绝密 * 启用前

2017年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（一）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-xf(x)}{\ln(1+x^2)}=0$，则（　　）．

（A）$f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导　　（B）$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$

（C）$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$　　（D）$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$

（2）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1[\int_x^1[f(t)+f(x)]dt]dx=$（　　）．

（A）$\int_0^1 f(x)dx$　　（B）$\int_0^1 xf(x)dx$　　（C）$\int_0^1(1-x)f(x)dx$　　（D）$\int_0^1(1-xf(x))dx$

（3）设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, n=1,2,\cdots$，$\theta$ 为常数，且 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n\sin^n\theta$（　　）．

（A）发散　　（B）条件收敛　　（C）绝对收敛　　（D）敛散性不定

（4）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则下列说法正确的是（　　）．

（A）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，且偏导数 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 均不存在

（B）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且偏导数 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 均存在

（C）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，但偏导数 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 均存在

（D）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

（5）已知三阶矩阵 A 满足 $A^2=E$，但 $A\neq\pm E$，则下列关系式成立的是（　　）．

（A）$r(A+E)=1$　　（B）$r(A+E)=2$

（C）$r(A-E)\cdot[r(A-E)-2]=0$　　（D）$[r(A+E)-1]\cdot[r(A-E)-1]=0$

（6）设三阶矩阵 A 的特征值为 $0,1,-1$，则下列结论中正确的个数为（　　）．

①A 不可逆；　　②A 的主对角线元素之和为 0；

③A 的特征值 $1,-1$ 所对应的特征向量正交；　　④$Ax=0$ 的基础解系中含有两个解向量．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（7）设 A,B,C 为三个随机事件，则 $\overline{A\cup B-A\cup C}=$（　　）．

（A）$\overline{B}\cup C$　　（B）$\overline{A}(\overline{B}\cup C)$　　（C）$\overline{A}\,\overline{B}\cup C$　　（D）$A\cup\overline{B}\cup C$

（8）设二维随机变量$(X,Y)\sim N(1,2;1,4;\frac{1}{2})$，且$P\{aX+bY<1\}=\frac{1}{2}$，$Cov(X,aX+bY)=0$，则（ ）.

（A）$a=-1,b=1$ （B）$a=1,b=1$ （C）$a=0,b=\frac{1}{2}$ （D）$a=3,b=-1$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数$f(x)$在点$x=0$的某个邻域内二阶可导，其反函数为$y=\varphi(x)$，若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+x-1}{x^2}=1$，则$\varphi''(1)=$___________.

（10）极坐标曲线$r=\sqrt{\cos\theta}\ (0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$与极轴所围成的曲边扇形绕极轴旋转一周所得旋转体的体积为___________.

（11）设方程$f(u^2-x^2,u^2-y^2,u^2-z^2)=0$确定了$u$为$x,y,z$的非零函数，其中$f$为可微函数，且$f_1'+f_2'+f_3'\neq 0$，则当$xyz\neq 0$时，$\frac{u}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{u}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=$___________.

（12）设曲面Σ为$x^2+y^2+z^2=2y$，则$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)dS=$___________.

（13）设A是三阶实对称矩阵，若存在正交阵$Q=(q_1,q_2,q_3)$，使得$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&4\end{pmatrix}$，则$A-q_1q_1^T$的特征值是___________.

（14）设随机变量X的分布函数为$F_X(x)$，$g(x)$为单调递减函数，其反函数为$g^{-1}(x)$，则$Y=g(X)$的分布函数$F_Y(y)=$___________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）**（本题满分 10 分）**（Ⅰ）当$x>0$时，证明：$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$；

（Ⅱ）利用（Ⅰ）的结论，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$.

（16）**（本题满分 10 分）**利用变换$x=\ln t$化简微分方程$y''-y'+e^{2x}y=e^{3x}$，并求此方程的通解.

（17）**（本题满分 10 分）**求函数$z=f(x,y)=3xy-7x-3y$在由抛物线$y=5-x^2$与直线$y=1$所围成的有界闭区域D上的最大值与最小值.

