

Universität Potsdam – Wintersemester 2024/25

Stoffdidaktik Mathematik

Anhang – Arithmetisches Mittel

Stoffdidaktik Mathematik

Anhang - Arithmetisches Mittel

- Ihr könnt die Strukturierung einer Unterrichtsstunde zum arithmetischen Mittel nachvollziehen.
- Ihr erkennt den Nutzen stoffdidaktischer Analysen und tätigkeitstheoretischer Modelle für die strukturierte Planung von Mathematikunterricht.
- Ihr habt einen Einblick in die Gestaltung von Arbeitsmitteln am Beispiel des arithmetischen Mittels.

Arithmetisches Mittel



Blick auf einige Wochen

Ziel: Auswahl und Anordnung von Lerngegenständen



Stoffdidaktische Analyse

formale Ebene

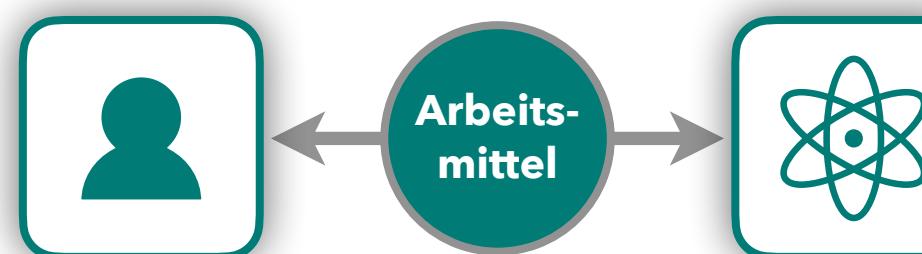
Welche fachlich-logische Struktur besitzt der Lerngegenstand und welche Inhalte werden ausgewählt?

semantische Ebene

Welchen Sinn und welche Bedeutung hat der mathematische Gegenstand?

konkrete Ebene

Wie kann die Umsetzung des Lehr-Lern-Prozesses an konkreten Situationen gestaltet werden, so dass mathematisches Wissen konstruiert wird?



Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit



Blick auf einzelne Unterrichtsstunde(n)

Ziel: Gestaltung des Lernprozesses



Typische Unterrichtssituationen

Motivierung & Zielbildung

Anforderungssituation in der **Zone der nächsten Entwicklung** mit **sinnstiftendem Kontext**; bewusste **Lernzielbildung**, z. B. über **Kernfragen**

Sicherung des Ausgangsniveaus

explizites und implizites **Reaktivieren** von Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten

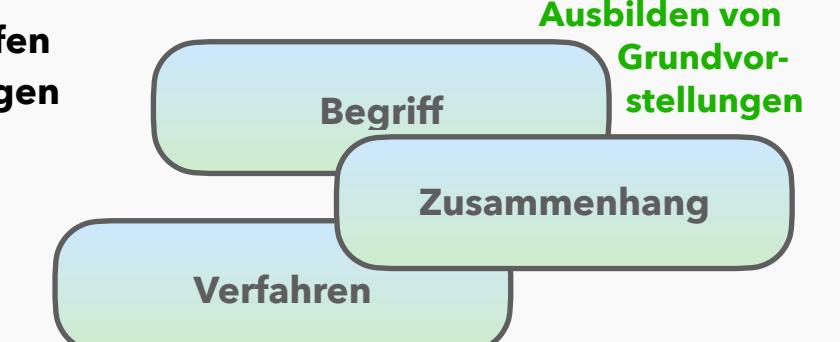
Stoffvermittlung

Inhalt erarbeiten, **Orientierungshilfen** schaffen und **Aneignungshandlungen** **etappenweise Vverinnerlichen**

