第一单元　第六讲

浮点数表示和运算
第一单元小结

刘卫东
计算机科学与技术系

内容提要

- 浮点数
- 科学记数法
  - 十进制科学记数法
  - 二进制科学记数法
- IEEE 754 浮点数标准
- 浮点数表示
  - 表示范围 vs. 表示精度
- 浮点数运算
- 浮点数运算器
- 本单元小结

计算机内的数据

清華大學 Tsinghua University

- 计算机的功能：处理数据
- n 位能表示哪些数据？
  - 无符号整数: 0 to $2^n - 1$
  - 有符号整数: $-2^{(n-1)}$ to $2^{(n-1)} - 1$
- 其它数据呢？
  - 大整数? （如：一个世纪的秒数）
    $3,155,760,000_{10}$ ($3.15576_{10} \times 10^9$)
  - 非常小的数? （如：原子的直径）
    0.00000001_{10} ($1.0_{10} \times 10^{-8}$)
  - 有理数 （如：循环小数）
    2/3 (0.666666666. . .)
  - 无理数 $2^{1/2}$ (1.414213562373. . .)

  (无限不循环小数): e (2.718...), π (3.141...)

实数

实数的表示

清華大學 Tsinghua University

- 实数和浮点数
- 十进制实数的科学记数法

尾数 *阶*

$$6.02 \times 10^{23}$$

小数点 *根（基数）*

  - 固定小数点位置，表示方式唯一
  - 主要包含3个部分
    - 尾数、阶、根

二进制浮点数科学记数法

尾数　　　　　　　　*阶*

$$1.0_2 \times 2^{-1}$$

“二进制小数点” *根（基数）*

- 需要在计算机内表示的部分
  - 尾数
  - 阶

汇编语言之前考过的内容这里仍然是重点

浮点数表示

浮点数是数学中实数的子集合，由一个纯小数乘上一个指数值两部分组成。在计算机内，其纯小数部分被称为浮点数的尾数，对非0值的浮点数，要求尾数的绝对值必须≥1，称满足这种表示要求的浮点数为规格化表示；

把不满足这一表示要求的尾数，变成满足这一要求的尾数的操作过程，叫作浮点数的规格化处理，通过移位尾数和修改阶码实现。

尾数包括有：符号位+尾数的绝对值

阶码：符号位+阶码的绝对值

浮点数的机器表示

- 尾数：定点小数
- 阶码：整数
- 如何表示?
  - $X = M_S\ E_S\ E_m \ldots E_2\ E_1\ M_{-1} M_{-2} \ldots M_{-n}$
  - (n+1)位尾数
  - (m+1)位阶码
  - 表示范围和表示精度?

IEEE 浮点数标准754

浮点数： $X = M_S\ E_S\ E_m \ldots E_2\ E_1\ M_{-1} M_{-2} \ldots M_{-n}$

IEEE 标准： 阶码用移码, 对规格化数阶码用移127方案

尾数用原码,对规格化数的尾数用隐藏位技术

支持正负无穷大的浮点数和非规格化的浮点数

设置一个非法浮点数编码供编程人员用于排错

	符号位数	阶码位数	尾数位数	总位数
短浮点数:	1	8	23	32
长浮点数:	1	11	52	64

浮点数的尾数部分

浮点数：$X = M_S\ E_S\ E_m \ldots E_2\ E_1\ M_{-1} M_{-2} \ldots M_{-n}$

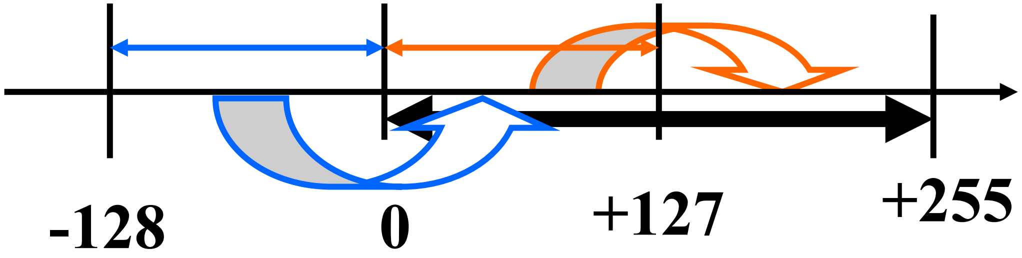
IEEE 标准：阶码用移码，基为2；

尾数用原码表示

按 IEEE的浮点数标准，尾数用规格化原码表示，即符号位 Ms用 0 表示正，1 表示负，且非 0 值尾数数值的最高位 必定为 1；既然这位必定为 1，则在保存浮点数到内存前，通过尾数左移，强行把该位去掉，则用同样多的尾数位就能多存一位二进制数，有利于提高数据表示精度，把这种处理方案称作为隐藏位技术。当然，在取回这样的浮点数到运算器执行运算时,必须先恢复该隐藏位。

阶码的移码表示法

- 移码：整数补码+偏移值
  - $[E]_{移} = E+OFFset \qquad -2^n<=E<2^n$
  - 使浮点数0的机器表示为全0



对**移128**的方案，8 位移码表示的机器数是数的真值在数轴上**向右平移**了 128 个位置。

浮点数的计算机内部表示

- 规格化形式： $+1.xxxxxxxxxx_2 * 2^{yyyy_2}$
- 单精度浮点数(32 bits)

