



# 计算方法实验题

危国锐 120034910021

(上海交通大学海洋学院, 上海 200030)

**摘要:** 摘要.

**关键词:** 关键词 1, 关键词 2

## 0 预备知识

### 0.1 插值法

函数  $f(x)$  关于插值区间  $[a, b]$  上的插值节点  $x_0, \dots, x_n$  的 Lagrange 插值多项式

$$L_n(x) := \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x), \quad (1)$$

其中插值基函数

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k) \omega'_{n+1}(x_k)}, \quad (2)$$

记号

$$\omega_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (3)$$

定义  $\omega_0 \equiv 1$ .

函数  $f(x)$  关于插值区间  $[a, b]$  上的插值节点  $x_0, \dots, x_n$  的 Newton 差商插值多项式

$$N_n(x) := \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k] \omega_k(x), \quad (4)$$

其中函数  $f(x)$  关于节点  $x_0, \dots, x_k$  的  $k$  阶差商定义为

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0},$$

$$f[x_0] := f(x_0). \quad (5)$$

可以证明 (参见 [1, 定理 2.1]) (1) (4) 是相同的插值多项式, 即有

$$L_n \equiv N_n,$$

且插值余项

$$\begin{aligned} R_n(x) &:= f(x) - L_n(x) = f(x) - N_n(x) \\ &= f[x, x_0, \dots, x_n] \omega_{n+1}(x) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad \eta = \eta(x) \in [a, b]. \end{aligned} \quad (6)$$

完成日期: 2021-12-29

课程名称: 研-MATH6004-M03-计算方法



## 0.2 数值积分

取  $I_n := \int_a^b L_n(x) dx$  作为积分  $I := \int_a^b f(x) dx$  的近似值, 这样构造出的求积公式

$$I_n = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad (7)$$

称为插值型的, 其中求积系数  $A_k$  通过插值基函数  $l_k(x)$  的积分

$$A_k = \int_a^b l_k(x) dx \quad (8)$$

得出.

由插值余项定理 (6) 立得插值型求积公式 (7) 的余项

$$E_n[f] := I - I_n = \int_a^b R_n(x) dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) dx. \quad (9)$$

如果某个求积公式对于次数不大于  $m$  的多项式均能准确成立, 但对于  $m+1$  次多项式就不一定准确, 则称该求积公式具有  $m$  次代数精度.

一般地, 欲使某个求积公式具有  $m$  次代数精度, 只要令它对于  $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^m$  都能准确成立.

可以证明 (参见 [1, 定理 4.1]), 形如 (7) 的求积公式至少具有  $n$  次代数精度的充要条件是, 它是插值型的.

设将积分区间  $[a, b]$  划分为  $n$  等份, 步长  $h = \frac{b-a}{n}$ . 所谓复化求积法, 就是先用低阶的 Newton-Cotes 公式求得每个子区间  $[x_k, x_{k+1}]$  上的积分值  $I_k$ , 然后再求和, 用  $\sum_{k=0}^{n-1} I_k$  作为所求积分  $I$  的近似值.

如果一种复化求积公式  $I_n$  当  $h \rightarrow 0$  时成立渐近关系式

$$\frac{I - I_n}{h^p} \rightarrow C, \quad C = \text{const.} \neq 0, \quad (10)$$

则称求积公式  $I_n$  是  $p$  阶收敛的.

## 1 多项式插值 (等距节点) 与数值求积

### 1.1 描述

- 1 在区间  $[-1, 1]$  上取  $x_k = -1 + \frac{2}{n}k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $n=10$ , 对函数  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$  作多

项式插值, 分别画出插值函数及  $f(x)$  的图形, 并估计误差. 由此插值公式推导对应的

积分公式 (积分系数可以用积分公式求数值解), 代数精度, 及积分余项, 并用此积分

公式计算  $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+25x^2} dx$  并估计误差.

