绝密 * 启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟四）试题答案和评分参考

一、选择题

（1）**答案**：选（D）.

解
$$f(x)=\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{2}x}{|x|(x+2)(x-1)}.$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{2}x}{x(x+2)(x-1)}=\frac{\sin1}{3}\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1}=-\frac{\pi}{6}\sin1;$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{2}x}{x(x+2)(x-1)}=-\frac{1}{2};\quad \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{2}x}{-x(x+2)(x-1)}=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{2}x}{-x(x+2)(x-1)}=\infty.$$

由此知应选（D）.

（2）**答案**：选（B）.

解　令 $f(x)=\int_{-1}^{x}te^{\cos t}dt$，显然 $f(-1)=0$，故 $x=-1$ 为一个实根.

又因为 $te^{\cos t}$ 是奇函数，由积分的奇偶性可得 $f(1)=0$，故 $x=1$ 也为一个实根.

由于 $f'(x)=xe^{\cos x}$，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以方程 $\int_{-1}^{x}te^{\cos t}dt=0$ 有 2 个实根.

（3）**答案**：选（B）.

解法 1　曲线的参数方程为：$x=t,y=4$，$z=\frac{1}{4}(t^2+16)$，在点 $(2,4,5)$ 处对应的参数值为 $t=2$，

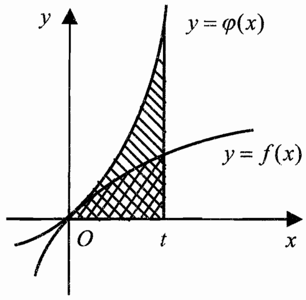
由于 $(x_t',y_t',z_t')\Big|_{t=2}=(1,0,1)$，又 x 轴的方向向量为 $(1,0,0)$，故 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt2},\theta=\frac{\pi}{4}$.

解法 2　在平面 $y=4$ 上曲线方程为 $z=\frac{1}{4}(x^2+16)$，由于 $\frac{dz}{dx}\Big|_{x=2}=\frac{x}{2}\Big|_{x=2}=1$，故由导数的几何意义知

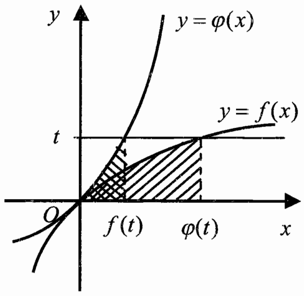
曲线在点 $(2,4,5)$ 处的切线的斜率为 1，从而切线与轴正向所成的角为 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

（4）**答案**：选（D）.

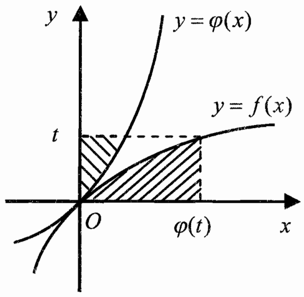
解　各个积分所对应的面积如下：



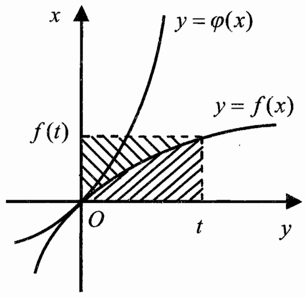
（A）



（B）



（C）



（D）

（5）答案：选（C）.

解　因为A合同于B，所以存在可逆阵P，使得$P^TAP=B$，则有$A=(P^T)^{-1}BP^{-1}=(P^{-1})^TBP^{-1}$，故$A^T=(P^{-1})^TB^TP^{-1}=(P^{-1})^TBP^{-1}=A$，即$A$为对称阵，故选（C）.

（6）答案：选（C）.

解　因为$r(A)=m$，所以$Ax=0$有$n-m$个线性无关的解．$r(B)=n-m$表明B的列向量组为$n-m$个线性无关的向量，又$AB=O$，所以B的列向量组为$Ax=0$的基础解系．由于η为$Ax=0$的解，所以η由B的列向量组线性表示，且表示式唯一，故$By=\eta$有唯一解.

（7）答案：选（B）.

解　$1-P(B|\overline{A})=P(\overline{B}|\overline{A})$，所以（A）不正确.

$$1-P(B|\overline{A})=1-\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A})-P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A})}\le\frac{P(\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{1-P(B)}{P(\overline{A})}\text{，所以（B）正确.}$$

$$1-P(B|\overline{A})=1-\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}\ge1-\frac{P(B)}{P(\overline{A})}\text{，所以（C）不正确.}$$

$$1-P(B|\overline{A})=1-\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=1-\frac{P(B)P(\overline{A}|B)}{P(\overline{A})}\ge1-\frac{P(\overline{A}|B)}{P(\overline{A})}\text{，所以（D）不正确.}$$

（8）答案：选（C）.

解　由于θ为未知参数，并非随机变量，故②和④的说法不正确.

二、填空题:9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）答案：填“32”.

解　由题意知$f(0)=0$，进而$f(4)=0$，$f(8)=0$，且$f'(x)$仍是以4为周期的函数，所以

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x^3)+f(x^2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x^3)-f(8)+f(x^2)-f(4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x^3)-f(8)}{x^3-8}\cdot\frac{x^3-8}{x-2}+\lim_{x\to2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$=12f'(8)+4f'(4)=16f'(0)=32.$$

（10）答案：填“$e^x\tan\frac{x}{2}+C$”.

