

Röntgenstrahlung

Ulrich Müller & Bijan Chokoufe Nejad

Mithilfe von drei Röntgenanoden sowie verschiedenen Streuobjekten konnten wir die theoretischen Werte der K_α - und K_β -Linie von Kupfer, Eisen und Molybdän bestätigen. Zudem war die Feinstruktur von Eisen und Molybdän im Spektrum erkennbar. Über das Duane-Hunt-Gesetz haben wir Plancksche Wirkungsquantum zu $h = (6.645 \pm 0.059) \times 10^{-34} \text{ Js}$ bestimmt. Anhand des Effekts der inelastischen Streuung von Photonen an Elektronen haben wir die Compton-Wellenlänge zu $\lambda_c = (2.25 \pm 0.43) \text{ pm}$ ermittelt. Schließlich haben wir zwei Laue-Aufnahmen eines Materials gemacht, den Reflexen Miller-Indices zugeordnet und damit die Diamandstruktur der Probe identifiziert haben.

Betreuer: Dr. Charles Gould

Versuchsdurchführung: 05. Oktober 2012

Protokollabgabe: 12. Oktober 2012

1 Einleitung

In den ersten 20 Jahren nach der Entdeckung der Röntgenstrahlung durch Wilhelm Conrad Röntgen im Jahr 1885 war zweifelhaft, ob sich es sich bei dieser Strahlung um emittierte Teilchen oder um Wellen handelte. Sollte es sich um Wellen handeln, so müsste deren Wellenlänge sehr kurz sein, da die emittierte Strahlung ein hohes Durchdringungsvermögen aufwies. Heute weiß man, dass es sich bei Röntgenstrahlen um elektromagnetische Wellen handelt, die eine Wellenlänge von 0.1 bis 10 Å besitzen. Ein Nachweis so kleiner Wellenlängen schien zu jener Zeit nicht realisierbar, da genügend enge Beugungsgitter nicht herstellbar waren. Erst Max von Laue hatte die Idee, Röntgenstrahlung an Kristallen zu beugen, deren Gitterkonstante ebenfalls in der Größenordnung der Röntgenwellenlänge liegen sollten und deren Gitterstruktur bis zu Laues Experiment ebenfalls als Hypothese galt. Heute kann man mit Hilfe von Röntgenstrahlung nicht nur sehr genau die Gitterkonstante von Kristallen bestimmen, sondern auch die Interferenz an Kristallen ausnutzen, um sehr monochromatische Röntgenstrahlung zu erzeugen. [2]

In diesem Versuch wird ein LiF-Kristall als Analysator vor einem Zählrohr verwendet, um ein Röntgenspektrum genau zu untersuchen. Außerdem werden Laue-Bilder von einem unbekannten Kristall aufgenommen, um aus der Verteilung der Beugungsreflexe auf dessen Struktur zurück zu schließen.

2 Theorie

Eine Röntgenröhre besteht aus einer Glühkathode sowie einer Anode im Vakuum. An der Glühkathode werden durch den glühelektrischen Effekt Elektronen frei, welche durch eine angelegte Spannung zur Anode beschleunigt werden. Bei der Ankunft an der Anode besitzen sie aufgrund der Potentialdifferenz U_A die Energie $E = eU_A$. Wird die gesamte Energie auf ein Photon übertragen, ergibt sich, unter Vernachlässigung der Austrittsarbeit, mittels $E = h\nu$ eine höchste Frequenz bzw. minimale Wellenlänge ($\lambda = c/\nu$) für das Photon:

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{e U_A} . \quad (2.1)$$

Diese Abhängigkeit wird Duane-Hunt-Gesetz genannt [2]. Elektronen können durch Stöße mit dem Anodenmaterial abgebremst werden. Bei der Beschleunigung von Ladungen wird elektromagnetische Strahlung frei, welche Bremsstrahlung genannt wird. Dies führt zu einem kontinuierlichen Spektrum ab λ_{\min} . Zudem wird dieses Spektrum noch von charakteristischen, materialabhängigen, scharfen Peaks hoher Intensität überlagert. Diese entstehen durch Stöße der beschleunigten Elektronen mit den Elektronen innerer Schalen des Anodenmaterials. Der entstehende, unbesetzte Zustand wird von einem Elektron einer höheren Schale gefüllt, wobei die atomspezifische Energiedifferenz als elektromagnetische Strahlung frei wird.

Vernachlässigt man die Wechselwirkungen zwischen den Elektronen eines Atoms, erhält man ein ähnliches System wie das Wasserstoffatom und somit sind die Energieniveaus proportional zur Hauptquantenzahl $E \propto 1/n^2$ [2]. Wie in Abschnitt 4.5 genauer diskutiert wird, muss allerdings die Kernladungszahl modifiziert werden, um eine analoge Formel zu den Energieniveaus des Wasserstoffs zu erhalten. Im Moseley-Gesetz steht daher eine effektive Kernladungszahl $Z_{\text{eff}} = Z - \sigma$ mit der Abschirmkonstante σ . Für die Übergänge zwischen den Energieniveaus und damit für die charakteristischen Spektrallinien folgt

$$h\nu = R_H(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (2.2)$$

mit der Rydberg-Konstante $R_H = 13.606 \text{ eV}$ [3]. Daraus ergeben sich für $m > n$ und $n = 1, 2, \dots$ die K-, L-, ... Linien.

Die erzeugten Röntgenstrahlen können, wie in Abschnitt 1 angedeutet wurde, zur Analyse von Kristallstrukturen verwendet werden. Strahlt man Röntgenstrahlung auf einen Kristall, kann diese an den Atomrümpfen reflektiert werden. Betrachtet man zwei parallele Gitterebenen mit Abstand d , auf die im Winkel θ eingestrahlt wird, erhält man mittels einfacher Geometrie die sog. Bragg-Bedingung, bei der konstruktive Interferenz auftritt,

$$2d \sin \theta_n = n\lambda, \quad (2.3)$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ die Beugungsordnung angibt. Ferner hängt die Intensität I der Reflexe von dem Strukturfaktor S ab: $I \propto |S|^2$. Dieser berechnet sich über die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung [2]. Dieses Integral kann auf die verschiedenen Atome der Basis aufgeteilt werden und ergibt somit Atomformfaktoren f_i sowie die Summe über die Atome der Basis:

$$S = \sum_i f_i e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_i}, \quad (2.4)$$

mit dem reziproken Gittervektor \mathbf{K} und der Basis \mathbf{a}_i .

Neben den Braggreflexionen können Röntgenstrahlen auch mittels Comptonstreuung mit Materie wechselwirken. Hier stößt das Photon elastisch mit einem der quasifreien Elektronen des Festkörpers. Mittels Energie- und Impulserhaltung kann die Änderung der Wel-

lenlänge des Photons berechnet werden

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos \alpha) \quad \text{mit} \quad \lambda_c = \frac{h}{m_e c}, \quad (2.5)$$

wobei α der Winkel zwischen ein- und auslaufenden Strahl und $\lambda_c = 2.426 \text{ pm}$ [3] die Comptonwellenlänge des Elektrons ist.

3 Experimenteller Aufbau

Die Experimente und die Erzeugung der dafür notwendigen Röntgenstrahlung findet in einem Vollschutzröntgengerät der Firma PHYWE statt. Mit diesem ist es möglich, über eine Schnittstelle mit einem Rechner auf alle relevanten Einstellungen des Experimentes zuzugreifen. So können die Anodenspannung sowie der Anodenstrom, die Position des Goniometers, Messmodus und Integrationszeit angesteuert werden. Sofern nicht anders angegeben, werden die empfohlenen Einstellungen der Versuchsanleitung verwendet. Da das verwendete Zählrohr eine gewisse Totzeit besitzt, achten wir bei allen Versuchen auf eine nicht zu hohe Zählrate.

3.1 Charakteristische Röntgenstrahlung von Kupfer

Der in einer Kupferanode erzeugte Röntgenstrahl tritt durch eine 1 mm breite Apertur, welche für ein dünnes Strahlprofil sorgt. Ein LiF-Analysatorkristall auf einem Goniometer sowie ein Zählrohr werden im Theta-2-Theta Scan-Modus betrieben, um die Intensität des Röntgenstrahles wellenlängensensitiv aufzunehmen. Die gemessenen Kupferlinien werden mit den Energiedifferenzen der Niveaus im Kupfertermschema verglichen. Anschließend wird untersucht, welche Wellenlängen des Kupferspektrums durch ein Ni-Filter absorbiert werden. Die Röntgenröhre wird für diesen Versuch bei maximaler Anodenspannung (35 kV) und maximaler Anodenstromstärke (1 mA) betrieben.

