I. Multiple View Geometry hw5

student: 임규범, student No.: 2018-22219

A. Problem 1. ch12(iii)

두 카메라의 이미지 평면에 대한 대응점 쌍 $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i)$이 주어졌을 때 이를 Euclidean 변환하면

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{T}\mathbf{x}_i \\ \check{\mathbf{x}}'_i &= \mathbf{T}'\mathbf{x}'_i\end{aligned} \tag{1}$$

과 같은 새로운 대응점 쌍 $(\check{\mathbf{x}}_i, \check{\mathbf{x}}'_i)$이 된다. 이 때 $\mathbf{T}, \mathbf{T}'$은 Euclidean 변환 행렬을 의미한다. 대응점 쌍 $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i)$ 사이에는

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{H}\mathbf{x}_i \tag{2}$$

를 만족하는 Homography $\mathbf{H}$가 존재하며 변환된 대응점 쌍 $(\check{\mathbf{x}}_i, \check{\mathbf{x}}'_i)$ 사이에는

$$\check{\mathbf{x}}'_i = \check{\mathbf{H}}\check{\mathbf{x}}_i \tag{3}$$

를 만족하는 Homography $\check{\mathbf{H}}$가 존재한다. 이 때, 두 Homography 사이에는

$$\check{\mathbf{H}} = \mathbf{T}'\mathbf{H}\mathbf{T}^{-1} \tag{4}$$

공식이 성립한다. 따라서 Geometric Distance $d(\check{\mathbf{x}}'_i, \check{\mathbf{H}}\check{\mathbf{x}}_i)$는

$$\begin{aligned}d(\check{\mathbf{x}}'_i, \check{\mathbf{H}}\check{\mathbf{x}}_i) &= d(\mathbf{T}'\mathbf{x}'_i, \mathbf{T}'\mathbf{H}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{x}_i) \\ &= d(\mathbf{T}'\mathbf{x}'_i, \mathbf{T}'\mathbf{H}\mathbf{x}_i) \\ &= d(\mathbf{x}'_i, \mathbf{H}\mathbf{x}_i)\end{aligned} \tag{5}$$

가 성립하므로 결국 $\mathbf{T}, \mathbf{T}'$ 값에 관계없이 에러값 $d(\cdot,\cdot)$은 동일하다. 따라서 $d(\cdot,\cdot)$의 1차 근사인 Sampson Error 또한 Euclidean 변환에 관계없이 동일하다.

B. Problem 2. ch13(iii)

카메라 행렬 $\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{I} \mid 0]$가 주어졌을 때 카메라를 이동한 경우 $\mathbf{P}' = \mathbf{K}[\mathbf{R} \mid \mathbf{t}]$이 된다. 월드 상의 평면 $\pi = (\mathbf{n}^\mathsf{T}, d)^\mathsf{T}$을 통해 카메라 이동에 대한 Homomography 변환을 구해보면

$$\mathbf{x}' = \mathbf{K}(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{t}\mathbf{n}^\mathsf{T}}{d})\mathbf{K}^{-1}\mathbf{x} \tag{6}$$

가 되고 이 때, Homography는 $\mathbf{H} = \mathbf{K}(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{t}\mathbf{n}^\mathsf{T}}{d})\mathbf{K}^{-1}$가 된다. 만약 카메라가 순수이동(pure translation)을 하는 경우 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$가 되어서 $\mathbf{P}' = \mathbf{K}[\mathbf{I} \mid \mathbf{t}]$가 되고

$$\mathbf{x}' = \mathbf{K}(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{t}\mathbf{n}^\mathsf{T}}{d})\mathbf{K}^{-1}\mathbf{x} \tag{7}$$

순수이동일 때 무한대 평면 π_∞에 대한 Homograhpy $\mathbf{H}_\infty$를 구해보면

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \lim_{d\to\infty} \mathbf{K}(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{t}\mathbf{n}^\mathsf{T}}{d})\mathbf{K}^{-1}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{K}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}\end{aligned} \tag{8}$$

가 된다. 즉 무한대 평면 π_∞에 존재하는 Vanishing Point는 순수이동에는 위치가 변하지 않는다. 직선 $\mathbf{l}$은 $\mathbf{l} = \mathbf{H}^\mathsf{T}\mathbf{l}' = \mathbf{K}^{-\mathsf{T}}(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{t}\mathbf{n}^\mathsf{T}}{d})^\mathsf{T}\mathbf{K}^\mathsf{T}\mathbf{l}'$와 같이 구할 수 있고 Vanishing Line $\mathbf{l}$은

$$\begin{aligned}\mathbf{l} &= \lim_{d\to\infty} \mathbf{K}^{-\mathsf{T}}(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{t}\mathbf{n}^\mathsf{T}}{d})^\mathsf{T}\mathbf{K}^\mathsf{T}\mathbf{l}' \\ &= \mathbf{K}^{-\mathsf{T}}\mathbf{K}^\mathsf{T}\mathbf{l}' \\ &= \mathbf{l}'\end{aligned} \tag{9}$$

과 같이 $\mathbf{l}' = \mathbf{l}$이 되어 위치가 변하지 않는다. 결론적으로 카메라의 순수이동에는 Vanishing Line $\mathbf{l}$이 변하지 않으므로 $\mathbf{l}$ 위의 두 점을 고정 점들(fixed-points)로 하는 Planar Homology가 성립한다.

