

Kernspinresonanz

Daniel Friedrich & Ulrich Müller

Ein Wasserkreislauf, Polarisator, Manipulator und Analysator ergeben einen Aufbau zur Untersuchung der magnetischen Kernresonanz. Wir bestimmen die Resonanzfrequenz $\nu_{\text{res}} = 4712.31 \text{ kHz}$ der Protonen im Feld des Analysators sowie die Energieaufspaltung $\Delta E = 19.48854 \times 10^{-9} \text{ eV}$. Wir stellen den Phasenraum von Frequenz, Amplitude und Signal dar, nehmen 4 volle Drehungen des Spins auf und bestimmen das Kernmagneton $\mu_K = 5.10 \times 10^{-27} \text{ T/A}$. Wir bestimmen das vorhandene Störfeld im Raum und vergleichen für verschiedene Temperaturen die Relaxationszeiten T_1 , wobei wir bei höherer Temperatur längere Relaxationszeit messen. Insgesamt konnten wir die theoretisch vorhergesagte Dynamik der Magnetisierung bestätigen.

Betreuer: Dr. Charles Gould

Versuchsdurchführung am 18. September 2013

Protokollabgabe am 25. September 2013

Zweitabgabe am 07. Oktober 2013

1 Einleitung

Befindet sich ein Atomkern mit einem nichtverschwindenden Spin in einem Magnetfeld, so kann er elektromagnetische Strahlung absorbieren sowie emittieren. Dieser Effekt wird als Kernspinresonanz (eng.: nuclear magnetic resonance NMR) bezeichnet. Zurückzuführen ist der Effekt auf das magnetische Moment, das durch den Spin des Atomkerns hervorgerufen wird. Dieses magnetische Moment besitzt, je nach Orientierung in einem äußeren Magnetfeld, unterschiedlich viel Energie. Die Energieaufspaltung eines Spins im äußeren Magnetfeld wurde zuerst im Jahre 1896 von Pieter Zeeman an Elektronen in einem Atom und 40 Jahre später von Isidor Rabi an Atomkernen nachgewiesen [5].

Kleinste Unterschiede im lokalen magnetischen Feld von Atomkernen werden in der Chemie eingesetzt um Informationen über den Bindungszustand von Atomen zu gewinnen. Die Unterscheidung von Materialien aufgrund der Kernspinresonanz ermöglicht in der Magnetresonanztomographie zerstörungsfrei Bilder von organischen Proben in Echtzeit aufzunehmen [2].

2 Theorie

Die Theorie der Kernspinresonanz ist auf die Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Moment des Atomkerns und dem äußeren Magnetfeld zurück zu

führen. Das magnetische Moment des Kerns wird dabei von dessen Spin verursacht und folgt der Beziehung

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{\mu_K}{\hbar} \mathbf{s} \quad (2.1)$$

mit g dem Landé-Faktor des Protons, \hbar dem planck'schen Wirkungsquantum und μ_K dem Kernmagneton. Für ein Proton entspricht dabei das Kernmagneton äquivalent zum Bohrschen Magneton $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p}$ mit m_p der Protonenmasse. Der Landé-Faktor des Protons beträgt etwa 5.59.

Befindet sich das magnetische Moment nun in einem Magnetfeld, so besitzt es die potentielle Energie

$$E_M = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (2.2)$$

und ist somit in seiner energetisch günstigsten Position, wenn es parallel zum äußeren Feld ausgerichtet ist.

In einer Probe kommt ein großes Ensemble von Protonenspins vor, sodass sich die Gesamtmagnetisierung \mathbf{M} der Probe aus der Summe der Erwartungswerte aller magnetischen Momente ergibt [4].

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^N \langle \psi_k | \hat{\boldsymbol{\mu}} | \psi_k \rangle \quad (2.3)$$

$|\psi_k\rangle$ beschreibt hier die Zustandsfunktionen der N Protonen.

Jedes geladene Teilchen mit Drehimpuls \mathbf{J} besitzt einen magnetischen Dipol $\boldsymbol{\mu}$, wodurch in einem Magnetfeld \mathbf{B}

ein Drehmoment \mathbf{D} auf das Teilchen wirkt. Hierdurch beginnt der Drehimpuls des Teilchens um das angelegte Magnetfeld mit $\mathbf{D} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ zu präzedieren. Die Präzessionsbewegung kann nach [Praktikumsanleitung \[4\]](#) durch

$$d\mathbf{D}(t) = \gamma \mathbf{M}(t) \times \mathbf{B}(t) dt \quad (2.4)$$

beschrieben werden, wobei γ dem gyromagnetischen Verhältnis entspricht, durch das ebenso die Richtung und Größe des Dipols mit $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{J}$ definiert ist. Die Frequenz der Präzession wird Larmorfrequenz ω_{Larmor} genannt und ist gegeben durch [3]

$$\omega_{\text{Larmor}} = \frac{g\mu_K}{\hbar} B = \gamma \cdot B. \quad (2.5)$$

Um nun die dynamische makroskopische Magnetisierung der Probe zu beschreiben werden die sogenannten Bloch-Gleichungen verwendet [4].

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}(t) - \mathbf{e}_x \frac{M_x}{T_2} - \mathbf{e}_y \frac{M_y}{T_2} - \mathbf{e}_z \frac{M_z}{T_1} \quad (2.6)$$

$T_{1,2}$ sind hier Relaxationszeiten, wobei T_1 der Zeit entspricht, mit der sich die Spintemperatur an die Temperatur des Gesamtsystems angleicht (z -Richtung) und T_2 der Zeit, in der die Spins in x - y -Richtung dephasieren.

Im Experiment befindet sich die Probe in einem statischen Magnetfeld B_0 , wodurch eine Präzession mit der Larmorfrequenz um die Magnetfeldachse zustande kommt. Wird nun ein zusätzliches zirkular polarisiertes Feld B_1 eingestrahlt, kann der Drehwinkel der Präzessionsbewegung verändert werden. Das zirkulare Feld B_1 wird mit der selben Frequenz wie die Präzessionsfrequenz der Teilchen eingestrahlt. Hierdurch wirkt im Bezugssystem des Spins ein konstantes Magnetfeld, welches die Präzessionsbewegung des Drehimpulses neu ausrichtet. Die nötige Frequenz des zirkularen Feldes B_1 wird durch die Resonanzfrequenz ν_{res} beschrieben [4],

$$\nu_{\text{res}} = \frac{\gamma B_0}{2\pi} \quad (2.7)$$

und entspricht genau der Larmorfrequenz der Präzessionsbewegung der Teilchen.

Befinden sich die Protonen nicht dauerhaft im zirkularen polarisierten Magnetfeld, so kann erreicht werden, dass sich die Magnetisierung nur um einen gewissen Winkel, den Drehwinkel Φ , dreht. So kann erreicht

werden, dass sich die Magnetisierung von der z -Achse zum Beispiel in die x -Achse dreht. Der Drehwinkel ergibt sich aus dem gyromagnetischen Verhältnis γ , der Magnetfeldstärke B_1 und der Zeit t_{Spule} in der sich die Protonen im Magnetfeld befinden

$$\Phi = \gamma B_1 t_{\text{Spule}}. \quad (2.8)$$

In der Realität kämpft man mit zwei Herausforderungen: Erstens entspricht die Anregungsfrequenz oft nicht der Frequenz, mit der die Protonen um die z -Achse präzedieren und zum andern ist die Zeit t_{Spule} aufgrund unterschiedlicher Geschwindigkeiten der Protonen nicht identisch. Die Abweichung der Anregungsfrequenz kann zumindest für unendlich große Relaxationszeiten analytisch gelöst werden. Die normierte z -Komponente der Magnetisierung ergibt sich dabei zu

$$\frac{M_z(\Phi, \nu)}{M(t=0)} = \frac{[u(\nu)^2 + \cos(\Phi)\sqrt{1+u(\nu)^2}]}{1+u(\nu)^2}, \quad (2.9)$$

wobei $u(\nu)$ die Abweichung von der Resonanzfrequenz berücksichtigt. Die unterschiedliche Verweildauer der Protonen in der Spule kann bei turbulenter Strömung mit einer Gaußverteilung des Drehwinkels berücksichtigt werden.

3 Experimenteller Aufbau

Der verwendete Versuchsaufbau ist in Abbildung 1 schematisch dargestellt.

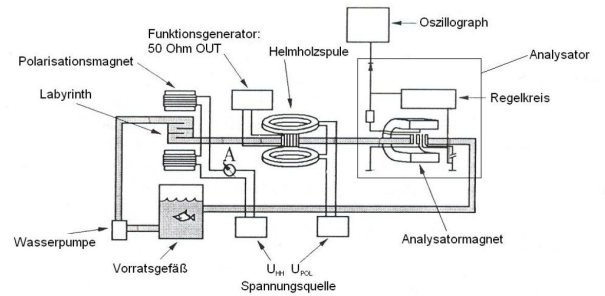


Abb. 1: Schematischer Versuchsaufbau nach [Praktikumsanleitung \[4\]](#).

