

Zulassungsarbeit

=====

zur wissenschaftlichen Prüfung für das
Lehramt an Gymnasien

Magnetische Kernresonanz

von

Herbert Müller

Physikalisches Institut der Universität Würzburg

Prof. Dr. H. Langhoff

Würzburg, im Februar 1980

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	1
2.	Theorie der Kernresonanz	2
2.1.	Quantenmechanische Definitionen	2
2.2.	Energieaufspaltung im äußeren Magnetfeld	4
2.3.	Die BLOCH-Gleichungen	6
2.4.	Besetzungszahlendifferenz	13
3.	Aufbau der Apparatur	14
3.1.	Polarisator und Analysator	15
3.2.	Die Einstrahlspule	24
3.3.	Die Helmholtzspulen	25
4.	Versuche und Messungen	28
4.1.	Das Prinzip der Messung	28
4.2.	Der Polarisationsmagnet	30
4.3.	Das Magnetfeld der Helmholtzspulen	32
4.3.1.	Die Inhomogenität	32
4.3.2.	Die Linearität des Magnetfeldes	34
4.4.	Bestimmung des magnetischen Moments für Protonen	36
4.5.	Die Breite der Resonanz	38
4.5.1.	Die Linienbreite als Funktion der Wechselfeldamplitude B_1	38
4.5.2.	Die Linienbreite in Abhängigkeit der Spulenlänge	42
4.5.3.	Die Unabhängigkeit der Linienbreite von B_0	44
4.6.	Drehung des Magnetisierungsvektors	47
4.7.	Die Wassergeschwindigkeit	53
4.8.	Die Relaxationszeit	56
	Literaturangaben	60

1. Einleitung

Als Mitte der vierziger Jahre dieses Jahrhunderts BLOCH und PURCELL ein Verfahren entwickelten, um magnetische Kernresonanzerscheinungen experimentell zugängig zu machen, begründeten sie damit ein Arbeitsgebiet, das bis heute in der Physik eine ungeahnte Bedeutung erlangt hat, und in ihren Anwendungen auch auf Nachbarwissenschaften wie der Chemie übergreift. Darüberhinaus sind die Ergebnisse, die man, mit dem entsprechenden Einsatz an Meßtechnik, bei einem derartigen Versuch erzielen kann, so vielseitig und genau, daß dieser Versuch im Fortgeschrittenen-Praktikum für Physiker eigentlich nicht fehlen darf.

Für den vorliegenden Aufbau wurde eine Apparatur ähnlich der von WILKING verwendet. Ziel dieser Zulassungsarbeit war es, ihre Eigenschaften zu erproben, teilweise zu verbessern, und mit dieser Apparatur charakteristische Experimente auf dem Gebiet der Kernresonanzerscheinungen durchzuführen.

2. Theorie der Kernresonanz

2.1. Quantenmechanische Definitionen

Bringt man einen Atomkern in ein äußeres Magnetfeld B , so zeigt sich, daß die Einstellung des Kernspins I gequantelt ist. Im allgemeinen bezeichnet man als Kernspin die maximal meßbare Komponente des Eigen-drehimpulses eines Kerns, und durch Division mit \hbar die zugehörige Zahl J als Drehimpulsquantenzahl. Fig. 1 zeigt die beiden Einstellmöglichkeiten für Protonen.

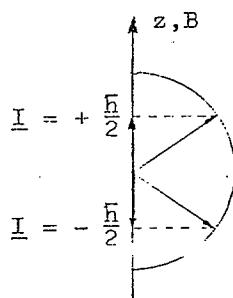


Fig 1 : Einstellmöglichkeiten
für den Spin eines Protons
($J = 1/2$)

Gekoppelt mit dem Spin besitzen die Kerne ein magnetisches Dipolmoment μ . Analog zum Spin definiert man es als die größte meßbare Komponente in z-Richtung, also

$$\mu = g \mu_N J = g \frac{h}{2} \quad (2.1)$$

Dabei ist g ein dimensionsloser Anpassungsfaktor, der experimentell bestimmt wird, und μ_N das Kernmagneton, definiert als

$$\mu_N = \frac{e}{2m_p} h \quad (2.2)$$

mit e als Elementarladung und m_p als Protonenmasse. In Tabellen wird meist die reine Zahl angegeben:

$$\frac{\mu}{\mu_N} = g J \quad (2.3)$$

Der Zusammenhang zwischen magnetischem Moment und Spinquantenzahl lässt sich auch durch das gyromagnetische Verhältnis γ ausdrücken

$$\gamma = \frac{\mu}{J \cdot \hbar} \quad (2.4)$$

Nach (2.2) gilt dann

$$\gamma = \frac{\mu}{\mu_N} \frac{e}{J \cdot 2m_P} \quad (2.5)$$

Für Protonen mit $J = 1/2$ beträgt: ¹⁾

$$\frac{\mu}{\mu_N} = (2.79276 \pm 0.00003) \quad (2.6)$$

und damit

$$\gamma = (2.67530 \pm 0.00004) \cdot 10^8 \text{ (sT)}^{-1} \quad (2.7)$$

2.2. Energiedifferenz im äußeren Magnetfeld

Befindet sich ein magnetischer Dipol in einem äußeren Magnetfeld \underline{B} und bildet mit diesem den Winkel α , so übt das Magnetfeld auf den Dipol ein Drehmoment \underline{D} aus. Es ist

$$\underline{D} = \mu \times \underline{B} \quad (2.8)$$

$$D = \mu B \sin \alpha \quad (2.9)$$

Die Orientierungsenergie des Dipols ist dann

$$\begin{aligned} E &= \int_{\alpha} D(\alpha) d\alpha = \mu \cdot B \int_{\alpha} \sin \alpha d\alpha \\ &= -\mu B \cos \alpha + C \\ &= -\mu_z B + C \end{aligned} \quad (2.10)$$

Da wir im folgenden Energiedifferenzen betrachten werden, ist es sinnvoll, die Konstante C null zu setzen.

$$E = -\mu_z B \quad (2.11)$$

Bei einem Proton mit $J = 1/2$ existieren nur zwei mögliche Einstellungen für das Dipolmoment. Die Energiedifferenz dieser beiden Niveaus beträgt dann mit (2.11)

$$\Delta E = -g \cdot \mu_N \cdot B \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = g \cdot \mu_N \cdot B \quad (2.12)$$

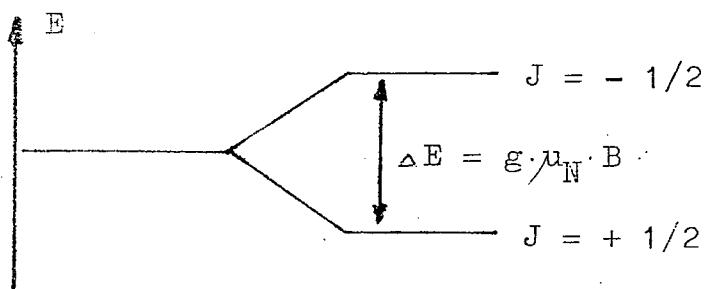


Fig.2 : Energiedifferenz eines Protons im Magnetfeld B

Es ist nun möglich, zwischen diesen Energieniveaus Übergänge zu induzieren. Dabei sind Übergänge nur möglich, wenn die Energie $\hbar\omega$ des absorbierten oder emittierten Quants gerade der Energiedifferenz ΔE entspricht.

$$\Delta E = \hbar\omega = g \cdot \mu_N \cdot B \quad (2.13)$$

Daraus ergibt sich eine Frequenz des Photons zu

$$\omega = g \cdot \frac{\mu_N}{\hbar} \cdot B = \gamma B \quad (2.14)$$

Dies entspricht genau der Frequenz der LARMOR-Präzession, die man auf klassischem Wege erhält, wenn man einen magnetischen Dipol einem Magnetfeld B aussetzt.

Die Emission oder Absorption von Quanten passender Energie nennt man magnetische Kernresonanz oder Kerninduktion.

2.3. Die BLOCH-Gleichungen

Die bei der Kernresonanz auftretenden physikalischen Vorgänge beschreiben sehr gut die BLOCH-Gleichungen, die hier abgeleitet werden sollen. 2)

Die Protonen mögen sich in einem Magnetfeld befinden, dessen z-Komponente den konstanten Betrag B_0 besitzt, und die dazu senkrechte Komponente sich in der x-y-Ebene mit der Frequenz ω dreht.

$$\begin{aligned} B_x &= B_1 \cdot \cos \omega t & B_y &= B_1 \cdot \sin \omega t \\ B_z &= B_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dabei soll gelten: $B_1 \ll B_0$

Ein Magnetfeld übt auf die Protonen nach der klassischen Betrachtungsweise ein Drehmoment aus, für das gilt:

$$\underline{D} = \frac{d\underline{I}}{dt} = \mu \times \underline{B} \quad (2.16)$$

Ersetzt man nach (2.4) den Kernspin \underline{I} durch den Quotienten μ/γ , so ergibt sich

$$\frac{d\mu}{dt} = \gamma (\mu \times \underline{B}) \quad (2.17)$$

Bisher betrachteten wir immer einen einzelnen Kern. Bei allen Resonanzversuchen misst man aber an einer großen Anzahl von Protonen, so daß die einzelnen Kernmomente sich zu einem magnetischen Moment \underline{M} summieren, für das ebenfalls gilt

$$\frac{d\underline{M}}{dt} = \gamma (\underline{M} \times \underline{B}) \quad (2.18)$$

Berücksichtigt man zunächst nur das konstante Magnetfeld B_0 , so mitteln sich im thermischen Gleichgewicht alle x- und y-Komponenten von \underline{M} heraus, und es resultiert eine Magnetisierung M_0 in z-Richtung. Die Einstellung dieses Gleichgewichts erfordert jedoch eine gewisse Zeit, die von den umgebenden Teilchen und der Temperatur abhängig ist. Mit einer Zeitkonstanten T_1 , der sogenannten thermischen Relaxationszeit, wird dies im folgenden Ansatz berücksichtigt.

$$\frac{dM_z}{dt} = - \frac{M_z - M_0}{T_1} \quad (2.19)$$

Ist eine Magnetisierung M_x oder M_y vorhanden, so erfolgt die Annäherung an den Gleichgewichtszustand $M_x = 0$ und $M_y = 0$ mit einer anderen Zeitkonstanten T_2

$$\frac{dM_x}{dt} = -\frac{M_x}{T_2}$$

$$\frac{dM_y}{dt} = -\frac{M_y}{T_2} \quad (2.20)$$

Durch ~~Eingehen~~ Einsetzen von (2.19) und (2.20) in (2.18) erhält man die BLOCH-Gleichungen der magnetischen Kernresonanz:

$$\frac{dM_x}{dt} - \gamma(M_y B_z - M_z B_y) + \frac{M_x}{T_2} = 0 \quad (2.21a)$$

$$\frac{dM_y}{dt} - \gamma(M_z B_x - M_x B_z) + \frac{M_y}{T_2} = 0 \quad (2.21b)$$

$$\frac{dM_z}{dt} - \gamma(M_x B_y - M_y B_x) + \frac{M_z}{T_1} = \frac{M_0}{T_1} \quad (2.21c)$$

Die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist äußerst schwierig. Unter bestimmten Voraussetzungen ist es jedoch möglich, eine für uns ausreichende Lösung auf relativ einfachem Wege zu finden.³⁾

Wir setzen dabei $T_1 = T_2 = \infty$ und betrachten zunächst die Bewegungsgleichung im Magnetfeld $\underline{B} = (0, 0, B_0)$.

Dann gilt

$$\frac{dM}{dt} = \gamma(\underline{M} \times \underline{B}) \quad (2.22)$$

Um zu einer Lösung zu gelangen, transformieren wir die Gleichung in ein Koordinatensystem, dessen z'-Achse mit der z-Achse zusammenfällt, und dessen x'-y'-Ebene sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z'-Achse dreht.

Bezeichnet $\frac{D}{Dt}$ die zeitliche Ableitung im rotierenden System, so gilt allgemein

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Dx}{Dt} + (\omega \times x) \quad (2.23)$$

Damit wird (2.22) zu

$$\frac{DM}{Dt} = \gamma(\underline{M} \times \underline{B}) - (\omega \times \underline{M}) \quad (2.24)$$

$$\frac{DM}{Dt} = \gamma(\underline{M} \times (\underline{B} + \frac{\omega}{\gamma})) \quad (2.25)$$

Der Vergleich mit (2.22) zeigt, daß hier nur das Magnetfeld \underline{B} durch das effektive Feld

$$\underline{B}_{\text{eff}} = \underline{B} + \frac{\omega}{\gamma} \underline{\delta} \quad (2.26)$$

ersetzt wurde.

Eine hier interessierende Lösung ergibt sich, wenn

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad (2.27)$$

denn dann sieht ein Beobachter im rotierenden System den Magnetisierungsvektor scheinbar in Ruhe. Dies wird erreicht, wenn gilt

$$\underline{B} + \frac{\omega}{\gamma} \underline{\delta} = 0 \quad (2.28)$$

oder $\omega = -\gamma \underline{B}$

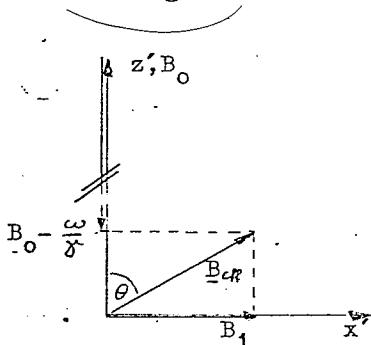
$$\omega_0 = \gamma B \quad (2.29)$$

Das gestrichene System rotiert dann mit der LARMOR-Frequenz (vergl. (2.14)) um die z-Achse.

Wir nehmen nun an, daß für eine Zeit $t > t_0$ das Wechselfeld in der x-y-Ebene, das uns einen Eingriff in das System ermöglicht, wirksam wird. Der Feldvektor rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_0$ um die z-Achse; zeige daher immer in die x'-Richtung des bewegten Systems. Dann gilt

$$\underline{B}_{\text{eff}} = B_1 \underline{e}'_x + 0 \underline{e}'_y + (B_0 - \frac{\omega}{\gamma}) \underline{e}'_z \quad (2.30)$$

wie dies Fig.3 veranschaulicht.



Der mitbewegte Beobachter sieht daher eine resultierende Magnetfeldstärke, so daß eine zusätzliche Präzession des Magnetisierungsvektors um die x'-Achse stattfindet, und zwar mit der Kreisfrequenz

Fig.3: Komponenten des effektiven Magnetfeldes im rotierenden System

$$\omega_1 = \gamma B_1 \quad (2.31)$$

Da $B_1 \ll B_0$ ist, gilt ebenfalls

$$\omega_1 \ll \omega_0 \quad (2.32)$$

Der Betrag von M bleibt also konstant. Die z-Komponente oszilliert zwischen $\pm M_0$.

Um die Bewegung im allgemeinen Fall $\omega \neq \omega_0$ mathematisch erfassen zu können, transformieren wir das gestrichene System noch einmal, indem wir es um die y' -Achse so drehen, daß die z'' -Achse in Richtung von B_{eff} nach Gleichung (2.30) zeigt. Der Drehwinkel θ ergibt sich zu (vergl. Fig.3)

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{B_0 - \gamma}{B_{\text{eff}}} \\ \sin\theta &= \frac{B_1}{B_{\text{eff}}}\end{aligned}\quad (2.33)$$

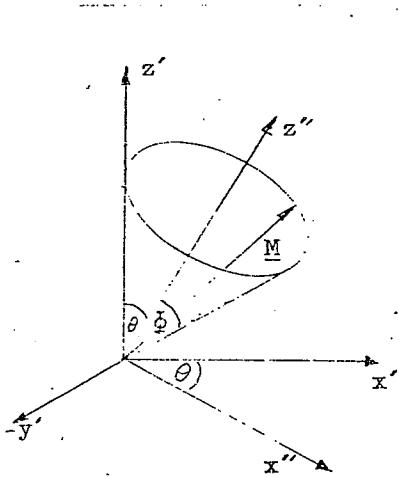
mit

$$B_{\text{eff}} = \sqrt{(B_0 - \gamma)^2 + B_1^2} \quad (2.34)$$

Im zweifach gestrichenen System besitzt das B_{eff} nur noch eine Komponente in die z'' -Richtung. Der Magnetisierungsvektor wird daher mit der Kreisfrequenz

$$\omega_{\text{eff}} = \gamma B_{\text{eff}} \quad (2.35)$$

um die z'' -Achse präzedieren. Er beschreibt dabei einen Kegel mit dem halben Öffnungswinkel Φ . Während der



Zeit $t < t_0$ war jedoch nur das konstante B_0 -Feld wirksam, und es ergab sich eine Magnetisierung in die z' -Richtung. Weiterhin wird daher nach jeder vollen Umdrehung der Magnetisierungsvektor in diese Richtung zeigen. Aus Fig.4 ist ersichtlich, daß dann gilt:
 $\Phi = \theta$.

Fig.4: Die Präzession der Magnetisierung im gestrichenen und ungestrichenen System

Berücksichtigen wir noch eine Anfangsphase ε für die Magnetisierung, so ergeben sich im zweigestrichenen

System die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} M_x'' &= M \sin\theta \cos(\omega_{\text{eff}} t - \varepsilon) \\ M_y'' &= M \sin\theta \sin(\omega_{\text{eff}} t - \varepsilon) \\ M_z'' &= M \cos\theta \end{aligned} \quad (2.36)$$

Um zu einer Darstellung im ruhenden System zu kommen, müssen wir die Gleichungen wieder zweimal zurück-transformieren. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} M_x' &= M_x'' \cos\theta - M_z'' \sin\theta \\ M_y' &= M_y'' \\ M_z' &= M_z'' \sin\theta + M_x'' \cos\theta \end{aligned} \quad (2.37)$$

und

$$\begin{aligned} M_x &= M_x' \cos\omega t - M_y' \sin\omega t \\ M_y &= M_x' \sin\omega t + M_y' \cos\omega t \\ M_z &= M_z' \end{aligned} \quad (2.38)$$

Durch Kombination dieser letzten drei Gleichungssysteme ergibt sich schließlich die Bewegungsgleichung, wenn man den Zeitnullpunkt so wählt, daß ε null wird, zu

$$\begin{aligned} M_x &= M(\cos\theta \cdot \sin\theta \cdot (\cos\omega_{\text{eff}} t - 1) \cos\omega t + \\ &\quad + \sin\theta \cdot \sin\omega_{\text{eff}} t \cdot \sin\omega t) \\ M_y &= M(\cos\theta \cdot \sin\theta \cdot (\cos\omega_{\text{eff}} t - 1) \sin\omega t - \\ &\quad - \sin\theta \cdot \sin\omega_{\text{eff}} t \cdot \cos\omega t) \\ M_z &= M(\cos^2\theta + \sin^2\theta \cdot \cos\omega_{\text{eff}} t) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Der Winkel θ und ω_{eff} lassen sich noch ersetzen, wenn man die Beziehungen (2.33) verwendet. Dann ist

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{B_0 - \frac{\omega}{\omega_1}}{B_1} = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_1} = \frac{\Delta\omega}{\omega_1} = :u \quad (2.40)$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{1+u^2}; \cos^2\theta = \frac{u^2}{1+u^2} \quad (2.41)$$

$$\omega_{\text{eff}} = \gamma B_1 \sqrt{1+u^2} \quad (2.42)$$

und die Gleichungen (2.39) ergeben:

$$\begin{aligned} M_x &= M \left[\frac{u}{1+u^2} \cos\omega t \cdot ((\cos\theta B_1 t \sqrt{1+u^2}) - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1+u^2} \sin\omega t \sin(\gamma B_1 t \sqrt{1+u^2}) \right] \end{aligned} \quad (2.43a)$$

$$M_y = M \left[\frac{u}{1+u^2} \sin \omega t ((\cos \gamma B_1 t \sqrt{1+u^2}) - 1) - \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cos \omega t \sin(\gamma B_1 t \sqrt{1+u^2}) \right] \quad (2.43b)$$

$$M_z = M \frac{1}{1+u^2} (u^2 + \cos \gamma B_1 t \sqrt{1+u^2}) \quad (2.43c)$$

Die x- und y-Komponenten der Magnetisierung verändern sich demnach sehr schnell; die z-Komponente dagegen recht langsam.