解　$$原式=\int e^x\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int e^x d\tan\frac{x}{2}+\int\tan\frac{x}{2}de^x$$

$$=e^x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}de^x+\int\tan\frac{x}{2}de^x=e^x\tan\frac{x}{2}+C.$$

（11）答案：填“$(x+m)(y+n)e^{x+y}$”.

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=ye^{x+y}+xye^{x+y}=(x+1)ye^{x+y}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=ye^{x+y}+(x+1)ye^{x+y}=(x+2)ye^{x+y}$，……，

$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}=(x+m)ye^{x+y}$．同理知$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=(x+m)(y+n)e^{x+y}$．

（12）答案：应填“$\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\ln 2$”.

解　由于$ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt=\sqrt{(\frac{2t}{1+t^2})^2+(\frac{2}{1+t^2}-1)^2}dt=dt$，所以

$$\int_L ye^{-x}ds=\int_0^1(2\arctan t-t)\,e^{-\ln(1+t^2)}dt=\int_0^1(2\arctan t-t)\cdot\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=(\arctan t)^2\Big|_0^1-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

（13）答案：填“$0,0,3$”.

解　$\xi_1=(-1,2,-1)^T,\xi_2=(0,-1,1)^T$是$Ax=0$的两个线性无关的解向量，表明$\xi_1,\xi_2$是$A$的对应于特征值$\lambda=0$的两个线性无关特征向量，所以$\lambda=0$至少是$A$的二重特征值．又因为$\eta=(1,1,1)^T$是$Ax=b$的特解，即$A\eta=(3,3,3)^T=3\eta$，故$A$的特征值为$0,0,3$．

（14）答案：填“$1+2x-3x^2$”.

解　由题意知，当$0\le x\le 1$时，X_1,X_2,X_3的分布函数均为$F(x)=x$．进而$\max\{X_1,X_2\}$的分布函数为$F^2(x)=x^2$，所以$X=\min\{\max\{X_1,X_2\},X_3\}$的分布函数为

$$1-[1-F^2(x)][1-F(x)]=1-(1-x^2)(1-x)=x+x^2-x^3,$$

所以当$0\le x\le 1$时，X的密度函数为$f_X(x)=1+2x-3x^2$．

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）证　（Ⅰ）对任意的$x\in[a,b]$，$f(x_0)$在点x处的一阶 Taylor 公式为

$$f(x_0)=f(x)+f'(x)(x_0-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x_0-x)^2.$$

由于$\frac{1}{2}f''(\xi)(x_0-x)^2\le 0$，所以$f(x_0)\le f(x)+f'(x)(x_0-x)$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，对任意的$t\in[a,b]$，$f(x_0)\le f(t)+f'(t)(x_0-t)$. 在该式两边积分，有

$$\int_a^b f(x_0)\,\mathrm{d}t\le\int_a^b[f(t)+f'(t)(x_0-t)]\,\mathrm{d}t,$$

得
$$(b-a)f(x_0)\le\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b f'(t)(x_0-t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b (x_0-t)\,\mathrm{d}f(t)$$

$$=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+(x_0-t)f(t)\Big|_a^b-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}(x_0-t)$$

$$=2\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+f(b)(x_0-b)-f(a)(x_0-a).$$

由题意知$f(x)\ge 0$，所以$f(b)(x_0-b)-f(a)(x_0-a)=-[f(b)(b-x_0)+f(a)(x_0-a)]\le 0$，故

$$(b-a)f(x_0)\le 2\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

即
$$f(x_0)\le\frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由于$f(x_0)$为$f(x)$的最大值，所以对任意的$x\in[a,b]$，有$f(x)\le\frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

（16）解　在曲面$x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2=1\,(x>0,y>0,z>0)$上取一点$(x_0,y_0,z_0)$，过该点的切平面方程

为：
$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+\frac{z_0}{2}(z-z_0)=0;$$

即
$$x_0x+y_0y+\frac{z_0}{4}z=1.$$

该切平面在三个坐标轴上的截距分别为$\frac{1}{x_0},\frac{1}{y_0},\frac{4}{z_0}$. 令

$$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{z_0^2},$$

原问题即求在限制条件$x_0^2+y_0^2+\frac{1}{4}z_0^2=1\,(x_0>0,y_0>0,z_0>0)$下，$f(x_0,y_0,z_0)$取得最小值问题.

为此，作拉格朗日函数：

$$L(x_0,y_0,z_0,\lambda)=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{z_0^2}+\lambda(x_0^2+y_0^2+\frac{1}{4}z_0^2-1),$$

令 $L'_{x_0}=L'_{y_0}=L'_{z_0}=0$，得 $-\dfrac{2}{x_0^3}+2\lambda x_0=0,\quad -\dfrac{2}{y_0^3}+2\lambda y_0=0,\quad -\dfrac{32}{z_0^3}+\dfrac{\lambda}{2}z_0=0$，

及 $x_0^2+y_0^2+\dfrac{z_0^2}{4}-1=0$，解得 $x_0=\dfrac{1}{2},y_0=\dfrac{1}{2},z_0=\sqrt{2},\lambda=16$，进而可得 $f_{\min}=16$ 即为可求最小值.

