

# Quanten-Hall-Effekt

Daniel Friedrich & Ulrich Müller

Mithilfe einer AlGaAs/GaAs Heterostruktur wurde der Quanten-Hall-Effekt nachgewiesen. Die Klitzing-Konstante wurde zu  $25.1\text{ k}\Omega$  bestimmt und Hall-Plateaus bis zum Füllfaktor 14 beobachtet. Mit verschiedenen Methoden wurde die Ladungsträgerkonzentration im 2DEG untersucht, die sich als weitgehendst temperaturunabhängig herausstellte. Bei niedrigen Temperaturen wurde die Zeeman-Aufspaltung beobachtet und quantitativ untersucht, um den Landé-Faktor zu bestimmen.

Betreuer: Christoph Brüne

Versuchsdurchführung am 12. Oktober 2013

Protokollabgabe am 19. Oktober 2013

## 1 Einleitung

Über hundert Jahre nach der Entdeckung des Hall-Effekts gelang es Klaus von Klitzing im Jahr 1980 die bei einem Hall-Experiment aufgetretenen Plateaus im Hall-Widerstand mit Hilfe der Plankkonstante und der Elementarladung zu deuten. Die Deutung durch die Plankkonstante machte deutlich, dass es sich bei dem Effekt um einen makroskopischen Quanteneffekt handelt. Die Bildung von Plateaus im Hall-Widerstand bei wachsendem Magnetfeld wird seit dem *Quanten-Hall-Effekt* (QHE) genannt. Die Entdeckung von Klaus von Klitzing eröffnete der Wissenschaft ein reiches Feld an interessanten Forschungsthemen, unter anderem in der Festkörperphysik und der Metrologie. Während heutzutage der QHE bereits zur Normierung des elektrischen Widerstands verwendet wird, könnte er in Zukunft dazu verwendet werden das Kilogramm und des Ampère neu zu definieren [3].

## 2 Theorie

Bewegen sich freie Elektronen in einem Magnetfeld, so wirkt auf sie die Lorentzkraft, die sie senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung ablenkt. Sind die Elektronen hingegen auf das Volumen eines Leiters limitiert, so baut sich, im stationären Fall bei kleinen  $B$ -Feldern, ein elektrisches Feld senkrecht zum Magnetfeld und der netto Stromrichtung, das die Lorentzkraft kompensiert. Diese entstehende Spannung wird Hall-Spannung genannt. Der Hall-Widerstand ist nicht als klassischer

Widerstand zu verstehen, sondern berechnet sich aus dem Verhältnis der Hall-Spannung und der verwendeten Stromstärke zu

$$R_{\text{Hall}} = \frac{U_y}{I} = \frac{B}{N_S e}. \quad (2.1)$$

Mit der Ladungsträgerdichte  $N_S$  im Material. Der Hall-Widerstand ist damit proportional zum angelegten Magnetfeld.

Verwendet man ein Material mit hohen Beweglichkeiten der Elektronen, kühlt die Probe auf tiefe Temperaturen und erhöht die Magnetfeldstärke, so findet man bei charakteristischen Werten des Hall-Widerstands Plateaus die nach aktuellem Forschungsstand von den Materialeigenschaften, der Magnetfeldstärke und der verwendeten Temperatur unabhängig zu sein scheinen. Diese Plateaus treten in regelmäßigen Abständen auf und können durch den Zusammenhang

$$R_{\text{Hallplateau}} = \frac{1}{n} \frac{h}{e^2} \quad (2.2)$$

mit den ganzen Zahlen  $n = 1, 2, \dots$  beschrieben werden. Das höchste messbare Plateau befindet sich demnach bei

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25\,812.807\,\Omega \quad (2.3)$$

und wird als Klitzing-Konstante  $R_K$  für die Definition des Ohm verwendet.

Vergleicht man den Hall-Widerstand des klassischen Hall-Effekt 2.1 mit dem des Quanten-Hall-Effekts 2.2, so scheinen die beim Ladungstransport beteiligten Elektronen pro Volumen immer in Paketen zu  $eB/h$  zur Leitung beizutragen. Dieser Ausdruck wird als Entar-

tungsgrad diskreter Landauniveaus bezeichnet die sich aus der vollen quantenmechanischen Beschreibung ergeben. Dazu wird der Hamiltonoperator für Elektronen im äußeren Magnetfeld nach [?] aufgestellt.

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 \quad (2.4)$$

Lässt man nur Bewegungen der Elektronen in der  $x$ - $y$ -Ebene zu und eicht das Vektorpotential auf  $\mathbf{A} = (0, B \cdot x, 0)$ , so kann man mit dem Ansatz  $\Phi(x, y) = C \cdot e^{ik_x x} u(x)$  die Schrödingergleichung auf eine Differentialgleichung des harmonischen Oszillators umformen. Die Energieeigenwerte beschreiben die Landauniveaus und besitzen die diskrete Form

$$E_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.5)$$

mit der Zyklotronfrequenz  $\omega_c$  und der Landau-Quantenzahl  $n$ . Diese Niveaus besitzen den Entartungsgrad

$$N_{LL} = \frac{eB}{h} \quad (2.6)$$

pro Volumen.

Gleichzeitig zu den Plateaus im Hallwiderstand, tritt ein anderer bemerkenswerter Effekt auf, der als Shubnikow-de-Haas-Effekt bezeichnet wird. Dabei verliert der Leiter seinen Widerstand in Längsrichtung, so dass der angelegte Strom ohne Verluste im Festkörper transportiert wird. Liegt die Fermienergie zwischen zwei Landauniveaus, so gibt es für die Elektronen unterhalb der Fermienergie keine Zustände innerhalb der thermischen Energieverbreiterung in die gestreut werden kann. Die Leitung wird damit innerhalb der Probe dissimationslos. Das Randkanalmodell beschreibt anschaulich, wie das Oberflächenpotential die Energieniveaus der Landaulevel anhebt und so einen eindimensionalen leitenden Randkanal formt, in dem ebenfalls dissimationslose Leitung möglich ist. Das Verhalten der Probe wird also im wesentlichen von der Magnetfeldstärke beeinflusst. Diese erhöht den Entartungsgrad der Landauniveaus und damit sowohl die Lage der Fermienergie als auch den Füllfaktor. Dieser legt die Anzahl der besetzten Landauniveaus fest. Der Füllfaktor ist als

$$\nu = \frac{N_S}{N_{LL}} \quad (2.7)$$

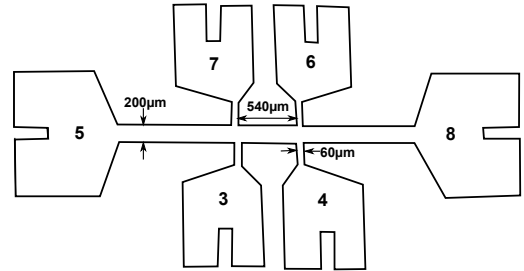
definiert, wobei  $N_S$  der Ladungsträgerdichte und  $N_{LL}$  dem Entartungsgrad der Landauniveaus entspricht. Bei einem ganzzahligen Füllfaktor befindet man sich im Bereich eines Plateaus des Quanten-Hall-Effektes

und man misst den beschriebenen Shubnikow-de-Haas-Effekt.