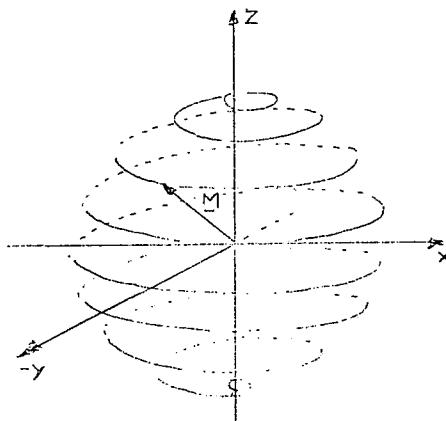


Fig.5: Bewegung des Magnetisierungsvektors nach Gleichung (2.43)

Fig.5⁴⁾ versucht, den physikalischen Inhalt der Gleichungen (2.43) zu verdeutlichen. Der Magnetisierungsvektor windet sich innerhalb einer Kugel spiralförmig um die z-Achse. Eine Drehung um π bedeutet eine einzige Spirale aus der positiven in die negative z-Richtung.

Da sich die x- und y-Komponenten zeitlich so schnell ändern, wird bei allen Kernresonanzversuchen nur die Magnetisierung in Richtung der z-Achse gemessen. Man erwartet daher für die Resonanzsignale, in Abhängigkeit der Verstimmung u von der Resonanz, Kurven, die der Gleichung (2.43c) entsprechen.

Setzt man $\alpha := \gamma B_1 t$, so lässt sie sich folgendermaßen schreiben:

$$\frac{M_z}{M} = \frac{1}{1+u^2} (u^2 + \cos \alpha \sqrt{1+u^2}) \quad (2.44)$$

Fig.6 5) zeigt für einige Werte von α die Größe $\frac{M}{M_z}$ in Abhängigkeit von u .

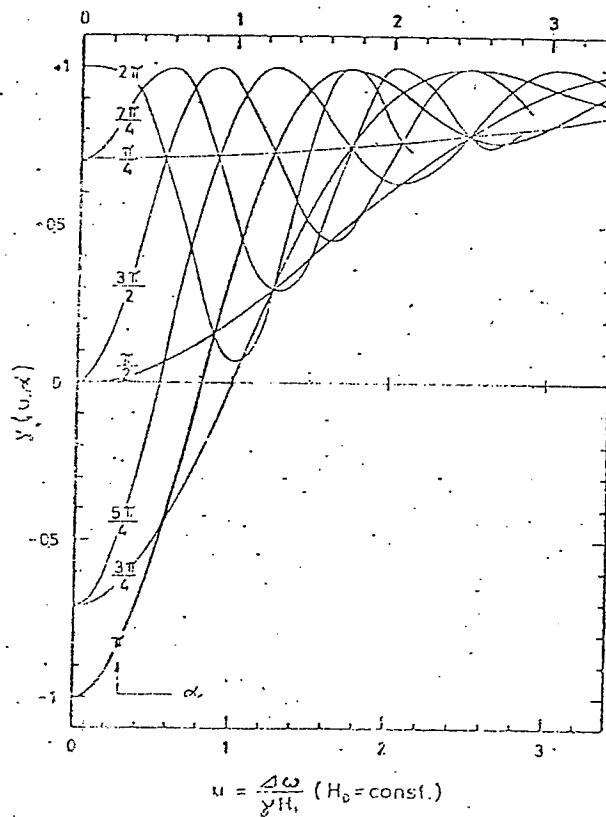


Fig.6: Graphische Darstellung der Gleichung (2.44) für verschiedene Werte von α

Ziel der Versuche in Kapitel 4 wird es sein, diese spezielle Lösung der BLOCH-Gleichungen anhand verschiedener Experimente zu beleuchten, und mit ihrer Hilfe die Ergebnisse zu erklären.

2.4. Besetzungszahlendifferenz

Protonen mit der Spinquantenzahl $J = 1/2$ besitzen in einem Magnetfeld zwei verschiedene Energieniveaus $E\downarrow$ und $E\uparrow$. Im Gleichgewicht entsprechen die Besetzungs- wahrrscheinlichkeiten $n\downarrow$ und $n\uparrow$ der BOLTZMANN-Verteilung⁶⁾

$$\frac{n\uparrow}{n\downarrow} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \quad (2.45)$$

Das energetisch tiefer liegende Niveau ist also stärker besetzt.

Weiterhin muß gelten:

$$n\downarrow + n\uparrow = 1 \quad (2.46)$$

da es für die Protonen nur diese beiden Einstellmöglichkeiten gibt. Aus den beiden Gleichungen läßt sich die Differenz $n\downarrow - n\uparrow$ berechnen. Sie ist der Grund für die feststellbare Magnetisierung oder "Polarisation" der untersuchten Probe, da sich für den Fall, daß die Differenz ungleich null ist, die einzelnen magnetischen Momente nicht mehr aufheben.

Es folgt nun die Umformung:

$$n\uparrow = n\downarrow e^{-\frac{\Delta E}{kT}} = (1 - n\uparrow) e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \quad (2.47)$$

$$n\uparrow = \frac{e^{-\frac{\Delta E}{kT}}}{1 + e^{-\frac{\Delta E}{kT}}} \quad (2.48)$$

$$n\downarrow - n\uparrow = 1 - n\uparrow - n\uparrow = 1 - 2n\uparrow \quad (2.49)$$

$$n\downarrow - n\uparrow = \frac{1 - e^{-\frac{\Delta E}{kT}}}{1 + e^{-\frac{\Delta E}{kT}}} \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{kT} \quad (2.50)$$

Das Ungefährzeichen gilt für $\frac{\Delta E}{kT} \ll 1$.

Dies ist aber gut erfüllt, denn nach Gl.(2.12) ist

$$\Delta E = g \mu_N B \quad (2.51)$$

Bei einem Magnetfeld von $B = 1$ T, einer Zimmertemperatur von $T = 293$ K ergibt sich mit $g = 5,58$ und

$$\mu_N = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ J} \cdot \text{T} \quad \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{kT} = 3,5 \cdot 10^{-6} \quad (2.52)$$

Diese Differenz ist äußerst klein. Wegen der großen Anzahl der beobachteten Kerne läßt sich aber trotzdem eine makroskopische Magnetisierung feststellen.

3. Aufbau der Apparatur

Während bei üblichen Kernresonanzversuchen, wie sie BLOCH und PURCELL durchgeführt haben, die zu untersuchende Probe in einem einzigen Magnetfeld beobachtet wird, folgt die vorliegende Anordnung einem Aufbau von WILKING. Der wesentliche Unterschied liegt darin, daß hier die Protonen nacheinander durch drei verschiedene Magnetfelder geführt werden. Dies bringt einige bedeutende Vorteile. Vor allem lassen sich mit dieser Anordnung recht bequem und sehr genau Magnetfelder - auch sehr kleine - ausmessen. Den prinzipiellen Versuchsaufbau zeigt Fig. 7.

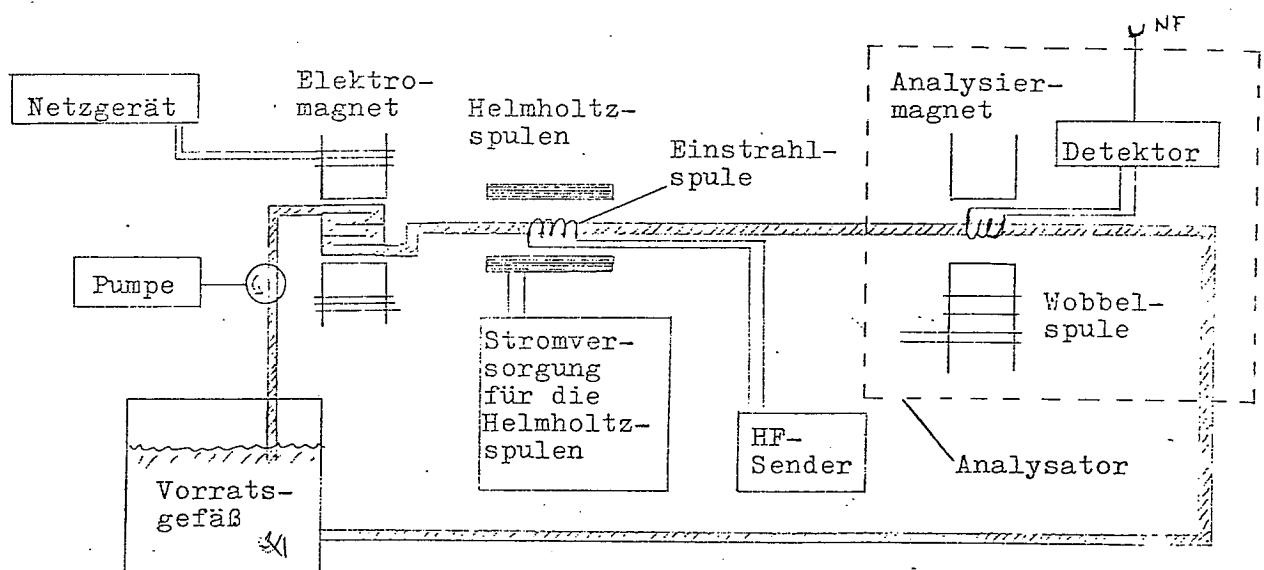


Fig. 7: Schematischer Aufbau
des Kernresonanzversuches

In den folgenden Kapiteln werden die Eigenschaften und die Funktionsweise dieser Anordnung beschrieben.

3.1. Polarisator und Analysator

Eine Pumpe läßt zweifach destilliertes Wasser in einem Schlauch zirkulieren, der durch drei Magnetfelder geführt wird. Zunächst gelangen die Protonen des Wassers in ein Labyrinth, das sich zwischen den Polschuhen eines starken Elektromagneten befindet. Die Aufenthaltsdauer darin ist so groß, daß sich die Gleichgewichtsmagnetisierung nach (2.45) fast vollständig einstellt. Dabei ist es wichtig, einen möglichst starken Magneten zu benutzen, damit die Energiedifferenz der beiden Niveaus, die ja proportional zur Feldstärke ist, und damit auch die Magnetisierung in z-Richtung, die Polarisation der Probe, möglichst groß wird.

Auf dem Weg außerhalb des Magneten folgt der Polarisationsvektor der momentanen Richtung des äußeren Magnetfeldes, das sich zusammensetzt aus dem Streufeld der vorhandenen Magneten und dem Erdmagnetfeld.

Die Stärke dieses resultierenden Feldes beträgt etwa $0,5 \cdot 10^{-4}$ Tesla, ist also wesentlich kleiner als das Feld des Elektromagneten, das in der Größenordnung von 0,7 Tesla liegt. Daher fällt auf diesem Weg der Grad der Polarisation nach Gleichung (2.19) exponentiell ab.

Dies ist der Grund, warum die Wassergeschwindigkeit im Schlauch möglichst groß gewählt werden muß, denn je größer die Polarisation schließlich im Analysator ist, umso besser wird das registrierte Kernresonanzsignal sein. Die Relaxationszeit des Wassers beträgt etwa 3 Sekunden (siehe auch 4.8 Die Relaxationszeit). Damit ist die Größenordnung der Zeit festgelegt, in der die polarisierten Teilchen in den Analysator gelangen müssen.

Im Analysator wird die noch vorhandene Polarisation der Probe gemessen. Die Flüssigkeit strömt dabei durch eine Spule, die sich in einem Permanentmagneten befindet.

Wird in dieser Spule die zum Analysiermagneten nach Gleichung (2.14) passende Frequenz eingestrahlt, so werden Übergänge zwischen den beiden Energieniveaus der Protonen erzeugt. Dabei wird die magnetische Wechselwirkungsenergie der Protonenspins größer oder kleiner. Diese Energieänderung in der Spule wird mit Hilfe einer elektrischen Apparatur, des Spindetektors, registriert und ist ein Maß für die Polarisierung der Protonen. Fig.8 zeigt das Prinzipschaltbild des Detektors.

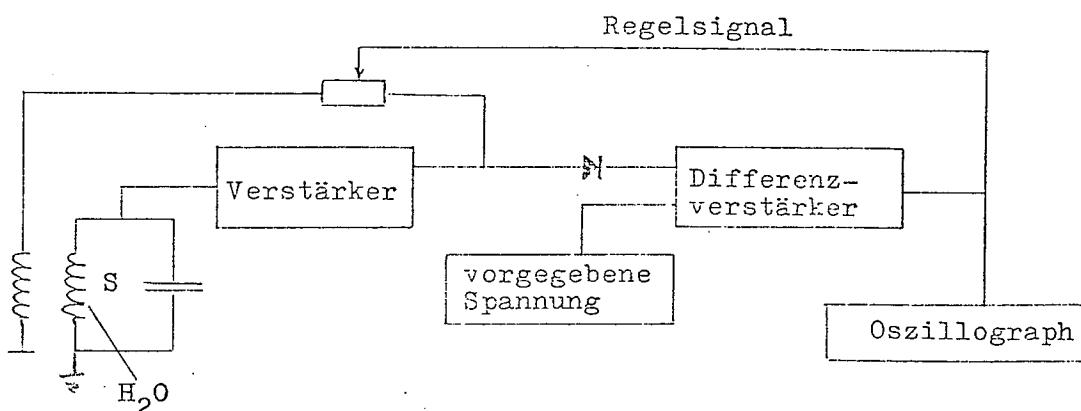


Fig.8: Prinzipschaltbild
des Spindetektors

Durch die mit H_2O gekennzeichnete Spule des Schwingkreises S fließen die Protonen. Die Amplitude der Schwingung wird über einen Verstärker als gleichgerichtetes Spannungssignal auf einen Differenzverstärker gegeben, der es mit einer vorgegebenen Spannung vergleicht. Die Differenz der beiden wird verstärkt und steuert die Größe der Rückkopplung, so daß die Schwingung ständig auf gleicher Höhe gehalten wird.

Resonanzen in der Spule verursachen eine starke Dämpfung bzw. Erregung des Schwingkreises, was zu einem großen bzw. kleinen Rückkopplungssignal führt. Das zugehörige Regelsignal ist damit ein Maß für die Energieänderung in der Spule, und damit für die

Polarisation der darin befindlichen Teilchen. Auf einem Oszilloskop läßt es sich als Spannung sichtbar machen.

Um noch bessere Signale zu erhalten, läßt man die Resonanz nur kurzzeitig eintreten. Das wird durch eine Wobbelspule auf dem Analysiermagneten erreicht, die mit Netzfrequenz von 50 Hz betrieben wird, und dadurch das Magnetfeld periodisch etwas verändert. Bei richtiger Abstimmung des Schwingkreises (etwa 4.69 MHz) treten Resonanzen nur auf, wenn die Netzspannung null wird, also jeweils nach 10 ms. Das hat den Vorteil, daß das Rückkopplungssignal während der Resonanz deutlich gegenüber dem normalen Wert abfällt bzw. ansteigt. Außerdem wird die Leistungsaufnahme erhöht, da ständig polarisierte Protonen in die Spule nachfließen, ihre Energie aber nur kurzzeitig geändert wird, so daß bei Eintritt der Resonanz entsprechend mehr polarisierte Teilchen in der Spule vorhanden sind.

Bei Verlassen des Analysators haben sie ihre Magnetisierung weitgehend verloren. Sie fließen zurück in den Vorratsbehälter, wo sie so lange verbleiben, daß die Magnetisierung vollkommen abklingt, um dann erneut in den Kreislauf gepumpt zu werden.

Wichtig bleibt festzuhalten, daß bei richtiger Abstimmung des Schwingkreises auf dem Oszilloskop ein Signal erscheint, das alle 10 ms eine Spannung anzeigt, die der Polarisation der im Analysator ankommenden Teilchen entspricht.

Auf den Seiten 18 und 19 sind drei Oszilloskopbilder des Detektorsignals dargestellt. Fig.9 zeigt nur das Rauschen des Detektors. Die Hochfrequenz erfüllt die Resonanzbedingung nicht. Auf dem nächsten Bild (Fig.10) erkennt man deutlich die Spannungsabfälle jeweils nach 10 ms, wenn die Resonanzbedingung für den Schwingkreis erfüllt ist. Bei Fig.11 schließlich wurde die Polarisation der Probe in der Einstrahlspule umgedreht (vergl. 4.6), so daß die Spitzen des Signals nun nach oben weisen.