(18)(**本题满分 10 分**)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a)(b-a)<f(b)-f(a)<2[f(\frac{a+b}{2})-f(a)]$

(Ⅰ)记 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，证明存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $F(x_0)=0$；

(Ⅱ)证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

(19)(**本题满分 10 分**)(Ⅰ)设 P 为曲面 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=1$ 上任意一点，若点 P 处切平面 π 与平面 $\pi_0:x-z=1$ 垂直，求点的 P 轨迹 C；

(Ⅱ)若从 z 轴正向往负向看，C 取逆时针方向，计算 $\oint_C zdx+2xdy+ydz$.

(20)(**本题满分 11 分**)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1\\a&1\\a+1&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&b\\b&0\\a&a\end{pmatrix}$，且 $a\neq b$. 讨论 a 与 b 取何值时，矩阵方程 $AX=B$ 有解？在 $AX=B$ 有解时，求其解.

(21)(**本题满分 11 分**)设 A,B,C 均为三阶矩阵，且 $AB=-B$，$CA^T=C$. 其中 $B=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\1&2&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.(Ⅰ)求 A；(Ⅱ)证明对任意的 3 维列向量 ξ，必有 $A^{100}\xi=\xi$.

(22)(**本题满分 11 分**)在区间 $[0,3]$ 上随机地取一个实数 X. 若 $0\le X\le 1$，则随机变量 Y 在 $[0,X]$ 上服从均匀分布，若 $1<X\le 3$，则 Y 在 $[X,3]$ 上服从均匀分布，(Ⅰ)求 (X,Y) 的概率密度函数 $f(x,y)$；(Ⅱ)求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

(23)(**本题满分 11 分**)设总体 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0或y<0,\\ p(1-e^{-\lambda y^2}), & 0\le x<1,y\ge 0,\\ 1-e^{-\lambda y^2}, & x\ge 1,y\ge 0.\end{cases}$

其中 p,λ 为未知参数，且 $0<p<1,\lambda>0$.

(Ⅰ)分别求 X 和 Y 的概率分布；

(Ⅱ)利用来自总体 X 的简单随机样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，求 p 的矩估计量 $\hat{p}_M$；

(Ⅲ)利用来自总体 Y 的简单随机样本 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$，求 λ 的极大似然估计量 $\hat{\lambda}_L$.

绝密 * 启用前

2017年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（二）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设有曲线 $y=e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{|x|}{x-1}$，则下列结论不正确的是（　　）．

（A）曲线有水平渐近线 $y=\dfrac{\pi}{4}$　　　　（B）曲线有水平渐近线 $y=-\dfrac{\pi}{4}$

（C）曲线有铅直渐近线 $x=0$　　　　（D）曲线有铅直渐近线 $x=1$

（2）当 $0<a<\dfrac{1}{2e}$ 时，方程 $ax^2=\ln x$ 的实根个数为（　　）．

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（3）设区域 D 是由直线 $x=\dfrac{\pi}{4},y=-1$ 及曲线 $y=\tan x$ 所围成，D_1 是 D 位于第三象限的部分，则

$\iint\limits_D (xy+x\tan xy)dxdy=$（　　）．

（A）$2\iint\limits_{D_1} xydxdy$　　　　（B）$2\iint\limits_{D_1} x\tan xydxdy$

（C）$4\iint\limits_{D_1} (xy+x\tan xy)dxdy$　　　　（D）0

（4）设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）．

（A）可微且必取极值　　　　（B）可微但未必取极值

（C）不可微但必取极值　　　　（D）不可微但未必取极值

（5）设 A 为 n 阶方阵，将 A 的第二行加到第一行，再将第二列减去第一列得到矩阵 B，则 A,B（　　）．

（A）等价未必相似　　（B）等价且相似　　（C）行向量组等价　　（D）列向量组等价

（6）设 A 为四阶实对称矩阵，其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$，$\lambda_4=3$，相应的特征向量依次为

p_1,p_2,p_3,p_4，且 p_1,p_2 线性无关，令 $P=(4p_4,5p_3,p_1+p_2,p_1-p_2)$，则 $P^{-1}AP=$（　　）．

（A）$\begin{pmatrix}4&&&\\&5&&\\&&2&\\&&&0\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}4&&&\\&5&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&2&\\&&&3\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}3&&&\\&2&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$

（7）设随机变量X和Y的概率分布分别为$X\sim\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0.7 & 0.3\end{pmatrix}$，且$X$与$Y$不相关，则随机事件$\{X=0\}$与$\{Y=-1\}$（　　）.

