

Anleitung - Magnetische Kernresonanz

Physikalisches Fortgeschrittenenpraktikum

July 24, 2009

Kommentare und Anregungen bitte an oliver.radestock@physik.uni-wuerzburg.de

Contents

1	Literatur	3
2	Stichworte	3
3	Hausaufgabe	3
3.1	Resonanzkurven für Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$, π und 2π	3
3.2	Die Amplitude des Wechselfeldes der Einstrahlspule	3
3.3	Fehlerrechnung	3
4	Theoretische Grundlagen	4
4.1	Zeemann Effekt des Kerns	4
4.2	Das makroskopische System	5
4.3	Manipulation der Magnetisierung	6
4.4	Die Bloch Gleichungen	7
5	Versuchsaufbau	8
5.1	Allgemein	8
5.2	Der Analysator	8
5.3	Der Sample and Hold Verstärker	11
5.4	Funktionsgenerator	11
5.5	Der Computer	12
5.6	Die Helmholtzspulen	12
5.7	sonstiges	14
6	Aufgaben	15
6.1	Inbetriebnahme: Funktionsgenerator	15
6.2	Inbetriebnahme: Wasserkreislauf, Polarisator und Analysator	17
6.3	Inbetriebnahme: Computer, Messung: $S_2(t_{12})$	18
6.4	Inbetriebnahme: Sample and Hold Verstärker, Messung: $S_2(t, I_{\text{pol}})$	19
6.5	Messung: Spindrehung im Störfeld, $S_2(\nu)$	20
6.6	Messung der Resonanz im Feld der Helmholtzspulen	22
6.7	Bestimmung der Relaxationszeit von Protonen	23
7	Auswertung	24
7.1	Bestimmung von Betrag und Winkel des Störfeldes	24
7.2	Relaxationszeit der Protonenspins	24
7.3	Auswertung mit Mathematica	25
7.3.1	Berechnen der Phasenraumfunktion $f[\nu, \text{UHF}, c]$	25
7.3.2	Importieren von Werten	25

1 Literatur

- Müller, Zulassungsarbeit: Magnetische Kernresonanz
- Claude & Cohen-Tannoudji, Quantenmechanik I
- Mellissinos, Experiments in Modern Physics (S. 340 ff)
- Feynman, Vorlesungen über Physik III, (Kap. 10 & 11)

2 Stichworte

Magnetische Momente von Kernen, Wechselwirkung von magnetischen Momenten mit Magnetfeldern, klassische Erklärung der Kernresonanz, Bloch Gleichungen, Manipulation von Spins durch eingestrahlte Magnetfelder, Besetzungswahrscheinlichkeit im thermischen Gleichgewicht

3 Hausaufgabe

3.1 Resonanzkurven für Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$, π und 2π

Berechnen und plotten Sie die theoretischen Resonanzkurven $M_z(\phi_0, (\nu)/M_0$ (Gl. 40) für die Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$, π und 2π . Diese Kurven werden bei der Auswertung von 6.5 *Messung: Spindrehung im Störfeld*, $S2(\nu)$ benötigt.

3.2 Die Amplitude des Wechselfeldes der Einstrahlspule

Wie in Versuchsaufbau: Funktionsgenerator (5.4) beschrieben, besitzt der Funktionsgenerator einen Ausgangswiderstand von $R_A = 50 \Omega$. Die Einstrahlspule hat einen vernachlässigbaren Widerstand und einen in Reihe geschalteten Vorwiderstand von $R_S = 47 \Omega$.

Das von der Einstrahlspule erzeugte Wechselfeld ist linear polarisiert. Lässt sich aber als Superposition zweier entgegengesetzt zirkular polarisierten Felder betrachten, von denen eins den Übergang zwischen den Spinniveaus induzieren kann.

Berechnen Sie die Amplitude $B_1(U_{HF})$ dieses zirkular polarisierten Wechselfeldes in Abhängigkeit von der am Funktionsgenerator eingestellten Hochfrequenz Amplitude U_{HF} .

3.3 Fehlerrechnung

Überlegen Sie sich, welche Fehlerquellen während des Versuchs berücksichtigt und in den Rechnungen aufgenommen werden müssen. Welche lassen sich evtl. durch geschicktes Messen umgehen?

4 Theoretische Grundlagen

4.1 Zeemann Effekt des Kerns

Wie das Elektron sind auch Proton und Neutron Spin 1/2 Teilchen. Daher kommt es zu Wechselwirkungen, über das magnetische Moment $\vec{\mu}$ ihres Spins, mit äußeren Magnetfeldern. Der Hamiltonoperator eines Wasserstoffkerns ist

$$\hat{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} + \hat{H}_0 = -\gamma \hat{\vec{S}} \cdot \vec{B} + \hat{H}_0 \quad (1)$$

γ ist die Kopplungskonstante zwischen Spin und magnetischem Moment. Das sogenannte gyromagnetische Verhältnis ($\gamma = g\mu_p/\hbar$), welches sich wiederum aus dem Kernmagneton μ_p und dem g-Faktor des Protons berechnen lässt.

Der Term \hat{H}_0 steht für den restlichen Teil des Hamiltonoperators.

Wählen wir unser Koordinatensystem so, dass das Magnetfeld parallel zur z -Achse liegt, vereinfacht sich der Hamiltonoperator zu

$$\hat{H} = -\gamma \hat{S}_z B_z + \hat{H}_0 = -\gamma \hat{S}_z |\vec{B}| + \hat{H}_0 = -\gamma B \hat{S}_z + \hat{H}_0 \quad (2)$$

Um die Energieaufspaltung zu bestimmen, müssen wir die Schrödingergleichung des Systems lösen.

$$\hat{H} |\phi\rangle = E |\phi\rangle \quad (3)$$

$$\left(-\gamma B \hat{S}_z + \hat{H}_0\right) |\phi\rangle = (E_1 + E_0) |\phi\rangle \quad (4)$$

Im Folgenden soll nur die Energieaufspaltung der Spinniveaus E_1 berechnet werden, daher wird der Term \hat{H}_0 bzw. E_0 abgezogen

$$-\gamma B \hat{S}_z |\phi\rangle = E_1 |\phi\rangle \quad (5)$$

$$-\gamma B \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = E_1 |\phi\rangle \quad | \quad \text{mit } \epsilon = -\gamma B \frac{\hbar}{2} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon - E_1 & 0 \\ 0 & -\epsilon - E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} (\epsilon - E_1)\phi_x \\ (-\epsilon - E_1)\phi_y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (8)$$

Zur vollständigen Lösung des Gleichungssystems muss die Determinante verschwinden

$$0 = \left\| \begin{pmatrix} \epsilon - E_1 & 0 \\ 0 & -\epsilon - E_1 \end{pmatrix} \right\| = (\epsilon - E_1) \cdot (-\epsilon - E_1) = -\epsilon^2 + E_1^2 \quad (9)$$

Damit sind die beiden möglichen Energieeigenwerte

$$E_{1,\uparrow\downarrow} = \pm\epsilon = \mp\gamma B \frac{\hbar}{2} \quad (10)$$

Setzt man die Energieeigenwerte in (8) ein, erhält man die beiden Eigenzustände

$$E_{1,\uparrow} \equiv E_{\uparrow} = -\gamma B \frac{\hbar}{2} = -g\mu_p B \quad \text{mit} \quad |\phi\rangle_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |\uparrow\rangle \quad (11)$$

$$E_{1,\downarrow} \equiv E_{\downarrow} = +\gamma B \frac{\hbar}{2} = +g\mu_p B \quad \text{mit} \quad |\phi\rangle_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |\downarrow\rangle \quad (12)$$

Jeder beliebige Zustand lässt sich nun als Linearkombination dieser Basis darstellen.

$$|\psi(t)\rangle = a_{\uparrow}(t) |\uparrow\rangle + a_{\downarrow}(t) |\downarrow\rangle \quad (13)$$

4.2 Das makroskopische System

Betrachten wir nun ein Ensemble von Protonenspins, wie sie in unserer Probenwasser vorkommen. Welche makroskopische Größe ist nun das Maß für die Besetzungszahl der Spinniveaus?

Die Magnetisierung \vec{M} ist definiert als die Summe über die Erwartungswerte aller N magnetischen Momente in der Probe.

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^N \langle \psi_k | \hat{\vec{\mu}} | \psi_k \rangle \quad (14)$$

Die $|\psi_k\rangle$ sind die Zustandsfunktionen der N Protonen.

Betrachten wir zunächst nur die vom Polarisationsmagneten erzeugte Magnetisierung $M_0 = M_z$, so lässt sie sich als Summe über die Erwartungswerte der Spins definieren.

$$M_z = \sum_k \langle \psi_k | \hat{\mu}_z | \psi_k \rangle = \sum_k \mu_{z,k} = \gamma \frac{\hbar}{2} (N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) \quad (15)$$

Wobei N_{\uparrow} und N_{\downarrow} die Anzahl der Spins im Zustand $|\uparrow\rangle$ bzw. $|\downarrow\rangle$ angibt.

Befindet sich das System im thermischen Gleichgewicht, lässt sich die Besetzung der Niveaus durch die Boltzmann-Statistik beschreiben.

$$\frac{N_{\uparrow}}{N_{\downarrow}} = \exp \left[-\frac{\gamma B \left(\frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2} \right)}{k_B T} \right] = \exp \left[-\frac{\Delta E}{k_B T} \right] \quad (16)$$

Mit der Gesamtprotonenzahl $N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$ erhält man

$$N_{\uparrow} = (N - N_{\uparrow}) \exp \left[-\frac{\Delta E}{k_B T} \right] \quad (17)$$

$$= N \frac{\exp \left[-\frac{\Delta E}{k_B T} \right]}{1 + \exp \left[-\frac{\Delta E}{k_B T} \right]} \quad (18)$$

und mit $N_{\downarrow} - N_{\uparrow} = N - 2N_{\uparrow}$ ergibt sich eine Besetzungszahl

$$\Delta N = N_{\uparrow} - N_{\downarrow} = N \frac{1 - \exp \left[-\frac{\Delta E}{k_B T} \right]}{1 + \exp \left[-\frac{\Delta E}{k_B T} \right]} \approx N \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{k_B T} \quad (19)$$

Der letzte Schritt in der Gleichung stellt eine Taylorentwicklung des Bruchs dar. Sie ist möglich, wenn die Energieaufspaltung klein gegen die thermische Energie ist, was für Protonenspins in kleinen Magnetfeldern ($B \approx 1T$) bei Zimmertemperatur gut erfüllt ist. ($\frac{\hbar \gamma B}{k_B T} \approx 7 \cdot 10^{-6}$)

Die Besetzungszahl ist also verhältnismäßig klein, da wir aber viele Kerne ($\approx 10^{23}$) auf ein mal analysieren, lässt sich trotzdem eine makroskopische Magnetisierung messen.

