HEIG-VD — SIO

Laboratoire 3 – Modélisation

Loïc Herman

27 janvier 2024

1 Données du problème

Le problème abordé est un cas spécifique de programmation linéaire en nombres entiers, visant à une répartition équitable d'objets indivisibles. Les données du problème sont définies comme suit :

Nombre d'objets (n) : le nombre total d'objets à répartir. $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Nombre de groupes (m) : le nombre de groupes à distribuer. $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$.

Valeur d'un objet i (v_i) : la valeur associée à chaque objet i ($i = 1, \ldots, n$), $v_i \geq 0$.

L'objectif est de parvenir à une répartition à laquelle la valeur minimale totale attribuée à un groupe est maximisée, reflétant ainsi une distribution aussi équitable que possible en tenant compte de l'indivisibilité des objets.

2 Variables de décision

Pour attribuer les objets aux différents groupes, nous utiliserons un ensemble de variables de décisions binaires pour chaque objet et chaque groupe qui seront égales à 1 si l'objet i est attribué au groupe j, 0 sinon.

Formellement, cela nous donne l'ensemble de variables suivant :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si l'objet } i \text{ est attribué au groupe } j \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases} \quad , \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$$

3 Fonction objectif

Connaissant le critère d'équité établi dans la donnée du problème, nous devons maximiser la valeur minimale d'un groupe. Ainsi, d'un point de vue théorique, cela nous donne l'objectif suivant :

$$\text{Max } z = \min_{j=1,\ldots,m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} v_i \right)$$

Cet objectif théorique n'est toutefois pas linéaire, on peut le linéariser en introduisant une variable auxiliaire t, $t \in \mathbb{R}$ pour le minimum et une contrainte additionnelle imposée pour chaque groupe j. Ce qui nous donne la fonction objectif et son premier ensemble de contraintes de la forme :

$$\begin{aligned} \text{Max } z = \quad & t \\ \text{s. c.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} v_i \geq t \qquad j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

4 Contraintes

En plus des contraintes de minimums énoncées précédemment, nous devons nous assurer que chaque objet soit attribué à un seul groupe à la fois, soit :

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Nous devrons aussi formaliser que les variables de décision x_{ij} sont binaires, ainsi :

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$$

5 Programme linéaire

Le programme linéaire résultant se formule comme suit :

$$\begin{aligned}
\text{Max}\, z = \quad & t \\
\text{s.c.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} v_i \geq t & & j = 1, \ldots, m \\
& \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & & i = 1, \ldots, n \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & & i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m \\
& t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

6 Exemples de résultats

6.1 Premier ensemble de données

```
param AmtGroups := 4;

param AmtObjects := 13;

param Values :=
 1 2
 2 5
 3 8
 4 8
 5 9
 6 11
 7 16
 8 22
 9 28
10 31
11 32
12 34
13 35
;
```

```
Répartition des objets par groupe :
Objet  1 de valeur  2 dans le groupe 4
Objet  2 de valeur  5 dans le groupe 3
Objet  3 de valeur  8 dans le groupe 1
Objet  4 de valeur  8 dans le groupe 1
Objet  5 de valeur  9 dans le groupe 1
Objet  6 de valeur 11 dans le groupe 4
Objet  7 de valeur 16 dans le groupe 4
Objet  8 de valeur 22 dans le groupe 3
Objet  9 de valeur 28 dans le groupe 2
Objet 10 de valeur 31 dans le groupe 4
Objet 11 de valeur 32 dans le groupe 2
Objet 12 de valeur 34 dans le groupe 3
Objet 13 de valeur 35 dans le groupe 1
-----------------
Valeur des objets par groupe :
Groupe 1 : 60
Groupe 2 : 60
Groupe 3 : 61
Groupe 4 : 60
```

6.2 Second ensemble de données

```
param AmtGroups := 4;

param AmtObjects := 14;

param Values :=
 1 1
 2 2
 3 3
 4 4
 5 5
 6 6
 7 7
 8 8
 9 9
10 10
11 11
12 12
13 13
14 14
;
```

```
Répartition des objets par groupe :
Objet  1 de valeur  1 dans le groupe 1
Objet  2 de valeur  2 dans le groupe 4
Objet  3 de valeur  3 dans le groupe 4
Objet  4 de valeur  4 dans le groupe 2
Objet  5 de valeur  5 dans le groupe 4
Objet  6 de valeur  6 dans le groupe 4
Objet  7 de valeur  7 dans le groupe 3
Objet  8 de valeur  8 dans le groupe 2
Objet  9 de valeur  9 dans le groupe 3
Objet 10 de valeur 10 dans le groupe 3
Objet 11 de valeur 11 dans le groupe 4
Objet 12 de valeur 12 dans le groupe 1
Objet 13 de valeur 13 dans le groupe 1
Objet 14 de valeur 14 dans le groupe 2
-----------------
Valeur des objets par groupe :
Groupe 1 : 26
Groupe 2 : 26
Groupe 3 : 26
Groupe 4 : 27
```