

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研
数学（一）模拟（一）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + e^{(n+1)x}}{1 + e^{nx}}$ ，则点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的 ()。

(A) 连续点 (B) 跳跃间断点 (C) 可去间断点 (D) 无穷间断点

(2) 设 $f(x)$ 是连续且单调增加的奇函数， $F(x) = \int_0^x (2u-x)f(x-u)du$ ，则 $F(x)$ 是 ()。

(A) 单调增加的奇函数 (B) 单调减少的奇函数
(C) 单调增加的偶函数 (D) 单调减少的偶函数

(3) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 x_0 处条件收敛，则 ()。

(A) x_0 必在 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间的内部 (B) x_0 必在 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域的外部
(C) x_0 必是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域的端点 (D) 以上三种情形均有可能

(4) 将极坐标系下的二次积分 $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(1+r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 转化成直角坐标系下的二次积分为 ()。

(A) $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 dx \int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$
(B) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y) dy$
(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx$
(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_{1-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx$

(5) 设 A, B 均为三阶非零矩阵，满足 $AB=O$ ，其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2a & 1-a & 2a \\ a & -a & a^2-2 \end{pmatrix}$ ，则 ()。

(A) $a=2$ 时，必有 $r(A)=1$ (B) $a \neq 2$ 时，必有 $r(A)=2$
(C) $a=-1$ 时，必有 $r(A)=1$ (D) $a \neq -1$ 时，必有 $r(A)=2$

(6) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的秩为 2，则该二次型的正负惯性指数分别为 ()。

(A) 2, 0 (B) 0, 2 (C) 1, 1 (D) 依赖于 a 的取值

(7) 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(A) < 1$, 下列说法正确的是 ().

- (A) 若 $P(A) = P(AB)$, 则 $A \subset B$ (B) 若 $P(A \cup B) = P(AB)$, 则 $A = B$
 (C) 若 $P(\overline{A} \overline{B}) = P(AB)$, 则 A, B 互为对立事件 (D) 若 $P(B|A) = P(B|\overline{A})$, 则 A, B 相互独立

(8) 设随机变量 $X \leq Y$, $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别为 X 和 Y 的分布函数, $F(x, y)$ 为 (X, Y) 的分布函数, 则对任意的 t , 有 ().

- (A) $F_X(t) \leq F_Y(t)$, $F(t, t) = F_X(t)$ (B) $F_Y(t) \leq F_X(t)$, $F(t, t) = F_X(t)$
 (C) $F_X(t) \leq F_Y(t)$, $F(t, t) = F_Y(t)$ (D) $F_Y(t) \leq F_X(t)$, $F(t, t) = F_Y(t)$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $f(x)$ 为可导的偶函数, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\cos x)}{x^2} = 2$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的法线方程为_____.

(10) $\int \frac{\cos x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx =$ _____.

(11) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x - az = \varphi(y - bz)$ 确定, 其中 φ 可导, a, b 为常数, 且 $a - b\varphi' \neq 0$, 则 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

(12) 设正值函数 φ 连续, 若 $a > 0, b > 0, c > 0$, 则曲面 $(z-a)\varphi(x) + (z-b)\varphi(y) = 0$ 与柱面 $x^2 + y^2 = c^2$ 及平面 $z = 0$ 所围成的空间立体的体积 $V =$ _____.

(13) 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 对任意的正整数 n , 矩阵 $(E + \alpha\beta^T)^n =$ _____.

(14) 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 为来自总体 $X \sim P(\lambda)$ 的一个简单随机样本, 若 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a^{X_i}$ 为 e^λ 的无偏估计, 则常数 $a =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 设 $0 < x < 1$, 证明 (I) $\ln(1+x) < \frac{x(2x+1)}{(x+1)^2}$; (II) $(1+\frac{1}{x})^x (1+x)^{\frac{1}{x}} < 4$.

