TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

————-oOo————-

[HW03.b] PHƯƠNG PHÁP ĐOÁN NGHIỆM VÀ ĐỊNH LÝ MASTER

Giảng viên hướng dẫn: ThS. Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm sinh viên:

1. Phạm Bá Đạt 17520337
2. Phan Thanh Hải 18520705

TP. HỒ CHÍ MINH, 05/11/2019

Mục lục

Bài tập 1

Giải các phương trình sau bằng phương pháp đoán nghiệm (có thể dùng định lý Master để đoán nghiệm nếu cần)

Bài làm:

a.

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$
$T(1) = 1$

Đặt $f(n) = an^2$
Với $n = 1$ thì $T(n) \leq f(n)$ (*)
$\Leftrightarrow T(1) \leq a$
$\Rightarrow$ Nếu $a \geq 1$ thì (*) được thỏa.
Giả sử $T(k) \leq f(k) \quad \forall k < n$.
Chứng minh $T(n) \leq f(n)$.
Ta có:

$$\begin{aligned} T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \leq 2f\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \\ &= \frac{1}{2}an^2 + n^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}a + 1\right)n^2 \end{aligned}$$

Nếu ta chọn $a \geq 2$ thì: $T(n) \leq an^2 = f(n)$
Vậy nếu ta chọn $a = 2$ thì $T(n) \leq 2n^2$.
Vậy $T(n) = O(n^2)$.

b.

$T(n) = n + 4T\left(\frac{n}{2}\right)$
$T(1) = 1$

Đặt $f(n) = an^2 - bn$
Với $n = 1$ thì $T(n) \leq f(n)$ (*)
$\Leftrightarrow T(1) \leq a - b$
$\Rightarrow$ Nếu $a - b \geq 1$ thì (*) được thỏa.
Giả sử $T(k) \leq f(k) \quad \forall k < n$.
Chứng minh $T(n) \leq f(n)$.
Ta có:

$$\begin{aligned} T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &= an^2 - 2bn + n \\ &= an^2 - (2b - 1)n \end{aligned}$$

Nếu ta chọn $b \geq 1$ thì: $T(n) \leq an^2 - bn = f(n)$
Vậy nếu ta chọn $a = 2, b = 1$ thì $T(n) \leq 2n^2 - n$.
Vậy $T(n) = O(n^2)$.

c.

$T(n) = 9T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$
$T(1) = 1$

Đặt $f(n) = an^2$
Với $n = 1$ thì $T(n) \leq f(n)$ (*)
$\Leftrightarrow T(1) \leq a$
$\Rightarrow$ Nếu $a \geq 1$ thì (*) được thỏa.
Giả sử $T(k) \leq f(k) \quad \forall k < n$.
Chứng minh $T(n) \leq f(n)$.
Ta có:

$$\begin{aligned} T(n) = 9T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 &\leq 9f\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 \\ &= \frac{9}{16}an^2 + n^2 \\ &= \left(\frac{9}{16}a + 1\right)n^2 \end{aligned}$$

Nếu ta chọn $a \geq \frac{16}{7}$ thì: $T(n) \leq an^2 = f(n)$
Vậy nếu ta chọn $a = \frac{16}{7}$ thì $T(n) \leq \frac{16}{7}n^2$.
Vậy $T(n) = O(n^2)$.

Bài tập 2

Giải phương trình sau bằng phương pháp đoán nghiệm:
$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$
$T(m) = 1$ với $m \leq 5$

Bài làm:

Đặt $f(n) = an$
Với $n = 1$ thì $T(n) \leq f(n)$ (*)
$\Leftrightarrow T(1) \leq a$
$\Rightarrow$ Nếu $a \geq 1$ thì (*) được thỏa.
Giả sử $T(k) \leq f(k) \quad \forall k < n$.
Chứng minh $T(n) \leq f(n)$.
Ta có:

$$\begin{aligned} T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n &\leq f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n}{4}\right) + n \\ &= \frac{1}{2}an + \frac{1}{4}an + n \\ &= \left(\frac{3a}{4} + 1\right) n \end{aligned}$$

Nếu ta chọn $\frac{3a}{4} + 1 \leq a$ hay $a \geq 4$ thì: $T(n) \leq an = f(n)$
Vậy nếu ta chọn $a = 4$ thì $T(n) \leq 4n$.
Vậy $T(n) = O(n)$.