Das für die Magnetisierung verwendete destillierte Wasser wird von einer Pumpe mit einstellbarer Geschwindigkeit durch einen Wasserkreislauf gepumpt. Als erstes wird das Wasser durch einen Polarisationsmagne-

ten befördert. Im Magneten durchläuft es ein Labyrinth mit dem die Verweildauer erhöht wurde um eine ausreichende Polarisierung zu erzeugen. Das polarisierte Wasser durchläuft dann ein Helmholtzspulenpaar mit dem ein statisches Magnetfeld erzeugt werden kann. Im Zentrum der Spulen ist der Wasserschlauch von einer Einstrahlspule umwickelt, die über ein Funktionsgenerator mit 50Ω Output, ein Wechselfeld erzeugen kann. Mit dem Wechselfeld kann im Versuch die Richtung der Magnetisierung manipuliert werden. Der Teil wird somit auch Manipulator genannt. Aus dem Manipulator wird das Wasser in den Analysator gepumpt, in dem die z -Komponente der Magnetisierung gemessen werden kann. Der Analysator besteht aus einem Hufeisenmagneten, der ein konstantes Magnetfeld erzeugt. Der Hufeisenmagnet ist zudem mit einer Spule umwickelt an die ein Wechselfeld mit 50 Hz, das sogenannte Wobelfeld, angelegt wird. Somit können wir ein sich zeitlich langsam änderndes Magnetfeld erzeugen, das zu jedem Zeitpunkt für die Magnetisierung als statisch angesehen werden kann. Um den Schlauch im Inneren des Hufeisenmagneten ist eine weitere Spule gewickelt, die mit einem Schwingkreis verbunden ist, dessen Frequenz des Wechselfeldes einstellbar ist. Nach dem Analysator gelangt das Wasser zurück in einem Sammelbehälter in dem durch eine lange Verweilzeit das Wasser vollständig depolarisieren kann. Der Sammelbehälter schließt letztendlich den Wasserkreislauf.

Durch den Aufbau des Analysators kann die Frequenz des Regelkreises ebenso auf Resonanzfrequenz eingestellt werden, wodurch Übergänge zwischen den Energieniveaus der Protonen angeregt werden. Dieser Übergang absorbiert oder überträgt Leistung auf den Schwingkreis. Der Schwingkreis wird automatisch nachgeregelt. Aus diesem Leistungsausgleich entsteht unser Messsignal. Das Signal des Analysators kann über einen Sample/Hold Verstärker (S/H-Verstärker) mit dem Oszillographen verbunden und mit dem Computer ausgelesen werden. Der S/H-Verstärker wird durch die selbe Sinusspannung getriggert, die das Wobelfeld erzeugt. Der Verstärker misst zu jedem Triggerimpuls kurz das Messsignal und gibt es bis zum nächsten Impuls als Gleichspannung aus. So kann durch richtige Einstellung der Phase die Höhe der Resonanzpeaks ausgelesen werden.

Die gesamte Beschaltung des Messaufbaus ist in Abbildung 2 gezeigt. Im Versuch wurden allerdings nur für den jeweiligen Versuchsteil wichtige Geräte miteinander

verschaltet.

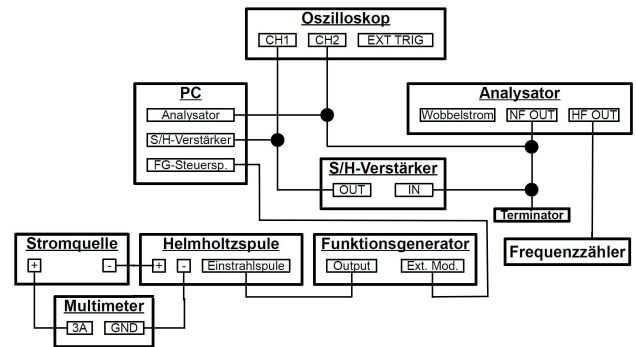


Abb. 2: Beschaltung des gesamten Messaufbaus. Auszüge aus [Praktikumsanleitung](#) [4].

4 Auswertung

4.1 Eichen des Funktionsgenerators

Um die **Abweichung der eingestellten Ausgangsspannung des Funktionsgenerators bei Belastung** zu bestimmen, wird dieser mit dem Oszillographen verbunden. Mit den eingestellten Werten von 50 mV bzw. 100 mV **für die Spitze/Spitze Werte** und 1.3 kHz bzw. 2.6 kHz in der Frequenz des Funktionsgenerators messen wir das Cosinus-Signal über den Oszillator, der für die Aufnahme mit dem Computer verbunden ist. An die erhaltenen Messsignale fitten wir jeweils eine Cosinus-Funktion um die Schwankung, die durch die diskrete Zeitaufösung zustande kommt, auszugleichen. Der Fehler der Werte ergibt sich aus der Ungenauigkeit in **den Spitze/Spitze Werten** $U_{FG,PP}$ des Funktionsgenerators von 2%. Der Fehler der Fitfunktion kann gegen den Fehler in **den Spannungswerten** vernachlässigt werden. Für die vier Messungen vergleichen wir jeweils die Spitze/Spitze Werte, die Amplituden U_{Osz} und den Effektivwert. Die Werte sind in Tabelle 1 aufgelistet.

Aus dem Vergleich der Werte in Tabelle 1 erkennen wir, dass die Spitze/Spitze Werte am Oszillographen im Rahmen der Fehler genau doppelt so groß sind, wie die eingestellten Werte am Funktionsgenerator. Dies liegt daran, dass der Oszillograph einen sehr großen Widerstand im Vergleich zum Funktionsgenerator besitzt, dieser aber auf eine Belastung von 50Ω eingestellt ist. Zudem erkennen wir, dass sich die Werte für verschiedene Frequenzen nicht unterscheiden. Das ist sehr wichtig, da wir später bei einer eingestellten Spannung über verschiedene Frequenzen messen wollen.

FG 50 mV _{PP}	Oszillograph Spannung in mV		
Frequenz	Amplitude	Spitze/Spitze	Effektivwert
1.3 kHz	50.2 ± 1.0	100.6 ± 2.0	35.55 ± 0.71
2.6 kHz	49.9 ± 1.0	99.9 ± 2.0	35.31 ± 0.71
FG 100 mV _{PP}			
1.3 kHz	100.2 ± 2.0	200.4 ± 4.0	70.87 ± 0.14
2.6 kHz	100.3 ± 2.0	200.6 ± 4.0	70.93 ± 0.14

Tab. 1: Vergleich der eingestellten Werte am Funktionsgenerator (FG) mit den am Oszilloskop gemessenen Daten, sowie die gemessenen Spitze/Spitze Werte, die Amplituden und Effektivwerten.

Die Einstrahlspule im Manipulator besitzt einen vernachlässigbar kleinen Innenwiderstand. Allerdings ist der Spule ein Vorwiderstand von $47\ \Omega$ eingebaut, um den Strom zu begrenzen und messbar zu machen [4]. Aus dem zusätzlichen Ausgangswiderstand des Funktionsgenerator von $50\ \Omega$ wird die Amplitude der Ausgangsspannung reduziert [4]. Um für nachfolgende Messungen einen Eichfaktor f_{ES} zu erhalten haben wir obige Messung für eine Frequenz von 1.3 kHz und die Spitze/Spitze Werte $U_{PP} = 10\text{ mV}, 20\text{ mV}, 50\text{ mV}, 100\text{ mV}, 200\text{ mV}$ und 500 mV wiederholt. Hierbei haben wir jeweils eine Messung mit und eine ohne angeschlossener Einstrahlspule aufgenommen. Zur Bestimmung des Eichfaktors f_{ES} haben wir in Abbildung 3 die gemessenen Spannungen mit angeschlossener Spule U_{ES} über die eingestellten Spannungen des Funktionsgenerators U_{FG} aufgetragen.

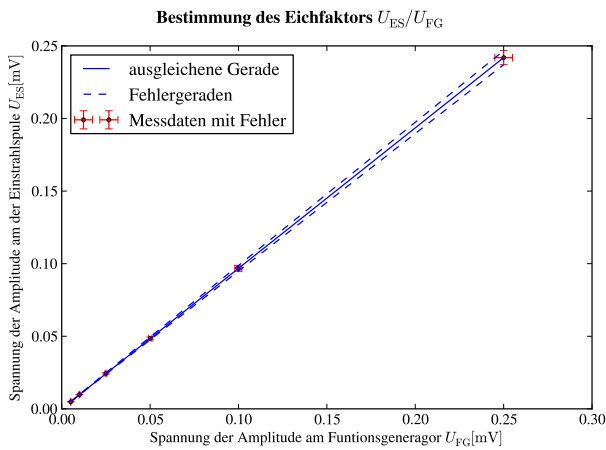


Abb. 3: Gemessene Spulenspannung an der Einstrahlspule U_{ES} über die eingestellte Spannung am Funktionsgenerators U_{FG} zur Bestimmung des Eichfaktors.

Die Werte in Abbildung 3 sind mit den entsprechenden Fehlern in der Amplitude des Funktionsgenerators (2 %) aufgetragen. Zur Bestimmung der Steigung haben wir eine ausgleichende Gerade mit Fehlergeraden an die

Daten gelegt. Die Fehler des Fits können vernachlässigt werden. Für den gemessenen Eichfaktor ergibt sich somit

$$f_{ES} = \frac{U_{ES}}{U_{FG}} = 0.967 \pm 0.019 \quad (4.1)$$

Aus den gemessenen Werten erkennen wir, dass der Eichfaktor unabhängig von der gemessenen Frequenz der Wechselspannung an der Einstrahlspule ist. Dies ist auch wichtig um den Eichfaktor für spätere Versuche verwenden zu können, da dort an unterschiedlichen Frequenzen gemessen wird.