（A）互不相容　　（B）相互对立　　（C）相互独立　　（D）不相互独立

（8）设随机变量(X,Y)在区域D：$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$上服从均匀分布，$Z=\begin{cases}1, & X+Y\le 1,\\ X+Y, & X+Y>1,\end{cases}$ 则$EZ=$（　　）.

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）1　　（D）$\frac{7}{6}$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数$u=x^2+y^2+z^2$，其中$z=z(x,y)$由方程$xz+e^{yz}=e-1$所确定，则$du\big|_{(-1,1,1)}=$______.

（10）设函数$f(x)$连续，且$f(x)+\frac{2x}{x^2+1}\int_0^x f(t)dt=1$，则$\int_0^1 f(x)dx=$__________.

（11）设函数$\varphi(x)=\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt$，则$\varphi(x)+\varphi(-x)-\frac{1}{2}\varphi(x^2)=$__________.

（12）已知连续函数$f(x,y)$满足$f(x,y)=(x-1)^2+y^2\oint_L f(x,y)ds$，其中$L$为$x^2+y^2=1$，则$f(x,y)=$__________.

（13）设A为四阶实对称阵，$r(A-4E)=1$，A的各行元素之和为0，则$r(A)=$__________.

（14）设随机变量X,Y相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布，则$P\{XY-X-Y<-1\}=$_____.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）**（本题满分 10 分）**设函数$z=f(x-y,f(x,y))$，其中f具有二阶连续偏导数，且f在点$(1,1)$处取得极小值$f(1,1)=0$，求$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

（16）**（本题满分10分）**设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义.（Ⅰ）若$f(x)$在点x_0处可导，并取得最值，证明$f'(x_0)=0$；（Ⅱ）若$f(x)$为周期$T(T>0)$的可导周期函数，证明存在$\xi_1,\xi_2\in[0,T),\xi_1\ne\xi_2$，使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

（17）（**本题满分10分**）在曲面$x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2=1\,(x>0,y>0,z>0)$上求一点，使过该点的切平面在三个坐标轴上的截距平方和最小.

（18）（**本题满分 10 分**）计算曲线积分$I=\int_L e^{\cos^2 y}dx-x(2e^{\cos^2 y}\cos y\sin y+ye^{x^3})dy$，其中$L$是从点$A(-1,0)$到点$B(1,0)$的上半圆$x^2+y^2=1,\ y\ge 0$.

（19）（**本题满分 10 分**）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 2^n}(x-1)^n$的收敛域及和函数.

（20）（**本题满分 11 分**）设A为三阶实方阵，三维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$满足$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2$, $A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3$, $A\alpha_3=\alpha_3,\alpha_3\ne 0$，（Ⅰ）证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；（Ⅱ）证明$A$必不为实对称矩阵.

（21）（**本题满分 11 分**）设$A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^*P$，其中$E$为三阶单位阵，$A^*$为$A$的伴随矩阵，求$B^T$的特征值与特征向量.

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量X和Y相互独立且同分布；X的分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots,$$

（Ⅰ）求已知$X+Y=n\,(n\ge 2)$条件下，X的分布律；（Ⅱ）求$P\{X+Y\ge n\}\,(n\ge 2)$.

（23）（**本题满分 11 分**）设$(X_1,X_2,\cdots,X_9)$是来自总体$X\sim N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，$\bar{X}$和S^2分别表示样本均值和样本方差.（Ⅰ）判断统计量$\frac{9\bar{X}^2}{S^2}$服从什么分布，并说明理由.（Ⅱ）求$E[(\bar{X}S^2)^2]$.