C. Problem 3. ch13(vii)

월드 상의 네 개의 직선 $\mathbf{L}_i,\ i=1,\cdots,4$이 한 평면 π 위에 존재하는 경우 각각의 직선에서 임의의 점을 하나씩 추출하여 $\mathbf{X}_i,\ i=1,\cdots,4$를 얻은 후 이를 통해 $\pi_\mathbf{P}$와 $\pi_{\mathbf{P}'}$ 사이의 Homography $\mathbf{H}_\pi$를 구할 수 있다.

- $\mathbf{x}_i=\mathbf{P}\mathbf{X}_i, \mathbf{x}'_i=\mathbf{P}'\mathbf{X}_i$를 통해 네 개의 대응점 쌍 $(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}'_i),\ i=1,\cdots,4$를 구한다.
- 대응점 쌍 $(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}'_i),\ i=1,\cdots,4$을 사용하여 Homography $\mathbf{H}_\pi$를 구한다.
- 월드 상의 평면 π 위에 존재하지 않는 $\mathbf{X}_5,\mathbf{X}_6$를 사용하여 $\mathbf{x}'_5,\ \mathbf{x}'_6,\ \mathbf{H}_\pi\mathbf{x}_5,\ \mathbf{H}_\pi\mathbf{x}_6$를 각각 구한 후

$$\mathbf{e}'=(\mathbf{H}_\pi\mathbf{x}_5\times\mathbf{x}'_5)\times(\mathbf{H}_\pi\mathbf{x}_6\times\mathbf{x}'_6) \tag{10}$$

  를 통해 Epipole $\mathbf{e}'$를 구한다.
- Fundamental Matrix $\mathbf{F}=\mathbf{e}'^{\wedge}\mathbf{H}$를 통해 구한다.

위와 같은 방법을 생각할 수 있고 다른 방법으로는 Line Induced Homography를 사용하는 방법이 있다. 이미지 평면 $\pi_\mathbf{P}$ 상의 직선 $\mathbf{l}$이 존재할 때 이를 Back-projection한 평면은 $\pi_\mathbf{l}=\mathbf{P}^\intercal\mathbf{l}$과 같이 계산할 수 있다. 이를 통해 두 카메라의 이미지 평면 $\pi_\mathbf{P},\pi_{\mathbf{P}'}$에서 각각 네 개의 직선 $\mathbf{l}_i,\mathbf{l}'_i\ i=1,\cdots,4$를 Back-projection하면

$$\begin{aligned}\mathbf{l}_i &\Rightarrow \pi_{\mathbf{l}_i}=\mathbf{P}^\intercal\mathbf{l}_i\\ \mathbf{l}'_i &\Rightarrow \pi_{\mathbf{l}'_i}=\mathbf{P}'^\intercal\mathbf{l}'_i \quad i=1,\cdots,4\end{aligned} \tag{11}$$

가 된다. 카메라 행렬이 $\mathbf{P}=[\mathbf{I}\mid 0],\mathbf{P}'=[\mathbf{A}\mid\mathbf{a}]$과 같이 주어진 경우

$$\begin{aligned}\pi_i(\mu)&=\mu\mathbf{P}^\intercal\mathbf{l}_i+\mathbf{P}'^\intercal\mathbf{l}'_i,\quad i=1\cdots,4\\ &=\mu\begin{pmatrix}\mathbf{l}_i\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{A}^\intercal\mathbf{l}'_i\\\mathbf{a}^\intercal\mathbf{l}'_i\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{12}$$

가 된다. 이 때 모든 Back-projection된 평면들의 교차선들은 월드 상의 한 평면 π에 존재하므로 μ 값이 유일하게 결정된다. Result 13.1에 의해 월드 상의 평면 π로 유도된 Homography $\mathbf{H}_\pi$는

$$\mathbf{H}_{\pi,i}(\mu)=\mathbf{A}-\mathbf{a}\mathbf{v}(\mu)_i^\intercal \tag{13}$$

