Quanten-Hall-Effekt

Daniel Friedrich & Ulrich Müller

Mithilfe von drei Röntgenanoden sowie verschiedenen Streuobjekten konnten wir die theoretischen Werte der K_α- und K_β-Linie von Kupfer, Eisen und Molybdän bestätigen. Zudem war die Feinstruktur von Eisen und Molybdän im Spektrum erkennbar. Über das Duane-Hunt-Gesetz haben wir Plancksche Wirkungsquantum zu bestimmt. Anhand des Effekts der inelastischen Streuung von Photonen an Elektronen haben wir die Compton-Wellenlänge zu ermittelt. Schließlich haben wir zwei Laue-Aufnahmen eines Materials gemacht, den Reflexen Miller-Indices zugeordnet und damit die Diamandstruktur der Probe identifiziert haben.

Betreuer: Christoph Brüne

Versuchsdurchführung am 12. Oktober 2013
Protokollabgabe am ??. Oktober 2013

1 Einleitung

Über hundert Jahre nach Entdeckung des Hall-Effekts gelang es Klaus von Klitzing im Jahr 1980 die bei einem Hall-Experiment aufgetretenen Plateaus im Hall-Widerstand mit Hilfe der Plankkonstante und die Elementarladung zu deuten. Die Deutung durch die Plankkonstante machte deutlich dass es sich bei dem Effekt um einen makroskopischen Quanteneffekt handelt. Die Bildung von Plateaus im Hall-Widerstand bei wachsendem Magnetfeld wird seit dem 'Quanten-Hall-Effekt' (QHE) genannt. Die Entdeckung von Klaus von Klitzing eröffnete der Wissenschaft ein reiches Feld an interessanten Forschungsthemen unter anderem in der Feldkörperphysik und der Metrologie. Während heutzutage der QHE bereits zur Normung des elektrischen Widerstands verwendet wird, könnte er in Zukunft dazu verwendet werden das Kilogramm und des Ampere neu zu definieren [**?**].

2 Theorie

Bewegen sich freie Elektronen in einem Magnetfeld, so wirkt auf sie die Lorentzkraft, die sie senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung ablenkt. Sind die Elektronen hingegen auf das Volumen eines Leiters limitiert, so baut sich, im stationären Fall bei kleinen B-Feldern, ein elektrisches Feld senkrecht zum Magnetfeld und der Bewegung der Elektronen auf, das die Lorentzkraft kompensiert. Die Spannung zwischen den Flanken des Leiters wird Hall-Spannung genannt. Der Hall-Widerstand ist nicht als klassischer Widerstand zu verstehen, sondern berechnet sich aus dem Verhältnis der Hall-Spannung und der verwendeten Stromstärke zu

$$R_{\mathrm{Hall}} = \frac{U_y}{I} = \frac{B}{n_s e}. \tag{2.1}$$

Mit der Flächenladungsträgerdichte n_s im Material. Der Hall-Widerstand ist damit proportional zum angelegten Magnetfeld.
Verwendet man ein Material mit hohen Beweglichkeiten der Elektronen, kühlt die Probe auf tiefe Temperaturen und erhöht die Magnetfeldstärke, so findet man bei charakteristischen Werten des Hall-Widerstands Plateaus die von den Materialeigenschaften, der Magnetfeldstärke und der verwendeten Temperatur unabhängig zu sein scheinen. Diese Plateaus treten in regelmäßigen Abständen auf und können durch den Zusammenhang

$$R_{\mathrm{Hall}} = \frac{1}{i}\frac{h}{e^2} \tag{2.2}$$

beschrieben werden. mit den ganzen Zahlen $i = 1, 2, ...$ Das höchste messbare Plateau befindet sich demnach bei

$$R_{\mathrm{K}} = \frac{h}{e^2} = 25\,812.807\,\Omega \tag{2.3}$$

und wird als Klitzing-Konstante für die Definition des Ohm verwendet.
Vergleicht man den Hall-Widerstand des klassischen Hall-Effekt 2.1 mit dem des Quanten-Hall-Effekts 2.2, so scheinen die beim Ladungstransport beteiligten Elektronen pro Volumen immer in Paketen zu $eB/\hbar$ zur Leistung beizutragen. Dieser Ausdruck wird als Entar-

tungsgrad diskreter Landauniveaus bezeichnet die sich aus der vollen quantenmechanischen Beschreibung ergeben. Dazu wird der Hamiltonoperatur für Elektronen im äußeren Magnetfeld aufgestellt:

