TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

————-oOo————-

HW#03.a: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐỆ QUY BẰNG NHIỀU PHƯƠNG PHÁP

Giảng viên hướng dẫn: ThS. Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm sinh viên:

1. Phạm Bá Đạt 17520337
2. Phan Thanh Hải 18520705

TP. HỒ CHÍ MINH, 2019

Mục lục

Bài tập 1

Thành lập phương trình đệ quy

a.

```
int BinarySearch(int a[], int x, int l, int r)
{
    int mid;
    if (l > r)  return 0;
    mid = (l + r) / 2;
    if (x == a[mid])
        return 1;
    if (x > a[mid])
        return BinarySearch(a, x, mid + 1, r);
    return BinarySearch(a, x, l, mid - 1);
}
```

$T(0) = \alpha$

$T(1) = \beta$

$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \gamma$

b.

```
waste(n)
{
    if (n == 0) return 0;
    for (i = 1 to n)
        for (j = 1 to i)
            print i, j, n;
    for (i = 1 to 3)
            waste(n / 2);
}
```

$T(0) = \gamma$

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \alpha n^2 + \beta$

c.

```
Draw(n)
{
    if (n < 1)  return 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        for (int j = 1; j <= n; j++)
            print("*");
    Draw(n - 3);
}
```

$T(0) = \gamma$

$T(n) = T(n-3) + \alpha n^2 + \beta$

d.

```
int f(int n)
{
```

```
    if (n == 1) return 2;
    return 3^f(n / 2) + 2*log(f(n / 2)) - f(n / 2) + 1;
}
```

$T(1) = \gamma$

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \alpha$

e.

```
reSum(a, left, right)
{
    if (left == right)  return a[left];
    mid = (left + right) / 2;
    return reSum(a, left, mid) + reSum(a, mid + 1, right);
}
```

$T(1) = \gamma$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \alpha$

f.

Gọi T(n) là số phép cộng cần thực hiện khi gọi Zeta(k). Hãy thiết lập công thức truy hồi cho T(n).

Cho hàm:

```
Zeta(n)
{
    if (n == 0) Zeta = 6;
    else
    {
        k = 0;
        Ret = 0;
        while (k <= n - 1)
        {
            Ret = Ret + Zeta(k);
            k = k + 1;
        }
        Zeta = Ret;
    }
}
```

Bài tập 2

Giải các phương trình đệ quy sau bằng phương pháp truy hồi
$T(n) = T(n-1) + n \qquad\qquad T(1) = 1$
Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= [T(n-2) + n - 1] + n = T(n-2) + 2n - 1 \\
&= [T(n-3) + n - 2] + 2n - 1 = T(n-3) + 3n - 3 \\
&= [T(n-4) + n - 3] + 3n - 3 = T(n-4) + 3n - 6 \\
&= ... \\
&= T(n-i) + in - \frac{i(i-1)}{2}
\end{aligned}$$

Quá trình dừng lại khi $n - i = 1$ hay $i = n - 1$

$$\Rightarrow T(n) = T(1) + (n-1)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = O(n^2)$$

$T(n) = T(n-1) + 5 \qquad\qquad T(1) = 0$
Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + 5 \\
&= [T(n-2) + 5] + 5 = T(n-2) + 2.5 \\
&= [T(n-3) + 5] + 2.5 = T(n-3) + 3.5 \\
&= ... \\
&= T(n-i) + 5i
\end{aligned}$$

Quá trình dừng lại khi $n - i = 1$ hay $i = n - 1$

$$\Rightarrow T(n) = T(1) + 5(n-1) = 5n - 5 = O(n)$$

$T(n) = 3T(n-1) + 1 \qquad\qquad T(1) = 4$
Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T(n-1) + 1 \\
&= 3\left[3T(n-2) + 1\right] + 1 = 3^2T(n-2) + 3 + 1 \\
&= 3^2\left[3T(n-3) + 1\right] + 3 + 1 = 3^3(n-3) + 3^2 + 3 + 1 \\
&= ... \\
&= 3^iT(n-i) + \sum_{k=0}^{i-1} 3^k \\
&= 3^iT(n-i) + \frac{1}{2}\left(3^i - 1\right)
\end{aligned}$$

Quá trình dừng lại khi $n - i = 1$ hay $i = n - 1$

$$\begin{aligned}\Rightarrow T(n) &= 3^{n-1}T(1) + \frac{1}{2}\left(3^{n-1} - 1\right)\\ &= 4.3^{n-1} + \frac{1}{2}\left(3^{n-1} - 1\right)\\ &= O(3^n)\end{aligned}$$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \qquad T(1) = 1$

Ta có:

$$\begin{aligned}T(n) &= 2\left[2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 1\right] + 1 = 2^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2 + 1\\ &= 2^2\left[2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 1\right] + 2 + 1 = 2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 2^2 + 2 + 1\\ &= ...\\ &= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k\\ &= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + 2^i - 1\end{aligned}$$

Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{2^i} = 1$ hay $i = \log_2 n$

$$\begin{aligned}\Rightarrow T(n) &= 2^{\log_2 n}T(1) + 2^{\log_2 n} - 1\\ &= n + n - 1\\ &= O(n)\end{aligned}$$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \qquad T(1) = 1$

Ta có:

$$\begin{aligned}T(n) &= 2\left[2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right] + n = 2^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2n\\ &= 2^2\left[2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right] + 2n = 2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3n\\ &= ...\\ &= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + in\end{aligned}$$

Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{2^i} = 1$ hay $i = \log_2 n$

$$\begin{aligned}\Rightarrow T(n) &= 2^{\log_2 n}T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n\log_2 n\\ &= O\left(n\log_2 n\right)\end{aligned}$$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \qquad T(1) = 1$

Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2\left[2T\left(\frac{n}{2^2}\right)+\frac{n^2}{2^2}\right]+n^2 = 2^2T\left(\frac{n}{2^2}\right)+\frac{n^2}{2^2}+n^2\\
&= 2^2\left[2T\left(\frac{n}{2^3}\right)+\frac{n^2}{2^4}\right]+\frac{n^2}{2^2}+n^2 = 2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right)+\frac{2^2n^2}{2^4}+\frac{n^2}{2^2}+n^2\\
&= ...\\
&= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right)+n^2\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right)+2n^2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^i\right]
\end{aligned}$$

Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{2^i}=1$ hay $i=\log_2 n$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T(n) &= 2^{\log_2 n}T(1)+2n^2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 n}\right]\\
&= n+2n^2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 n}\right]\\
&= O(n^2)
\end{aligned}$$

Bài tập 3

Giải các phương trình đệ quy sau bằng phương pháp truy hồi $T(1) = 1$

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3\left[3T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n^2}{2^2}\right] + n^2 = 3^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3n^2}{2^2} + n^2 \\
&= 3^2\left[3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n^2}{2^4}\right] + \frac{3n^2}{2^2} + n^2 = 3^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{3^2n^2}{2^4} + \frac{3n^2}{2^2} + n^2 \\
&= ... \\
&= 3^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k \\
&= 3^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + 4n^2\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^i\right]
\end{aligned}
$$

Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{2^i} = 1$ hay $i = \log_2 n$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow T(n) &= 3^{\log_2 n}T(1) + 4n^2\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n}\right] \\
&= n^{\log_2 3} + 4n^2\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n}\right] \\
&= O(n^2)
\end{aligned}
$$

$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 8\left[8T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n^3}{2^3}\right] + n^3 = 8^2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{8n^3}{2^3} + n^3 \\
&= 8^2\left[8T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n^3}{2^6}\right] + \frac{8n^3}{2^3} + n^3 = 8^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{8^2n^3}{2^6} + \frac{8n^3}{2^3} + n^3 \\
&= ... \\
&= 8^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^3\sum_{k=0}^{i-1}1 \\
&= 8^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^3 i
\end{aligned}
$$

Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{2^i} = 1$ hay $i = \log_2 n$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow T(n) &= 8^{\log_2 n}T(1) + n^3\log_2 n \\
&= n^3 + 4n^3\log_2 n \\
&= O\left(n^3\log_2 n\right)
\end{aligned}
$$

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 4\left[4T\left(\frac{n}{3^2}\right) + \frac{n}{3}\right] + n = 4^2T\left(\frac{n}{3^2}\right) + \frac{4n}{3} + n \\
&= 4^2\left[4T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \frac{n}{3^2}\right] + \frac{4n}{3} + n = 4^3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \frac{4^2n}{3^2} + \frac{4n}{3} + n \\
&= ... \\
&= 4^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + n\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{4}{3}\right)^k \\
&= 4^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) - 3n\left[1 - \left(\frac{4}{3}\right)^i\right]
\end{aligned}$$

Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{3^i} = 1$ hay $i = \log_3 n$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T(n) &= 4^{\log_3 n}T(1) - 3n\left[1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n}\right] \\
&= n^{\log_3 4} - 3n\left[1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n}\right] \\
&= O\left(n^{\log_3 4}\right)
\end{aligned}$$

$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 9\left[9T\left(\frac{n}{3^2}\right) + \frac{n^2}{3^2}\right] + n^2 = 9^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{9n^2}{2^2} + n^2 \\
&= 9^2\left[9T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \frac{n^2}{3^4}\right] + \frac{9n^2}{2^2} + n^2 = 9^3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \frac{9^2n^2}{3^4} + \frac{9n^2}{3^2} + n^2 \\
&= ... \\
&= 9^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + n^2\sum_{k=0}^{i-1} 1 \\
&= 9^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + n^2 i
\end{aligned}$$

Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{3^i} = 1$ hay $i = \log_3 n$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T(n) &= 9^{\log_3 n}T(1) + n^2\log_3 n \\
&= n^2 + n^2\log_3 n \\
&= O\left(n^2\log_3 n\right)
\end{aligned}$$

$T(2) = 0$ $\quad\quad$ $T(n) = 2T\left(\sqrt{n}\right) + 1$

Đăt $n = 2^m$ ta được: $T(2^m) = 2T\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + 1$

