绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试卷 （模拟一）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+e^{(n+1)x}}{1+e^{nx}}$，则点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的（　　）．

（A）连续点　（B）跳跃间断点　（C）可去间断点　（D）无穷间断点

答案：选（B）．

解　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+e^{(n+1)x}}{1+e^{nx}}=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ e^x, & x>0,\end{cases}$ 点 $x=0$ 为其跳跃间断点，选（B）．

（2）设 $f(x)$ 是连续且单调增加的奇函数，$F(x)=\int_0^x(2u-x)f(x-u)du$，则 $F(x)$ 是（　　）．

（A）单调增加的奇函数　（B）单调减少的奇函数

（C）单调增加的偶函数　（D）单调减少的偶函数

答案：选（B）．

解　令 $x-u=t$，$F(x)=\int_x^0(x-2t)f(t)(-dt)=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$．

因为 $f(t)$ 为奇函数，$tf(t)$ 为偶函数，所以 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数，$\int_0^x tf(t)dt$ 为奇函数，故 $F(x)$ 为奇函数．又因为 $F'(x)=\int_0^x f(t)dt-xf(x)=f(\xi)\cdot x-xf(x)\le 0$（$\xi$ 在 0 与 x 之间），故 $F(x)$ 单调减少．

（3）设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 x_0 处条件收敛，则（　　）．

（A）x_0 必在 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间的内部　（B）x_0 必在 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域的外部

（C）x_0 必是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域的端点　（D）以上三种情形均有可能

答案：选（C）．

（4）将极坐标系下的二次积分 $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(1+r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 转化成直角坐标系下的二次积分为（　　）.

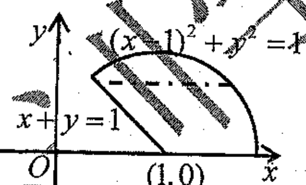
（A）$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} dx \int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

（B）$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)dy$

（C）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

（D）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_{1-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

答案：选（D）.



解 $\begin{cases} x=1+r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，引入 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 分割区域，得

$$D=D_1+D_2,$$

其中 $D_1: 0\le y\le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$1-y\le x\le 1+\sqrt{1-y^2}$；$D_2: \dfrac{\sqrt{2}}{2}\le y\le 1$，$1-\sqrt{1-y^2}\le y\le 1+\sqrt{1-y^2}$.

（5）设 A,B 均为三阶非零矩阵，满足 $AB=O$，其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2a & 1-a & 2a \\ a & -a & a^2-2 \end{pmatrix}$，则（　　）.

（A）$a=2$ 时，必有 $r(A)=1$　　（B）$a\ne 2$ 时，必有 $r(A)=2$

（C）$a=-1$ 时，必有 $r(A)=1$　　（D）$a\ne -1$ 时，必有 $r(A)=2$

答案：选（A）.

解
$$B \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a+1) \end{pmatrix}.$$

由 $AB=O$ 知 $r(A)+r(B)\le 3$．又由于 A，B 均为非零矩阵，则有 $r(A)\ge 1$，$r(B)\ge 1$.

当 $a\ne 2$ 且 $a\ne -1$ 时，$r(B)=3$，得 $r(A)=0$.与 $r(A)\ge 1$，$r(B)\ge 1$ 矛盾.

当 $a=-1$ 时，$r(B)=1$，此时 $1\le r(A)\le 2$，（B）和（C）错.

当 $a=2$ 时，$r(B)=2$，必有 $1\le r(A)\le 3-r(B)=1$，得 $r(A)=1$．故（D）错，（A）正确.

（6）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的秩为 2，则该二次型的正负惯性指数分别为（　　）.

（A）2, 0　　（B）0, 2　　（C）1, 1　　（D）依赖于 a 的取值

答案：选（C）.

解　$A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$，知$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=0,\end{cases}$取$\lambda_1=0$，则$\lambda_2\neq0,\lambda_3\neq0$，从而$\lambda_2=-\lambda_3$，故答案选（C）.

（7）设A,B为随机事件，且$0<P(A)<1$，下列说法正确的是（　　）.

（A）若$P(A)=P(AB)$，则$A\subset B$

（B）若$P(A\cup B)=P(AB)$，则$A=B$

（C）若$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(AB)$，则$A,B$互为对立事件

（D）若$P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则A,B相互独立

答案：选（D）.

解　由$P(B|A)=P(B|\overline{A})$得$\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，整理得$P(AB)=P(A)P(B)$，所以事件$A,B$相互独立，故选（D）.

（8）设随机变量$X\le Y$，$F_X(x)$和$F_Y(y)$分别为X和Y的分布函数，$F(x,y)$为(X,Y)的分布函数，则对任意的t，有（　　）.

（A）$F_X(t)\le F_Y(t),\ F(t,t)=F_X(t)$

（B）$F_Y(t)\le F_X(t),\ F(t,t)=F_X(t)$

（C）$F_X(t)\le F_Y(t),\ F(t,t)=F_Y(t)$

（D）$F_Y(t)\le F_X(t),\ F(t,t)=F_Y(t)$

答案：选（D）.

解　由于$\{Y\le t\}\subset\{X\le t\},\{X\le t,Y\le t\}=\{Y\le t\}$，故

$$P\{Y\le t\}\le P\{X\le t\},\quad P\{X\le t,Y\le t\}=P\{Y\le t\},$$

所以$F_Y(t)\le F_X(t),F(t,t)=F_Y(t)$.

二、填空题:9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设$f(x)$为可导的偶函数，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\cos x)}{x^2}=2$，则曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的法线方程为__________.

答案：填“$y=-\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{4}$”.

解　由题意知$f(1)=0$，从而

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(\cos x)-f(1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(1+\cos x-1)-f(1)}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}=f'(1)\cdot(-\frac{1}{2})=2,$$

得$f'(1)=-4$.

又因为$f(x)$为偶函数，所以$f'(x)$为奇函数，故$f'(-1)=-f'(1)=4$，因此法线方程为

$$y-f(-1)=-\frac{1}{4}(x+1)，即\ y=-\frac{x}{4}-\frac{1}{4}.$$

（10）$\int \frac{\cos x \sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx =$ __________.

答案：填“$\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln(1+\cos^2 x) + C$”.

解　原积分 $= -\int \frac{\cos x(1-\cos^2 x)}{1+\cos^2 x} d(\cos x) \underline{\underline{\cos x = t}} \int \frac{t(t^2-1)}{1+t^2} dt$

$$= \int \frac{t(1+t^2)-2t}{1+t^2} dt = \int (t - \frac{2t}{1+t^2}) dt = \frac{1}{2}t^2 - \ln(1+t^2) + C$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln(1+\cos^2 x) + C.$$

（11）设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x - az = \varphi(y - bz)$ 确定，其中 φ 可导且 $a - b\varphi' \neq 0$，则 $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} =$ __________.

答案：填“1”.

解　方程两边对 x 求偏导，得 $1 - a\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi' \cdot (-b\frac{\partial z}{\partial x})$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{a - b\varphi'}$. 方程两边对 y 求偏导，得 $-a\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi' g(1 - b\frac{\partial z}{\partial y})$，所以 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\varphi'}{a - b\varphi'}$，从而 $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

（12）设正值函数 φ 连续，若 $a > 0, b > 0, c > 0$，则曲面 $(z-a)\varphi(x) + (z-b)\varphi(y) = 0$ 与柱面 $x^2 + y^2 = c^2$ 及平面 $z = 0$ 所围成的空间立体的体积 $V =$ __________.

答案：填“$\frac{\pi}{2}(a+b)c^2$”.

解　由 $(z-a)\varphi(x) + (z-b)\varphi(y) = 0$ 知 $z = \frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)}$，故 $V = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)} dxdy$，其中 $D_{xy} = \left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 \le c^2\right\}$. 由对称性知

$$\iint\limits_{D_{xy}} \frac{\varphi(x)}{\varphi(x) + \varphi(y)} dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)} dxdy,$$

故

$$V = \frac{1}{2}(a+b) \iint\limits_{D_{xy}} \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)} dxdy = \frac{\pi}{2}(a+b)c^2.$$

（13）设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，对任意的正整数 n，矩阵 $(E + \alpha\beta^T)^n =$ __________.

答案：填“$\begin{pmatrix} 1+2n & -n & 0 \\ 4n & 1-2n & 0 \\ 6n & -3n & 1 \end{pmatrix}$”.

解　$(E+\alpha\beta^T)^n = E + n\alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 1+2n & -n & 0 \\ 4n & 1-2n & 0 \\ 6n & -3n & 1 \end{pmatrix}$.

（14）设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为来自总体$X \sim P(\lambda)$的一个简单随机样本，若$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a^{X_i}$为$e^{\lambda}$的无偏估计，则常数$a =$__________.

答案：填“2”.

解　由于$E(a^{X_i}) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{a\lambda} \cdot e^{-\lambda} = e^{(a-1)\lambda}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，故由

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a^{X_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(a^{X_i}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{(a-1)\lambda} = e^{(a-1)\lambda} = e^{\lambda},$$

解得$a = 2$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 **10** 分）设$0 < x < 1$，证明（Ⅰ）$\ln(1+x) < \frac{x(2x+1)}{(x+1)^2}$；（Ⅱ）$(1+\frac{1}{x})^x (1+x)^{\frac{1}{x}} < 4$.

证　（Ⅰ）令$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x(2x+1)}{(x+1)^2}$，则$g'(x) = \frac{x(x-1)}{(x+1)^3} < 0$，故$g(x)$单调减少．当$0 < x < 1$时，$g(x) < g(0) = 0$．

（Ⅱ）只需证$x\ln(1+\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}\ln(1+x) < \ln 4$．

令
$$f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}\ln(1+x) - \ln 4,$$

则$f(1) = 0$.

$$f'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x(1+x)},$$

则$f'(1) = 0$．

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}\left[\ln(1+x) - \frac{x(2x+1)}{(x+1)^2}\right] < 0，\quad f'(x) > f'(1) = 0.$$

故$f(x)$单调增加，所以$f(x) < f(1) = 0$，　故$x\ln(1+\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}\ln(1+x) < \ln 4$．

（16）（本题满分 **10** 分）将yOz坐标面上的曲线段$y = f(z)$（$f(z) > 0, 0 \le z \le 12$）绕z轴旋转一周所得旋转曲面与xOy坐标面围成一个无盖容器．已知它的底面积为$16\pi(\mathrm{m}^2)$，如果以$3(\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$的速度

把水注入容器内，在高度为 z (m) 的位置，水的上表面积以 $\frac{3}{z+1}$ $(\mathrm{m}^2/\mathrm{s})$ 的速度增大．（Ⅰ）试求曲线 $y=f(z)$ 的方程；（Ⅱ）若将容器内水装满，问需要多少时间？

解 （Ⅰ）设在 t 时刻，水面高度为 $z=z(t)$，则水的体积和水的上表面积分别为

$$V(t)=\pi\int_0^z f^2(u)du,\quad S(t)=\pi f^2(z).$$

由题意知

$$\frac{dV(t)}{dt}=\pi f^2(z)\frac{dz}{dt}=3,\qquad \frac{dS(t)}{dt}=2\pi f(z)\frac{df(z)}{dt}=\frac{3}{z+1}.$$

综合上列两式，得

$$\frac{df(z)}{f(z)}=\frac{dz}{2(z+1)},$$

两边积分，得

$$\ln f(z)=\frac{1}{2}\ln(z+1)+\ln C，即 f(z)=C\sqrt{z+1}.$$

由于容器的底面积为 16π，知 $f(0)=4$，进而得 $C=4$，故所求曲线方程为

$$y=4\sqrt{z+1},\quad 0\le z\le 12$$

（Ⅱ）容器的体积为

$$V=\pi\int_0^{12}(4\sqrt{z+1})^2dz=16\pi\int_0^{12}(z+1)dz=8\pi(z+1)^2\Big|_0^{12}=1344\pi\ (\mathrm{m}^3).$$

若将容器内水装满，需要时间为 $\frac{1344\pi}{3}=448\pi$ (s)．

（17）（本题满分 **10** 分）求过第一卦限中点 (a,b,c) 的平面，使之与三个坐标平面所围成的四面体的体积最小．

解 设所求平面方程为 $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1$，其中 A,B,C 为此平面在 Ox 轴，Oy 轴，Oz 轴上的截距，则此平面与三坐标平面所围成的四面体的体积为 $V=\frac{1}{6}ABC$，由于点 (a,b,c) 在此平面上，故问题转化为：求在条件 $\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}=1$ 下函数 $V=\frac{1}{6}ABC$ 的极值．

作函数 $L=\frac{1}{6}ABC+\lambda(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}-1)$，令

$$\begin{cases} L'_A=\frac{1}{6}BC-\lambda\frac{a}{A^2}=0, & (1)\\ L'_B=\frac{1}{6}AC-\lambda\frac{b}{B^2}=0, & (2)\\ L'_C=\frac{1}{6}AB-\lambda\frac{c}{C^2}=0, & (3)\\ \frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}=1. & (4)\end{cases}$$