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - \frac{e\boldsymbol{A}}{i\hbar})^2. \tag{2.4}$$

Lässt man nur Bewegungen der Elektronen in der x-y-Ebene zu und eicht das Vektorpotential auf $\boldsymbol{A} = (0,\ Bx,\ 0)$, so kann man mit dem Ansatz $\Phi(x,y) = C \cdot \mathrm{e}^{ik_x k} u(x)$ die Schrödingergleichung auf eine Differenzialgleichung des harmonischen Oszillators bringen. Die Energieeigenwerte beschreiben die Landauniveaus und besitzen die Form

$$E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) \tag{2.5}$$

mit der Zyklotronfrequenz ω_c. Diese Niveaus besitzen den Entartungsgrad

$$N_{\mathrm{LL}} = \frac{eB}{\hbar} \tag{2.6}$$

pro Volumen. ??ICH HAB MICH EIN BISSCHEN UM DIE ERKLÄRUNG GEDRÜCKT; WARUM ES DANN ÜBERHAUPT ZU EINER HALL SPANNUNG KOMMT: WENN MAN DEN QM-ANSATZ OHNE SPANNUNG MACHT, KOMMT HALT AUCH KEINE HALL-SPANNUNG RAUS??
Gleichzeitig zu den Plateaus im Hallwiderstand, tritt ein anderer bemerkenswerter Effekt auf, der als Shubnikow-de-Haas-Effekt bezeichnet wird. Dabei verliert der Festkörper seinen Widerstand in Längsrichtung, so dass der angelegten Strom ohne Verluste im Festkörper transportiert wird. Liegt die Fermienergie zwischen zwei Landauniveaus, so gibt es für die Elektronen keine Zustände innerhalb der thermischen Energie in die gestreut werden kann. Die Leitung wird damit dissipationslos. Das Randkanalmodell beschreibt anschaulich, wie am Rand der Probe die Probenoberfläche die Energieniveaus der Landaulevel anhebt und so einen eindimensionalen leitenden Randkanal formt, indem ebenfalls dissipationslose Leitung möglich ist. Das Verhalten der Probe wird also im wesentlich von der Magnetfeldstärke beeinflusst, die den Entartungsgrad der Landauniveuas erhöht und damit sowohl die Lage der Fermienergie als auch den Füllfaktor, d.h. die Anzahl der besetzten Landauniveaus, festlegt. Der Füllfaktor ist als

$$\nu = \frac{N_s}{N_{\mathrm{LL}}} \tag{2.7}$$

definiert, wobei N_s der Teilchendichte und N_l dem Entartungsgrad der Landauniveaus entspricht. Bei einem ganzzahligen Füllfaktor befindet man sich im Bereich eines Plateaus des Quanten-Hall-Effektes und man misst den beschriebenen Shubnikow-de-Haas-Effekt.
Idealer Weise sind diese Energieniveaus delta-förmig, in der Realität aber oft durch Streuung mit Phononen und Störstellen, sowie die Zeeman-Aufspaltung verbreitert. Damit sind die Bedingungen zu verstehen, bei denen der Quanten-Hall-Effekt auftritt. Bei starken Magnetfeldern treten wenige stark besetzte Landaulevel auf. Zudem verringern hohe Beweglichkeiten der Elektronen die Stoßverbreiterung. Als letztes werden hinreichend tiefe Temperaturen benötigt, damit nur Landauniveaus unterhalb der Fermienergie besetzt sind.