4.3 Manipulation der Magnetisierung

Betrachten wir nun zusätzlich zum statischen Magnetfeld \vec{B}_0 ein dazu senkrechtes zirkular polarisiertes Magnetfeld $\vec{B}_1(t)$, welches sich mit der Frequenz ω um \vec{B}_0 dreht. Der Hamiltonoperator des Systems lautet dann

$$\hat{H}(t) = -\hat{\vec{\mu}} \cdot (\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)) = -\gamma \hat{S} \cdot (\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)) \quad (20)$$

Fassen wir nun $\gamma B_i = \omega_i$ zusammen und schreiben das Skalarprodukt mit Hilfe der Paulimatrizen aus, ergibt sich

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 \exp[-i\omega t] \\ \omega_1 \exp[i\omega t] & -\omega_0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Mit (13) ergibt sich die Schrödingergleichung zu

$$i \frac{d}{dt} a_{\uparrow}(t) = \frac{1}{2} \omega_0 a_{\uparrow}(t) + \frac{1}{2} \omega_1 \exp[-i\omega t] a_{\downarrow}(t) \quad (22)$$

$$i \frac{d}{dt} a_{\downarrow}(t) = -\frac{1}{2} \omega_0 a_{\downarrow}(t) + \frac{1}{2} \omega_1 \exp[i\omega t] a_{\uparrow}(t) \quad (23)$$

Mit den neuen Koeffizienten

$$b_{\uparrow}(t) = \exp\left[\frac{i\omega t}{2}\right] a_{\uparrow}(t) \quad (24)$$

$$b_{\downarrow}(t) = \exp\left[-\frac{i\omega t}{2}\right] a_{\downarrow}(t) \quad (25)$$

lässt sich die Schrödingergleichung vereinfachen

$$i \frac{d}{dt} b_{\uparrow}(t) = -\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega) b_{\uparrow}(t) + \frac{1}{2} \omega_1 b_{\downarrow}(t) \quad (26)$$

$$i \frac{d}{dt} b_{\downarrow}(t) = \frac{1}{2} \omega_1 b_{\uparrow}(t) + \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega) b_{\downarrow}(t) \quad (27)$$

Der so transformierte Hamiltonoperator ist nun nicht mehr explizit zeitabhängig.

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} \omega_0 - \omega & \omega_1 \\ \omega_1 & \omega - \omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta\omega & \omega_1 \\ \omega_1 & \Delta\omega \end{pmatrix} \quad (28)$$

Ein beliebiger Zustand lässt sich wieder als Linearkombination der Eigenzustände des Hamiltonoperators darstellen

$$|\psi'(t)\rangle = b_{\uparrow}(t) |\uparrow\rangle + b_{\downarrow}(t) |\downarrow\rangle \quad (29)$$

Uns interessiert nun die Wahrscheinlichkeit, mit der der Spin eines Protons umklappt. D.h. die Wahrscheinlichkeit, mit der das oben beschriebene System unter Einwirkung des äußeren Magnetfeldes $\vec{B}(t)$ von Zustand $|\uparrow\rangle$ in den Zustand $|\downarrow\rangle$ bzw. von $|\downarrow\rangle$ nach $|\uparrow\rangle$ übergeht.

Sei zum Zeitpunkt $t = 0$, das System im Zustand $|\uparrow\rangle$ so lässt sich sein Zustand $|\psi'(t)\rangle$ und damit die Koeffizienten $b_{\uparrow}(t)$ und $b_{\downarrow}(t)$ zum Zeitpunkt t durch eine Zeitentwicklung erhalten. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist dann

$$p(|\uparrow\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle, t) = \left| \langle \downarrow | \hat{U}(t, 0) | \uparrow \rangle \right|^2 = \left| \langle \downarrow | \psi'(t) \rangle \right|^2 = |b_{\downarrow}(t)|^2 \quad (30)$$

Indem man den Zustand $|\psi'(0)\rangle = |\uparrow\rangle$ mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t, 0)$ entwickelt, lässt sich der Koeffizient $b_{\downarrow}(t)$ bestimmen. Nach einiger Rechnung erhält man dann die Übergangswahrscheinlichkeit

$$p(|\uparrow\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle, t) = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \Delta\omega^2} \sin^2\left(\sqrt{\omega_1^2 + \Delta\omega^2} \frac{t}{2}\right) \quad (31)$$

Sie ist maximal, wenn $\Delta\omega = \omega_0 - \omega = 0$, also Resonanz vorliegt. Um dieses Ergebnis auf unser Experiment anwenden zu können, müssen wir die Zeit t als die Zeit interpretieren, in der sich ein Proton im Mittel in der Einstrahlungspule befindet. $\omega_1 = \gamma B_1$ steht dann für die Amplitude des zirkular polarisierten Magnetfeldes, während $\omega/2\pi$ die Frequenz (bei Resonanz gleich der Larmorfrequenz) ist, mit der das Wechselfeld einstrahlt.

4.4 Die Bloch Gleichungen

Nun gilt es eine Beschreibung der makroskopische Magnetisierung der Probe zu finden, welche ihre Veränderung erklärt. Hierfür betrachten wir unser Probenwasser, welches sich in einem kleinen Teil des Schlauchs aufhält. Pro Zeiteinheit dt gelangt eine gewisse Menge spinpolarisierter Protonen in den Schlauch, und eine andere Zahl verlässt den Schlauch. Diese Zahl ist nicht unbedingt gleich, da es wie unten beschrieben, zu Depolarisation kommen kann.

$$d\vec{M}(t) = \frac{1}{\tau} \vec{m} dt \quad (32)$$

τ ist dabei die Zeit, in der die Gesamtmagnetisierung $\vec{m} = \vec{m}_{rein} - \vec{m}_{raus}$ in den Schlauch gelangt.

Unter dem Einfluss des äußeren Magnetfeldes $\vec{B}(t)$ präzediert die Magnetisierung mit der Larmorfrequenz um das effektive Magnetfeld im mitbewegten Bezugssystem. Diese Präzessionsbewegungen lässt sich durch

$$d\vec{M}(t) = \gamma \vec{M}(t) \times \vec{B}(t) dt \quad (33)$$

darstellen. Der Betrag der Magnetisierung ist dabei konstant.

Es kann auch zum Verlust an Magnetisierung im Schlauch kommen, wenn die Protonen depolarisieren. Diese Depolarisation kann eine vorhandene (durch eine Einstrahlspule erzeugte) Magnetisierung in x-y-Richtung reduzieren. Der Grund hierfür sind räumliche Inhomogenitäten im Magnetfeld und somit in der Larmorfrequenz. Diese lassen die Erwartungswerte der Spins in x-y-Richtung dephasieren. Dies geschieht mit einer charakteristischen Zeitkonstante T_2

$$dM_{x,y}(t) = -\frac{1}{T_2} M_{x,y}(t) dt \quad (34)$$

Die Magnetisierung in z-Richtung ändert sich hingegen durch das Angleichen der Polarisation an das thermische Gleichgewicht. D.h. das die Spintemperatur sich an die Temperatur des Gesamtsystems annähert. Dies geschieht mit der Relaxationszeit T_1 .

$$dM_z(t) = -\frac{1}{T_1} M_z(t) dt \quad (35)$$

Es ergibt sich damit

$$\frac{d}{dt} M_x = -\frac{1}{T_2} M_x(t) + \gamma \left(\vec{M}(t) \times \vec{B}(t) \right)_x \quad (36)$$

$$\frac{d}{dt} M_y = -\frac{1}{T_2} M_y(t) + \gamma \left(\vec{M}(t) \times \vec{B}(t) \right)_y \quad (37)$$

$$\frac{d}{dt} M_z = -\frac{1}{T_1} M_z(t) + \gamma \left(\vec{M}(t) \times \vec{B}(t) \right)_z + \frac{1}{\tau} m_z \quad (38)$$

Dies sind die Bloch Gleichungen. Sie beschreiben das Verhalten der Magnetisierung einer Probe.

Für den Fall $T_{1,2} \rightarrow \infty$ lässt sich das Gleichungssystem exakt lösen.

$$\frac{M_z(\Phi, \nu)}{M_0} = \frac{1}{1 + u(\nu)^2} \left[u(\nu)^2 + \cos \Phi \sqrt{1 + u(\nu)^2} \right] \quad \text{mit } u(\nu) = 2\pi \frac{\nu_{res} - \nu}{\gamma B_1} \quad (39)$$

Mit dem Drehwinkel (Winkel zwischen \vec{M}_0 und \vec{e}_z): $\Phi = \gamma B_1 t_{Spule}$

Darin ist B_1 die Amplitude des eingestrahlten zirkular polarisierten Magnetfeldes und t_{Spule} die Verweildauer des Wassers in der Einstrahlspule.

Das theoretische Messsignal lässt sich also in einem zweidimensionalen Phasenraum der Frequenz und Amplitude des eingestrahlten zirkular polarisierten Magnetfeldes B_1 darstellen.

Doch muss der unterschiedlich langen Verweildauer der Protonen in der Einstrahlspule Rechnung getragen werden. (Gl. 39) muss also noch um einen Korrekturterm erweitert werden, der der unterschiedlichen Verweildauer Rechnung trägt. Da $t_{Spule} \sim \Phi$, gelingt dies mit einer Gaußfunktion, die dem möglichen Drehwinkel eine Unschärfe überlagert.

Die endgültige Magnetisierungskurve berechnet sich dann nach

$$\frac{M_z(\Phi_0, \nu)}{M_0} = \int_{-\infty}^{\infty} d\Phi \frac{1}{1 + u(\nu)^2} \left[u(\nu)^2 + \cos \Phi \sqrt{1 + u(\nu)^2} \right] \cdot \sqrt{\frac{1}{\pi c \Phi_0}} \exp \left[-\frac{(\Phi - \Phi_0)^2}{c \Phi_0} \right] \quad (40)$$

Nun lässt sich der Phasenraum darstellen. Um eine Vorstellung zu erhalten, wie sich die Struktur der Resonanz mit ihren Parametern verändert, kann man das Integral z.B. mit Mathematica berechnen und den Phasenraum um eine beliebige Resonanzfrequenz herum plotten lassen.

