

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

—oOo—



BÀI TẬP VỀ NHÀ MÔN ĐẠI SỐ MÁY TÍNH

BÀI TẬP BUỔI 3 ĐA THỨC

Lớp: CS522.M11

Giảng viên giảng dạy: TS. Nguyễn Đình Hiến

Nhóm sinh viên thực hiện:

- | | | |
|----|-----------------|----------|
| 1. | Phan Thanh Hải | 18520705 |
| 2. | Trần Ngọc Sương | 18521353 |

TP. HỒ CHÍ MINH, 10/2021

Mục lục

Bài 1	1
Bài 2	4
Bài 3	6
Bài 4	8

Bài 1.

Cho $a < b < c$ là 3 nghiệm của đa thức:

$$P(x) = x^3 - 3x + 1$$

Chứng minh rằng: $a^2 - c = b^2 - a = c^2 - b = 2$ (*)

Bài làm:

$$\text{Từ } a^2 - c = b^2 - a = c^2 - b = 2 \Rightarrow \begin{cases} c = a^2 - 2 \\ a = b^2 - 2 \\ b = c^2 - 2 \end{cases}$$

Do đó, để chứng minh (*), ta cần chứng minh 2 điều sau:

1. $a^2 - 2, b^2 - 2, c^2 - 2$ là 3 nghiệm của $P(x)$.
2. $b^2 < c^2 < a^2$ là 3 nghiệm của $P(x)$.

Áp dụng định lý Viet cho $P(x)$ với 3 nghiệm là a, b, c ta có:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab + bc + ca = -3 \\ abc = -1 \end{cases}$$

1.1. Chứng minh $a^2 - 2, b^2 - 2, c^2 - 2$ là 3 nghiệm của $P(x)$.

Áp dụng định lý Viet đảo, ta cần chứng minh:

$$\begin{cases} a^2 - 2 + b^2 - 2 + c^2 - 2 = 0 \\ (a^2 - 2)(b^2 - 2) + (b^2 - 2)(c^2 - 2) + (a^2 - 2)(c^2 - 2) = -3 \\ (a^2 - 2)(b^2 - 2)(c^2 - 2) = -1 \end{cases}$$

CM1. $a^2 - 2 + b^2 - 2 + c^2 - 2 = 0$

Ta có:

$$a + b + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2 + b^2 - 2 + c^2 - 2 = 0$$

$$\mathbf{CM2.} \quad (a^2 - 2)(b^2 - 2) + (b^2 - 2)(c^2 - 2) + (a^2 - 2)(c^2 - 2) = -3$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & (a^2 - 2)(b^2 - 2) + (b^2 - 2)(c^2 - 2) + (a^2 - 2)(c^2 - 2) \\ &= a^2(b^2 - 2) - 2(b^2 - 2) + b^2(c^2 - 2) - 2(c^2 - 2) + c^2(a^2 - 2) - 2(a^2 - 2) \\ &= a^2(b^2 - 2) + b^2(c^2 - 2) + c^2(a^2 - 2) - 2(b^2 - 2 + c^2 - 2 + a^2 - 2) \\ &= a^2b^2 - 2a^2 + b^2c^2 - 2b^2 + a^2c^2 - 2c^2 \\ &= a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 - 2 \cdot 6 \\ &= (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 - 12 \\ &= (ab + bc + ac)^2 - 2abc(a + b + c) - 12 \\ &= (-3)^2 - 2 \cdot (-1) \cdot 0 - 12 \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{CM3.} \quad (a^2 - 2)(b^2 - 2)(c^2 - 2) = -1$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 & (a^2 - 2)(b^2 - 2)(c^2 - 2) \\
 &= a^2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 4a^2 - 2b^2c^2 + 4b^2 + 4c^2 - 8 \\
 &= (abc)^2 + 4(a^2 + b^2 + c^2) - 2((ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2) - 8 \\
 &= (abc)^2 + 4(a^2 + b^2 + c^2) - 2[(ab + bc + ac)^2 - 2abc(a + b + c)] - 8 \\
 &= (-1)^2 + 4 \cdot 6 - 2 \cdot [(-3)^2 - 2 \cdot (-1) \cdot 0] - 8 \\
 &= 1 + 24 - 18 - 8 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

Do đó, ta đã chứng minh được $a^2 - 2$, $b^2 - 2$, $c^2 - 2$ là 3 nghiệm của $P(x)$.

