TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

---------- ༻★༺ ----------

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #02.b: CÁC KÝ HIỆU TIỆM CẬN KHÁC

Giảng viên hướng dẫn: ThS. Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm sinh viên:

1. Phạm Bá Đạt 17520337
2. Phan Thanh Hải 18520705

TP. HỒ CHÍ MINH, 01/10/2019

BÀI 8

For each function $f(n)$ and time t in the following table, determine the largest size n of a problem that can be solved in time t, assuming that the algorithm to solve the problem takes $f(n)$ microseconds.

Bài làm

	1 second	1 minute	1 hour	1 day	1 month	1 year	1 century
$\lg n$	2^{10^6}	$2^{6.10^7}$	$2^{36.10^8}$	$2^{864.10^8}$	$2^{2592.10^9}$	$2^{31536.10^9}$	$2^{31556736.10^8}$
$\sqrt{n}$	10^{12}	36.10^{14}	1296.10^{16}	746496.10^{16}	6718464.10^{18}	994519296.10^{18}	995827586973696.10^{16}
n	10^6	6.10^7	36.10^8	864.10^8	2592.10^9	31536.10^9	31556736.10^8
$n\lg n$	62746	2801417	133378058	2755147513	71870856404	797633893349	68654697441062
n^2	1000	7745	60000	293938	1609968	5615692	56175382
n^3	100	391	1532	4420	13736	31593	146677
2^n	19	25	31	36	41	44	51
$n!$	9	11	12	13	15	16	17

BÀI 9

Dùng định nghĩa: Cho $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ và $g(n) = n^2$. Chứng minh $f(n) = \Theta(g(n))$ Chứng minh: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ Chứng minh: $n\log n - 2n + 13 = \Omega(n\log n)$ Chứng minh: $\log_3(n^2) = \Theta\log_2(n^3)$ Chứng minh: $n^{\lg 4} \in \omega(3^{\lg n})$ Chứng minh: $\lg^2 n \in o(n^{\frac{1}{2}})$ Chứng minh: $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$

<u>Bài làm</u>

<u>Cho $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ và $g(n) = n^2$. Chứng minh $f(n) = \Theta(g(n))$</u>

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Chọn $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 1, n_0 = 1$

Ta có:

$$\frac{1}{2}g(n) \leq f(n) \leq 1.g(n), \forall n \geq 1$$

Thật vậy, $\forall n \geq 1$ thì:

$$0 \leq \frac{1}{2}n \leq \frac{1}{2}n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \leq n^2$$

Do đó $f(n) = \Theta(g(n))$ *(đpcm)*

<u>Chứng minh: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$</u>

Chọn $c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{1}{2}, n_0 = 12$

Ta có:

$$\frac{1}{4}n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq \frac{1}{2}n^2, \forall n \geq 12$$

Thật vậy, $\forall n \geq 12$ thì:

$$-3n \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq \frac{1}{2}n^2$$

$$\frac{1}{4}n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \Leftrightarrow -\frac{1}{4}n^2 + 3n \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq 0 \ (loại, vì\ n \in \mathbb{N}) \\ n \geq 12 \ (nhận) \end{cases}$$

Do đó $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ *(đpcm)*

<u>Chứng minh: $n\log n - 2n + 13 = \Omega(n\log n)$</u>

$n\log n - 2n + 13 = n(\log n - 2) + 13$

Chọn $c = \frac{1}{2}, n_0 = 10000$

Ta có:

$n\log n - 2n + 13 \geq \frac{1}{2}n\log n\,, \forall n \geq 10000$

Thật vậy, $\forall n \geq 10000$ thì:

$\log n \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log n \geq 2 \Leftrightarrow -2 \geq -\frac{1}{2}\log n \Leftrightarrow n(\log n - 2) \geq n\left(\log n - \frac{1}{2}\log n\right)$

$\Leftrightarrow n(\log n - 2) \geq \frac{1}{2}n\log n \Leftrightarrow n(\log n - 2) + 13 \geq \frac{1}{2}n\log n$

Do đó $n\log n - 2n + 13 = \Omega(n\log n)$ *(đpcm)*

<u>Chứng minh: $\log_3(n^2) = \Theta\log_2(n^3)$</u>

Chọn $c_1 = 0.1, c_2 = 1, n_0 = 1$

Ta có:

$0.1\log_2(n^3) \leq \log_3(n^2) \leq 1.\log_2(n^3)\,, \forall n \geq 1$

Thật vậy, $\forall n \geq 1$ thì:

$\log_3(n^2) = 2\log_3 n = 2.\frac{\log_2 n}{\log_2 3} \approx 1{,}26\log_2 n \approx 0{,}42\log_2(n^3)$

Ta nhận thấy: $0.1\log_2(n^3) \leq 0{,}42\log_2(n^3) \leq 1.\log_2(n^3)$

Do đó $\log_3(n^2) = \Theta\log_2(n^3)$ *(đpcm)*

<u>Chứng minh: $n^{\lg 4} \in \omega(3^{\lg n})$</u>

Ta có: $\forall c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, 0 \leq c.3^{\lg n} < n^{\lg 4}, \forall n \geq n_0$

Hay $0 \leq c.n^{\lg 3} < n^2$

$\Leftrightarrow 0 < c < n^{2-lg3} \Leftrightarrow n > \log_{2-lg3} c$

Vậy $\forall c \in \mathbb{R}^+, n_0 = \log_{2-lg3} c\,, 0 \leq c.3^{\lg n} < n^{\lg 4}, \forall n \geq n_0$

Do đó $n^{\lg 4} \in \omega(3^{\lg n})$ *(đpcm)*

<u>Chứng minh: $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$</u>

Giả sử $\frac{n^2}{2} = \omega(n^2)$

Ta có: $\forall c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \frac{n^2}{2} > cn^2, \forall n \geq n_0$

$\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, 2c < 1, \forall n \geq n_0$ (vô lý)

Vậy giả thuyết $\frac{n^2}{2} = \omega(n^2)$ không đúng. Do đó $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$

BÀI 10

Dùng giới hạn: Cho $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ và $g(n) = n^2$. Chứng minh $f(n) = \Theta(g(n))$ Chứng minh: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ Chứng minh: $n \log n - 2n + 13 = \Omega(n \log n)$ Chứng minh: $\log_3(n^2) = \Theta \log_2(n^3)$ Chứng minh: $n^{\lg 4} \in \omega(3^{\lg n})$ Chứng minh: $\lg^2 n \in o(n^{\frac{1}{2}})$ Chứng minh: $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$

Bài làm

Cho $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ và $g(n) = n^2$. Chứng minh $f(n) = \Theta(g(n))$

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Ta thấy:

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

Vậy $f(n) = \Theta(g(n))$

Chứng minh: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^2 - 3n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

Ta thấy:

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

Vậy $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

Chứng minh: $n \log n - 2n + 13 = \Omega(n \log n)$

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\log n - 2n + 13}{n\log n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\log n}{n\log n} = 1$$

Ta thấy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} > 0$$

Vậy $n\log n - 2n + 13 = \Omega(n\log n)$

<u>Chứng minh: $\log_3(n^2) = \Theta(\log_2(n^3))$</u>

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log_3(n^2)}{\log_2(n^3)} = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\log_3 n}{\log_2 n} = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\log_3 2 \,.\log_2 n}{\log_2 n} = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\log_3 2$$

$$= \frac{2}{3}\log_3 2$$

Ta thấy:

$$0 < \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

Vậy $\log_3(n^2) = \Theta(\log_2(n^3))$

<u>Chứng minh: $n^{\lg 4} \in \omega(3^{\lg n})$</u>

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\lg 4}}{3^{\lg n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{\lg n}}{3^{\lg n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{\lg n} = \infty$$

Ta thấy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Vậy $n^{\lg 4} \in \omega(3^{\lg n})$

<u>Chứng minh: $\lg^2 n \in \mathrm{o}\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$</u>

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lg^2 n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\lg n}{\sqrt{n}\ln 2}(\textit{sử dụng quy tắc L'Hopital})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{\sqrt{n}\ln^2 2}(\textit{sử dụng quy tắc L'Hopital}) = 0$$

Vậy $\lg^2 n \in \mathrm{o}\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$

<u>Chứng minh: $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$</u>

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Ta thấy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} \neq \infty$$

Vậy $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$

BÀI 11

Các khẳng định bên dưới là đúng hay sai? Vì sao?