5 Versuchsaufbau

5.1 Allgemein

Die Messapparatur besteht aus folgenden Bestandteilen:

- Einem Wasserkreislauf, der von einer Pumpe mit einstellbarer Geschwindigkeit (*Skaleneinteilung 1 bis 14*) betrieben wird. Sie befördert destilliertes Wasser durch einen Polarisationsmagneten. Die Verweildauer im Magneten ist durch eine Labyrinthführung des Schlauchs ausreichend erhöht, um eine genügend hohe Magnetisierung zu erzeugen.
- Eine Helmholtzspule durch dessen Zentrum der Wasserschlauch, umwickelt von einer Einstrahlspule für das Wechselfeld B_1 , geführt wird. Von dort gelangt das Wasser in den
- Analysator, wo die z-Komponente der Magnetisierung gemessen werden kann. Abschließend gelangt das Wasser in einen
- Sammelbehälter wo es ausreichend lang verweilt, um vollständig zu depolarisieren und aus dem die Wasserpumpe wieder Wasser in den Schlauch zum Labyrinth pumpt.

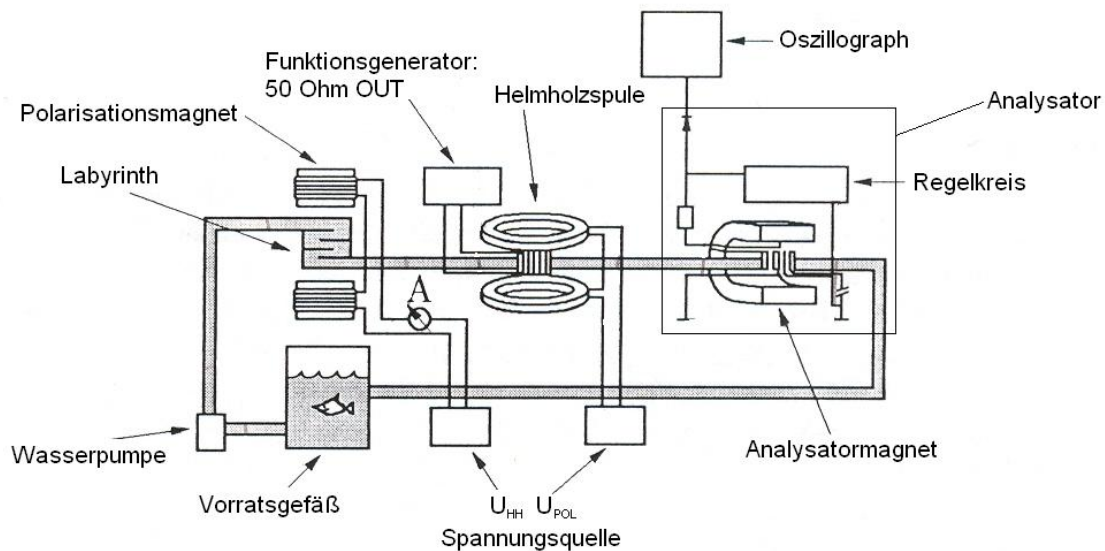


Figure 1: Der schematische Aufbau des Versuchs

5.2 Der Analysator

Der Analysator besteht aus einem hufeisenförmigen Permanentmagnet, der zusätzlich mit einer Spule umwickelt ist. Dadurch lässt sich dem konstanten Feld des Magneten ein zeitlich veränderliches (50Hz Netzfrequenz) Magnetfeld, das sogenannte Wobelfeld, überlagern. Die Stärke des Wechselfeldes ist zwar einstellbar (WOBBELSTROM), wird aber grundsätzlich mit maximaler Amplitude betrieben.

Zusammen erzeugen Permanentmagnet und Wobelfeld das Magnetfeld B_0 . (Abb. 3)

Neben dem Feld B_0 wirkt auf die spinpolarisierten Protonen auch das Wechselfeld B_1 eines Schwingkreises. Wenn man die Frequenz des Schwingkreises (OSZILLATOR GROB/FEIN) auf die Resonanzfrequenz des Permanentmagneten einstellt, wird durch die Änderung der Resonanzfrequenz aufgrund des Wobelfeldes der Resonanzfall 100 mal pro Sekunde herbeigeführt. Je nach Einstellung der Frequenz sind die Resonanzfälle zeitlich äquidistant (Abstand 10ms) oder mit je zwei unterschiedlichen Zeiten mit einer gesamten Periode von 20ms.

Die Breite der Resonanz hängt entscheidend von der Geschwindigkeit ab, mit der das Analysatorfeld sich zum Zeitpunkt der Resonanzbedingung ändert. Je schneller die Änderung desto schmaler die Resonanz. Da die größte Änderung des sinusförmigen Wobelfeldes zum Zeitpunkt seines Nulldurchgangs besteht, kommt es also bei äquidistanten Impulsen zur schmalsten Resonanz. (Abb. 4)

Kommt es nun zur Resonanz zwischen Wasser und Schwingkreis, d.h. regt das Wechselfeld B_1 Übergänge zwischen den Energieniveaus der Protonen an¹, wird entweder Leistung aus dem Schwingkreis absorbiert oder auf ihn übertragen². Dieser Leistungsverlust wird durch einen Regelkreis ausgeglichen, welcher den Strom im Schwingkreis konstant hält.

Die Leistungsänderung ΔP im Schwingkreis ist im Resonanzfall der Besetzungszahl der Spins im Wasser und der Energiedifferenz der Spinniveaus ΔE proportional.

$$\Delta P = \text{const.} (n_{\uparrow} - n_{\downarrow}) \Delta E = \text{const.} \Delta n \Delta E$$

Das eigentliche Messsignal S (NF FREQ) wird, wie in (Abb. 5.2) gezeigt, abgegriffen.

Der Strom I im Schwingkreis ist mit der Leistung über $P \sim I^2$ verknüpft. Daher lässt sich für das Messsignal S folgende Abhängigkeit bestimmen.

$$\begin{aligned} S &\sim \sqrt{P_0 + \Delta P} - \sqrt{P_0} = \sqrt{P_0 + c_1 \Delta n \Delta E} - \sqrt{P_0} \sim -\sqrt{P_0} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{c_1 \Delta n \Delta E}{P_0}} \right) \\ &\sim -\sqrt{P_0} \left(1 - \sqrt{1 + l \Delta n} \right) \\ S &= k(1 - \sqrt{1 + l \Delta n}) \end{aligned}$$

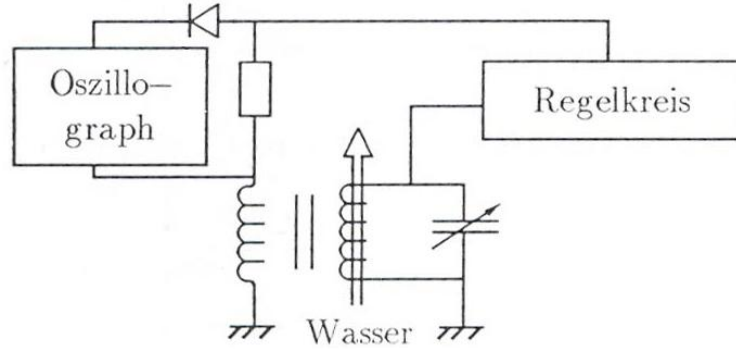


Figure 2: Die Entstehung des Messsignals

¹durch Absorption oder Emission

²Dies lässt sich leicht nachvollziehen, wenn man bedenkt, dass ein Übergang von einem energetisch höheren in ein tieferes Niveau ein Quant mit der Resonanzfrequenz erzeugt, während für den inversen Prozess ein Quant absorbiert werden muss.

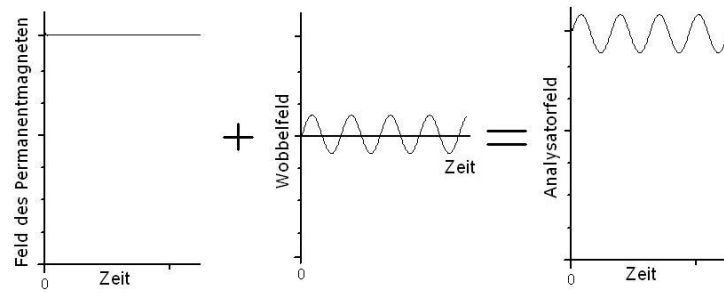


Figure 3: Entstehung des Analysatorfeldes

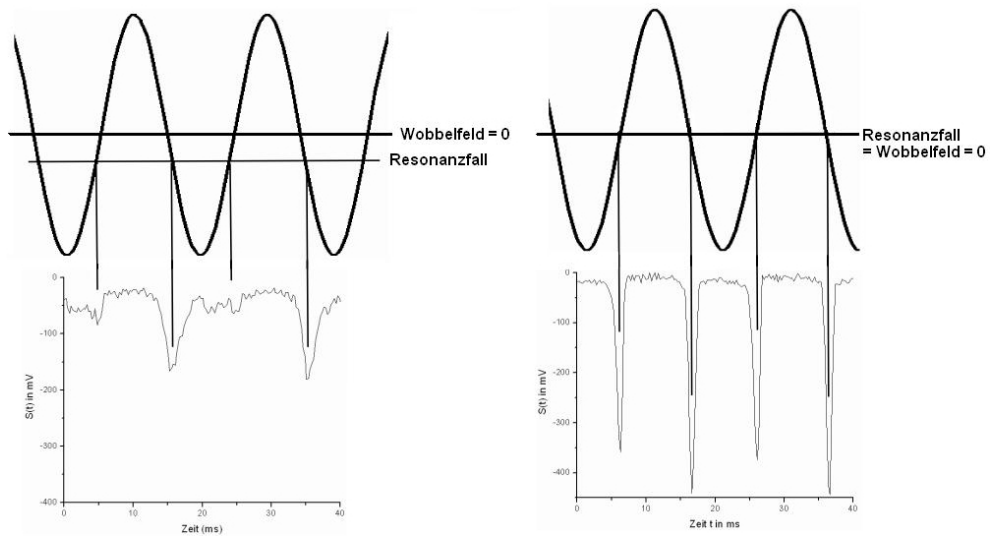


Figure 4: Das Signal $S(t)$, mit dem Computer aufgenommen, bei unterschiedlichen Impulsabständen