Chọn $S(m) = T(2^m) = T(n), S(1) = 0$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow S(m) &= 2S\left(\frac{m}{2}\right) + 1 \\
&= 2\left[2S\left(\frac{m}{2^2}\right) + 1\right] + 1 = 2^2 S\left(\frac{m}{2^2}\right) + 2 + 1 \\
&= 2^2\left[2S\left(\frac{m}{2^3}\right) + 1\right] + 2 + 1 = 2^3 S\left(\frac{m}{2^3}\right) + 2^2 + 2 + 1 \\
&= ... \\
&= 2^i S\left(\frac{m}{2^i}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k \\
&= 2^i S\left(\frac{m}{2^i}\right) + \frac{2^i - 1}{2 - 1} \\
&= 2^i S\left(\frac{m}{2^i}\right) + 2^i - 1
\end{aligned}
$$

Quá trình dừng lại khi $\frac{m}{2^i} - i = 1$ hay $i = \log_2 m$

$\Rightarrow S(m) = 2^{\log_2 m} S(1) + 2^{\log_2 m} - 1 = m - 1 = O(m)$

Do đó $T(n) = O(\log n)$

Bài tập 4

Giải phương trình đệ quy sau dùng phương trình đặc trưng $T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2)$
$T(0) = 1$
$T(1) = 2$
Ta có: $T(n) - 4T(n-1) + 3T(n-2) = 0$
Đặt $T(n) = x^n$ ta được:
$x^n - 4x^{n-1} + 3x^{n-2} = 0$
$\Leftrightarrow x^{n-2}\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$(nghiệm đơn), $x = 3$(nghiệm đơn)
Do đó: $T(n) = \alpha + \beta 3^n$
Theo đề bài thì:
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 3\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$
Do đó $T(n) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}3^n = O(3^n)$

$T(n) = 4T(n-1) - 5T(n-2) + 2T(n-3)$ $T(0) = 0$
$T(1) = 1$
$T(2) = 2$
Ta có: $T(n) - 4T(n-1) + 5T(n-2) - 2T(n-3) = 0$
Đặt $T(n) = x^n$ ta được:
$x^n - 4x^{n-1} + 5x^{n-2} - 2x^{n-3} = 0$
$\Leftrightarrow x^{n-3}\left(x^3 - 4x^2 + 5x + -2\right) = 0$
$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 5x + -2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$(nghiệm kép), $x = 2$(nghiệm đơn)
Do đó: $T(n) = \alpha 2^n + \beta 3^n \gamma$
Theo đề bài thì:
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ 4\alpha + \beta + 2\gamma = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$
Do đó $T(n) = n = O(n)$

$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$
$T(0) = 0$
$T(1) = 1$

Bài tập 5

Giải phương trình đệ quy
$T(0) = 1$
$T(n) = T(n-1) + 7$ nếu $n \geq 1$
Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (T(n-1)+7)x^n + 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n + 7\sum_{n=1}^{\infty} x^n + 1 \end{aligned}$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = xf(x)$$

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = xf(x) + 7\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) + 1 = xf(x) + \frac{6x+1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow (1-x)f(x) = \frac{6x+1}{1-x}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f(x) &= \frac{6x+1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{6x}{1-x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= 6\sum_{n=0}^{\infty} nx^n - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (7n+1)x^n - 1 \end{aligned}$$

Do đó $T(n) = 7n + 1 = O(n)$

$T(n) = 7T(n-1) - 12T(n-2)$ nếu ≥ 2
$T(0) = 1$
$T(1) = 2$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (7T(n-1) - 12T(n-2))x^n + 2x + 1 \\
&= 7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n - 12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n + 2x + 1
\end{aligned}$$

$$A = \sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n = x\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = x(f(x)-1) = xf(x) - x$$

$$B = \sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n = x^2\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^{n-2} = x^2 f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = 7xf(x) - 7x - 12x^2 f(x) + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - 7x + 12x^2)f(x) = 1 - 5x$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow f(x) &= \frac{1-5x}{1-7x+12x^2} = \frac{2}{1-3x} - \frac{1}{1-4x} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(2.3^n - 4^n)x^n - 1
\end{aligned}$$

Do đó $T(n) = 2.3^n - 4^n = O(3^n)$

$T(n+1) = T(n) + 2(n+2)$ nếu $n \geq 0$
$T(0) = 3$
Phương trình $T(n+1) = T(n) + 2(n+2)$ với $n \geq 0$ tương đương với phương trình $T(n) = T(n-1) + 2(n+1)$ với $n \geq 1$
Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (T(n-1) + 2(n+1))x^n + 3 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n + 3
\end{aligned}$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = xf(x)$$

$$B = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - 1 = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = xf(x) + 2\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right) + 3$$

$$\Leftrightarrow (1-x)f(x) = \frac{2}{(1-x)^2} + 1$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow f(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{1-x}\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}x^n\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}x^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}x^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)+1)x^n\end{aligned}$$

Do đó $T(n) = (n+2)(n+1) + 1 = O\left(n^2\right)$