3 Experimenteller Aufbau

- Kryostat
- Kohlethermometer
- Hallbar - Probe
- Aufbau
- Magnetfeld

4 Versuchsdurchführung

Um die Hall-Plateaus und die Shubnikov-de-Haas Oszillation zu beobachten, messen wird die Spannungen $U_{\mathrm{A,B}}$, U_{Shunt}, U_{xx} und U_{Hall} bei steigendem Magnetfeld von $0 \to 9\,\mathrm{T}$ und bei fallendem Magnetfeld von $9 \to 0\,\mathrm{T}$. Da wir nur zwei Lock-ins verwenden nehmen wir die Hallspannung U_{Hall} und die Längsspannung U_{xx} in getrennten Messungen auf. An der Probe wird die Hallspannung an den Kontakten 4 und 6, sowie die Längsspannung an den Kontakten 6 und 7 abgegriffen. Durch Regelung des Druckes des Heliums im Kryostaten können wir die Temperatur regeln uns somit die obigen Messungen bei verschiedenen Temperaturen aufnehmen. Um eine Abhängigkeit der Temperatur erkennen zu können messen wir bei den Temperaturen $T = 4.2\,\mathrm{K}$, $3.0\,\mathrm{K}$, $2.1\,\mathrm{K}$ und $1.5\,\mathrm{K}$.

Durch Bestimmung der Hall-Plateaus können wir die Klitzing-Konstante sowie die Füllfaktoren bestimmen.

Des weiteren können wir die Ladungsträgerdichte, die relative Spinaufspaltung, Elektronenbeweglichkeit und Leitfähigkeit der Probe bestimmen. Aus der Amplitude der Shubnikov-de-Haas Oszillation lässt sich die Zyklotronmasse.

5 Auswertung

- Temperaturen im Experiment → Auswertung werden zur Beschreibung die Temperaturwerte wie in Anleitung (4.2 K, 3.0 K, ...) verwendet.
- Hystereseeffekte → bereinigte Daten für den Hall**widerstand**
- Fehleranalyse/-abschätzung der Spannungsmessungen!!

Hall-Widerstand $R_\mathrm{H} = U_\mathrm{H}/I_\mathrm{H} = U_\mathrm{H}/(U_\mathrm{Shunt}/R_\mathrm{Shunt})$ aus den gemessenen Daten für die Hallspannung U_Hall und denen der Probenspannung U_Shunt

5.1 Hall-Plateaus, Klitzing-Konstante und Füllfaktoren

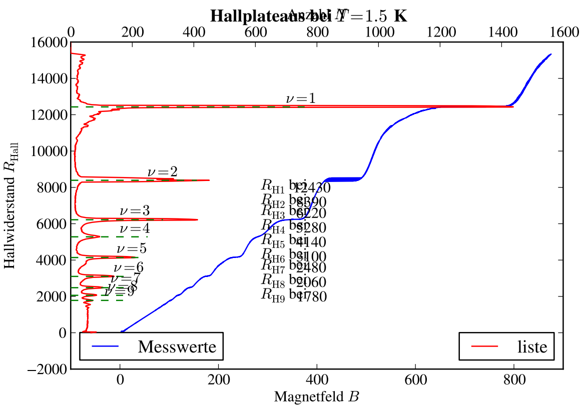

Abb. 1: Hallplateaus bei $T = 1.5\,\mathrm{K}$.

Für die Auswertung der Hall-Plateaus wurde für jede gemessenen Temperatur ein eigenes Diagramm erstellt. In Abbildung 1 ist die Auswertung für die Messung bei $T = 1.5\,\mathrm{K}$ gezeigt. Die Diagramme für die Temperaturen $T = 4.2\,\mathrm{K}$, $3.0\,\mathrm{K}$ und $2.1\,\mathrm{K}$ sind im Anhang 7 in Abbildung 2, 3 und 4 gezeigt.