(16) (本题满分 10 分) 将 yOz 坐标面上的曲线段 $y = f(z)$ ($f(z) > 0, 0 \leq z \leq 12$) 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面与 xOy 坐标面围成一个无盖容器. 已知它的底面积为 $16\pi(\text{m}^2)$, 如果以 $3(\text{m}^3/\text{s})$ 的速度把水注入容器内, 在高度为 $z(\text{m})$ 的位置, 水的上表面积以 $\frac{3}{z+1}(\text{m}^2/\text{s})$ 的速度增大. (I) 试求曲线 $y = f(z)$ 的方程; (II) 若将容器内水装满, 问需要多少时间?

(17) (本题满分 10 分) 求过第一卦限中点 (a, b, c) 的平面, 使之与三个坐标平面所围成的四面体的体积最小.

(18) (本题满分 10 分) 设函数 $y = y(x)$ 满足 $\Delta y = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \Delta x + o(\Delta x)$, 且 $y(1) = 1$, 计算 $\int_1^2 y(x) dx$.

(19) (本题满分 10 分) 设曲面 Σ 是锥面 $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 所围立体表面取外侧, $f(u)$ 为连续可微的奇函数, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x^3 dydz + [y^3 + f(yz)] dzdx + [z^3 + f(yz)] dxdy.$$

(20) (本题满分 11 分) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为三个三维列向量, $A = \alpha_1 \alpha_1^T + \alpha_2 \alpha_2^T + \alpha_3 \alpha_3^T$. (I) 证明存在矩阵 B , 使得 $A = B^T B$; (II) 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关时, 证明 $r(A) = 3$; (III) 当 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ 时, 求 $Ax = 0$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分) 设 A 是二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵, $r(A) = 1$. 齐次线性方程组 $(2E - A)x = 0$ 的通解为 $x = k\alpha_1$, 其中 $\alpha_1 = (-1, 1, 1)^T$, k 为任意实数. (I) 求解齐次线性方程组 $Ax = 0$; (II) 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$.

(22) (本题满分 11 分) 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(0, 0; 1, 4; \frac{1}{2})$. 已知 $\Phi(1) = 0.8413$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 求 $p = P\{Y < 2X < Y + 2 | 2X + Y = 1\}$.

(23) (本题满分 11 分) 设总体 X 的密度函数为 $f(x, \lambda) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}, -\infty < x < +\infty$, 其中未知参数 $\lambda > 0$. (X_1, X_2, \dots, X_n) 是总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本. (I) 求 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_M$; (II) 求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_L$; (III) 求 $E(\hat{\lambda}_L)$.

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研
数学（一）模拟（二）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ ， $f''(0) \neq 0$ ，若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - ax - b}{x^2} = c \neq 0$ ，则 ()。

(A) $a = 0, b = 1, c = \frac{1}{2}f''(0)$

(B) $a = 1, b = 1, c = \frac{1}{2}f''(0)$

(C) $a = 1, b = 0, c = f''(0)$

(D) $a = 1, b = 1, c = f''(0)$

(2) 设函数 $f(x)$ 连续，则下列结论不成立的是 ()。

(A) $\int_0^\pi f(\sin x)dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ (B) $\int_0^\pi f(\sin^2 x)dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)dx$

(C) $\int_0^\pi f(\cos x)dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ (D) $\int_0^\pi f(\cos^2 x)dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)dx$

(3) 设 $f(u)$ 为可微函数， $f(0) = 0, f'(0) = 2$ ，记 D_t 为圆心在原点，半径为 t 的圆域，若 $t \rightarrow 0^+$ 时， $\iint_{D_t} f(x^2 + y^2)dxdy$ 与 at^k 是等价无穷小，则 ()。

(A) $a = \frac{\pi}{2}, k = 2$

(B) $a = \frac{\pi}{2}, k = 4$

(C) $a = \pi, k = 2$

(D) $a = \pi, k = 4$

(4) 设平面点集 $D = \{(x, y) | 0 < y < x^2, -\infty < x < +\infty\}$ ，函数 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$ 则在点 $(0, 0)$

