TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

---------- ꕤ★ꕤ ----------

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

[HW02.a] Ký hiệu tiệm cận Big-O

Giảng viên hướng dẫn: ThS. Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm sinh viên:

1. Phan Thanh Hải 18520705

TP. HỒ CHÍ MINH, 24/09/2019

BÀI 1

a. Hãy cho biết ý nghĩa của "độ phức tạp" khi đề cập đến thuật toán?
b. Hãy cho biết ý kiến của bạn về nhận định dưới đây và giải thích vì sao?
"Khi nghiên cứu về các thuật toán, người ta quan tâm đặc biệt đến tính hiệu quả về thời gian của chúng nhưng thường là quan tâm đến bậc tăng trưởng (order of growth) của hàm thời gian thực hiện của thuật toán, chứ không phải là bản thân thời gian thực hiện T(n)".

Bài làm

a. Ý nghĩa của "độ phức tạp" khi đề cập đến thuật toán:
"Độ phức tạp" của thuật toán là thời gian thực hiện thuật toán đó, cụ thể đó là một hàm số $f(n)$, với *n* là kích thước dữ liệu đầu vào. "Độ phức tạp" của thuật toán thể hiện sự hiệu quả của một thuật toán (cùng 2 thuật toán khác nhau thuật toán nào mang lại hiệu quả tốt hơn với cùng một kích thước dữ liệu đầu vào *n* hoặc theo sự phân bố ngẫu nhiên của dữ liệu nhập vào).

b. Hãy cho biết ý kiến của bạn về nhận định dưới đây và giải thích vì sao?
"Khi nghiên cứu về các thuật toán, người ta quan tâm đặc biệt đến tính hiệu quả về thời gian của chúng nhưng thường là quan tâm đến bậc tăng trưởng (order of growth) của hàm thời gian thực hiện của thuật toán, chứ không phải là bản thân thời gian thực hiện T(n)".
Khi quan tâm đến tính hiệu quả về thời gian của một thuật toán, nếu chỉ xét đến bản thân thời gian thực hiện T(n) tuy đơn giản nhưng sẽ nảy sinh một số vấn đề sau:
Với kích thước dữ liệu đầu vào *n* khá nhỏ thì một trong 2 thuật toán có thời gian thực hiện T(n) ít hơn so với của thuật toán kia nhưng không chênh lệch bao nhiêu. Thực tế ta phải xử lý với kích thước dữ liệu đầu vào *n* khá lớn (trong thực tế thường gặp) thì việc xét bản thân thời gian thực hiện T(n) không đem lại hiệu quả cao, đặc biệt là nếu hàm T(n) là một hàm phức tạp, biến thiên liên tục. Do đó cần phải xét tới bậc tăng trưởng (order of growth) của hàm thời gian thực hiện của thuật toán.

BÀI 2

Tìm $f(n)$ sao cho $T(n) = O(f(n))$

$7n-2$	$(20n)^7$	$(n^2+1)^{10}$
$3n^3+2n^2$	$\log_{\ln 5}(\log^{\log 100} n)$	$2n\lg(n+2)^2+(n+2)^2\lg\frac{n}{2}$
$(n+1)^2$	$20n^3-10n\log n+5$	$\lfloor \log_2 n \rfloor$
2^{100}	$3\log n+\log\log n$	$\sqrt{10n^2+7n+3}$
$\frac{5}{n}$	$5^{\log(3)}n^3+10^{80}n^2$	$2^{n+1}+3^{n-1}$
10^{80}	$+\log(3)\,n^{3.1}+6006$	

<u>Bài làm</u>

<u>$7n-2$</u>
Chọn $c = 7$, $n_0 = 1$
Ta có: $7n-2 \le 7.n, \forall n \ge 1$
Do đó $7n-2 = O(n)$
Vậy $f(n) = n$

<u>$3n^3+2n^2$</u>
Chọn $c = 5$, $n_0 = 1$
Ta có: $3n^3+2n^2 \le 5.n^3, \forall n \ge 1$
Thật vậy, $\forall n \ge 1$ thì $2n^2 \le 2n^3 \Leftrightarrow 3n^3+2n^2 \le 5n^3$
Do đó $3n^3+2n^2 = O(n^3)$
Vậy $f(n) = n^3$

