# Øving 5

Håvard Solberg Nybøe

MA0301 – 21. februar 2022

*Ønsker retting*

$\boxed{1}$ $R = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists l \in \mathbb{N} : n = lm\}$

$R$ er refleksiv fordi $R(m,n) = R(n,m)$
$R$ er antisymmetrisk fordi $R(m,n) = R(n,m)$
$R$ er transitiv fordi $R(m,n) = R(R(m,n), R(n,m))$

$R$ er derfor en delvis ordnet mengde. $\square$

$\boxed{2}$ (a) *1.* er en funksjon fordi for alle $x$ under relasjonen $R$ har den bare ett bilde $y$. (alle $x$-verdier svarer til én $y$-verdi).
*2.* er en funksjon fordi for alle $x$ under relasjonen $R$ har den bare ett bilde $y$.

(b) *1.* er bijektiv fordi for alle elementene i verdimengden er bare avbildet en gang av et element i definisjonsmengden.
*2.* er surjektiv fordi for alle elementene i verdimengden er avbildet minst en gang av et element i definisjonsmengden ($\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$).

$\boxed{3}$ $f_R = \{(x,y) \in X \times (X/R) | x \in y\}$

(b) den inverse funksjonen til $f_R$ er $f_R^{-1} = \{(y,x) \in X \times (X/R) | x \in y\}$

$\boxed{4}$ (a) Fra posisjonen $(1,1)$ kan springeren flytte til $(2,3)$ får så å komme til $(3,1)$.
$((1,1),(3,1)) \in R$ $\square$

(b) Gitt observasjonen i (a) er $R$ transitiv.
Relasjonen er symetrisk fordi hvis en springer kan flytte fra $(1,1)$ til $(2,3)$ så kan den også flytte fra $(2,3)$ til $(1,1)$.
Relasjonen er refleksiv fordi $((1,1),(1,1)) \in R$, (springeren kan "flytte" til feltet den står på).
Relasjonen en derfor ekvivalensrelasjon $\square$

$\boxed{5}$ Gitt at $f$ og $f^{-1}$ er funksjoner, må de i det minstre være injektive for at $f^{-1}$ skal være inversfunksjon av $f$. $f^{-1}$ er definert slik at $f^{-1} = \{(y,x) | y = f(x)\}$, siden $y = f(x)$ tilsvarer en hver y i definisjonsmengden en x i verdimengden. $f^{-1}$ surjektiv og dermed også bijektiv.

$\boxed{6}$

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(n) = 2n$,
ikke injektiv fordi $f(-1) = f(1) = 1$, surjektiv fordi for alle elementene i verdimengden finnes det minst ett element i definisjonsmengden som relaterer til dette elementet med funksjonen $f$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x < 1\}, f(x) = x - \lfloor x \rfloor$,

(c) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, hvor $f(n,m)$ er den største av $m$ og $n$,
ikke injektiv da både f.eks. (1,1) og (0,1) svarer til 1, surjektiv da det for alle elementene i verdimengden finnes minst ett element i definisjonsmengden som relaterer til elementet med funksjonen $f$.

(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, f(n) = \frac{n}{3}$,
injektiv fordi alle elementene i definisjonsmengden svarer til et unikt element i verdimengden, ikke surjektiv da alle elementene i $\mathbb{R}$ ikke dekkes av formelen $\frac{n}{3}$.
$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{3}$,
bijektiv fordi alle elementene i definisjonsmengden svarer til et unikt element i verdimengden, og alle elementene i verdimengden svarer til et unikt element i definisjonsmengden.
$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x$.

(f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(n) = \frac{-n}{2}$ hvis n er et partall, og $\frac{n+1}{2}$ hvis n er et oddetall.

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & \mathbb{N} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}: & 0 & 1 & \text{-1} & 2 & \text{-2} & 3 & \text{-3} & \cdots & \mathbb{Z} \end{array}$$

funksjonen $f$ er bijektiv.