



代数结构相关知识测试题目及答案汇总

半群和么半群

问题部分

1. **单选 (10分)** : 集合 S 上的一个二元代数运算是一个 () 。
 - A. $S \times S$ 的子集
 - B. S 的幂集
 - C. 从 S 到 S 的映射
 - D. 从 $S \times S$ 到 S 的映射
2. **单选 (10分)** : 半群 $(S, *)$ 中的元素 a 称为 S 的单位元, 如果 () 。
 - A. 如果 a 为零元素。
 - B. 对 S 中的任意元素 b , $a * b = b$ 。
 - C. 既是左单位元, 又是右单位元。
 - D. $a * a = a$
3. **判断 (10分)** : 任何一个半群都能扩充成一个么半群。 ()
 - A. \times
 - B. \checkmark
4. **判断 (10分)** : 将半群扩充为么半群后, 如果原来的半群也是么半群的话, 扩充后的么半群会拥有两个么元。 ()
 - A. \checkmark
 - B. \times
5. **判断 (10分)** : 一定有一个循环半群, 它是不可换的半群。 ()
 - A. \times
 - B. \checkmark
6. **判断 (10分)** : 有限半群中一定有一个幂等元。 ()
 - A. \checkmark
 - B. \times
7. **填空 (10分)** : 设 A 是半群 S 的一个非空子集, 那么 $(A) = ()$ 。
8. **填空 (10分)** : 如果半群中有两个不同的左单位元, 那么 () 。
9. **填空 (10分)** : 给定代数系 $\{a, b, c, *\}$, 满足 $a * a = b$, $b * b = c$, $c * c = a$, 那么乘法“ $*$ ”一定 () 。
10. **填空 (10分)** : 如果半群 (S, \circ) 中的元素 s 满足 $sS = S$, 那么 () 。

答案部分

1. 答案: D
解析: B、与定义不符; C、与定义不符; D是二元代数运算的定义。
2. 答案: C
解析: B、这是左单位元; C、满足单位元定义; D、与定义不符。
3. 答案: B
4. 答案: B
解析: 么元是唯一的。
5. 答案: A
解析: 循环半群都是交换的半群。
6. 答案: A
解析: 这是一道习题结论。
7. 答案: $\{a_1 a_2 \cdots a_n \mid a_i \in A, i = 1, 2, \cdots, n, n \geq 1\}$
解析: 习题结论。
8. 答案: 该半群一定没有右单位元
解析: 考察半群的性质。
9. 答案: 不满足结合律
10. 答案: S 中必有左么元
解析: 课件中的引理。

群

问题部分

1. 单选 (10分) : 设 G 是群。如果对 $\forall a \in G$, 都有 $a^2 = e$, 那么 G 是 () 。
 - A. 有限群
 - B. 无限群
 - C. 偶数阶群
 - D. 交换群
2. 单选 (10分) : 么半群 S 成为一个群, 如果 () 。
 - A. S 中的每个元素都有逆元素
 - B. S 的阶是有限数
 - C. S 中的所有元素都是幂等元
 - D. S 中有一个可逆元

3. **判断 (10分)** : n 次方程 $x^n = 1$ 的根称为 n 次单位根, n 次单位根构成的集合按照复数的乘法构成一个循环群。 ()
 - A. \times
 - B. \checkmark
4. **判断 (10分)** : 6阶群中必有4阶元素。 ()
 - A. \times
 - B. \checkmark
5. **判断 (10分)** : 如果么半群中每个元素都有一个左逆元, 那么这个么半群是一个群。 ()
 - A. \times
 - B. \checkmark
6. **填空 (10分)** : 指数为2的子群一定是 () 。
7. **填空 (10分)** : 设 $G = \langle a \rangle$ 是一个 n 阶循环群, 证明: 如果 $(r, n) = 1$, 那么 $\langle a^r \rangle = G$ 。
8. **填空 (10分)** : 设 a 和 b 是群 G 的两个元素。如果 $(ab)^2 = a^2b^2$, 那么 () 。
9. **填空 (10分)** : 如果 H 是群 G 的子群, N 是 G 的正规子群, 那么 NH 必是 G 的 () 。
10. **填空 (10分)** : 模12剩余类加群是 () 。