Der Eichfaktor kann zudem theoretisch aus der Kenntnis der Widerstandswerte bestimmt werden.

$$f_{ES} = \frac{U_{Osz}}{U_{FG}} \cdot \frac{R_{ES}}{R_{FG} + R_{ES}} = 0.969 \pm 0.036 \quad (4.2)$$

Der Fehler ergibt sich aus den Fehlern der gemessenen Spannungen und dem geschätzten Fehler des Vorwiderstandes von 2 %.

Aus dem Vergleich des experimentell bestimmten Wertes mit dem berechneten sehen wir im Rahmen der Fehler eine sehr gute Übereinstimmung. Für nachfolgende Messungen verwenden wir somit den aus unserer Messung erhaltenen Eichfaktor (4.1).

4.2 Einstellen der Resonanzfrequenz

In diesem Versuchsteil sollte bei eingeschalteter Wasserpumpe, Analysator und Polarisator der Schwingkreis des Analysators auf die Resonanzfrequenz eingestellt werden. Das Signal konnten wir über den Oszillographen beobachtet und durch verändern der Frequenz des Schwingkreises so einstellen, dass die erhaltenen Resonanzsignale mit einem äquidistanten Abstand detektiert werden.

4.3 Bestimmung der Resonanzfrequenz im Analysator

Im dritten Versuchsteil soll die Resonanzfrequenz der Protonenspins im Magnetfeld des Analysator-Magneten bestimmt werden. Daraus lassen sich die magnetische Feldstärke des Analysator-Magneten und die Energieaufspaltung der Protonen-Spins bestimmen. Wir variieren dazu die Analysatorfrequenz in kleinen Schritten. Zweimal pro Periode des Wobbelstromes tritt dabei der Resonanzfall im äußeren Feld auf, wie in

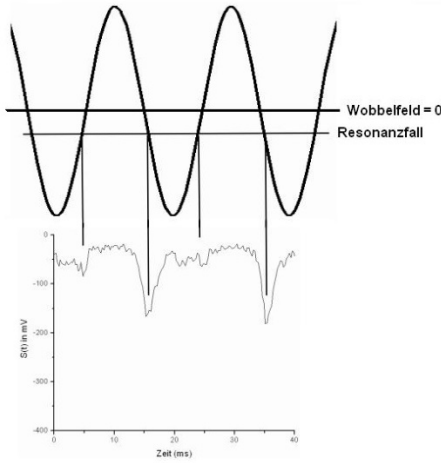


Abb. 4: Die Analysatorfrequenz trifft zweimal pro Periode des Wobelfeldes die Resonanzfrequenz. Sie bestimmt mit ihrer Höhe den zeitlichen Abstand zweier Resonanzfälle.

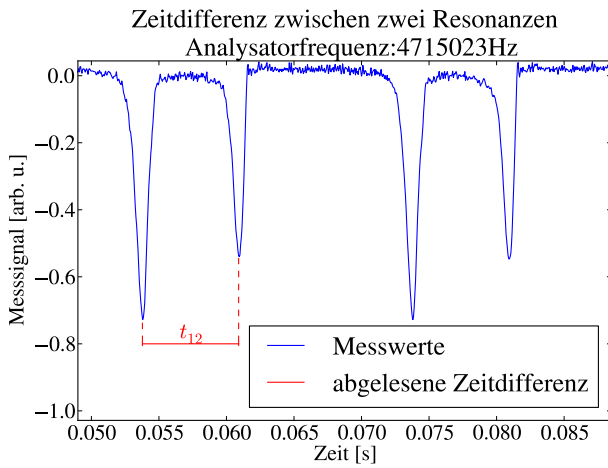


Abb. 5: Für jede Frequenz wird der zeitliche Abstand zweier Resonanzereignisse abgelesen.

Abb. 4 skizziert ist. Damit wird deutlich, dass die Resonanzfrequenz und der zeitliche Abstand t_{12} zwischen zwei Resonanzfällen einen Cosinus-Zusammenhang besitzen. Die Periodendauer entspricht dabei der doppelten Periodendauer des Wobelfeldes. Wir beobachten, Wie in Abb. 5 messen wir für zehn verschiedene Analysatorfrequenzen den zeitlichen Abstand zweier der Resonanzen aus. Die Ablesegenauigkeit der Zeitdifferenzen schätzen wir auf 0.0002 Sekunden. Der Frequenzzähler zeigte während der Messung leicht unterschiedliche Werte im Bereich von ± 1 Hz an. Diese Unsicherheit vernachlässigen wir gegenüber der Ablesegenauigkeit der Zeitdifferenzen. Nun tragen wir die Frequenzen über die abgelesenen Zeitdifferenzen in Abb. 6 auf und lesen bei 0.01 s die Resonanzfrequenz der Pro-

tonen im Feld des Dauermagneten ab.

$$\nu_{\text{res}} = (4712.31 \pm 0.20) \text{ kHz} \quad (4.3)$$

Der Fehler der Resonanzfrequenz ergibt sich auch der Unsicherheit der Zeitdifferenz und der Steigung der Fit-Kurve im Ablesepunkt. Die Energieaufspaltung und die

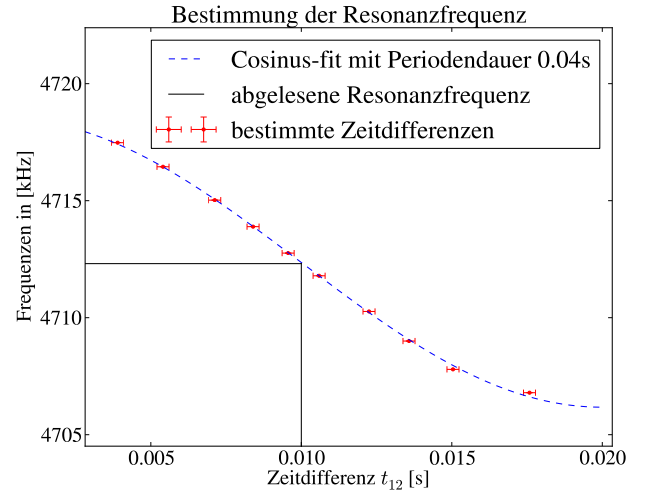


Abb. 6: Abgelesene Zeitdifferenzen sind in Abhängigkeit der Frequenz aufgetragen und besitzen eine Cosinus-Abhängigkeit mit einer Periodendauer von 0.04 s.

Magnetfeldstärke des Dauermagneten ergeben sich nun zu

$$\Delta E = h\nu_{\text{res}} = 19.488\,54(83) \times 10^{-9} \text{ eV} \quad (4.4)$$

und

$$B_0 = \frac{2\pi\nu_{\text{res}}}{\gamma_p} = 0.110\,676\,1(47) \text{ T.} \quad (4.5)$$

Weiterhin untersuchen wir, wie sich die Signalstärke eines Peaks mit dem Abstand zum vorherigen Peak verändert. Die Signalthöhen werden dazu aus den einzelnen Graphen für die verschiedenen Analysatorfrequenzen abgelesen. Da die Signalstärke nicht in jeder Periode gleich ist, lesen wir aus der Schwankung der Signalstärken über zehn Perioden einen Fehler ab. Die Beträge der Signalstärken werden in 7 aufgetragen und zeigen deutlich, dass die Signalstärke zunimmt, je weiter das letzte Signal zurück liegt.

Der Verlauf lässt sich verstehen, wenn man bedenkt, dass sich während dem Resonanzfall die Polarisation ihrem Gleichgewichtszustand annähert. Dadurch

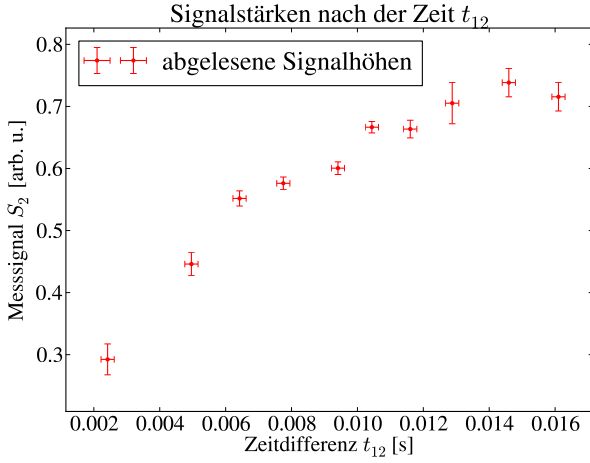


Abb. 7: Abgelesene Signalstärken in Abhängigkeit zur Zeitdifferenz zum vorherigen Peak.

schwächt sich die Polarisierung und damit die Signalstärke schnell ab, wird aber durch nachfließendes Wasser erneuert. Während bei kleinen Zeitdifferenzen nur wenig polarisiertes Wasser in die Spule nachfließen konnte und wir ein schwaches Signal messen, sättigt das Signal bei großen Zeitabständen.

4.4 Linearität zwischen Signal und Polarisationsfeldstärke

Unser Versuchsaufbau wird nun um den S/H-Verstärker erweitert. Mit dem S/H-Verstärker kann nun die Signalhöhe der Resonanzpeaks $S2(t)$ ausgelesen werden. Im folgendem Versuchsteil soll die Abhängigkeit der Signalhöhe von der Polarisationsstromstärke I_{pol} des Polarisators, also der Polarisierung der Protonen im Wasser, untersucht werden. Hierfür nehmen wir das Signal $S2(t)$ über die Zeit von 50 s für Polarisationsströme von 1.3 A bis 2.5 A in 0.2 A-Schritten auf.

