2023 春算法基础期末考试卷

BY 陈雪 and 邵帅

2023 年 7 月 1 日

提示：可以直接使用如下定理不用证明：

1. 判断无向图 G 是否有大小为 k 的匹配是属于 P 的。
2. 判断三正则无向图 G（即每个点度数都恰为三）是否有大小为 k 的独立集是属于 NPC 的。
3. 裴蜀定理。

题目 1. 将下列问题与算法匹配（5 分）：
问题为：最大流，最小生成树，最短路径。
算法为：Dijstra，BFS，Prim，Kruskal，Floyd-Warshall，Ford-Fulkerson。

题目 2. 问题 A 可以 Karp 归约到问题 B，则下列说法正确的有（5 分）：

1. 若 $B \in \mathrm{P}$，则 $A \in \mathrm{P}$。
2. 若 $B \in \mathrm{NP}$，则 $A \in \mathrm{NP}$。
3. 若 $B \in \mathrm{NPC}$，则 $A \in \mathrm{NPC}$。
4. 若 $B \notin \mathrm{NPC}$，则 $A \notin \mathrm{NPC}$。

.

题目 3. 给定一张无向简单图 G，边带权 $w(e) > 0$，求图权重最小的非平凡环（环的权值定义为环上所有边权值相加）（18 分）。

题目 4. 给定一张有向图 G，点编号从 1 到 $|V|$。对每个 i 求 $r_i = \max\{j \mid 存在j到i路径\}$（18 分）。

题目 5. 给定一张二分图 $G = (U, V, E)$（U, V, E 分别为左右部点集与边集），而边有边权 $w(e)$，将下列问题写成对应的规划问题（$6 + 6 + 7$ 分）。
（1）求 G 权值和最大的匹配，用 $0 - 1$ 整数规划问题来写。
（2）在匹配边最多的情况下，求 G 权值和最大的匹配，用 $0 - 1$ 整数规划问题来写。注意你不能直接使用 G 的最大匹配数，你能使用的只有 $w(e)$ 的一些组合（如 $\sum, \max$）。而且目标函数也不一定要是权值和，只要通过这个问题解得的对应变量可以还原回 G 的满足要求的一个匹配即可。
（3）在（2）的条件下把每个变量的取值范围放宽到 $[0, 1]$，使其变为一半的线性规划问题，写出这个问题的对偶问题。

题目 6. 给定整数 a, b, c，令 $d = \gcd(a, b, c)$，解决如下问题（$5 + 10$ 分）。
（1）证明存在整数 x, y, z 使得 $ax + by + cz = d$。
（2）给出一个算法，输入整数 a, b, c，求出对应的 x, y, z 与 $d = \gcd(a, b, c)$。

题目 7. 给定一张二分图 $G = (U, V, E)$，而 F 是边集 E 的一个子集，解决如下这些问题（$5 + 5 + 10$ 分）。

（1）问题为：判断是否存在大小至少为 k 的集合 F，使得 U 中的每个点至多与 F 中的一条边有连接，而 V 中的每个点至多与 F 中的两条边有连接。证明这个判断问题是属于 P 的。

（2）问题为：判断是否存在大小至少为 k 的集合 F，使得 U 中的每个点至多与 F 中的一条边有连接，而 V 中的每个点与 F 中要么两条边有连接要么没有边有连接。证明这个判断问题是属于 P 的。

（2）问题为：判断是否存在大小至少为 k 的集合 F，使得 U 中的每个点至多与 F 中的一条边有连接，而 V 中的每个点与 F 中要么三条边有连接要么没有边有连接。证明这个判断问题是属于 NPC 的。