绝密 * 启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（三）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的增量 Δy 满足 $\Delta y=1-e^{2\Delta x}+\Delta x\sin\Delta x$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 是 $dy\big|_{x=0}$ 的（　　）．

（A）等价无穷小　（B）同阶但不等价的无穷小　（C）高阶无穷小　（D）低阶无穷小

（2）关于定积分的如下结论

①$\int_0^a \dfrac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=\dfrac{a}{2}$，其中 $f(x)$ 为正值连续函数，$a>0$；

②$\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^5}\,dx=\int_0^1 \sqrt[5]{1-x^3}\,dx$，

则有（　　）．

（A）①②均正确　（B）①②均不正确　（C）①正确，②不正确　（D）①不正确，②正确

（3）设有无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，则下列结论正确的是（　　）．

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 中至少有一个收敛

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 中至少有一个发散

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

（4）设 $I_1=\iint\limits_D(\sin^2 x+\cos^2 y)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D(\sin x^2+\cos y^2)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D(\sin^2 x+\cos y^2)d\sigma$，其中 $D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$，则 I_1,I_2,I_3 三者的大小关系为（　　）．

（A）$I_1<I_2<I_3$　（B）$I_3<I_2<I_1$　（C）$I_1<I_3<I_2$　（D）$I_2<I_3<I_1$

（5）齐次线性方程组 $Bx=0$ 的解都是 $Ax=0$ 的解的一个充分条件为（　　）．

（A）B 的列向量都由 A 的列向量线性表示　（B）A 的列向量都由 B 的列向量线性表示

（C）B 的行向量都由 A 的行向量线性表示　（D）A 的行向量都由 B 的行向量线性表示

（6）设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$，$\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$，α,β 线性无关，则二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)$$

的规范型为（　　）．

（A）y_1^2　（B）$y_1^2+y_2^2$　（C）$y_1^2-y_2^2$　（D）$y_1^2+y_2^2+y_3^2$

（7）设$n\,(n>3)$个乒乓球中有3只黄球，$n-3$只白球，将其随机放入编号为$1,2,\cdots,n$的n个盒子中，一个盒子放入一个球．现从第1号盒子开始逐个打开，直到出现两个黄球为止．记X为所打开的盒子数，则$EX=$（　　）．

（A）$\dfrac{n-2}{2}$　　（B）$\dfrac{n-1}{2}$　　（C）$\dfrac{n}{2}$　　（D）$\dfrac{n+1}{2}$

（8）设$(X_1,X_2,\cdots,X_4)$是来自总体$X\sim N(0,1)$的简单随机样本，$Y=\dfrac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2+X_4^2}$．对于给定的$\alpha\,(0<\alpha<1)$，数$y_\alpha$满足$P\{|Y|<y_\alpha\}=\alpha$，则有（　　）．

（A）$y_\alpha y_{1-\alpha}=1$　　（B）$y_\alpha+y_{1-\alpha}=1$　　（C）$y_{\frac{\alpha}{2}}y_{1-\alpha}=1$　　（D）$y_{\frac{\alpha}{2}}y_{1-\frac{\alpha}{2}}=1$

二、填空题:9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则$f^{(100)}(0)=$____________．

（10）$\int_{-1}^{1}x(1+x^{2017})(e^x-e^{-x})dx=$____________．

（11）曲线$y=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2-e^{\lambda x}}$及直线$y=\dfrac{1}{2}x$及$x=1$围成平面图形的面积为____________．

（12）设函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的偏导数均存在，且$f_x'(x_0,y_0)=1$，$f_y'(x_0,y_0)=2$，则极限$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+2h,y_0)-f(x_0,y_0-3h)}{h}=$____________．

（13）若$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$E$为三阶单位矩阵，则$(E+A+A^2)^{-1}=$____________．

