计算方法实验题

危国锐 120034910021
（上海交通大学海洋学院，上海 200030）

摘 要： 摘要.
关键词： 关键词 1, 关键词 2

0 预备知识

0.1 插值法

函数 $f(x)$ 关于**插值区间** $[a,b]$ 上的**插值节点** $x_0,\cdots,x_n,$ 的 Lagrange **插值多项式**

$$L_n(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x), \tag{1}$$

其中**插值基函数**

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega_{n+1}'(x_k)}, \tag{2}$$

记号

$$\omega_{n+1}(x) \coloneqq \prod_{i=0}^{n} (x-x_i). \tag{3}$$

定义 $\omega_0 \equiv 1$.

函数 $f(x)$ 关于插值区间 $[a,b]$ 上的插值节点 $x_0,\cdots,x_n,$ 的 Newton **差商插值多项式**

$$N_n(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\cdots,x_k]\omega_k(x), \tag{4}$$

其中函数 $f(x)$ 关于节点 $x_0,\cdots,x_k$ 的 k **阶差商**定义为

$$\begin{aligned} f[x_0,\cdots,x_k] &= \frac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}, \\ f[x_0] &\coloneqq f(x_0). \end{aligned} \tag{5}$$

可以证明（参见 [1,定理 2.1]）（1）（4）是相同的插值多项式，即有

$$L_n \equiv N_n,$$

且**插值余项**

$$\begin{aligned} R_n(x) &\coloneqq f(x) - L_n(x) = f(x) - N_n(x) \\ &= f[x,x_0,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \qquad \eta = \eta(x) \in [a,b]. \end{aligned} \tag{6}$$

完成日期：2021-12-28
课程名称：研-MATH6004-M03-计算方法

0.2 数值积分

取 $I_n := \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x$ 作为积分 $I := \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值，这样构造出的求积公式

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{7}$$

称为**插值型**的，其中**求积系数** A_k 通过插值基函数 $l_k(x)$ 的积分

$$A_k = \int_a^b l_k(x)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

得出.

由插值余项定理（6）立得插值型求积公式（7）的余项

$$E_n[f] := I - I_n = \int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

如果某个求积公式对于次数不大于 m 的多项式均能准确成立，但对于 $m+1$ 次多项式就不一定准确，则称该求积公式具有 **m 次代数精度**.

一般地，欲使某个求积公式具有 m 次代数精度，只要令它对于 $f(x) = 1, x, x^2, \cdots, x^m$ 都能准确成立.

可以证明（参见 [1,定理 4.1]），形如（7）的求积公式至少具有 n 次代数精度的充要条件是，它是插值型的.

设将积分区间 $[a,b]$ 划分为 n 等份，步长 $h = \frac{b-a}{h}$. 所谓**复化求积法**，就是先用低阶的 Newton-Cotes 公式求得每个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的积分值 I_k, 然后再求和，用 $\sum_{k=0}^{n-1} I_k$ 作为所求积分 I 的近似值.

如果一种复化求积公式 I_n 当 $h \to 0$ 时成立渐近关系式

$$\frac{I - I_n}{h^p} \to C, \qquad C = \mathrm{const.} \neq 0, \tag{10}$$

则称求积公式 I_n 是 **p 阶收敛**的.

1 多项式插值（Lagrange）与数值求积

1.1 描述

1 在区间[-1,1]上取 $x_k = -1 + \frac{2}{n}k$，$k = 0,1,2,\cdots,n$，n=10，对函数 $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ 作多项式插值，分别画出插值函数及 $f(x)$ 的图形，并估计误差。由此插值公式推导对应的积分公式（积分系数可以用积分公式求数值解），代数精度，及积分余项，并用此积分公式计算 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+25x^2} dx$ 并估计误差。

1.2 解决方案

Lagrange 插值多项式（1）成为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}. \tag{11}$$

由定理 2.2 得插值余项

$$R_n(x)\coloneqq f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \tag{12}$$

其中 $\xi=\xi(x)\in[-1,1]$. 从而，用插值多项式（11）逼近 $f(x)$ 的截断误差限是

$$|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|, \tag{13}$$

其中

$$M_{n+1}\coloneqq\max_{-1\le x\le 1}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

式（11）的图像示于图 1，可见 Runge 现象.

