

Quanten-Hall-Effekt

Daniel Friedrich & Ulrich Müller

Mithilfe einer AlGaAs/GaAs Heterostruktur wurde der Quanten-Hall-Effekt nachgewiesen. Die Klitzing-Konstante wurde zu $24.87\text{ k}\Omega$ bestimmt und Hall-Plateaus bis zum Füllfaktor 14 beobachtet. Mit verschiedenen Methoden wurde die Ladungsträgerkonzentration im 2DEG untersucht, die sich mit $3.56 \times 10^{15} \text{ 1/c}^2\text{m}$ genauso wie die Fermi-Energie mit 12.7 meV als weitgehendst temperaturunabhängig herausstellte. Bei niedrigen Temperaturen wurde die Zeeman-Aufspaltung beobachtet und daraus den Landé-Faktor zu -11.9 bestimmt.

Betreuer: Christoph Brüne

Versuchsdurchführung am 12. September 2013

Protokollabgabe am 19. September 2013

Zweitabgabe am 8. Oktober 2013

1 Einleitung

Über hundert Jahre nach der Entdeckung des Hall-Effekts gelang es Klaus von Klitzing im Jahr 1980 die bei einem Hall-Experiment aufgetretenen Plateaus im Hall-Widerstand mit Hilfe der Plankkonstante und der Elementarladung zu deuten. Die Deutung durch die Plankkonstante machte deutlich, dass es sich bei dem Effekt um einen makroskopischen Quanteneffekt handelt. Die Bildung von Plateaus im Hall-Widerstand bei wachsendem Magnetfeld wird seit dem *Quanten-Hall-Effekt* (QHE) genannt. Die Entdeckung von Klaus von Klitzing eröffnete der Wissenschaft ein reiches Feld an interessanten Forschungsthemen, unter anderem in der Festkörperphysik und der Metrologie. Während heutzutage der QHE bereits zur Normierung des elektrischen Widerstands verwendet wird, könnte er in Zukunft dazu verwendet werden das Kilogramm und des Ampère neu zu definieren [4].

Diese entstehende Spannung wird Hall-Spannung genannt. Der Hall-Widerstand ist nicht als klassischer Widerstand zu verstehen, sondern berechnet sich aus dem Verhältnis der Hall-Spannung und der verwendeten Stromstärke zu

$$R_{\text{Hall}} = \frac{U_y}{I} = \frac{B}{N_S e}. \quad (2.1)$$

Mit der Ladungsträgerdichte N_S im Material. Der Hall-Widerstand ist damit proportional zum angelegten Magnetfeld.

Verwendet man ein Material mit hohen Beweglichkeiten der Elektronen, kühlt die Probe auf tiefe Temperaturen und erhöht die Magnetfeldstärke, so findet man bei charakteristischen Werten des Hall-Widerstands Plateaus die nach aktuellem Forschungsstand von den Materialeigenschaften, der Magnetfeldstärke und der verwendeten Temperatur unabhängig zu sein scheinen. Diese Plateaus treten in regelmäßigen Abständen auf und können durch den Zusammenhang

$$R_{\text{Hallplateau}} = \frac{1}{n} \frac{h}{e^2} \quad (2.2)$$

mit den ganzen Zahlen $n = 1, 2, \dots$ beschrieben werden. Das höchste messbare Plateau befindet sich demnach bei

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25\,812.807\,\Omega \quad (2.3)$$

und wird als Klitzing-Konstante R_K für die Definition des Ohm verwendet.

Vergleicht man den Hall-Widerstand des klassischen Hall-Effekts 2.1 mit dem des Quanten-Hall-Effekts 2.2,

2 Theorie

Bewegen sich freie Elektronen in einem Magnetfeld, so wirkt auf sie die Lorentzkraft, die sie senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung ablenkt. Sind die Elektronen hingegen auf das Volumen eines Leiters limitiert, so baut sich, im stationären Fall bei kleinen B -Feldern, ein elektrisches Feld senkrecht zum Magnetfeld und der netto Stromrichtung, das die Lorentzkraft kompensiert.

so scheinen die beim Ladungstransport beteiligten Elektronen pro Volumen immer in Paketen zu eB/h zur Leitung beizutragen. Dieser Ausdruck wird als Entartungsgrad diskreter Landauniveaus bezeichnet die sich aus der vollen quantenmechanischen Beschreibung ergeben. Dazu wird der Hamiltonoperator für Elektronen im äußeren Magnetfeld nach Batke [3] aufgestellt.

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 \quad (2.4)$$

Lässt man nur Bewegungen der Elektronen in der x - y -Ebene zu und eicht das Vektorpotential auf $\mathbf{A} = (0, B \cdot x, 0)$, so kann man mit dem Ansatz $\Phi(x, y) = C \cdot e^{ik_x x} u(x)$ die Schrödingergleichung auf eine Differentialgleichung des harmonischen Oszillators umformen. Die Energieeigenwerte beschreiben die Landauniveaus und besitzen die diskrete Form

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.5)$$

mit der Zyklotronfrequenz ω_c und der Landau-Quantenzahl n . Diese Niveaus besitzen den Entartungsgrad

$$N_{LL} = \frac{eB}{h} \quad (2.6)$$

pro Volumen.

Gleichzeitig zu den Plateaus im Hallwiderstand, tritt ein anderer bemerkenswerter Effekt auf, der als Shubnikow-de-Haas-Effekt bezeichnet wird. Dabei verliert der Leiter seinen Widerstand in Längsrichtung, so dass der angelegte Strom ohne Verluste im Festkörper transportiert wird. Liegt die Fermienergie zwischen zwei Landauniveaus, so gibt es für die Elektronen unterhalb der Fermienergie keine Zustände innerhalb der thermischen Energieverbreiterung in die gestreut werden kann. Die Leitung wird damit innerhalb der Probe dissipationslos. Das Randkanalmodell beschreibt anschaulich, wie das Oberflächenpotential die Energieniveaus der Landaulevel anhebt und so einen eindimensionalen leitenden Randkanal formt, in dem ebenfalls dissipationslose Leitung möglich ist. Das Verhalten der Probe wird also im wesentlichen von der Magnetfeldstärke beeinflusst. Diese erhöht den Entartungsgrad der Landauniveaus und damit sowohl die Lage der Fermienergie als auch den Füllfaktor. Dieser legt die Anzahl der besetzten Landauniveaus fest. Der Füllfaktor ist als

$$\nu = \frac{N_S}{N_{LL}} \quad (2.7)$$

definiert, wobei N_S der Ladungsträgerdichte und N_{LL} dem Entartungsgrad der Landauniveaus entspricht. Bei einem ganzzahligen Füllfaktor befindet man sich im Bereich eines Plateaus des Quanten-Hall-Effektes und man misst den beschriebenen Shubnikow-de-Haas-Effekt.