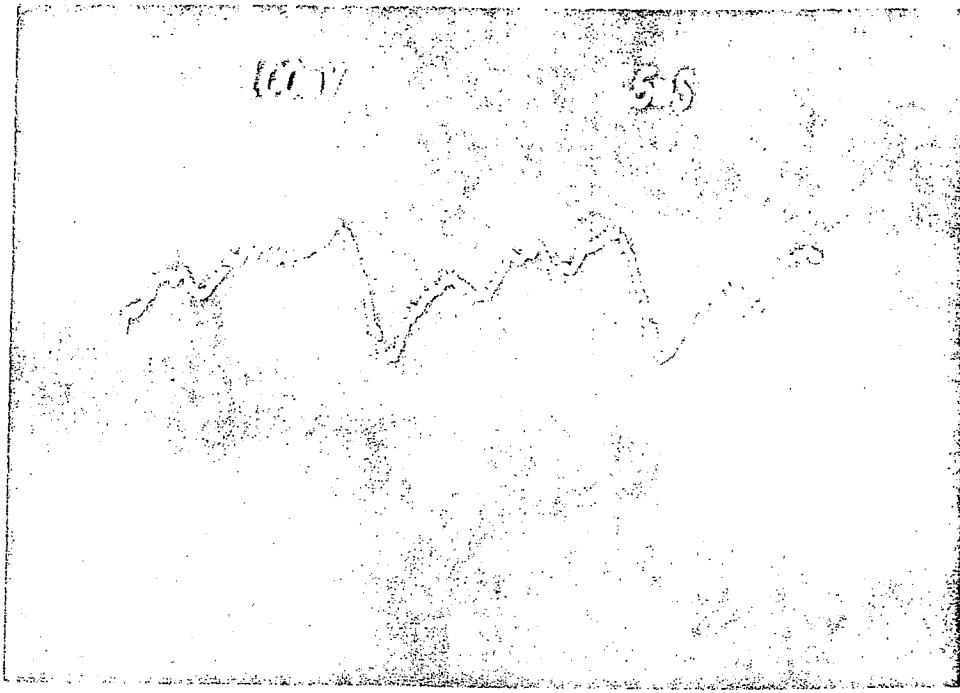


Fig.9: Detektorsignal, wenn die Resonanzbedingung nicht erfüllt ist

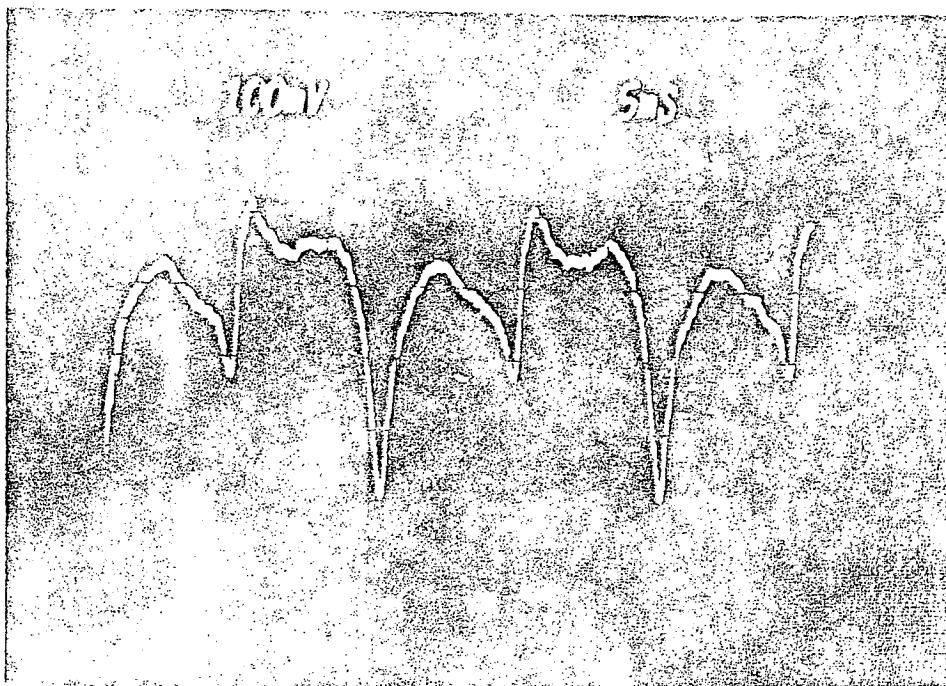


Fig.10: Detektorsignal, wenn die Resonanzbedingung für den Schwingkreis erfüllt ist.



Fig.11: Detektorsignal bei Resonanz, wobei die Polarisation der Probe vorher um 180 Grad gedreht wurde.

Die Bilder auf den letzten Seiten zeigen, daß sich die Signale recht gut auf dem Oszillographen sichtbar machen lassen, und so leicht und anschaulich zu beobachten sind. Zur Bestimmung der Polarisation jedoch ist es wichtig, die Höhe der Signale laufend zu registrieren. Ziel der weiteren Verarbeitung wird es daher sein, das Signal in eine der Signalhöhe entsprechende Gleichspannung umzuformen, die dann einem x-t-Schreiber zugeführt werden kann.

Für die Verwirklichung dieser Absicht gibt es verschiedene Möglichkeiten; die bei diesem Aufbau gewählte beruht auf dem Prinzip, während des Resonanzdurchgangs einen Kondensator zu laden, und die dann anliegende Spannung bis zu einem neuen Resonanzdurchgang aufzuhalten.

Das Blockschaltbild dazu zeigt Fig.12.

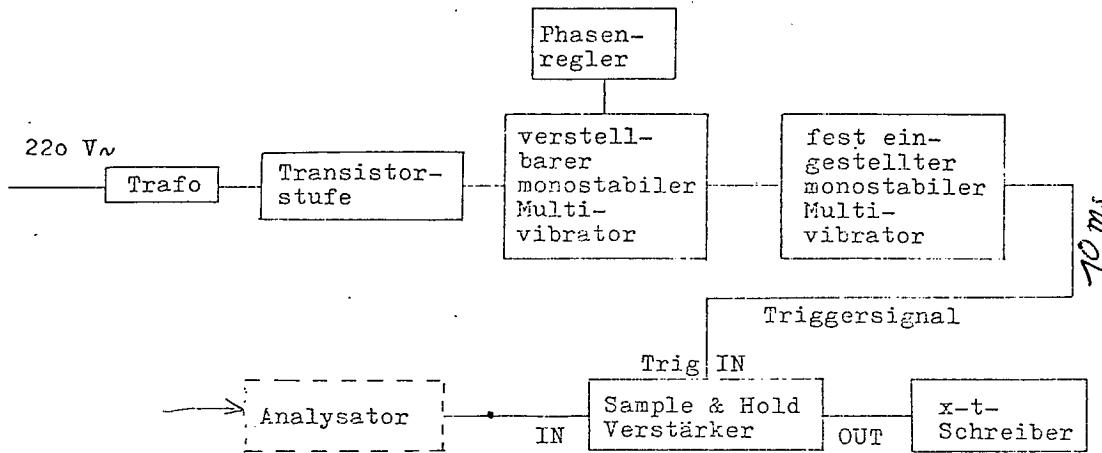


Fig.12: Blockschaltbild
zur Weiterverarbeitung
des Signals

Der wichtigste Teil darin ist ein sogenannter Sample & Hold Verstärker. Seine Funktionsweise veranschaulicht

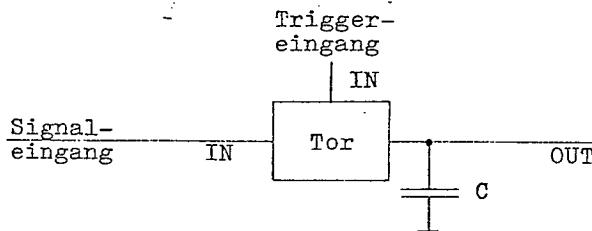


Fig.13: Die prinzipielle
Funktionsweise des
Sample & Hold Verstärkers

Fig.13. Liegt der
Triggereingang auf
LOW (Potential = 0V)
so ist das Tor ge-
öffnet und das an-
kommende Signal lädt
den Kondensator C
auf. Springt das
Triggersignal jedoch
auf HIGH (Pot. = 3V)
so sperrt das Tor
und der Momentan-

wert der Spannung am Kondensator wird auf den Schreiber
gegeben, bis das Tor durch LOW am Triggereingang wieder
öffnet.

Die vorgeschalteten Stufen haben lediglich die Auf-
gabe, ein für unser Problem geeignetes Triggersignal
zu liefern, das sich also nur kurze Zeit im LOW-
-Zustand befindet. und im Augenblick der Resonanzspitze
auf HIGH schaltet.

Bei geeignetem Frequenzabgleich erfolgt dies immer dann, wenn die Netzspannung null wird. Daher wird die Netzwechselspannung über einen Transformator, der sie erheblich herabsetzt, auf die Basis eines Transistors gegeben, wie es Fig.14 zeigt.

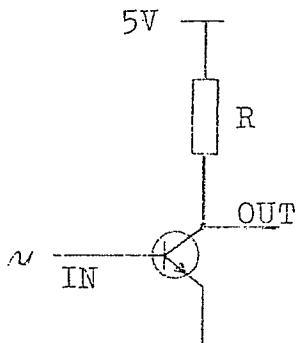


Fig.14: Die Transistorstufe

Dieser Transistor funktioniert als Schalter. Sobald die Spannung an der Basis einen bestimmten Wert überschreitet, wird der Kollektor-Emitter Widerstand sehr klein, so daß der Ausgang auf LOW-Potential liegt. Wird diese Spannung unterschritten, so steigt der Widerstand sprungartig an und der Ausgang erhält HIGH-Potential.

Dadurch wird die sinusförmige Wechselspannung in eine Rechteckspannung zerlegt, wie es Fig.15 zeigt.

Dieses Signal wird nun auf eine monostabile Kippstufe gegeben, deren Ausgang auf LOW springt, sobald der Eingang an HIGH liegt. Mit einem RC-Glied (Widerstand und Kondensator) läßt sich die Zeit, in der dieser Zustand erhalten bleibt, einstellen. Durch verändern des Widerstandes kann man daher die Zeit t_o , in der am Ausgang LOW-Potential liegt, variieren. Damit ist es möglich, den Einschaltpunkt gegenüber der Wechselspannungsphase über einen weiten Bereich hin zu verschieben. (vergl. Fig.15)

Dieses Ausgangssignal dient nun zur Ansteuerung eines zweiten Multivibrators, dessen RC-Glied so eingestellt wird, daß die Zeit t_1 , in der LOW-Potential am Ausgang liegt, sehr klein wird ($< 0,5$ ms).

Das Signal dieses Multivibrators dient nun als Torschaltimpuls für den Sample & Hold Verstärker. Mit Hilfe des Oszilloskop ist die Zeit t_o so einzustellen, daß der Sample & Hold genau die Spannung an der Spitze des Resonanzsignals anzeigt.

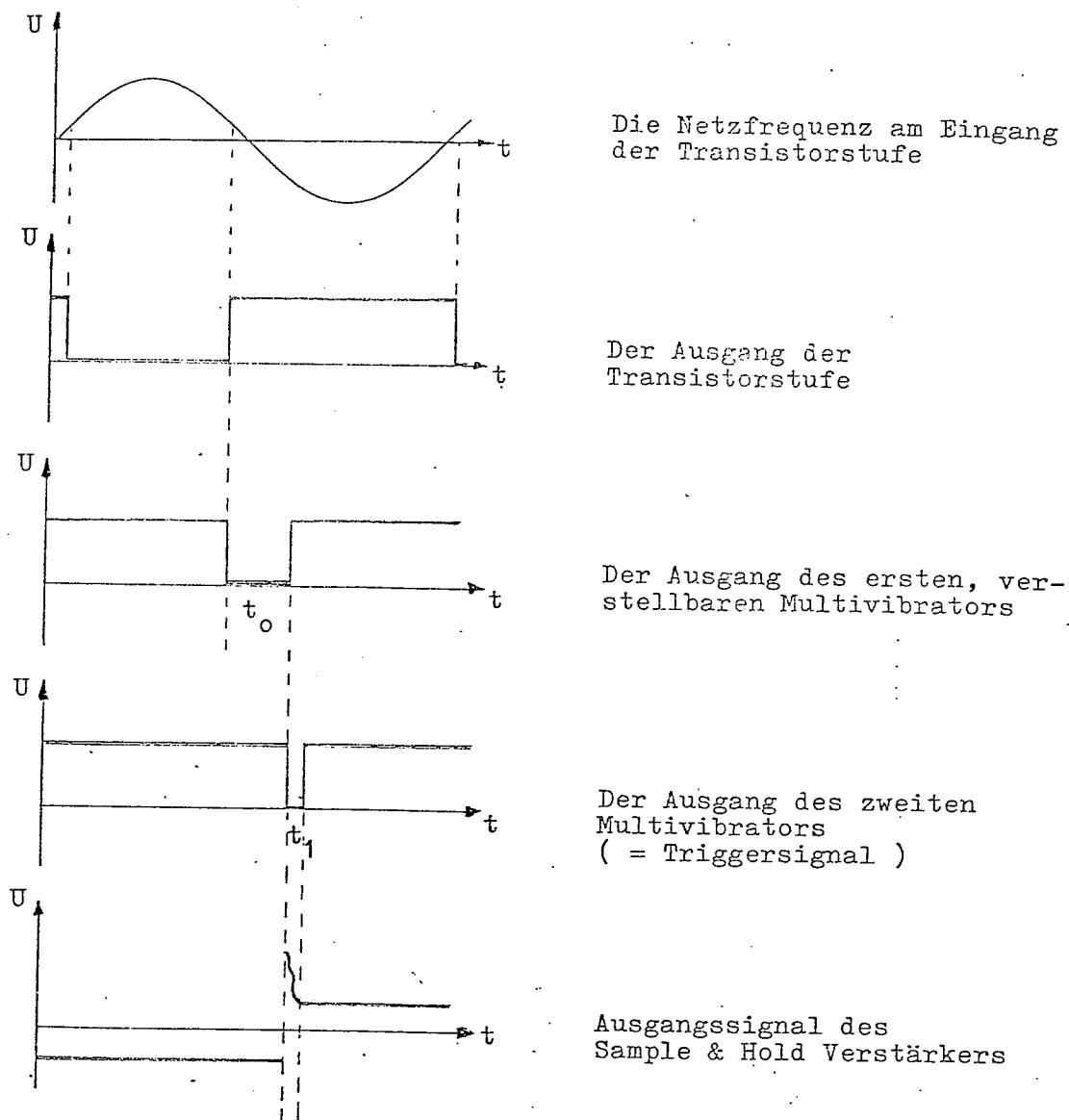
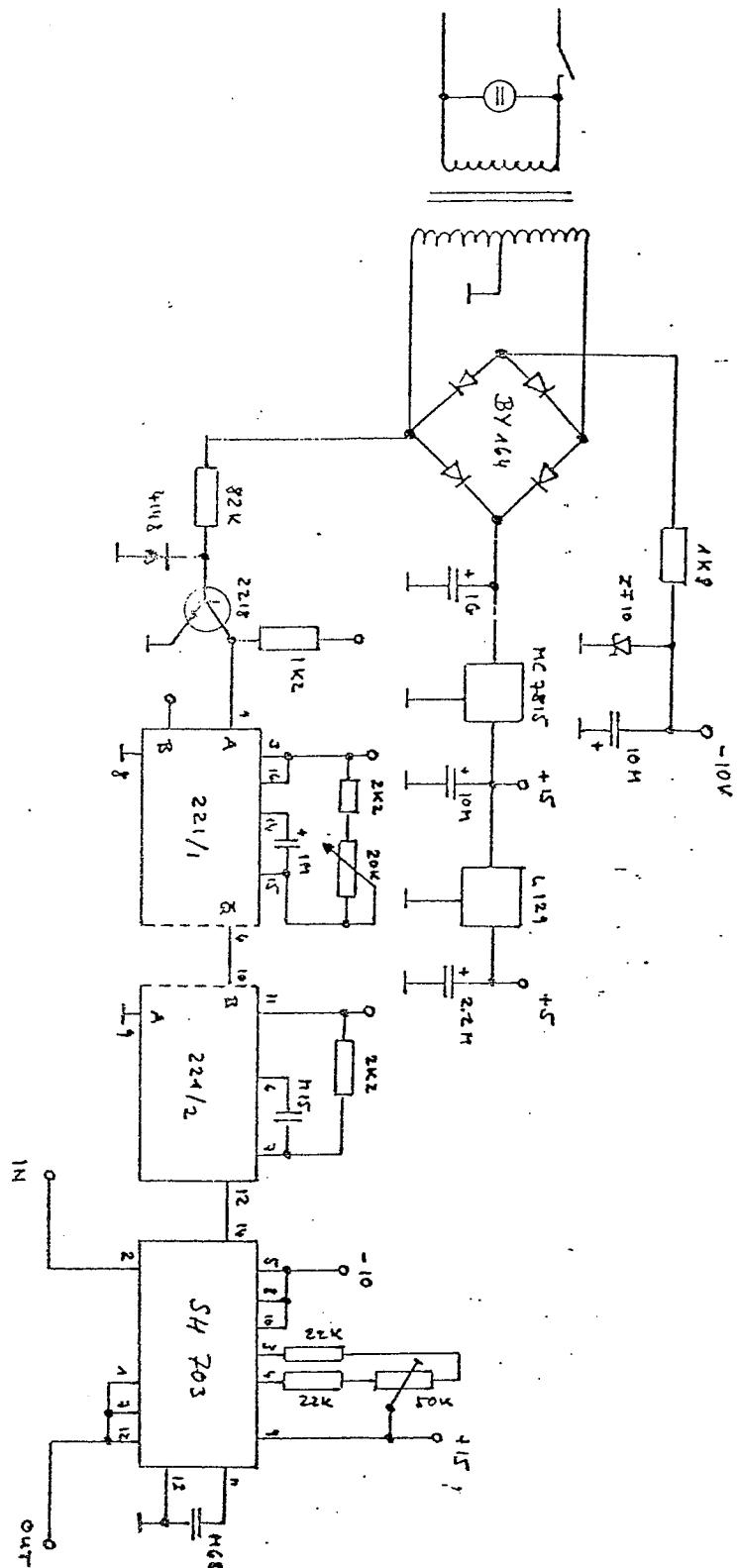


Fig.15: Signalfolge der einzelnen Stufen im Blockschaltbild von Fig.12



800117 R9 389

Fig.16: Schaltplan des Sample & Hold Verstärkers, wie von der Elektronikwerkstatt angegeben

3.2. Die Einstrahlspule

Zwischen Polarisor und Analysator befindet sich die Messstelle, an der die Polarisation der Protonen verändert werden kann. Dazu wurde eine Spule auf dem Schlauch befestigt, die an einem HF-Oszillatot mit veränderlicher Frequenz und Amplitude angeschlossen ist. Seine Frequenz lässt sich mit einem digitalen Frequenzzähler sehr genau bestimmen, und die Amplitude kann als Spannungsabfall mit dem Oszillographen gemessen werden.

Befindet sich die Spule in einem Magnetfeld und wird die dazu passende Resonanzfrequenz eingestrahlt, so werden die Protonenspins und damit die Polarisation der Probenflüssigkeit verändert. Diese Änderung lässt sich am Analysatorsignal beobachten und mit dem x-t-Schreiber registrieren. Die Spule kann sich dabei in einem Magnetfeld beliebiger Größe befinden. In den meisten Fällen wurde es jedoch durch ein Helmholtzspulenpaar erzeugt (vergl. 3.3).

Bei den Messungen wurden zwei Spulen unterschiedlicher Größe verwendet. Die kleinere der beiden hat eine Länge von $l = 2,5$ cm mit 125 Windungen auf vier Lagen gewickelt. Die andere besitzt 85 Windungen bei einer Länge von $l = 5,2$ cm.

3.3. Die Helmholtzspulen

Um bei unserem Versuch einwandfreie Resonanzkurven zu erhalten, muß die zeitliche und räumliche Änderung des Magnetfeldes möglichst gering sein, damit die Resonanzbedingung während einer Messung erhalten bleibt.

