1 基本概念

- 定义 —— 是什么（概念） —— 如何表示
- 性质 —— 怎么样（特点）
- 运算 —— 如何处理（原则性过程）
- 定理 —— 有什么规律（规律总结）

1.1 集合

Q：对于集合 A，|A| 指的是什么？A：集合 A 的基数。

Q：集合的基数是指什么？A：集合中包含的元素个数。

1.2 映射与变换

Q：两有限集 A，B 之间可以建立双射的充分必要条件是什么？A：|A|=|B|。

Q：什么是集合 A 的一个变换？A：集合 A 到其自身的映射，可以是单射、满射或双射。

Q：任意 n 元有限集共几个双射变换？A：n! 个。

1.3 代数运算

Q：什么是代数运算？A：在集合(M)上的法则(○)，$\forall a, b \in M, \exists! d \in M : a \circ b = d$。

Q：T(M)是什么？A：集合M上所有变换构成的集合。

Q：S(M)是什么？A：集合M上所有双射变换构成的集合。

1.4 运算律

1.5 同态与同构

Q：$M \sim \bar{M}$表示什么？A：代数系统M与$\bar{M}$同态。

Q：代数系统M与$\bar{M}$同态的条件是什么？A：存在一个从代数系统M到$\bar{M}$的同态映射，且为满射。

Q：什么是同态映射？A：集合M到集合($\bar{M}$)的一个映射(φ)，$\exists\varphi : M \to \bar{M}$满足$\varphi(a \circ b) = \varphi(a)\bar{\circ}\varphi(b)$。

Q：$M \cong \bar{M}$表示什么？A：代数系统M与$\bar{M}$同构。

Q：代数系统M与$\bar{M}$同构的条件是什么？A：存在一个从代数系统M到$\bar{M}$的同构映射。

Q：什么是同构映射？A：是一个双射的同态映射(φ)

