2023 年考研数学考前冲刺 3 套卷数学(一)第一卷

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^x+\dfrac{ax^2+bx}{1-\sin x}\right)^{\cot^2 x}=1$,则

A. $a=\dfrac{1}{2},b=1$.　　B. $a=\dfrac{1}{2},b=-1$.

C. $a=-\dfrac{1}{2},b=-1$.　　D. $a=-\dfrac{1}{2},b=1$.

2. 关于函数 $f(x,y)=\begin{cases}|x-y|^{\alpha}\dfrac{\sin xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 给出以下结论:

① 当 $\alpha>0$ 时,$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续,且偏导数存在;

② 当 $\alpha\geqslant 1$ 时,$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微;

③ 当 $\alpha>2$ 时,$f'_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续;

④ 当 $\alpha>0$ 时,$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿任意方向的方向导数均存在.

其中正确的个数为

A. 4.　　B. 3.　　C. 2.　　D. 1.

3. 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数,且 $f(x)>0,f''(x)f(x)-[f'(x)]^2>0$,则

A. $f'(-1)f(1)>f'(1)f(-1)$.　　B. $f'(1)f(1)<f'(-1)f(-1)$.

C. $f^2(0)>f(-1)f(1)$.　　D. $f^2(0)<f(-1)f(1)$.

4. 若反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{x^{\alpha}\left(\tan\frac{\pi}{2}x\right)^{\beta}}\mathrm{d}x$ 收敛,则

A. $-2<\beta<0$ 且 $\alpha+\beta\geqslant 1$.　　B. $0<\beta<2$ 且 $\alpha+\beta<1$.

C. $\beta<-2$ 且 $\alpha+\beta\geqslant 1$.　　D. $\beta>-2$ 且 $\alpha+\beta<1$.

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$,则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为

A. 椭球面.　　B. 单叶双曲面.　　C. 双叶双曲面.　　D. 柱面.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$,且 $|\boldsymbol{A}|=-2$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}+2a_{11}&a_{22}+2a_{12}&a_{23}+2a_{13}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{AB}^*=$

A. $\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&-4\\2&0&0\end{pmatrix}$.　　B. $\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&-2&4\\-2&0&0\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&4\\2&0&0\end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&-2&-4\\-2&0&0\end{pmatrix}$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,若 $r(\boldsymbol{A})=n$,给出以下四个结论:

①$\boldsymbol{A}$ 可以经过若干次初等行变换化为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$;

② 存在 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$;

③$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 与 n 阶单位矩阵等价;

④$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 与 n 阶单位矩阵合同.

其中正确的个数为

A. 4.　　B. 3.　　C. 2.　　D. 1.

8. 甲乙二人分别向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率均为 $\dfrac{1}{2}$,甲射击 4 次,乙射击 3 次,则甲命中次数大于乙命中次数的概率为

A. 1.　　B. $\dfrac{1}{2}$.　　C. $\dfrac{1}{3}$.　　D. $\dfrac{1}{4}$.

9. 在单位圆周上随机取一点,该点坐标记为 (X,Y),则 $D(X)=$

A. $\dfrac{1}{2}$.　　B. $\dfrac{1}{3}$.　　C. $\dfrac{1}{4}$.　　D. $\dfrac{1}{5}$.

10. 已知离散型随机变量 X 与连续型随机变量 Y 相互独立,则

A. $X+Y$ 为离散型随机变量.　　B. XY 为离散型随机变量.

C. $X+Y$ 为连续型随机变量.　　D. XY 为连续型随机变量.

二、填空题:11 ～ 16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

11. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则 $f^{(4)}(0)=$________.

12. 已知微分方程 $y'+y=\sin x$ 的解均为方程 $y''+ay'+y=f(x)$ 的解,其中 a 为常数,则方程 $y''+ay'+y=f(x)$ 满足 $y(0)=0,y'(0)=1$ 的特解为________.

13. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$________.

14. 已知曲线 $L:x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$,则 $\displaystyle\oint_L\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}s=$________.

15. 已知 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,且 $|\boldsymbol{A}|=0$,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$________.

16. 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(-1,2;2,2;\rho)$,若 $X+Y$ 与 $X-2Y$ 相互独立,则 $\rho=$________.

三、解答题:17 ～ 22 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

求不定积分 $\displaystyle\int\left[\arcsin\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2\mathrm{d}x$.

18. (本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数,$z=f(e^{x^2-y^2})$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=16z(x^2+y^2)$,若 $f(1)=0$,$f'(1)=2$.

