squash} : (a, b : \|A\|_1) \rightarrow (p, q : a \equiv b) \rightarrow (r, s : p \equiv q) \rightarrow r \equiv s \end{cases}$$

```
data grpdTrunc (A: U)
  = inc (a: A)
  | squash (a b: grpdTrunc A)
    (p q: Path (grpdTrunc A) a b)
    (r s: Path (Path (grpdTrunc A) a b) p q)
    <i j k> [ (i = 0) -> r @ j @ k, (i = 1) -> s @ j @ k,
             (j = 0) -> p @ k,    (j = 1) -> q @ k,
             (k = 0) -> a,        (k = 1) -> b ]
```

**Теорема 9.** (Елімінація  $\|A\|_1$ ) Для 1-групоїда  $B : \mathcal{U}$  (тобто  $\text{isGroupoid}(B)$ ), відображення  $f : A \rightarrow B$ , існує  $\text{grpdTruncRec} : \|A\|_1 \rightarrow B$ , таке що  $\text{grpdTruncRec}(\text{inc}(a)) = f(a)$ .



## 2.6 Фактор-простори

### Фактор-простори множин

Фактор-простори множин конструюють тип  $A$ , факторизований за відношенням  $R : A \rightarrow A \rightarrow \mathcal{U}$ , гарантуючи, що результат є множиною.

**Означення 12.** (Фактор-простір множин) Для типу  $A : \mathcal{U}$  і відношення  $R : A \rightarrow A \rightarrow \mathcal{U}$ , фактор-простір множин  $\text{setQuot } AR : \mathcal{U}$  визначається конструкторами:

$$\begin{cases} \text{quotient} : A \rightarrow \text{setQuot}(A, R) \\ \text{identification} : (a, b : A) \rightarrow Rab \rightarrow \text{quotient}(a) \equiv \text{quotient}(b) \\ \text{trunc} : (a, b : \text{setQuot}(A, R)) \rightarrow (p, q : a \equiv b) \rightarrow p \equiv q \end{cases}$$

```
data setQuot (A: U) (R: A → A → U)
= quotient (a: A)
| identification (a b: A) (r: R a b)
  <i> [ (i=0) → quotient a, (i=1) → quotient b ]
| trunc (a b : setQuot A R) (p q : Path (setQuot A R) a b)
  <i j> [ (i = 0) → p @ j , (i = 1) → q @ j ,
        (j = 0) → a , (j = 1) → b ]
```

**Теорема 10.** (Елімінація  $\text{setQuot}$ ) Для сімейства типів  $B : \text{setQuot } AR \rightarrow \mathcal{U}$  з  $\text{isSet}(Bx)$ , і відображень  $f : (x : A) \rightarrow B(\text{quotient } x)$ ,  $g : (a, b : A) \rightarrow (r : Rab) \rightarrow \text{PathP}(< i > B(\text{idq } abr @ i))(fa)(fb)$ , існує  $\text{setQuotElim} : \prod_{x:\text{setQuot } AR} B(x)$ , таке що  $\text{setQuotElim}(\text{quotient } a) = fa$ .

### Фактор-простори групоїдів

Фактор-простори групоїдів розширюють фактор-простори множин для створення 1-групоїда, включаючи конструктори вищих шляхів.

**Означення 13.** (Фактор-простір групоїдів) Для типу  $A : \mathcal{U}$  і відношення  $R : A \rightarrow A \rightarrow \mathcal{U}$ , Фактор-простір групоїдів  $\text{grpQuot } AR : \mathcal{U}$  включає конструктори для точок, шляхів і вищих шляхів, що забезпечують структуру 1-групоїда. (Примітка: Повне означення потребує додаткової структури, частково опущено для стислості.)

## 2.7 Букет

Букет двох точкових типів  $A$  і  $B$ , позначена  $A \vee B$ , є вищим індуктивним типом (НІТ), який представляє об'єднання  $A$  і  $B$  з ідентифікованими базовими точками. Топологічно вона відповідає  $A \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times B$ , де  $x_0$  і  $y_0$  — базові точки  $A$  і  $B$ , відповідно.

