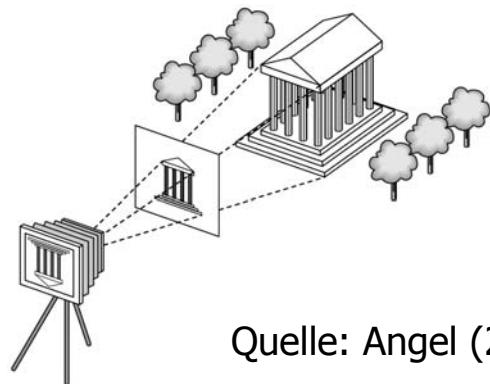
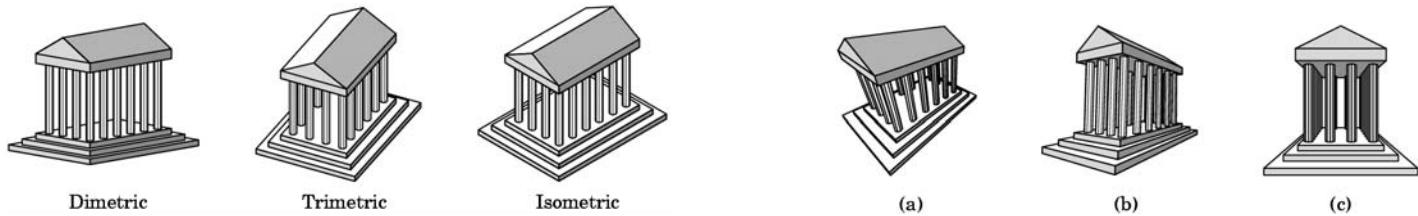


# Planare Projektionen und Betrachtungstransformation



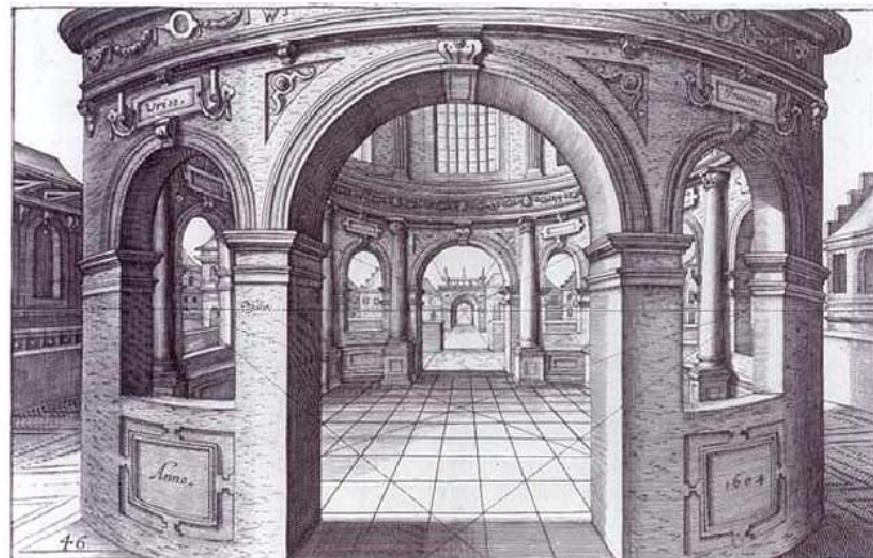
Quelle: Angel (2000)

# Gliederung

- Einführung
- Parallelprojektionen
- Perspektivische Projektionen
- Kameramodell und Betrachtungstransformationen
- Mathematische Beschreibung von Projektionen

# Einführung

A painting [the projection plane] is the intersection of a visual pyramid [view volume] at a given distance, with a fixed center [center of projection] and a defined position of light, represented by art with lines and colors on a given surface [the rendering]. (Alberti, 1435)

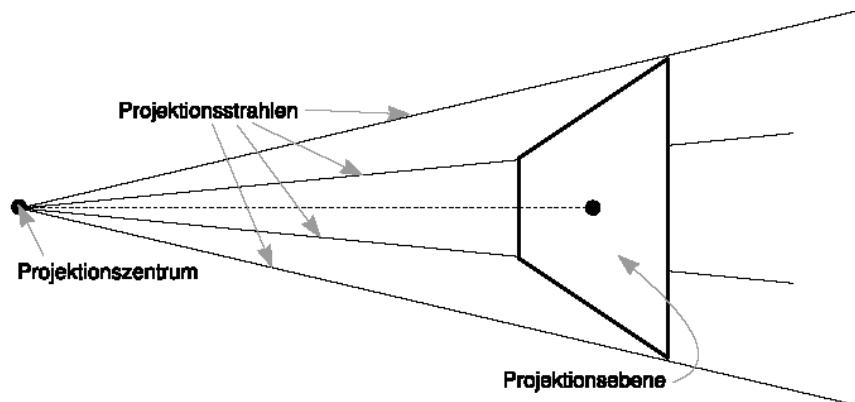


Hans Vredemann de Vries: Perspektiv 1604

# Einführung

Planare Projektionen:

- Projektionsstrahlen sind Geraden
- Gerade Linien werden auf gerade Linien abgebildet (es entstehen keine Krümmungen).
- Projektionsfläche ist eine Ebene.