（14）设随机变量X的密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}g(x), & |x|\le1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ Y的密度函数为$f_Y(y)=\begin{cases}g(-y), & |y|\le1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$其中$g(x)$在$[-1,1]$上连续，若$DX=1,\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，则由切比雪夫不等式得$P\{|X+Y|<2\}\ge$________．

三、解答题:15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）**（本题满分10分）**设$x\ge a\ge1$，证明:（Ⅰ）$\ln a\ge\dfrac{2(a-1)}{a+1}$；（Ⅱ）$a(x+1)\ln a\ge(a+x)(a-1)$．

（16）**（本题满分10分）**设函数$f(x)$和$g(x)$可导，且满足条件$f'(x)=\dfrac{1}{2}g(x)$，$g'(x)=\dfrac{1}{2}f(x)$，$f(0)=0$，$g(x)\ne0$．（Ⅰ）求$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$的表达式；（Ⅱ）求曲线$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}\,(x\ge0)$绕直线$y=1$旋转一周所生成立体的体积．

（17）（**本题满分 10 分**）已知 $df(x,y)=-(1+e^{y})\sin x dx+(\cos x-1-y)e^{y}dy$，$f(0,0)=2$，求函数 $f(x,y)$ 的极值.

（18）（**本题满分 10 分**）计算积分 $I=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(1+e^{x-\frac{1}{x}})(1+x^{2})}$.

（19）（**本题满分 10 分**）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+2)dydz+zdxdy$，其中 Σ 是球面 $x^{2}+y^{2}+z^{2}=1$ 位于 $x\geq 0,y\geq 0$ 的部分，且取前侧.

（20）（**本题满分 11 分**）已知三阶方阵 A 的第一行元素为 a,b,c $(a\neq 0)$，且 $AB=O$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&4&6&2\\3&6&10&4\end{pmatrix}$. 记 $\xi_1=\begin{pmatrix}-b\\a\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-c\\0\\a\end{pmatrix}$. 证明（Ⅰ）$\xi_1,\xi_2$ 都为线性方程组 $Ax=0$ 的解；（Ⅱ）B 的列向量组与 ξ_1,ξ_2 等价.

（21）（**本题满分 11 分**）已知 A 为三阶实对称矩阵，$r(A)=2$，$AB=2B$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求正交阵 Q，使得 $Q^{T}AQ$ 为对角阵；（Ⅱ）求 A^{n}.

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X,Y,Z 相互独立，且 X 和 Y 均服从 $N(0,1)$，Z 的分布律为 $P\{Z=0\}=P\{Z=1\}=\frac{1}{2}$，$T=(X^{2}+Y^{2})Z$，（Ⅰ）求 T 的分布函数 $F_T(t)$；（Ⅱ）求 ET.

（23）（**本题满分 11 分**）设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^{2})$ 的简单随机样本，（Ⅰ）问常数 k_1 取何值时，$k_1\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$ 为 σ 的无偏估计？（Ⅱ）问常数 k_2 取何值时，$k_2(\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|)^{2}$ 为 σ^{2} 的无偏估计？

绝密 * 启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（四）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x\cos\dfrac{\pi}{2}x}{|x|(x^2+x-2)}$，则 $f(x)$ 的可去间断点、跳跃间断点、第二类间断点分别为（　　）.

（A）$x=-2,x=0,x=1$　　　　（B）$x=0,x=1,x=-2$

（C）$x=0,x=-2,x=1$　　　　（D）$x=1,x=0,x=-2$

（2）方程 $\int_{-1}^{x}te^{\cos t}dt=0$ 的实根个数为（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（3）曲线 $\begin{cases}z=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2),\\ y=4\end{cases}$ 在点 $(2,4,5)$ 处的切线与 x 轴的夹角 $\theta=$（　　）.

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{4}$　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$

（4）设函数 $f(x)$ 单调连续，$f(0)=0$，$\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，则对任意的 t，有（　　）.