**Означення 14.** (Формація) Для точкових типів  $A, B : \text{pointed}$ , Букет  $\text{Wedge } AB : \mathcal{U}$ .

**Означення 15.** (Конструктори) Букет генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\begin{cases} \text{winl} : A.1 \rightarrow \text{Wedge } AB \\ \text{winr} : B.1 \rightarrow \text{Wedge } AB \\ \text{wglue} : \text{Path}_{\text{Wedge } AB}(\text{winl } A.2, \text{winr } B.2) \end{cases}$$

```
data Wedge (A : pointed) (B : pointed)
  = winl (a : A.1)
  | winr (b : B.1)
  | wglue <x> [ (x = 0) -> winl A.2 , (x = 1) -> winr B.2 ]
```

**Теорема 11.** (Елімінація) Для типу  $C : \mathcal{U}$ , відображень  $f : A.1 \rightarrow C$ ,  $g : B.1 \rightarrow C$ , і шляху  $p : \text{Path}_C(f(A.2), g(B.2))$ , існує відображення  $\text{WedgeRec} : \text{Wedge } AB \rightarrow C$ , таке що:

$$\begin{cases} \text{WedgeRec}(\text{winl } a) = f(a) \\ \text{WedgeRec}(\text{winr } b) = g(b) \\ \text{WedgeRec}(\text{wglue } @ x) = p @ x \end{cases}$$

```
WedgeRec (A B : pointed) (C : U) (f : A.1 -> C) (g : B.1 -> C)
  (p : Path C (f A.2) (g B.2))
  : Wedge A B -> C
= split
  winl a -> f a
  winr b -> g b
  wglue @ x -> p @ x
```

**Теорема 12.** (Обчислення) Для  $z : \text{Wedge } AB$ ,

$$\begin{cases} \text{WedgeRec}(\text{winl } a) \equiv f(a) \\ \text{WedgeRec}(\text{winr } b) \equiv g(b) \\ \text{WedgeRec}(\text{wglue } @ x) \equiv p @ x \end{cases}$$

**Теорема 13.** (Унікальність) Будь-які два відображення  $h_1, h_2 : \text{Wedge } AB \rightarrow C$  є гомотопними, якщо вони збігаються на  $\text{winl}$ ,  $\text{winr}$  і  $\text{wglue}$ , тобто, якщо  $h_1(\text{winl } a) = h_2(\text{winl } a)$  для всіх  $a : A.1$ ,  $h_1(\text{winr } b) = h_2(\text{winr } b)$  для всіх  $b : B.1$ , і  $h_1(\text{wglue}) = h_2(\text{wglue})$ .

## 2.8 Смеш-добуток

Смеш-добуток двох точкових типів  $A$  і  $B$ , позначений  $A \wedge B$ , є вищим індуктивним типом, який факторизує добуток  $A \times B$  за розшарованою сумою  $A \vee B$ . Він представляє простір  $A \times B / (A \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times B)$ , зводячи букет до однієї точки.

**Означення 16.** (Формація) Для точкових типів  $A, B : \text{pointed}$ , Смеш-добуток  $\text{Smash } AB : \mathcal{U}$ .

**Означення 17.** (Конструктори) Смеш-добуток генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\begin{cases} \text{spair} : A.1 \rightarrow B.1 \rightarrow \text{Smash } AB \\ \text{smash} : (a : A.1) \rightarrow (b : B.1) \rightarrow \text{Path}_{\text{Smash } AB}(\text{spair } a \text{ } B.2, \text{spair } A.2 \text{ } b) \\ \text{smashpt} : \text{Path}_{\text{Smash } AB}(\text{smash } A.2 \text{ } B.2, \text{spair } A.2 \text{ } B.2) \end{cases}$$

```
data Smash (A : pointed) (B : pointed)
  = spair (a : A.1) (b : B.1)
  | smash (a : A.1) (b : B.1) <x> [(x=0) -> spair a B.2, (x=1) -> spair A.2 b]
  | smashpt <x y> [(x=0) -> smash A.2 B.2 @ y,
                  (x=1) -> spair A.2 B.2,
                  (y=0) -> spair A.2 B.2,
                  (y=1) -> spair A.2 B.2]
```