Nếu $f(n) = \Theta(g(n))$ và $g(n) = \Theta\big(h(n)\big)$ thì $h(n) = \Theta(f(n))$

Nếu $f(n) = O(g(n))$ và $g(n) = O\big(h(n)\big)$ thì $h(n) = \Omega(f(n))$

Nếu $f(n) = O\big(g(n)\big)$ và $g(n) = O\big(f(n)\big)$ thì $f(n) = g(n)$

$\frac{n}{100} = \Omega(n)$

$f(n) + O\big(f(n)\big) = \Theta\big(f(n)\big)$

$2^{10n} = O(2^n)$

$\log_{10} n = \Theta(\log_2 n)$

Bài làm

Nếu $f(n) = \Theta(g(n))$ và $g(n) = \Theta\big(h(n)\big)$ thì $h(n) = \Theta(f(n))$

Ta có:

$f(n) = \Theta(g(n))$

$\Rightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n), \forall n \ge n_0$

$g(n) = \Theta\big(h(n)\big)$

$\Rightarrow \exists c_3, c_4 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, c_3 h(n) \le g(n) \le c_4 h(n), \forall n \ge n_0$

Suy ra $c_1 c_3 h(n) \le f(n) \le c_2 c_4 h(n)$

Hay $\frac{1}{c_2 c_4} f(n) \le h(n) \le \frac{1}{c_1 c_3} f(n)$

Đặt $d_1 = \frac{1}{c_2 c_4}, d_2 = \frac{1}{c_1 c_3}$ ta được:

$\exists d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, d_1 f(n) \le h(n) \le d_2 f(n), \forall n \ge n_0$

Do đó $h(n) = \Theta(f(n))$

Vậy khẳng định trên đúng.

Nếu $f(n) = O(g(n))$ và $g(n) = O\big(h(n)\big)$ thì $h(n) = \Omega(f(n))$

Ta có:

$f(n) = O(g(n))$

$\Rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, f(n) \le c_1 g(n), \forall n \ge n_0$

$g(n) = O\big(h(n)\big)$

$\Rightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, g(n) \le c_2 h(n), \forall n \ge n_0$

Suy ra $h(n) \ge \frac{1}{c_1 c_2} f(n)$

Đặt $c_3 = \frac{1}{c_1 c_2}$ ta được :

$\exists c_3 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, h(n) \ge c_3 f(n), \forall n \ge n_0$

Do đó $h(n) = \Omega(f(n))$
Vậy khẳng định trên đúng.

Nếu $f(n) = O\big(g(n)\big)$ và $g(n) = O\big(f(n)\big)$ thì $f(n) = g(n)$
Xét $f(n) = n, g(n) = 2n$
Chọn $c_1 = 1, n_0 = 1$
Ta có: $n \leq 1.2n, \forall n \geq 1$
Do đó $f(n) = O\big(g(n)\big)$
Chọn $c_1 = 3, n_0 = 1$
Ta có: $2n \leq 3.n, \forall n \geq 1$
Do đó $g(n) = O\big(f(n)\big)$
Ta đều có: $f(n) = O\big(g(n)\big)$ và $g(n) = O\big(f(n)\big)$ nhưng $f(n) \neq g(n)$
Vậy khẳng định trên không đúng.

$$\frac{n}{100} = \Omega(n)$$
Chọn $c = \frac{1}{200}, n_0 = 1$
Ta có: $\frac{n}{100} \geq \frac{1}{200}n, \forall n \geq 1$
Do đó $\frac{n}{100} = \Omega(n)$
Vậy khẳng định trên đúng.

$f(n) + O\big(f(n)\big) = \Theta\big(f(n)\big)$
Xét $g(n) \in O\big(f(n)\big)$
Khi đó thì: $\exists c_1 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, g(n) \leq c_1 f(n), \forall n \geq n_0$
Ta có: $f(n) \leq f(n) + O\big(f(n)\big) = f(n) + g(n) \leq (c_1 + 1)f(n)$
Đặt $c_2 = c_1 + 1$ ta được :
$\exists c_2 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, 1.f(n) \leq f(n) + O\big(f(n)\big) \leq c_2 f(n), \forall n \geq n_0$
Do đó $f(n) + O\big(f(n)\big) = \Theta\big(f(n)\big)$
Vậy khẳng định trên đúng.

$2^{10n} = O(2^n)$
Giả sử $2^{10n} = O(2^n)$ là khẳng định đúng.
Khi đó thì: $\exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, 2^{10n} \leq c.2^n, \forall n \geq n_0$
$$\Leftrightarrow 2^{9n} \leq c \Leftrightarrow 9n \leq \log_2 c \Leftrightarrow n \leq \frac{\log_2 c}{9}$$
(vô lý vì *n* không thể nhỏ hơn một hằng số bất kỳ)

Do đó $2^{10n} \neq O(2^n)$
Vậy khẳng định trên không đúng.