处 ()。

(A) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 存在

(B) $f(x, y)$ 连续

(C) $f(x, y)$ 偏导数存在

(D) $f(x, y)$ 可微

(5) 设 A 为 $n \times m$ 矩阵， B 为 $m \times n$ 矩阵，且 AB 可逆，则必有 ()。

(A) A 的行向量组线性无关， B 的行向量组也线性无关

(B) A 的列向量组线性无关， B 的列向量组也线性无关

(C) A 的行向量组线性无关， B 的列向量组也线性无关

(D) A 的列向量组线性无关， B 的行向量组也线性无关

(6) 设 A 是三阶矩阵， A 的秩 $r(A) = 1$ ， A 有特征值 $\lambda = 0$ ，则 $\lambda = 0$ ()。

(A) 必是 A 的二重特征值

(B) 至少是 A 的二重特征值

(C) 最多是 A 的二重特征值

(D) 可能是 A 的一、二或三重特征值

(7) 设随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ， $Y \sim U[-1, 1]$ ，且 X 和 Y 相互独立，则 $P\{Y \leq 0 | X + Y \leq 2\} =$ ()。

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{3}{4}$

(8) 设随机变量 $X \sim U[-1, 1]$, $Y = \begin{cases} 1-4X, & X < 0, \\ 1, & X \geq 0, \end{cases}$ 则下列结论正确的是 ().

(A) Y 为连续型随机变量 (B) Y 为离散型随机变量 (C) $EY = 1$ (D) $EY = 2$.

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲面 $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$ 与平面 $2x - y + z = 1$ 垂直的法线方程为_____.

(10) 设二阶常系数非齐次线性方程 $y'' + py' + qy = ae^x$ (p, q, a 是常数) 有两个特解 $y_1 = xe^x$, $y_2 = e^{2x} + xe^x$, 则该方程的通解为_____.

(11) 方程 $x^5 + 2x + \cos x = a$ 的实根个数为_____.

(12) 设 L 为从点 $A(1, 0)$ 到 $B(0, 1)$ 再到 $C(-1, 0)$ 的折线, 则积分 $\int_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|} =$ _____.

(13) 已知 A 为三阶矩阵, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 若 $(A-E)^{-1} = B-E$, 则 $|A| =$ _____.

(14) 设随机事件 A, B 相互独立, 且 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.2$, 令 $X = \begin{cases} 1, & AB \text{ 发生,} \\ 0, & AB \text{ 不发生,} \end{cases}$

$Y = \begin{cases} 1, & A \cup B \text{ 发生,} \\ 0, & A \cup B \text{ 不发生,} \end{cases}$ 则 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY} =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 设偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, $f(0) = 0$, 求 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t dy \int_y^t f(x-y) dx}{(\sqrt[3]{\cos t} - 1) \cdot \sin t}$.

(16) (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = 0, f(1) = 1$. (I) 证明存在 $a \in (0, 1)$ 使得 $f(a) = \frac{1}{3}$; (II) 证明存在不同的 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, 1)$, 有 $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} + \frac{1}{f'(\xi_3)} = 3$.

(17) (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 连续. (I) 证明: 对于任意的实数 a, b , 均有

$$\int_0^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(\sqrt{a^2 + b^2} \sin x) dx;$$

(II) 计算 $I_n = \int_0^{2\pi} (3 \cos x + 4 \sin x)^n dx$, 其中 n 为正整数.

(18) (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且满足 $f(0)=1, f'(0)=0$. 如果积分

$$\int_L y^2 f'(x) dx + 2y(f'(x) - x) dy$$

与路径无关, 求 $f(x)$, 并计算积分 $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} y^2 f'(x) dx + 2y(f'(x) - x) dy$.

(19) (本题满分 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(20) (本题满分 11 分) 已知非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$
 有两个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=3$; (II) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$, 证明 α_4 必

可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示且表示法唯一, 并求 a, b 的值.

(21) (本题满分 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T A x$ 的正惯性指数为 $p=1$, 二次型的矩阵 A 满足 $A^2 - A = 6E$. (I) 求 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形, 并写出二次型的规范形; (II) 求行列式 $\left| \frac{1}{6} A^* + 2A^{-1} \right|$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵; (III) 记 $B = A^2 - kA + 6E$, 问 k 满足何条件时, 二次型 $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T B x$ 正定?

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = ae^{-x^2}, -\infty < x < +\infty$. (I) 求常数 a ; (II) 求 $Y = \max\{X, X^2\}$ 的概率密度函数.