31	30 … 23	22 … 0
S	Exponent	Significand
1 bit	8 bits	23 bits

- S 表示符号位
- Exponent 表示 y，即阶，移127
- Significand 表示 x，即尾数的后部分
- 可表示的范围： 2.0×10^{-38} 至 2.0×10^{38}

IEEE754 浮点数标准

清華大學 Tsinghua University

规定对长、短浮点数的尾数使用隐藏位技术，即把规格化非 0 值尾数的最高位上的 1 经过左移操作后强行去掉，则原来不能表示的更低一位进到最低一位。对单精度浮点数采用隐藏位之后，就使 23 位的规格化尾数数值位能给出 24 位的精度。

短浮点数采用移127的方案, 阶码值范围: 00000001 ~11111110, 表示 -126~+127。还有 2 个特定的阶码值:

00000000 跟 23位的非 0 尾数表示非规格化浮点数 (隐藏位必定为 0)， 00000000 跟 全 0尾数是浮点数 0。

11111111 跟 全 0 尾数表示无穷大的浮点数，可正可负，由符号位决定。11111111 跟 非全 0尾数时属于非法数值。

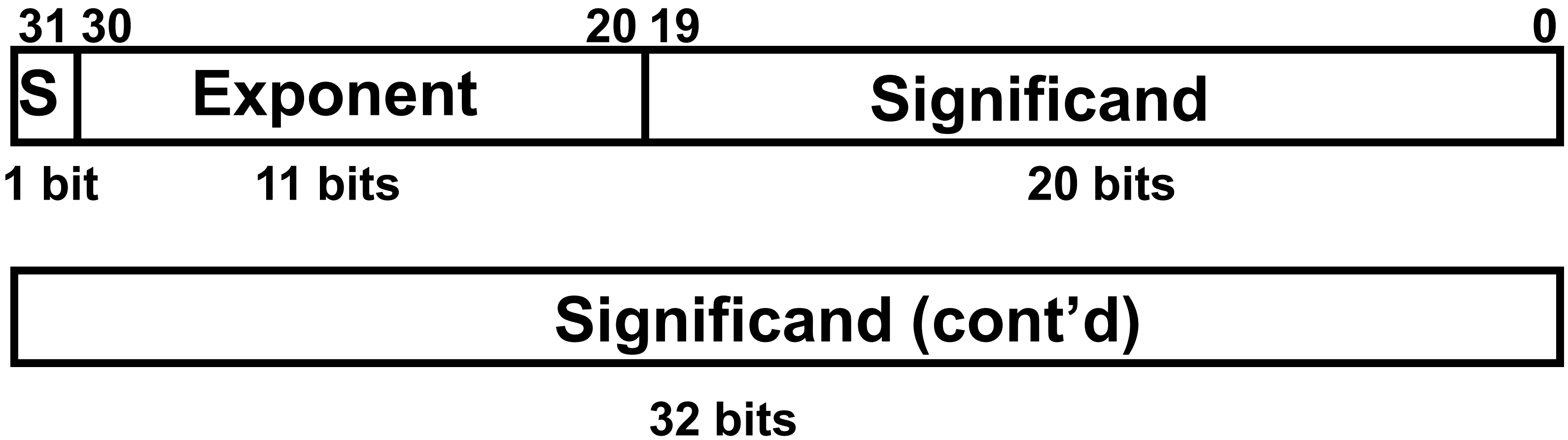
IEEE 754浮点数标准

清華大學 Tsinghua University

S(1位)	E(8位)	M(23位)	X(共32位)
符号位	0	0	0
符号位	1到254之间	不等于0	$(-1)^S \cdot 2^{E-127} \cdot (1.M)$ 规格化
符号位	255	0	无穷大
符号位	255	不等于0	NaN(非数值)

鉴于 IEEE754标准 对计算机界的重要贡献，发挥关键作用的数学家 Kahan 于1989年被授予图灵奖。

双精度浮点数



- C 语言中的 double 类型
  - 尾数：原码
  - 阶：移1023
- 十进制的范围扩展到 2.0×10^{-308} 至 2.0×10^{308}
- 最主要的好处是精度得到了扩展(52 位)

阶的移码表示

清華大學 Tsinghua University

- 在IEEE 754中，浮点数的阶不用补码表示，采用移码表示
- 最小的阶： 00000001_2
- 最大的阶： 11111110_2
- 移码： 在真正的阶上加一个规定的值
  - 对单精度浮点数：+127
  - 对双精度浮点数：+1023
- $1.0 * 2^{-1}$