Zeitliche Änderungen werden dabei im wesentlichen von der Stromversorgung verursacht. Zur Verfügung steht das Gerät: Zentro Elektrik 30V/2A, dessen Stabilisation laut Angabe besser als 10^{-3} ist.

Ein Ziel dieser Arbeit war es, ein Magnetfeld zu erhalten, dessen räumliche Änderung im Bereich der Einstrahlspule ebenfalls kleiner als 10^{-3} wird. Prinzipiell wären dafür Zylinderspulen oder Helmholtz-spulenpaare möglich gewesen. Aus didaktischen wie aus praktischen Gründen wurde schließlich letzteres gewählt, da deren Feldbereich wesentlich einfacher zugänglich ist.

Helmholtzspulen sind im Prinzip zwei gleichsinnig fließende Kreisströme, die der von Helmholtz angegebenen Bedingung

$$R = A \quad (3.1)$$

genügen, wobei R der Radius des Kreises und A der Abstand der beiden Kreise bedeutet. Im Mittelpunkt der Kreise erhält man dann einen Feldbereich großer Homogenität.

In der Praxis wird man statt einem Kreisring jeweils N Windungen verwenden. Jede Spule erzeugt dann auf ihrer Mittelsenkrechten im Abstand x von ihrem Mittelpunkt das Feld

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot N \cdot I \frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}} \quad (3.2)$$

wenn ein Strom I durch die Spule fließt.

Beide Spulen ergeben dann durch ihre Überlagerung

in der Mitte das Feld

$$B = \mu \mu_0 \cdot N \cdot I \frac{R^2}{(R^2 + (\frac{R^2}{2})^2)^{3/2}} \quad (3.3)$$

oder $B = \frac{8\sqrt{5}}{25} \mu \mu_0 \frac{N \cdot I}{R} \quad (3.4)$

Setzt man $\mu = 1$, so erhält man

$$B = 8.99 \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} \cdot \frac{N \cdot I}{R} \quad (3.5)$$

Eine Berechnung des Magnetfeldes im Bereich des Mittelpunktes ist äußerst kompliziert. Benutzt man die in Fig.17 ersichtlichen Bezeichnungen, so gelten nach RUARK, PETERS⁷⁾ folgende Gleichungen:

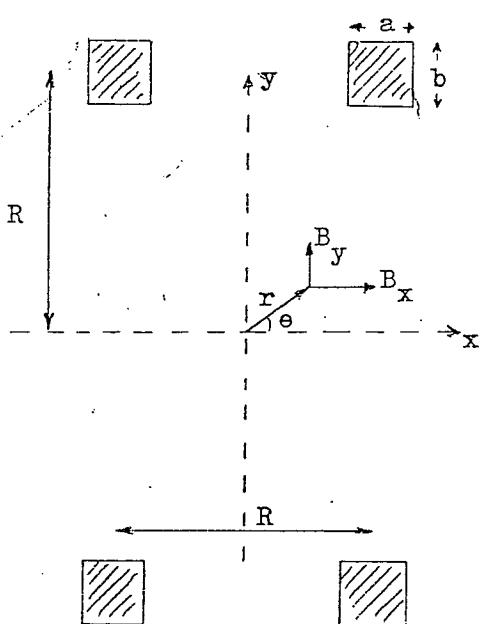


Fig.17: Bezeichnungen zur Berechnung des Magnetfeldes zweier Helmholzspulen in der Nähe des Mittelpunktes

$$\frac{B_x}{B_y} = \frac{5\sqrt{5}}{16\pi} \left[\frac{16\pi}{5\sqrt{5}} \left(1 - \frac{b^2}{60R^2} \right) + \frac{25\pi}{54 \cdot 2\sqrt{5}} \frac{31b^2 - 36a^2}{R^2} \frac{r^2}{R^2} (3\cos^2\theta - 1) - \frac{2832}{55} \frac{\sqrt{5}\pi}{8} \frac{r^4}{R^4} (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \pm \dots \right] \quad (3.6)$$

$$\frac{B_y}{B_x} = \frac{5\sqrt{5}}{16\pi} \sin\theta \cos\theta \left[-\frac{25}{54 \cdot 2\sqrt{5}} \frac{31b^2 - 36a^2}{R^2} \frac{r^2}{R^2} + \frac{2832}{55} \frac{\sqrt{5}\pi}{8} \frac{r^4}{R^4} (28 \cos^2\theta - 12) \pm \dots \right] \quad (3.7)$$

Diese Formeln gelten, solange $R > r$ ist, und solange a, b klein im Verhältnis zu R sind.

Sie erlauben es, die Inhomogenität des Magnetfeldes im Bereich der Einstrahlspule abzuschätzen. Die Dimensionen des angefertigten Helmholtzspulenpaars betragen: $R = 20,7$ cm, $a = 45$ mm, $b = 36$ mm.

Die Länge der kleinen Meßspule ist kleiner als 3 cm. Setzt man daher $r = 1,5$ cm und $\theta = 90^\circ$, so ergibt sich die Inhomogenität im Bereich dieser Spule zu

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{B - B_x}{B} = 1 - \frac{B_x}{B} = 1 - 0,999516 = 4,8 \cdot 10^{-4} \quad (3.8)$$

4. Versuche und Messungen

4.1. Das Prinzip der Messung

Die Anordnung, wie sie im vorhergehenden Kapitel beschrieben wurde, erlaubt es uns, recht vielseitige Versuche zum Phänomen der magnetischen Kernresonanz durchzuführen. An einem Beispiel soll hier zunächst das Prinzip einer solchen Messung aufgezeigt werden.

Wir wollen annehmen, daß der Pumpenkreislauf, der Polarisator und der Analysator im Betrieb sind. Bei richtiger Einstellung der Analysatorfrequenz erscheint auf dem Oszillographen ein Bild, wie es Fig.10 zeigt. Wenn der Sample & Hold Verstärker auf die untere Spitze des Signals eingestellt wurde, liefert der Schreiber ständig ein Signal, das der Polarisation der Probe entspricht.

Um die Protonenspins beeinflussen zu können, benötigen wir ein weiteres Magnetfeld; in dieser Anordnung wird es durch das Helmholtzspulenpaar erzeugt, das bei diesem Versuch von einem Strom $I = 51.8\text{mA}$ durchflossen wird. Die Einstrahlspule darin wird an einen Hochfrequenzsender angeschlossen. Dessen Frequenz läßt sich durch eine externe Spannung über einen Gleichlaufmotor linear verändern, und kann an einem digitalen Frequenzzähler abgelesen werden. Die Amplitude der Schwingung wird dabei konstant gehalten. Sie beträgt $2,2\text{mV}$ von Spur zu Spur. (Wahlweise kann auch bei fester Frequenz die Amplitude verändert werden!)

Das Analysatorsignal wird mit dem Schreiber als Funktion der Zeit aufgezeichnet. Durch Markieren von zwei oder mehr Stellen mit der zugehörigen Frequenz kann man jedem Zeitpunkt der Aufnahme eine bestimmte Frequenz zuordnen.

Das Ergebnis zeigt Fig.18. Deutlich sieht man, daß die Kurve bei etwa 6940 Hz ein Maximum annimmt.

Es ist die Resonanzfrequenz für das vorliegende Magnetfeld der Helmholtzspulen. Kennt man das gyromagnetische Verhältnis, so ergibt sich:

$$B = \frac{\omega_0}{\gamma_e} = \frac{2\pi f}{\gamma_e} = \frac{2\pi \cdot 6940 \text{ Hz}}{42,58 \cdot 10^6} = 1,63 \cdot 10^{-4} \text{ T} \quad (4.1)$$

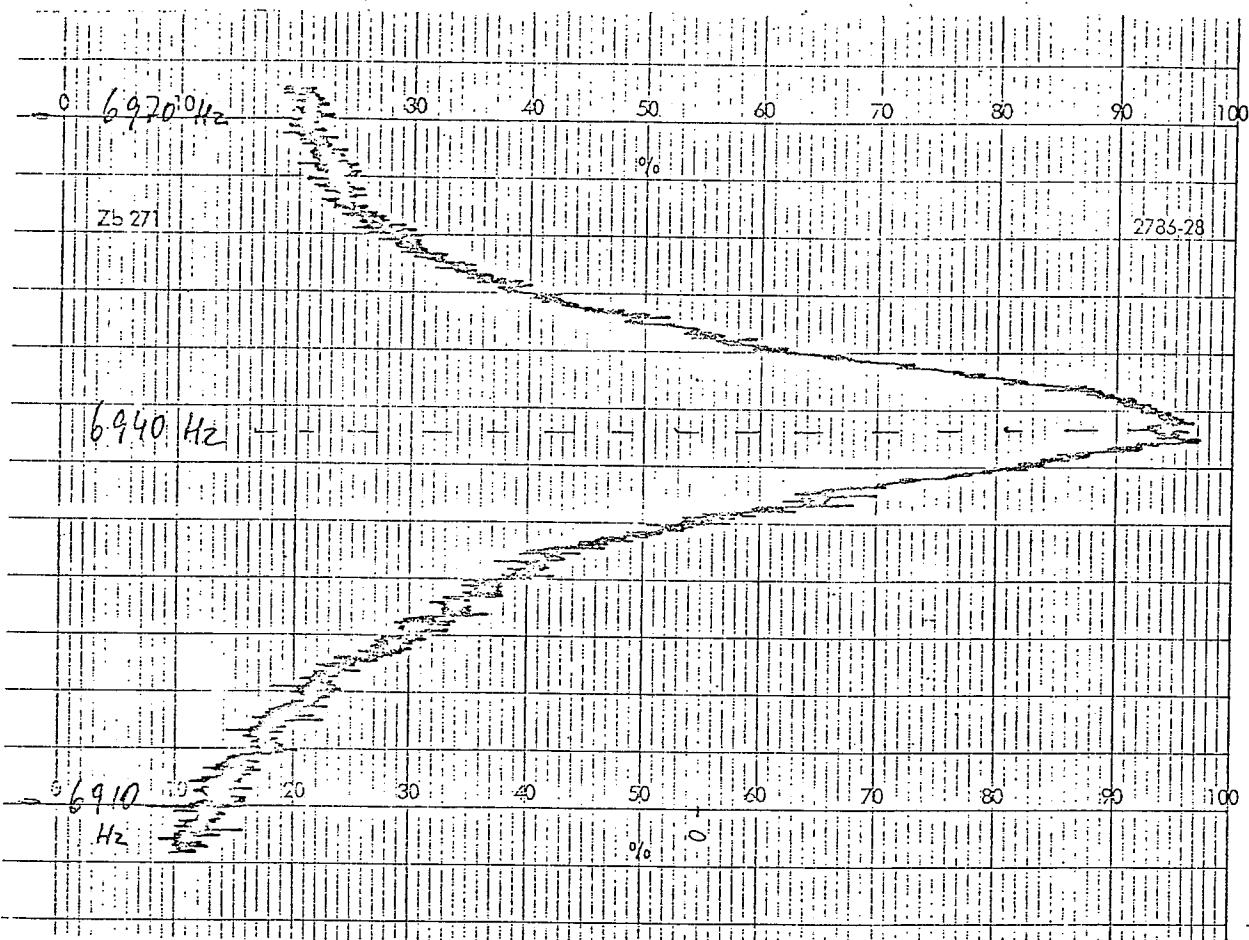


Fig.18:Resonanzkurve,
aufgenommen bei einer
Stromstärke der Helm-
holtzspulen von I = 51,8mA

Nachfolgend werden einige Experimente beschrieben, die die Anwendungsmöglichkeiten der Apparatur aufzeigen sollen, und etwa im Fortgeschrittenenpraktikum durchgeführt werden können.

4.2. Der Polarisationsmagnet

Damit die Nachweisleistung im Analysator möglichst groß wird, ist es wichtig, die anfängliche Magnetisierung im Polarisator möglichst groß werden zu lassen. Nach Kapitel 2.4. gilt:

$$M_z \sim \frac{\Delta E}{kT} \sim \frac{\mu B}{kT} \sim B \quad (4.2.)$$

Es ist daher günstig, einen sehr starken Magneten, wie den hier verwendeten Elektromagneten, als Polarisator einzusetzen.

Um die Beziehung (4.2.) zu demonstrieren, wurde bei abgeschalteter Einstrahlspule der Elektromagnet mit verschiedenen Stromstärken betrieben, und die im Analysator noch vorhandene Polarisation gemessen. Die jeweilige Signalhöhe wurde mit dem x-t-Schreiber einige Sekunden lang registriert. Das Ergebnis zeigt Fig.19.

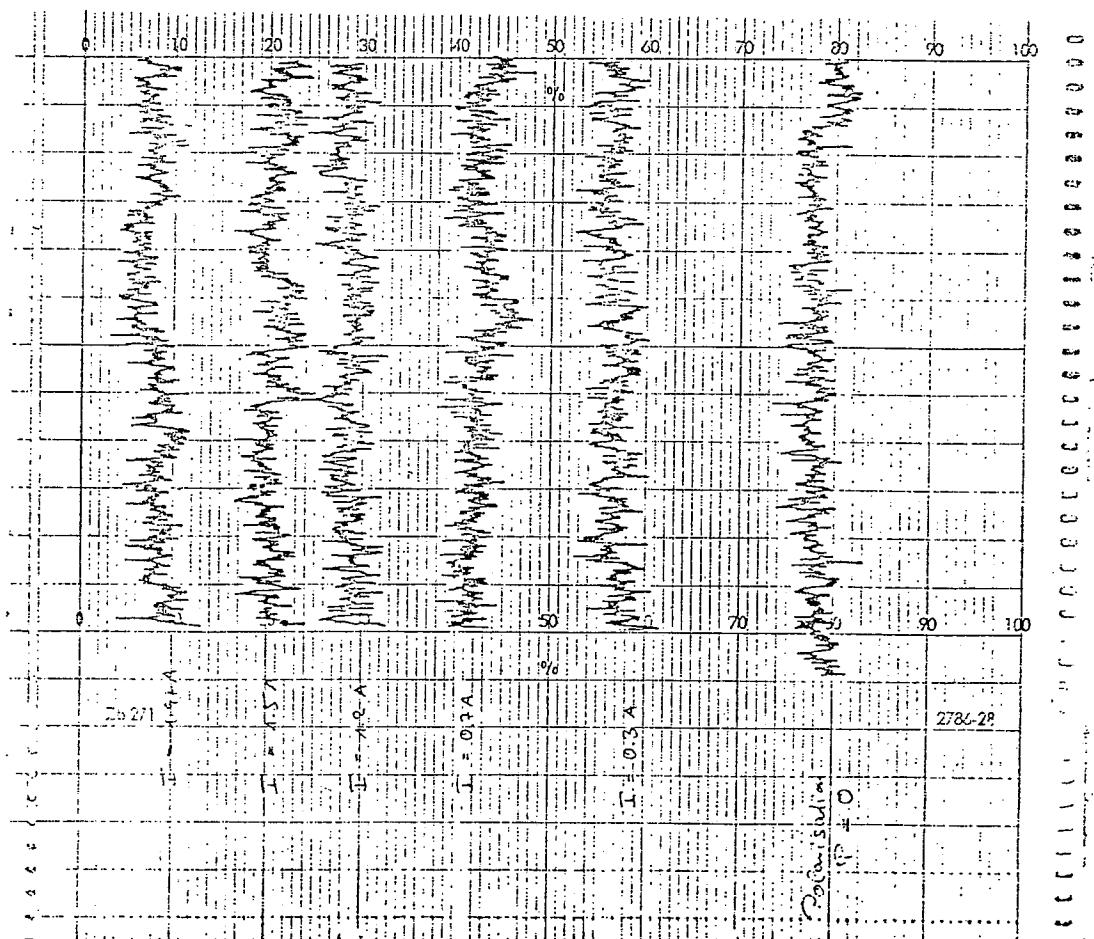


Fig.19: Die Polarisation in Abhängigkeit der Stromstärke des Elektromagneten

Der Abstand von der Spur $P = 0$ ist dabei ein Maß für die registrierte Polarisation der Probe. Trägt man diese in gemessenen Skalenteilen als Funktion der Stromstärke auf, so erhält man das Diagramm Fig.2o.

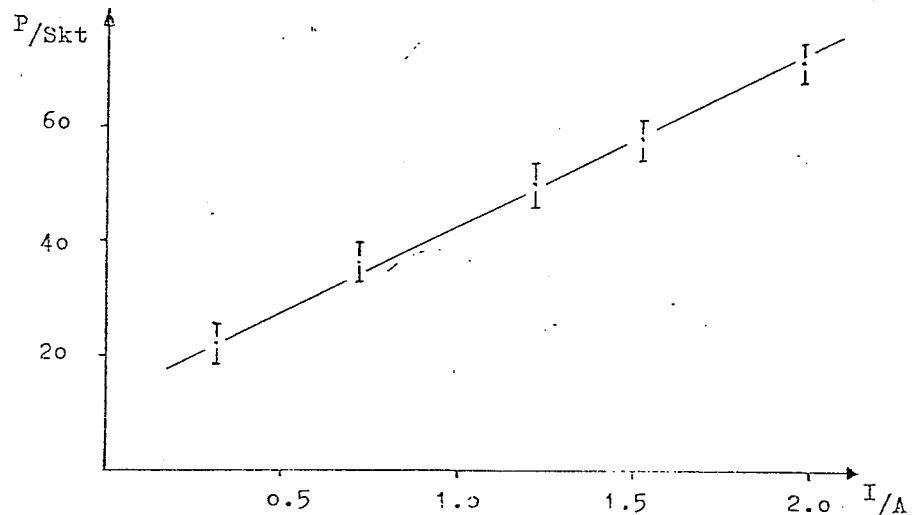


Fig.2o: Graphische Auftragung der Polarisation in Abhängigkeit der Stromstärke des Elektromagneten

Berücksichtigt man die Ungenauigkeiten der Messung, so erkennt man, daß der lineare Zusammenhang recht gut erfüllt ist. Alle weiteren Messungen wurden bei maximaler Stromstärke durchgeführt.

4.3. Das Magnetfeld der Helmholtzspulen

4.3.1. Die Inhomogenität

In Kapitel 3.3. wurde an einem Beispiel die theoretische Inhomogenität des Magnetfeldes in der Mittelebene des Helmholtzspulenpaars berechnet. Die Kernresonanzmethode erlaubt es uns, auch so geringe Änderungen des Magnetfeldes zu messen.