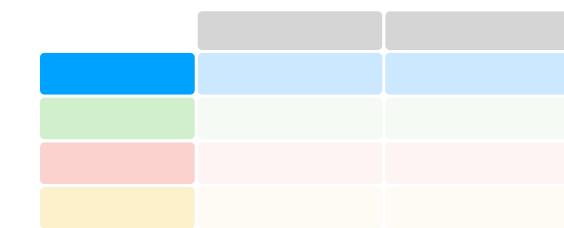
Festigung

vielfältiges **Übungen** und komplexes **Anwenden**

Kontrolle und Bewertung

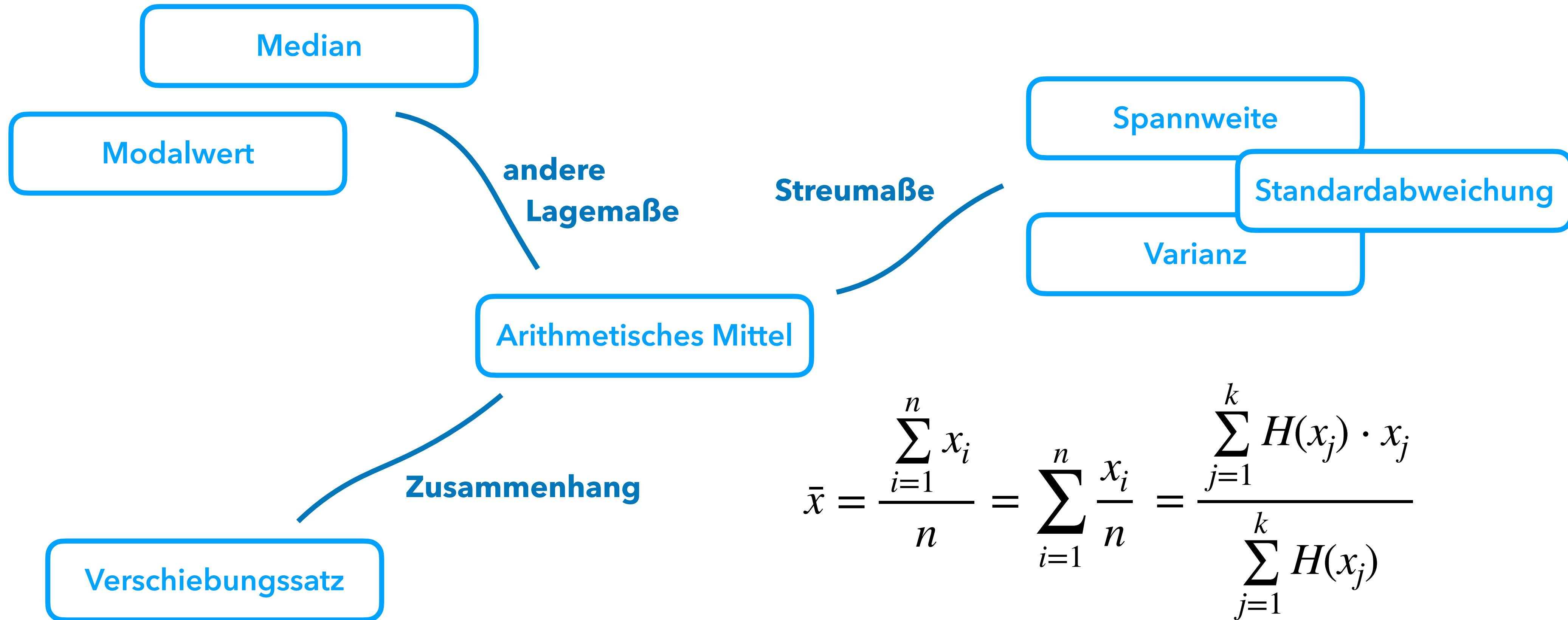
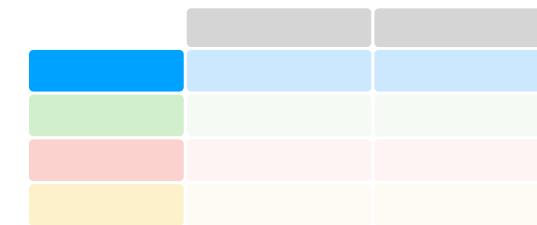


Abgleich zwischen Handlungsverlauf, Handlungsergebnis und Lernziel, z. B. über Betrachtung der **Kernidee in der Rückschauperspektive**



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \frac{\sum_{j=1}^k H(x_j) \cdot x_j}{\sum_{j=1}^k H(x_j)}$$
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Formales

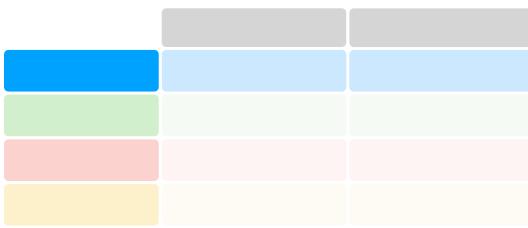


$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \frac{\sum_{j=1}^k H(x_j) \cdot x_j}{\sum_{j=1}^k H(x_j)}$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \left(\sum x_i^2 \right) - n \bar{x}^2$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Formales