Zum Eichen des Magnetfeldes im Polarisator messen wir mit einer Hall-Sonde das Magnetfeld bei 2.5 A. Die Messung mit der Hallsonde beträgt

$$U_{\text{pol}}(2.5 \text{ A}) = (5.60 \pm 0.05) \text{ mV}, \quad (4.6)$$

wobei sich der Fehler aus der Ablesegenauigkeit der analogen Spannungsanzeige ergibt. Da der Strom und das Feld im Magneten proportional sind, kann jeder eingestellten Stromstärke am Polarisator eine Magnetfeldstärke zugeordnet werden. Der Fehler des eingestellten Stroms am Polarisatormagneten wird mit 2 %

Anzeigegenauigkeit abgeschätzt. Um die Linearität des Messsignals in Abhängigkeit vom Magnetfeld zu untersuchen, sind die gemessenen Werte in Abbildung 8 abgebildet. Die Werte für die Signalhöhe ergeben sich aus einem linearen Fit an die Messdaten der über die Zeit von 50 s aufgenommenen Messungen für verschiedene Stromstärken.

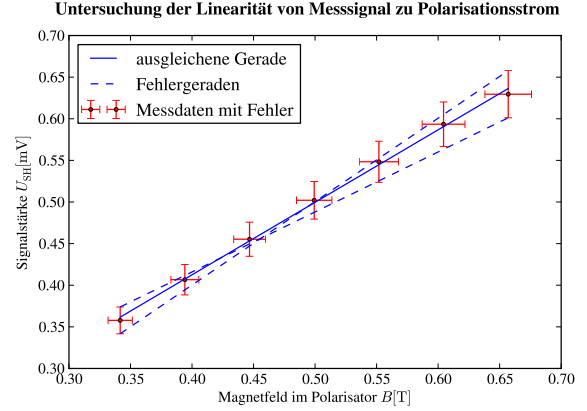


Abb. 8: Signalhöhe $S2$ der Resonanzpeaks in Abhängigkeit der Polarisationsfeldstärke zur Untersuchung der Linearität.

Mit Abbildung 8 können wir die Linearität des Messsignals $S2$ zur Polarisationsstromstärke I_{pol} sehr gut bestätigen. Die Fehler im B -Feld ergeben sich aus der Ungenauigkeit der Strommessung am Polarisator von 2 % und der Bestimmung des Magnetfeldes mit der Hallsonde. Der Fehler im Messsignal schätzen wir auf 4 %. Durch die Anzahl der Messungen können statistische Schwankungen vernachlässigt werden. Der Fehler resultiert somit nur aus der Ungenauigkeit in der Einstellung der Resonanz, sowie der Phase des S/H-Verstärkers.

4.5 Messung der Spindrehung im Störfeld

In diesem Aufgabenteil sollen die Spins der Protonen im Störfeld des Raumes manipuliert werden, um damit die Stärke des Störfeldes zu bestimmen. Dazu werden die Protonen, wie im letzten Versuchsteil, im Polarisator polarisiert. Anschließend gelangen sie zur Manipulatorspule, wo der Spin mit Hilfe der passenden Einstablfrequenz gedreht werden kann. Die Resonanzfrequenz entspricht dabei wieder der Larmor-Frequenz im Störfeld. Für jede Frequenz wird das Signal am Analysator detektiert. Bei der Bestimmung der Resonanzfrequenz

stößt man auf folgendes Problem: Am Computer werden gleichzeitig das Signal der Analysators und die Amplitude/Frequenz der Einstrahlspule gespeichert. Dies geschieht, obwohl das Wasser eine gewisse Zeit vom Manipulator zum Analysator benötigt. Man misst also beim Durchfahren von niedrigen zu hohen Frequenzen die Signale am Analysator, die von vergangenen, sprich niedrigeren Frequenzen stammen. Das Maximum des gemessenen Signals scheint zu höheren Frequenzen verschoben zu sein. Um diesen Effekt auszugleichen, messen wir zweimal. Mit ansonsten gleichen Einstellungen messen wir einmal von niedrigen zu hohen und anschließend von hohen zu niedrigen Frequenzen. In Abb. 9 sind die zwei Resonanzkurven zu sehen, die jeweils von der wahren Resonanzkurve nach links und nach rechts verschoben sind. Wir messen die Maxima der Resonanz-

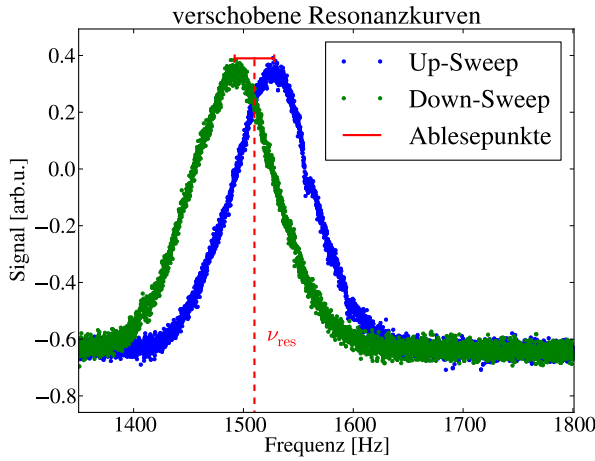


Abb. 9: Die verschobenen Resonanzkurven des Up- und Down-sweeps.

kurven aus und errechnen, dass sie vom ihrem Mittelwert $\nu_{\text{res}} = (1510 \pm 2) \text{ Hz}$ um $\pm \Delta\nu = 18 \text{ Hz}$ verschoben sind. Diese Verschiebung der Peaks verwenden wir um bei den folgenden Plots des Phasenraumes, die Position der Peaks zu korrigieren. Die Resonanzfrequenz entspricht der Präzessionsfrequenz der Protonen in einer Feldstärke von

$$B_{\text{Raum}} = \frac{2\pi\nu_{\text{res}}}{\gamma_p} = 35.46(5) \mu\text{T}. \quad (4.7)$$

Diese Feldstärke liegt in der Größenordnung der Erd-Magnetfeldstärke. Aus der Verschiebung lässt sich außerdem ableiten, dass das Messsignal des Analysators der eingestellten Frequenz am Manipulator etwa 3 Sekunden nacheilt. Dies lässt sich zum Teil damit erklären, dass das Wasser eine gewisse Zeit vom Mani-

pulator zum Analysator benötigt. Jedoch zeigt die in 4.7 berechnete Wassergeschwindigkeit, dass diese nicht alleine für den Verzug verantwortlich sein kann. Was im Messaufbau noch zu einem Verzug führen kann, konnten wir nicht klären.

Im Magnetfeld des Raumes soll nun untersucht werden, wie sich das Messsignal in Abhängigkeit der Einstrahl-Frequenz und der -Intensität verhält. Wir messen für Spannungen von 10 mV bis 100 mV bei Frequenzen von 1200 Hz bis 1800 Hz. Die Messpunkte sind in Abb. 10 dargestellt. Man erkennt, dass sich die Intensität des

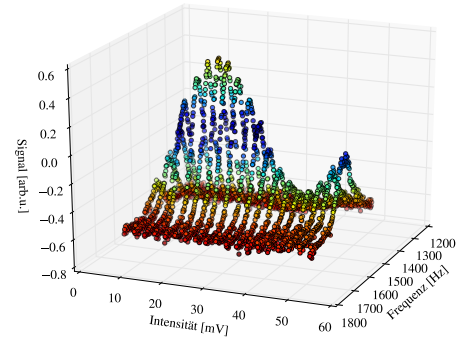


Abb. 10: Abbildung des Phasenraumes. Signalthöhe in Abhängigkeit der Einstrahl-Frequenz und der Intensität.

Messsignals bei etwa 45 mV Einstrahlamplitude komplett das Vorzeichen gewechselt hat. Die Analysatorspule gewinnt an diesem Punkt Energie aus den polarisierten Protonen, deren Spin von der Einstrahlspule zuvor in die höherenergetische Richtung gedreht wurde. Wir überprüfen, ob sich der Spin bei den verwendeten Einstellungen tatsächlich um 180° dreht, indem wir folgende Überlegung machen: Durchquert ein Spin eine Leiterschleife, deren Magnetfeld mit der Resonanzfrequenz oszilliert, dann wird der Spin um

$$\Phi(n=1) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \frac{B_0}{2} dt \quad (4.8)$$

gedreht. Der Faktor $1/2$ berücksichtigt dabei die Zerlegung des linear oszillierenden B -Feldes in zwei zirkuläre B -Felder, von denen eines vernachlässigt wird. Bewegt sich der Spin auf der Achse dieser Leiterschleife, kann

die Gleichung mit dem Biot-Savart-Gesetz auf

$$\Phi(n=1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \mu_0 I}{4} \frac{r^2}{(r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dl}{v} \quad (4.9)$$

umgeschrieben werden, wobei r den Radius der Spule, l den Abstand vom Mittelpunkt der Leiterschleife und v die Wassergeschwindigkeit angibt. Das bedeutet, dass jede der 125 Spulen diesen Beitrag zum Drehwinkel liefert. Dieses Modell beschreibt das Verhalten unseres Experimentes nicht exakt, da sich das Wasser nicht auf einer geraden Linie aus dem unendlichen durch unsere Leiterschleife bewegt. Die Genauigkeit des Modells lässt sich abschätzen, wenn man nur bis zu einem endlichen Wert integriert und die Resultate vergleicht. Wir verkürzen die Strecke der Protonenbewegung im Modell auf eine Spulenlänge vor und nach der Spule und erhalten eine Abweichung von 2.3%. Im Rahmen dieses Fehlers können wir den Gesamtdrehwinkel bei einer Einstrahlamplitude von 45 mV berechnen:

$$\Phi_{45 \text{ mV}} = \frac{\gamma \mu_0 \frac{f_{ES} U_{ES}}{R_{ES}} N}{2v} = 3.14 \pm 0.67. \quad (4.10)$$

Der Drehwinkel ist somit unabhängig von den geometrischen Abmessungen der Spule. Das Ergebnis bestätigt die Vermutung, dass die Protonen bei einer Einstrahlamplitude von 45 mV um $180^\circ (\hat{=}\pi)$ gedreht wurden. Dementsprechend wurden sie Spins am Sattelpunkt in Abb. 10 um eine volle Umdrehung gedreht. Zum Vergleich ist in Abb. 11 das Signal des theoretisch erwarteten Signals geplottet.