Dazu wurde die kleine Meßspule auf einem seitlich sehr genau verschiebbaren Aufsatz befestigt, und in die

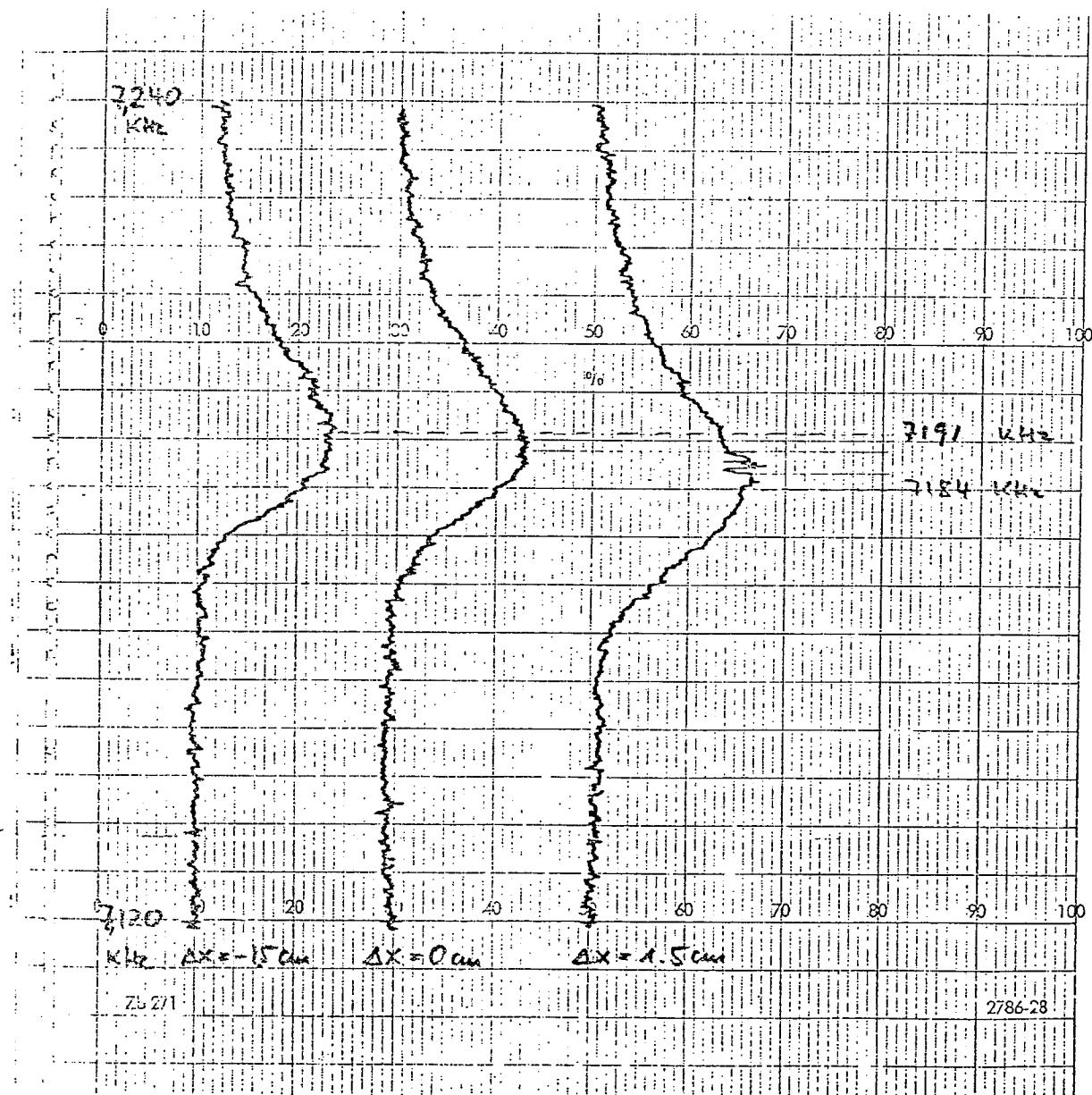


Fig.21: Messung der Inhomogenität
des Magnetfeldes der Helmholtz-
spulen

Mitte der Helmholtzspulen gebracht. Bei einem Strom von $I = 51,0 \text{ mA}$ in den Helmholtzspulen wurde die Resonanzkurve in der unter 4.1. beschriebenen Weise aufgenommen. Dabei entstand die mittlere Spur $\Delta x = 0 \text{ cm}$ in Fig. 21.

Danach wurde die Spule nach rechts und nach links jeweils $1,5 \text{ cm}$ verschoben und die Messung mit den gleichen Geschwindigkeiten des Schreibermotors und des Synchronmotors wie in der ersten Aufnahme aufgezeichnet, jeweils beginnend mit 7120 Hz . Da die Frequenz, die man der Resonanzspitze zuordnen kann, direkt proportional zur Feldstärke ist, in der sich die Einstrahlspule befindet, gilt für die Inhomogenität des Magnetfeldes der Helmholtzspulen:

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{7191 - 7184}{7187} = \frac{7}{7187} = 9,7 \cdot 10^{-4} \quad (4.3)$$

Daß die gemessene Inhomogenität größer ist als die theoretische, ließ sich erwarten. Dafür gibt es mehrere Gründe. Die Formel (3.6) gilt nur für eine homogene Wicklung der Helmholtzspulen, was aber nur annähernd erreicht werden kann. Bei der Berechnung wurde nur eine Längsausdehnung der Meßspule in der y-Richtung, nicht aber ihr Durchmesser, berücksichtigt. Außerdem kann man mit dieser Messung das Magnetfeld nicht punktförmig abtasten, sondern hat immer einen relativ großen Meßraum, nämlich das Innere der Spule, in der das Magnetfeld gemittelt wird.

Nicht zuletzt stößt man dabei auch an die Grenze der Genauigkeit, mit der der Strom in den Helmholtzspulen konstant gehalten werden kann, so daß man, unter Berücksichtigung dieser Effekte, doch von einer mindestens größerenordnungsmäßigen Übereinstimmung sprechen kann.

4.3.2. Die Linearität des Magnetfeldes

Aus Gleichung (3.4) folgt, daß das Magnetfeld der Helmholtzspulen direkt proportional zur durchfließenden Stromstärke ist. Um diesen Zusammenhang zu prüfen, wurden Resonanzmessungen bei verschiedenen Stromstärken gemacht. Dabei ergaben sich für die Maxima der Kurven folgende Werte:

I / mA	f / Hz	f/I /Hz/mA
65,9	8827	133,95
146,0	19532	133,78
246,7	32980	133,68
349,8	46780	133,73
491,5	65660	133,59

Tab.1: Die Resonanzfrequenz f bei verschiedenen Stromstärken I in den Helmholtzspulen

In Fig.22 wird die Frequenz über der Stromstärke graphisch aufgetragen, und man erkennt unmittelbar, wie gut die Proportionalität zwischen beiden Größen erfüllt ist.

Um die Abweichungen sichtbar zu machen, wurde in Fig.23, ebenfalls auf der nächsten Seite, der Quotient f/I bei stark unterdrücktem Nullpunkt aufgetragen. Die maximale Abweichung vom Mittelwert 133,75 Hz/mA beträgt nur 0,15 %. Deutlich ist eine fallende Tendenz bei wachsender Stromstärke festzustellen. Dieser Effekt wird bei der quantitativen Auswertung dieser Messung im folgenden Kapitel mitberücksichtigt.

Aus Gleichung (2.14) wissen wir, daß die gemessene Resonanzfrequenz und die Magnetfeldstärke in linearem Zusammenhang stehen. Aus $B \sim f$ und $f \sim I$ folgt:

$$B \sim I \quad (4.4)$$

und dies ist die zu überprüfende Beziehung.

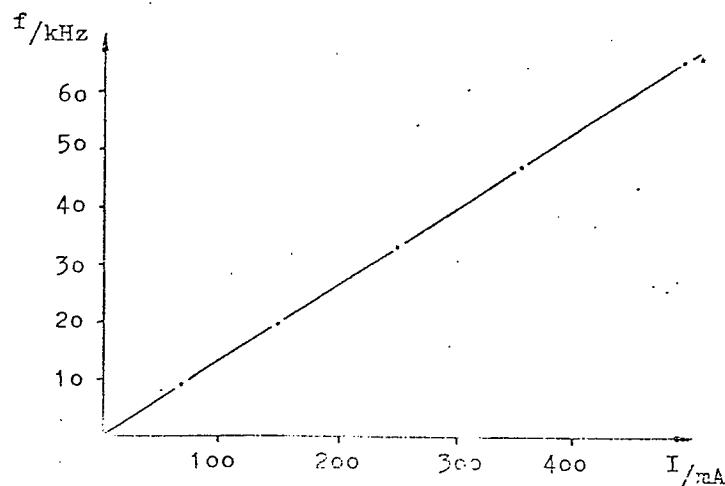


Fig.22: Die gemessene Resonanzfrequenz in Abhängigkeit der Stromstärke in den Helmholtzspulen

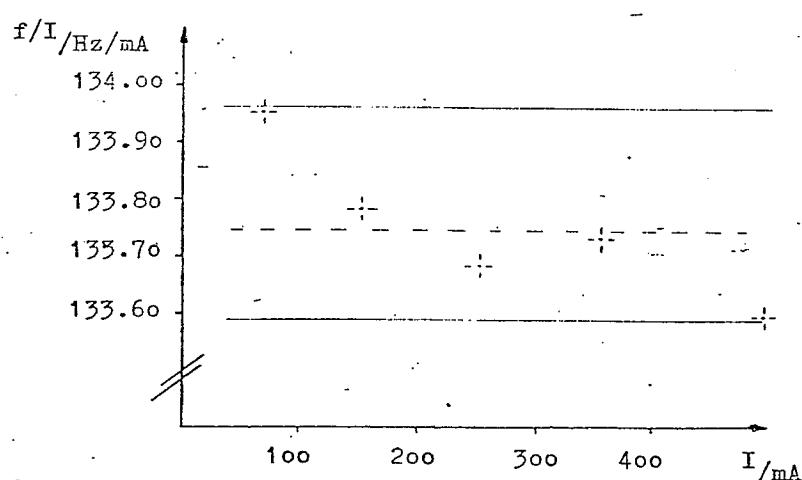


Fig.23: Der Quotient f/I als Funktion der Stromstärke bei stark unterdrücktem Nullpunkt

Dieses Ergebnis ist im Prinzip nicht besonders interessant, da wir es aus Gleichung (3.4) schon kennen. Interessant aber ist die Genauigkeit, mit der die Linearität überprüft werden kann. Es ist ein Beispiel für die große Präzision, die die Kernresonanzmethode beim Ausmessen von Magnetfeldern bietet.

4.4. Bestimmung des magnetischen Moments für Protonen

Da wir die Feldstärke der Helmholtzspulen nach Gleichung (3.5) berechnen können, erlaubt uns die Messung aus dem vorangehenden Kapitel die Ermittlung des gyromagnetischen Verhältnisses und damit des magnetischen Moments für Protonen. Es ist

$$B = 8,99 \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} \cdot \frac{N \cdot I}{R} = k \cdot I \quad (4.5)$$

Mit den bereits angegebenen Werten für N und R ergibt sich:

$$k = 3,12757 \cdot 10^{-3} \frac{T}{A} \quad (4.6)$$

Setzt man

$$\frac{f}{\nu} = \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{f}{B} \quad (4.7)$$

so folgt:

$$\frac{\gamma}{\nu} = \frac{1}{k} \cdot \frac{f}{I} \quad (4.8)$$

Allerdings messen wir mit unserer Anordnung nicht das Feld der Helmholtzspulen allein, sondern das Magnetfeld am Ort der Einstrahlspule, das durch Erdfeld und Streufeld der anwesenden Magneten überlagert wird. Dieser Effekt ist zwar sehr gering, wie das letzte Kapitel gezeigt hat, muß aber bei einer quantitativen Auswertung mitberücksichtigt werden.

Das geschieht durch folgenden Ansatz. Bezeichnet B_g das gemessene Magnetfeld, B_b das nach Gleichung (4.5) berechnete und B_s das Streufeld, so gilt:

$$B_g^2 = B_b^2 + B_s^2 \quad (4.9)$$

$$\text{oder } \left(\frac{f}{\nu}\right)^2 = (k \cdot I)^2 + B_s^2 \quad (4.10)$$

$$f^2 = (\frac{\gamma}{\nu} k)^2 \cdot I^2 + (\frac{\gamma}{\nu} B_s)^2 \quad (4.11)$$

Setzt man $f^2 = y$ und $I^2 = x$, so müssen die Werte aus Tab.1 (Seite 34) die Gleichung

$$y_i = a x_i + b$$

erfüllen.

Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ergibt sich daraus

$$(\gamma_k)^2 = a = 1,7807 \cdot 10^{10} \frac{Hz}{A}^2 \quad (4.12)$$

$$(\gamma_B)_s^2 = b = 1,4882 \cdot 10^6 \text{ Hz}^2 \quad (4.13)$$

und weiter

$$B_s = 2,9 \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad (4.14)$$

Mit diesem Ergebnis lassen sich die Werte aus Tab.1 nach Formel (4.9) korrigieren und man erhält

I /mA	B_b /10^-4 T	B_g /10^-4 T	f /Hz	$\gamma / 10^6 \text{ Hz T}^{-1}$
65,9	2,061	2,079	8827	42,46
146,0	4,566	4,574	19532	42,70
246,7	7,716	7,720	32980	42,72
349,9	10,943	10,947	46780	42,73
491,5	15,372	15,374	65660	42,71

Tab.2: Die Stromstärke I und Frequenz f wie in Tab.1. Dazu wird die berechnete und gemessene Magnetfeldstärke angegeben. Dann erhält man das gyromagnetische Verhältnis, indem man f/B_g bildet.

Aus der Tabelle ergibt sich ein Mittelwert für das gyromagnetische Verhältnis von Protonen von

$$\gamma = (42,66 \pm 0,05) \text{ MHz T}^{-1} \quad (4.15)$$

oder, durch Multiplikation mit 2π

$$\gamma = (26807 \pm 30) \cdot 10^4 \text{ Hz T}^{-1} \quad (4.16)$$

Damit weicht der gemessene Wert nur 0,2 % vom Literaturwert⁸⁾ ab.

$$\gamma = (26753 \pm 0,4) \cdot 10^4 \text{ Hz T}^{-1} \quad (4.17)$$

Aus dieser Messung können wir nun auch das magnetische Moment von Protonen in Einheiten des Kernmagnetons angeben. Einsetzen der Werte in Gleichung (2.5) liefert

$$\mu = (2,798 \pm 0,003) \cdot \mu_N \quad (4.18)$$

und für den dimensionslosen Anpassungsfaktor aus Gleichung (2.1)

$$g = (5,596 \pm 0,006) \quad (4.19)$$

4.5. Die Breite der Resonanz

Ziel der folgenden Betrachtungen soll es sein, zu beschreiben, welchen Einfluß verschiedene Größen auf die Breite der registrierten Resonanzkurven haben.

4.5.1. Die Linienbreite als Funktion der Wechselfeldamplitude B_1

Die bei einer Messung wie unter 4.1. erhaltene Resonanzkurve beschreibt Gleichung (2.44). Durch Einsetzen der ursprünglichen Größen nimmt sie die Form an:

$$\frac{M_z}{M} = \frac{\left(\frac{\Delta\omega}{\gamma B_1}\right)^2 + \cos\gamma B_1 t \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{\gamma B_1}\right)^2 + 1}}{\left(\frac{\Delta\omega}{\gamma B_1}\right)^2 + 1} \quad (4.20)$$

Dabei bedeutet t die Zeit, während der das Wechselfeld auf die Protonenspins einwirken kann, d.h. die Aufenthaltsdauer der Teilchen in der Spule.

Lassen wir während der Messung die Wechselfeldamplitude B_1 konstant, so gilt:

$$\gamma B_1 t = \text{const} \quad (4.21)$$

Nehmen wir weiter an, B_1 werde so eingestellt, daß gilt:

$$\gamma B_1 t = k\pi \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (4.22)$$

dann wird der Magnetisierungsvektor in der Resonanz um 180° gedreht. Die Resonanzkurve sieht dann im wesentlichen aus wie Fig. 24.

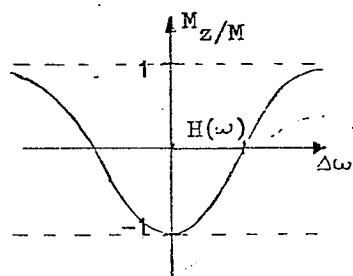


Fig. 24: Die Resonanzkurve nach Gleichung (4.20) unter Vernachlässigung der Nebenmaxima für ein festes k

Um die Größe $H(\omega)$, die halbe Linienbreite, berechnen zu können, setzen wir wieder $\frac{\Delta\omega}{\delta B_1} = u$. Für $H(\omega)$ muß dann gelten:

$$\frac{M_z}{M^2} = \frac{u^2 + \cos k \sqrt{u^2 + 1}}{u^2 + 1} = 0 \quad (4.23)$$

$$\text{oder } u^2 + \cos k \sqrt{u^2 + 1} = 0 \quad (4.24)$$

Für $k = 1$ ergibt sich die Lösung

$$u_0 = 0,7987 \quad (4.25)$$

$$\text{und } H(\omega) = u_0 \delta B_1 = \frac{u_0 \pi}{t} = \frac{u_0 \pi v}{l} \quad (4.26)$$

wobei v die Wassergeschwindigkeit im Schlauch und l die Länge der Spule ist. Geht man wieder über zur Frequenz, so wird

$$H(f) = \frac{H(\omega)}{2\pi} = 0,3993 \frac{v}{l} \quad (4.27)$$

In Kapitel 4.7. wird die Wassergeschwindigkeit gemessen.

Mit $v = 75 \text{ cm/s}$ und der langen Spule ($l = 5,2 \text{ cm}$)

$$\text{gilt: } H(f) = 6 \text{ Hz} \quad (4.28)$$

Die gesamte Halbwertsbreite beträgt dann 12 Hz.