Idealer Weise sind diese Energieniveaus diskret, in der Realität aber oft durch Streuung mit Phononen und Störstellen, verbreitert. Zudem kann die Zeeman-Aufspaltung bei geringen Magnetfeldern zwei Landauniveaus gegeneinander verschieben und so zu einer scheinbaren Verbreiterung der Niveaus führen. Die beschriebenen Effekte bestimmen die Bedingungen, bei denen der Quanten-Hall-Effekt auftritt. Bei starken Magnetfeldern treten wenige, dafür aber stark besetzte Landauniveaus auf. Zudem verringern hohe Beweglichkeiten der Elektronen die Stoßverbreiterung. Als letztes werden hinreichend tiefe Temperaturen benötigt, damit nur Landauniveaus unterhalb der Fermienergie besetzt werden.

3 Experimenteller Aufbau

Im folgendem Versuch messen wir den Quanten-Hall-Effekt an einer AlGaAs/GaAs-Hallbar. Durch den Kontakt der GaAs- und der AlGaAs-Schicht entsteht ein 2DEG, an dem wir die Messungen für den Versuch durchführen können. Die Hallbar besitzt 6 Anschlüsse die in Abbildung 1 zu sehen sind.

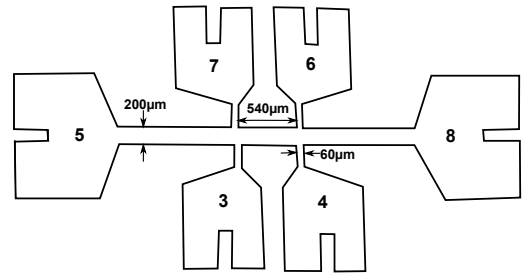


Abb. 1: Verwendete Struktur der AlGaAs/GaAs-Hallbar mit Beschriftung und Abmessungen.

Um die Hallbar anzusteuern, liegt ein Probenbox am Arbeitsplatz vor, die mit der Hallbar verbunden ist. An den Kontakten 3, 4, 6 und 7 kann die Längsspannung sowie die Querspannung abgegriffen werden. An den Kontakten 5 und 8 wird der Probenstrom bereitgestellt.

Da für die Messung des Quanten-Hall-Effektes niedrige Temperaturen nötig sind, befindet sich die Probe in einen Kryostaten im Heliumbad. Zur Wärmeisolation befindet sich das Bad innerhalb von Vakuum-Kammern und einem Stickstofftank, was den gesamten Kryostaten darstellt. Durch eine Pumpe mit Druckregelung kann der Dampfdruck über dem Heliumbad beeinflusst werden, wodurch sich Temperaturen zwischen 1.5 K und 4.2 K einstellen lassen. Die Bestimmung der Temperatur an der Probe erfolgt mit einem geeichten, temperaturabhängigen Kohlewiderstand, dem Allen Bradley-Widerstand, der mit einem Spannungsmessgerät ausgelesen wird. Zur Erzeugung des Hall-Effektes wird ein zwischen 0 T und 9 T verstellbares Magnetfeld senkrecht zur Probenebene angelegt. Zur Bereitstellung des Probenstroms wird ein mit 13 Hz und 1 V betriebener Funktionsgenerator über einen 1000:1 Spannungsteiler und einem Vorwiderstand von $R_{\text{Shunt}} = 4981 \Omega$ an die Probenbox angelegt. Mit dem Spannungsabfall über den Shuntwiderstand lässt sich der Probenstrom bestimmen.

Die Querspannung sowie die Shuntspannung werden jeweils über einen Lock-In-Verstärker ausgelesen, die mit einem Computer verbunden sind. Das Magnetfeld, die Shunt- und die Querspannung können mit einem LabView-Programm über die Zeit aufgezeichnet werden.

4 Versuchsdurchführung

Um die Hall-Plateaus und die Shubnikov-de-Haas Oszillation zu beobachten, messen wird die Shuntspannung U_{Shunt} und die Längsspannung U_{xx} bzw. Hallspannung U_{Hall} bei steigendem Magnetfeld von 0 T \rightarrow 9 T und bei fallendem Magnetfeld von 9 T \rightarrow 0 T. Da wir nur zwei Lock-In-Verstärker verwenden, nehmen wir die Hallspannung U_{Hall} und die Längsspannung U_{xx} in getrennten Messungen auf. An der Probe wird die Hallspannung an den Kontakten 4 und 6, sowie die Längsspannung an den Kontakten 6 und 7 abgegriffen. Durch die Druckregelung des Heliums im Kryostaten können wir die Temperatur regeln und die obigen Messungen bei verschiedenen Temperaturen aufnehmen. Um einen Einfluss der Temperatur untersuchen zu können messen wir bei den Temperaturen $T = 4.2$ K, 3.0 K, 2.1 K und 1.5 K.

Die Temperaturmessung im Experiment war über die Dampfdruckregelung des Heliums vor allem an den Stellen 3.0 K und 2.1 K schwierig einzustellen und konnte darüber hinaus nicht konstant gehalten werden. Um die Schwankung während der Messung abzuschätzen, haben wir jeweils vor und nach der Messung die Temperatur über den Allen-Bradley Widerstand ausgelesen. Folglich lagen unsere gemittelten Temperaturwerte bei 4.2 K, welcher durch die Sidetemperatur des Heliums nahezu konstant ist, bei (3.0 ± 0.5) K, bei (2.1 ± 0.3) K und bei (1.5 ± 0.2) K.

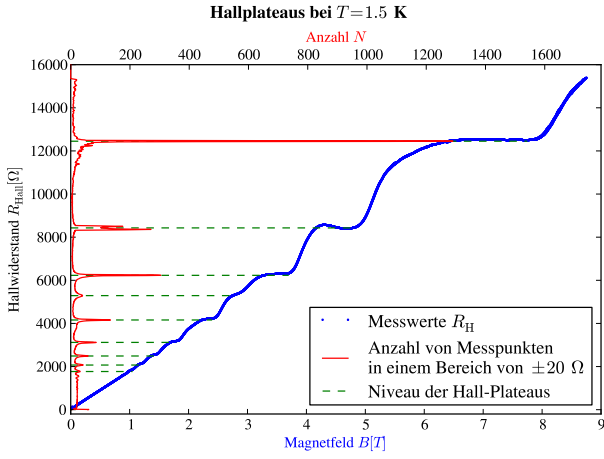
5 Auswertung

Die gemessenen Spannungen über die Lock-In-Verstärker sind von einem Rauschen überlagert. Um das Rauschen abzuschätzen, haben wir vor dem Einschalten des Magnetfeldes die Messung je ca. 30 s früher gestartet. Hieraus bestimmen wir den Fehler für die Spannungsmessungen von U_{Shunt} , U_{xx} und U_{Hall} zu 10^{-3} mV. Der Fehler des Shuntwiderstandes war nicht bekannt und wird von uns auf 0.2 %, dies entspricht einer Abweichung von 10 Ω , abgeschätzt. Somit können wir den Widerstand für unsere Messungen als Hauptfehlerquelle identifizieren.