相应于（11）的插值型积分公式（7）为

$$I_n[f]=\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k), \tag{14}$$

其中积分系数（8）为

$$A_k=\int_a^b\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\,\mathrm{d}x. \tag{15}$$

用 MATLAB 编程算得

$$\begin{aligned}
A_0&=A_{10}=0.0536682967238523,\\
A_1&=A_9=0.355071882849661,\\
A_2&=A_8=-0.162087141253808,\\
A_3&=A_7=0.909892576559243,\\
A_4&=A_6=-0.870310245310246,\\
A_5&=1.42752926086259.
\end{aligned}$$

由定理 4.1 得（15）至少有 n 次代数精度. 当 n 为偶数时，由（参见 [1,定理 4.2]）

$$E_n[x^{n+1}]=0 \tag{16}$$

知此时（15）至少具有 $n+1$ 次代数精度.

按 [1,pp.85] 之法可证明，当 n 为偶数时，积分余项

$$E_n[f]\coloneqq I-I_n[f]=\int_{-1}^{1}\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}(x-x_0)\omega_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

用 MATLAB 编程可验证 $E_{10}[x^{12}]\neq 0$, 故 I_{10} 具有 11 次代数精度. 由（17），用（14）近似求积的截断误差限为

$$\left|E_n\left[\frac{1}{1+25x^2}\right]\right|\le\frac{M_{n+2}}{(n+2)!}\left|\int_{-1}^{1}(x-x_0)\omega_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\right|, \tag{18}$$

其中

$$M_{n+2}\coloneqq\max_{-1\le x\le 1}\left|\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}}\left(\frac{1}{1+25x^2}\right)\right|.$$