（17）**解** $a_0=\int_{-1}^{1}(|x|+x)dx=1$，

$$a_n=\int_{-1}^{1}(|x|+x)\cos n\pi xdx=\int_{-1}^{1}|x|\cos n\pi xdx=2\int_0^1 x\cos n\pi xdx=\frac{2}{n\pi}\int_0^1 xd(\sin n\pi x)$$

$$=\frac{2}{n\pi}[x\sin n\pi x|_0^1-\int_0^1\sin n\pi xdx]=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x|_0^1=\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n-1),\quad n=1,2,\cdots;$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}(|x|+x)\sin n\pi xdx=\int_{-1}^{1}x\sin n\pi xdx=2\int_0^1 x\sin n\pi xdx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^1 xd(\cos n\pi x)=-\frac{2}{n\pi}[x\cos n\pi x|_0^1-\int_0^1\cos n\pi xdx]=\frac{(-1)^{n+1}2}{n\pi}.\quad n=1,2,\cdots.$$

由于当 $x=-1$ 或 $x=-1$ 时，级数收敛于 $\dfrac{0+2}{2}=1$，所以

$$|x|+x=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)\cos n\pi x+\frac{(-1)^{n+1}2}{n\pi}\sin n\pi x],\qquad -1<x<1.$$

在上式中取 $x=0$，得 $0=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)$，即 $0=\dfrac{1}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{(2n-1)^2\pi^2}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

（18）**解** 积分区域 Ω_t 与垂直于 z 轴的平面的交集在 xoy 平面上的投影为

$$D_t(z):\frac{x^2}{4(t^2-z^2)}+\frac{y^2}{9(t^2-z^2)}\le 1,\ -t<z<t.$$

$$F(t)=-3\iiint\limits_{\Omega_t}z^2dv+2\iiint\limits_{\Omega_t}dv=-3\int_{-t}^{t}z^2dz\iint\limits_{D_t(z)}dxdy+2\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2t\cdot 3t\cdot t$$

$$=-3\int_{-t}^{t}z^2\cdot\pi\cdot 2\sqrt{t^2-z^2}\cdot 3\sqrt{t^2-z^2}dz+16\pi t^3$$

$$=-18\pi\int_{-t}^{t}z^2(t^2-z^2)dz+16\pi t^3=-\frac{24}{5}\pi t^5+16\pi t^3=8\pi(-\frac{3}{5}t^5+2t^3).$$

$F'(t)=8\pi(-3t^4+6t^2),\ F''(t)=96\pi t(1-t^2)$，令 $F''(t)=0$，得 $t=1$，且 $F(1)=\dfrac{56}{5}\pi$.

当 $0<t<1$ 时，$F''(t)>0$；当 $t>1$ 时，$F''(t)<0$，所以曲线 $u=F(t)$ 的凹区间为 $(0,1)$，凸区间为 $(1,+\infty)$，拐点为 $(1,\dfrac{56}{5}\pi)$.

（19）**解** 特征方程：$r^3-3r^2+3r-1=0$，即$(r-1)^3=0$，解得$r_1=r_2=r_3=1$，所以原方程的通解为$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x$．

又曲线$y=y(x)$过点$(0,0)$，所以$y(0)=0$．且

$$(x-1)+(y-1)y'=0, \qquad 1+(y')^2+(y-1)y''=0,$$

进而得$y'(0)=-1,\ y''(0)=2$．

将$y(0)=0$代入$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x$得$C_1=0$，所以$y=(C_2x+C_3x^2)e^x$．

$$y'=[C_2+(C_2+2C_3)x+C_3x^2]e^x, \quad y''=[2(C_2+C_3)+(C_2+4C_3)x+C_3x^2]e^x,$$

代入$y'(0)=-1,\ y''(0)=2$得$C_2=-1,\ 2(C_2+C_3)=2$，解得$C_2=-1, C_3=2,$所以

$$y(x)=x(2x-1)e^x.$$

（20）**解** 设x为非零公共解，则$x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2\neq 0$，由此可得齐次线性方程组

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2-u_1\beta_1-u_2\beta_2=0\text{，即}\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\-1&-1&-2&-1\\0&3&-1&-1\\1&7&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

解此线性方程组知，其基础解系只含一个解向量$\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\-4\end{pmatrix}$，所以$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\-4\end{pmatrix}$，即

$$\lambda_1=3k,\lambda_2=-k,\mu_1=k,\mu_2=-4k,$$

所以$Ax=0$与$Bx=0$的非零公共解为$x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=3k\alpha_1-k\alpha_2=k(5,-2,-3,-4)^T,k\neq 0$．

（21）**解** （Ⅰ）当$a=0$时，$|A-E|=|A-2E|=|A+E|=0$，所以A的特征值为$1,2,-1$，$A+3E$的特征值为$4,5,2$，因此$|A+3E|=4\cdot5\cdot2=40$．

（Ⅱ）当$a=2$时，设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则有$\begin{cases}(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)(\lambda_3-1)=2\\(\lambda_1-2)(\lambda_2-2)(\lambda_3-2)=2\\(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)=2\end{cases}$，展开后得

$$\begin{cases}\lambda_1\lambda_2\lambda_3-(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=3,\\\lambda_1\lambda_3\lambda_3-2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)+4(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=10,\\\lambda_1\lambda_2\lambda_3+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=1,\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0,\\\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=-1,,\\\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2.\end{cases}$$