3.2 Intensität charakteristischer Strahlung, Duane-Hunt und das Plancksche Wirkungsquantum

Wie sich die Anodenspannung und die Anodenstromstärke auf das Spektrum, insbesondere auf die Intensität der K_α und K_β -Linien, auswirkt, wird mit dem selben Versuchsaufbau untersucht. Wir prüfen das empirische Gesetz, dass die Abhängigkeit der Intensität der charakteristischen Linien I_K angibt [1]

$$I_K \propto I_A \times (U_A - U_K)^{3/2}, \quad (3.1)$$

mit dem Anodenstrom I_A , der Anodenspannung U_A und dem Ionisationspotential des K-Niveaus U_K des Anodenmaterials. Außerdem bestimmen wir die Grenzwellenlänge, bei der das Spektrum beginnt, um das Duane-Hunt-Verschiebungsgesetz zu überprüfen, vergleiche Glg. (2.1).

3.3 Charakteristische Röntgenstrahlung von Eisen

Wie im ersten Versuchsaufbau wird nun die charakteristische Röntgenstrahlung von Eisen gemessen. Zur Untersuchung der Aufspaltung der K_α -Linie betrachten wir die Beugungsreflexe zweiter Ordnung.

3.4 Charakteristische Röntgenstrahlung von Molybdän

Wir wollen nun zwei K_α -Linien mit guter Auflösung untersuchen und deren Intensitäten bestimmen. Dazu verwenden wir die charakteristische Röntgenstrahlung einer Molybdänanode, welche eine charakteristische Wellenlänge von etwa 0.7 \AA besitzt und so das Messen in höheren Ordnungen mit höherer Auflösung ermöglicht.

3.5 Moseley-Gesetz

Die Ergebnisse der drei vorausgegangenen Versuche ermöglichen es uns, das Moseley-Gesetz 2.2 zu überprüfen und dabei die Rydbergkonstante, sowie die Abschirmkonstante zu bestimmen.

3.6 Compton-Effekt

In diesem Versuchsteil wird die Compton-Wellenlänge des Elektrons bestimmt. Dies geschieht durch vier Messungen: Zuerst wird mit Hilfe des LiF-Analysators und des Detektors die Transmission $T(\lambda)$ eines Aluminiumabsorbers in Abhängigkeit der Wellenlänge gemessen. Dazu wird die Zählrate mit $(N_1(\lambda))$ und ohne den Absorber $(N_0(\lambda))$ im Strahlengang verglichen. Anschließend folgen Versuche zum Comptoneffekt. Dazu wird an einem Kunststoff-Streuobjekt die Röntgenstrahlung inelastisch um 90° gestreut und vom Zählrohr registriert (N_2) . Diese Messung geschieht nicht wellenlängenselektiv. Dieser Versuch wird zusätzlich zweimal mit dem Aluminiumabsorber im Strahlengang, einmal vor (N_3) dem Kunststoff-Streuobjekt und einmal dahinter (N_4) , durchgeführt.

Aus dem Transmissionsverhalten des Absorbers und den unterschiedlichen Zählraten in jedem Versuch kann anschließend die Comptonwellenlänge des Elektrons bestimmt werden.

3.7 Aufnahme eines Laue-Bildes

Von einem unbekannten Kristall werden zwei Laue-Bilder auf einem Dentalfilm aufgenommen. Hierzu befestigen wir zwei Proben des gleichen Materials nacheinander auf der 1 mm Apertur. Der Abstand zum Dental-Röntgenfilm wird abgemessen und der Film möglichst mittig und parallel im Strahlengang platziert. Nach 12 min Bestrahlung mit der Mo-Anode wird der Film nach Anleitung entwickelt. Aus dem Vorhandensein der Symmetrie und den Abständen der Beugungsreflexe auf dem Schirm ergeben sich mit der Bragg-Bedingung Rückschlüsse auf den Netzebenenabstand der Flächen, an denen gestreut wurde. Im Vergleich mit den Literaturwerten für diese Eigenschaften lässt sich auf die Art des Kristalls zurück schließen.

4 Auswertung

4.1 Charakteristische Röntgenstrahlung von Kupfer

Das Spektrum der Cu-Anode mit und ohne Ni-Filter ist in Abb. 1 gezeigt. Wir können sowohl die K_α als auch

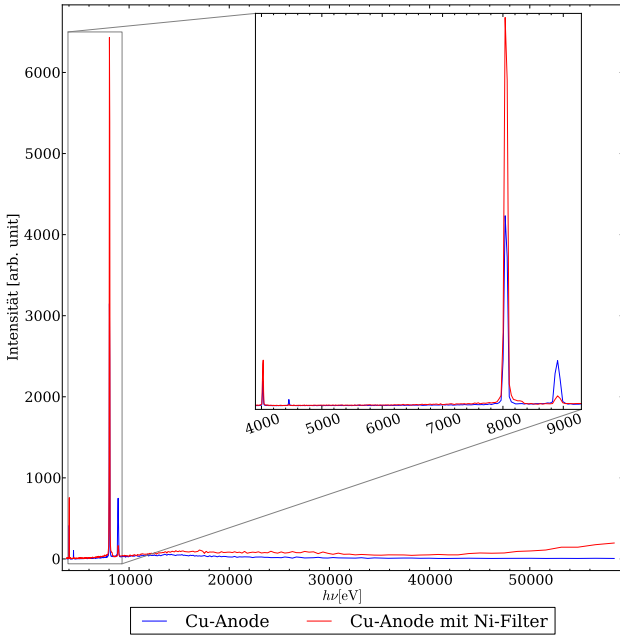


Abb. 1: Das Spektrum der Cu-Anode mit und ohne Ni-Filter im $\theta - 2\theta$ -Scan. Das Inset zeigt eine Vergrößerung der charakteristischen Linien. Bei großen Energien, bzw. Winkeln $< 4^\circ$, nimmt die Intensität zu, was sich auf ungestreute Strahlen zurückführen lässt, wie im Text erläutert. Die Schulter des K_α Peaks bei ca. 8300 eV wird durch die K-Linie von Ni verursacht ($E_K = 8.33$ keV).

die K_β Linie in erster und zweiter Ordnung beobachten. Anhand dieser Peaks haben wir die Eichung eines möglichen Shifts $\Delta\theta$ von der Nullstellung des Goniometers durchgeführt. Gemäß Glg. (2.3) muss gelten

$$2 \sin(\theta_1 + \Delta\theta) = \sin(\theta_2 + \Delta\theta) . \quad (4.1)$$

Gemittelt über K_α und K_β erhalten wir unter Berücksichtigung der Messgenauigkeit des Goniometers (0.1°)

$$\Delta\theta = (0.02 \pm 0.10)^\circ . \quad (4.2)$$

Dieser Shift wird für alle folgenden Messungen mit der Kupfer-Anode angewandt. Ferner haben wir, bei Abb. 1 sowie für alle weiteren Messungen, die Raten N_M um die Totzeit $\mu = 90 \mu\text{s}$ korrigiert [1]

$$N = \frac{N_M}{1 - \tau N_M} . \quad (4.3)$$

Die Rate N muss bei Bedarf mit der Integrationszeit multipliziert werden, um die Anzahl der gemessenen Ereignisse zu erhalten. In Abb. 1 wurden die Winkel mittels Glg. (2.3) in Wellenlängen bzw. Energien umgerech-

net. Dabei haben wir für den LiF-Kristall $d = 2.014 \text{ \AA}$ verwendet, was der [200] Richtung entspricht [1]. Damit können wir die Linien bestimmen

$$\underline{\underline{K_\alpha^{\text{Cu}} = (8050 \pm 30) \text{ eV} , \quad K_\beta^{\text{Cu}} = (8900 \pm 50) \text{ eV} ,}} \quad (4.4)$$

wobei der Fehler mit der halben Halbwertsbreite der Peaks abgeschätzt wurde. Die Literaturwerte für Cu lauten [1]

$$K_{\alpha 1}^{\text{Cu}} = 8047.8 \text{ eV} , \quad K_{\alpha 2}^{\text{Cu}} = 8027.9 \text{ eV} , \\ K_\beta^{\text{Cu}} = 8905.3 \text{ eV} . \quad (4.5)$$

Somit sind unsere Messergebnisse im Rahmen des Fehlers gut mit den Literaturwerten vereinbar. Die Aufspaltung zwischen $K_{\alpha 1}$ und $K_{\alpha 2}$ kann hier nicht beobachtet werden, da sie unterhalb der Messgenauigkeit des Goniometers bei den betrachteten Ordnungen liegt.

Vergleicht man in Abb. 1 die Spektren mit und ohne Ni-Filter, fällt auf, dass mit Ni-Filter insgesamt höhere Intensitäten gemessen wurden. Der Grund dafür ist, dass die Apertur beim Ni-Filter 2 mm beträgt. Bei der Messung ohne Ni-Filter hingegen hatten wir eine 1 mm Apertur eingesetzt. Ferner sieht man, dass bei hohen Energien, bzw. Winkeln $< 4^\circ$, die Intensität kontinuierlich zunimmt. Die Zunahme ist zu langsam bzw. schwach für eine charakteristische Linie von Ni und zu stark für das Bremspektrum. Da das Strahlprofil allerdings bei 2 mm Apertur breiter ist, können bei Winkeln $< 4^\circ$ Strahlen auf den Detektor treffen, ohne am Analysator reflektiert zu werden. In Abb. 2 ist das Transmissionsspektrum von Ni gezeigt. Die Absorptionskante zwischen der K_α und K_β Linie erklärt, warum in Abb. 1 die K_β deutlich stärker als die K_α Linie absorbiert wird.

