

# Kernspinresonanz

Daniel Friedrich & Ulrich Müller

Mithilfe von drei Röntgenanoden sowie verschiedenen Streuobjekten konnten wir die theoretischen Werte der  $K_\alpha$ - und  $K_\beta$ -Linie von Kupfer, Eisen und Molybdän bestätigen. Zudem war die Feinstruktur von Eisen und Molybdän im Spektrum erkennbar. Über das Duane-Hunt-Gesetz haben wir Plancksche Wirkungsquantum zu bestimmt. Anhand des Effekts der inelastischen Streuung von Photonen an Elektronen haben wir die Compton-Wellenlänge zu ermittelt. Schließlich haben wir zwei Laue-Aufnahmen eines Materials gemacht, den Reflexen Miller-Indices zugeordnet und damit die Diamandstruktur der Probe identifiziert haben.

Betreuer: Dr. Charles Gould

Versuchsdurchführung am 18. Oktober 2013

Protokollabgabe am ?? . Oktober 2013

## 1 Einleitung

Befindet sich ein Atomkern mit einem nichtverschwindenden Spin in einem Magnetfeld, so kann er elektromagnetische Strahlung absorbieren sowie emittieren. Dieser Effekt wird als Kernspinresonanz (eng.: nuclear magnetic resonance NMR) bezeichnet. Zurückzuführen ist der Effekt auf das magnetische Moment, das durch den Spin des Atomkerns hervorgerufen wird. Dieses magnetische Moment besitzt, je nach Orientierung in einem äußeren Magnetfeld, unterschiedlich viel Energie. Die Energieaufspaltung eines Spins im äußeren Magnetfeld wurde zuerst im Jahre 1896 von Pieter Zeeman an Elektronen in einem Atom und 40 Jahre später von Isidor Rabi an Atomkernen nachgewiesen [citation needed]. Kleinste Unterschiede im lokalen magnetischen Feld von Atomkernen werden in der Chemie eingesetzt um Informationen über den Bindungszustand von Atomen zu gewinnen. Die Unterscheidung von Materialien aufgrund der Kernspinresonanz ermöglicht in der Magnetresonanztomographie zerstörungsfrei Bilder von organischen Proben in Echtzeit aufzunehmen. [citation needed, vielleicht was von der Uni zitieren]

## 2 Theorie

Die Theorie der Kernspinresonanz ist auf die Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Moment des Atomkerns und dem äußeren Magnetfeld zurück zu führen. Das magnetische Moment des Kerns wird dabei

von dessen Spin verursacht und folgt der Beziehung

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{\mu_N}{\hbar} \mathbf{s} \quad (2.1)$$

mit  $g$  dem Landé-Faktor,  $\hbar$  dem planck'schen Wirkungsquantum und  $\mu_N$  dem Kernmagneton. Für ein Proton entspricht dabei das Kernmagneton äquivalent zum Bohrschen Magneton  $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$  mit  $m_p$  der Protonenmasse. Der Landé-Faktor des Protons beträgt etwa 5.59.

Befindet sich das magnetische Moment nun in einem Magnetfeld, so besitzt es die potentielle Energie

$$E_M = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (2.2)$$

und ist somit in seiner energetisch günstigsten Position, wenn es parallel zum äußeren Feld ausgerichtet ist.

Jedes geladene Teilchen mit Drehimpuls  $\mathbf{J}$  besitzt einen magnetischen Dipol  $\boldsymbol{\mu}$ , wodurch in einem Magnetfeld  $\mathbf{B}$  ein Drehmoment  $\mathbf{M}$  auf das Teilchen wirkt. Hierdurch beginnt der Drehimpuls des Teilchens um das angelegte Magnetfeld mit  $\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$  zu präzedieren. Die Präzessionsbewegung kann nach [?] durch

$$d\mathbf{M}(t) = \gamma \mathbf{M}(t) \times \mathbf{B}(t) dt \quad (2.3)$$

beschrieben werden, wobei  $\gamma$  dem gyromagnetischen Verhältnis entspricht, durch das ebenso die Richtung und Größe des Dipols mit  $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{J}$  definiert ist. Die Frequenz der Präzession wird Larmorfrequenz  $\omega_{\text{Larmor}}$

genannt und ist gegeben durch [? ]

$$\omega_{\text{Larmor}} = \frac{g\mu N}{\hbar} B = \gamma \cdot B \quad (2.4)$$

mit dem Landé-Faktor  $g$ .

In einer Probe kommt ein großes Ensemble von Protonenspins vor, sodass sich die Gesamtmagnetisierung  $\mathbf{M}$  der Probe aus der Summe der Erwartungswerte aller magnetischen Momente ergibt [? ].

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^N \langle \psi_k | \hat{\boldsymbol{\mu}} | \psi_k \rangle \quad (2.5)$$

$|\psi_k\rangle$  beschreibt hier die Zustandsfunktionen der  $N$  Protonen. Um nun die dynamische makroskopische Magnetisierung der Probe zu beschreiben werden die sogenannten Bloch-Gleichungen verwendet [? ].

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}(t) - e_x \frac{M_x}{T_2} - e_y \frac{M_y}{T_2} - e_z \frac{M_z}{T_1} \quad (2.6)$$

$T_{1,2}$  sind hier Relaxationszeiten, wobei  $T_1$  der Zeit entspricht, mit der sich die Spintemperatur an die Temperatur des Gesamtsystems angleicht ( $z$ -Richtung) und  $T_2$  der Zeit, in der die Spins in  $x$ - $y$ -Richtung dephasieren.

Im Experiment befindet sich die Probe in einem statischen Magnetfeld  $B_0$ , wodurch eine Präzession mit der Larmorfrequenz um die Magnetfeldachse zustande kommt. Wird nun ein zusätzliches zirkular polarisiertes Feld  $B_1$  eingestrahlt, kann der Drehwinkel der Präzessionsbewegung verändert werden. Das zirkulare Feld  $B_1$  wird mit der selben Frequenz wie die Präzessionsfrequenz der Teilchen eingestrahlt. Hierdurch wirkt im Bezugssystem des Spins ein konstantes Magnetfeld, welches die Präzessionsbewegung des Drehimpulses neu ausrichtet. Stehen  $B_1$  und  $B_0$  genau senkrecht aufeinander, wird der Drehwinkel um exakt 90 gedreht. Die nötige Frequenz des zirkularen Feldes  $B_1$  wird durch die Resonanzfrequenz  $\nu_{\text{res}}$  beschrieben [? ]

$$\nu_{\text{res}} = \frac{\gamma B_0}{2\pi} \quad (2.7)$$

und entspricht genau der Larmorfrequenz der Präzessionsbewegung der Teilchen.

Befinden sich die Protonen nicht dauerhaft im zirkularen polarisiertem Magnetfeld, so kann erreicht werden, dass sich die Magnetisierung nur um einen gewissen Winkel, den Drehwinkel  $\Phi$ , dreht. So kann erreicht

werden, dass sich die Magnetisierung von der  $z$ - z.B. in die  $x$ -Achse Dreht. Der Drehwinkel ergibt sich aus dem gyromagnetischen Verhältnis  $\gamma$ , der Magnetfeldstärke  $B_1$  und der Zeit  $t_{\text{Spule}}$  in der sich die Protonen im Magnetfeld befinden

$$\Phi = \gamma B_1 t_{\text{Spule}}. \quad (2.8)$$

In der Realität kämpft man mit zwei Herausforderungen: Erstens entspricht die Anregungsfrequenz oft nicht der Frequenz, mit der die Protonen um die  $z$ -Achse präzedieren und zum andern ist die Zeit  $t_{\text{Spule}}$  aufgrund unterschiedlicher Geschwindigkeiten der Protonen nicht identisch. Die Abweichung der Anregungsfrequenz kann zumindest für unendlich große Relaxationszeiten analytisch gelöst werden. Die normierte  $z$ -Komponente der Magnetisierung ergibt sich dabei zu

$$\frac{M_z(\Phi, \nu)}{M(t=0)} = \frac{1}{1 + u(\nu)^2} \left[ u(\nu)^2 + \cos(\Phi) \sqrt{1 + u(\nu)^2} \right]. \quad (2.9)$$

Die Verweildauer der Protonen in der Spule kann durch eine Gaußfunktion genähert das obere Ergebnis als Integral über unterschiedliche Drehwinkel numerisch gelöst werden.