In der blauen Kurve aus Abbildung 1 wurde der Verlauf des Hall-Widerstandes R_H aus den hysteresebereinigten Daten über dem Magnetfeld B aufgetragen. Zur Auswertung der Hall-Plateaus definieren wir uns einen kleinen Bereich von $\pm 50\,\Omega$ in dem wir die Anzahl an Messpunkten zählen und über den gesamten Bereich mit einer Schrittweite von $10\,\Omega$ auswerten. Hieraus ergibt sich die rote Kurve in Abbildung 1, die ebenfalls über das Magnetfeld aufgetragen wird. Durch dieses Zählverfahren ergeben sich an den Stellen der Plateaus klar erkennbare Peaks, an dessen Maximum der Wert des Hall-Plateaus ausgelesen werden kann. Mit dieser Methode und der verwendeten Schrittweite erhalten wir in der Kurve eine Ablesegenauigkeit von $10\,\Omega$.

Die für jedes sichtbare Niveau ausgelesenen Widerstandswerte haben wir aus dem Verhältnis zur Klitzing-Konstante in Abhängigkeit ihres Füllfaktors für jede Temperatur in Tabelle 1 aufgetragen.

$\nu\backslash T$	4.2 K	3.0 K	2.1 K	1.5 K
2.00	12 430 Ω	12 420 Ω	12 420 Ω	12 430 Ω
2.96	–	8970 Ω	8690 Ω	8390 Ω
4.00	6220 Ω	6200 Ω	6210 Ω	6220 Ω
4.70	–	–	5330 Ω	5280 Ω
6.00	4150 Ω	4130 Ω	4140 Ω	4140 Ω
8.01	3120 Ω	3100 Ω	3100 Ω	3100 Ω
10.02	2490 Ω	2480 Ω	2490 Ω	2480 Ω
12.05	2070 Ω	2080 Ω	2060 Ω	2060 Ω
13.96	1760 Ω	1780 Ω	1780 Ω	1780 Ω
$\overline{R_\mathrm{K}\nu}$	24 860 Ω	24 840 Ω	24 840 Ω	24 840 Ω

Tab. 1: Werte von R_ν in [Ω] für die erkennbaren Hall-Plateaus bei verschiedenen Temperaturwerten. Fehler??

Die erhaltenen Werte für die ganzen Zahlen ν ergeben multipliziert mit den Messwerten R_ν jeweils den selben Wert, der Klitzing-Konstante genannt wird.

Aus der Ablesegenauigkeit und einem Fehler von Gerätefehler, systematischer Fehler, geschätzter Fehler??.

In der letzten Zeile von Tabelle 1 wurden für jede Temperatur die Werte der verschiedenen Plateaus (multipliziert mit dem Füllfaktor) gemittelt und zeigen die Klitzing-Konstanten bei verschiedenen Temperaturen mit Standardabweichung. Beim Vergleich der Werte untereinander lässt sich feststellen, dass die Werte bis auf den Wert bei der Temperatur von 4.2 K exakt übereinstimmen. Der Wert für 4.2 K besitzt eine Abweichung von $20\,\Omega$ was im Rahmen der Fehler Fehleranalyse??.

Aus den obigen Werten können wir folglich die Klitzing-Konstante bestimmen zu

$$R_{\mathrm{K}} = (24.845 \pm ??)\,\mathrm{k}\Omega. \tag{5.1}$$

Der Vergleich mit dem Literaturwert von $R_{\mathrm{H}} = 25\,812.807\,\Omega$ zeigt sich eine große Abweichung Analyse??.