用 MATLAB 编程算得

$$I_{10}^{(1)}\left[\frac{1}{1+25x^2}\right]=0.934660111130700,$$

这与积分精确值

$$I = \frac{1}{5}\arctan 5x\Big|_{-1}^{1} \approx 0.549360306778006$$

相去甚远，误差 $\left|I - I_{10}^{(1)}\right| \approx 0.385.$

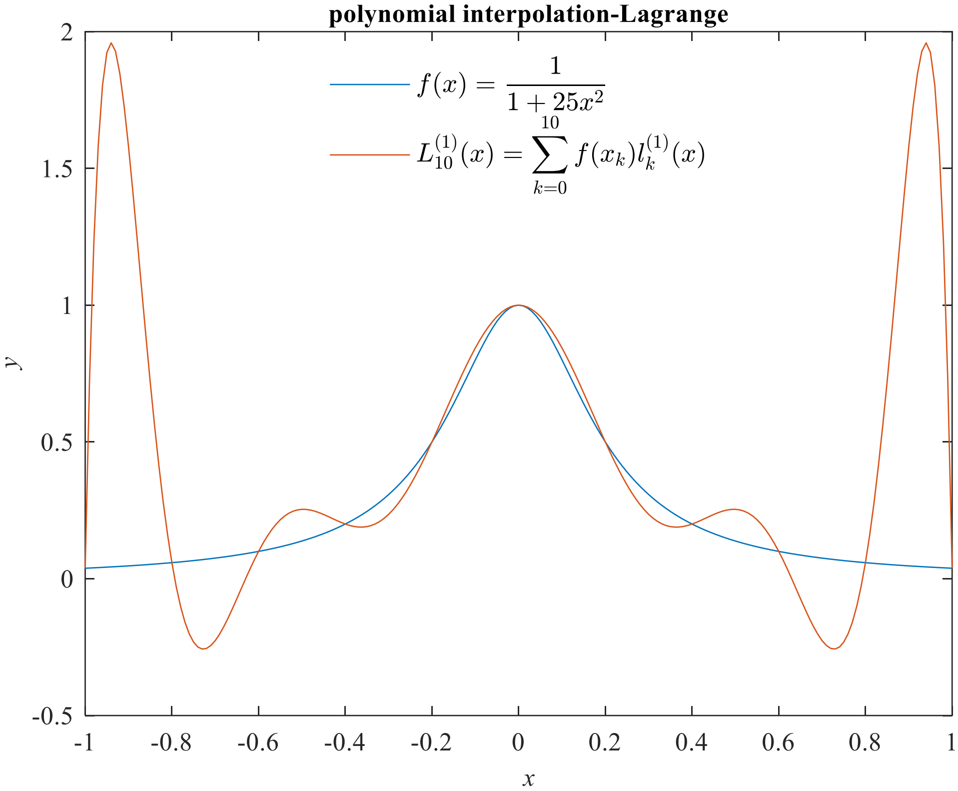

图 1 Lagrange 插值多项式-等距节点

2 多项式插值（Chebyshev）与数值求积

2.1 描述

2 在区间[-1,1]上取点 $x_k = \cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi$，$k = 0,1,2,\cdots,n$，n=10，对函数 $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

作多项式插值，分别画出插值函数及 $f(x)$ 的图形，并估计误差。若取 n=0，1，2，由此插值公式推导对应的积分公式，积分余项，及代数精度，并用此积分公式计算 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+25x^2}dx$ 并估计误差。

2.2 解决方案

与第 1 题相比，本题采取了不同的插值节点. 新的 Lagrange 插值多项式仍具有（11）的形式，其图像示于图 2. 可见 Runge 现象比第 1 题有所改善.

新的插值截断误差限仍具有（13）的形式. 特别地，当 $n = 0,1,2$ 时，插值截断误差限

$$|R_0[f]| \le M_1|x - 0| \le M_1,$$

$$|R_1[f]| \le \frac{M_2}{2!}\left|\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| \le \frac{M_2}{4},$$
$$|R_3[f]| \le \frac{M_3}{3!}\left|\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| \le \frac{M_3}{24}.$$

相应的插值型积分公式仍具有（14）的形式. 特别地，当 $n=0,1,2$ 时，相应的积分公式成为

$$I_0[f]=2f(0),$$
$$I_1[f]=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$I_2[f]=\frac{4}{9}f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{10}{9}f(0)+\frac{4}{9}f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

容易验证 I_0, I_1, I_2 分别具有 1 次、1 次、3 次代数精度. 相应的积分余项成为

$$E_n[f]=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - I_n[f].$$

计算得

$$I_0\left[\frac{1}{1+25x^2}\right]=2,$$
$$I_1\left[\frac{1}{1+25x^2}\right]=\frac{4}{27},$$
$$I_2\left[\frac{1}{1+25x^2}\right]=\frac{274}{237},$$

这与精确值 $I=\frac{1}{5}\arctan 5x\Big|_{-1}^{1}\approx 0.549360306778006$ 相去甚远.

用 MATLAB 编程算得

$$I_{10}^{(2)}\left[\frac{1}{1+25x^2}\right]\approx 0.566156473259776,$$

这与精确值比较接近，误差 $\left|I-I_{10}^{(2)}\right|\approx 1.68\times 10^{-2}$.