<u>$(n+1)^2$</u>
Chọn $c = 4$, $n_0 = 1$
Ta có: $(n+1)^2 \le 4.n^2, \forall n \ge 1$
Thật vậy, $\forall n \ge 1$ thì $n+1 \le 2n \Leftrightarrow (n+1)^2 \le 4n^2$
Do đó $(n+1)^2 = O(n^2)$
Vậy $f(n) = n^2$

<u>2^{100}</u>
Chọn $c = 2^{101}$, $n_0 = 1$
Ta có: $2^{100} \le 2^{101}.1, \forall n \ge 1$
Do đó $2^{100} = O(1)$
Vậy $f(n) = 1$

$\frac{5}{n}$
Chọn $c = 5$, $n_0 = 1$
Ta có: $\frac{5}{n} \leq 5.1, \forall n \geq 1$
Do đó $\frac{5}{n} = O(1)$
Vậy $f(n) = 1$

$\underline{10^{80}}$
Chọn $c = 10^{81}, n_0 = 1$
Ta có: $10^{80} \leq 10^{81}.1, \forall n \geq 1$
Do đó $10^{80} = O(1)$
Vậy $f(n) = 1$

$\underline{(20n)^7}$
Chọn $c = 20^8, n_0 = 1$
Ta có: $(20n)^7 \leq 20^8.n^7, \forall n \geq 1$
Do đó $(2n)^7 = O(n^7)$
Vậy $f(n) = n^7$

$\underline{\log_{\ln 5}(\log^{\log 100} n)}$
Chọn $c = 15, n_0 = 10$
Ta có: $\log_{\ln 5}(\log^{\log 100} n) \leq 15 \log(\log n), \forall n \geq 10$
Thật vậy, $\forall n \geq 10$ thì $\log^{\log 100} n = \log^2 n \leq \log^3 n$
$\Leftrightarrow \log_{\ln 5}\left(\log^{\log 100} n\right) \leq \log_{\ln 5}(\log^3 n)$
$\Leftrightarrow \log_{\ln 5}(\log^{\log 100} n) \leq 3 \log_{\ln 5}(\log n) = 3.\frac{\log(\log n)}{\log(\ln 5)} \leq 15 \log(\log n)$
Do đó $\log_{\ln 5}(\log^{\log 100} n) = O(\log(\log n))$
Vậy $f(n) = \log(\log n)$

$\underline{20n^3 - 10n \log n + 5}$
Chọn $c = 25$, $n_0 = 1$
Ta có: $20n^3 - 10n \log n + 5 \leq 25.n^3, \forall n \geq 1$
Thật vậy, $\forall n \geq 1$ thì $\log n \leq n \Leftrightarrow 10n \log n \leq 10n^2; -10n \log n \leq 0; 5 \leq 5n^3$
$\Leftrightarrow 20n^3 - 10n \log n + 5 \leq 20n^3 + 0 + 5n^3 \Leftrightarrow 20n^3 - 10n \log n + 5 \leq 25n^3$
Do đó $20n^3 - 10n \log n + 5 = O(n^3)$
Vậy $f(n) = n^3$

<u>$3\log n + \log\log n$</u>
Chọn $c = 4$, $n_0 = 1$
Ta có: $3\log n + \log\log n \le 4.\log n, \forall n \ge 1$
Thật vậy, $\forall n \ge 1$ thì $\log n \le n \Leftrightarrow \log\log n \le \log n$
$\Leftrightarrow 3\log n + \log\log n \le 4\log n$
Do đó $3\log n + \log\log n = O(\log n)$
Vậy $f(n) = \log n$

<u>$5^{\log(3)} n^3 + 10^{80} n^2 + \log(3)\, n^{3.1} + 6006$</u>
Chọn $c = 6010 + 10^{80}$, $n_0 = 1$
Ta có: $5^{\log(3)} n^3 + 10^{80} n^2 + \log(3)\, n^{3.1} + 6006 \le 6010 n^{3.1}, \forall n \ge 1$
Thật vậy, $\forall n \ge 1$ thì
$5^{\log(3)} n^3 \le 3n^{3.1}; 10^{80} n^2 \le 10^{80} n^{3.1}; \log(3)\, n^{3.1} \le n^{3.1}; 6006 \le 6006 n^{3.1}$
$\Leftrightarrow 5^{\log(3)} n^3 + 10^{80} n^2 + \log(3)\, n^{3.1} + 6006 \le (6010 + 10^{80}) n^{3.1}$
Do đó $5^{\log(3)} n^3 + 10^{80} n^2 + \log(3)\, n^{3.1} + 6006 = O(n^{3.1})$
Vậy $f(n) = n^{3.1}$