**Теорема 14.** (Елімінація) Для типу  $C : \mathcal{U}$ , відображення  $f : A.1 \rightarrow B.1 \rightarrow C$ , шляхів  $g : (a : A.1) \rightarrow (b : B.1) \rightarrow \text{Path}_C(fa \text{ } B.2, fA.2 \text{ } b)$ , і 2-шляху  $h : \text{Path}_{\text{Path}_{\text{Smash } AB}(fA.2 \text{ } B.2, fA.2 \text{ } B.2)}(gA.2 \text{ } B.2, \text{idp } (fA.2 \text{ } B.2))$ , існує відображення  $\text{SmashRec} : \text{Smash } AB \rightarrow C$ , таке що:

$$\begin{cases} \text{SmashRec}(\text{spair } a \text{ } b) = f(a, b) \\ \text{SmashRec}(\text{smash } a \text{ } b @ x) = g(a, b) @ x \\ \text{SmashRec}(\text{smashpt } @ x @ y) = h @ x @ y \end{cases}$$

**Теорема 15.** (Обчислення) Для  $z : \text{Smash } AB$ ,

$$\begin{cases} \text{SmashRec}(\text{spair } a \text{ } b) \equiv f(a, b) \\ \text{SmashRec}(\text{smash } a \text{ } b @ x) \equiv g(a, b) @ x \\ \text{SmashRec}(\text{smashpt } @ x @ y) \equiv h @ x @ y \end{cases}$$

**Теорема 16.** (Унікальність) Будь-які два відображення  $h_1, h_2 : \text{Smash } AB \rightarrow C$  є гомотопними, якщо вони збігаються на  $\text{spair}$ ,  $\text{smash}$  і  $\text{smashpt}$ .

**Приклад 3.** (Смеш-добуток сфер) Смеш-добуток  $S^1 \wedge S^1$  є гомотопічно еквівалентним  $S^2$ , оскільки він факторизує тор  $S^1 \times S^1$  за клин  $S^1 \vee S^1$ , зводячи базові точки та їхні волокна.

## 2.9 З'єднання

З'єднання двох типів  $A$  і  $B$ , позначене  $A * B$ , є вищим індуктивним типом, який конструює тип шляхом з'єднання кожної точки  $A$  з кожною точкою  $B$  через шлях. Топологічно воно відповідає з'єднанню просторів, формуючи простір, що інтерполює між  $A$  і  $B$ .

**Означення 18.** (Формація) Для типів  $A, B : \mathcal{U}$ , з'єднання  $\text{Join } AB : \mathcal{U}$ .

**Означення 19.** (Конструктори) З'єднання генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\begin{cases} \text{joinl} : A \rightarrow \text{Join } AB \\ \text{joinr} : B \rightarrow \text{Join } AB \\ \text{join} : (a : A) \rightarrow (b : B) \rightarrow \text{Path}_{\text{Join } AB}(\text{joinl } a, \text{joinr } b) \end{cases}$$

```
data Join (A : U) (B : U)
  = joinl (a : A)
  | joinr (b : B)
  | join (a:A) (b:B) <i> [(i=0) -> joinl a, (i=1) -> joinr b]
```