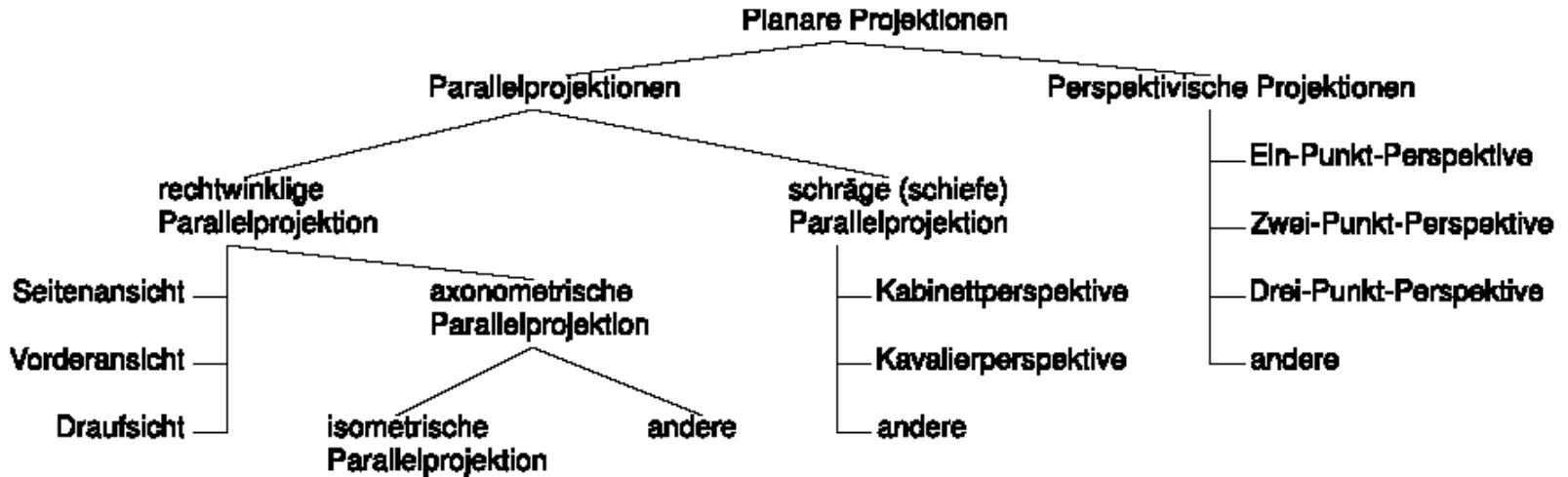


# Einführung

Wichtige Begriffe und Abkürzungen:

- Parallelprojektion ist charakterisiert durch die **Richtung der Projektion** (direction of projection, *dop*)
- Perspektivische Projektion ist charakterisiert durch das **Projektionszentrum** (center of projection, *cop*)
- Ebene auf die das Bild projiziert wird: **Sichtebene** (view plane).
- Vektor, der senkrecht zur Projektionsebene steht: **Normale der Sichtebene** (view plane normal, *vpn*).
- Strahlen, die die Projektion charakterisieren: Projektoren. Bei perspektivischer Projektion gehen sie vom *cop* aus und divergieren; bei der Parallelprojektion sind sie parallel.

# Klassifikation planarer Projektionen

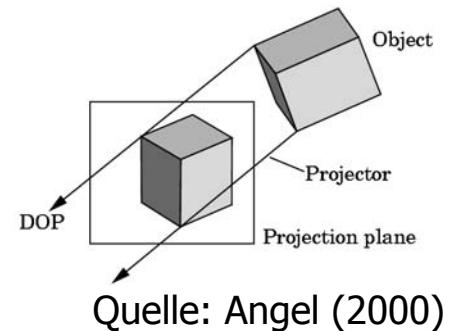


Rechtwinklige Parallelprojektion: *vpn* und *dop* stimmen überein.  
Schräg(e) Parallelprojektion: *vpn* und *dop* sind ungleich.

# Parallelprojektionen

## Parallelprojektion

- Projektionszentrum liegt im Unendlichen  
→ Projektionsstrahlen verlaufen parallel
- Keine perspektivische Verkürzung
- Parallele Linien bleiben parallel.
- Unterschiede: Winkel zwischen  $vpn$  und  $dop$  sowie Winkel zwischen  $dop$  und den Koordinatenachsen



Konsequenzen für die Computergraphik: Mehrere Bestandteile des Renderingprozesses lassen sich bei Parallelprojektion beschleunigen (z.B. Strahlverfolgung beim Raytracing).

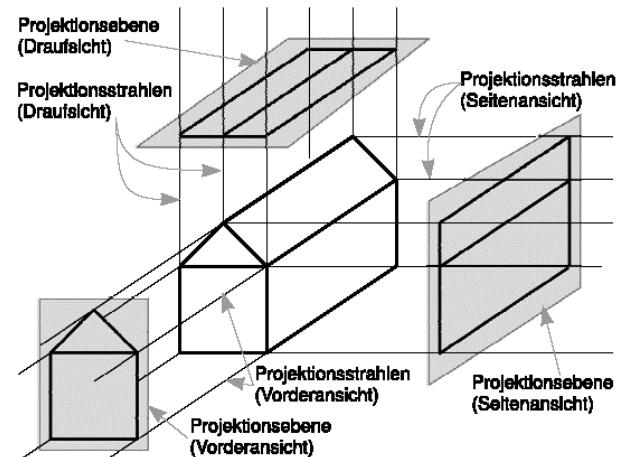
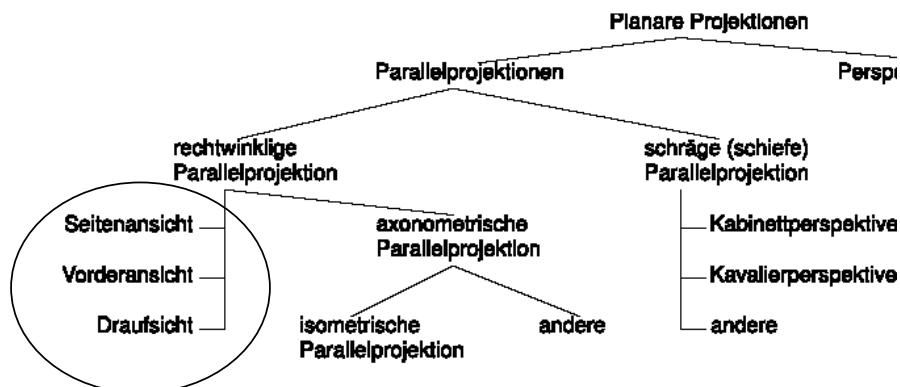
# Parallelprojektionen

Typische Anwendungen:

- Darstellung von architektonischen Modellen (Gebäuden), die im wesentlichen durch rechtwinklige Bestandteile charakterisiert sind
- Darstellung medizinischer Daten

# Parallelprojektionen

Seitenansicht, Vorderansicht, Draufsicht (Tafelprojektionen):  
Rechtwinklige Parallelprojektion, bei der Sichtebene parallel zu einer Koordinatenachse ist.