<u>$(n^2+1)^{10}$</u>
Chọn $c = 2^{10}$, $n_0 = 1$
Ta có: $(n^2+1)^{10} \le 2^{10}.n^{20}, \forall n \ge 1$
Thật vậy, $\forall n \ge 1$ thì $1 \le n^2 \Leftrightarrow n^2 + 1 \le 2n^2 \Leftrightarrow (n^2+1)^{10} \le 2^{10}.n^{20}$
Do đó $(n+1)^2 = O(n^{20})$
Vậy $f(n) = n^{20}$

<u>$2n\lg(n+2)^2 + (n+2)^2 \lg\frac{n}{2}$</u>
Chọn $c = 12$, $n_0 = 1$
Ta có:
$$2n\lg(n+2)^2 + (n+2)^2\lg\frac{n}{2} \le 12.n^2 \lg n, \forall n \ge 1$$
Thật vậy, $\forall n \ge 1$ thì:
$$2n\lg(n+2)^2 + (n+2)^2\lg\frac{n}{2} = 4n\lg(n+2) + (n+2)^2(\lg n - 1)$$
Mà:
$2 \le n \Leftrightarrow n + 2 \le 2n$ (1)
$(1) \Leftrightarrow 4n\lg(n+2) \le 4n\lg(2n) = 4n(\lg n + 1) \le 4n^2(\lg n + 1) \le 8n^2 \lg n$
$(1) \Leftrightarrow (n+2)^2 \le 4n^2 \Leftrightarrow (n+2)^2 \lg\frac{n}{2} \le 4n^2 \lg\frac{n}{2} = 4n^2(\lg n - 1) \le 4n^2 \lg n$
Suy ra:

$2n\lg(n+2)^2 + (n+2)^2 \lg\frac{n}{2} \le 12n^2 \mathrm{lg} n$

Do đó:

$2n\lg(n+2)^2 + (n+2)^2 \lg\frac{n}{2} = O(n^2 \mathrm{lg} n)$

Vậy $f(n) = n^2 \mathrm{lg} n$

$\underline{\lfloor \log_2 n \rfloor}$

Chọn c = 4, $n_0 = 1$

Ta có: $\lfloor \log_2 n \rfloor \le 4.\log n\,, \forall n \ge 1$

Thật vậy, $\forall n \ge 1$ thì:

$\begin{cases} \lfloor \log_2 n \rfloor \le \log_2 n \\ \log_2 n = \log_2 10\,.\log n \le 4\log n \end{cases} \Leftrightarrow \lfloor \log_2 n \rfloor \le 4\log n$

Do đó $\lfloor \log_2 n \rfloor = O(\log n)$

Vậy $f(n) = \log n$

$\underline{\sqrt{10n^2 + 7n + 3}}$

Chọn c = 5, $n_0 = 1$

Ta có: $\sqrt{10n^2 + 7n + 3} \le 5.n, \forall n \ge 1$

Thật vậy, $\forall n \ge 1$ thì $7n \le 7n^2$; $3 \le 3n^2$

$\Leftrightarrow 10n^2 + 7n + 3 \le 10n^2 + 7n^2 + 3n^2 \Leftrightarrow 10n^2 + 7n + 3 \le 20n^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{10n^2 + 7n + 3} \le \sqrt{20}n \le 5n$

Do đó $\sqrt{10n^2 + 7n + 3} = O(n)$

Vậy $f(n) = n$

$\underline{2^{n+1} + 3^{n-1}}$

Chọn c = 3, $n_0 = 1$

Ta có: $2^{n+1} + 3^{n-1} \le 3.3^n, \forall n \ge 1$

Thật vậy, $\forall n \ge 1$ thì $2^n \le 3^n \Leftrightarrow 2^{n+1} \le 2.3^n; 3^{n-1} \le 3^n$

$\Leftrightarrow 2^{n+1} + 3^{n-1} \le 3.3^n$

Do đó $2^{n+1} + 3^{n-1} = O(3^n)$

Vậy $f(n) = 3^n$

BÀI 5

Với mỗi nhóm hàm bên dưới, hãy sắp xếp tăng dần theo bậc tăng trưởng Big-O:

Group 1:

$f_1(n) = n^{0.999999}\log n$

$f_2(n) = 10000000n$

$f_3(n) = 1.000001^n$

$f_4(n) = n^2$

Group 2:

$f_1(n) = 2^{2^{1000000}}$

$f_2(n) = 2^{1000000n}$

$f_3(n) = \binom{n}{2}$

$f_4(n) = n\sqrt{n}$

Group 3:

$f_1(n) = n^{\sqrt{n}}$

$f_2(n) = 2^n$

$f_3(n) = n^{10}.2^{n/2}$

$f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i+1)$

Group 4:

$(n-2)!$,$5\lg(n+100)^{10}$, 2^{2n}, $0.001n^4 + 3n^3 + 1$, $\ln^2 n$, $\sqrt[3]{n}$, 3^n

<u>Bài làm</u>

<u>Group 2:</u>

$f_1(n) = 2^{2^{1000000}}$

$f_2(n) = 2^{1000000n}$

$f_3(n) = \binom{n}{2}$

$f_4(n) = n\sqrt{n}$

$f_1(n) = 2^{2^{1000000}}$

Chọn $c = 2^{2^{100000}}$, $n_0 = 1$

Ta có: $2^{2^{1000000}} \le 2^{2^{1000000}}.n\sqrt{n}, \forall n \ge 1$

Do đó $f_1(n) = O(n\sqrt{n}) = O(f_4(n))$ hay $O(f_1(n)) \subseteq O(f_4(n))$ (1)

$$f_3(n) = \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-2)}{2}$$

Chọn $c = 1$, $n_0 = 4$

Ta có:

$$\frac{n(n-2)}{2} \le 1.2^{1000000n}, \forall n \ge 4$$

Thật vậy, $\forall n \ge 4$ thì

$\frac{n(n-2)}{2} \leq n^2 \leq 2^n \leq 2^{1000000n}$

Do đó $f_3(n) = O(2^{1000000n}) = O(f_2(n))$ hay $O\big(f_3(n)\big) \subseteq O(f_2(n))$ (2)

$f_4(n) = n\sqrt{n}$

Chọn *c* = 2, $n_0 = 4$

Ta có:

$n\sqrt{n} \leq 2.\frac{n(n-2)}{2}, \forall n \geq 4$

Thật vậy, $\forall n \geq 4$ thì

$\sqrt{n} \leq n-2 \Leftrightarrow n\sqrt{n} \leq n(n-2) = 2.\frac{n(n-2)}{2}$

Do đó $f_4(n) = O\left(\frac{n(n-2)}{2}\right) = O(f_3(n))$ hay $O\big(f_4(n)\big) \subseteq O(f_3(n))$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có thứ tự sắp xếp tăng dần theo bậc tăng trưởng Big-O là:

$f_1(n),\ f_4(n),\ f_3(n),\ f_2(n)$

Group 3:

$f_1(n) = n^{\sqrt{n}}$

$f_2(n) = 2^n$

$f_3(n) = n^{10}.2^{n/2}$

$f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i+1)$

$f_1(n) = n^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n}\lg n}$

Chọn *c* = 1, $n_0 = 1$

Ta có: $2^{\sqrt{n}\lg n} \leq 1.2^{\frac{n}{2}+10\lg n}, \forall n \geq 1$

Do đó $f_1(n) = O(n^{10}.2^{n/2}) = O(f_3(n))$ hay $O\big(f_1(n)\big) \subseteq O(f_3(n))$ (1)

$f_3(n) = n^{10}.2^{n/2} = 2^{\lg(n^{10})}.2^{n/2} = 2^{\frac{n}{2}+10\lg n}$

Chọn *c* = 1, $n_0 = 1$

Ta có: $2^{\frac{n}{2}+10\lg n} \leq 1.2^n, \forall n \geq 1$

Thật vậy, $\forall n \geq 1$ thì

$\frac{n}{2} + 10\lg n \leq n \Leftrightarrow 2^{\frac{n}{2}+10\lg n} \leq 2^n$

Do đó $f_3(n) = O(2^n) = O(f_2(n))$ hay $O\big(f_3(n)\big) \subseteq O(f_2(n))$ (2)

$$f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i+1) = \frac{n(n+3)}{2}$$