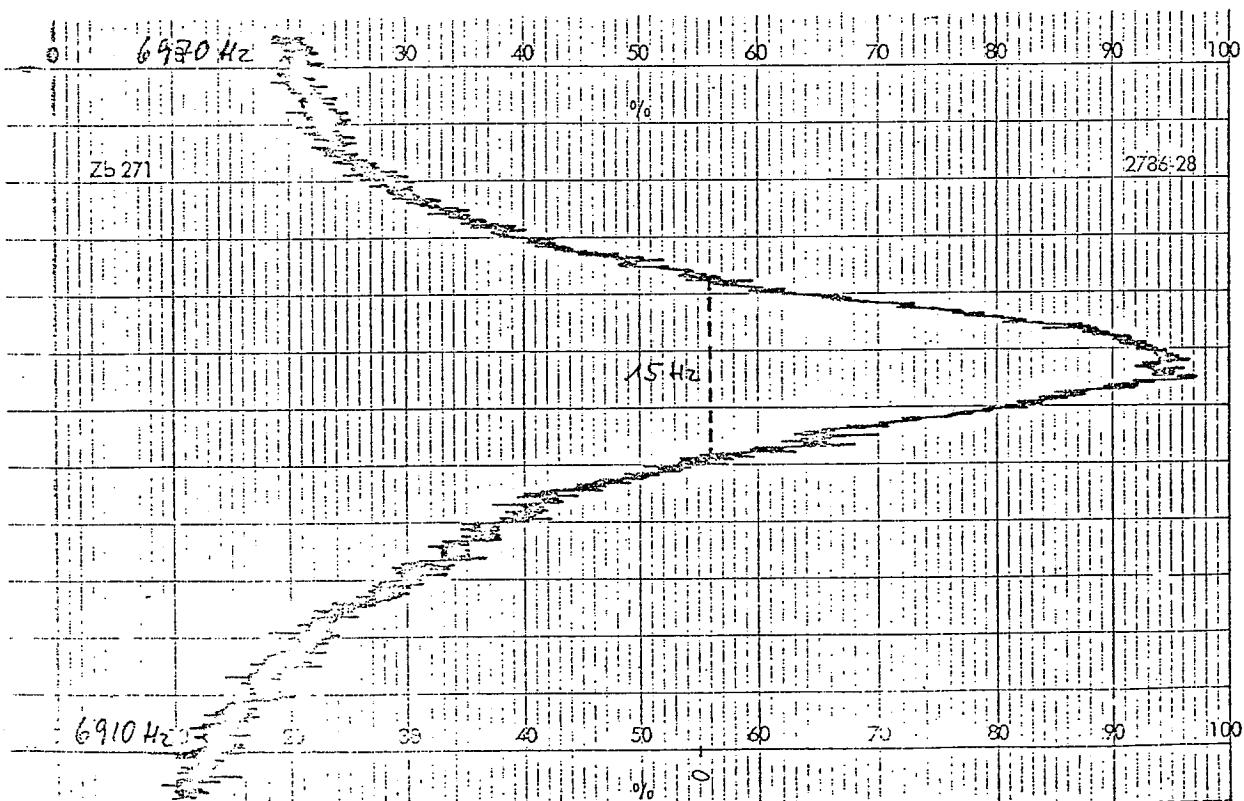


Fig.25: Resonanzkurve bei Drehung des Magnetisierungsvektors um π

Fig.25 zeigt eine Resonanzkurve, aufgenommen mit der langen Spule, bei der die Phasenbeziehung $\gamma B_1 t = \pi$ erfüllt war. Die gemessene Halbwertsbreite beträgt 15 Hz, stimmt also mindestens großenordnungsmäßig mit der erwarteten überein.

Dieselbe Rechnung für $k = 3$, also

$$\gamma B_1 t = 3\pi \quad (4.29)$$

liefert:

$$u^2 + \cos 3\pi \sqrt{u^2 + 1} = 0 \quad (4.30)$$

und die Lösung

$$u_0 = 0,5379 \quad (4.31)$$

Dann ist

$$H(\omega) = u_0 \frac{3\pi v}{1} \quad (4.32)$$

und, mit den gleichen Werten für v und l wie oben,

$$H(f) = 12 \text{ Hz} \quad (4.33)$$

Die theoretische Halbwertsbreite bei einer Drehung um 3π beträgt also 24 Hz.

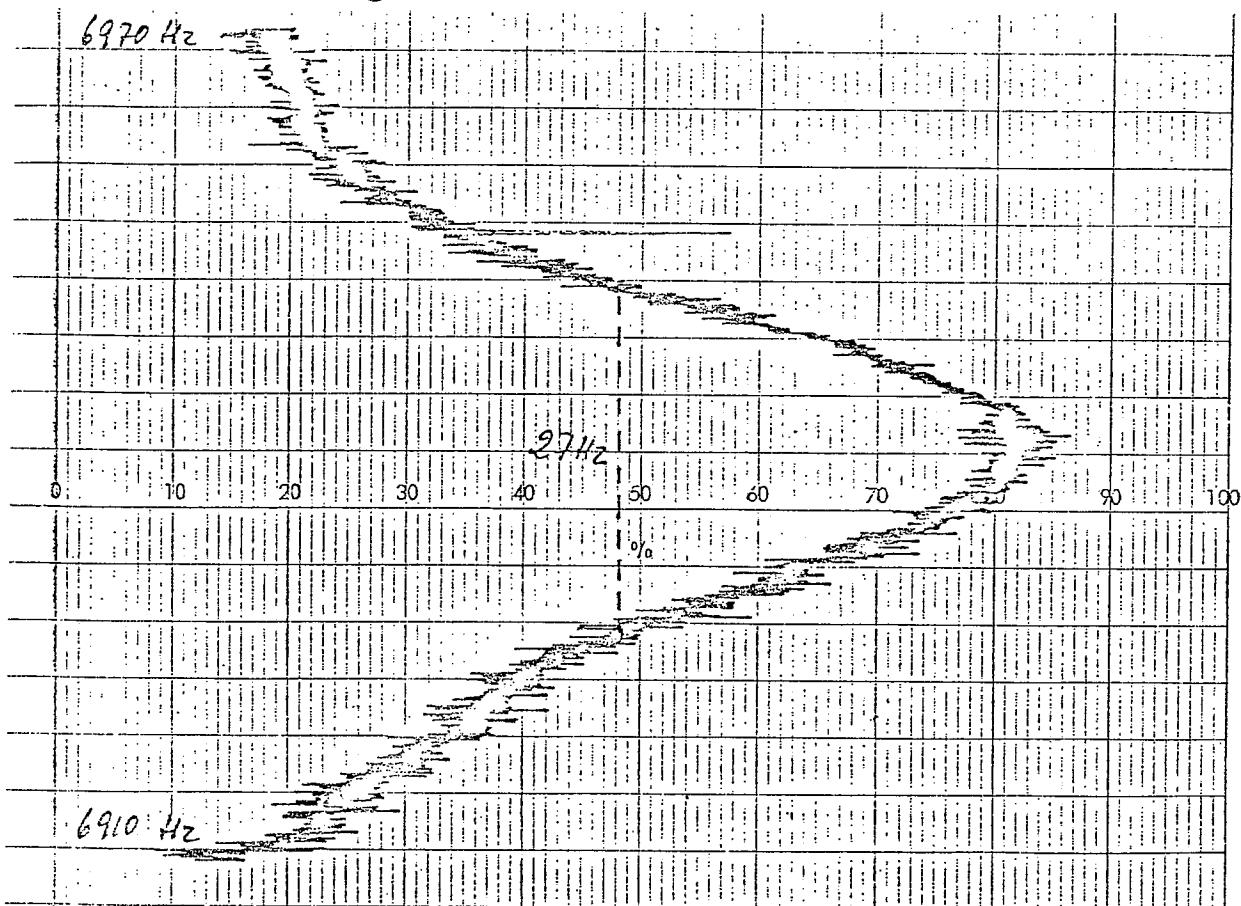


Fig.26:Resonanzkurve bei Drehung des Magnetisierungsvektors um 3π

Die aufgenommene Resonanzkurve bei dieser Phasenbedingung zeigt Fig.26. Dabei wurde eine Halbwertsbreite von 27 Hz gemessen. Sie liegt daher ebenfalls in der Größenordnung des theoretischen Wertes.

Es fällt jedoch auf, daß die gemessene Halbwertsbreite stets größer als die berechnete ist. Dies liegt daran, daß auch bei Einstrahlung der Resonanzfrequenz durch Inhomogenitäten der Wassergeschwindigkeit nicht alle Spins um genau 180° gedreht werden. Dadurch erreicht der Betrag der Polarisation nicht mehr den vollen Maximalwert, so daß, wie Fig.27 zeigt, eine zu große Halbwertsbreite gemessen wird.

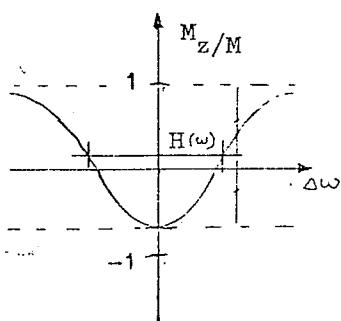


Fig.27: Der Betrag des Magnetisierungsvektors erreicht bei der Resonanzfrequenz nicht vollständig den Maximalwert. Dadurch mißt man die Halbwertsbreite nicht auf der Linie $M_z = 0$, sondern etwas darüber, so daß sie größer ausfällt, als theoretisch zu erwarten ist.

4.5.2. Die Linienbreite in Abhängigkeit der Spulenlänge

Aus der Gleichung (4.27) folgt ein weiterer Zusammenhang. Die Breite der Resonanz ist offenbar abhängig von der Länge l der Einstrahlspule. Um dies zu demonstrieren, wurden Resonanzen mit der langen und der kurzen Spule untersucht, wobei die Wechselfeldamplitude jeweils so eingestellt wird, daß die Beziehung $\delta B_1 t = \pi$ gilt.

Nach Gleichung (4.27) erwartet man

$$\frac{H(f_1)}{H(f_2)} = \frac{l_2}{l_1} \quad (4.34)$$

Aus den beiden Aufnahmen auf der nächsten Seite (Fig.28 und Fig.29) entnimmt man

Lange Spule: $2H(f_1) = 15$ Hz

Kurze Spule: $2H(f_2) = 24$ Hz

Damit ergibt sich:

$$\frac{H(f_1)}{H(f_2)} = \frac{15 \text{ Hz}}{24 \text{ Hz}} = 0,6 \approx 0,5 = \frac{l_2}{l_1} \quad (4.35)$$

Wenn auch die Übereinstimmung nicht besonders gut ist, so sieht man doch, daß mit wachsender Spulenlänge die Resonanz schärfer wird.

Diese Tatsache läßt sich auch folgendermaßen interpretieren. Je länger die Spule ist, umso länger ist die Aufenthaltszeit der Protonen in ihrem Innern. Für eine Messung an ihnen steht damit mehr Zeit zur Verfügung; entsprechend genauer wird sie ausfallen.

Eine längere Spule bewirkt aber wieder größere Inhomogenitäten des äußeren Magnetfeldes im Spulenbereich, so daß bei ihrer Dimensionierung ein Kompromiß geschlossen werden muß.

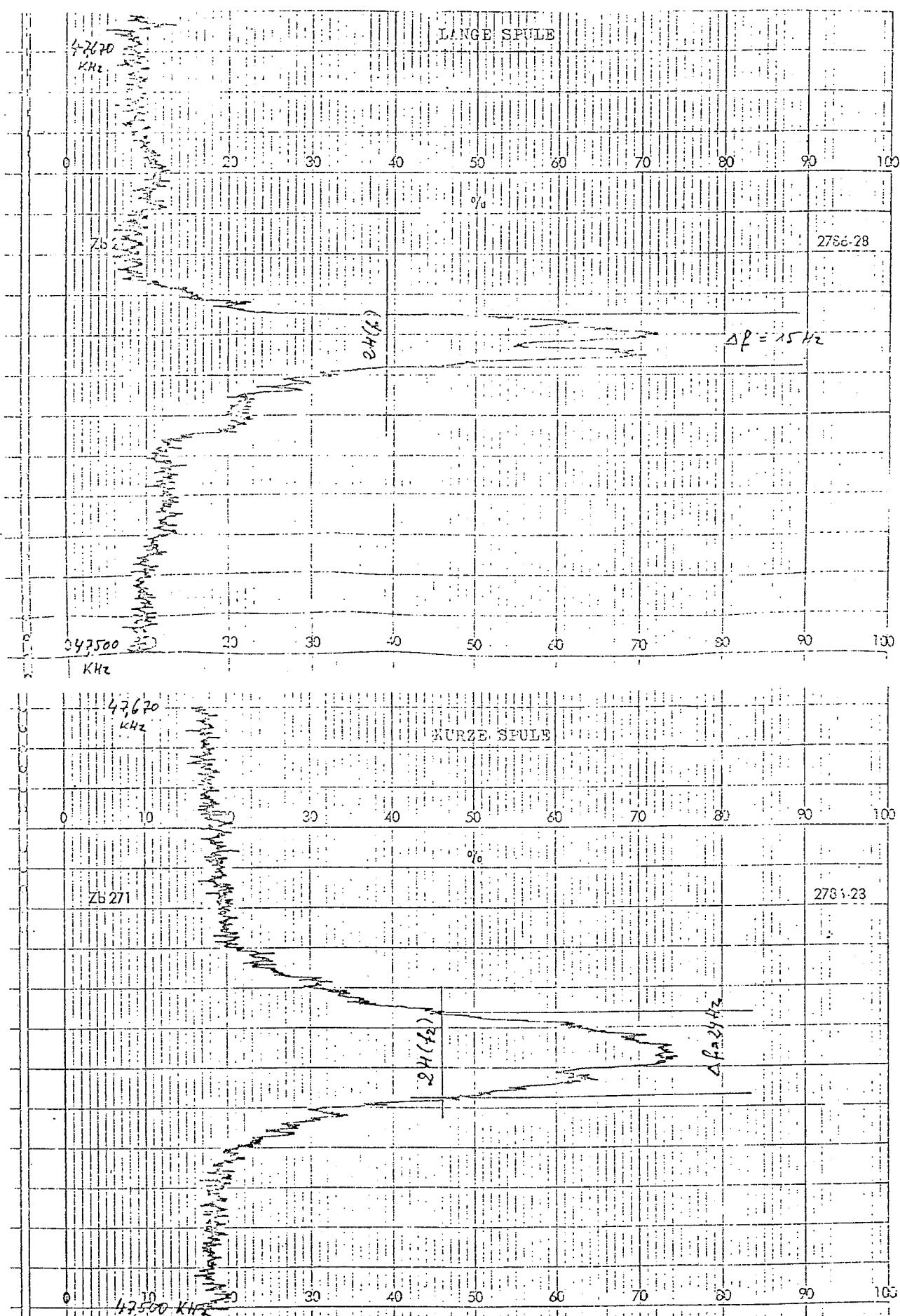


Fig.28 und Fig.29: Reonanzkurve mit langer
bzw. kurzer Spule bei gleicher Phasen-
bedingung $\int B_1 t = \pi$

4.5.3. Die Unabhängigkeit der Linienbreite von B_0

Die in Kapitel 2.3. hergeleitete Formel (2.44) für den Magnetisierungsvektor zeigt, daß die Resonanzbreite unabhängig von der Größe des äußeren Magnetfeldes sein sollte. Dieser theoretische Befund wurde in einer Meßreihe bestätigt.

Dazu wurden die Resonanzkurven bei verschiedenen Stromstärken zwischen 60 mA und 500 mA im Helmholtzspulenpaar und konstanter Wechselfeldamplitude aufgenommen. Die Ergebnisse zeigen Fig. 30 auf den folgenden Seiten. Die gemessenen Resonanzbreiten betragen fast durchweg 18 Hz. Die Abweichungen davon liegen innerhalb der Meßgenauigkeit.

Da $H(f)$ nur von der Wechselfeldamplitude B_1 abhängt, und andererseits nach (2.14)

$$2\pi f = \gamma B_0 \quad (4.36)$$

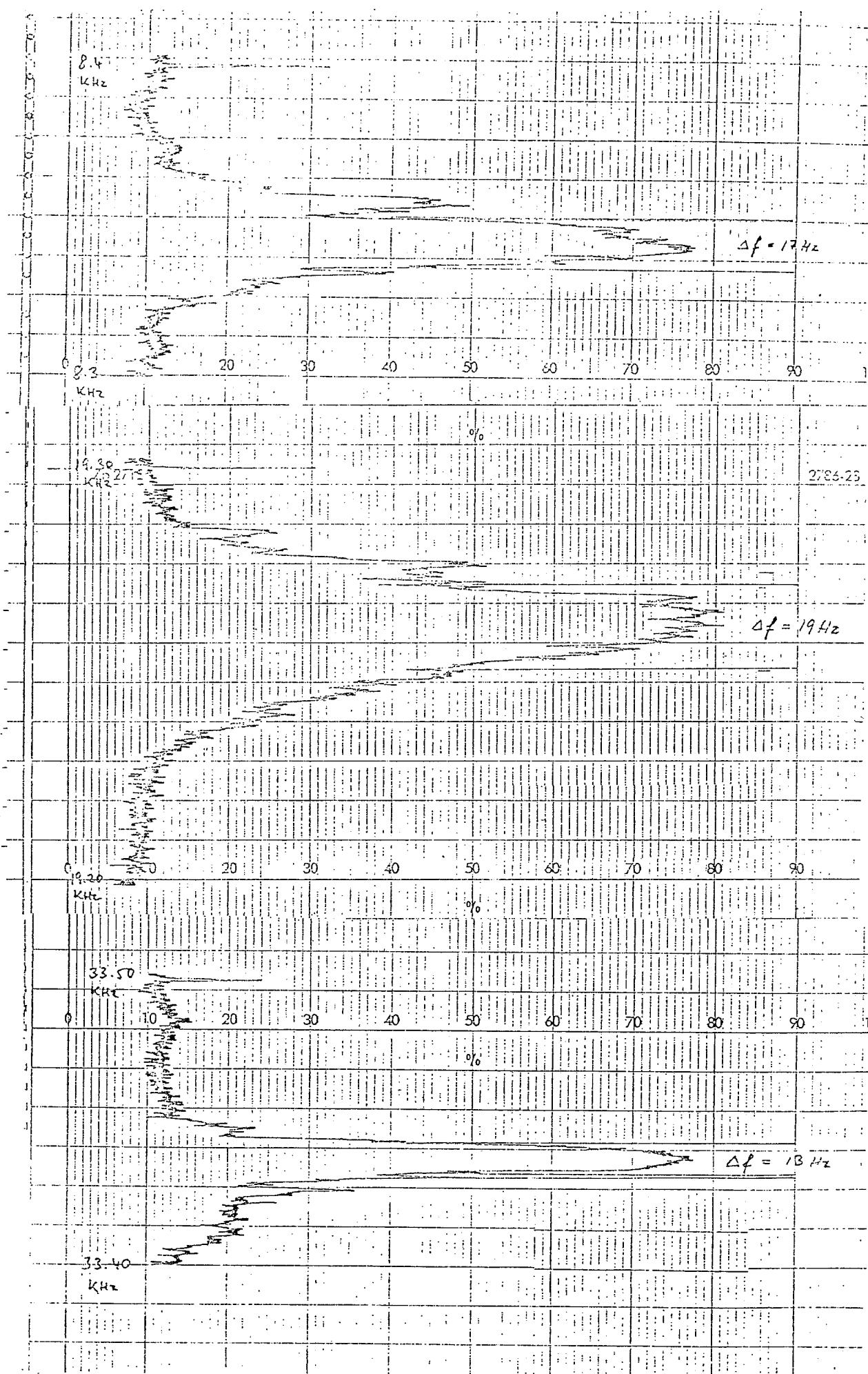
ist, gilt die Beziehung für die Halbwertsbreite

$$\frac{H(\omega)}{\omega} = \frac{H(f)}{f} \sim \frac{B_1}{B_0} \quad (4.37)$$

Darüber hinaus lässt sich zeigen: definiert man als Halbwertsbreite $H(\omega)$ denjenigen Frequenzabstand von der Resonanzfrequenz, bei dem die Amplitude des Magnetisierungsvektors auf den $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -ten Teil des Maximalwertes abgenommen hat, dann ist⁹⁾

$$\frac{H(\omega)}{\omega} = \frac{B_1}{B_0} \quad (4.38)$$

Die Schärfe der Resonanz wächst also mit B_0 .



