绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（一）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）**答案：**选（A）．

解　点$x=1$，$x=-1$及$x=\dfrac{1}{2}$均为间断点，且

$$\lim_{x\to -1} f(x)=0,\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\pi,\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi,\quad \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\infty,$$

所以（B），（C），（D）$x=1$均正确．

由于当$x<-2$时$f(x)$没有定义，故由间断点的概念，点$x=-2$为不是间断点．

（2）**答案：**选（C）．

解　椭球面在点$(-1,\sqrt{3},1)$处切平面的法向量可取为$\overrightarrow{\boldsymbol{n}_1}=\{6x,2y,4z\}\big|_{(-1,\sqrt{3},1)}=\{-6,2\sqrt{3},4\}$，平面$z=1$的法向量为$\overrightarrow{\boldsymbol{n}_2}=\{0,0,1\}$．由$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{\boldsymbol{n}_1}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{n}_2}|}{|\overrightarrow{\boldsymbol{n}_1}||\overrightarrow{\boldsymbol{n}_2}|}=\dfrac{1}{2}$，得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$．

（3）　**答案：**选(D)．

解　$F(z^2-x^2,\ z^2-y^2)=$两边对x求偏导数，得$F_1'(2z\dfrac{\partial z}{\partial x}-2x)+F_2'2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，解得$\dfrac{z}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_1'}{F_1'+F_2'}$．由对称性$\dfrac{z}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F_2'}{F_1'+F_2'}$．所以$\dfrac{z}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{z}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$，从而，$y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xy}{z}$．

（4）　**答案：**选(D)．

解　因为$f(x)$在点$x=0$处可导，所以$f(x)$在点$x=0$处连续，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$．又因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty} f(\dfrac{1}{n})=0$，故$f(0)=0$．

假设$f'(0)\neq 0$，不妨设$f'(0)>0$，则

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}[f(\frac{1}{n})-f(0)]/\frac{1}{n}=f'(0)>0.$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$发散，矛盾．故选(D)．

（5）**答案：**选（D）．

解　注意到与ξ_1,ξ_2,ξ_3等价的向量组，其向量个数可以大于 3 个，且线性相关．同样，$\xi_1,\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_2+\xi_3$线性相关，而$P\xi_1,P\xi_2,P\xi_3$未必是$Ax=0$的解向量．当$P$为$n$阶可逆矩阵时，$(PA)x=0$与$Ax=0$是同解线性方程组，故具有相同的基础解系，故选（D）．

（6）**答案：**选（B）．

解　矩阵能否与对角矩阵相似与它的秩没有必然的关系，如秩为 1 的两个矩阵$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，前者与对角阵相似，后者不能与对角阵相似；秩为 2 的两个矩阵$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$也是如此；故①，④均不正确，从而可排除（A）、（C）和（D）．关于 ②，设A的特征值为λ_1，λ_2，则

$|A|=\lambda_1\lambda_2<0$，这表明A有两个互异的特征值，故②是A与对角矩阵相似的充分条件；关于③，由$|\lambda E-A|=\lambda^2-(a+d)\lambda-bc$知，判别式$(a+d)^2+4bc>0$，故$A$有两个互异的特征值，故③也是$A$与对角矩阵相似的充分条件，综上知，应选（B）.

（7）**答案：**选（A）.

解 由$P((A-C)B)=P(A-C)P(B)$，得$P(AB)-P(C)=[P(A)-P(C)]P(B)$，解得

$$P(C)=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{P(\overline{B})}=\frac{[P(A)-P(A)P(B)]-[P(A)-P(AB)]}{P(\overline{B})}$$

$$=\frac{P(A)P(\overline{B})-P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=P(A)-P(A|\overline{B}).$$

（8）**答案：**选（A）.

解 因为 $\dfrac{X_2}{|X_1|}=\dfrac{\frac{X_2-0}{\sigma}}{\sqrt{(\frac{X_1-0}{\sigma})^2}}\sim t(1)$，所以$P(\left|\dfrac{X_2}{X_1}\right|<k)=P(-k<\dfrac{X_2}{|X_1|}<k)=\alpha$ 故$k=t_{\frac{1-\alpha}{2}}(1)$.

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）**答案：填“$e^{-\frac{1}{2}}$”.**

解 在点$(1,1)$处，曲线对应的参数$t=0$．$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2ne^{2n+1}+1}{e^t}$.

当$t=0$时，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=2n+1$.所给曲线在$(1,1)$处的切线方程为$y-1=(2n+1)(x-1)$.

切线与x轴的交点横坐标$x_n=1-\dfrac{1}{2n+1}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2n+1})^n=e^{-\frac{1}{2}}$.

（10）**答案：**填“$\sqrt{\dfrac{x}{y}}=C-\ln y$”.

解 原方程即$\sqrt{\dfrac{y}{x}}+(2-\sqrt{\dfrac{x}{y}})\dfrac{dy}{dx}=0$，此为齐次方程．令$u=\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，所以$\sqrt{u}+(2-\dfrac{1}{\sqrt{u}})(u+x\dfrac{du}{dx})=0$，整理得$(\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{2u\sqrt{u}})du=-\dfrac{dx}{x}$．两边积分，得$\ln u+\dfrac{1}{\sqrt{u}}=-\ln x+C$．故原方程通解为$\sqrt{\dfrac{x}{y}}=C-\ln y$（$C$为常数）.

（11）**答案：**填“$\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$”.

解法一 令$\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}=t$，则$x=\tan^2 t$，$dx=\dfrac{2\sin t}{\cos^3 t}dt$，

$$\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2t\sin t}{\cos^3 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}td\frac{1}{\cos^2 t}=\frac{t}{\cos^2 t}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 t}dt=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

解法二 由分部积分法，

$$\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Big|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=\pi-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$$

$$\overset{t=\sqrt{x}}{=}\pi-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{t^2}{1+t^2}dt=\pi-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

（12） 答案：填“$\dfrac{\pi}{42}$”

解 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=x^2+y^2$ 消去 z，得 $x^2+y^2=1$，所以 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D:x^2+y^2\le 1$.

$$\text{原积分}=\iint\limits_D\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}}x^2\sqrt{x^2+y^2}\,dz\right]dxdy=\iint\limits_D x^2[(x^2+y^2)-(x^2+y^2)^{3/2}]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot(r^2-r^3)r\,dr\right]d\theta=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^1(r^5-r^6)dr$$

$$=\frac{\pi}{42}.$$

（13）答案：填“-2^m”.

解 由 $A=BA\Rightarrow(E-B)A=O\Rightarrow r(E-B)+r(A)\le m$，又 $r(A)=m$，可知 $B=E$. 故由 $CB=O\Rightarrow C=O$，则 $|AC-2B|=|-2E|=(-2)^m$.

（14）答案：填“$\dfrac{1}{e^2}$”.

解 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t\ln^X t}dt\overset{\text{令}u=\ln t}{=}\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1}{u^X}du$，当且仅当 $X>1$ 时积分收敛，故反常积分 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t\ln^X t}dt$ 收敛的概率为 $\displaystyle P\{X>1\}=\int_1^{+\infty}2e^{-2x}dx=\frac{1}{e^2}$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 10 分）

解 （Ⅰ）$f'(x)=4x^3+3ax^2=x^2(4x+3a)$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=0,x_2=-\dfrac{3}{4}a$.

如果 $a>0$，则 $-\dfrac{3}{4}a<0$. 当 $x\in(-\infty,-\dfrac{3}{4}a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-\dfrac{3}{4}a,0)\cup(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

如果 $a<0$，则 $-\dfrac{3}{4}a>0$. 当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,-\dfrac{3}{4}a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-\dfrac{3}{4}a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

综上可知，当 $x\in(-\infty,-\dfrac{3}{4}a)$ 时，$f(x)$ 单调下降；当 $x\in(-\dfrac{3}{4}a,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调上升，所以 $f(x)$ 仅在点 $x=-\dfrac{3}{4}a$ 处取最小值 $f(-\dfrac{3}{4}a)=-\dfrac{27}{256}a^4+b$.

（Ⅱ）利用（Ⅰ）的结论，并且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，可得

①当 $-\dfrac{27}{256}a^4+b>0$ 时，方程 $f(x)=0$ 无实根；

②当 $-\dfrac{27}{256}a^4+b=0$ 时，方程 $f(x)=0$ 有唯一实根；

③当 $-\dfrac{27}{256}a^4+b<0$ 时，方程 $f(x)=0$ 有两个不同的实根.

（III）由（II）可知，如果方程 $f(x)=0$ 有唯一实根，则有 $-\dfrac{27}{256}a^4+b=0$.

又 $f''(x)=12x^2+6ax=6x(2x+a)$，令 $f''(x)=0$，得 $x_1=0, x_3=-\dfrac{1}{2}a$. 由题意知 $(-2,f(-2))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则有 $x_3=-\dfrac{1}{2}a=-2$，所以 $a=4$，进而 $b=\dfrac{27}{256}a^4=\dfrac{27}{256}\times 4^4=27$.

（16） **解** 因为 $g''(0)=1$，所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，并由题设可知 $g(0)=0$，$g'(0)=0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'g'+\frac{1}{x+y}f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'g'+yg'[xf_{11}''g'+\frac{1}{x+y}f_{12}'']+xyf_1'g''+\frac{1}{x+y}[xf_{21}''g'+\frac{1}{x+y}f_{22}'']-\frac{1}{(x+y)^2}f_2'.$$

从而代入点 $(1,0)$，有

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=f_{22}''(0,0)-f_2'(0,0).$$

（17）（**本题满分 10 分**）

证 （I） $\Gamma(a+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^a dx=-\int_0^{+\infty}x^a d(e^{-x})$

$$=-x^a e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+a\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{a-1}dx=-\lim_{x\to+\infty}x^a e^{-x}+a\Gamma(a);$$

运用罗必达法则，得

$$\lim_{x\to+\infty}x^a e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^{a-1}}{e^x}=\cdots=0,$$

所以 $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$.

（II）对于正整数 n，有 $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!\Gamma(1)$.

而 $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$，所以 $\Gamma(n+1)=n!$.

（III）$\Gamma(\frac{3}{2})=\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

（18）（**本题满分 10 分**）

证 （I）令 $\varphi(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)+1]$，则 $\varphi'(x)=e^{-x}[f''(x)-2f'(x)+f(x)-1]$.

由题设知 $\varphi'(x)\ge 0$，故当 $x\ge 0$ 时，$\varphi(x)$ 单调不减，所以当 $x\ge 0$ 时，$\varphi(x)\ge\varphi(0)=2$，即 $\varphi(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)+1]$，所以 $f'(x)-f(x)+1\ge 2e^x$.

（II）由（I）得 $e^{-x}[f'(x)-f(x)]\ge 2-e^{-x}$，故 $[e^{-x}f(x)]'\ge 2-e^{-x}$.