Chọn $c = 1$, $n_0 = 4$
Ta có:
$\frac{n(n+3)}{2} \le 1.n^{\sqrt{n}}, \forall n \ge 4$
Thật vậy, $\forall n \ge 4$ thì
$\frac{n(n+3)}{2} \le n^2 \le n^{\sqrt{n}}$
Do đó $f_4(n) = O\left(n^{\sqrt{n}}\right) = O(f_1(n))$ hay $O\left(f_4(n)\right) \subseteq O(f_1(n))$ (3)
Từ (1), (2) và (3) ta có thứ tự sắp xếp tăng dần theo bậc tăng trưởng Big-O là:
$f_4(n),\ f_1(n),\ f_3(n),\ f_2(n)$

Group 4:

$$(n-2)!\,, 5\lg(n+100)^{10}\,, 2^{2n}, 0.001n^4 + 3n^3 + 1, \ln^2 n, \sqrt[3]{n}, 3^n$$

$5\lg(n+100)^{10} = 50\lg(n+100)$
Chọn $c = 100$, $n_0 = 9$
Ta có: $50\lg(n+100) \le 100\ln^2 n, \forall n \ge 9$
Thật vậy, $\forall n \ge 9$ thì
$50\lg(n+100) = \frac{50\ln(n+100)}{\ln(10)} \le 100\ln(n+100) \le 100\ln^2 n$
Do đó $5\lg(n+100)^{10} = O(\ln^2 n)$ hay $O(5\lg(n+100)^{10}) \subseteq O(\ln^2 n)$ (1)

$2^{2n} = 4^n$
Chọn $c = 2$, $n_0 = 9$
Ta có: $4^n \le 2.(n-2)!, \forall n \ge 9$
Thật vậy, $\forall n \ge 9$ thì
$4^n = (4.4.4.4.4.4.4.4.4).4^{n-9} \le (1.2.3.4.5.6.7.8.9)\ldots n = n! \le 2(n-2)!$
Do đó $2^{2n} = O\left((n-2)!\right)$ hay $O(2^{2n}) \subseteq O((n-2)!)$ (2)

$0.001n^4 + 3n^3 + 1$
Chọn $c = 5$ $n_0 = 16$
Ta có: $0.001n^4 + 3n^3 + 1 \le 5.3^n, \forall n \ge 16$
Thật vậy, $\forall n \ge 16$ thì $0.001n^4 + 3n^3 + 1 \le 5n^4 \le 5.2^n \le 5.3^n$
Do đó $0.001n^4 + 3n^3 + 1 = O(3^n)$ hay $O(0.001n^4 + 3n^3 + 1) \subseteq O(3^n)$ (3)

$\ln^2 n$
Chọn $c = 1000$, $n_0 = 1$
Ta có: $\ln^2 n \le 1000\sqrt[3]{n}, \forall n \ge 1$

Do đó $\ln^2 n = O\left(\sqrt[3]{n}\right)$ hay $O(\ln^2 n) \subseteq O(\sqrt[3]{n})$ (4)

$\sqrt[3]{n}$

Chọn c = 1, $n_0 = 7$

Ta có: $\sqrt[3]{n} \leq 1.(0.001n^4 + 3n^3 + 1), \forall n \geq 7$

Thật vậy, $\forall n \geq 7$ thì $\sqrt[3]{n} \leq 0.001n^4 \leq 0.001n^4 + 3n^3 + 1$

Do đó $\sqrt[3]{n} = O(0.001n^4 + 3n^3 + 1)$ hay $O\left(\sqrt[3]{n}\right) \subseteq O(0.001n^4 + 3n^3 + 1)$ (5)

3^n

Chọn c = 1, $n_0 = 1$

Ta có: $3^n \leq 1.2^{2n}, \forall n \geq 1$

Do đó $3^n = O(2^{2n})$ hay $O(3^n) \subseteq O(2^{2n})$ (6)

Từ (1), (2), (3), (4), (5) và (6) ta có thứ tự sắp xếp tăng dần theo bậc tăng trưởng Big-O là: $5\lg(n+100)^{10}$, $\ln^2 n, \sqrt[3]{n}, 0.001n^4 + 3n^3 + 1, 3^n, 2^{2n}, (n-2)!$

BÀI 4

Chứng minh: $n^3 \notin O(n^2)$ $n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$ $O(n^2) \neq O(n)$ $n \notin O(\log_2 n)$

Bài làm

$\underline{n^3 \notin O(n^2)}$

Giả sử $n^3 \in O(n^2)$ là đúng.