### 3 Experimenteller Aufbau

Der verwendete Versuchsaufbau ist in Abbildung ?? schematisch dargestellt.

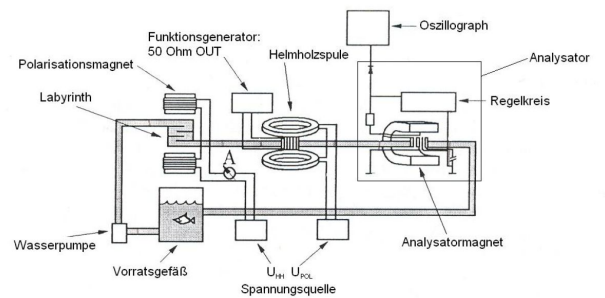


Abb. 1: Schematischer Versuchsaufbau nach [? ].

Das für die Magnetisierung verwendete destillierte Wasser wird von einer Pumpe mit einstellbarer Geschwindigkeit (über die betriebene Spannung) durch einen Wasserkreislauf gepumpt. Als erstes wird das Wasser durch einen Polarisationsmagneten befördert. Im Magneten durchläuft es ein Labyrinth mit dem die

Verweildauer erhöht wurde um eine ausreichende Magnetisierung zu erzeugen. Das magnetisierte Wasser durchläuft dann ein Helmholtzspulenpaar mit dem ein statisches Magnetfeld erzeugt werden kann. Im Zentrum der Spulen ist der Wasserschlauch von einer Einstrahlspule umwickelt, die über ein Funktionsgenerator mit  $50\Omega$  Output, ein Wechselfeld  $B_1$  erzeugen kann. Mit dem Wechselfeld kann im Versuch die Richtung der Magnetisierung manipuliert werden. Der Teil wird somit auch Manipulator genannt. Aus dem Manipulator wird das Wasser in den Analysator gepumpt, in dem die  $z$ -Komponente der Magnetisierung gemessen werden kann. Der Analysator besteht aus einem Hufeisenmagneten, der ein konstantes Magnetfeld erzeugt. Der Hufeisenmagnet ist zudem mit einer Spule umwickelt an die ein Wechselfeld mit 50 Hz, das sogenannte Wobelfeld, angelegt wird. Somit können wir ein sich zeitlich langsam änderndes Magnetfeld erzeugen, das zu jedem Zeitpunkt für die Magnetisierung als statisch angesehen werden kann. Um den Schlauch im Inneren des Hufeisenmagneten ist eine weitere Spule gewickelt, die mit einem Schwingkreis verbunden ist, dessen Frequenz des Wechselfeldes wir einstellen können. Nach dem Analysator gelangt das Wasser zurück in einem Sammelbehälter indem durch eine lange Verweilzeit das Wasser vollständig depolarisieren kann. Der Sammelbehälter schließt letztendlich den Wasserkreislauf.

Durch den Aufbau des Analysators kann die Frequenz des Regelkreis ebenso auf Resonanzfrequenz eingestellt werden, wodurch Übergänge zwischen den Energieniveaus der Protonen angeregt werden. Dieser Übergang absorbiert oder überträgt Leistung auf den Schwingkreis. Der Schwingkreis wird automatisch nachgeregelt. Aus diesem Leistungsausgleich entsteht unser Messsignal. Das Signal des Analysators kann über einen Sample/Hold Verstärker (S/H-Verstärker) mit dem Oszillographen verbunden und mit dem Computer ausgelesen werden. Der S/H-Verstärker wird durch die selbe Sinusspannung getriggert, die das Wobelfeld erzeugt. Der Verstärker misst zu jedem Triggerimpuls kurz das Messsignal und gibt es bis zum nächsten Impuls als Gleichspannung aus. So kann durch richtige Einstellung der Phase die Höhe der Resonanzpeaks ausgelesen werden.

Die gesamte Beschaltung des Messaufbaus ist in Abbildung ?? gezeigt. Im Versuch wurden allerdings nur für den jeweiligen Versuchsteil wichtige Geräte miteinander verschaltet.

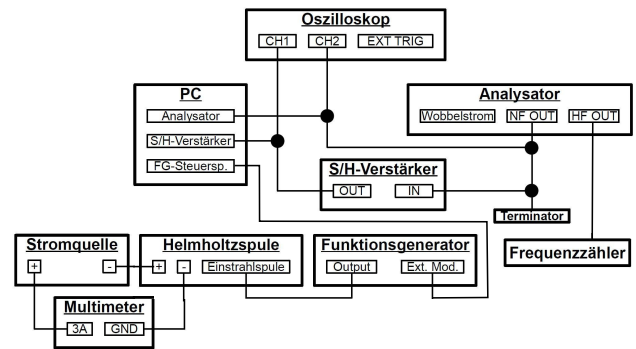


Abb. 2: Beschaltung des gesamten Messaufbaus. Auszüge aus [?].

## 4 Versuchsdurchführung

### 4.1 Inbetriebnahme des Funktionsgenerators

- Geräte überprüfen
- Vergleich Funktionsgenerator mit Oszillograph  
→ führt zu Korrekturfaktoren
- Vergleich Funktionsgenerator mit Oszillograph bei angeschlossener Einstrahlspule – Vorwiderstand  $47\Omega$  Ausgangswiderstand  $50\Omega$   
→ liefert Eichfaktor – Funktionsgenerator/Einstrahlspule

### 4.2 Inbetriebnahme Wasserkreislauf, Polaristor und Analysator

- Pumpe und Polarisationsstrom anschalten (Helmholtz und Manipulation aus)
- Analysator anschalten
- Signal des Detektors (Analysator/Schwingkreis) anschauen
- Ziel: Resonanzfall finden; Ändern der Frequenz des Schwingkreises bis Peaks sichtbar

### 4.3 Inbetriebnahme Computer und Messung von $S^2(t_{12})$

- Messung von  $S(t)$  und Resonanzfrequenz bei verschiedenen Impulsabständen  $t_{12}$
- d.h. Resonanzfall finden und leicht verstellen + schauen was passiert – Abstände der Peaks
- Signal mit und ohne Terminator betrachten

- Frequenz des Schwingkreises ändern + zehn Aufnahmen mit dem Computer – Frequenz notieren!
  - schrittweise Änderung der Analysatorspule – Aufnahme der Zeitdifferenz der Peaks
- Resonanzfrequenz bei  $t_{12} = 10 \text{ ms}$   
 ⇒ Energieaufspaltung und Magnetfeld im Analysator

#### 4.4 Inbetriebnahme Sample and Hold

##### Verstärker und Messung von $S_2(t, I_{\text{pol}})$

- Anschließen Sample and Hold Verstärker
  - Einstellen der Phase über Oszillograph auf  $S_2$  und Messung von  $S_2(t)$  verschiedenen Polarisationsströmen  $I_{\text{pol}}$
- Abhängigkeit der Höhe von  $S_2(t)$  von der Polarisationsstromstärke  $I_{\text{pol}}$
- Messung Polarisationsstrom und Magnetfeld mit Hall-Sonde → linearer Zusammenhang
- Linearität von Magnetfeld zur Signalhöhe

#### 4.5 Messung der Spindrehung im Störfeld, $S_2(\nu)$

- Anschließen Einstrahlspule und Funktionsgenerator
  - Suchen der Resonanz im Störfeld und Messung der Resonanz im Phasenraum
  - Protonen im Erdmagnetfeld Larmorfrequenz  $\approx 1.2 \text{ kHz}$
  - Funktionsgenerator Amplitude  $50 \text{ mV}$
- Spektrum aufnehmen mit Frequenzgrenzen, dass  $1000 \text{ Hz}$  durchgefahen wird – Durchlaufzeit ca.  $60 \text{ s}$
- Messung in anderen Frequenzintervallen ober- und unterhalb der Resonanzfrequenz im Erdmagnetfeld
- Resonanzfrequenz außerhalb berechneten Stelle – Warum?
- Messung bei steigender und fallender Frequenz → 2 verschoben, richtige in der Mitte
  - Amplitude auf  $20 \text{ mV}$  und Frequenzbereich auch  $200 \text{ Hz}$
  - Resonanzkurven in mehreren Frequenzfenster ohne Bereichsänderung mit Amplituden von  $10\text{--}100 \text{ mV}$  im Abstand von  $5 \text{ mV}$
  - Wann Resonanzpeak besonders deutlich
- Auflösung des Phasenraums in Amplitude und Frequenz

