TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

———-oOo———-

BÀI TẬP VỀ NHÀ
MÔN ĐẠI SỐ MÁY TÍNH

BÀI TẬP TRÊN LỚP
NGÀY 18/10/2021

Lớp: CS522.M11

Giảng viên giảng dạy: TS. Nguyễn Đình Hiển

Nhóm sinh viên thực hiện:

1.	Phan Thanh Hải	18520705
2.	Trần Ngọc Sương	18521353

TP. HỒ CHÍ MINH, 10/2021

Mục lục

Bài 1.

Chứng minh rằng: Nếu đa thức bậc hai $P(x)$ nhận giá trị nguyên tại ba giá trị nguyên liên tiếp của biến x thì đa thức đó sẽ nhận giá trị nguyên tại mọi x nguyên.

Bài làm:

Gọi $P(x) = ax^2 + bx + c$. Giả sử x nhận ba giá trị nguyên liên tiếp là -1, 0, 1.
Ta có:

- $P(0) = c$. Theo giả thiết thì $P(0) \in \mathbb{Z} \to c \in \mathbb{Z}$.
- $P(1) = a + b + c$. Vì $P(1)$, $c \in \mathbb{Z} \to a + b \in \mathbb{Z}$.
- $P(1) = a - b + c$. Vì $P(-1)$, $c \in \mathbb{Z} \to a - b \in \mathbb{Z}$.

Suy ra, $2a = (a + b) + (a - b) \in \mathbb{Z}$.
Gọi n là một số nguyên bất kỳ. Ta có:

$$\begin{aligned}
P(n) &= an^2 + bn + c \\
&= an^2 + bn + c + an - an \\
&= a(n^2 - n) + (a + b)n + c \\
&= 2a\Big[\frac{n(n-1)}{2}\Big] + (a + b)n + c
\end{aligned}$$

Vì n là số nguyên nên $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{\text{số chẵn}}{2}$ cũng là một số nguyên.
Ta cũng đã chứng minh được $2a$, $a + b$, c là các số nguyên.
Khi đó, $P(n)$ sẽ nhận giá trị nguyên với mọi số nguyên n (ĐPCM).

Bài 2.

Cho đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa điều kiện:

$$|f(x)| \leq 1 \text{ khi } |x| \leq 1$$

Chứng minh rằng: Với mọi $M \geq 1$, ta có: $|f(x)| \leq 2M^2 - 1$ khi $|x| < M$

<u>Bài làm:</u>

Áp dụng công thức Langrange tại các điểm $x = -1, x = 0, x = 1$, ta được:

$$f\left(x\right) = f\left(1\right).\frac{x^2+x}{2} - f\left(0\right).\left(x^2-1\right) + f\left(-1\right).\frac{x^2-x}{2}$$

Mà ta có:

$$\begin{aligned}\left|f\left(x\right)\right| &\leq \left|f\left(1\right)\right|.\left|\frac{x^2+x}{2}\right| + \left|f\left(0\right)\right|.\left|x^2-1\right| + \left|f\left(-1\right)\right|.\left|\frac{x^2-x}{2}\right| \\ &\leq \left|\frac{x^2+x}{2}\right| + \left|\frac{x^2-x}{2}\right| + \left|x^2-1\right|\end{aligned}$$

Nếu $\left|x\right| \leq 1$ thì ta được $\left|f\left(x\right)\right| \leq 1 \leq 2M^2 - 1, \forall M \geq 1$.

Nếu $\left|x\right| > 1$ thì ta được $\frac{x^2+x}{2}.\frac{x^2-x}{2} = \frac{x^2\left(x^2-1\right)}{4} > 0$ suy ra $\left|f\left(x\right)\right| \leq 2x^2 - 1 \leq 2M^2 - 1$.

Tóm lại, ta kết luận rằng $|f(x)| \leq 2M^2 - 1, \forall\left|x\right| < M$.

Bài 3

Chứng minh đa thức $f(x) = x^3 - x + 1$ có 3 nghiệm phân biệt. Tính giá trị: $S = {x_1}^8 + {x_2}^8 + {x_3}^8$ với x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của $f(x)$.