4.2 Intensität charakteristischer Strahlung, Duane-Hunt und das Plancksche Wirkungsquantum

Wir übernehmen den Shift aus Abschnitt 4.1, da für diesen Versuchsteil die Cu-Anode unverändert weiterverwendet wurde. Um die Beziehungen zwischen Intensitäten der charakteristischen Linien zu prüfen, muss zunächst der Effekt der Totzeit des Zählrohrs berücksichtigt und das Bremsstrahlungsspektrum, abgezogen werden. Dieses kann im betrachteten Energiebe-

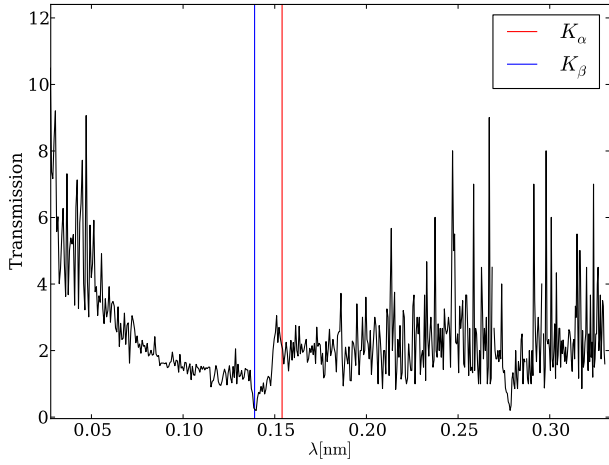


Abb. 2: Transmissionsspektrum von Ni. Zwischen der K_α und der K_β Linie von Cu kann gut die Absorptionskante von Ni erkannt werden. Aufgrund der unterschiedlichen Aperturdurchmesser wird die Transmission > 1 .

reich mit einem Polynom zweiter Ordnung gefittet werden, wie in Abb. 3 gezeigt wird. Nach Abzug des Untergrunds werden die Peaks mit der Trapezregel integriert. Die Intensitäten werden nun einmal über dem

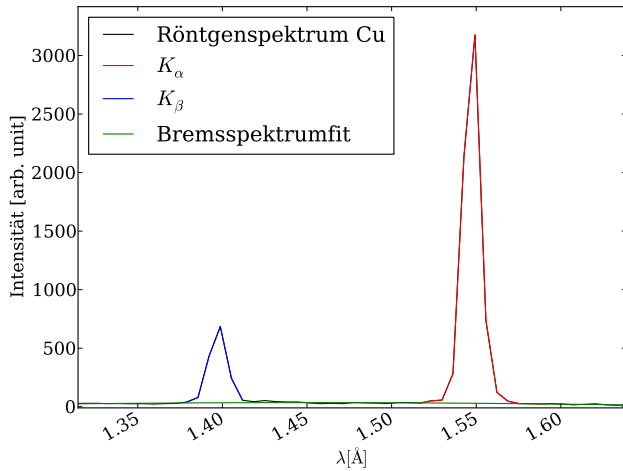


Abb. 3: Intensitäten der charakteristischen Strahlung der K_α - und K_β -Linie mit $U_B = 35$ keV und $I = 10$ mA.

Strom in Abb. 4 und über $(U_A - U_K)^{(3/2)}$ in Abb. 5 aufgetragen, um das empirische Gesetz aus Glg. (3.1) zu überprüfen. Die Fehler wurden dabei für jede Einstellung des Goniometers auf den statistischen Fehler $\sqrt{\text{\#counts}}$ des Zähl experiments zurückgeführt. Der Koordinatenursprung wurde als physikalisch sinnvoller Punkt ohne Fehler ergänzt. In Abhängigkeit der Stromstärke zeigt sich ein klarer linearer Zusammenhang. In Abhängigkeit von $(U_A - U_K)^{(3/2)}$ gilt der Zusammenhang im untersuchten Bereich nur für die K_β -

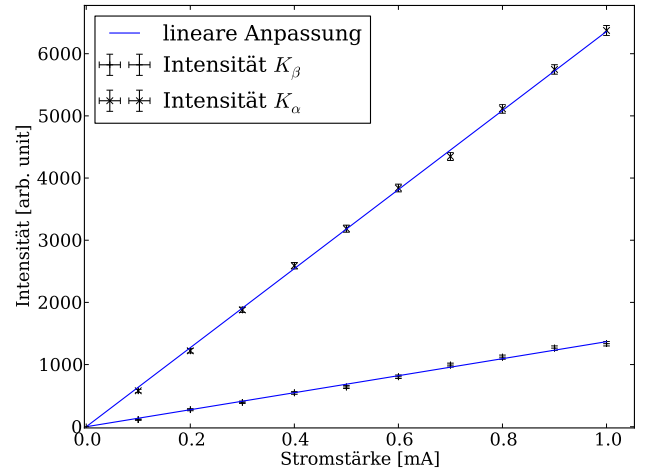


Abb. 4: Intensitäten der charakteristischen Strahlung der K_α - und K_β -Linie bei $U_B = 35$ keV in Abhängigkeit des Anodenstroms.

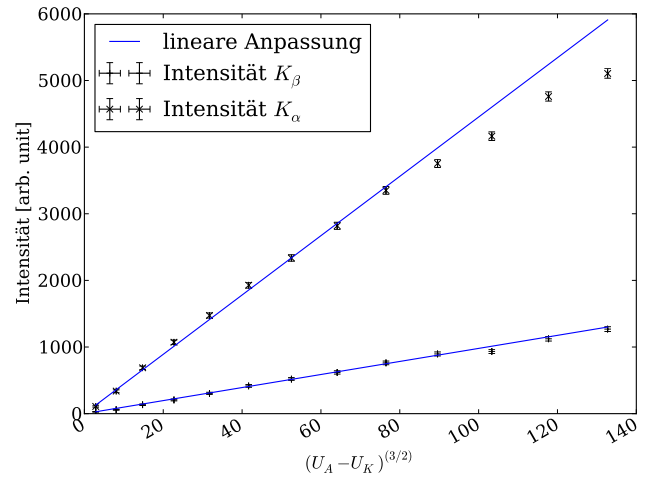


Abb. 5: Intensitäten der charakteristischen Strahlung der K_α - und K_β -Linie bei $I = 10$ mA in Abhängigkeit der Anodenspannung. Für die lineare Anpassung wurden jeweils die ersten neun Messpunkte berücksichtigt.

Linie. Für den K_α -Peak erkennen wir eine systematische Abweichung zu kleineren Intensitäten bei größeren Spannungen.

Das Duane-Hunt-Gesetz, das einen linearen Zusammenhang zwischen λ_{\min} und $1/U_B$ vorhersagt, wird überprüft, indem für verschiedene Spannungen die Grenzwellenlänge λ_{\min} bestimmt wird. Wir plotten dazu die Spektren der Cu-Anode für verschiedene Spannungen und bestimmen aus dem Plot einen Bereich, in dem die Counts beginnen signifikant zuzunehmen. Dies ist beispielhaft in Abb. 6 gezeigt. Bei Spannungen ab 25 keV beobachteten wir das Ausbilden einer neuen Schulter im Spektrum, wie es in Abb. 7 zu sehen ist. Da wir nicht sicher sagen können, an welcher der beiden

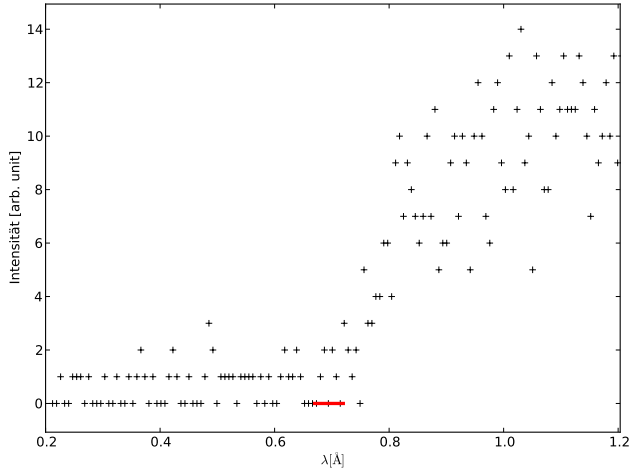


Abb. 6: Graphische Bestimmung der Grenzwellenlänge für 19 keV-Anodenspannung.

