TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

————-oOo————-

BÀI TẬP VỀ NHÀ
MÔN ĐẠI SỐ MÁY TÍNH

BÀI TẬP BUỔI 5
VÀNH VÀ TRƯỜNG

Lớp: CS522.M11

Giảng viên giảng dạy: TS. Nguyễn Đình Hiển

Nhóm sinh viên thực hiện:

1.	Phan Thanh Hải	18520705
2.	Trần Ngọc Sương	18521353

TP. HỒ CHÍ MINH, 12/2021

Mục lục

Bài 1.

Chứng minh rằng tập hợp A các ma trận có dạng:

$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ Là trường với hai phép toán cộng và nhân ma trận.

Bài làm:

Ta dễ dàng nhận thấy tập hợp A có nhiều hơn 1 phần tử.

Ta xét:

1. Phép cộng trên A

- A có tính chất giao hoán. (vì A là ma trận)
- A có tính chất kết hợp. (vì A là ma trận)
- Tồn tại một phần tử đơn vị là $O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$.
- Tồn tại một phần tử nghịch đảo là ma trận $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{bmatrix} \in A$.

2. Phép nhân trên A

- A có tính chất giao hoán. Thật vậy, $\forall A_1, A_2 \in A$, ta có:

  $A_1 A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_2 b_1 + a_1 b_2 \\ -a_2 b_1 - a_1 a_1 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{bmatrix} = A_2 A_1 \in A.$
- A có tính chất kết hợp. (vì A là ma trận)
- Tồn tại một phần tử đơn vị là $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in A$.
- Tồn tại một phần tử nghịch đảo là ma trận $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{-b}{a^2 + b^2} \\ \frac{b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{bmatrix} \in A \backslash \{0\}$.

3. A cũng có tính chất phân phối. (vì A là ma trận)

Suy ra tập hợp A là một trường với hai phép toán cộng và nhân ma trận (đpcm).

Bài 2.

Cho $Z\big(\sqrt{-3}\big) = \big\{a + b\sqrt{-3} : a, b \in \mathbb{Z}\big\}$. Chứng minh rằng:

a. $Z\big(\sqrt{-3}\big)$ là một miền nguyên.

b. $1 + \sqrt{-3}$ và $1 - \sqrt{-3}$ là các phần tử bất khả quy trong $Z\big(\sqrt{-3}\big)$.
Nghĩa là không tồn tại $u, v \in Z\big(\sqrt{-3}\big)$ ($u, v \neq 1$ – phần tử đơn vị của phép toán "$\cdot$") để phần tử đó có thể viết dưới dạng $u.v$.

Bài làm:

a. Dễ dàng ta thấy $Z\big(\sqrt{-3}\big)$ có nhiều hơn một phần tử.
Với mọi $a_1 + b_1\sqrt{-3}, a_2 + b_2\sqrt{-3} \in Z\big(\sqrt{-3}\big)$ ta có:
$\big(a_1 + b_1\sqrt{-3}\big) - \big(a_2 + b_2\sqrt{-3}\big) = \big(a_1 - a_2\big) + \big(b_1 - b_2\big)\sqrt{-3} \in Z\big(\sqrt{-3}\big)$
$\big(a_1 + b_1\sqrt{-3}\big)\big(a_2 + b_2\sqrt{-3}\big) = \big(a_1a_2 - 3b_1b_2\big) + \big(a_1b_2 + a_2b_1\big)\sqrt{-3} \in Z\big(\sqrt{-3}\big)$
Vì vậy, $Z\big(\sqrt{-3}\big) \subseteq \mathbb{C}$ theo tiêu chuẩn của vành con.
Mà trường số phức có tính chất giao hoán và không có ước của 0 nên $Z\big(\sqrt{-3}\big)$ cũng có tính chất giao hoán và không có ước của 0.
Như vậy, $Z\big(\sqrt{-3}\big)$ là vành giao hoán có đơn vị, có nhiều hơn một phần tử và không có ước của 0 nên $Z\big(\sqrt{-3}\big)$ là miền nguyên.