과 같고 μ 값이 고정되었으므로

$$\mathbf{H}_{\pi,i}=\mathbf{A}-\mathbf{a}\mathbf{v}_i^\intercal \tag{14}$$

과 같이 계산할 수 있다. 이 때 $\mathbf{v}_i$는

$$\mathbf{v}_i=(\mathbf{l}_i+\mathbf{A}^\intercal\mathbf{l}'_i)/(\mathbf{a}^\intercal\mathbf{l}'_i)\quad i=1,\cdots,4 \tag{15}$$

으로 구할 수 있다. 이 때 네 개의 직선들은 모두 동일한 Homography에 의해 변환되므로 $\mathbf{H}_i,\ i=1,\cdots,4$는 모두 동일한 Homography를 의미한다. 이를 통해 $\mathbf{A},\mathbf{a}$를 구한다.

다음으로

- 월드 상의 평면 π 위에 존재하지 않는 $\mathbf{X}_5,\mathbf{X}_6$를 사용하여 $\mathbf{x}'_5,\ \mathbf{x}'_6,\ \mathbf{H}_\pi\mathbf{x}_5,\ \mathbf{H}_\pi\mathbf{x}_6$를 각각 구한 후

$$\mathbf{e}'=(\mathbf{H}_\pi\mathbf{x}_5\times\mathbf{x}'_5)\times(\mathbf{H}_\pi\mathbf{x}_6\times\mathbf{x}'_6) \tag{16}$$

  를 통해 Epipole $\mathbf{e}'$를 구한다.
- Fundamental Matrix $\mathbf{F}=\mathbf{e}'^{\wedge}\mathbf{H}$를 통해 구한다.

D. Problem 4. ch13(viii)

$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{X}$이므로

$$\begin{aligned}\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{X}&=\begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{X}}\\1\end{bmatrix}\\ &=\mathbf{M}\tilde{\mathbf{X}}+\mathbf{m}\end{aligned} \tag{17}$$

따라서 $\tilde{\mathbf{X}}=\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})$이 된다. $\mathbf{X}\in\pi=(\tilde{\pi}^\intercal,\pi_4)$이므로

$$\tilde{\pi}^\intercal\tilde{\mathbf{X}}+\pi_4=0 \tag{18}$$

식이 성립하고 이에 따라

$$\begin{aligned}
&\tilde{\pi}^\intercal \tilde{\mathbf{X}} + \pi_4 = 0 \\
&\tilde{\pi}^\intercal \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}) + \pi_4 = 0 \\
&\tilde{\pi}^\intercal \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} = \tilde{\pi}^\intercal \mathbf{M}^{-1}\mathbf{m} - \pi_4 \\
&\frac{-\tilde{\pi}^\intercal \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}}{\pi_4 - \tilde{\pi}^\intercal \mathbf{M}^{-1}\mathbf{m}} = 1
\end{aligned} \tag{19}$$

이 된다. $\mathbf{x}' = \mathbf{P}'\mathbf{X}$이므로 이를 전개하면

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \mathbf{P}'\mathbf{X} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{M}' & \mathbf{m}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{M}'\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{m}' \\
&= \mathbf{M}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{M}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{m} + \mathbf{m}'
\end{aligned} \tag{20}$$

이 된다. 이를 다시 전개하면

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \mathbf{M}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{M}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{m} + \mathbf{m}' \\
&= \mathbf{M}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{M}'\mathbf{M}'^{-1}\mathbf{m}' - \mathbf{M}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{m} \\
&= \mathbf{M}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{M}'(\mathbf{M}'^{-1}\mathbf{m}' - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{m}) \\
&= \mathbf{M}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{M}'(\mathbf{M}'^{-1}\mathbf{m}' - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{m})(\frac{-\tilde{\pi}^\intercal \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}}{\pi_4 - \tilde{\pi}^\intercal \mathbf{M}^{-1}\mathbf{m}}) \\
&= \mathbf{M}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{M}'(\mathbf{M}'^{-1}\mathbf{m}' - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{m})(\frac{-\tilde{\pi}^\intercal}{\pi_4 - \tilde{\pi}^\intercal \mathbf{M}^{-1}\mathbf{m}})\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} \\
&= \mathbf{M}'(\mathbf{I} + (\mathbf{M}'^{-1}\mathbf{m}' - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{m})(\frac{-\tilde{\pi}^\intercal}{\pi_4 - \tilde{\pi}^\intercal \mathbf{M}^{-1}\mathbf{m}})\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} \\
&= \mathbf{M}'(\mathbf{I} + \mathbf{t}\mathbf{v}^\intercal)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} \\
&= \mathbf{H}\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{21}$$

이 된다.