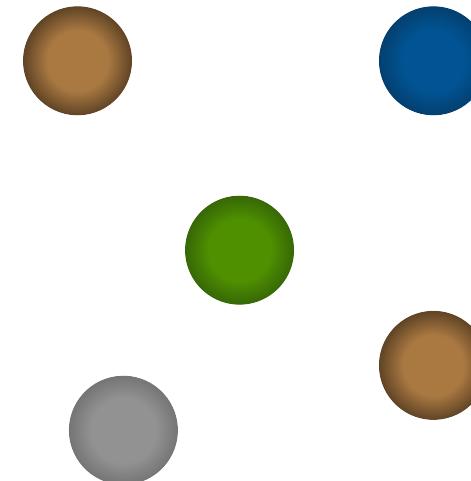


Modalwert

nominale Daten



Augenfarbe



Median

ordinale Daten



Wie geht's uns denn heute?

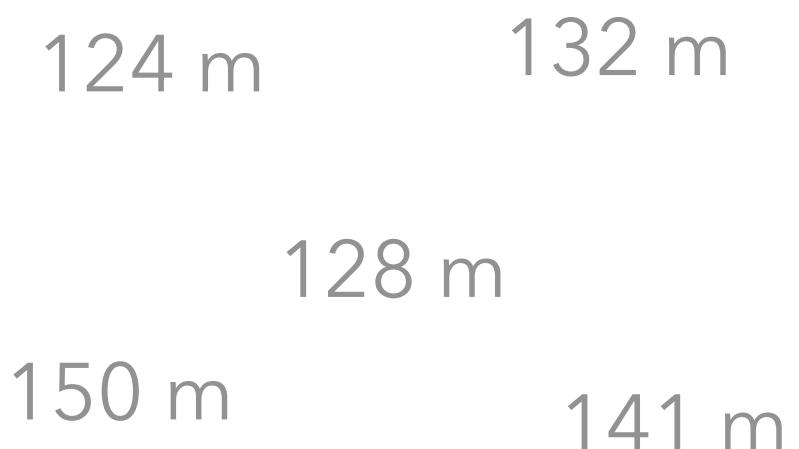


Arithmetisches Mittel

metrische Daten

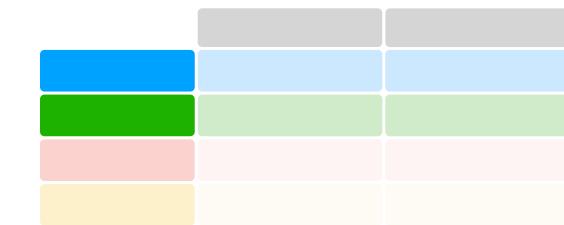


Sprungweite



$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Bedeutung