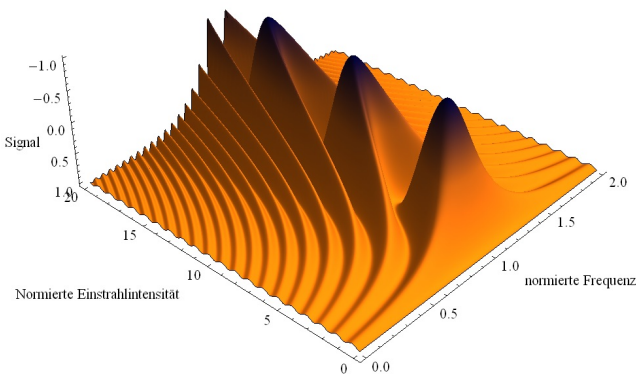


Abb. 11: Theoretisch erwartete Signalverlauf im Phasenraum.

Die gemessenen Signale im Phasenraum weichen sichtbar von der Theorie ab. Auffällig ist, dass die Theorie

auch weit abseits der Resonanzfrequenz schwächere Resonanzen voraussagt. Diese Resonanzen konnten bei unserem Experiment nicht beobachtet werden. Grund dafür sind die unterschiedlichen Bewegungsgeschwindigkeiten der Protonen in der Einstrahlspule. Dadurch werden unterschiedliche Protonenspins unterschiedlich weit gedreht, was zu einer Verwischung der Funktion in der Drehwinkel-Achse führt.

Wird die Manipulatorfeldstärke abseits der Resonanzfrequenz durchgefahren, so findet man, dass der Spin schwächer in der Amplitude, dafür aber schneller gedreht wird. Um dies zu überprüfen, führten wir neben der Messung auf der Resonanzfrequenz auch Messungen knapp darüber und darunter durch. Eine Abweichung von ± 10 Hz reichte jedoch nicht aus, um eine abweichende Oszillationsfrequenz fest zu stellen.

Die Messung auf der Resonanzfrequenz soll nun genauer untersucht werden. Vor dem Plotten werden die Messsignale durch die Abbildung $S = k(1 - \sqrt{1 + l\Delta n})$ auf die Populationsunterschiede für Spin-up und Spin-down umgerechnet. So wird der Einfluss des Detektors berücksichtigt. Die beste Symmetrisierung ergibt die Wahl der Parameter zu $k = 0.85$ und $l = 1.14$.

Da wir die Messung sowohl von hohen zu niedrigen, als auch von niedrigen zu hohen Intensitäten durchgeführt haben, können wir die Verschiebung der Datenpunkte wie in 4.5 aufheben. Außerdem messen wir am Anfang der Messung ein Artefakt, das vermutlich dadurch entstanden ist, dass die Einstrahlspule kurz vor der Messung bereits aktiv war. Wir entscheiden uns daher hier den Sweep von hohen zu niedrigen Einstrahlintensitäten zu plotten und finden deshalb das Artefakt bei hohen Intensitäten. Die symmetrisierten Messwerte sind in Abb. 12 zusammen mit einer theoretisch erwarteten Kurve gezeichnet. Die theoretische Kurve beschreibt die Funktion (2.9) im Resonanzfall mit den Parametern $c = 0.27$ und dem Parameter $p = 70$, der als Proportionalitätskonstante zwischen der Einstrahlintensität und dem Spindrehwinkel den Einfluss der Wassergeschwindigkeit und der Spulengeometrie erfasst.

Die Theorie beschreibt unser Experiment mit den verwendeten Parametern nur qualitativ und wir finden kein anderes Parameterset, dass unser Experiment genauer beschreibt. Die Theorie berücksichtigt nach [4] unterschiedliche Wassergeschwindigkeiten in der Manipulatorspule was den Abfall der Intensitäten bei größeren Drehwinkeln erklärt. Auffällig ist eine sich

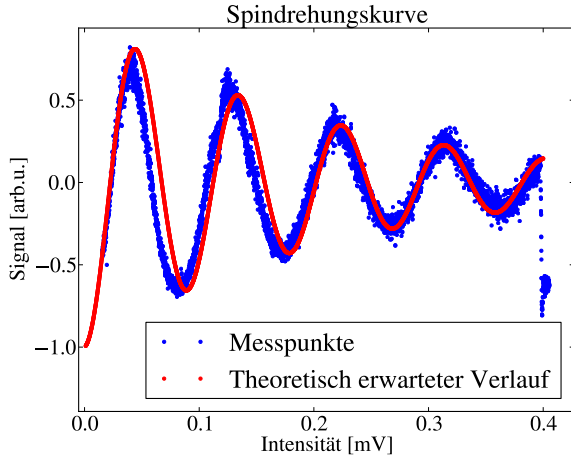


Abb. 12: Symmetrisierte Messpunkte im Vergleich mit einer theoretisch erwarteten Spinkurve.

ändernde Periodendauer der Oszillation der experimentellen Daten. Dies wird vom theoretischen Modell nicht erfasst, sondern kann theoretisch nur erklärt werden, wenn sich während des Durchfahrens der Einstrahlintensität das Verhältnis zwischen Resonanzfrequenz und Einstrahlfrequenz verändert.

Die beschriebene Symmetrisierung der Daten lässt den Nullpunkt unverändert. Trotzdem ist eine unterschiedlich lange obere und untere Halbperiode zu erkennen. Dieser Effekt wird ebenfalls von der theoretischen Kurve nicht erfasst und könnte mit einem Signaloﬀset des Analysators erklärt werden. Ein anderer Schnitt durch den Phasenraum ist in Abb. 13 gezeichnet.

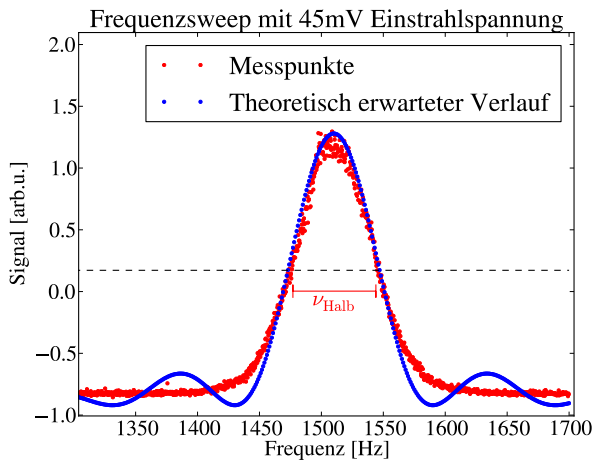


Abb. 13: Schnitt durch Phasenraum mit Einstrahlintensität 45 mV.

Die Daten wurden wieder mit den oben bestimmten

k - und l -Parametern symmetrisiert. Die experimentelle Halbwertsbreite beträgt

$$\nu_{\text{Halb}} = (134 \pm 3) \text{ Hz.} \quad (4.11)$$

Der theoretisch erwartete Verlauf wurde für die Resonanzfrequenz $\nu_{\text{res}} = 1510 \text{ Hz}$ und einer einstrahlenden Magnetfeldstärke von $1.1 \mu\text{T}$ gefittet. Abweichungen des Experiments von der theoretisch erwarteten Kurve sind zum einen, dass der Peak der Resonanzfrequenz im Experiment bei gleicher Höhe eine geringere Halbwertsbreite besitzt. Außerdem fehlen die von der Theorie vorhergesagten Oszillationen für weiter abweichende Frequenzen ganz. Während die Theorie von einem homogenen Magnetischen Feld ausgeht, sind die Protonen im Experiment, während sie sich der Einstrahlpule nähern, auch schwächeren Magnetfeldern ausgesetzt. In diesen schwächeren Magnetfeldern, wirkt sich eine Abweichung der Einstrahlfrequenz stärker auf das Signal aus, was zu schmälere Peaks führt.

Für den Fall einer 360° -Drehung sagt die Theorie ein Minimum des Signals bei der Resonanzfrequenz voraus. Wir messen aber bei allen Einstrahlintensitäten ein maximales Signal bei der Resonanzfrequenz. Die theoretische Kurve wurde mit den gleichen Parametern wie in 13 berechnet. Die theoretischen und experimentellen Daten hierzu in 14 geplottet.