Stellen die Intensität vom Rauschen in das Bremsspektrum übergeht, geben wir in Abb. 8 die Grenze beider Schultern an. Die Mitte der jeweiligen Bereiche wird mit der halben Breite als Fehler über der inversen Spannung aufgetragen. Die Punkte, bei denen wir die Grenzwellenlänge eindeutig bestimmen konnten, werden mit einer Ursprungsgerade gefittet. Dabei werden die Punkte mit ihren Fehlern gewichtet. Es ergibt sich eine Gerade

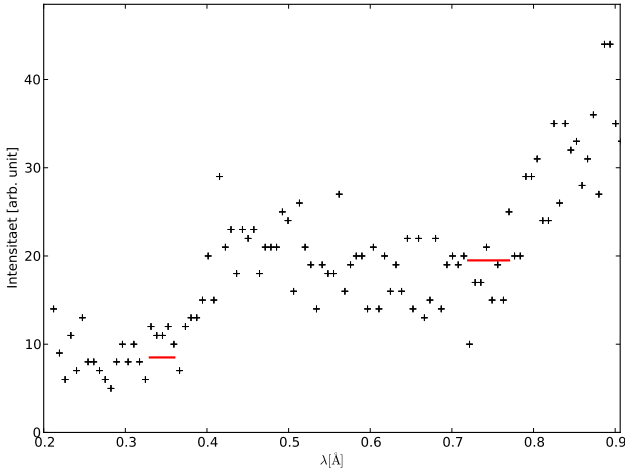


Abb. 7: Für 35 keV Anodenspannung treten zwei Schultern auf. Eine über der erwarteten Grenzwellenlänge und eine darunter. Die roten Balken entsprechen den Fehlerbalken in Abb. 8.

densteigung, aus der wir das Plancksche Wirkungsquantum zu

$$\underline{\underline{h = (6.84 \pm 1.50) \times 10^{-34} \text{ Js}}} \quad (4.6)$$

bestimmen. Dieses liegt etwas über dem Literaturwert

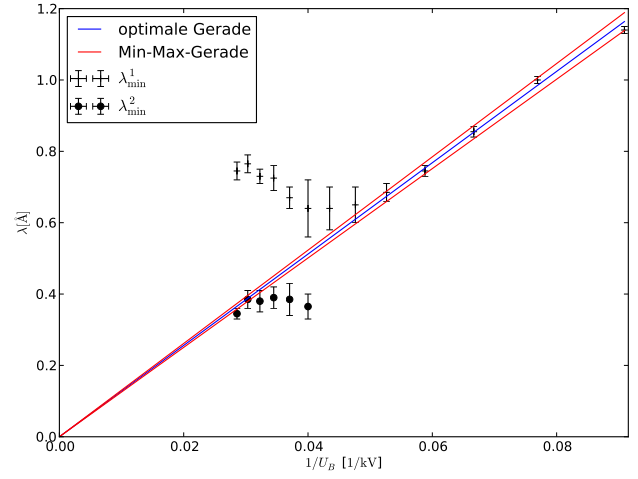


Abb. 8: Grenzwellenlänge als Funktion der Anodenspannung. Oberhalb von 25 kV konnte die Grenzwellenlänge nicht mehr eindeutig bestimmt werden. Die Ursprungsgerade wurde nur im eindeutigen Bereich an die Daten gefittet.

von

$$h = 6.6261 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (4.7)$$

Wir vermuten, dass die Ausbildung der zweiten Schulter im Spektrum auf einen uns unbekannten Absorptionsprozess zwischen 0.5 Å und 0.6 Å zurückzuführen ist.

4.3 Charakteristische Röntgenstrahlung von Eisen

Die Auswertung erfolgt analog zu Abschnitt 4.1. Da es sich um eine andere Anode handelt, ermitteln wir wieder den Shift:

$$\Delta\theta = (-0.18 \pm 0.10)^\circ, \quad (4.8)$$

erneut gemittelt über K_α und K_β Linien. Das Spektrum ist in Abb. 9 gezeigt. Hier können wir die Feinstrukturaufspaltung der K_α Linie in zweiter Ordnung beobachten. Vergleichen wir unsere Messwerte

$$\underline{\underline{K_{\alpha 1}^{\text{Fe}} = (6404 \pm 5) \text{ eV}}}, \quad \underline{\underline{K_{\alpha 2}^{\text{Fe}} = (6392 \pm 5) \text{ eV}}},$$

$$\underline{\underline{K_{\beta}^{\text{Fe}} = (7060 \pm 25) \text{ eV}}}, \quad (4.9)$$

mit den Literaturwerten [1]

$$K_{\alpha 1}^{\text{Fe}} = 6403.9 \text{ eV}, \quad K_{\alpha 2}^{\text{Fe}} = 6390.9 \text{ eV},$$

$$K_{\beta}^{\text{Fe}} = 7058 \text{ eV}, \quad (4.10)$$

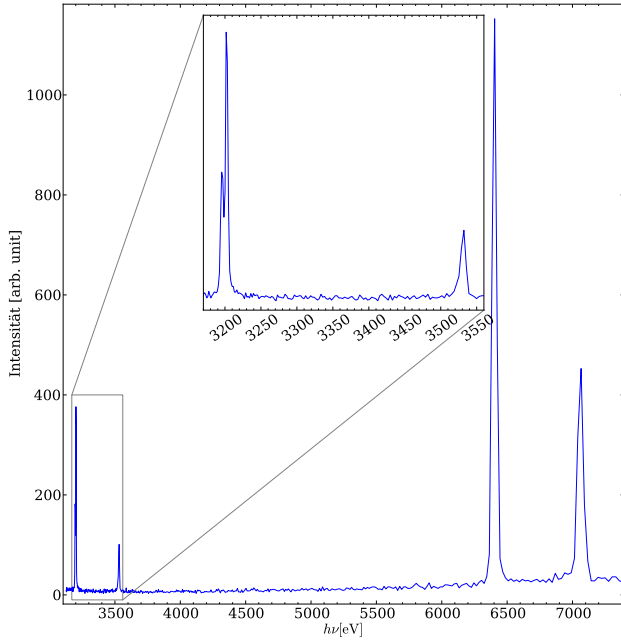


Abb. 9: Spektrum der Fe-Anode. Im Inset ist die Vergrößerung der zweiten Ordnung gezeigt. Man erkennt deutlich die Aufspaltung der K_α Linie.

so ergibt sich eine gute Übereinstimmung.

4.4 Charakteristische Röntgenstrahlung von Molybdän

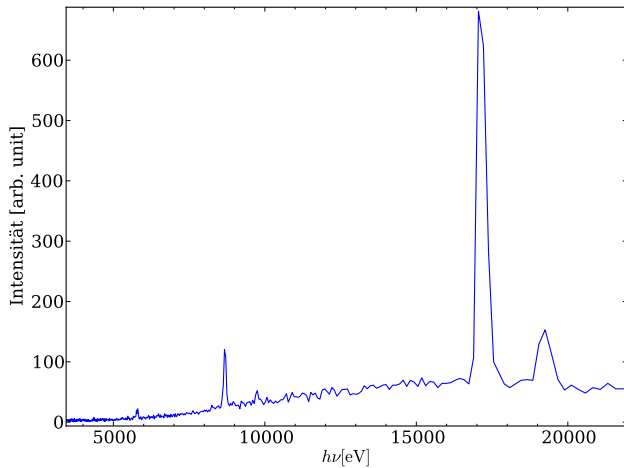


Abb. 10: Spektrum der Mo-Anode. Es sind drei Ordnungen erkennbar allerdings ist die Intensität der K_β Linie ab der zweiten Ordnung zu schwach, um vom Untergrund unterscheidbar zu sein.

Auch diese Auswertung ist analog zu Abschnitt 4.1. Der Shift wird anhand der 1. und 2. Ordnung von K_α und

K_β aus Abb. 10 berechnet:

$$\Delta\theta = (-0.22 \pm 0.10)^\circ. \quad (4.11)$$

Wir lesen die Positionen der dritten und vierten Ordnung von $K_{\alpha 1}$ und $K_{\alpha 2}$, siehe Abb. 11, sowie der ersten und zweiten Ordnung von K_β ab, nehmen die halbe Halbwertsbreite als Fehlerabschätzung und berechnen daraus den Mittelwert. Die Ergebnisse der verschiedenen Ordnungen stimmen im Rahmen ihrer Fehler überein. Mit gaußscher Fehlerfortpflanzung folgt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K_{\alpha 1}^{\text{Mo}}}} &= (17\,520 \pm 44) \text{ eV}, & \underline{\underline{K_{\alpha 2}^{\text{Mo}}}} &= (17\,409 \pm 36) \text{ eV}, \\ \underline{\underline{K_\beta^{\text{Mo}}}} &= (19.72 \pm 0.21) \text{ keV}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die Intensität der K_β Linie ist leider zu schwach, um sie in höherer Ordnung noch vom Rauschen unterscheiden zu können. Daher ist der Fehler dieser Linie durch das Auslesen in niedrigerer Ordnung deutlich größer. Die Theoriewerte [1]

$$\begin{aligned} K_{\alpha 1}^{\text{Mo}} &= 17\,479.3 \text{ eV}, & K_{\alpha 2}^{\text{Mo}} &= 17\,374.4 \text{ eV}, \\ K_\beta^{\text{Mo}} &= 19\,589.8 \text{ eV}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

zeigen zwar die bisher größten Abstände zu unseren Mittelwerten (bis zu 0.65 %), im Rahmen der Fehler gibt es aber keine Abweichung. Wie man in Abb. 11 sehen kann, ist bereits die vierte Ordnung kaum noch vom Untergrund zu unterscheiden. Daher haben wir die fünfte Ordnung nicht mehr betrachtet. Die Berechnung der Intensitäten erfolgt analog zu Abschnitt 4.2. Die Fits des Bremsstrahluntergrunds und die Zuordnung der Peaks ist in Abb. 11 zu sehen. Gemittelt über dritte und vierte Ordnung erhalten wir mit statistischem Fehler

$$\underline{\underline{\frac{I_{\alpha 1}}{I_{\alpha 2}}}} = 2.07 \pm 0.50. \quad (4.14)$$

Hierfür liegt uns kein Vergleichswert vor, die Streuung über verschiedene Ordnungen ist allerdings gering.