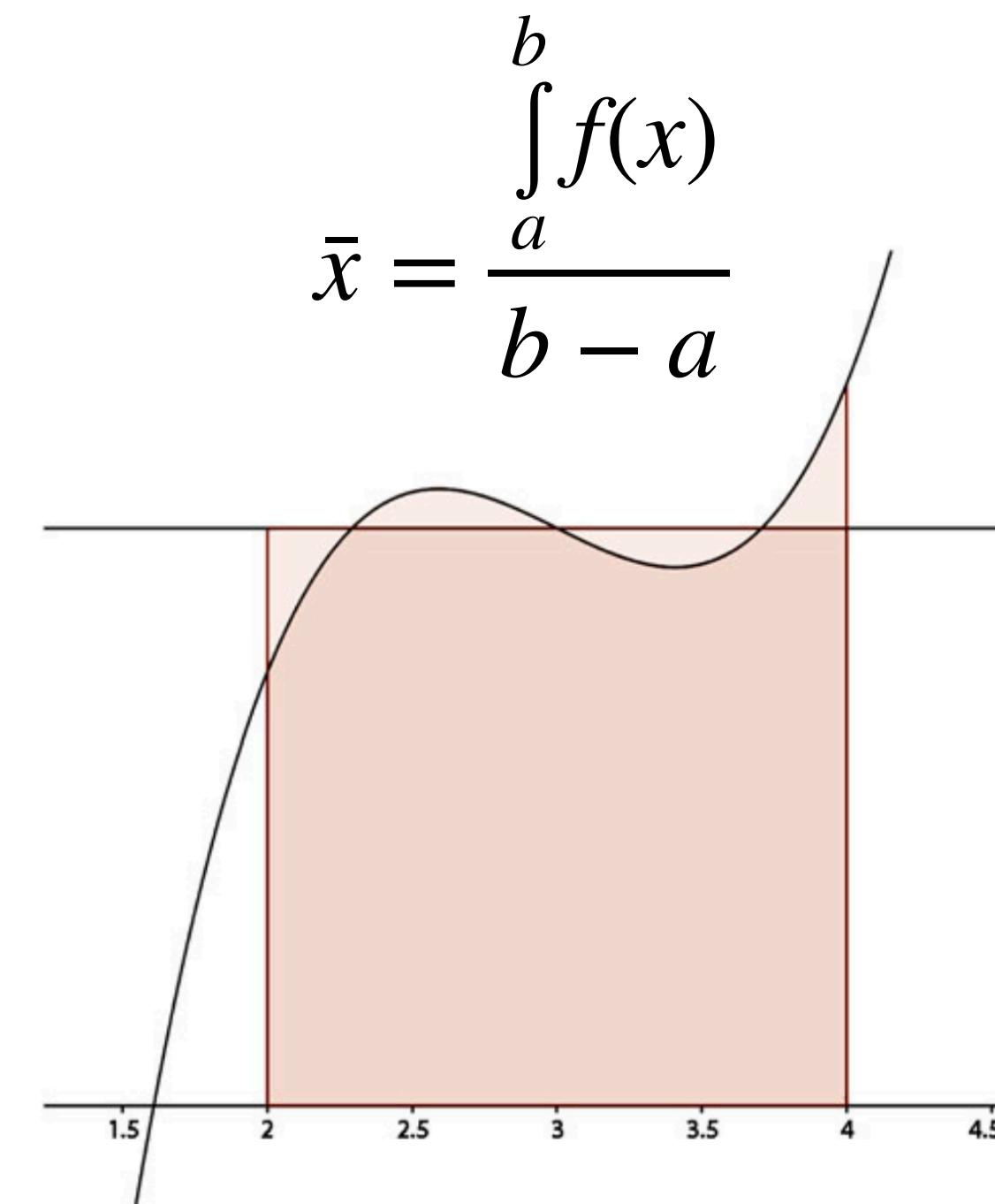
metrische Daten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

fachliche Aspekte

- fiktive Größe
- Vergleichswert
- Prognosewert
- repräsentativer Wert

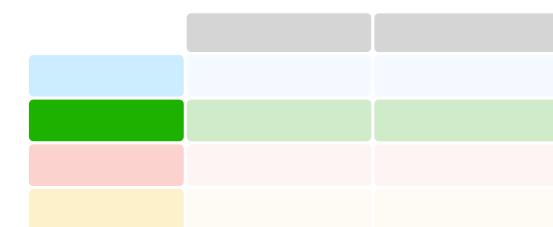
spätere Lerninhalte



(Krüger et al., 2015, S. 56 f.)

(Greefrath et al., 2016, S. 251)

