

# **Stoffdidaktik Mathematik**

## **Aufgaben gestalten**

- Sie kennen Möglichkeiten, Aufgaben je nach ihrer Funktion und den auszubildenden Fähigkeitsaspekten auszuwählen bzw. zu erstellen.
- Sie können Aufgaben aus Schulbüchern für produktives Üben anpassen.
- Sie kennen Differenzierungsmöglichkeiten mithilfe von Aufgaben und können differenzierende Aufgaben erstellen.

# Was? Wie?

## Stoffdidaktik als Spezifizieren & Strukturieren von Lerngegenständen

formale Ebene

semantische Ebene

konkrete Ebene

empirische Ebene

Fundamentale Ideen

Begriffsbildung

Grundvorstellungen  
Gestaltung von  
Aufgaben u. Lernumgebungen

nach Hußmann & Prediger, 2016

# Aufgaben gestalten

## Grundwissen

### Aufgabentypen nach Offenheit

				$x$ = gegeben/bekannt, $\circ$ = nicht gegeben/nicht bekannt
Aufgaben/ Problemtypen	Start	Weg	Ziel	Beispiele
(geschlossene) Aufgabe, <i>task</i> , <i>routine exercise</i>	$x$	$x$	$\circ$	Aufgabenpensen (Lenné 1969)
Problem	$x$	$\circ$	$x/\circ$	Aufgaben mit multiplen Lösungswegen (Guberman und Leikin 2013), Strategievergleiche (Rittle-Johnson und Star 2007)
Umkehrproblem	$x/\circ$	$\circ$	$x$	Operatives Üben (Aebli 1985; Winter 1984)
Offene Situation <i>open ended problem</i>	$x/\circ$	$\circ$	$\circ$	Explorationen (z.B. Mason et al.1991; Lengnink und Leuders 2008), Open-ended-problems (Becker und Shimada 1997), Problem posing (Brown und Walter 1990)
Gelöste Aufgabe <i>worked problem</i>	$x$	$x$	$x$	Lernen aus Lösungsbeispielen (Sweller und Cooper 1985)

Leuders, 2015, S. 441

### Operatoren

Operator	Erläuterung
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
untersuchen	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