- Resonanzfrequenz genau einstellen, Amplitudenbereich so, dass möglichst viele Spindrehungen zu sehen
- Aufnahme der Spindrehung in Abhängigkeit der Amplitude

#### 4.6 Messung der Resonanz im Feld der Helmholtzspulen

•

#### 4.7 Bestimmung der Relaxationszeit von Protonen

- Pumpe aus ( $20 \text{ s}$ ) Messung starten –  $2 \text{ s}$  Pumpe wieder an
  - Stärke Signal in Abhängigkeit der Pumpleistung messen
- Relaxationszeit

#### 4.8 Bestimmung des Störfeldes

- Messung der Resonanzfrequenz für positive und negative Helmholtzströme
- Störfeld

### 5 Auswertung

#### 5.1 Inbetriebnahme des Funktionsgenerators

Um die Genauigkeit des Funktionsgenerators zu überprüfen wird dieser mit dem Oszillographen verbunden. Mit den eingestellten Werten von  $50 \text{ mV}$  bzw.  $100 \text{ mV}$  in der Amplitude und  $1.3 \text{ kHz}$  bzw.  $2.6 \text{ kHz}$  in der Frequenz des Funktionsgenerators messen wir das Signal über den Oszillator, der für die Aufnahme mit dem Computer verbunden ist. An die erhaltenen Messsignale fitten wir jeweils eine Cosinus-Funktion um die Schwankung, die durch die diskrete Zeitauflösung zustande kommt, auszugleichen. Der Fehler der Werte ergibt sich aus der Ungenauigkeit in der Amplitude des Funktionsgenerators von  $2\%$ . Der Fehler der Fitfunktion kann gegen den Fehler in der Amplitude vernachlässigt werden. Für die vier Messungen vergleichen

wir jeweils die Spitze/Spitze Werte, die Amplituden und den Effektivwert. Die Werte sind in Tabelle ?? aufgelistet.

Funktionsgenerator		Oszillograph Spannung in mV		
Amplitude	Frequenz	Spitze/Spitze	Amplitude	Effektiv
50 mV	1.3 kHz	$50.2 \pm 1.0$	$100.6 \pm 2.0$	$35.55 \pm$
50 mV	2.6 kHz	$49.9 \pm 1.0$	$99.9 \pm 2.0$	$35.31 \pm$
100 mV	1.3 kHz	$100.2 \pm 2.0$	$200.2 \pm 4.0$	$70.87 \pm$
100 mV	2.6 kHz	$100.3 \pm 2.0$	$200.6 \pm 4.0$	$70.93 \pm$

**Tab. 1:** Vergleich der eingestellten Werte am Funktionsgenerator mit den am Oszilloskop gemessenen Daten, sowie die gemessenen Spitze/Spitze Werte, die Amplituden und Effektivwerten.

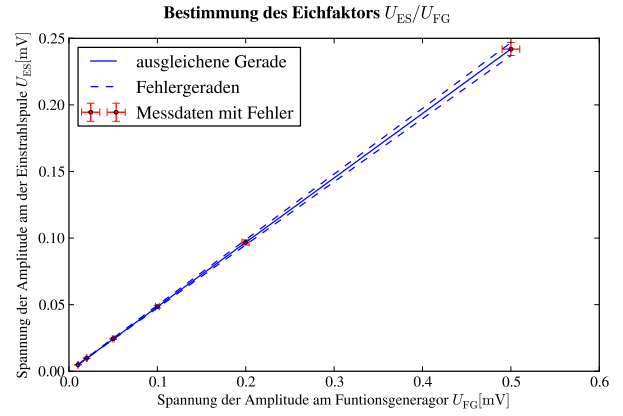
Aus dem Vergleich der Werte in Tabelle ?? ergibt sich im Rahmen der Fehler kein Unterschied zwischen den Werten am Oszillographen und den eingestellten Werten. Anhand der berechneten Werte erkennt man, dass die Genauigkeit des Funktionsgenerators auch bei unterschiedlichen Amplituden und Frequenzen erhalten bleibt.

Die Einstrahlspule im Manipulator besitzt einen kleinen Innenwiderstand. Allerdings ist der Spule um den Strom zu begrenzen und messbar zu machen ein Vorwiderstand von  $47 \Omega$  eingebaut [? ]. Aus dem zusätzlichen Ausgangswiderstand des Funktionsgenerator von  $50 \Omega$  wird die Amplitude der Ausgangsspannung reduziert [? ]. Um für nachfolgende Messungen einen Eichfaktor  $E_{\text{Spule}}$  zu erhalten haben wir obige Messung für eine Frequenz von 1.3 kHz und die Amplituden 10 mV, 20 mV, 50 mV, 100 mV, 200 mV und 500 mV wiederholt. Hierbei haben wir jeweils eine Messung mit und ein ohne angeschlossener Einstrahlspule aufgenommen. Zur Bestimmung des Eichfaktors  $E_{\text{Spule}}$  haben wir in Abbildung ?? die gemessenen Spannungen mit angeschlossener Spule  $U_{\text{ES}}$  über die eingestellten Spannungen des Funktionsgenerators  $U_{\text{FG}}$  aufgetragen.

Die Werte in Abbildung ?? sind mit den entsprechenden Fehlern in der Amplitude des Funktionsgenerators (2 %) aufgetragen. Zur Bestimmung der Steigung haben wir eine ausgleichende Gerade mit Fehlergeraden an die Daten gelegt. Die Fehler des Fits können vernachlässigt werden. Für den gemessenen Eichfaktor ergibt sich somit

$$E_{\text{Spule}} = \frac{U_{\text{ES}}}{U_{\text{FG}}} = 0.4839 \pm 0.0097 \quad (5.1)$$

Aus den gemessenen Werten erkennen wir, dass der Eichfaktor unabhängig von der gemessenen Frequenz der



**Abb. 3:** Gemessene Spulenspannung an der Einstrahlspule  $U_{\text{ES}}$  über die eingestellte Spannung am Funktionsgenerators  $E_{\text{FG}}$  zur Bestimmung des Eichfaktors.

Wechselspannung an der Einstrahlspule ist. Dies ist auch wichtig um den Eichfaktor für spätere Versuche verwenden zu können, da dort an unterschiedlichen Frequenzen gemessen wird.

Der Eichfaktor kann zudem theoretisch aus der Kenntnis der Widerstandswerte bestimmt werden.

$$E_{\text{Spule,theo}} = \frac{R_{\text{ES}}}{R_{\text{FG}} + R_{\text{ES}}} = 0.4845 \pm 0.0097 \quad (5.2)$$

Der Fehler ergibt sich aus dem geschätzten Fehler des Vorwiderstandes von 2 %.

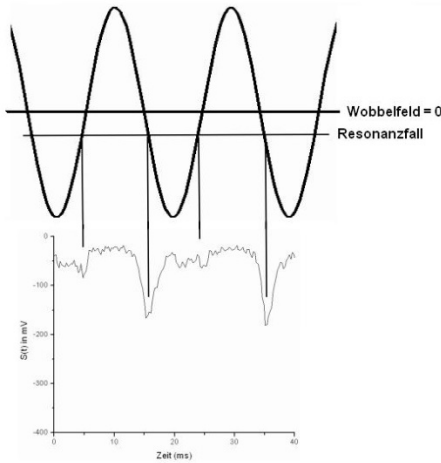
Aus dem Vergleich des experimentell bestimmten Wertes mit dem berechneten sehen wir im Rahmen der Fehler eine sehr gute Übereinstimmung. Für nachfolgende Messungen verwenden wir somit den aus unserer Messung erhaltenen Eichfaktor.

