计算方法实验题

危国锐 120034910021
（上海交通大学海洋学院，上海 200030）

摘 要：摘要.
关键词：关键词 1, 关键词 2

0 预备知识

0.1 插值法

函数 $f(x)$ 关于**插值区间** $[a,b]$ 上的**插值节点** $x_0,\cdots,x_n$, 的 Lagrange **插值多项式**

$$L_n(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x), \tag{1}$$

其中**插值基函数**

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega_{n+1}'(x_k)}, \tag{2}$$

记号

$$\omega_{n+1}(x) \coloneqq \prod_{i=0}^{n} (x-x_i). \tag{3}$$

定义 $\omega_0 \equiv 1$.

函数 $f(x)$ 关于插值区间 $[a,b]$ 上的插值节点 $x_0,\cdots,x_n$, 的 Newton **差商插值多项式**

$$N_n(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\cdots,x_k]\omega_k(x), \tag{4}$$

其中函数 $f(x)$ 关于节点 $x_0,\cdots,x_k$ 的 k **阶差商**定义为

$$\begin{aligned} f[x_0,\cdots,x_k] &= \frac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}, \\ f[x_0] &\coloneqq f(x_0). \end{aligned} \tag{5}$$

可以证明（参见 [1,定理 2.1]）（1）（4）是相同的插值多项式，即有

$$L_n \equiv N_n,$$

且插值余项

$$\begin{aligned} R_n(x) &\coloneqq f(x)-L_n(x) = f(x)-N_n(x) \\ &= f[x,x_0,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \qquad \eta=\eta(x)\in[a,b]. \end{aligned} \tag{6}$$

完成日期：2021-12-28
课程名称：研-MATH6004-M03-计算方法

0.2 数值积分

取 $I_n \coloneqq \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x$ 作为积分 $I \coloneqq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值，这样构造出的求积公式

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{7}$$

称为**插值型**的，其中**求积系数** A_k 通过插值基函数 $l_k(x)$ 的积分

$$A_k = \int_a^b l_k(x)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

得出.

由插值余项定理（6）立得插值型求积公式（7）的余项

$$E_n[f] \coloneqq I - I_n = \int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

如果某个求积公式对于次数不大于 m 的多项式均能准确成立，但对于 $m+1$ 次多项式就不一定准确，则称该求积公式具有 **m 次代数精度**.

一般地，欲使某个求积公式具有 m 次代数精度，只要令它对于 $f(x) = 1, x, x^2, \cdots, x^m$ 都能准确成立.

可以证明（参见 [1,定理 4.1]），形如（7）的求积公式至少具有 n 次代数精度的充要条件是，它是插值型的.

设将积分区间 $[a,b]$ 划分为 n 等份，步长 $h = \frac{b-a}{h}$. 所谓**复化求积法**，就是先用低阶的 Newton-Cotes 公式求得每个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的积分值 I_k, 然后再求和，用 $\sum_{k=0}^{n-1} I_k$ 作为所求积分 I 的近似值.

如果一种复化求积公式 I_n 当 $h \to 0$ 时成立渐近关系式

$$\frac{I - I_n}{h^p} \to C, \qquad C = \mathrm{const.} \neq 0, \tag{10}$$

则称求积公式 I_n 是 **p 阶收敛**的.

1 多项式插值（Lagrange）与数值求积

1.1 描述

1 在区间[-1,1]上取 $x_k = -1 + \frac{2}{n}k$， $k = 0,1,2,\cdots,n$， n=10，对函数 $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ 作多项式插值，分别画出插值函数及 $f(x)$ 的图形，并估计误差。由此插值公式推导对应的积分公式（积分系数可以用积分公式求数值解），代数精度，及积分余项，并用此积分公式计算 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+25x^2} dx$ 并估计误差。

1.2 解决方案

Lagrange 插值多项式（1）成为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}. \tag{11}$$

由定理 2.2 得插值余项

$$R_n(x)\coloneqq f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \tag{12}$$

其中 $\xi=\xi(x)\in[-1,1]$. 从而，用插值多项式（11）逼近 $f(x)$ 的截断误差限是

$$|R_n(x)|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|, \tag{13}$$

其中

$$M_{n+1}\coloneqq\max_{-1\leq x\leq 1}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

式（11）的图像示于图 1，可见 Runge 现象.

相应于（11）的插值型积分公式（7）为

$$I_n[f]=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k), \tag{14}$$

其中积分系数（8）为

$$A_k=\int_a^b\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\mathrm{d}x. \tag{15}$$

用 MATLAB 编程计算得

$$\begin{aligned}
A_0&=A_{10}=0.0536682967238523,\\
A_1&=A_9=0.355071882849661,\\
A_2&=A_8=-0.162087141253808,\\
A_3&=A_7=0.909892576559243,\\
A_4&=A_6=-0.870310245310246,\\
A_5&=1.42752926086259.
\end{aligned}$$

由定理 4.1 得（15）至少有 n 次代数精度. 又有积分余项（参见 [1,定理 4.2]）

$$E_n[x^{n+1}]=0, \tag{16}$$

故（15）至少具有 $n+1$ 次代数精度. 按 [1,pp.85] 之法可证明，积分余项

$$E_n[f]\coloneqq I-I_n[f]=\int_{-1}^{1}\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}(x-x_0)\omega_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