Beim Durchfahren des Magnetfeldes von 0 nach 9 Tesla konnte ein leichter Hysterese-Effekt festgestellt werden. Das bedeutet, dass der Elektromagnet zwar eine Magnetfeldstärke anzeigt, die wirkliche Feldstärke der angezeigten aber leicht nacheilt. Um diesen Effekt auszugleichen, wurden die Aufnahmen für jede Messung in beide Richtungen durchgeführt. Bei diesen zwei Datensätzen wurde dann gleichzeitig das Magnetfeld des Up-sweeps erniedrigt und die Down-sweeps erhöht, bis die Daten symmetrisch in der Mitte der Hysterese zusammen fielen. Die beschriebene Verschiebung in der Magnetfeldstärke war gering und betrug ± 0.037 T. Die kollabierten Daten wurden für die weiteren Auswertungen verwendet.

5.1 Hall-Plateaus, Klitzing-Konstante und Füllfaktoren

Für die Auswertung der Hall-Plateaus wurde für jede gemessenen Temperatur ein eigenes Diagramm erstellt.


 Abb. 2: Hallplateaus bei $T = 1.5$ K.

In Abbildung 2 ist die Auswertung für die Messung bei $T = 1.5$ K gezeigt. Die Diagramme für die Temperaturen $T = 4.2$ K, 3.0 K und 2.1 K sind im Anhang 7 in Abbildung 9, 10 und 11 gezeigt.

In der blauen Kurve aus Abbildung 2 wurde der Verlauf des Hall-Widerstandes R_H aus den hysteresebereinigten Daten über dem Magnetfeld B aufgetragen. Zur Auswertung der Hall-Plateaus definieren wir uns einen kleinen Bereich von $\pm 20 \Omega$ um einen Wert in dem wir die Anzahl an Messpunkten zählen und den Wert über den gesamten Bereich mit einer Schrittweite von 10Ω variieren. Aus der Anzahl der Messpunkte in diesem Bereich ergibt sich die rote Kurve in Abbildung 2. Im zweiten Plateau ist zu erkennen, dass kein richtiges Plateau ausgebildet ist. Der Widerstand nimmt hier unerwarteterweise ab und dann wieder zu. Der Effekt lässt sich aufgrund von Inhomogenitäten in der Probe verstehen, sodass Teile der Probe das Plateau früher erreichen als andere. Wir vermuten den richtigen Wert des Plateaus in der Mitte der beiden Maxima. Durch unsere Auswertemethode ergibt sich je ein Peak für die beiden Maxima im Plateau. Um den Wert des Plateaus zu ermitteln haben wir folglich die Mitte der beiden Maxima verwendet, wobei der Fehler hier der Dicke des Plateaus entspricht, und so aus dem Abstand der Maxima von 70Ω resultiert.

Durch dieses Zählverfahren ergeben sich an den Stellen der Plateaus klar erkennbare Peaks, an deren Maxima der Wert des Hall-Plateaus ausgelesen werden kann. Mit dieser Methode und der verwendeten Schrittweite erhalten wir in der Kurve eine Ablesegenauigkeit von 20Ω die aus dem jeweils ausgelesenen Bereich für je-

den Wert resultiert. Der aus oben beschriebenen Rauschen resultierende Messfehler der Lock-in-Verstärker von 0.1% wurden im Vergleich zu der Ablesegenauigkeit im Graphen vernachlässigt.

Die für jedes sichtbare Niveau ausgelesenen Widerstandswerte haben wir zusammen mit den Füllfaktoren für jede Temperatur in Tabelle 1 aufgetragen.

$\nu \backslash T$	4.2 K	3.0 K	2.1 K	1.5 K
2	12 460 Ω	12 440 Ω	12 450 Ω	12 450 Ω
3	–	8950 Ω	8430 Ω	8430 Ω
4	6240 Ω	6220 Ω	6230 Ω	6230 Ω
5	–	–	5290 Ω	5290 Ω
6	4170 Ω	4150 Ω	4160 Ω	4160 Ω
8	3120 Ω	3120 Ω	3120 Ω	3120 Ω
10	2490 Ω	2480 Ω	2490 Ω	2490 Ω
12	2060 Ω	2060 Ω	2070 Ω	2070 Ω
14	1760 Ω	1750 Ω	1770 Ω	1770 Ω

Tab. 1: Abgelesene Werte von R_ν in $[\Omega]$ für die erkennbaren Hall-Plateaus bei verschiedenen Temperaturwerten mit dem Fehler aus der Ungenauigkeit des Vorwiderstandes von 0.2% und der Ablesegenauigkeit von 20Ω .

Die erhaltenen Werte für die ganzen Zahlen ν ergeben multipliziert mit den Messwerten R_ν jeweils einen ähnlichen Wert, der der Klitzing-Konstante nahe kommt. Die Fehlerquellen sind hier zum einen die Ungenauigkeit von 0.2% des Vorwiderstandes sowie die Ablesegenauigkeit von 20Ω aus Abbildung 2. Für das Plateau mit Füllfaktor $\nu = 3$ ergibt sich, aufgrund der Plateaudicke, ein größerer Ablesefehler von 70Ω .

Für jede Temperatur bestimmen wir einen Wert für die Klitzing-Konstante. Dazu verwenden wir nur die Widerstandswerte der Plateaus mit geradzahlgigen ν . Begründung warum ungerade Plateaus weggelassen wurden?? Die Werte werden jeweils mit dem entsprechenden Füllfaktor multipliziert. Die erhaltenen Werte besitzen alle nahezu gleiche Größe und Fehler, wodurch wir für jede gemessene Temperatur einen gemittelten Wert angeben können, der in Tabelle 2 aufgetragen ist.

T [K]	$\overline{R_K \nu}$ [k Ω]
4.2	(24.873 ± 0.054) k Ω
3.0	(24.804 ± 0.053) k Ω
2.1	(24.894 ± 0.054) k Ω
1.5	(24.894 ± 0.054) k Ω

Tab. 2: Aus Tabelle 1 berechnete gemittelte Werte für $R_K \nu$ mit Fehler.

Beim Vergleich sehen wir eine sehr gute Übereinstimmung für die Werte bei verschiedenen Temperaturen. Dies ist auch zu erwarten, da die Klitzing-Konstante, als ein über Naturkonstanten definierte Konstante, unabhängig von der Temperatur, den selben Wert besitzen sollte.

Aus diesen Werten können wir nun die Klitzing-Konstante bestimmen zu

$$R_K = (24.867 \pm 0.054) \text{ k}\Omega. \quad (5.1)$$

Der Vergleich mit dem Literaturwert von $R_H = 25.812807 \text{ k}\Omega$ zeigt sich eine große Abweichung, die auch im Rahmen des Fehlers nicht mehr vereinbar ist. Die Abweichung ist somit auf einen systematischen Fehler in der Messung zurückzuführen. Dieser Fehler resultiert wahrscheinlich aus einer falsch eingestellten Phase der Lock-In-Verstärker, woraus systematisch zu niedrige Messwerte folgen.