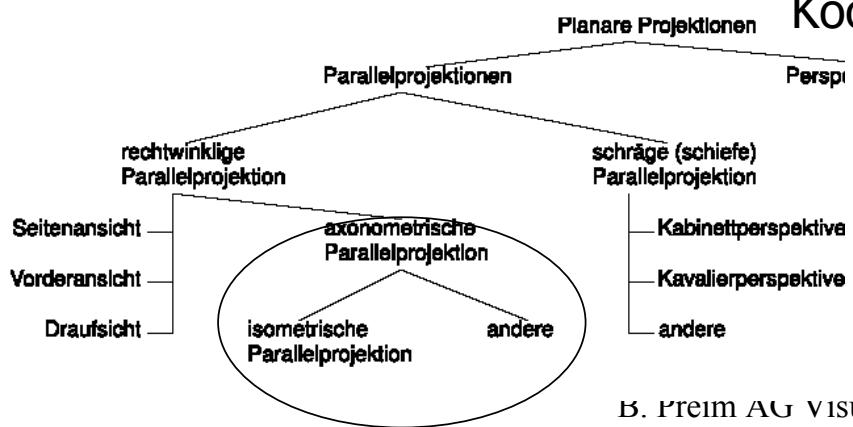


Quelle: Angel (2000)

# Parallelprojektionen

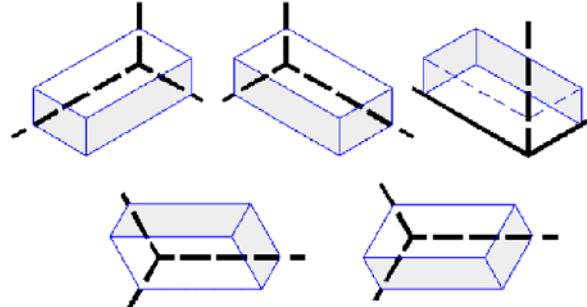
## Axonometrische und isometrische Projektionen:

- Rechtwinklige Parallelprojektion, bei die Normale der Projektions-ebene ( $vpn$ ) nicht parallel zu einer der Koordinatenachsen ist.
- Parallele Linien bleiben parallel; Winkel bleiben nicht erhalten.
- **Isometrische Projektion:** Spezialfall, bei dem der Winkel zwischen  $vpn$  und allen drei Koordinatenachsen gleich ist.
- **Dimetrische Projektion:** Winkel zwischen  $vpn$  und zwei Koordinatenachsen gleich.

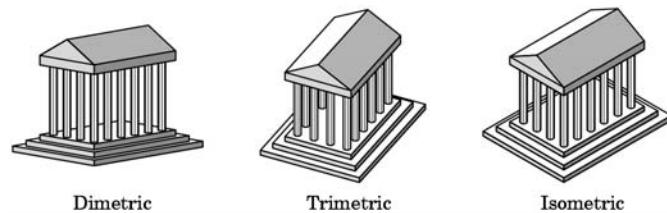


# Parallelprojektionen

Beispiele für isometrische Projektionen:



Isometrische und andere axonometrische Transformationen



Quelle: Angel (2000)

Trimetrisch: Winkel zwischen vpn und allen 3 Koordinatenachsen unterschiedlich.

# Parallelprojektionen

Schräge bzw. schiefe Parallelprojektionen:

- Normale der Sichtebene  $\neq$  Projektionsrichtung
- Besserer räumlicher Eindruck als bei rechtwinkligen Projektionen
- Sichtebene parallel zu einer Koordinatenebene
- Typische Varianten:
  - Kavalierperspektive:

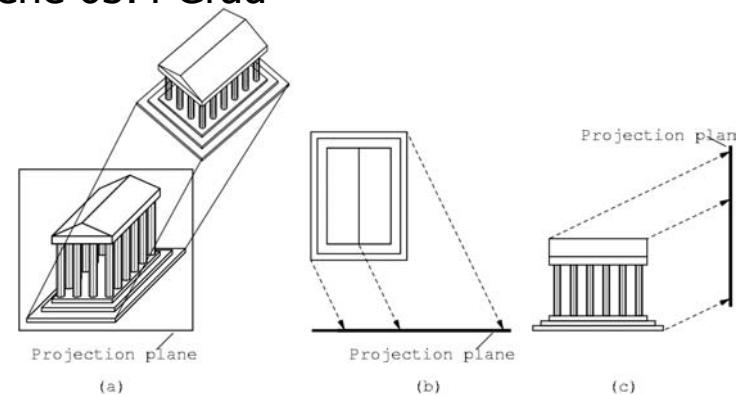
Winkel zwischen DOP und Sichtebene 45 Grad

– Kabinettperspektive:

Winkel zwischen DOP und Sichtebene 63.4 Grad

(=  $\arctan(2)$ ), Verkürzung um 1/2

Konstruktion einer schiefen  
Projektion sowie Vorder- und  
Seitenansicht

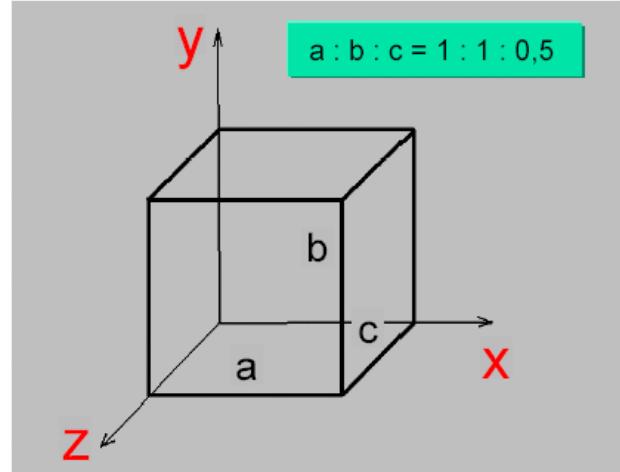
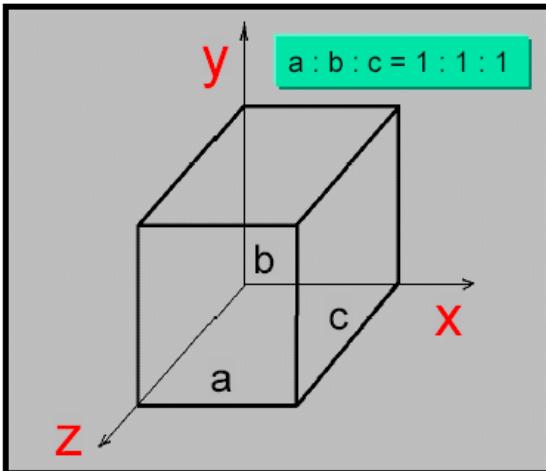


B. Preim AG Visualisierung Projektionen

12  
Quelle: Angel (2000)

# Parallelprojektionen

Kavalierperspektive und Kabinettperspektive:



Beide sind keine perspektivischen Projektionen!

