

Quanten-Hall-Effekt

Stichworte Quanten-Hall

- klassischer Hall-Effekt, Zyklotronfrequenz, Leitfähigkeitstensor
- MOS-FET
- Hallbar, GaAs/AlGaAs Heterostruktur und Banddiagramm
- Zustandsdichte in 1d, 2d, 3d
- 2DEG
- Fermieenergie, Fermikugel
- Landauniveaus, Landaufächer
- Quanten-Hall Effekt, Shubnikov-de Haas Effekt
- von Klitzing Konstante, Bedeutung für die Metrologie, experimentelle Voraussetzungen (B, T)
- Randkanalmodell
- kompressible und inkompressible Bereiche
- persistente Photoleitfähigkeit, DX-Zentrum

Literatur

- als schnelle Übersicht: K. von Klitzing, R. Gerhardt und J. Weis, 25 Jahre Quanten-Hall-Effekt, Physik Journal 4 (2005) Nr. 6, S. 37
- zur Metrologie: E. Braun und H. Bachmaier, Der Quanten-Hall-Effekt und das Ohm, Physik in unserer Zeit 32 (2001) Nr. 6, S. 260
- C. W. J. Beenakker and H. van Houten, Quantum Transport in Semiconductor Nanostructures, Solid State Physics, 44, 1-228 (1991) [arXiv:cond-mat/0412664, <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0412664>]: Sections I C & D, IV A1 & A2

Quanten-Hall-Effekt

Der Quanten-Hall-Effekt (QHE) ist einer der spektakulärsten physikalischen Phänomene, die in den letzten Jahrzehnten entdeckt wurden. Der QHE ist ein magnetfeldinduzierter Quanteneffekt, der an Ladungsträgersystemen mit quasi-zweidimensionalen Eigenschaften (Inversions- und Akkumulationsschichten auf Halbleiternoberflächen)¹ bei hinreichend hoher Beweglichkeit der Ladungsträger beobachtet werden kann. Die geforderte hohe Beweglichkeit setzt üblicherweise Experimente bei tiefen Temperaturen (Temperaturen flüssigen Heliums) voraus. Man unterscheidet heute zwischen dem integralen²⁻⁶ und dem fraktionalen QHE.⁷ Durch den integralen Quanten-Hall-Effekt wurde es möglich, ein Widerstandsnormale (Klitzing-Konstante) einzuführen, während der fraktionale QHE viel zum Verständnis kollektiver Phänomene in quasi-zweidimensionalen Ladungsträgersystemen beigetragen hat. Im vorliegenden Versuch sollen insbesondere die Grundlagen des integralen QHE in einem Experiment studiert werden.

Die Proben für Untersuchungen des QHE sind wie bei der bekannten klassischen Hall-Messung aufgebaut.^{8,9} Die Abb. 1 zeigt den Aufbau der Hall-Probe im aktuellen Experiment. Das Magnetfeld wird senkrecht zur Probenebene (z-Richtung) angelegt. Die Hall-Spannung U_{Hall} wird senkrecht zur Strom- und Magnetfeldrichtung gemessen ($U_{\text{Hall}} = U_{xy}$, Notation: Stromrichtung in x- und Spannungsabgriff in y-Richtung). Wird bei konstantem Probenstrom das Magnetfeld B variiert, werden in bestimmten Magnetfeldbereichen charakteristische konstante Hall-Spannungswerte beobachtet werden, die nicht klassisch gedeutet werden können. Die Längsspannung U_{xx} wird in Stromrichtung senkrecht zur Magnetfeldrichtung abgegriffen. In der Längsspannung können Oszillationen beobachtet werden, die eine Periodizität in $1/B$ aufweisen (Shubnikov-de Haas-Effekt). Die SdH-Oszillationsperiode ist direkt mit der Fermi-Fläche des Ladungsträgersystems verknüpft, und die Analyse erlaubt vielfältige Aussagen zu den Eigenschaften der Ladungsträger (Anisotropie der Fermi-Fläche, effektive Masse der Ladungsträger, Landé g-Faktor, etc.).

Einen Überblick über die Messapparatur gibt die Abb. 2. Der Messaufbau besteht aus einem Rack mit elektronischen Geräten, einem 9/11T Kryomagnetsystem mit variablem Temperatureinsatz (VTI) und einer Vorvakuumpumpe mit Flussregelung. Die Abbildungen 3 und 4 zeigen die Querschnitte des Kryostaten ohne und mit Magnetfeldeinsatz.

Die Verschaltung des Messsystems ist in Abb. 5 gezeigt. Das Magnetfeld wird in der Bohrung (Durchmesser 52 mm) einer supraleitenden Niob-Titan-Spule erzeugt. Die Magnetspule taucht im Innern des Edelstahl-Kryostaten mit LN_2 -Mantel in flüssiges Helium ein. Bei einer Stromstärke I_M von 93,93 A (114,8 A) entsteht eine Flussdichte von 9 T (11 T) im Zentrum der Spule bei einer Temperatur von 4,2 (2,2) K. Die Feldkonstante des Magneten beträgt 0,095815 T/A. Das Magnetfeld wird als Spannungsabfall über einen Shunt-Widerstand ausgelesen, der in den Stromkreis eingebracht ist. Ein Spulenstrom von 1 A ergibt hier einen Spannungsabfall von 2,138583 mV.

Die Probe, eine n-modulationsdotierte $\text{Al}_{1-x}\text{Ga}_x\text{As}$ -GaAs Heterostruktur,^{9,10} ist zusammen mit einem geeichten Kohlewiderstand (100 Ω Allen Bradley, Eich-tabelle siehe Abb. 6), einer Lampe und einem Heizwiderstand (250 Ω) in einem VTI im Zentrum der supraleitenden Spule eingebaut. Der Kohlewiderstand dient als Temperatursensor und wird mit einem konstanten Strom von 10 μA betrieben. Auf die Anschlüsse für die Probe, die Heizung, die Lampe und den Temperatursensor kann über eine Probenbox (Abb. 7) zugegriffen werden. Die Probe wird senkrecht zu ihrer Längsrichtung (Stromflussrichtung) vom Magnetfeld durchsetzt

(transversale Anordnung). Zwei Stromkontakte (1; 4) und vier Potentialsonden (2; 3) und (5; 6) an den sich gegenüberliegenden Längsseiten sind vorhanden. Alle Kontakte liegen in einer Ebene, auf der das Magnetfeld senkrecht steht.

Mit Hilfe des VTI (Abb. 8) lässt sich die Temperatur der Probe komfortabel und schnell variieren. Der VTI besteht aus dem Isolierteil, einem unten offenen Überrohr mit Nadel und einer Innensee (Probenaufnahme). Das Isolierteil besteht aus zwei ineinander geschobenen dünnen Edelstahlrohren mit Zwischenvakuum. Der Kopf enthält ein Evakuierventil, um das Zwischenvakuum herstellen zu können, ein Sicherheitsventil, eine Quetschverbindung und einen Pumpventil. Der Innenraum ist am Boden über ein dünnes Edelstahlröhrchen mit dem Außenraum verbunden. In den Boden des Isolierteils kann das Überrohr mit Nadel eingeschraubt werden. Dadurch erhält man die Funktion eines Nadelventils, das es erlaubt, eine definierte Öffnung zwischen Außen- und Innenraum einzustellen. Das Überrohr wird oben mit der Quetschverbindung gedichtet. In das Überrohr wird der Probenträger mit Probe eingeführt und oben mit einer KF-Klemme geschlossen.

Durch Drehung des Nadelventils (Drehung des Überrohrs mit Innensee, eine 360°-Drehung reicht aus, **die Bedienung des Nadelventils erfordert nicht sehr viel Kraft und sollte aus Sicherheitsgründen nur mit zwei Fingern erfolgen**) aus dem geschlossenen Zustand wird der Innenraum zum Helium-Bad geöffnet. Helium kann dann in den Innenraum strömen und wird nach einer gewissen Zeit den Stand im He-Bad annehmen. Ist der Innenraum warm, kann der Vorgang allerdings recht lange dauern. Um den Abkühlvorgang zu beschleunigen bzw. um effizient Helium in den Probenraum zu befördern, sollte am Pumpflansch des VTI-Kopfes sanft (Feindosierventil in Stellung 11 Skt., siehe weiter unten) gepumpt werden. Der Probenraum kann so innerhalb weniger Minuten mit Helium geflutet werden. Der Aufbau des Pumpstandes mit Flussregelung ist in Abb. 9 gezeigt.