由（1），（2），（3）知$\dfrac{a}{A}=\dfrac{b}{B}=\dfrac{c}{C}$，代入（4）可解得$A=3a,B=3b,C=3c$．故$(3a,3b,3c)$为函数$V=\dfrac{1}{6}ABC$的唯一驻点，由实际问题知函数$V=\dfrac{1}{6}ABC$存在最小值，故当$A=3a,B=3b,C=3c$时$V$取得最小值：$V_{\min}=\dfrac{9}{2}abc$，所求的平面方程为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=3$．

（18）（**本题满分10分**）设函数$y=y(x)$满足$\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且$y(1)=1$，计算$\int_1^2 y(x)dx$．

解　由$\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，知$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$．

令$\Delta x\to 0$，则有$y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，故有

$$y(x)=\int\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx=\sqrt{2x-x^2}+C.$$

由$y(1)=1$知$C=0$，所以$y=\sqrt{2x-x^2}$，于是

$$\int_1^2 y(x)dx=\int_1^2\sqrt{2x-x^2}dx=\int_1^2\sqrt{1-(x-1)^2}dx\xlongequal{x-1=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}.$$

（19）（**本题满分10分**）设曲面Σ是锥面$x=\sqrt{y^2+z^2}$与球面$x^2+y^2+z^2=1,x^2+y^2+z^2=2$所围立体表面取外侧，$f(u)$为连续可微的奇函数，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}x^3dydz+[y^3+f(yz)]dzdx+[z^3+f(yz)]dxdy.$$

解　设曲面Σ所围立体为Ω，则由Gauss公式知

$$I=\iiint_{\Omega}[3x^2+3y^2+f'(yz)z+3z^2+f'(yz)y]dV.$$

由于Ω关于$z=0$对称，由$f(u)$为奇函数知$f'(u)$是偶函数，故由对称性知

$$\iiint_{\Omega}f'(yz)ydV=\iiint_{\Omega}f'(yz)zdV=0,$$

所以

$$I=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_1^{\sqrt{2}}r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_1^{\sqrt{2}}r^4dr=\frac{3}{5}(9\sqrt{2}-10)\pi.$$

（20）（**本题满分11分**）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为三个三维列向量，$A=\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\alpha_3\alpha_3^T$．（Ⅰ）证明存在矩阵$B$，使得$A=B^TB$；（Ⅱ）当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关时，证明$r(A)=3$；（Ⅲ）当$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$,

$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$时，求 $Ax=0$ 的通解.

解　（Ⅰ）$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\end{pmatrix}$，令 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\end{pmatrix}$，则 $A=B^TB$.

（Ⅱ）$r(A)=r(B)=3$.

（Ⅲ）$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-5\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&\frac{5}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$，故 $Ax=0$ 通解为

$x=k\begin{pmatrix}2\\-\frac{5}{2}\\1\end{pmatrix}$，$k$ 为任意实数.

(21)（本题满分 11 分）设 A 是二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵，$r(A)=1$. 齐次线性方程组 $(2E-A)x=0$ 的通解为 $x=k\alpha_1$，其中 $\alpha_1=(-1,1,1)^T$，k 为任意实数.（Ⅰ）求解齐次线性方程组 $Ax=0$；（Ⅱ）求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$.

解　（Ⅰ）由已知得 $A\alpha_1=2\alpha_1$，即 $\lambda_1=2$ 是 A 的特征值，而 $\alpha_1=(-1,1,1)^T$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量，

又由 $A=A^T$，且 $r(A)=1$ 知，$\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 A 的二重特征值，$Ax=0$ 的非零解向量即是 A 的属于特征值 0 的特征向量.

设 $(x_1,x_2,x_3)^T$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 的特征向量，因为 A 是实对称矩阵，不同特征值对应的特征向量必正交，则有 $-x_1+x_2+x_3=0$. 可取 $\alpha_2=(1,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,0,1)^T$，故方程组 $Ax=0$ 的通解为

$$x=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,\ k_2,k_3\text{ 为任意常数}.$$

（Ⅱ）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 P 为可逆阵，且

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}，得\quad A=P\Lambda P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-2&2&2\\-2&2&2\end{pmatrix},$$

则二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=\frac{2}{3}x_1^2+\frac{2}{3}x_2^2+\frac{2}{3}x_3^2-\frac{4}{3}x_1x_2-\frac{4}{3}x_1x_3+\frac{4}{3}x_2x_3.$$

(22)（本题满分 11 分）设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0;1,4;\frac{1}{2})$. 已知 $\Phi(1)=0.8413$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，求 $p=P\{Y<2X<Y+2\,|\,2X+Y=1\}$.

解　由于 $p=P\{Y<2X<Y+2|2X+Y=1\}=P\{0<2X-Y<2|2X+Y=1\}$，故令

$$U=2X+Y,\quad V=2X-Y.$$

因为 $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\neq 0$，所以 (U,V) 服从二维正态分布．且

$$Cov(U,V)=Cov(2X+Y,2X-Y)=4DX-DY=4-4=0,$$

可知 U 与 V 不相关，进而 U 与 V 相互独立．因此，$p=P\{0<V<2|U=1\}=P\{0<V<2\}$．又

$$EV=2EX-EY=2\cdot 0-0=0;$$

$$DV=4DX+DY-2Cov(2X,Y)=4+4-2\cdot 2\cdot\sqrt{1}\cdot\sqrt{4}\cdot\frac{1}{2}=4,$$

所以 $V\sim N(0,4)$，$\frac{V}{2}\sim N(0,1)$，故 $p=P\{0<\frac{V}{2}<1\}=\Phi(1)-\Phi(0)=0.8413-0.5=0.3413$．

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 X 的密度函数为 $f(x,\lambda)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}$，$-\infty<x<+\infty$，其中未知参数 $\lambda>0$．$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本．（I）求 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_M$；（II）求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_L$；（III）求 $E(\hat{\lambda}_L)$．

解　（I）由于 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}dx=0$，故采用二阶原点矩估计 λ．由

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}dx=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=2\lambda^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2,$$

解得 $\hat{\lambda}_M=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$．

（II）$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\lambda)=\frac{1}{(2\lambda)^n}e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$，$\ln L(\lambda)=-n\ln 2\lambda-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，令

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0,$$

解得 $\hat{\lambda}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$．

（III）由于 $E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=\lambda$，所以

$$E(\hat{\lambda}_L)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|)=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}|X_i|)=\frac{1}{n}\cdot n\lambda=\lambda.$$

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试卷 （模拟二）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)\neq 0$，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-ax-b}{x^2}=c\neq 0$，则（　　）.

（A）$a=0,b=1,c=\dfrac{1}{2}f''(0)$　　（B）$a=1,b=1,c=\dfrac{1}{2}f''(0)$

（C）$a=1,b=0,c=f''(0)$　　（D）$a=1,b=1,c=f''(0)$

答案：选（A）.

解　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，得 $f(0)=0,f'(0)=0$ 所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-ax-b}{cx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)-ax-b}{cx^2}=1,$$

故 $a=0,b=1,c=\dfrac{1}{2}f''(0)$.

（2）设函数 $f(x)$ 连续，则下列结论不成立的是（　　）.

（A）$\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$　　（B）$\int_0^{\pi}f(\sin^2 x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin^2 x)dx$

（C）$\int_0^{\pi}f(\cos x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$　　（D）$\int_0^{\pi}f(\cos^2 x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos^2 x)dx$

答案：选（C）.

解
$$\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)dx,$$

而
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)dx\overset{t=\pi-x}{=}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\sin t)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx,$$

所以 $\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$，（A）正确.

$$\int_0^{\pi} f(\sin^2 x)dx \overset{周期性}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)dx \overset{奇偶性}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)dx$$，（B）正确.

$$\int_0^{\pi} f(\cos^2 x)dx \overset{周期性}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)dx \overset{奇偶性}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)dx$$，（D）正确.

（C）不正确，反例，取 $f(x)=x$， $\int_0^{\pi}\cos xdx = 0 \neq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx = 2$.

（3）设 $f(u)$ 为可微函数，$f(0)=0, f'(0)=2$，记 D_t 为圆心在原点，半径为 t 的圆域，若 $t\to 0^+$ 时，$\iint\limits_{D_t} f(x^2+y^2)dxdy$ 与 at^k 是等价无穷小，则（　　）.

（A）$a=\dfrac{\pi}{2},\ k=2$　　（B）$a=\dfrac{\pi}{2},\ k=4$　　（C）$a=\pi,\ k=2$　　（D）$a=\pi,\ k=4$

答案：选（D）.

解　$\iint\limits_{D_t} f(x^2+y^2)dxdy = 2\pi\int_0^t f(r^2)rdr$，由题设知 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{2\pi\int_0^t f(r^2)rdr}{at^k}=1$，

而
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^t f(r^2)rdr}{at^k} = \frac{2\pi}{a}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t^2)}{kt^{k-2}} = \frac{2\pi}{ak}\lim_{t\to 0^+}\Big[\frac{f(t^2)}{t^2}\cdot\frac{1}{t^{k-4}}\Big],$$

由于 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t^2)}{t^2}=f'(0)=2$，所以 $k=4, a=\pi$，故选（D）.

（4）设平面点集 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<y<x^2, -\infty<x<+\infty\right\}$，函数 $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$ 则在点 $(0,0)$ 处（　　）.

（A）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 存在　　（B）$f(x,y)$ 连续　　（C）$f(x,y)$ 偏导数存在　　（D）$f(x,y)$ 可微

答案：选（C）.

解　由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=0, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=\frac{x^2}{2}}} f(x,y)=1$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在，故（A）不正确，进而（B）和（D）也都不正确.

另外，可直接计算得，$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，故（C）正确.

（5）设 A 为 $n\times m$ 矩阵，B 为 $m\times n$ 矩阵，且 AB 可逆，则必有（　　）.

（A）A 的行向量组线性无关，B 的行向量组也线性无关

（B）A 的列向量组线性无关，B 的列向量组也线性无关

（C）A 的行向量组线性无关，B 的列向量组也线性无关

（D）A 的列向量组线性无关，B 的行向量组也线性无关

答案：选（C）.

解　AB 为 n 阶方阵，则 $r(AB)=n$．又因

$$n=r(AB)\le r(A)\le n, n=r(AB)\le r(B)\le n,$$

故 $r(A)=r(B)=n$，从而答案选（C）.

（6）设 A 是三阶矩阵，A 的秩 $r(A)=1$，A 有特征值 $\lambda=0$，则 $\lambda=0$（　　）.

（A）必是 A 的二重特征值　　（B）至少是 A 的二重特征值

（C）至多是 A 的二重特征值　　（D）是 A 的一、二、三重特征值都可能

答案：选（B）.

解 1　因为 $r(A)=1$，所以 $Ax=0$ 有两个线性无关的解向量，即 A 对应 $\lambda=0$ 有两个线性无关的特征向量。因为特征值的重根数 $\ge$ 对应的线性无关的特征向量的个数，故 $\lambda=0$ 至少是 A 的二重特征值，也可能是 A 的三重特征值，例如：

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}，r(A)=1，\lambda=0 \text{ 是 } A \text{ 的三重特征值}.$$

解 2　$r(A)=1$，则 $A=\alpha\beta^T$，故 A 的特征值为 $0,0,\alpha^T\beta$（或 $\beta^T\alpha$）. 若 $\alpha^T\beta=0$，则 A 的特征值为 $0,0,0$，若 $\alpha^T\beta\ne0$，则 A 的特征值为 $\alpha^T\beta,0,0$．

（7）设随机变量 $X:\begin{pmatrix}1&2\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}, Y: U[-1,1]$，且 X 和 Y 相互独立，则 $P\{Y\le0|X+Y\le2\}=$（　　）.

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{2}{3}$　　（D）$\frac{3}{4}$

答案：选（C）.

解

$$P\{Y\le0|X+Y\le2\}=\frac{P\{X+Y\le2,Y\le0\}}{P\{X+Y\le2\}}.$$

$$P\{X+Y\le2\}=P\{X+Y\le2,X=1\}+P\{X+Y\le2,X=2\}$$

$$=P\{Y\le1,X=1\}+P\{Y\le0,X=2\}=\frac{3}{4},$$

$$P\{X+Y\le2,Y\le0\}=P\{X+Y\le2,Y\le0,X=1\}+P\{X+Y\le2,Y\le0,X=2\}$$

$$=P\{Y\le0,X=1\}+P\{Y\le0,X=2\}=\frac{1}{2},$$

所以

$$P\{Y\le0|\ X+Y\le2\}=\frac{P\{X+Y\le2,Y\le0\}}{P\{X+Y\le2\}}=\frac{2}{3}.$$

（8）设随机变量 $X: U[-1,1]$，$Y=\begin{cases}1-4X, & X<0,\\ 1, & X\ge0,\end{cases}$ 则下列结论正确的是（　　）.