4.5 Moseley-Gesetz

Wir wollen nun Glg. (2.2) überprüfen und dabei sowohl σ als auch R_H bestimmen. Dabei gehen wir davon aus, dass die Feinstruktur, die für das Wasserstoffatom exakt aus der Dirac-Gleichung berechenbar ist, in erster Ordnung auch für das Moseley-Gesetz angewendet werden kann. Relativistische Effekte, Spin-Bahn-

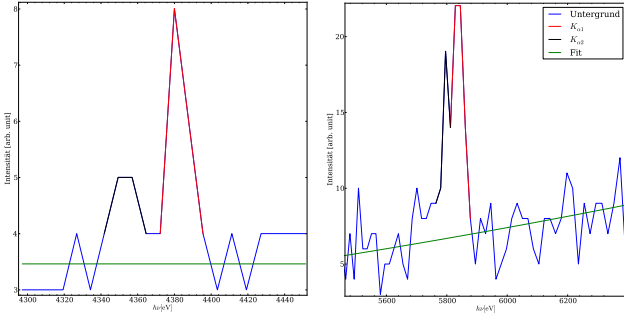


Abb. 11: Das linke (rechte) Spektrum zeigt die vierte (dritte) Ordnung der $K_{\alpha 1}$ und $K_{\alpha 2}$ Linie. In der vierten Ordnung ist die Intensität von $K_{\alpha 2}$ bereits fast so schwach wie das Rauschen. Die Berechnung des Untergrunds erfolgt unter Ausschluss der Peaks.

Wechselwirkung und Darwin-Term können zu [6]

$$\Delta E_{\text{FS}} = R_H \frac{Z^2}{n^2} \left[\frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right] \quad (4.15)$$

zusammengefasst werden. In Abb. 12 sind die ermittelten $K_{\alpha 1}$ und K_{β} Linien aufgetragen. Der Fit erfolgt an

$$E + \Delta E_{\text{FS}} = \frac{R_H}{n^2} \left[(Z - \sigma)^2 + \frac{Z^4 \alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right], \quad (4.16)$$

wobei für $K_{\alpha 2}$ und K_{β} , $j = 1/2$ für alle Niveaus gilt und $\alpha = 1/(137.036)$ [3]. Man erkennt, dass Glg. (4.16) sehr gut für die drei untersuchten Materialien erfüllt wird. Der Fit liefert mit linearer Regression und geschätzten Min-Max-Kurven

$$\begin{aligned} R_{H,\alpha} &= (13.578 \pm 0.032) \text{ eV}, \\ R_{H,\beta} &= (13.26 \pm 0.36) \text{ eV}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die ermittelten Rydbergkonstanten sind im Rahmen ihrer Fehler sowohl miteinander als auch mit dem Literaturwert aus Abschnitt 2 vereinbar. Nimmt man an, dass Moseley's Gesetz gültig ist und dass σ eine Abschirmkonstante ist, die unabhängig von der Ladungszahl ist, folgt für diesen zweiten Parameter

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= 1.046 \pm 0.031, \\ \sigma_{\beta} &= 1.66 \pm 0.35. \end{aligned} \quad (4.18)$$

In Moseley's ursprünglicher Arbeit wird gezeigt, dass $\sigma = 1$ eine gute Näherung für Elemente zwischen $Z = 12$ und $Z = 47$ ist und auch eine Verbindung zur Rydberg-Frequenz hergestellt [4]. Die gängige Interpre-

tation von $\sigma = 1$ ist, dass ein 1s Elektron die Kernladung abschirmt. In Ref. [5] wird gezeigt, dass selbst im Ein-Elektronenbild, also ohne Wechselwirkungen, ein 1s Orbital die Kernladung nicht um eine ganze Elementarladung abschirmen kann. Störungstheoretische Rechnungen haben ergeben, dass σ eigentlich der Unterschied zwischen e^-e^- -Wechselwirkungen im 1s Orbital und e^-e^- -Wechselwirkungen im 2p Orbital ist [5]. Glg. (2.2) sollte also nicht als Vernachlässigung von Wechselwirkungen und σ nicht als Abschirmung gesehen werden. Ferner wird in Ref. [5] gezeigt, dass $\sigma(Z)$ zwischen 0.5 und 1.5 in einem Bereich von $Z = 0$ bis $Z = 40$ nichtlinear variiert. Somit können die Ergebnisse in Glg. (4.18) nur die Größenordnung von σ abschätzen.

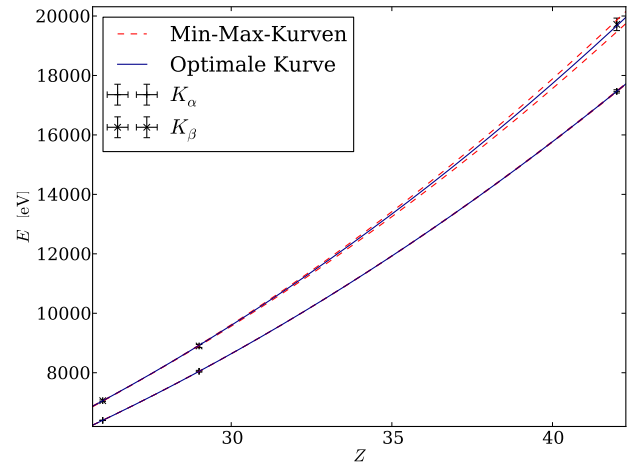


Abb. 12: Die Energie-Kernladungszahl-Abhängigkeit aus Glg. (4.16) ist für die drei Materialien jeweils für $K_{\alpha 1}$ und K_{β} Linien gut erfüllt. Die optimalen Kurven wurden mit linearer Regression ermittelt und die Min-Max-Kurven geschätzt.

4.6 Compton-Effekt

In Abb. 13 ist die Transmission des Al-Absorbers aufgetragen. Bei der Messung mit und ohne Aluabsorber haben wir 90s Integrationszeit gewählt. Bei dieser Integrationszeit gibt das Gerät stets ganzzahlige Raten (#/s) aus, während für reale Raten Nachkommastellen zu erwarten sind. Unter der Annahme, dass das Programm rundet, wird der Fehler hierdurch auf $\pm 0.5 \frac{1}{s}$ abgeschätzt. Die Fehlerbalken in Abb. 13 ergeben sich dann aus gaußscher Fehlerfortpflanzung der relativen Fehler für die Transmission $T(\lambda) = N_1(\lambda)/N_0(\lambda)$. Aus Abb. 13 folgt aus der Steigung der optimalen sowie den

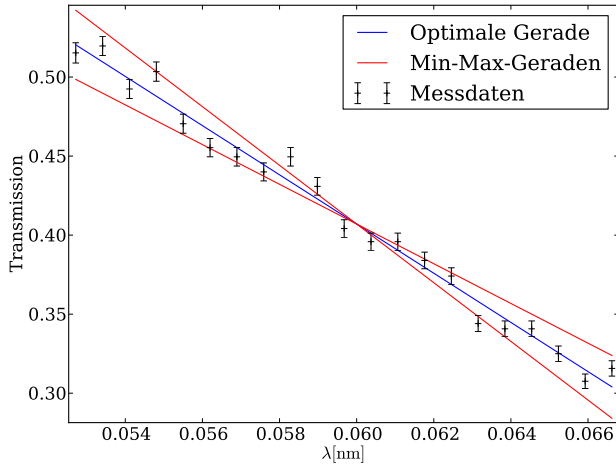


Abb. 13: Transmissionsspektrum von Al. Im gewählten Winkelbereich von 7.5° bis 9.5° ist die Transmission von Al näherungsweise linear. Die optimale Gerade wurde mittels Linearer Regression ermittelt und die Min-Max-Geraden abgeschätzt.