所以$|A+3E|=(\lambda_1+3)(\lambda_2+3)(\lambda_3+3)=\lambda_1\lambda_2\lambda_3+3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_2)+9(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+27$

$$=0-3+18+27=42.$$

（22）**解**　Y 的分布函数为$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X_1+\cdots+X_N\le y\}$，由全概率公式得

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{N=1,X_1+\cdots+X_N\le y\}+P\{N=2,X_1+\cdots+X_N\le y\}\\&\quad+P\{N=3,X_1+\cdots+X_N\le y\}+P\{N=4,X_1+\cdots+X_N\le y\}\\&=P\{N=1,X_1\le y\}+P\{N=2,X_1+X_2\le y\}\\&\quad+P\{N=3,X_1+X_2+X_3\le y\}+P\{N=4,X_1+X_2+X_3+X_4\le y\}\\&=P\{N=1\}P\{X_1\le y\}+P\{N=2\}P\{X_1+X_2\le y\}\\&\quad+P\{N=3\}P\{X_1+X_2+X_3\le y\}+P\{N=4\}P\{X_1+X_2+X_3+X_4\le y\}\\&=0.1P\{X_1\le y\}+0.2P\{X_1+X_2\le y\}\\&\quad+0.3P\{X_1+X_2+X_3\le y\}+0.4P\{X_1+X_2+X_3+X_4\le y\}.\end{aligned}$$

记$X_1,X_1+X_2,X_1+X_2+X_3,X_1+X_2+X_3+X_4$的分布函数分别为$F_1(y),F_2(y),F_3(y),F_4(y)$，密度分布函数分别为$f_1(y),f_2(y),f_3(y),f_4(y)$，则$F_Y(y)=0.1F_1(y)+0.2F_2(y)+0.3F_3(y)+0.4F_4(y)$，且$Y$的密度函数为$f_Y(y)=0.1f_1(y)+0.2f_2(y)+0.3f(y)+0.4f_4(y)$．因此$Y$的数学期望为

$$\begin{aligned}EY&=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy\\&=0.1\int_{-\infty}^{+\infty}yf_1(y)dy+0.2\int_{-\infty}^{+\infty}yf_2(y)dy+0.3\int_{-\infty}^{+\infty}yf_3(y)dy+0.4\int_{-\infty}^{+\infty}yf_4(y)dy\\&=0.1E(X_1)+0.2E(X_1+X_2)+0.3E(X_1+X_2+X_3)+0.4E(X_1+X_2+X_3+X_4)\\&=0.1\times\frac{1}{2}+0.2\times\frac{2}{2}+0.3\times\frac{3}{2}+0.4\times\frac{4}{2}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

（23）**解**　设$X=\begin{cases}1, & \text{电子元件寿命不超过}k\text{小时},\\0, & \text{电子元件寿命超过}k\text{小时},\end{cases}$所以

$$P\{X=0\}=\int_k^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda k},\quad P\{X=1\}=1-P\{X=0\}=1-e^{-\lambda k}.$$

所以总体X的分布律为$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\e^{-\lambda k} & 1-e^{-\lambda k}\end{pmatrix}$，并且样本值为$m$个1，$n-m$个0．

（Ⅰ）$\bar{x}=EX$，即$\frac{m}{n}=1-e^{-\lambda k}$，得$\lambda$的矩估计值$\hat{\lambda}_M=\frac{1}{k}\ln\frac{n}{n-m}$．

（Ⅱ）似然函数为$L(\lambda)=(e^{-\lambda k})^{n-m}(1-e^{-\lambda k})^m=e^{-\lambda k(n-m)}(1-e^{-\lambda k})^m$，

$$\ln L(\lambda)=-\lambda k(n-m)+m\ln(1-e^{-\lambda k}),$$

$$令\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-k(n-m)+m\frac{ke^{-\lambda k}}{1-e^{-\lambda k}}=0,$$

解得λ的极大似然估计值$\hat{\lambda}_L=-\frac{1}{k}\ln\frac{n-m}{n}$.

绝密 * 启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟五）试题答案和评分参考

一、选择题

（1）**答案**：选（D）.

解 $F(x)\overset{u=x-t}{=}\int_0^x (x-u)^2 f(u)du = x^2\int_0^x f(u)du - 2x\int_0^x uf(u)du + \int_0^x u^2 f(u)du$，

故 $F'(x)=2x\int_0^x f(u)du - 2\int_0^x uf(u)du$， $F''(x)=2\int_0^x f(u)du$， $F'''(x)=2f(x)$.

由题意知，$F(0)=F'(0)=F''(0)=0, F'''(x)>0$. ④正确.

当 $x>0$ 时，$F''(x)$ 单增，$F''(x)>F''(0)=0$；$F'(x)$ 单增，$F'(x)>F'(0)=0$；$F(x)$ 单增.

当 $x<0$ 时，$F''(x)$ 单增，$F''(x)<F''(0)=0$；$F'(x)$ 单减，$F'(x)>F'(0)=0$；$F(x)$ 单增.

另外，$f(x)$ 为偶函数，故 $F(x)$ 为奇函数. 进而知①②③都正确.

（2）**答案**：选（A）.