（A）Y 为连续型随机变量　　（B）Y 为离散型随机变量　　（C）$EY=1$　　（D）$EY=2$

答案：选（D）.

解　由于 $P\{Y=1\}=P\{X\geq 0\}=\dfrac{1}{2}\neq 0$，所以 Y 不是连续随机变量，排除（A）.

当 $-1\leq X<0$ 时，$Y=1-4X\in(1,5]$，所以 Y 不是离散型随机变量，排除（B）.

又　$EY=\int_{-1}^{0}(1-4x)\cdot\dfrac{1}{2}dx+\int_{0}^{1}1\cdot\dfrac{1}{2}dx=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=2$，故选（D）.

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}$ 与平面 $2x-y+z=1$ 垂直的法线方程为__________.

答案：填“$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$”.

解　设曲面上的点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法线与平面垂直，则曲面在 P_0 处的法向量 $\vec{n}_0=\left\{x_0,\dfrac{y_0}{2},-1\right\}$. 因为平面的法向量 $\vec{n}=\{2,-1,1\}$，且 $\vec{n}_0$ 平行于 $\vec{n}$，所以 $\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{y_0/2}{-1}=\dfrac{-1}{1}$. 解得 $x_0=-2,y_0=2$．代入 $z=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}$，得 $z_0=3$，故所求法线方程为 $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

（10）设二阶常系数非齐次线性方程 $y''+py'+qy=ae^x$（p,q,a 是常数）有两个特解 $y_1=xe^x$，$y_2=e^{2x}+xe^x$，则该方程的通解为__________.

答案：填“$y=C_1e^{2x}+C_2e^x+xe^x$”

解　由 $y_2-y_1=e^{2x}$ 知特征方程有一根为 $r_1=2$.

①若 $r_1=2$ 是二重根，则该方程的通解形式为 $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+Ae^x$（$A$ 为常数）与条件 $y_1=xe^x$ 为方程特解矛盾，故 $r_1=2$ 不是二重根.

②若另一个特征根 $r_2\neq 1$ 且 $r_2\neq 2$，则该方程通解形式为 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{r_2x}+Ae^x$，也与条件 $y_1=xe^x$ 为方程特解矛盾．故由特解 $y_1=xe^x$ 和自由项 ae^x 知，特征方程有一根为 $r_2=1$，

综上，方程的通解　$y=C_1e^{2x}+C_2e^x+xe^x$.

（11）方程 $x^5+2x+\cos x=a$ 的实根个数为__________.

答案：填“1”.

解　设 $f(x)=x^5+2x+\cos x-a$，因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少有一个零点.

又因为 $f'(x)=5x^4+2-\sin x>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，故 $f(x)$ 最多有一个零点，因此 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内仅有一个根.

（12）设 L 为从点 $A(1,0)$ 到 $B(0,1)$ 再到 $C(-1,0)$ 的折线，则积分 $\int_L\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=$__________.

答案：填“-2”．

解法 1　$L=L_1+L_2$，其中 $L_1: y=1-x, 0\le x\le 1, L_2: y=1+x, -1\le x\le 0$．

$$原积分=\int_{L_1}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}+\int_{L_2}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\int_1^0\frac{1+(-1)}{x+(1-x)}dx+\int_0^{-1}\frac{1+1}{-x+(1+x)}dx=-2.$$

解法 2　L 的方程为 $|x|+|y|=1$，所以，原积分 $=\int_L dx+dy=\int_A^C dx+dy=(x+y)\big|_A^C=-2$．

（13）已知 A 为三阶矩阵，$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&3&1\\2&0&0\end{pmatrix}$，若 $(A-E)^{-1}=B-E$，则 $|A|=$________．

答案：填“$\frac{1}{2}$”．

解　由 $A-E=(B-E)^{-1}$，$A=(B-E)^{-1}+E=(B-E)^{-1}(E+B-E)=(B-E)^{-1}\cdot B$，所以

$$|A|=\frac{|B|}{|B-E|}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

（14）设随机事件 A,B 相互独立，且 $P(A)=0.5, P(B)=0.2$，令 $X=\begin{cases}1, & AB发生,\\0, & AB不发生,\end{cases}$

$Y=\begin{cases}1, & A\cup B发生,\\0, & A\cup B不发生,\end{cases}$ 则 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=$________．

答案：填“$\frac{\sqrt{6}}{9}$”．

解　$P\{X=1\}=P(AB)=P(A)P(B)=0.5\times0.2=0.1$，

$P\{Y=1\}=P(A\cup B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0.5\times0.8=0.6$，

$P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=P((AB)(A\cup B))=P(AB)=0.1$，

所以 $X\sim\begin{pmatrix}0&1\\0.9&0.1\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}0&1\\0.4&0.6\end{pmatrix}$，$XY\sim\begin{pmatrix}0&1\\0.9&0.1\end{pmatrix}$，进而得

$$EX=0.1,\ DX=0.09;\quad EY=0.6,\ DY=0.24;\quad E(XY)=0.1,$$

故
$$\rho_{XY}=\frac{0.1-0.1\times0.6}{\sqrt{0.09}\sqrt{0.24}}=\frac{\sqrt{6}}{9}.$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分 10 分**）设偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，$f(0)=0$，求 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\int_0^t dy\int_y^t f(x-y)dx}{(\sqrt[3]{\cos t}-1)\cdot\sin t}$．

解　原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t dx\int_0^x f(x-y)dy}{(\sqrt[3]{1+(\cos t-1)}-1)\cdot\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t[\int_0^x f(x-y)dy]dx}{-\dfrac{1}{6}t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t f(t-y)dy}{-\dfrac{1}{2}t^2}$

$$\overset{令u=t-y}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t f(u)du}{-\dfrac{1}{2}t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{-t}=-f'(0).$$

又因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f'(x)$ 为奇函数，故 $f'(0)=0$．

（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，$f(0)=0,f(1)=1$．（Ⅰ）证明存在 $a\in(0,1)$ 使得 $f(a)=\dfrac{1}{3}$；（Ⅱ）证明存在不同的 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,1)$，有 $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}+\dfrac{1}{f'(\xi_3)}=3$．

证　（Ⅰ）令 $F(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}$，则 $F(0)=-\dfrac{1}{3},F(1)=\dfrac{2}{3}$，由零点定理知存在 $a\in(0,1)$，使得 $F(a)=0$，即得 $f(a)=\dfrac{1}{3}$．

（Ⅱ）令 $G(x)=f(x)-\dfrac{2}{3}$，则 $G(a)=-\dfrac{1}{3},G(1)=\dfrac{1}{3}$，由零点定理知，存在 $b\in(a,1)$，使得 $G(b)=0$，即得 $f(b)=\dfrac{2}{3}$．由拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(a)-f(0)}{a}=f'(\xi_1),\quad \xi_1\in(0,a),$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi_2),\quad \xi_2\in(a,b),$$

$$\frac{f(1)-f(b)}{1-b}=f'(\xi_3),\quad \xi_3\in(b,1),$$

所以
$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}+\frac{1}{f'(\xi_3)}=\frac{a+b-a+1-b}{\dfrac{1}{3}}=3.$$

（17）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 连续．（Ⅰ）证明：对于任意的实数 a,b，均有

$$\int_0^{2\pi}f(a\cos x+b\sin x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)dx;$$

（Ⅱ）计算 $I_n=\int_0^{2\pi}(3\cos x+4\sin x)^n dx$，其中 n 为正整数．

证　（Ⅰ）$\int_0^{2\pi}f(a\cos x+b\sin x)dx=\int_0^{2\pi}f[\sqrt{a^2+b^2}(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x)]dx$

$=\int_0^{2\pi}f[\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta_0)]dx$　（其中 $\cos\theta_0=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta_0=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$）

$$\overset{u=x+\theta_0}{=} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin u)du \overset{\text{周期性}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin u)du .$$

（II） 利用（I）中的结论，得 $I_n = \int_{-\pi}^{\pi}(5\sin x)^n dx = 5^n \int_{-\pi}^{\pi}\sin^n xdx$.

当 n 为正奇数时，由积分的奇偶性知， $I_n = 0$.

当 n 为正偶数时，

$$I_n = 2\times 5^n \int_0^{\pi}\sin^n xdx \overset{t=x-\frac{\pi}{2}}{=} 2\times 5^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n tdt = 4\times 5^n \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n tdt .$$

$$= 4\times 5^n \times \frac{(n-1)!!}{n!!}\times\frac{\pi}{2} = 2\pi\times 5^n\times\frac{(n-1)!!}{n!!} .$$

（18）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且满足 $f(0)=1, f'(0)=0$.如果积分

$$\int_L y^2 f'(x)dx + 2y(f'(x)-x)dy$$

与路径无关，求 $f(x)$ ，并计算积分 $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} y^2 f'(x)dx + 2y(f'(x)-x)dy$.

解 $P = y^2 f'(x), Q = 2y(f'(x)-x)$.因为积分与路径无关，所以 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ，即

$$2y(f''(x)-1) = 2yf'(x) .$$

由 y 的任意性可得微分方程 $f''(x) - f'(x) = 1$.该微分方程的通解为

$$f(x) = C_1 + C_2 e^x - x .$$

由 $f(0)=1$ 得 $C_1 + C_2 = 1$.又 $f'(x) = C_2 e^x - 1$ ，再由 $f'(0)=0$ 得 $C_2 = 1$ ，所以 $C_1 = 0$ ，从而 $f(x) = e^x - x$.
此时

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} y^2(e^x-1)dx + 2y(e^x-x-1)dy .$$

取从点 $(0,0)$ 到点 $(1,0)$ 再到点 $(1,1)$ 的折线作为积分路径，则

$$I = \int_0^1 0dx + \int_0^1 2y(e-2)dy = e-2 .$$

（19）（**本题满分 10 分**）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+3}{n+2}x^{2n+2} \Big/ \frac{2n+1}{n+1}x^{2n}\right| = x^2$ ，所以级数的收敛半径 $R=1$ ，收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=\pm 1$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n+1}$ ，发散，所以级数的收敛域为 $(-1,1)$.

设级数的和函数为 $S(x)$ ，则

$$S(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n+1}x^{2n}\overset{\vee}{=}\frac{2x^2}{1+x^2}+S_1(x).$$

因为

$$x^2S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{2(n+1)},$$

$$(x^2S_1(x))'=(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{2(n+1)})'=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}=\frac{-2x^3}{1+x^2},$$

所以

$$x^2S_1(x)=\int\frac{-2x^3}{1+x^2}dx=-\int\frac{x^2}{1+x^2}dx^2=-x^2+\ln(1+x^2)+C.$$

令 $x=0$，得 $C=0$，所以

$$S_1(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x^2), & |x|<1,\text{且}x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{1+x^2}-1+\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x^2), & |x|<1,\text{且}x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

（20）（**本题满分 11 分**）已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ 3x_1+x_2+4x_3+2x_4=0,\\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$ 有两个线性无关的解.

（Ⅰ）证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=3$；（Ⅱ）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\3\\5\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\4\\2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}a\\1\\3\\b\end{pmatrix}$，证明 α_4 必可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示且表示法唯一，并求 a,b 的值.