(23) (本题满分 11 分) 设 (X_1, X_2, X_3, X_4) 是来自总体 $X \sim N(0, 1)$ 的简单随机样本, 记 $Y_1 = X_1 + X_2, Y_2 = X_3 - X_4$. (I) 问 $\frac{Y_1^2}{Y_2^2}$ 和 $\frac{Y_1^2 + Y_2^2}{2}$ 分别服从何分布? (II) 求 $P\{Y_1^2 + Y_2^2 \leq 8 \ln 2\}$.

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

超越考研
数学（一）模拟（三）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 曲线 $y = x^2 \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \arctan(x^2)$ ().

- (A) 有一条渐近线 (B) 有两条渐近线 (C) 有三条渐近线 (D) 没有渐近线

(2) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(x) > 0$. $F(x) = \int_0^{x^2} t f(x^2 - t) dt$, 则 ().

- (A) $F(x)$ 在点 $x = 0$ 处取最小值 (B) $F(x)$ 在点 $x = 0$ 处取最大值
(C) $F'(x)$ 在点 $x = 0$ 处取最小值 (D) $F'(x)$ 在点 $x = 0$ 处取最大值

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\cos \pi x} = -1$ ，而 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ ，其

中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ，则函数值 $S(\frac{3}{2}) = ()$.

- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) $\frac{3}{2}$

(4) 设 D 是由直线 $y = x$, $x = \frac{1}{2}$ 及 x 轴所围成的区域，则二重积分

$$I_1 = \iint_D \sin(x+y)^2 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D \sin(x^2 + y^2) d\sigma, \quad I_3 = \iint_D \sin(4x^2) d\sigma$$

的大小关系为 ().

- (A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_3 < I_2 < I_1$ (C) $I_2 < I_1 < I_3$ (D) $I_2 < I_3 < I_1$

(5) 设 A 为 n 阶方阵 ($n > 2$), A^* 为 A 的伴随矩阵，则下列命题正确的是 ().

- (A) 若 $Ax = 0$ 有 n 个线性无关的解，则 $A^*x = 0$ 仅有零解
(B) 若 $Ax = 0$ 仅有 $n-1$ 个线性无关的解，则 $A^*x = 0$ 仅有一个线性无关的解
(C) 若 $Ax = 0$ 仅有 1 个线性无关的解，则 $A^*x = 0$ 有 $n-1$ 个线性无关的解
(D) 若 $Ax = 0$ 仅有零解，则 $A^*x = 0$ 有 n 个线性无关的解

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 ().

- (A) $a = 0, b = 2, c = 2$ (B) $a = 0, b = 2, c$ 为任意常数
(C) $a = 0, b = 0, c = 0$ (D) $a = 2, b = 2, c$ 为任意常数

(7) 设有随机变量 X 和凹函数 $g(x)$, 若 $g(x)$ 可导, EX 和 $Eg(X)$ 均存在, 则 ().

- (A) $Eg(X) = g(EX)$ (B) $Eg(X) \geq g(EX)$
 (C) $Eg(X) \leq g(EX)$ (D) $Eg(X)$ 和 $g(EX)$ 的大小关系不确定

(8) 设随机变量 $X \sim U(a, b)$, 由切比雪夫不等式得 $P\{|X| \leq 1\} \geq \frac{2}{3}$, 则 $(a, b) = ()$.

- (A) $(-2, 2)$ (B) $(0, 4)$ (C) $(-1, 1)$ (D) $(0, 2)$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 当 $x > -1$ 时, 函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+1)$, 若 $F(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^3 [f(x + \frac{1}{t}) - f(x)] \sin \frac{x}{t^2}$, 则 $\int_0^1 F(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 已知凹曲线 $y = y(x)$ 在任一点 $P(x, y)$ 处的曲率 $K = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}$, 且 $y(0) = 0, y'(0) = 0$, 则 $y(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 由曲线 $y = x^2 - 1$, 直线 $y = -1, x = 2$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设函数 $z = z(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y, z(x, 0) = x, z(0, y) = y^2$, 则 $z(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设向量 $\alpha_1 = (1, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1)^T$ 和 $\beta_1 = (2, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 3)^T$, ξ 在 α_1, α_2 下的坐标为 $(-1, 1)^T$, 则 ξ 在 β_1, β_2 下的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设事件 A, B 相互独立, A, C 互斥, $P(A) = 0.2, P(B) = 0.3, P(C) = 0.4$, 则 $P(AB|\overline{C}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) (I) 证明当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$;

(II) 设 $I(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} \cos \frac{\pi}{2} t dt$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{I(x)}{x}$.