当 $x\ge 0$ 时，上式两边从 0 到 x 积分，得 $e^{-x}f(x)\ge 2x+e^{-x}-1$，因此

$$f(x)\ge(2x-1)e^x+1.$$

（19） **解** 由题设知应有 $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}[x(2e^y+1)]$，即 $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)=2xe^y$. 此式两边对 x 积分，得

$$f(x,y)=x^2e^y+\varphi(y).$$

由 $f(0,y)=y$ 得 $\varphi(y)=y$，所以

$$f(x,y)=x^2e^y+y.$$

$$I=\int_{(1,0)}^{(2,1)}x(2e^y+1)dx+[x^2e^y+y]dy.$$

方法一 取从点 $(1,0)$ 到点 $(2,0)$ 再到点 $(2,1)$ 的折线，则

$$I=\int_1^2 3xdx+\int_0^1(4e^y+y)dy=\frac{3}{2}x^2\Big|_1^2+(4e^y+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^1=4e+1.$$

方法二 $P=x(2e^y+1),Q=x^2e^y+y$. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy$$

$$=\int_0^x 3xdx+\int_0^y(x^2e^y+y)dy=\frac{3}{2}x^2\Big|_0^x+(x^2e^y+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^y$$

$$=x^2e^y+\frac{1}{2}(x^2+y^2),$$

$$I=\int_{(1,0)}^{(2,1)}du(x,y)=u(x,y)\Big|_{(1,0)}^{(2,1)}=[x^2e^y+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]\Big|_{(1,0)}^{(2,1)}=4e+1.$$

方法三 设 $x(2e^y+1)dx+[x^2e^y+y]dy$ 的原函数为 $u(x,y)$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x(2e^y+1), \qquad ①$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2e^y+y. \qquad ②$$

①式两边对 x 积分，得 $u=x^2(e^y+\dfrac{1}{2})+\varphi(y)$. 此式两边对 y 求偏导，得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2e^y+\varphi'(y)$. 比较②式，得 $\varphi'(y)=y$，所以 $\varphi(y)=\dfrac{1}{2}y^2+C$，故 $u=x^2e^y+\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)+C$.

$$I=\int_{(1,0)}^{(2,1)}du(x,y)=u(x,y)\Big|_{(1,0)}^{(2,1)}=[x^2e^y+\frac{1}{2}(x^2+y^2)+C]\Big|_{(1,0)}^{(2,1)}=4e+1.$$

(20) 解　方程组（Ⅰ）的系数矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&a+4&5\\-1&-2&a\end{pmatrix}$，由题设知 $r(\overline{B})=r(B)<3$，

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\2&a+4&5&6\\-1&-2&a&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&a&3&0\\0&0&a+1&0\end{pmatrix}\qquad (*)$$

据（*）得，$a=-1$ 或 $a=0$.

当 $a=-1$ 时，$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}$，因 $\xi_1=-\xi_2$ 知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性相关，这与题设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 为 3 个不同特征值的特征向量必线性无关矛盾，故 $a=-1$ 不合题意，舍去.

当 $a=0$ 时，$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$，因 $|\xi_1,\xi_2,\xi_3|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&3&-1\\-1&2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$，知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，符合题意，故 $a=0$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 P 为可逆阵，且 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，从而

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&3&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&4&-6\\-1&1&-1\\-3&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&4&-6\\3&-3&3\\7&-6&8\end{pmatrix}.$$

(21) **解**　(I) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2$

$$=x^T(nE)x-x^T(\alpha\alpha^T)x=x^T(nE-\alpha\alpha^T)x.$$

令 $A=nE-\alpha\alpha^T$，易知 $A^T=A$，故二次型的矩阵 $A=nE-\alpha\alpha^T$，其中 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$.

(II) $A^2=\left(nE-\alpha\alpha^T\right)^2$

$$=n^2E-2n\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=n^2E-n\alpha\alpha^T=n(nE-\alpha\alpha^T)=nA,$$

$A^3=nA^2=n^2A,\ \cdots,\ \ A^k=n^{k-1}A$（$k$ 为自然数）;

(III) 由于 $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $n,0,0,\cdots,0$，所以 A 的特征值为 $0,n,n,\cdots,n$，则 f 在正交变换下的标准形为 $f=n(y_2^2+y_3^2+\cdots+y_n^2)$，规范形为 $f=y_2^2+y_3^2+\cdots+y_n^2$.

（22）解　（I）$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=P\{X+\max\{X,1\}\le z\}$.

①当$z<1$时，$F_Z(z)=0$；②当$z\ge 4$时，$F_Z(z)=1$；

③当$1\le z<2$时，$F_Z(z)=P\{0\le X\le z-1\}=\int_0^{z-1}\frac{x}{2}dx=\frac{(z-1)^2}{4}$；

④当$2\le z<4$时，$F_Z(z)=P\{0\le X\le \frac{z}{2}\}=\int_0^{\frac{z}{2}}\frac{x}{2}dx=\frac{z^2}{16}$

综上，$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<1,\\ \frac{(z-1)^2}{4}, & 1\le z<2,\\ \frac{z^2}{16}, & 2\le z<4,\\ 1, & z\ge 4.\end{cases}$ 得 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{(z-1)}{2}, & 1\le z<2,\\ \frac{z}{8}, & 2\le z<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（II）$EX=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{4}{3}$，

$EY=E[\max\{X,1\}]=\int_0^2\max\{x,1\}\frac{x}{2}dx=\int_0^1\frac{x}{2}dx+\int_1^2\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{4}+\frac{7}{6}=\frac{17}{12}$，

$E(XY)=E[X\max\{X,1\}]=\int_0^2 x\max\{x,1\}\frac{x}{2}dx=\int_0^1\frac{x^2}{2}dx+\int_1^2 x^3\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1}{6}+\frac{15}{8}=\frac{49}{24}$，

$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{49}{24}-\frac{17}{12}\times\frac{3}{4}=$

（23）解　（I）由$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{\theta^2}{12}$，解得$\hat{\theta}_M=2\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$.

【若由$\begin{cases}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=EX,\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2)\end{cases}$ 可得同样结果.】

（II）似然函数为$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{b-a}=\frac{1}{(b-a)^n}=\frac{1}{\theta^n}$，$a\le x_i\le b,\ i=1,2,\cdots,n$.

由于$L(\theta)$为θ的减函数，且$a\le\min\limits_{1\le i\le n}x_i, b\ge\max\limits_{1\le i\le n}x_i$，故$\theta=b-a$的取值范围为

$$\theta\ge\max_{1\le i\le n}x_i-\min_{1\le i\le n}x_i，\quad 即\quad \theta\in[\max_{1\le i\le n}x_i-\min_{1\le i\le n}x_i,+\infty)，$$

故当$\theta=\max\limits_{1\le i\le n}x_i-\min\limits_{1\le i\le n}x_i$时，$L(\theta)$取最大值，所以$\hat{\theta}_L=\max\limits_{1\le i\le n}X_i-\min\limits_{1\le i\le n}X_i$.

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（二）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）答案：选（C）．

解　由于 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}} y=-\infty,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，所以 $x=\dfrac{1}{2n\pi-\dfrac{\pi}{2}}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$均为垂直渐近线．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}x\ln(1+\sin\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1=k,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\sin\frac{1}{x})-x]\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to0}[\frac{1}{t^2}\ln(1+\sin t)-\frac{1}{t}]=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+\sin t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{\cos t}{1+\sin t}-1}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1-\sin t}{2t(1+\sin t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{1+\sin t}\lim_{t\to0}\frac{-\sin t-\cos t}{2}=-\frac{1}{2}=b,$$

所以有一条斜渐近线 $y=x-\dfrac{1}{2}$．进而知无水平渐近线．

【注】由于有无穷多条垂直渐近线，所以答案在（C）和（D）之中，又

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}x^2\ln(1+\sin\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty,$$

故无水平渐近线，选（C）．不需要求斜渐近线．

（2）答案：选（D）．

解　当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$0<\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})(1+x)}<\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}<\dfrac{1}{x^{3/2}}$．又 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{3/2}}dx$ 收敛，故 I_1,I_2 收敛．

$$I_3=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx+I_1.$$

因为 $0<x<1$ 时，$0<\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$．又 $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ 收敛，故 $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ 收敛，又 I_1 收敛，所以 I_3 收敛．

（3）　答案：选(B)．

解法一　对任意的 $(x,y,z)\in\Sigma$，都有 $xyz\ge0$，$\sin(xyz)\le xyz$，$\iint\limits_{\Sigma}\sin(xyz)dS<\iint\limits_{\Sigma}xyzdS$，

即 $I_3<I_1$．

因为对任意的 $(x,y,z)\in\Sigma$，都有 $x,y,z\ge0$，$x+y+z=1$，所以

$$xyz\le(\frac{x+y+z}{3})^3=(\frac{1}{3})^3=\frac{x+y+z}{27},\qquad \iint\limits_{\Sigma}xyzdS<\iint\limits_{\Sigma}\frac{x+y+z}{27}dS,$$

即 $I_1<I_2$，从而选（B）．

解法二　对任意的$(x,y,z)\in\Sigma$，都有$xyz\geq 0$，$\sin(xyz)\leq xyz$，$\iint\limits_{\Sigma} xyz dS<\iint\limits_{\Sigma}\sin(xyz)dS$，即$I_3<I_1$.

考虑函数$f(x,y,z)=xyz$在约束条件$x+y+z=1$下的极值问题. 记

$$F=xyz+\lambda(x+y+z-1),$$

令$\begin{cases}F_x'=yz+\lambda=0,\\F_x'=xz+\lambda=0,\\F_x'=xy+\lambda=0,\\x+y+z-1=0.\end{cases}$ 显然，由该方程组可知$x=y=z$，所以$x=y=z=\dfrac{1}{3}$，且容易验证$(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$是$f(x,y,z)$的最大值点，故$f(x,y,z)=xyz$的最大值为$\dfrac{1}{27}$，所以

$$xyz\leq\frac{1}{27}=\frac{x+y+z}{27},\qquad \iint\limits_{\Sigma} xyz dS<\iint\limits_{\Sigma}\frac{x+y+z}{27}dS,$$

即$I_1<I_2$，从而选（B）.

（4）**答案**：选（D）.

解　根据解的结构知，$y''+py'+qy=(ax+b)e^x$的通解为下列几种情形：

① $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\begin{cases}(Ax+B)e^x, & k=0,\\ x(Ax+B)e^x; & k=1,\end{cases}$

② $y=(C_1+C_2x)e^{rx}+\begin{cases}(Ax+B)e^x, & k=0,\\ x^2(Ax+B)e^x, & k=2;\end{cases}$

③ $y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}+(Ax+B)e^x,\qquad k=0.$

对照形式，（D）不可能出现.

【注】（A）$y=1+xe^x$是$y''+y'=(2x+3)e^x$解.

（B）$y=(1+\sin x)e^x$是$y''-2y'+2y=e^x$解.

（C）$y=(1+x^2)e^x$是$y''-2y'+y=2e^x$解.

（5）**答案**：选（B）.

解　取$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$，可验证（A），（C），（D）均不正确.

