

组合数学-期中

邵帅

2022 秋

1. (10pt) 证明从 $3, 5, \dots, 99$ 共 99 个奇数中任选 34 个数, 一定存在两个数互素。(如证明任选 51 个数中必有两个数互素最多可得 4 分)。
2. (12pt) 在一个边长为 1 的立方体中任取 9 个点, 则其中一定存在两点使得它们之间的距离不大于 L , 问 L 最小可以是多少, 并证明。
3. (10pt) 已知: 对完全图 K_{25} 的所有边进行红蓝染色, 则一定存在一个红色 K_5 或者一个蓝色 K_4 。证明: 对完全图 K_{50} 的所有边进行红蓝染色, 则一定存在一个红色 K_5 或者一个蓝色 K_5 。
4. (14pt) 考虑方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$, 其中 m, n 均为偶数且 $m > n$:
 - (a) (4pt) 求该方程非负整数解的个数。
 - (b) (4pt) 求该方程非负偶数解 (x_i 全为偶数) 的个数。
 - (c) (6pt) 求该方程非负奇数解 (x_i 全为奇数) 的个数。(b、c 小问对特殊情况 $n = 4, m = 16$ 求解每问最多可得 2 分)。
5. (18pt) 求解下列式子并证明:
 - (a) (4pt) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} e^i$
 - (b) (6pt) $\sum_{i=0}^n \binom{2n}{2i} 2^{2i}$ (对特殊情况 $n = 5$ 求解最多可得 3 分)。
 - (c) (8pt) $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} i^2$ (对特殊情况 $n = 10$ 求解最多可得 3 分)。
6. (20pt) 平面上一只蚂蚁从原点出发, 它每次向上、向右或向左走距离 1, 经过 m 步后到达点 $0, k$ 。
 - (a) (3pt) 证明 $m - k$ 是偶数。
 - (b) (7pt) 求一共有多少种不同的走法。
 - (c) (10pt) 上述走法中不包含 $x = -1$ 这条线上的点的走法有多少种?(b、c 小问对特殊情况 $m = 9, k = 3$ 求解每问最多分别可得 3 分及 4 分)。
7. 考虑 n 对夫妻排成一列:
 - (a) (12pt) 其中每对夫妻两人之间不相邻的排列方法有多少种?
 - (b) (12pt) 其中男女相间且每对夫妻两人之间不相邻的排列方法有多少种?

对特殊情况 $\forall n = 3$ 求解每问最多可得 5 分。

8. S 为一个 n 元集合, f 和 g 为定义在 S 的子集上的函数。已知对于 S 的任意偶数元子集 X 都有

$$f(X) = \sum_{y \subseteq X, |Y| \text{ is even}} g(Y)$$

且对于 S 的任意奇数元子集 X , 都有

$$f(X) = \sum_{y \subseteq X, |Y| \text{ is even}} -g(Y)$$

对于任意奇数元子集 $X \subseteq S$, 求解 $\sum_{Y \subseteq X} f(Y)$ 并给出证明。(对特殊情况 S 为五元集合时求解最多可得 5 分)