Min-Max-Geraden

$$\frac{dT}{d\lambda} = (-15.6 \pm 3.0) \frac{1}{\text{nm}} \quad (4.19)$$

Nun können wir die Compton-Wellenlänge wie folgt bestimmen. Gemäß Glg. (2.5) wird bei der Streuung am Kunststoff die Wellenlänge verschoben. Ohne Al-Absorber messen wir

$$N_2 = \int d\lambda K(\lambda) . \quad (4.20)$$

Wird der Al-Absorber vorgeschoben, folgt

$$N_3 = \int d\lambda T(\lambda) K(\lambda) . \quad (4.21)$$

Falls zunächst am Kunststoff gestreut wird, muss $\Delta\lambda$ für die Transmission durch Al berücksichtigt werden

$$N_4 = \int d\lambda T(\lambda + \Delta\lambda) K(\lambda) \quad (4.22)$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{N_4 - N_3}{N_2} &= \frac{1}{N_2} \int d\lambda K(\lambda) (T(\lambda + \Delta\lambda) - T(\lambda)) \\ &\approx \frac{dT}{d\lambda} \cdot \Delta\lambda . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Diese Näherung gilt nur, wenn die Steigung konstant ist und höhere Ordnungen vernachlässigt werden können. Für $\alpha = 90^\circ$ folgt $\Delta\lambda = \lambda_c$. Bei kleinen α hingegen verschwindet die Wellenlängenänderung und für $\alpha \rightarrow 180^\circ$ wird der Wirkungsquerschnitt gering. $\alpha = 90^\circ$ stellt so-

mit einen Kompromiss zwischen diesen Effekten dar.

Bei 300s Integrationszeit gibt das Programm eine Nachkommastelle für die Raten aus und wir haben folgende Raten bzw. Ereignisse gemessen, wobei wir Fehler in der zweiten Nachkommastelle sowie statistische Fehler gegen den Fehler von $\frac{dT}{d\lambda}$ vernachlässigen können,

$$N_2 = 51210 \quad N_3 = 20310 \quad N_4 = 18510 \quad (4.24)$$

und somit mit Glg. (4.23)

$$\lambda_c = (2.25 \pm 0.43) \text{ pm} . \quad (4.25)$$

Dies stimmt im Rahmen der Fehler gut mit dem Literaturwert aus Abschnitt 2 überein. Die Messmethode ist zwar nicht optimal, da man das Transmissionsspektrum von Al linear nähern muss, liefert aber eine einfache Abschätzung der Compton-Wellenlänge.

4.7 Laue-Aufnahme

Diskussion der Aufnahmen

In Abb. 14 sind die gemessenen Laue-Aufnahmen zu sehen. Am auffälligsten ist die 3-zählige Symmetrie der Aufnahmen. Da wir die Einfallsrichtung auf den Kristall nicht kennen, muss es sich somit zumindest um eine 3-zählige Symmetrieachse handeln. Äquivalente Punkte mit etwa gleichem Abstand zum Mittelpunkt wurden in Familien zusammengefasst, die jeweils die 3-zählige Symmetrie erfüllen, und in beiden Aufnahmen durch farbige Punkte mit 10 px Radius eingezeichnet. Die Originalbilder ohne Markierungen sind in Abschnitt 6 gezeigt, wobei bei allen Bildern die Auflösung 600 dpi beträgt. Für die Auswertung haben wir die obere Probe in Abb. 14 verwendet, da die untere zuwenig Reflexe für die unten angesprochene Ellipsenkorrektur besitzt und aufgrund unzureichender Entwicklung in großen Bereichen nur sehr geringen Kontrast zeigt. Unklar ist, falls es sich wirklich um das gleiche Material und die gleiche Kristallrichtung handelt, warum in der oberen rechten Ecke der unteren Aufnahme die cyanblau markierten sowie die darauffolgenden starken Reflexe der oberen Probe hier überhaupt nicht sichtbar sind. Aufgrund der großen Anzahl an ungestreuter Strahlung vermuten wir, dass die untere Probe zu dünn für die Aufnahme ist.

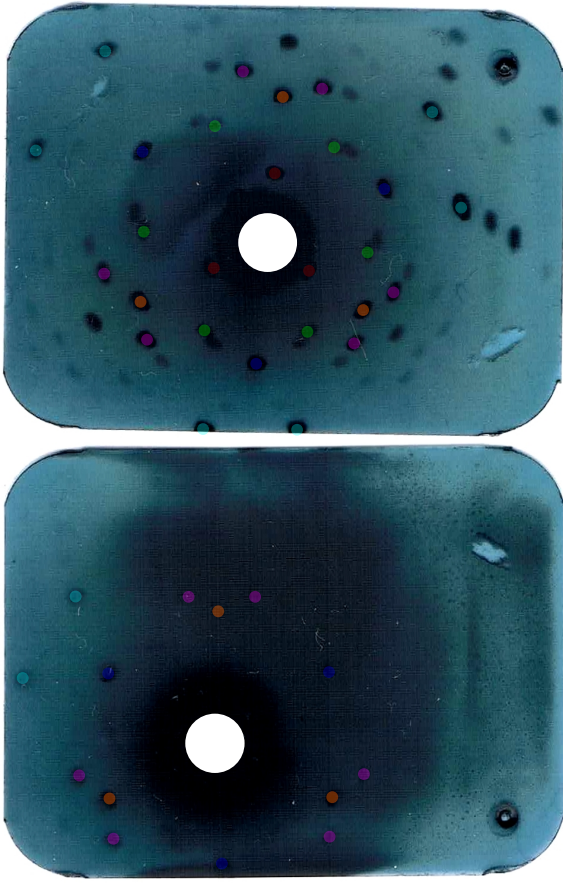


Abb. 14: Zwei Laue-Aufnahmen des gleichen Materials bei gleicher Belichtungszeit. Die obere Aufnahme zeigt deutlich mehr Reflexe wobei man auf der unteren mehr ungestreute Strahlen sieht. Zum besseren Vergleich wurde in beide Bilder ein weißer Fleck mit 50 px Radius eingezeichnet. Die dunkelgrauen Bereiche sind vermutlich auf unzureichende Verteilung der Entwicklerflüssigkeit zurückzuführen.

Ellipsenkorrektur

Falls der Schirm zur Laue-Aufnahme senkrecht zur Strahlachse steht, haben alle Reflexe gleicher Ordnung und gleichem d_{hkl} den gleichen Abstand zum Mittelpunkt, da sie nach Glg. (2.3) unter dem gleichen Winkel 2θ auftreten. In unserem Experiment ist es fast unmöglich eine orthogonale Aufnahme zu machen, daher wird aus dem Kegelschnitt des Kreises eine Ellipse mit zwei unterschiedlichen Halbachsen. Wir müssen somit zunächst anhand der Reflexe den Verkipfungswinkel α in der Projektion herausfinden. Zu beachten ist, dass bei der Verkipfung das Zentrum der Ellipse \mathbf{x}_M nicht mehr die Strahlachse, sondern ein weiterer unbekannter Parameter, ist. Zu jeder Familie j von Punkten gehört eine kleine Halbachse b_j . Da das Stauchungsverhältnis v für alle Ellipsen identisch ist, folgen die

großen Halbachsen über $a_j = vb_j \forall j$. Für die ausgelesenen 27 Reflexe $\mathbf{x}_{ij}^0 = (x_{ij}^0, y_{ij}^0)$ in 6 Familien bleiben 10 Parameter zu bestimmen. Die Abweichung, also das Residuum, von einem Punkt zur Ellipse, kann über die Ellipsengleichung bestimmt werden, wobei wir hier auch die angesprochene Translation und Rotation berücksichtigen,

$$r_{ij}^2 = \left(\frac{x_{ij}^2}{(vb_j)^2} + \frac{y_{ij}^2}{(b_j)^2} - 1 \right)^2, \quad (4.26)$$

$$\mathbf{x}_{ij} = R(\alpha)(\mathbf{x}_{ij}^0 - \mathbf{x}_M), \quad R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Diese Residuen wurden mithilfe der **least square**-Methode aus der Python-Bibliothek **scipy** optimiert. Der beste Fit wurde mit $\alpha = 58.22^\circ$ und $v = 0.9515$ erreicht. Dies entspricht einer Streckung in die Richtung $\alpha = -31.78^\circ$ und ist in Abb. 15 gezeigt. Die kleinen Achsen haben eine Länge von

$$\begin{aligned} a_1 &= 4.403 \text{ mm} & a_2 &= 7.993 \text{ mm} & a_3 &= 9.499 \text{ mm} \\ a_4 &= 9.539 \text{ mm} & a_5 &= 10.920 \text{ mm} & a_6 &= 15.194 \text{ mm} . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Diese Längen entsprechen den Radien der ursprünglichen Kreise, da in der Projektion zur Ellipse nur eine Achse gestreckt wird. Über die Geometrie des Aufbaus erhalten wir damit die Bragg-Winkel

$$\tan(2\theta_j) = \frac{a_j}{L}, \quad (4.28)$$

wobei $L = (11.9 \pm 1.0)$ mm der gemessene Abstand zum Kristall ist, der aufgrund der losen Aufhängung des Films den größten Fehler beiträgt. Die Ergebnisse sind in Tab. 1 aufgetragen.