IQB, 2019



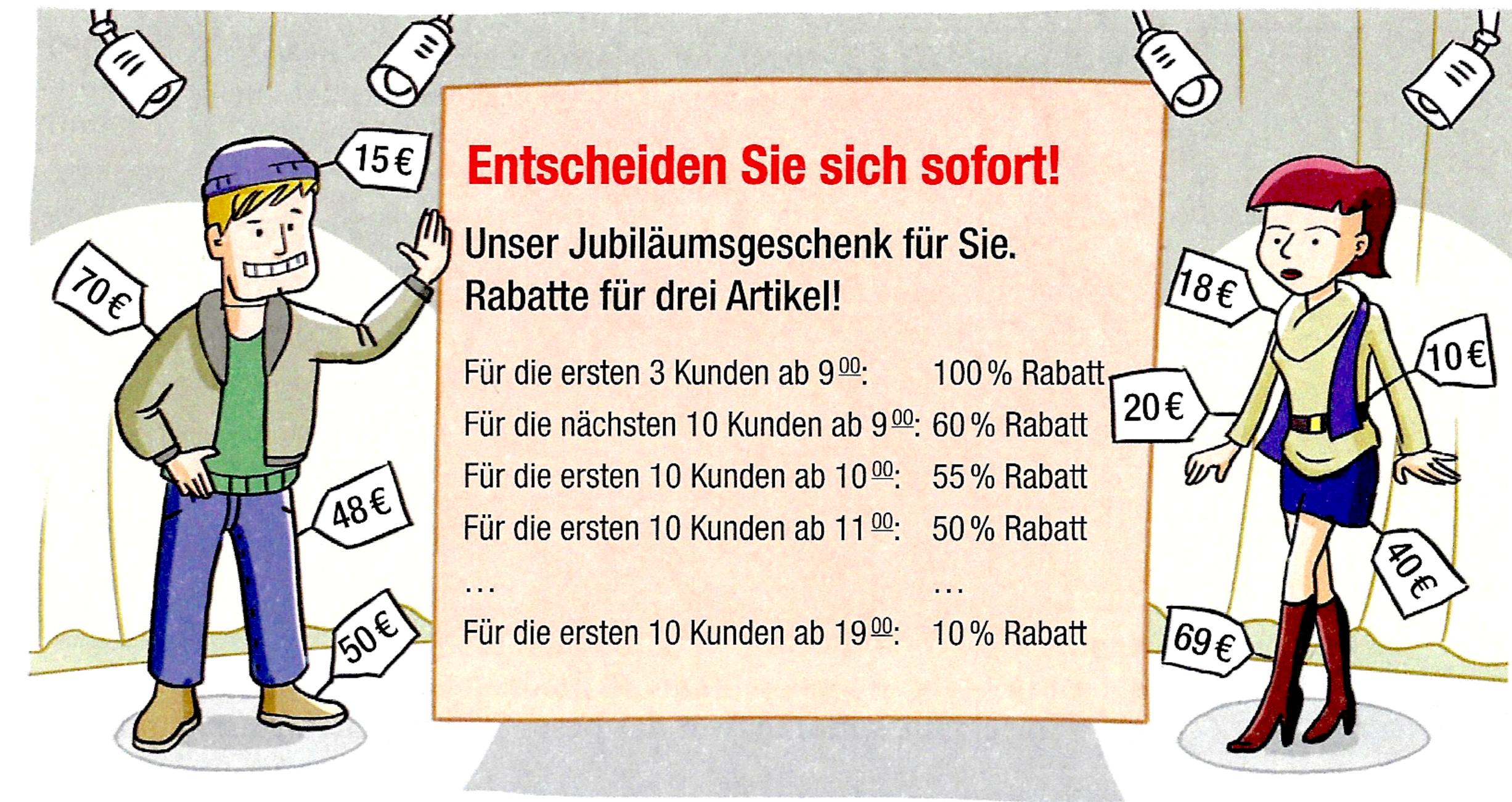
# Funktionen von Aufgaben

- Erkunden, Entdecken, Erfinden
- Sammeln, Sichern, Systematisieren
- Üben, Festigen, Wiederholen
- Vertiefen, Strukturieren, Vernetzen
- Differenzieren
- Selbsteinschätzung, Diagnose, Leistungsmessung

Leuders, 2015, S. 439; SINUS Bayern, o. J.

## 2 Prozente runterrechnen

Pia hat beim Einkaufsbummel in einem Geschäft ein verlockendes Angebot für den nächsten Tag gesehen. Nun überlegt sie, um wie viel Uhr sie morgen einkaufen soll.



- a) Was meinst du zu der Rabattaktion? Beantworte dazu die folgenden Fragen:
  - Du bist um 9.00 Uhr der erste Kunde. Was bezahlst du dann für eine Hose?
  - Was bezahlst du, wenn du später am Tag kommst?
  - Welche unterschiedlichen Preise werden an diesem Tag für eine Hose bezahlt?  
Wann kostet eine Hose 36€?
- b) Welchen Anteil vom ursprünglichen Preis bezahlt man bei 100 %, 60 %, 55 % Rabatt?  
Zeichne zu mindestens drei Rabatten einen Prozentstreifen zum Verdeutlichen.

Barzel et al., 2015, S. 223

## 2 Umrechnungstabelle für wichtige Werte beim Rechnen mit Prozenten erstellen

### Funktionen von Prozenten

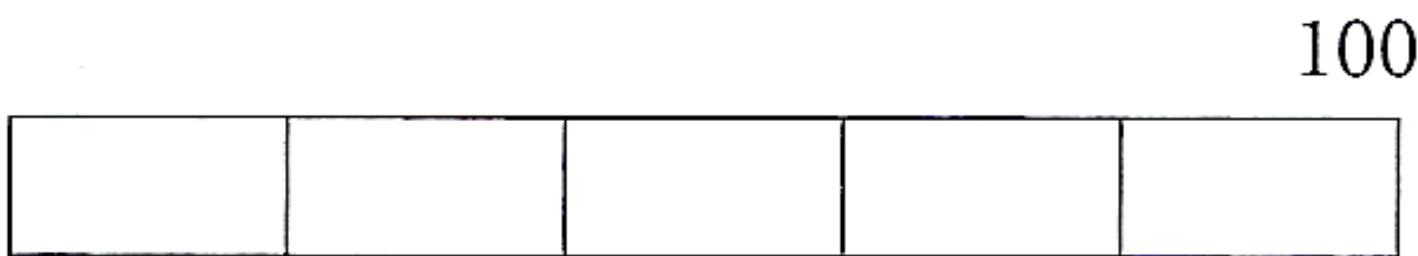
- Erkunden, Entdecken
- Sammeln, Sichtbar machen
- Üben, Festigen
- Vertiefen, Strukturieren
- Differenzieren
- Selbsteinschätzen, Leistungsmeß