E. Problem 5. matlab

scene_plane_based_fundamental_matrix.m 파일은 다음과 같다.

```
%left:  (966,411), (1206,352), (1219,618), (1014,625) are coplanar and (889,360), (1567,487)
%right: (711,445), (901,461), (957, 728), (776,649) are coplanar and (386,345), (1554,810)

x_left=[966 411 ; 1206 352; 1219 618; 1014 625];
x_right=[711 445 ; 901 461; 957 728; 776 649];

% compute four point-based homography of two view.
H = compute_homography_dlt(x_left', x_right');

x5_left=[889 360 1]';
x5_right=[386 345 1]';
x6_left=[1567 487 1]';
x6_right=[1554 810 1]';

Hx5_left = H*x5_left;
Hx6_left = H*x6_left;

% compute epipolar line l5 and l6.
l5 = cross(Hx5_left, x5_right);
l6 = cross(Hx6_left, x6_right);

% compute epipole by getting the intersection of l5 and l6.
e_r = cross(l5, l6);
skew_e_r = ...
   [0 -e_r(3) e_r(2); ...
    e_r(3) 0 -e_r(1); ...
    -e_r(2) e_r(1) 0];

% compute F = e'^H
```

```
F = skew_e_r*H;
format long g;
disp(F)

% load images.
im_left = imread('left.jpg');
im_right = imread('right.jpg');

% visualize epipolar lines in left image.
figure(1);
imshow(im_left);
figure(1);
epipolar_lines = epipolarLine(F',x_right);
points = lineToBorderPoints(epipolar_lines,size(im_left));
line(points(:,[1,3])',points(:,[2,4])','LineWidth',2);

% visualize epipolar lines in right image.
figure(2);
imshow(im_right);
figure(2);
epipolar_lines2 = epipolarLine(F,x_left);
points2 = lineToBorderPoints(epipolar_lines2,size(im_right));
line(points2(:,[1,3])',points2(:,[2,4])','LineWidth',2);
```

compute_homography_dlt.m 파일은 다음과 같다.

```
function [H] = compute_homography_dlt(x_left, x_right)
    % get centroid of four points.
    centroid1 = [sum(x_left(1,:))/4, sum(x_left(2,:))/4];
    centroid2 = [sum(x_right(1,:))/4, sum(x_right(2,:))/4];

    % average distance from the origin.
    dist1 = 0;
    dist2 = 0;

    for i=1:4
       x1 = x_left(1,i);
       y1 = x_left(2,i);
       x2 = x_right(1,i);
       y2 = x_right(2,i);
       dist1 = dist1 + sqrt((x1-centroid1(1))^2 + (y1-centroid1(2))^2);
       dist2 = dist2 + sqrt((x2-centroid2(1))^2 + (y2-centroid2(2))^2);
    end

    dist1 = dist1/4;
    dist2 = dist2/4;

    % compute T for each of the 2 sets of points
    T1 = [ 1/dist1/sqrt(2), 0, -centroid1(1)/dist1/sqrt(2); ...
          0, 1/dist1/sqrt(2), -centroid1(2)/dist1/sqrt(2); ...
          0, 0, 1];
    T2 = [ 1/dist2/sqrt(2), 0, -centroid2(1)/dist2/sqrt(2); ...
          0, 1/dist2/sqrt(2), -centroid2(2)/dist2/sqrt(2); ...
          0, 0, 1];

    % compute the transformed x values for each of the 2 sets of points
    pts1_norm = cat(1, x_left, ones(1,4));
    pts2_norm = cat(1, x_right, ones(1,4));

    x1_tf = T1*pts1_norm;
    x2_tf = T2*pts2_norm;
    x1_tf = x1_tf(1:2,:);
    x2_tf = x2_tf(1:2,:);

    A = zeros(8,9);
    for i=1:4
        x = x1_tf(1,i);
        y = x1_tf(2,i);
        u = x2_tf(1,i);
        v = x2_tf(2,i);
        A(2*i-1,:) = [-x, -y, -1, 0, 0, 0, u*x, u*y, u];
        A(2*i,:) = [0, 0, 0, -x, -y, -1, v*x, v*y, v];
    end

    % compute h as the nullspace of A.
    h = null(A);
    H = [h(1), h(2), h(3); ...
        h(4), h(5), h(6); ...
        h(7), h(8), h(9)];

    % finally get H.
    H = inv(T2)*H*T1;
end
```

사진을 통해 계산한 Fundamental Matrix는 다음과 같다.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 58.48 & 656.132 & 17114.064 \\ 364.824 & 77.061 & -2466981.832 \\ 103999.506 & 1235501.777 & 74554714.368 \end{bmatrix} \tag{22}$$

이를 통해 계산한 Epipolar Line들은 다음과 같다.