5.2 Bestimmung der Oberflächenladungsträgerdichte

Durch die Steigung des Hall-Widerstandes

Die Oberflächenladungsträgerdichte des 2DEGs wird auf drei verschiedene Arten bestimmt und die Ergebnisse untereinander verglichen. Dabei achten wir auf Unterschiede bei unterschiedlichen Temperaturen. An den linearen Teil der Messdaten von wurde eine Gerade angefitet, die den linearen Teil der Messpunkte beinhaltet. Wie schließen dabei den untersten Teil der Messwerte von 0 T – 0.2 T aus dem Fit aus, da in diesem Bereich noch Hystereseeffekte zu sehen sind. Den Fehler des Fits vernachlässigen wir aufgrund der großen Datenmenge im Vergleich zum Fehler des einzelnen Messpunkte entsprechend der Überlegungen in Aufgabenteil 5. Zur besseren Darstellung wird in Abbildung 3 nur der Bereich von 0 T–1.3 T gezeigt. Als Steigung erhalten wir bei 4.2 K die Hall-konstante $A_H = (1741 \pm 34) \Omega/\text{T}$ und aus dieser die Oberflächenladungsdichte

$$N_s = \frac{1}{A_H e} = (3.584 \pm 0.070) \times 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^2}. \quad (5.2)$$

Die Ergebnisse der anderen Temperaturen sind in Tabelle 4 aufgeführt. Verglichen mit den Fehlern der Geradensteigung unterscheiden sich die einzelnen Stei-

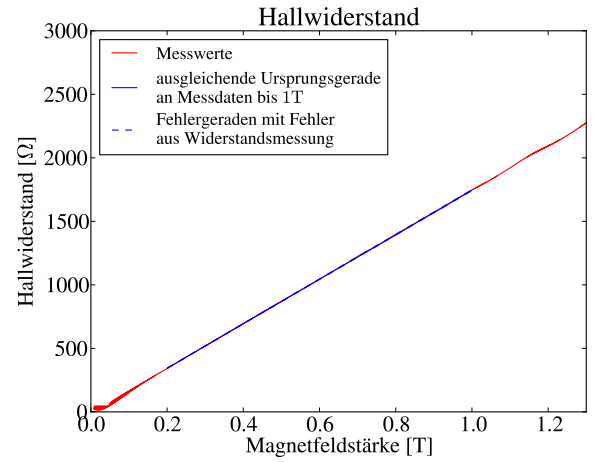


Abb. 3: Hall-Widerstand als Funktion des Magnetfeldes. Fit- und Fehlergeraden sind an die Daten bei kleinen Magnetfeldern angelegt.

gungen bei unterschiedlichen Temperaturen nur wenig. Dies ist intuitiv klar, da die Ladungsträgerdichte beim untersuchten 2DEG des GaAs/AlGaAs-System nicht von der Temperatur abhängen sollte.

Mit Hilfe der Hall-Plateaus

Die Ladungsträgerdichte können wir ebenso über die Lage der Hall-Plateaus und die ermittelten Füllfaktoren aus Tabelle 1, Aufgabenteil 5.1 bestimmen. Nach Praktikumsanleitung [2] ist die Ladungsträgerdichte N_s proportional zum B -Feld und dem Füllfaktor ν

$$N_s = \nu \frac{eB}{h}. \quad (5.3)$$

Für die Bestimmung der B -Felder verwenden wir die Mitte eines Hall-Plateaus, siehe Abbildung 2. Der auftretende Fehler ist sehr groß, da die Plateaus eine große Breite besitzen und so einem Widerstandswert mehrere Werte für das B -Feld zugeordnet werden können. Der verwendete Fehler ergibt sich also aus der Breite des entsprechenden Hall-Plateaus.

Die aus den ausgelesenen B -Feldern, sowie die nach Gleichung (5.3) ermittelten Ladungsträgerdichten sind in Tabelle 3 für die gemessenen Temperaturen aufgetragen. Für den Wert und den Fehler der gemittelten Ladungsträgerdichten $\overline{N_s}$ wurden die Einzelwerte mit ihren Fehlern gewichtet und gemittelt.

Durch die Frequenz der Shubnikov-de Haas Oszillation

Wird die Probe einem steigendem Magnetfeld ausgesetzt, so ändert sich gemäß (2.6) und (2.7) der Füllfaktor und mit ihm der Längswiderstand periodisch. Dabei lässt sich schreiben

$$\frac{1}{B} = \frac{e}{N_{LL}h} = \frac{e}{N_S h} \nu. \quad (5.4)$$

Die Periodizität von $\frac{1}{B}$ bestimmen wir aus der Periodizität des gemessenen Längswiderstandes. Dabei wird zunächst aus den gemessenen Daten die Funktion Längswiderstand in Abhängigkeit der inversen Magnetfeldstärke gewonnen. Anschließend werden diese Daten linear interpoliert und ein neuer Datensatz mit äquidistanten $\frac{1}{B}$ -Schritten erzeugt. Diese Daten lassen sich nun ableiten und diskret fourie-transformieren. Als kleinste Frequenz lesen wir

$$f_B = (7.63 \pm 0.35) \text{ T} \quad (5.5)$$

in Graphik 4 ab, was einer Periodizität in $\frac{1}{B}$ von

$$T_{\frac{1}{B}} = (1311 \pm 60) \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{T}} \quad (5.6)$$

entspricht. Neben der Hauptfrequenz sind auch höhere Harmonische im Spektrum zu erkennen, die aber für die Auswertung nicht entscheidend sind. Die Genauigkeit des abgelesenen Wertes wird durch die Auflösung der diskreten Fouriertransformation beschränkt und als halben Abstand zur nächsten Datenpunkt im Graphen angenommen.

Die Periodendauer $T_{\frac{1}{B}}$ entspricht dabei nach (5.6) der Periodizität der ganzen geraden Zahlen mit dem Faktor $\frac{2e}{N_S h}$ multipliziert. Dies liegt daran, dass vor allem bei kleinen Magnetfeldern die Spinaufspaltung zwischen den zwei Niveaus einer Landau-Quantenzahl nicht groß genug ist und beim Durchfahren des Magnetfeldes jeweils zwei Niveaus simultan gefüllt werden.