**Теорема 17.** (Елімінація) Для типу  $C : \mathcal{U}$ , відображень  $f : A \rightarrow C$ ,  $g : B \rightarrow C$ , і сімейства шляхів  $h : (a : A) \rightarrow (b : B) \rightarrow \text{Path}_C(fa, gb)$ , існує відображення  $\text{JoinRec} : \text{Join } AB \rightarrow C$ , таке що:

$$\begin{cases} \text{JoinRec}(\text{joinl } a) = f(a) \\ \text{JoinRec}(\text{joinr } b) = g(b) \\ \text{JoinRec}(\text{join } a b @ i) = h(a, b) @ i \end{cases}$$

```
JoinRec (A B C : U) (f : A -> C) (g : B -> C)
  (h : (a : A) -> (b : B) -> Path C (f a) (g b))
  : Join A B -> C
= split
  joinl a -> f a
  joinr b -> g b
  join a b @ i -> h a b @ i
```

**Теорема 18.** (Обчислення) Для  $z : \text{Join } AB$ ,

$$\begin{cases} \text{JoinRec}(\text{joinl } a) \equiv f(a) \\ \text{JoinRec}(\text{joinr } b) \equiv g(b) \\ \text{JoinRec}(\text{join } a b @ i) \equiv h(a, b) @ i \end{cases}$$

**Теорема 19.** (Унікальність) Будь-які два відображення  $h_1, h_2 : \text{Join } AB \rightarrow C$  є гомотопними, якщо вони збігаються на  $\text{joinl}$ ,  $\text{joinr}$  і  $\text{join}$ .

**Приклад 4.** (З'єднання сфер) З'єднання  $S^0 * S^0$  є гомотопічно еквівалентним  $S^1$ , оскільки воно з'єднує дві точки (з кожної  $S^0$ ) шляхами, формуючи структуру, подібну до кола.

## 2.10 Кограниця

Кограниці конструюють границю послідовності типів, з'єднаних відображеннями, наприклад, пропозиційні відсікання.

**Означення 20.** (Кограниця) Для послідовності типів  $A : \text{nat} \rightarrow \mathcal{U}$  і відображень  $f : (n : \mathbb{N}) \rightarrow A n \rightarrow A(\text{succ}(n))$ , тип кограниця  $\text{colimit}(A, f) : \mathcal{U}$ .

$$\begin{cases} \text{ix} : (n : \text{nat}) \rightarrow A n \rightarrow \text{colimit}(A, f) \\ \text{gx} : (n : \text{nat}) \rightarrow (a : A(n)) \rightarrow \text{ix}(\text{succ}(n), f(n, a)) \equiv \text{ix}(n, a) \end{cases}$$

```
def colimit (A : nat → U) (f : (n : nat) → A n → A (succ n)) : U
:= inductive { ix (n : nat) (x : A n)
              | gx (n : nat) (a : A n)
                <i> [ (i=0) → ix (succ n) (f n a),
                  (i=1) → ix n a ]
              }
```

**Теорема 20.** (Елімінація  $\text{colimit}$ ) Для типу  $P : \text{colimit } Af \rightarrow \mathcal{U}$ , з  $p : (n : \text{nat}) \rightarrow (x : A n) \rightarrow P(\text{ix}(n, x))$  і  $q : (n : \text{nat}) \rightarrow (a : A n) \rightarrow \text{PathP}(\langle i \rangle P(\text{gx}(n, a) @ i))(p(\text{succ } n)(fna))(pna)$ , існує  $i : \prod_{x : \text{colimit } Af} P(x)$ , таке що  $i(\text{ix}(n, x)) = pnx$ .

## 2.11 Коеквалайзери

### Коеквалайзер

Коеквалайзер двох відображень  $f, g : A \rightarrow B$  — це вищий індуктивний тип (НІТ), який конструює тип, що складається з елементів у  $B$ , де  $f$  і  $g$  збігаються, разом із шляхами, що забезпечують цю рівність. Це фундаментальна конструкція в теорії гомотопій, яка захоплює підпростір  $B$ , де  $f(a) = g(a)$  для  $a : A$ .

**Означення 21.** (Формація) Для типів  $A, B : \mathcal{U}$  і відображень  $f, g : A \rightarrow B$ , Коеквалайзер  $\text{coeq } ABfg : \mathcal{U}$ .