Quelle: M . Haller, FH  
Hagenberg, (2002)

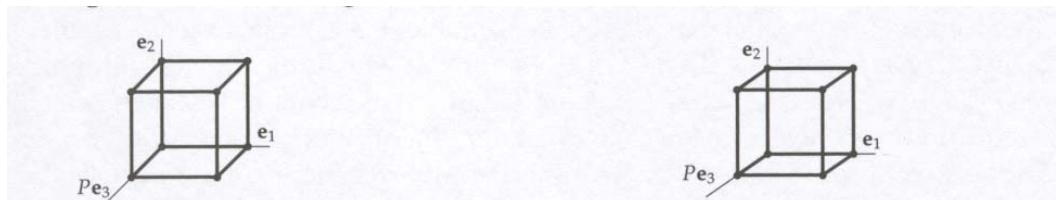
# Parallelprojektionen

Kavalierperspektive mit  $\alpha = 30$  Grad und  $\alpha = 45$  Grad



Quelle: Bender/Brill (2003)

Kabinettoperspektive mit  $\alpha = 30$  Grad und  $\alpha = 45$  Grad



Quelle: Bender/Brill (2003)

# Parallelprojektionen

Vergleich der Projektionsarten:

## 1. Rechtwinklige (orthographische) Projektion

### 1.1 Tafelprojektionen

- VPN parallel zu einer Koordinatenachse, DOP || VPN
- Bei einem Würfel: Zeigt eine Fläche, genaue Maße, kein 3D-Eindruck

### 1.2 Axonometrische Parallelprojektion

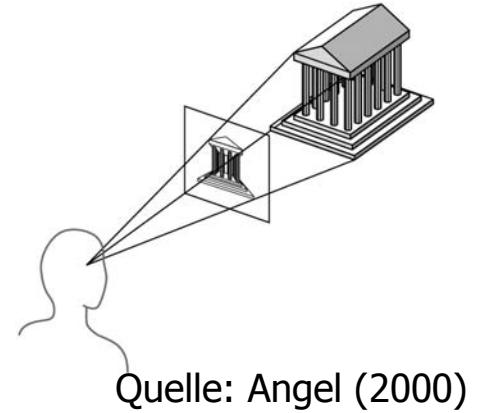
- VPN nicht parallel zu einer Koordinatenachse, DOP || VPN
- Bei einem Würfel: Zeigt angrenzende Flächen, keine uniforme Verkürzung

## 2. Schräge Parallelprojektion

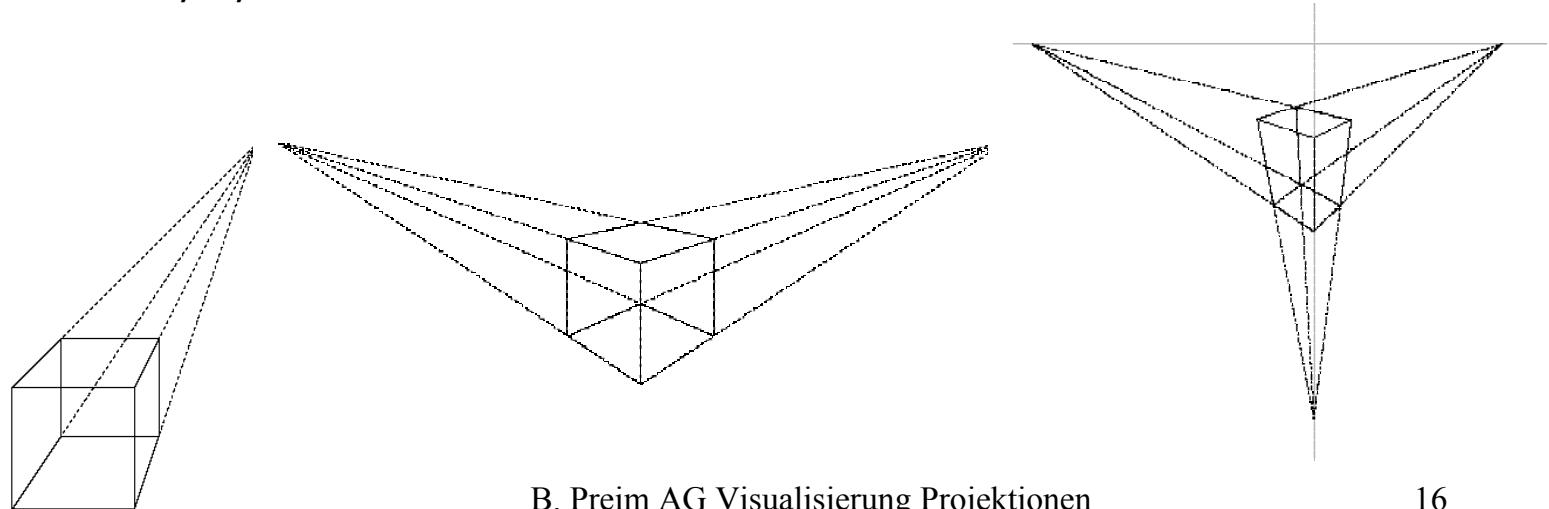
- VPN parallel zu einer Koordinatenachse, DOP  $\neq$  VPN
- Bei einem Würfel: Zeigt angrenzende Flächen, eine exakt, andere uniform verkürzt