Như vậy thì:

$\exists c \epsilon \mathbb{R}^+, \exists n_0 \epsilon \mathbb{N}, n^3 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$

$\Leftrightarrow \exists c \epsilon \mathbb{R}^+, \exists n_0 \epsilon \mathbb{N}, n \leq c, \forall n \geq n_0$ (1)

Xét trường hợp $n_0 \leq c$ thì:

$\forall n \geq n_0$ thì ta thầy tồn tại trường hợp $n > c$.

Xét trường hợp $n_0 > c$ thì:

$\forall n \geq n_0$ thì ta thầy luôn luôn $n > c$.

Như vậy (1) vô lí, mâu thuẫn với giả thuyết.

Vậy $n^3 \notin O(n^2)$

$\underline{O(n^2) \neq O(n)}$

Ta chứng minh tồn tại ít nhất một hàm số $f(x)$ bất kỳ sao cho $f(x) \in O(n^2)$ nhưng $f(x) \notin O(n)$.

Xét $f(x) = n^2$

Chọn c = 2, $n_0 = 1$

Ta có: $n^2 \leq 2.n^2, \forall n \geq 1$

Do đó $3n^3 + 2n^2 = O(n^3)$

Vậy $f(x) \in O(n^2)$

Giả sử $n^2 \in O(n)$ là đúng.

Như vậy thì:

$\exists c \epsilon \mathbb{R}^+, \exists n_0 \epsilon \mathbb{N}, n^2 \leq cn, \forall n \geq n_0$

$\Leftrightarrow \exists c \epsilon \mathbb{R}^+, \exists n_0 \epsilon \mathbb{N}, n \leq c, \forall n \geq n_0$ (2)

Xét trường hợp $n_0 \leq c$ thì:

$\forall n \geq n_0$ thì ta thầy tồn tại trường hợp $n > c$.

Xét trường hợp $n_0 > c$ thì:

$\forall n \geq n_0$ thì ta thầy luôn luôn $n > c$.
Như vậy (2) vô lí, mâu thuẫn với giả thuyết.
Vậy $f(x) \notin O(n^2)$

Do đó $O(n^2) \neq O(n)$

BÀI 5

Chứng minh:

$O(C) = O(1)$

Nếu $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \in O\big(h(n)\big)$ thì $f(n) \in O(h(n))$

Nếu $t_1(n) \in O(f(n))$ và $t_2(n) \in O(g(n))$ thì $t_1(n) + t_3(n) \in O(\max{(f(n), g(n))})$

Bài làm

$\underline{O(C) = O(1)}$

Ta chứng minh $O(C) \subset O(1)$ và $O(1) \subset O(C)$

Để chứng minh $O(C) \subset O(1)$ thì ta chứng minh mọi hàm số $f(x) \epsilon O(C)$ đều $f(x) \epsilon O(1)$

Ta có: $f(x) \epsilon O(C)$

$\Rightarrow \exists a \epsilon \mathbb{R}^+, \exists n_0 \epsilon \mathbb{N}, f(x) \leq aC, \forall n \geq n_0$ (1)

Đặt $b = aC$ thì (1) $\Leftrightarrow \exists b \epsilon \mathbb{R}^+, \exists n_0 \epsilon \mathbb{N}, f(x) \leq b.1, \forall n \geq n_0$

Do đó $f(x) \epsilon O(1)$

Vậy $O(C) \subset O(1)$

Ta có: $f(x) \in O(1)$

$\Rightarrow \exists d \epsilon \mathbb{R}^+, \exists n_1 \in \mathbb{N}, f(x) \leq d.1, \forall n \geq n_1$

$\Leftrightarrow \exists d \epsilon \mathbb{R}^+, \exists n_1 \in \mathbb{N}, f(x) \leq \frac{d}{C} C, \forall n \geq n_1$ (2)

Đặt $e = \frac{d}{C}$ thì (2) $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}^+, \exists n_1 \in \mathbb{N}, f(x) \leq e.C, \forall n \geq n_1$

Do đó $f(x) \in O(C)$

Vậy $O(1) \subset O(C)$

Vậy $O(C) = O(1)$

<u>Nếu $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \in O\big(h(n)\big)$ thì $f(n) \in O(h(n))$</u>

Ta có: $f(n) \in O(g(n))$

$\Rightarrow \exists a \epsilon \mathbb{R}^+, \exists n_0 \epsilon \mathbb{N}, f(x) \leq a.g(n), \forall n \geq n_0$

$g(n) \in O(h(n))$

$\Rightarrow \exists b \epsilon \mathbb{R}^+, \exists n_1 \epsilon \mathbb{N}, g(n) \leq b.h(n), \forall n \geq n_1$