证（Ⅰ）$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\3&1&4&2\\a&1&3&b\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$Ax=\beta$ 有两个无关的解 η_1,η_2，从而 $Ax=0$ 有一个线性无关的解 $\xi=\eta_1-\eta_2$，故 $4-r(A)\geq 1$，因此 $r(A)\leq 3$，又因为

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\4&3&5\\3&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\4&-1&1\\3&-2&1\end{vmatrix}\neq 0,$$

故 $r(A)\geq 3$，从而 $r(A)=3$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，所以$\alpha_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示法唯一．有题意知$r(A)=r(AM\beta)=3$．

$$r(AM\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\3&1&4&2&0\\a&1&3&b&1\end{array}\right)\overset{\text{行}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&-1&9&-3\\0&0&0&b-14a+31&4a-8\end{array}\right),$$

得$\begin{cases}b-14a+31=0,\\4a-8=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=-3.\end{cases}$

（21）（**本题满分 11 分**）设二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TAx$的正惯性指数为$p=1$，二次型的矩阵A满足$A^2-A=6E$．（Ⅰ）求$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$在正交变换$x=Qy$下的标准形，并写出二次型的规范形；（Ⅱ）求行列式$\left|\dfrac{1}{6}A^*+2A^{-1}\right|$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵；（Ⅲ）记$B=A^2-kA+6E$，问$k$满足何条件时，二次型$g(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TBx$正定．

解　（Ⅰ）由$p=1$且$A^2-A=6E$知A的特征值为λ_A：$3,-2,-2,-2$，则$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$在正交变换$x=Qy$下的标准形为$3{y_1}^2-2{y_2}^2-2{y_3}^2-2{y_4}^2$，规范形为${z_1}^2-{z_2}^2-{z_3}^2-{z_4}^2$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$|A|=-24$，而$A^*=|A|A^{-1}=-24A^{-1}$，从而

$$\left|\frac{1}{6}A^*+2A^{-1}\right|=\left|-2A^{-1}\right|=(-2)^4\frac{1}{|A|}=-\frac{2}{3};$$

（Ⅲ）因为$B=A^2-kA+6E$，则λ_B：$15-3k,10+2k,10+2k,10+2k$，从而当$-5<k<5$时$g(x_1,x_2,x_3,x_4)$正定．

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量X的概率密度函数$f(x)=ae^{-x^2},-\infty<x<+\infty$．（Ⅰ）求常数$a$；（Ⅱ）求$Y=\max\{X,X^2\}$的概率密度函数．

解　（Ⅰ）$f(x)=ae^{-x^2}=ae^{-\frac{x^2}{2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}},-\infty<x<+\infty$，由正态分布的性质知$a=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$．

（Ⅱ）
$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\max\{X,X^2\}\le y\}.$$

（i）当$y<0$时，$F_Y(y)=0$；

（ii）当$0\le y<1$时，

$$F_Y(y)=P\{\max\{X,X^2\}\le y\}=P\{X\le y,X^2\le y\}=P\{X\le y,-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$
$$=P\{-\sqrt{y}\le X\le y\}=\int_{-\sqrt{y}}^{y}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx;$$

（iii）当$y\ge1$时，

$$F_Y(y)=P\{\max\{X,X^2\}\le y\}=P\{X\le y,X^2\le y\}=P\{X\le y,-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx,$$

所以Y的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-y^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-y}\right), & 0\le y<1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}e^{-y}, & y\ge 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（23）（**本题满分 11 分**）设(X_1,X_2,X_3,X_4)是来自总体$X\sim N(0,1)$的简单随机样本，记$Y_1=X_1+X_2,Y_2=X_3-X_4$．（Ⅰ）问$\dfrac{Y_1^2}{Y_2^2}$和$\dfrac{Y_1^2+Y_2^2}{2}$分别服从何分布？（Ⅱ）求$P\{Y_1^2+Y_2^2\le 8\ln 2\}$.

解　（Ⅰ）由正态分布的性质知$Y_1\sim N(0,2),Y_2\sim N(0,2)$，得$\dfrac{Y_1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1),\dfrac{Y_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，所以$\dfrac{Y_1^2}{2}\sim\chi^2(1),\dfrac{Y_2^2}{2}\sim\chi^2(1)$，且$\dfrac{Y_1^2}{2}$和$\dfrac{Y_2^2}{2}$相互独立，故

$$\frac{\dfrac{Y_1^2}{2}\Big/1}{\dfrac{Y_2^2}{2}\Big/1}=\frac{Y_1^2}{Y_2^2}\sim F(1,1),\quad \frac{Y_1^2}{2}+\frac{Y_2^2}{2}=\frac{Y_1^2+Y_2^2}{2}\sim\chi^2(2).$$

（Ⅱ）记$U=\dfrac{Y_1}{\sqrt{2}},V=\dfrac{Y_2}{\sqrt{2}}$，则$U\sim N(0,1),V\sim N(0,1)$，$U$和$V$相互独立，故$(U,V)$的密度函数为

$$f(u,v)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}},\qquad (u,v)\in R^2,$$

所以

$$P\{Y_1^2+Y_2^2\le 8\ln 2\}=P\{U^2+V^2\le 4\ln 2\}=\iint\limits_{u^2+v^2\le 4\ln 2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}dudv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{\ln 2}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr=1-e^{-2\ln 2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试卷 （模拟三）

考生注意:本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）曲线 $y=x^2\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\arctan(x^2)$（　　）.

（A）有一条渐近线　（B）有两条渐近线　（C）有三条渐近线　（D）没有渐近线

答案：选（A）.

解　由于 $\lim\limits_{x\to0}[x^2\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\arctan(x^2)]=0+0=0$，故 $x=0$ 不是垂直渐近线.

又由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}[x\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\arctan(x^2)]=1+0=1=k,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}[x^2\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\arctan(x^2)-x]=\lim_{x\to\infty}[\frac{\arctan\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\arctan(x^2)]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\arctan(x^2)=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{3}(\frac{1}{x})^3}{\frac{1}{x^2}}+0=-\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0=b,$$

所以 $y=x$ 为斜渐近线．故选（A）.

（2）设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(x)>0$． $F(x)=\int_0^{x^2}tf(x^2-t)\,dt$，则（　　）.

（A）$F(x)$ 在点 $x=0$ 处取最小值　　（B）$F(x)$ 在点 $x=0$ 处取最大值

（C）$F'(x)$ 在点 $x=0$ 处取最小值　　（D）$F'(x)$ 在点 $x=0$ 处取最大值

答案：选（A）.

解　$F(x)\overset{u=x^2-t}{=}\int_0^{x^2}(x^2-u)f(u)\,du=x^2\int_0^{x^2}f(u)\,du-\int_0^{x^2}uf(u)\,du$，故 $F'(x)=2x\int_0^{x^2}f(u)\,du$.

当 $x<0$ 时，$F'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处取最小值，选（A）.

或 取 $f(x)=1$，则 $F(x)=\frac{1}{2}x^4$，同样选（A）.

（3）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}=-1$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, $x\in(-\infty,+\infty)$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx, n=1,2,3\mathrm{L}$ ，则函数值 $S(\frac{3}{2})=($　　$)$.

（A）0　　　　（B）1　　　　（C）-1　　　　（D）$\frac{3}{2}$

答案：选（A）.

解　由题设知，将 $f(x)$ 延拓为 $[-1,1]$ 上的奇函数，再将 $f(x)$ 延拓为以 2 为周期的函数，由 Dirichlet 收敛定理知

$$S(\frac{3}{2})=S(2-\frac{1}{2})=S(-\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{2})=-f(\frac{1}{2}),$$

再由 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}=-1$ 知 $f(\frac{1}{2})=0$，故 $S(\frac{3}{2})=0$，故选（A）.

（4）设 D 是由直线 $y=x, x=\frac{1}{2}$ 及 x 轴所围成的区域，则二重积分

$$I_1=\iint\limits_D\sin(x+y)^2d\sigma,\quad I_2=\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)d\sigma,\quad I_3=\iint\limits_D\sin(4x^2)d\sigma$$

的大小关系为（　　）.

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_3<I_2<I_1$　　（C）$I_2<I_1<I_3$　　（D）$I_2<I_3<I_1$

答案：选（C）.

解　因为在 D 上 $xy\ge 0, (x+y)^2\le\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin(x^2+y^2)\le\sin(x+y)^2$，且等于号仅在原点处成立，从而 $\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)d\sigma<\iint\limits_D\sin(x+y)^2d\sigma$.

又因为在 D 上 $0\le y\le x\le\frac{1}{2}$，$\sin(x+y)^2\le\sin(4x^2)$，且等于号仅在直线段 $y=x\,(0\le x\le\frac{1}{2})$ 上成立，从而 $\iint\limits_D\sin(x+y)^2d\sigma<\iint\limits_D\sin(4x^2)d\sigma$，故选（C）.

（5）设 A 为 n 阶方阵 $(n>2)$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则下列命题正确的是（　　）.

（A）若 $Ax=0$ 有 n 个线性无关的解，则 $A^*x=0$ 仅有零解

（B）若 $Ax=0$ 仅有 $n-1$ 个线性无关的解，则 $A^*x=0$ 仅有一个线性无关的解

（C）若 $Ax=0$ 仅有1个线性无关的解，则 $A^*x=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的解

（D）若 $Ax=0$ 仅有零解，则 $A^*x=0$ 有 n 个线性无关的解

答案：选（C）.

解 若 $Ax=0$ 仅有1个线性无关的解，则 $r(A)=n-1$，故 $r(A^*)=1$，从而（C）正确.

（6）矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&a&b\\0&2&c\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为（　　）.

（A）$a=0,b=2,c=2$　　　　（B）$a=0,b=2,c$ 为任意常数

（C）$a=0,b=0,c=0$　　　　（D）$a=2,b=2,c$ 为任意常数

答案：选（B）.

解 设 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&a&b\\0&2&c\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $|\lambda E-A|=\lambda[(\lambda-b)(\lambda-2)-2a^2]$，$B$ 的特征值为 $2,2,0$.

一方面，如果 A 与 B 相似，则 A 的特征值也为 $2,2,0$，故 $a=0,b=2$，此时

$$B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&c\\0&0&0\end{pmatrix},$$

B 能对角化的条件为

$$r(2E-B)=r\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&-c\\0&0&2\end{pmatrix}=1,$$

故 c 为任意常数．另一方面，如果 $a=0,b=2,c$ 为任意常数时，可直接验证 A 与 B 相似，故选（B）.

（7）设有随机变量 X 和凹函数 $g(x)$，若 $g(x)$ 可导，EX 和 $Eg(X)$ 均存在，则（　　）.

（A）$Eg(X)=g(EX)$　　　　（B）$Eg(X)\ge g(EX)$

（C）$Eg(X)\le g(EX)$　　　　（D）$Eg(X)$ 和 $g(EX)$ 的大小关系不确定

答案：选（B）.

解 由于 $g(x)$ 为凹函数，故有 $g(x)\ge g(EX)+g'(EX)(x-EX)$，从而有

$$g(X)\ge g(EX)+g'(EX)(X-EX),$$

两边取数学期望，并利用 $E(X-EX)=0$，得

$$Eg(X)\ge Eg(EX)+g'(EX)E(X-EX)=g(EX).$$

（8）设随机变量 $X\sim U(a,b)$，由切比雪夫不等式得 $P\{|X|\le 1\}\ge\frac{2}{3}$，则 $(a,b)=$（　　）.

（A）$(-2,2)$　　（B）$(0,4)$　　（C）$(-1,1)$　　（D）$(0,2)$

答案：选（C）.

解　由 $P\{|X-EX|\le\varepsilon\}\ge 1-\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$ 知 $EX=0$，$\varepsilon=1$，$DX=\dfrac{1}{3}$.

又 X：$U(a,b)$，所以 $\dfrac{a+b}{2}=0$，$\dfrac{(a-b)^2}{12}=\dfrac{1}{3}$，解得 $a=-1,b=1$．故选（C）.

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）当 $x>-1$ 时，函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+1)$，若 $F(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^3[f(x+\frac{1}{t})-f(x)]\sin\dfrac{x}{t^2}$，则 $\int_0^1 F(x)dx=$__________.

答案：填“$\dfrac{1}{2}-\ln 2$”.

解　因为 $f(x)=[\ln(x+1)]'=\dfrac{1}{x+1}$，所以

$$F(x)=\lim_{t\to\infty}t^3[f(x+\frac{1}{t})-f(x)]\cdot\frac{x}{t^2}=x\lim_{t\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{t})-f(x)}{\frac{1}{t}}=xf'(x)=x(\frac{1}{x+1})'=-\frac{x}{(x+1)^2},$$

故 $$\int_0^1F(x)dx=-\int_0^1\frac{x+1-1}{(1+x)^2}dx=-\int_0^1[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}]dx=-[\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}]\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\ln 2.$$

或 $$\int_0^1F(x)dx=\int_0^1xd\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{2}-\ln(x+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\ln 2.$$

（10）已知凹曲线 $y=y(x)$ 在任一点 $P(x,y)$ 处的曲率 $K=\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}$，且 $y(0)=0,y'(0)=0$，则 $y(x)=$__________.

答案：填“$\dfrac{1}{2}x^2$”.

解　由题意知 $\dfrac{y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3}=\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}$．令 $y'=p$，由 $\int\dfrac{1}{(\sqrt{1+p^2})^3}dp=\int\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}dx$，解得

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C_1.$$

又由 $y'(0)=0$ 得 $C_1=0$，故 $y'=x$，积分得 $y=\dfrac{1}{2}x^2+C_2$，又 $y(0)=0$ 得 $C_2=0$，所以 $y(x)=\dfrac{1}{2}x^2$.

（11）由曲线 $y=x^2-1$，直线 $y=-1,x=2$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为__________.

答案：“8π”.

解法 1　$V=4\times4\pi-\pi\int_{-1}^{3}(1+y)dy=8\pi$.

解法 2 $V=2\pi\int_1^2 x(x^2-1)dx+2\pi\int_0^1 x(1-x^2)dx+(4\pi-\pi)\times 1=8\pi$.

解法 3 $V=2\pi\int_1^2 x(x^2-1)dx+\pi\int_{-1}^0[2^2-(1+y)]dy=8\pi$.

解法 4 将曲边梯形上移一个单位，即为曲线 $y=x^2$，直线 $y=0,x=2$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积 $V=2\pi\int_0^2 x\cdot x^2dy=8\pi$.

错误解法 1 $V=2\pi\int_0^2 x(x^2-1)dx$.

错误解法 2 $V=2\pi\int_0^2 x\left|x^2-1\right|dx$.