0	0111 1110	0000 0000 0000 0000 0000 000

$$(-1)^S * (1 + \text{Significand}) * 2^{(\text{Exponent - Bias})}$$

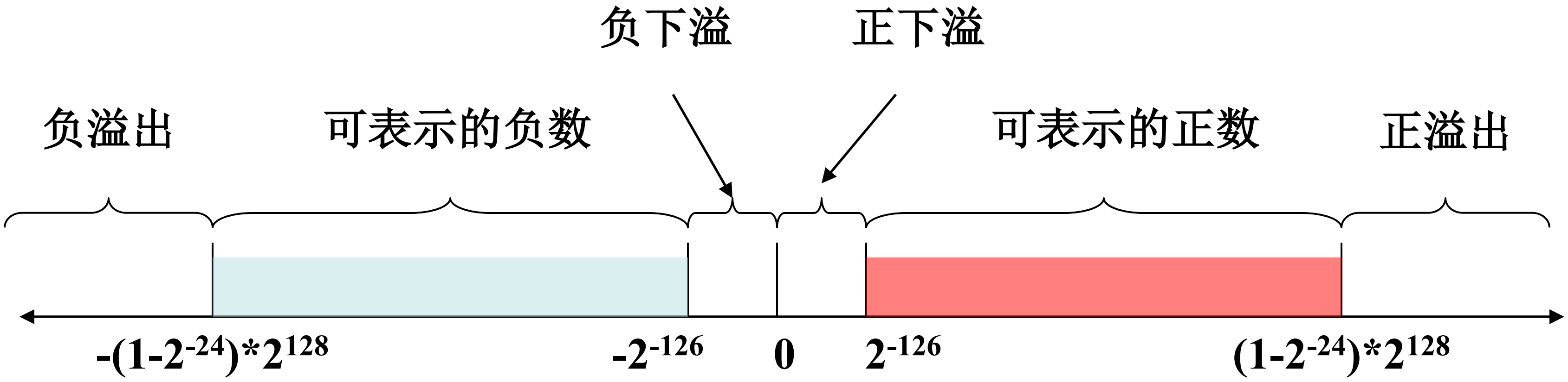
IEEE 754 浮点数标准

清華大學 Tsinghua University

- 被几乎所有计算机采纳 (自1985年起)
- 符号位: $\begin{cases} 1 \text{ 表示负数} \\ 0 \text{ 表示正数} \end{cases}$
- 有效位:
  - 使用原码表示
  - 规格化小数中，隐含最高位1
  - 单精度为： 23 位，双精度为 52 位
  - 0 < 有效数 < 1
- 全0用来表示0值
  - 在阶码中保留0给数0

$$\boxed{(-1)^S * (1 + \text{Significand}) * 2^{\text{Exp}}}$$

特殊的浮点数值



特殊值	阶	有效数
+/- 0	0000 0000	0
非规格化数	0000 0000	非0
NaN	1111 1111	非0
+/- ∞	1111 1111	0

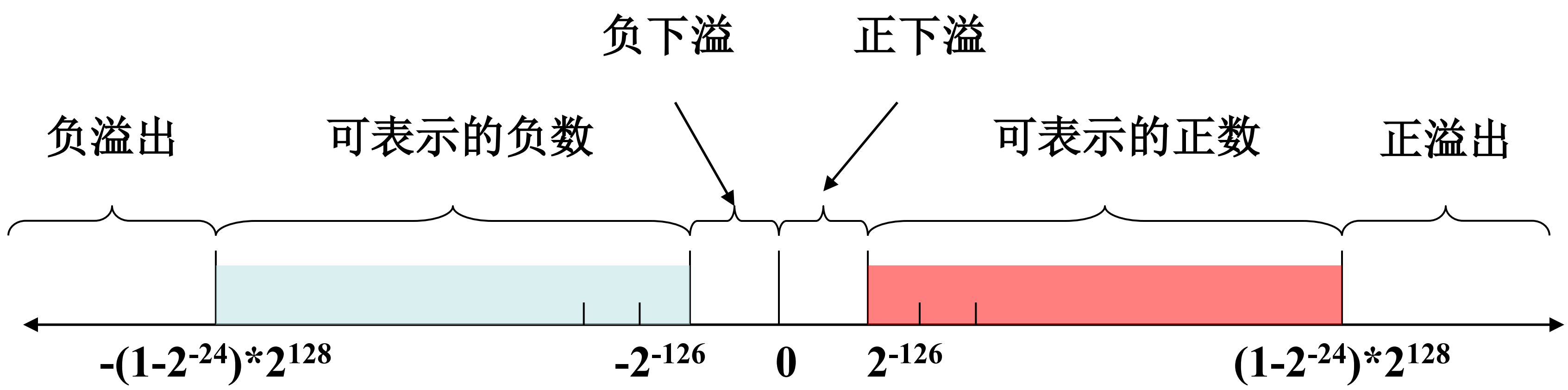
Not a Number

- 下列结果是什么：`sqrt(-4.0)` or 0/0?
  - 如果无穷大不是错误的话，那以上也不算
  - 称其为 Not a Number (NaN)
  - 阶 = 255, 有效位非0
- 应用
  - NaN可帮助排错
  - 自包含： op(NaN, X) = NaN

上溢和下溢

- 上溢
  - 数的绝对值太大（> $2.0\text{x}10^{38}$）
  - 阶的值超出8位能表示的范围
- 下溢
  - 数的绝对值太小
    - >0, < $2.0\text{x}10^{-38}$
  - 阶码超出了8位二进制位能表示的范围
- 如何减少上溢和下溢?
- 如何提高数据表示的精度?