由题意知，$A\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}B,$，即$E(1,2)A=B\Rightarrow B^{-1}=A^{-1}E(1,2)$，则$AB^{-1}=E(1,2)$必为正交阵，故选（B）.

（6）**答案**：选（C）.

解　若$r(C)=m$，由$m=r(C)=r(AB)\leq r(A)\leq m$得$r(A)=m$,则$A$的行向量组线性无关.

若$r(A)=m$，取$B=O$，则$C=O$，则C的行向量组线性相关，故选（C）.

（7）**答案**：选（B）.

解　（A）不正确，当$P(A)>0$时，有$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

（B）正确，取$C=\Omega$，即得$A=B$.

（C）不正确，X和Y同分布与X和Y的取值相同不是一回事.

（D）不正确，事实上$F(x)$单调不减.

（8）**答案**：选(D).

解　设所截三段的长度分别为X，Y和Z，则X，Y和Z同分布，且

$$X+Y+Z=1\Rightarrow X+Y=1-Z\Rightarrow D(X+Y)=D(1-Z)$$

$$\Rightarrow DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)=DZ$$

$$\Rightarrow DX=DY=-2\operatorname{cov}(X,Y)\ \Rightarrow \rho_{XY}=-\frac{1}{2}.$$

二、填空题:9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）**答案**：填“1”.

解　在$x^3+y^3-3xy-1=0$中令$x=0$，得$y^3-1=0$，解得$y=1$.

$x^3+y^3-3xy-1=0$两边对x求导数，得$3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0$，即

$$x^2+y^2y'-y-xy'=0. \qquad ①$$

在①中令$x=0$，由$y(0)=1$，知$y'(0)=1$.

在①式两边再对x求导，得

$$2x+2y(y')^2+y^2y''-2y'-xy''=0. \qquad ②$$

在②中令$x=0$，由$y(0)=1$，$y'(0)=1$，得$y''(0)=0$．因此

$$\lim_{x\to0}\frac{(x-1)y+1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{y+(x-1)y'}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{2y'+(x-1)y''}{2}=\frac{2\times1+(0-1)\times0}{2}=1.$$

（10）**答案**：填“$(\frac{1}{2^{2018}}-2)\cdot2017!$”.

解　$f(x)=\int_1^x\ln(t+x)dt\overset{u=t+x}{=}\int_{1+x}^{2x}\ln u\,du$．由此，

$f'(x)=2\ln(2x)-\ln(1+x)=2\ln2+2\ln x-\ln(1+x)$，$f''(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{1+x}$，所以

$$f^{(n+2)}(x)=[f''(x)]^{(n)}=(\frac{2}{x}-\frac{1}{1+x})^{(n)}=(-1)^n n![\frac{2}{x^{n+1}}-\frac{1}{(1+x)^{n+1}}],$$

故$f^{(2019)}(1)=(\dfrac{1}{2^{2018}}-2)\cdot2017!$.

（11）**解**　由题设知，$f(x,2x^2-3x+4)=0$，等式两边对x求导数，得$f_1'+(4x-3)f_2'=0$，

故由$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,3)}=2$知，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,3)}=f_2'|_{(1,3)}=-\left.\dfrac{f_1'}{4x-3}\right|_{(1,3)}=-2$.

（12）**答案**：填“-3”.

解　$\operatorname{grad}f(1,-1,0)=\left.2xy,x^2,-2e^{2z}\right|_{(1,-1,0)}=-2,1,-2$，$f(x,y,z)$在点$(1,-1,0)$处沿各方向的方向导数的最小值为

$$-\left|\operatorname{grad}f(1,-1,0)\right|=-\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}=-3.$$

（13）**答案**：填“ $(1,0)$ ”.

解 由题意知，$|A-E|=|A+2E|=0$，即

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & a-1 & -2 \\ 0 & -2 & b-1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & a+2 & -2 \\ 0 & -2 & b+2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases} ab-a-5b+1=0, \\ ab+2a+b-2=0. \end{cases}$$

解得$\begin{cases} b=0, \\ a=1 \end{cases}$或$\begin{cases} b=-1, \\ a=3. \end{cases}$由于$a,b$为非负实数，故$(a,b)=(1,0)$.

（14） **答案**：填“ 5 ”

解 $P\{-\dfrac{a}{\sigma}<\dfrac{X-\mu}{\sigma}<\dfrac{a}{\sigma}\}=2\Phi(\dfrac{a}{\sigma})-1$，

$$P\{|\overline{X}-\mu|<b\}=P\{-\frac{5b}{\sigma}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/5}<\frac{5b}{\sigma}\}=2\Phi(\frac{5b}{\sigma})-1$$

故$\dfrac{a}{\sigma}=\dfrac{5b}{\sigma}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=5$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）**证** （Ⅰ）由题意知$x_n>0,n=1,2,\cdots$，且$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{x_n}{1+x_n}<1$，故数列$\{x_n\}$单调下降且有下界．由单调有界准则知数列$\{x_n\}$收敛．

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$a\geq 0$，且$a=\dfrac{a^2}{1+a}$，解得$a=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

（Ⅱ）由$x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{1+x_n}$得$x_n^2-x_nx_{n+1}=x_{n+1}$，所以$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=x_n-x_{n+1},n=1,2,\cdots$．故

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n+1}}{x_n})=\lim_{n\to\infty}[(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+\cdots+(x_n-x_{n+1})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}(x_1-x_{n+1})=x_1=2.$$

（16）**解** （Ⅰ）由题意可知 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^{x+y^2}(1+x+2y)$，所以

$$f(x,y)=\int(1+x+2y)e^{x+y^2}dx=(1+2y)e^{x+y^2}+\int xde^{x+y^2}=(x+2y)e^{x+y^2}+C(y),$$

并由$\dfrac{\partial f}{\partial y}=(2+2xy+4y^2)e^{x+y^2}+C'(y)=(2+2xy+4y^2)e^{x+y^2}$，可得$C(y)=C$.

代入初始条件，可得$f(x,y)=(x+2y)e^{x+y^2}$.

（Ⅱ）由$\begin{cases}1+x+2y=0,\\1+xy+2y^2=0\end{cases}$解得驻点为$(-3,1)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(2+x+2y)e^{x+y^2}$，代入驻点$(-3,1)$，得$A=e^{-2}$；

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(2+2y+2xy+4y^2)e^{x+y^2}$，$B=2e^{-2}$，

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(2x+12y+4xy^2+8y^3)e^{x+y^2}$，$C=2e^{-2}$.

显然$B^2-AC>0$，故在$(-3,1)$不取极值.所以$f(x,y)$无极值.

（17）**解**　（Ⅰ）令$P(x)=\dfrac{y}{x}f(x)\mathrm{d}x,\ Q(x)=\dfrac{1}{3}x^3-f(x)$，因为曲线积分与路径无关，所以$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，从而$\dfrac{1}{x}f(x)=x^2-f'(x)$，整理得$f'(x)+\dfrac{1}{x}f(x)=x^2$.解此一阶线性微分方程，可得$f(x)=\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{C}{x}$.代入初始条件$f(1)=\dfrac{1}{4}$，可得$C=0$，故$f(x)=\dfrac{x^3}{4}$.

（Ⅱ）$\displaystyle\int_{(1,1)}^{(2,3)}\frac{y}{x}f(x)\mathrm{d}x+(\frac{1}{3}x^3-f(x))\mathrm{d}y=\int_{(1,1)}^{(2,3)}\frac{1}{4}x^2y\mathrm{d}x+\frac{1}{12}x^3\mathrm{d}y$

$$=\int_1^2\frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x+\int_1^3\frac{2}{3}\mathrm{d}y=\frac{23}{12}.$$

（18）**证**　（Ⅰ）由$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx$知$\int_0^1(1-x)f(x)dx=0$.

令$1-x=t$，得$\int_0^1 tf(1-t)dt=0$，即$\int_0^1 xf(1-x)dx=0$.

由此知$\int_0^1[(1-x)f(x)+xf(1-x)]dx=0$，由积分中值定理知，存在$\xi\in[0,1]$，使

$$(\xi-1)f(\xi)=\xi f(1-\xi).$$

（Ⅱ）令$\varphi(x)=\int_0^x(x-t)f(t)dt$，则$\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=\int_0^1(1-t)f(t)dt=0$，由$f(x)$在$[0,1]$上连续知$\varphi(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$内可导，由罗尔定理知，存在$\eta\in(0,1)$，使$\varphi'(\eta)=0$. 而

$$\varphi(x)=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt,\quad \varphi'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt,$$

即$\int_0^\eta f(x)dx=0$.

（19） 解 $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$，而

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n,\quad -1<x<3.$$

上式两边求导并同乘-1，得

$$\frac{1}{(x+1)^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^{n+1}}(x-1)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}(x-1)^n,\quad -1<x<3.$$

所以

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}(x-1)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(1-\frac{n+1}{2})(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{2^{n+2}}(x-1)^n,\quad -1<x<3.$$

在上式中取$x=2$，得$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{2^{n+2}}=f(2)=\frac{2}{9}$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{2^n}=\frac{8}{9}.$$

（20）解 设$P=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$，由$AP=PB$得，

$$\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

乘开后得$\begin{cases}2a+b=a\\2c+d=a+c\\-a=b\\-c=b+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-b\\c=-b-d\end{cases}$， 所以

$$P=\begin{pmatrix}-b&-b-d\\b&d\end{pmatrix},\qquad |P|=-bd+b^2+bd=b^2\geq 0.$$

由于P正定，故$b\neq 0$，$P=\begin{pmatrix}-b&-b-d\\b&d\end{pmatrix}$.又因为$P$对称且正定，所以$P=\begin{pmatrix}-b&b\\b&-2b\end{pmatrix}$，且$b<0$，

故满足题意的所有正定阵为$k\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$，其中$k>0$.

（21）**证**　（I）由题意，$Ax_i=\lambda_i x_i \quad (i=1,2,3)$，则有

$$\begin{cases}\alpha=x_1+x_2+x_3\\ A\alpha=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3\\ A^2\alpha=\lambda_1^2x_1+\lambda_2^2x_2+\lambda_3^2x_3\end{cases},\quad (\alpha,A\alpha,A^2\alpha)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{pmatrix}$$

由于$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$互异，可知$\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{pmatrix}$可逆，又因为$x_1,x_2,x_3$线性无关，所以$\alpha,A\alpha,A^2\alpha$线性无关.