1.6 等价关系与集合的分类

2 群

2.1 群的定义和初步性质

Q：群是什么？A：集合对代数运算满足结合律，且有单位元和逆元，则集合对代数运算成群。

Q：交换群是什么？A：群的代数运算满足交换律的群。

Q：对于群 G，|G| 指的是什么？A：群 G 的阶。

Q：群的阶是什么？A：群中包含的元素个数。

2.2 群中元素的阶

Q：对于群中元素 a，|a|指的是什么？A：元素 a 的阶。

Q：群中元素 a 的阶是什么？A：使$a^n = e$的最小正整数 n。

Q：什么是周期群？A：群中每个元素的阶都有限的群。

Q：什么是无扭群？A：群中除单位元e外，其余元素的阶均无限的群。

2.3 子群

Q：设G，H是群，$H \leq G$指的是什么？A：H是G的子群。

Q：群G的子群H需要满足哪些条件？A： H 是 G 的一个 非空子集，且对G的代数运算也作成一个群。

Q：|G|>1，G的平凡子群是1什么？A：只由单位元e做错的子群{e}和G本身。

Q：什么是中心元素？A：令 G 是一个群， G 中元素 a 如果同 G 中每个元素都可换，则称 a 是群G的一个 中心元素。

Q：什么是群G的中心？A：群G的中心元素作出的一个集合C(G)，也是G的一个子群。

2.4 循环群

Q：什么是生成系？A：设M是群G的一个非空子集，G中包含M的子群总是存在，<M>是所有包含M的子群的交，则M是子群<M>的生成系。

Q：什么是循环群？A：可以由一个元素生成的群。

Q：什么是循环群的生成元？A：生成循环群的那个元素。

2.5 变换群

Q：什么是变换群？A：一个集合上的一些变换为元素，关于这些变换的代数运算所成的群。

Q：什么是对称群？A：集合M上的双射变换群S(M为M上的对称群。

2.6 置换群

Q：什么是置换群？A：n元对称群S_n的任意一个子群。

Q：什么是k-轮换？A：将数码i_1变成i_2，i_2变成i_3，…，i_{k-1}变成i_k，i_k变成i_1，其余数码不变的置换σ。

Q：什么是对换？A：2-轮换。

Q：什么是不相连轮换？A：没有公共数码的轮换。

Q：什么是奇置换和偶置换？A：能分解为奇数/偶数个对换的乘积的置换。

2.7 陪集、指数和 Lagrange 定理

Q：什么是左陪集/右陪集？A：G的子集$aH=\{ax|x\in H\}$和$Ha=\{xa|x\in H\}$，H为G的一个子群，$a\in G$。

Q：H是G的子群，(G:H)是指什么？A：H在G里的指数。

Q：什么是子群H在群G里的指数？A：群 G 中关于子群 H 的互异的左（或右）陪集的个数。

Q：Lagrange 定理的内容是什么？A：|G|=|H|(G:H)，即任何子群的阶和指数都是群 G 的阶的因数。

3 正规子群和群的同态与同构

3.1 群同态与同构的简单性质

Q：群 G 到群 $\bar{G}$的同态映射 φ 是单射的充分必要条件是什么？A：群 $\bar{G}$的的单位元$\bar{e}$ 的逆象只有 e。

Q：什么是Klein四元群？A：有4个元素，除了单位元外其阶均为2，最小的非循环群。

3.2 正规子群和商群

Q：N⊴G是指什么？A：N是G的正规子群。

Q：什么是正规子群？A：对G中每个元素a都有aN=Na的子群N。

Q：G/N是指什么？A：G关于N的商群。

Q：什么是商群？A：群 G 的正规子群 N 的全体陪集对于陪集乘法作成一个群。

Q：什么是哈密顿群？A：每个子群都是正规子群的非交换群。

Q：有限交换群 G 为单群的充要条件是什么？A：|G|为素数。

3.3 群同态基本定理

Q：任何群和其什么群同态？A：商群，$G \sim G/N$。

Q：设φ是群 G 到群$\bar{G}$的一个同态映射，$Ker\varphi$ 是什么？A： φ 的核。

Q：什么是同态映射 φ 的核？A：$\bar{G}$ 的单位元在 φ 之下的所有逆像作成的集合。

Q：设φ是群 G 到群$\bar{G}$的一个同态映射，$Im\varphi$ 是什么？A： φ 的像集。

Q：什么是同态映射 φ 的像集？A：G 中所有元在 φ 之下的像作成的集合。

Q：群同态基本定理揭示了什么规律？A：设φ是群 G 到群$\bar{G}$的一个同态满射，则$N = \operatorname{Ker}\varphi \trianglelefteq G, G/N \cong \bar{G}$。

Q：循环群的同态像必为什么群？A：循环群。

Q：循环群的商群是什么群？A：循环群。

3.4 群的同构定理

Q：第一同构定理：设φ是群G到群$\bar{G}$的一个同态满射，又$Ker\varphi \subseteq N \trianglelefteq G$，$\bar{N} = \varphi(N)$，则？A：$G/N \cong \bar{G}/\bar{N}$。

Q：第二同构定理：设G是群，又$H \leq G, N \trianglelefteq G$，则？A：$H \cap N \trianglelefteq H, HN/N \cong H/(H \cap N)$。

Q：第三同构定理：设G是群，又$N \trianglelefteq G, \bar{H} \leq G/N$，则？A：$\exists! H \leq G : H \supseteq N \wedge \bar{H} = H/N$。

3.5 群的自同构群

Q：对于群G，AutG 是什么？A：群G的自同构群。

Q：什么是自同构群？A：群M的全体自同构关于变换的代数运算作成的群。

Q：无限循环群的自同构群是一个几阶循环群？A：2。

Q：n 阶循环群的自同构群是一个几阶群？A：$\varphi(n)$，$\varphi(n)$为 Euler 函数。

Q：对于群G，InnG 是什么？A：群G的内自同构群。

Q：什么是内自同构？A：对于群G，$a \in G, \tau_a : x \rightarrow axa^{-1} \qquad (\forall x \in G)$ 是 G的一个内自同构。