Nach dem Abschalten der Pumpe ist die Verbindung vom Pumpflansch zur He-Rückföhrleitung zu öföfnen, damit sich kein Überdruck im VTI aufbauen kann. In diesem Zustand sind dann Experimente bei 4,2 K möglich. Um bei tieferen Temperaturen messen zu können, ist das Nadelventil nach der Befüllung des VTI mit Helium zu schließen. Durch die Reduktion des He-Dampfdrucks (Anzeige mit Manometer) kann so eine tiefere Temperatur eingestellt werden. Die Temperatur wird stabilisiert indem der Dampfdruck konstant gehalten wird. Dies erfolgt über einen in Abb. 9 gezeigten Manostat, der zwischen Pumpe und VTI geschaltet ist. Der Manostat besteht im Prinzip aus einem abgeschlossenen Puffervolumen, durch das die Pumpleitung geführt wird. Im Bereich des Puffervolumens ist die Pumpleitung als flexible Gummimembran ausgefööhrt. Das Puffervolumen ist über ein Ventil mit der Ausgangsseite der Pumpleitung verbunden. Ist der Druck im Puffervolumen größer als in der Pumpleitung, wird die Membran zusammengepresst und die Pumpleitung verschlossen. Steigt der Druck in der Pumpleitung, entspannt sich die Membran und die Pumpleitung wird wieder freigegeben. Die Temperaturstabilisierung auf diese Weise funktioniert nur bedingt, da sie sehr träge arbeitet und mit relativ starken Druckschwankungen bzw. Temperaturänderungen verbunden ist.

Eine akkurate Temperaturstabilisierung wird durch die folgende Vorgehensweise gewährleistet: Man pumpt zunächst bei geöffnetem Bypass-Ventil zum Puffervolumen ab, bis der Zieldruck bzw. die angestrebte Temperatur erreicht ist. Das Feindosierventil an der Vorvakuum-pumpe sollte hierbei immer auf 11 Skt. eingestellt sein, die Abpumpgeschwindigkeit wird mit dem Grobdosierventil gesteuert. Liegt der Zieldruck im Puffervolumen vor bzw. ist die Zieltemperatur erreicht, wird das Bypass-Ventil geschlossen. Mit dem Grobdosierventil wird der He-Fluss zunächst voreingestellt. Die Gummimembran sollte sich dann im entspannten Zu-

stand befinden. Kleine Flussänderungen können anschließend mit dem Feindosierventil ausgeglichen werden. Bei optimaler Einstellung der Ventile an der Vorvakuumpumpe sollte die Membran völlig entspannt sein. Die Temperatur ist dann stabil. Die Membran sollte während der Messung aber weiter beobachtet werden, um gegebenenfalls bei Änderungen mit dem Feindosierventil nachregeln zu können.

Die Computer-unterstützte Messwertaufnahme ermöglicht eine komfortable Versuchsdurchführung und Datenanalyse. Die Messwertaufnahme basiert auf der Plattform Labview, und die Datenaufbereitung wird mit Origin durchgeführt. Beide Programme sind im Laborbereich weit verbreitet und werden als Bestandteil der Ausbildung angesehen. Vier Spannungswerte (U_{Hall} , U_{xx} , U_{Shunt} und $U_{\text{A.B.}}$) werden gleichzeitig in den Computer über eine DAQ-Karte eingelesen und in einem File gespeichert. Die Probenspannungen U_{Hall} und U_{xx} , werden mit einem Lock-in Verstärker im Wechselspannungsmodus gemessen. Der Probenstrom wird über einen Vorwiderstand aus der Referenzspannung des einen Lock-in Verstärkers generiert. Die Referenzspannung und der Vorwiderstand sollten so aufeinander abgestimmt sein, dass ein effektiver Strom von $0,1 \mu\text{A}$ durch die Probe fließt. Die Ausgänge der Lock-in Verstärker werden mit den Eingängen AI0 und AI1 der DAQ-Karte verbunden.

Zur Durchführung des Experiments wird zunächst flüssiger Stickstoff (LN_2) in den entsprechenden Einfüllstutzen am Kryostaten gefüllt. Anschließend wird aus einem He-Vorratsgefäß flüssiges Helium in den Spulen- und Probenraum übergehebert (Vakuummantel-Heber). **(Das Befüllen des Kryostaten mit LN_2 und LHe wird von dem Betreuer durchgeführt und gehört nicht zu den Aufgaben der Studenten. Um die Kondensation von Wasser auf dem Kryostaten zu verhindern, sind die Leitungen während des Befüllvorgangs mit einem Fön zu wärmen.)** Das verdampfende Helium wird durch Anschluss an ein Rohrleitungssystem der Rückgewinnungsanlage wieder zugeführt. Der Heliumstand wird ständig mit einem Niveau-Anzeiger überwacht. **Die Spule darf auf keinen Fall betrieben werden, wenn das Gerät einen Heliums-Stand von weniger als 340 mm anzeigt.**

Der Spulenstrom wird von einem Netzgerät erzeugt, das von einem internen Sweep-Generator angesteuert wird. Nach Einschalten des Netzteils und Betätigen der „Tesla“-Taste kontrollieren sie bitte die Anzeige in Display. Obere Zeile: aktuelles Magnetfeld: 0,00 Tesla; Netzteil: SMS120 C; TripVoltage: 0,0 Volts. Untere Zeile: mittleres Magnetfeld: 2,00 T; maximales Magnetfeld: 9,00 T; maximale TripVoltage: 4,0 V; SweepRate: 0,213 A/s. Änderungen der Parameter dürfen nicht vorgenommen werden. Entsprechen die Einstellungen nicht den Angaben, darf mit dem Versuch nicht begonnen werden und der Betreuer ist zu verständigen. **Die Heater-Taste muss während der Versuchsdurchführung immer eingeschaltet sein.** Dies ist unbedingt zu beachten, da sonst der „persistent switch“ des Magnetsystems beim Auferregen zerstört wird. Für die Ansteuerung des Magneten sind ausschließlich die Tasten Zero, Mid, Max und Pause zu verwenden.

Sie sollten mit dem folgenden Satz physikalischer Größen und Gleichungen vertraut sein:

Oberflächenladungsträgerdichte:	N_s	$(N_s) = \text{m}^{-2}$
Strom:	I	$(I) = \text{A}$
Magnetische Induktion:	B	$(B) = \text{T}$
Streuzeit	τ	$(\tau) = \text{s}$
Landau-Quantenzahl	n	
Landé-g-Faktor	g	
Probenlänge	L	$(L) = \text{m}$
Probenbreite	W	$(W) = \text{m}$
Fermi-Energie:	E_F	$(E_F) = \text{J}$
Fermi-Wellenvektor:	$k_F = (2m^*E_F)^{1/2}/\hbar = (2\pi N_s)^{1/2}$	$(k_F) = \text{m}^{-1}$
Fermi-Geschwindigkeit:	$v_F = \hbar k_F/m^*$	$(v_F) = \text{ms}^{-1}$
Zyklotronmasse:	m_c	$(m_c) = \text{kg}$
2D Zustandsdichte (Spin nicht aufgelöst):	$D(E) = m^*/(\pi\hbar^2)$	$(D(E)) = \text{J}^{-1}\text{m}^{-2}$
Zyklotronfrequenz:	$\omega_c = eB/m_c$	$(\omega_c) = \text{s}^{-1}$
Hall-Spannung:	$U_{\text{Hall}} = R_H I B$	$(U_{\text{Hall}}) = \text{V}$
Hall-Faktor:	$R_H = -1/(N_s e)$	$(R_H) = \text{m}^{-2}\text{C}^{-1}$
Hall-Widerstand:	$R_{xy} = U_{\text{Hall}}/I$	$(R_{xy}) = \Omega$
Längswiderstand:	$R_{xx} = U_{xx}/I = L/(\sigma_{2D} W)$	$(R_{xx}) = \Omega$
DC-Leitfähigkeit:	$\sigma_{2D} = N_s e^2 \tau/m^*$	$(\sigma_{2D}) = \Omega^{-1}$
Beweglichkeit:	$\mu = R_H \sigma_{2D}$	$(\mu) = \text{m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$
Zustände pro Landau-Niveau (Spin aufgelöst)	$N_L = e B/\hbar$	$(N_L) = \text{m}^{-2}$
Zyklotronradius im $n = 0$ Landau-Niveau:	$\ell = [\hbar/(e B)]^{1/2}$	$(\ell) = \text{m}$
Füllfaktor	$\nu = N_s/N_L = 2\pi\ell^2 N_s$	
v. Klitzing Konstante:	$R_K = h/e^2 = 25.812,807\Omega$	

Drücken Sie alle Gleichungen in Laboreinheiten aus, indem Sie Ströme in μA , Spannungen in mV , Magnetfelder in T , Streuzeiten in ps , Energien in meV , Längen in μm und Dichten in 10^{11}cm^{-2} angeben.