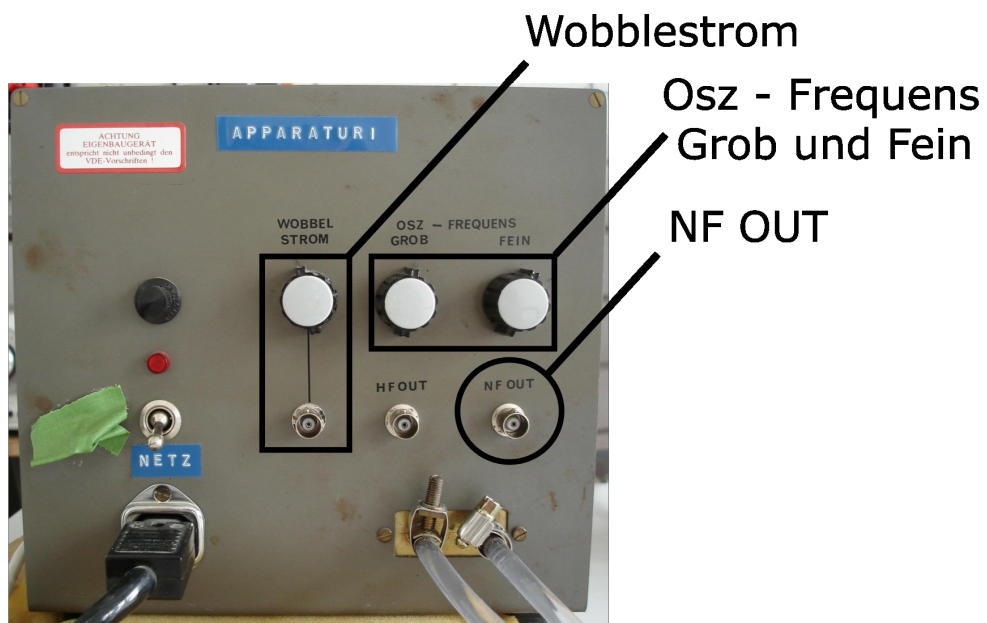


Figure 5: Der Analysator

5.3 Der Sample and Hold Verstärker

Für die meisten durchzuführenden Messungen ist die relevante Messgröße die Höhe des Resonanzpeaks. Um diese als Messsignal zur Verfügung zu stellen, wird das Ausgangssignal des Detektors (NF) in einen Sample-and-Hold-Verstärker eingespeist. Dieser wird durch die gleiche Sinusspannung getriggert, die auch das Wobelfeld erzeugt. Der Verstärker misst bei jedem Triggerimpuls (alle 20ms durch die Netzfrequenz 50Hz) **kurz** die Spannung des Messsignals und gibt sie bis zum nächsten Triggerimpuls als Gleichspannung an seinem Ausgang aus.

Während die Frequenz des Triggersignals konstant ist, kann die Phase über fast 360° eingestellt werden, so dass fast jeder Punkt einer Periode des Messsignals $S(t)$ zugänglich ist. Im Idealfall wird die Phase so eingestellt, dass die Messung genau zum Zeitpunkt der maximalen Resonanz stattfindet, so dass die Gleichspannung die Höhe der Resonanz und somit die Besetzung der Niveaus wiedergibt.

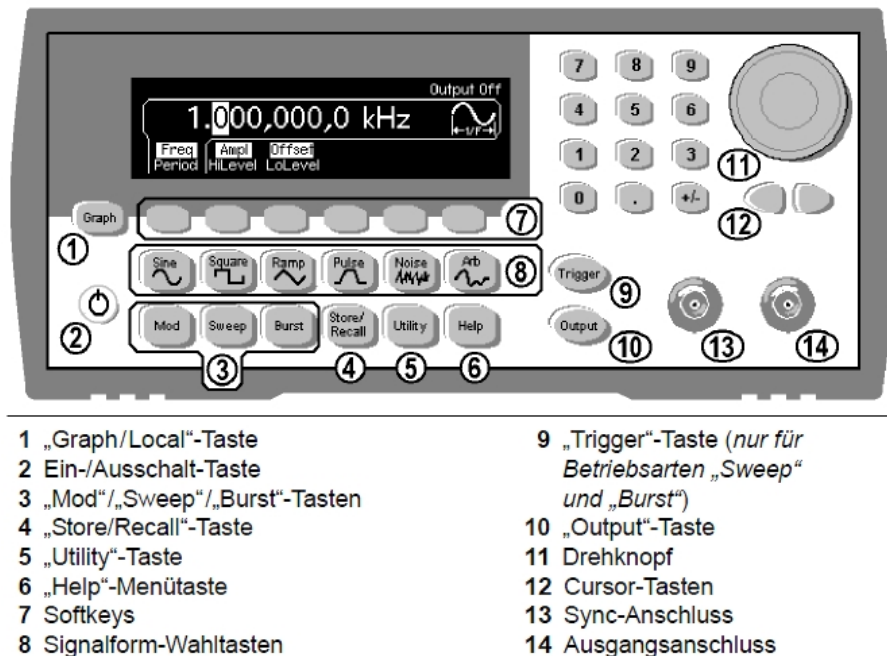
5.4 Funktionsgenerator

Der Funktionsgenerator wird im Rahmen dieses Versuches dazu verwendet, den Phasenraum der Resonanz bezüglich Amplitude und Frequenz des Wechselfeldes, aufzulösen. Zu diesem Zweck wird mit seinem Ausgangssignal die Manipulatorspule angesteuert.

Der Generator wird grundsätzlich nur zur Erzeugung von Sinusschwingungen eingesetzt, da alle anderen Kurvenformen zusätzliche Frequenzen beinhalten.

Die Bedienung des Funktionsgenerators ist durch die menügeführte Steuerung intuitiv gestaltet. Die wichtigsten Bedienelemente sind die sog. Softkeys zur Menüsteuerung sowie der Drehknopf bzw. das Ziffernfeld zum Einstellen der Parameter (siehe Abb. 6). Um die Frequenz oder Amplitude einzustellen, wählen Sie zunächst die entsprechende Signalform, welche nach dem Einschalten bereits auf Sinusform eingestellt sein sollte. Mit Hilfe der Softkeys können Sie den entsprechenden Parameter auswählen und den gewünschten Wert mittels Drehknopf einstellen oder direkt über das Ziffernfeld eingeben³. Der Wert wurde nun übernommen und das Signal kann durch Druck auf Output ausgegeben werden.

Eine zusätzliche Modulation der Frequenz oder der Amplitude ermöglicht das Messprogramm, indem es die nötigen Einstellungen am Funktionsgenerator vornimmt und eine modulationssteuernde Spannung ausgibt.



Hinweis: Durch länger anhaltendes Drücken einer Taste können Sie eine kontextsensitive Online-Hilfe aufrufen.

Figure 6: Der Funktionsgenerator

³Geben Sie den Wert über das Ziffernfeld ein, so müssen Sie anschließend die gewünschte Einheit wiederum mit den Softkeys wählen.

5.5 Der Computer

Mit Hilfe des Computer lassen sich die Signale direkt oder über den Sample-and-Hold-Verstärker aufnehmen. Zusätzlich kann das Messprogramm den Funktionsgenerator so ansteuern, dass ein Frequenz- (FM) bzw. Amplitudenbereich (AM) durchfahren wird.

Um ein zeitliches Signal aufzunehmen, wechseln Sie in die Registerkarte ZEITLICHE MESSUNG und stellen Sie die gewünschte Aufnahmedauer in Sekunden sowie den aufzunehmenden Kanal (Analysator oder S/H-Verstärker) ein. Ein Klick auf den Knopf AUFNEHMEN startet die Aufzeichnung. Um die Abtastrate und damit die Auflösung Ihrer Aufnahmen kümmert sich das Programm selbst. Sie wird in der gespeicherten Messung angegeben.

Um ein Spektrum aufzunehmen, wechseln Sie zunächst in die entsprechende Registerkarte (SPEKTRALE MESSUNG). Die nun zusätzlich freigegebenen Parameter bestimmen die Art der Modulation, den zu durchfahrenden Frequenz- bzw. Amplitudenbereich sowie die Richtung des Durchlaufs. Die Dauer der Messung und damit die Geschwindigkeit des Durchlaufs kann ebenfalls über den entsprechenden Parameter eingestellt werden.

Vorsicht! Die aufgenommenen Wertepaare sind mit einem Versatz behaftet, da Signal der Einstrahlspeule auf Protonen wirkt, welche erst (mit der endlichen Wassergeschwindigkeit) in den Analysator transportiert werden müssen.

Die Speicherung einer Messung erfolgt nicht automatisch! Der zuständige Programmteil ist jedoch selbsterklärend.

5.6 Die Helmholtzspulen

Die Helmholtzspulen werden im Rahmen dieses Versuches verwendet, um ein homogenes, das Störfeld überlagerndes Magnetfeld zu erzeugen. Der Betrag des Helmholtzfeldes im Zentrum der Spulen wird durch folgende Näherung der Spulengeometrie gegeben.

$$B_{HH} = \frac{\mu_0 n I_{HH}}{R} \left[\frac{8}{5\sqrt{5}} \left(1 - \frac{\zeta^2}{60R^2} \right) - \frac{31\zeta^2 - 36\eta^2}{125R^4} r^2 - \dots \right] \quad (41)$$

Mit $\zeta = 0.03$ m, $\eta = 0.046$ m, $r = 0.015$ cm, $R = 0.207$ m und $n = 720$.

Mit dem so erhaltenen Magnetfeld lässt sich die theoretische Resonanzfrequenz $\nu_{\text{res}}(B(I_{HH}))$ im Feld der Helmholtzspulen berechnen.