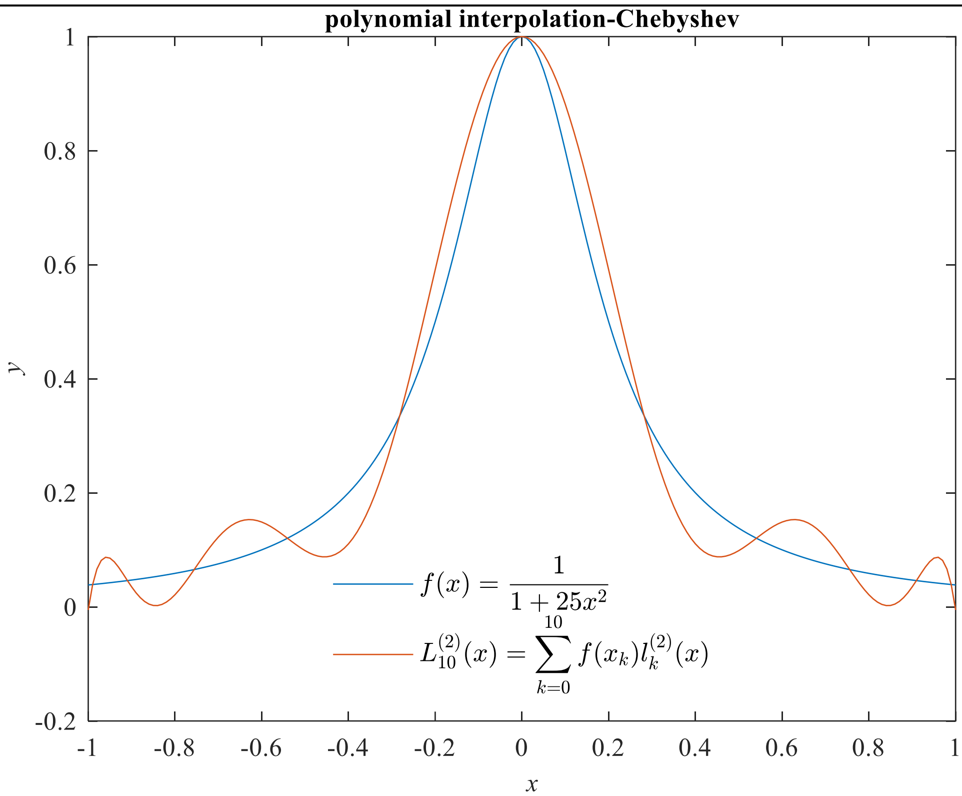

图 2 Lagrange 插值多项式-Chebyshev

3 分段线性插值与复化求积

3.1 描述

3 在区间[-1,1]上取 $x_k = -1 + \frac{2}{n}k$，$k = 0, 1, 2, \cdots, n$，n=10，对函数 $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ 作分段折线函数插值，分别画出插值函数及 $f(x)$ 的图形，并比较误差。由此插值公式推导对应的积分公式，积分余项，及算法的收敛阶，并用此积分公式计算 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+25x^2} dx$ 并估计误差。

3.2 解决方案

用插值基函数表示的分段线性插值函数为（$h \coloneqq \frac{b-a}{h}$，$x_i \coloneqq a + ih$，$i = 0, \cdots, n$）

$$I_h(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x), \tag{19}$$

其中插值基函数

$$
l_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \le x \le x_j, \quad (j = 0 \text{ 略去}) \\ \dfrac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}, & x_j \le x \le x_{j+1}, \quad (j = n \text{ 略去}) \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}]. \end{cases} \tag{20}
$$

分段线性插值函数（19）的图像示于图 3，可见插值误差小于第 1 题和第 2 题的.

相应于（19）的插值型积分公式为

$$
I_n^{(3)}[f] = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), \tag{21}
$$

其中积分系数

$$
A_k = \int_a^b l_k(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} h/2, & k = 0, n, \\ h, & k = 1, \cdots, n-1. \end{cases} \tag{22}
$$

事实上，（21）便是**复化梯形公式**

$$
I_n^{(3)}[f] = T_n[f] \coloneqq \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n} f(x_k) + f(b)\right], \tag{23}
$$

其积分余项

$$
I[f] - T_n[f] = \frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \qquad \eta \in [a, b]. \tag{24}
$$

由（24）可看出，复化求积公式（23）是二阶收敛的.

计算出

$$
I_{10}^{(3)} = T_{10}\left[\frac{1}{1 + 25x^2}\right] = 0.551221719457014,
$$

可见这与精确值相当接近，其误差 $\left|I - I_{10}^{(3)}\right| \approx 1.86 \times 10^{-3}$ 比第 2 题 $I_{10}^{(2)}$ 的还要小.