Bài tập 3

Cho phương trình đệ quy:
$T(1) = \Theta(1)$
$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ nếu $n \geq 2$
Một người dùng phương pháp đoán nghiệm để giải phương trình đệ quy trên. Giả sử anh ta lần lượt đoán 3 nghiệm như sau:
$f(n) = cn^3$
$f(n) = cn^2$
$f(n) = c_1n^2 - c_2n$
Theo bạn, lần đoán nào thành công, thất bại và vì sao? (Gợi ý: thử đoán như anh ta)

Bài làm:

Gọi $T(1) = \Theta(1) = k$ (k là một hằng số).

$\underline{f(n) = cn^3}$
Với $n = 1$ thì $T(n) \leq f(n)$ (*)
$\Leftrightarrow T(1) \leq c$
$\Rightarrow$ Nếu $c \geq k$ thì (*) được thỏa.
Giả sử $T(k) \leq f(k) \quad \forall k < n$.
Chứng minh $T(n) \leq f(n)$.
Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&= \frac{1}{2}cn^3 + n \\
&\leq \frac{1}{2}cn^3 + n^3 \text{ với } n \geq 1 \\
&= \left(\frac{1}{2}c + 1\right)n^3
\end{aligned}$$

Nếu ta chọn $c \geq 2$ thì: $T(n) \leq cn^3 = f(n)$
Vậy nếu ta chọn $c = 2$ thì $T(n) \leq 2n^3$.
Do đó $T(n) = O(n^3)$.

$\underline{f(n) = cn^2}$
Với $n = 1$ thì $T(n) \leq f(n)$ (*)
$\Leftrightarrow T(1) \leq c$
$\Rightarrow$ Nếu $c \geq k$ thì (*) được thỏa.
Giả sử $T(k) \leq f(k) \quad \forall k < n$.
Chứng minh $T(n) \leq f(n)$.

Ta có:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n$$
$$= cn^2 + n$$
$$\leq cn^2 + n^2 \text{ với } n \geq 1$$

Không chọn c được!

<u>$f(n) = c_1n^2 - c_2n$</u>

Với $n = 1$ thì $T(n) \leq f(n)$ (*)

$\Leftrightarrow T(1) \leq c_1 - c_2$

$\Rightarrow$ Nếu $c_1 - c_2 \geq k$ thì (*) được thỏa.

Giả sử $T(k) \leq f(k) \quad \forall k < n$.

Chứng minh $T(n) \leq f(n)$.

Ta có:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n$$
$$= c_1n^2 - 2c_2n + n$$
$$= c_1n^2 - (2c_2 - 1)n$$

Nếu ta chọn $c_2 \geq 1$ thì: $T(n) \leq c_1n^2 - c_2n = f(n)$

Vậy nếu ta chọn $c_1 = k + 1, c_2 = 1$ thì $T(n) \leq (k+1)n^2 - n$.

Vậy $T(n) = O(n^2)$.

Bài tập 4

Dùng phương pháp đoán nghiệm để chứng minh độ phức tạp Ω của $T(n)$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \qquad\qquad T(1) = 1$$

Gợi ý: $T(n) = \Omega(n^2 \log n)$ và dùng quy nạp chứng tỏ rằng $T(n) \geq f(n) \quad \forall n$

<u>Bài làm:</u>

$f(n) = an^2 \log n$
Với $n = 1$ thì $T(n) \geq f(n)$ (*)
$\Leftrightarrow T(1) \geq 0$
$\Rightarrow$ Vậy (*) luôn được thỏa.
Giả sử $T(k) \geq f(k) \quad \forall k < n$.
Chứng minh $T(n) \geq f(n)$.
Ta có:

$$\begin{aligned} T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \geq 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \\ &= 4a\left(\frac{n}{2}\right)^2 \log\frac{n}{2} + n^2 \\ &= an^2\log n - an^2 \log 2 + n^2 \\ &= an^2 \log n + (1-a)n^2 \end{aligned}$$

Nếu ta chọn $a \leq 1$ thì: $T(n) \geq an^2 \log n = f(n)$
Vậy nếu ta chọn $a = 1$ thì $T(n) \geq n^2 \log n$.
Vậy $T(n) = \Omega(n^2 \log n)$.

Bài tập 5

Một số trường hợp sau không giải được bằng Master Theorem. Vì sao?