浮点数溢出



可表示的大于0的最小规格化数（隐藏位的值为1）：

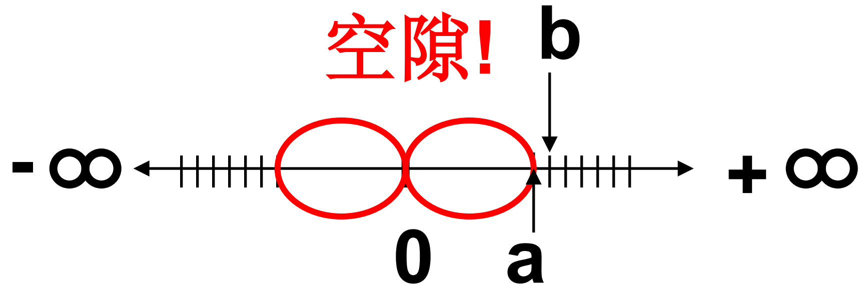
正数：0 00000001 00000000000000000000000

可表示的大于0的最小非规格化数（不使用隐藏位技术）：

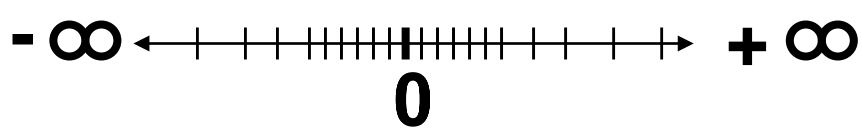
正数：0 00000000 00000000000000000000001

非规格化数

- 问题：在0周围还有一些空隙没有用来表示浮点数
  - 最小的正数：$a = 1.0\cdots_2 * 2^{-126} = 2^{-126}$
  - 次小的正数：$b = 1.0\cdots01_2 * 2^{-126} = 2^{-126} + 2^{-149}$
  - $a - 0 = 2^{-126}$
  - $b - a = 2^{-149}$



- 解决办法：
  - 使用非规格化数：没有隐含的前导1
  - 最小的正数：$a = 2^{-149}$
  - 次小的正数：$b = 2^{-148}$



舍入

- 浮点数的算术运算 => 舍入
- 类型转换时也需要舍入
  - Double ⇔ single precision ⇔ integer
- 向上舍入
  - 2.001 => 3; -2.001 => -2
- 向下舍入
  - 1.999 => 1; -1.999 => -2
- 截断
  - 丢弃最后的位（向0舍入）

浮点数的二—十进制转换

0	0110 1000	101 0101 0100 0011 0100 0010

- 符号位: 0 => 正数
- 阶:
  - $0110\ 1000_2 = 104_{10}$
  - 移码校正: 104 - 127 = -23
- 有效数:
  - $1 + 1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 0\times2^{-4} + 1\times2^{-5} + \ldots$

    $=1+2^{-1}+2^{-3}+2^{-5}+2^{-7}+2^{-9}+2^{-14}+2^{-15}+2^{-17}+2^{-22}$

    $= 1.0 + 0.666115$

- 十进制值: $1.666115*2^{-23} \sim 1.986*10^{-7}$

浮点数十—二进制转换

- 简单情况：如果除数是2的整数倍，则比较简单
- 如： -0.75的二进制
  - $-0.75 = -3/4$
  - $-11_2/100_2 = -0.11_2$
  - 规格化为： $-1.1_2 \times 2^{-1}$
  - $(-1)^S \times (1 + \text{Significand}) \times 2^{(\text{Exponent}-127)}$
  - $(-1)^1 \times (1 + .100\ 0000\ \ldots\ 0000) \times 2^{(126-127)}$

1	0111 1110	100 0000 0000 0000 0000 0000

浮点数十—二进制转换

- 除数不是2的整数倍
  - 该数无法精确表示
  - 可能需要多位有效位来保证精度
  - 难点：如何得到有效位?
- 循环小数有一个循环体
- 转换
  - 求出足够多的有效位.
  - 根据精度要求（单、双）截断多余的位。
  - 按标准要求给出符号位、阶和有效位。

转换举例

整数部分直接转换，
小数部分每次乘以2取其整数部分作为下一位。
直到超过所要求的位数即可完成转换。

$$- 3.333333\ldots$$

$$\begin{array}{r} 0.33333333 \\ \times\ 2 \\ \hline 0\ .66666666 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.66666666 \\ \times\ 2 \\ \hline 1\ .33333332 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.33333332 \\ \times\ 2 \\ \hline 0\ .66666664 \end{array}$$

$$- 11.0101010\ldots \Rightarrow - 1.1010101.. \times 2^1$$

- 有效位: 101 0101 0101 0101 0101 0101
- 符号位: 负 => 1
- 阶: $1 + 127 = 128_{10} = 1000\ 0000_2$

1	1000 0000	101 0101 0101 0101 0101 0101

浮点数算术运算

浮点数加减运算

$$X = M_X \times 2^{E_X} \qquad Y = M_Y \times 2^{E_Y}$$

（1）对阶操作，求阶差： $\Delta E = M_X - M_Y$，

使阶码小的数的尾数右移 $|\Delta E|$ 位，

其阶码取大的阶码值；

（2）尾数加减；

（3）规格化处理；

（4）舍入操作，可能带来又一次规格化；

（5）判结果的正确性，即检查阶码上下溢出

浮点数加运算举例

清華大學 Tsinghua University

$X=2^{+010}\times 0.1101111$， $Y=2^{+100}\times(-0.1010110)$

写出X、Y的正确的浮点数表示：

阶码用 4 位移码（含符号位） 尾数用 8 位原码（含符号位）

$[X]_{浮}$ = 0 1 010 1101111

$[Y]_{浮}$ = 1 1 100 1010110

为运算方便，尾数的符号位写在数值位之前：

$[X]_{浮}$ = 1 010 0 1101111

$[Y]_{浮}$ = 1 100 1 1010110

浮点数加运算举例

清華大學 Tsinghua University

$X=2^{+010}\times 0.1101100$， $Y=2^{+100}\times(-0.1010110)$

（1）计算阶差（移码计算）：

$$\Delta E = E_X - E_Y = E_X + (-E_Y) = 1\ 010 + 0\ 100 = 0\ 110$$

注意：阶码计算结果的符号位在此变了一次反，为 -2 的移码，

是X的阶码值小，使其取 Y 的阶码值1100 (即 +4);