## 5.2 Inbetriebnahme Wasserkreislauf, Polaristor und Analysator

In diesem Versuchsteil sollte bei eingeschalteter Wasserpumpe, Analysator und Polarisator der Schwingkreis des Analysators auf die Resonanzfrequenz eingestellt werden. Das Signal konnten wir über den Oszillographen beobachtet und durch verändern der Frequenz des Schwingkreises so einstellen, dass die erhaltenen Resonanzsignale mit einem äquidistanten Abstand detektiert werden.

### 5.3 Inbetriebnahme Computer und Messung von $S_2(t_{12})$

Im dritten Versuchsteil soll die Resonanzfrequenz der Protonenspins im Magnetfeld des Analysator-Magneten bestimmt werden. Daraus lassen sich die magnetische Feldstärke des Analysator-Magneten und die Energieaufspaltung der Protonen-Spins bestimmen. Wir variieren dazu die Analysatorfrequenz in kleinen Schritten. Zweimal pro Periode des Wobbelstromes tritt dabei der Resonanzfall im äußeren Feld auf, wie in ?? skizziert ist. Damit wird deutlich, dass die Reso-

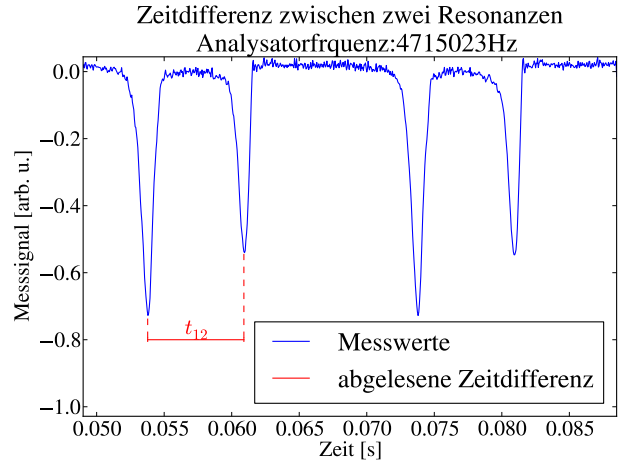


**Abb. 4:** Die Analysatorfrequenz trifft zweimal pro Periode des Wobbelfeldes die Resonanzfrequenz. Sie bestimmt mit ihrer Höhe den zeitlichen Abstand zweier Resonanzfälle.

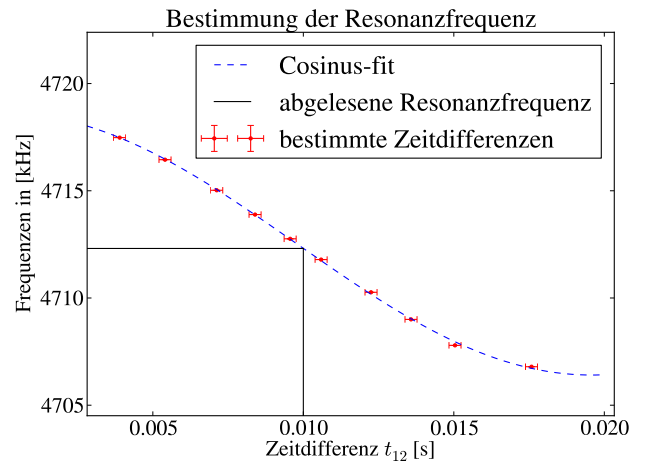
nanzfrequenz und der zeitliche Abstand  $t_{12}$  zwischen zwei Resonanzfällen einen Cosinus-Zusammenhang besitzen. Wie in ?? messen wir für 10 verschiedene Analysatorfrequenzen den zeitlichen Abstand zweier der Resonanzen aus. Die Ablesegenauigkeit der Zeitdifferenzen schätzen wir auf 0.0002 Sekunden. Der Frequenzzähler zeigte während der Messung leicht unterschiedliche Werte im Bereich von  $\pm 1$  Hz an. Diese Unsicherheit vernachlässigen wir gegenüber der Ablesegenauigkeit der Zeitdifferenzen. Nun tragen wir die Frequenzen über die abgelesenen Zeitdifferenzen in ?? auf und lesen bei 0.01 s die Resonanzfrequenz der Protonen im Feld des Dauermagneten ab.

$$\nu_{\text{res}} = (4712.31 \pm 0.20) \text{ kHz} \quad (5.3)$$

Der Fehler der Resonanzfrequenz ergibt sich auch der Unsicherheit der Zeitdifferenz und der Steigung der Fit-Kurve im Ablesepunkt. Die Energieaufspaltung und die



**Abb. 5:** Für jede Frequenz wird der zeitliche Abstand zweier Resonanzereignisse abgelesen.



**Abb. 6:** Abgelesene Zeitdifferenzen sind in Abhängigkeit der Frequenz aufgetragen und besitzen eine Cosinus-Abhängigkeit.

Magnetfeldstärke des Dauermagneten ergeben sich nun zu

$$\Delta E = h\nu_{\text{res}} = 19.488\,54(83) \times 10^{-9} \text{ eV} \quad (5.4)$$

und

$$B_0 = \frac{2\pi\nu_{\text{res}}}{\gamma_p} = 0.110\,676\,1(47) \text{ T} \quad (5.5)$$

## 5.4 Inbetriebnahme Sample and Hold

### Verstärker und Messung von $S2(t, I_{\text{pol}})$

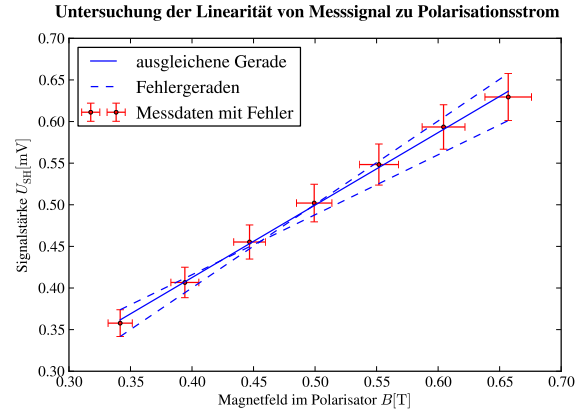
Unser Versuchsaufbau wird nun um den S/H-Verstärker erweitert. Mit dem S/H-Verstärker kann nun die Signalhöhe der Resonanzpeaks  $S2(t)$  ausgelesen werden. Im folgendem Versuchsteil soll die Abhängigkeit der Signalhöhe von der Polarisationsstromstärke  $I_{\text{pol}}$  des Polarisators, also der Polarisierung der Protonen im Wasser untersucht werden. Hierfür nehmen wir das Signal  $S2(t)$  über die Zeit von 50 s für Polarisationsströme von 1.3 A bis 2.5 A in 0.2 A-Schritten auf.

Zur Verifikation des Magnetfeldes im Polarisator messen wir mit einer Hall-Sonde das Magnetfeld bei 2.5 A. Die Messung mit der Hallsonde beträgt

$$U_{\text{pol}}(2.5 \text{ A}) = (5.60 \pm 0.05) \text{ mV}, \quad (5.6)$$

wobei sich der Fehler aus der Ablesegenauigkeit der analogen Spannungsanzeige ergibt. Da der Strom und das Feld im Magneten proportional sind, kann jeder eingestellten Stromstärke am Polarisator eine Magnetfeldstärke zugeordnet werden. Der Fehler des eingestellten Stroms am Polarisatormagneten wird mit 2 % Anzeigegenauigkeit abgeschätzt. Um die Linearität des Messsignals in Abhängigkeit vom Magnetfeld zu untersuchen sind die gemessenen Werte in Abbildung ?? abgebildet. Die Werte für die Signalhöhe ergeben sich aus einem linearen Fit an die Messdaten der über die Zeit von 50 s aufgenommenen Messungen für verschiedene Stromstärken.

Mit Abbildung ?? können wir die Linearität des Messsignals  $S2$  zur Polarisationsstromstärke  $I_{\text{pol}}$  sehr gut bestätigen. Die Fehler im  $B$ -Feld ergeben sich aus der Ungenauigkeit der Strommessung am Polarisator von 2 % und der Bestimmung des Magnetfeldes mit der Hallsonde. Der Fehler im Messsignal schätzen wir auf



**Abb. 7:** Signalhöhe  $S2$  der Resonanzpeaks in Abhängigkeit der Polarisationsfeldstärke zur Untersuchung der Linearität.