Q：什么是不变子群？A：正规子群也被称为不变子群。

Q：为什么正规子群被称为不变子群？A：对群G的正规子群N来说，总有$\tau_a(N) \subseteq N$。

Q：什么是特征子群？A：对群G的所有自同构σ都不变的子群N，$\sigma(N) \subseteq N$。

Q：什么是全特征子群？A：对于群G的所有自同态映射φ都不变的子群H，$\varphi(H) \subseteq H$。

Q：全特征子群、特征子群、正规子群之间的关系是什么？A：$\text{全特征子群} \subseteq \text{特征子群} \subseteq \text{正规子群}$。

4 环与域

4.1 环的定义

Q：什么是零元？A：加群的单位元。

Q：什么是负元？A：加群的逆元。

Q：什么是环？A：设非空集合R有两个代数运算，一个叫做加法（一般用+表示），另一个叫做乘法，R 对加法作成一个群，对于乘法满足结合律，乘法对加法满足左右分配律，则称R对这两个代数运算作成一个环。

Q：什么是环的左 or 右单位元？A：环R中有元素e，对环中每个元素a都有ea=a or ae=e，则称e为环R的一个左or右单位元。

Q：什么是偶数环？A：既无左单位元又无右单位元的环。

Q：什么是环R的子环？A：对R的加法域乘法也作成一个环的R的非空子集。

Q：环R的非空子集S作成子环的充要条件是？A： $\begin{matrix} a,b \in S \Rightarrow a-b \in S \\ a,b \in S \Rightarrow ab \in S \end{matrix}$ 。

Q：什么是环R的加群？A：环R关于其加法作成一个加群(R,+)。

Q：什么是循环环？A：环R的加群(R,+)是一个循环群，则环R是一个循环环。

Q：什么样的环必为循环环？A：阶为互异素数之积的有限环。

4.2 环的零因子和特征

Q：环 R 的零因子 a 需要满足什么条件？A：存在元素 $b \neq 0$，使 $ab = 0$，称 a 为 环 R 的一个 左零因子。

Q：数环以及数域上的多项式环，有无零因子？A：无。

Q：在无零因子的环中，关于乘法的什么律成立？A：消去律。

Q：在环 R 中，若 不是左零因子，则？A：$ab = ac, a \neq 0 \Rightarrow b = c$。

Q：环中有左零因子就有右零因子？A：对。

Q：什么是整环？A：阶大于 1 、有单位元且无零因子的交换环。

Q：环 R 的特征是什么？A：环 R 的元素（对加法）的最大阶 n。

Q：char R 是啥？A：环 R 的特征。

Q：只含有零元素的环，其特征是？A：1。

Q：在数环中除了{0}外，其他环的特征有和特点？A：都无限。

Q：设R是一个无零因子环，且|R|>1，则 R 中所有非零元素（对加法）的阶有什么特点？A：都相同。

Q：设R是一个无零因子环，且|R|>1，R 的特征有限，则 R 的特征有何特点？A：为素数。

Q：若环R有单位元，则 R 的特征与单位元有什么关系？A：单位元在加群(R, +)中的阶就是R的特征。

4.3 除环和域

Q：R 是除环需要满足什么条件？A：|R|>1，又R有单位元且每个非零元都有逆元。

Q：除环又叫做什么？A：体。

Q：可换除环称为什么？A：域。

Q：除环和域没有什么？A：零因子。

Q：阶数大于1的有限环若有非零因子元素，则其有什么？A：单位元。

Q：阶数大于1的有限环若有非零因子元素，则每个非零因子元素都是什么？A：可逆元。

Q：设R是一个有单位元的环，则R的可逆元也称为R的什么？A：单位。

Q：R的全体可逆元（单位）作成的群，称为R的什么？A：乘群或单位群。

Q：R 的乘群或单位群用什么表示？A：R^* 或 $U(R)$。