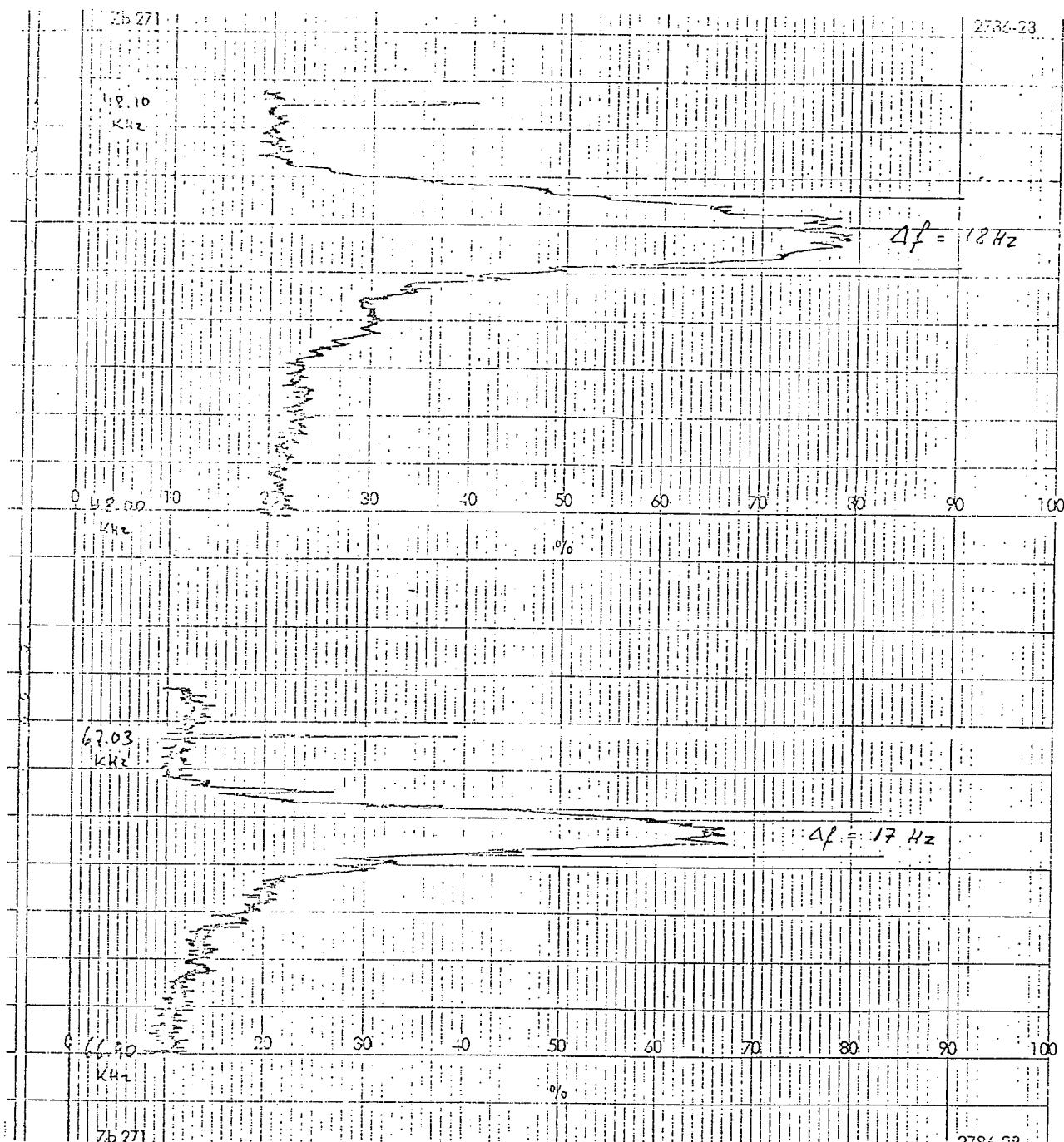


Fig.3o:(mit vorhergehender Seite)
Resonanzkurven bei verschiedenen
Stromstärken im Helmholtzspulenpaar

4.6. Drehung des Magnetisierungsvektors

Für den Fall, daß die Frequenz des Wechselfeldes genau der Resonanzfrequenz entspricht, d.h.

$$\omega = 0 \quad (4.39)$$

vereinfacht sich Gleichung (4.20) zu

$$\frac{M}{M_0} z = \cos \gamma B_1 t \quad (4.40)$$

Die Größe $\gamma B_1 t$ lässt sich dabei als Drehwinkel φ des Magnetisierungsvektors oder, gleichbedeutend damit, des Spinvektors interpretieren, also

$$\varphi = \gamma B_1 t \quad (4.41)$$

wobei t die Aufenthaltsdauer der Spins im konstanten Wechselfeld der Amplitude B_1 ist. Nimmt man an, daß die Geschwindigkeit aller Protonen die gleiche ist, so gilt

$$t = \frac{l}{v} \quad (4.42)$$

mit l = Länge der Spule und v = Strömungsgeschwindigkeit des Wassers. Dann ist

$$\varphi = \gamma B_1 \frac{l}{v} \quad (4.43)$$

Alle Überlegungen bisher galten für ein rotierendes Wechselfeld B_1 . Da dies schaltungstechnisch einige Schwierigkeiten macht, strahlt man in der Praxis ein lineares Wechselfeld B_\sim ein, indem man an die Spule eine sinusförmige Wechselspannung legt. Dieses Feld lässt sich in zwei gegenläufig rotierende Felder zerlegen, wie dies Fig. 31 veranschaulicht. (Seite 48)¹⁰⁾

Offensichtlich ist der Betrag des zirkular polarisierten Feldes halb so groß wie der Betrag des linearen Wechselfeldes

$$B_1 = \frac{1}{2} B_\sim \quad (4.44)$$

Der Anteil des mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega$ rotierenden Feldes liegt sehr weit (2ω) von der Resonanzstelle entfernt, so daß die falsch umlaufende

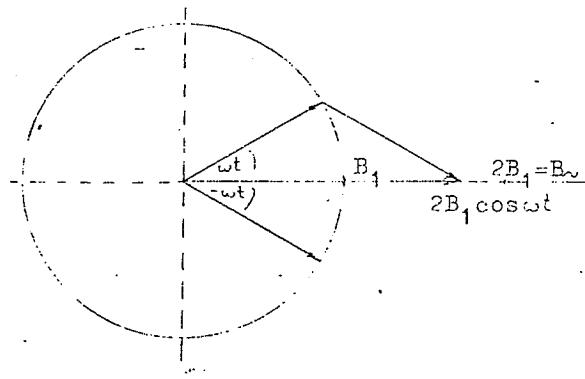


Fig.31: Zerlegung eines linearen Wechselfeldes der Amplitude $B = 2B_1$ in zwei gegenläufig rotierende Felder der Amplitude B_1

Komponente die Experimente nicht stört. Dennach ist

$$\varphi = \frac{1}{2} \delta B \frac{1}{v} \quad (4.45)$$

Da wir die Wechselfeldamplitude nicht direkt messen können, sondern nur die Spannung an der Spule, ist es notwendig, die Beziehung zwischen beiden Größen herzustellen. Die Meßspule besitzt 125 Windungen, eine Länge von $l = 2,5$ cm und einen Radius von $r = 7,5$ mm. Bei einem Wechselfeld von 1,1 kHz ergibt dies einen induktiven Widerstand von

$$R_i = \omega L = \omega \mu_0 \mu \frac{\frac{N^2}{l}}{r^2 \pi} = 1 \Omega \quad (4.46)$$

Zusammen mit dem Vorwiderstand von $R = 47 \Omega$ wird der Gesamtwiderstand

$$R_g = \sqrt{R^2 + R_i^2} = 47 \Omega \quad (4.47)$$

Dann gilt für die Amplitude des Wechselfeldes:

$$B_\sim = \mu_0 \mu \frac{N \cdot I}{\sqrt{4r^2+l^2}} = \mu_0 \mu \frac{N \cdot A}{\sqrt{4r^2+l^2} \cdot R_g} \cdot U \quad (4.48)$$

$$B_\sim = 1,13 \cdot 10^{-4} \frac{T}{V} \cdot U \quad (4.49)$$

Die Messung der Wassergeschwindigkeit wird in Kapitel 4.7. beschrieben. Sie beträgt für diesen Versuch $v = 1,2$ m/s. Einsetzen aller Werte in Gleichung (4.45) ergibt:

$$\varphi = 314 \frac{\text{rad}}{v} \cdot U \quad (4.50)$$

Im Experiment wurde bei fest eingestellter Resonanzfrequenz von 1,089 kHz das Signal in Abhängigkeit

der Wechselfeldamplitude aufgenommen. Fig. 32a und 32b (Seite 51 und 52) zeigt das Ergebnis. Dabei wurde in kurzen Abständen die Spannung U_{ss} von Spitze zu Spitze am System Vorwiderstand und Spule gemessen.

Für eine Drehung um 4π erwartet man nach (4.50)

$$U = \frac{4\pi}{314} \frac{V}{rad} = 40 \text{ mV} \quad (4.51)$$

und damit eine Spannung von Spitze zu Spitze

$$U_{ss} = 2 U = 80 \text{ mV} \quad (4.52)$$

was recht gut mit dem gemessenen Wert von

$$U_{ss,\text{gem}} = 82 \text{ mV} \quad (4.53)$$

übereinstimmt.

Die Form des Signals ist keine reine Kosinuskurve, wie man nach (4.40) erwarten könnte, sondern mit wachsender Wechselfeldamplitude gedämpft. Dies wird hauptsächlich durch die Inhomogenität der Wasser- geschwindigkeit im Schlauch verursacht, die nicht die Iodalbedingung gleicher Geschwindigkeit für alle Teilchen erfüllt. Dadurch ist die Aufenthaltsdauer der Protonen in der Spule nicht einheitlich.

Da wir mit dem Analysator die Polarisation in Richtung der z-Achse messen, ist

$$M_z = M \overline{\cos \varphi} \quad (4.54)$$

Nach Gleichung (4.45) gilt für konstante Wechselfeld- amplitude

$$v_0 = \frac{\text{const}}{\varphi_0} \quad (4.55)$$

Durch Differentiation folgt für $\Delta v \ll v_0$

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{\Delta \varphi}{\varphi_0} \quad \text{oder} \quad \Delta \varphi = \varphi_0 \frac{\Delta v}{v_0} \quad (4.56)$$

Nimmt man an, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Protonen einer Rechteckverteilung entspricht, wobei Δv den maximalen Geschwindigkeitsunterschied zum Mittelwert v_0 darstellt, so gilt:

$$\cos \varphi_0 = \frac{\int_{\varphi_0 - \Delta\varphi}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \cos \varphi d\varphi}{\int_{\varphi_0 - \Delta\varphi}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} d\varphi} = \frac{2 \cdot \cos \varphi_0 \sin \Delta\varphi}{2 \Delta\varphi} \quad (4.57)$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cos \varphi_0 \quad (4.58)$$

Mit Gleichung (4.56) ergibt sich

$$\overline{\cos \varphi_0} = \frac{\sin(\varphi_0 \frac{\Delta v}{v_0})}{\varphi_0 \frac{\Delta v}{v_0}} \cdot \cos \varphi_0 \quad (4.59)$$

Der Dämpfungsfaktor der Kurve ist also

$$D = \frac{\sin(\varphi_0 \frac{\Delta v}{v_0})}{\varphi_0 \frac{\Delta v}{v_0}} \quad (4.60)$$

Den Verlauf dieser Funktion für $\frac{\Delta v}{v_0} = 20\%$ gibt die gestrichelte Linie in Fig. 32a an. Eine Übereinstimmung mit der beobachteten Dämpfung der Kurve ist zumindest in erster Näherung festzustellen.

Fig. 32b zeigt dieselbe Messung mit einer anderen Schreibergeschwindigkeit. Dabei kann ein Umklappen der Spins bis zu zwölf mal beobachtet werden.

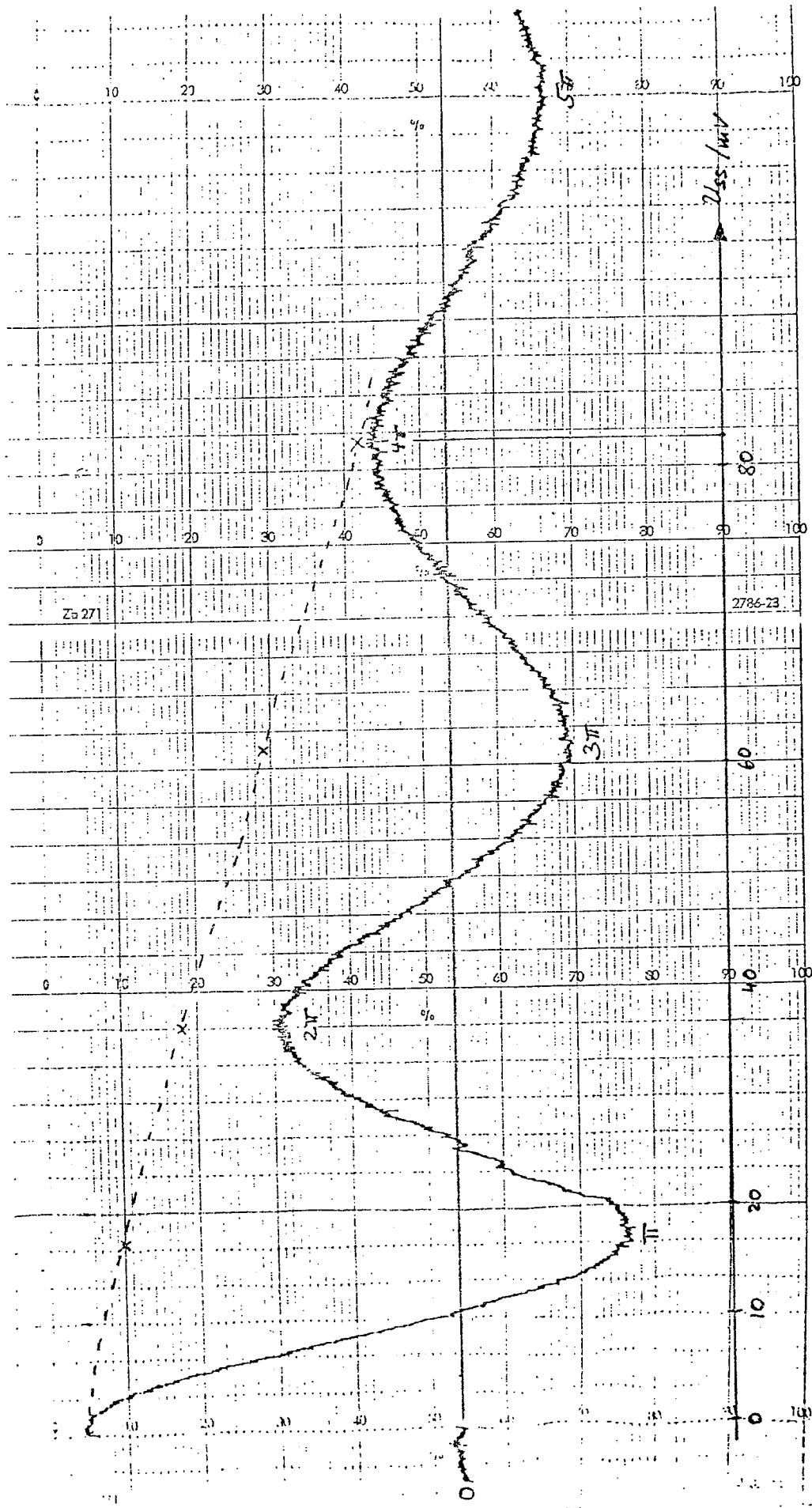


Fig. 32a: Die Polarisation in Abhängigkeit
der Spannung an der Spule bei Einstrahlung
der Resonanzfrequenz

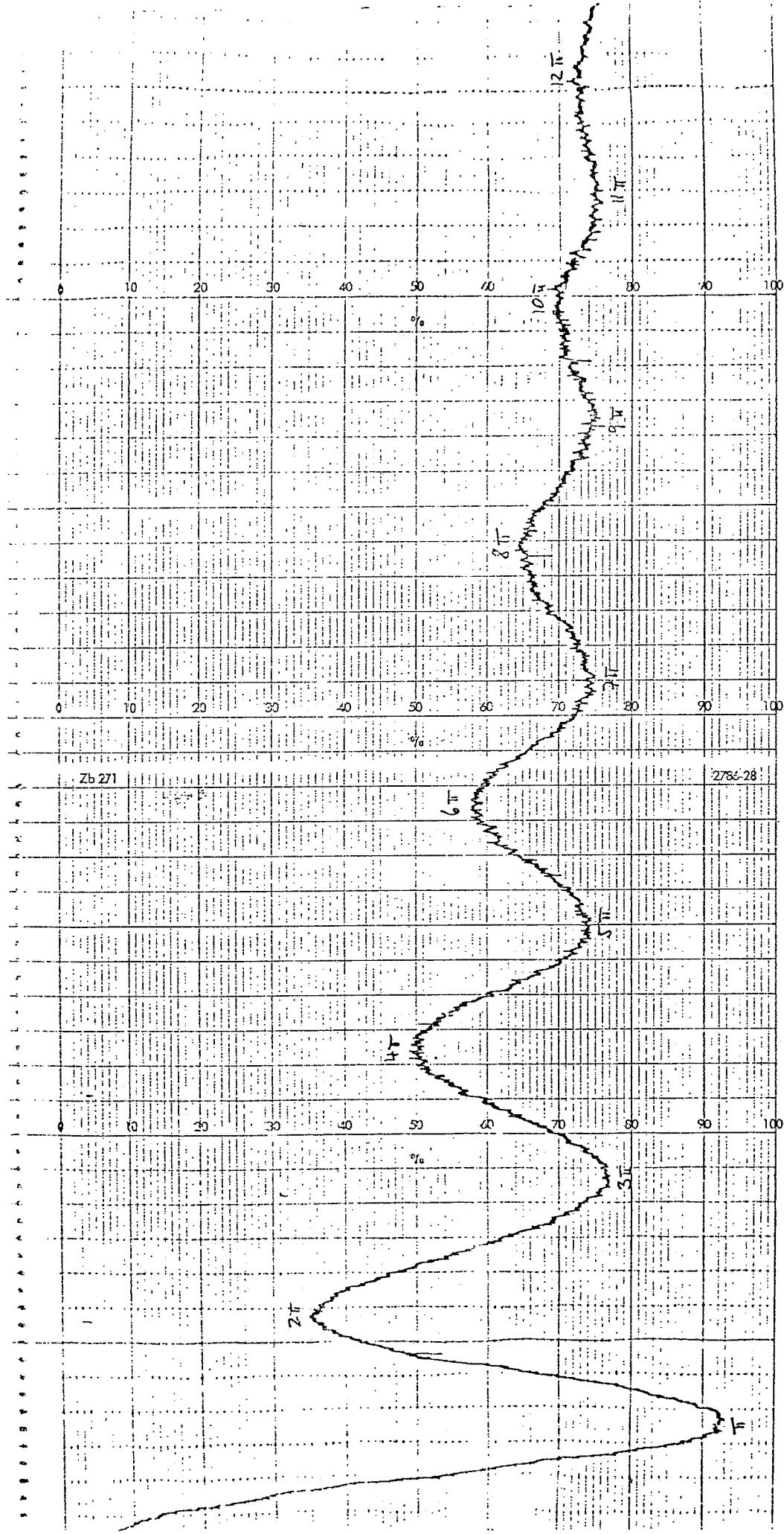


Fig. 32b: Aufnahme wie 32a, jedoch mit
geringerer Schreibergeschwindigkeit.