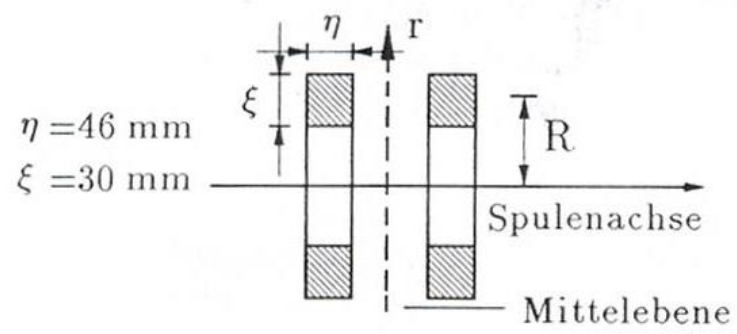


Figure 7: Die Geometrie der Helmholtzspule

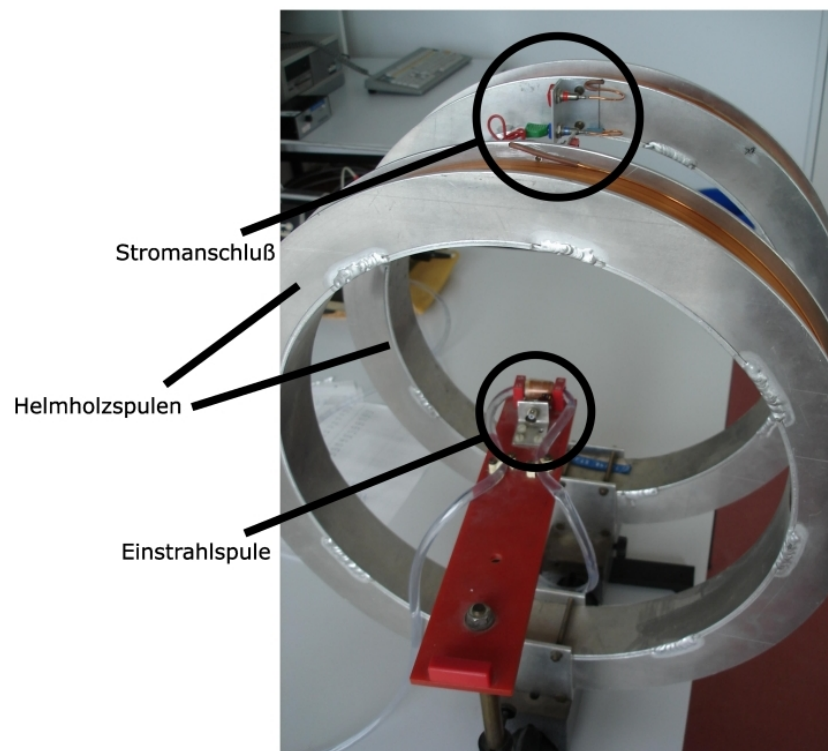


Figure 8: Die Helmholtzspule mit Einstrahlspule

5.7 sonstiges

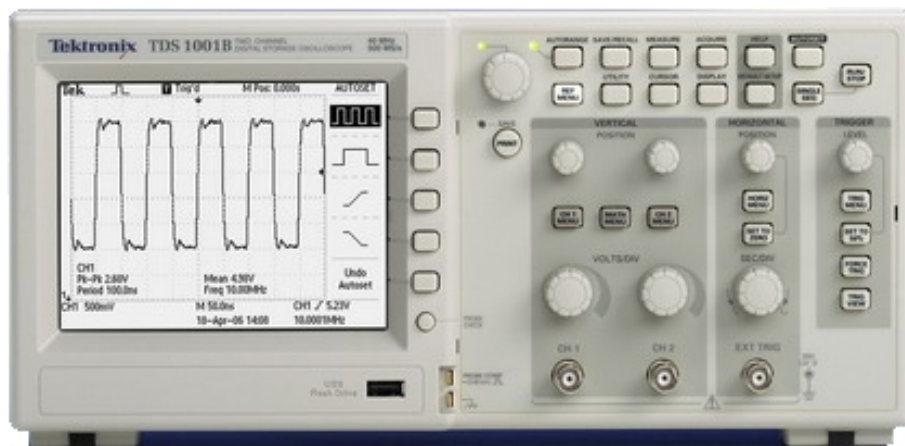


Figure 9: Das verwendete Oszilloskop

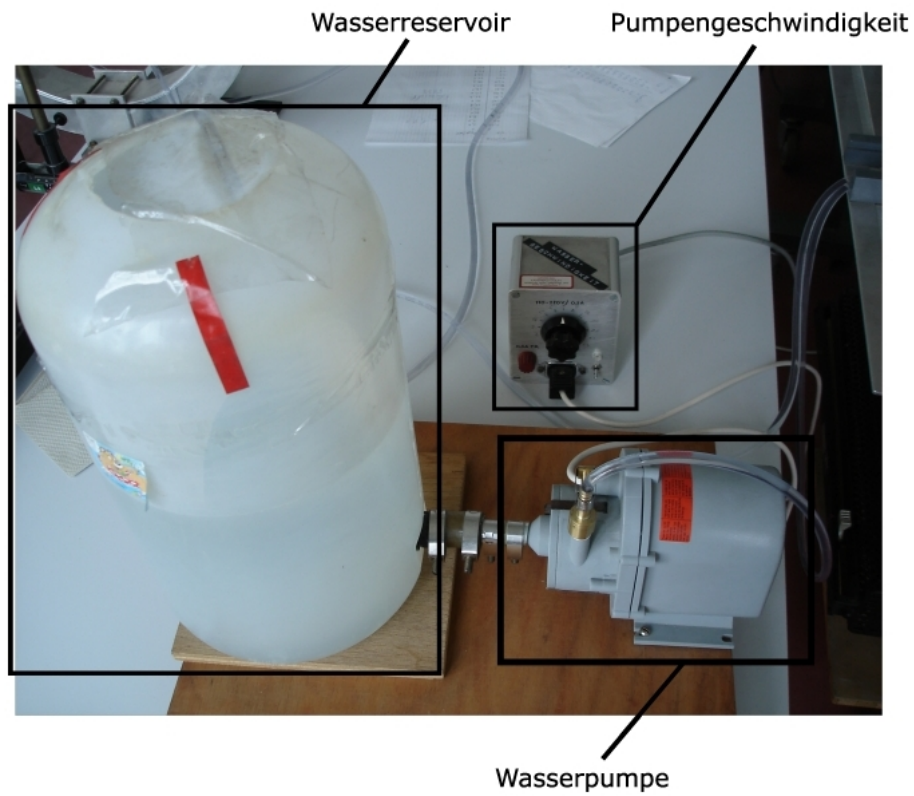


Figure 10: Die Wasserpumpe mit Reservoir

6 Aufgaben

Allgemeines

Prüfen sie von Zeit zu Zeit mit Hilfe des Oszillographen, ob die Signale (S1-S2-S3) noch äquidistante Abstände aufweisen und ob sie noch mit dem S/H-Verstärker in Phase sind.

6.1 Inbetriebnahme: Funktionsgenerator

Übersicht

1. Funktionsgenerator an Oszilloskop: Amplitude & Frequenz vergleichen
2. Funktionsgenerator an Oszilloskop und Einstrahlspule: Amplitude & Frequenz vergleichen
3. Bestimmung des Eichfaktors zwischen FG und Einstrahlspule

Aufbau: Teil 1

Schließen sie den Ausgang des Funktionsgenerators an den Eingang CH1 des Oszillographen an.



Figure 11: Aufbau: Bestimmung des Eichfaktors (ohne Einstrahlspule)

Durchführung: Teil 1

Zum Beginn des Versuches soll man sich mit dem Funktionsgenerator vertraut machen und mit Hilfe des Oszilloskops seine Genauigkeit prüfen.

Für zwei verschiedene Amplituden im Bereich von 1-100mV für jeweils zwei Frequenzen sollen nun die eingestellten Werte am Funktionsgenerator mit den am Oszillographen gemessenen verglichen werden. Beachten Sie die Unterschiede zwischen Spitze/Spitze Werten, Amplituden und Effektivwert.

Aufbau: Teil 2

Schließen sie den Ausgang des Funktionsgenerators mit Hilfe eines T-Stücks an den Eingang CH1 des Oszilloskops und an die Einstrahlspule im Zentrum der Helmholtzspule an.

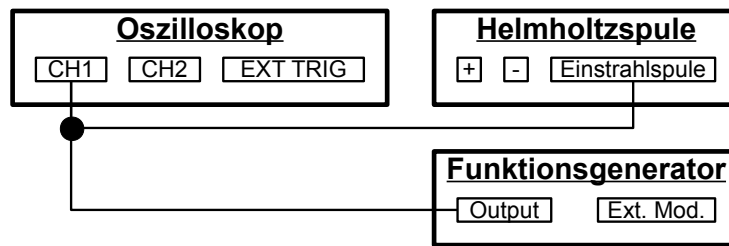


Figure 12: Aufbau: Bestimmung des Eichfaktors (mit Einstrahlspule)

Durchführung: Teil 2

Die Einstrahlspule im Manipulator hat einen kleinen Innenwiderstand. Um den Strom zu begrenzen und messbar zu machen, besitzt sie zusätzlich einen Vorwiderstand von 47Ω . Der Funktionsgenerator besitzt aber ebenfalls einen Ausgangswiderstand von 50Ω . Hierdurch wird die Amplitude der Ausgangsspannung reduziert. Führen Sie daher die obigen Messungen noch einmal mit angeschlossener Manipulatorschleife und einem T-Stück durch. Tun Sie dies für fünf verschiedene Amplituden und bestimmen Sie jeweils die Amplitudeneinstellung am Generator und die Spannung über der Einstrahlspule mit Vorwiderstand.

Die Ergebnisse sind graphisch aufzutragen und der Eichfaktor von Funktionsgenerator auf Einstrahlspule zu bestimmen. Dieser wird es später ermöglichen, die Amplitudenachse des Phasenraums in Aufgabe 6.5: *Spindrehung im Störfeld*, $S2(\nu)$ korrekt zu eichen.

6.2 Inbetriebnahme: Wasserkreislauf, Polarisator und Analysator

Übersicht

1. Pumpe, Analysator und Polarisator einschalten
2. Schwingkreis auf Resonanzfrequenz einstellen

Aufbau

Jetzt wird die Wasserpumpe mit maximaler Wassergeschwindigkeit (*Skalenteile*) angeschaltet. Achtung: die Spannung an der Pumpe darf nicht mehr als 12V betragen. Dann wird der Polarisationsstrom langsam innerhalb von 10 bis 20 Sekunden, um induktive Effekte zu vermindern, auf $I_{pol} = 2,5A$ hochgefahren. Daraufhin schalte man den Analysator ein. Der WOBELSTROM wird auf Maximum gestellt und das Ausgangssignal (NF SIGNAL) des Analysators auf den Oszillograph (CH2) gegeben.