a) Damit man Prozente schnell einschätzen kann, ist es gut, wenn man weiß, was die wichtigsten Prozente, Brüche und Dezimalzahlen bedeuten.

Übertrage die Tabelle ins Heft und fülle sie aus.

b) Beim Ausfüllen der Tabelle hilft die Darstellung am Bruchstreifen oder am Prozentstreifen. Welcher Streifen hilft bei welcher Zeile? Zeichne beide Streifen ins Heft und trage alle Werte in einen der beiden Streifen ein.

Prozent	Dezimalzahl	Bruch
1 %		
	0,05	
		$\frac{1}{10}$
	0,2	
25 %		
	0,5	
		$\frac{3}{4}$
		$\frac{1}{1}$
	1,5	
200 %		



# Funktionen von Aufgaben

- Erkunden, Entdecken, Erfinden
- Sammeln, Sichern, Systematisieren
- Üben, Festigen, Wiederholen
- Vertiefen, Strukturieren, Vernetzen
- Differenzieren
- Selbsteinschätzung, Diagnose, Leistungsmessung

## 1 Prozente verschieden darstellen

a) Stelle die Prozente in einem Streifen dar. Schreibe sie auch als Dezimalzahl und als Bruch.

- |          |          |          |   |          |            |          |
|----------|----------|----------|---|----------|------------|----------|
| (1) 25 % | (2) 75 % | (3) 15 % | : | (1) 4 %  | (2) 16 %   | (3) 24 % |
| (4) 30 % | (5) 90 % | (6) 80 % | : | (4) 96 % | (5) 72 %   | (6) 83 % |
| (7) 55 % | (8) 40 % |          | : | (7) 33 % | (8) 66,7 % |          |

b) Welche Prozente lassen sich besonders einfach darstellen?

Welche Prozente lassen sich nur schwierig darstellen? Begründe.

c) Finde zu drei der Prozente Beispiele aus dem Alltag.

## 2 Prozente mit Papier falten

a) Durch Papierfalten kannst du ein quadratisches Blatt Papier in gleich große Teile teilen.  
Stelle auf diese Weise mindestens drei verschiedene Prozente dar.

b) Stelle durch Falten die folgenden Prozente dar:

- |                               |   |                             |
|-------------------------------|---|-----------------------------|
| 25 %, 12,5 %, 6,25 %, 18,75 % | : | 33,3 %, 16,7 %, 50 %, 8,3 % |
|-------------------------------|---|-----------------------------|

c) Erkläre, warum es bei manchen Werten besonders schwierig ist.



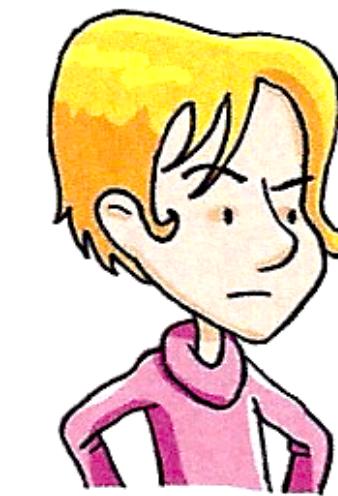
# Funktionen v.