（12）设函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y, z(x,0)=x, z(0,y)=y^2$，则 $z(x,y)=$__________.

答案：填“$\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+y^2$”.

解 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 为 x 的可微函数，于是

$$\frac{\partial z(x,0)}{\partial x}=\varphi(x), \tag{1}$$

由 $z(x,0)=x$ 得

$$\frac{\partial z(x,0)}{\partial x}=1. \tag{2}$$

故由（1），（2）知 $\varphi(x)=1$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+1$，从而 $z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+\psi(y)$，其中 $\psi(y)$ 为 y 的可微函数．由 $z(0,y)=y^2$ 得 $\psi(y)=y^2$，因此

$$z=z(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+y^2.$$

（13）设向量 $\alpha_1=(1,1)^T$，$\alpha_2=(0,1)^T$ 和 $\beta_1=(2,1)^T$，$\beta_2=(1,3)^T$，ξ 在 α_1,α_2 下的坐标为 $(-1,1)^T$，则 ξ 在 β_1,β_2 下的坐标为__________.

答案：填“$(-\frac{3}{5},\frac{1}{5})^T$”.

解 设 $\xi=y_1\beta_1+y_2\beta_2$，故 $(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$，得

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2)^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=(-\frac{3}{5},\frac{1}{5})^T.$$

（14）设事件 A,B 相互独立，A,C 互斥，$P(A)=0.2, P(B)=0.3, P(C)=0.4$，则 $P(AB\big|\overline{C})=$______.

答案：填“0.1”.

解　因为 A,B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$．又由于 A,C 互斥，故 $P(AC)=0$，从而 $P(ABC)=0$，因此

$$P(AB\big|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{0.2\times0.3}{1-0.4}=0.1\,.$$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分 10 分**）（Ⅰ）证明当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$；

（Ⅱ）设 $I(x)=\int_0^1\dfrac{\ln(1+xt)}{t}\cos\dfrac{\pi}{2}t\,dt$，求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{I(x)}{x}$.

证　（Ⅰ）由于 $\ln(1+x)-\ln1=\dfrac{x}{1+\xi}$，其中 $0<\xi<x$，所以 $1<1+\xi<1+x$，得 $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$，故 $\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$，即得 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $\dfrac{xt}{1+xt}<\ln(1+xt)<xt$，其中 $x>0,0<t<1$，故 $\dfrac{x}{1+xt}<\dfrac{\ln(1+xt)}{t}<x$．

由于 $0<t<1$，故 $\dfrac{x}{1+xt}>\dfrac{x}{1+x}$，得 $\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{\ln(1+xt)}{t}<x$，进而

$$\frac{x}{1+x}\cos\frac{\pi}{2}t<\frac{\ln(1+xt)}{x}\cos\frac{\pi}{2}t<x\cos\frac{\pi}{2}t\,,$$

在 $(0,1)$ 内对 t 积分得 $\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{x}{1+x}<I(x)<\dfrac{2}{\pi}x$，故 $\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{I(x)}{x}<\dfrac{2}{\pi}$．因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{2}{\pi}$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{I(x)}{x}=\dfrac{2}{\pi}$.

（16）（**本题满分 10 分**）设幂级数的系数满足 $a_0=5, na_n=a_{n-1}+3(n-1), n=1,2,3L$ ．

（Ⅰ）求幂级数的和函数 $S(x)$ 满足的一阶微分方程；（Ⅱ）求 $S(x)$．

解　（Ⅰ）记 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+3\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{n-1}=S(x)+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=S(x)+\frac{3x}{(1-x)^2}\,,$$

即得

$$S'(x)-S(x)=\frac{3x}{(1-x)^2},\quad -1<x<1\,,$$

且 $S(0)=a_0=5$．

（Ⅱ）解 1 $S(x)=e^{x}(3\int e^{-x}\frac{x}{(1-x)^{2}}dx+C)=e^{x}(\frac{3e^{-x}}{1-x}+C)=Ce^{x}+\frac{3}{1-x}$.

由 $a_0=5=S(0)$ 知，$C=2$，故

$$S(x)=2e^{x}+\frac{3}{1-x}，\ -1<x<1 .$$

解 2　由题设得，$n(a_n-3)=a_{n-1}-3$．令 $b_n=a_n-3$，所以 $nb_n=b_{n-1}$，则 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{1}{n},\mathrm{L}\ ,\frac{b_2}{b_1}=\frac{1}{2}$，

又因为 $b_1=a_1-3=a_0-3=2$，所以 $b_n=\frac{2}{n!}$，故 $a_n=\frac{2}{n!}+3$，故

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{n!}+3)x^{n}=2e^{x}+\frac{3}{1-x},\quad x\in(-1,1) .$$

（17）（**本题满分 10 分**）设函数 $z=xf(x-y,\varphi(xy^2))$，f 具有二阶连续偏导数，φ 具有二阶导数，且 $\varphi(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2}=1$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f+xf_1'+xy^2\varphi' f_2';$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'\cdot(-1)+f_2'\varphi' 2xy+x[(f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\varphi' 2xy)]$$

$$+xy^2\varphi'[(f_{21}''\cdot(-1)+f_{22}''\varphi' 2xy)]+xy^2f_2'\varphi''\cdot 2xy+2xy\varphi' f_2'$$

$$=-f_1'+4xy\varphi' f_2'+2x^2y^3\varphi'' f_2'-xf_{11}''+(2x^2y-xy^2)\varphi' f_{12}''+2x^2y^3\varphi'^2 f_{22}'',$$

又因为 $\varphi(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2}=1$，故 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=0,\varphi''(1)=2$，从而

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=-f_1'(0,1)+4f_2'(0,1)-f_{11}''(0,1) .$$

（18）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上均二阶可导，且 $g''(x)\neq0$，证明：（Ⅰ）$g(b)-g(a)\neq g'(a)(b-a)$；（Ⅱ）在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{g(b)-g(a)-g'(a)(b-a)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

证（Ⅰ）用反证法．假设 $g(b)-g(a)=g'(a)(b-a)$，由 Lagrange 中值定理知，存在 $\xi_1\in(a,b)$，使
$$g(b)-g(a)=g'(\xi_1)(b-a),$$

从而由假设知 $g'(\xi_1)=g'(a)$，再由 Rolle 中值定理知，存在 $\xi_2\in(a,\xi_1)\ \subset(a,b)$，使 $g''(\xi_2)=0$，这与 $g''(x)\neq0$ 矛盾，因此 $g(b)-g(a)\neq g'(a)(b-a)$.

（Ⅱ）令 $F(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a),\ G(x)=g(x)-g(a)-g'(a)(x-a)$，则

$$F(a)=G(a)=0，\ F'(a)=G'(a)=0，且\quad F''(x)=f''(x),G''(x)=g''(x),$$

故对 $F(x),G(x)$ 在 $[a,b]$ 上两次运用 Cauchy 中值定理得

$$\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{g(b)-g(a)-g'(a)(b-a)}=\frac{F(b)}{G(b)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi_3)}{G'(\xi_3)}=\frac{F'(\xi_3)-F'(a)}{G'(\xi_3)-G'(a)}=\frac{F''(\xi)}{G''(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)},$$

其中$\xi_3\in(a,b)$，$\xi\in(a,\xi_3)\subset(a,b)$.

（19）（**本题满分 10 分**）求半圆柱面$x^2+y^2=1\,(y\ge 0)$被平面$z=0$及椭圆抛物面$z=2x^2+y^2$所截下的有限部分图形的面积.

解 1　把所涉曲面记为Σ，将Σ在xOy面上的投影曲线$L: x^2+y^2=1\,(y\ge 0), z=0$改写为参数式

$$L:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\quad 0\le t\le \pi,\\ z=0,\end{cases}$$

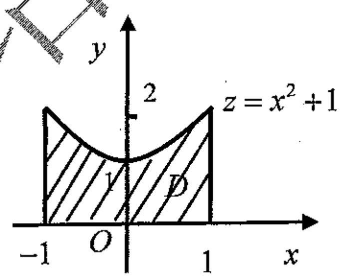
则Σ的面积为

$$A=\int_L(2x^2+y^2)ds=\int_0^{\pi}(2\cos^2 t+\sin^2 t)\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}(1+\cos^2 t)dt=\int_0^{\pi}\frac{3+\cos 2t}{2}dt=\frac{3}{2}\pi .$$

解 2　把所求曲面记为Σ，由$\begin{cases}x^2+y^2=1\,(y\ge 0),\\ z=2x^2+y^2\end{cases}$消去$y$，得$z=x^2+1$，$\Sigma$在$zOx$面上的投影区域如图$D$所示.则$\Sigma$的面积为

$$A=\iint_{\Sigma}dS=\iint_D\sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial z})^2+(\frac{\partial y}{\partial x})^2}\,dzdx$$



$$=\iint_D\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})^2}\,dzdx$$

$$=\iint_D\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dzdx=\int_{-1}^{1}[\int_0^{x^2+1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dz]$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_0^1\frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+1)dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1-\cos 2t}{2}+1)dt=\frac{3}{2}\pi .$$

（20）（**本题满分 11 分**）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$为 4 维列向量，记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4), B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，已知非齐次线性方程组$Ax=\beta$的通解为$x=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$为任意常数），试求$By=\beta$的通解.

解　由题意可知$r(A)=2$，且有

$$\begin{cases}\beta=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4,\\ \alpha_1+2\alpha_2+0\cdot\alpha_3+\alpha_4=0,\\ -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+0\cdot\alpha_4=0,\end{cases}\quad 得\quad \begin{cases}\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2,\\ \alpha_4=-\alpha_1-2\alpha_2,\\ \beta=2\alpha_1-5\alpha_2+0\cdot\alpha_3,\end{cases}$$

可知α_1,α_2线性无关，故$r(B)=2$，并由此知$By=0$的基础解系中只含一个向量，且$(2,-5,0)^T$为$By=\beta$的一个特解.

又由$-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$知$(-1,1,1)^T$为$By=0$的非零解，可作为基础解系，故$By=\beta$的通解为

$$y=\begin{pmatrix}2\\-5\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R.$$

(21)（本题满分 11 分）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\,2}-x_2^{\,2}+2ax_1x_3+4x_2x_3$.（Ⅰ）若$a>2$，求二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形；（Ⅱ）若二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的正负惯性指数均为1，求该二次型在正交变换下的标准形.

解 （Ⅰ）二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$，$|A|=a^2-4$. 设$A$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，

则
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+(-1)+0=0.$$

若$a>2$，则$|A|>0$，故$\lambda_1\lambda_2\lambda_3>0$. 由此知$A$的特征值为正负负，故$A$的规范形为$y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

（Ⅱ）由题意知$|A|=0$，从而$a^2=4$，从而$|\lambda E-A|=\lambda^3-(5+a^2)\lambda-a^2+4=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$，所以在正交变换下的标准形为$3y_1^2-3y_2^2$.

(22)（本题满分 11 分）设随机变量(X,Y)服从平面区域$D:x^2+y^2\le1$上的均匀分布，(R,Θ)为(X,Y)的极坐标表示，其中$0\le R\le1,0\le\Theta\le2\pi$.（Ⅰ）求$P\{R\le\frac{1}{2},\Theta\le\frac{\pi}{2}\}$；（Ⅱ）求$(R,\Theta)$的密度函数$f_{R,\Theta}(r,\theta)$，以及$R$和$\Theta$的边缘密度函数$f_R(r)$和$f_\Theta(\theta)$，并问$R$和$\Theta$是否相互独立？

解 （Ⅰ）由几何概型知$P\{R\le\frac{1}{2},\Theta\le\frac{\pi}{2}\}=\dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}}{\pi}=\dfrac{1}{16}$.

（Ⅱ）记(R,Θ)的分布函数为$F_{R,\Theta}(r,\theta)$，则$F_{R,\Theta}(r,\theta)=P\{R\le r,\Theta\le\theta\}$.

当$r<0$或$\theta<0$时，$F_{R,\Theta}(r,\theta)=0$；当$r>1$且$\theta>2\pi$时，$F_{R,\Theta}(r,\theta)=1$；

当$0\le r\le1,0\le\theta\le2\pi$时，
$$F_{R,\Theta}(r,\theta)=\frac{r^2\pi\times\frac{\theta}{2\pi}}{\pi}=\frac{r^2\theta}{2\pi};$$

同理. 当$r>1,0\le\theta\le2\pi$时，$F_{R,\Theta}(r,\theta)=\dfrac{\theta}{2\pi}$；当$0\le r\le1,\theta>2\pi$时，$F_{R,\Theta}(r,\theta)=r^2$.