Bài làm:

1. $T(n) = 2^n T\left(\frac{n}{2}\right) + n^n$
Không thể dùng được định lý Master vì $a = 2^n$ không phải là một hằng số.

2. $T(n) = 0.5T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
Không thể dùng được định lý Master vì $a = 0.5 < 1$.

3. $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n\left(2 - \cos n\right)$
Ta có: $a = 1, b = 2, f(n) = n\left(2 - \cos n\right) = \Omega(n)$ với $c = 1$.
Mà $\log_b a = \log_2 1 < 1$.
Kiểm tra điều kiện chính quy:
$\frac{n}{2}\left(2 - \cos \frac{n}{2}\right) \leq ln\left(2 - \cos n\right)$.
Đặt $n = 2\pi k$ (với k là số lẻ và đủ lớn), ta được:
$3\pi k \leq l2\pi k$ hay $l \geq \frac{3}{2}$ (không thỏa mãn điều kiện chính quy)
Do đó không thể dùng được định lý Master bởi nếu dùng định lý Master trường hợp 3 thì điều kiện chính quy không thỏa.

4. $T(n) = 64T\left(\frac{n}{8}\right) - n^2 \log n$
Không thể dùng được định lý Master vì $f(n) = -n^2 \log n < 0$ không phải là một hàm dương.

Bài tập 6

Giải bằng định lý Master. Câu nào không áp dụng được định lý Master thì giải thích vì sao và tìm cách giải quyết khác (nếu được)

Bài làm:

1. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$
Ta có: $a = 3, b = 2, f(n) = n^2 = \Omega(n^2)$ với $c = 2$.
Mà $\log_b a = \log_2 3 < 2$.
Kiểm tra điều kiện chính quy:
$3\left(\frac{n^2}{4}\right) \leq kn^2$, chọn $k = \frac{3}{4}$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 3 thì $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$.

2. $T(n) = 7T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$
Ta có: $a = 7, b = 3, f(n) = n^2 = \Omega(n^2)$ với $c = 2$.
Mà $\log_b a = \log_3 7 < 2$.
$7\left(\frac{n^2}{9}\right) \leq cn^2$, chọn $k = \frac{7}{9}$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 3 thì $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$.

3. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + \frac{n}{2}$
Ta có: $a = 3, b = 3, f(n) = \frac{n}{2} = \Theta(n)$ với $c = 1, k = 0$.
Mà $\log_b a = \log_3 3 = 1$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 2 thì $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log^{k+1} n\right) = \Theta(n \log n)$.

4. $T(n) = 16T\left(\frac{n}{4}\right) + n$
Ta có: $a = 16, b = 4, f(n) = n = O(n)$ với $c = 1$.
Mà $\log_b a = \log_4 16 = 2 > 1$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 1 thì $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(n^2)$.

5. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n^{0.51}$
Ta có: $a = 2, b = 4, f(n) = n^{0.51} = \Omega(n^{0.51})$ với $c = 0.51$.
Mà $\log_b a = \log_4 2 < 0.51$.
$2\left(\frac{n^{0.51}}{4^{0.51}}\right) \leq kn^{0.51}$, chọn $k = \frac{1}{2}$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 3 thì $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^{0.51})$.

6. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
Ta có: $a = 3, b = 2, f(n) = n = O(n)$ với $c = 1$.
Mà $\log_b a = \log_2 3 > 1$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 1 thì $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(n^{\log_2 3})$.

7. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + \sqrt{n}$
Ta có: $a = 3, b = 3, f(n) = \sqrt{n} = O\left(\sqrt{n}\right)$ với $c = \frac{1}{2}$.
Mà $\log_b a = \log_3 3 > \frac{1}{2}$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 1 thì $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(n^{\log_3 3}) = \Theta(n)$.

8. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + cn$
Ta có: $a = 4, b = 2, f(n) = cn = O(n)$ với $c = 1$.
Mà $\log_b a = \log_2 4 > 1$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 1 thì $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^2)$.

9. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 5n$
Ta có: $a = 4, b = 4, f(n) = 5n = \Theta(n)$ với $c = 1, k = 1$.
Mà $\log_b a = \log_4 4 = 1$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 2 thì $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log^{k+1} n\right) = \Theta(n \log n)$.

10. $T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + 4n$
Ta có: $a = 5, b = 4, f(n) = 4n = O(n)$ với $c = 1$.
Mà $\log_b a = \log_4 5 > 1$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 1 thì $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(n^{\log_4 5})$.

11. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + 5n$
Ta có: $a = 4, b = 5, f(n) = 5n = \Omega(n)$ với $c = 1$.
Mà $\log_b a = \log_5 4 < 1$.
Kiểm tra điều kiện chính quy:
$4\left(\frac{5n}{5}\right) \leq 5kn$, chọn $k = \frac{4}{5}$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 3 thì $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n)$.

12. $T(n) = 25T\left(\frac{n}{5}\right) + n^2$
Ta có: $a = 25, b = 5, f(n) = n^2 = \Theta(n^2)$ với $c = 2, k = 0$.
Mà $\log_b a = \log_5 25 = 2$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 2 thì $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log^{k+1} n\right) = \Theta(n^2 \log n)$.

13. $T(n) = 10T\left(\dfrac{n}{3}\right) + 17n^{1.2}$
Ta có: $a = 10, b = 3, f(n) = 17n^{1.2} = O(n^{1.2})$ với $c = 1.2$.
Mà $\log_b a = \log_3 10 > 1.2$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 1 thì $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(n^{\log_3 10})$.

14. $T(n) = 7T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n^3$
Ta có: $a = 7, b = 2, f(n) = n^3 = \Omega(n^3)$ với $c = 3$.
Mà $\log_b a = \log_2 7 < 3$.
Kiểm tra điều kiện chính quy:
$7\left(\dfrac{n^3}{8}\right) \leq kn^3$, chọn $k = \dfrac{7}{8}$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 3 thì $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^3)$.

15. $T(n) = 4T\left(\dfrac{n}{2}\right) + \log n$
Ta có: $a = 4, b = 2, f(n) = \log n = O(n)$ với $c = 1$.
Mà $\log_b a = \log_2 4 > 1$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 1 thì $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^2)$.

16. $T(n) = 4T\left(\dfrac{n}{5}\right) + \log n$
Ta có: $a = 4, b = 5, f(n) = \log n = \left(n^{\frac{1}{2}}\right)$ với $c = \dfrac{1}{2}$.
Mà $\log_b a = \log_5 4 > \dfrac{1}{2}$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 1 thì $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(n^{\log_5 4})$.

17. $T(n) = \sqrt{2}T\left(\dfrac{n}{2}\right) + \log n$
Ta có: $a = \sqrt{2}, b = 2, f(n) = \log n = O\left(n^{\frac{1}{4}}\right)$ với $c = \dfrac{1}{4}$.
Mà $\log_b a = \log_2 \sqrt{2} > \dfrac{1}{4}$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 1 thì $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(n^{\log_2 \sqrt{2}}) = \Theta(\sqrt{n})$.

18. $T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{3}\right) + n\log n$
Ta có: $a = 2, b = 3, f(n) = n\log n = \Omega(n)$ với $c = 1$.
Mà $\log_b a = \log_3 2 < 1$.
Kiểm tra điều kiện chính quy:
$\dfrac{2n}{3}\log\dfrac{n}{3} \leq kn\log n$, chọn $k = \dfrac{2}{3}$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 3 thì $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\log n)$.

19. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\log n$
Ta có: $a = 3, b = 4, f(n) = n\log n = \Omega(n)$ với $c = 1$.
Mà $\log_b a = \log_4 3 < 1$.
Kiểm tra điều kiện chính quy:
$\frac{3n}{4}\log\frac{n}{4} \leq kn\log n$, chọn $k = \frac{3}{4}$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 3 thì $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\log n)$.

20. $T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2\log n$
Ta có: $a = 6, b = 3, f(n) = n^2\log n = \Omega(n^2)$ với $c = 2$.
Mà $\log_b a = \log_3 6 < 2$.
Kiểm tra điều kiện chính quy:
$\frac{6n^2}{9}\log\frac{n}{3} \leq kn^2\log n$, chọn $k = \frac{2}{3}$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 3 thì $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2\log n)$.

21. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{5}\right) + \log^2 n$
Ta có: $a = 3, b = 5, f(n) = \log^2 n = O\left(n^{\frac{3}{4}}\right)$ với $c = \frac{3}{4}$.
Mà $\log_b a = \log_5 3 > \frac{3}{4}$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 1 thì $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(n^{\log_5 3})$.

22. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log n}$
Ta không thể áp dụng định lý Master trong bài này.
Tuy nhiên, $a = 2, b = 2, f(n) = \frac{n}{\log n} = \Theta\left(n\log^{-1} n\right)$ với $c = 1, k = -1$.
Mà $\log_b a = \log_2 2 = 1$.
Ta có thể áp dụng định lý Master mở rộng cho trường hợp 2. Do đó, ta được $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\log\log n\right) = \Theta(n\log\log n)$.

Bài tập 7

Dạng nâng cao: Không bắt buộc, bài tập cộng điểm. Dùng phương pháp gì cũng được

<u>**Bài làm:**</u>

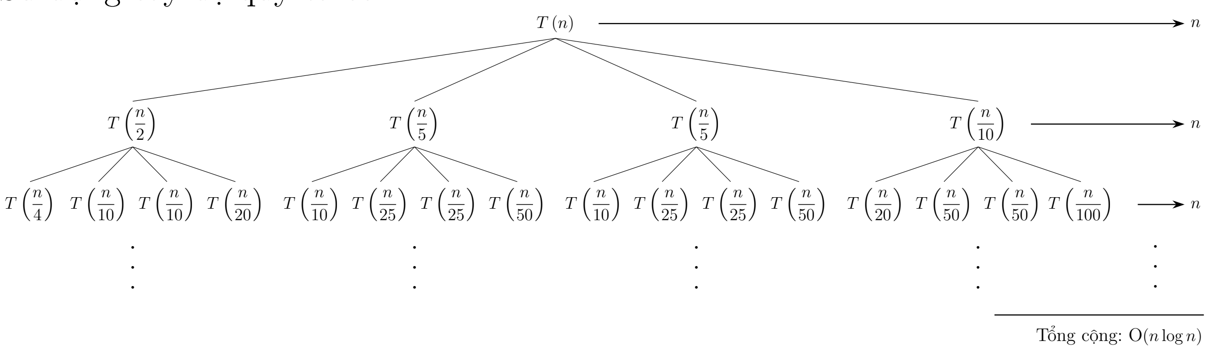
1. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + \log^5 n\sqrt{n}$
$T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + \log^5 n\sqrt{n} = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + \frac{3}{2}\log^5 n$
Ta có: $a = 4, b = 5, f(n) = \frac{3}{2}\log^5 n = O\left(n^{\frac{3}{4}}\right)$ với $c = \frac{3}{4}$.
Mà $\log_b a = \log_5 4 > \frac{3}{4}$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 1 thì $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(n^{\log_5 4})$.

2. $T(n) = 4T(\sqrt{n}) + \log^5 n$
Đặt $m = \log n$ ta được: $T(2^m) = 4T\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + m^5$.
Chọn $S(m) = T(2^m) = T(n)$.
$\Rightarrow S(m) = 4S\left(\frac{m}{2}\right) + m^5$.
Ta có: $a = 4, b = 2, f(m) = m^5 = \Omega(m^5)$ với $c = 5$.
Mà $\log_b a = \log_2 4 < 5$.
Kiểm tra điều kiện chính quy:
$\frac{4n^5}{32} \leq kn^5$, chọn $k = \frac{1}{8}$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 3 thì $S(m) = \Theta(f(m)) = \Theta(m^5)$.
Đổi $S(m)$ về $T(n)$, ta được: $T(n) = \Theta(\log^5 n)$.

3. $T(n) = 4T(\sqrt{n}) + \log^2 n$
Đặt $m = \log n$ ta được: $T(2^m) = 4T\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + m^2$.
Chọn $S(m) = T(2^m) = T(n)$.
$\Rightarrow S(m) = 4S\left(\frac{m}{2}\right) + m^2$.
Ta có: $a = 4, b = 2, f(m) = m^2 = \Theta(m^2)$ với $c = 2, k = 0$.
Mà $\log_b a = \log_2 4 = 2$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 2 thì $S(m) = \Theta\left(m^{\log_b a}\log^{k+1} m\right) = \Theta(m^2 \log m)$.
Đổi $S(m)$ về $T(n)$, ta được: $T(n) = \Theta(\log^2 n \log\log n)$.