Training

## 28 Prozentsätze über 100 % deuten

- Erkunden, Entdecken
- Sammeln, Sortieren
- Üben, Festigen
- Vertiefen, Stärken
- Differenzieren
- Selbsteinschätzung
- Leistungsme

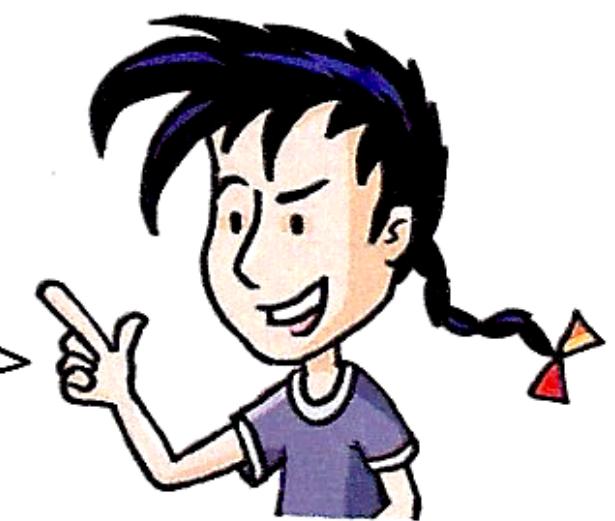
- a) Pia und Merve überlegen, was die Zeitungsüberschrift bedeutet.



„Ölpreis bei 150 % gegenüber Vorjahr.“

Ich denke, das bedeutet,  
dass es  $\frac{150}{100}$  sind.

Ich glaube, das heißt  
50 Prozent mehr als vorher.



Nutze Pias Idee und Merves Idee, um den neuen Preis für einen Liter Öl zu berechnen, wenn der Preis vorher 70 Cent betragen hat.

- b) Zeichne einen Prozentstreifen, um zu verstehen, was Merve und Pia gerechnet haben.  
Trage am Prozentstreifen Folgendes ein: 100 %, 50 %, 150 %, 70 ct, 105 ct.

- c) Trage am Prozentstreifen die folgenden Zahlen ein:

(1)  $\frac{50}{100}$

(2)  $\frac{100}{100}$

(3)  $\frac{150}{100}$

(4) 0,5

(5) 1,5

(6)  $\frac{5}{10}$

# Funktionen von Aufgaben

- Erkunden, Entdecken, Erfinden
- Sammeln, Sichern, Systematisieren
- Üben, Festigen, Wiederholen
- Vertiefen, Strukturieren, Vernetzen
- Differenzieren
- Selbsteinschätzung, Diagnose,  
Leistungsmessung

Leuders, 2015, S. 439; SINUS Bayern, o. J.



# Funktionen von Aufgaben

**Ich kann Prozentaufgaben berechnen, indem ich Prozentstreifen, Minitabelle oder eine Rechnung verwende.**

Berechne die Aufgaben auf verschiedenen Wegen:

- Wie viel Euro sind 24 % von 165 €?
- Wie viel Prozent sind 12,5 m von 138 m?
- Wie hoch stand das Wasser vorher, wenn es um 18 cm und damit um 20 % gestiegen ist?