（II）因为$(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)=E$，故由（I）可得

$$(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&1&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

$$A^3\alpha=\lambda_1^3x_1+\lambda_2^3x_2+\lambda_3^3x_3=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}-1\\1\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

另解：$\begin{cases}\alpha=x_1+x_2+x_3\\ A\alpha=-x_1+x_2+2x_3\\ A^2\alpha=x_1+x_2+4x_3\end{cases}$，$A^3\alpha=-x_1+x_2+8x_3$，

$$\begin{cases}A^2\alpha-\alpha=3x_3\\ -x_1+x_2=A\alpha-2x_3=A\alpha-\frac{2}{3}(A^2\alpha-\alpha)\end{cases},$$

则 $A^3\alpha=-x_1+x_2+8x_3=A\alpha-\frac{2}{3}A^2\alpha+\frac{2}{3}\alpha+\frac{8}{3}(A^2\alpha-\alpha)$

$$=2A^2\alpha+A\alpha-2\alpha=(\alpha,A\alpha,A^2\alpha)\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

（22）**解**　设事件A_i表示从第i个箱子中取球，则$P(A_i)=\frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$，又设B表示两个球不同颜色，考虑到红球和白球的次序，得

$$P(B|A_i)=\frac{2i(n-i)}{n^2},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

故由全概率公式

$$p_n=P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{2i(n-i)}{n^2}.$$

（I）当$n=3$时，$p_3=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{3}\times\frac{2i(3-i)}{3^2}=\frac{2}{3^3}(1\times2+2\times1+3\times0)=\frac{8}{27}$；

（II）**解法一** 由定积分定义知

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{2i(n-i)}{n^2}=2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\times(1-\frac{i}{n})\times\frac{1}{n}=2\int_0^1x(1-x)dx=2(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{3};$$

解法二 $p_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{2i(n-i)}{n^2}=\frac{2}{n^3}[n\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]=\frac{n^2-1}{3n^2}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{3n^2}=\frac{1}{3}.$$

（III）**解法一** 设C表示两个球均为红球，得$P(C|A_i)=\frac{i^2}{n^2}$，$i=1,2,\cdots,n$，故由全概率公式

$$q_n=P(C)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(C|A_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{i^2}{n^2},$$

故$\lim_{n\to\infty}q_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\times\frac{1}{n}=\int_0^1x^2dx=\frac{1}{3}$.

解法二 $q_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{i^2}{n^2}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$，所以$\lim_{n\to\infty}q_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{1}{3}$.

解法三 由对称性，$p_n+q_n+(q_n-\frac{1}{n})=1$，其中$q_n-\frac{1}{n}$为两个球均为白球的概率，所以

$q_n=\frac{1}{2}(1-p_n+\frac{1}{n})$，因此$\lim_{n\to\infty}q_n=\frac{1}{2}(1-\lim_{n\to\infty}p_n+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+0)=\frac{1}{3}$.

（23）

证（I）X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le1,\\0, & \text{其它},\end{cases}$所以由代表性知，$X_1$和$X_2$的密度函数分别为

$$f(x_1)=\begin{cases}1, & 0\le x_1\le1,\\0, & \text{其它},\end{cases}\text{和 } f(x_2)=\begin{cases}1, & 0\le x_2\le1,\\0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由于X_1和X_2相互独立，所以(X_1,X_2)的密度函数为

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=f(x_1)f(x_2)=\begin{cases}1, & 0\le x_1\le1,0\le x_2\le1,\\0, & \text{其它},\end{cases}$$

即得(X_1,X_2)服从区域$\{(x_1,x_2):0\le x_1\le1,0\le x_2\le1\}$上的均匀分布.

（II）$\bar{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$，$S^2=\frac{1}{2-1}\sum_{i=1}^{2}(X_i-\bar{X})^2=\frac{(X_1-X_2)^2}{2}$，因此利用几何概型计算得

$$P\{\bar{X}\le\frac{1}{4}\}=P\{X_1+X_2\le\frac{1}{2}\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

$$P\{S^2\le\frac{1}{8}\}=P\{\frac{(X_1-X_2)^2}{2}\le\frac{1}{8}\}=P\{|X_1-X_2|\le\frac{1}{2}\}=1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

（III）由于$\{X_1+X_2\le\frac{1}{2}\}\subset\{|X_1-X_2|\le\frac{1}{2}\}$，故

$$P\{\bar{X}\le\frac{1}{4},S^2\le\frac{1}{8}\}=P\{X_1+X_2\le\frac{1}{2},|X_1-X_2|\le\frac{1}{2}\}=P\{X_1+X_2\le\frac{1}{2}\}=\frac{1}{4}$$

$$\ne P\{\bar{X}\le\frac{1}{4}\}P\{S^2\le\frac{1}{8}\}=\frac{1}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{32},$$

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（三）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）**答案：**选（C）．

解 $3x-4\sin x+\sin x\cos x=3x-4\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$$=3x-4(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5))+\frac{1}{2}[2x-\frac{1}{6}(2x)^3+\frac{1}{120}(2x)^5+o(x^5)]$$

$$=3x-4x+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{30}x^5+x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$$

$=\dfrac{1}{10}x^5+o(x^5)$，故 $n=5$．

【注】本题也可运用洛必达法则求解．

（2）**答案：**选（D）．

解 当 $x>0$ 时，$f(x)=\int_0^x(t-1)e^{-t}dt$，$f'(x)=(x-1)e^{-x}$，$f''(x)=(2-x)e^{-x}$，不难得到 $x=1$ 为极小值点，$(2,f(2))$ 为拐点．

当 $x<0$ 时，$f(x)=\int_0^x(1-t)e^{-t}dt$，$f'(x)=(1-x)e^{-x}>0$，$f''(x)=(x-2)e^{-x}<0$，无极值点和拐点．

又 $f(x)$ 为连续函数，在点 $x=0$ 处不可导，但点 $x=0$ 为极大值点，$(0,0)$ 为拐点．

（3）**答案：**选（C）．

解 交换积分次序

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 y(y-x)^n\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y y(y-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{n+1}y^{n+2}\mathrm{d}y=\frac{1}{(n+1)(n+3)},$$

所以原级数可化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$，该级数的前 n 项和

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{n+3}{n}\int_0^1dx\int_x^1y(y-x)^ndy)=1$，选(C).

（4）**答案：**选(C)．

解 当 $n\to\infty$ 时，$\ln\cos\dfrac{a}{n}=\ln\left[1-2\sin^2\dfrac{a}{2n}\right]\sim-2\sin^2\dfrac{a}{2n}\sim-\dfrac{a^2}{2n^2}$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|-\dfrac{a^2}{2n^2}\right|$ 收敛，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln\cos\dfrac{a}{n}\right|$ 收敛，即原级数绝对收敛.

（5）**答案：**选（D）．

解 由题意，$E(1,2(3))\cdot A=B$，若 $B\cdot E(1,2(-3))=C$，即 $E(1,2(3))\cdot A\cdot E(1,2(-3))=C$ 时，A 与 C 相似，即将 B 的第二列加上第一列的 -3 倍得到 C，则 A 与 C 相似，故选（D）．

（6）**答案**：选（C）.

解　二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$，$|\lambda E-A|=(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)$，得 A 的特征值为 $\lambda_1=a,\ \lambda_2=a+1,\ \lambda_3=a-2$，

由于 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 为椭圆柱面，所以 A 的特征值必为二个正一个为零，从而 $a=2$.故选（C）.

（7）**答案**：选（C）.

解　$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{|x(1+x)|}\cdot\frac{1}{2}dx+\int_0^1 1\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\sqrt{-x(1+x)}dx+\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\sqrt{\frac{1}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}dx+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}.$$

（利用定积分的几何意义求得）

（8）**答案**：选（C）.

解　$\int_{-\infty}^{+\infty}af_1(x)+bf_2(x)dx=a+b=1$，

$$F(1)=\int_{-\infty}^{1}af_1(x)+bf_2(x)dx=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=\frac{5}{12},$$

故 $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$.

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）**答案**：填“$\frac{1}{2}$”.

解法一　由于 $\int_0^n\frac{x}{n^2+n}dx\le\int_0^n\frac{x}{n^2+x}dx\le\int_0^n\frac{x}{n^2}dx$，得 $\frac{n}{2(n+1)}\le\int_0^n\frac{x}{n^2+x}dx\le\frac{1}{2}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x}{n^2+x}dx=\frac{1}{2}$.

解法二　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x}{n^2+x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}[n-n^2\ln(1+\frac{1}{n})]=\lim\limits_{n\to\infty}n^2[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\times\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2}$.

（10）**答案**：填“$\frac{13}{12}$”.

解　$y=\int_0^1(1-t^2)dt+\int_1^x(t^2-1)dt=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}(x^3-3x+4)$．因此所求图形的面积为

$$\int_1^2\frac{1}{3}(x^3-3x+4)dx=\frac{1}{3}(\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+4x)\Big|_1^2=\frac{13}{12}.$$

（11）**答案**：“$x=\frac{Cy-1}{y^2}$”.

解　原方程可转化为 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^3}{xy^2-1}$，从而 $\frac{dx}{dy}=-\frac{xy^2-1}{y^3}=-\frac{x}{y}+\frac{1}{y^3}$，所以 $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=\frac{1}{y^3}$，其通解为

$$x=e^{-\int\frac{dy}{y}}(\int\frac{1}{y^3}e^{\int\frac{dy}{y}}dy+C)=\frac{1}{y}(\int\frac{dy}{y^2}+C)=\frac{1}{y}(-\frac{1}{y}+C)=\frac{Cy-1}{y^2}.$$

(12)答案：填“$\dfrac{14}{3}\pi$”.

解 Σ在xOy平面上的投影区域为$D:x^2+y^2\le 3$.

$$A=\iint\limits_{\Sigma}dS=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy\ =\iint\limits_{D}\sqrt{1+y^2+x^2}dxdy$$

$$.=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+r^2}\ rdr\right]d\theta=2\pi\cdot\frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{14}{3}\pi.$$

（13）**答案**：填“$E+A+2A^2$”.

解 由于$A^3=O$，所以$E-A^3=E\Rightarrow(E-A)(E+A+A^2)=E$，故$(E-A)^{-1}=E+A+A^2$.

同理可求得$(E-A^2)(E+A^2)=E\Rightarrow(E-A^2)^{-1}=E+A^2$.

由$(E-A)X(E-A^2)=E$得 $X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}=(E+A+A^2)(E+A^2)=E+A+2A^2$.

（14）**答案**：填“$(13.30,67.67)$”.

解 由于μ未知，且$n=10,1-\alpha=0.90$，得$\chi^2_{0.05}(9)=16.919,\ \chi^2_{0.95}(9)=3.325$，$\sigma^2$的置信水平为$0.90$的置信区间为$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)=\left(\dfrac{9\times5^2}{16.919},\dfrac{9\times5^2}{3.325}\right)=(13.30,67.67)$.

三、解答题:15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）**解** （Ⅰ）记$f(x)=\dfrac{x}{\pi}-[\dfrac{x}{\pi}]$，则

$$f(x+\pi)=\frac{x+\pi}{\pi}-[\frac{x+\pi}{\pi}]=\frac{x}{\pi}+1-[\frac{x}{\pi}+1]=\frac{x}{\pi}+1-([\frac{x}{\pi}]+1)=\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]=f(x),$$

所以$f(x)=\dfrac{x}{\pi}-[\dfrac{x}{\pi}]$为周期为$\pi$的周期函数.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$(\dfrac{x}{\pi}-[\dfrac{x}{\pi}])\dfrac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}$仍为周期为$\pi$的周期函数.

解法一 $I=100\displaystyle\int_0^{\pi}(\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}])\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx$.

