Numeric Method 2021 Spring Final

guch8017

June 2021

1 填空题

1. 给定矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$,则 $||A||_\infty =$____,$||A||_1 =$____,$\mathrm{cond}_1(A) =$____,$\rho(A) =$____。(后两问需给出代数精确解)。
2. 已知 $l_i(x)$ 是拉格朗日插值基函数，则 $\sum_{i=0}^{k}(x_i^3 + 2x_i)l_i'(x) =$____
3. 已知 $f[0, 0.5, 2] = 1.8, f[1, 0.5, 2] = 1.6$，则 $f[0, 0.5, 1, 2] =$____
4. 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$，对 A 做 Doolittle 形式的 LU 分解，则分解得到的 $L =$____，$U =$____

2 ???

想不起来了

3 最小二乘拟合

给定以下数据，试求用最小二乘法求拟合函数 $y = a \cdot e^{bx}$ 中 a, b 的值

x_i	1	2	3	4
y_i	3.16	1.75	1	0.56

4 线性方程组的迭代求解

对于方程 $Ax = b$，已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ c & 4 & 1 \\ 0 & c & 4 \end{bmatrix}$，$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$，求

1. 写出方程组的 Jacobi、Gauss-Seidel，SOR 迭代的分量形式。
2. 写出方程组的 Gauss-Seidel 迭代矩阵。
3. Gauss-Seidel 迭代收敛时 c 需要满足的条件。

5 线性多步法求解微分方程

对于微分方程组 $\frac{du}{dx} = f(x, u(x))$，对其在 $x_{i-3} \sim x_{i+1}$ 区间上进行积分，得到微分方程的积分表示

$$u(x_{i+1}) = u(x_{i-3}) + \int_{x_{i-3}}^{x_{i+1}} f(x, u(x))\mathrm{d}x$$

利用 x_i, x_{i-1}, x_{i-2} 作为积分插值点，试求

1. 给出微分方程的线性多步法格式
2. 求该格式的局部截断误差

6 幂法求特征值

给出矩阵 $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 16 & -2 & -2 \\ 16 & -3 & -1 \end{bmatrix}$，从初始向量 $y^{(0)} = (0.5, 0.5, 1)^T$ 出发进行幂法迭代，迭代过程中数据如下表所示，求该矩阵的按摸最大特征值及对应的特征向量。

表格略，拿程序跑个幂法，取前 12 次迭代过程就是题目给的条件了

7 Lagrange 插值与 Hermite 插值

利用 Lagrange 插值对 $2n$ 个点进行插值，且这些插值点满足 $x_{n+j} = x_n + \epsilon, \epsilon \neq 0 (0 \leq j < n)$。给定函数 $\phi_j(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{n-1}(x - x_i)$。考虑 $\Phi_j(x)$ 为 Lagrange 插值多项式中包含 $f(x_j)$ 与 $f(x_{j+n})$ 的项，则

1. 求证以下关系式成立

$$\Phi_j(x) = \frac{\phi_j(x)\phi_j(x-\epsilon)}{\phi_j(x_j)\epsilon}\left(\frac{x-x_j}{\phi_j(x_j+\epsilon)}f(x_j+\epsilon) - \frac{x-x_j-\epsilon}{\phi_j(x_j-\epsilon)}f(x_j)\right)$$

2. 在给出已知条件后，额外添加条件 $f'(x_i), i=0,\cdots,n-1$，求利用 n 个点进行 Hermite 插值得到的 Hermite 插值多项式 q_{2n-1}

3. 求 $\epsilon \to 0$ 时 $\Phi_j(x)$ 的极限，并求证 q_{2n-1} 与 p_{2n-1} 有一致的精度。不确定这题是不是要求证这个，极限是确定要求的