### 1.2 解决方案

Lagrange 插值多项式 (1) 成为



$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}. \quad (11)$$

由 [1,定理 2.2] 得插值余项

$$R_n(x) := f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad (12)$$

其中  $\xi = \xi(x) \in [-1, 1]$ . 从而, 用插值多项式 (11) 逼近  $f(x)$  的截断误差限是

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad (13)$$

其中

$$M_{n+1} := \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)|.$$

式 (11) 的图像示于图 1, 可见 Runge 现象.

相应于 (11) 的插值型积分公式 (7) 为

$$I_n[f] = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k), \quad (14)$$

其中积分系数 (8) 为

$$A_k = \int_a^b \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx. \quad (15)$$

用 MATLAB 编程算得

$$\begin{aligned} A_0 &= A_{10} = 0.0536682967238523, \\ A_1 &= A_9 = 0.355071882849661, \\ A_2 &= A_8 = -0.162087141253808, \\ A_3 &= A_7 = 0.909892576559243, \\ A_4 &= A_6 = -0.870310245310246, \\ A_5 &= 1.42752926086259. \end{aligned}$$

由 [1,定理 4.1] 得 (15) 至少有  $n$  次代数精度. 当  $n$  为偶数时, 由 (参见 [1,定理 4.2])

$$E_n[x^{n+1}] = 0 \quad (16)$$

知此时 (15) 至少具有  $n+1$  次代数精度.

按 [1,pp.85] 之法可证明, 当  $n$  为偶数时, 积分余项

$$E_n[f] := I - I_n[f] = \int_{-1}^1 \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} (x - x_0) \omega_{n+1}(x) dx. \quad (17)$$

**猜想** 若插值型的求积公式 (7) 具有  $n+m$  次代数精度, 则用  $H_{n+m}(x)$  的插值余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+m+1)}(\xi)}{(n+m+1)!} \omega_{n+1}(x) \prod_{j=1}^m (x - x_{r_j}), \quad (0.1)$$

积分余项

$$E_n(x) = \int_a^b R_n(x) dx. \quad (0.2)$$

用 MATLAB 编程可验证  $E_{10}[x^{12}] \neq 0$ , 故  $I_{10}$  具有 11 次代数精度. 由 (17), 用 (14) 近似求积的截断误差限为



$$\left| E_n \left[ \frac{1}{1+25x^2} \right] \right| \leq \frac{M_{n+2}}{(n+2)!} \left| \int_{-1}^1 (x-x_0) \omega_{n+1}(x) dx \right|, \quad (18)$$

其中

$$M_{n+2} := \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} \left( \frac{1}{1+25x^2} \right) \right|.$$

用 MATLAB 编程算得

$$I_{10}^{(1)} \left[ \frac{1}{1+25x^2} \right] = 0.934660111130700,$$

这与积分精确值

$$I = \frac{1}{5} \arctan 5x \Big|_{-1}^1 \approx 0.549360306778006$$

相去甚远, 误差  $|I - I_{10}^{(1)}| \approx 0.385$ .

## 2 多项式插值 (Chebyshev) 与数值求积

### 2.1 描述

2 在区间  $[-1,1]$  上取点  $x_k = \cos \frac{2k+1}{2(n+1)} \pi$ ,  $k=0,1,2,\dots,n$ ,  $n=10$ , 对函数  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

作多项式插值, 分别画出插值函数及  $f(x)$  的图形, 并估计误差. 若取  $n=0, 1, 2$ , 由此插值公式推导对应的积分公式, 积分余项, 及代数精度, 并用此积分公式计算  $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+25x^2} dx$  并估计误差.

### 2.2 解决方案

与第 1 题相比, 本题采取了不同的插值节点. 新的 Lagrange 插值多项式仍具有 (11) 的形式, 其图像示于图 2. 可见 Runge 现象比第 1 题有所改善, 插值截断误差减小.