4.7. Die Wassergeschwindigkeit

Da in unserer Anordnung Polarisator und Analysator räumlich getrennt sind, ist es wichtig, daß die Protonen innerhalb einer möglichst kurzen Zeit die Strecke zwischen beiden Magneten zurücklegen, da auf ihrem Weg die Besetzungszahlendifferenz exponentiell abnimmt. Sie sollte mindestens in der Größenordnung der Relaxationszeit liegen.

In dem Versuch zur Messung der Wassergeschwindigkeit wurde zunächst die Pumpe abgestellt, so daß kein Resonanzsignal mehr gemessen werden kann. Wird die Pumpe eingeschaltet, so registriert der Detektor für einen kurzen Augenblick ein Signal. Es stammt von den Protonen, die sich bei ausgeschalteter Pumpe im Analysermagneten befanden, und nach dem Einschalten in dessen Spulenbereich kamen (siehe auch Kap. 4.8.) Dies ist als schmaler Ausschlag auf dem Registrierstreifen bemerkbar, der damit als Zeitnullpunkt dienten kann. Danach fällt das Signal wieder ab, denn diese Protonen befanden sich nur im sehr schwachen Erd- und Streufeld. Nach einiger Zeit setzt das volle Resonanzsignal der Protonen aus dem Elektromagneten ein.

Die Aufnahmen für zwei verschiedene Wassergeschwindigkeiten zeigt Fig. 33. Der Papiervorschub des Schreibers war dabei auf 600 mm/min eingestellt. Ein cm der Aufnahme entspricht daher einer Sekunde. Damit ergibt sich, daß die Protonen aus dem Polarisationsmagneten bei der ersten Aufnahme etwa 4,5 s, bei der zweiten etwa 2,8 s für ihren Weg zum Analysator benötigen.

Aus

$$P(t) = P(0) \exp(-\frac{t}{T_1}) \quad (4.61)$$

ergibt sich mit $T_1 = 3,0$ s (siehe Kapitel 4.8.)

$$P(4,5) = 0,22 P(0)$$

$$P(2,8) = 0,39 P(0) \quad (4.62)$$

Der Polarisationsgrad des Wassers ist damit auf etwa 22 % bzw. 39 % der ursprünglichen Polarisierung abgefallen.

Aus dieser Messung läßt sich auch die jeweilige Wassergeschwindigkeit berechnen. Die Länge des Schlauchs vom Polarisor zum Analysator beträgt

$$l = (337 \pm 10) \text{ cm} \quad (4.63)$$

Damit ergeben sich die mittleren Geschwindigkeiten zu

$$v_1 = (75 \pm 4,5) \text{ cm/s}$$

$$v_2 = (120 \pm 4,5) \text{ cm/s} \quad (4.64)$$

Unter der Annahme, daß die Geschwindigkeitsverteilung einer Normalverteilung entspricht, ergibt sich aus dem Anstieg des Polarisationssignals eine Abschätzung für deren Breite. Danach ist

$$\frac{\Delta v}{v_1} = 15 \% \quad (4.65)$$

$$\frac{\Delta v}{v_2} = 10 \% \quad (4.65)$$

Damit sich die Geschwindigkeitsunterschiede der Wassermoleküle nicht zu stark bemerkbar machen, ist es wichtig, daß die Strömung im Schlauch möglichst turbulent wird. Nur dann vermischen sich die Moleküle so miteinander, daß sich kein parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil wie bei einer laminaren Strömung ausbildet.

Ein Maß für die Turbulenz einer Strömung ist die Reynold'sche Zahl R , die nach folgender Formel berechnet wird:

$$R = \frac{\rho \cdot r \cdot v}{\eta} \quad (4.66)$$

Dabei ist ρ die Dichte der jeweiligen Flüssigkeit, r der innere Schlauchradius, v die Strömungsgeschwindigkeit und η die Zähigkeitskonstante. Mit $\rho = 998,2 \text{ kg/m}^3$, $r = 2,25 \text{ mm}$ und $\eta = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ Pas}$ ergibt sich:

$$v_1: R = 1681$$

$$v_2: R = 2690 \quad (4.67)$$

Der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung erfolgt bei $R > 1200$, so daß wir bei uns, vor allem für v_2 , von einer einigermaßen turbulenten Strömung sprechen können.

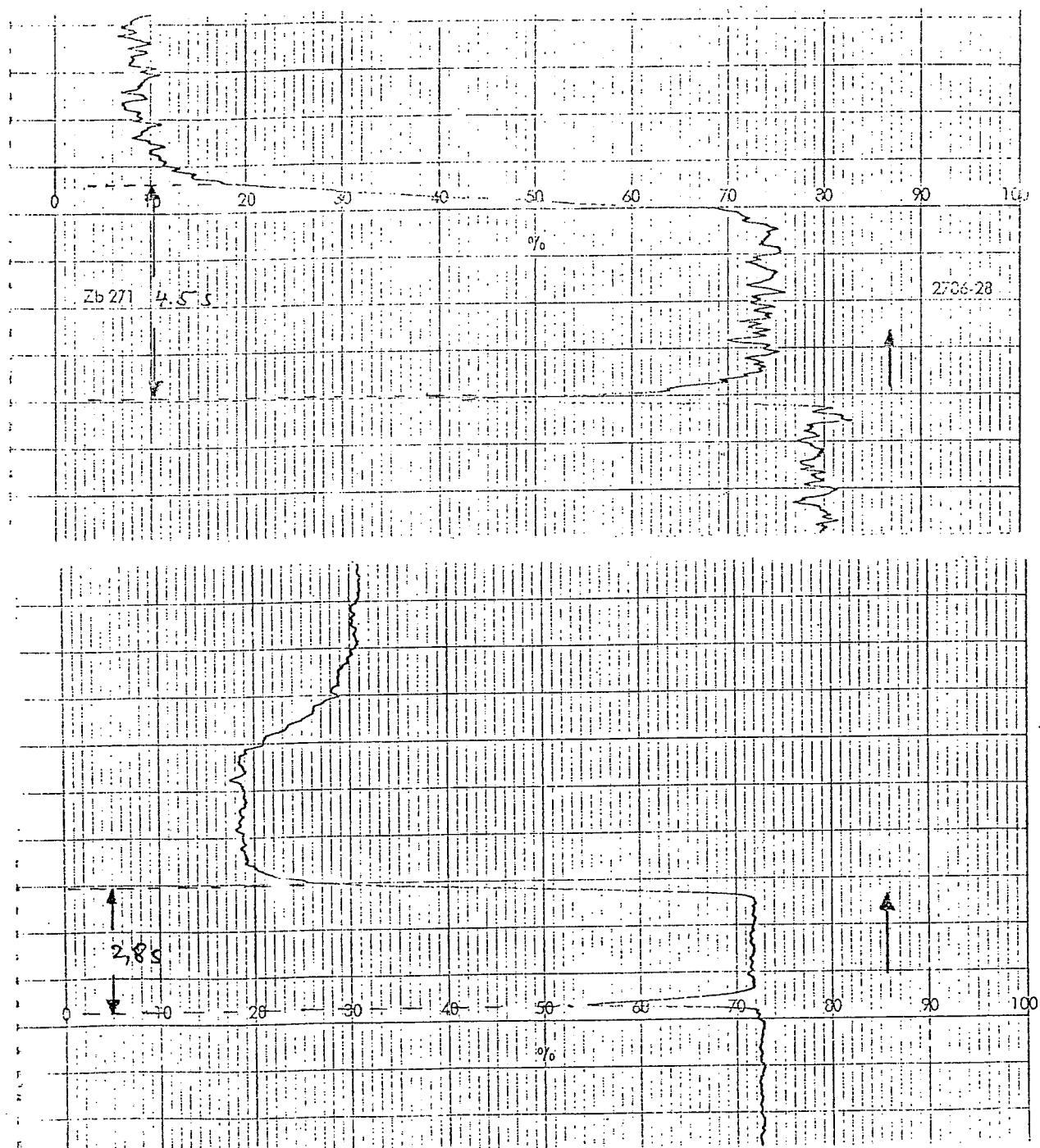


Fig.33: Messung der Zeit, die die Protonen für den Weg zwischen Polarisator und Analysator benötigen. Ohne Verkleinerung gilt $1\text{ cm} \equiv 1\text{ s}$

4.8. Die Relaxationszeit

Die Apparatur erlaubt es uns, die in den BLOCH-Gleichungen auftretende Relaxationszeit T_1 , zu bestimmen. Dazu wurde ein Versuch durchgeführt, dessen Aufbau Fig.34 zeigt.

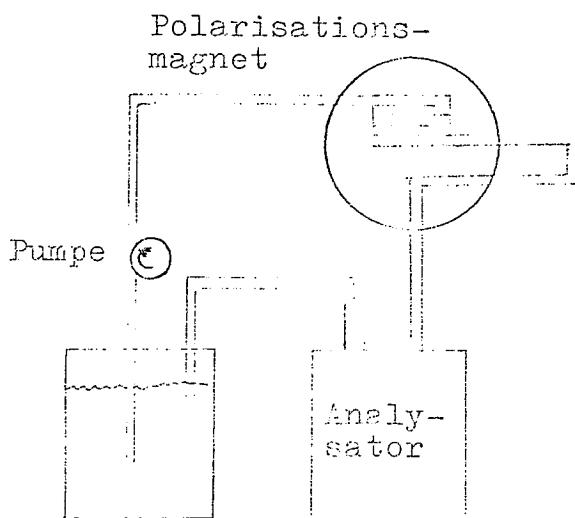


Fig.34: Versuchsaufbau
zur Messung der
Relaxationszeit

Dabei wird der Schlauch auf seinem Weg zwischen Polarisationsmagneten und Analysator noch einmal durch den Elektromagneten geführt. Zunächst bleibt die Pumpe abgeschaltet, so daß die Protonen, die sich im Magneten befinden, maximal polarisiert werden.

Schaltet man nun die Pumpe ein, so nimmt die Polarisation auf dem Weg zum Analysator exponentiell ab. Da die Protonen aus dem Labyrinth und die aus dem kleinen Schlauchstück, das zusätzlich in den Magneten gelegt wurde, verschieden lange brauchen, bis sie zum Analysator gelangen, erlaubt die Messung der Polarisation dieser Protonen die Berechnung der Relaxationszeit.

Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß die Protonen aus dem Labyrinth auf ihrem Weg zum Analysator noch einmal durch den Magneten laufen, und daher erneut polarisiert werden. Um diesen Fehler auszuschalten, wurde, nachdem die Protonen aus dem Labyrinth im Analysator ankamen, und man daher die Zeit für ihren Weg vom Magneten kennt, das Schlauchstück aus dem

Magneten entfernt, so daß direkt die Polarisation der Protonen aus dem Labyrinth gemessen wird. Deren Aufenthaltsdauer darin ist so lang, daß praktisch die maximale Polarisation auch bei laufender Pumpe erreicht wird. Das entstehende Oszillogramm zeigt Fig.35.

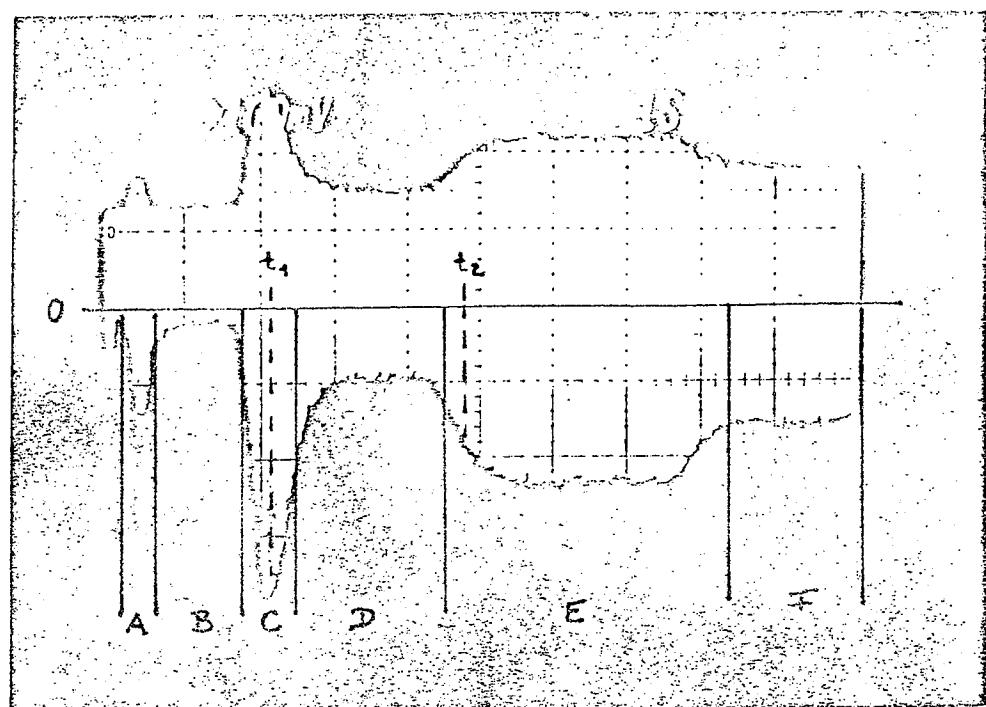


Fig.35: Aufnahme zur Messung der Relaxationszeit. Erklärung der einzelnen Bereiche siehe Text

Vor dieser Aufnahme wurde das Signal so eingestellt, daß bei ruhender Pumpe (Polarisation = 0) die Signalkante auf der mit 0 bezeichneten Linie war.

Vor dem Bereich A in Fig.35 sieht man eine kleine Störung. Sie wird verursacht durch das Einschalten der Pumpe und dient als Triggersignal für das Einsetzen des Oszillographen.

Der Bereich A zeigt einen ersten Ausschlag, der von den Teilchen stammt, die sich im Analysiermagneten befanden und durch das Einschalten der Pumpe in den Bereich der Spule kamen.

Danach (B) fällt die Polarisation zurück auf einen sehr kleinen Wert, der durch die Teilchen verursacht wird, die sich zunächst zwischen Elektromagnet und Analysator befanden, und beim Eintritt in den Analysatormagneten leicht polarisiert wurden.

Das kräftige Signal im Bereich C röhrt von den Protonen her, die sich vor dem Einschalten in der Schleife im Elektromagneten befanden, und daher noch sehr stark polarisiert sind.

Der Bereich D zeigt die Magnetisierung jener Teilchen an, die sich zwischen dem Labyrinth und der Schleife befanden, und auf ihrem Weg zum Analysator zumindest kurzzeitig im Elektromagneten polarisiert wurden.

Der Abschnitt E stammt von den Protonen, die den Elektromagneten zweimal, und F schließlich von jenen, die nur das Labyrinth durchliefen.

Bezeichnet man die Zeit vom Einschalten der Pumpe bis zum Eintreffen der Teilchen aus der Schleife mit t_1 und jener aus dem Labyrinth mit t_2 , so ergibt sich aus Fig.35:

$$t_2 - t_1 = (2,8 \pm 0,4) \text{ s} \quad (4.68)$$

Die Tiefe des Signals ist direkt proportional zur Polarisation der Protonen, wenn sie im Analysator ankommen. Daher lässt sich das Verhältnis der Magnetisierung der Protonen aus dem Schlauchstück und denen aus dem Labyrinth bestimmen. Es ergibt sich:

$$\frac{M_z(t_1)}{M_z(t_2)} = \frac{3,8 \pm 0,1}{1,5 \pm 0,1} \quad (4.69)$$

Da sich die Teilchen aus dem Schlauchstück und dem Labyrinth im gleichen Magnetfeld befanden, war deren Polarisation zum Zeitpunkt $t = 0$ ebenfalls gleich.

Daher gilt

$$\frac{M_z(t_1)}{M_z(t_2)} = \frac{M_z(0)}{M_z(0)} \frac{\exp(-t_1/T_1)}{\exp(-t_2/T_1)} = \frac{\exp(-t_1/T_1)}{\exp(-t_2/T_1)} \quad (4.70)$$

Durch Umformung ergibt sich

$$T_1 = \frac{t_2 - t_1}{\ln \frac{M_z(t_1)}{M_z(t_2)}} \quad (4.71)$$

Einsetzen der gemessenen Werte liefert

$$T_1 = \frac{(2,8 \pm 0,8) \text{ s}}{\ln \frac{2,8 \pm 0,1}{1,5 \pm 0,1}} = (3,0 \pm 0,9) \text{ s} \quad (4.72)$$

Dies stimmt recht gut mit dem Literaturwert ¹¹⁾ von

$$T_1 = (3,6 \pm 0,4) \text{ s} \quad (4.73)$$

überein, vor allem, wenn man bedenkt, daß schon sehr kleine Verunreinigungen die Relaxationszeit erheblich herabsetzen können.

Literaturangaben

- 1) Lösche, Kerninduktion, S.359
- 2) Huber, Einführung in d. Physik, Kap. 3.4.4.4.
- 3) Lösche, Kerninduktion, Kap. 2.1.1.
- 4) Lösche, Kerninduktion, S.37 Abb. 2.8
- 5) Wilking, Z.f.Ph., 157) J. 59-60, S.397 Abb. 5
- 6) Gerthsen, Physik, Kap. 11.2.6.
- 7) Lösche, Kerninduktion, S.190
- 8) Lösche, Kerninduktion, S.356
- 9) Lösche, Kerninduktion, S.23
- 10) Lösche, Kerninduktion, S.29 Abb. 2.5
- 11) Lösche, Kerninduktion, S.329

Erklärung

Ich versichere, die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen benutzt zu haben.

Würzburg, im Februar 1980

()

()

Herrn Prof. Dr. Langhoff gilt mein besonderer Dank für die Themenstellung und Betreuung während der Arbeit. Weiterhin möchte ich mich bei Herrn Endres für die Beratung in elektronischen Fragen sowie bei den Angehörigen der Werkstätten bedanken, die den Bau der Helmholtzspulen und des Sample & Hold Verstärkers übernahmen.