Barzel et al., 2015, S. 244

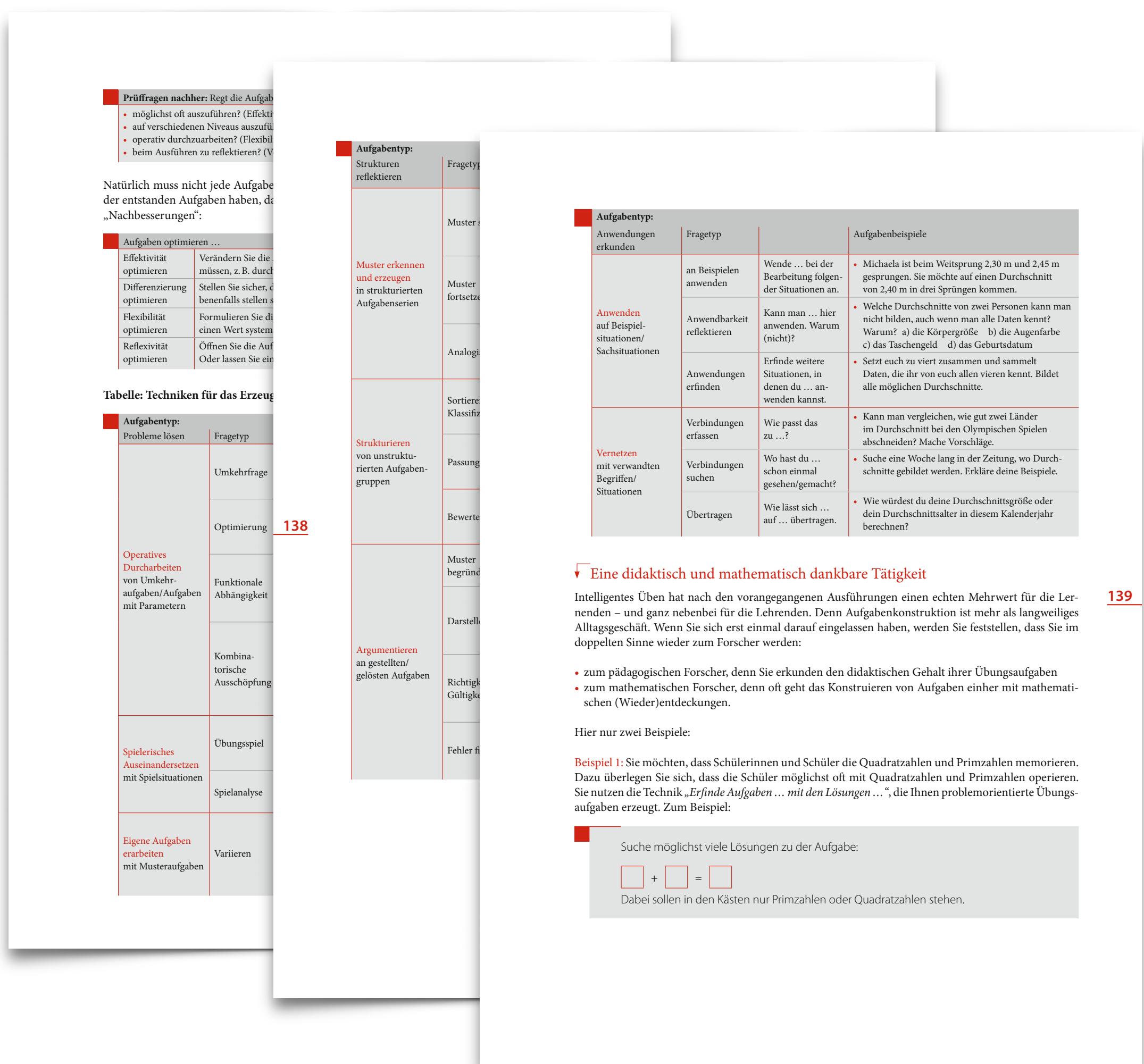
- Selbsteinschätzung, Diagnose, Leistungsmessung

Leuders, 2015, S. 439; SINUS Bayern, o. J.



# Fähigkeitsaspekte

- Kenntnisse
- Fertigkeiten
- Verstehen/Vorstellungen
- Anwendungsfähigkeit
- (übergreifende) Strategien
- Reflexionsfähigkeit
- Einstellungen



Leuders, 2009, S. 137 ff.

# Gestufte Hilfen

- **Inhaltsorientierte strategische Hilfen**

*Veranschauliche dir die Situation mit einer Skizze.*

*Stelle eine Gleichung auf.*

*Orientiere dich beim Vorgehen an dem Beispiel, das du bereits gerechnet hast.*

- **Inhaltliche Hilfen**

*Überlege, was mit dem Flächeninhalt passiert, wenn du die Seitenlängen verdoppelst.*

*Du kannst hier das Kommutativgesetz anwenden.*

Zech, 1998, S. 315 ff.

# Gestufte Aufgaben

## Schwierigkeitsbestimmende Merkmale

- Zugehörigkeit zu einer curricularen Wissensstufe
- Komplexität und Qualität einer erforderlichen Modellierung
- Offenheit des Modellierungsprozesses
- Art des Kontextes
- Erfordernis, mathematische Argumente zu formulieren
- Anzahl zu steuernder Denkprozesse
- Technische Komplexität
- „Umfang“ eines Verarbeitungsprozesses (u. a. Anzahl der Rechenschritte, Art des Zahlenmaterials)
- Sprachlogische Komplexität