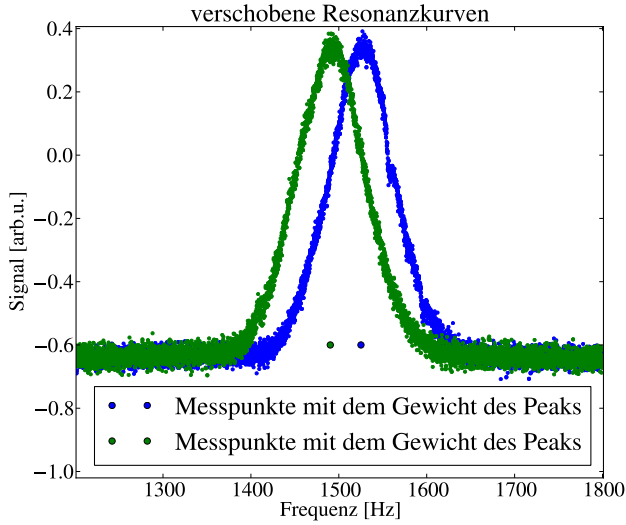
4 %. Durch die Anzahl der Messungen können statistische Schwankungen vernachlässigt werden. Der Fehler resultiert somit nur aus der Ungenauigkeit in der Einstellung der Resonanz, sowie der Phase des S/H-Verstärkers.

## 5.5 Messung der Spindrehung im Störfeld, $S2(\nu)$

In diesem Aufgabenteil sollen die Spins der Protonen im Störfeld des Raumes manipuliert werden, um damit die Stärke des Störfeldes zu bestimmen. Dazu werden die Protonen, wie im letzten Versuchsteil, im Polarisator polarisiert. Anschließend gelangen sie zur Manipulatorschleife, wo der Spin mit Hilfe der passenden Einstabfrequenz gedreht werden kann. Die Resonanzfrequenz entspricht dabei wieder der Larmor-Frequenz im Störfeld. Für jede Frequenz wird das Signal am Analysator detektiert. Bei der Bestimmung der Resonanzfrequenz stößt man auf folgendes Problem: Am Computer werden gleichzeitig das Signal der Analysators und die Amplitude/Frequenz der Einstrahlungsschleife gespeichert. Dies geschieht, obwohl das Wasser eine gewisse Zeit vom Manipulator zum Analysator benötigt. Man muss also beim Durchfahren von niedrigen zu hohen Frequenzen die Signale am Analysator, die von vergangenen, sprich niedrigeren Frequenzen stammen. Das Maximum des gemessenen Signals scheint zu höheren Frequenzen verschoben zu sein. Um diesen Effekt auszugleichen, messen wir zweimal. Mit ansonsten gleichen Einstellungen messen wir einmal von niedrigen zu hohen und anschließend von hohen zu niedrigen Frequen-



zen. In ?? sind die zwei Resonanzkurven zu sehen, die jeweils von der wahren Resonanzkurve nach links und nach rechts verschoben sind. Zu den Messwerten wur-



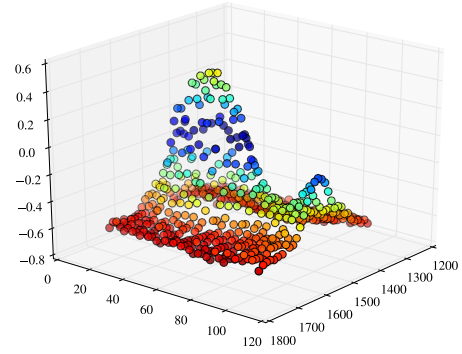
**Abb. 8:** Resonanzkurven des Up- und Down-sweeps mit verschobenen Schwerpunkten.

den die Schwerpunkte der Peaks berechnet. Sie unterscheiden sich von ihrem Mittelwert  $\nu_{\text{res}} = (1507 \pm 1) \text{ Hz}$  um  $\pm \Delta\nu = 17 \text{ Hz}$ . Die Resonanzfrequenz entspricht der Präzessionsfrequenz der Protonen in einer Feldstärke von

$$B_{\text{Raum}} = \frac{2\pi\nu_{\text{res}}}{\gamma_p} = 36.39(1) \mu\text{T}. \quad (5.7)$$

Diese Feldstärke liegt in der Größenordnung der Erd-Magnetfeldstärke. Aus der Verschiebung lässt sich außerdem ableiten, dass das Wasser etwa 3 Sekunden von der Einstrahlpule bis zu Analysator benötigt hat. Eine genauere Berechnung der Wassergeschwindigkeit folgt in ??.

Im Magnetfeld des Raumes soll nun untersucht werden, wie sich das Messsignal in Abhängigkeit der Einstrahl-Frequenz und der  $\gamma$ -Intensität verhält. Wir messen für Spannungen von 10 bis 100 mV bei Frequenzen von 1200 bis 1800 Hz. Die Messpunkte sind in ?? dargestellt. Man erkennt, dass sich die Intensität des Messsignals bei etwa 45 mV Einstrahlamplitude komplett das Vorzeichen gewechselt hat. Die Analysatorspule gewinnt an diesem Punkt Energie aus den polarisierten Protonen, deren Spin von der Einstrahlpule zuvor in die höherenergetische Richtung gedreht wurde. Wir überprüfen, ob sich der Spin bei den verwendeten



**Abb. 9:** Signalhöhe in Abhängigkeit der Einstrahl-Frequenz und der  $\gamma$ -Intensität.

Einstellungen tatsächlich um  $180^\circ$  dreht, indem wir folgende Überlegung machen: Durchquert ein Spin eine Leiterschleife, deren Magnetfeld mit der Resonanzfrequenz oszilliert, dann wird der Spin um

$$\Theta(n=1) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \frac{B_o(t)}{2} dt \quad (5.8)$$

gedreht. Der Faktor  $\frac{1}{2}$  berücksichtigt dabei die Zerlegung des linear oszillierenden  $B$ -Feldes in zwei zirkuläre  $B$ -Felder, von denen eines vernachlässigt wird. Bewegt sich der Spin auf der Achse dieser Leiterschleife, kann die Gleichung mit dem Biot-Savart-Gesetz auf

$$\Theta(n=1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma\mu_0 I}{4} \frac{r^2}{(r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dl}{v} \quad (5.9)$$

umgeschrieben werden, wobei  $r$  den Radius der Spule,  $l$  den Abstand vom Mittelpunkt der Leiterschleife und  $v$  die Wassergeschwindigkeit angibt. Das bedeutet, dass jede Spule diesen Beitrag zum Drehwinkel liefert. Der Gesamtdrehwinkel ergibt sich dann nach dem Lösen des Integrals zu

$$\Theta = \frac{\gamma\mu_0 \frac{f_{ES} U_{ES}}{R_{ES}} N}{2v} = ?? \quad (5.10)$$

und ist somit unabhängig von den geometrischen Abmessungen der Spule



## 5.6 Messung der Resonanz im Feld der Helmholtzspulen

Zur Bestimmung von Betrag und Winkel des Störfeldes sowie das Magneton des Protons, verwenden wir das Helmholtzspulenpaar um die Einstrahlspule. Der Strom in der Helmholtzspule regeln wir über die Spannung an der Stromquelle und lesen den Wert über ein Präzisionsmultimeter aus. Durch einen Serienwiderstand an der Helmholtzspule wird der Strom stabilisiert. Wir messen bei den Helmholtzspulenströmen von  $I_{\text{HH}} = 45 \text{ mA}$ ,  $65 \text{ mA}$  und  $80 \text{ mA}$  wie im vorherigen Versuchsteil die Resonanzkurven durch einen Frequenz-Sweep am Funktionsgenerator.