Idealer Weise sind diese Energieniveaus diskret, in der Realität aber oft durch Streuung mit Phononen und Störstellen, verbreitert. Zudem kann die Zeeman-Aufspaltung bei geringen Magnetfeldern zwei Landauniveaus gegeneinander verschieben und so zu einer scheinbaren Verbreiterung der Niveaus führen. Die beschriebenen Effekte bestimmen die Bedingungen, bei denen der Quanten-Hall-Effekt auftritt. Bei starken Magnetfeldern treten wenige, dafür aber stark besetzte Landauniveaus auf. Zudem verringern hohe Beweglichkeiten der Elektronen die Stoßverbreiterung. Als letztes werden hinreichend tiefe Temperaturen benötigt, damit nur Landauniveaus unterhalb der Fermienergie besetzt werden.

### 3 Experimenteller Aufbau

Im folgendem Versuch messen wir den Quanten-Hall-Effekt an einer AlGaAs/GaAs-Hallbar. Durch den Kontakt der GaAs- und der AlGaAs-Schicht entsteht ein 2DEG, an dem wir die Messungen für den Versuch durchführen können. Die Hallbar besitzt 6 Anschlüsse die in Abbildung 1 zu sehen sind.



**Abb. 1:** Verwendete Struktur der AlGaAs/GaAs-Hallbar mit Beschriftung und Abmessungen.

Um die Hallbar anzusteuern, liegt ein Probenbox am Arbeitsplatz vor, die mit der Hallbar verbunden ist. An den Kontakten 3, 4, 6 und 7 kann die Längsspannung sowie die Querspannung abgegriffen werden. An den Kontakten 5 und 8 wird der Probenstrom bereitgestellt. Da für die Messung des Quanten-Hall-Effektes niedrige Temperaturen nötig sind, befindet sich die Probe in einem Kryostaten im Heliumbad. Zur Wärmeisolation befindet sich das Bad innerhalb von Vakuum-Kammern und einem Stickstofftank, was den gesamten Kryostaten

darstellt. Durch eine Pumpe mit Druckregelung kann der Dampfdruck über dem Heliumbad beeinflusst werden, wodurch sich Temperaturen zwischen 1.5 K und 4.2 K einstellen lassen. Die Bestimmung der Temperatur an der Probe erfolgt mit einem geeichten, temperaturabhängigen Kohlewiderstand, dem Allen Bradley-Widerstand, der mit einem Spannungsmessgerät ausgelesen wird. Zur Erzeugung des Hall-Effektes wird ein zwischen 0 T und 9 T verstellbares Magnetfeld senkrecht zur Probenebene angelegt. Zur Bereitstellung des Probenstroms wird ein mit 13 Hz und 1 V betriebener Funktionsgenerator über einen 1000:1 Spannungsteiler und einem Vorwiderstand von  $R_{\text{Shunt}} = 4981 \Omega$  an die Probenbox angelegt. Mit dem Spannungsabfall über den Shuntwiderstand lässt sich der Probenstrom bestimmen.

Die Querspannung sowie die Shuntspannung werden jeweils über einen Lock-In-Verstärker ausgelesen, die mit einem Computer verbunden sind. Das Magnetfeld, die Shunt- und die Querspannung können mit einem LabView-Programm über die Zeit aufgezeichnet werden.

## 4 Versuchsdurchführung

Um die Hall-Plateaus und die Shubnikov-de-Haas Oszillation zu beobachten, messen wird die Shuntspannung  $U_{\text{Shunt}}$  und die Längsspannung  $U_{xx}$  bzw. Hallspannung  $U_{\text{Hall}}$  bei steigendem Magnetfeld von 0 T  $\rightarrow$  9 T und bei fallendem Magnetfeld von 9 T  $\rightarrow$  0 T. Da wir nur zwei Lock-In-Verstärker verwenden, nehmen wir die Hallspannung  $U_{\text{Hall}}$  und die Längsspannung  $U_{xx}$  in getrennten Messungen auf. An der Probe wird die Hallspannung an den Kontakten 4 und 6, sowie die Längsspannung an den Kontakten 6 und 7 abgegriffen. Durch die Druckregelung des Heliums im Kryostatens können wir die Temperatur regeln und die obigen Messungen bei verschiedenen Temperaturen aufnehmen. Um einen Einfluss der Temperatur untersuchen zu können messen wir bei den Temperaturen  $T = 4.2 \text{ K}$ ,  $3.0 \text{ K}$ ,  $2.1 \text{ K}$  und  $1.5 \text{ K}$ .

Die Temperaturmessung im Experiment war über die Dampfdruckregelung des Heliums vor allem an den Stellen  $3.0 \text{ K}$  und  $2.1 \text{ K}$  schwierig einzustellen und konnte darüber hinaus nicht konstant gehalten werden. Um die

Schwankung während der Messung abzuschätzen, haben wir jeweils vor und nach der Messung die Temperatur über den Allen-Bradley Widerstand ausgelesen. Folglich lagen unsere gemittelten Temperaturwerte bei  $4.2 \text{ K}$ , welcher durch die Sidetemperatur des Heliums nahezu konstant ist, bei  $(3.0 \pm 0.5) \text{ K}$ , bei  $(2.1 \pm 0.3) \text{ K}$  und bei  $(1.5 \pm 0.2) \text{ K}$ .

## 5 Auswertung

Die gemessenen Spannungen über die Lock-In-Verstärker sind von einem Rauschen überlagert. Um das Rauschen abzuschätzen, haben wir vor dem Einschalten des Magnetfeldes die Messung je ca. 30 s früher gestartet. Hieraus bestimmen wir den Fehler für die Spannungsmessungen von  $U_{\text{Shunt}}$ ,  $U_{xx}$  und  $U_{\text{Hall}}$  zu  $10^{-3} \text{ mV}$ . Der Fehler des Shuntwiderstandes war nicht bekannt und wird von uns auf 2 % abgeschätzt. Somit können wir den Widerstand für unsere Messungen als Hauptfehlerquelle identifizieren.

Beim Durchfahren des Magnetfeldes von 0 nach 9 Tesla konnte ein leichter Hysterese-Effekt festgestellt werden. Das bedeutet, dass der Elektromagnet zwar eine Magnetfeldstärke anzeigt, die wirkliche Feldstärke der angezeigten aber leicht nacheilt. Um diesen Effekt auszugleichen, wurden die Aufnahmen für jede Messung in beide Richtungen durchgefahren. Bei diesen zwei Datensätzen wurde dann gleichzeitig das Magnetfeld des Up-sweeps erniedrigt und die Down-sweeps erhöht, bis die Daten symmetrisch in der Mitte der Hysterese zusammen fielen. Die beschriebene Verschiebung in der Magnetfeldstärke war gering und betrug  $\pm 0.037 \text{ T}$ . Die kollabierten Daten wurden für die weiteren Auswertungen verwendet.