b. Với mỗi phần tử $a + b\sqrt{-3} \in Z\big(\sqrt{-3}\big)$, ta định nghĩa hàm chuẩn N (norm function) của nó như sau: $N\big(a + b\sqrt{-3}\big) = \big(a + b\sqrt{-3}\big)\big(a - b\sqrt{-3}\big) = a^2 + 3b^2$.
Ta có: $\big(1 + \sqrt{-3}\big)\big(1 - \sqrt{-3}\big) = 1^2 - (-3) = 4$ và $2 \cdot 2 = 4$.
$N(2) = 2^2 = 4$ với $2 = uv$ (u, v không đồng thời là phần tử đơn vị).
Suy ra $N(2) = 4 = N(u)N(v)$.
Điều này dẫn đến $N(u) = 2$. Nhưng điều này không thể xảy ra trên tập $\mathbb{Z}$, vì nếu $u = a + b\sqrt{-3}$ thì $N(u) = a^2 + 3b^2$, tương đương với $b = 0$ (vì a^2 và $3b^2$ là các số nguyên dương, nếu $b > 0$ thì $N(u) > 3$) và $a = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$.
Xét phần tử $1 + \sqrt{-3} : N\big(1 + \sqrt{-3}\big) = 1 + 3 = 4$.
Nếu $1 + \sqrt{-3} = uv$ thì $N(u) = N(v) = 2$. Như đã chứng minh ở trên thì điều này là bất khả thi. Suy ra $1 + \sqrt{-3}$ là phần tử bất khả quy trên $Z\big(\sqrt{-3}\big)$.

Xét phần tử $1-\sqrt{-3}: N\big(1-\sqrt{-3}\big)=1+3=4$.

Chứng minh tương tự, $1-\sqrt{-3}$ cũng là phần tử bất khả quy trên $Z\big(\sqrt{-3}\big)$.

Như vậy, ta đã chứng minh được $1+\sqrt{-3}$ và $1-\sqrt{-3}$ là các phần tử bất khả quy trên $Z\big(\sqrt{-3}\big)$.

Bài 3.

Trong vành giao hoán có đơn vị R, phần tử $x \in R$ được gọi là lũy linh nếu tồn tại số tự nhiên $n > 0$ sao cho $x^n = 0$. Chứng minh rằng:

a. Nếu x lũy linh thì $1 + x$ khả nghịch (1 là phần tử đơn vị của phép "$\cdot$" trong R).

b. Phần tử $u \in R$ khả nghịch $\Leftrightarrow \forall\, x$ lũy linh thì $u + x$ khả nghịch.

<u>Bài làm:</u>

a. Vì x lũy linh nên tồn tại số tự nhiên $n > 0$ sao cho $x^n = 0$.
Khi đó: $(-x)^n = 0$.
Ta có: $1 = 1 - 0 = 1 - (-x)^n = (1 + x)\sum_{i=0}^{n-1}(-x)^i$.
Ta thấy $\exists\, u = \sum_{i=0}^{n-1}(-x)^i \in R$ mà $u \cdot (1 + x) = 1$.
Khi đó, $1 + x$ khả nghịch.

Vậy nếu x lũy linh thì $1 + x$ khả nghịch (đpcm).

b. **Xét trường hợp 1:** Giả sử lúc ban đầu, phần tử $u \in R$ khả nghịch.
Ta có: $u + x = u \cdot (1 + u^{-1}x)$.
Vì x lũy linh nên tồn tại số tự nhiên $n > 0$ sao cho $x^n = 0 \Leftrightarrow x^n \cdot (u^{-1})^n = 0 \Leftrightarrow (u^{-1}x)^n = 0$. Suy ra, $u^{-1}x$ lũy linh.
Áp dụng kết quả ở câu **a.** đã chứng minh ở trên, ta có: Vì $u^{-1}x$ lũy linh nên $1 + u^{-1}x$ khả nghịch. Mà vì phần tử $u \in R$ cũng khả nghịch nên theo tính chất của phần tử khả nghịch thì $u \cdot (1 + u^{-1}x)$ khả nghịch hay $u + x$ khả nghịch.

Xét trường hợp 2: Giả sử lúc ban đầu, $\forall\, x$ lũy linh thì $u + x$ khả nghịch.
Ta chọn $x = 0$ là một phần tử lũy linh (vì $x^n = 0^n = 0, \forall\, n > 0$).
Khi đó $u + 0$ khả nghịch hay u khả nghịch.

Từ trường hợp 1 và 2, ta kết luận: Phần tử $u \in R$ khả nghịch $\Leftrightarrow \forall\, x$ lũy linh thì $u + x$ khả nghịch (đpcm).