Beispiele:

$$N_s[10^{11} \text{cm}^{-2}] = 6,242 I[\mu\text{A}] B[\text{T}]/U_{\text{Hall}}[\text{mV}]$$

$$N_L[10^{11} \text{cm}^{-2}] = 0,2418 B[\text{T}]$$

$$\ell[\mu\text{m}] = 0,02566 (B[\text{T}])^{-1/2}$$

Aufgaben:

1. Nehmen Sie gleichzeitig die Spannungen $U_{A,B}$, U_{Shunt} , U_{xx} und U_{Hall} bei 4,2 K auf. Verwenden Sie folgende Einstellungen an den Lock-in Verstärkern: Ithaco ($T_c = 1,25$ s, Range = 0,3 mV, $v_{Ref} = 73$ Hz); Princeton ($T_c = 1$ s, Range = 2,5 mV). Speichern Sie jeweils das Ergebnis für ansteigendes ($0 \rightarrow 9$ T) und abfallendes ($9T \rightarrow 0$) Magnetfeld.
2. Wiederholen Sie die Messungen von Aufgabe 1 bei 3, 2,1 und 1,5 K.
3. Beleuchten Sie die Probe mit der Lampe (Dauerbeleuchtung, Niederspannungsnetzteil = 1,5 V, keine höhere Spannung, da durch den Heizeffekt sonst die Temperatur der Probe ansteigt), und messen Sie bei einer Probentemperatur von 1,5 K die Spannungen $U_{A,B}$, U_{Shunt} , U_{xx} und U_{Hall} . Durch das Beleuchten kann die Elektronendichte und die Beweglichkeit gesteigert werden,¹¹ so dass Einflüsse des Elektronen-Spin im Experiment deutlicher hervortreten. Unter Umständen entsteht durch die Beleuchtung ein leitender Parallelkanal in der dotierten $Al_xGa_{1-x}As$ -Schicht. Die Spannungswerte der Hall-Plateaus können dann nicht mehr in einfacher Weise analysiert werden. Die Periodizität der Längsspannung in $1/B$ ist davon aber nicht betroffen.

Für die Messungen wird unter optimalen Bedingungen ein Zeitraum von etwa zwei Stunden benötigt. Den Rest der Zeit sollten Sie nutzen, um Ihre Messdaten für die Auswertung aufzubereiten. Die aufbereiteten Ergebnisse sind in den CIP-Pool des Physikalischen Instituts zu übertragen, wo sie ausgedruckt werden können. (Achtung: Um den CIP-Pool nutzen zu können, müssen Sie registriert sein. Falls noch nicht geschehen, lassen Sie sich baldmöglichst ein persönliches Konto einrichten.) Die Ausdrücke können zu Hause ausgewertet werden. Selbstverständlich können alle Files auch auf CD oder Floppy kopiert werden. Rohlinge sind allerdings von den Studenten zu stellen. Aus Sicherheitsgründen ist das Überspielen von Daten von dem Messrechner auf mitgebrachte Speichermedien oder Computer verboten. Die Datenübernahme hat im CIP-Pool zu erfolgen. Bei der Datenaufbereitung sollten niemals Original-Files verwendet werden, arbeiten sie immer mit Kopien.

4. Da die DAQ-Karte nur eine endliche Auflösung (16 Bit) bietet, sollten alle Messungen vor der Auswertung geglättet werden. Generieren Sie geglättete Graphen $\langle U_{xx}(B) \rangle$ und $\langle U_{Hall}(B) \rangle$ für ansteigendes und abfallendes Magnetfeld. Bilden Sie dann aus den Spannungswerten die Widerstände $R_{xx}(B)$ und $R_{Hall}(B)$.
5. Bilden Sie aus den Datensätzen $\langle U_{xx}(B) \rangle$ neue Graphen $\langle U_{xx}(1/B) \rangle$.

Die Datenaufbereitung ist damit abgeschlossen und die Auswertung kann erfolgen.

1. Werten Sie die Widerstandswerte R_v für die Hall-Plateaus aus (nur Messungen ohne Beleuchtung berücksichtigen). Bilden Sie mit den Plateauwerten die Produkte $R_v v$ (v = ganze Zahl). Bei der richtigen Wahl von v sollte als Ergebnis die Klitzing-Konstante auftreten. Welche physikalische Bedeutung haben die so erhaltenen ganzen Zahlen? Geben Sie das Ergebnis der Auswertung für die Temperaturen 4,2, 3, 2,1 und 1,5 K in Form einer Tabelle mit den Spalten R_v , v , und $R_v v$ an. Geben Sie durch Mittelung über die $R_v v$ -Ergebnisse einen Wert für die Klitzing-Konstante an. Vergleichen Sie die so ermittelten Klitzing-Konstanten für verschiedene Temperaturen untereinander und mit dem Literaturwert.

2. Nutzen Sie die drei folgenden Möglichkeiten, um die Oberflächenladungsträgerdichte N_s für die Messungen ohne Beleuchtung bei 4,2, 3, 2,1 und 1,5 K zu bestimmen:
 - a) Legen Sie nach Augenmaß eine Gerade durch die Hall-Spannungen bei kleinen Magnetfeldern, und bestimmen Sie N_s aus der Geradensteigung.
 - b) Bestimmen Sie N_s aus den Hall-Plateau-Positionen und den in Aufgabe 1 zugeordneten Füllfaktoren.
 - c) Werten Sie die Periode $\Delta(1/B)$ der Längsspannung aus, indem Sie eine Fourier-Transformation von $\langle U_{xx}(1/B) \rangle$ durchführen.

Hinweise: Um eine Fourier-Transformation durchführen zu können, wird ein Datensatz benötigt, der eine hinreichend große Anzahl von **äquidistanten** Messpunkten zur Verfügung stellt. Dies wird erreicht, indem aus $\langle U_{xx}(1/B) \rangle$ zunächst eine Interpolationskurve gewonnen wird. Die Interpolationskurve wird dann differenziert und anschließend Fourier-transformiert. Die Differentiation gewährleistet, dass der Einfluss des nicht oszillierenden Widerstandsuntergrundes auf die Fourier-Analyse der Quantenoszillationen minimiert wird. Unter Umständen erhält man neben der Grundfrequenz $\nu_0 = 1/\Delta(1/B)$ auch höhere Harmonische (ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz), relevant ist hier nur die Grundfrequenz. Geben Sie das Ergebnis Ihrer Auswertung für N_s in Form einer Tabelle wieder.
3. Bestimmen Sie die Leitfähigkeit bei $B = 0$, den Hall-Faktor und die Elektronenbeweglichkeit für die Messungen ohne Beleuchtung bei 4,2, 3, 2,1 und 1,5 K. Stellen Sie das Ergebnis in Form einer Tabelle dar.
4. Bestimmen Sie die Zyklotronmasse aus den temperaturabhängigen Amplituden der Oszillationen in der Längsspannung. Nach Ando¹² gilt im Rahmen der selbstkonsistenten Born Näherung im Grenzfall $E_F \gg \hbar\omega_c$ (viele Landau-Niveaus besetzt, kleine Magnetfelder) für die Komponente des Leitfähigkeitstensors

$$\sigma_{xx}(B) = \frac{N_s e^2 \tau}{m_c} \frac{1}{1 + (\omega_c \tau)^2} \left[1 - A(B, T, \tau) \cos \frac{2\pi E_F}{\hbar \omega_c} + \dots \right], \quad (1)$$

wobei

$$A(B, T, \tau) = 2 \frac{(\omega_c \tau)^2}{1 + (\omega_c \tau)^2} \frac{2\pi^2 k_B T}{\hbar \omega_c} \cosh \frac{2\pi^2 k_B T}{\hbar \omega_c} e^{-\frac{\pi}{\omega_c \tau}} \quad (2)$$

die Amplitude der Oszillationen ist. Die Gleichung gilt nur bei hinreichend schwach ausgeprägten Oszillationen. Durch eine Analyse der Temperaturabhängigkeit der Oszillationsamplituden kann die Zyklotronmasse m_c bestimmt werden, wenn die Streuzeit τ nicht stark mit der Temperatur variiert. Im Falle eines Temperaturverhältnisses $T_1 = 2 T_2$ erhält man

$$\frac{m_c}{m_e} = \frac{\hbar e B}{m_e} \frac{1}{\pi^2 k_B T_1} \operatorname{Arch} \frac{A(B, T_2, \tau)}{A(B, T_1, \tau)}. \quad (3)$$

Überzeugen Sie sich von der Gültigkeit der Formel und ermitteln Sie die Zyklotronmassen aus den Graphen $\langle U_{xx}(B) \rangle$ bzw. $\langle U_{xx}(1/B) \rangle$ für die Temperaturpaare (4,2 K; 2,1 K) und (3K; 1,5 K).