(16) (本题满分 10 分) 设幂级数的系数满足 $a_0 = 5, na_n = a_{n-1} + 3(n-1), n = 1, 2, 3, \dots$. (I) 求幂级数的和函数 $S(x)$ 满足的一阶微分方程; (II) 求 $S(x)$.

(17) (本题满分 10 分) 设函数 $z = xf(x-y, \varphi(xy^2))$, f 具有二阶连续偏导数, φ 具有二阶导数, 且

$$\varphi(x) \text{ 满足 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x) - 1}{(x-1)^2} = 1, \text{ 求 } \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)}.$$

(18) (本题满分 10 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上均二阶可导, 且 $g''(x) \neq 0$, 证明: (I)

$$g(b) - g(a) \neq g'(a)(b-a); \text{ (II) 在 } (a, b) \text{ 内至少存在一点 } \xi, \text{ 使 } \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{g(b) - g(a) - g'(a)(b-a)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

(19) (本题满分 10 分) 求半圆柱面 $x^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$ 被平面 $z = 0$ 及椭圆抛物面 $z = 2x^2 + y^2$ 所截下的有限部分图形的面积.

(20) (本题满分 11 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$ 为 4 维列向量, 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$$\text{已知非齐次线性方程组 } Ax = \beta \text{ 的通解为 } x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}), \text{ 试求 } By = \beta \text{ 的}$$

通解.

(21) (本题满分 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$. (I) 若 $a > 2$, 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形; (II) 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的正负惯性指数均为 1, 求该二次型在正交变换下的标准形.

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量 (X, Y) 服从平面区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 上的均匀分布, (R, Θ) 为 (X, Y) 的极坐标表示, 其中 $0 \leq R \leq 1, 0 \leq \Theta \leq 2\pi$. (I) 求 $P\{R \leq \frac{1}{2}, \Theta \leq \frac{\pi}{2}\}$; (II) 求 (R, Θ) 的密度函数 $f_{R, \Theta}(r, \theta)$, 以及 R 和 Θ 的边缘密度函数 $f_R(r)$ 和 $f_\Theta(\theta)$, 并问 R 和 Θ 是否相互独立?

(23) (本题满分 11 分) 为估计某盒子中球的个数 N ($N > 10$), 先从盒子中任取 10 个球, 涂上颜色后放回盒子中并搅拌均匀, 然后再从盒子中有放回地任取 6 个球, 发现其中有 4 个的球涂有颜色, (I) 求 N 的矩估计值; (II) 求 N 的极大似然估计值; (III) 若继续从盒子中有放回地取球, 求第 4 次取球恰好第 2 次取到涂有颜色球的概率 p 的极大似然估计值.

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

超越考研
数学（一）模拟（四）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{e^x - 1}{x^2} + \frac{f(x)}{x}] = 3$ ，则 ()。

- (A) $f(0) = -1, f'(0) = \frac{5}{2}$ (B) $f(0) = -1, f'(0) = -\frac{5}{2}$
 (C) $f(0) = 1, f'(0) = \frac{5}{2}$ (D) $f(0) = 1, f'(0) = -\frac{5}{2}$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导，且对任意的 $x \in (a, b)$ ，有 $f''(x) + u(x)f'(x) + v(x)f(x) = 0$ ，

其中 $v(x) < 0$ ，则下列结论正确的是 ()。

- (A) $f(x)$ 在 (a, b) 内可取正的最大值，但不可取负的最小值
 (B) $f(x)$ 在 (a, b) 内可取负的最小值，但不可取正的最大值
 (C) $f(x)$ 在 (a, b) 内可取正的最大值，也可取正的最小值
 (D) $f(x)$ 在 (a, b) 内不能取正的最大值，也不能取负最小值