(Ⅰ) 求 $f(u)$ 的表达式;

(Ⅱ) 记 $g(x,y)=3xy-x^3-y^3$,求 $f[g(x,y)]$的极值.

19. (本题满分 12 分)

设函数 $f_n(x)=\dfrac{1}{n+1}x-\arctan x$,其中 n 为正整数. 证明:

(Ⅰ) 方程 $f_n(x)=0$ 存在唯一正实根 x_n;

(Ⅱ) 当 $p>2$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x_n^p}$ 收敛.

20. (本题满分 12 分)

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是有界闭区域,$I(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}-1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 取得最小值的积分域记为 Ω_1.

(Ⅰ) 求 $I(\Omega_1)$ 的值;

(Ⅱ) 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+2y^2+3z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中 Σ 是 $\Omega_1(z\geqslant 0)$ 的上侧边界.

21. (本题满分 12 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_4$ 有无穷多个解.

(Ⅰ) 求 k 的值;

(Ⅱ) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_4$ 的通解.

22. (本题满分 12 分)

已知编号为 1 的盒子中装有 2 个白球和 1 个红球,编号为 2 的盒子中装有 3 个白球,现随机各取一球,交换放入另一个盒子中,交换两次,记 X 为红球所在盒子的编号,Y 服从参数为 1 的指数分布,随机变量 X 与 Y 相互独立,令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(Ⅰ) 求 Z 的概率密度;

(Ⅱ) Y 与 Z 是否相互独立?

2023 年考研数学考前冲刺 3 套卷数学(一)第二卷

一、选择题:1 ~ 10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 设函数 $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$,则

   A. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 4 个拐点.

   B. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

   C. 函数 $f(x)$ 有 1 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

   D. 函数 $f(x)$ 有 1 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 4 个拐点.

2. 已知平面区域 $D_1=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$,$D_2=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$,

   $D_3=\left\{(x,y)\mid \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant y\leqslant \pi\right\}$,记 $I_1=\iint\limits_{D_1} e^{-x^2}\sin y\,dx\,dy$,$I_2=\iint\limits_{D_2} e^{-x^2}\sin y\,dx\,dy$,

   $I_3=\iint\limits_{D_3} e^{-x^2}\sin y\,dx\,dy$,则

   A. $I_3<I_1<I_2$.　　B. $I_3<I_2<I_1$.

   C. $I_1<I_3<I_2$.　　D. $I_1<I_2<I_3$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ -x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 的正弦级数与余弦级数的和函数分别为 $S_1(x)$ 与 $S_2(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$,则 $S_1(6)+S_2(-3)=$

   A. -2.　　B. 0.　　C. 1.　　D. 2.

4. 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=2x\end{cases}$ 在点 $(1,1,\sqrt{2})$ 处的法平面方程为

   A. $\sqrt{2}x-y=0$.　　B. $\sqrt{2}x-z=0$.

   C. $\sqrt{2}x-y=\sqrt{2}-1$.　　D. $\sqrt{2}x-z=\sqrt{2}-1$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,2)^{\mathrm{T}}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解,其中 $\boldsymbol{b}=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$,则

   A. 当 $a=1$ 时,有 $r(\boldsymbol{A})=1$.　　B. 当 $a=1$ 时,有 $r(\boldsymbol{A})=2$.

   C. 当 $a\neq 1$ 时,有 $r(\boldsymbol{A})=1$.　　D. 当 $a\neq 1$ 时,有 $r(\boldsymbol{A})=2$.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的两组基,则 $\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为

   A. $\begin{pmatrix}5&-4&-6\\1&0&1\\10&8&11\end{pmatrix}$.　　B. $\begin{pmatrix}5&1&-10\\-4&0&8\\-6&1&11\end{pmatrix}$.

   C. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{15}{4}&\frac{7}{4}&\frac{9}{4}\\-2&0&-1\end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{15}{4}&-2\\\frac{3}{2}&\frac{7}{4}&0\\\frac{1}{2}&\frac{9}{4}&-1\end{pmatrix}$.

