2020 봄학기
다중관점기하학과 컴퓨터비젼
숙제 #1 (제출 4/5)

(1) C_∞^*을 absolute points $(1, \pm\sqrt{-1}, 0)$을 통과하는 직선들을 매개화하는 dual conic이라고 하자. 어떤 homography H가 C_∞^*을 보존하는 것은 H가 닮음 변환인 필요충분조건임을 증명하시오.

(2) 평면 상의 임의의 볼록 사각형들은 서로 사영동등(projectively equivalent)함을 보이시오.

(3) L을 $\mathbb{P}^3$상의 직선이라고 하자. X, X'을 L상의 두 점이라고 하고, P, P'을 L을 포함하는 두 평면이라고 할 때, X, X'을 열로 가지는 4×2 행렬 $(X\ X')$의 2×2 minor로 생성되는 L의 Plücker 좌표와 $(P\ P')$의 2×2 minor로 생성되는 L의 Plücker 좌표 사이의 관계를 구하시오.

(4) L, L'을 각각 $\mathbb{P}^3$상의 점 X, Y와 X', Y'을 통과하는 직선이라고 하자. 이 때, L을 교집합으로 가지는 두 평면 P, Q에 대하여 다음이 성립함을 보이시오.

$$\det(X\ Y\ X'\ Y') = 0 \Leftrightarrow P^T X' Q^T Y' = Q^T X' P^T Y'.$$

여기서 $(X\ Y\ X'\ Y')$은 X, Y, X', Y'을 열로 가지는 4×4 행렬을 의미한다.

(5) 좋아하는 직사각형 물체의 사진을 찍고 MATLAB으로 metric rectification을 구하시오.

2018-22219 임규범

~~Hw~~#1

1) $C_\infty^* = IJ^T + JI^T$ 는 circular point에 대한 dual conic를 의미한다. 이때 I J는

$$I = [1 \ i \ 0]^T, \quad J = [1 \ -i \ 0]^T$$

$$\therefore C_\infty^* = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}(1 \ -i \ 0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}(1 \ i \ 0) = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projective space에서 scale factor는 무시할 수 있다.
Similarity transform을 H_s라고 하면

$$C_\infty^{*\prime} = H_s C_\infty^* H_s^T = \begin{bmatrix} sR & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sR & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

으로 conic의 transform을 표현할 수 있고 이를 전개하면

$$= \begin{bmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & t_x \\ s\sin\theta & s\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdot \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & 0 \\ s\sin\theta & s\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s\cos\theta & s\sin\theta & 0 \\ -s\sin\theta & s\cos\theta & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) & s^2\cos\theta\sin\theta - s^2\sin\theta\cos\theta & 0 \\ s^2\cos\theta\sin\theta - s^2\sin\theta\cos\theta & s^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= s^2\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = s^2 C_\infty^* = C_\infty^*$$

$$\boxed{\therefore C_\infty^{*\prime} = H_s C_\infty^* H = C_\infty^*}$$

2) $x' = H(x)$가 Line을 Line으로 사영하는거 증명함으로써 Line의 집합인 convex rectangle이 사영등등한거 증명하면

$\mathbb{P}^2$에서
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$
가 성립하고

$y = mx + n$ 인 직선을 사영시킨다고 가정했을 때 위 식을 x, x', y'에 대한 식으로 치환할 수 있다. $y \to mx+n$

$$((g+hm)x + hn + i)x' = (a+bm)x + bn + c$$

$$((g+hm)x + hn + i)y' = (d+em)x + en + f$$

위 식을 다시 x에 대해 정리하면

$$((g+hm)x' - (a+bm))x = bn + c - (hn+i)x'$$

$$((g+hm)y' - (d+em))x = en + f - (hn+i)y'$$

$$= \begin{bmatrix} (g+hm)x' - (a+bm) & bn+c-(hn+i)x' \\ (g+hm)y' - (d+em) & en+f-(hn+i)y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$x, 1$은 nonzero 이므로 $[\cdot]\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ 에서 $\det[\cdot] = 0$ 이어야 한다.

$$0 = \begin{vmatrix} (g+hm)x' - (a+bm) & (bn+c) - (hn+i)x' \\ (g+hm)y' - (d+em) & (en+f) - (hn+i)y' \end{vmatrix}$$

$$= (g+hm)(en+f)x' - (a+bm)(en+f) + (a+bm)(hn+i)y'$$
$$- (g+hm)(bn+c)y' - (d+em)(bn+c) + (d+em)(hn+i)x'$$

$$= ((g+hm)(en+f) - (d+em)(hn+i))x'$$
$$+ ((a+bm)(hn+i) - (g+hm)(bn+c))y'$$
$$+ (d+em)(bn+c) - (a+bm)(en+f)$$

2018-22?9 임규범

$y' = m'x' + n'$인 직선의 방정식을 얻을 수 있다.