Das Feld im Zentrum der beiden Spulen kann mit der Näherung aus [?] bestimmt werden.

$$B_{\text{HH}} \approx \frac{\mu_0 n I_{\text{HH}}}{R} \left[ \frac{8}{5\sqrt{5}} \left( 1 - \frac{\zeta^2}{60R^2} \right) - \frac{31\zeta^2 - 36\eta^2}{125R^4} r^2 \right] \quad (5.11)$$

Hier gilt aus der Spulengeometrie  $\zeta = 0.03 \text{ m}$ ,  $\eta = 0.046 \text{ m}$ , der Radius der Spulen  $R = 0.207 \text{ m}$ , die Windungszahl  $n = 720$  und die Abweichung der Spulenchse zur Einstrahlspule  $r = 0.015 \text{ cm}$  [?]. Somit können wir die Proportionalitätskonstante  $c$  bestimmen.

$$B_{\text{HH}} = c \cdot I_{\text{HH}} \quad (5.12)$$

$$c = 0.003127 \frac{\text{T}}{\text{A}} \quad (5.13)$$

Die Bestimmung von Betrag und Winkel des Störfeldes erhalten wird dadurch, dass in der Helmholtzspule das effektiv wirkende Feld aus dem Störfeld  $B_{\text{S}}$  und dem Spulenfeld  $B_{\text{HH}}$  zusammensetzt [?].

$$B_{\text{eff}} = B_{\text{HH}} + B_{\text{S}} \quad (5.14)$$

Für die Resonanzfrequenzen im Magnetfeld gilt nach [?]

$$\nu_{\text{res}} = \frac{g\mu_{\text{K}}}{h} B_{\text{eff}}. \quad (5.15)$$

Da das Helmholtzspulenfeld zudem vom Spulenstrom  $I_{\text{HH}}$  abhängig ist, gilt [?]

$$\nu^2(+I_{\text{HH}}) + \nu^2(-I_{\text{HH}}) = 2 \frac{g^2 \mu_{\text{K}}^2}{h^2} (c^2 I^2 + B_{\text{S}}^2). \quad (5.16)$$

Aus diesem Grund messen wir die Kurven für positive  $I_{\text{HH}}$  und negative  $-I_{\text{HH}}$  Helmholtzspulenströme. Aus den selben Gründen wie im Versuchsteil ?? messen wir

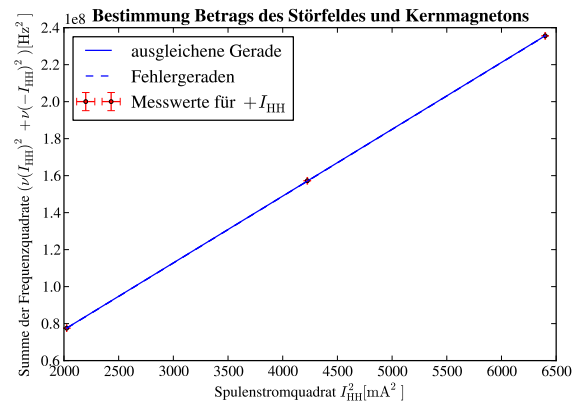
einmal von niedrigen und einmal von hohen Frequenzen kommend.

Wie im Teil ?? bestimmen wir aus den Messungen für steigende und fallende Frequenz-Sweeps die Resonanzfrequenz für einen eingestellten Spulenstrom. Die Werte sind in Tabelle ?? aufgetragen.

$I_{\text{HH}} [\text{mA}]$	$\nu_{\text{res}} [\text{Hz}]$
$+45.0 \pm 0.2$	$6826.3 \pm 2.0$
$-45.0 \pm 0.2$	$5562.2 \pm 2.0$
$+65.0 \pm 0.2$	$9480.2 \pm 2.0$
$-65.0 \pm 0.2$	$8207.7 \pm 2.0$
$+80.0 \pm 0.2$	$11473.2 \pm 2.0$
$-80.0 \pm 0.2$	$10195.6 \pm 2.0$

**Tab. 2:** Resonanzfrequenz in Abhängigkeit des Spulenstroms.

Der Ungenauigkeit in der Einstellung des Helmholtzspulenstroms betrug  $0.2 \text{ mA}$  und ergibt den Fehler in  $I_{\text{HH}}$ . Der Fehler der Resonanzfrequenz entspricht der Ablesegenauigkeit von  $1 \text{ Hz}$ . Zur Auswertung sind in Abbildung ?? die Summe der Frequenzquadrate über das Quadrat des Spulenstroms nach Gleichung (??) aufgetragen.



**Abb. 10:** Summe der Resonanzfrequenzquadrate für verschiedene Spulenströme zur Bestimmung des Magnetons des Protons und der Amplitude des Störfeldes.

Aus Abbildung ?? erhalten wird die Steigung der Ausgleichsgeraden  $m_{\text{Summe}} = (36125 \pm 22) \text{ Hz}^2/\text{mA}^2$  und den  $y$ -Achsenabschnitt  $y(0) = (4458 \pm 80) \times 10^3 \text{ Hz}^2$  mit den Fehlern aus den Geraden maximaler und minimaler Steigung. Mit Hilfe von Gleichung (??) können wir somit das Kernmagneton  $\mu_{\text{K}}$  und die Amplitude des

Störfeldes  $B_S$  bestimmen.

$$\mu_K = (5.0979 \pm 0.0016) \times 10^{-27} \frac{\text{T}}{\text{A}} \quad (5.17)$$

$$B_S = (34.74 \pm 0.31) \mu\text{T} \quad (5.18)$$

Der Literaturwert für das Kernmagneton beträgt nach ? ]

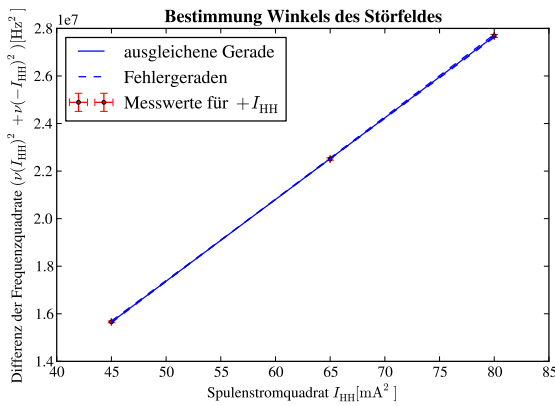
$$\mu_K = 5.05078 \times 10^{-27} \frac{\text{T}}{\text{A}}. \quad (5.19)$$

Der experimentell ermittelte Wert ist im Rahmen seiner Fehler leider nicht mehr mit dem Literaturwert vereinbar. Dies liegt an systematischen Fehlerquellen in der Messung. So ist es möglich, dass die Resonanzfrequenz nicht exakt eingestellt war oder der Spulenstrom in den beiden Messungen für positive und negative Richtung doch nicht exakt gleich war.

Um nun noch den Winkel des Störfeldes zu bestimmen verwenden wir die Differenz der Frequenzquadrat nach ? ],

$$\nu^2(+I_{HH}) - \nu^2(-I_{HH}) = 4 \frac{g^2 \mu_K^2}{h^2} (c I_{HH} B_S \cos \phi) \quad (5.20)$$

woraus wir den Winkel  $\phi$  des Störfeldes bestimmen können. Die Auftragung der Differenz der Frequenzquadrate über den Helmholtzspulenstrom ist in Abbildung ?? aufgetragen.



**Abb. 11:** Differenz der Resonanzfrequenzquadrate für verschiedenen Spulenströme zur Bestimmung des Winkels des Störfeldes.