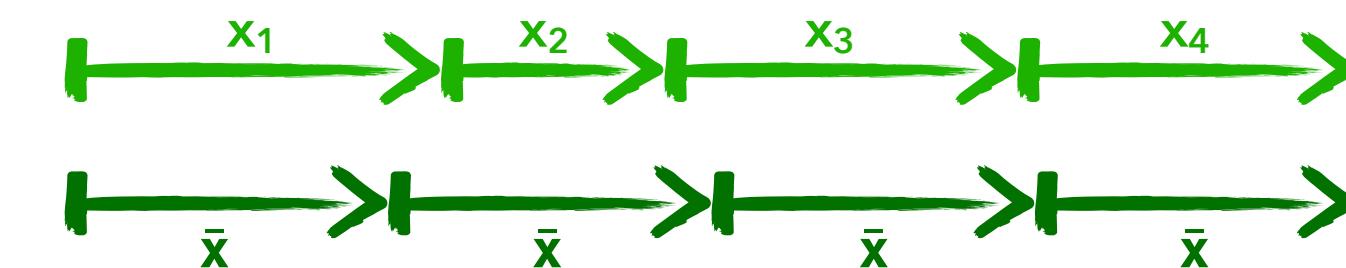
Grundvorstellungen



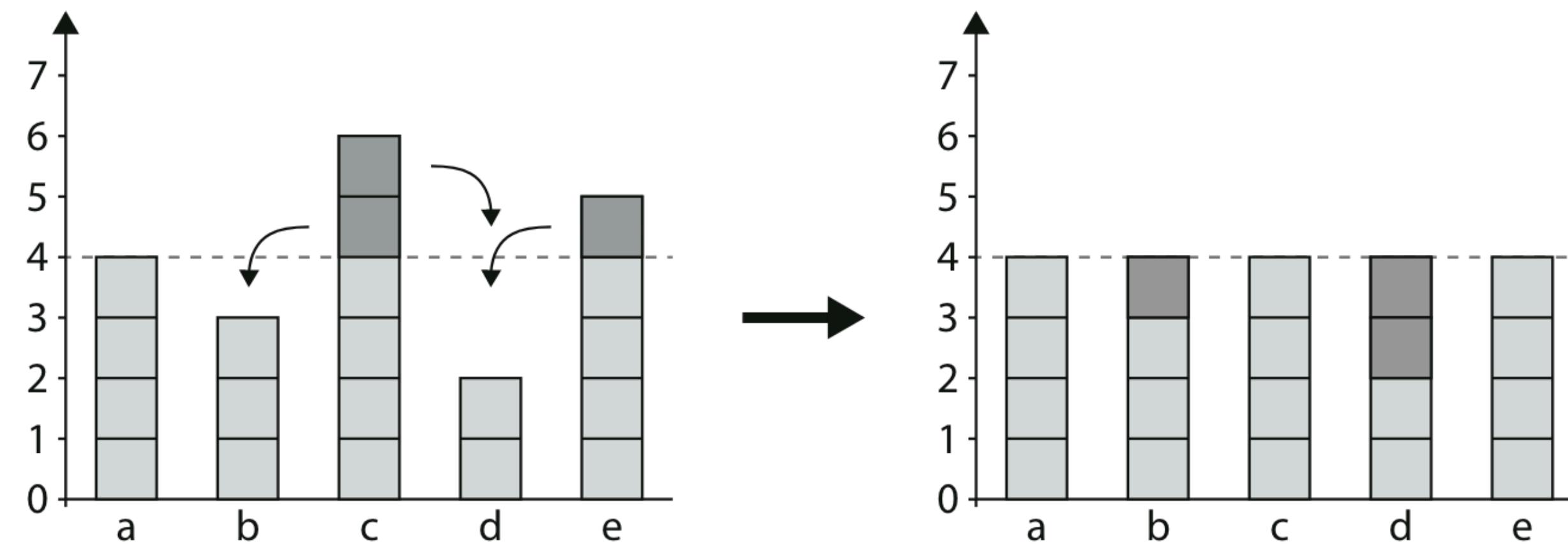
metrische Daten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Vergleichswert
repräsentativer Wert

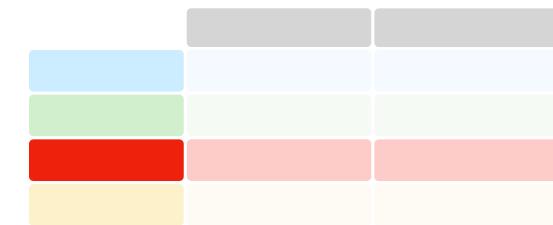


Ausgleichswert



(Krüger et al., 2015, S. 56 ff., 64)

