TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

---------- ★ ----------

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #01.b: KỸ THUẬT SƠ CẤP PHẦN 1

Giảng viên hướng dẫn: ThS. Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm sinh viên:

1. Phan Thanh Hải 18520705

TP. HỒ CHÍ MINH, 17/09/2019

BÀI 1

Tính:

a. 1 + 3 + 5 + 7 + … + 999

b. 2 + 4 + 8 + 16 + … + 1024

c. $\sum_{i=3}^{n+1} 1$

d. $\sum_{i=3}^{n+1} i$

e. $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$

f. $\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1}$

g. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$

h. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$

i. $\sum_{j\epsilon\{2,3,5\}} (j^2 + j)$

j. $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{100} (i+j)$

Bài làm

a. 1 + 3 + 5 + 7 + … + 999

$= \underbrace{(1 + 2.0) + (1 + 2.1) + (1 + 2.2) + (1 + 2.3) + \ldots + (1 + 2.499)}_{\textit{(có 500 số hạng)}}$

Ta có:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{500(1 + 999)}{2} = 250000$$

b. 2 + 4 + 8 + 16 + … + 1024

$= 2.2^0 + 2.2^1 + 2.2^2 + 2.2^3 + \ldots + 2.2^9$

Ta có:

$$S_{n+1} = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{2(1 - 2^{9+1})}{1 - 2} = 2046$$

c.

$$\sum_{i=3}^{n+1} 1$$

$= \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{\textit{(có } n - 1 \textit{ số hạng)}}$

$= (n - 1).1 = n - 1.$

d.

$$\sum_{i=3}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) - \sum_{i=1}^{2} i = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) - 3 = \frac{(n+4)(n-1)}{2}$$

e.

$$\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1}(i^2+i) = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i = \sum_{i=0}^{n} i^2 - n^2 + \sum_{i=0}^{n} i - n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2 + \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n^2-1)}{3}$$

f.

$$\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1} = \sum_{j=0}^{n} 3^{j+1} - 3 = \sum_{j=0}^{n} 3.3^j - 3 = 3\sum_{j=0}^{n} 3^j - 3 = 3.\frac{3^{n+1}-1}{3-1} - 3$$

$$= \frac{9(3^n-1)}{2}$$

g.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n} i.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

h.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

i.

$$\sum_{j\epsilon\{2,3,5\}} (j^2+j) = (2^2+2) + (3^2+3) + (5^2+5) = 6 + 12 + 30 = 48$$

j.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{100}(i+j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left[(i+j)\sum_{k=0}^{100}1\right] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}101(i+j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}101i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}101j = 101\sum_{i=1}^{m}i\sum_{j=0}^{n}1 + 101\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}j$$

$$= 101(n+1)\sum_{i=1}^{m}i + 101\sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{101(n+1)m(m+1)}{2} + \frac{101n(n+1)m}{2}$$

$$= \frac{101m(n+1)(m+n+1)}{2}$$

BÀI 2

For each of the following algorithms, indicate (i) a natural size metric for its inputs, (ii) its basic operation, and (iii) whether the basic operation count can be different for inputs of the same size:

a. computing the sum of *n* numbers

b. computing *n*!

c. finding the largest element in a list of *n* numbers

Bài làm

a. computing the sum of *n* numbers

(i) a natural size metric for its inputs: *n*

(ii) its basic operation: addition of 2 numbers

(iii) whether the basic operation count can be different for inputs of the same size: no

b. computing the sum of *n* numbers

(i) a natural size metric for its inputs: *n*

(ii) its basic operation: multiplication of 2 numbers

(iii) whether the basic operation count can be different for inputs of the same size: no

c. finding the largest element in a list of n numbers

(i) a natural size metric for its inputs: *n*

(ii) its basic operation: comparison of 2 numbers

(iii) whether the basic operation count can be different for inputs of the same size: no

BÀI 3

Consider the following algorithm.

ALGORITHM *Mystery(n)*

//Input: A nonnegative integer n

$S \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

$S \leftarrow S + i * i$

return S

a. What does this algorithm compute?
b. What is its basic operation?
c. How many times is the basic operation executed?
d. What is the efficiency class of this algorithm?
e. Suggest an improvement, or a better algorithm altogether, and indicate its efficiency class. If you cannot do it, try to prove that, in fact, it cannot be done.