Bài làm:

Ta sử dụng **Maple** để tìm nghiệm của phương trình trên.

$$> solve(x^3 - x + 1, x)$$

$$-\frac{\left(108 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}}{6} - \frac{2}{\left(108 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}}, \frac{\left(108 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}}{12} + \frac{1}{\left(108 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}} + \frac{I\sqrt{3}\left(-\frac{\left(108 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}}{6} + \frac{2}{\left(108 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}}\right)}{2},$$

$$\frac{\left(108 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}}{12} + \frac{1}{\left(108 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}} - \frac{I\sqrt{3}\left(-\frac{\left(108 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}}{6} + \frac{2}{\left(108 + 12\sqrt{69}\right)^{1/3}}\right)}{2}$$

Như vậy, ta thấy phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt.

Theo định lí Vi-et với phương trình bậc 3, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{1}{1} = -1 \end{cases}$$

Đặt $t_1 = {x_1}^4, t_2 = {x_2}^4, t_3 = {x_3}^4$, ta được:

$S = {t_1}^2 + {t_2}^2 + {t_3}^2$

$= (t_1 + t_2 + t_3)^2 - 2(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1)$

$= \left({x_1}^4 + {x_2}^4 + {x_3}^4\right)^2 - 2\left[(x_1x_2)^4 + (x_2x_3)^4 + (x_3x_1)^4\right]$

Mà:

$(x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2$

$= (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = (-1)^2 - 2.(-1).0 = 1$

$(x_1x_2)^4 + (x_2x_3)^4 + (x_3x_1)^4$

$= \left[(x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2\right]^2 - 2(x_1x_2x_3)^2({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)$

$= \left[(x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2\right]^2 - 2(x_1x_2x_3)^2\left[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\right] =$ $1^2 - 2.(-1)^2.\left[0^2 - 2.(-1)\right] = -3$

${x_1}^4 + {x_2}^4 + {x_3}^4$
$= (x_1 + x_2 + x_3)^4 + 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2\left[(x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2\right]$
$= 0^4 + 4.(-1)^2 - 4.(-1).0^2 - 2.1 = 2$
Vậy $S = 2^2 - 2.(-3) = 10.$

Bài 4

Thiết kế thuật toán Euclid để tìm ước chung lớn nhất của hai đa thức $P(x)$ và Q(x) thuộc $[x]$ (đa thức hệ số hữu tỉ). Cho ví dụ.

<u>Bài làm:</u>

Thuật toán 1: Thuật toán Euclid tìm ước chung lớn nhất của 2 đa thức

---

Đầu vào: Đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ sao cho $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$.

Đầu ra : Ước chung lớn nhất của 2 đa thức trên.

while $Q(x) \neq 0$ **do**
    $R(x) \leftarrow \text{rem}(R_0, R_1)$
    $P(x) \leftarrow Q(x)$
    $Q(x) \leftarrow R(x)$
return $P(x)$

Hiện thực thuật toán trên Maple:

```
> GCD :=proc(p, q)
      local a, b, r;
      a := p;
      b := q;
      while b ≠ 0 do
        r := rem(a, b, x);
        a := b;
        b := r;
      end do;
      return a;
    end proc;
GCD := proc(p, q)
    local a, b, r;
    a := p; b := q; while b < > 0 do r := rem(a, b, x); a := b; b := r end do; return a
end proc
> GCD(x^4 − 3x^3 − 2x^2 + 7x − 3, x^2 − 2x − 3)
                                   2x − 6
```

Thuật toán 2: Thuật toán Euclid mở rộng

Đầu vào: Đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ sao cho $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$.

Đầu ra : 3 đa thức $R(x), S(x), D(x)$ sao cho
$R(x).P(x) + S(x).Q(x) = \gcd(P(x), Q(x)) = D(x)$.

$R_0(x) \leftarrow P(x)$
$U_0(x) \leftarrow 1$
$V_0(x) \leftarrow 0$
$R_1(x) \leftarrow Q(x)$
$U_1(x) \leftarrow 0$
$V_1(x) \leftarrow 1$
while $R_1(x) \neq 0$ **do**
    $T(x) \leftarrow \texttt{quo}(R_0, R_1)$
    $R_2(x) \leftarrow R_0(x) - T(x)R_1(x)$
    $U_2(x) \leftarrow U_0(x) - T(x)U_1(x)$
    $V_2(x) \leftarrow V_0(x) - Q(x)V_1(x)$
    $U_0(x) \leftarrow U_1(x)$
    $V_0(x) \leftarrow V_1(x)$
    $R_0(x) \leftarrow R_1(x)$
    $U_1(x) \leftarrow U_2(x)$
    $V_1(x) \leftarrow V_2(x)$
    $R_1(x) \leftarrow R_2(x)$
return $U_0(x), V_0(x), R_0(x)$