5.2 Bestimmung der Oberflächenladungsdichte

Die Oberflächenladungsdiche des 2DEGs wird auf drei verschiedene Arten bestimmt und die Ergebnisse untereinander verglichen. Dabei achten wir auf Unterschiede bei unterschiedlichen Temperaturen. Zuerst legen wir nach Augenmaß eine Gerade durch den unteren Teil der Hallmessung, in der der Hallwiderstand näherungsweise Linear ist. Der statistische Fehler wir durch zwei Hilfsgeraden in Abbildung **??** abgeschätzt. PLOT?? Als Steigung erhalten wir die Hall-konstante $A_H = (1750 \pm 100)\frac{\Omega}{\mathrm{T}}$ und aus dieser die Oberflächenladungsdichte

$$N_S = A_H e = (2.80 \pm 0.16e - 1)\frac{1}{\mathrm{m}^2}. \tag{5.2}$$

Die in Abbildung **??** gezeichnete Gerade lässt sich an die anderen Hall-Widerstandswerte bei niedrigeren Temperaturen ohne sichtbare Abweichung anlegen. Daher ergibt sich nach dieser Bestimmungsmethode kein Einfluss der Temperatur auf die Ladungsträgerdichte.

5.3 Leitfähigkeit, Hall-Faktor und Elektronenbeweglichkeit

Aus den gemessenen Werten für die Spannungen bei ausgeschalteten Magnetfeld $B = 0\,\mathrm{T}$ können wir die Leitfähigkeit des 2DEG $\sigma_{2\mathrm{D}}$, den Hall-Faktor A_{H} und die Elektronenbeweglichkeit μ bestimmen. Die Werte sind nach **?**] definiert als

$$\sigma_{2\mathrm{D}} = N_{\mathrm{s}} e^2 \frac{\tau}{m^*} = \frac{L}{R_{xx} W} \tag{5.3}$$

$$A_{\mathrm{H}} = -\frac{1}{N_{\mathrm{s}} e} \tag{5.4}$$

$$\mu = A_{\mathrm{H}} \sigma_{2\mathrm{D}}. \tag{5.5}$$

Aus der Länge $L = 600\,\mu\mathrm{m}$ und der Breite $W = 200\,\mu\mathrm{m}$ der Probe erhalten wir aus der Geometrie der Hallbar das Verhältnis

$$\frac{L}{W} = 3. \tag{5.6}$$

Aus den erhaltenen Werte für den Längswiderstand R_{xx} bei den vier gemessenen Temperaturen werden folglich die Leitfähigkeit, der Hall-Faktor und die Elektronenbeweglichkeit nach (5.5) berechnet und in Tabelle 2 aufgetragen.

hast du in den bereinigten Daten für die Längsspannung tatsächlich schon den Längswiderstand ausgerechnet??

T[T]	R_{xx}[Ω]	$\sigma_{2\mathrm{D}}$[??]	A_{H} [m²/C]	μ [m²/Vs]
4.2				
3.0				
2.1				
1.5				

Tab. 2: Leitfähigkeit $\sigma_{2\mathrm{D}}$, Hall-Konstante A_{H} und Elektronenbeweglichkeit μ.

Die Fehler ergeben sich aus Fehleranalyse + Diskussion??.

5.4 Zyklotronmasse

6 Zusammenfassung

Wir konnten mit dem Versuch einen guten Einblick in die Röntgenspektroskopie gewinnen. Die charakteristischen Linien von Eisen, Molybdän und Kupfer wurden mit recht hoher Genaugikeit nachgewiesen, wobei der größte Abstand von unseren Bestwerten zu den Theoriewerten 0.65 % betrag. Im Rahmen der Fehler gab es keine Abweichung. Das empirische Gesetz zwischen der Intensität der charakteristischen Strahlung und der Spannung zeigt systematische Abweichungen für Spannungen ab 30 kV und sollte eher als Faustregel verstanden werden. Das Duane-Hunt-Gesetz hingegen konnte gut bestätigt werden und hat uns erlaubt, das Plancksche Wirkungsquantum zu bestimmen. Das Moseley-Gesetz wurde ausführlich diskutiert und hat gute Abschätzungen für die Rydberg-Konstante ergeben. Allerdings ist die Auswertung der *Abschirmkonstante* $\sigma(Z)$ nicht wirklich sinnvoll. Mit dem Compton-Effekt konnte eine überraschend gute Bestimmung der Compton-Wellenlänge durchgeführt werden. Eine vollständige Aufnahme des Transmissionsspektrums von Al im gesamten Wellenlängenbereich der Kupferanode würde helfen zu verstehen, warum die Näherung eines linearen Spektrums solch gute Ergebnisse liefert. Die Laue-Aufnahme hat insgesamt gut funktioniert. Allerdings könnte man die Aufhängung der Dentalfilme zum Beispiel mit einer optischen Bank o.Ä. verbessern. Dadurch wird ein zentrales Auftreffen garantiert. Die Auflösung der Filme ist gut, eine größere Fläche wäre zwar wünschenswert, ist für die Auswertung aber nicht unbedingt notwendig.