$$m' = -\frac{(g+hm)(en+f) - (d+em)(hn+i)}{(a+bm)(hn+i) - (g+hm)(bn+c)}$$

$$n' = -\frac{(d+em)(bn+c) - (a+bm)(en+f)}{(a+bm)(hn+i) - (g+hm)(bn+c)}$$

따라서 $H(\cdot)$ · line $\mapsto$ line 사영을 보존하므로 convex rectangle 또한 보존된다. 즉, 모든 convex rectangle은 $H(\cdot)$를 통해 표현 가능하므로 사영동등하다

---

3) 두 점 $X = (x, y, z, w)$

$X' = (x', y', z', w')$

두 평면 $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$

$P' = (P_1', P_2', P_3', P_4')$

plücker coordinate로 표현해보면

$L_{point} = (L_{01}\ L_{02}\ L_{03}\ L_{23}\ L_{31}\ L_{12})$로 표현할 수 있다

$$\begin{bmatrix} w & w' \\ x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{bmatrix}$$

2×2 minor

$$\boxed{\begin{array}{ll} L_{01} = wx' - w'x & L_{23} = yz' - y'z \\ L_{02} = wy' - w'y & L_{31} = zx' - z'x \\ L_{03} = wz' - w'z & L_{12} = xy' - x'y \end{array}}$$

$L_{plane} = (\hat{L}_{23}\ \hat{L}_{31}\ \hat{L}_{12}\ \hat{L}_{01}\ \hat{L}_{02}\ \hat{L}_{03})$과 같이 dual plücker coordinate를 사용하여 두 평면의 교점인 직선의 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_1' \\ P_2 & P_2' \\ P_3 & P_3' \\ P_4 & P_4' \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \hat{L}_{23} = P_3P_4' - P_3'P_4 & \hat{L}_{01} = P_1P_2' - P_1'P_2 \\ \hat{L}_{31} = P_4P_2' - P_4'P_3 & \hat{L}_{02} = P_1P_3' - P_1'P_3 \\ \hat{L}_{12} = P_2P_3' - P_2'P_3 & \hat{L}_{03} = P_1P_4' - P_1'P_4 \end{array}}$$

두 plücker coordinate L_{point}, L_{plane}은 같은 직선을 표현하고 있으므로 scaling factor k를 사용하여

$$\therefore \boxed{L_{point} = k L_{plane}}$$

---

4) P^3에서

moment vector

$$m_q = (p - q) \times \hat{l}$$
$$= p \times \hat{l} - q \times \hat{l}$$
$$= m - q \times \hat{l}$$

from origin

두 직선

m_{perp}는 두 직선 사이의 수선의 발과 수직인 벡터이고 $m_{perp} \perp \hat{l}'$

$$m_{perp} = m' - p^* \times \hat{l}'$$
$$= (p^{*'} - p^*) \times \hat{l}'$$

두 직선의 거리는

$$d = \frac{|(l, m) * (l', m')|}{\|\hat{l} \times \hat{l}'\|} \quad \text{when } \hat{l} \times \hat{l}' \neq 0$$

으로 나타낼 수 있고 이 때

$$(\hat{l}, m) * (\hat{l}', m') = \hat{l} \cdot (m' - p \times \hat{l}') = \hat{l}m' - \hat{l}(p \times \hat{l}')$$
$$= \hat{l}m' - (\hat{l} \times p) \cdot \hat{l}'$$
$$= \hat{l}m' + \hat{l}'m$$

두 직선이 접하면 $d = 0$이고 따라서

$\boxed{\hat{l}m' + \hat{l}'m = 0}$이 된다

$$\therefore \boxed{\begin{array}{l} \hat{l}m' + \hat{l}'m = l_{12}l_{34}' + l_{12}'l_{34} + l_{13}l_{42}' + l_{13}'l_{42} \\ \qquad + l_{14}l_{23}' + l_{14}'l_{23} = 0 \end{array}}$$

2018-22219 임규범

(t) $\det(XYX'Y') = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & X_1' & Y_1' \\ X_2 & Y_2 & X_2' & Y_2' \\ X_3 & Y_3 & X_3' & Y_3' \\ X_4 & Y_4 & X_4' & Y_4' \end{vmatrix}$

$$= X_1 \begin{vmatrix} Y_2 & X_2' & Y_2' \\ Y_3 & X_3' & Y_3' \\ Y_4 & X_4' & Y_4' \end{vmatrix} - X_2 \begin{vmatrix} Y_1 & X_1' & Y_1' \\ Y_3 & X_3' & Y_3' \\ Y_4 & X_4' & Y_4' \end{vmatrix}$$

$$+ X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & X_1' & Y_1' \\ Y_2 & X_2' & Y_2' \\ Y_4 & X_4' & Y_4' \end{vmatrix} - X_4 \begin{vmatrix} Y_1 & X_1' & Y_1' \\ Y_2 & X_2' & Y_2' \\ Y_3 & X_3' & Y_3' \end{vmatrix}$$

$$= X_1(Y_2 l_{34}' + Y_3 l_{42}' + Y_4 l_{23}') - X_2(Y_1 l_{31}' - Y_3 l_{14}' + Y_4 l_{13}')$$

$$+ X_3(-Y_1 l_{42}' - Y_2 l_{14}' + Y_4 l_{12}') - X_4(Y_1 l_{23}' - Y_2 l_{13}' + Y_3 l_{12}')$$

$$= l_{12} l_{34}' + l_{12}' l_{34} + l_{13} l_{42}' + l_{13}' l_{42} + l_{14} l_{23}' + l_{14}' l_{23}$$

$$= \hat{L} m' + \hat{L}' m$$

$$\boxed{\therefore \det(XYX'Y') = \hat{L} m' + \hat{L}' m = 0}$$

이 만족되어야 두 직선이 교차하면서 거리가 0이라는 것을 나타낼 수 있다.