# Perspektivische Projektion

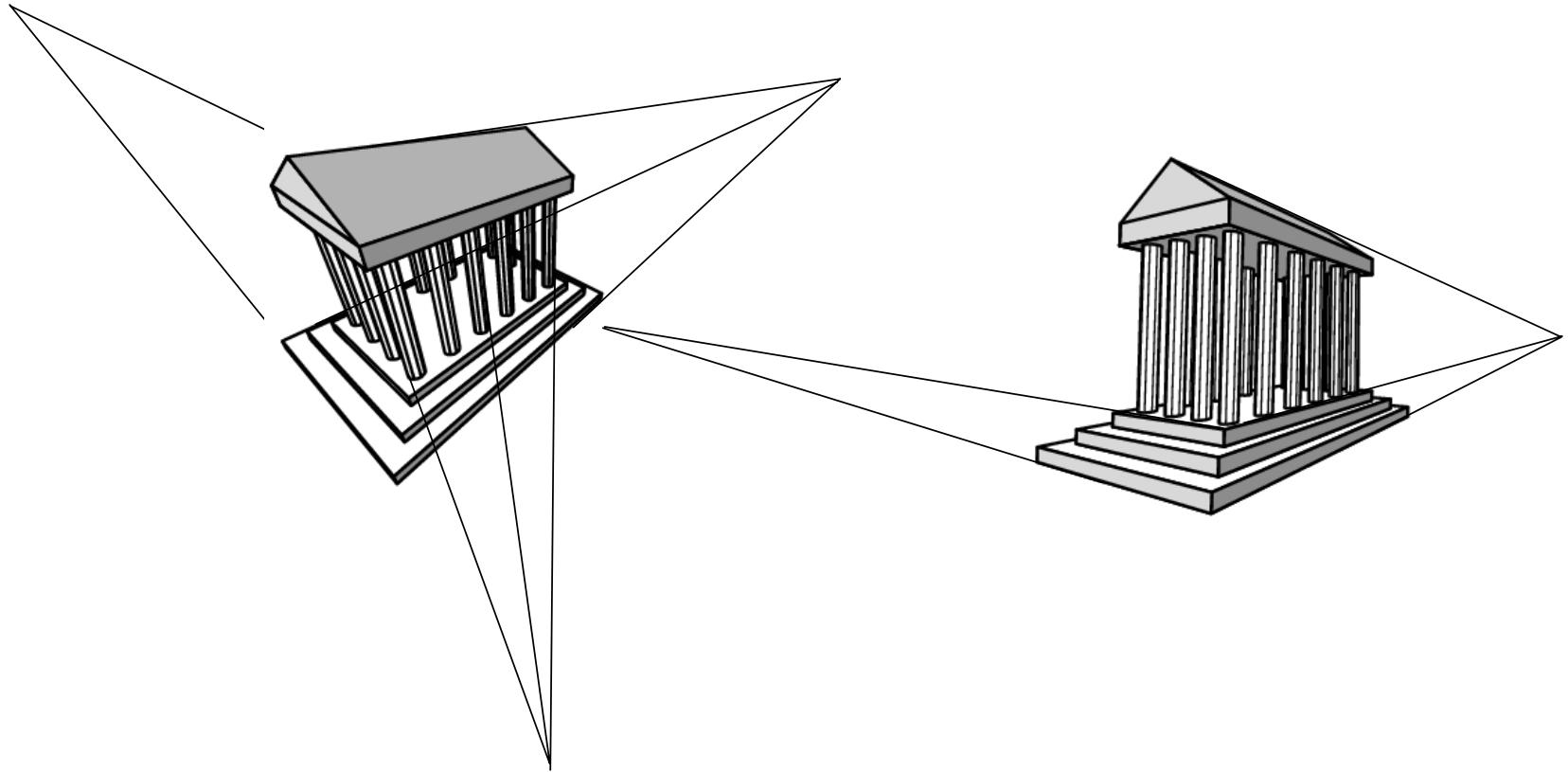
- Betrachter im COP
- Näher an der visuellen Wahrnehmung als Parallelprojektion
- Unterteilung nach der Anzahl der Fluchtpunkte (Schnittpunkte paralleler Geraden in x-, y- und z-Richtung).
  - 1, 2, 3



Quelle: Angel (2000)

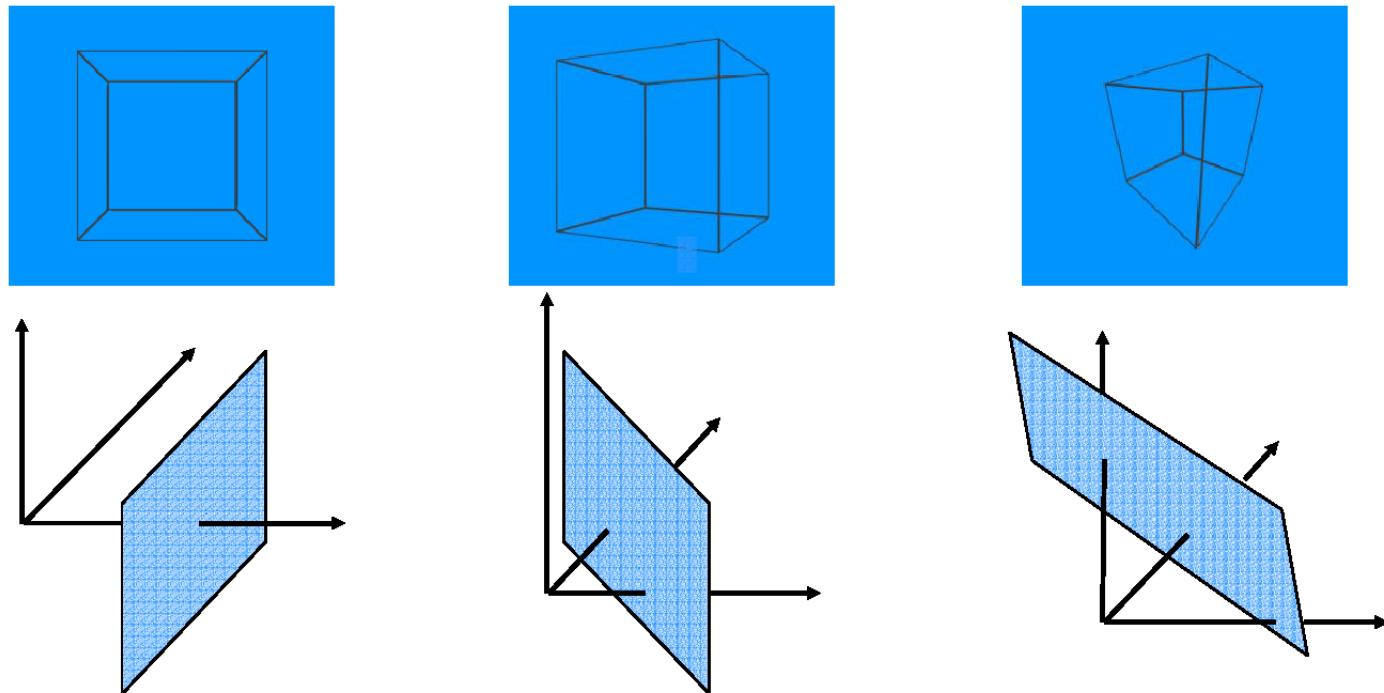


# Perspektivische Projektion



# Perspektivische Projektion

Sichtebene in Relation zu den Koordinatenachsen



Quelle: M . Haller, FH  
Hagenberg, (2002)