Do đó: $f(x) \leq a.g(n) \leq ab.h(n)$

Đặt $c = ab$ thì (2) $\Leftrightarrow \exists c \epsilon \mathbb{R}^+, \exists t \epsilon \mathbb{N}, f(x) \leq c.h(n), \forall n \geq t = \max{\{n_0, n_1\}}$

Vậy $f(n) \in O(h(n))$

<u>Nếu $t_1(n) \in O(f(n))$ và $t_2(n) \in O(g(n))$ thì $t_1(n) + t_2(n) \in O(\max(f(n), g(n)))$</u>
Ta có: $t_1(n) \in O(f(n))$
$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, t_1(n) \leq a.f(n), \forall n \geq n_0$
$t_2(n) \in O(g(n))$
$\Rightarrow \exists b \in \mathbb{R}^+, \exists n_1 \in \mathbb{N}, f(x) \leq b.g(n), \forall n \geq n_1$
Do đó: $t_1(n) + t_2(n) \leq a.f(n) + b.g(n) \leq (a+b).\max(f(n), g(n))$
Đặt $c = a + b$ thì (2) $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists t \in \mathbb{N}, f(x) \leq c.\max(f(n), g(n)), \forall n \geq t = \max\{n_0, n_1\}$
Do đó $f(x) \in O(\max(f(n), g(n)))$

BÀI 6

Cho $f(n) = n^{3/2}$ và $g(n) = 2n^2$. Chứng minh hoặc bác bỏ $f(n) = O(g(n))$.
Chứng minh: $n + n^2 O(\ln n) = O(n^2 \ln n)$

Bài làm

<u>Cho $f(n) = n^{3/2}$ và $g(n) = 2n^2$. Chứng minh hoặc bác bỏ $f(n) = O(g(n))$.</u>

Chọn c = 1, $n_0 = 1$

Ta có: $n^{3/2} \leq 1.2n^2, \forall n \geq 1$

Thật vậy, $\forall n \geq 1$ thì $n^{3/2} \leq n^2 \leq 2n^2$

Do đó $f(n) = O(g(n))$

<u>Chứng minh: $n + n^2 O(\ln n) = O(n^2 \ln n)$</u>

Cho hàm số $f(x)$ bất kỳ sao cho $f(x \in O(\ln n)$

Khi đó thì: $\exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, f(x) \leq c.\ln n, \forall n \geq n_0$

$\Leftrightarrow n^2 f(x) \leq n^2 c.\ln n$

Mà ta có: $n \leq n \ln n \leq n^2 \ln n$

Do đó: $n + n^2 f(x) \leq (c+1)n^2 \ln n$

Đặt $d = c + 1$ thì $\exists d \in \mathbb{R}^+, \exists n_1 \in \mathbb{N}, n + n^2 f(x) \leq d.n^2 \ln n, \forall n \geq n_1$

Do đó $n + n^2 f(x) = O(n^2 \ln n)$

Vậy $n + n^2 O(\ln n) = O(n^2 \ln n)$

BÀI 7

Chứng minh các tính chất sau:

$g(n) \in O\big(h(n)\big) \Rightarrow O\big(g(n)\big) \subseteq O(h(n))$

$O\big(f(n)\big) = O\big(g(n)\big) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n))$

$O\big(f(n)\big) \subset O\big(g(n)\big) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$

Bài làm

$\underline{g(n) \in O\big(h(n)\big) \Rightarrow O\big(g(n)\big) \subseteq O(h(n))}$

Cho hàm số $f(n)$ bất kỳ. Ta chứng minh với mọi $f(n) \in O(g(n))$ thì $f(n) \in O(h(n))$.

Với $f(n) \in O(g(n))$ thì: $\exists a \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, f(n) \leq a.g(n), \forall n \geq n_0$

Mà ta có: $g(n) \in O\big(h(n)\big)$

Hay $\exists b \in \mathbb{R}^+, \exists n_1 \in \mathbb{N}, g(n) \leq b.h(n), \forall n \geq n_1$

Do đó: $f(n) \leq a.g(n) \leq ab.h(n)$

Đặt $c = ab$ thì $\exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_2 \in \mathbb{N}, f(n) \leq ab.h(n), \forall n \geq n_2$

Do đó $f(n) = O(h(n))$

Vậy $O\big(g(n)\big) \subseteq O(h(n))$