5. Berechnen Sie die Fermi-Energie, den Fermi-Wellenvektor und die Fermi-Geschwindigkeit aus den ermittelten Elektronendichten unter Annahme parabolischer $E(\mathbf{k})$ -Beziehungen für die Messungen ohne Beleuchtung bei 4,2, 3, 2,1 und 1,5 K. Geben Sie das Ergebnis in Form einer Tabelle an.
6. Unter Berücksichtigung der Spinaufspaltung treten Maxima in $U_{xx}(B)$ auf, wenn die Bedingung

$$E_F = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{M}{2} \right) \quad (\text{Landau - Quantenzahl } n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

erfüllt ist, wobei

$$M = \frac{g \mu_B B}{\hbar \omega_c} \quad (5)$$

die relative Spinaufspaltung angibt und n die Landau-Quantenzahl ist. Die reziproken Magnetfeldpositionen der Extrema sind dann durch

$$\frac{1}{B_{n\pm}} = \frac{\hbar e}{m_c} \frac{1}{E_F} \left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{M}{2} \right) \quad (6)$$

gegeben. Unter Annahme einer magnetfeldunabhängigen Fermi-Energie gilt für den gleichen Spin-Zustand für zwei aufeinander folgende Maxima die Periode im reziproken Magnetfeld:

$$\Delta \left(\frac{1}{B} \right)_{\pm} = \left(\frac{1}{B_{n+1}} - \frac{1}{B_n} \right)_{\pm} = \frac{\hbar e}{m_c E_F} \quad (7)$$

Nimmt man dagegen die Differenz der reziproken Magnetfelder der beiden Spinrichtungen eines Landau-Niveaus, dann erhält man

$$\Delta \left(\frac{1}{B} \right)_s = \frac{1}{B_{n+}} - \frac{1}{B_{n-}} = \frac{\hbar e}{m_c E_F} M, \quad (8)$$

d.h. man kann die relative Spinaufspaltung durch

$$M = \frac{\Delta \left(\frac{1}{B} \right)_s}{\Delta \left(\frac{1}{B} \right)_{\pm}} \quad (9)$$

ermitteln. Bestimmen Sie aus den Graphen $\langle U_{xx}(B) \rangle$ bzw. $\langle U_{xx}(1/B) \rangle$ für die Messungen bei 1,5 K (beleuchtete und unbeleuchtete Probe) die $1/B$ -Werte der Maxima. Tragen Sie die $1/B$ -Werte für beide Spin-Richtungen gegen ganze Zahlen n auf. Es

sollten zwei parallele Geraden mit Steigung $\Delta(1/B)_\pm$ entstehen. Im Grenzfall $B \rightarrow \infty$ schneiden die Geraden die horizontale Achse bei den Zahlen

$$n_\pm(B \rightarrow \infty) = -\frac{1}{2} \mp \frac{M}{2}. \quad (10)$$

Die Differenz

$$\Delta n(B \rightarrow \infty) = |n_+ - n_-| = |M| \quad (11)$$

liefert den Betrag der relativen Spinaufspaltung. Sollte die mittlere Gerade die horizontale Achse nicht bei $-1/2$ schneiden, müssen die Geraden entsprechend horizontal verschoben werden. Die sich danach ergebenden Zahlen n sind dann identisch mit der Nummerierung der Landau-Niveaus. Bestimmen Sie die Oberflächen-Elektronendichte aus der Steigung, den g -Faktor aus den Schnittpunkten der Geraden mit der horizontalen Achse, und ordnen Sie die Landau-Quantenzahlen zu. Hinweis: Im Einteilchenbild gilt für den g -Faktor in GaAs $g = -0,44$, d.h. $|M| \ll 1$. Vergleichen Sie den experimentellen mit dem Einteilchenwert. Wie könnte ein möglicher Unterschied gedeutet werden?

7. Analysieren Sie die Messung unter Beleuchtung im Hinblick auf fraktionale Füllfaktoren. Gibt es Hinweise auf fraktionale Füllfaktoren?

Literatur:

1. G. Dorda, *Surface Quantization in Semiconductors* in Festkörper-Probleme XIII (Advances in Solid State Physics), p. 215, Pergamon-Vieweg (1973).
2. K. v. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. 45, 494 (1980).
3. K. v. Klitzing, *The Fine Structure-Constant α - A Contribution of Semiconductor Physics to the Determination of α* in Festkörper-Probleme XXIII (Advances in Solid State Physics), p. 1, Vieweg (1981).
4. K. v. Klitzing, *Ten Years Quantum Hall Effect*, Festkörper-Probleme XXX (Advances in Solid State Physics), p. 25, Vieweg (1990).
5. G. Landwehr, *The Quantum Hall Effect after 20 years still a challenge to theory and experiment* in Festkörper-Probleme 40 (Advances in Solid State Physics), p. 3, Vieweg (2000).
6. K. v. Klitzing, R. Gerhardt und Jürgen Weis, *25 Jahre Quanten-Hall-Effekt*, Physik Journal 4, 37 (2005).
7. H. L. Störmer, *The Fractional Quantum Hall* in Festkörper-Probleme XXIV (Advances in Solid State Physics), p. 25, Vieweg (1984).
8. G. Landwehr, *Quantum Transport in Silicon Inversion Layers* in Festkörper-Probleme XV (Advances in Solid State Physics), p. 49, Vieweg (1975).
9. T. Ando, A. B. Fowler and F. Stern, Reviews of Modern Physics 54, 437 (1982).
10. C. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik*, R. Oldenbourg, München, Wien (1999).
11. D. J. Chadi and K.J. Chang, *Theory of the Atomic and Electronic Structure of DX Centers in GaAs and $Al_xGa_{1-x}As$ Alloys*, Phys. Rev. Lett. 61, 873 (1988).
12. T. Ando, *Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. IV. Oscillatory conductivity*, J. Phys. Soc. Japan 37, 1233 (1974).