当$0\le x<\pi$时，$[\dfrac{x}{\pi}]=0$，$|\sin x|=\sin x$，故

$$I=\frac{100}{\pi}\int_0^{\pi}x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx\overset{t=x-\frac{\pi}{2}}{=}\frac{100}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(t+\frac{\pi}{2})\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt=100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin t}{1+\sin^2 t}=100\times\arctan(\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=25\pi .$$

解法二 $I=100\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}])\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx$.

当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，且 $x\neq 0$ 时，$\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]-\frac{1}{2}$ 为奇函数，故

$$I=100\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}((\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]-\frac{1}{2})+\frac{1}{2})\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx=100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx=100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=-100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos x}{1+\cos^2 x}dx=-100\times\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=25\pi .$$

（16）解　因为

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-x+2y-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0，且\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}=0，$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}[f(x,y)-x+2y-1]=0$，即 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=1$. 又因为 $f(x,y)$ 连续，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=f(0,0)$，

故 $f(0,0)=1$.

由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-x+2y-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 得 $f(x,y)-x+2y-1=o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ ，所以

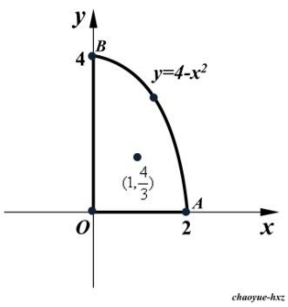
$$f(x,y)-f(0,0)=x-2y+o(\rho),$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微分，且 $f_x'(0,0)=1,\ f_y'(0,0)=-2$.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x,0)-f(0,-3x)}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{f(2x,0)-f(0,0)}{2x}+3\lim_{x\to0}\frac{f(0,-3x)-f(0,0)}{-3x}$$

$$=2f_x'(0,0)+3f_y'(0,0)=-4.$$

（17）解　设 $\begin{cases}f_x'=y-\frac{4}{3}=0,\\ f_y'=x-1=0\end{cases}$ 得驻点 $(1,\frac{4}{3})$，且 $f(1,\frac{4}{3})=-\frac{4}{3}$.



在抛物线段 AB 上，将 $y=4-x^2$ 代入 $z=xy-\frac{4}{3}x-y$ 中，得

$z=-x^3+x^2+\frac{8}{3}x-4$，$0\le x\le 2$． $\frac{dz}{dx}=-3x^2+2x+\frac{8}{3}$.

令 $\frac{dz}{dx}=0$ 得驻点 $x_1=\frac{4}{3}$，且 $z\Big|_{\frac{4}{3}}=-\frac{28}{27}$.

在直线段$\overline{OA}$上，$z=-\dfrac{4}{3}x$，$0\le x\le 2$，且$z\big|_0=0$，$z\big|_2=-\dfrac{8}{3}$.

在直线段$\overline{OB}$上，$z=-y, 0\le y\le 4$，且$z\big|_0=0$，$z\big|_4=-4$.

比较函数值的大小，得 $z_{\max}=0$，$z_{\min}=-4$.

（18）**解** （Ⅰ）$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x\sin\dfrac{1}{x})=1+0=1$.

当$x\ne 0$时，$f'(x)=1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}$，进而得

$$f'(x)=\begin{cases}1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

（Ⅱ）由于$\lim\limits_{x\to 0}1=1, \lim\limits_{x\to 0}4x\sin\dfrac{1}{x}=0, \lim\limits_{x\to 0}2\cos\dfrac{1}{x}$不存在，所以

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}[1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}]$不存在，因此$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)\ne f'(0)$.

（Ⅲ）$f'(\dfrac{1}{2k\pi})=1+\dfrac{4}{2k\pi}\sin 2k\pi-2\cos 2k\pi=-1$，

$$f'(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}})=1+\frac{4}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})-2\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1+\frac{4}{2k\pi+\frac{\pi}{2}},$$

其中$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

对任意的$\delta>0$，由于当$k\to\infty$时，$\dfrac{1}{2k\pi}\to 0, \dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0$，故当$|k|$充分大时，在点$x=0$的邻域$(-\delta,\delta)$内总存在点$x=\dfrac{1}{2k\pi}$和$x=\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$，使得$f'(\dfrac{1}{2k\pi})<0$, $f'(\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}})>0$，因此$f(x)$在点$x=0$的任意邻域$(-\delta,\delta)$内不是单调函数.

【注】本题背景：1. 可导时未必有$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$； 2. 函数在某一点处的导数大于零，不能说明函数在该点附近单调增加.

（19） **解** 由 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 知

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{n-1}=2+S(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{n-1}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'-\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$$

$$=\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{1}{1-x}=\frac{x}{(1-x)^2},$$

所以 $S'(x)=2+S(x)+\dfrac{x}{(1-x)^2}$，且 $S(0)=0$，解此一阶线性微分方程，得

$$S(x)=Ce^x+\frac{1}{1-x}-2.$$

由 $S(0)=0$ 知 $C=1$，故 $S(x)=e^x+\dfrac{1}{1-x}-2$，$x\in(-1,1)$.

（20）解 由题意知，$\begin{cases}r(B)=r(A\vdots B)\\ r(A)<r(A\vdots B)\end{cases}$，从而 $|A|=0$，否则 $AX=B$ 必有唯一解，

$|A|=-(a-1)^2(a+2)=0$，得 $a=1$ 或 $a=-2$.

（i）$a=1$ 时，$(A\vdots B)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&-2&-2\\0&0&0&0&3&3\\0&0&0&0&0&-3\end{array}\right)$，$r(A)=1,r(B)=r(A\vdots B)=3$，符合题意.

（ii）$a=-2$ 时，$(A\vdots B)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-2&1&-2&-2\\0&-3&3&0&0&0\\0&0&0&0&0&-6\end{array}\right)$，$r(A\vdots B)=3,r(A)=r(B)=2$，可见 $AX=B$ 无解，$BX=A$ 也无解，不符合题意，故 $a=1$.

（21）**解** 由题设知 A 的三个特征值为 $2,2,0$，设 $\xi_3=(1,0,1)^T$ 为 $\lambda_3=0$ 的特征向量，利用实对称阵 A 的属于不同特征值的特征向量正交，可解出 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的两个线性无关的特征向量为

$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，注意到 ξ_1,ξ_2,ξ_3 已两两正交，将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化得，

$$\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad 令 P=\left(\eta_1\quad\eta_2\quad\eta_3\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

则 P 为正交矩阵，于是所求的正交变换为 $x=Py$.

由 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $A=P\Lambda P^{-1}=P\Lambda P^T=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，

则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$.

（22）**解** （Ⅰ）由于 $Cov(U,V)=Cov(X+2Y,X+aY)=1+2$，故当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$Cov(U,V)=0$，此时 $U=X+2Y,V=X-\frac{1}{2}Y$．由题意知 $(X,Y)\sim N(0,0;1,$，且 $\begin{vmatrix}1&2\\1&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}\neq 0$，所以 (U,V) 服从二维正态分布．所以当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，U 和 V 相互独立.

（Ⅱ）当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$U=X+2Y,V=X-\frac{1}{2}Y$，得 $X=\frac{1}{5}U+\frac{4}{5}V$，所以

$$P\{X>0\big|X+2Y=2\}=P\{\frac{1}{5}U+\frac{4}{5}V>0\big|U=2\}=P\{V>-\frac{1}{2}\big|U=2\}.$$

计算得 $EV=0,DV=\frac{5}{4}$，所以 $V\sim N(0,\frac{5}{4})$，又因为 U 和 V 相互独立，故

$$P\{X>0\big|X+2Y=2\}=P\{V>-\frac{1}{2}\}=P\{\frac{V}{\sqrt{5}/2}>-\frac{1}{\sqrt{5}}\}=1-\Phi(-\frac{1}{\sqrt{5}})=\Phi(\frac{1}{\sqrt{5}}).$$

（23）**解** （Ⅰ）

$$\begin{aligned}P\{Y=0\}&=P(\{\sum_{i=1}^{100}X_i=0\}\cup\{\sum_{i=1}^{100}X_i=1\})=P\{\sum_{i=1}^{100}X_i=0\}+P\{\sum_{i=1}^{100}X_i=1\}\\&=P\{X_1=X_2=\cdots=X_{100}=0\}+P\{X_1=1,X_2=\cdots=X_{100}=0\}\\&\quad+\cdots+P\{X_1=X_2=\cdots=0,X_{100}=1\}\\&=(P\{X=0\})^{100}+100P\{X=1\}(P\{X=0\})^{99}\\&=(e^{-1})^{100}+100\cdot1\cdot e^{-1}\cdot(e^{-1})^{99}=101e^{-100}.\end{aligned}$$

（Ⅱ）中心极限定理知 $\sum_{i=1}^{100}X_i\overset{近似}{\sim}N(100,100)$，所以

$$P\{Y<9900\}=P\{(\sum_{i=1}^{100}X_i)^2-\sum_{i=1}^{100}X_i<9900\}=P\{-99<\sum_{i=1}^{100}X_i<100\}$$

$$=P\{-19.9<\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-100}{10}<0\}=\Phi(0)-\Phi(-19.9)=0.5-0=0.5.$$

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（四）解答

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）**答案：**选（B）．

解 当$x<1$时，$f(x)=ax+b$；当$x=1$时，$f(x)=\frac{1}{2}(a+b+1)$；当$x>1$时，$f(x)=x^2$．由$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$得$a+b=1$．又$f'_-(1)=a, f'_+(1)=2$，故$a=2,b=-1$．

（2）**答案：**选(C)．

解 当$(x,y)\neq(0,0)$时，$f'_x(x,y)=2\alpha x(x^2+y^2)^{\alpha-1}$；当$(x,y)=(0,0)$时，

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{2\alpha-1}=0.$$

而$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f'_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}2\alpha x^{2\alpha-1}=0=f'_x(0,0)$，所以$f'_x(x,y)$在点$(0,0)$处连续．由$x,y$得对称性知$f'_y(x,y)$也在点$(0,0)$处连续，故选(C)．

（3）**答案：**选(D)．

解 $a_2=\int_{-1}^{1}|x|\cos 2\pi x dx=2\int_0^1 x\cos 2\pi x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^1 xd(\sin 2\pi x)$

$$=\frac{x\sin 2\pi x}{\pi}\Big|_0^1-\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin 2\pi x dx=\frac{1}{2\pi^2}\cos 2\pi x\Big|_0^1=0.$$

因为$f(x)$是偶函数，所以$b_2=0$，故选(D)．

（4）**答案：**选（C）．

解 由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$存在，所以$f(x)$在点$x=0$处可导，（C）正确．

（A）反例：取$x_n=1-\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$，则$0\le x_n<1, n=1,2,\cdots$，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{e}\neq 0$．

（B）反例：取$f(x)=\frac{1}{2}x$为单增函数，$x_1=1$，则$x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2^n},(n=1,2,\cdots)$为单减数列．

（D）反例：取$f(x)=e^x,g(x)=0$，则$f(x)>g(x)$，但$\int_1^0 e^x dx=1-e<\int_1^0 0dx=0$．

（5）**答案：**选（A）．

解 由于$r(A)=r\begin{pmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & a\end{pmatrix}\ge r(A\vdots\alpha)\ge r(A)$，知$r(A)=r(A\vdots\alpha)$，则$Ax=\alpha$有解；同理，由$r(A)=r\begin{pmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & a\end{pmatrix}\ge r\begin{pmatrix}A\\ \alpha^T\end{pmatrix}\ge r(A)$，知$r(A)=r\begin{pmatrix}A\\ \alpha^T\end{pmatrix}=r(A^T\vdots\alpha)$，即$A^Tx=\alpha$有解，从而$Ax=\alpha$与$A^Tx=\alpha$都有解，故选（A）．

（6）**答案**：选（C）．

解　由题意知 A 的特征值只能为 ±1，而 $\operatorname{tr}A=-1$，则 A 的特征值为 $-1,-1,1$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的规范形为 $-y_1^2-y_2^2+y_3^2$，故选（C）．

（7）**答案**：选（D）.