**Означення 22.** (Конструктори) Коеквалайзер генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\begin{cases} \text{inC} : B \rightarrow \text{coeq } ABfg \\ \text{glueC} : (a : A) \rightarrow \text{Path}_{\text{coeq } ABfg}(\text{inC } (fa), \text{inC } (ga)) \end{cases}$$

```
data coeq (A B: U) (f g: A -> B)
  = inC (_: B)
  | glueC (a: A) <i> [(i=0) -> inC (f a), (i=1) -> inC (g a)]
```

**Теорема 21.** (Елімінація) Для типу  $C : \mathcal{U}$ , відображення  $h : B \rightarrow C$ , і сімейства шляхів  $y : (x : A) \rightarrow \text{Path}_C(h(fx), h(gx))$ , існує відображення  $\text{coequRec} : \text{coeq } ABfg \rightarrow C$ , таке що:

$$\begin{cases} \text{coequRec}(\text{inC } x) = h(x) \\ \text{coequRec}(\text{glueC } x @ i) = y(x) @ i \end{cases}$$

```
coequRec (A B C : U) (f g : A -> B) (h: B -> C) (y: (x : A) -> Path C (h (f x)) (h (g x)))
  : (z : coeq A B f g) -> C
  = split
    inC x -> h x
    glueC x @ i -> y x @ i
```

**Теорема 22.** (Обчислення) Для  $z : \text{coeq } ABfg$ ,

$$\begin{cases} \text{coequRec}(\text{inC } x) \equiv h(x) \\ \text{coequRec}(\text{glueC } x @ i) \equiv y(x) @ i \end{cases}$$

**Теорема 23.** (Унікальність) Будь-які два відображення  $h_1, h_2 : \text{coeq } ABfg \rightarrow C$  є гомотопними, якщо вони збігаються на  $\text{inC}$  і  $\text{glueC}$ , тобто, якщо  $h_1(\text{inC } x) = h_2(\text{inC } x)$  для всіх  $x : B$  і  $h_1(\text{glueC } a) = h_2(\text{glueC } a)$  для всіх  $a : A$ .

**Приклад 5.** (Коеквалайзер як підпростір) Коеквалайзер  $\text{coeq } ABfg$  представляє підпростір  $B$ , де  $f(a) = g(a)$ . Наприклад, якщо  $A = B = \mathbb{R}$  і  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x$ , Коеквалайзер захоплює точки, де  $x^2 = x$ , тобто  $\{0, 1\}$ .

### Коеквалайзер шляхів

Коеквалайзер шляхів — це вищий індуктивний тип, який узагальнює Коеквалайзер для роботи з парами шляхів у  $B$ . Дано відображення  $p : A \rightarrow (b_1, b_2 : B) \times (\text{Path}_B(b_1, b_2)) \times (\text{Path}_B(b_1, b_2))$ , він конструює тип, де елементи  $A$  породжують пари шляхів між точками в  $B$ , із шляхами, що з'єднують кінцеві точки цих шляхів.

**Означення 23.** (Формація) Для типів  $A, B : \mathcal{U}$  і відображення  $p : A \rightarrow (b_1, b_2 : B) \times (b_1 \equiv b_2) \times (b_1 \equiv b_2)$ , існує коеквалайзер шляхів  $\text{Coeq}_{\equiv}(A, B, p) : \mathcal{U}$ .