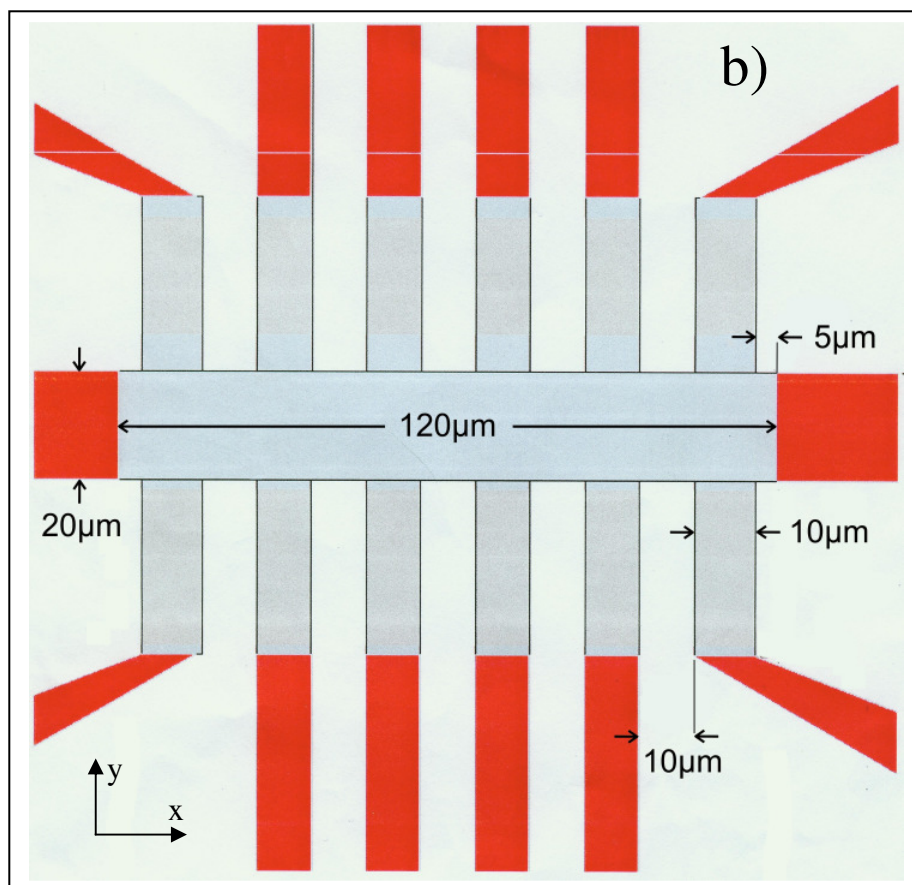
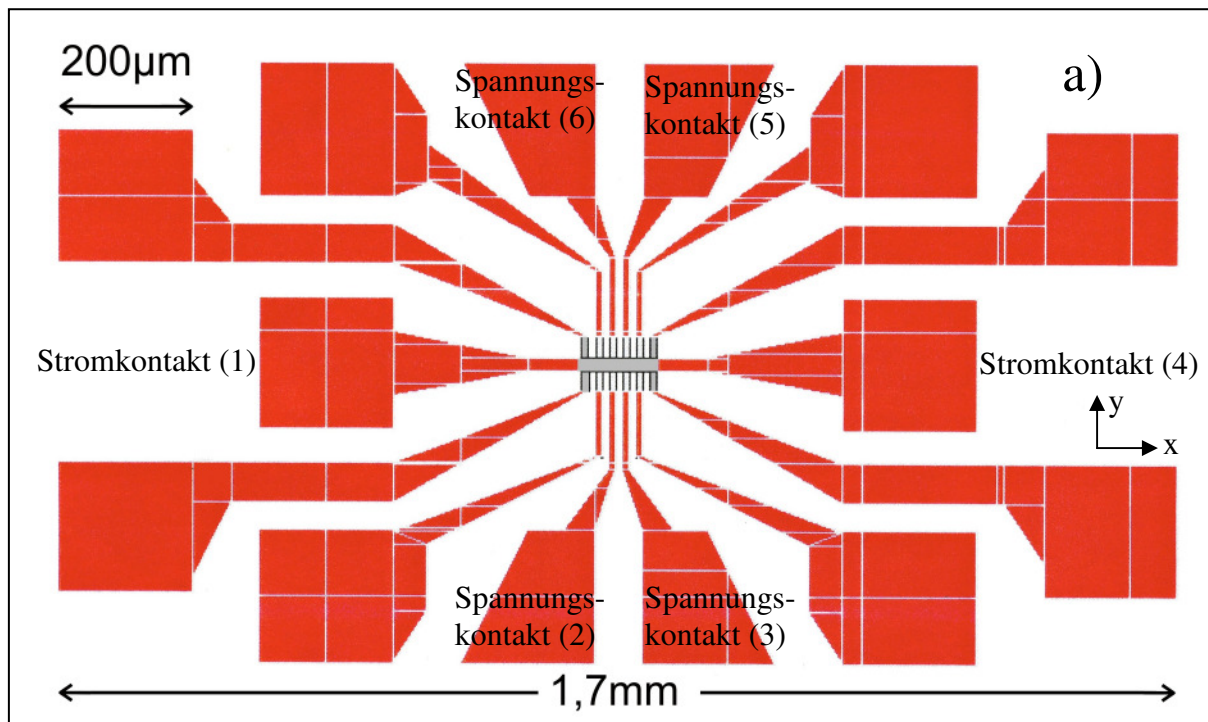


Abb.1: Typischer Aufbau eines Hallbars in a) Überblicks- und b) Detailansicht mit Längenangaben. In a) sind die Strom- und Spannungskontakte nummeriert und bezeichnet. Alle verbleibenden Kontakte (Spannungsabgriffe) sind nicht angeschlossen.

Rack mit Datenaufnahmesystem

Helium-Rückführleitung

Manometer

Manostat



Kryomagnetsystem mit variablem
Temperatureinsatz

Drehschieberpumpe

Abb. 2: Messaufbau mit Messrack, Kryomagnetsystem und Pumpvorrichtung. Das Rack enthält einen Computer, zwei Lock-in Verstärker, zwei Multimeter, eine Konstantstromquelle, zwei Niederspannungsnetzteile, eine Proben-Anschlussbox und ein Magnetnetzteil. Das Kryomagnetsystem besteht aus einem Helium-Kryostaten mit kommerziellem 9/11 Tesla Magnetsystem und einem variablem Temperatureinsatz (VTI). Der Aufbau wird komplettiert durch eine Vorvakuumpumpe mit Flussregelung.

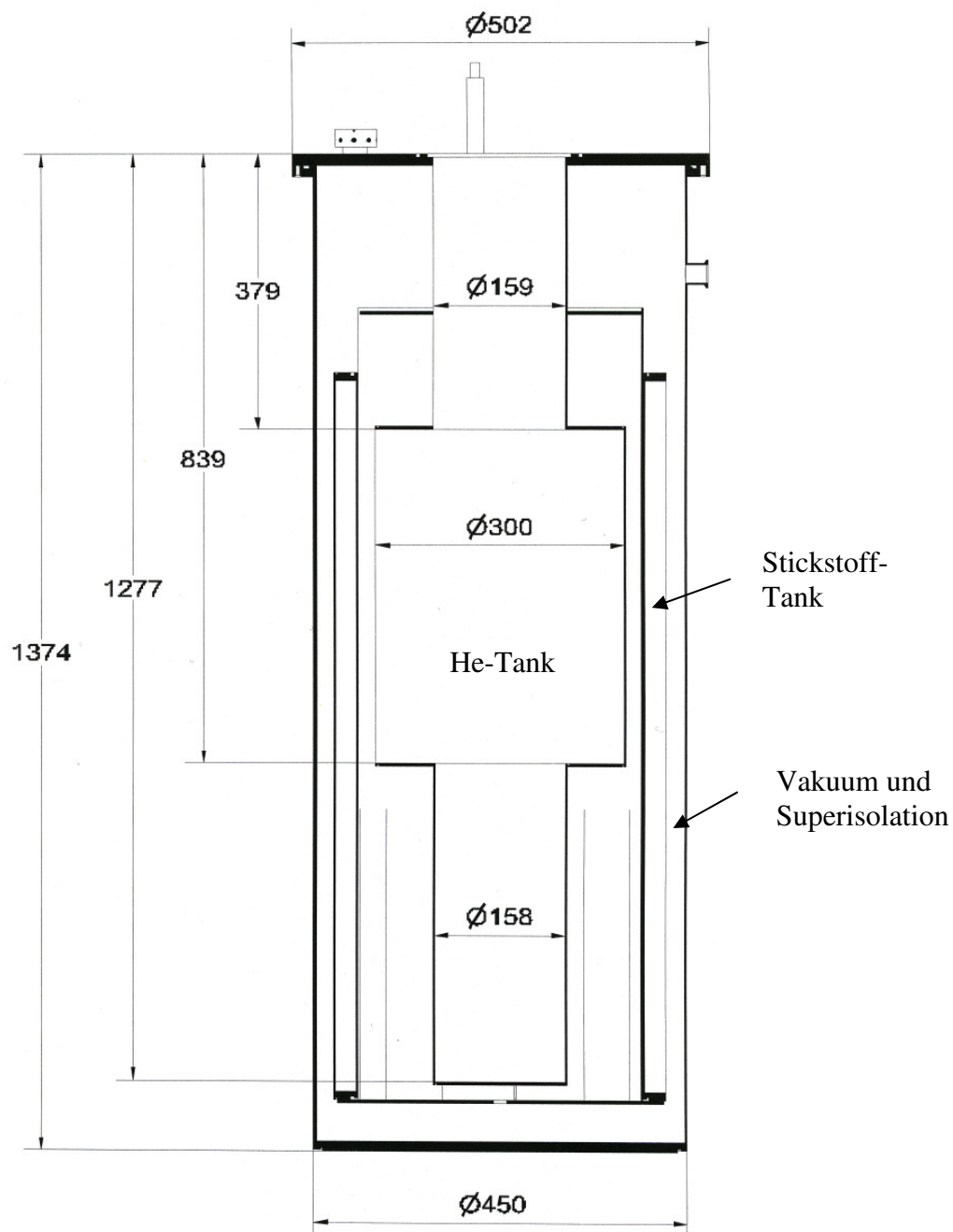


Abb. 3: Querschnitt des Helium-Kryostaten mit Abmessungen. Der He-Tank (4,2 K) ist durch einen Stickstoff-Tank (77 K) gegen Raumtemperaturstrahlung abgeschirmt.