$\underline{\log_{10} n = \Theta(\log_2 n)}$
Chọn $c_1 = 0.1, c_2 = 1, n_0 = 1$
Ta có: $0.1 \log_2 n \leq \log_{10} n \leq 1. \log_2 n, \forall n \geq 1$
Thật vậy, $\forall n \geq 1$ thì:
$\log_{10} n = \dfrac{\log_2 n}{\log_2 10} \approx 0.3 \log_2 n$
$\Rightarrow 0.1 \log_2 n \leq \log_{10} n \leq \log_2 n$
Do đó $\log_{10} n = \Theta(\log_2 n)$
Vậy khẳng định trên đúng.

BÀI 12

Chứng minh:
a. If $t(n) \in O(g(n))$, then $g(n) \in \Omega(t(n))$
b. $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$, where $\alpha > 0$.
c. $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Bài làm

a. If $t(n) \in O(g(n))$, then $g(n) \in \Omega(t(n))$

Ta có: $t(n) \in O(g(n))$

$\Rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, t(n) \leq c_1 g(n), \forall n \geq n_0$

$\Leftrightarrow g(n) \geq \dfrac{1}{c_1} f(n)$

Đặt $c_2 = \frac{1}{c_1}$ ta được: $\exists c_2 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, g(n) \geq c_2 f(n), \forall n \geq n_0$

Do đó $g(n) \in \Omega(t(n))$ *(đpcm)*

b. $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$, where $\alpha > 0$.

Xét $f(n) \in \Theta(\alpha g(n))$

Khi đó thì:

$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, c_1 \alpha g(n) \leq f(n) \leq c_2 \alpha g(n), \forall n \geq n_0$

Đặt $c_3 = c_1 \alpha, c_4 = c_2 \alpha$ ta được:

$\exists c_3, c_4 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, c_3 g(n) \leq f(n) \leq c_4 g(n), \forall n \geq n_0$

Do đó $f(n) \in \Theta(g(n))$

Suy ra $\Theta(\alpha g(n)) \subseteq \Theta(g(n))$ **(1)**

Xét $h(n) \in \Theta(g(n))$

Khi đó thì:

$\exists d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, d_1 g(n) \leq h(n) \leq d_2 g(n), \forall n \geq n_0$

$\Leftrightarrow \dfrac{d_1}{\alpha} \alpha g(n) \leq h(n) \leq \dfrac{d_2}{\alpha} \alpha g(n)$

Đặt $d_3 = \frac{d_1}{\alpha}, d_4 = \frac{d_2}{\alpha}$ ta được :

$\exists d_3, d_4 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, d_3 \alpha g(n) \leq h(n) \leq d_4 \alpha g(n), \forall n \geq n_0$

Do đó $h(n) \in \Theta(\alpha g(n))$

Suy ra $\Theta(g(n)) \subseteq \Theta(\alpha g(n))$ **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** suy ra $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$, với $\alpha > 0$.

<u>c.</u> <u>$\Theta\big(g(n)\big) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$</u>

Xét $f(n) \in O(g(n))$

Khi đó thì:

$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq n_0$

Hay $\begin{cases} f(n) \leq c_2 g(n) \\ f(n) \geq c_1 g(n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) \in O\big(g(n)\big) \\ f(n) \in \Omega(g(n)) \end{cases}$

Do đó $f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Suy ra $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ **(1)**

Xét $h(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Khi đó thì:

$\begin{cases} \exists d_2 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, h(n) \leq d_2 g(n), \forall n \geq n_0 \\ \exists d_1 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, h(n) \geq d_1 g(n), \forall n \geq n_0 \end{cases} \Leftrightarrow d_1 g(n) \leq h(n) \leq d_2 g(n)$

Do đó $h(n) \in \Theta\big(g(n)\big)$

Suy ra $O\big(g(n)\big) \cap \Omega\big(g(n)\big) \subseteq \Theta\big(g(n)\big)$ **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** suy ra $\Theta\big(g(n)\big) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

