

0. 预备

关闭手机、计算器等所有电子设备；请在答题纸上作答，注明你的姓名和学号，保持清晰、整洁。题中所指页码，均是就讲义打印版而言；凡交待未尽之处，皆以讲义及示例代码为准。

1. 是非判断

3 × 5

- 1> $f(n) + g(n) = \Omega(\min(f(n), g(n)))$
- 2> $f(n) = \Omega(g(n))$ ，仅当 $2^{f(n)} = \Omega(2^{g(n)})$
- 3> $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ ，仅当 $\log(f(n)) = \mathcal{O}(\log(g(n)))$
- 4> 倘若借助二分查找确定每个元素的插入位置，向量的插入排序只需 $\mathcal{O}(n \log n)$ 时间。
- 5> 对CBA式排序算法而言，若只允许交换相邻元素，则无论如何优化，最坏情况下至少需要 $\Omega(n^2)$ 时间。

2. 计算（保留推导过程，包括图、表，这些是更重要的评分依据）

6 + 6 + 8 + 8 + 8

- 1) 某官员因自家中被起获2亿余元，被罚将这些钞票（均为百元面额真币）按编号手工排序。若他采用 bubbleSort() 算法 (p175)，且每秒可完成一次比较和一次交换，则大致将耗时多少个世纪？
- 2) 固定整型有序向量 $A = \{ 5, 7, 9, 10, 19, 21, 23 \}$ ，且整数 e 理想随机地取自 $[0, 25)$ 。试分别针对成功、失败及总体情况，给出 `fibSearch(A, e, 0, 7)` 的平均查找长度（即关键码比较的平均次数）。
- 3) 使用 `Vector<int>::binSearch()` 算法版本A (p149) 在 $\{ 1, 3, 5, 7, \dots, 2015 \}$ 中做查找，目标为独立均匀分布于 $[0, 2016]$ 内的整数。若平均失败查找长度为 F ，试平均成功查找长度 S 应为多少？
- 4) 先将整数 $[0, 2015]$ 排成如左图所示的三角阵，再如右图所示将各行的末元素移至行首，最后自上而下地将各行取出，并依次串接得到序列 S 。

| | | | | | | |
|------|------|------|------|------|-----|------|
| 0 | | | | | | |
| 1 | 2 | | | | | |
| 3 | 4 | 5 | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | | | |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| 1953 | 1954 | 1955 | 1956 | 1957 | ... | 2015 |

| | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|-----|
| 0 | | | | | | |
| 2 | 1 | | | | | |
| 5 | 3 | 4 | | | | |
| 9 | 6 | 7 | 8 | | | |
| 14 | 10 | 11 | 12 | 13 | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| 2015 | 1953 | 1954 | 1955 | 1956 | 1957 | ... |

现在 `List::selectionSort()` 算法中，将：

```
insertB( tail, remove( selectMax( head->succ, n ) ) );
```

替换为：

```
swap( tail->pred->data, selectMax( head->succ, n )->data );
```

并对序列 S 进行排序，则 `swap()` 语句无实质效果（原地交换）的情况累计出现多少次？

5) 考查图灵机从某一初始状态开始, 连续执行Increase算法n次的过程。

(a) 若初始状态下只有读写头所对单元格为'0', 其余均为'#', 则读写头累计移动多少次(大O估计)?

(b) 若初始状态下纸带上是某个常数K的二进制展开(读写头指向其最低位), 其余单元格均为'#'呢?

3. 简答

8 + 6 + 12 + 8

1) 在最好情况下、最坏情况下, 以下算法的渐进时间复杂度分别是多少?

(B)ubblesort (p175)

(M)ergesort (p180 + p182)

(S)electionsort (p213 + p214)

(I)nsortionsort (p219)

2) 功能同为“序列倒置”的两个Python算法(p244), 实际的运行速度差异极大。何者更快? 为什么?

3) 对于每个整数 $n > 3$, 试构造一个长度为n的序列 s , 使得:

(a) 在对 s 做一趟扫描交换的过程中, 尽管有元素交换位置, 但相邻的逆序对却未必减少;

(b) 在对 s 的起泡排序过程中, 某个元素在最终就位之前, 会一度反而远离其最终位置。

(c) 上述逆向移动的距离, 最远可以达到多少?

4) 考查对向量 $A[0, n)$ 的排序。

(a) 若将 A 切分为 k 段(长度均不超过 $\lceil \frac{n}{k} \rceil$), 并通过insertionSort()对各段分别排序, 总共需要多少时间?

(b) 接下来, 如何在 $O(n \cdot \log k)$ 时间内, 将这些段合并为一个整体有序的向量?

(c) 为使整个过程的时间成本尽可能低, 你需要测量哪些参数, 并如何根据这些参数确定最佳的 k ?

4. 下界(二选一, 但分值不同)

15 | 10

1) 试证明, 如下问题的复杂度下界为 $\Omega(n \log n)$:

【Diameter】对于平面上任意点集 P , $|P| = n$, 计算其直径, 也就是 P 中点对之间的最长距离。

提示, 已知如下问题的下界为 $\Omega(n \log n)$:

【Set-Disjointness】对于任意给定的实数集合 A 和 B , $|A| = |B| = n$, 判定二者之间是否有公共元素。

2) 考查以下问题: 任给12个互异整数, 且其中9个已组织为一个有序向量, 现需插入另3个以完成整体排序。

若采用CBA式算法, 试从代数判定树的角度, 给出最坏情况下须做比较次数的下界, 并说明理由。