因 此，相应地修改 $[M_X]_{原}$ =0 0011011 00（即右移 2 位）

右移出的00被保存到保护位中

（2）尾数求和：

```
   1 1010110
 — 0 0011011  00
   1 0111011  00
```

此处是原码加法，符号不相同，绝对值大的减小的，结果符号取决于绝对值大的数

浮点数加运算举例

（3）规格化处理：

相加结果,数值的最高位为 0,应执行 1 次左规操作,

故得 $[M_{X+Y}]_{原}$ = 1 1110110，阶码减1得 1 011 (为+3)

（4）舍入处理：舍入位是0，按0舍1入规则，得到最终结果：1 1110110

（5）检查溢出否：和的阶码为 1011，不溢出

计算后的 $[X+Y]_{浮}$ = 1 1011 1110110

即数的实际值为：$2^3 \times (-0.1110110)$

浮点数乘、除法

- 算法
  - 阶码加、减：乘：E_X+E_Y，除：E_X-E_Y
  - 对尾数进行乘、除法，求得结果
  - 规格化
  - 舍入，可能再次规格化
  - 进行溢出检查（阶码）

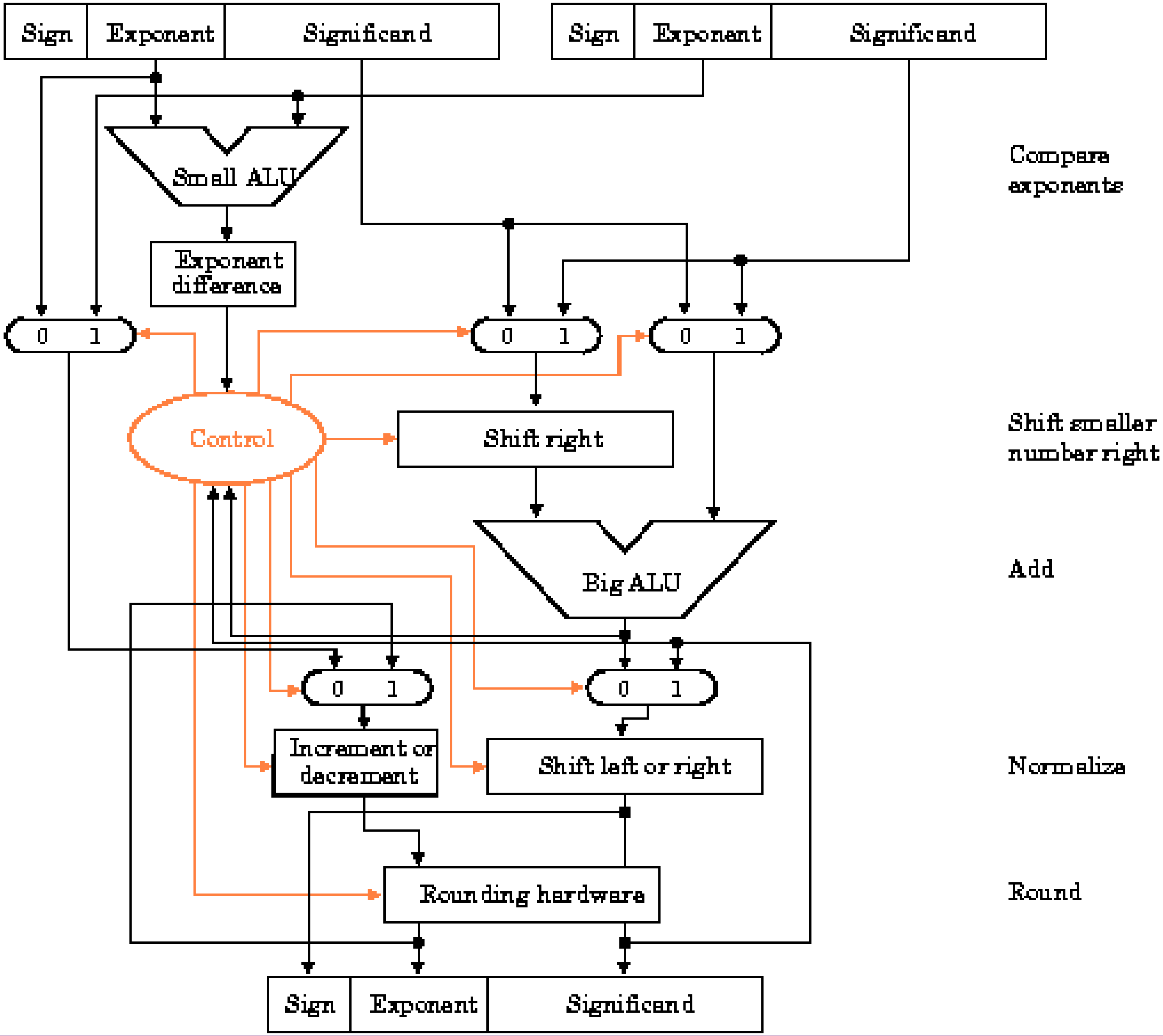
浮点数运算

- 对浮点数加/减法
  - 移码的减运算
  - 无符号数运算
- 对浮点数乘/除法
  - 移码的加/减运算（注意溢出）
- 浮点数尾数运算
  - 原码运算