（A）$\int_0^t\varphi(x)dx=\int_0^t f(x)dx$　　　　（B）$\int_0^{f(t)}\varphi(x)dx=\int_0^{\varphi(t)}f(x)dx$

（C）$\int_0^{\varphi(t)}f(x)dx+\int_0^t f(x)dx=t\varphi(t)$　　　　（D）$\int_0^{f(t)}\varphi(x)dx+\int_0^t f(x)dx=tf(t)$

（5）设 A 合同于 $B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，则（　　）.

（A）$|A|=|B|$　（B）$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值　（C）A 为对称阵　（D）A 必合同于单位矩阵

（6）设 A 是 $m\times n$ 矩阵 $(n>m)$，$r(A)=m$，B 是 $n\times(n-m)$ 矩阵，$r(B)=n-m$ 且 $AB=O$，若 η 是 $Ax=0$ 的解，则线性方程组 $By=\eta$（　　）.

（A）无解　　（B）有无穷多解　　（C）有唯一解　　（D）解的情况不能确定

（7）设A,B为两个随机事件，$0<P(A)<1$，则必有$1-P(B|\overline{A})$（　　）.

（A）$=P(B|A)$　（B）$\le\dfrac{1-P(B)}{P(\overline{A})}$　（C）$\le 1-\dfrac{P(B)}{P(\overline{A})}$　（D）$\le 1-\dfrac{P(\overline{A}|B)}{P(\overline{A})}$

（8）设$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$为未知参数$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间，即有$P\{\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\}=1-\alpha$，则下列说法中正确的为（　　）.

①$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$以$1-\alpha$的概率包含$\theta$；　②$\theta$以$1-\alpha$的概率落入$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$；

③$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$不包含$\theta$的概率为$\alpha$；　④$\theta$以$\alpha$的概率落到$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$之外.

（A）①②③④　（B）①②　（C）①③　（D）②④

二、填空题:9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设$f(x)$是以4为周期的奇函数，且$f'(0)=2$，则$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x^3)+f(x^2)}{x-2}=$__________.

（10）$\int e^x\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=$__________.

（11）设$u=xye^{x+y}$，若m,n为自然数，则有$\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=$__________.

（12）设L为曲线$\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=2\arctan t-t\end{cases}$上从$t=0$到$t=1$间的一段弧，则$\int_L ye^{-x}ds=$__________.

（13）设A是3阶矩阵，若线性方程组$Ax=(3,3,3)^T$的通解为$k_1(-1,2,-1)^T+k_2(0,-1,1)^T+(1,1,1)^T$，其中$k_1,k_2$是任意常数，则$A$的特征值为__________.

（14）设随机变量X_1,X_2,X_3相互独立，均服从$[0,1]$上的均匀分布，$X=\min\{\max\{X_1,X_2\},X_3\}$，则当$0\le x\le1$时，$X$的密度函数为$f_X(x)=$__________.

三、解答题:15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）**（本题满分10分）**设非负函数$f(x)$在$[a,b]$上满足$f''(x)\le0$，且$f(x)$在点$x=x_0\in[a,b]$处取得最大值.（Ⅰ）对任意的$x\in[a,b]$，证明$f(x_0)\le f(x)+f'(x)(x_0-x)$；（Ⅱ）对任意的$x\in[a,b]$，证明$f(x)\le\dfrac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

（16）（**本题满分 10 分**）在曲面 $x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2=1\,(x>0,y>0,z>0)$ 上求一点，使过该点的切平面在三个坐标轴上的截距平方和最小.

（17）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)=|x|+x,\ -1\le x\le 1$，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

（18）（**本题满分 10 分**）设函数 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega_t}(2-3z^2)dv$，其中 $\Omega_t:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\le t^2$，$t>0$，求曲线 $u=F(t)$ 的凹凸区间与拐点.

（19）（**本题满分 10 分**）设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'''-3y''+3y'-y=0$ 的解，且曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,0)$ 的曲率圆为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，求 $y(x)$.

（20）（**本题满分 11 分**）已知齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix}$，$Bx=0$ 的基础解系为 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，求 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 的非零公共解.

（21）（**本题满分 11 分**）已知三阶矩阵 A 满足 $|A-E|=|A-2E|=|A+E|=a$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求 $|A+3E|$；　　（Ⅱ）当 $a=2$ 时，求 $|A+3E|$.