### 5.1 Hall-Plateaus, Klitzing-Konstante und Füllfaktoren

Für die Auswertung der Hall-Plateaus wurde für jede gemessene Temperatur ein eigenes Diagramm erstellt. In Abbildung 2 ist die Auswertung für die Messung bei  $T = 1.5 \text{ K}$  gezeigt. Die Diagramme für die Temperaturen  $T = 4.2 \text{ K}$ ,  $3.0 \text{ K}$  und  $2.1 \text{ K}$  sind im Anhang 7 in Abbildung 9, 10 und 11 gezeigt.

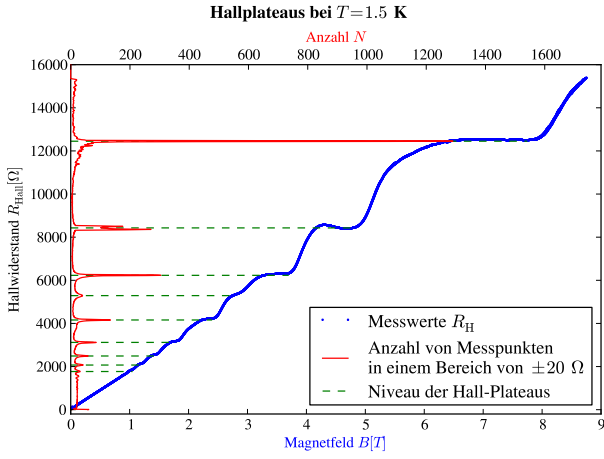


Abb. 2: Hallplateaus bei  $T = 1.5$  K.

In der blauen Kurve aus Abbildung 2 wurde der Verlauf des Hall-Widerstandes  $R_H$  aus den hysteresebereinigten Daten über dem Magnetfeld  $B$  aufgetragen. Zur Auswertung der Hall-Plateaus definieren wir uns einen kleinen Bereich von  $\pm 20 \Omega$  um einen Wert in dem wir die Anzahl an Messpunkten zählen und den Wert über den gesamten Bereich mit einer Schrittweite von  $10 \Omega$  variieren. Aus der Anzahl der Messpunkte in diesem Bereich ergibt sich die rote Kurve in Abbildung 2. Im zweiten Plateau ist zu erkennen, dass kein richtiges Plateau ausgebildet ist. Der Widerstandsverlauf nimmt hier unerwarteterweise ab und dann wieder zu. Wir vermuten den richtigen Wert des Plateaus in der Mitte der beiden Maxima, wobei wir uns den Effekt nicht erklären können. Durch unsere Auswertemethode ergibt sich je ein Peak für die beiden Maxima im Plateau. Um den Wert des Plateaus zu ermitteln haben wir folglich die Mitte der beiden Maxima verwendet.

Durch dieses Zählverfahren ergeben sich an den Stellen der Plateaus klar erkennbare Peaks, an deren Maxima der Wert des Hall-Plateaus ausgelesen werden kann. Mit dieser Methode und der verwendeten Schrittweite erhalten wir in der Kurve eine Ablesegenauigkeit von  $20 \Omega$  die aus dem jeweils ausgelesenen Bereich für jeden Wert resultiert. Der aus oben beschriebenen Rauschen resultierende Messfehler der Lock-in-Verstärker von  $0.1\%$  wurden im Vergleich zu der Ablesegenauigkeit im Graphen vernachlässigt.

Die für jedes sichtbare Niveau ausgelesenen Widerstandswerte haben wir zusammen mit den Füllfaktoren für jede Temperatur in Tabelle ?? aufgetragen.

Die erhaltenen Werte für die ganzen Zahlen  $\nu$  er-

$\nu \backslash T$	4.2 K	3.0 K	2.1 K	1.5 K
2	12 460 $\Omega$	12 440 $\Omega$	12 450 $\Omega$	12 450 $\Omega$
3	–	8950 $\Omega$	8430 $\Omega$	8430 $\Omega$
4	6240 $\Omega$	6220 $\Omega$	6230 $\Omega$	6230 $\Omega$
5	–	–	5290 $\Omega$	5290 $\Omega$
6	4170 $\Omega$	4150 $\Omega$	4160 $\Omega$	4160 $\Omega$
8	3120 $\Omega$	3120 $\Omega$	3120 $\Omega$	3120 $\Omega$
10	2490 $\Omega$	2480 $\Omega$	2490 $\Omega$	2490 $\Omega$
12	2060 $\Omega$	2060 $\Omega$	2070 $\Omega$	2070 $\Omega$
14	1760 $\Omega$	1750 $\Omega$	1770 $\Omega$	1770 $\Omega$

Tab. 1: Abgelesene Werte von  $R_\nu$  in  $[\Omega]$  für die erkennbaren Hall-Plateaus bei verschiedenen Temperaturwerten mit dem Fehler aus der Ungenauigkeit des Vorwiderstandes von 2

geben multipliziert mit den Messwerten  $R_\nu$  jeweils einen ähnlichen Wert, der der Klitzing-Konstante nahe kommt. Wie schon zu Beginn der Auswertung bemerkt, ist die Hauptfehlerquelle die geschätzten Ungenauigkeit von  $2\%$  des Vorwiderstandes. Der Ablesefehler von  $20 \Omega$  aus der Abbildung 2 kann also vernachlässigt werden.

Für jede Temperatur bestimmen wir einen Wert für die Klitzing-Konstante. Dazu verwenden wir nur die Widerstandswerte der Plateaus mit geradzahligen  $\nu$ . Begründung warum ungerade Plateaus weggelassen wurden?? Die Werte werden jeweils mit dem entsprechenden Füllfaktor multipliziert. Die erhaltenen Werte besitzen alle nahezu gleiche Größe und Fehler, wodurch wir für jede gemessene Temperatur einen gemittelten Wert angeben können, der in Tabelle 2 aufgetragen ist.

$T$ [K]	$\overline{R_K \nu}$ [k $\Omega$ ]
4.2	$(24.87 \pm 0.50)$ k $\Omega$
3.0	$(24.80 \pm 0.50)$ k $\Omega$
2.1	$(24.89 \pm 0.50)$ k $\Omega$
1.5	$(24.89 \pm 0.50)$ k $\Omega$

Tab. 2: Aus Tabelle ?? berechnete gemittelte Werte für  $R_K \nu$  mit Fehler.

Beim Vergleich sehen wir eine sehr gute Übereinstimmung für die Werte bei verschiedenen Temperaturen. Dies ist auch zu erwarten, da die Klitzing-Konstante, als ein über Naturkonstanten definierte Konstante, unabhängig von der Temperatur, den selben Wert besitzen sollte.