解　以连续型随机变量为例.

设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=0$，所以

$$EX=\int_0^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}[\int_0^x f(x)dt]dx=\int_0^{+\infty}[\int_t^{+\infty}f(x)dx]dt$$
$$=\int_0^{+\infty}[1-\int_{-\infty}^t f(x)dx]dt=\int_0^{+\infty}[1-F(t)]dt=\int_0^{+\infty}[1-F(x)]dx\,.$$

本题也可设 $X\sim U[0,1]$，直接验证即可.

（8）**答案**：选（D）.

解　设 A_i：所取的两个球有 i 个黑球（i=1, 2），B：从两个球中取得的是黑球，则 A_1,A_2 构成完备事件组，且 $P(A_1)=\dfrac{4\times3\times2}{36}=\dfrac{2}{3}$，$P(A_2)=\dfrac{4\times3}{36}=\dfrac{1}{3}$，从而

$$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{2}{3}\,.$$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）**答案**：填“$\dfrac{1}{2}$”.

解　$a_n=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left[f(\dfrac{x}{1\cdot3})+f(\dfrac{x}{3\cdot5})+\cdots+f(\dfrac{x}{(2n-1)(2n+1)})\right]$

$$=\lim_{x\to0}\{\frac{1}{1\cdot3}\frac{f(\frac{x}{1\cdot3})-f(0)}{\frac{x}{1\cdot3}-0}+\frac{1}{3\cdot5}\frac{f(\frac{x}{3\cdot5})-f(0)}{\frac{x}{3\cdot5}-0}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\frac{f[\frac{x}{(2n-1)(2n+1)}]-f(0)}{\frac{x}{(2n-1)(2n+1)}-0}\}$$

$$=[\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}]f'(0)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})\,,$$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{1}{2}$.

（10）**答案**：“$\dfrac{3}{16}\pi^2$”.

解　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\cdot\arctan e^xdx\overset{t=-x}{=}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4t\cdot\arctan e^{-t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4t\cdot(\frac{\pi}{2}-\arctan e^t)dt$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\cdot(\frac{\pi}{2}-\arctan e^x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4xdx-\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\cdot\arctan e^xdx,$$

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\cdot\arctan e^xdx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4xdx=\pi\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi^2\,.$$

(11)**答案**：填“$2\ln2-1$”．

解　把原积分化为二重积分，积分区域是由直线 $y=x,x=1$ 及 x 围成的三角形 D，

$$原积分=\iint\limits_{D}\frac{\ln(1+x)}{x}d\sigma=\int_0^1\left[\int_0^x\frac{\ln(1+x)}{x}dy\right]dx=\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$$=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\ln 2-\Big[x-\ln(1+x)\Big]_0^1=2\ln 2-$$

（12）**答案**：填“πa”.

解 $$I=\oint_L\frac{x^2+y^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}\,)}{a^2}ds=\frac{1}{a^2}\oint_L(x^2+y^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}\,))ds.$$

因为L关于y轴对称，而$y^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}\,)$是关于变量$x$轴的奇函数，所以

$$\oint_L y^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}\,)ds=0,$$

$$I=\frac{1}{a^2}\oint_L x^2ds=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}a^2\sin^2\theta\cdot ad\theta=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=4a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi a.$$

或由轮换对称性

$$I=\frac{1}{a^2}\oint_L x^2ds=\frac{1}{2a^2}\oint_L(x^2+y^2)ds=\frac{1}{2a^2}\oint_L a^2ds=\frac{1}{2a^2}\times a^2\times 2\pi a=\pi a.$$

（13）**答案**：填“$\frac{1}{3}$”.

解 由题意可知，矩阵A的三个特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$，故$2E-A$的特征值为$1,3,4$，于是，$|2E-A|=12$. 故

$$\begin{vmatrix}(2E-A)^{-1} & O\\ O & (-B)^*\end{vmatrix}=\left|(2E-A)^{-1}\right|\left|(-B)^*\right|=\frac{1}{12}|B|^2=\frac{1}{3}.$$

（14）**答案**：填“e^{-4}”

解法一 由$X\sim\chi^2(2)$知$X=X_1^2+X_2^2$，其中$X_i\sim N(0,1),i=1,2$.且X_1和X_2相互独立.又

$$EX^2=DX+(EX)^2=4+2^2=8$$

$$P\{X\geq EX^2\}=P\{X\geq 8\}=P\{X_1^2+X_2^2\geq 8\}=1-P\{X_1^2+X_2^2<8\}$$

$$=1-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot rdr=e^{-4}$$

解法二 由$X\sim\chi^2(2)$知$X\sim E\left(\frac{1}{2}\right)$，又$EX^2=8$，故$P\{X\geq 8\}=e^{-4}$

三、解答题:15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）**解** （Ⅰ）$y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$的通解为

$$y=e^{-\int(-2x)dx}[\int\frac{1}{3}x^3e^{\int(-2x)dx}dx+C]=e^{x^2}[\int\frac{1}{3}x^3e^{-x^2}dx+C]=Ce^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2).$$

（Ⅱ）**法一** $y''-2xy'-2y=x^2$ 可变形为

$$y''-2(xy)'=x^2，\quad 即 \quad (y'-2xy)'=x^2.$$

两边积分，得 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3+C_1$．由 $y(0)=1, y'(0)=0$ 得 $C_1=0$，故 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$．

由（Ⅰ）知 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$ 的通解为 $y=Ce^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2)$．由 $y(0)=1$ 得 $C=\frac{7}{6}$，所以

$$y=\frac{7}{6}e^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2).$$

法 2 所给方程 $y''-2xy'-2y=x^2$ 两边从 0 到 x 积分，得

$$\int_0^x y''(t)dt-2\int_0^x ty'(t)dt-2\int_0^x y(t)dt=\int_0^x t^2dt，$$

利用分部积分法，得 $y'(x)-2[ty(t)\big|_0^x-\int_0^x y(t)dt]-2\int_0^x y(t)dt=\frac{1}{3}x^3$，化简得 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$．

由（Ⅰ）知 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$ 的通解为 $y=Ce^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2)$．由 $y(0)=1$ 得 $C=\frac{7}{6}$，所以

$$y=\frac{7}{6}e^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2).$$

（16）**解** 令 $x=n\pi-t$，则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}(n\pi-t)\left|\sin t\right|dt=n\int_0^{n\pi}\left|\sin t\right|dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}t\left|\sin t\right|dt$$

所以 $a_n=\frac{n}{2}\int_0^{n\pi}\left|\sin t\right|dt=\frac{n^2}{2}\int_0^{\pi}\left|\sin t\right|dt=n^2$，（$n=1,2,3,\cdots$），从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4a_n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n-1}-\frac{(-1)^n}{2n+1}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}+\frac{1}{2}$$

考虑幂级数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}$，易知其收敛域为 $[-1,1]$.由于

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-2}=\frac{-1}{1+x^2}\quad(-1<x<1)，$$

从而

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{-1}{1+t^2}dt=-\arctan x\ （-1\le x\le 1），$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=f(1)=-\frac{\pi}{4}$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4a_n-1}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$.

（17）**解** 曲线 C 与 x 轴，y 轴所围图形绕 y 轴旋转一周所生成立体体积为

$$V=\pi\int_0^1(1-\sqrt{y})^4dy\overset{1-\sqrt{y}=u}{=}\pi\int_1^0 u^4\cdot 2(1-u)(-du)=\frac{\pi}{15}\ （为定值）.$$

因此，问题转化为求切线 l 与 x 轴，y 轴所围三角形区域绕 y 轴旋转一周所得立体体积的最大值.

由 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 知 $y'=-\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. 设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，其中 $0<x_0<1$，则切线 l 的方程为

$$y-(1-\sqrt{x_0})^2=-\frac{1-\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)\text{，化简得 } x=-\frac{\sqrt{x_0}}{1-\sqrt{x_0}}y+\sqrt{x_0}\,.$$

令 $y=0$ 得 $x=\sqrt{x_0}$；令 $x=0$ 得 $y=1-\sqrt{x_0}$，故 l 与 x 轴，y 轴的交点分别为 $(\sqrt{x_0},0),(0,1-\sqrt{x_0})$.

直线 l 与 x 轴，y 轴所围图形绕 y 轴旋转一周所得立体体积为

$$V(x_0)=\pi\int_0^{1-\sqrt{x_0}}\left(-\frac{\sqrt{x_0}}{1-\sqrt{x_0}}y+\sqrt{x_0}\right)^2dy=\frac{\pi}{3}x_0(1-\sqrt{x_0})\,,$$

或利用圆锥体的体积 $V(x_0)=\dfrac{1}{3}\times\pi(\sqrt{x_0})^2\times(1-\sqrt{x_0})=\dfrac{\pi}{3}x_0(1-\sqrt{x_0})$.

由 $V'(x_0)=\dfrac{\pi}{3}(1-\dfrac{3}{2}\sqrt{x_0})=0$，得 $x_0=\dfrac{4}{9}$ 为 $V(x_0)$ 的唯一驻点.

由于 $V''(\dfrac{4}{9})=-\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}\Big|_{x_0=\frac{4}{9}}=-\dfrac{\pi}{3}<0$，故 $x_0=\dfrac{4}{9}$ 为 $V(x_0)$ 的最大值点，且最大值为

$$V(x_0)_{\max}=\frac{\pi}{3}\left[\frac{4}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]=\frac{4}{81}\pi\,,$$

因此当点 P 的坐标为 $(\dfrac{4}{9},\dfrac{1}{9})$ 时，所求旋转体体积的最小值为 $\dfrac{\pi}{15}-\dfrac{4}{81}\pi=\dfrac{7}{405}\pi$.

（18）解 $I=\displaystyle\int_L\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}dx+\int_L xdy\overset{\triangle}{=}I_1+I_2$.