二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$ 的正惯性指数为

   A. 1.　　B. 2.　　C. $n-1$.　　D. n.

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$,$x\in(-\infty,+\infty)$,则 $\max\{X,1\}$ 的分布函数

   A. 是连续函数.　　B. 是阶梯函数.

   C. 只有一个间断点.　　D. 有两个间断点.

9. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立且均服从参数为 λ 的泊松分布,则随机变量序列中不满足切比雪夫大数定律的为

   A. $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$.　　B. $X_1+1,X_2+2,\cdots,X_n+n,\cdots$.

   C. $X_1,\frac{1}{2}X_2,\cdots,\frac{1}{n}X_n,\cdots$.　　D. $X_1,2X_2,\cdots,nX_n,\cdots$.

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是来自 $[0,3]$ 上均匀分布总体的简单随机样本,则 $\sum\limits_{i=1}^{4}X_i$ 与 $\sum\limits_{j=3}^{6}X_j$ 的相关系数为

   A. $\frac{1}{6}$.　　B. $\frac{1}{4}$.　　C. $\frac{1}{3}$.　　D. $\frac{1}{2}$.

二、填空题:11 ~ 16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

11. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}\end{cases}$ 确定,则曲线 $y=y(x)$ 的斜渐近线方程为________.

12. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sec\frac{1}{n}}{n+1}+\dfrac{\sec\frac{2}{n}}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{\sec\frac{n}{n}}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right]=$________.

13. 微分方程 $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的解为________.

14. 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 围成的锥体,若其体密度为 $\rho=1$,则 Ω 对 z 轴的转动惯量 $I_z=$________.

15. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\4&3&2\\-2&0&2\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^5-3\boldsymbol{A}^4=$________.

16. 已知随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布,则 $E[1+(-1)^X]=$________.

三、解答题：17 ～ 22 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

已知 $f(x)$ 为连续函数，若积分 $\int_0^1[f(x)-xf(xt)]\mathrm{d}t$ 结果与 x 无关，且 $f(0)=1$，求 $\int\frac{xf(x)}{\sqrt{f(x)-2}}\mathrm{d}x$.

18.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上可导，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<1$ 且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{2}$. 证明：

(Ⅰ) 存在 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\xi$；

(Ⅱ) 存在与(Ⅰ)中 ξ 相异的点 $\eta\in(0,+\infty)$，使得 $f'(\eta)=1$.

19.（本题满分 12 分）

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内收敛，其和函数 $y(x)$ 满足 $xy''+(1+x)y'+2y=0$，$y(0)=-1$，$y'(0)=2$.

(Ⅰ) 证明：$a_{n+1}=-\frac{(n+2)}{(n+1)^2}a_n$，$n=0,1,\cdots$；

(Ⅱ) 求 $y(x)$ 的表达式.

20.（本题满分 12 分）

设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1(z\geqslant0)$ 的上侧，连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=2(x-y)^2+\iint\limits_{\Sigma}x(z^2+e^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+e^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(x,y)-2e^z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y)\mathrm{d}S$.

21.（本题满分 12 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&-a_3\end{pmatrix}$.

(Ⅰ) 证明 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\lambda_0,\lambda_0^2,\lambda_0^3)^{\mathrm{T}}$ 是特征值 λ_0 对应的特征向量；

(Ⅱ) 若 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的互不相同的特征值，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

22.（本题满分 12 分）

设二维随机变量(X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid|x+y|\leqslant1,|x-y|\leqslant1\}$ 上服从均匀分布，求：

(Ⅰ)(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

(Ⅱ)$Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

(Ⅲ)$P\left\{|Y|\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,|X|\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

2023 年考研数学考前冲刺 3 套卷数学(一)第三卷

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 当 $x \to 0$ 时,$(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2\sqrt{1-2x}$ 是 $\cos x - e^{\frac{x^2}{2}}$ 的

A. 低阶无穷小. B. 等价无穷小.

C. 高阶无穷小. D. 同阶但非等价无穷小.

2. 设 $x > a > 0$,$f(x) = \int_a^x \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \mathrm{d}t$,$g(x) = \int_a^x \left(1+\frac{1}{t+1}\right)^{t+1}\mathrm{d}t$,$h(x) = \int_{a+\frac{1}{2}}^{x+1}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \mathrm{d}t$,则

A. $f(x) < g(x) < h(x)$. B. $f(x) < h(x) < g(x)$.

C. $h(x) < g(x) < f(x)$. D. $g(x) < f(x) < h(x)$.

3. 设函数 $f(x)$ 是微分方程 $y' = x + y$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的解,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n}\right]x^n$ 的收敛域为

A. $(-1,1)$. B. $[-1,1)$. C. $(-1,1]$. D. $[-1,1]$.

4. 已知曲线 C:$\begin{cases} x^2 + y^2 + az^2 = 0, \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$ 距离 xOy 坐标面最近点的纵坐标为 $z = -1$,则 $a =$

A. -1. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶矩阵,记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩,$(X\quad Y)$ 表示分块矩阵,则下列结论错误的是

A. $r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{A})$. B. $r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = r(\boldsymbol{A})$.