Literatur

[1] Kittel, Charles: *Introduction to Solid State Physics*. 7th. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1996

[2] Melissinos, Adrian C.: *Experiments in Modern Physics*. New York and London : Academic Press, 1966. – insbesondere Abschnitt 3.3 aus dem Buch

[3] Singh, Jasprit: *Semiconductor Devices: Basic Principles*. New York : John Wiley & Sons, 2001

[4] Sze, S. M.: *Physics of Semiconductor Devices*. Second Edition. John Wiley & Sons

[5] Wikipedia: *Tellur*. April 2007. – URL `http://de.wikipedia.org/wiki/Tellur`

7 Anhang

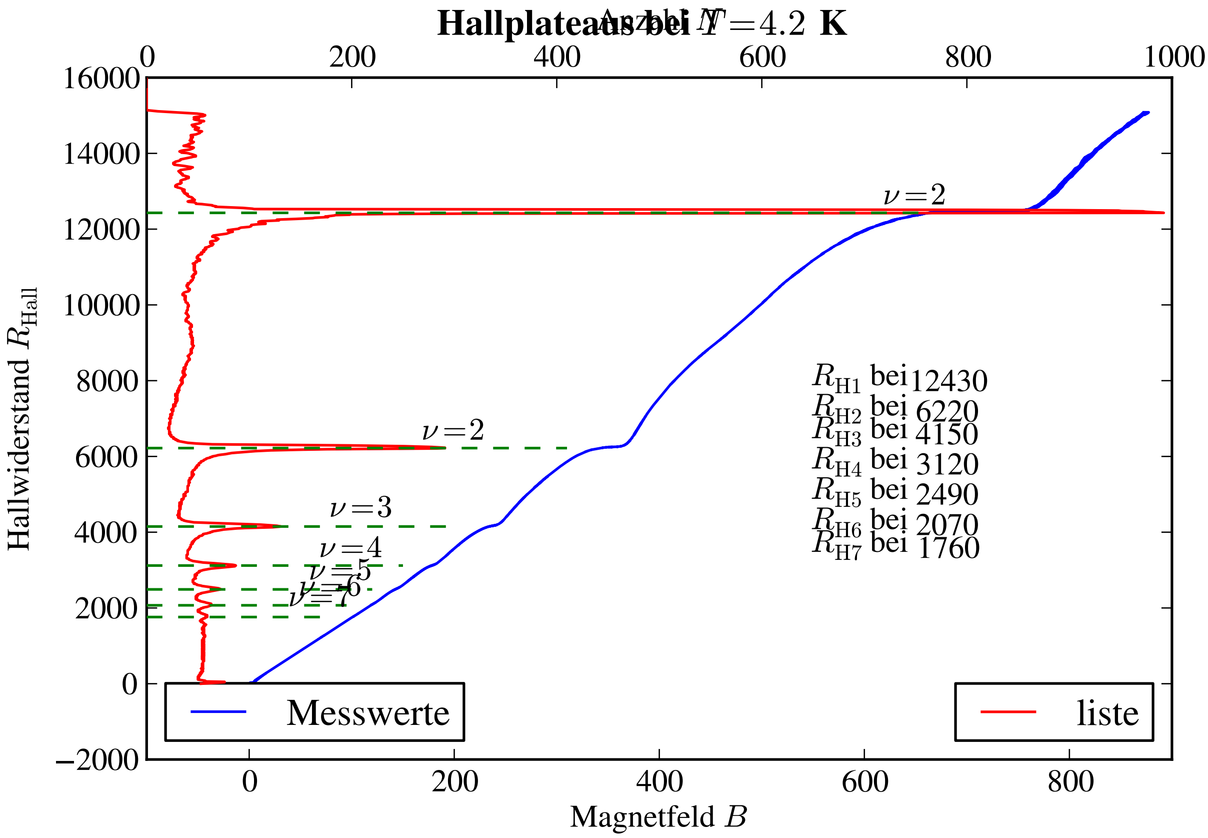

Abb. 2: Hallplateaus bei $T = 4.2\,\mathrm{K}$.

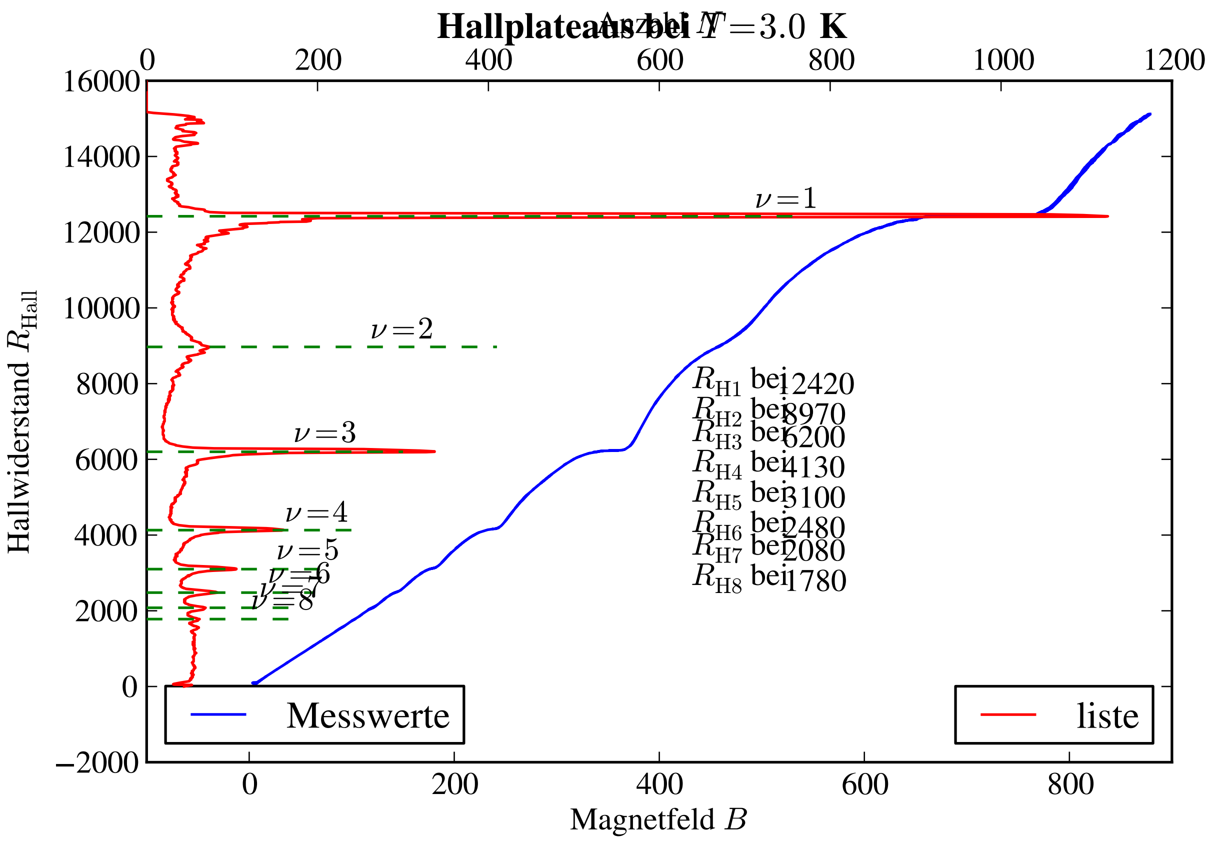

Abb. 3: Hallplateaus bei $T = 3.0\,\mathrm{K}$.