Durch die Periodendauer $T_{\frac{1}{B}}$ wird somit der Wert für die Ladungsträgerdichte festgelegt.

$$N_S = \frac{2e}{T_{\frac{1}{B}} h} = (3.69 \pm 0.17) \times 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^2} \quad (5.7)$$

Auch diese Methode wurde auf alle Messdaten der unterschiedlichen Temperaturen angewandt. Da die Fouriertransformation auf diskreten Werten geschieht,

$T[\text{K}]$	ν	$B[\text{T}]$	$N_s[10^{15} \text{ m}^{-2}]$	$\bar{N}_s[10^{15} \text{ m}^{-2}]$
4.2	2	7.13(38)	3.45(18)	3.45(12)
	4	3.52(10)	3.41(10)	
	6	2.375(44)	3.446(64)	
	8	1.778(60)	3.44(12)	
	10	1.430(62)	3.46(15)	
	12	1.198(47)	3.48(14)	
	14	1.041(49)	3.53(16)	
3.0	2	7.11(55)	3.44(26)	3.37(16)
	3	4.497(25)	3.26(18)	
	4	3.44(24)	3.33(23)	
	6	2.32(12)	3.37(17)	
	8	1.760(70)	3.40(14)	
	10	1.431(50)	3.46(12)	
	12	1.202(43)	3.49(12)	
2.1	14	0.928(50)	3.14(17)	3.41(14)
	2	7.12(70)	3.45(34)	
	3	4.52(36)	3.29(26)	
	4	3.46(21)	3.35(20)	
	5	2.807(88)	3.39(11)	
	6	2.33(11)	3.38(15)	
	8	1.765(61)	3.42(12)	
	10	1.412(48)	3.42(11)	
1.5	12	1.193(36)	3.46(11)	3.42(15)
	14	1.028(29)	3.48(10)	
	2	7.22(58)	3.49(28)	
	3	4.53(36)	3.29(26)	
	4	3.47(22)	3.36(21)	
	5	2.816(83)	3.40(10)	
	6	2.32(11)	4.37(16)	
	8	1.764(61)	3.34(12)	
	10	1.423(45)	3.44(11)	
	12	1.191(44)	3.45(13)	
	14	1.026(36)	3.47(12)	

Tab. 3: Bestimmung der Ladungsträgerdichte mit Hilfe der Hall-Plateaus.

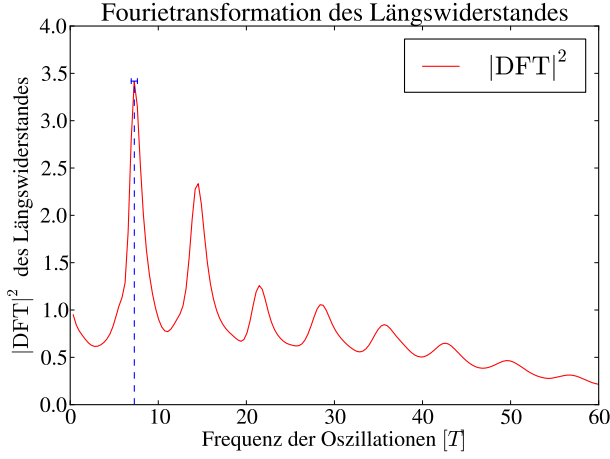


Abb. 4: Diskrete Fouriertransformation des Längswiderstandes aufgetragen über die Periodendauer in $\frac{1}{B}$. Neben der Hauptfrequenz sind auch höhere Frequenzen zu erkennen.

kann die Periodizität nur diskrete Werte annehmen. Bei den unterschiedlichen Temperaturen wurde jeweils exakt der selbe Wert abgelesen.

Um die Ergebnisse aller drei Methoden zusammen zu fassen, tragen wir die ermittelten Werte für N_S in Tabelle 4 ein und bilden die, mit den inversen Fehlern gewichteten, Mittelwerte $\overline{N_S}(T)$ die wir für die weiteren Rechnungen verwenden.

$T[1/K]$	N_{S1}	N_{S2}	N_{S3}	$\overline{N_S}$
4.2	3.5619(89)	3.45(12)	3.69(17)	3.560(14)
3.0	3.6715(94)	3.37(16)	3.69(17)	3.567(15)
2.1	3.5560(95)	3.41(14)	3.69(17)	3.554(15)
1.5	3.5542(97)	3.42(15)	3.69(17)	3.553(15)
				3.559(15)

Tab. 4: Werte für die Ladungsträgerkonzentration N_S in 10^{11} 1/cm^2 mit N_{S1} für die Werte aus der Hall-Steigung, N_{S2} aus den Hall-Plateaus und N_{S3} aus der Shubnikov-de Haas Oszillation. Die letzte Spalte mit $\overline{N_S}$ entspricht den mit den inversen Fehlern gewichteten N_S -Werten der verschiedenen Methoden.

5.3 Leitfähigkeit, Hall-Faktor und Elektronenbeweglichkeit

Aus den gemessenen Werten für die Spannungen bei ausgeschaltetem Magnetfeld $B = 0 \text{ T}$ können wir die Leitfähigkeit des 2DEG σ_{2D} , den Hall-Faktor A_H und die Elektronenbeweglichkeit μ bestimmen. Die Werte

ergeben sich nach der Praktikumsanleitung [2] als

$$\sigma_{2D} = N_S e^2 \frac{\tau}{m^*} = \frac{L}{R_{xx} W} \quad (5.8)$$

$$A_H = -\frac{1}{N_S e} \quad (5.9)$$

$$\mu = A_H \sigma_{2D}. \quad (5.10)$$

Aus der Länge $L = 600 \mu\text{m}$ und der Breite $W = 200 \mu\text{m}$ der Probe erhalten wir aus der Geometrie der Hallbar das Verhältnis

$$\frac{L}{W} = 3. \quad (5.11)$$

Aus den erhaltenen Werte für den Längswiderstand R_{xx} bei den vier gemessenen Temperaturen werden folglich die Leitfähigkeit, der Hall-Faktor und die Elektronenbeweglichkeit nach (5.10) berechnet und in Tabelle 5 aufgetragen. Für die Werte der Ladungsträgerdichten wurden die berechneten Werte aus 3 verwendet. Für den Fehler der Längswiderstände können die Fehler in den gemessenen Spannungen vernachlässigt werden, da der Fehler im Shuntwiderstand deutlich darüber liegt. Somit besitzen unsere Werte von R_{xx} eine Abweichung von 0.2 %. Die Fehler für die berechneten Werte ergeben sich aus Gauß'scher Fehlerfortpflanzung.

$T[K]$	$R_{xx}[\Omega]$	$\sigma_{2D}[\frac{1}{\Omega}] \cdot 10^{-3}$
4.2	521(10)	5.76(12)
3.0	505(10)	5.94(12)
2.1	247.4(4.9)	12.13(24)
1.5	244.3(4.9)	12.28(25)

$T[K]$	$A_H[\frac{m^2}{C}]$	$\mu[\frac{m^2}{C\Omega}]$
4.2	1750.0(6.9)	10.1000(22)
3.0	1749.8(7.4)	10.3948(23)
2.1	1756.2(7.4)	21.2960(23)
1.5	1756.7(7.4)	21.5703(23)

Tab. 5: Ergebnisse für die Leitfähigkeit σ_{2D} , die Hall-Konstante A_H und die Elektronenbeweglichkeit μ .