**Означення 24.** (Конструктори) Коеквалайзер шляхів генерується такою вищою індуктивною композиційною структурою:

$$\begin{cases} \text{inP} : B \rightarrow \text{Coeq}_{\equiv}(A, B, p) \\ \text{glueP} : (a : A) \rightarrow \text{inP}(p(a).2.2.1@0) \equiv \text{inP}(p(a).2.2.2@1) \end{cases}$$

```
data Coeq≡ (A B : U) (p : A → Σ (b1 b2 : B), b1 ≡ b2 × b1 ≡ b2)
  = inP (b : B)
  | glueP (a : A) <i> [(i=0) → inP ((p a).2.2.1 @ 0),
                      (i=1) → inP ((p a).2.2.2 @ 1)]
```

**Теорема 24.** (Елімінація) Для типу  $C : \mathcal{U}$ , відображення  $h : B \rightarrow C$ , і сімейства шляхів  $y : (a : A) \rightarrow h(p(a).2.2.1@0) \equiv h(p(a).2.2.2@1)$ , існує відображення  $\text{Ind-Coeq}_{\equiv} : \text{Coeq}_{\equiv}(A, B, p) \rightarrow C$ , таке що:

$$\begin{cases} \text{coeqPRec}(\text{inP}(b)) = h(b) \\ \text{coeqPRec}(\text{glueP}(a, i)) = y(a, i) \end{cases}$$

```
def Ind-Coeq≡ (A B C : U)
  (p : A → Σ (b1 b2 : B) (λ _ : Path B b1 b2), Path B b1 b2)
  (h : B → C) (y : (a : A) → Path C (h ((p a).2.2.1 @ 0)) (h (((p a).2.2.2) @ 1)))
  : (z : coeqP A B p) → C
:= split { inP b → h b | glueP a @ i → y a @ i }
```

**Теорема 25.** (Обчислення) Для  $z : \text{coeqP } ABp$ ,

$$\begin{cases} \text{coeqPRec}(\text{inP } b) \equiv h(b) \\ \text{coeqPRec}(\text{glueP } a @ i) \equiv y(a) @ i \end{cases}$$

**Теорема 26.** (Унікальність) Будь-які два відображення  $h_1, h_2 : \text{coeqP } ABp \rightarrow C$  є гомотопними, якщо вони збігаються на  $\text{inP}$  і  $\text{glueP}$ , тобто, якщо  $h_1(\text{inP } b) = h_2(\text{inP } b)$  для всіх  $b : B$  і  $h_1(\text{glueP } a) = h_2(\text{glueP } a)$  для всіх  $a : A$ .

**Приклад 6.** (Шляховий Коеквалайзер для гомотопії) Шляховий Коеквалайзер може моделювати простори, де елементи  $A$  задають пари шляхів між точками в  $B$ . Наприклад, якщо  $p(a)$  надає два шляхи від  $b_1$  до  $b_2$  у  $B$ ,  $\text{coeqP}$  конструює тип, що з'єднує початкові та кінцеві точки цих шляхів, корисний для вивчення гомотопічних класів.

## 2.12 $K(G, n)$

Простори Ейленберга-МакЛейна  $K(G, n)$  мають єдину нетривіальну гомотопічну групу  $\pi_n(K(G, n)) = G$ . Вони визначаються за допомогою відсікань і суспензій.

**Означення 25.**  $(K(G, n))$  Для абелевої групи  $G : \text{abgroup}$ , тип  $KGnG : \text{nat} \rightarrow \mathcal{U}$ .

$$\begin{cases} n = 0 : \text{discreteTopology}(G) \\ n \geq 1 : \text{succ}(n) = \text{nTrunc}(\text{suspension}(K1'(G.1, G.2.1))n)(\text{succ}n) \end{cases}$$

```
KGn (G: abgroup)
  : nat -> U
= split
  zero -> discreteTopology G
  succ n -> nTrunc (suspension (K1' (G.1,G.2.1)) n) (succ n)
```

**Теорема 27.** (Елімінація  $KGn$ ) Для  $n \geq 1$ , типу  $B : \mathcal{U}$  з  $\text{isNGroupoid}(B, \text{succ } n)$ , і відображення  $f : \text{suspension}(K1'G) \rightarrow B$ , існує  $\text{rec}_{KGn} : KGnG(\text{succ } n) \rightarrow B$ , визначене через  $\text{nTruncRec}$ .



## 2.13 Локалізація

Локалізація конструює  $F$ -локальний тип із типу  $X$ , щодо сімейства відображень  $F_A : S(a) \rightarrow T(a)$ .