(3) 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处 ()。

- (A) 连续，但偏导数不存在 (B) 不连续，但偏导数存在
 (C) 连续且偏导数存在 (D) 不连续且偏导数不存在

(4) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ ，则

在点 $x = 0$ 处 ()。

- (A) $F(x)$ 不可导； $G(x)$ 不可导 (B) $F(x)$ 不可导； $G(x)$ 可导
 (C) $F(x)$ 可导； $G(x)$ 不可导 (D) $F(x)$ 可导； $G(x)$ 可导

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})^T$, $\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})^T$ ， ξ 为 $Ax = 0$ 的基础解系，则

有 ()。

- (A) α_1, α_2 线性无关， α_1, α_2, ξ 线性相关 (B) α_1, α_2, ξ 线性无关
 (C) α_1, α_2, ξ 两两线性相关 (D) α_1, α_2, ξ 两两正交

(6) 设 A 为 n 阶实对称阵, 将 A 的第一行的 2 倍加到第三行, 再将第三列的 (-2) 倍, 加到第一列, 得到矩阵 B , 则 B ().

- (A) 必对称 (B) 必可相似对角化 (C) 必不可对角化 (D) 必可逆

(7) 下列函数中, 为某随机变量 X 的分布函数的是 ().

- (A) $F(x) = \frac{1+\operatorname{sgn}(x)}{2}$ (B) $F(x) = \frac{x}{x+e^{-x}}$ (C) $F(x) = \frac{1}{1+e^x}$ (D) $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

(8) 下列命题正确的是 ().

(A) 设随机变量 $X \sim B(1, p), Y \sim B(1, p)$, 如果 X 与 Y 不相关, 则 X 与 Y 相互独立

(B) 设随机变量 $X \sim P(1), Y \sim P(1)$, 如果 X 与 Y 不相关, 则 X 与 Y 相互独立

(C) 设随机变量 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$, 如果 X 与 Y 不相关, 则 X 与 Y 相互独立

(D) 设随机变量 $X \sim U[-1, 1], Y \sim U[-1, 1]$, 如果 X 与 Y 不相关, 则 X 与 Y 相互独立

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x) = x^2 \sin 2x$, 则当 $n \geq 1$ 时, $f^{(2n+1)}(0) =$ _____.

(10) $\int_0^1 (\ln x)^2 dx =$ _____.

(11) 函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $(1, -1, \sqrt{2})$ 处沿各方向的方向导数的最大值为 _____.

(12) 设空间曲线 $\Gamma: \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ z = e^t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2$, 则 Γ 的弧长 $s =$ _____.

(13) 设 A 为三阶非零矩阵, 且 $A^2 = O$, 则 $Ax = 0$ 的基础解系中所含向量的个数为 _____.

(14) 设随机变量 $X \sim E(\lambda)$, $Y = (X - EX)^2$, 则 $P\{Y < EY\} =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 已知 m 为实常数, 讨论方程 $x^2 - me^x - 3 = 0$ 实根的个数.

(16) (本题满分 10 分) 设函数 $F(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 证明由方程 $F\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0$ 所

确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 满足下列两个等式

$$(I) (x-x_0) \frac{\partial z}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial z}{\partial y} = z - z_0; \quad (II) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

(17) (本题满分 10 分) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [\sin n \cdot \int_0^1 (1-x)x^{n-1} \ln(1+x) dx]$ 的敛散性, 如果该级数收敛,

问它是条件收敛还是绝对收敛?

(18) (本题满分 10 分) 设函数 $y(x)$ ($x \geq 1$) 二阶可导, 且 $y'(x) > 0, y''(x) > 0, y(1) = 1$. 如果曲线 $y = y(x)$ 从点 $P_0(1, 1)$ 到其上任意一点 $P(x, y)$ 的弧长等于曲线 $y = y(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的切线在 y 轴截距的绝对值, 求此曲线方程.