解 将 $f(x)$ 奇延拓成 $[-4,4)$ 上的函数 $F(x)$，再将 $F(x)$ 以 8 为周期作周期延拓，将 $F(x)$ 展开成 Fourier 级数，即将 $f(x)$ 展开成正弦级数，由 Dirichlet 收敛定理知

$$S(2)=\frac{1}{2}[F(2+0)+F(2-0)]=\frac{1}{2}[f(2+0)+f(2-0)]=\frac{1}{2}(0+4)=2,$$

$$S(-9)=S(-1)=F(-1)=-F(1)=-f(1)=-3,$$

所以 $S(2)+S(-9)=-1$.

（3）**答案**：选（B）.

解 $$I_1\overset{x^2=t}{=}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt,$$

而 $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt\overset{t=\pi-u}{=}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos u}{\sqrt{\pi-u}}du=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sqrt{\pi-t}}dt,$$

故 $I_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{\pi-t}})dt$. 当 $0<t\le\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{1}{\sqrt{t}}\ge\frac{1}{\sqrt{\pi-t}}$，所以 $I_1>0$.

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{x}\cos xdx,$$

而 $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{x}\cos xdx\overset{x=\pi-t}{=}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{\pi-t}\cos tdt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\pi-x}\cos xdx,$$

故 $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\sqrt{x}-\sqrt{\pi-x})dx$. 当 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 时，$\sqrt{x}\le\sqrt{\pi-x}$，所以 $I_2<0$.

（4）答案：选（D）.

解　由于$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx, \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$均发散，$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx, \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$均收敛，故$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$发散；$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$收敛.

（5）答案：选（D）.

解　由$AB = 2A + 3B$得$(A-3E)(B-2E) = 6E$，所以$A-3E$和$B-2E$都可逆，故选（D）.

（6）答案：选（C）.

解　设$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$，显然$|A| = 0$．因为$A \neq O$，不妨设$a \neq 0$，从而$\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2 \neq 0$，故$r(A) = 2$，所以$r(A^*) = 1$.

（7）答案：选（B）.

解　①和③正确.

由于$-|X| \leq X \leq |X|$，所以$-E|X| \leq EX \leq E|X|$，即$|EX| \leq E|X|$.

又$D|X| = E(|X|^2) - (E|X|)^2 = E(X^2) - (E|X|)^2 \geq 0$，所以$E|X| \leq \sqrt{E(X^2)}$，故①正确.

将$E|X| \leq \sqrt{E(X^2)}$中的X换成$X - EX$，则有$E|X - EX| \leq \sqrt{E(X-EX)^2} = \sqrt{DX}$.

另外，$DX = E(X^2) - (EX)^2 \leq E(X^2)$，故③正确.

（8）答案：选（A）.

解　由题意知，所建立的假设为H_0：$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$，H_1：$\sigma^2 > \sigma_0^2$.

根据假设检验的思想知，当H_0成立，即生产线实际工作正常时，构造统计量

$$g(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) \text{或} g(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n).$$

再由$\alpha = 0.05$，确定H_0的拒绝域W，此时检验结果认为生产线工作正常的概率为

$$P\{g(X_1, X_2, \cdots, X_n) \notin W\} = 1 - \alpha = 0.95.$$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）答案：填“$-z$”.

解　在方程两边分别对x和y求偏导，则

$$z + x\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi' \cdot y \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \quad x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi' \cdot z + \varphi' \cdot y \cdot \frac{\partial z}{\partial y},$$

解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{y\varphi'-x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z\varphi'}{x-y\varphi'}$，所以$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=-z$.

（10）**答案**：填“$y(x)=\begin{cases}x-1+(e+C\sqrt{e})e^{-x}, x\le 1,\\ 1+Ce^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x>1.\end{cases}$”

解　当$x\le 1$时，微分方程为$y'+y=x$，其通解为$y=x-1+C_1e^{-x}$；

当$x>1$时，微分方程为$y'+xy=x$，其通解为通解$y=1+C_2e^{-\frac{x^2}{2}}$． 又因为$y(x)$可导，故

$\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1+C_1e^{-x})=\lim\limits_{x\to 1^+}(1+C_2e^{-\frac{x^2}{2}})$，得$C_1=e+C_2\sqrt{e}$．记$C=C_2$，所以通解为

$$y(x)=\begin{cases}x-1+(e+C\sqrt{e})e^{-x}, x\le 1,\\ 1+Ce^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x>1.\end{cases}$$

（11）**答案**：填“$2\sqrt{17}$”.

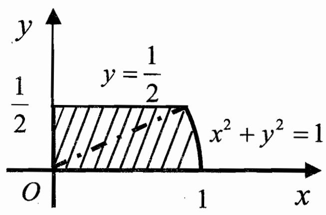
解　记$P=2x+\lambda xy, Q=x^2-2y$. 因为$\{2x+\lambda xy, x^2-2y\}$为$f(x,y)$的梯度，所以$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即

$2x=\lambda x$，故λ=2 .

又$|grad\, f|=\sqrt{(2x+2xy)^2+(x^2-2y)^2}$，所以最大方向导数为$|grad\, f|\big|_{(2,1)}=2\sqrt{17}$.

（12）**答案**：填“$\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$或$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}dx\int_0^{\frac{1}{2}}f(x,y)dy+\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$”.

解　如图所示，得



$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx,$$

或　$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}dx\int_0^{\frac{1}{2}}f(x,y)dy+\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$.

（13）**答案**：填“$\dfrac{8}{3}$”.