Kernfragen

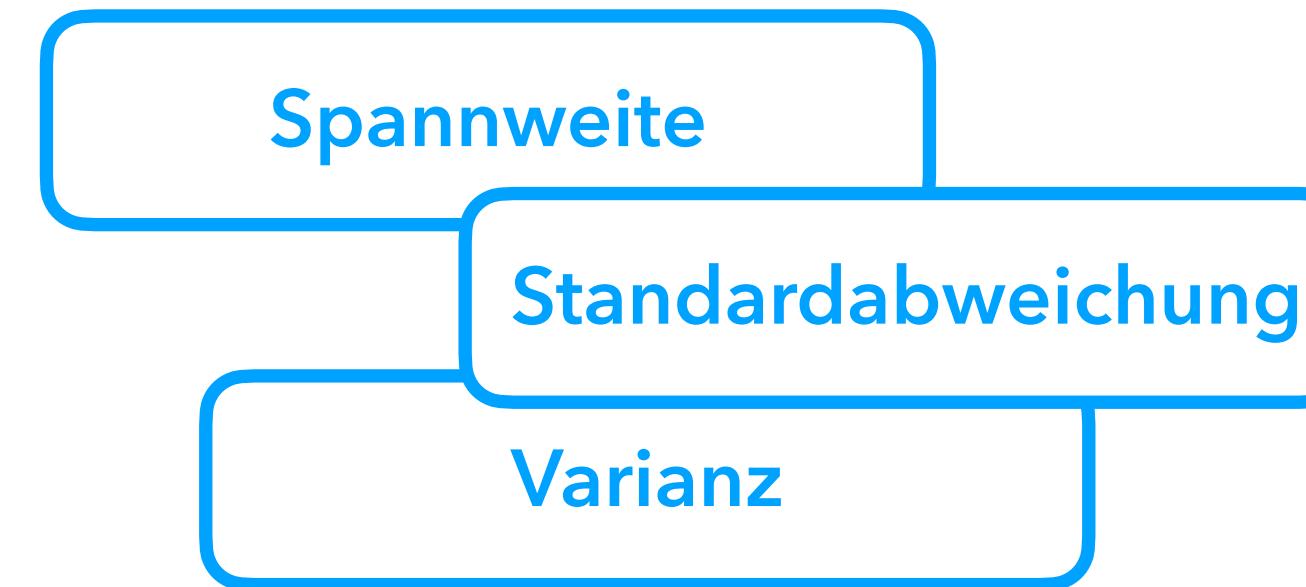
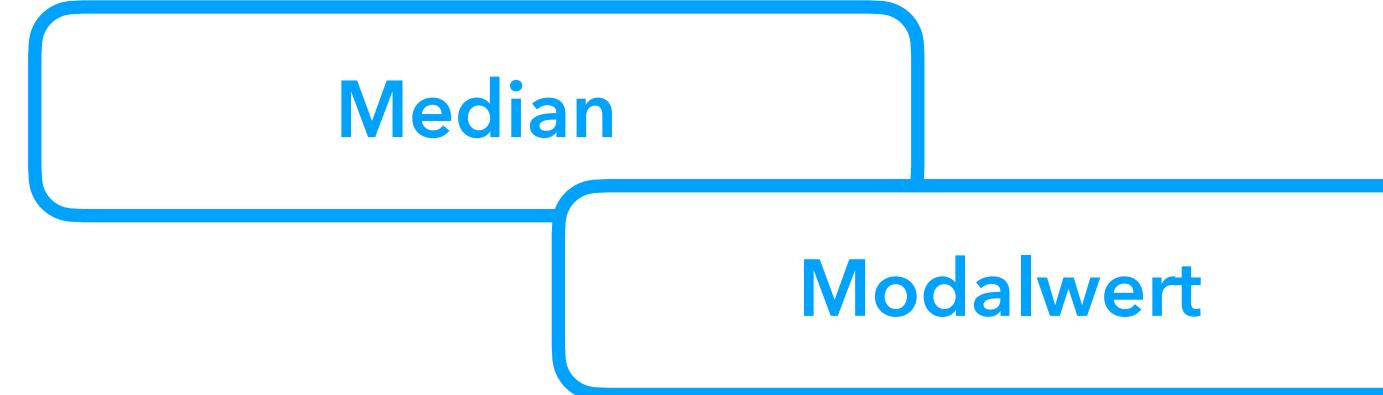
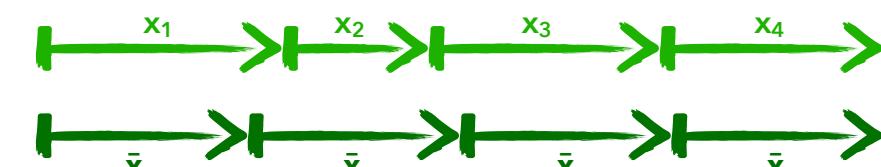


metrische Daten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Vergleichswert
repräsentativer Wert