Durchführung

Um das Resonanzsignal auf dem Oszillograph gut zu erkennen, stellen Sie zunächst die Nulllinie beider Eingänge auf +2divs ein. Dann muss der Amplitudenmaßstab auf 100mV/div und der Zeitmaßstab auf 5ms/cm eingestellt werden. Versuchen sie nun durch Verändern der Frequenz des Schwingkreises (OSZILLATOR GROB) den Resonanzfall zu finden. Im Normalfall muss nur die Feineinstellung (OSZILLATOR FEIN) leicht nachgeregelt werden, um die Resonanzsignale mit einem äquidistanten Abstand zu messen.

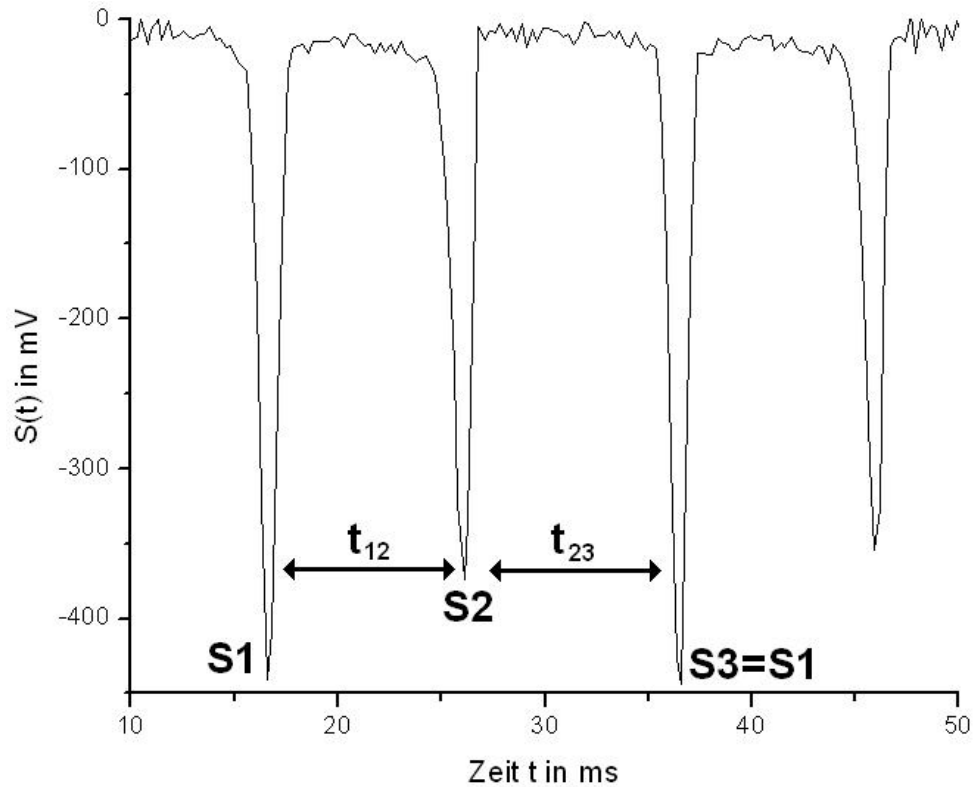


Figure 13: Die charakteristischen Größen des Messsignals $S(t)$

6.3 Inbetriebnahme: Computer, Messung: $S(t_{12})$

Übersicht

1. Messung: $S(t)$ und ν_{res} bei verschiedenen Impulsabständen t_{12}

Aufbau

Legen sie den Ausgang (NF OUT) des Analysators mit Hilfe eines T-Stücks zusätzlich auf den Eingang (ANALYSATOR) des Computers. Mit Hilfe eines Abschlusswiderstandes (Terminator) werden Reflexionen des Signals am Kabelende verhindert. Desweiteren verbinden Sie den Frequenzzähler mit dem Ausgang (HF OUT) des Analysators. Fahren Sie den PC hoch und melden Sie sich als Benutzer NMR an. Starten Sie anschließend das NMR-Messprogramm welches auf dem Desktop oder im Startmenü zu finden ist.

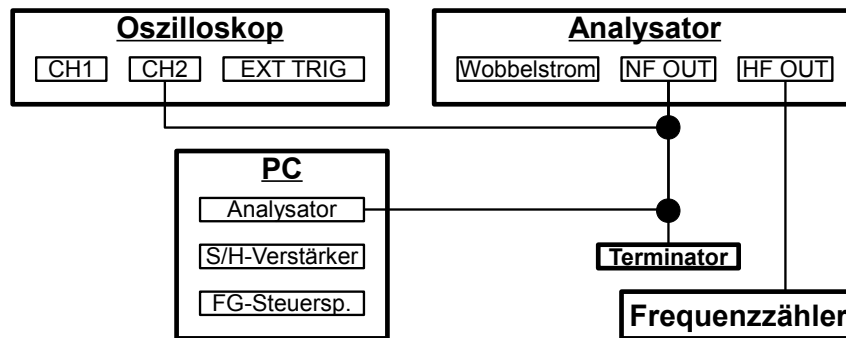


Figure 14: Aufbau: Messung der Impulsabstände

Durchführung

Entfernen Sie nun den Terminator und betrachten Sie den Einfluß auf das Signal. Ihnen sollte auffallen, dass sich das eigentliche Signal nicht ändert, nur der Bereich zwischen zwei Peaks stellt keine saubere Nulllinie mehr dar. Aus technischen Gründen des Aufbaus, die der Betreuer bei der Einweisung ausführen wird, sollten alle folgenden Versuchsteile ohne den Terminator durchgeführt werden.

Ändern Sie die Frequenz des Schwingkreises (OSZILLATOR GROB/FEIN) nun schrittweise und messen Sie das Signal $S(t)$ in sinnvollen Abständen zehn mal mit Hilfe des Computers (Aufnahmedauer: 0,15s). Vergessen Sie nicht die eingestellte Frequenz des Schwingkreises zu notieren!

Da die Impulsabstände mit Hilfe des Oszillographen eingestellt werden, lässt sich erst nach der Auswertung der Messdaten erkennen, wie groß die Abweichung der Impulsabstände von der Äquidistanz war. Das während der Resonanz wirkende Feld ist also fast immer eine Überlagerung vom Feld des Permanentmagneten und dem nicht verschwindenden Wobelfeld. Daher sind die gemessenen Frequenzen auch nicht mit der Resonanzfrequenz des Permanentmagneten B_A identisch.

Trägt man nun die gemessenen Resonanzfrequenzen gegen den Impulsabstand (t_{12}) auf, lässt sich bei $t_{12} = 10\text{ms}$ die Resonanzfrequenz des Analysators ablesen.

Tragen Sie die Signalthöhe S_2 in Abhängigkeit vom Signalabstand t_{12} graphisch auf. Kommentieren sie den Kurvenverlauf.

Berechnen sie mit Hilfe der Resonanzfrequenz die Kraftflussdichte B_A und die Energieaufspaltung ΔE_A im Permanentmagneten des Analysators. Das Ergebnis kann viele signifikante Stellen enthalten. Legen Sie besonderen Wert auf eine möglichst genaue Fehlerbestimmung.

6.4 Inbetriebnahme: Sample and Hold Verstärker, Messung: $S_2(t, I_{pol})$

Übersicht

1. Sample und Hold Verstärker anschließen
2. Phase über Oszillograph auf S_2 einstellen
3. Messung: $S_2(t)$ bei verschiedenen Polarisationsströmen I_{pol}

Aufbau

Mithilfe eines weiteren T-Stücks wird das Signal (NF OUT) des Analysators nun auch an den Eingang (IN) des S/H-Verstärkers angeschlossen. Zusätzlich wird sein Ausgang (OUT) an den Eingang CH1 des Oszillographen und an den Computer Eingang (S/H-VERSTÄRKER) gelegt.

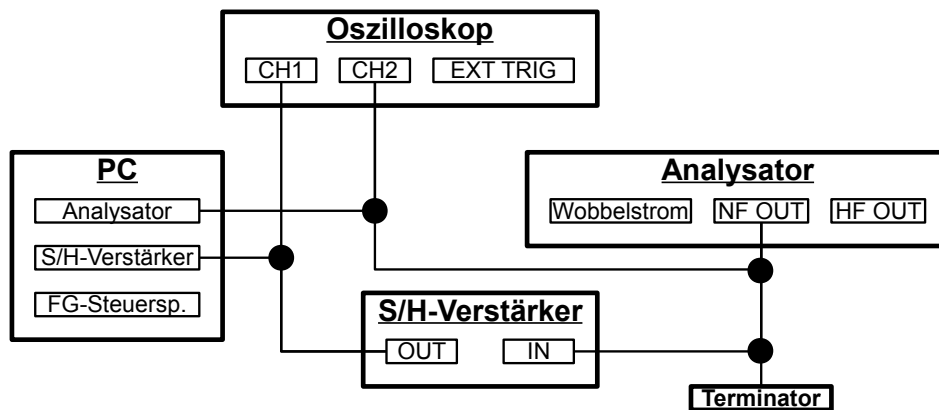


Figure 15: Messung der Impulshöhe

Durchführung

Hat man das NF-Signal auf CH2 des Oszilloskops gelegt und den Ausgang des Sample-and-Hold-Verstärkers auf CH1, so erkennt man auf CH1 eine oder mehrere waagerechte Linien, die sich in etwa auf gleicher Höhe befinden. An Treffpunkt von je zwei Linien erkennt man einen kleinen Sprung. An dieser Stelle öffnet sich das Tor des S/H-Verstärkers, um ein neues Signal zu messen. Die linke Linie ist also das Signal, das beim letzten Triggerimpuls gemessen wurde, während die rechte Linie das gerade gemessene Signal darstellt.

Die Phase ist nun so einzustellen, dass die S/H-Spannung die Peakhöhe wiedergibt bzw. der Triggerzeitpunkt genau im Peakmaximum liegt. Das Ausgangssignal wird am besten von nun an ständig auf CH1 des Oszilloskops beobachtet und die Phase im Bedarfsfall (kommt häufig vor) nachgeregelt.

Verstellen Sie den Zeitmaßstab von 5 auf 2,5ms/div und regeln Sie mit Hilfe des variablen Maßstabsknopfes nach bis nur noch der S_2 Peak auf dem Oszilloskop angezeigt wird.

Verstellt man den y Nullpunkt des S/H-Verstärkers ein wenig, so kann man sehr genau am Oszillographen erkennen, ob sich der S/H-Verstärker noch in Phase mit dem Analysator befindet, da das Öffnen des Tors dann nicht mehr als senkrechter Strich dargestellt wird, sondern als eine Linie, die die Signalkurve nachfährt.