**Означення 26.** (Модальність локалізації) Для сімейства відображень  $F_A : S(a) \rightarrow T(a)$ ,  $F$ -локалізація  $L_F^{AST}(X) : \mathcal{U}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{center} : X \rightarrow L_{F_A}(X) \\ \text{ext} : (a : A) \rightarrow (S(a) \rightarrow L_{F_A}(X)) \rightarrow T(a) \rightarrow L_{F_A}(X) \\ \text{isExt} : (a : A) \rightarrow (f : S(a) \rightarrow L_{F_A}(X)) \rightarrow (s : S(a)) \rightarrow \text{Path}_{L_{F_A}(X)}(\text{ext } af(Fas), fs) \\ \text{extEq} : (a : A) \rightarrow (g, h : T(a) \rightarrow L_{F_A}(X)) \rightarrow (p : (s : S(a)) \rightarrow \text{Path}_{L_{F_A}(X)}(g(Fas), h(Fas))) \rightarrow (t : T(a)) \rightarrow 1 \\ \text{isExtEq} : (a : A) \rightarrow (g, h : T(a) \rightarrow L_{F_A}(X)) \rightarrow (p : (s : S(a)) \rightarrow \text{Path}_{L_{F_A}(X)}(g(Fas), h(Fas))) \rightarrow (s : S(a)) \rightarrow 1 \end{array} \right.$$

```
data Localize (A X: U) (S T: A → U) (F : (x:A) → S x → T x)
= center (x: X)
| ext (a: A) (f: S a → Localize A X S T F) (t: T a)
| isExt (a: A) (f: S a → Localize A X S T F) (s: S a) <i>
  [ (i=0) → ext a f (F a s) , (i=1) → f s ]
| extEq (a: A) (g h: T a → Localize A X S T F)
  (p: (s : S a) → Path (Localize A X S T F) (g (F a s)) (h (F a s)))
  (t : T a) <i> [ (i=0) → g t , (i=1) → h t ]
| isExtEq (a: A) (g h : T a → Localize A X S T F)
  (p: (s : S a) → Path (T a → Localize A X S T F) (g (F a s)) (h (F a s)))
  (s : S a) <i> [ (i=0) → extEq a g h p (F a s) , (i=1) → p s ]
```

**Теорема 28.** (Індукція локалізації) Для будь-якого  $P : \Pi_{X:U} L_{F_A}(X) \rightarrow U$  з  $\{n, r, s\}$ , що задовольняють умови когерентності, існує  $i : \Pi_{x:L_{F_A}(X)} P(x)$ , таке що  $i \cdot \text{center}_X = n$ .

## 3 Висновок

НІТ безпосередньо кодують CW-комплекси в НоТТ, поєднуючи топологію і теорію типів. За допомогою них відбувається аналіз і робота з гомотопічними типами.

## Література

- [1] The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, IAS, 2013.
- [2] C. Cohen, T. Coquand, S. Huber, A. Mörtberg, *Cubical Type Theory*, Journal of Automated Reasoning, 2018.
- [3] A. Mörtberg et al., *Agda Cubical Library*, <https://github.com/agda/cubical>, 2023.
- [4] M. Shulman, *Higher Inductive Types in HoTT*, <https://arxiv.org/abs/1705.07088>, 2017.
- [5] J. D. Christensen, M. Opie, E. Rijke, L. Scoccola, *Localization in Homotopy Type Theory*, <https://arxiv.org/pdf/1807.04155.pdf>, 2018.
- [6] E. Rijke, M. Shulman, B. Spitters, *Modalities in Homotopy Type Theory*, <https://arxiv.org/pdf/1706.07526v6.pdf>, 2017.
- [7] M. Riley, E. Finster, D. R. Licata, *Synthetic Spectra via a Monadic and Comonadic Modality*, <https://arxiv.org/pdf/2102.04099.pdf>, 2021.