Drüke-Noe, 2018, S. 11



# Gestufte Aufgaben

## Blütenaufgaben

Aufgaben/ Problemtypen	Start	Weg	Ziel	x = gegeben/bekannt, o = nicht gegeben/nicht bekannt	Beispiele
(geschlossene) Aufgabe, <i>task</i> , <i>routine exercise</i>	x	x	o		Aufgabenpensen (Lenné 1969)
Problem	x	o	x/o		Aufgaben mit multiplen Lösungswegen (Guberman und Leikin 2013), Strategievergleiche (Rittle-Johnson und Star 2007)
Umkehrproblem	x/o	o	x		Operatives Üben (Aebli 1985; Winter 1984)
Offene Situation <i>open ended problem</i>	x/o	o	o		Explorationen (z.B. Mason et al. 1991; Lengnink und Leuders 2008), Open-ended-problems (Becker und Shimada 1997), Problem posing (Brown und Walter 1990)
Gelöste Aufgabe <i>worked problem</i>	x	x	x		Lernen aus Lösungsbeispielen (Sweller und Cooper 1985)

Leuders, 2015, S. 441

***Lena stellt Martin ein Zahlenrätsel: „Denke dir eine Zahl. Addiere nun 1 und multipliziere das Ergebnis mit 5. Subtrahiere zuletzt 4 von der letzten Zahl. Wenn du mir nun das Ergebnis sagst, sage ich dir, welche Zahl du dir gedacht hast!“***

- a) Martin denkt sich die Zahl 6. Welches Ergebnis bekommt er heraus?
- b) Nun denkt sich Martin eine neue Zahl. Sein Ergebnis lautet jetzt 76. Welche Zahl hat er sich gedacht?
- c) Wie kann Lena aus einem beliebigen Ergebnis von Martin immer seine gedachte Zahl bestimmen?
- d) Erfinde selbst ein Zahlenrätsel und gib die dazugehörige Lösungsstrategie an!

[https://wwwdid.mathematik.tu-darmstadt.de/makos/downloads/Steckbrief\\_Bluetenaufgaben.pdf](https://wwwdid.mathematik.tu-darmstadt.de/makos/downloads/Steckbrief_Bluetenaufgaben.pdf)



# Literatur

- Barzel, B., Blattmann, A., Bullinger, R., Glade, M., & Greefrath, G. (2015). *Mathewerkstatt. 7, Schulbuch* (T. Leuders, S. Prediger, B. Barzel, & S. Hußmann, Hrsg.; 1. Auflage). Cornelsen.
- Bruder, R., & Komorek, E. (2007). Aufgaben für Hausaufgaben. Was ist eine gute Hausaufgabe? – Kommt drauf an .... *mathematik lehren*, 140, 11-16.
- Drüke-Noe, C. (2018). Einfach - mittel - schwierig ... Wenn das so einfach wäre: Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades entwickeln. *mathematik lehren*, 209, 9-17.
- Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 33-67.  
<https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8>
- Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (2019). *Gemeinsame Aufgabenpools der Länder. Aufgaben für das Fach Mathematik. Grundstock von Operatoren*. [https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/abitur/dokumente/mathematik/M\\_Grundstock\\_von.pdf](https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/abitur/dokumente/mathematik/M_Grundstock_von.pdf)
- Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 130-143). Cornelsen. [https://home.ph-freiburg.de/leudersfr/preprint/2009\\_leuders\\_intelligent\\_ueben\\_mathematische\\_momente.pdf](https://home.ph-freiburg.de/leudersfr/preprint/2009_leuders_intelligent_ueben_mathematische_momente.pdf)
- Leuders, T. (2015). Aufgaben in Forschung und Praxis. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 435-460). Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8>
- SINUS Bayern. (o. J.). *Aufgabenkultur*. Abgerufen 2. Januar 2022, von [https://www.deltaplus.bayern.de/fileadmin/user\\_upload/DELTAPlus/1\\_Aufgabenkultur/Aufgabenkultur.pdf](https://www.deltaplus.bayern.de/fileadmin/user_upload/DELTAPlus/1_Aufgabenkultur/Aufgabenkultur.pdf)
- Zech, F. (1998). *Grundkurs Mathematikdidaktik* (9. Aufl.). Beltz Verlag.