Bài làm

a. This algorithm computes the sum of squares of first n natural numbers.
b. Its basic operations are the assignment and comparison operation.
c. The basic operation executed n times.
d. The efficiency class of this algorithm is $O(n)$.
e. Instead of using loops, we can use fomular to find the sum of squares of first n natural numbers:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Its efficiency class is $O(1)$.

BÀI 4

Đếm số phép gán và phép so sánh:

```
sum = 0;
i = 1;
while (i ≤ n) do
     j = 1;
     while (j ≤ n) do
          sum = sum + i*j;
          j = j + 1;
     end do;
     i = i + 1;
end do;
```

Bài làm

Gọi α_i là số lần lặp của vòng `while` trong (tính độc lập với vòng `while` ngoài).

```
sum = 0;                                {1 gán}
i = 1;                                  {1 gán}
while (i ≤ n) do                        {n + 1 so sánh}
     j = 1;                             {n gán}
     while (j ≤ n) do                   {αi + 1 so sánh}
          sum = sum + i*j;              {αi gán}
          j = j + 1;                    {αi gán}
     end do;
     i = i + 1;                         {n gán}
end do;
```

Số phép gán:

$$G(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Số phép so sánh:

$$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

Tính α_i???

α_i = số lần lặp của vòng `while` trong

= số j chạy từ 1 đến n, bước tăng là 1

= (n – 1) + 1 = n.

Kết luận:

Số phép gán:

$$G(n) = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} n = 2 + 2n + 2n\sum_{i=1}^{n} 1 = 2n^2 + 2n + 2$$

Số phép so sánh:

$$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(n + 1) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} n + \sum_{i=1}^{n} 1 = n + 1 + n^2 + n = (n + 1)^2$$

BÀI 5

Đếm số phép gán và phép so sánh:

```
i = 1; res = 0;
while (i ≤ n) do
     j = 1;
     while (j ≤ i) do
          res = res + i*j;
          j = j + số thứ tự của nhóm;
     end do;
     i = i + 1;
end do;
```

(Lưu ý: hiện tại cô chưa có danh sách nhóm nên "số thứ tự của nhóm" có thể chọn là 1 số bất kỳ trừ số 1)

Bài làm

`số thứ tự của nhóm = 2;`

Gọi α_i là số lần lặp của vòng `while` trong (tính độc lập với vòng `while` ngoài).

```
i = 1; res = 0;                 {2 gán}
while (i ≤ n) do                {n + 1 so sánh}
     j = 1;                     {n gán}
     while (j ≤ i) do           {αi + 1 so sánh}
          res = res + i*j;      {αi gán}
          j = j + 2;            {αi gán}
     end do;
     i = i + 1;                 {n gán}
end do;
```

Số phép gán:

$$G(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Số phép so sánh:

$$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

Tính α_i???

α_i = số lần lặp của vòng `while` trong

= số *j* chạy từ 1 đến *i*, bước tăng là 2

$$= \frac{(i-1)+1}{2} = \frac{i}{2}$$

Kết luận:

Số phép gán:

$$G(n) = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2} = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} + 2n + 2 = \frac{(n+4)(n+1)}{2}$$

Số phép so sánh:

$$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{2} + 1\right) = n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = n + 1 + \frac{n(n+1)}{4} + n$$

$$= \frac{n^2 + 9n + 4}{4}$$

BÀI 6

Đếm số phép gán và phép so sánh:

```
float Alpha(float x, long n)
{    long i = 1; float z = 0;
     while (i ≤ n)
     {    long j = 1; float t = 1;
          while (j ≤ i) do
          {    t = t*x;
               j = 2*j;
          }
          z = z + i*t;
          i = i + 1;
     }
     return z;
}
```

Bài làm

Gọi α_i là số lần lặp của vòng `while` trong (tính độc lập với vòng `while` ngoài).