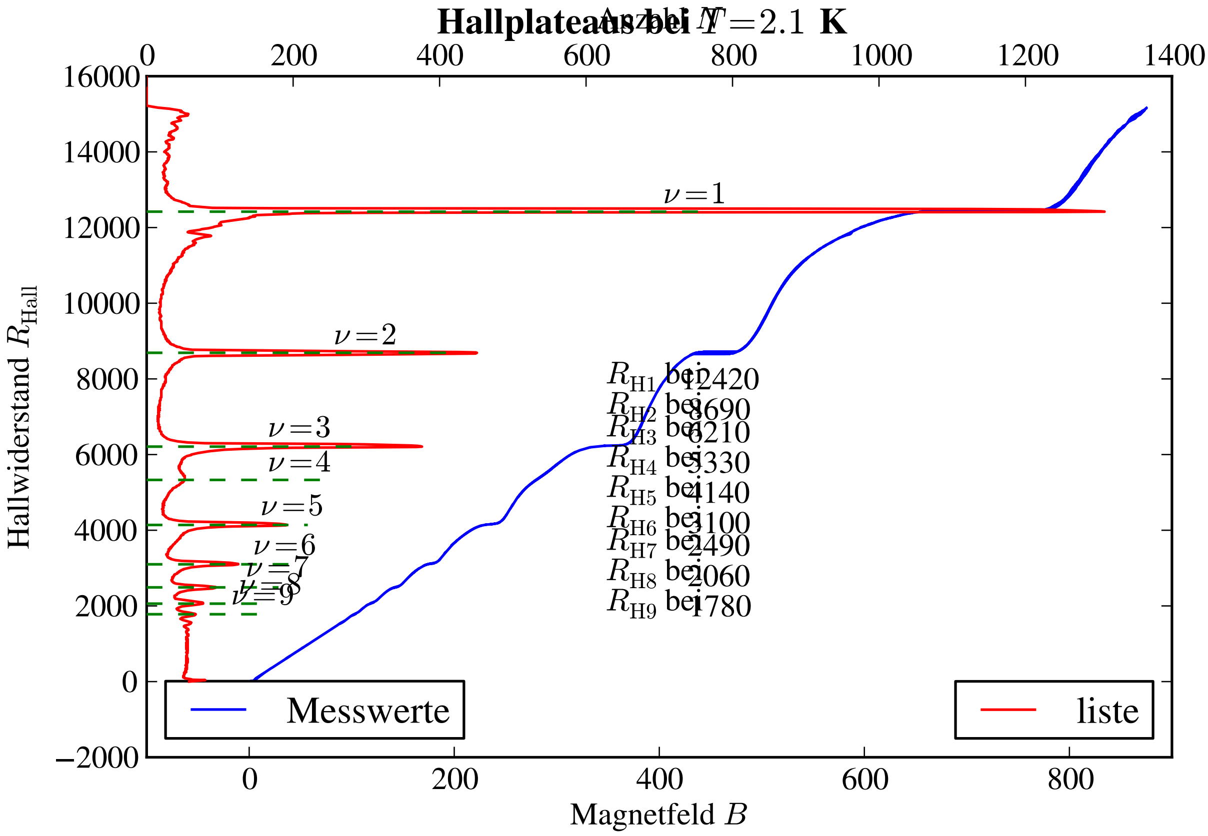

Abb. 4: Hallplateaus bei $T = 2.1\,\mathrm{K}$.