# Perspektivische Projektion

Eigenschaften:

- Bei allen Arten perspektivische Verkürzung
- Parallelität von Linien und Winkel werden im allgemeinen nicht erhalten.
- Unterschiedliche Anzahl der Fluchtpunkte resultiert aus dem Winkel zwischen Sichtebene und den Ebenen aus je zwei Koordinatenachsen.
- 3 Fluchtpunkte, wenn die Projektionsebene alle Ebenen (xy, xz und yz) schneidet. 1 Fluchtpunkt, wenn Sichtebene parallel zu einer der drei Ebenen.

# Kameramodell

- Reale Kamera als Orientierung und Metapher für den Viewingprozess.
- Parameter realer Kameras:
  - Position
  - Blickrichtung
  - Brennweite
  - Tiefenschärfe
  - Art des Objektivs (Weitwinkel, Tele) bestimmt den Öffnungswinkel → Projektionen sind teilweise nicht planar.
- Parameter der entstehenden Bilder:
  - Größe (Breite, Höhe, bzw. Breite und Seitenverhältnis)
  - Typische Werte für Seitenverhältnis: 4:3 (Fernsehen), 16:9
  - Auflösung

# Kameramodell

Zusammenhang zwischen Öffnungswinkel und Brennweite:

Öffnungswinkel	Brennweite
76 Grad	24 mm
67,6 Grad	28 mm
56,4 Grad	35 mm
41,4 Grad	50 mm
24,9 Grad	85 mm
15,8 Grad	135 mm
10,7 Grad	200 mm

# Kameramodell

In der Computergraphik wird ein vereinfachtes Kameramodell genutzt:

- Position – Punkt (Koordinaten in 3D)
- Blickrichtung – Vektor (Koordinaten in 3D)

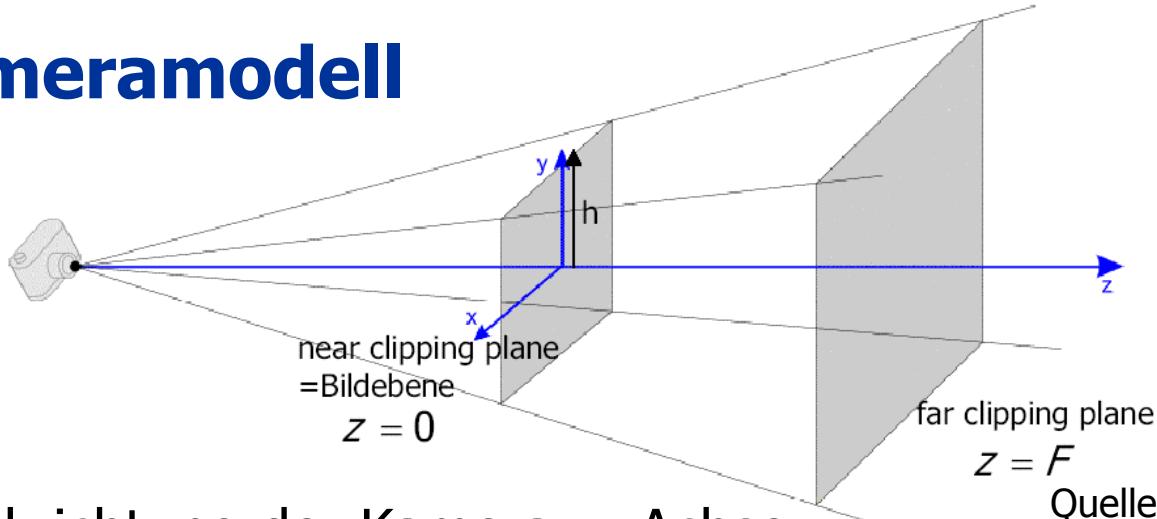
Bildspezifikation:

- Größe des Viewports in der Sichtebene (Pixel)

Zusätzlich:

- Schnittebenen, die die dargestellte Szene auf solche Objekte begrenzen, die hinter einer ersten Ebene (near) und vor einer zweiten (far) liegen.
  - Spezifikation als Abstände von der Kamera in Blickrichtung.
  - Objekte, die eine Ebene schneiden, müssen gecliptt werden.

# Kameramodell



Quelle: Angel (2000)

Blickrichtung der Kamera: z-Achse

Sichtebene: xy-Ebene

Warum die Schnittebenen?

- Near-Ebene verhindert, dass Objekte die sehr nahe an der Kamera sind, alles verdecken und das Objekte hinter der Kamera berücksichtigt werden.
- Far-Plane verhindert, dass weit entfernte und damit im Bild sehr kleine Objekte Rechenaufwand beanspruchen.

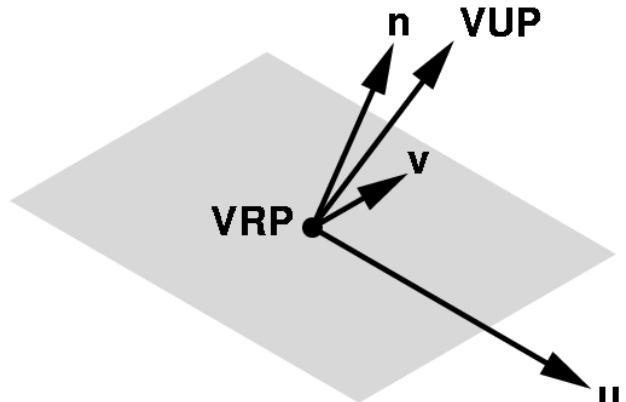
# Kameramodell

- Model-View-Transformation beschreibt die Transformation zwischen Modell und der Kamera.
- Repräsentiert durch eine Matrix in homogenen Koordinaten.
- **Standardwert:** Einheitsmatrix
- **Praktisch:** In der Regel ist zumindest eine Verschiebung der Kamera nötig, damit diese außerhalb der Szene platziert ist. Das Modell ist normalerweise um den Ursprung angeordnet.