Aus Abbildung ?? erhalten wir für die Steigung der Ausgleichsgeraden  $m_{\text{Differenz}} = (3434 \pm 27) \times 10^2 \text{ Hz}^2/\text{mA}$  mit dem Fehler durch die Geraden minimaler und maximaler Steigung. Mit Gleichung (??) erhalten wir somit den Winkel des

Störfeldes.

$$\phi = (89.997546 \pm 0.000046)^\circ \quad (5.21)$$

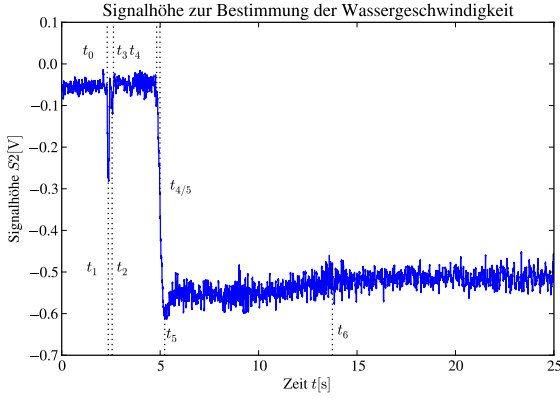
Der Fehler im Winkel  $\phi$  folgt nach Gauß'scher Fehlerfortpflanzung aus den Fehlern für das Störfeld  $B_S$ , der ermittelten Steigung  $m_2$  und dem Kernmagneton  $\mu_K$ . Das Störfeld im unseren Experiment ist also mit einem Winkel  $\phi \approx 90$  relativ zum Feld der Helmholtzspulen ausgerichtet. Wir vermuten, dass das Feld in Richtung Zimmerdecke (oder entgegengesetzt) zeigt. Dies liegt daran, dass wir den Polarisator als Hauptstörquelle ausmachen und dieser in dieser Richtung im Raum steht.

## 5.7 Bestimmung der Relaxationszeit von Protonen

Um die Relaxationszeit  $T_1$  von polarisierten Protonen zu bestimmen und die Abhängigkeit von der Wassertemperatur zu untersuchen, verwenden wir den Aufbau wie in Versuchsteil ???. Wir untersuchen die Zeit, welche die Protonen benötigen um aus dem Polarisator in den Analysator zu gelangen. Dazu schalten wir zunächst die Pumpe ab und warte circa 20s bis das Wasser nicht mehr fließt, die Protonen im Polarisator polarisiert und die Protonen im restlichem Teil depolarisiert sind. Anschließend starten wir die Aufzeichnung des Messsignals  $S_2(t)$  und kurz danach die Wasserpumpe. Diesen Versuch führen wir bei Pumpspannungen von  $U_{\text{pump}} = 6 \text{ V}$  bis 12 V in 1.5 V-Schritten durch. Unter 6 V Pumpspannung führen wir keine Messung mehr durch, da bei so niedriger Pumpleistung die Turbulenz des Wassers im Schlauch nicht mehr gewährleistet ist. Den Wert haben wir gewählt, indem wir unterhalb dieses Wertes gemessen haben und die Kurven nicht mehr dem erwarteten Verlauf zeigen. Zudem führen wir das Experiment bei den Temperaturen von circa 10 °C, 20 °C, 40 °C und 60 °C um die Abhängigkeit der Temperatur zu untersuchen. Die Temperaturwerte sind natürlich nicht exakt und dienen hier der Zuordnung, werden aber in der Auswertung exakt genannt.

Der typische Kurvenverlauf der Messung ist in Abbildung ?? für eine Temperatur von 34.0 °C und einer Pumpspannung von 12 V gezeigt.

Dem Verlauf kann man entnehmen, dass bei abgeschalteter Pumpe  $t < t_0$  nahezu kein Signal aufgenommen wird. Nach Einschalten der Pumpe, diesen Zeitpunkt



**Abb. 12:** Verlauf des Messsignals  $S2(t)$  über die Zeit bei  $T = 34.0\text{ °C}$  und einer Pumpspannung von  $U_{\text{pump}} = 12\text{ V}$ .

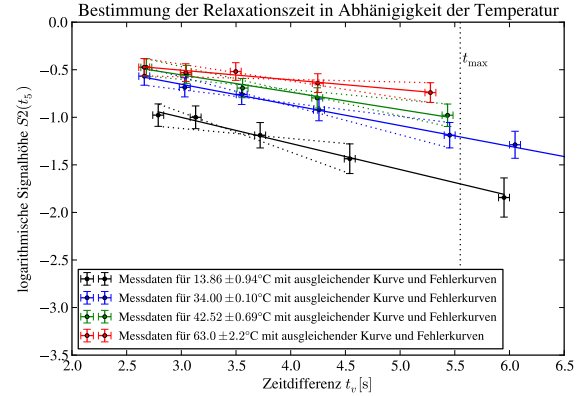
kennzeichnen wir mit  $t_0$  messen wir zunächst die Protonen die noch durch das Feld des Analysatormagneten polarisiert sind. Da durch den Versuchsaufbau der Wasserschlauch zunächst direkt am Analysatormagneten vorbeiführt und erst dann über eine Kurve in den Analysator gelangt, erkennen wir einen Peak bei  $t_1$  und einen bei  $t_2$ . Der große Peak  $t_1$  kommt von den Protonen die sich noch im Analysator befunden haben und der Kleine bei  $t_2$  von den Protonen die sich zu Beginn neben dem Analysator, jedoch in seinem Feld befunden haben. Nachdem die Protonen aus dem Analysatorfeld gemessen wurden  $t_3$ , messen wir bis  $t_4$  kein Signal. Bei  $t_4$  messen wir die Protonen, die im Polarisator polarisiert wurden. Diese besitzen eine Signalstärke, die an  $t_5$  abgelesen werden kann. Zur Zeit  $t_5$  messen wir die Protonen aus dem Polarisator. Diese sind am stärksten polarisiert. Wir lesen im Experiment die Zeit bei  $t_{4/5}$  ab, da hier ein Proton mit mittlerer Geschwindigkeit im Analysator ankommt. Nach der Zeit  $t_6$  geht das Signal zurück, da nun die Protonen gemessen werden, die zum ausgeschalteten Zustand der Pumpe noch nicht im Polarisator waren und erst beim durchfließen, also kürzer und somit weniger, polarisiert wurden.

Anhand der Messung kann die Zeit  $t$  abgelesen werden, welche die Protonen aus dem Polarisator benötigen um in den Analysator zu gelangen.

$$t_v = t_{4/5} - t_0 \quad (5.22)$$

Aus den Messungen für verschiedenen Pumpspannungen, also Wassergeschwindigkeiten, lesen wir die Zeiten  $t_v$  ab und tragen die Signalhöhe  $S2(t_5)$  halblogarith-

misch auf um die Relaxationszeit bestimmen zu können. Die Kurven für die gemessenen Temperaturen sind in Abbildung ?? gezeigt.



**Abb. 13:** Halblogarithmische Auftragung der Signalhöhe  $S2(t_5)$  über die Zeitdifferenz  $t_v$  für verschiedenen Geschwindigkeiten und Temperaturen.  $t_{\text{max}}$  kennzeichnet die Zeit, welche die Protonen maximal benötigen dürfen, damit von einer turbulenten Strömung ausgegangen werden kann.

Da die Temperatur im Versuch nicht konstant gehalten konnte, haben wir bei jeder Messung die Temperatur mit einem batteriebetriebenen Thermometer gemessen und für die gemeinsame Auftragung bei verschiedenen Wassergeschwindigkeiten gemittelt. Die Fehler in Abbildung ?? resultieren bei der Zeitdifferenz aus einem Ablesefehler von 0.05s und in der Signalhöhe aus einem Ablesefehler von 0.02 V und der Ungenauigkeit in S/H-Signal von 5 %. Die Messung ist zudem nur aussagekräftig, wenn Strömungen turbulent sind. Die minimale Fließgeschwindigkeit kann mit einer Reynoldszahl von 3000 bestimmt werden. Bei über  $R = 3000$  spricht man von turbulenter und unter  $R = 2000$  von laminarer Strömung. Mit folgender Formel aus [?] ]

$$R = \frac{2\rho r v}{\eta} \quad (5.23)$$

ergibt sich mit dem Innenradius des Wasserschlauches  $r = 2.25 \times 10^{-3}\text{ m}$ , der Dichte des Wassers  $\rho = 998.2\text{ kg/m}^3$  und seiner Zähigkeit  $\eta = 1.002 \times 10^{-3}\text{ N s/m}^2$  die minimale Flussgeschwindigkeit

$$v_{\text{min}} = 0.6692 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (5.24)$$

Die Schlauchlänge haben wir mit einem Maßband gemessen und erhalten folgende Werte