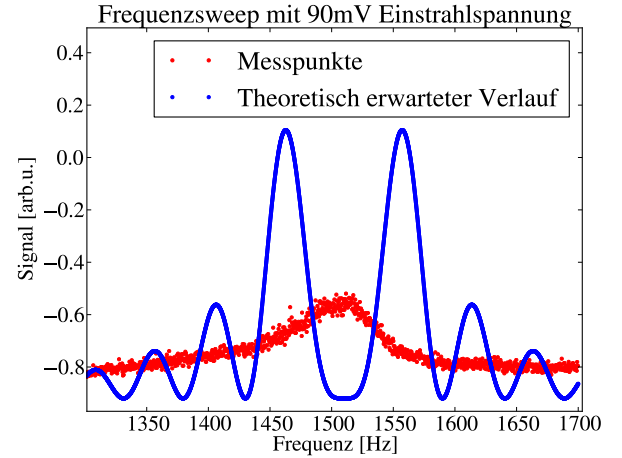


Abb. 14: Schnitt durch Phasenraum mit Einstrahlintensität 90 mV.

Obwohl die Theorie nicht alle Einzelheiten des Experimentes berücksichtigt, hilft sie uns dennoch, die Vorgänge bei der Manipulation von Spins in ihren Grundzügen zu verstehen.

4.6 Messung der Resonanz im Feld der Helmholtzspulen

Wir bestimmen Betrag und Winkel des Störfeldes sowie das Magneton des Protons. Dazu verwenden wir das Helmholtzspulenpaar, das die Einstrahlspule umgibt. Der Strom in der Helmholtzspule regeln wir über die Spannung an der Stromquelle und lesen die Stromstärke über ein Präzisionsmultimeter aus. Durch einen Serienwiderstand an der Helmholtzspule wird der Strom stabilisiert. Wir messen bei den Helmholtzspulenströmen von $I_{\text{HH}} = 45 \text{ mA}$, 65 mA und 80 mA wie im vorherigen Versuchsteil die Resonanzkurven durch einen Frequenz-Sweep am Funktionsgenerator.

Das Feld im Zentrum der beiden Spulen kann mit der Näherung aus [Praktikumsanleitung \[4\]](#) bestimmt werden.

$$B_{\text{HH}} \approx \frac{\mu_0 n I_{\text{HH}}}{R} \left[\frac{8}{5\sqrt{5}} \left(1 - \frac{\zeta^2}{60R^2} \right) - \frac{31\zeta^2 - 36\eta^2}{125R^4} r^2 \right] \quad (4.12)$$

Hier gilt aus der Spulengeometrie $\zeta = 0.03 \text{ m}$, $\eta = 0.046 \text{ m}$, der Radius der Spulen $R = 0.207 \text{ m}$, die Windungszahl $n = 720$ und die Abweichung der Spulenachse zur Einstrahlspule $r = 0.015 \text{ cm}$ [4]. Somit können wir die Proportionalitätskonstante c bestimmen.

$$B_{\text{HH}} = c \cdot I_{\text{HH}} \quad (4.13)$$

$$c = 0.003127 \frac{\text{T}}{\text{A}} \quad (4.14)$$

Aufgrund der Bauart der Spule und den Angaben der Abmessungen schätzen wir den Fehler des c -Parameters auf 1%. Die Bestimmung von Betrag und Winkel des Störfeldes erhalten wird dadurch, dass in der Helmholtzspule das effektiv wirkende Feld aus dem Störfeld B_{S} und dem Spulenfeld B_{HH} zusammensetzt [4].

$$B_{\text{eff}} = B_{\text{HH}} + B_{\text{S}} \quad (4.15)$$

Für die Resonanzfrequenzen im Magnetfeld gilt nach [Praktikumsanleitung \[4\]](#)

$$\nu_{\text{res}} = \frac{g\mu_{\text{K}}}{h} B_{\text{eff}}. \quad (4.16)$$

Da das Helmholtzspulenfeld zudem vom Spulenstrom I_{HH} abhängig ist, gilt [4]

$$\nu^2(+I_{\text{HH}}) + \nu^2(-I_{\text{HH}}) = 2 \frac{g^2 \mu_{\text{K}}^2}{h^2} (c^2 I^2 + B_{\text{S}}^2). \quad (4.17)$$

Aus diesem Grund messen wir die Kurven für positive I_{HH} und negative $-I_{\text{HH}}$ Helmholtzspulenströme. Aus den selben Gründen wie im Versuchsteil 4.5 messen wir einmal von niedrigen und einmal von hohen Frequenzen kommend.

Wie im Teil 4.5 bestimmen wir aus den Messungen für steigende und fallende Frequenz-Sweeps die Resonanzfrequenz für einen eingestellten Spulenstrom. Die Werte sind in Tabelle 2 aufgetragen.

$I_{\text{HH}} [\text{mA}]$	$\nu_{\text{res}} [\text{Hz}]$
$+45.0 \pm 0.9$	6826.3 ± 2.0
-45.0 ± 0.9	5562.2 ± 2.0
$+65.0 \pm 1.3$	9480.2 ± 2.0
-65.0 ± 1.3	8207.7 ± 2.0
$+80.0 \pm 1.6$	11473.2 ± 2.0
-80.0 ± 1.6	10195.6 ± 2.0

Tab. 2: Resonanzfrequenz in Abhängigkeit des Spulenstroms.

Der Ungenauigkeit in der Einstellung des Helmholtzspulenstroms betrug 0.2 mA . **Dieser Fehler wird allerdings vom Fehler des Strommessgerätes von etwa 2% überlagert** und ergibt den Fehler in I_{HH} . Der Fehler der Resonanzfrequenz entspricht der Ablesegenauigkeit von 2 Hz . Zur Auswertung sind in Abbildung 15 die Summe der Frequenzquadrate über das Quadrat des Spulenstroms nach Gleichung (4.17) aufgetragen.

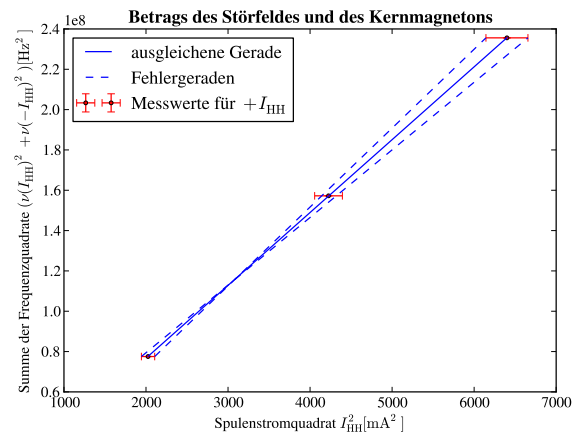


Abb. 15: Summe der Resonanzfrequenzquadrate für verschiedene Spulenströme zur Bestimmung des Magnetons des Protons und der Amplitude des Störfeldes.

Aus Abbildung 15 erhalten wird die Steigung der Ausgleichsgeraden $m_{\text{Sum}} = (36.1 \pm 2.8) \times 10^3 \text{ Hz}^2/\text{mA}^2$ und den y -Achsenabschnitt $y(0) = (45 \pm 27) \times 10^5 \text{ Hz}^2$ mit den Fehlern aus den Geraden maximaler und mini-

malen Steigung. In der Abbildung sind zwar die Fehlergeraden kaum zu erkennen, sind aber für die Bestimmung der Fehler des Kernmagnetons und dem Störfeld entscheidend. Mit Hilfe von Gleichung (4.17) können wir somit das Kernmagneton μ_K und die Amplitude des Störfeldes B_S bestimmen.

$$\mu_K = (5.10 \pm 0.20) \times 10^{-27} \frac{\text{T}}{\text{A}} \quad (4.18)$$

$$B_S = (34 \pm 11) \mu\text{T} \quad (4.19)$$

Der Literaturwert für das Kernmagneton beträgt nach dem [Committee on Data for Science and Technology](#) [1]

$$\mu_{K,\text{Lit}} = 5.05078 \times 10^{-27} \frac{\text{T}}{\text{A}}. \quad (4.20)$$

Der experimentell ermittelte Wert ist im Rahmen seiner Fehler mit dem Literaturwert vereinbar. Das Ergebnis für den Betrag des Störfeldes B_S liegt im Bereich der Stärke des Erdmagnetfeldes, was wir auch erwartet hatten. Den Wert des Störfeldes im Raum haben wir zudem in Versuchsteil 4.5 durch die Bestimmung der Resonanzfrequenz bestimmt. [Der hier erhaltenen Fehler für das Störfeld ist aufgrund der ungenauen Strommessung sehr groß, sodass die beiden erhaltenen Werte im Rahmen ihrer Fehler gut miteinander vereinbar sind.](#)

Um nun noch den Winkel des Störfeldes zu bestimmen, verwenden wir die Differenz der Frequenzquadrate nach [Praktikumsanleitung](#) [4],

$$\nu^2(+I_{\text{HH}}) - \nu^2(-I_{\text{HH}}) = 4 \frac{g^2 \mu_K^2}{h^2} (c I_{\text{HH}} B_S \cos \phi) \quad (4.21)$$

woraus wir den Winkel ϕ des Störfeldes bestimmen können. Die Auftragung der Differenz der Frequenzquadrate über den Helmholtzspulenstrom ist in Abbildung 16 aufgetragen.