(19) (本题满分 10 分) 设 S 是由 xOz 平面内的一段曲线 $z = x^2 - 1 (1 \leq x \leq 2)$ 绕 z 轴旋转一周所得的有向曲面, 其中各点处的法向量与 z 轴正向成钝角, 计算曲面积分

$$I = \iint_S x^2(x-1)dydz - (3x^2y - y^2)dzdx + (4xz - x^2)dxdy.$$

(20) (本题满分 11 分) 设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵, $\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 4, -1)^T, \alpha_3 = (a, b, 6, 2)^T$ 是齐次线性方程组 $Bx = 0$ 的解向量. (I) 求 a, b 的值; (II) 求 $Bx = 0$ 的正交的基础解系.

(21) (本题满分 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3)^2, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

(I) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵; (II) 证明二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定的充要条件为 $|A| \neq 0$.

(22) (本题满分 11 分) 连续做某项试验, 每次试验只有成功和失败两种结果. 已知第一次试验成功和失败的概率均为 $\frac{1}{2}$, 且当第 n 次成功时, 第 $n+1$ 次成功的概率为 $\frac{1}{2}$; 当第 n 次失败时, 第 $n+1$ 次成功的概率为 $\frac{3}{4}$. (I) 求第 n 次试验成功的概率 P_n ; (II) 用 X 表示首次获得成功的试验次数, 求数学期望 EX .

(23) (本题满分 11 分) 设总体 X 服从对数正态分布, 即 $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 已知, σ^2 未知. (X_1, X_2, \dots, X_n) 是总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本. (I) 求 X 的概率密度函数; (II) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$; (III) 判断 $\hat{\sigma}^2$ 是否是 σ^2 的无偏估计.

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研
数学（一）模拟（五）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处右连续，则 ()。

(A) $f(-x)$ 在点 $x=-1$ 处右连续， $f(-\frac{1}{x})$ 在点 $x=-1$ 处右连续

(B) $f(-x)$ 在点 $x=-1$ 处左连续， $f(-\frac{1}{x})$ 在点 $x=-1$ 处左连续

(C) $f(-x)$ 在点 $x=-1$ 处右连续， $f(-\frac{1}{x})$ 在点 $x=-1$ 处左连续

(D) $f(-x)$ 在点 $x=-1$ 处左连续， $f(-\frac{1}{x})$ 在点 $x=-1$ 处右连续

(2) 下列说法不正确的是 ()。

(A) 若数列 $\{b_n\}$ 有界，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛

(B) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛， $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛

(C) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_n + a_2 a_n + \cdots + a_n^2)$ 绝对收敛

(3) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某去心邻域内可导，且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2$ ，则 ()。

(A) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处右连续，但右导数不一定存在

(B) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处右导数存在且 $f'_+(0) = 2$

(C) 存在 $\delta > 0$ ，使得 $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调递增

(D) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处一定不取极值

(4) 设 $I = \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x^2 dx$, $J = \int_0^{\pi} \cos x e^{\sin^2 x} dx$ ，则 ()。

(A) $I > 0, J < 0$ (B) $I > 0, J = 0$ (C) $I < 0, J > 0$ (D) $I < 0, J = 0$

(5) 已知 A_1, A_2 为 n 阶方阵，非齐次线性方程组 $A_1 x = \beta_1$ 与 $A_2 x = \beta_2$ 同解，则下列命题

(I) A_1 与 A_2 必等价； (II) A_1 与 A_2 的列向量组必等价； (III) A_1 与 A_2 的行向量组必等价；

(IV) β_2 必可由 A_1 的列向量组线性表示；

(V) $A_2 x = \beta_1$ 必有解

中，正确的个数为 ()。

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

- (6) 设 A 为 n 阶方阵, α, β 为 n 维列向量, a, b, c 为常数, 已知 $|A| = a$, $\begin{vmatrix} b & \alpha^T \\ \beta & A \end{vmatrix} = 0$, 则 $\begin{vmatrix} c & \alpha^T \\ \beta & A \end{vmatrix} =$ ().
- (A) 0 (B) $\alpha^T \beta$ (C) $(c-b)a$ (D) a

(7) 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上服从均匀分布, 记 $U = \max\{X, Y\}$, $V = \min\{X, Y\}$, 则 $EU - EV =$ ().