`float Alpha(float x, long n)`	
`{    long i = 1; float z = 0;`	{2 gán}
`     while (i ≤ n)`	{$n + 1$ so sánh}
`     {    long j = 1; float t = 1;`	{$2n$ gán}
`          while (j ≤ i)`	{$\alpha_i + 1$ so sánh}
`          {    t = t*x;`	{α_i gán}
`               j = 2*j;;`	{α_i gán}
`          }`	
`          z = z + i*t;`	{n gán}
`          i = i + 1;`	{n gán}
`     }`	
`     return z;`	
`}`	

Số phép gán:

$$G(n) = 2 + 4n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i = 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Số phép so sánh:

$$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$$

Tính α_i???

α_i = số lần lặp của vòng `while` trong

= số *j* chạy từ 1 đến *i*, bước tăng là 2*j*

$= |\{1; 2; 4; \dots; 2^{k-1}\}|$

$= |\{2^{k-1} | k \in \mathbb{N}, 1 \le 2^{k-1} \le i, k \ge 1\}|$

Ta có:

$1 \le 2^{k-1} \le i \Leftrightarrow \log_2 1 \le k - 1 \le \log_2 i \Leftrightarrow 1 \le k \le \log_2 i + 1$

Do đó $\alpha_i = \log_2 i + 1$

Kết luận:

Số phép gán:

$$G(n) = 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 1)$$

Số phép so sánh:

$$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 2)$$

BÀI 7

Đếm số phép gán và phép so sánh:

```
i = 1;
res = 0;
while i ≤ n do
     j = 1;
     k = 1;
     while j ≤ i do
          res = res + i*j;
          k = k + 2;
          j = j + k;
     endw;
     i = i + 1;
endw;
```

Bài làm

Gọi α_i là số lần lặp của vòng `while` trong (tính độc lập với vòng `while` ngoài).

`i = 1;`	{1 gán}
`res = 0;`	{1 gán}
`while i ≤ n do`	{n + 1 so sánh}
`    j = 1;`	{n gán}
`    k = 1;`	{n gán}
`    while j ≤ i do`	{α_i + 1 so sánh}
`        res = res + i*j;`	{α_i gán}
`        k = k + 2;`	{α_i gán}
`        j = j + k;`	{α_i gán}
`    endw;`	
`    i = i + 1;`	{n gán}
`endw;`	

Số phép gán:

$$G(n) = 2 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 3\alpha_i = 2 + 3n + 3\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Số phép so sánh:

$$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

Tính α_i???

α_i = số lần lặp của vòng `while` trong

= số *j* chạy từ 1 đến *i*, bước tăng là *k* (mỗi lần lặp tiếp theo thì *k* tăng lên 2 đơn vị)

$= |\{1; 4; 9; 16; \dots; k^2\}|$ (*j* có dạng là một số chính phương)

$= |\{k^2 | k \in \mathbb{N}, 1 \leq k^2 \leq i\}|$

Ta có:

$1 \leq k^2 \leq i \Leftrightarrow 1 \leq k \leq \sqrt{i}$

Do đó $\alpha_i = \sqrt{i}$

Kết luận:

Số phép gán:

$$G(n) = 2 + 3n + 3\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}$$

Số phép so sánh:

$$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i} + 1)$$

BÀI 8

Đếm số phép gán và phép so sánh:

```
i = 1; count = 0;
while (i ≤ 3*n)
{
     x = i - 2*n;
     y = n - i;
     j = 1;
     while (j ≤ x)
     {
          count = count - 1;
          j = j + 2;
     }
     if (y > 0)
          if (x > 0)
               count = count + 1;
     i = i + 1;
}
```

Bài làm

Gọi α_i là số lần lặp của vòng `while` trong (tính độc lập với vòng `while` ngoài).
Gọi β_i, χ_i lần lượt là số lần thực hiện câu lệnh so sánh và câu lệnh gán trong đoạn `if` lồng nhau (tính độc lập với vòng `while` ngoài).

```
i = 1; count = 0;                       {2 gán}
while (i ≤ 3*n)                         {3n + 1 so sánh}
{
     x = i - 2*n;                       {3n gán}
     y = n - i;                         {3n gán}
     j = 1;                             {3n gán}
     while (j ≤ x)                      {αi + 1 so sánh}
     {
          count = count - 1;            {αi gán}
          j = j + 2;                    {αi gán}
     }
```

```
        if (y > 0)                              {βi so sánh}
            if (x > 0)
                count = count + 1;              {χi gán}
        i = i + 1;                              {3n gán}
    }
```

Số phép gán:

$$G(n) = 2 + 12n + \sum_{i=1}^{3n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{3n} \chi_i$$

Số phép so sánh:

$$SS(n) = 3n + 1 + \sum_{i=1}^{3n} (\alpha_i + 1) + \sum_{i=1}^{3n} \beta_i$$

Tính α_i???

