近世代数课后习题作业 1

1．找一个半群，它有限个左（右）单位元素。

2．找一个半群，它无限个左（右）单位元素。

3．设 $(S,\circ)$ 是一个半群，$a \in S$ 称为左消去元素，如果 $\forall x, y \in S$，有 $a \circ x = a \circ y$，则一定有 $x = y$。试证：如果 a 和 b 均为左消去元，则 $a \circ b$ 也是左消去元。

4．设 Z 为整数集合，$M = Z \times Z$。在 M 上定义二元运算"$\circ$"如下：

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M,\ (x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + 2x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

试证：

1）M 对上述定义的代数运算构成一个幺半群。

2）若 $(x_1, x_2) \neq (0,0)$，则 (x_1, x_2) 是左消去元。

3）运算"$\circ$"满足交换律。

5．在半群 $(S,\circ)$ 中：若有 $x^n = x^k$ $(n > k, x \in S)$，则有：$x^{n-k} x^k = x^k$

$\Rightarrow x^{2(n-k)} x^k = x^{n-k} x^k = x^n$

$\Rightarrow x^{2(n-k)} = x^{n-k} \Rightarrow x^{(n-k)} x^{(n-k)} = x^{n-k}$

请问上述推理有无错误之处?

6．证明：有限半群中一定有一个元素 a 使得 $a \circ a = a$

7．设 $(M,\circ,e)$ 是一个幺半群，$m \in M$ 是 M 的一个特定元素。在 M 上定义一个新的乘法运算"$*$"如下：$\forall a, b \in M$，$a * b = a \circ m \circ b$。试证：$(M,*)$ 是一个半群，问 m 满足什么条件时半群 $(M,*)$ 是一个幺半群？

8．设 S 是一个非空集合。试证：S 的幂集 2^S 对集合的对称差运算"Δ"构成一个群。

9．在所有 3 次置换构成的集合 S_3 对置换的乘法构成半群 $(S_3,\circ)$ 中，令 $A = \{(12),(23)\}$，请给出由 S_3 的子集 A 所生成的子半群（A）。

10.设 S 是一个非空集合。在 S 上定义乘法"$\circ$"如下：$\forall x, y \in S$，$x \circ y = y$。

证明：S 对乘法"$\circ$"构成一个半群。

近世代数课后习题作业 2

1.设 $(S,\circ,*)$ 是一个具有两个二元代数运算"$\circ$"和"$*$"的代数系。如果对"$\circ$"和"$*$"分别有单位元素 e_1 和 e_2，并且"$\circ$"对"$*$"以及"$*$"对"$\circ$"分别都满足左、右分配律。

证明：对 $\forall x\in S$ 都有 $x\circ x=x$， $x*x=x$

2.设 A 是半群 $(S,\circ)$ 的非空子集，(A) 为由 A 生成的子半群，证明：

$$(A)=\{x|\exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in A\text{使}x=a_1a_2\cdots a_n,n\geq 1\}$$

3.设 $(M,\circ,e)$ 是一个幺半群，$a\in M$ 称为幂等元，如果 $a\circ a=a$。证明：如果 M 是可交换的幺半群，则 M 的所有幂等元之集是 M 的一个子幺半群。

4.循环幺半群的子幺半群是否还是循环幺半群？请举例说明你的结论。

5.设 $(M_1,\circ,e_1)$ 与 $(M_2,*,\mathrm{e}_2)$ 是两个幺半群，$\varphi\colon \mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2$ 的同态。证明：$\varphi^{-1}(e_2)$ 是 M_1 的一个子幺半群。$\varphi^{-1}(e_2)$ 是否是 M_1 的理想？

$//\varphi^{-1}(e_2)=\{x|x\in M_1\wedge\varphi(x)=e_2\}$

6.试证：两个同态的合成还是同态。

7.设 R 为实数集，$S=\{(a,b)|a\neq 0,a,b\in R\}$。在 S 上利用通常的加法和乘法定义二元运算"$\circ$"如下：$\forall(a,b),(c,d)\in S$，$(a,b)\circ(c,d)=(ac,ad+b)$

验证：$(S,\circ)$ 是群。

8.n 次方程 $x^n=1$ 的根称为 n 次单位根，所有 n 次单位根之集记为 U_n。证明：U_n 对通常的复数乘法构成一个群。

9.设

$$G=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

试证：G 对矩阵乘法构成一个群。

近世代数课后习题作业 3

1．设a和b是群G的两个元素。如果$(ab)^2=a^2b^2$，试证：$ab=ba$

2．设G是群。如果$\forall a\in G$，$a^2=e$，试证：G是交换群。

3．证明四阶群是交换群。

4．证明：在任一阶大于 2 的非交换群里必有两个非单位元a和b，使得$ab=ba$。

5．有限群里阶大于 2 的元素的个数必为偶数。

6．证明：偶数阶群里阶为 2 的元素的个数必为奇数。

7．偶数阶群里至少有一个阶为 2 的元素。

8．设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为n阶群G中的n个元素（它们不一定各不相同）。证明：存在整数p和q（$1\le p\le q\le n$），使得$a_pa_{p+1}\cdots a_q=e$

9．设G_1和G_2是群G的两个真子群。证明：$G_1\bigcup G_2$是G的子群的充分必要条件是$G_1\subseteq G_2$或$G_2\subseteq G_1$。