1.2. Chứng minh $b^2 - 2 < c^2 - 2 < a^2 - 2$ là 3 nghiệm của $P(x)$.

- Đầu tiên ta có $abc = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c \neq 0 \\ a, b, c \text{ có 1 hoặc 3 số âm.} \end{cases}$
- Mà $a + b + c = 0$, do đó không thể xảy ra trường hợp cả 3 số đều âm, nên trong 3 số a, b, c có 1 số âm.
- Lại có $a < b < c$, a nhỏ nhất trong 3 số nên a là số âm.
- Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow a = -(b + c) \Rightarrow a^2 = (b + c)^2$
 $\Rightarrow a^2 = b^2 + 2bc + c^2 > b^2 + c^2$ (Vì $b, c > 0$ nên $2bc > 0$)
 $\Rightarrow a^2 > b^2 + c^2 > c^2 > b^2$ (Vì $b < c$)
 $\Rightarrow b^2 - 2 < c^2 - 2 < a^2 - 2$

Vậy ta chứng minh được $b^2 - 2 < c^2 - 2 < a^2 - 2$ là 3 nghiệm của $P(x)$.

Bài 2.

Viết chương trình giải phương trình bậc 2.

Bài làm:

Mã giả của thuật toán:

Thuật toán 1: Thuật toán giải phương trình bậc 2

Đầu vào: Các số thực a, b, c ($a \neq 0$).

Đầu ra : Các số x thỏa mãn $ax^2 + bx + c = 0$.

```

1   $d \leftarrow b^2 - 4ac$ 
2  if  $d > 0$  then
3       $x_1 \leftarrow \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}, x_2 \leftarrow \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$ 
4      return  $x_1, x_2$ 
5  else if  $d = 0$  then
6       $x_1 \leftarrow \frac{-b}{2a}$ 
7       $x_2 \leftarrow x_1$ 
8      return  $x_1, x_2$ 
9  else
10     return "Phương trình vô nghiệm"

```

Hiện thực thuật toán trên Maple:

```

1  QuadraticRoots := proc(a, b, c)
2      if a = 0 then
3          printf("The coefficient 'a' should not equal zero, which violates the condition");
4          return;
5      end if;
6      local d, x1, x2;
7      printf("Solve the equation with the coefficients: a = %d, b = %d, c = %d\n", a, b, c);
8      d := b^2 - 4*a*c;
9      printf("1. Calculate the discriminant d = b^2 - 4ac = %d\n", d);
10     if d > 0 then
11         x1 := (-b + sqrt(d))/2*a;
12         x2 := (-b - sqrt(d))/2*a;
13         printf("2. d > 0 => This equation has two real and different roots.\n");
14         printf("x1 = %d and x2 = %d\n", x1, x2);
15         return;
16     end if;
17     if d = 0 then
18         x1 := -b/2*a;
19         printf("2. d = 0 => This equation has two real and equal roots.\n");
20         printf("x1 = x2 = %d\n", x1);
21         return;
22     else
23         printf("2. d < 0 => This equation has no real roots.\n");
24         return;
25     end if;
26 end proc;