Vòng lặp chỉ được thực hiện khi $i - 2n \geq 1 \Leftrightarrow i \geq 2n + 1$

α_i = số lần lặp của vòng `while` ngoài

= số j chạy từ 1 đến $i - 2n$, bước tăng là 2

$$= \frac{i - 2n - 1 + 1}{2} = \frac{i - 2n}{2}$$

Do đó:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & với\ i < 2n + 1 \\ \dfrac{i - 2n}{2} & với\ i \geq 2n + 1 \end{cases}$$

Tính β_i???

Ta có:

i	1	n	$2n$	
$x = i - 2*n$	–		– 0	+
$y = n - i$	+	0	–	–

Xét các trường hợp sau:

a. Với $i < n$ thì ta có:

$\beta_i = 2$

$\chi_i = 0$ (do câu lệnh `if` thứ 2 điều kiện không thỏa mãn)

b. Với $i \geq n$ thì ta có:

$\beta_i = 1$

$\chi_i = 0$

Kết luận:

Số phép gán:

$$G(n) = 2 + 12n + \sum_{i=2n+1}^{3n} \frac{i-2n}{2} + \sum_{i=1}^{3n} 0 = 2 + 12n + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n^2 + 49n + 8}{4}$$

Số phép so sánh:

$$SS(n) = 3n + 1 + \sum_{i=2n+1}^{3n} \left(\frac{i-2n}{2} + 1\right) + \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \sum_{i=n}^{3n} 2$$

$$= 3n + 1 + \sum_{i=2n+1}^{3n} \frac{i-2n}{2} + \sum_{i=2n+1}^{3n} 1 + n - 1 + 4n + 2$$

$$= 3n + 1 + \frac{n(n+1)}{4} + n + n - 1 + 4n + 2 = \frac{n^2 + 37n + 8}{4}$$

BÀI 9

Đếm số phép gán và phép so sánh:

```
i = 1; res = 0;
while i ≤ n do
     j = 1;
     while (j ≤ i) do
          res = res + i*j;
          j = j + 1;
     end do;
     i = i + số thứ tự của nhóm;
end do;
```

Bài làm

`số thứ tự của nhóm = 2;`

Gọi α là số lần lặp của vòng `while` ngoài và β_i là số lần lặp của vòng `while` trong (tính độc lập với vòng `while` ngoài).

`i = 1; res = 0;`	{2 gán}
`while i ≤ n do`	{$\alpha + 1$ so sánh}
`     j = 1;`	{α gán}
`     while (j ≤ i) do`	{$\beta_i + 1$ so sánh}
`          res = res + i*j;`	{β_i gán}
`          j = j + 1;`	{β_i gán}
`     end do;`	
`     i = i + 2;`	{α gán}
`end do;`	

Số phép gán:

$$G(n) = 2 + 2\alpha + \sum_{i=1}^{\alpha} 2\beta_i = 2 + 2\alpha + 2\sum_{i=1}^{\alpha} \beta_i$$

Số phép so sánh:

$$SS(n) = \alpha + 1 + \sum_{i=1}^{\alpha} (\beta_i + 1)$$

Tính α???

α = số lần lặp của vòng `while` ngoài

= số *i* chạy từ 1 đến *n*, bước tăng là 2

$$= \frac{(n-1)+1}{2} = \frac{n}{2}$$

Tính β_i???

β_i = số lần lặp của vòng `while` trong

= số j chạy từ 1 đến i, bước tăng là 1

= $(i - 1) + 1 = i$.

Kết luận:

Số phép gán:

$$G(n) = 2 + n + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} i = \frac{n(n+1)}{8} + 2 + n = \frac{n^2 + 9n + 8}{2}$$

Số phép so sánh:

$$SS(n) = \frac{n}{2} + 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(i+1) = \frac{n}{2} + 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} i + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 1 = \frac{n}{2} + 1 + \frac{n(n+2)}{8} + \frac{n}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 10n + 8}{8}$$