10．设$(G_1,\circ)$和$(G_2,*)$都是群，$\varphi:G_1\to G_2$，φ是满射且$\forall a,b\in G_1$有：

$$\varphi(a,b)=\varphi(a)*\varphi(b)$$

证明：$\varphi^{-1}(e_2)$是G_1的子群，其中e_2为G_2的单位元素。

$//\varphi^{-1}(e_2)=\{x|x\in G_1\wedge\varphi(x)=e_2\}$

11. 设$(Z,+)$为整数的加法群，令$S_1=\{5,7\}$，$S_2=\{6,9\}$，请分别给出(S_1)与(S_2)。

近世代数课后习题作业 4

1．设 R 是全体实数之集，$G=\{f \mid f:R\to R, f(x)=ax+b, \forall x\in R, a\neq 0, b\in R\}$。试证：$G$ 是一个变换群。

2．设 R^+ 是一切正实数之集，R 为一切实数之集。$(R^+,\times)$，$(R,+)$ 是群。令 $\varphi: R^+\to R$，$\forall x\in R^+$，$\varphi(x)=\log_p x$，其中 p 是正数。证明：φ 是同构。

3．证明：n 次单位根之集对复数的乘法构成一个循环群。

4．找出模 12 的同余类加群的所有真子群。

5．设 $G=(a)$ 是一个 n 阶循环群。证明：如果 $(r,n)=1$，则 $(a^r)=G$。

6．假定群 G 的元素 a 的阶为 n，$(r,n)=d$，证明：a^r 的阶为 n/d。

7．证明：六阶群里必有一个三阶子群。

8．设 p 是一个素数。证明：在阶为 p^m 的群里一定含有一个 p 阶子群，其中 $m\geq 1$。

9．在三次对称群 S_3 中，找一个子群 H，使得 H 的左陪集不等于 H 的右陪集。

10．设 H 是 G 的一个子群，如果左陪集 aH 等于右陪集 Ha，即 $aH=Ha$，则 $\forall h\in H, ah=ha$ 一定成立吗？

11．证明讲义文件 2-6 中的定理 6。

近世代数课后习题作业 5

1．设 A 和 B 是群 G 的两个有限子群。证明：$|AB|=\dfrac{|A||B|}{|A\bigcap B|}$

2. 设 G 是一个 n^2 阶的群，H 是 G 的一个 n 阶子群。证明：$\forall x\in G, x^{-1}Hx\bigcap H\neq\{e\}$。

3．利用 1 题的结论证明：六阶群中有唯一的一个三阶子群。

4．证明：指数为 2 的子群是正规子群。

5．证明：两个正规子群的交还是正规子群。

6．设 H 是群 G 的子群，N 是 G 的正规子群。试证：NH 是 G 的子群。

7．设 G 是一个阶为 $2n$ 的交换群，试证 G 必有一个 n 阶商群。

8．设 H 是群 G 的子群。证明：H 是 G 的正规子群的充分必要条件是 H 的任两个左陪集的乘积还是 H 的一个左陪集。

9．设 H 是群 G 的 2 阶正规子群，试证 G 的中心 C 包含 H。

近世代数课后习题作业 6

1．设 G 为 m 阶循环群，$\overline{G}$ 为 n 阶循环群。试证：$G \sim \overline{G}$ 当且仅当 $n \mid m$。

2．设 G 是一个循环群，H 是 G 的子群，试证：G/H 也是循环群。

3．设 $Z(\sqrt{2}) = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in Z\}$，其中 Z 是整数的全体之集。

试证：$Z(\sqrt{2})$ 对数的通常加法和乘法构成一个环。

4．设 $Z(i) = \{m + ni \mid m, n \in Z\}$，其中 Z 是整数的全体之集。

试证：$Z(i)$ 对复数的加法和乘法构成一个环。

5．设 $Q(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in Q\}$，其中 Q 是全体有理数之集。

试证：$Q(\sqrt[3]{2})$ 对数的通常加法和乘法不构成一个环。

6．设 $Q(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in Q\}$，其中 Q 是全体有理数之集。

试证：$Q(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ 对数的加法和乘法构成一个域。

7．设 e 是环 R 的唯一左单位元。试证：e 是 R 的单位元。

8．设 $(R, +, \circ)$ 是一个有单位元 1 的环，如果 R 中的元素 a, b 及 $ab-1$ 均有逆元素，

试证：$a - b^{-1}$ 及 $(a - b^{-1})^{-1} - a^{-1}$ 也有逆元素，且 $((a - b^{-1})^{-1} - a^{-1})^{-1} = aba - a$

9．证明：有单位元素的环 R 中零因子没有逆元素。

10. 证明：在交换环中二项式定理成立，即有：

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n$$

11. 设 R 是一个无零因子环。如果 R 中的元素 a 有左逆元，证明 a 必有右逆元，从而 a 有逆元。

12. 设 R 是一个环，$a, b \in R$，$ab = ba$。试证：a 与 $-b$，a 与 $-ab$ 可交换。如果 a 与 b, c 可交换，试证：a 与 $b + c$，$a + c$ 也可交换。

13. 设 F 是一个域，它仅有四个元素。证明：

1）F 的特征数是 2。

2）F 中任一非零元和单位元 e 均满足方程 $x^2 = x + e$

3）列出 F 的加法表和乘法表。

14.如果 p 不是素数，Z_p 是一个域吗？为什么？

15. 设域F的特征为有限数p，a与b及a_i均在F里。证明：

$$(a \pm b)^{p^n} = a^{p^n} \pm b^{p^n}$$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p$$

16. 假设E是一切偶数之集。证明：

1）E是Z的一个子环。

2）$N = \{4r \mid r \in E\}$是的E理想。

3）$N = (4)$吗？为什么？

17. 设Z是整数环。证明：$(3,7) = Z$。又$(13,10) = ?$

18. 设$(R,+,\circ)$是一个环，S和T是R的两个非空子集。定义S与T的和$S+T$为：

$$S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}$$

证明：如果N和H是R的理想，则$N+H$也是R的理想。