Aus Abbildung 16 erhalten wir für die Steigung der Ausgleichsgeraden $m_{\text{Diff}} = (344 \pm 25) \times 10^3 \text{ Hz}^2/\text{mA}$ mit dem Fehler durch die Geraden minimaler und maximaler Steigung. Mit Gleichung (4.21) erhalten wir somit den Winkel des Störfeldes.

$$\phi = (64.7 \pm 8.5)^\circ \quad (4.22)$$

Der Fehler im Winkel ϕ folgt nach Gauß'scher Fehlerfortpflanzung aus den Fehlern für das Störfeld B_S ,

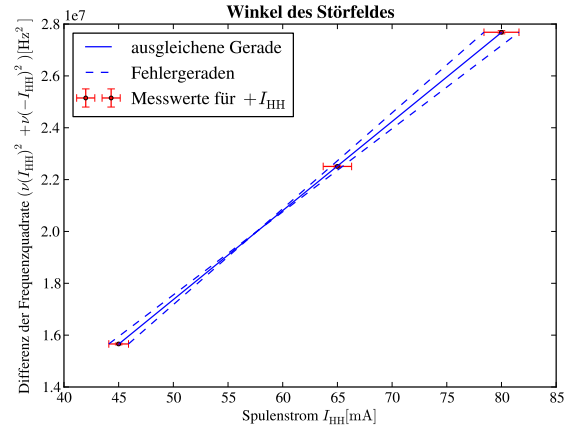


Abb. 16: Differenz der Resonanzfrequenzquadrate für verschiedenen Spulenströme zur Bestimmung des Winkels des Störfeldes.

der ermittelten Steigung m_{Diff} und dem Kernmagneton μ_K . Das Störfeld in unseren Experiment ist also mit einem Winkel $\phi = (64.7 \pm 8.5)^\circ$ relativ zum Feld der Helmholtzspulen ausgerichtet. Wir vermuten, dass das Feld in Richtung Zimmerdecke (oder entgegengesetzt) zeigt. Dies liegt daran, dass wir den Polarisator als Hauptstörquelle ausmachen und dieser in dieser Richtung im Raum steht.

4.7 Bestimmung der T_1 -Relaxationszeit von Protonen

Um die Relaxationszeit T_1 von polarisierten Protonen zu bestimmen und die Abhängigkeit von der Wassertemperatur zu untersuchen, verwenden wir den Aufbau wie in Versuchsteil 4.5. Wir untersuchen die Zeit, welche die Protonen benötigen um aus dem Polarisator in den Analysator zu gelangen. Dazu schalten wir zunächst die Pumpe ab und warte circa 20s bis das Wasser nicht mehr fließt, die Protonen im Polarisator polarisiert und die Protonen im restlichem Teil depolarisiert sind. Anschließend starten wir die Aufzeichnung des Messsignals $S_2(t)$ und kurz danach die Wasserpumpe. Diesen Versuch führen wir bei Pumpspannungen von $U_{\text{pump}} = 6 \text{ V}$ bis 12 V in 1.5 V-Schritten durch. Unter 6 V Pumpspannung führen wir keine Messung mehr durch, da bei so niedriger Pumpleistung die Turbulenz des Wassers im Schlauch nicht mehr gewährleistet ist. Den Wert haben wir gewählt, indem wir unterhalb dieses Wertes gemessen haben und die Kurven nicht mehr dem erwarteten Verlauf zeigen. Zudem führen wir das Experiment bei

den Temperaturen von etwa 10 °C, 20 °C, 40 °C und 60 °C um die Abhängigkeit der Temperatur zu untersuchen. Die Temperaturwerte sind natürlich nicht exakt und dienen hier der Zuordnung, werden aber in der Auswertung exakt genannt.

Der typische Kurvenverlauf der Messung ist in Abbildung 17 für eine Temperatur von 34.0 °C und einer Pumpspannung von 12 V gezeigt.

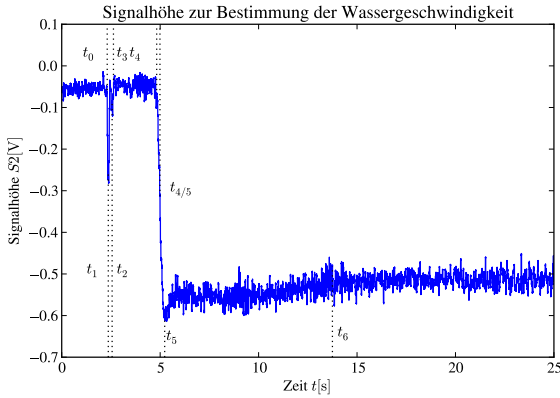


Abb. 17: Verlauf des Messsignals $S2(t)$ über die Zeit bei $T = 34.0\text{ °C}$ und einer Pumpspannung von $U_{\text{pump}} = 12\text{ V}$.

Dem Verlauf kann man entnehmen, dass bei abgeschalteter Pumpe $t < t_0$ nahezu kein Signal aufgenommen wird. Nach Einschalten der Pumpe, diesen Zeitpunkt kennzeichnen wir mit t_0 , messen wir zunächst die Protonen die noch durch das Feld des Analysatormagneten polarisiert sind. Da durch den Versuchsaufbau der Wasserschlauch zunächst direkt am Analysatormagneten vorbeiführt und erst dann über eine Kurve in den Analysator gelangt, erkennen wir einen Peak bei t_1 und einen bei t_2 . Der große Peak t_1 kommt von den Protonen die sich noch im Analysator befunden haben und der Kleine bei t_2 von den Protonen die sich zu Beginn neben dem Analysator, jedoch in seinem Feld befunden haben. Nachdem die Protonen aus dem Analysatorfeld gemessen wurden t_3 , messen wir bis t_4 kein Signal. Bei t_4 messen wir die Protonen, die im Polarisator polarisiert wurden. Zur Zeit t_5 messen wir die Protonen aus dem Polarisator und lesen dort die Signalstärke ab. Diese sind am stärksten polarisiert. Wir lesen im Experiment die Zeit bei $t_{4/5}$ ab, da hier ein Proton mit mittlerer Geschwindigkeit im Analysator ankommt. Nach der Zeit t_6 geht das Signal zurück, da nun die Protonen gemessen werden, die zum ausgeschalteten Zustand der Pumpe noch nicht im Polarisator waren und erst beim

durchfließen, also kürzer und somit weniger, polarisiert wurden.

Anhand der Messung kann die Zeit t abgelesen werden, welche die Protonen aus dem Polarisator benötigen um in den Analysator zu gelangen.

$$t_v = t_{4/5} - t_0 \quad (4.23)$$

Aus den Messungen für verschiedenen Pumpspannungen, also Wassergeschwindigkeiten, lesen wir die Zeiten t_v ab und tragen die Signalthöhe $S2(t_5)$ halblogarithmisch auf um die Relaxationszeit bestimmen zu können. Die Kurven für die gemessenen Temperaturen sind in Abbildung 18 gezeigt.

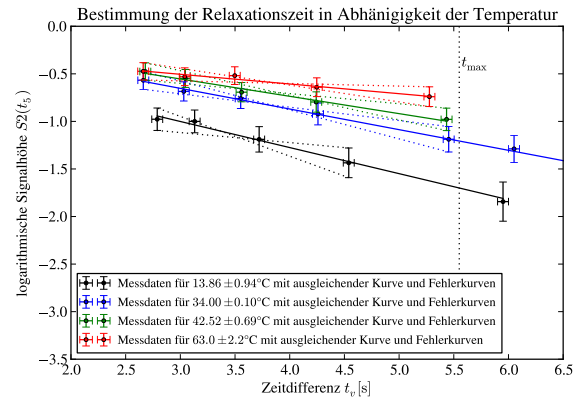


Abb. 18: Halblogarithmische Auftragung der Signalthöhe $S2(t_5)$ über die Zeitdifferenz t_v für verschiedenen Geschwindigkeiten und Temperaturen. t_{max} kennzeichnet die Zeit, welche die Protonen maximal benötigen dürfen, damit von einer turbulenten Strömung ausgegangen werden kann.

Da die Temperatur im Versuch nicht konstant gehalten konnte, haben wir bei jeder Messung die Temperatur mit einem batteriebetriebenen Thermometer gemessen und für die gemeinsame Auftragung bei verschiedenen Wassergeschwindigkeiten gemittelt. Der Fehler für den Temperaturwert bei etwa 20 °C ist deutlich kleiner, da dies der Arbeitstemperatur entspricht, die während der Messreihe nahezu unverändert bleibt. Die Fehler in Abbildung 18 resultieren bei der Zeitdifferenz aus einem Ablesefehler von 0.05 s und in der Signalthöhe aus einem Ablesefehler von 0.02 V und der Ungenauigkeit in S/H-Signal von 5 %. Die Messung ist zudem nur aussagekräftig, wenn Strömungen turbulent sind. Die minimale Fließgeschwindigkeit kann mit einer Reynoldszahl von 3000 bestimmt werden. Bei über $R = 3000$ spricht man von turbulenter und unter $R = 2000$ von laminarer

Strömung. Mit folgender Formel aus [Praktikumsanleitung](#) [4]

$$R = \frac{2\rho r v}{\eta} \quad (4.24)$$

ergibt sich mit dem Innenradius des Wasserschlauches $r = 2.25 \times 10^{-3} \text{ m}$, der Dichte des Wassers $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$ und seiner Zähigkeit $\eta = 1.002 \times 10^{-3} \text{ N s/m}^2$ die minimale Flussgeschwindigkeit

$$v_{\min} = 0.6692 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (4.25)$$

Die Schlauchlänge haben wir mit einem Maßband gemessen und erhalten folgende Werte

von → bis	Länge
Polaristor → Einstrahlspule	$(168 \pm 2) \text{ cm}$
Einstrahlspule → Analysator	$(146 \pm 2) \text{ cm}$
im Inneren des Analysators	$(46.0 \pm 0.5) \text{ cm}$
Schlauch durch Einstahlspule	$(16.5 \pm 0.5) \text{ cm}$

Tab. 3: Gemessenen Schlauchlängen für verschiedene Teile des Versuchs.