Analyse der Reflexe

Um die Analyse im Rahmen zu halten, nehmen wir an, dass es sich um ein einfaches Material mit einer Atomsorte und kubischer Struktur handelt. Somit bleiben sc, bcc und fcc. Weiter nehmen wir an, dass sich im polychromatischen Röntgenstrahl eine Wellenlänge befindet, die die Bragg-Bedingung erfüllt und dass es sich aufgrund der 3-zähligen Symmetrie bei der Einfallsrichtung um $[111]$ handelt. Um sich ein Bild von den Reflexen zu machen, die in den verschiedenen Gitterstrukturen unter der 111-Richtung zu sehen sind, simulieren wir das sc, bcc und das fcc-Gitter mit Hilfe von

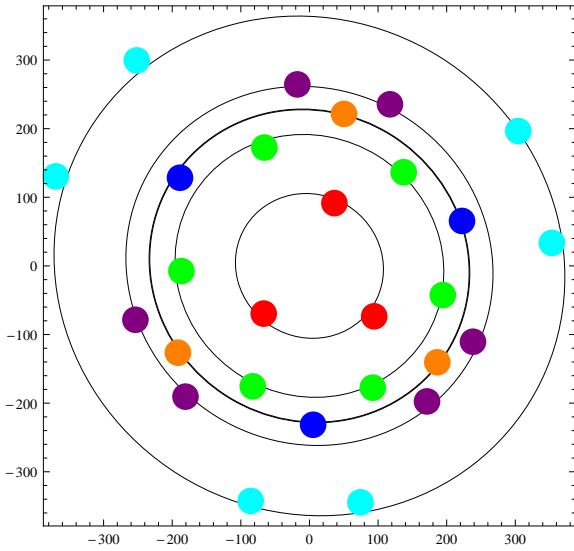


Abb. 15: Ellipsenfit der Reflexe nach der Methode der kleinsten Quadrate. Die Achsen bezeichnen den Abstand in px in Abb. 14. Die Verzerrung ist relativ schwach (5 %). Der Abstand der blauen und orangenen Reflexe ist nahezu identisch.

Mathematica. Betrachtet man das Skalarprodukt von $[111]$ mit der Flächennormalen der Netzebenen, erhält man

$$\cos \vartheta = \frac{h + k + l}{\sqrt{3}\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}. \quad (4.29)$$

Mittels $\theta + \vartheta = \pi/2$ folgt

$$\theta(h, k, l) = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{h + k + l}{\sqrt{3}\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}. \quad (4.30)$$

Dieser Winkel liefert den Abstand des Reflexes vom Mittelpunkt des Schirms. Nach der Projektion der hkl-Richtung auf zwei weitere Achsen, die mit der $[111]$ -Richtung ein Orthonormalsystem aufspannen, lässt sich nach ähnlicher Methode der Polarwinkel des Reflexes auf dem Schirm bestimmen. Die Unterschiede zwischen den verschiedenen kubischen Strukturen liegt nun im Strukturfaktor. Da im sc- und im bcc-Beugungsbild viele Punkte zu sehen sind, die bei unserem Bild nicht zu sehen sind, schließen wir das bcc-Gitter aus, siehe Abb. 18. Mithilfe von Glg. (2.4) erhält man für den Strukturfaktor von fcc (sc mit vieratomiger Basis: $(0, 0, 0), (0, a/2, a/2), (a/2, 0, a/2), (a/2, a/2, 0)$):

$$\begin{aligned} S_{hkl}^{\text{fcc}} &= 4f \quad \text{Wenn alle } h, k, l \text{ gerade oder ungerade,} \\ S_{hkl}^{\text{fcc}} &= 0 \quad \text{Wenn ein } h, k, l \text{ gerade oder ungerade.} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Somit entfallen hier Reflexe für $(100), (110), (120), \text{etc.}$ Trotzdem sind bei unserem Laue-Bild weniger Punkte zu erkennen, als mit dem fcc-Gitter zu erwarten wären. Elemente der vierten Hauptgruppe kristallisieren häufig in Diamantstruktur, welches aus zwei verschobenen fcc-Gittern besteht. Dadurch wird S^{fcc} noch mit einem Stukturfaktor für diese Basis multipliziert. Es verschwinden hierbei alle Reflexe mit h, k, l gerade und $h+k+l \neq 4n, n \in \mathbb{N}$. Ferner werden die Reflexe mit h, k, l ungerade abgeschwächt. Dies passt besser zu unserer Aufnahme, weshalb wir mit Diamant fortfahren. Weitere Einschränkungen ergeben sich durch die verwendete Röntgenstrahlung, das nur in einem bestimmten Bereich genügend Intensität besitzt, um Beugungsreflexe zu erzeugen. Die verwendeten Dentalfilme der Serie Ergonom-X werden in den Maßen $[3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}]$ hergestellt. Bei dem verwendeten Abstand L von Kristall zum Schirm kann man einen maximalen Braggwinkel von etwa 27° aufnehmen. Bei der eingestellten Anodenspannung $U_A = 35 \text{ keV}$ sehen wir aus unseren Spektren, dass eine signifikante Intensität bei einer Wellenlänge λ_{\min} von größer als 0.6 \AA einsetzt. Der kleinste auflösbare Gitterabstand wird damit zu

$$d_{\min} = \frac{\lambda_{\min}}{2 \sin \theta_{\max}} = 0.67 \text{ \AA}. \quad (4.32)$$

Wenn wir eine Gitterkonstante des Kristalls von etwa $d_0 = 5 \text{ \AA}$ annehmen, erhalten wir für h, k, l die Einschränkung

$$h^2 + k^2 + l^2 \leq \left(\frac{d_0}{d_{\min}} \right)^2 \approx 56. \quad (4.33)$$

Berücksichtigt man alle vorangegangenen Einschränkungen, so erhält man folgendes Beugungsbild samt Miller-Indizes. Das simulierte Beugungsbild in Abb. 16 entspricht mit Ausnahme der fehlenden nullten Ordnung sehr genau unserem Laue-Bild aus Abb. 14. Es zeigt sich hier, dass die vermeintlichen Schattenpartner aus Abb. 14 in der Tat echte Reflexe sind, deren hkl in Abb. 16 in Schwarz angegeben werden. Die Abschwächung durch den Strukturfaktor wurde von uns nicht beobachtet und wird durch andere Effekte wie die Intensität der Röntgenstrahlung überlagert. Die Winkel in Tab. 1, unter denen die vermessenen Punkte gestreut wurde, entsprechen im Rahmen ihrer Fehler den theoretischen Vorhersagen.

Wir können also die Aussage treffen, dass es sich bei unserem analysierten Kristall um eine Diamantstruk-

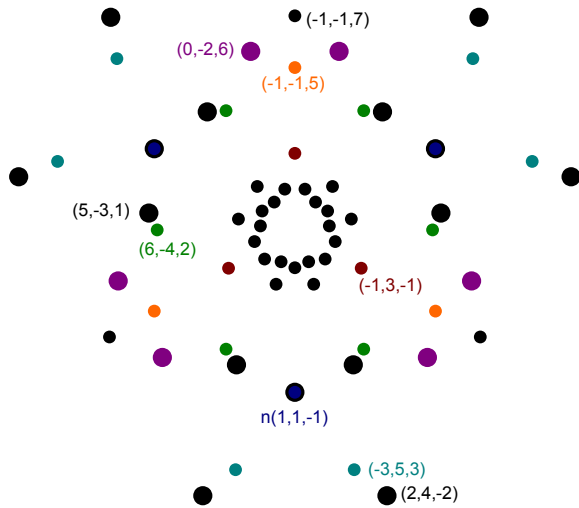


Abb. 16: Simulierte Beugungsreflexe einer Diamantstruktur mit $h^2 + k^2 + l^2 \leq 59$. Die kleiner gezeichneten Reflexe entsprechen h, k, l ungerade, welche eine leichte Abschwächung durch den Strukturfaktor erfahren. Durch Permutation der hkl ergeben sich die anderen Reflexe der gleichen Familie.

	Messwerte	Theorie	Photonenenergie
θ_1	$(10.15 \pm 0.85)^\circ$	10.025°	21 752 eV
θ_2	$(16.9 \pm 1.4)^\circ$	17.975°	27 684 eV
θ_3	$(19.3 \pm 1.6)^\circ$	19.471°	5932 eV
θ_4	$(19.4 \pm 1.6)^\circ$	19.471°	17 797 eV
θ_5	$(21.3 \pm 1.8)^\circ$	21.417°	19 774 eV
θ_6	$(26.0 \pm 2.2)^\circ$	26.118°	17 006 eV

Tab. 1: Die ermittelten Winkel der Punktfamilien im Vergleich mit der Theorie. Der Fehler entspricht dem relativen Fehler von L . Zusätzlich sind die Energien der jeweils gestreuten Photonen angegeben, wofür der Literaturwert für die Gitterkonstante von Si verwendet wurde.

tur handelt, wie sie von den Elementen der 4. Hauptgruppe gebildet werden. Wir vermuten, dass es sich bei den untersuchten Kristall um Silicium handelt. Unter dieser Annahme wurden in Tab. 1 die entsprechenden Energien angegeben, bei denen die Reflexe liegen.