Aus diesen Werten können wir nun die Klitzing-

Konstante bestimmen zu

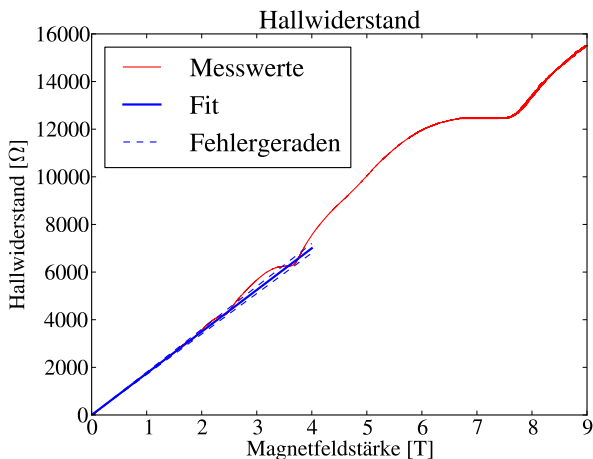
$$R_K = (24.87 \pm 0.50) \text{ k}\Omega. \quad (5.1)$$

Der Vergleich mit dem Literaturwert von  $R_H = 25.812807 \text{ k}\Omega$  zeigt sich eine große Abweichung, die auch im Rahmen des Fehlers nicht mehr vereinbar ist. Die Abweichung ist somit auf einen systematischen Fehler in der Messung zurückzuführen. Dieser Fehler resultiert wahrscheinlich aus einer falsch eingestellten Phase der Lock-In-Verstärker, woraus systematisch zu niedrige Messwerte folgen.

## 5.2 Bestimmung der Oberflächenladungsdichte

### Durch die Steigung des Hall-Widerstandes

Die Oberflächenladungsdichte des 2DEGs wird auf drei verschiedene Arten bestimmt und die Ergebnisse untereinander verglichen. Dabei achten wir auf Unterschiede bei unterschiedlichen Temperaturen. Zuerst legen wir nach Augenmaß eine Gerade durch den unteren Teil der Hallmessung, in der der Hallwiderstand näherungsweise linear ist. Der statistische Fehler wird mit Hilfe zwei Hilfsgeraden in Abbildung 3 nach Augenmaß abgeschätzt. Dabei schließen die Hilfsgeraden die Messpunkte ein, die beim Messen von niedrigen zu hohen Magnetfeldern und umgekehrt entstanden sind. Als Steigung erhalten wir bei 4.2 K die Hall-konstante



**Abb. 3:** Hall-Widerstand als Funktion des Magnetfeldes. An die Kurve wird nach Augenmaß eine Ursprungsgerade angelegt

$A_H = (1775 \pm 100) \Omega/\text{T}$  und aus dieser die Oberflächenladungsdichte

$$N_S = \frac{1}{A_H e} = (3.52 \pm 0.20) \times 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^2}. \quad (5.2)$$

Die Ergebnisse der anderen Temperaturen sind in Tabelle 4 aufgeführt. Verglichen mit den Fehlern der Geradensteigung unterscheiden sich die einzelnen Steigungen bei unterschiedlichen Temperaturen nur wenig. Dies ist intuitiv klar, da die Ladungsträgerdichte beim untersuchten 2DEG des GaAs/AlGaAs-System nicht von der Temperatur abhängen sollte.

### Mit Hilfe der Hall-Plateaus

Die Ladungsträgerdichte können wir ebenso über die Lage der Hall-Plateaus und die ermittelten Füllfaktoren aus Tabelle ??, Aufgabenteil 5.1 bestimmen. Nach Praktikumsanleitung [2] ist die Ladungsträgerdichte  $N_s$  proportional zum  $B$ -Feld und dem Füllfaktor  $\nu$

$$N_s = \nu \frac{eB}{h}. \quad (5.3)$$

Für die Bestimmung der  $B$ -Felder verwenden wir die Mitte eines Hall-Plateaus, siehe Abbildung 2. Der auftretende Fehler ist sehr groß, da die Plateaus eine große Breite besitzen und so einem Widerstandswert mehrere Werte für das  $B$ -Feld zugeordnet werden können. Der verwendete Fehler ergibt sich also aus der Breite des entsprechenden Hall-Plateaus.

Die aus den ausgelesenen  $B$ -Feldern, sowie die nach Gleichung (5.3) ermittelten Ladungsträgerdichten sind in Tabelle 3 für die gemessenen Temperaturen aufgetragen. Für den Wert und Fehler der gemittelten Ladungsträgerdichten wurden die Einzelwerte gewichtet und gemittelt.

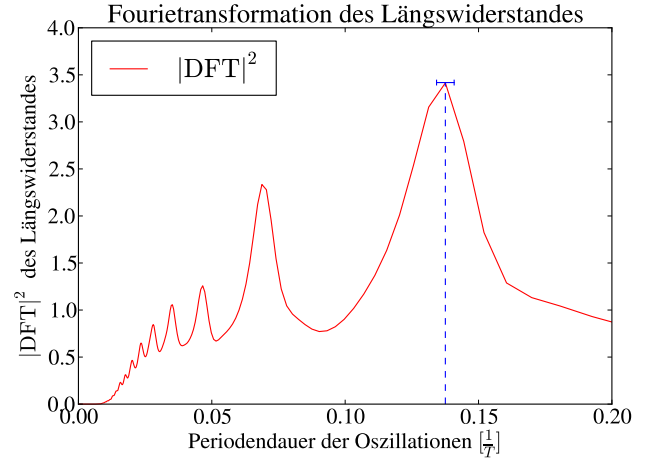
### Durch die Frequenz der Shubnikov-de Haas Oszillation

Wird die Probe einem steigendem Magnetfeld ausgesetzt, so ändert sich gemäß (2.6) und (2.7) der Füllfaktor und mit ihm der Längswiderstand periodisch. Dabei lässt sich schreiben

$$\frac{1}{B} = \frac{e}{N_{LL} h} = \frac{e}{N_S h} \nu. \quad (5.4)$$

$T[\text{K}]$	$\nu$	$B[\text{T}]$	$N_s[10^{15} \text{ m}^{-2}]$	$\bar{N}_s[10^{15} \text{ m}^{-2}]$
4.2	2	7.13(38)	3.45(18)	3.45(12)
	4	3.52(10)	3.41(10)	
	6	2.375(44)	3.446(64)	
	8	1.778(60)	3.44(12)	
	10	1.430(62)	3.46(15)	
	12	1.198(47)	3.48(14)	
	14	1.041(49)	3.53(16)	
3.0	2	7.11(55)	3.44(26)	3.37(16)
	3	4.497(25)	3.26(18)	
	4	3.44(24)	3.33(23)	
	6	2.32(12)	3.37(17)	
	8	1.760(70)	3.40(14)	
	10	1.431(50)	3.46(12)	
	12	1.202(43)	3.49(12)	
2.1	2	7.12(70)	3.45(34)	3.41(14)
	3	4.52(36)	3.29(26)	
	4	3.46(21)	3.35(20)	
	5	2.807(88)	3.39(11)	
	6	2.33(11)	3.38(15)	
	8	1.765(61)	3.42(12)	
	10	1.412(48)	3.42(11)	
1.5	2	7.22(58)	3.49(28)	3.42(15)
	3	4.53(36)	3.29(26)	
	4	3.47(22)	3.36(21)	
	5	2.816(83)	3.40(10)	
	6	2.32(11)	4.37(16)	
	8	1.764(61)	3.34(12)	
	10	1.423(45)	3.44(11)	
	12	1.191(44)	3.45(13)	
	14	1.026(36)	3.47(12)	

**Tab. 3:** Bestimmung der Ladungsträgerdichte mit Hilfe der Hall-Plateaus.



**Abb. 4:** Diskrete Fouriertransformation des Längswiderstandes aufgetragen über die Periodendauer in  $\frac{1}{B}$ . Neben der Hauptfrequenz sind auch höhere Frequenzen zu erkennen.