# Kameramodell

Bequeme Formen der Kameraspezifikation:

- Angabe der Kameraposition:  
`view_reference_point (vrp)`
- Angabe der Orientierung:  
`view_plane_normal (vpn)`
- Angabe der Richtung „nach oben“  
`view_up-Vektor (vup)`
- $v$  ist Projektion des  $vup$  in die Sichtebene
- $u$  steht senkrecht zu  $v$  und  $n$
- GKS/PHIGS:  
`set_view_reference_point (vrp);`  
`set_view_plane_normal (vpn);`  
`set_view_up (vup);`
- Art der Perspektive wird in der Projektionsmatrix festgelegt (später).



Quelle: Angel (2000)

# Kameramodell

## Look-At Funktion:

Kameraposition/Augpunkt: eye;

Ziel: at

vup kann gewählt werden.

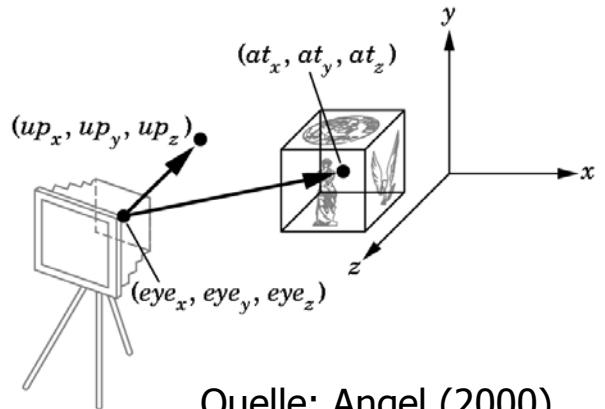
vpn = eye – at

vrp = eye

Wahl des „At“-Vectors: z.B. Schwerpunkt des Modelles oder Mittelpunkt des umschließenden Quaders (für eine zentrierte Darstellung)

## OpenGL:

```
gluLookAt  (eye_x, eye_y, eye_z,  
            at_x, at_y, at_z,  
            up_x, up_y, up_z);
```

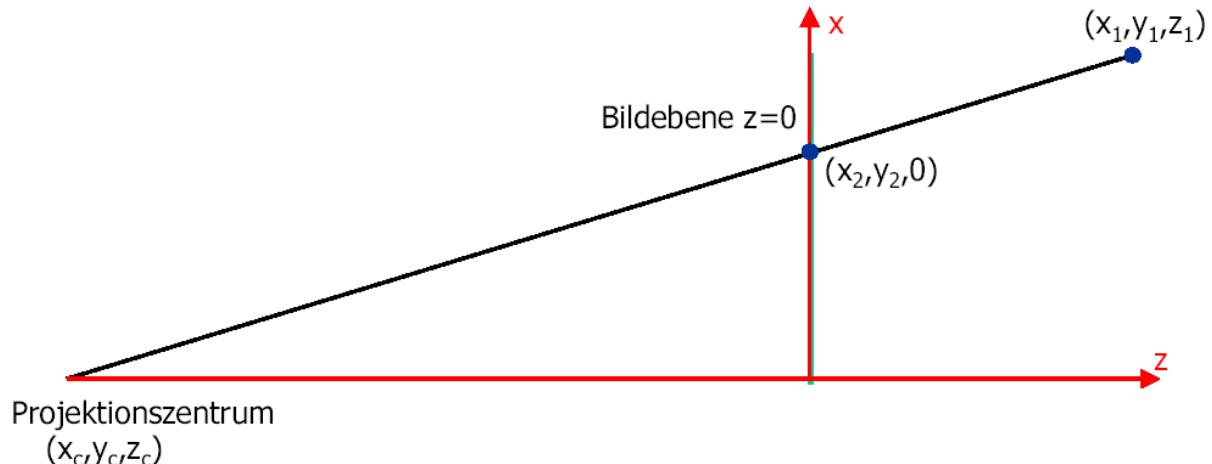


Quelle: Angel (2000)

# Mathematische Beschreibung von Projektionen

Zentralprojektion:

- Annahme, die Bildebene geht durch den Ursprung
- Gegeben: COP  $(x_c, y_c, z_c)$  und ein Punkt  $(x_1, y_1, z_1)$
- Bild soll also auf die xy-Ebene bei  $z=0$  projiziert werden  
→ Projizierte Koordinaten haben die Form  $(x, y, 0)$



# Mathematische Beschreibung von Projektionen

Zentralprojektion:

Die Projektionsgerade für Punkt  $(x_1; y_1; z_1)$  kann folgendermaßen in Parameterform beschrieben werden.

$$x = x_c + (x_1 - x_c) u$$

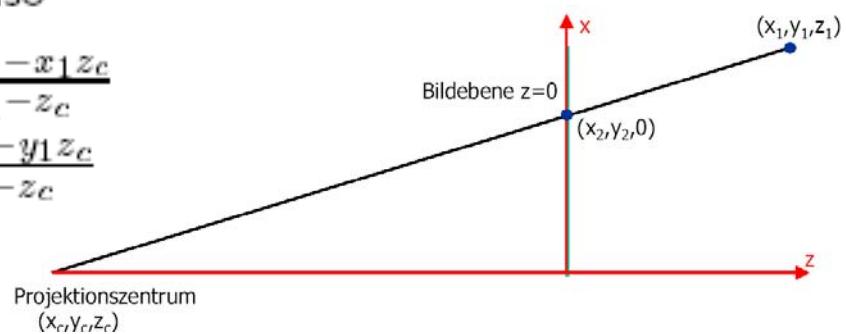
$$y = y_c + (y_1 - y_c) u$$

$$z = z_c + (z_1 - z_c) u$$

aus  $z=0$  folgt  $u = -\frac{z_c}{z_1 - z_c}$ , also

$$x_2 = x_c - z_c \frac{x_1 - x_c}{z_1 - z_c} = \frac{x_c z_1 - x_1 z_c}{z_1 - z_c}$$

$$y_2 = y_c - z_c \frac{y_1 - y_c}{z_1 - z_c} = \frac{y_c z_1 - y_1 z_c}{z_1 - z_c}$$