4. $T(n) = 4T\left(\sqrt{n}\right) + 5$
Đặt $m = \log n$ ta được: $T(2^m) = 4T\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + 5$.
Chọn $S(m) = T(2^m) = T(n)$.
$\Rightarrow S(m) = 4S\left(\dfrac{m}{2}\right) + 5$.
Ta có: $a = 4, b = 2, f(m) = 5 = O(m)$ với $c = 1$.
Mà $\log_b a = \log_2 4 > 1$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 1 thì $S(m) = \Theta\left(m^{\log_b a}\right) = \Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(m^2)$.
Đổi $S(m)$ về $T(n)$, ta được: $T(n) = \Theta(\log^2 n)$.

5. $T(n) = T\left(\dfrac{n}{2}\right) + 2T\left(\dfrac{n}{5}\right) + T\left(\dfrac{n}{10}\right) + 4n$
Sử dụng cây đệ quy ta có:



6. $T(n) = T\left(\dfrac{n}{2}\right) + 2^n$
Ta có: $a = 1, b = 2, f(n) = 2^n = \Omega(n^2)$ với $c = 2$.
Mà $\log_b a = \log_2 1 < 2$.
Kiểm tra điều kiện chính quy:
$2^{\frac{n}{2}} \le k2^n$, chọn $k = \dfrac{1}{2}$ (với n đủ lớn).
Do đó $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(2^n)$.

7. $T(n) = 16T\left(\dfrac{n}{4}\right) + n!$
Ta có: $a = 16, b = 4, f(n) = n! = \Omega(n^3)$ với $c = 3$.
Mà $\log_b a = \log_4 16 < 3$.
Kiểm tra điều kiện chính quy:
$16\left(\dfrac{n}{2}\right)! \le kn!$, chọn $k = \dfrac{1}{2}$ (với n đủ lớn).
Do đó $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n!)$.

8. $T(n) = T\left(\sqrt{n}\right) + \Theta\left(\log\log n\right)$
Đặt $m = \log n$ ta được: $T(2^m) = T\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + \Theta\left(\log m\right)$.
Chọn $S(m) = T(2^m) = T(n)$.
$\Rightarrow S(m) = S\left(\dfrac{m}{2}\right) + \Theta\left(\log m\right)$.
Ta có: $a = 4, b = 2, f(m) = \Theta\left(\log m\right)$ với $c = 0, k = 1$.
Mà $\log_b a = \log_2 1 = 0$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 2 thì $S(m) = \Theta\left(m^{\log_b a} \log^{k+1} m\right) = \Theta(\log^2 m)$.
Đổi $S(m)$ về $T(n)$, ta được: $T(n) = \Theta(\log^2\left(\log n\right))$.

9. $T(n) = T\left(\frac{n}{2} + \sqrt{n}\right) + \sqrt{6046}$
Với n đủ lớn thì $T\left(\frac{n}{2}\right) \leq T\left(\frac{n}{2} + \sqrt{n}\right) \leq T\left(\frac{3n}{4}\right)$.
Xét $T_1 = \left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{6046}$.
Ta có: $a = 1, b = 2, f(n) = \sqrt{6046} = \Theta(1)$ với $c = 0, k = 0$.
Mà $\log_b a = \log_2 1 = 0$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 2 thì $T_1(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log^{k+1} n\right) = \Theta(\log n)$.
Xét $T_2 = \left(\frac{3n}{4}\right) + \sqrt{6046}$.
Ta có: $a = 1, b = \frac{4}{3}, f(n) = \sqrt{6046} = \Theta(1)$ với $c = 0, k = 0$.
Mà $\log_b a = \log_{\frac{4}{3}} 1 = 0$.
Do đó, theo định lý Master trường hợp 2 thì $T_1(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log^{k+1} n\right) = \Theta(\log n)$.
Vậy ta suy ra $T(n) = \Theta(\log n)$.

10. $T(n) = T(n-2) + \log n$
Giả sử $T(0) = 0$.
Ta có:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-2) + \log n \\
&= [T(n-4) + \log(n-2)] + \log n = T(n-4) + \log n + \log(n-2) \\
&= [T(n-6) + \log(n-4)] + \log n + \log(n-2) = T(n-6) + \log n + \log(n-2) + \log(n-4) \\
&= ... \\
&= T(n-2i) + \sum_{k=1}^{i} \log(n-2k+2)
\end{aligned}$$

Quá trình dừng lại khi $n - 2i = 0$ hay $i = \frac{n}{2}$.

Suy ra $T(n) = T(0) + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \log(n-2k+2)$.