Die Periodizität von  $\frac{1}{B}$  bestimmen wir aus der Periodizität des gemessenen Längswiderstandes. Dabei wird zunächst aus den gemessenen Daten die Funktion Längswiderstand in Abhängigkeit der inversen Magnetfeldstärke gewonnen. Anschließend werden diese Daten linear interpoliert und ein neuer Datensatz mit äquidistanten  $\frac{1}{B}$ -Schritten erzeugt. Diese Daten lassen sich nun ableiten und diskret fourie-transformieren. Als Periodendauer in  $\frac{1}{B}$  können wir

$$T_{\frac{1}{B}} = (1375 \pm 31) \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{T}} \quad (5.5)$$

aus der Graphen 4 ablesen. Die Genauigkeit wird durch die Auflösung der diskreten Fouriertransformation beschränkt und als halben Abstand zur nächsten Datenpunkt im Graphen angenommen.

Die Periodendauer  $T_{\frac{1}{B}}$  entspricht dabei nach (5.5) der Periodizität der ganzen geraden Zahlen mit dem Faktor  $\frac{2e}{N_s h}$  multipliziert. Dies liegt daran, dass vor allem bei kleinen Magnetfeldern die Spinaufspaltung zwischen den zwei Niveaus einer Landau-Quantenzahl nicht groß genug ist und beim Durchfahren des Magnetfeldes jeweils zwei Niveaus simultan gefüllt werden.

Durch die Periodendauer  $T_{\frac{1}{B}}$  wird somit der Wert für die Ladungsträgerdichte festgelegt.

$$N_s = \frac{2e}{T_{\frac{1}{B}} h} = (3.517 \pm 0.079) \times 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^2} \quad (5.6)$$

Auch diese Methode wurde auf alle Messdaten der unterschiedlichen Temperaturen angewandt. Da die



Fouriertransformation auf diskreten Werten geschieht, kann die Periodizität nur diskrete Werte annehmen. Bei den unterschiedlichen Temperaturen wurde jeweils exakt der selbe Wert abgelesen.

Um die Ergebnisse aller drei Methoden zusammen zu fassen, tragen wir die ermittelten Werte für  $N_S$  in Tabelle 4 ein und bilden die, mit den inversen Fehlern gewichteten, Mittelwerte  $\overline{N_S}(T)$  die wir für die weiteren Rechnungen verwenden.

$T[1/K]$	$N_{S1}$	$N_{S2}$	$N_{S3}$	$\overline{N_S}$
4.2	3.52(20)	3.45(12)	3.517(79)	3.455(93)
3.0	3.61(20)	3.37(16)	3.517(79)	3.48(10)
2.1	3.58(20)	3.41(14)	3.517(79)	3.447(97)
1.5	2.58(20)	3.42(15)	3.517(79)	3.29(10)
				3.419(98)

**Tab. 4:** Werte für die Ladungsträgerkonzentration  $N_S$  in  $10^{11} 1/\text{cm}^2$  mit  $N_{S1}$  für die Werte aus der Hall-Steigung,  $N_{S2}$  aus den Hall-Plateaus und  $N_{S3}$  aus der Shubnikov-de Haas Oszillation. Die letzte Spalte mit  $\overline{N_S}$  entspricht den mit den inversen Fehlern gewichteten  $N_S$ -Werten der verschiedenen Methoden.

### 5.3 Leitfähigkeit, Hall-Faktor und Elektronenbeweglichkeit

Aus den gemessenen Werten für die Spannungen bei ausgeschaltetem Magnetfeld  $B = 0 \text{ T}$  können wir die Leitfähigkeit des 2DEG  $\sigma_{2D}$ , den Hall-Faktor  $A_H$  und die Elektronenbeweglichkeit  $\mu$  bestimmen. Die Werte sind nach Praktikumsanleitung [2] definiert als

$$\sigma_{2D} = N_S e^2 \frac{\tau}{m^*} = \frac{L}{R_{xx} W} \quad (5.7)$$

$$A_H = -\frac{1}{N_S e} \quad (5.8)$$

$$\mu = A_H \sigma_{2D}. \quad (5.9)$$

Aus der Länge  $L = 600 \mu\text{m}$  und der Breite  $W = 200 \mu\text{m}$  der Probe erhalten wir aus der Geometrie der Hallbar das Verhältnis

$$\frac{L}{W} = 3. \quad (5.10)$$

Aus den erhaltenen Werte für den Längswiderstand  $R_{xx}$  bei den vier gemessenen Temperaturen werden folglich die Leitfähigkeit, der Hall-Faktor und die Elektronenbeweglichkeit nach (5.9) berechnet und in Tabelle 5 aufgetragen. Für den Fehler der Längswiderstände

können die Fehler in den gemessenen Spannungen vernachlässigt werden, da der Fehler im Shuntwiderstand deutlich darüber liegt. Somit besitzen unsere Werte von  $R_{xx}$  eine Abweichung von 5%. Die Fehler für die berechneten Werte ergeben sich aus Gauß'scher Fehlerfortpflanzung.

$T[K]$	$R_{xx}[\Omega]$	$\sigma_{2D}[\frac{1}{\Omega}]$	$A_H[\frac{\text{m}^2}{\text{C}}]$	$\mu[\frac{\text{m}^2}{\text{C}\Omega}]$
4.2	521(26)	0.00575(29)	1799(60)	10.35(52)
3.0	505(25)	0.00593(30)	1783(61)	10.59(53)
2.1	247(12)	0.01212(61)	1809(63)	21.9(1.1)
1.5	244(12)	0.01227(61)	1981(75)	24.3(1.2)

**Tab. 5:** Ergebnisse für die Leitfähigkeit  $\sigma_{2D}$ , die Hall-Konstante  $A_H$  und die Elektronenbeweglichkeit  $\mu$ .