Die Gesamtlänge des Schlauches vom Polarisator bis

von →bis	Länge
Polaristor →Einstrahlspule	$(168 \pm 2) \text{ cm}$
Einstrahlspule →Analysator	$(146 \pm 2) \text{ cm}$
im Inneren des Analysators	$(46.0 \pm 0.5) \text{ cm}$
Schlauch durch Einstahlspule	$(16.5 \pm 0.5) \text{ cm}$

**Tab. 3:** Gemessenen Schlauchlängen für verschiedene Teile des Versuchs.

$T[^\circ\text{C}]$	$T_1[1/\text{s}]$
$(13.86 \pm 0.94) ^\circ\text{C}$	$3.6 \pm 1.7$
$(34.00 \pm 0.10) ^\circ\text{C}$	$4.6 \pm 1.5$
$(42.52 \pm 0.69) ^\circ\text{C}$	$5.5 \pm 1.9$
$(63.0 \pm 2.2) ^\circ\text{C}$	$9.8 \pm 6.1$

**Tab. 4:** Relaxationszeiten für verschiedenen Temperaturen

zur Analysatorspule ergibt sich aus Tabelle ?? zu

$$L_{\text{gesamt}} = (376.5 \pm 5.0) \text{ cm} = (3.765 \pm 0.050) \text{ m} \quad (5.25)$$

Um eine zusätzliche Abschätzung zu bekommen, ab welcher Geschwindigkeit die Strömung laminar wurde, bestimmen wir die minimale Zeit  $t_{\text{max}}$ , die das Wasser vom Polarisator bis zum Analysator maximal benötigen darf, damit es die Bedingung (??) erfüllt.

$$t_{\text{max}} = \frac{L}{v_{\text{min}}} = 5.55 \text{ s} \quad (5.26)$$

Hier wurde die Länge mit maximalen Fehler  $L = (3.765 - 0.050) \text{ m}$  verwendet um einen sicheren Wert für  $t_{\text{max}}$  zu erhalten, der folglich fehlerfrei ist. Folglich können wir nur die Messwerte verwenden, für die  $t_v > t_{\text{max}}$  gilt. Diese Bedingung wurde bei den Fitkurven in Abbildung ?? und der Auswertung berücksichtigt.

An die Messdaten aus Abbildung ?? wurden Exponentialfunktionen gefittet und mit  $dM_z(t) = -1/T_1 M_z(t) dt$  nach ? ] die Relaxationszeit  $T_1$  bestimmt. Die erhaltenen Werte sind in Tabelle ?? aufgetragen.

Die Fehler in den Relaxationszeiten erhalten wir aus den Fehlerkurven in Abbildung ?. Im Vergleich ist zu erkennen, dass der Fehler für die Relaxationszeit bei  $60^\circ\text{C}$  deutlich größer als die restlichen sind. Dies liegt daran, dass die Steigung wesentlich kleiner ist, was bei gleicher Abweichung durch die Fehlerkurven in einem deutlich größeren Fehler resultiert. Zudem können wir aus Abbildung ?? wie auch an den Werten in Tabel-

le ?? erkennen, dass die Relaxationszeiten bei höheren Temperaturen größer werden. Die Protonen relaxieren also langsamer wenn sie warm sind. **Warum??**

**Wassergeschwindigkeit in der Einstrahlspule** Im folgendem wird zudem die Wassergeschwindigkeit in der Einstrahlspule bestimmt, da diese für Versuchsteil ?? benötigt wird. Hierfür verwenden wir die Zeit  $t_v(12 \text{ V}, 20^\circ\text{C}) = (2.661 \pm 0.028) \text{ s}$ , die das Wasser durch den gesamten Schlauch bei maximaler Pumpleistung und Raumtemperatur benötigt. Der Schlauch besitzt bis zum Schlauchstück der Einstrahlspule nach Tabelle ?? eine Länge von  $l_1 = (168 \pm 2) \text{ cm}$  und ab dem Stück bis zum Analysator eine Länge von  $l_3 = (146.0 + 46.0) \pm (3.0) \text{ cm}$ . In diesen Stücken beträgt der Innendurchmesser  $d_1 = 6 \text{ mm}$  [? ]. Das Schlauchstück durch die Einstrahlspule beträgt  $l_2 = (16.5 \pm 0.5) \text{ cm}$  mit einem Innendurchmesser von  $d_2 = 4 \text{ mm}$  [? ]. Die Fehler der Durchmesser werden im Vergleich zum Fehler in der Länge als vernachlässigbar angenommen. Nach der Kontinuitätsgleichung gilt, dass das Verhältnis von durchflossener Fläche zum Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeiten invers ist. Es fließt also gleiches Volumen pro Zeit durch einen den Schlauch und es gilt daraus

$$\frac{v_2}{v_1} = \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2. \quad (5.27)$$

Für die Zeit  $t_v$  die das Wasser von Polarisator zum Analysator benötigt gilt

$$t_v = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2}. \quad (5.28)$$

Für  $v_1$  verwenden wir die Geschwindigkeit des Wassers unter der Annahme, dass der Schlauchdurchmesser auf der gesamten Länge konstant ist.

$$v_1 = \frac{L_{\text{gesamt}}}{t_v(12 \text{ V}, 20^\circ\text{C})} = (1.415 \pm 0.034) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (5.29)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (??) in Gleichung (??) und Auflösen nach der Geschwindigkeit  $v_2$  im Inneren des Schlauchstücks durch die Einstrahlspule, erhalten wir

$$v_2 = (3.10 \pm 0.24) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (5.30)$$

## 6 Zusammenfassung

Wir konnten mit dem Versuch einen guten Einblick in die Röntgenspektroskopie gewinnen. Die charakteristischen Linien von Eisen, Molybdän und Kupfer wurden mit recht hoher Genauigkeit nachgewiesen, wobei der größte Abstand von unseren Bestwerten zu den Theoriewerten 0.65 % betrug. Im Rahmen der Fehler gab es keine Abweichung. Das empirische Gesetz zwischen der Intensität der charakteristischen Strahlung und der Spannung zeigt systematische Abweichungen für Spannungen ab 30 kV und sollte eher als Faustregel verstanden werden. Das Duane-Hunt-Gesetz hingegen konnte gut bestätigt werden und hat uns erlaubt, das Plancksche Wirkungsquantum zu bestimmen. Das Moseley-Gesetz wurde ausführlich diskutiert und hat gute Abschätzungen für die Rydberg-Konstante ergeben. Allerdings ist die Auswertung der *Abschirmkonstante*  $\sigma(Z)$  nicht wirklich sinnvoll. Mit dem Compton-Effekt konnte eine überraschend gute Bestimmung der Compton-Wellenlänge durchgeführt werden. Eine vollständige Aufnahme des Transmissionspektrums von Al im gesamten Wellenlängenbereich der Kupferanode würde helfen zu verstehen, warum die Näherung eines linearen Spektrums solch gute Ergebnisse liefert. Die Laue-Aufnahme hat insgesamt gut funktioniert. Allerdings könnte man die Aufhängung der Dentalfilme zum Beispiel mit einer optischen Bank o.Ä. verbessern. Dadurch wird ein zentrales Auftreffen garantiert. Die Auflösung der Filme ist gut, eine größere Fläche wäre zwar wünschenswert, ist für die Auswertung aber nicht unbedingt notwendig.

□ STANDARDS, National I. of ; TECHNOLOGY: *Physical Reference Data - The NIST Reference on Constants, Units and Uncertainty*. June 2011. – URL <http://physics.nist.gov/cuu/index.html>

## Literatur

□

- MÜLLER, Herbert: *Magnetische Kernresonanz*, Physikalisches Institut der Universität Würzburg, Dissertation, Februar 1990. – URL [http://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11999999/Staatsexamensarbeit\\_Mueller\\_NMR.pdf](http://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11999999/Staatsexamensarbeit_Mueller_NMR.pdf)
- RADESTOCK, Oliver: *Anleitung - Magnetische Kernresonanz*. Physikalisches Institut der Universität Würzburg. Juli 2009. – URL [http://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11999999/NMR\\_Anleitung\\_Jul2009.pdf](http://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11999999/NMR_Anleitung_Jul2009.pdf). – Physikalisches Fortgeschrittenen Praktikum

## 7 Anhang