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 $X_i\sim U[0,1]$，$i=1,2,3,4$，$N\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0.1&0.2&0.3&0.4\end{pmatrix}$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_4,N$ 相互独立，$Y=X_1+\cdots+X_N$，求 EY.

（23）（**本题满分 11 分**）某电子元件的寿命服从参数为 λ 的指数分布（单位：小时），λ 未知，从中任取 n 只进行检测，结果有 $m\,(m<n)$ 只电子元件寿命不超过 k 小时.

（Ⅰ）求 λ 的矩估计值 $\hat{\lambda}_M$；　　（Ⅱ）求 λ 的极大似然估计值 $\hat{\lambda}_L$.

绝密 * 启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（五）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设 $f(x)$ 为正值连续偶函数，$F(x)=\int_0^x t^2 f(x-t)dt$，则下列结论中正确的个数为（　　）．

①$F(x)$ 为单增的奇函数；　　②点 $(0,0)$ 为 $y=F(x)$ 唯一的拐点；

③$F'(x)$ 为非负的凹函数；　　④$F'(x)$ 只在点 $x=0$ 处取得最小值．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（2）设函数 $f(x)=\begin{cases}2+x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & 2<x<4,\end{cases}$　$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{4}x(-\infty<x<+\infty)$，其中

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi}{4}xdx \quad (n=1,2,\cdots),$$

则 $S(2)+S(-9)=$（　　）．

（A）-1　　（B）1　　（C）5　　（D）7

（3）设 $I_1=\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos x^2 dx, I_2=\int_0^{\pi}\sqrt{x}\cos xdx$，则以下结论正确的是（　　）．

（A）$I_1>0,I_2>0$　　（B）$I_1>0,I_2<0$　　（C）$I_1<0,I_2>0$　　D）$I_1<0,I_2<0$

（4）设 $I_1=\int_0^{+\infty}\max\{\frac{1}{\sqrt{x}},\frac{1}{x^2}\}dx,\ I_2=\int_0^{+\infty}\min\{\frac{1}{\sqrt{x}},\frac{1}{x^2}\}dx$，则（　　）．

（A）I_1 和 I_2 都收敛　　（B）I_1 和 I_2 都发散　　（C）I_1 收敛，I_2 发散　　（D）I_1 发散，I_2 收敛

（5）设 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=2A+3B$，则必有（　　）．

（A）$A-3E$ 可逆，$B-2E$ 不可逆　　（B）$A-3E$ 不可逆，$B-2E$ 可逆

（C）$A-3E$，$B-2E$ 都不可逆　　（D）$A-3E$，$B-2E$ 都可逆

（6）设 A 为三阶反对称非零矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则有（　　）．

（A）$r(A^*)=3$　　（B）$r(A^*)=2$　　（C）$r(A^*)=1$　　（D）$r(A^*)=0$

（7）设随机变量 X 的方差存在，则下列结论中，正确的个数为（　　）．

①$|EX|\le E|X|\le\sqrt{E(X^2)}$；　　②$|EX|\le\sqrt{E(X^2)}\le E|X|$；

③$E|X-EX|\le\sqrt{DX}\le\sqrt{E(X^2)}$；　　④$\sqrt{DX}\le\sqrt{E(X^2)}\le E|X-EX|$．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（8）某食品厂所生产罐头的重量服从正态分布，在正常情况下其方差$\sigma^2 \le \sigma_0^2$．为判断生产线是否工作正常，现对产品进行抽样检验，取显著性水平$\alpha = 0.05$，则下列描述正确的是（　　）.

（A）如果生产线实际工作正常，则检验结果认为生产线工作正常的概率为0.95

（B）如果生产线实际工作不正常，则检验结果认为生产线工作不正常的概率为0.95

（C）如果检验结果认为生产线工作正常，则生产线实际工作正常的概率为0.95

（D）如果检验结果认为生产线工作不正常，则生产线实际工作不正常的概率为0.95

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数$z = z(x, y)$由方程$xz = \varphi(yz)$确定，$x - y\varphi' \ne 0$，则$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} =$___________.