进而得

$$f_{R,\Theta}(r,\theta)=\frac{\partial^2F_{R,\Theta}(r,\theta)}{\partial r\partial\theta}=\begin{cases}\dfrac{r}{\pi}, & 0\le r\le1,0\le\theta\le2\pi,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

并且R和Θ的边缘密度分别为

$$f_R(r)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{R,\Theta}(r,\theta)d\theta=\begin{cases}\int_0^{2\pi}\frac{r}{\pi}d\theta, & 0\le r\le 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}2r, & 0\le r\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$f_\Theta(\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{R,\Theta}(r,\theta)dr=\begin{cases}\int_0^{1}\frac{r}{\pi}dr, & 0\le\theta\le 2\pi,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\le\theta\le 2\pi,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

由于 $f_{R,\Theta}(r,\theta)=f_R(r)f_\Theta(\theta)$，所以 R 和 Θ 相互独立.

（23）（**本题满分 11 分**）为估计某盒子中球的个数 N （$N>10$），先从盒子中任取10个球，涂上颜色后放回盒子中并搅拌均匀，然后再从盒子中有放回地任取6个球，发现其中有4个的球涂有颜色，（Ⅰ）求 N 的矩估计值；（Ⅱ）求 N 的极大似然估计值；（Ⅲ）若继续从盒子中有放回地取球，求第4次取球恰好第2次取到涂有颜色球的概率 p 的极大似然估计值.

解　设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{次取到涂有颜色的球},\\ 0, & \text{第}i\text{次取到没有颜色的球},\end{cases}$　$i=1,2\cdots 6$，由题意，总体 $X:\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-\frac{10}{N} & \frac{10}{N}\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）令 $\overline{x}=EX$，得 $\frac{4}{6}=\frac{10}{N}$，解得 $\hat{N}=15$.

（Ⅱ）$L=(\frac{10}{N})^4(1-\frac{10}{N})^2$，$\ln L=4\ln\frac{10}{N}+2\ln(1-\frac{10}{N})$，令 $\frac{d\ln L}{dN}=-\frac{4}{N}+2(\frac{1}{N-10}-\frac{1}{N})=0$，解得 $\hat{N}=15$.

（Ⅲ）第 4 次取球恰好第 2 次取到涂有颜色的球的概率的极大似然估计值为

$$p=C_3^1(\frac{10}{N})(1-\frac{10}{N})^2\cdot\frac{10}{N}=3(\frac{10}{N})^2(1-\frac{10}{N})^2,$$

则 p 的极大似然估计值 $\hat{p}=3\cdot(\frac{2}{3})^2\cdot(1-\frac{2}{3})^2=\frac{4}{27}$.

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试卷 （模拟四）试题答案和评分参考

一、选择题

（1）答案：选（A）.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1+xf(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+f(x)+xf'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+f(0)}{2x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{2x}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=3$，

故知 $f(0)=-1$，又

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+f(0)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{2x}=\frac{1}{2}f'(0),\quad \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}f'(x)=\frac{1}{2}f'(0),$$

所以 $\dfrac{1}{2}+f'(0)=3$，得 $f'(0)=\dfrac{5}{2}$，故选（A）.

（2）答案：选（D）.

解 假设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可取正的最大值 $f(x_0)$ $(x_0\in(a,b))$，则 $f'(x_0)=0, f(x_0)>0$．但由已知条件得 $f''(x_0)=-v(x_0)f(x_0)>0$，所以 $f(x)$ 在点 x_0 处取极小值 $f(x_0)$，矛盾，故 $f(x)$ 在 (a,b) 不能取正的最大值，同理知 $f(x)$ 在 (a,b) 内也不能取负的最小值，选（D）.

（3）答案：选（B）.

解 由于 $\lim\limits_{\substack{y=x^2\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4+x^4}=\dfrac{1}{2}\neq f(0,0)$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

又因为 $f_x'(0,0)=0, f_y'(0,0)=0$，知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处两个偏导数均存在.

（4）答案：选（C）.

解 由于
$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}\overset{\text{罗比达法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

所以 $F'(0)=1$．由于

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{G(x)}{x}\overset{\text{罗比达法则}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{G'(x)}{1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

所以 $G_-'(0)=1$；又

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{0-0}{x}=0,$$

所以 $G_+'(0)=0$，故 $G(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导.

（5）答案：选（B）.

解 由题意知，$r(A)=2$，故α_1,α_2无关. 又因$\alpha_1^T\xi=\alpha_2^T\xi=0$，得$\xi^T\alpha_1=\xi^T\alpha_2=0$，若有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\xi=0,$$

上式左乘ξ^T，得$k_3\xi^T\xi=0$，故$k_3=0$，代入上式，得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$，从而有$k_1=k_2=0$，选（B）.

（6）答案：选（B）.

解 由题意可知，$E(3,1(2))AE(3,1(-2))=B$，即$E^{-1}(3,1(-2))AE(3,1(-2))=B$，所以$A,B$相似. 又$A$为实对称阵，所以$A$相似于对角阵$\Lambda$，由传递性知，$B$必相似于对角矩阵. 故选（B）.

（7）答案：选（D）.

解 $F(x)=\dfrac{1+\operatorname{sgn}(x)}{2}$在点$x=0$处不右连续，（A）不正确.

$F(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$不是非负函数，如$F(-1)=\dfrac{-1}{e-1}<0$. 另外，$F'(x)=\dfrac{(1+x)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$，当$x<-1$时，$F(x)$为单减函数，（B）不正确.

$F(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$，有$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，（C）不正确. 故选（D）.

（8）答案：选（A）.

解 如果$X\sim B(1,p),Y\sim B(1,p)$，则

X与Y不相关$\Leftrightarrow E(XY)=EXEY\Leftrightarrow P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}\Leftrightarrow X$与$Y$相互独立.

(详细过程参见 2015 年超越强化班讲义第 282 页例 4(4))

二、填空题

（9）答案：填“$(-1)^{n-1}2n(2n+1)2^{2n-1}$”.

解 1 $f^{(2n+1)}(x)=C_{2n+1}^0\cdot x^2(\sin 2x)^{(2n+1)}+C_{2n+1}^1\cdot 2x(\sin 2x)^{(2n)}+C_{2n+1}^2\cdot 2(\sin 2x)^{(2n-1)}$，

所以 $$f^{(2n+1)}(0)=(2n+1)\cdot 2n\cdot 2^{2n-1}\cdot\sin(n\pi-\frac{\pi}{2})=(-1)^{n-1}2n(2n+1)2^{2n-1}.$$

解 2 一方面

$$f(x)=x^2[2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots]=2x^3-\frac{2^3x^5}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n-1)!}+\cdots.$$

另一方面， $$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots.$$

比较系数，有$\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}=(-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}$，故$f^{(2n+1)}(0)=(-1)^{n-1}2n(2n+1)2^{2n-1}$.

（10）答案：填“2”.

解 $\int_0^1(\ln x)^2dx=x\ln^2x\Big|_0^1-2\int_0^1\ln xdx=-2\int_0^1\ln xdx=-2(x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1dx)=2$.

（11）答案：填“1”.

解 $\mathrm{grad}u\Big|_{(1,-1,\sqrt{2})}=\{u'_x,u'_y,u'_z\}\Big|_{(1,-1,\sqrt{2})}$

$$=\{\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\}_{(1,-1,\sqrt{2})}=\{\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\},$$

所以该函数在点$(1,-1,\sqrt{2})$处沿各方向的方向导数的最大值为

$$\left|\mathrm{grad}u\Big|_{(1,-1,\sqrt{2})}\right|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{-1}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=1.$$

（12）答案：填“$\sqrt{3}(e^2-1)$”.

解 $s=\int_\Gamma ds=\int_0^2\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt=\int_0^2\sqrt{3}e^tdt=\sqrt{3}(e^2-1)$.

（13）答案：填“2”.

解 由$A\neq O$，得$r(A)\geq 1$，由$A^2=O$，得$r(A)+r(A)\leq 3$，故$r(A)\leq\dfrac{3}{2}<2$，从而$r(A)=1$，故填“2”.

（14）答案：填“$1-e^{-2}$”.

解 $P\{Y<EY\}=P\{(X-EX)^2<DX\}=P\{|X-EX|<\sqrt{DX}\}=P\{\left|X-\dfrac{1}{\lambda}\right|<\dfrac{1}{\lambda}\}$

$$=P\{0<X<\frac{2}{\lambda}\}=\int_0^{\frac{2}{\lambda}}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^{\frac{2}{\lambda}}=1-e^{-2}.$$

三、解答题

（15）解 $m=e^{-x}(x^2-3)$，令$\varphi(x)=e^{-x}(x^2-3)$，则

$\varphi'(x)=-e^{-x}(x^2-3)+e^{-x}\cdot 2x=-e^{-x}(x+1)(x-3)$，解$\varphi'(x)=0$，得$x_1=-1,x_2=3$， ……3分

由此可得

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	单调递减	$-2e$	单调递增	$6e^{-3}$	单调递减

故$\varphi(x)$当$x=-1$时取极小值$-2e$；当$x=3$时取极大值$6e^{-3}$，又$\varphi(x)$当$x\to-\infty$时，$\varphi(x)\to+\infty$；当$x\to+\infty$时，$\varphi(x)\to0$，因此 ……6分

①当$m<-2e$时方程无实根；

②当$-2e<m\le0$及$m=6e^{-3}$时，方程有两个实根；

③当$0<m<6e^{-3}$时方程为三个实根；

④$m>6e^{-3}$时，方程有一个实根. ……10分

（16）证 （Ⅰ）在已知方程两边分别对x,y求偏导数，得

$$F_1'\frac{z-z_0-\frac{\partial z}{\partial x}(x-x_0)}{(z-z_0)^2}+F_2'\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}(y-y_0)}{(z-z_0)^2}=0,$$

$$F_1'\frac{-\frac{\partial z}{\partial y}(x-x_0)}{(z-z_0)^2}+F_2'\frac{z-z_0-\frac{\partial z}{\partial y}(y-y_0)}{(z-z_0)^2}=0,$$ ……3分

解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{(z-z_0)F_1'}{(x-x_0)F_1'+(y-y_0)F_2'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{(z-z_0)F_2'}{(x-x_0)F_1'+(y-y_0)F_2'}$. 从而

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0$$ ……5分

（Ⅱ）在（Ⅰ）式两边分别对x,y求偏导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}+(x-x_0)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(y-y_0)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x},\quad (x-x_0)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}+(y-y_0)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial z}{\partial y},$$ ……7分

得$(x-x_0)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(y-y_0)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$，$(x-x_0)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+(y-y_0)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. 移项后相乘，并消去$x-x_0,y-y_0$，

整理即得$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})^2$. ……10分

（17）解　首先考虑正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)dx. \qquad \cdots\cdots 2\text{分}$$

因为当$x\in[0,1]$时，$\ln(1+x)\le x$，$(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)\le(1-x)x^n$，所以

$$\int_0^1(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)dx\le\int_0^1(1-x)x^n dx=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n^2}. \qquad \cdots\cdots 6\text{分}$$

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，由比较判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)dx$也收敛.

注意到

$$\left|\sin n\cdot\int_0^1(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)dx\right|\le\int_0^1(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)dx, \qquad \cdots\cdots 8\text{分}$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin n\cdot\int_0^1(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)dx\right|$，即原级数绝对收敛.　　　　……10分

（18）解　曲线$y=y(x)$在点$P(x,y)$处的切线方程为$Y-y=y'(X-x)$，令$X=0$，得切线在y轴上的截距为$y-xy'$，故由题意知

$$\int_1^x\sqrt{1+y'^2(t)}dt=|y-xy'|. \qquad \cdots\cdots 3\text{分}$$

在上式中令$x=1$，并由$y(1)=1$，得$y'(1)=1$．记$f(x)=y-xy'$，则$f(1)=0$．当$x\ge1$时，

$f'(x)=-xy''<0$，所以$f(x)\le f(1)=0$，即$y-xy'\le0$．因此

$$\int_1^x\sqrt{1+y'^2(t)}dt=xy'-y.$$

两边对x求导，得

$$\sqrt{1+y'^2}=xy''. \qquad \cdots\cdots 5\text{分}$$

令$p=y'$，则$y''=\frac{dp}{dx}$，所以$\sqrt{1+p^2}=x\frac{dp}{dx}$，解得$p+\sqrt{1+p^2}=C_1x$．由$p(1)=y'(1)=1$，解得$C_1=1+\sqrt{2}$，故$p+\sqrt{1+p^2}=(1+\sqrt{2})x$．变形为

$$\sqrt{1+p^2}-p=\frac{1}{(1+\sqrt{2})x},$$

进而相减得$p=\frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})x-\frac{1}{(1+\sqrt{2})x}]$．即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})x-\frac{1}{(1+\sqrt{2})x}].$$ ……8 分

故 $y=\frac{1}{4}(1+\sqrt{2})x^2-\frac{1}{2(1+\sqrt{2})}\ln x+C_2$. 由 $y(1)=1$，解得 $C_2=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{2}$，所以所求曲线为

$$y=\frac{1}{4}(1+\sqrt{2})x^2-\frac{1}{2(1+\sqrt{2})}\ln x+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{2},\quad x\geq 1.$$ ……10 分