BÀI 13

Sắp xếp các hàm số bên dưới theo thứ tự tăng dần của "order of growth" *(nghĩa là sắp xếp các $g_1, g_2, \dots, g_{11}$ thỏa $g_1 = O(g_2), g_2 = O(g_3), \dots, g_{10} = O(g_{11})$)*

Sau đó, phân hoạch các hàm thành những lớp tương đương sao cho $f(n)$ và $g(n)$ thuộc cùng 1 lớp khi và chỉ khi $f(n) = \Theta(g(n))$

$\binom{n}{100}$,	3^n,	n^{100},
$1/n$,	2^{2n},	$10^{100}n$,
$3^{\sqrt{n}}$,	$1/5$,	4^n,
$n\log n$,	$\log(n!)$	

Bài làm

Chọn $c = 1, n_0 = 5$

Ta có: $\frac{1}{n} \le 1.\frac{1}{5}, \forall n \ge 5$

Do đó $\frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{5}\right)$ **(1)**

Chọn $c = 1, n_0 = 1$

Ta có: $\frac{1}{5} \le 1.10^{100}n, \forall n \ge 1$

Do đó $\frac{1}{5} = O(10^{100}n)$ **(2)**

Chọn $c = 10^{100}, n_0 = 10$

Ta có: $10^{100}n \le 10^{100}.n\log n, \forall n \ge 10$

Do đó $10^{100}n = O(n\log n)$ **(3)**

Chọn $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 1, n_0 = 1$

Ta có: $\frac{1}{2}.n\log n \le \log(n!) \le 1.n\log n, \forall n \ge 1$

Thật vậy, $\forall n \ge 1$ thì:

$\log(n!) = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n \le \log n + \log n + \cdots + \log n = n\log n$

$\log(n!) = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log\frac{n}{2} + \log\left(\frac{n}{2}+1\right) \dots + \log n$

$$\ge \log\frac{n}{2} + \log\left(\frac{n}{2}+1\right) + \cdots + \log n \ge \log\frac{n}{2} + \log\frac{n}{2} + \cdots + \log\frac{n}{2}$$

$$= \frac{n}{2}\log\frac{n}{2} \approx \frac{n}{2}\log n$$

Do đó $\log(n!) = \Theta(n\log n)$ **(4)**

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\log n}{\binom{n}{100}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\log n}{\frac{n(n-1)\dots(n-99)}{100!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{100!\log n}{(n-1)\dots(n-99)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{100!\log n}{n^{99}} = 0 < \infty$$

Do đó $n\log n = O\left(\binom{n}{100}\right)$ **(5)**

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{n}{100}}{n^{100}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-99)}{100!\,n^{100}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\dots(n-99)}{100!\,n^{99}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{99}}{100!\,n^{99}} = \frac{1}{100!}$$

Ta thấy:

$$0 < \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

Do đó $\binom{n}{100} = \Theta(n^{100})$ **(6)**

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{100}}{3^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n}\right)^{200}}{3^{\sqrt{n}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{200}}{3^t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{200t^{199}}{\ln 3\,.\,3^t}\,(sử\ dụng\ quy\ tắc\ L'Hopital)$$

$$= \cdots\,(sử\ dụng\ quy\ tắc\ L'Hopital)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{200!}{(\ln 3)^{200}.\,3^t}\,(sử\ dụng\ quy\ tắc\ L'Hopital) = 0 < \infty$$

Do đó $n^{100} = O\left(3^{\sqrt{n}}\right)$ **(7)**

Chọn $c = 1, n_0 = 1$

Ta có: $3^{\sqrt{n}} \le 1.\,3^n, \forall n \ge 1$

Do đó $3^{\sqrt{n}} = O(3^n)$ **(8)**

Chọn $c = 1, n_0 = 1$
Ta có: $3^n \leq 1.4^n, \forall n \geq 1$
Do đó $3^n = O(4^n)$ **(9)**

Ta có:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{2^{2n}} = 1 < \infty$$
Do đó $4^n = \Theta(2^{2n})$ **(10)**

Từ **(1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9)** và **(10)** ta có thứ tự sắp xếp tăng dần của "order of growth", có phân hoạch các hàm thành những lớp tương đương *(nằm trên cùng một hàng)* là:

$1/n$,	
$1/5$,	
$10^{100}n$,	
$n\log n$,	$\log(n!)$,
$\binom{n}{100}$,	n^{100},
$3^{\sqrt{n}}$,	
3^n,	
2^{2n},	4^n