# Mathematische Beschreibung von Projektionen

Bisher:

aus  $z=0$  folgt  $u = -\frac{z_c}{z_1-z_c}$ , also

$$x_2 = x_c - z_c \frac{x_1 - x_c}{z_1 - z_c} = \frac{x_c z_1 - x_1 z_c}{z_1 - z_c}$$

$$y_2 = y_c - z_c \frac{y_1 - y_c}{z_1 - z_c} = \frac{y_c z_1 - y_1 z_c}{z_1 - z_c}$$

Beschreibung durch eine Matrix in homogenen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} -z_c & 0 & x_c & 0 \\ 0 & -z_c & y_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c z_1 - x_1 z_c \\ y_c z_1 - y_1 z_c \\ 0 \\ z_1 - z_c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↑  
Normalisieren

# Mathematische Beschreibung von Projektionen

Parallelprojektion:

- Projektionsebene sei die xy-Ebene
- Projektionsrichtung parallel zur z-Achse
- Projektionsrichtung parallel zum Vektor  $(x_p; y_p; z_p)^T \quad z_p = 0$
- Projektionsgerade für Punkt  $(x_1; y_1; z_1)$  erfüllt

$$x = x_1 + x_p u$$

$$y = y_1 + y_p u$$

$$z = z_1 + z_p u$$

aus  $z=0$  folgt  $u = -\frac{z_1}{z_p}$ , also:

$$x_2 = x_1 - z_1 \frac{x_p}{z_p}$$

$$y_2 = y_1 - z_1 \frac{y_p}{z_p}$$

# Mathematische Beschreibung von Projektionen

Parallelprojektion:

Darstellung in homogenen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Mathematische Beschreibung von Projektionen

Schiefwinklige/schräge Parallelprojektionen:

Bild 2.26 Bender/Brill

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-\cos(\alpha)}{\tan(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sin(\alpha)}{\tan(\beta)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sin(\beta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-\cos(\alpha)}{\tan(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sin(\alpha)}{\tan(\beta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Mathematische Beschreibung von Projektionen

Bei Kavalierprojektion:  $\beta = 45$  Grad

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geraden in z-Richtung werden nicht verkürzt, wegen  $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Bei Kabinettprojektion:  $\beta = 63.4$  Grad

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-\cos(\alpha)}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sin(\alpha)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geraden in z-Richtung werden halbiert, wegen  $\cos^2(\alpha/2) + \sin^2(\alpha/2) = 1/2$

# Implementierung von Projektionen

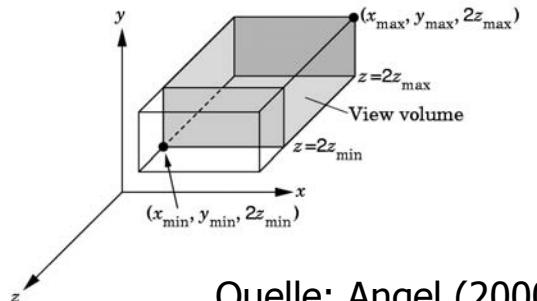
Implementierung in OpenGL:

```
glMatrixMode (GL_PROJECTION);  
glLoadIdentity ();
```

Sichtkörper für Parallelprojektion in OpenGL:

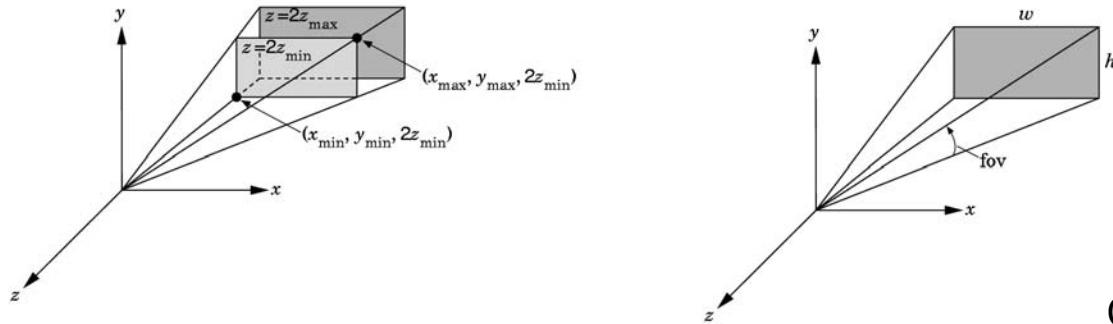
```
glOrtho (xmin, xmax, ymin, ymax, near, far);
```

Unterstützt keine schrägen Projektionen!



Quelle: Angel (2000)

# Implementierung von Projektionen



Quelle: Angel (2000)

Spezifikation einer perspektivischen Projektion

Explizite Definition des View Frustums (linkes Bild)

```
glFrustum (xmin, xmax, ymin, ymax, near, far);
```

Definition des Winkels *field of view* (*fov*) und des  
Größenverhältnisses des Bildes (*aspect* = *w/h*)  
(rechtes Bild)

```
glPerspective (fovy, aspect, near, far);
```

# Zusammenfassung: Projektionen

- Übergang zwischen verschiedenen Koordinatensystemen ( $3D \rightarrow 2D$ )
- Projektionen sind keine affinen Transformationen; sie sind nicht umkehrbar (Parallelität von Geraden wird nicht erhalten).
- Ausnutzen der Eigenschaften homogener Koordinaten bei der Berechnung
- Mathematische Beschreibung war auf die einfachsten Projektionen (Projektionsebene = xy-Ebene) konzentriert.
- Transformation der Kamera in Weltkoordinaten (Model-View) und Projektion werden nacheinander durchgeführt.



# Ausblick

- In einigen Gebieten der Visualisierung, z.B. bei der Darstellung geographischer Daten und abstrakter Daten werden nichtlineare Projektionen genutzt.
- **Beispiele:** Fisheye-Projektionen mit einem oder mehreren Fokuspunkten zur Darstellung geographischer Daten
- **Vorbild:** Projektionen aus der Kartographie, die das Stadtzentrum (als Fokus) vergrößert darstellen.