在 I_1 中，$P=\dfrac{y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$，当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以在任一不包含原点的单联通区域内积分与路径无关. 取从点 $A(-1,-1)$ 到点 $B(1,1)$ 的右下半圆 $L':x^2+y^2=2\,(y\le x)$，其参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t,\\ y=\sqrt{2}\sin t\end{cases}$ $(-\dfrac{3\pi}{4}\le t\le\dfrac{\pi}{4})$，则

$$I_1=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{-2\sin^2t-2\cos^2t}{2}dt=-\pi\,.$$

将 $y=x^2+x-1$ 代入 I_2，得 $I_2=\displaystyle\int_{-1}^1x(2x+1)dx=\int_{-1}^12x^2dx=\frac{4}{3}$，故 $I=-\pi+\dfrac{4}{3}$.

（19）证 （Ⅰ）在 $[-2,0]$ 和 $[0,2]$ 上分别对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(-2,0),\xi_2\in(0,2)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(-2)}{2},\quad f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(0)}{2}\,.$$

进而 $|f'(\xi_1)|=\dfrac{|f(0)-f(-2)|}{2}\le\dfrac{|f(0)|+|f(-2)|}{2}\le\dfrac{1+1}{2}=1$，同理有 $|f'(\xi_2)|\le1$.

（Ⅱ）令 $F(x)=f^2(x)+f'^2(x)$，则 $F(x)$ 在 $[-2,2]$ 上可导，且

$$F(\xi_1)=f^2(\xi_1)+f'^2(\xi_1)\le 2,\quad F(\xi_2)=f^2(\xi_2)+f'^2(\xi_2)\le 2,\quad F(0)>2\ .$$

故 $F(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上的最大值一定在 (ξ_1,ξ_2) 内取得，即存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $F(\xi)=\max\limits_{x\in[\xi_1,\xi_2]}F(x)>2$．由费马定理知 $F'(\xi)=0$．

又 $F'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)$，故

$$F'(\xi)=2f(\xi)f'(\xi)+2f'(\xi)f''(\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]\ .$$

由于 $F(\xi)=f^2(\xi)+f'^2(\xi)>2,\ |f(\xi)|\le 1$，所以 $f'(\xi)\ne 0$，从而 $f(\xi)+f''(\xi)=0$．

（20）解 （Ⅰ）由题设 β_1,β_2,β_3 均为 $Bx=0$ 的解向量，且 $B\ne O$ 知，β_1,β_2,β_3 必线性相关（否则由 $Bx=0$ 的基础解系所含的向量个数 ≥ 3 可推出 $B=O$，与题设 $B\ne O$ 矛盾），于是有

$$0=|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=3b-a\Rightarrow a=3b\ ,$$

由题设 $Ax=\beta_3$ 有解，故 $r(A)=r(A,\beta_3)$，

$$(A,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&0&0&\dfrac{5-b}{3}\end{pmatrix},$$

据 $r(A)=r(A,\beta_3)\Leftrightarrow b=5,$ 则 $a=15,\ b=5.$

（Ⅱ）由于 β_1,β_2 线性无关，故 $Bx=0$ 至少有两个线性无关的解向量 β_1,β_2，即 $r(B)\le 1$，又由于 $B\ne O$ 知 $r(B)\ge 1$，故 $r(B)=1$，于是 β_1,β_2 可作为 $Bx=0$ 的一个基础解系，故 $Bx=0$ 的通解为 $x=k_1(0,1,-1)^T+k_2(15,2,1)^T$,，其中 k_1,k_2 为任意常数.

（21）解 （Ⅰ）$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-1&0&1\\1&0&1&1&0&1\end{array}\right)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-1&0&1\\0&0&2&2&0&0\end{array}\right)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)$，

得 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\k_1&k_2&k_3\\1&0&0\end{pmatrix}$，由于 A 对称，所以 $k_1=k_3=0$，$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&k_2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，故

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+k_2x_2^2.$$

又因为 $f(1,1,1)=3$，所以 $k_2=1$，$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+x_2^2$.

（Ⅱ）令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_3\\x_2=y_2\\x_3=y_1-y_3\end{cases}$，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，

所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经可逆变换 $x=Cy$ 化成的标准形为 $f=2y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

（22） **解** （I）由密度函数的性质知 $\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} c(x+y)dy=1\Rightarrow c=\frac{3}{2}$.

（II）当 $-1\le y\le 0$ 时， $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{-y}^{1}\frac{3}{2}(x+y)dx=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}y+\frac{3}{4}y^2$，

当 $0<y\le 1$ 时， $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{-y}^{1}\frac{3}{2}(x+y)dx=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}y-\frac{9}{4}y^2$，

故当 $-1\le y\le 0$ 时， $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2(x+y)}{1+2y+y^2}, & -y\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

当 $0<y\le 1$ 时， $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2(x+y)}{1+2y-3y^2}, & y\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

（III） $P\left\{X>\frac{1}{2}\middle|Y=\frac{1}{4}\right\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_{X|Y}(x\mid\frac{1}{4})dx=\frac{16}{21}$.

（23）**解** 由题意知 $n=16$， $\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=\frac{1}{16}\times 51.2=3.2$， $s^2=\frac{1}{15}(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\bar{x}^2)=0.16$，$s=0.4$.

（Ⅰ）检验假设问题为 $H_0:\mu\le 3$， $H_1:\mu>3$，转化为 $H_0:\mu=3$， $H_1:\mu>3$.
由于 σ 未知，故选取检验统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\overset{H_0}{=}\frac{\overline{X}-3}{S/\sqrt{16}}\sim t(15).$$

根据 $\alpha=0.05$，以及备择假设 $H_1:\mu>3$，得 H_0 的拒绝域为 $T\ge t_{0.05}(15)=1.7531$.

因为 $T_0=\frac{3.2-3}{0.4/\sqrt{16}}=2>t_{0.05}(15)=1.7531$，所以在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，拒绝 H_0，即 $\mu>3$.

（Ⅱ）检验假设问题为 $H_0':\sigma^2=0.2$， $H_1':\sigma^2\ne 0.2$.
由于 μ 未知，故选取检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\overset{H_0'}{=}\frac{15S^2}{0.2}=75S^2\sim\chi^2(15).$$

根据 $\alpha=0.10$，以及备择假设 $H_1':\sigma^2\ne 0.2$，得 H_0' 的拒绝域为

$$\chi^2\le\chi^2_{0.95}(15)=7.261\text{或}\chi^2\ge\chi^2_{0.05}(15)=24.996.$$

因为 $\chi_0^2=75\times 0.16=12$，不在拒绝域内，所以在显著水平 $\alpha=0.10$ 下，接受 H_0，即 $\sigma^2=0.2$.

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（五）解答

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）**答案**：选（D）．

解 $\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4),\ x-\sin x=\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$．

由题设知，$x-\sin x+f(x)=x^4+o(x^4)$，故 $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^4+o(x^4)$，所以

$$\frac{f(x)}{x^3}=-\frac{1}{6}+x+o(x),\quad \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=-\frac{1}{6},\quad \lim_{x\to0}\frac{x^3}{f(x)}=-\ .$$

（2）**答案** 选(C).

解 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{1-e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}=1$ 等价于

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=1. \qquad ①$$

(A)，(B)错误.例如取 $f(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}$，则在点 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 连续，但是偏导数不存在、不可微分.

因为 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=f(0,0)$．又因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}=0$，由①式知 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$，故 $f(0,0)=0$．再由①式和极限的保号性知，存在点 $(0,0)$ 某邻域，在该邻域内有 $\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}>0$，$f(x,y)>0$，即 $f(x,y)>f(0,0)$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取极小值.

（3）**答案**：选（A）.

解 $I_1=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\pi+x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{x(\pi+x)}dx>0$；

$I_2=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}(\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin x(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{\pi+x}})dx>0$.

（4）**答案**: 选（D）.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n\ln n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$，$\{\frac{1}{n\ln n}\}$ 单减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}=0$，所以(A)选项级数收敛；

$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^3}{1+x^2}dx\le\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{2n^2}$，所以（B）选项级数收敛；

$\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{6n^3}$，所以(C)选项级数收敛；

$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{1}{n+1}\cdot(\frac{n}{n+1})^n\sim\frac{1}{(n+1)e}$，所以(D)选项级数发散.

（5）**答案**：选（D）.

解　$r(A^TA) \le r(A^TA \vdots A^T\beta) = r(A^T[A \vdots \beta]) \le r(A^T) = r(A)$，而 $r(A^TA) = r(A^T) = r(A)$，所以，$r(A^TA \vdots A^T\beta) = r(A^TA)$，这就是说无论 $Ax=\beta$ 是否有解，$A^TAx = A^T\beta$ 总有解，所以（A）（B）（C）均错误，（D）正确.

事实上，若 $Ax=\beta$ 有唯一解，则必有 $r(A)=n$，从而 $r(A^TA)=n$，而 A^TA 为 n 阶方阵，所以 $A^TAx=A^T\beta$ 必有唯一解.故选（D）.

（6）**答案：**选（A）.

解　AA^T 为 m 阶对称阵，A^TA，BB^T 及 A^TA+BB^T 均为 n 阶对称矩阵.

由于 $AB=E$，得 $r(A)=r(B)=m<n$，于是，$r(A^TA)=r(AA^T)=r(BB^T)=m$.

故 $\left|A^TA\right|=0, \left|BB^T\right|=0$，从而 A^TA，BB^T 不是正定阵.

由 $r(A)=m \Rightarrow r(A^T)=m \Rightarrow A^Tx=0$ 仅有零解，即 $\forall x\ne 0,\ A^Tx\ne 0$，

故 $x^TAA^Tx=(A^Tx)^T\cdot(A^Tx)>0$，故选（A）.

（7）**答案：**选（D）.

解　以 X 为连续型随机变量为例.

设 $f(x)$ 为 X 的概率密度，由于 X 取值非负，则 $\int_0^{+\infty} f(t)dt=1$，$EX=\int_0^{+\infty} tf(t)dt=\mu$，故

$$P\{X\le 1\}=\int_0^1 f(t)dt=1-\int_1^{+\infty} f(t)dt \ge 1-\int_1^{+\infty} tf(t)dt \ge 1-\int_0^{+\infty} tf(t)dt=1-EX=1-\mu,$$

所以选（D）.

（8）**答案：**选（A）.

解　设 $Y=X^2$，其中 $X\sim N(0,1)$，则

$$P\{Y\ge 3\}=P\{X^2\ge 3\}=P\{|X|\ge\sqrt{3}\}=P\{|X-EX|\ge\sqrt{3}\}\le\frac{DX}{(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{3}.$$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）**答案：**填“$\frac{4}{e}$”.

解　记 $x_n=\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$，则

$$\ln x_n=\frac{1}{n}[\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)]-\ln n$$
$$=\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})],$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}=\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$.

（10）**答案：**填“$\ln 2-\frac{1}{2}$”.

解法一　$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)^2}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}\cdot\frac{1}{x+1}dx=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})\frac{1}{x+1}dx$

$$=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=\left(\ln\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_1^{+\infty}=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

解法二 $$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)^2}dx\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\int_1^0\frac{t}{(\frac{1}{t}+1)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_0^1\frac{t}{(t+1)^2}dt=\int_0^1\left[\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt$$

$$=\left[\ln(t+1)+\frac{1}{t+1}\right]\Big|_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

（11）答案：填 $e-1$.