- (A) $\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$ (B) $\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$ (C) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(8) 在产品检验时, 原假设 H_0 为产品合格. 若在检验过程中发现将一些不合格品误以为合格品, 则当样本容量 n 固定时, ().

- (A) 犯弃真错误的概率 α 和犯存伪错误的概率 β 都会变大
 (B) 犯弃真错误的概率 α 和犯存伪错误的概率 β 都会变小
 (C) 犯弃真错误的概率 α 会变小, 犯存伪错误的概率 β 会变大
 (D) 犯弃真错误的概率 α 会变大, 犯存伪错误的概率 β 会变小

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\arctan \frac{1}{n})^{\frac{4}{3}} (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[3]{n}) =$ _____.

(10) 微分方程 $y'' + 4y = 2\cos^2 x$ 的特解形式为 _____.

(11) 设 $z = \int_0^{x^2 y} f(t, e^t) dt$, 其中 f 具有一阶连续偏导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

(12) 设 L 为从点 $(2, 0)$ 沿心形线 $r = 1 + \cos \theta$ 的上半曲线到点 $(0, 0)$ 的有向曲线, 则

$\int_L (e^x + 1) \cos y dx - [(e^x + x) \sin y - x] dy =$ _____.

(13) 设 A 为三阶不可逆矩阵, α, β 是线性无关的三维列向量, 且满足 $A\alpha = \beta, A\beta = \alpha$, 则与 A 相似的对角阵 $\Lambda =$ _____.

(14) 设总体 $X \sim P(1)$, (X_1, X_2, X_3, X_4) 是来自总体 X 的简单随机样本, 则 $P\{\bar{X} > \frac{1}{4}\} =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 设 $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{x_n^3}, n = 1, 2, \dots$. (I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限值; (II) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x_n - x_{n+1})$ 收敛.

(16) (本题满分 10 分) 求函数 $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y$ 在闭区域 $D: x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0$ 上的最大值与最小值.

(17) (本题满分 10 分) 设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$. (I) 求 L 的参数方程

确定的函数 $y = y(x)$ 的定义域; (II) 求曲线 L 与 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转一周而形成的旋转体体积 V_y ; (III) 设曲线 L 的形心坐标为 (\bar{x}, \bar{y}) , 求 \bar{y} .

(18) (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶连续导数, 且 $f'(0) = f'(1) = 0$.

(I) 证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $2f(\frac{1}{2}) = f(0) + f(1) + \frac{f''(\xi)}{4}$;

(II) 证明至少存在一点 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $|f(1) - f(0)| \leq \frac{|f''(\eta)|}{4}$.

(19) (本题满分 10 分) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{x^2 dydz + y^2 dzdx + (z^2 + 1) dxdy}{2x^2 + 2y^2 + z^2}$, 其中 Σ 是上半球面

$x^2 + y^2 + z^2 = 1 (z \geq 0)$, 取上侧.

(20) (本题满分 11 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_n (n = 0, 1, \dots)$ 均为 3 阶方阵, 且满足 $X_{n+1} = AX_n + E$,

$n = 0, 1, \dots$, 其中 $X_0 = O$, 求 X_n .

(21) (本题满分 11 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ 合同. (I) 求常数 a ; (II)

求正交变换 $x = Qy$, 化二次型 $f = x^T Ax$ 为标准形.

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量 $X \sim U[-1, 3]$. (I) 求 $Y = \begin{cases} 0, & X < 0, \\ 1, & X \geq 0 \end{cases}$ 的分布律和条件概率

$P\{X \leq \frac{1}{2} | Y = 1\}$; (II) 求 $Z = XY$ 的分布函数 $F_Z(z)$.

(23) (本题满分 11 分) 设随机变量 $\chi^2 \sim \chi^2(1)$, $F \sim F(1, 1)$, $T \sim t(1)$. (I) 求 $P\{\chi^2 \leq 1\}$; (II) 求 $P\{F \leq 1\}$; (III) 求 $P\{-1 < T < 1\}$, 其中 $\Phi(1) = 0.8413$.