（19）解　所给曲面 S 方程为 $z=x^2+y^2-1(0\leq z\leq 3)$. ……2 分

取 $S_1:z=0\ (x^2+y^2\leq 1)$ 的下侧以及 $S_2:z=3\ (x^2+y^2\leq 4)$ 的上侧，由 S_1,S_2,S_3 围成的空间区域设为 Ω，则由 Gauss 公式知

$$\oiint\limits_{S_1+S_2+S_3}=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y)dxdydz.$$ ……4 分

由对称性知 $\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y)dxdydz=0$，所以

$$I=-\iint\limits_{S_1+S_2}=\iint\limits_{S_1}x^2dxdy+\iint\limits_{S_2}(x^2-12x)dxdy.$$ ……6 分

设 S_1,S_2 在 xOy 面上的投影区域分别为 D_1,D_2，则 $D_1:x^2+y^2\leq 1,D_2:x^2+y^2\leq 4$，于是

$$I=-\iint\limits_{D_1}x^2dxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2-12x)dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_1}x^2dxdy+\iint\limits_{D_2}x^2dxdy=-\frac{1}{2}\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr=\frac{15}{4}\pi.$$ ……10 分

（20）解　（Ⅰ）因为 $r(B)=2$，故 $Bx=0$ 的基础解系含有 2 个无关的解，进而得 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$. 又

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&-1&a\\1&1&b\\2&4&6\\3&-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&a\\0&2&b-a\\0&6&6-2a\\0&2&2-3a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&a\\0&2&b-a\\0&0&6-3b+a\\0&0&2-b-2a\end{pmatrix},$$

所以 $\begin{cases}6-3b+a=0,\\2-b-2a=0,\end{cases}$ 得 $a=0,b=2$. ……5 分

（Ⅱ）由于 α_1,α_2 线性无关，且 $4-r(B)=2$，所以 α_1,α_2 为 $Bx=0$ 的基础解系. ……7 分

方法 1　把 α_1,α_2 正交化，取

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \beta_2=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\begin{pmatrix}k_1-k_2\\k_1+k_2\\2k_1+4k_2\\3k_1-k_2\end{pmatrix},$$

由 $\beta_1\perp\beta_2$，得 $k_1-k_2+k_1+k_2+4k_1+8k_2+9k_1-3k_2=0$，即 $k_2=-3k_1$，取 $k_1=1,k_2=-3$，得

$\beta_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\-10\\6\end{pmatrix}$，可取 $\dfrac{\beta_2}{2}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\\3\end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\\3\end{pmatrix}$ 为 $Bx=0$ 的正交的基础解系. ……11 分

方法 2 由施密特正交化公式：

$$\beta_1=\alpha_1,\quad \beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\\-3\end{pmatrix},$$

则 β_1,β_2 为 $Bx=0$ 的正交的基础解系. ……11 分

（21）解 （Ⅰ）记 $x=(x_1,x_2,x_3)^T,\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3})^T,i=1,2,3$，则 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\end{pmatrix},A^T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

由于 $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=x^T\alpha_1=\alpha_1^Tx$，故

$$(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)^2=x^T\alpha_1\alpha_1^Tx.$$

同理，$(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)^2=x^T\alpha_2\alpha_2^Tx,\ (a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)^2=x^T\alpha_3\alpha_3^Tx$，因此，

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3)^2=x^T(\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\alpha_3\alpha_3^T)x=x^T(A^TA)x.$$

所以 f 的矩阵为 A^TA. …… 7 分

（Ⅱ）$f(x_1,x_2,x_3)$ 正定 $\Leftrightarrow\forall x\neq0,x^T(A^TA)x>0$，即

$$(Ax)^TAx>0\Leftrightarrow\forall x\neq0,\|Ax\|^2>0\Leftrightarrow\forall x\neq0,Ax\neq0\Leftrightarrow|A|\neq0.$$ ……11 分

（22）解 （Ⅰ）设 A_n 表示第 n 次试验成功，$n=1,2,\cdots$，则 $P(A_1)=P_1=\dfrac{1}{2}$，且当 $n\geq2$ 时，

$$P_n=P(A_n)=P(A_{n-1})P(A_n|A_{n-1})+P(\overline{A}_{n-1})P(A_n|\overline{A}_{n-1})=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{3}{4}(1-P_{n-1})=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}P_{n-1}.$$ ……3 分

由于

$$P_n-\frac{3}{5}=-\frac{1}{4}(P_{n-1}-\frac{3}{5})=\cdots=(-\frac{1}{4})^{n-1}(P_1-\frac{3}{5})=-\frac{1}{10}(-\frac{1}{4})^{n-1},$$

所以 $P_n=\frac{3}{5}-\frac{1}{10}(-\frac{1}{4})^{n-1}$，$n=1,2,\cdots$. ……6 分

（Ⅱ）$P\{X=1\}=P_1=\frac{1}{2}$；当 $n\geq 2$ 时，

$$P\{X=n\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1}A_n)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdots P(A_n|\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1})$$

$$=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdots P(A_n|\overline{A}_{n-1})=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{4})^{n-2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\cdot(\frac{1}{4})^{n-2},$$ ……8 分

所以

$$\mathrm{E}X=1\times\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot\frac{3}{8}(\frac{1}{4})^{n-2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\cdot 4\sum_{n=2}^{\infty}n(\frac{1}{4})^{n-1}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\sum_{n=2}^{\infty}x^n)'\Big|_{x=\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{x^2}{1-x})'\Big|_{x=\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}[\frac{1}{(1-x)^2}-1]\Big|_{x=\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}[\frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2}-1]=\frac{5}{3}.$$ ……11 分

（23）解　（Ⅰ）由题意知，$Y=\ln X$ 的概率密度函数为 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<y<+\infty$.

因为 $x=e^y$ 单增，$y=\ln x$，由公式得 $X=e^Y$ 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & 0<x<+\infty,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$ ……5 分

（Ⅱ）$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}$,

$$\ln L(\lambda)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\ln(x_1x_2\cdots x_n)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2,$$

由 $\frac{d\ln L}{d(\sigma^2)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2=0$，得 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i-\mu)^2$.

（Ⅲ）$E\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i-\mu)^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\ln X_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D(\ln X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\sigma^2$,

所以 $\hat{\sigma}^2$ 是参数 σ^2 的无偏估计. ……11 分

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试卷（模拟五）试题答案和评分参考

一、选择题

（1）答案：选（D）.

解 由题意知 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$，故

$$\lim_{x\to -1^-} f(-x) \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to 1^+} f(t)=f(1)，\quad \lim_{x\to -1^+} f(-\frac{1}{x}) \overset{t=-\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 1^+} f(t)=f(1).$$

（2）答案：选（C）.

解 （A）设有 $|b_n|\le M$，从而 $|a_nb_n|\le M|a_n|$，由比较判别法可知（A）正确.

（B）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 T_n，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ 存在. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n+1})$ 的部分和为

$$S_n=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})=T_n-na_{n+1},$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_{n+1}=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(T_n-na_{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ 存在，故（B）正确.

（C）不正确. 如 $\{a_n\}=\{(-1)^n\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-1<1$，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散.

（D）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_1a_n+a_2a_n+\cdots+a_n^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nS_n$. 又正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，故其部分和数列 T_n 有界，设 $T_n\le M$，所以 $|S_n|\le T_n\le M$，从而 $|a_nS_n|\le M|a_n|$，由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_1a_n+a_2a_n+\cdots+a_n^2)$ 收敛.

（3）答案：选（C）.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=2$，由极限保号性定理可知存在 $\delta>0$，在 $(0,\delta)$ 内有 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调递增，所以选（C）.

取 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\ne 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 得 $f'(x)=2\,(x\ne 0)$，故 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=2$，但 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x-1}{x}=\infty$，

即 $f_+'(0)$ 不存在，故（A）不正确；

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\ne f(0)$，故（B）不正确；且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值，故（D）不正确.

（4）答案：选（B）.

解 $I=\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos x^2dx \overset{x=\sqrt{u}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos u\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}du=\frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}du+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}du)$,

而
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}du \overset{x=\pi-t}{=} -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sqrt{\pi-t}}dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sqrt{\pi-u}}du,$$

所以
$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u(\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{1}{\sqrt{\pi-u}})du>0.\quad J \overset{t=x-\frac{\pi}{2}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin te^{\cos^2 t}dt=0,$$

所以选（B）.

（5）答案：选（B）.

解 $A_1x=\beta_1$ 与 $A_2x=\beta_2$ 同解的充要条件为 $(A_1\vdots\beta_1)$ 与 $(A_2\vdots\beta_2)$ 的行向量组等价，故 A_1 与 A_2 的行向量组必等价，（III）正确．又由
$$r(A_1\vdots\beta_1)=r(A_2\vdots\beta_2)=r\begin{pmatrix}A_1 & \beta_1\\ A_2 & \beta_2\end{pmatrix},$$

及 $r(A_1\vdots\beta_1)=r(A_1)$, $r(A_2\vdots\beta_2)=r(A_2)$ 知（Ⅰ）正确，因此正确的个数为2．

反例，取 $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$；$A_2=\begin{pmatrix}3&3\\1&1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$．显然
$$\begin{cases}x_1+x_2=1,\\2x_1+2x_2=2\end{cases}\quad 与 \quad\begin{cases}3x_1+3x_2=3,\\x_1+x_2=1\end{cases}$$

同解，但（II），（IV），（V）不正确；故选（B）.

（6）答案：选（C）.

解 $\begin{vmatrix}c&\alpha^T\\\beta&A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c-b+b&\alpha^T\\0+\beta&A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c-b&\alpha^T\\0&A\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b&\alpha^T\\\beta&A\end{vmatrix}=(c-b)|A|+0=(c-b)a$，故选（C）.

（7）答案：选（A）.

解 (X,Y) 的密度函数为
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & (x,y)\in D,\\0, & 其他,\end{cases}$$

所以
$$EU-EV=E(U-V)=E|X-Y|=\iint_D|x-y|\frac{1}{\pi}dxdy=\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}.$$

（8）答案：选（C）.

解 若将一些不合格品误以为合格品．会造成这批产品不合格（H_1 成立）时，而检验结果误判为合格产品（接受 H_0）的可能性增大，也就是犯存伪错误的概率 β 都会变大．当样本容量 n 固定时，β 变大导致犯弃真错误的概率 α 会变小．

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）答案：填“$\frac{3}{4}$”.

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n^{\frac{4}{3}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}$.

（10）答案：填“$a+x(A\cos 2x+B\sin 2x)$”.

解 特征方程为$r^2+4=0$，特征根为$r_{1,2}=\pm 2i$.

将微分方程转化为$y''+4y=1+\cos 2x$.

对于$f_1(x)=1$，可设$y_1^*=a$；对于$f_2(x)=\cos 2x$，可设$y_2^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$，

由叠加原理可知特解形式为$y^*=y_1^*+y_2^*=a+x(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

（11）答案：填“$2xf+2x^3y(f_1'+e^{x^2y}f_2')$”.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf(x^2y,e^{x^2y})$，$\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}=2xf+2xy(f_1'\cdot x^2+f_2'\cdot e^{x^2y}\cdot x^2)=2xf+2x^3y(f_1'+e^{x^2y}f_2')$.

（12）答案：填“$\frac{3}{4}\pi-(e^2+1)$”.

解 补$L_1:y=0$（起点在$x=0$，终点在$x=2$），L与L_1所围平面区域记为D，则

$$I=(\oint_{L+L_1}-\int_{L_1})(e^x+1)\cos y dx-[(e^x+x)\sin y-x]dy$$

$$=\iint\limits_D d\sigma-\int_0^2(e^x+1)dx=\int_0^\pi\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2d\theta-(e^2+1)=\frac{3}{4}\pi-(e^2+1).$$

（13）答案：填“$\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$”.

解 由$A\alpha=\beta,A\beta=\alpha$，知$A(\alpha+\beta)=\alpha+\beta,A(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$，得$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$为$A$的两个特征值，又由于$A$为不可逆矩阵，故$|A|=0$，即$\lambda_3=0$为$A$的特征值，因为三阶矩阵$A$的特征值互异，所以$A$相似于对角阵$\Lambda$，其中$\Lambda\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$.

（14）答案：填“$1-5e^{-4}$”.