5.4 Zyklotronmasse

In diesem Abschnitt wollen wir die Zyklotronmasse bestimmen. Hierzu nutzen wir aus, dass die Amplituden der Oszillationen in der Längsspannung temperaturabhängig sind. Betrachten wir den Grenzfall $E_F \gg \hbar\omega_c$, also dass viele Landau-Niveaus besetzt und die Magnetfelder klein sind. So kann die Zyklotronmasse m_c für geringe Abhängigkeit der Streuzzeit τ und

$T_1 = 2T_2$ nach Ando [1] aus dem Verhältnis

$$\frac{m_c}{m_e} = \frac{\hbar e B}{m_e \pi^2 k_B T_1} \operatorname{arcosh} \frac{A(B, T_2, \tau)}{A(B, T_1, \tau)} \quad (5.12)$$

bestimmt werden, wobei $A(B, T, \tau)$ die Amplitude der Oszillation der Längsspannung entspricht.

Aufgrund der Bedingung $T_1 = 2T_2$ verwenden wir aus unseren Messungen die Temperaturpaare (4.2 K, 2.1 K) und (3.0 K, 1.5 K). Die Werte der Längsspannungen wurden über B bzw. $1/B$ aufgetragen und sind für das Temperaturpaar (4.2 K, 2.1 K) in Abbildung 5 und für die Temperaturpaare (3.0 K, 1.5 K) in Abbildung 6, abgebildet. Für die Auswertung lesen wir aus Abbildung 5

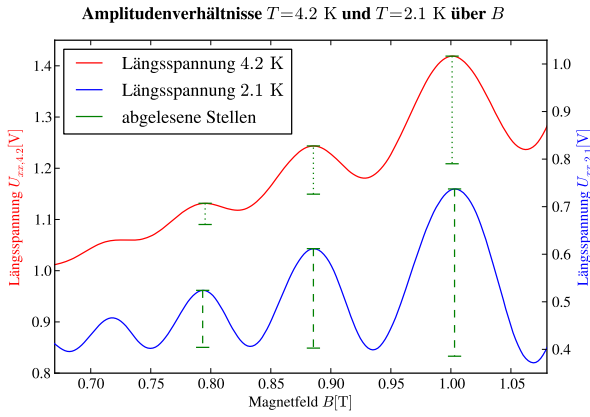


Abb. 5: Auftragung der Längsspannung über dem Magnetfeld bei $T = 4.2$ K und 2.1 K, zur Ermittlung des Amplitudenverhältnisses und der Zyklotronmasse.

und Abbildung 6 das Amplitudenverhältnis an drei verschiedenen Stellen bei möglichst geringen B -Feldern ab und tragen die Werte in Tabelle 6 auf. Die Auftragungen über $1/B$ liefert die selben Amplitudenwerte und werden daher nicht extra aufgeführt. Der Bereich unter 1 T entspricht in unserem Fall nach Versuchsteil 5.1 über 14 besetzte Landau-Niveaus. Zudem sind Amplituden bei niedrigeren B -Feldwerten, aufgrund ihrer Größe, leider nicht mehr sinnvoll ablesbar, wie in Abbildung 5 bzw. 6 zu erkennen ist.

Die erhaltenen Werte für das Verhältnis der Zyklotronmasse zur Elektronenmasse aus Tabelle 6, weichen stark voneinander ab. Wir erkennen eine systematische Abweichung der Werte hin zu höheren Magnetfeldern, wobei wir theoretisch gleichbleibende Werte erwartet hätten. Allerdings gilt, die zum auswerten verwendete Formel (5.12) streng nur für die oben genannten Bedingungen. Da wir nicht wissen wie ungenau die Formel bei geringen Abweichungen ist und wann die Bedingung

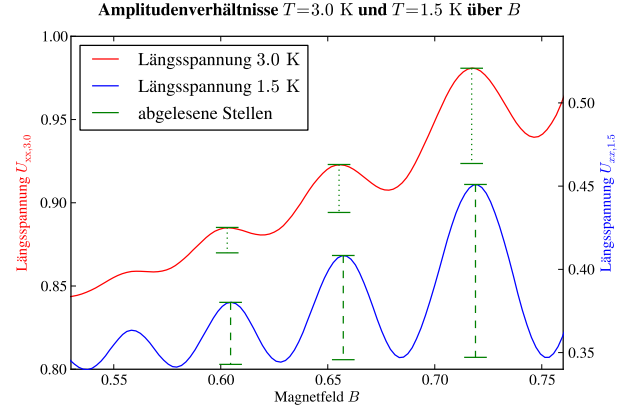


Abb. 6: Auftragung der Längsspannung über dem Magnetfeld bei $T = 3.0$ K und 1.5 K, zur Ermittlung des Amplitudenverhältnisses und der Zyklotronmasse.

T [K]	$\frac{A(B, T_2)}{A(B, T_1)}$	B [T]	$\frac{m_c}{m_e}$
4.2/2.1	2.894	0.795	0.0444
	2.222	0.885	0.0412
	1.674	1.001	0.0358
3.0/1.5	2.441	0.604	0.0422
	2.173	0.656	0.0420
	1.815	0.718	0.0392

Tab. 6: Berechnung des Zyklotronmassenverhältnisses.

$E_F \gg \hbar\omega_c$ erfüllt ist, müssen wir anhand der Ergebnisse davon ausgehen, dass die genannten Bedingungen, im betrachteten Bereich, nicht erfüllt waren. Folglich kann eine Fehlerabschätzung der Werte ebenfalls nicht sinnvoll betrachtet werden.

Allerdings können wir unsere Werte einen Vergleich mit der Literatur unterziehen. Für GaAs ist die Zyklotronmasse gleich der effektiven Masse und ist nach Universität des Saarlandes [5] gegeben durch

$$\frac{m^*}{m_e} = 0.067. \quad (5.13)$$

Der Wert aus unserer Messung, der den Literaturwert am nächsten kommt, ergibt sich für das Temperaturpaar (4.2 K, 2.1 K) bei einem Magnetfeld von 0.795 T zu $m_c/m_e = 0.0444$. Der Wert besitzt immer noch eine große Abweichung vom Literaturwert. Folglich sind auch hier die nötigen Bedingungen noch nicht erfüllt gewesen um die Zyklotronmasse mit Formel (5.12) nach Ando [1] zu bestimmen. Da schon möglichst kleine Magnetfelder betrachtet wurden um eine hohe Besetzung zu erhalten, vermuten wir, dass die Bedingung

Temperatur im Experiment ebenfalls nicht erfüllt werden konnte.