Mà $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \log(n-2k+2) \geq \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \log 2k \geq \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \log k \geq \frac{n}{4} \log \frac{n}{4}$
Suy ra $T(n) = \Omega(n \log n)$ (1).
Ta lại có: $T(n) \leq S(n)$, với $S(n) = S(n-1) + \log n$ (2).

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + \log n \\
&= [T(n-2) + \log(n-1)] + \log n = T(n-2) + \log n + \log(n-1) \\
&= [T(n-3) + \log(n-2)] + \log n + \log(n-1) = T(n-3) + \log n + \log(n-1) + \log(n-2) \\
&= ... \\
&= T(n-i) + \sum_{k=1}^{i} \log(n-k+1)
\end{aligned}$$

Quá trình dừng lại khi $n - i = 0$ hay $i = n$.

Suy ra $T(n) = T(0) + \sum_{k=1}^{n} \log(n-k+1)$

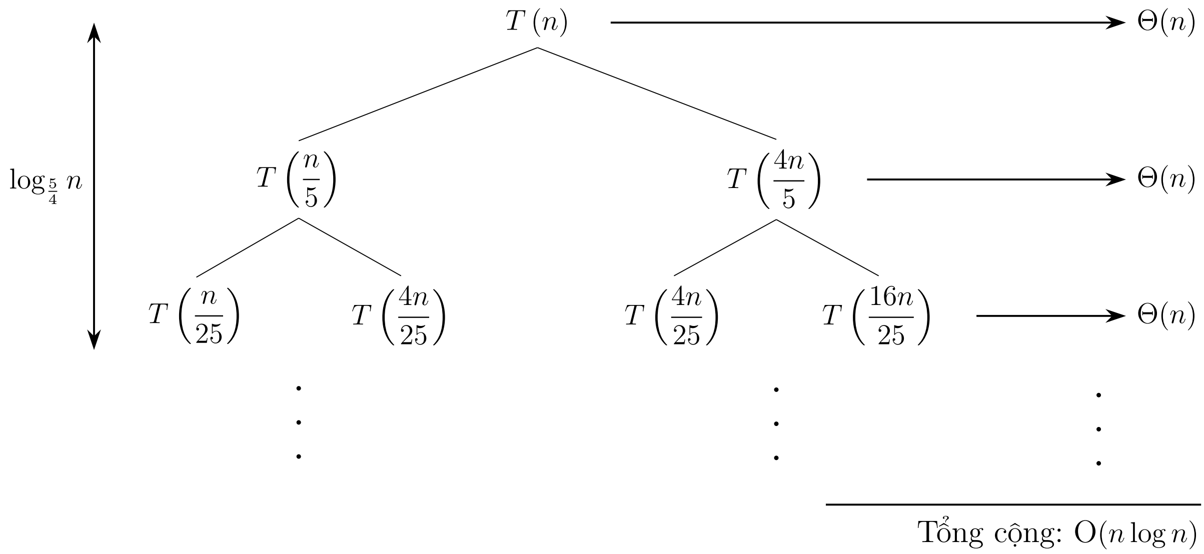
Mà $\sum_{k=1}^{n} \log(n-k+1) \leq n \log n$

Suy ra $S(n) = O(n \log n)$ (3).

Từ (1), (2) và (3), ta kết luận $T(n) = \Theta(n \log n)$.

11. $T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{4n}{5}\right) + \Theta(n)$

Sử dụng cây đệ quy ta có:



12. $T(n) = \sqrt{n}T\left(\sqrt{n}\right) + 100n$

Ta có: $S(n) = \frac{T(n)}{n} = \frac{\sqrt{n}T\left(\sqrt{n}\right) + 100n}{n} = \frac{T\left(\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}} + 100 = S\left(\sqrt{n}\right) + 100$

Đặt $m = \log n$ ta được: $S(2^m) = S\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + 100$.

Chọn $R(m) = S(2^m) = S(n)$.

$\Rightarrow R(m) = R\left(\frac{m}{2}\right) + 100$.

Ta có: $a = 1, b = 2, f(n) = 100 = \Theta(1)$ với $c = 0, k = 0$.

Mà $\log_b a = \log_2 1 = 0$.

Do đó, theo định lý Master trường hợp 2 thì $R(m) = \Theta\left(m^{\log_b a} \log^{k+1} m\right) = \Theta(\log m)$.

Đổi $R(m)$ về $S(n)$, ta được: $S(n) = \Theta(\log \log n)$.

Vậy $T(n) = \Theta(n \log \log n)$.