### 5.4 Zyklotronmasse

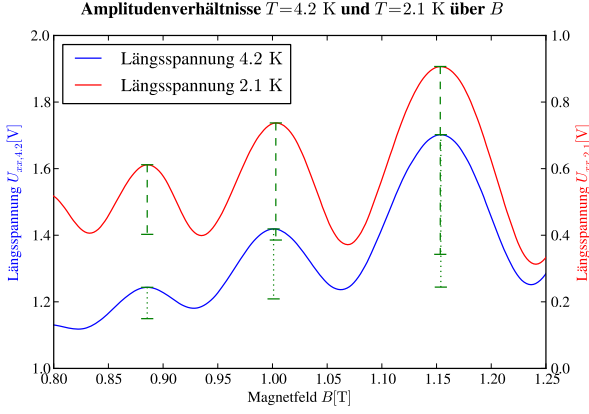
In diesem Abschnitt wollen wir die Zyklotronmasse bestimmen. Hierzu nutzen wir aus, dass die Amplituden der Oszillationen in der Längsspannung temperaturabhängig sind. Betrachten wir den Grenzfall  $E_F \gg \hbar\omega_c$ , also dass viele Landau-Niveaus besetzt und die Magnetfelder klein. So kann die Zyklotronmasse  $m_c$  für geringe Abhängigkeit der Streuzeit  $\tau$  und  $T_1 = 2T_2$  nach Ando [1] aus dem Verhältnis

$$\frac{m_c}{m_e} = \frac{\hbar e B}{m_e \pi^2 k_B T_1} \frac{1}{\text{arccosh}} \frac{A(B, T_2, \tau)}{A(B, T_1, \tau)} \quad (5.11)$$

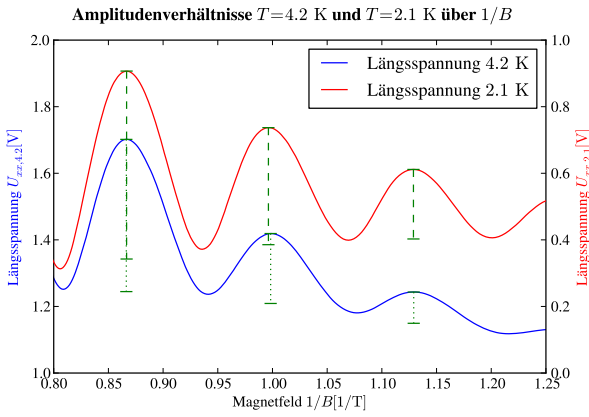
bestimmt werden, wobei  $A(B, T, \tau)$  die Amplitude der Oszillation der Längsspannung entspricht.

Aufgrund der Bedingung  $T_1 = 2T_2$  verwenden wir aus unseren Messungen die Temperaturpaare (4.2 K, 2.1 K) und (3.0 K, 1.5 K). Die Werte der Längsspannungen wurden über  $B$  bzw.  $1/B$  aufgetragen und in Abbildung 5 bzw. Abbildung 6 abgebildet. Für die Auswertung lesen wir aus Abbildung 5 das Amplitudenverhältnis an drei verschiedenen Stellen ab und tragen die Werte in Tabelle 6 auf. Die Auftragung über  $1/B$  verändert den Wert der Amplituden nicht. Die Auftragung der Längsspannung über  $1/B$  und die ausgewerteten Stellen sind in Abbildung 6 gezeigt.

Aus Tabelle 6 werden je die drei Massenverhältnisse der



**Abb. 5:** Auftragung der Längsspannung über dem Magnetfeld bei  $T = 4.2\text{ K}$  und  $2.1\text{ K}$ , zur Ermittlung des Amplitudenverhältnisses und der Zyklotronmasse.



**Abb. 6:** Auftragung der Längsspannung über  $1/B$  bei  $T = 4.2\text{ K}$  und  $2.1\text{ K}$ , zur Ermittlung des Amplitudenverhältnisses und der Zyklotronmasse.

$T[\text{K}]$	$\frac{A(B, T_2)}{A(B, T_1)}$	$B[\text{T}]$	$\frac{m_c}{m_e}$
4.2/2.1	0.295	0.885	0.0412
	0.498	1.002	0.0358
	0.758	1.153	0.0250
3.0/1.5	0.570	0.794	0.0418
	0.761	0.886	0.0310
	0.972	1.003	0.0108

**Tab. 6:** Berechnung des Zyklotronmassenverhältnisses.

Temperaturpaare gemittelt, wodurch sich die Werte

$$4.2\text{ K und } 2.1\text{ K} : \frac{m_c}{m_e} = 0.03402 \pm 0.0058 \quad (5.12)$$

$$3.0\text{ K und } 1.5\text{ K} : \frac{m_c}{m_e} = 0.0278 \pm 0.011 \quad (5.13)$$

ergeben. Das gesamte gemittelte Massenverhältnis ist somit

$$\frac{m_c}{m_e} = 0.0318 \pm 0.0076. \quad (5.14)$$

Die Ablesefehler der Amplituden und des  $B$ -Feldes der in Tabelle 6 aufgetragenen Werte werden vernachlässigt, da der Fehler der korrekten Temperaturbestimmung deutlich höher eingeschätzt wird. Wie sich eine Abweichung von der Bedingung  $T_1 = 2T_2$  auf die Massenbestimmung auswirkt ist im Detail nicht bekannt, der Fehler kann jedoch aus Diskrepanz der Werte in (5.12) und (5.13) für die Temperaturpaare aus Standardabweichung der Werte in Tabelle 6 bestimmt werden.

Für GaAs ist die Zyklotronmasse gleich der effektiven Masse. Somit können wir unseren Wert mit dem Literaturwert für die effektive Masse von GaAs nach Universität des Saarlandes [4] vergleichen.

$$\frac{m^*}{m_e} = 0.067 \quad (5.15)$$

Aus dem Vergleich mit dem Literaturwert erkennen wir, dass unsere Werte in der richtigen Größenordnung liegen, allerdings mit der effektiven Masse von GaAs nicht vereinbar sind. Die verwendete Formel (5.11) nach Ando [1] ist jedoch nur gültig für die Bedingung  $T_1 = 2T_2$ , welche im Experiment nicht sehr exakt realisiert werden konnte.