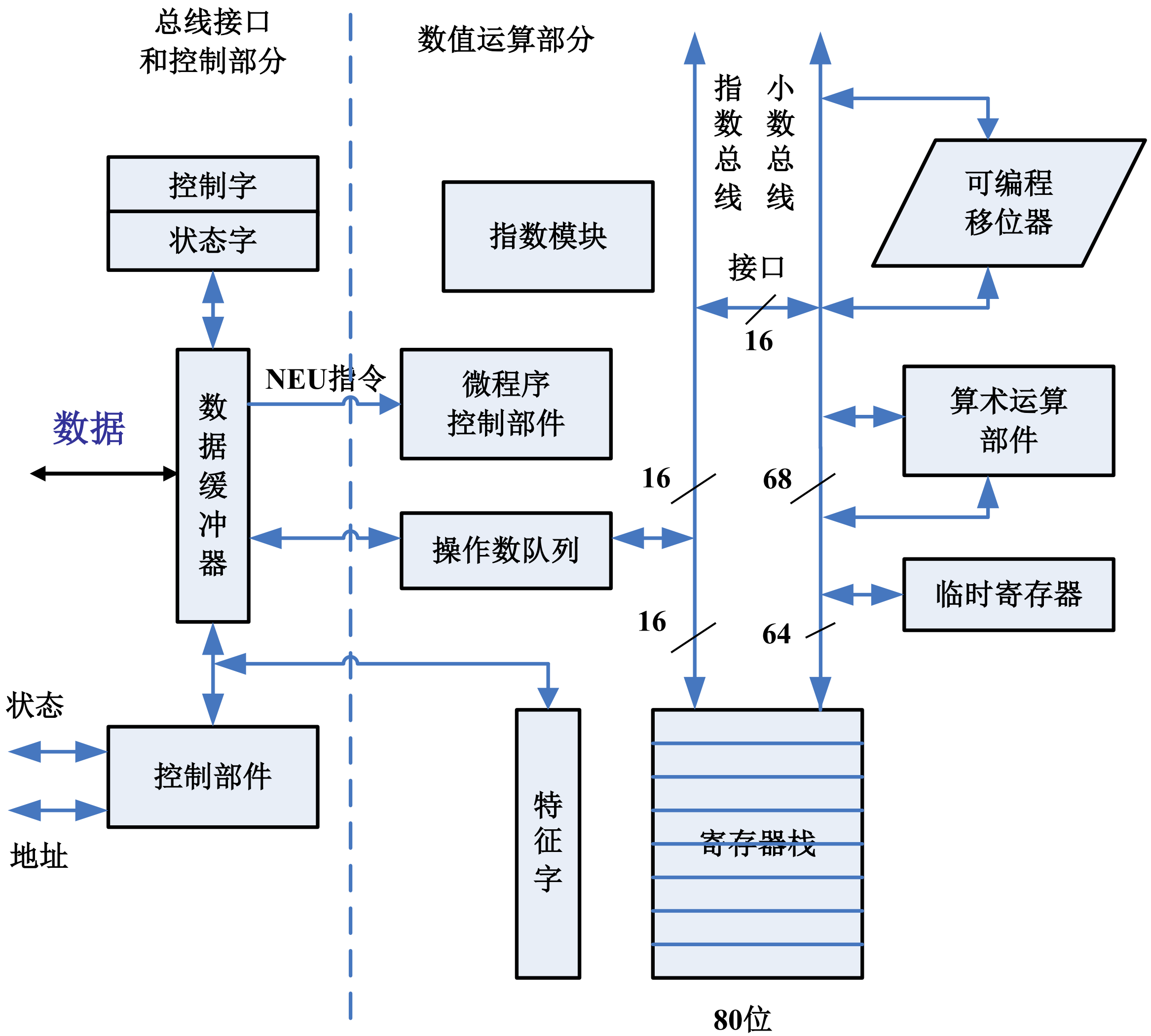
浮点运算的特点

- 浮点加、减法不满足结合律!
  - $x = -1.5 \times 10^{38}$, $y = 1.5 \times 10^{38}$, and $z = 1.0$
  - $x + (y + z) = -1.5\text{x}10^{38} + (1.5\text{x}10^{38} + 1.0)$
    $= -1.5\text{x}10^{38} + (1.5\text{x}10^{38}) = \underline{0.0}$
  - $(x + y) + z = (-1.5\text{x}10^{38} + 1.5\text{x}10^{38}) + 1.0$
    $= (0.0) + 1.0 = \underline{1.0}$
- 浮点数加法、减法不可结合!
- 浮点数也不能进行相等比较!
  - 为什么？浮点数算术运算的结果是近似值。

浮点运算部件


Sign
Exponent
Significand
Sign
Exponent
Significand
Small ALU
Exponent difference
0 1
0 1
0 1
Control
Shift right
Big ALU
0 1
0 1
Increment or decrement
Shift left or right
Rounding hardware
Sign
Exponent
Significand
Compare exponents
Shift smaller number right
Add
Normalize
Round