答案部分

1. **答案:** D
解析: A、不一定是有限群; B、不一定是无限群; C、未见得成立; D、课件中的习题。
2. **答案:** A
解析: A、符合群的定义; B、不满足定义; C、不满足定义; D、不满足定义。
3. **答案:** B
4. **答案:** A
5. **答案:** B
6. **答案:** 正规子群
7. **答案:** $(r, n) = 1$
8. **答案:** $ab = ba$
解析: 交换律。
9. **答案:** 子群
10. **答案:** 有限群 或 循环群 或 交换群
解析: 这个群有多方面的特征。

环和域

问题部分

1. 单选 (10分) : 环中由一个元素生成的理想是 () 。
 - A. 极大理想
 - B. 主理想
 - C. 循环理想
 - D. 域
2. 单选 (10分) : 设 $Z(\sqrt{2}) = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, 其中 \mathbb{Z} 是全体整数构成的集合。 $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ 对数的通常的加法和乘法构成一个 () 。
 - A. 环
 - B. 域
 - C. 体
 - D. 理想
3. 判断 (10分) : 如果 $Q(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in Q\}$, 其中 Q 是全体有理数构成的集合。那么 $Q(\sqrt[3]{2})$ 对数通常的加法和乘法构成一个可换环。 ()
 - A. \checkmark
 - B. \times
4. 判断 (10分) : 如果环中有唯一——一个左单位元, 那么该环一定有单位元。 ()
 - A. \checkmark
 - B. \times
5. 填空 (10分) : 模 n 剩余类环中, 如果 n 是 () , 那么该环就会是一个域。
6. 填空 (10分) : 环 R 是体, 当且仅当 R 是环并且 () 。
7. 填空 (10分) : 体和域中非零元素对加法的阶 () 。
8. 填空 (10分) : 如果 $Q(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in Q\}$, 其中 Q 是全体有理数构成的集合, 那么 $Q(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ 对数通常的加法和乘法构成一个 () 。
9. 填空 (10分) : 设 $(R, +, \circ)$ 是一个有单位元 1 的环。如果 R 中的元素 a, b 及 $ab - 1$ 均有逆元素, 那么 $(a - b^{-1})^{-1} - a^{-1}$ 也可逆, 其逆元素是 () 。
10. 填空 (10分) : 体中只有两个理想它们是 () 。

答案部分

1. 答案: B

解析: A、不成立; B、主理想的定义; C、群中才这样命名; D、不成立。

2. **答案:** A
解析: A、复习中第一题； B、不成立； C、根号2就没有逆元素； D、语法不通，这里谈不上理想。
3. **答案:** B
解析: 见环中复习的第2题。
4. **答案:** A
5. **答案:** 素数
解析: 见课件14页中例子。
6. **答案:** $R \setminus \{0\}$ 构成一个群
解析: 体的定义。
7. **答案:** 是一个相同的正整数
解析: 课件中的定理13.2.1。
8. **答案:** 域
解析: 复习中的第3题。
9. **答案:** $aba - a$
解析: 见课件复习第5题。
10. **答案:** $\{0\}$ 和体本身
解析: 课件24页定理3。

格

问题部分

1. **单选 (10分)**：如果一个格中 ()，那么这个格是一个完备格。
 - A. 每个非空子集都有上确界和下确界
 - B. 存在最大元素和最小元素
 - C. 任意有限子集都有上确界和下确界
 - D. 格的元素全体构成的集合存在上确界和下确界
2. **判断 (10分)**：如果格中存在极大元素和极小元素这个格就是一个有界格。 ()
 - A. ×
 - B. √
3. **填空 (10分)**：证明：在一个格里，如果 $(a \vee b = a \wedge b)$ ，那么 ()。
4. **填空 (10分)**：格中的两个二元代数运算满足 ()。
5. **填空 (10分)**：在对偶原理中，对于给定的格，构造了一个新格，原来格中的求上确界和下确界两个代数运算在新格中分别变成了求 ()。

答案部分

1. **答案:** A

解析: A是完备格的定义; B是有界格的定义; C不成立, 格中任意有限子集都有上确界和下确界不能得出是完备格; D也是有界格的定义。

2. **答案:** A

解析: 把极大和极小改成最大和最小就对了。

3. **答案:** $a = b$

解析: 复习第3题。

4. **答案:** 交换律, 结合律, 吸收律和幂等律

解析: 课件中定理14.1.1。

5. **答案:** 求下确界和上确界运算

解析: 参看课件中对对偶原理的讲解。