（10）设函数$p(x) = \max\{x, 1\}$，则微分方程$y' + p(x)y = x$的通解为___________.

（11）已知函数$f(x, y)$的梯度为$\{2x + \lambda xy, x^2 - 2y\}$，其中$\lambda$为常数，则$f(x, y)$在点$(2,1)$处的最大方向导数为___________.

（12）设函数$f(x, y)$连续，则将极坐标下二次积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{2\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

化为直角坐标系下的二次积分为___________.

（13）设三阶方阵A与B相似，$A^2 - 3A + 2E = O$，且$|B| = 2$，则$\begin{vmatrix} (A+E)^{-1} & O \\ O & 2B^* \end{vmatrix} =$________.

（14）设随机变量$X \sim P(100)$，则用中心极限定理计算$P\{80 < X < 110\} =$___________.

（$\Phi(1) = 0.841, \Phi(2) = 0.977$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数.）

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分 10 分**）设数列$\{a_n\}$满足$a_0 = 1, a_{n+1} = \dfrac{1-2n}{1+n} a_n \ (n = 0,1,2,\cdots)$．已知当$|x| < \dfrac{1}{2}$时，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数为$y(x)$．（Ⅰ）证明$y(x)$满足$(1+2x)y'' + y' = 0$；（Ⅱ）求$y(x)$的表达式.

（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，若 $u(0,y)=\ln(1+y), u(x,0)=\sin x$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$，求 $u(x,y)$.

（17）（**本题满分 10 分**）数列 $\{x_n\}$ 定义如下：$x_1=1$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\sqrt{x_n^2+\dfrac{1}{n^2}})$，$n=1,2,\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

（18）（**本题满分 10 分**）设当 $0\le x<1$ 时，函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$. 当 $k\le x<k+1$ 时，$f(x)=a_k f(x-k)$，$k=1,2,\cdots$.（Ⅰ）求常数 $a_k\ (k=1,2,\cdots)$，使得 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导；（Ⅱ）求曲线 $y=f(x)\ (x\ge 0)$ 与 x 轴所围平面图形的面积 A.

（19）（**本题满分 10 分**）计算曲线积分 $I=\int_L \dfrac{(y^2+1)dx+\sin y dy}{2x^2+y^2}$，其中 L 是从点 $A(-2,0)$ 到点 $B(2,0)$ 的上半圆 $x^2+y^2=4\ (y\ge 0)$.

（20）（**本题满分 11 分**）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，$X$ 是二阶方阵，E 是二阶单位阵，问方程 $AX-XA=E$ 是否有解？若有解，求满足方程 $AX-XA=E$ 的所有 X，若无解，说明理由.

（21）（**本题满分 11 分**）设 A 为三阶实对称阵，$r(A)=1$，$\lambda_1=9$ 是 A 的一个特征值，对应的一个特征向量为 $\xi_1=(1,-2,2)^T$.（Ⅰ）问 $\eta=(-1,2,0)^T$ 是否为线性方程组 $Ax=0$ 的解？说明理由；（Ⅱ）求线性方程组 $Ax=0$ 的通解；（Ⅲ）求矩阵 A.

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=ke^{-\lambda|x|}$，$-\infty<x<+\infty, \lambda>0$. 令 $Y=|X|$，

（Ⅰ）求常数 k；（Ⅱ）求 $D(XY)$；（Ⅲ）求 (X,Y) 的分布函数.

（23）（**本题满分 11 分**）设 $(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$ 是来自总体 $X\sim B(1,0.2)$ 的简单随机样本.

（Ⅰ） 问 $\sum_{i=1}^{10}X_i$ 和 $\sum_{i=1}^{10}X_i^2$ 分别服从何分布？

（Ⅱ） 计算 $P\{\overline{X}\le\dfrac{1}{10}\}$ 和 $P\{S^2=\dfrac{5}{18}\}$，其中 $\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差.