Intel 80287

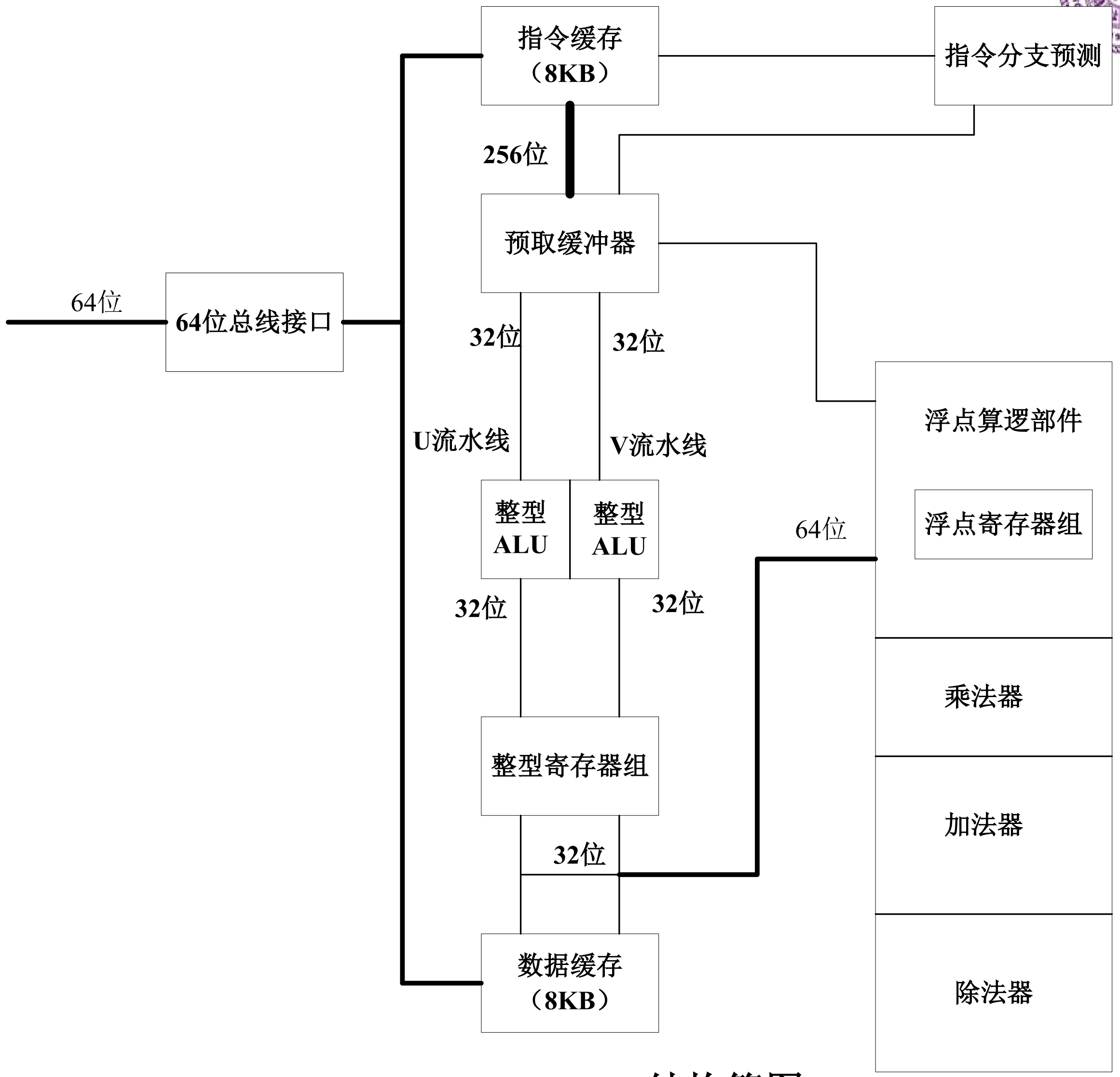


浮点运算部件以协处理器方式和CPU连接，有独立的控制逻辑；

8个80位浮点数寄存器，精度更高，采用堆栈结构并进行了扩展；

支持3大类共7种数据，支持约60条指令。

Pentium结构



Pentium结构简图

数据及数据类型

0011 0100 0101 0101 0100 0011 0100 0010

- $1.986 * 10^{-7}$
- 878,003,010
- “4UCB”

```
ADD R0, R1
```

- 计算机中的数据可以表示任何事情：指令、操作数等，由上层次的抽象计算机来判断。
- 对存储内容的错误理解：
  - 将ASCII码当作浮点数，指令作为数据，整数可能成为指令, ...
  - 程序中的安全漏洞

小结

- 计算机中的浮点数是我们实际使用的数的近似值
- IEEE 754 浮点数标准是浮点数运算中广为接受的标准
- 浮点数运算一般由浮点运算器完成
  - 阶码运算
  - 尾数运算
- 计算机中的二进制位只有在上下文才有意义，单独的一个字不代表任何含义。

本单元小结

- 程序和指令
- 数据表示
- 检错纠错码
- 数据运算
- 运算器基本功能
- 运算器组成
- VHDL硬件描述语言

程序和指令

- 程序
  - 高级语言程序
  - 汇编语言程序
  - 机器语言程序
- 指令
  - 指挥硬件进行操作的命令
  - 指令系统
  - 指令格式
  - 寻址方式

数据表示

- 数据类型
  - 数值型
    - 整数、浮点数
  - 非数值型
    - 字符型、逻辑型
  - 其他型
    - 多媒体数据
    - 程序
- 二进制数据表示