解　由$A^2-3A+2E=O$知，A的特征值只能为1或2．又因为A相似于B，且$|B|=2$，可得A的三个特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=2$，因此$A+E$的特征值为$2,2,3$，于是

$$|A+E|=12,\ |2B^*|=2^3|B^*|=2^3|B|^2=32,$$

故
$$\begin{vmatrix}(A+E)^{-1} & O\\ O & 2B^*\end{vmatrix}=|A+E|^{-1}|2B^*|=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}.$$

（14）答案：填“0.818”.

解　由泊松分布的可加性知 X 可表示为 $X=X_1+X_2+\cdots+X_{100}$，其中 $X_i\sim P(1)$, $i=1,2,\cdots,100$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立．由中心极限定理，$X\overset{\text{近似}}{\sim}N(100,100)$，所以

$$P\{80<X<110\}=P\{-2<\frac{X-100}{10}<1\}=\Phi(1)-\Phi(-2)$$
$$=\Phi(1)+\Phi(2)-1=0.841+0.977-1=0.818.$$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）**证**　（Ⅰ）当 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时，$y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1+x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nx^n$，

$$y'(x)=1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n.$$

因此

$$(1+2x)y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)a_{n+2}+2n(n+1)a_{n+1}]x^n.$$

由 $a_{n+1}=\dfrac{1-2n}{1+n}a_n$ 知 $a_{n+2}=\dfrac{-2n-1}{n+2}a_{n+1}=-\dfrac{2n+1}{n+2}a_{n+1}$，所以

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}+2n(n+1)a_{n+1}=-(n+1)(2n+1)a_{n+1}+2n(n+1)a_{n+1}=-(n+1)a_{n+1},$$

于是有 $(1+2x)y''=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=-y'$，因此 $(1+2x)y''+y'=0$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $(1+2x)y''+y'=0$，且 $y(0)=a_0=1,\ y'(0)=a_1=1$.

令 $y'=p$，则 $(1+2x)\dfrac{dp}{dx}+p=0$，由此解得 $p=\dfrac{C_1}{\sqrt{1+2x}}$，即 $y'=\dfrac{C_1}{\sqrt{1+2x}}$.

由 $y'(0)=1$ 知 $C_1=1$，故 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$，再解得 $y=\sqrt{1+2x}+C_2$，由 $y(0)=1$，知 $C_2=0$，因此

$$y=\sqrt{1+2x},\quad |x|<\frac{1}{2}.$$

（16）**解法 1**　由 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ 知 $\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial u}{\partial x})+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$，解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=C_1(x)e^{-y}$.

由于$u(x,0)=\sin x$，得$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}=\cos x$，所以$C_1(x)=\cos x$．进而$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-y}\cos x$．

两边对x积分得$u=e^{-y}\sin x+C_2(y)$．

由$u(0,y)=\ln(1+y)$得$C_2(y)=\ln(1+y)$，所以$u=u(x,y)=e^{-y}\sin x+\ln(1+y)$．

解法 2　由$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$知$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y}+u)=0$，所以$\frac{\partial u}{\partial y}+u=\varphi(y)$，其中$\varphi(y)$为$y$的函数．又

$$e^y(\frac{\partial u}{\partial y}+u)=e^y\varphi(y)，即\frac{\partial}{\partial y}(e^y u)=e^y\varphi(y)，$$

故$e^y u=\int e^y\varphi(y)dy+\psi(x)$，其中$\psi(x)$为$x$的函数，所以$u=e^{-y}\int e^y\varphi(y)dy+e^{-y}\psi(x)$．

令$e^{-y}\int e^y\varphi(y)dy=f(y)$，则$u=f(y)+e^{-y}\psi(x)$，由题设知

$$u(0,y)=f(y)+e^{-y}\psi(0)=\ln(1+y)，$$

故

$$f(y)=\ln(1+y)-e^{-y}\psi(0) \tag{1}$$

又$u(x,0)=f(0)+\psi(x)=\sin x$，所以$\psi(x)=\sin x-f(0)$，从而

$$u(x,y)=\ln(1+y)+e^{-y}\sin x-e^{-y}[\psi(0)+f(0)].$$

在(1)中令$y=0$得$\psi(0)+f(0)=0$，因此$u(x,y)=\ln(1+y)+e^{-y}\sin x$．

（17）**证**　由$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(\sqrt{x_n^2+\frac{1}{n^2}}-x_n)>0$，所以数列$\{x_n\}$单调递增．下面证明数列$\{x_n\}$有上界．

$$x_1=1，\ x_2=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})>1，$$

设$x_n>1\,(n\geq 2)$，则

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\sqrt{x_n^2+\frac{1}{n^2}})>\frac{1}{2}(1+1)=1，$$

故由归纳法原理知，对任意自然数n，$x_n>1\,(n=1,2\cdots)$．因此

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_n^2+\frac{1}{n^2}}+x_n}<\frac{1}{4n^2}\ (n=1,2\cdots)，$$

从而有$x_n=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})<x_1+\frac{1}{4}[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}]$．

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以数列$\{x_n\}$有上界，由于单调有界数列必有极限，故$\{x_n\}$收敛．

（18）**解**　（Ⅰ）由题意知，当$x\neq k$时，$f(x)$可导，且$f(k)=0$，$k=1,2,\cdots$．

对于给定的正整数k，

当$k-1\le x<k$时，$f(x)=a_{k-1}f(x-k+1)=a_{k-1}(k-x)\ln(2+x-k)$；

当$k\le x<k+1$时，$f(x)=a_k f(x-k)=a_k(1+k-x)\ln(1+x-k)$；

$\lim\limits_{x\to k^-}\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim\limits_{x\to k^-}\dfrac{a_{k-1}(k-x)\ln(2+x-k)}{x-k}=-a_{k-1}\ln 2$，故$f'_-(k)=-a_{k-1}\ln 2$；

$\lim\limits_{x\to k^+}\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim\limits_{x\to k^-}\dfrac{a_k(1+k-x)\ln(1+x-k)}{x-k}=a_k$，故$f'_+(k)=a_k$.