新的插值截断误差限仍具有 (13) 的形式. 特别地, 当  $n=0,1,2$  时, 插值截断误差限

$$\begin{aligned} |R_0[f]| &\leq M_1 |x-0| \leq M_1, \\ |R_1[f]| &\leq \frac{M_2}{2!} \left| \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right| \leq \frac{M_2}{4}, \\ |R_2[f]| &\leq \frac{M_3}{3!} \left| \left( x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) x \left( x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right| \leq \frac{M_3}{24}. \end{aligned}$$

相应的插值型积分公式仍具有 (14) 的形式. 特别地, 当  $n=0,1,2$  时, 相应的积分公式成为

$$\begin{aligned} I_0[f] &= 2f(0), \\ I_1[f] &= f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ I_2[f] &= \frac{4}{9}f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{10}{9}f(0) + \frac{4}{9}f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

容易验证  $I_0, I_1, I_2$  分别具有 1 次、1 次、3 次代数精度.



由 (0.2) 得积分余项

$$|E_0[f]| = \left| \int_{-1}^1 \frac{f''(\xi)}{2!} (x-0)^2 dx \right| \leq \frac{M_2}{3},$$

$$|E_1[f]| = \left| \int_{-1}^1 \frac{f''(\xi)}{2!} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) dx \right| \leq \frac{M_2}{2} \int_{-1}^1 \left|x^2 - \frac{1}{2}\right| dx,$$

$$|E_2[f]| = \left| \int_{-1}^1 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^2 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) dx \right| \leq \frac{M_4}{24} \int_{-1}^1 \left|x^2 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| dx.$$

计算得

$$I_0 \left[ \frac{1}{1+25x^2} \right] = 2,$$

$$I_1 \left[ \frac{1}{1+25x^2} \right] = \frac{4}{27},$$

$$I_2 \left[ \frac{1}{1+25x^2} \right] = \frac{274}{237},$$

这与精确值  $I = \frac{1}{5} \arctan 5x \Big|_{-1}^1 \approx 0.549360306778006$  相去甚远.

用 MATLAB 编程算得

$$I_{10}^{(2)} \left[ \frac{1}{1+25x^2} \right] \approx 0.566156473259776,$$

这与精确值比较接近, 误差  $|I - I_{10}^{(2)}| \approx 1.68 \times 10^{-2}$ .

### 3 分段线性插值与复化求积

#### 3.1 描述

- 3 在区间  $[-1,1]$  上取  $x_k = -1 + \frac{2}{n}k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $n=10$ , 对函数  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$  作分段折线函数插值, 分别画出插值函数及  $f(x)$  的图形, 并比较误差。由此插值公式推导对应的积分公式, 积分余项, 及算法的收敛阶, 并用此积分公式计算  $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+25x^2} dx$  并估计误差。

#### 3.2 解决方案

用插值基函数表示的分段线性插值函数为 ( $h := \frac{b-a}{n}$ ,  $x_i := a + ih$ ,  $i = 0, \dots, n$ )

$$I_h(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x), \quad (19)$$

其中插值基函数



$$l_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j, \quad (j = 0 \text{ 略去}) \\ \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \quad (j = n \text{ 略去}) \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}]. \end{cases} \quad (20)$$

分段线性插值函数 (19) 的图像示于图 3, 可见插值误差小于第 1 题和第 2 题的.

相应于 (19) 的插值型积分公式为

$$I_n^{(3)}[f] = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k), \quad (21)$$

其中积分系数

$$A_k = \int_a^b l_k(x) dx = \begin{cases} h/2, & k = 0, n, \\ h, & k = 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (22)$$

事实上, (21) 便是复化梯形公式

$$I_n^{(3)}[f] = T_n[f] := \frac{h}{2} \left[ f(a) + 2 \sum_{k=1}^n f(x_k) + f(b) \right], \quad (23)$$

其积分余项

$$I[f] - T_n[f] = \frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \quad \eta \in [a, b]. \quad (24)$$

由 (24) 可看出, 复化求积公式 (23) 是二阶收敛的.

计算出

$$I_{10}^{(3)} = T_{10} \left[ \frac{1}{1+25x^2} \right] = 0.551221719457014,$$

可见这与精确值相当接近, 其误差  $|I - I_{10}^{(3)}| \approx 1.86 \times 10^{-3}$  比第 2 题  $I_{10}^{(2)}$  的还要小.