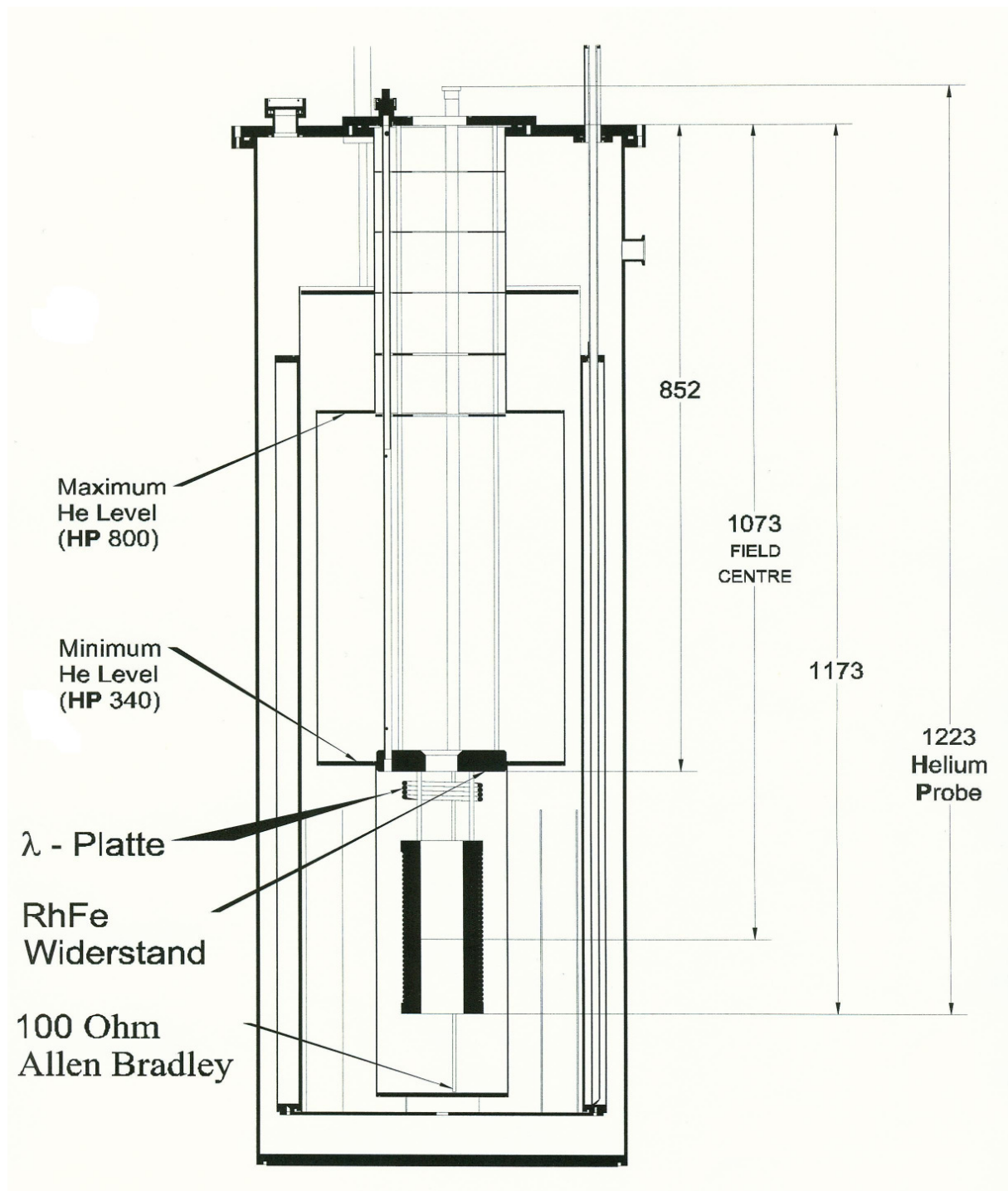


Abb. 4: Querschnitt des 9/11 T Kryomagnetsystems. Durch Pumpen an der λ -Platte kann das Helium im Bereich des Magneten auf 2,2 K abgekühlt werden. Der Abkühlvorgang wird mit den temperaturempfindlichen RhFe- und Allen-Bradley-Widerständen überwacht.

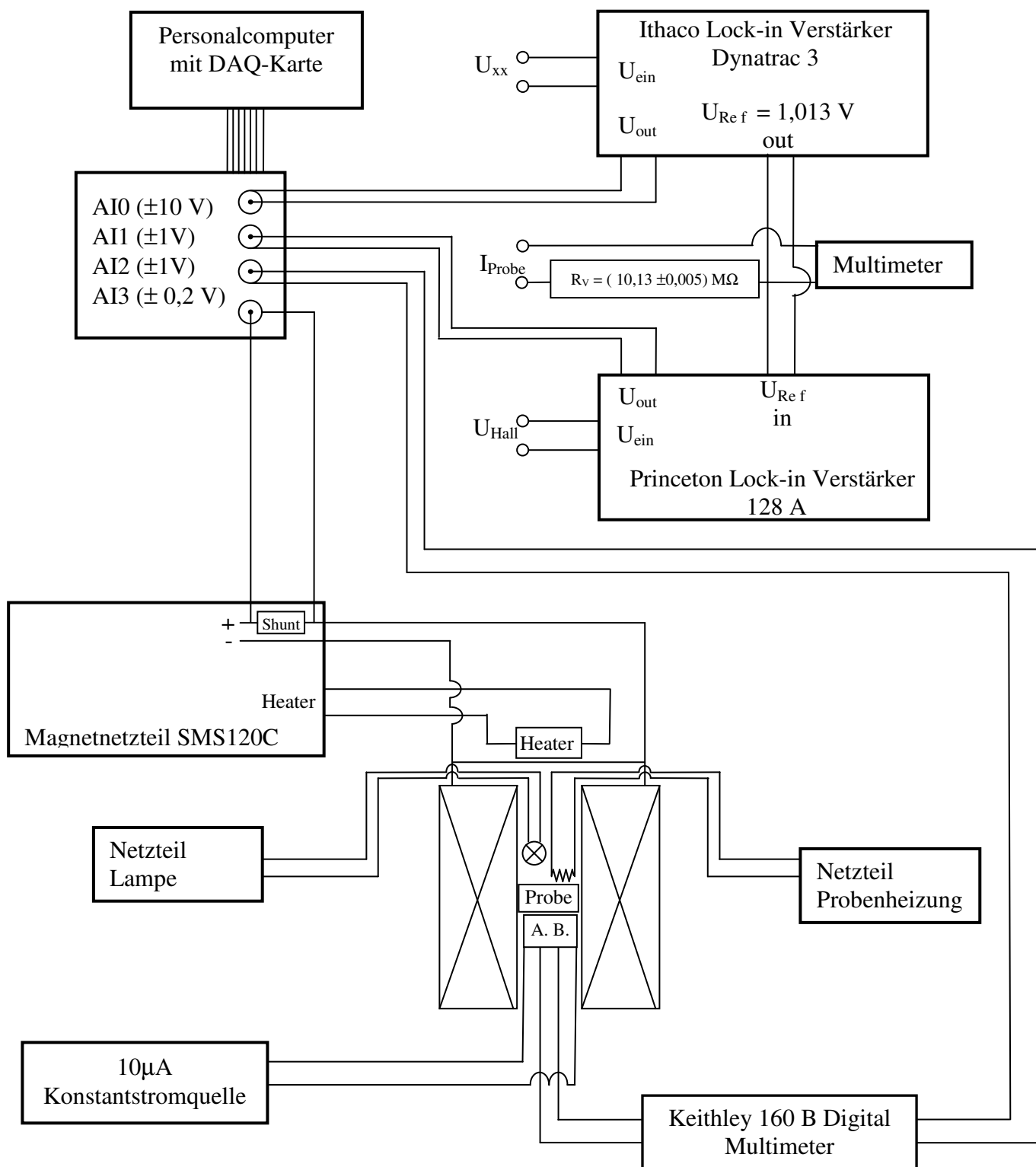


Abb. 5 : Schematisches Bild der Verschaltung des Experiments.