## 5.5 Fermi-Energie /-Wellenvektor und -Geschwindigkeit

Für Elektronen, die sich im Festkörper aufhalten, können die Korrekturen der Dispersionsrelation durch eine effektive Masse der Elektronen berücksichtigt werden. Für den Fall von GaAs beträgt der Literaturwert für die effektive Masse nach [4]  $m^* = 0.067m_e$ . Mit dieser Korrektur kann die Dispersion der Elektronen in



einem gewissen Rahmen weiterhin als parabolisch angesehen werden:

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*}. \quad (5.16)$$

Auf der anderen Seite ergibt sich Ladungsträgerdichte als Integral über die Zustandsdichte bis zur Fermienergie. Die Zustandsdichte besitzt im 2DEG den konstanten Wert  $D(E) = \frac{\hbar^2 \pi}{m^*}$  [2]. Damit ergeben sich für die Fermi-Energie, den Fermi-Wellenvektor und die Fermi-Geschwindigkeit:

$$E_F = N_S \cdot \frac{\hbar^2 \pi}{m^*} \quad (5.17)$$

$$k_F = \sqrt{2\pi N_S} \quad (5.18)$$

$$v_F = \frac{\hbar \sqrt{2\pi}}{m^*} \sqrt{N_S} \quad (5.19)$$

Für nicht verschwindende Magnetfelder ist zu bemerken, dass je nach Eichung der Wellenvektor  $\mathbf{k}$  keine sinnvolle Quantenzahl mehr darstellt und die Energie-dispersion durch die Landau-Quantenzahlen beschrieben wird. Für  $B = 0$  sind die Werte für Fermi-Energie /-Wellenvektor und -Geschwindigkeit in Tabelle 7 aufgelistet.

$T[\frac{1}{K}]$	$E_F[\text{eV}]$	$k_F[\frac{1}{\text{nm}}]$	$v_F[\frac{\text{km}}{\text{s}}]$
4.2	12.35(33)	0.1473(40)	254.6(69)
3.0	12.43(36)	0.1478(42)	255.5(73)
2.1	12.32(34)	0.1472(42)	254.3(72)
1.5	11.71(36)	0.1437(44)	248.3(77)

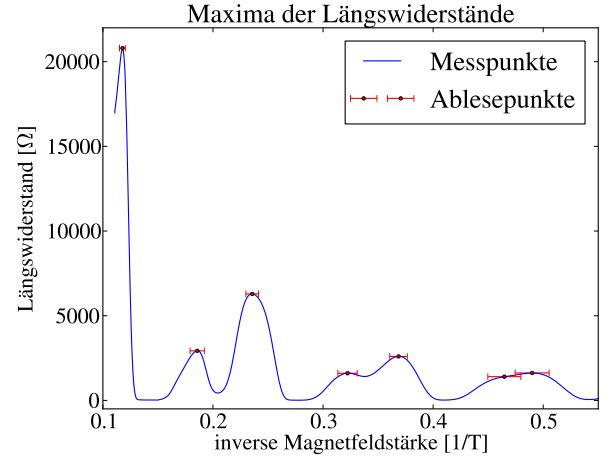
**Tab. 7:** Fermi-Energie /-Wellenvektor und -Geschwindigkeit für verschiedene Temperaturen

## 5.6 Bestimmung der Spinaufspaltung

Wie in Aufgabe 2 gesehen fällt der Längswiderstand periodisch mit dem inversen Magnetfeld auf Null ab. Den maximalen Widerstand misst man hingegen, wenn die Fermi-Energie (d.h. das chemische Potential) genau innerhalb der Landau-Niveaus liegt. Dies ist der Fall wenn

$$E_F = \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \pm \frac{M}{2} \right). \quad (5.20)$$

In diesem Abschnitt soll die relative Spinaufspaltung  $M$  und daraus der Landé-Faktor  $g$  des Elektronen und GaAs bestimmt werden, der mit der relativen Magne-



**Abb. 7:** Abgelesene Werte der maximalen Längsspannung. Die Fehler wurden anhand der Breite der Peaks abgeschätzt.

tisierung folgenden Zusammenhang besitzt.

$$M = \frac{g \mu_B B}{\hbar \omega_c} \quad (5.21)$$

In einem ersten Schritt werden nun aus den Graphen des Längswiderstandes die inversen Feldstärken  $1/B_{n\pm}$  der Maxima für verschiedene  $n$ -Quantenzahlen und Spinaufspaltungen abgelesen, wobei  $\pm$  das Maximum mit größerer bzw. kleinerer Magnetfeldstärke beschreibt.

In Abbildung 7 wurden die Magnetfeldstärken abgelesen, die gemessen wurden, während sich die Fermi-Energie innerhalb der spinaufgespaltenen Landau-Niveaus befindet, angefangen von  $n = 1$  ganz links bis  $n = 4$  rechts. Diese inversen Magnetfeldstärken werden nun über die Landau-Quantenzahl  $n$  jeweils für  $n+$  und  $n-$  aufgetragen, um sie bis zu  $\frac{1}{B} = 0$  zu extrapolieren. Am Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse verschwinden beide Seiten der Identität

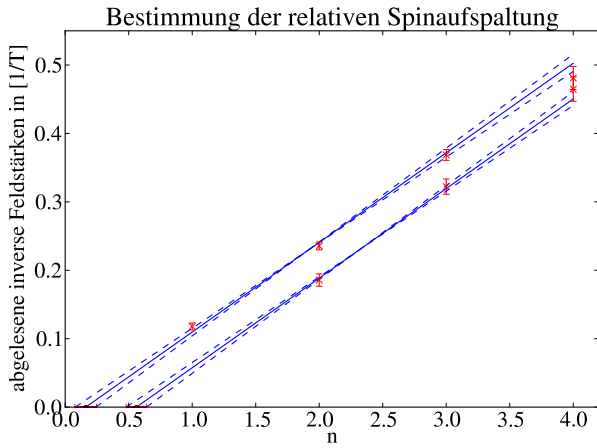
$$\frac{1}{B_{n\pm}} = \frac{\hbar e}{m_c} \frac{1}{E_F} \left( n + \frac{1}{2} \pm \frac{M}{2} \right). \quad (5.22)$$

Damit ergibt sich die relative Spinaufspaltung  $M$  als die Differenz der Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse

$$M = |n_+(B \rightarrow \infty) - n_-(B \rightarrow \infty)| \quad (5.23)$$

Wir lesen die Schnittpunkte in Graphik 8 ab und erhalten für die Differenz

$$M = |0.160(80) - 0.560(80)| = 0.40(11). \quad (5.24)$$



**Abb. 8:** Bestimmung der Schnittpunkte mit x-Achse. Die in Abbildung 7 ausgelesenen Messpunkte werden linear bis zum Punkt  $B \rightarrow \infty$  extrapoliert und der Schnittpunkt mit der x-Achse abgelesen. Die Fehler werden jeweils mithilfe zweier Hilfsgeraden abgeschätzt.