C. $r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{A}^2) = r(\boldsymbol{A})$. D. $r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{ABA}) = r(\boldsymbol{A})$.

6. 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

A. $a - b = 0$. B. $ab = 0$. C. $a + b = 0$. D. a, b 为任意常数.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 均为 n 维列向量,满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 2$,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 的逆矩阵为

A. $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$. B. $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$. C. $2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$. D. $2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的几何分布,则 $\min\{X, Y\}$ 也服从参数为 p 的几何分布,则 $p =$

A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

9. 某商场周年庆砸金蛋抽奖活动中,设有 500 元金蛋 1 个,200 元金蛋 2 个,100 元金蛋 7 个,一位顾客随机砸 3 个金蛋,所得现金总额为 X 元,则 $E(X) =$

A. 100. B. 240. C. 480. D. 600.

10. 设 X, Y 是随机变量,且 $X \sim N(0, \sigma^2)$,$Y \sim F(1,1)$,$p_1 = P\{X < 1\}$,$p_2 = P\{X > -1\}$,$p_3 = P\{Y < 1\}$,$p_4 = P\{Y > 1\}$,则

A. $p_1 < p_2, p_3 < p_4$. B. $p_1 > p_2, p_3 > p_4$.

C. $p_1 = p_2, p_3 < p_4$. D. $p_1 = p_2, p_3 = p_4$.

二、填空题:11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

11. 设 $f(x)$ 是周期为 3 的可导偶函数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+\tan x) - 2f(1-\tan x)}{x} = 1$,则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处的法线方程为________.

12. 已知曲线 L_1, L_2 的极坐标方程分别为 $r = 1 + \cos\theta$ 与 $r = 3\cos\theta(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$,则 L_1, L_2 围成的公共部分区域的面积为________.

13. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xy + \int_z^y e^{-t^2}\mathrm{d}t = 1$ 确定,则 $\mathbf{grad}z(1,1) =$ ________.

14. 已知 L 是 $y = a\sin x(a > 0)$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi, 0)$ 的曲线,当曲线积分 $\int_L (2x^2 + y)\mathrm{d}x + (xy^2 + e^{y^2})\mathrm{d}y$ 取最大值时,则 $a =$ ________.

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2×3 矩阵,M_j 为 $\boldsymbol{A}$ 中去掉第 j 列后所得到的 2 阶子式 $(j = 1,2,3)$,若 $r(\boldsymbol{A}) = 2$,则齐次方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解为________.

16. 设随机事件 A, B, C 相互独立,且 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$,$P(C) = \frac{2}{5}$,则 $P(C - A \mid A \cup BC) =$ ________.

三、解答题:17～22 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本题满分 10 分)

设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \int_0^1 g(x,y)f(y)\mathrm{d}y + 1(0 \leqslant x \leqslant 1)$,其中 $g(x,y) = \begin{cases} x(1-y), x \leqslant y, \\ y(1-x), y < x, \end{cases}$ 求 $f(x)$.

18.(本题满分 12 分)

求函数 $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ 的极值.

19.（本题满分 12 分）

设数列 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 满足 $u_n>0$，$v_n>0$，且 $v_n\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-v_{n+1}\geqslant a>0(n=1,2,\cdots)$. 证明：

（Ⅰ）$\lim\limits_{n\to\infty}u_nv_n$ 存在；

（Ⅱ）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

20.（本题满分 12 分）

设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant 0)$ 的上侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}}$.

21.（本题满分 12 分）

设 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$，$n\geqslant 2$.

（Ⅰ）当 $n=3$ 时，求可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Pz}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为规范形；

（Ⅱ）证明 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 正定；

（Ⅲ）求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在条件 $x_n=1$ 下的最小值.

22.（本题满分 12 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从区间 $[-2,2]$ 上的均匀分布，Y 的概率密度为 $f(y)=\dfrac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{|y|}{\theta}}$，$-\infty<y<+\infty$，其中参数 $\theta(\theta>0)$ 未知. 令 $Z=\begin{cases}Y, & |X|\leqslant 1,\\ -Y, & |X|>1.\end{cases}$

（Ⅰ）求随机变量 Z 的概率密度；

（Ⅱ）若 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量.