Es soll jetzt die Abhängigkeit der Höhe des Messsignals S_2 von der Polarisationsstromstärke I_{pol} bestimmt werden. Da S_2 während einer Messung statistisch schwankt, ist es nötig über mehrere S_2 Messungen zu mitteln. Dies erreicht man am einfachsten, indem man S_2 mit einer Aufnahmedauer zwischen 20 und 60 Sekunden für jeden Wert von I_{pol} misst.

Neben dem Polarisationsstrom ist auch das Magnetfeld im Polarisator mit Hilfe einer Hallsonde zu messen. Die Hallsonde befindet sich im Nebenraum. Betimmen Sie für einen Strom von 2,5A die Flussdichte und entfernen Sie anschließend die Hallsonde wieder aus dem Raum. Gehen Sie bei der Auswertung davon aus, dass Strom und Feld im Magneten proportional sind.

Vergleichen Sie die Linearität Magnetfeld zu Signalhöhe. Der Polarisationsstrom ist im Bereich von 1,3 bis 2,5A zu variieren.

6.5 Messung: Spindrehung im Störfeld, $S_2(\nu)$

Übersicht

1. Anschließen der Einstrahlspule und des Funktionsgenerators
2. Suchen der Resonanz im Störfeld
3. Messen der Resonanz im Phasenraum

Aufbau

Der Aufbau des letzten Versuchteils wird nun durch den Funktionsgenerator sowie die Einstrahlspule im Zentrum der Helmholtzspulen ergänzt.

Dafür legt man den Ausgang (FG-STEUERSPANNUNG) des Computers auf den Eingang für Modulationen (EXT. MODULATION) auf der Rückseite des Funktionsgenerators, dessen Ausgang an die Einstrahlspule angeschlossen wird.

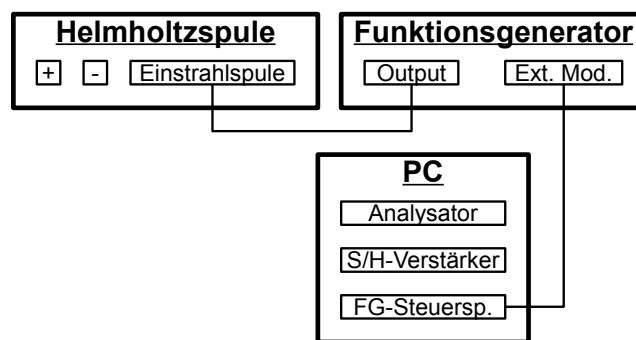


Figure 16: Messung der Resonanz im Störfeld

Durchführung

Um die Resonanzfrequenz im Störfeld zu finden, wählt man als Anhaltspunkt die Stärke des Erdmagnetfeldes ($B_{\text{erde}} \approx 3 \times 10^{-5} \text{ T}$) und schätze seine Resonanzfrequenz ab.

Stellen Sie am Funktionsgenerator eine Amplitude von 50mV ein und wählen Sie im Messprogramm die Option SPEKTRUM AUFNEHMEN und FM. Stellen Sie die Frequenzgrenzen so ein, dass ein Bereich von ca. 1000Hz um die geschätzte Resonanzfrequenz durchfahren wird. Die Durchlaufzeit sollte zwischen 20 und 60 Sekunden gewählt werden. Beachten Sie, dass eine längere Messzeit zu genaueren Messdaten führt. Starten Sie die Messung und kontrollieren Sie, ob die Resonanz im untersuchten Frequenzbereich liegt. Führen Sie die Suche in anderen Frequenzintervallen ober- und unterhalb der Resonanzfrequenz im Erdfeld solange durch, bis die Resonanz gemessen wird.

Warum ist die Resonanzfrequenz nicht genau an der berechneten Stelle?

Stellen Sie nun die Amplitude am Funktionsgenerator auf 20mV und ändern Sie den Frequenzbereich so, dass links und rechts der Resonanz etwa 200Hz liegen.

Messen sie nun ohne die Breite oder Lage des Frequenzfensters zu ändern Resonanzkurven mit den Amplituden 10-100mV im Abstand von 5mV. Notieren Sie, wann der Resonanzpeak besonders deutlich ist.

Durch diese Messungen wird der Phasenraum der Resonanz in der Amplitude und Frequenz aufgelöst.

Nehmen Sie anschließend die Spindrehung in Abhängigkeit von der Amplitude auf (Programmoption AM). Hierzu stellen Sie bei der zuvor notierten Amplitude für einen besonders scharfen Peak die Resonanzfrequenz möglichst genau am Funktionsgenerator ein. Den zu durchfahrenden Amplitudenbereich wählen Sie so, dass möglichst viele Spindrehungen zu sehen sind. Falls notwendig stellen Sie die Resonanzfrequenz bei einer höheren Amplitude noch einmal nach. Nehmen Sie eine Messung mit einer Durchlaufzeit von mindestens 60 Sekunden auf. Beachten Sie, dass Sie bei der Messung durch Null laufen müssen (Anfang auf negativen Amplitudenwert), um den Nullpunkt exakt bestimmen zu können.

Messen Sie abschließend alle relevanten geometrischen Parameter der Einstrahlspule, die zur Bestimmung ihres Magnetfeldes notwendig sind. Die Einstrahlspule hat eine Windungszahl $n = 125$.

Auswertung

Beachten Sie folgendes bei der Auswertung:

Um das Strömungsverhalten in der Manipulatorspule zu verbessern, wurde dort eine Engstelle in den Schlauch eingefügt. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit gehen Sie nun folgendermaßen vor. Aus der Zeit, die das Wasser durch den gesamten Schlauch benötigt (Relaxationszeit) bestimmen Sie die Geschwindigkeit unter Annahme eines konstanten Schlauchdurchmessers. Anschließend berechnen Sie hieraus die Geschwindigkeitszunahme in der Manipulatorspule. Der Innendurchmesser des Schlauchs außerhalb der Spule beträgt 6mm, innerhalb ist er 4mm.

Plotten Sie alle Resonanzkurven $S_2(\nu)$, die Sie im Störfeld aufgenommen haben einzeln. Beurteilen Sie den Verlauf und die Höhe der Peaks und entscheiden Sie, welche der Kurven Sie der $\pi/2$, π und 2π Resonanz zuordnen würden. In der Hausaufgabe wurden diese Resonanzen berechnet. Normieren Sie nun diese berechneten Kurven auf die gemessene Resonanzfrequenz, plotten Sie sie und vergleichen Sie die berechneten Halbwertsbreiten mit den gemessenen.

In der Spindrehungskurve erkennt man die Oszillation der Magnetisierung, deren Maximalwerte jedoch nach oben und unten unterschiedlich sind und mit wachsendem Drehwinkel abnehmen. Korrigieren Sie zunächst die Asymmetrie, die von der Funktionsweise des Detektors herrührt. Benutzen Sie die unter 5.2 angegebene Gleichung und passen Sie die Parameter k und l so an, dass die Messwerte symmetrisch um eine Achse oszillieren.

Die Abnahme der Amplitude mit zunehmendem Drehwinkel liegt an der unterschiedlichen Verweildauer der Protonen in der Manipulatorspule aufgrund der inhomogenen Strömungsverteilung im Schlauch. Der turbulenten Strömung wird durch die zusätzliche Gaussfunktion in Gleichung 40 Rechnung getragen. Nutzen Sie Gleichung 40 bei konstanter Frequenz (Resonanzfrequenz) um durch Variation des Parameters c den symmetrisierten Verlauf der Messwerte zu reproduzieren. Beachten Sie bei der Umrechnung von Hochfrequenzamplitude auf Drehwinkel die vorgenommene Eichung der Amplitude des Funktionsgenerators.

Wenden Sie abschließend den erhaltenen Satz an Parametern k und l auf die Spindrehungskurven für $\pi/2$, π und 2π an, um den Einfluss des Detektors zu eliminieren. Vergleichen Sie nun erneut die Halbwertsbreiten der korrigierten Messkurven mit dem theoretischen Verlauf.

6.6 Messung der Resonanz im Feld der Helmholtzspulen

Übersicht

1. Anschließen der Helmholtzspulen an Stromquelle und Messgerät
2. Berechnete Resonanz einstellen und Reale suchen
3. Messung mit $\pm I_{HH}$ und $\uparrow\downarrow$ Frequenzrampe

Aufbau

Schließen sie zusätzlich zum bisherigen Aufbau, die Stromquelle mit dem in Reihe geschalteten Präzisionsmultimeter, an die Helmholtzspulen an. Die Helmholtzspulen sind bereits mit einem Serienwiderstand versehen, um den Strom zu stabilisieren. Betreiben Sie daher das Netzteil bei konstanter Spannung.

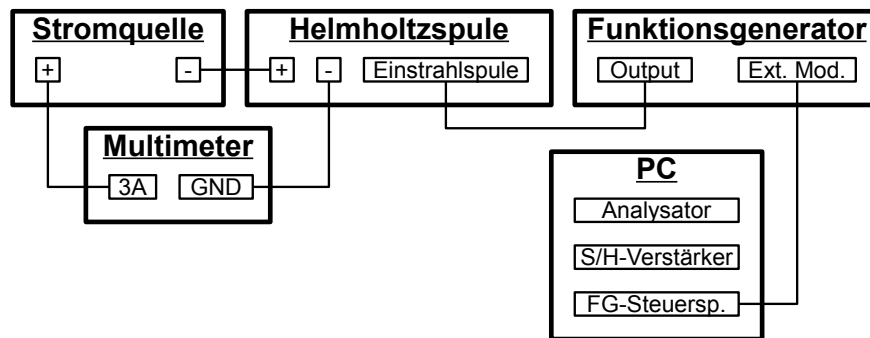


Figure 17: Messung der Resonanz im Feld der Helmholtzspulen

Durchführung

Messen sie für drei unterschiedliche Helmholtzspulenströme $I_{HH} = 45, 65$ und 80mA , die Resonanzkurven im Feld der Helmholtzspulen. Um die spätere Auswertung (siehe 7.1) zu ermöglichen, muss für jeden Wert von I_{HH} auch die Resonanz bei $-I_{HH}$ gemessen werden. Zusätzlich muss die Resonanz jeweils von niedrigen ($S2(\nu_{\downarrow})$) und hohen ($S2(\nu_{\uparrow})$) Frequenzen kommend durchfahren werden. Bei diesen Messungen ist es wichtig, dass die Ströme vom Betrag her möglichst identisch sind, da es sonst zu Verschiebung der Resonanzfrequenz kommt, welche die Auswertung verfälschen. Dafür wird ein Präzisionsmultimeter mit der Stromquelle in Reihe geschaltet und der Strom gegebenenfalls vor der Messung justiert.

