简单强关联系统中简并态的二时关联函数研究

BY 鲨鱼辣椒

(安徽大学 物理与材料科学学院, 安徽 合肥 230039)

记号与规范

→ 取自然单位$\hbar = 1, c = 1$

→ 将物理系统中所有可能的算符记为O^j

→ 假定这里所讨论问题的哈密顿量都不具有时间依赖性$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$， Heisenberg表象下算符的时间依赖性可以用时间演化算符写出来

$$O^j(t) = e^{iHt} O^j e^{-iHt},$$

其时间导数满足Heisenberg运动方程（HEOM, Heisenberg equation of motion）

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}O^j(t)}{\mathrm{d}t} &= i\, e^{iHt} (HO^j - O^j H)\, e^{-iHt} \\ &= i\, [H, O^j](t)\end{aligned}$$

Schwinger-Dyson 方程

玻色子$(\eta=1)$和费米子$(\eta=-1)$的时间序列算符乘积$T_\eta[O^j(t_i)\,O^k(t_f)]$定义为

$$T_\eta[O^j(t_i)\,O^k(t_f)]=\theta(t_i-t_f)\,O^j(t_i)\,O^k(t_f)+\eta\,\theta(t_f-t_i)\,O^k(t_f)\,O^j(t_i),$$

其中$\theta(t)$是阶跃函数

$$\theta(t)=\begin{cases}1, t\geqslant 0\\ 0, t<0\end{cases}$$

两点关联函数定义为

$$i\,G^{jk}(t_i,t_f)=\langle T_\eta[O^j(t_i)\,O^k(t_f)]\rangle,$$

对t_i求导得到

$$i\,\partial_{t_i}G^{jk}(t_i,t_f)=\delta(t_i-t_f)\,\langle O^j\,O^k-\eta\,O^k\,O^j\rangle-i\,\langle T_\eta[[O^j(t_i),H]\,O^k(t_f)]\rangle$$

因为假定了O^j可以表示任何可能的算符，对易子$[O^j, H]$可以由其他算符的线性组合给出

$$[O^j, H] = \sum_l c_{jl} O^l,$$

用一系列系数c_{jl}可以把上一页的方程写为

$$i\,\partial_{t_i} G^{jk}(t_i, t_f) = \delta(t_i - t_f)\,\langle O^j O^k - \eta\, O^k O^j \rangle + \sum_l c_{jl}\, G^{lk}(t_i, t_f),$$

这里的时间依赖只与$t_i - t_f$，记$\tau = t_i - t_f$

$$i\,\partial_\tau G^{jk}(\tau) = \delta(\tau)\,\langle O^j O^k - \eta\, O^k O^j \rangle + \sum_l c_{jl}\, G^{lk}(\tau),$$

这个方程称为Schwinger-Dyson方程（SDEOM, Schwinger-Dyson equation of motion）

Schwinger-Dyson 方程

傅立叶积分

$$G^{jk}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\, e^{-i\omega\tau}\, G^{jk}(\omega)$$

给出

$$\int \mathrm{d}\omega\, e^{-i\omega\tau}\, G^{jk}(\omega)\,\omega = \int \mathrm{d}\omega\, e^{-i\omega\tau}\left[\langle O^j O^k - \eta\, O^k O^j\rangle + \sum_l c_{jl}\, G^{jk}(\omega)\right].$$

$$\Rightarrow\ \omega\, G^{jk}(\omega) = \langle O^j O^k - \eta\, O^k O^j\rangle + \sum_l c_{jl}\, G^{jk}(\omega)$$

这个线性方程的解是（作为矩阵）

$$G(\omega) = (\omega\, \mathbb{1} - c)^{-1}\, M\,,$$

其中$M^{jk} = \langle O^j O^k - \eta\, O^k O^j\rangle$中只包含了波函数以及玻色化/费米化的信息.

下面要用到一个不会在这里给出证明的性质：

$\rightarrow$ 关联函数在频域上的奇点给出系统的激发谱

从前面的结果可以看出，$G(\omega)$只可能包含在$(\omega\,\mathbb{1}-c)^{-1}$中。

下面我们用这个方法计算一个例子：无外场的2-自旋相互作用，并与时域上的计算结果进行比较。有外场的情形也是类似的，这可以看作是简化版的一维Ising模型。

2-spin

系统只有a, b两个格点，哈密顿量为

$$H = J\, s_a^z\, s_b^z,$$

其中$s_a^z = \frac{1}{2}\sigma_a^z$，$\sigma_a^z$是Pauli矩阵。由于没有外场，$H$的能谱可以直接从其矩阵形式中看出，对应能级为$\pm\frac{J}{4}$。

$$H = \frac{J}{4}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

使用$\{AB | A \in \{e, s_a^+, s_a^-, s_a^z\}, B \in \{e, s_b^+, s_b^-, s_b^z\}\}$张成的线性空间作为可能出现的算符集。SDEOM给出的$(\omega\, \mathbb{1} - c)^{-1}$为

$$
\begin{pmatrix}
{}^{1}/_{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & {}^{\omega}/_{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{J}/_{4k} & 0 & 0 \\
0 & 0 & {}^{\omega}/_{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{-J}/_{4k} & 0 \\
0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\omega}/_{k} & 0 & 0 & {}^{J}/_{4k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & {}^{J}/_{k} & 0 & 0 & {}^{\omega}/_{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\omega}/_{k} & 0 & 0 & {}^{-J}/_{4k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{-J}/_{k} & 0 & 0 & {}^{\omega}/_{k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{\omega} & 0 & 0 & 0 \\
0 & {}^{J}/_{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\omega}/_{k} & 0 & 0 \\
0 & 0 & {}^{-J}/_{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\omega}/_{k} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{\omega}
\end{pmatrix}
$$

其中$k=\omega^2-\frac{J^2}{4}$，由此可见激发谱是$\pm\frac{J}{2}$，和前面的结果很好地吻合。

Conclusion

- → 在这个简单的问题中，我们可以直接对角化哈密顿量，但对一般的多体哈密顿量这一点是无法做到的
- → Schwinger-Dyson 方程给出了一般性处理关联函数的非微扰方法，上面这个例子已经为我们展示了其正确性和威力
- → 更一般的系统中往往不会有这么简单的故事，例如我们可能在写对易子展开的时候得到无穷多项，这时候就要想一些别的办法，比如做截断，或者在算符代数上动动脑筋看能不能把问题限制到有限多变量的线性方程组
- → 感谢各位老师收听我的答辩！