由$f'_+(k)=f'_-(k)$得$a_k=-a_{k-1}\ln 2$，$k=1,2,\cdots$，且由题意知$a_0=1$，所以

$$a_k=(-1)^k(\ln 2)^k,\quad k=1,2,\cdots.$$

（II）$A=\int_0^{+\infty}|f(x)|dx=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}|f(x)|dx=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}\left|(-1)^k(\ln 2)^k f(x-k)\right|dx$

$$\overset{t=x-k}{=}\sum_{k=0}^{\infty}(\ln 2)^k\int_0^1 f(t)dt=\sum_{k=0}^{\infty}(\ln 2)^k\cdot\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{1-\ln 2}\int_0^1 f(t)dt.$$

而
$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(1-t)\ln(1+t)dt=2\ln 2-\frac{5}{4},$$

所以$A=\dfrac{1}{1-\ln 2}\cdot(2\ln 2-\dfrac{5}{4})=\dfrac{8\ln 2-5}{4(1-\ln 2)}$.

（19）**解法 1**　把圆的方程$x^2+y^2=4$代入积分的被积函数，得

$$I=\int_L\frac{(y^2+1)dx+\sin ydy}{4+x^2}.$$

补有向线段$\overline{BA}:y=0\,(x:2\to -2)$，记$L$与$\overline{BA}$围成的平面区域为$D$，由格林公式，

$$I=\oint_{L+\overline{BA}}\frac{(y^2+1)dx+\sin ydy}{4+x^2}-\int_{\overline{BA}}\frac{(y^2+1)dx+\sin ydy}{4+x^2}$$

$$=-\iint_D\left(\frac{-2x\sin y}{(4+x^2)^2}-\frac{2y}{4+x^2}\right)d\sigma-\int_{\overline{BA}}\frac{(y^2+1)dx+\sin ydy}{4+x^2}$$

由对称性知，$\iint\limits_D\dfrac{2x\sin y}{(4+x^2)^2}d\sigma=0$，所以

$$I=\int_{-2}^{2}\left[\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{2y}{4+x^2}dy\right]dx-\int_2^{-2}\frac{1}{4+x^2}dx=\int_{-2}^{2}\frac{4-x^2}{4+x^2}dx-\int_2^{-2}\frac{1}{4+x^2}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(\frac{9}{4+x^2}-1\right)dx=\frac{9\pi}{4}-4.$$

解法 2　把圆的方程$x^2+y^2=4$代入积分的被积函数，得

$$I=\int_L\frac{(y^2+1)dx+\sin ydy}{8-y^2}.$$

补有向线段$\overline{BA}:y=0\,(x:2\to -2)$，记$L$与$\overline{BA}$围成的平面区域为$D$，由格林公式，

$$I=\oint_{L+\overline{BA}}\frac{(y^2+1)dx+\sin ydy}{8-y^2}-\int_{\overline{BA}}\frac{(y^2+1)dx+\sin ydy}{8-y^2}$$

$$=-\iint_D\left(-\frac{18y}{(8-y^2)^2}\right)d\sigma-\int_{\overline{BA}}\frac{(y^2+1)dx+\sin ydy}{8-y^2}$$

$$=\int_{-2}^{2}\left[\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{18y}{(8-y^2)^2}dy\right]dx-\int_2^{-2}\frac{1}{8}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\frac{9}{8-y^2}\Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}}dx+\frac{1}{2}=9\int_{-2}^{2}(\frac{1}{4+x^2}-\frac{1}{8})dx+\frac{1}{2}$$

$$=9(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=\frac{9\pi}{4}-4\,.$$

（20）**解**　设 $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，由 $AX-XA=E$ 得 $\begin{pmatrix}-x_2+2x_3 & -2x_1+2x_2+2x_4\\ x_1-2x_3-x_4 & x_2-2x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

解法 1　由上得非齐次线性方程组 $\begin{cases}-x_2+2x_3=1,\\ 2x_1-2x_2-2x_4=0,\\ x_1-2x_3-x_4=0,\\ x_2-2x_3=1.\end{cases}$ 对其增广矩阵作初等行变换

$$(B\vdots b)=\left(\begin{array}{cccc|c}0 & -1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

由于 $r(B)=2\neq r(B\vdots b)=3$，故 $AX-XA=E$ 无解.

解法 2　由于 $-x_2+2x_3=1$ 与 $x_2-2x_3=1$ 矛盾，所以非齐次线性方程组 $\begin{cases}-x_2+2x_3=1\\ 2x_1-2x_2-2x_4=0,\\ x_1-2x_3-x_4=0,\\ x_2-2x_3=1\end{cases}$ 无解，

从而 $AX-XA=E$ 无解.