Plotten sie jeweils die zwei gemessenen Resonanzkurven zusammen, welche der Fahrt durch die Resonanz von hohen und niedrigen Frequenzen kommend entspricht.

Berechnen Sie Winkel und Betrag des im Praktikum herrschenden Störfeldes. Wo liegt seine Hauptquelle? Skizzieren sie hierfür während des Versuchs Position und Ausrichtung der einzelnen Geräte.

Bestimmen sie die Größe des Magnetons der Protonen im Wasser.

6.7 Bestimmung der Relaxationszeit von Protonen

Übersicht

1. Messung des $S2(t)$ Signals nach Einschalten der Wasserpumpe

Aufbau

siehe Aufbau: Inbetriebnahme: Sample-and-Hold-Verstärker, Messung: $S2(t, I_{pol})$

Durchführung

Ist die Wasserpumpe nicht in Betrieb, polarisieren die Protonenspins entsprechend dem Magnetfeld welches auf sie einwirkt (Polarisator, Analysator, Störfeld). Dies lässt sich zur Bestimmung der Relaxationszeit der Protonen im Wasser nutzen.

Deaktivieren Sie die Pumpe und warten Sie ca. 20 Sekunden. Starten sie dann zunächst die zeitliche Messung des S/H-Verstärkersignals mit einer Aufnahmedauer von ungefähr 25 Sekunden und 2 Sekunden später die Wasserpumpe.

Führen Sie die Messung bei verschiedenen Pumpgeschwindigkeiten durch.

Aus dem dann gemessenen Verlauf des Resonanzsignals $S2(t)$ lässt sich die Zeit t_v bestimmen, welche die Protonen aus dem Polarisator benötigen, um in den Analysator zu gelangen.

Tragen Sie die Höhe des Signals $S2(t_5)$ gegen die Zeit t_v auf, und bestimmen Sie die Relaxationszeit T_1 durch eine halblogarithmische Auftragung und die Wassergeschwindigkeit bei maximaler Pumpleistung, über die Schlauchlänge (Messen Sie die relevante Schlauchlänge).

Erläutern sie zusätzlich den Verlauf des Signals $S2(t)$. Gehen Sie dabei auf die in Abb. (18) gezeigten Punkte besonders ein.

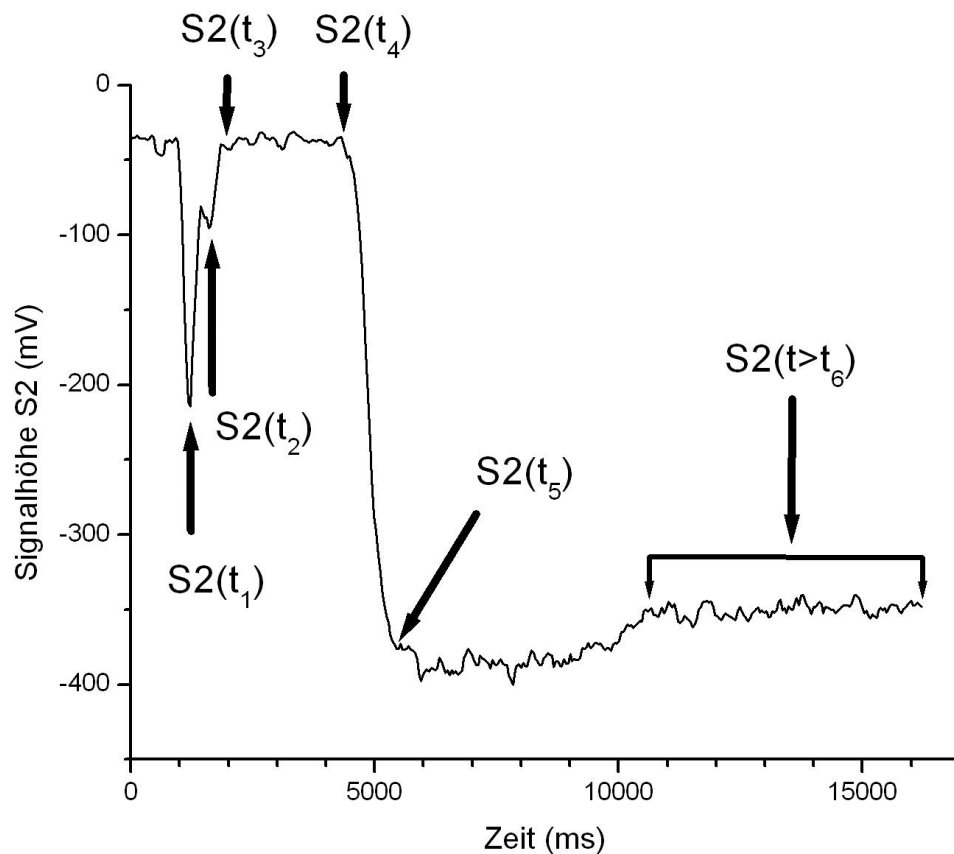


Figure 18: Messsignal bei der Bestimmung der Relaxationszeit T_1 der Protonenspins in Wasser

7 Auswertung

7.1 Bestimmung von Betrag und Winkel des Störfeldes

Das in der Helmholtzspule effektiv wirkende Feld ist eine Überlagerung des Spulenfeldes \vec{B}_{HH} und der äußeren Störfelder \vec{B}_s .

$$\vec{B}_{\text{eff}} = \vec{B}_{\text{HH}} + \vec{B}_s \quad (42)$$

$$B_{\text{eff}}^2 = B_{\text{HH}}^2 + B_s^2 + 2B_{\text{HH}}B_s \cos \phi \quad (43)$$

Für Resonanzfrequenz in diesem Magnetfeld gilt dann

$$\nu_{\text{res}} = \frac{g\mu_K}{h} B_{\text{eff}} \quad (44)$$

$$\nu_{\text{res}}^2 = \frac{g^2\mu_K^2}{h^2} (B_{\text{HH}}^2 + B_s^2 + 2B_{\text{HH}}B_s \cos \phi) \quad (45)$$

Da das Magnetfeld der Helmholtzspule vom Spulenstrom I_{HH} abhängig ist gilt

$$B_{\text{HH}} = c \times I_{\text{HH}} \quad (46)$$

lässt sich (Gl. 45) umschreiben. Trägt man die Summe der Frequenzquadrate aus der Messung mit $+I_{\text{HH}}$ und $-I_{\text{HH}}$ gegen I_{HH}^2 auf, ergibt sich eine Gerade deren Steigung proportional zum Kernmagneton μ_K ist und einem y -Achsenabschnitt aus dem sich der Betrag des Störfeldes B_s berechnen lässt.

$$\nu^2(+I_{\text{HH}}) + \nu^2(-I_{\text{HH}}) = 2 \frac{g^2\mu_K^2}{h^2} (c^2 I^2 + B_s^2) \quad (47)$$

Um den Winkel ϕ zu berechnen, den die beiden Felder einschließen ist eine Auftragung der Differenz der Frequenzquadrate gegen den Spulenstrom nötig.

$$\nu^2(+I_{\text{HH}}) - \nu^2(-I_{\text{HH}}) = 4 \frac{g^2\mu_K^2}{h^2} (c I_{\text{HH}} B_s \cos \phi) \quad (48)$$

Durch die Steigung dieser Gerade erhält man den Winkel ϕ .

7.2 Relaxationszeit der Protonenspins

Um zu bestimmen, ab welcher Wassergeschwindigkeit die turbulente Strömung aussetzt, berechnet man die Reynoldszahl.

$$R = \frac{2\rho r v}{\eta} \quad (49)$$

Mit dem Innenradius des Wasserschlauchs r ($= 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$), der Dichte des Wassers ρ ($= 998,2 \text{ kg/m}^3$) seiner Zähigkeit η ($= 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$) und der Flussgeschwindigkeit v .

Liegen die Werte der Reynoldszahl unter 2000, spricht man von laminarer Strömung. Werte ab 3000 stehen dagegen für turbulente Strömungen. Was ist die minimale Fließgeschwindigkeit für die noch eine turbulente Strömung vorliegt?

7.3 Auswertung mit Mathematica

7.3.1 Berechnen der Phasenraumfunktion $f[\nu, \text{UHF}, c]$

$$\begin{aligned}
 B1[\text{UHF}_] &= \dots \\
 \Phi0[\text{UHF}_] &= \gamma \tau B1[\text{UHF}] \\
 u[\nu_-, \text{UHF}_] &= 2\pi \frac{\nu_{\text{RES}} - \nu}{\gamma B1[\text{UHF}]} \\
 f[\nu_-, \text{UHF}_-, c_-] &= \text{Integrate}\left[\frac{1}{1 + u[\nu, \text{UHF}]^2} \left(u[\nu, \text{UHF}]^2 + \text{Cos}\left[\Phi \sqrt{1 + u[\nu, \text{UHF}]^2}\right] \right) \right. \\
 &\quad \sqrt{\frac{1}{\pi c \Phi0[\text{UHF}]}} \text{Exp}\left[-\frac{(\Phi - \Phi0[\text{UHF}])^2}{c \Phi0[\text{UHF}]}\right] \\
 &\quad \{\Phi, -\text{Infinity}, \text{Infinity}\}, \\
 &\quad \text{Assumptions} \rightarrow \{\text{Im}[u[\nu, \text{UHF}]] == 0, \text{Re}[\Phi0[\text{UHF}]] > 0\} \\
 &\quad \left. \right]
 \end{aligned}$$

7.3.2 Importieren von Werten

```

path = "c:verzeichnis\wo\die\daten\sind";
name = "messdatei.endung";
SetDirectory[path];
data = ReadList[name, {Real, Real}];

```

Der String `path` enthält den Ort der Messdaten. Während der String `name` für eine beliebige auszuwertende Messung steht. Mittels `SetDirectory` braucht man nur noch die Dateinamen anzugeben ohne auf das Verzeichnis verweisen zu müssen, in dem sie sich befinden. Der `ReadList` Befehl liest eine (manuell) um die Kopfzeile bereinigte Werteliste aus.