Daraus ergibt sich nach (5.14) und (5.21) der Landé-Faktor zu

$$g = \frac{M\hbar e}{\mu_B m_c} = -0.80 \pm 29. \quad (5.25)$$

Dieser Wert ist fast doppelt so hoch, wie der in der Literatur [2] angegebene Wert von  $g = -0.44$  im Einteilchenbild. Damit wird deutlich, dass Mehrteilcheneffekte beim Quanten-Hall-Effekt nicht zu vernachlässigen sind und das magnetische Moment der Elektronen im Kollektiv stärker ist als die Summe der Einzelmagnetisierungen. Die Bestimmung der Ladungsträgerdichte aus diesem Plot ist mathematisch ähnlich, wenn auch ungenauer, zur Bestimmung mittels Schubnikow-de-Haas-Oszillationen. Wir erhalten mit zwei Landau-Niveaus pro Landau Quantenzahl

$$N_S = \frac{2e}{h} \frac{\Delta n}{\Delta \frac{1}{B}} = (3.69 \pm 0.83) \times 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^2} \quad (5.26)$$

## 6 Zusammenfassung

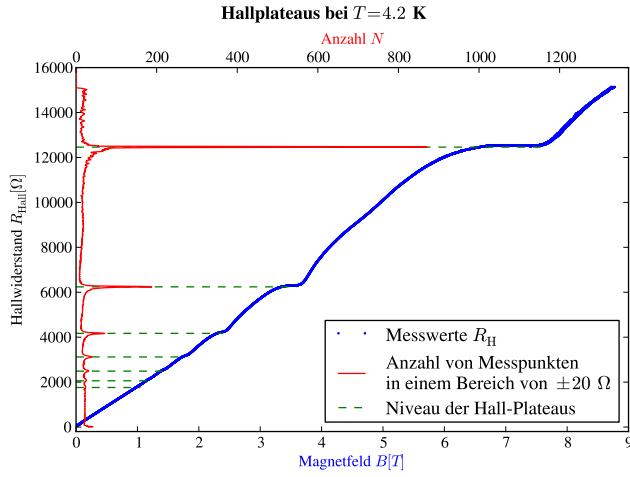
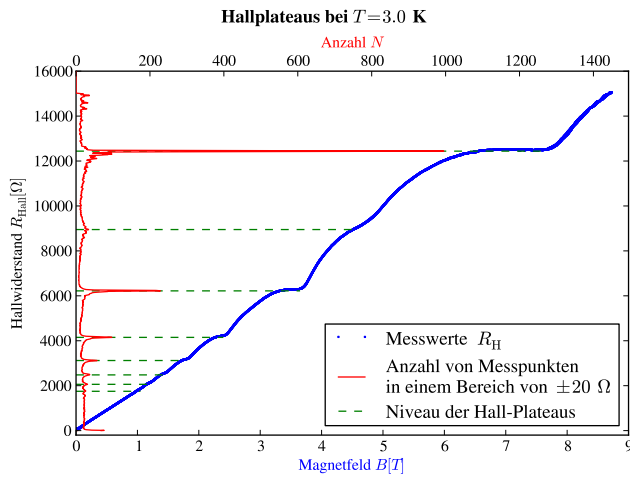
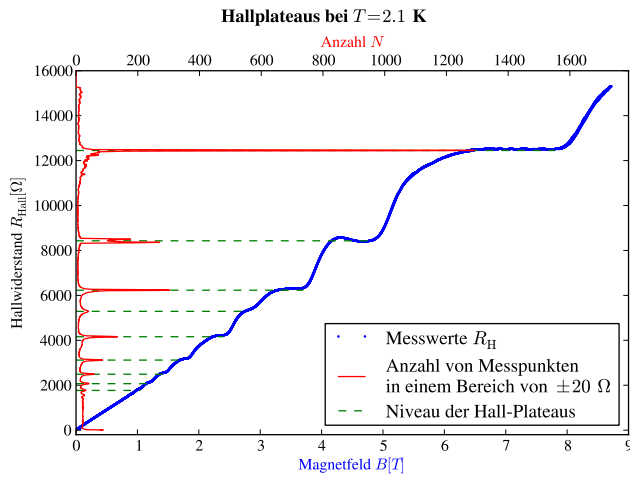
Mit dem F-Praktikumsversuch zum Quanten-Hall-Effekt konnten wir die Quantisierung der elektronischen Zustände und deren Einfluss auf die makroskopischen Eigenschaften der Probe nachweisen. Es konnten ganzzahlige Hall-Plateaus bis zur Quantenzahl 14 bei 1.5 K beobachtet werden. Die bestimmte Klitzing-Konstante weichte mit  $25.1 \text{ k}\Omega$  etwa 3 % vom Literaturwert ab. Wir verwendeten unterschiedliche Metho-

den, um die Ladungsträgerkonzentration unserer Probe zu bestimmen. Dabei lieferte die Auswertung der Hall-Plateaus die genauesten Ergebnisse. Ohne Magnetfeld wurden Längswiderstand, Leitfähigkeit und Beweglichkeit der Elektronen untersucht, wobei wir eine deutliche Leitfähigkeitszunahme unterhalb von 3 K messen konnten. Aus der Oszillationen der Längsspannung bei niedrigen Magnetfeldstärken wurde die Zyklotronmasse der Elektronen in GaAs bestimmt. Die Analyse war nicht sehr genau und die bestimmte Masse mit  $0.032 m_e$  nur etwa halb so groß wie der Literaturwert. Aus der Ladungsträgerdichte wurde die Fermi-Geschwindigkeit bestimmt und macht mit etwa 250 km/s den fermionischen Charakter der Elektronen deutlich. Zuletzt wurden bei tiefen Temperaturen die Zeeman-Aufspaltung beobachtet und daraus der Landé-Faktor zu bestimmen. Dieser lag mit  $-0.80$  deutlich über dem Wert des Elektrons im Einteilchenbild, was den Mehrteilchen-Charakter des Experiments deutlich macht.

## Literatur

- [1] ANDO, T.: Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. IV. Oscillatory conductivity. In: *J. Phys. Soc. Japan* 37 (1974), Nr. 1233
- [2] BATKE, Edwin: *Anleitung - Quanten-Hall-Effekt*. Physikalisches Institut der Universität Würzburg. Juli 2010. – URL [http://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11999999/Aufgabenstellung\\_QHE.pdf](http://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11999999/Aufgabenstellung_QHE.pdf). – Physikalisches Fortgeschrittenen Praktikum
- [3] JANSSEN, N. E.; Goebel R.; Williams J. M.; Tzalenchuk A.; Yakimova R. et al.: Graphene, universality of the quantum Hall effect and redefinition of the SI system. In: *New J. Phys.* 13 (9), S. 93026. 37 (2011), Nr. 1233. – DOI: 10.1088/1367-2630/13/9/093026
- [4] UNIVERSITÄT DES SAARLANDES: *Materialkonstanten*. September 2013. – URL [http://www.uni-saarland.de/fileadmin/user\\_upload/Professoren/fr74\\_ProfMoeller/Vorlesung/V\\_Erster\\_Studienabschnitt\\_Bachelor/V\\_B\\_Aktuelle\\_Semester/V\\_B\\_WS09\\_10/fermidirac.htm](http://www.uni-saarland.de/fileadmin/user_upload/Professoren/fr74_ProfMoeller/Vorlesung/V_Erster_Studienabschnitt_Bachelor/V_B_Aktuelle_Semester/V_B_WS09_10/fermidirac.htm)

## 7 Anhang

Abb. 9: Hallplateaus bei  $T = 4.2$  K.Abb. 10: Hallplateaus bei  $T = 3.0$  K.Abb. 11: Hallplateaus bei  $T = 2.1$  K.