L은 dual plücker의 형태로 나타낼수 있다. $L = PQ^T - QP^T$

L과 L'가 교차하는 경우 L'의 한점 X'와 L의 평면은

LX'로 나타낼 수 있고

$$\boxed{LX' = (PQ^T - QP^T)X' = PQ^T X' - QP^T X'} \text{이다.}$$

평면 LX'는 Y'와 한 평면 위에 있으므로 $dist(LX', Y') = 0$ 이 되어야 한다.

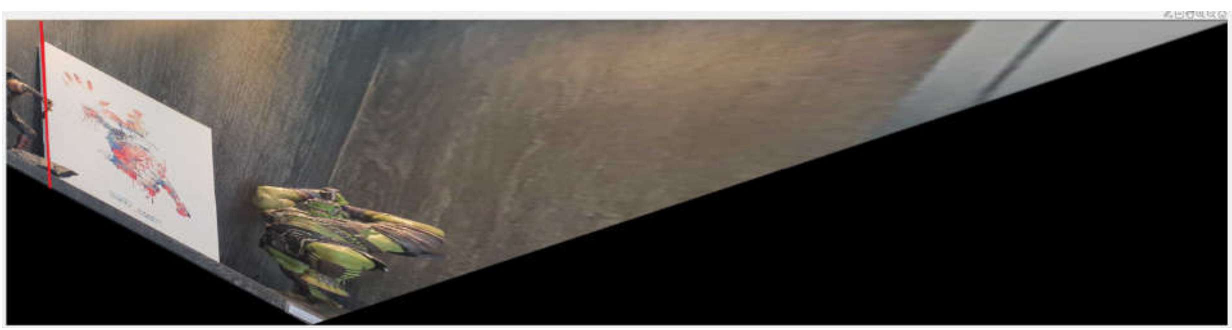
$$dist(LX', Y') = (PQ^T X' - QP^T X')^T Y'$$
$$= (X'^T Q P^T Y' - X'^T P Q^T Y') / \|LX'\|$$
$$= 0 \text{ 이 되어야 한다.}$$

따라서 두 직선 L, L'가 교차하는 경우 필요충분조건은

$\therefore (Q^T X')(P^T Y') - (P^T X')(Q^T Y') = 0$을 만족해야 한다.

Original image

Affine rectification



Metric rectification

Source Code of Metric rectification

```
%metric rectification up to similarity
% 두 개의 서로 직교하는 직선 l1,m1, l2,m2를 설정한다.
l1 = Lines(1,:);
l2 = Lines(2,:);
m1 = Lines(4,:);
m2 = Lines(3,:);
l11 = [l1(1)/l1(3) l1(2)/l1(3)];
m11 = [m1(1)/m1(3) m1(2)/m1(3)];
l22 = [l2(1)/l2(3) l2(2)/l2(3)];
m22 = [m2(1)/m2(3) m2(2)/m2(3)];


ortho_constraints = [l11(1)*m11(1)  l11(1)*m11(2)+l11(2)*m11(1)  l11(2)*m11(2);
                     l22(1)*m22(1)  l22(1)*m22(2)+l22(2)*m22(1)  l22(2)*m22(2)];
s = null(ortho_constraints);
% S = KK^T
S = [s(1) s(2); s(2) s(3)];

% cholesky는 S가 항상 Positive Definite이어야 한다는 조건이 있으므로 보다 범용적인 SVD를 사용하여 해를 구한다.
[U,D,V] = svd(S);

% S로부터 K 값을 구한다.
K = U*sqrt(D)*U';
Hmetric = eye(3);
Hmetric(1,1) = K(1,1);
Hmetric(1,2) = K(1,2);
Hmetric(2,1) = K(2,1);
Hmetric(2,2) = K(2,2);

% Homography 적용 후 이미지 출력
metric_img = applyHomography(images{1}, inv(Hmetric)*H);
imshow(metric_img)
```

```
function rectI = applyHomography(img, H)
  tform = maketform('projective',H');
  [boxx boxy]=tformfwd(tform, [1 1 size(img,2) size(img,2)], [1 size(img,1) 1 size(img,1)]);
  minx=min(boxx); maxx=max(boxx);
  miny=min(boxy); maxy=max(boxy);
  rectI =imtransform(img,tform,'XData',[minx maxx],'YData',[miny maxy],'Size',[size(img,1),round(size(img,1)*(maxx-minx)/(maxy-miny))]);
 end
```