## 4 复化 Gauss-Legendre 公式求积

### 4.1 描述

- 4 在区间  $[-1, 1]$  上, 将区间等分 10 等分, 每一段上用两点 Gauss 型公式进行积分计算, 得到复化 Gauss 型积分公式, 推导此积分公式, 积分余项, 及算法的收敛阶, 并用此积分

公式计算  $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+25x^2} dx$  并估计误差.

### 4.2 解决方案

记  $h := \frac{b-a}{n}$ ,  $x_i := a + ih$ ,  $i = 0, \dots, n$ . 在小区间  $[x_{k-1}, x_k]$  上应用两点 Gauss-Legendre 公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (25)$$

得



$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[ \tilde{f}_k \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \tilde{f}_k \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right], \quad (26)$$

其中

$$\tilde{f}_k(t) := f \left( \frac{h}{2} t + a + \left( k - \frac{1}{2} \right) h \right). \quad (27)$$

于是, 得到复化两点 Gauss-Legendre 公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_n^{(4)}[f] := \sum_{k=1}^n \frac{h}{2} \left[ \tilde{f}_k \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \tilde{f}_k \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]. \quad (28)$$

由 [1, 定理 4.5] 得 (26) 的积分余项

$$|R_k(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})^2 (x - x_k)^2 dx \right| \leq \frac{M_4}{4!} h \left( \frac{h}{2} \right)^4, \quad (29)$$

进而, 复化两点 Gauss-Legendre 公式 (28) 的积分余项

$$|R(x)| \leq \sum_{k=1}^n |R_k(x)| \leq \frac{M_4}{384} \frac{(b-a)^5}{n^4} = \frac{M_4(b-a)}{384} h^4. \quad (30)$$

可见 (28) 是四阶收敛的.

计算得

$$I_{10}^{(4)} \left[ \frac{1}{1+25x^2} \right] \approx 0.549921651152803,$$

可见这与精确值非常接近, 其误差  $|I - I_{10}^{(4)}| \approx 5.613 \times 10^{-4}$  比第 3 题  $I_{10}^{(3)}$  的还要小.

## 5 讨论与结论

- 5 分析比较上面各组近似函数和近似积分公式 (包括误差分析和计算量), 说说它们各自的特点和你的体会. 你能在此基础上做进一步的探索吗?

本实验的主题是插值法与数值积分. 本实验通过公式推导和 MATLAB 编程实现, 比较了按 (1) 等距节点多项式插值及相应的数值积分, (2) Chebyshev 多项式插值及相应的数值积分, (3) 分段线性插值及复化梯形求积, (4) 复化两点 Gauss-Legendre 公式, 这四种方案

对函数  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$  进行插值和数值积分的效果. 结果表明: (1) 三种插值法的计算量相近,

而对函数  $f(x)$  插值效果从好到坏依次: 分段线性插值、Chebyshev 多项式插值、等距节点多项式插值. 其中, 在两种多项式插值中都观测到 Runge 现象; (2) 四种数值积分方法的计算量相近, 这是因为使用求积公式时, 计算的工作量主要耗费在函数求值上 [1, pp.87]. 而对函数  $f(x)$  在  $x \in [-1, 1]$  上数值积分误差从小到大依次: 复化两点 Gauss-Legendre 公式、复化梯形求积、Chebyshev 多项式近似求积、等距节点多项式近似求积.

在本实验的基础上, 还可探究以下问题: (1) 其他插值法的成本比较; (2) 其他数值积分方法, 如 Romberg 算法的编程实现; (3) 其他理论问题, 包括误差分析、算法收敛速度等.

为了能完成本实验, 作者迅速自学了一些与本实验相关的知识点, 这可作为期末大预习工作的良好开端. 实验过程中的理论推导和编程实践, 使得作者增进了对插值法与数值积分相关知识的理解.

