

2023 春代数结构期末考试卷

2023 年 6 月 28 日

题目 1. 解下列同余方程组:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 9 \pmod{11} \end{cases}$$

题目 2. $m, n \in N^*$ 且 $\gcd(m, n) = 1$, 求证: $m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$ 。

题目 3. 算置换的乘积, 忘记置换具体是什么了。

题目 4. R 是定义在 $A \times A$ 上的二元关系, 其中 A 是自然数集 N 的子集。 $(a, b) \stackrel{R}{\sim} (c, d)$ 当且仅当 $a + d = b + c$ 。

- (1) 求证 R 是 $A \times A$ 上的等价关系;
- (2) 当 $A = \{1, 2, 3\}$ 时, 求商集 $(A \times A)/R$ 。

题目 5. (1) G 为一有限群, 证明 G 中阶大于 2 的元素个数为偶数;

- (2) 在 (1) 的条件下加上 $|G|$ 为偶数, 证明 G 中必有 2 阶元。

题目 6. G 为一个群, 证明 G 没有非平凡子群当且仅当 $G = \{e\}$ 或者 G 为素数阶循环群。

题目 7. 设 H 是群 G 的正规子群, 且 $[G : H] = m$ 。求证: $\forall x \in G, x^m \in H$ 。

题目 8. 设 G 为一个群, 定义 G 的中心 $Z(G)$ 为: $Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G, xg = gx\}$ 。

- (1) 证明 $Z(G)$ 是 G 的正规子群;
- (2) 若 G 是交换群, 证明 $Z(G) = G$;
- (3) 若 $G/Z(G)$ 是循环群, 证明 $Z(G) = G$ 。

题目 9. 设 R 是一个环, S 是 R 的子集, 而 I 是 R 的理想且 $I \subset S$ 。

- (1) 若 S 是 R 的子环, 证明 S/I 是 R/I 的子环。
- (2) 若 S 是 R 的理想, 证明 $(R/I)/(S/I) = R/S$ 。