5.5 Fermi-Energie /-Wellenvektor und -Geschwindigkeit

Für Elektronen, die sich im Festkörper aufhalten, können die Korrekturen der Dispersionsrelation durch eine effektive Masse der Elektronen berücksichtigt werden. Für den Fall von GaAs beträgt der Literaturwert für die effektive Masse nach Universität des Saarlandes [5] $m^* = 0.067m_e$. Mit dieser Korrektur kann die Dispersion der Elektronen in einem gewissen Rahmen weiterhin als parabolisch angesehen werden:

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*}. \quad (5.14)$$

Auf der anderen Seite ergibt sich die Ladungsträgerdichte als Integral über die Zustandsdichte bis zur Fermienergie. Die Zustandsdichte besitzt im 2 DEG den konstanten Wert $D(E) = \hbar^2 \pi / m^*$. Damit ergeben sich für die Fermi-Energie, den Fermi-Wellenvektor und die Fermi-Geschwindigkeiten nach Batke [2] mit den in 4 ermittelten Werten für N_S :

$$E_F = N_S \cdot \frac{\hbar^2 \pi}{m^*} \quad (5.15)$$

$$k_F = \sqrt{2\pi N_S} \quad (5.16)$$

$$v_F = \frac{\hbar \sqrt{2\pi}}{m^*} \sqrt{N_S} \quad (5.17)$$

Für nicht verschwindende Magnetfelder ist zu bemerken, dass je nach Eichung der Wellenvektor \mathbf{k} keine sinnvolle Quantenzahl mehr darstellt und die Energie-dispersion durch die Landau-Quantenzahlen beschrieben wird. Für $B = 0$ T sind die Werte für Fermi-Energie/ -Wellenvektor und -Geschwindigkeit in Tabelle 7 aufgelistet.

$T[\frac{1}{K}]$	$E_F[\text{meV}]$	$k_F[\frac{1}{\text{nm}}]$	$v_F[\frac{\text{km}}{\text{s}}]$
4.2	12.724(49)	0.1496(29)	258.5(50)
3.0	12.755(52)	0.1497(31)	258.7(53)
2.1	12.700(52)	0.1494(31)	258.2(53)
1.5	11.698(54)	0.1494(31)	258.2(54)

Tab. 7: Fermi-Energie/ -Wellenvektor und -Geschwindigkeit für verschiedene Temperaturen.

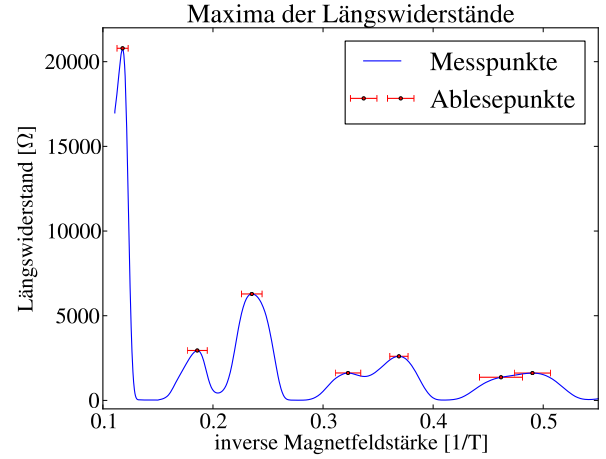


Abb. 7: Abgelesene Werte der maximalen Längsspannung. Die Fehler wurden anhand der Breite der Peaks abgeschätzt.

5.6 Bestimmung der Spinaufspaltung

Wie in 5.2 gesehen, fällt der Längswiderstand periodisch mit dem inversen Magnetfeld auf Null ab. Den maximalen Widerstand misst man hingegen, wenn die Fermi-Energie (d.h. das chemische Potential) genau innerhalb der Landau-Niveaus liegt. Dies ist der Fall wenn

$$E_F = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{M}{2} \right). \quad (5.18)$$

In diesem Abschnitt soll die relative Spinaufspaltung M und daraus der Landé-Faktor g der Elektronen im GaAs bestimmt werden, der mit der relativen Magnetisierung folgenden Zusammenhang besitzt.

$$M = \frac{g \mu_B B}{\hbar \omega_c} \quad (5.19)$$

In einem ersten Schritt werden nun aus den Graphen des Längswiderstandes die inversen Feldstärken $1/B_{n\pm}$ der Maxima für verschiedene n -Quantenzahlen und Spinaufspaltungen abgelesen, wobei \pm das Maximum mit größerer bzw. kleinerer Magnetfeldstärke beschreibt.

In Abbildung 7 wurden die Magnetfeldstärken abgelesen, die gemessen wurden, während sich die Fermi-Energie innerhalb der spinaufgespaltenen Landau-Niveaus befindet, angefangen von $n = 1$ ganz links bis $n = 4$ rechts. Diese inversen Magnetfeldstärken werden nun über die Landau-Quantenzahl n jeweils für $n+$ und $n-$ in 8 aufgetragen, um sie bis zu $1/B = 0$ zu extrapolieren. Am Schnittpunkt mit der x -Achse verschwinden

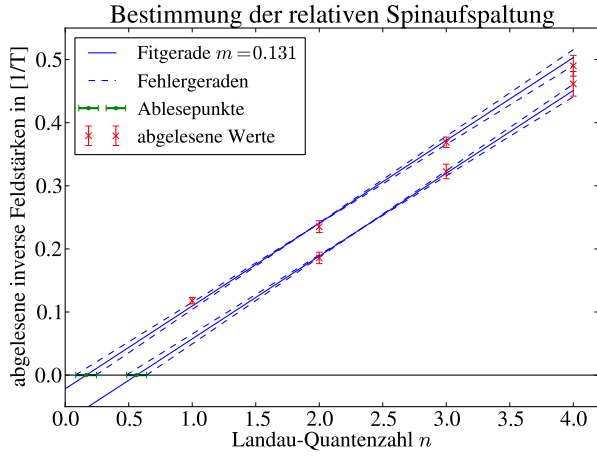


Abb. 8: Bestimmung der Schnittpunkte mit x -Achse. Die in Abbildung 7 ausgelesenen Messpunkte werden linear bis zum Punkt $B \rightarrow \infty$ extrapoliert und der Schnittpunkt mit der x -Achse abgelesen. Die Fehler werden jeweils mithilfe zweier Hilfsgeraden abgeschätzt.

beide Seiten der Identität

$$\frac{1}{B_{n\pm}} = \frac{\hbar e}{m_c} \frac{1}{E_F} \left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{M}{2} \right). \quad (5.20)$$

Damit ergibt sich die relative Spinaufspaltung M als die Differenz der Schnittpunkte mit der x -Achse

$$M = |n_+(B \rightarrow \infty) - n_-(B \rightarrow \infty)| \quad (5.21)$$

Wir lesen die Schnittpunkte in Graphik 8 ab und erhalten für die Differenz

$$M = |0.165(81) - 0.56(79)| = 0.40(11). \quad (5.22)$$

Daraus ergibt sich nach (5.19) und dem Literaturwert für die Zyklotronmasse $m_c = 0.067m_e$ [5] der Landé-Faktor zu

$$g = \frac{M\hbar e}{\mu_B m_c} = -11.9 \pm 3.3. \quad (5.23)$$

Dieser Wert ist deutlich höher, als der in der Literatur [2] angegebene Wert von $g = -0.44$ im Einteilchenbild. Damit wird deutlich, dass Mehrteilcheneffekte beim Quanten-Hall-Effekt nicht zu vernachlässigen sind und das magnetische Moment der Elektronen im Kollektiv stärker ist als die Summe der Einzelmagnetisierungen. Die Bestimmung der Ladungsträgerdichte aus diesem Plot ist mathematisch ähnlich, wenn auch ungenauer, zur Bestimmung mittels Schubnikow-de-Haas-Oszillationen. Wir erhalten mit zwei Landau-Niveaus

pro Landau Quantenzahl

$$N_S = \frac{2e}{h} \frac{\Delta n}{\Delta \frac{1}{B}} = (3.69 \pm 0.83) \times 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^2} \quad (5.24)$$