100 Ω Allen Bradley-Widerstand QHE-Probehalter

Eichtabelle (Spannungs-Temperatur-Beziehung für $I=10\mu A$)

T(°K)	U(mV)	T(°K)	U(mV)	T(°K)	U(mV)	T(°K)	U(mV)	T(°K)	U(mV)
1,410	178,689	1,990	52,886	2,570	25,778	3,150	16,067	3,730	11,712
1,420	173,980	2,000	52,064	2,580	25,527	3,160	15,961	3,740	11,662
1,430	169,429	2,010	51,262	2,590	25,280	3,170	15,855	3,750	11,612
1,440	165,032	2,020	50,479	2,600	25,037	3,180	15,752	3,760	11,563
1,450	160,782	2,030	49,716	2,610	24,798	3,190	15,649	3,770	11,515
1,460	156,673	2,040	48,971	2,620	24,563	3,200	15,548	3,780	11,468
1,470	152,701	2,050	48,244	2,630	24,332	3,210	15,448	3,790	11,420
1,480	148,861	2,060	47,534	2,640	24,104	3,220	15,350	3,800	11,374
1,490	145,147	2,070	46,841	2,650	23,880	3,230	15,253	3,810	11,328
1,500	141,555	2,080	46,164	2,660	23,660	3,240	15,157	3,820	11,283
1,510	138,082	2,090	45,503	2,670	23,443	3,250	15,062	3,830	11,238
1,520	134,721	2,100	44,858	2,680	23,230	3,260	14,969	3,840	11,194
1,530	131,470	2,110	44,227	2,690	23,020	3,270	14,877	3,850	11,150
1,540	128,324	2,120	43,611	2,700	22,813	3,280	14,786	3,860	11,107
1,550	125,279	2,130	43,008	2,710	22,609	3,290	14,696	3,870	11,065
1,560	122,332	2,140	42,419	2,720	22,409	3,300	14,608	3,880	11,023
1,570	119,479	2,150	41,844	2,730	22,211	3,310	14,521	3,890	10,981
1,580	116,717	2,160	41,281	2,740	22,017	3,320	14,434	3,900	10,941
1,590	114,043	2,170	40,730	2,750	21,825	3,330	14,349	3,910	10,900
1,600	111,453	2,180	40,191	2,760	21,637	3,340	14,265	3,920	10,860
1,610	108,945	2,190	39,664	2,770	21,451	3,350	14,182	3,930	10,821
1,620	106,514	2,200	39,149	2,780	21,268	3,360	14,101	3,940	10,782
1,630	104,160	2,210	38,644	2,790	21,088	3,370	14,020	3,950	10,744
1,640	101,878	2,220	38,150	2,800	20,911	3,380	13,940	3,960	10,706
1,650	99,667	2,230	37,667	2,810	20,736	3,390	13,862	3,970	10,668
1,660	97,524	2,240	37,193	2,820	20,563	3,400	13,784	3,980	10,631
1,670	95,446	2,250	36,729	2,830	20,394	3,410	13,707	3,990	10,595
1,680	93,431	2,260	36,275	2,840	20,226	3,420	13,632	4,000	10,559
1,690	91,477	2,270	35,830	2,850	20,062	3,430	13,557	4,010	10,523
1,700	89,581	2,280	35,394	2,860	19,899	3,440	13,483	4,020	10,488
1,710	87,743	2,290	34,967	2,870	19,739	3,450	13,411	4,030	10,453
1,720	85,959	2,300	34,548	2,880	19,582	3,460	13,339	4,040	10,419
1,730	84,227	2,310	34,138	2,890	19,426	3,470	13,268	4,050	10,385
1,740	82,547	2,320	33,736	2,900	19,273	3,480	13,198	4,060	10,352
1,750	80,916	2,330	33,341	2,910	19,122	3,490	13,129	4,070	10,318
1,760	79,332	2,340	32,955	2,920	18,973	3,500	13,061	4,080	10,286
1,770	77,794	2,350	32,575	2,930	18,826	3,510	12,993	4,090	10,254
1,780	76,301	2,360	32,203	2,940	18,682	3,520	12,927	4,100	10,222
1,790	74,849	2,370	31,838	2,950	18,539	3,530	12,861	4,110	10,191
1,800	73,440	2,380	31,480	2,960	18,398	3,540	12,797	4,120	10,160
1,810	72,070	2,390	31,129	2,970	18,260	3,550	12,733	4,130	10,129
1,820	70,738	2,400	30,784	2,980	18,123	3,560	12,670	4,140	10,099
1,830	69,444	2,410	30,445	2,990	17,988	3,570	12,607	4,150	10,069
1,840	68,185	2,420	30,113	3,000	17,855	3,580	12,546	4,160	10,039
1,850	66,962	2,430	29,786	3,010	17,724	3,590	12,485	4,170	10,010
1,860	65,771	2,440	29,466	3,020	17,595	3,600	12,425	4,180	9,981
1,870	64,613	2,450	29,151	3,030	17,467	3,610	12,366	4,190	9,953
1,880	63,487	2,460	28,842	3,040	17,342	3,620	12,308	4,200	9,925
1,890	62,390	2,470	28,539	3,050	17,218	3,630	12,250	4,210	9,897
1,900	61,323	2,480	28,241	3,060	17,096	3,640	12,193	4,220	9,870
1,910	60,284	2,490	27,948	3,070	16,975	3,650	12,137	4,230	9,843
1,920	59,273	2,500	27,660	3,080	16,856	3,660	12,081	4,240	9,816
1,930	58,288	2,510	27,377	3,090	16,739	3,670	12,026	4,250	9,790
1,940	57,328	2,520	27,099	3,100	16,623	3,680	11,972	4,260	9,764
1,950	56,394	2,530	26,826	3,110	16,509	3,690	11,919	4,270	9,738
1,960	55,483	2,540	26,557	3,120	16,396	3,700	11,866	4,280	9,713
1,970	54,595	2,550	26,293	3,130	16,285	3,710	11,814	4,290	9,688
1,980	53,730	2,560	26,033	3,140	16,175	3,720	11,763	4,300	9,663

Abb. 6: Eichtabelle des 100 Ω Allen Bradley.

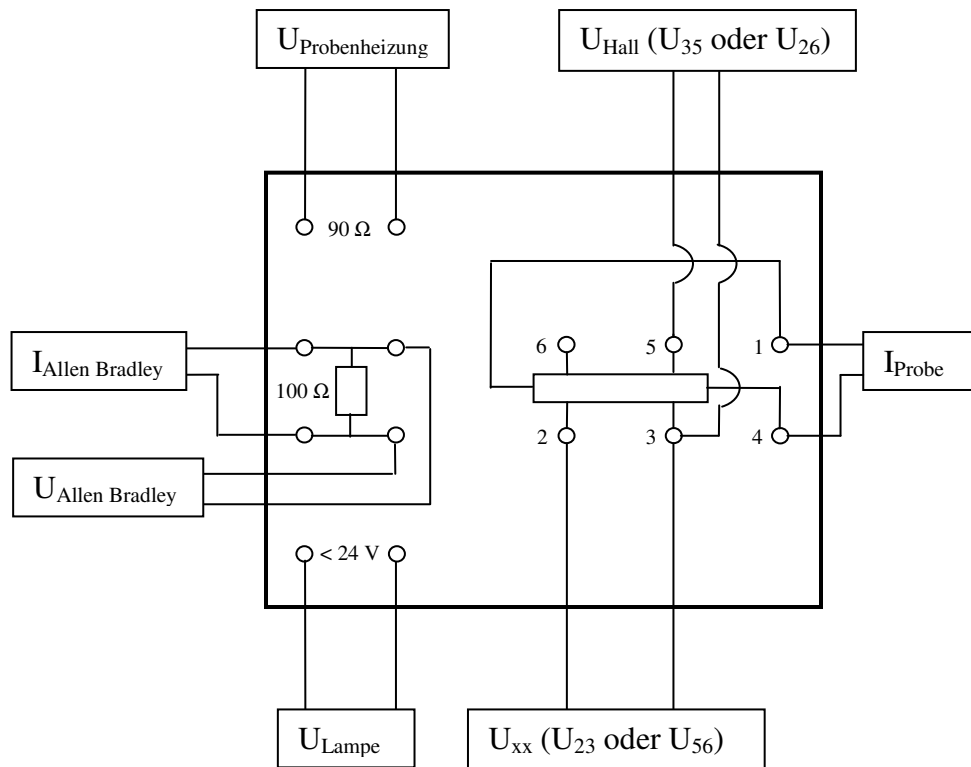


Abb. 7: Schematisches Bild der Probenbox mit Anschlüssen für die Probe, die Probenheizung, einer Lampe und dem $100\ \Omega$ Allen Bradley Temperatursensor.