5 Zusammenfassung

Wir konnten mit dem Versuch einen guten Einblick in die Röntgenspektroskopie gewinnen. Die charakteristischen Linien von Eisen, Molybdän und Kupfer wurden mit recht hoher Genauigkeit nachgewiesen, wobei der größte Abstand von unseren Bestwerten zu den Theoriewerten 0.65 % betrug. Im Rahmen der Fehler

gab es keine Abweichung. Das empirische Gesetz zwischen der Intensität der charakteristischen Strahlung und der Spannung zeigt systematische Abweichungen für Spannungen ab 30 kV und sollte eher als Faustregel verstanden werden. Das Duane-Hunt-Gesetz hingegen konnte gut bestätigt werden und hat uns erlaubt, das Plancksche Wirkungsquantum zu bestimmen. Das Moseley-Gesetz wurde ausführlich diskutiert und hat gute Abschätzungen für die Rydberg-Konstante ergeben. Allerdings ist die Auswertung der *Abschirmkonstante* $\sigma(Z)$ nicht wirklich sinnvoll. Mit dem Compton-Effekt konnte eine überraschend gute Bestimmung der Compton-Wellenlänge durchgeführt werden. Eine vollständige Aufnahme des Transmissionspektrums von Al im gesamten Wellenlängenbereich der Kupferanode würde helfen zu verstehen, warum die Näherung eines linearen Spektrums solche gute Ergebnisse liefert. Die Laue-Aufnahme hat insgesamt gut funktioniert. Allerdings könnte man die Aufhängung der Dentalfilme zum Beispiel mit einer optischen Bank o.Ä. verbessern. Dadurch wird ein zentrales Auftreffen garantiert. Die Auflösung der Filme ist gut, eine größere Fläche wäre zwar wünschenswert, ist für die Auswertung aber nicht unbedingt notwendig.

Literatur

- [1] Röntgenstrahlung (Versuchsbeschreibung), Universität Würzburg (2010)
- [2] D. Meschede, Gerthsen Physik, 24. Auflage (2010)
- [3] CODATA Physical Constants, <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html> (September 2012)
- [4] H.G.J. Moseley, **Philos. Mag.** **26**, 1024 (1913).
- [5] A. M. Lesk, Am. J. Phys. 48, 492 (1980), doi:10.1119/1.12320.
- [6] L. Bergmann & C. Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 4 (2003)

6 Anhang

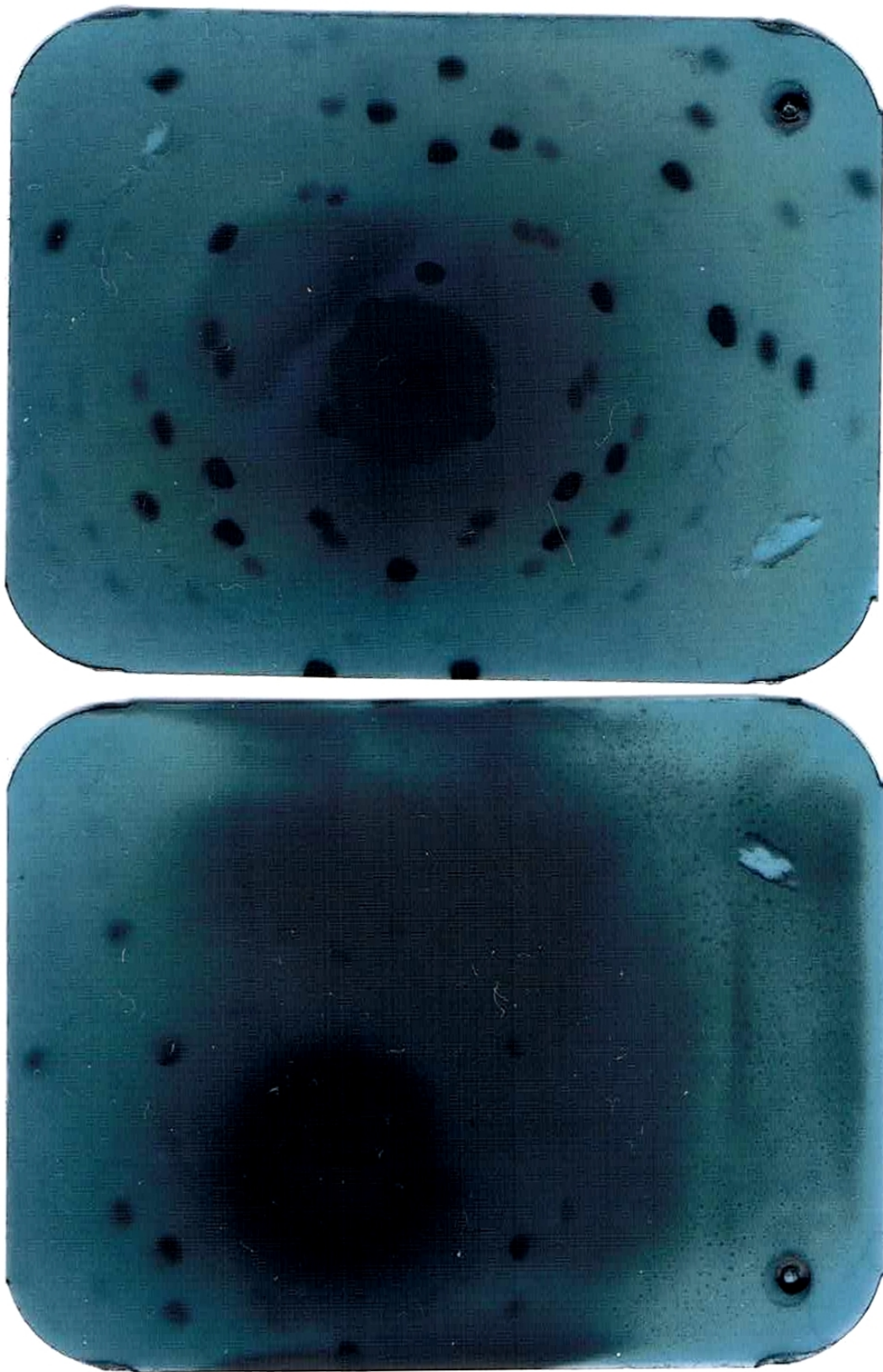


Abb. 17: Originale Laue-Aufnahme ohne Markierungen.

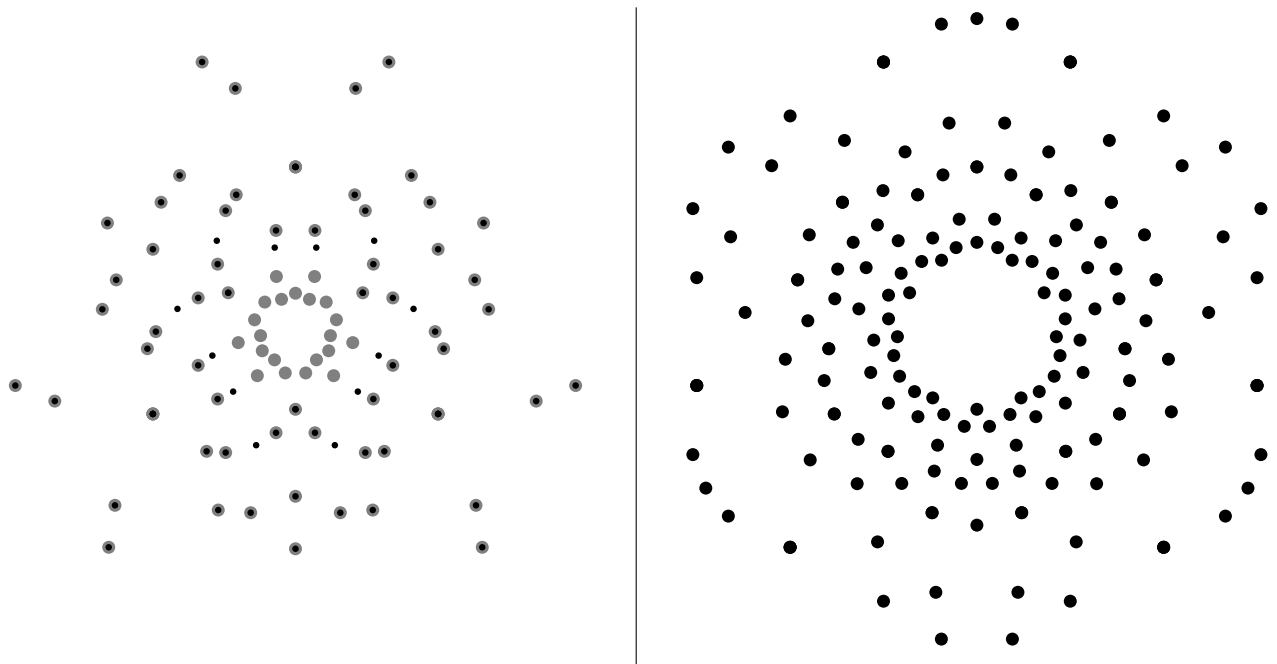


Abb. 18: Berechnete Laue-Reflexe für $h^2 + k^2 + l^2 \leq 60$ in der Projektion auf eine Fläche. Das linke Bild zeigt in Grau eine Diamant- und in Schwarz eine fcc-Struktur. Im rechten Bild ist eine bcc-Struktur zu sehen.