解法 3　由于 $AX-XA$ 的迹

$$tr(AX-XA)=(-x_2+2x_3)+(x_2-2x_3)=0\neq tr(E),$$

所以 $AX-XA=E$ 无解.

【注】事实上，对任意 n 阶方阵 A,B，均有 $tr(AB-BA)=0$，$AB-BA=E$ 总不成立.

（21）**解**　（Ⅰ）$\eta=(-1,2,0)^T$ 不是线性方程组 $Ax=0$ 的解.

假如 $\eta=(-1,2,0)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的解，则 η 是 A 的属于特征值 0 的特征向量．又 A 为实对称矩阵，由实对称矩阵的性质知 ξ,η 一定正交，而 $\xi^T\eta=-5\neq0$，矛盾，故 $\eta=(-1,2,0)^T$ 不是线性方程组 $Ax=0$ 的解.

（Ⅱ）因为三阶实对称阵 A 的秩 $r(A)=1$，故 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 A 的二重特征值．设其对应的特征向量为 $\xi=(x_1,x_2,x_3)^T$，由于 ξ 与 ξ_1 正交，$x_1-2x_2+2x_3=0$，解得基础解系为 $\xi_2=(2,1,0)^T,\xi_3=(-2,0,1)^T$，故线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 $x=k_1\xi_2+k_2\xi_3=k_1(2,1,0)^T+k_2(-2,0,1)^T$，其中 k_1,k_2 为任意常数.

（Ⅲ）令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 P 为可逆阵，且 $P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 5 & 4\\ -2 & 4 & 5\end{pmatrix}$，由 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得

$$A=P\begin{pmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&-2\\-2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}.$$

（22）**解**　（Ⅰ）由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$得$k=\dfrac{\lambda}{2}$，所以$f(x)=\dfrac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda|x|}$，$-\infty<x<+\infty,\lambda>0$.

（Ⅱ）$\mathrm{D}(XY)=\mathrm{D}(X|X|)=\mathrm{E}[(X|X|)^2]-(\mathrm{E}(X|X|))^2$，其中

$$\mathrm{E}[(X|X|)^2]=\mathrm{E}(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\cdot\frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda^4}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^4\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}(\lambda x)=\frac{4!}{\lambda^4}=\frac{24}{\lambda^4},$$

$$\mathrm{E}(X|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|\cdot\frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\mathrm{d}x=0,$$

因此$\mathrm{D}(XY)=\dfrac{24}{\lambda^4}$.

（Ⅲ）$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x,|X|\le y\}$.

（i）当$y<0$时，$F(x,y)=0$；

（ii）当$y\ge0$时，$F(x,y)=P\{X\le x,-y\le X\le y\}$.

① 当$x\le -y\le 0$时，$F(x,y)=0$；

② 当$-y<x\le0$时，$F(x,y)=P\{-y\le X\le x\}=\int_{-y}^{x}\dfrac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda x}-\mathrm{e}^{-\lambda y})$；

③ 当$0<x\le y$时，$F(x,y)=P\{-y\le X\le x\}=\int_{-y}^{0}\dfrac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}t+\int_0^x\dfrac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t=1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda y}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}$；

④ 当$0\le y\le x$时，　$F(x,y)=P\{-y\le X\le y\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda y}$.

综上得(X,Y)的分布函数为
$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda x}-\mathrm{e}^{-\lambda y}), & -y<x\le0,\\ 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda y}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & 0<x\le y,\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda y}, & 0\le y\le x,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

（23）**解**　（Ⅰ）由于$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$相互独立，且$X_i\sim B(1,0.2),\ i=1,2,\cdots,10$，故
$$\sum_{i=1}^{10}X_i\sim B(10,0.2).$$

同理，$X_1^2,X_2^2,\cdots,X_{10}^2$相互独立，且$X_i^2\sim B(1,0.2),\ i=1,2,\cdots,10$，故$\sum_{i=1}^{10}X_i^2\sim B(10,0.2)$.

（Ⅱ）①$P\{\overline{X}\le\dfrac{1}{10}\}=P\{\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i\le\dfrac{1}{10}\}=P\{\sum_{i=1}^{10}X_i\le1\}=P\{\sum_{i=1}^{10}X_i=0\}+P\{\sum_{i=1}^{10}X_i=1\}$

$$=0.8^{10}+C_{10}^{1}0.2\times0.8^9=2.8\times0.8^9.$$

②$P\{S^2=\dfrac{5}{18}\}=P\{\dfrac{1}{9}[\sum_{i=1}^{10}X_i^2-\dfrac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10}X_i)^2]=\dfrac{5}{18}\}=P\{10\sum_{i=1}^{10}X_i^2-(\sum_{i=1}^{10}X_i)^2=25\}$.

由于X_i只取0或1，$i=1,2,\cdots,10$，所以$\sum_{i=1}^{10}X_i^2=\sum_{i=1}^{10}X_i$，所以

$$P\{S^2=\frac{5}{18}\}=P\{(\sum_{i=1}^{10}X_i)^2-10\sum_{i=1}^{10}X_i+25=0\}=P\{\sum_{i=1}^{10}X_i=5\}=C_{10}^{5}0.2^5\times0.8^5=252\times0.16^5.$$