```

```

QuadraticRoots := proc(a, b, c)
    local d, x1, x2;
    if a = 0 then printf("The coefficient 'a' should not equal zero, which violates the condition"); return end if;
    printf("Solve the equation with the coefficients: a = %d, b = %d, c = %d\n", a, b, c);
    d := b^2 - 4*a*c;
    printf("1. Calculate the discriminant d = b^2 - 4ac = %d\n", d);
    if 0 < d then
        x1 := 1/2 * (-b + sqrt(d)) / a;
        x2 := 1/2 * (-b - sqrt(d)) / a;
        printf("2. d > 0 => This equation has two real and different roots.\n");
        printf("x1 = %d and x2 = %d\n", x1, x2);
        return
    end if;
    if d = 0 then
        x1 := -1/2 * b / a; printf("2. d = 0 => This equation has two real and equal roots.\n"); printf("x1 = x2 = %d\n", x1); return
    else
        printf("2. d < 0 => This equation has no real roots.\n"); return
    end if
end proc
    
```

Một số kết quả thể hiện các bước giải phương trình bậc hai:

```

> QuadraticRoots(1,2,1)
Solve the equation with the coefficients: a = 1, b = 2, c = 1
1. Calculate the discriminant d = b^2 - 4ac = 0
2. d = 0 => This equation has two real and equal roots.
x1 = x2 = -1

> QuadraticRoots(1,-3,2)
Solve the equation with the coefficients: a = 1, b = -3, c = 2
1. Calculate the discriminant d = b^2 - 4ac = 1
2. d > 0 => This equation has two real and different roots.
x1 = 2 and x2 = 1

> QuadraticRoots(1,1,6)
Solve the equation with the coefficients: a = 1, b = 1, c = 6
1. Calculate the discriminant d = b^2 - 4ac = -23
2. d < 0 => This equation has no real roots.

> QuadraticRoots(0,4,1)
The coefficient 'a' should not equal zero, which violates the condition
    
```

Bài 3

Viết chương trình giải phương trình bậc 3.

Bài làm:

Mã giả của thuật toán:

Thuật toán 2: Tìm nghiệm thực của phương trình bậc 4: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Đầu vào: Các số thực a, b, c, d ($a \neq 0$).

Đầu ra : Các số thực x sao cho x là nghiệm của phương trình

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

```

1   $\Delta \leftarrow b^2 - 3ac$ 
2   $k \leftarrow \frac{9abc - 2b^3 - 27a^2d}{2\sqrt{|\Delta|^3}}$ 
3  if  $\Delta > 0$  then
4      /* Phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt */
5      if  $|k| \leq 1$  then
6           $x_1 \leftarrow \frac{2\sqrt{\Delta} \cos\left(\frac{\arccos(k)}{3}\right) - b}{3a}$ 
7           $x_2 \leftarrow \frac{2\sqrt{\Delta} \cos\left(\frac{\arccos(k)}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) - b}{3a}$ 
8           $x_3 \leftarrow \frac{2\sqrt{\Delta} \cos\left(\frac{\arccos(k)}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) - b}{3a}$ 
9          return  $x_1, x_2, x_3$ 
10     /* Phương trình có 1 nghiệm thực phân biệt */
11     else
12          $x \leftarrow \frac{\sqrt{\Delta}|k|}{3ak} \left( \sqrt[3]{|k| + \sqrt{k^2 - 1}} + \sqrt[3]{|k| - \sqrt{k^2 - 1}} \right) - \frac{b}{3a}$ 
13         return  $x$ 
14     else if  $\Delta = 0$  then
15         if  $b^3 - 27a^2d = 0$  then
16              $x \leftarrow -\frac{b}{3a}$ 
17             return  $x$ 
18         else
19              $x \leftarrow \frac{-b + \sqrt[3]{b^3 - 27a^2d}}{3b}$ 
20             return  $x$ 
21     else
22          $x \leftarrow \frac{\sqrt{|\Delta|}}{3a} \left( \sqrt[3]{k + \sqrt{k^2 + 1}} + \sqrt[3]{k - \sqrt{k^2 + 1}} \right) - \frac{b}{3a}$ 
23     return  $x$ 
```

Hiện thực thuật toán trên Maple:

Bài 4

Viết chương trình giải phương trình bậc 4.

Bài làm:

[Viết gì đó ở đây]