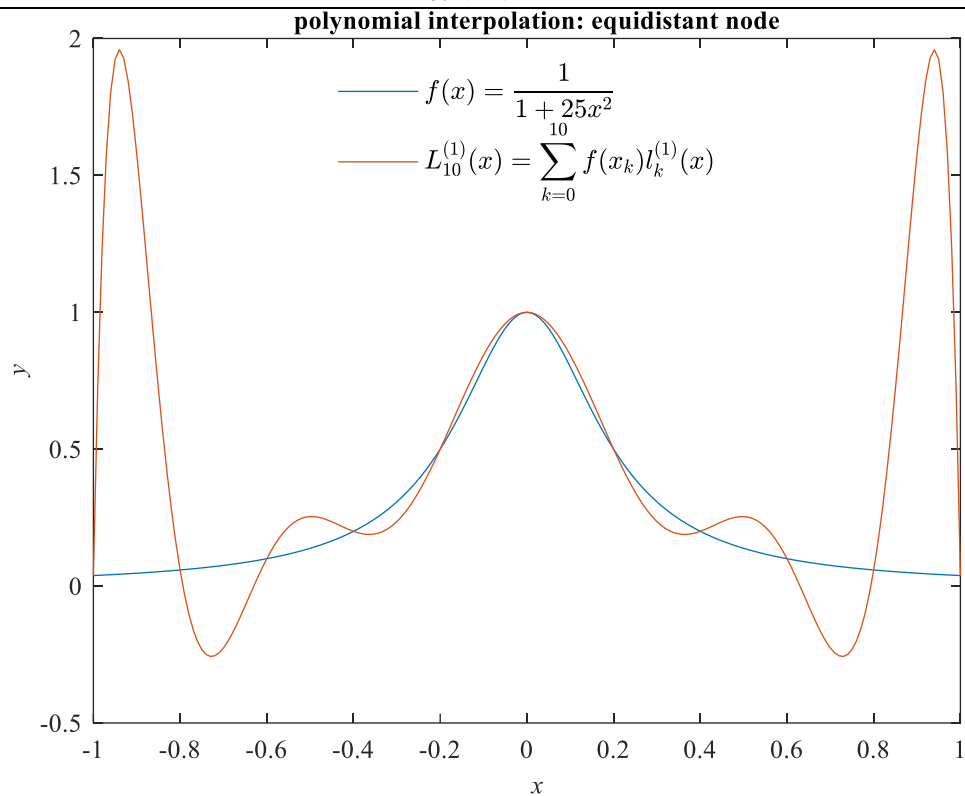


图 1 Lagrange 插值多项式-等距节点

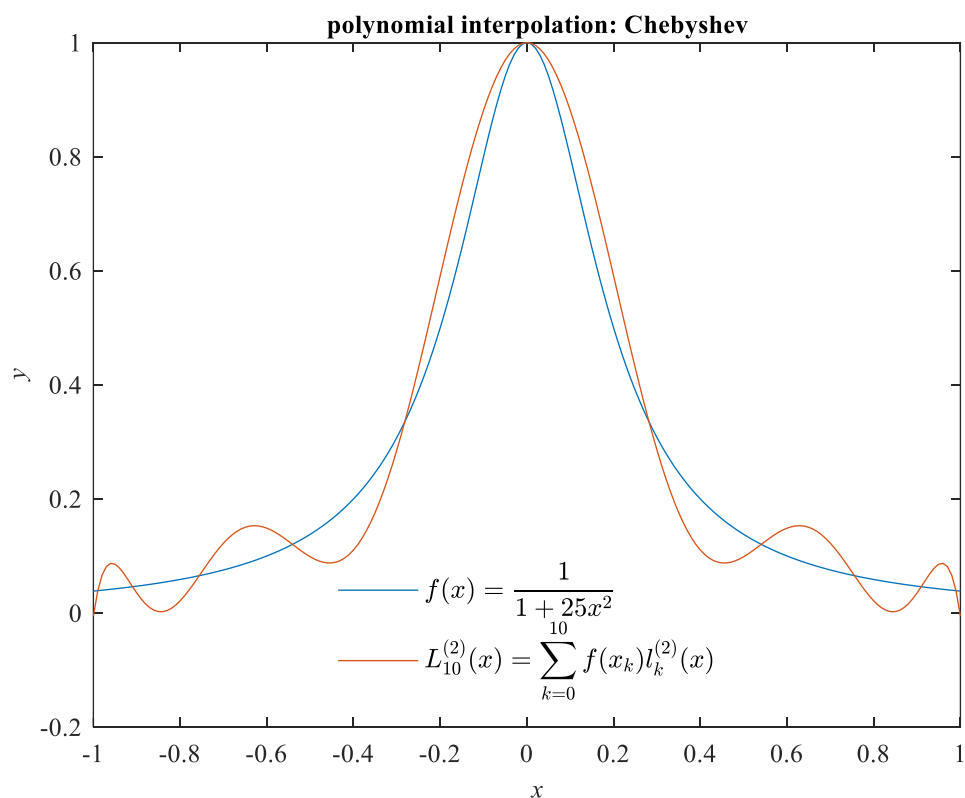


图 2 Lagrange 插值多项式-Chebyshev



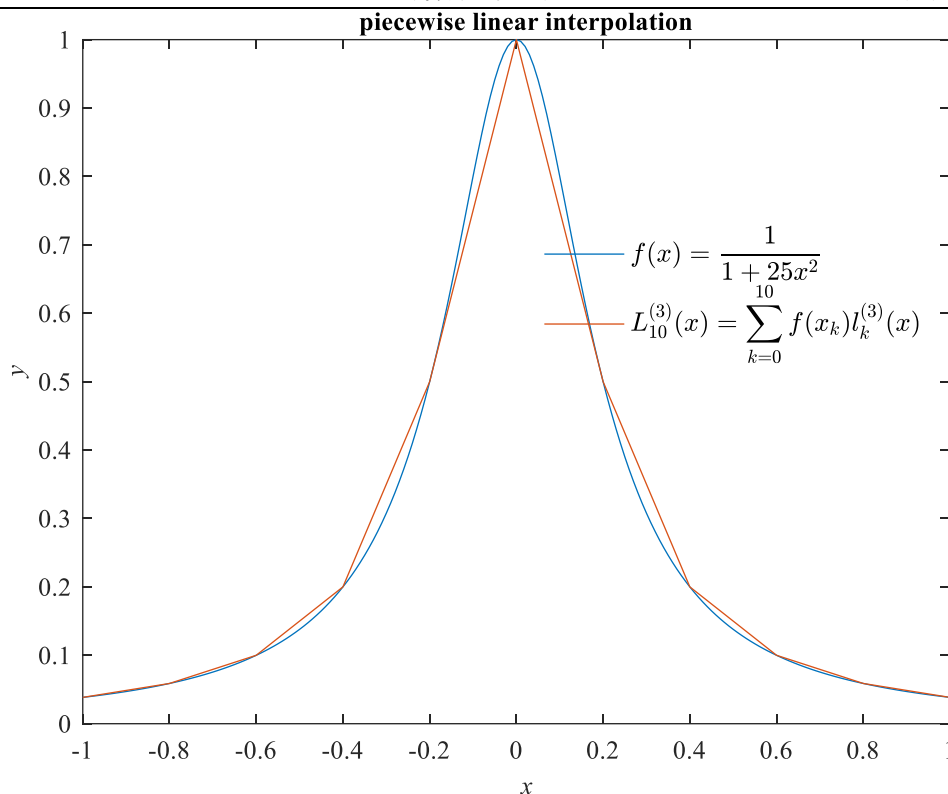


图 3 分段线性插值函数

## 致谢

作者非常感谢上海交通大学 2021 年秋季学期研-MATH6004-M03-计算方法课程的主讲教师曾进老师。作者在本科期间选修过增进老师主讲的本科数值分析课程，当时由于时间紧迫，很多内容未能掌握。如今在研究生阶段又选修了这门课，我会尽力学好这门课。

## 参考文献

- [1] 李庆阳,王能超,易大义.数值分析[M].第5版.武汉:华中科技大学出版社,2021.

危国锐 男, 1998 年生, 硕士研究生.

E-mail: weiguorui@sjtu.edu.cn

## 附录 本实验使用的 Matlab 源代码

参见: [https://grwei.github.io/SJTU\\_2021-2022-1-MATH6004/](https://grwei.github.io/SJTU_2021-2022-1-MATH6004/).

# Title

Guorui Wei

(School of Oceanography, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** Abstract.

**Keywords:** keyword1, keyword2