解　积分区域由直线 $y=x, y=2-x$ 及 x 轴围成，

$$I=\iint\limits_{D_1\cup D_2}e^{(y-1)^2}d\sigma=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}e^{(y-1)^2}dx=-\int_0^1 2(y-1)e^{(y-1)^2}dy=-e^{(y-1)^2}\Big|_0^1=e-1.$$

（12）答案：填 $(0,\ \dfrac{-2}{3(\pi+4)})$.

解　由对称性知 $\bar{x}=0$.把平面图形分成 D_1, D_2 两部分如图所示.

$$\iint\limits_D d\sigma=\frac{\pi}{2}+2,\quad \iint\limits_D y d\sigma=\int_{-1}^1\left[\int_{-1}^{\sqrt{1-x^2}}y dy\right]dx=\int_{-1}^1-\frac{1}{2}x^2dx=-\frac{1}{3},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y d\sigma}{\iint\limits_D d\sigma}=\frac{-2}{3(\pi+4)}.$$

所以形心坐标为 $(0,\ \dfrac{-2}{3(\pi+4)})$.

（13）答案：填“-4”.

解　$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$，$|A|$ 为范德蒙行列式，因为 A 可逆，故由克莱姆法则知，

$x_1=x_2=x_3=0$，$x_4=-4$，于是 $x_1-2x_2+3x_3-4x_4=-4$.

（14）答案：填“0.125”.

解　(X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}0.25 & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$ 所以

$$E(\max([X],Y))=\iint\limits_D\max([x],y)\times 0.25dxdy=0.25\iint\limits_D\max([x],y)dxdy$$

$$=0.25\times\left[\iint\limits_{\substack{-1<x<0\\-1<y<1}}\max(-1,y)dxdy+\iint\limits_{\substack{0\le x<1\\-1<y<1}}\max(0,y)dxdy\right]$$

$$=0.25\times\left(\iint\limits_{\substack{-1<x<0\\-1<y<1}}ydxdy+0+\iint\limits_{\substack{0\le x<1\\0\le y<1}}ydxdy\right)=0+0.25\times\frac{1}{2}=0.125.$$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）解　$M=\int_L r\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}r(\theta)\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\sqrt{4\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta}\mathrm{d}\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\sqrt{1+3\sin^2 2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+3\sin^2 2\theta}\mathrm{d}\sin 2\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t=t\sqrt{1+t^2}\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t=2\sqrt{3}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2+1-1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t,$$

$$=2\sqrt{3}-\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t=2\sqrt{3}-\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$=2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})-\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

所以$M=\frac{1}{2}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$.

（16）解　（Ⅰ）$\ln f(x)=(x+1)\ln(x+2)-x\ln(x+1)$，上式两边对$x$求导数，得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(x+2)+\frac{x+1}{x+2}-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}. \qquad ①$$

当$x\geq 0$时，由于$\ln(x+2)>\ln(x+1),\ \frac{x+1}{x+2}>\frac{x}{x+1}$，且$f(x)>0$，故$f'(x)>0$，因此$f(x)$单调递增.

（Ⅱ）对任意正整数n，由（Ⅰ）知，$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}>\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$，得$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}>\frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}}$，

即得$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}>(1+\frac{1}{n})^{n-1}$.

(Ⅲ) 由①知，

$$f'(x)=f(x)[\ln(x+2)+\frac{x+1}{x+2}-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}]=(1+\frac{1}{x+1})^{x+1}[\ln(1+\frac{1}{x+1})^{x+1}+\frac{1}{x+2}],$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x+1})^{x+1}[\ln(1+\frac{1}{x+1})^{x+1}+\frac{1}{x+2}]=e(\ln e+0)=e$.

(17) 证　$f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},f_3(x)=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$，用数学归纳法知$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$（$n=1,2,\cdots$）.

$$a_n=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}dx=\frac{1}{n}(\sqrt{1+n}-1)=\frac{1}{\sqrt{1+n}+1},$$

$$b_n=\pi\int_0^1\frac{x^2}{1+nx^2}dx=\frac{\pi}{n}(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\sqrt{n}).$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}+1}=1$，又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n\sqrt{n}}\arctan\sqrt{n}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}}=\dfrac{\pi}{2}$，又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\arctan\sqrt{n}$ 收敛，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

（18）**证**　（Ⅰ）因为 $\int_0^1 f(x)dx=0$，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不为常数，所以 $f(x_0)=\max\limits_{0\le x\le 1}f(x)>0$，从而

$$\int_0^{x_0}(x+x^2)f(x)dx\le\int_0^{x_0}(x+x^2)f(x_0)dx=f(x_0)\int_0^{x_0}(x+x^2)dx=f(x_0)(\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{3}x_0^3),$$

$$\int_0^{x_0}(x+x^2)f(x)dx-x_0^2f(x_0)\le f(x_0)(\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{3}x_0^3)-x_0^2f(x_0)=x_0^2f(x_0)(\frac{1}{3}x_0-\frac{1}{2})<0,$$

因此
$$\int_0^{x_0}(x+x^2)f(x)dx<x_0^2f(x_0).\qquad（1）$$

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可取最小值 $f(x_1)$，且 $f(x_1)<0$．与（Ⅰ）同理可证

$$\int_0^{x_1}(x+x^2)f(x)dx>x_1^2f(x_1).$$

令 $\varphi(x)=\int_0^x(t+t^2)f(t)dt-x^2f(x)$，$0\le x\le 1$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\varphi(x_0)<0$，$\varphi(x_1)>0$，故由零点定理知，存在 ξ 介于 x_0 与 x_1 之间，使 $\varphi(\xi)=0$，进而知 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\int_0^{\xi}(x+x^2)f(x)dx=\xi^2f(\xi).$$

（19）**解**　旋转曲面 Σ 的方程为 $y^2+z^2-x^2=1$．设 $\Sigma_1: x=0\,(y^2+z^2\le 1)$ 取后侧，$\Sigma_2: x=1\,(y^2+z^2\le 2)$ 取前侧.

$P(x,y,z)=(x\ \ ^{2}1)+\ \ f\ ($，　$Q(x,y,z)=y^2+yf(yz)$，　$R(x,y,z)=z^2-zf(yz)-2z$，

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}&=2(x+1)+2y+f(yz)+yzf'(yz)+2z-f(yz)-yzf'(yz)-2\\&=2x+2y+2z\end{aligned}$$

设曲面 Σ,Σ_1,Σ_2 围成的空间区域为 Ω，则由 Gauss 公式知

$$I_1=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2z)dxdydz$$

由对称性 $\iiint\limits_{\Omega}(2y+2z)dxdydz=0$，故

$$I_1=2\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz=2\int_0^1xdx\iint\limits_{y^2+z^2\le 1+x^2}dydz=2\pi\int_0^1x(1+x^2)dx=\frac{3}{2}\pi.$$

又

$$I_2=\iint_{\Sigma_1}[(x+1)^2+f(yz)]dydz=-\iint_{y^2+z^2\le 1}[1+f(yz)]dydz=-\pi\,,$$

其中由对称性知 $\iint_{y^2+z^2\le 1} f(yz)dydz=0$.同理，

$$I_2=\iint_{\Sigma_2}[(x+1)^2+f(yz)]dydz=\iint_{y^2+z^2\le 2}[1+f(yz)]dydz=8\pi\,,$$

因此，$I=\dfrac{3}{2}\pi-(-\pi)-8\pi=-\dfrac{11}{2}\pi$.

（20）解　（Ⅰ）$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}$，令 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}$，则 $A=B^TB$.

（Ⅱ）$r(A)=r(B)=3$.

（Ⅲ）$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-5\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&\dfrac{5}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$，故 $Ax=0$ 通

解为 $x=k\begin{pmatrix}2\\-\dfrac{5}{2}\\1\end{pmatrix}$，$k$ 为任意实数.

（21）解　（Ⅰ）设 ξ 所对应的特征值为 λ，则 $A\xi=\lambda\xi$，即

$$\begin{pmatrix}3&a&1&1\\-1&1&1&1\\0&b&1&-2\\c&0&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad 于是\ \begin{cases}-3+a=\lambda\\ 2=\lambda\\ b=0\\ c=0\end{cases},$$

因此，$a=1,\ b=c=0,\ \lambda=2$.

（Ⅱ）$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+1)(\lambda-4)$，故 A 可以相似对角化的充要条件为 $r(A-2E)=2$.

而 $A-2E\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，　$r(A-2E)=3$，因此 A 不能对角化.

（22）解　（Ⅰ）当 $x\ge 0,y\ge 0$ 时，

$$P\{X>x+y\mid X>x\}=\frac{P\{X>x,X>x+y\}}{P\{X>x\}}=\frac{P\{X>x+y\}}{P\{X>x\}},$$

得 $\dfrac{P\{X>x+y\}}{P\{X>x\}}=P\{X>y\}$，即 $P\{X>x+y\}=P\{X>x\}P\{X>y\}$，所以

$$1-P\{X\le x+y\}=[1-P\{X\le x\}][1-P\{X\le y\}].$$

即 $1-F(x+y)=[1-F(x)][1-F(y)]$，得

$$F(x+y)=F(x)+F(y)-F(x)F(y).$$

（Ⅱ）又由题意知当 $x\ge 0$ 时，$F(x)$ 可导，故在上式两边同时对 y 求导，得

$$F'(x+y)=F'(y)-F(x)F'(y),$$

令 $y=0$，并注意到 $F'(0)=f(0)=\lambda$，得 $F'(x)=\lambda-\lambda F(x)$，即 $F'(x)+\lambda F(x)=\lambda$．解得

$$F(x)=e^{-\int\lambda dx}[\int\lambda e^{\int\lambda dx}dx+C]=1-Ce^{-\lambda x}.$$

由于 $F(0)=P\{X\le 0\}=0$，解得 $C=1$，所以 $F(x)=1-e^{-\lambda x}$，进而 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$，所以

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

(23)**证**　（Ⅰ）由于 $\bar{X}\sim N(\mu_1,\dfrac{\sigma^2}{n_1}),\bar{Y}\sim N(\mu_2,\dfrac{\sigma^2}{n_2})$，又 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 相互独立，由正态分布的性质得，$\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2})\sigma^2)$．

（Ⅱ）由于 $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1),\ \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_2-1)$，且 $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}$ 与 $\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}$ 相互独立，故由 χ^2 分布的可加性得

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}=\frac{(n_1+n_2-2)S_\omega^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2).$$

（Ⅲ）由于 $\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2})\sigma^2)$，故 $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\sigma}\sim N(0,1)$，又

$\dfrac{(n_1+n_2-2)S_\omega^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$，且 $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\sigma}$ 与 $\dfrac{(n_1+n_2-2)S_\omega^2}{\sigma^2}$ 相互独立，所以

$$\frac{\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\sigma}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\Big/n_1+n_2-2}}=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)\cdot$$