6 Zusammenfassung

Mit dem F-Praktikumsversuch zum Quanten-Hall-Effekt konnten wir die Quantisierung der elektronischen Zustände und deren Einfluss auf die makroskopischen Eigenschaften der Probe nachweisen. Es konnten ganzzahlige Hall-Plateaus bis zur Quantenzahl 14 bei 1.5 K beobachtet werden. Die bestimmte Klitzing-Konstante weichte mit $(24.867 \pm 0.054) \text{ k}\Omega$ deutlich vom Literaturwert ab. Wir verwendeten unterschiedliche Methoden, um die Ladungsträgerkonzentration unserer Probe zu bestimmen. Dabei lieferte die Auswertung der Hall-Steigung die genauesten Ergebnisse. Ohne Magnetfeld wurden Längswiderstand, Leitfähigkeit und Beweglichkeit der Elektronen untersucht, wobei wir eine deutliche Leitfähigkeitszunahme unterhalb von 3 K messen konnten. Aus der Oszillationen der Längsspannung bei niedrigen Magnetfeldstärken wurde die Zyklotronmasse der Elektronen in GaAs bestimmt. Die Analyse war nicht ohne Einschränkungen möglich und die bestimmte Masse lag mit $0.044m_e$ deutlich unter dem Literaturwert. Aus der Ladungsträgerdichte wurde die Fermi-Geschwindigkeit bestimmt und machte mit etwa 250 km/s den fermionischen Charakter der Elektronen deutlich. Zuletzt wurden bei tiefen Temperaturen die Zeeman-Aufspaltung beobachtet und daraus der Landé-Faktor bestimmt. Dieser lag mit -11.9 ± 3.3 deutlich über dem Wert des Elektrons im Einteilchenbild, was den Mehrteilchen-Charakter des Experiments verdeutlicht.

Literatur

- [1] ANDO, T.: Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. IV. Oscillatory conductivity. In: *J. Phys. Soc. Japan* 37 (1974), Nr. 1233
- [2] BATKE, Edwin: *Anleitung - Quanten-Hall-Effekt*. Physikalisches Institut der Universität Würzburg. Juli 2010. – URL http://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11999999/Aufgabenstellung_QHE.pdf. – Physikalisches Fortgeschrittenen Praktikum

- [3] BATKE, Edwin: *Vorlesungsskript - Elektronisch Eigenschaften quasi-zweidimensionaler Ladungsträgersysteme in Halbleitern*. Sommersemester 2013
- [4] JANSSEN, N. E.; Goebel R.; Williams J. M.; Tzalenchuk A.; Yakimova R. et al.: Graphene, universality of the quantum Hall effect and redefinition of the SI system. In: *New J. Phys.* 13 (9), S. 93026. 37 (2011), Nr. 1233. – DOI: 10.1088/1367-2630/13/9/093026
- [5] UNIVERSITÄT DES SAARLANDES: *Materialkonstanten*. September 2013. – URL http://www.uni-saarland.de/fileadmin/user_upload/Professoren/fr74_ProfMoeller/Vorlesung/V_Erster_Studienabschnitt_Bachelor/V_B_Aktuelle_Semester/V_B_WS09_10/fermidirac.htm

7 Anhang

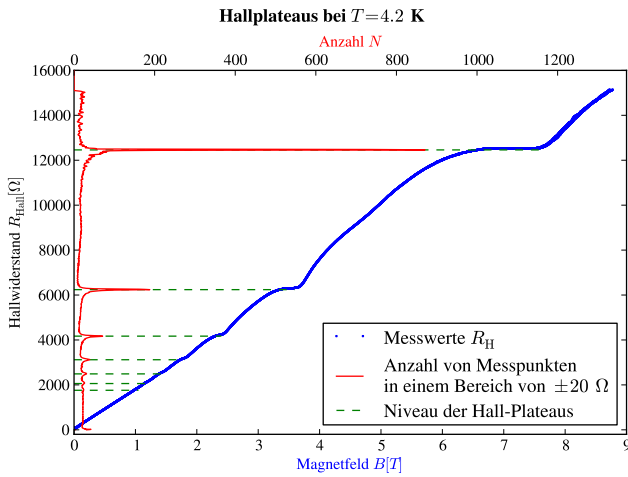


Abb. 9: Hallplateaus bei $T = 4.2$ K.

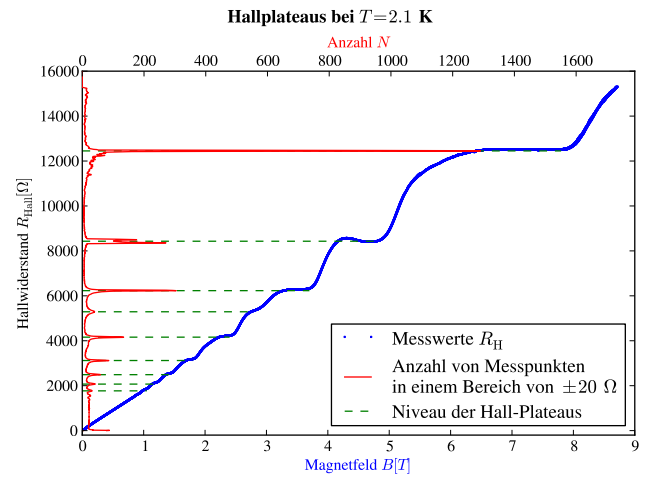


Abb. 11: Hallplateaus bei $T = 2.1$ K.

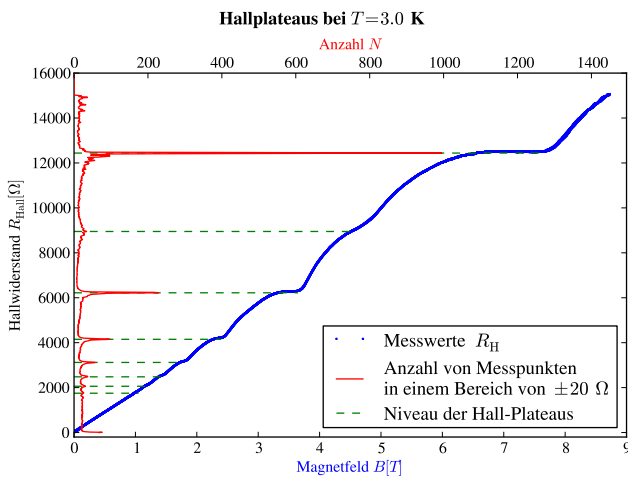


Abb. 10: Hallplateaus bei $T = 3.0$ K.