Die Gesamtlänge des Schlauches vom Polarisator bis zur Analysatorspule ergibt sich aus Tabelle 3 zu

$$L_{\text{gesamt}} = (376.5 \pm 5.0) \text{ cm} \quad (4.26)$$

Um eine zusätzliche Abschätzung zu bekommen, ab welcher Geschwindigkeit die Strömung laminar wurde, bestimmen wir die minimale Zeit t_{\max} , die das Wasser vom Polarisator bis zum Analysator maximal benötigen darf, damit es die Bedingung (4.25) erfüllt.

$$t_{\max} = \frac{L}{v_{\min}} = 5.55 \text{ s} \quad (4.27)$$

Hier wurde die Länge mit maximalen Fehler $L = (3.765 - 0.050) \text{ m}$ verwendet um einen sicheren Wert für t_{\max} zu erhalten, der folglich fehlerfrei ist. Folglich können wir nur die Messwerte verwenden, für die $t_v < t_{\max}$ gilt. Diese Bedingung wurde bei den Fitkurven in Abbildung 18 und der Auswertung berücksichtigt.

An die Messdaten aus Abbildung 18 wurden Exponentialfunktionen gefittet und mit $dM_z(t) = -1/T_1 M_z(t) dt$ nach [Praktikumsanleitung](#) [4] die Relaxationszeit T_1 bestimmt. Die erhaltenen Werte sind in Tabelle 4 aufgetragen.

Die Fehler in den Relaxationszeiten erhalten wir aus den Fehlerkurven in Abbildung 18. Im Vergleich ist zu erkennen, dass der Fehler für die Relaxationszeit bei

$T [^\circ\text{C}]$	$T_1 [1/\text{s}]$
$(14 \pm 1) ^\circ\text{C}$	$3.6^{+1.5}_{-1.9}$
$(34.0 \pm 0.2) ^\circ\text{C}$	$4.6^{+1.6}_{-1.5}$
$(42.5 \pm 0.7) ^\circ\text{C}$	$5.5^{+1.9}_{-1.9}$
$(63 \pm 2) ^\circ\text{C}$	$9.8^{+6.1}_{-6.1}$

Tab. 4: Relaxationszeiten für verschiedenen Temperaturen.

$60 ^\circ\text{C}$ deutlich größer als die restlichen sind. Dies liegt daran, dass die Steigung wesentlich kleiner ist, was bei gleicher Abweichung durch die Fehlerkurven in einem deutlich größeren Fehler resultiert. Zudem können wir aus Abbildung 18 wie auch an den Werten in Tabelle 4 erkennen, dass die Relaxationszeiten bei höheren Temperaturen größer werden. Die Protonen relaxieren also langsamer wenn sie warm sind. Diese längeren Relaxationszeiten waren für uns nicht intuitiv, leider haben wir auch nach langer Diskussion noch keine plausible Erklärung für diesen Effekt gefunden.

Wassergeschwindigkeit in der Einstrahlspule Im folgenden wird zudem die Wassergeschwindigkeit in der Einstrahlspule bestimmt, da diese für Versuchsteil 4.5 benötigt wird. Hierfür verwenden wir die Zeit $t_v(12 \text{ V}, 20 ^\circ\text{C}) = (2.661 \pm 0.028) \text{ s}$, die das Wasser durch den gesamten Schlauch bei maximaler Pumpleistung und Raumtemperatur benötigt. Der Schlauch besitzt bis zum Schlauchstück der Einstrahlspule nach Tabelle 3 eine Länge von $l_1 = (168 \pm 2) \text{ cm}$ und ab dem Stück bis zum Analysator eine Länge von $l_3 = (146.0 + 46.0) \pm (3.0) \text{ cm}$. In diesen Stücken beträgt der Innendurchmesser $d_1 = 6 \text{ mm}$ [4]. Das Schlauchstück durch die Einstrahlspule beträgt $l_2 = (16.5 \pm 0.5) \text{ cm}$ mit einem Innendurchmesser von $d_2 = 4 \text{ mm}$ [4]. Die Fehler der Durchmesser werden im Vergleich zum Fehler in der Länge als vernachlässigbar angenommen. Nach der Kontinuitätsgleichung gilt, dass das Verhältnis von durchflossener Fläche zum Verhältnis der Stömungsgeschwindigkeiten invers ist. Es fließt also gleiches Volumen pro Zeit durch einen den Schlauch und es gilt daraus

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2. \quad (4.28)$$

Für die Zeit t_v die das Wasser von Polarisator zum Analysator benötigt gilt

$$t_v = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2}. \quad (4.29)$$

Für v_1 verwenden wir die Geschwindigkeit des Wassers unter der Annahme, dass der Schlauchdurchmesser auf der gesamten Länge konstant ist.

$$v_1 = \frac{L_{\text{gesamt}}}{t_v(12 \text{ V}, 20^\circ\text{C})} = (1.415 \pm 0.034) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (4.30)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4.29) in Gleichung (4.28) und Auflösen nach der Geschwindigkeit v_2 im Inneren des Schlauchstücks durch die Einstrahlspule, erhalten wir

$$v_2 = (3.10 \pm 0.24) \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (4.31)$$

Das hier erhaltene Ergebnis wird für die Berechnungen in Versuchsteil 4.5 verwendet.

5 Zusammenfassung

In dem Praktikumsversuch zur magnetischen Kernresonanz konnten wir mit einem Aufbau nach Abbildung (1) Protonen in einem Wasserkreislauf polarisieren, deren Magnetisierung nachweisen und manipulieren. Nach dem Eichen der Messgeräte (4.1) konnten wir die Resonanzfrequenz der Protonenspins im Magnetfeld des Analysators $\nu_{\text{res}} = (4712.31 \pm 0.20) \text{ kHz}$ (4.2) bestimmen. Daraus ließen sich Magnetfeldstärke des Dauermagneten im Analysator zu $B_0 = 0.110\,676\,1(47) \text{ T}$ und die Energieaufspaltung $\Delta E = 19.488\,54(83) \times 10^{-9} \text{ eV}$ berechnen (4.3). Durch Variation des Polarisationsstroms I_{pol} bestätigen wir den linearen Zusammenhang zwischen Polarisationsfeldstärke und Messsignal (4.4). Das Aufnehmen von Amplituden- und Frequenz-Sweeps in der Nähe der Resonanzfrequenz ermöglichte den Phasenraum von Einstrahlamplitude und Frequenz darstellen (10). Die Form des Messsignals im Phasenraum entsprach dabei nur bedingt unseren theoretischen Erwartungen. Die Drehwinkel der Magnetisierung im Manipulator wurden den Einstrahlamplitude eindeutig zugeordnet (4.5).

Mit Hilfe eines Helmholtzspulenpaares konnten wir verschieden starke statische Magnetfelder bereitstellen. Aus der Untersuchung der entsprechenden Reso-

nanzfrequenzen konnten wir das im Raum vorhandenen Störfeld B_S berechnen. Die Stärke des Störfeldes betrug $B_S = (34 \pm 11) \mu\text{T}$ und hatte einen Winkel von $\phi = (64.7 \pm 8.5)^\circ$ (4.6) zum Helmholtzspulenfeld. Der Betrag des Störfeldes stimmt dabei gut mit der bestimmten Resonanzfrequenz aus den Frequenz-Sweeps überein (4.5). Den Wert für das Kernmagneton konnten wir mit $\mu_K = 5.10(20) \times 10^{-27} \text{ T/A}$ in Übereinstimmung mit dem Literaturwert bestimmen (4.6). Mit einer detaillierten Analyse des Signals bei verschiedenen Wassergeschwindigkeiten konnten wir die Wassergeschwindigkeit bei maximaler Pumpenleistung auf $(3.10 \pm 0.24) \text{ m/s}$ in der Manipulatorspule bestimmen. Daraus errechneten wir die Relaxationszeit T_1 der Protonen bei Raumtemperatur zu $4.6^{+1.6}_{-1.5} \text{ s}$ (4.7). Die Untersuchung der Relaxationszeit für verschiedene Wassertemperaturen zeigt ein uns unerwartetes Ergebnis, dass die Protonen bei höherer Wassertemperatur langsamer relaxieren. Insgesamt konnten wir die Magnetisierung und deren Manipulation untersuchen und die vorhergesagte Dynamik zu großen Teilen bestätigen.

Literatur

- [1] COMMITTEE ON DATA FOR SCIENCE AND TECHNOLOGY: *CODATA - International Council for Science*. Oktober 2013. – URL <http://www.codata.org/>
- [2] KOKTZOGLU, Ioannis: 4D Dark Blood Arterial Wall Magnetic Resonance Imaging: Methodology and Demonstration in the Carotid Arteries. In: *Magnetic Resonance in Medicine* 69 (2013), April, Nr. 4, S. 956–965
- [3] MÜLLER, Herbert: *Magnetische Kernresonanz*, Physikalisches Institut der Universität Würzburg, Dissertation, Februar 1990. – URL http://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11999999/Staatsexamensarbeit_Mueller_NMR.pdf
- [4] RADESTOCK, Oliver: *Anleitung - Magnetische Kernresonanz*. Physikalisches Institut der Universität Würzburg. Juli 2009. – URL http://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11999999/NMR_Anleitung_Jul2009.pdf. – Physikalisches Fortgeschrittenen Praktikum
- [5] THE NOBEL FOUNDATION: *Isidor Isaac Rabi - Biographical*. 2013. – URL http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1944/rabi-bio.html