解 由泊松分布的性质知$\sum\limits_{i=1}^{4}X_i\sim P(4)$，所以

$$P\{\overline{X}>\frac{1}{4}\}=P\{\sum_{i=1}^{4}X_i>1\}=1-P\{\sum_{i=1}^{4}X_i=0\}-P\{\sum_{i=1}^{4}X_i=1\}=1-\frac{1}{0!}e^{-4}-\frac{4}{1!}e^{-4}=1-5e^{-4}.$$

三、解答题

（15）证 （Ⅰ）由题设知 $x_n>0, n=1,2,\cdots$．由于

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n+\frac{1}{4}x_n+\frac{1}{4}x_n+\frac{1}{x_n^3}\ge 4\sqrt[4]{(\frac{1}{4})^3}=\sqrt{2},$$

故 $x_n\ge\sqrt{2}, n=1,2,\cdots$．

或令 $f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{x^3}, x>0$，则 $f'(x)=\frac{3}{4}-\frac{3}{x^4}=\frac{3(x^4-4)}{4x^4}$．

当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $\sqrt{2}<x<+\infty$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 取最小值 $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$，从而 $x_n\ge\sqrt{2}, n=1,2,\cdots$． ……2 分

又 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{x_n^3}-\frac{1}{4}x_n=\frac{4-x_n^4}{4x_n^3}\le 0$，故 $x_{n+1}\le x_n$，从而数列 $\{x_n\}$ 单减有下界，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在．

……4 分

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由 $x_n\ge\sqrt{2}$ 知 $a\ge\sqrt{2}$．在 $x_{n+1}=\frac{3}{4}x_n+\frac{1}{x_n^3}$ 两边令 $n\to\infty$，有 $a=\frac{3}{4}a+\frac{1}{a^3}$，整理得 $a^4=4$，所以 $a=\sqrt{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$． ……7 分

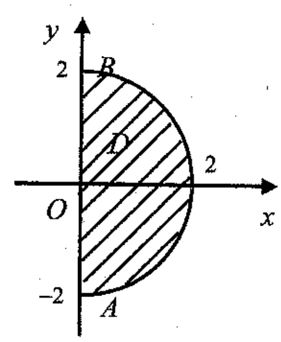
（Ⅱ）由于 $x_{n+1}-x_n\le 0$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x_{n+1}-x_n)$ 为交错级数．由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$．再由 $\{x_n\}$ 单调递减知；$\{\frac{1}{4}x_n-\frac{1}{x_n^3}\}$ 也单调递减，亦即 $\{x_{n+1}-x_n\}$ 单调递减，利用莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x_n-x_{n+1})$ 收敛． ……10 分

（16）解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2,\frac{\partial z}{\partial x}=2y+2$，由此得 $f(x,y)$ 在 D 内的驻点 $(1,-1)$． ……2 分

在直线段 $\overline{AB}:x=0\,(-2\le y\le 2)$ 上，将 $x=0$ 代入函数，得

$$z=y^2+2y\quad(-2\le y\le 2).$$

由 $\frac{dz}{dy}=2y+2=0$ 得 $y_0=-1$，所以驻点为 $(0,-1)$． ……4 分



在半圆 $\widehat{AB}:x^2+y^2=4\,(x\ge 0)$ 上，记

$$F(x,y)=x^2+y^2-2x+2y+\lambda(x^2+y^2-4),$$

令

$$\begin{cases} F_x' = 2x - 2 + 2\lambda x = 0, & (1) \\ F_y' = 2y + 2 + 2\lambda y = 0, & (2) \\ x^2 + y^2 - 4 = 0. & (3) \end{cases}$$

显然$\lambda = -1$不是上述方程组的解. 由(1),(2)两式解得$x = \dfrac{1}{\lambda+1}, y = -\dfrac{1}{\lambda+1}$,代入(3)式,得$\dfrac{1}{\lambda+1} = \pm\sqrt{2}$.
注意到在$\overset{\frown}{AB}$上有$x \geq 0$，所以由（1），（2），（3）可解得驻点$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. ……8 分

比较下列函数值的大小：

$$z\big|_{(1,-1)} = -2,\ z\big|_{(0,-1)} = -1,\ z\big|_{(0,-2)} = 0,\ z\big|_{(0,2)} = 8,\ z\big|_{(\sqrt{2},-\sqrt{2})} = 4(1-\sqrt{2}),$$

得函数在D上的最大值为8，最小值为-2. ……10 分

（17）解 （Ⅰ）因为$x'(t) = 1 - \cos t \geq 0$，且$1 - \cos t = 0$的点不构成区间，所以$x(t)$在$[0, 2\pi]$上连续单增，因此$y = y(x)$的定义域就是$x(t)$的值域，即为

$$[x(0), x(2\pi)] = [0, 2\pi].$$ ……2 分

（Ⅱ）$V_y = 2\pi\int_0^{2\pi} xy(x)dx = 2\pi\int_0^{2\pi}(t - \sin t)(1-\cos t)^2 dt$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi} t(1-\cos t)^2 dt - 2\pi\int_{-\pi}^{\pi} \sin t(1-\cos t)^2 dt$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(t - 2t\cos t + t\cos^2 t)dt = 6\pi^3.$$ ……6 分

（Ⅲ）$\overline{y} = \dfrac{\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt}{\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt} = \dfrac{\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}dt}{\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt}$

$$= \frac{\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt}{\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}dt} = \frac{32/3}{8} = \frac{4}{3}.$$ ……10 分

（18）证 由$f(\frac{1}{2})$分别在点$x = 0$和$x = 1$处的泰勒公式得

$$f(\frac{1}{2}) = f(0) + f'(0)(\frac{1}{2} - 0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(\frac{1}{2} - 0)^2 = f(0) + \frac{f''(\xi_1)}{8},\ \xi_1 \in (0, \frac{1}{2});$$

$$f(\frac{1}{2}) = f(1) + f'(1)(\frac{1}{2} - 1) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(\frac{1}{2} - 1)^2 = f(1) + \frac{f''(\xi_2)}{8},\ \xi_2 \in (\frac{1}{2}, 1).$$ ……4 分

（Ⅰ） 两式相加，得$2f(\frac{1}{2}) = f(0) + f(1) + \dfrac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{8}$. 由于$f''(x)$在$[0,1]$上连续，由介值定理知，存在$\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (0,1)$，使得$f''(\xi) = \dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，所以有

$$2f(\frac{1}{2}) = f(0) + f(1) + \frac{f''(\xi)}{4}.$$ ……7 分

（II）　两式相减．并取绝对值，得

$$|f(1)-f(0)|=\frac{1}{8}|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|\le\frac{1}{8}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|].$$

记$|f''(\eta)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，则$\eta=\xi_1$或$\xi_2\in(0,1)$，且

$$|f(1)-f(0)|\le\frac{1}{8}[|f''(\eta)|+|f''(\eta)|]=\frac{1}{4}|f''(\eta)|.$$ ……10 分

（19）**解法 1**　把半球面的方程$x^2+y^2+z^2=1\,(z\ge0)$代入积分的被积函数，得

$$I=\iint_\Sigma\frac{x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+1)dxdy}{1+x^2+y^2}.$$ ……2 分

补$\Sigma_1:z=0\,(x^2+y^2\le1)$，取下侧．记$\Sigma$与$\Sigma_1$所围成的立体区域为$\Omega$，则$\Omega$在$xOy$面上的投影区域为$D:x^2+y^2\le1$，由高斯公式， ……4 分

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+1)dxdy}{1+x^2+y^2}-\iint_{\Sigma_1}\frac{x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+1)dxdy}{1+x^2+y^2}$$

$$=\iiint_\Omega[\frac{2x(1+y^2)+2y(1+x^2)}{(1+x^2+y^2)^2}+\frac{2z}{1+x^2+y^2}]dv-\iint_{\Sigma_1}\frac{(z^2+1)dxdy}{1+x^2+y^2}$$

$$=\iiint_\Omega\frac{2z}{1+x^2+y^2}dv-\iint_{\Sigma_1}\frac{(z^2+1)dxdy}{1+x^2+y^2}$$

$$=\iint_D[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{2z}{1+x^2+y^2}dz]dxdy+\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$$ ……8 分

$$=\iint_D\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}dxdy+\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}[\int_0^1\frac{2-r^2}{1+r^2}rdr]d\theta$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}[3\ln(1+r^2)-r^2]\Big|_0^1=(3\ln2-1)\pi.$$ ……10 分

解法 2　把半球面的方程$x^2+y^2+z^2=1\,(z\ge0)$代入积分的被积函数，得

$$I=\iint_\Sigma\frac{x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+1)dxdy}{2-z^2}.$$ ……2 分

补$\Sigma_1:z=0\,(x^2+y^2\le1)$，取下侧．记$\Sigma$与$\Sigma_1$所围成的立体区域为$\Omega$，则$\Omega$在$xOy$面上的投影区域为$D:x^2+y^2\le1$，由高斯公式， ……4 分

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+1)dxdy}{2-z^2}-\iint_{\Sigma_1}\frac{x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+1)dxdy}{2-z^2}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}[\frac{2(x+y)}{2-z^2}+\frac{6z}{(2-z^2)^2}]dv-\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{(z^2+1)dxdy}{2-z^2}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\frac{6z}{(2-z^2)^2}dv-\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{(z^2+1)dxdy}{2-z^2}$$

$$=\iint\limits_{D}[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{6z}{(2-z^2)^2}dz]dxdy+\iint\limits_{D}\frac{1}{2}dxdy$$ ……8 分

$$=\iint\limits_{D}\frac{3}{2-z^2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy+\iint\limits_{D}\frac{1}{2}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D}3(\frac{1}{1+x^2+y^2}-\frac{1}{2})dxdy+\frac{\pi}{2}=\int_0^{2\pi}[\int_0^1\frac{3}{1+r^2}rdr]d\theta-\pi$$

$$=2\pi\cdot\frac{3}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1-\pi=(3\ln 2-1)\pi.$$ ……10 分

（20）解　由题意知 $X_0=O, X_1=E$，且 $X_{k+1}=AX_k+E$，$X_k=AX_{k-1}+E$，则

$$X_{k+1}-X_k=A(X_k-X_{k-1})=A^2(X_{k-1}-X_{k-2})=\cdots=A^k(X_1-X_0)=A^k,$$ ……3 分

故

$$X_n-X_{n-1}=A^{n-1}, X_{n-1}-X_{n-2}=A^{n-2},\cdots,X_2-X_1=A, X_1=E,$$

相加得
$$X_n=A^{n-1}+A^{n-2}+\cdots+E.$$ ……7 分

由于 $A^2=A^T, A^3=E$，故

$$X_n=\begin{cases} mJ, & n=3m\text{时}, \\ mJ+E, & n=3m+1\text{时}, \\ mJ+E+A, & n=3m+2\text{时}, \end{cases}$$

其中 $J=E+A+A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$m=0,1,\cdots$. ……11 分

（21）解　（Ⅰ）因为 A 与 Λ 合同，所以 A 的特征值为零正正，故 $|A|=0$，计算得 $a=2$. ……3 分

（Ⅱ）由 $|A-\lambda E|=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3$. ……6 分

$Ax=0$ 得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$；$(A-E)x=0$ 得 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；$(A-3E)x=0$ 得 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$. ……9 分

将ξ_1,ξ_2,ξ_3单位化得 $\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，取 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，

令$x=Qy$，则有$f=y_2{}^2+3y_3{}^2$． ……11 分

（22）解 （Ⅰ）由于$P\{Y=1\}=P\{X\geq 0\}=\frac{3}{4}$，所以$Y$的分布律为$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$．

$$P\{X\leq\frac{1}{2}\Big|Y=1\}=\frac{P\{X\leq\frac{1}{2},Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{P\{X\leq\frac{1}{2},X\geq 0\}}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{6}.$$ ……4 分

（Ⅱ）$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{XY\leq z\}$．

（i）当$z<0$时，$F_Z(z)=0$；（ii）当$z\geq 3$时，$F_Z(z)=1$； ……7 分

（iii）当$0\leq z<3$时，

法 1 $F_Z(z)=P\{Y=0,Z\leq z\}+P\{Y=1,Z\leq z\}$

$$=P\{X<0,0\leq z\}+P\{X\geq 0,X\leq z\}=\frac{1}{4}+\frac{z}{4};$$

法 2 由于$Z=XY=\begin{cases}0, & X<0,\\ X, & X\geq 0,\end{cases}$故$F_Z(z)=P\{-1\leq X\leq z\}=\frac{z+1}{4}$．

综上，Z的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{z+1}{4}, & 0\leq z<3,\\ 1, & z\geq 3.\end{cases}$ ……11 分

（23）解 （Ⅰ）由于$\chi^2\sim\chi^2(1)$，可设$X\sim N(0,1)$，$\chi^2=X^2$，故

$P\{\chi^2\leq 1\}=P\{X^2\leq 1\}=P\{-1\leq X\leq 1\}=2\Phi(1)-1=2\times 0.8413-1=0.6826$； ……4 分

（Ⅱ）由于$F\sim F(1,1)$，得$\frac{1}{F}\sim F(1,1)$，所以$P\{F\leq 1\}=P\{\frac{1}{F}\geq 1\}=P\{F\geq 1\}$，又因为

$P\{F\leq 1\}+P\{F\geq 1\}=1$，所以$P\{F\leq 1\}=\frac{1}{2}$． ……8 分

（Ⅲ）由于$T\sim T(1)$，得$T^2\sim F(1,1)$，所以$P\{-1\leq T\leq 1\}=P\{T^2\leq 1\}=\frac{1}{2}$． ……11 分