通过 MATLAB 编程可验证 $E_{10}[x^{12}]\neq 0$, 故 I_{10} 具有 11 次代数精度. 由（17），用（14）近似求积的截断误差限为

$$\left|E_{10}\left[\frac{1}{1+25x^2}\right]\right|\leq\frac{M_{10+2}}{(n+2)!}, \tag{18}$$

其中

$$M_{10+2}\coloneqq\max_{-1\leq x\leq 1}\left|\frac{\mathrm{d}^{12}}{\mathrm{d}x^{12}}\left[\frac{1}{1+25x^2}\right]\right|.$$

用 MATLAB 编程算得

$$I_{10}\left[\frac{1}{1+25x^2}\right]=0.934660111130700,$$

这与积分精确值

$$I = \frac{1}{5}\arctan 5x\Big|_{-1}^{1} = 0.549360306778006$$

相去甚远.

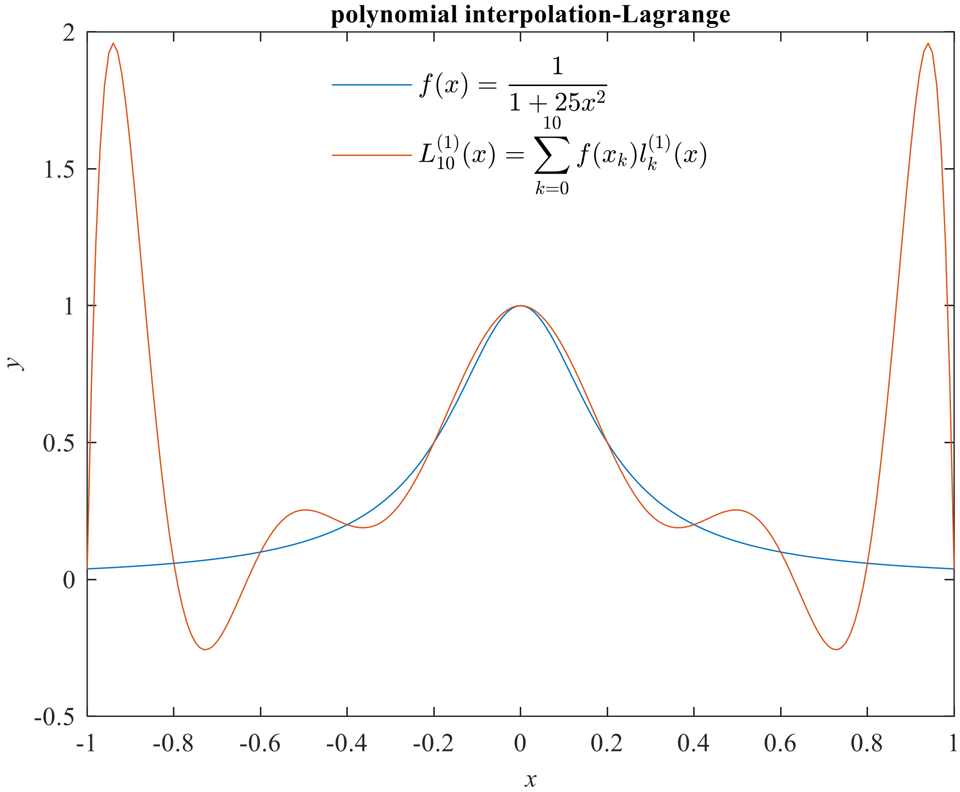

图 1 Lagrange 插值多项式

2 多项式插值（Chebyshev）与数值求积

2.1 描述

2 在区间[-1,1]上取点 $x_k = \cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi$，$k = 0,1,2,\cdots,n$，n=10, 对函数 $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

作多项式插值，分别画出插值函数及 $f(x)$ 的图形，并估计误差。若取 n=0，1，2，由此插值公式推导对应的积分公式，积分余项，及代数精度，并用此积分公式计算 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+25x^2}dx$ 并估计误差。

3 分段线性插值与复化求积

3.1 描述

3 在区间[-1,1]上取 $x_k=-1+\frac{2}{n}k$，$k=0,1,2,\cdots,n$，n=10，对函数 $f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$ 作分段折线函数插值，分别画出插值函数及 $f(x)$ 的图形，并比较误差。由此插值公式推导对应的积分公式，积分余项，及算法的收敛阶，并用此积分公式计算 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+25x^2}dx$ 并估计误差。

4 复化 Gauss-Legendre 公式求积

4.1 描述

4 在区间[-1,1]上，将区间等分 10 等分，每一段上用两点 Gauss 型公式进行积分计算，得到复化 Gauss 型积分公式，推导此积分公式，积分余项，及算法的收敛阶，并用此积分公式计算 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+25x^2}dx$ 并估计误差。

5 讨论与结论

致谢

参考文献

[1] 李庆阳,王能超,易大义.数值分析[M].第 5 版.武汉:华中科技大学出版社,2021.

危国锐 男，1998 年生，硕士研究生.
E-mail: weiguorui@sjtu.edu.cn

附录 本实验使用的 Matlab 源代码

Title

Guorui Wei

(*School of Oceanography*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200030, *China*)

Abstract: Abstract.

Keywords: keyword1, keyword2