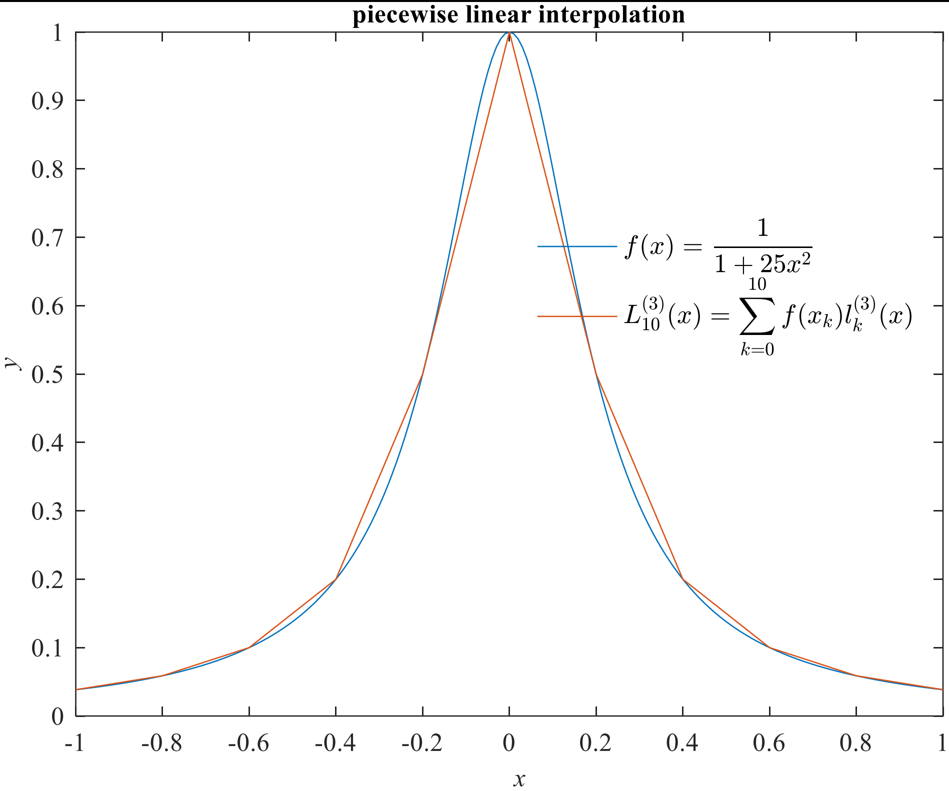

图 3 分段线性插值函数

4 复化 Gauss-Legendre 公式求积

4.1 描述

4 在区间[-1,1]上，将区间等分 10 等分，每一段上用两点 Gauss 型公式进行积分计算，得到复化 Gauss 型积分公式，推导此积分公式，积分余项，及算法的收敛阶，并用此积分公式计算 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+25x^2} dx$ 并估计误差。

4.2 解决方案

记 $h \coloneqq \frac{b-a}{h}$, $x_i \coloneqq a + ih,\ i = 0,\cdots,n$. 在小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上应用两点Gauss-Legendre 公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{25}$$

得

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left[\tilde{f}_k\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \tilde{f}_k\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right], \tag{26}$$

其中

$$\tilde{f}_k(t) \coloneqq f\left(\frac{h}{2}t + a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h\right). \tag{27}$$

于是得到复化两点 Gauss-Legendre 公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx I_n^{(4)}[f] := \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{2}\left[\tilde{f}_k\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \tilde{f}_k\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]. \tag{28}$$

由 [1,定理 4.5] 得（26）的积分余项

$$|R_k(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x - x_{k-1})^2(x - x_k)^2\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{M_4}{4!}h\left(\frac{h}{2}\right)^4, \tag{29}$$

进而复化两点 Gauss-Legendre 公式（28）的积分余项

$$|R(x)| \le \sum_{k=1}^{n}|R_k(x)| \le \frac{M_4}{384}\frac{(b-a)^5}{n^4} = \frac{M_4(b-a)}{384}h^4. \tag{30}$$

可见（28）是四阶收敛的.

计算得

$$I_{10}^{(4)}\left[\frac{1}{1+25x^2}\right] \approx 0.549360306778006,$$

可见这与精确值非常接近，其误差 $\left|I - I_{10}^{(4)}\right| \approx 5.613 \times 10^{-4}$ 比第 3 题 $I_{10}^{(3)}$ 的还要小.

5 讨论与结论

致谢

参考文献

[1] 李庆阳,王能超,易大义.数值分析[M].第 5 版.武汉:华中科技大学出版社,2021.

危国锐 男，1998 年生，硕士研究生.

E-mail: weiguorui@sjtu.edu.cn

附录 本实验使用的 Matlab 源代码

Title

Guorui Wei

(*School of Oceanography*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200030, *China*)

Abstract: Abstract.

Keywords: keyword1, keyword2