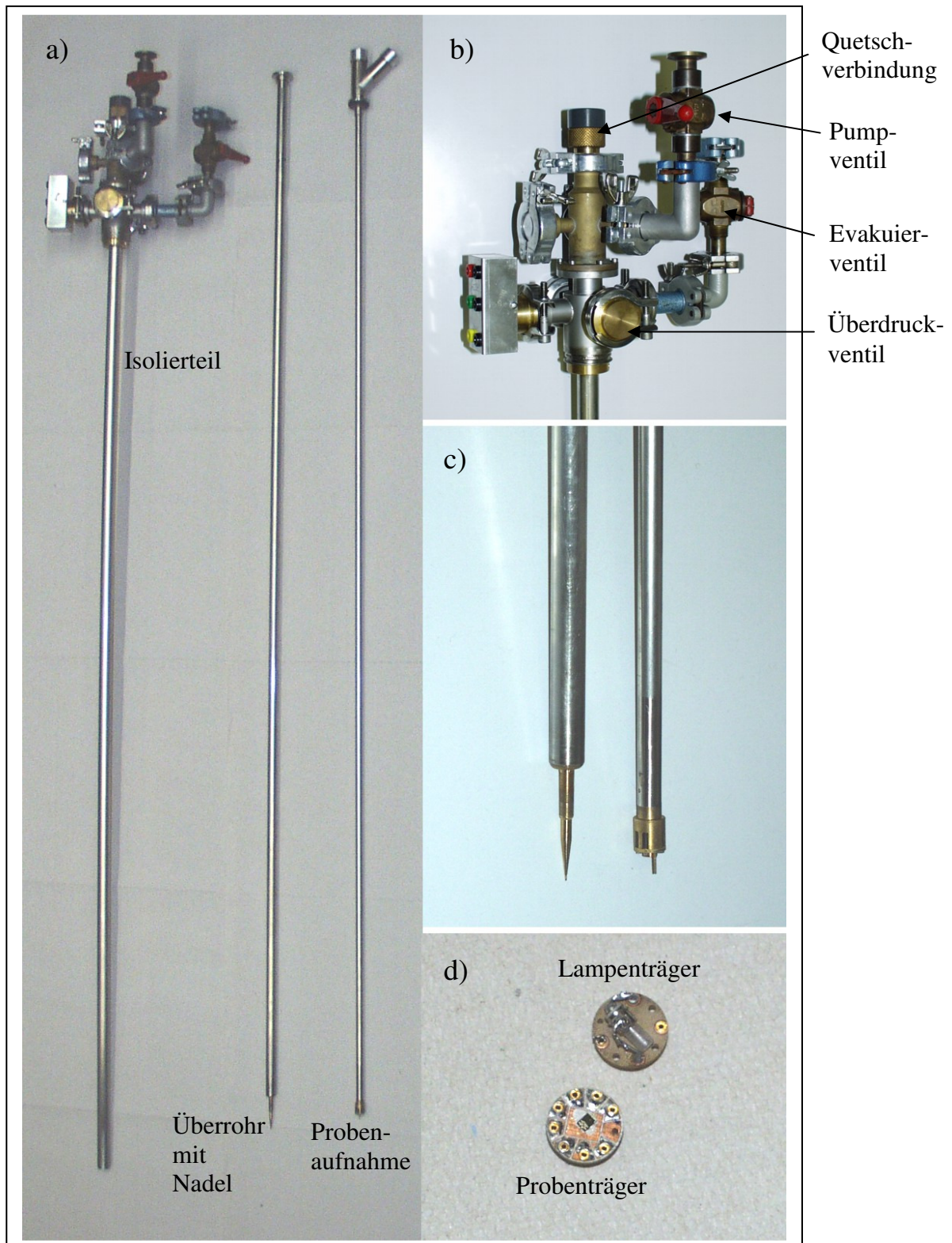


Abb. 8: Übersicht über a) die Grundkomponenten des VTI, b) den VTI-Kopf, c) Details des Überrohrs mit Nadelventil und der Probenaufnahme und d) den Proben- und den Lampenträger.

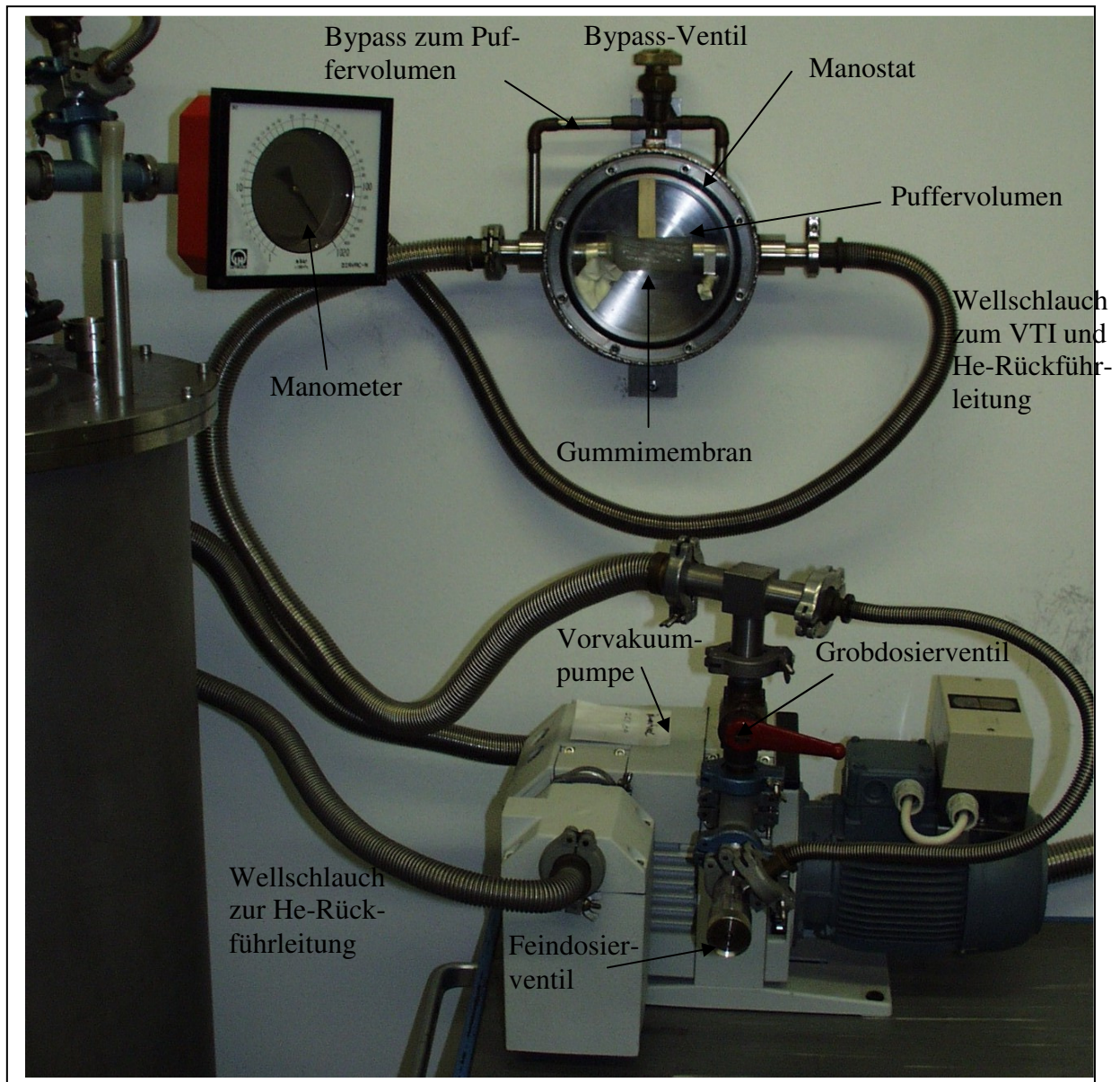


Abb. 9: Aufbau des Pumpstandes mit Flussregelung.