整数的原 反 补码表示

正数的 原码、反码、补码表示均相同，
符号位为 0，数值位同数的真值。

零的原码和反码均有 2个编码，补码只 1个码

负数的 原码、反码、补码表示均不同，
符号位为 1，数值位：原码为数的绝对值
反码为每一位均取反码
补码为反码再在最低位+1

由 $[X]_{补}$ 求 $[-X]_{补}$：每一位取反后再在最低位+1

浮点数表示法

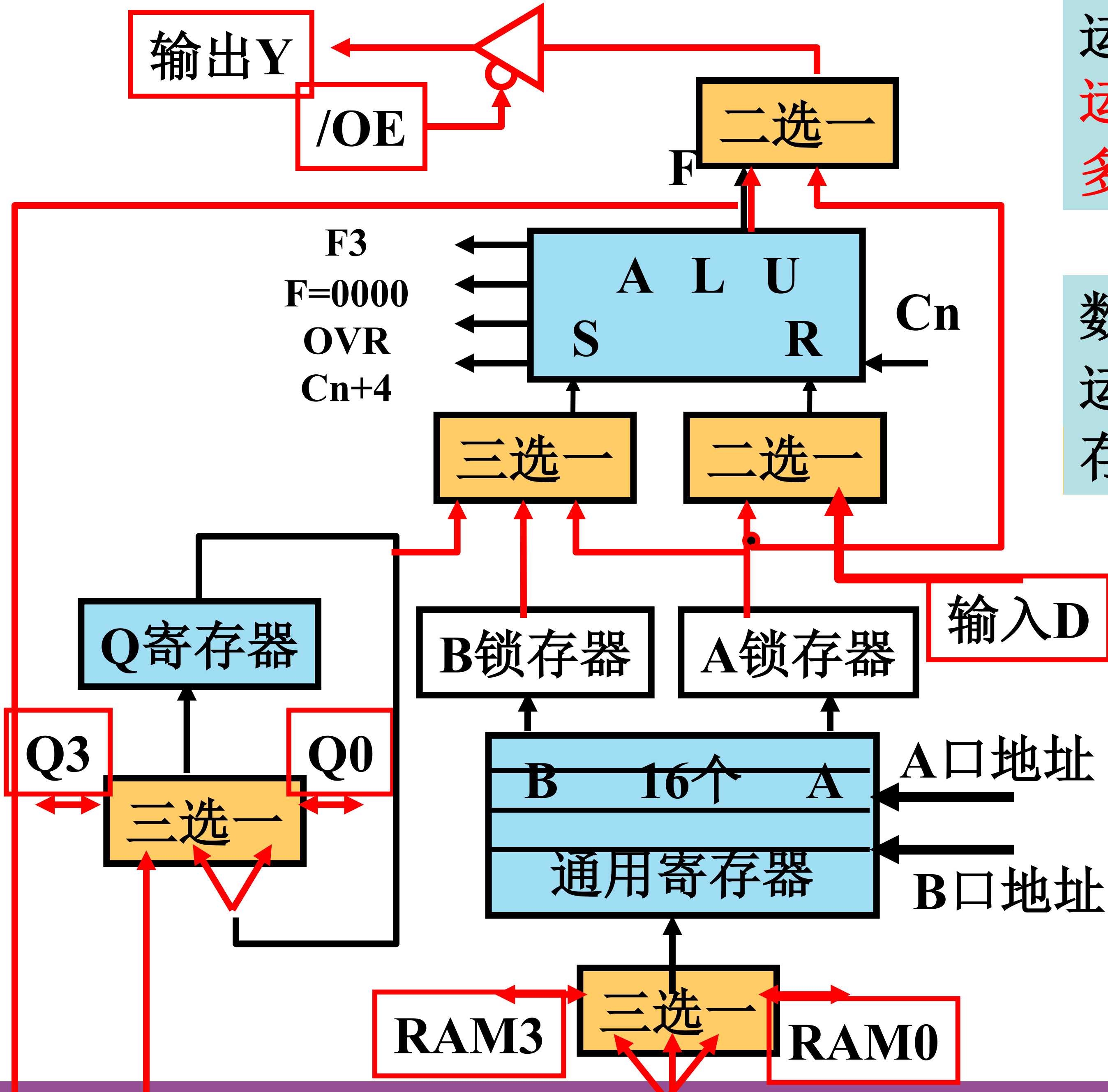
- 单精度浮点数
  - 用32位字表示一个浮点数
  - 符号位（0正1负）、阶（移127码）、有效数（23位原码，规格化表示中隐含最高位1）
- 双精度浮点数
  - 用64位双字表示一个浮点数
  - 符号位（0正1负）、阶（移1023码）、有效数（52位原码，规格化表示中隐含最高位1）

数据运算

- 逻辑运算
  - 逻辑门
- 加法运算
  - 加法器
- 减法运算
  - 加法器
- 乘、除法运算
  - 加法器、移位寄存器
- 浮点运算器
  - 浮点运算器

运算器基本功能

- 完成算术、逻辑运算
  - +、—、×、÷、∧、∨、¬。
- 获得运算结果的状态
  - C、Z、V、S
- 取得操作数
  - 寄存器组、立即数
- 输出、存放运算结果
  - 寄存器组、数据总线
- 暂存运算的中间结果
  - Q寄存器、移位寄存器
- 理解、响应控制信号



运算器，三大件
运算 暂存 乘除快
多路选通连起来

数据组合有内外
运算功能指明白
存移输出巧安排

运算功能选择
← I5 I4 I3

数据组合选择
← I2 I1 I0

运算结果处理
← I8 I7 I6

VHDL语言

- 掌握用VHDL语言描述硬件结构和功能的基本流程和方法

阅读与思考

- 阅读：
  - 教材第3章
- 思考
  - IEEE754浮点数尾数用原码,阶码用移码的原因?
  - 运算器主要功能是什么？都是怎样在电路上实现的?
  - 运算器的功能如此简单，为什么程序能完成十分复杂的功能?

实验

- Project2：ALU实验
  - 具体要求见：实验指导书5.3
  - 各班课代表与实验室联系实验时间(10月23日前完成)
  - 本实验按班到实验室分组独立完成，在网络学堂上提交实验报告
- 其他说明
  - 以后的实验按组进行