Grundv.: Wert der
gleichm. Verteilung



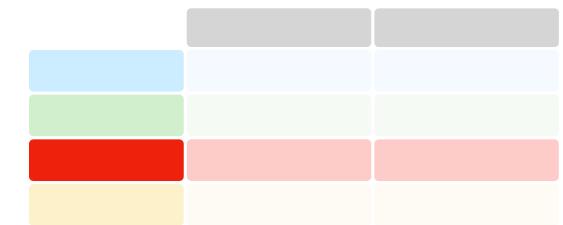
Wie kann ich das
durchschnittliche Ergebnis
einer Messreihe **berechnen**?

Wie finde ich einen Wert, der **repräsentativ** für meine Messreihe ist?

Wie kann ich viele Ergebnisse einer Messreihe mithilfe weniger Werte **vergleichen**?

Kontext

Lebensweltbezug • Authentizität • Reichhaltigkeit

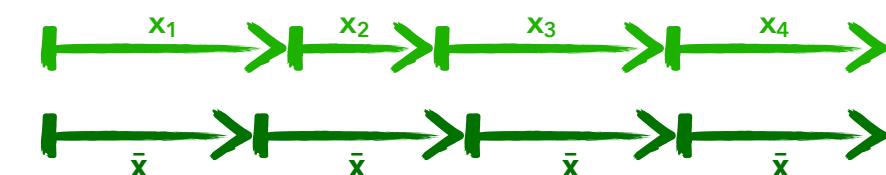


metrische Daten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

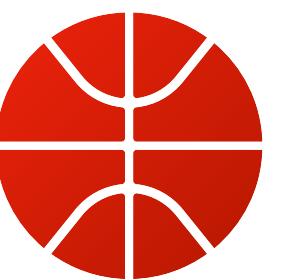
Vergleichswert
repräsentativer Wert

Grundv.: Wert der
gleichm. Verteilung



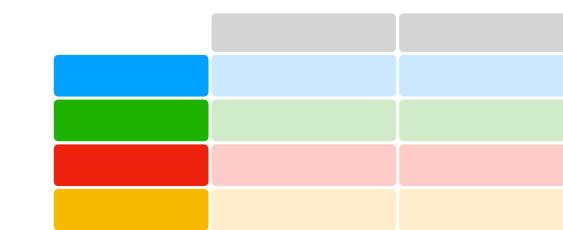
Kernfrage: Wie kann ich
das durchschnittliche
Ergebnis einer Messreihe
berechnen?

Sportliche Leistungen miteinander vergleichen





Motivierung & Zielbildung



Lehrziele

Die Schülerinnen und Schüler ...
... können das arithmetische Mittel
einer Messreihe berechnen.
... können erklären, wofür man das
arithmetischen Mittel benötigt.



Lernziele

Wir wollen lernen, wie man das durchschnittliche
Ergebnis einer Messreihe berechnen kann.

schlechtere Formulierungen:
... kennen das arithmetische
Mittel.
... wissen, wofür man das
arithmetische Mittel benötigt.

Arithmetisches Mittel

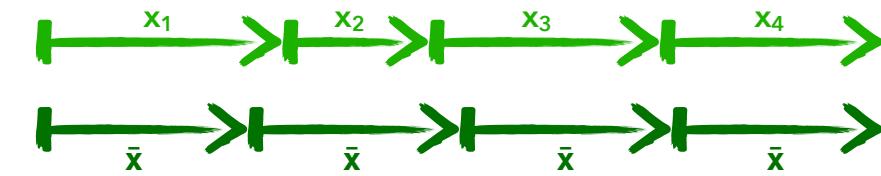
metrische Daten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Vergleichswert

repräsentativer Wert

Grundv.: Wert der
gleichm. Verteilung



Kernfrage: Wie kann ich
das durchschnittliche
Ergebnis einer Messreihe
berechnen?

Kontext: Sportliche
Leistungen miteinander
vergleichen



Motivierung & Zielbildung



Mara und Lasse haben Weitsprung geübt. Wer von den beiden ist besser?

Maras Sprungweiten: 3,20 m; 1,90 m; 3,00 m; 2,90 m

Lasses Sprungweiten: 3,10 m; 2,90 m; 2,70 m; 2,60 m; 3,00 m

Arithmetisches Mittel

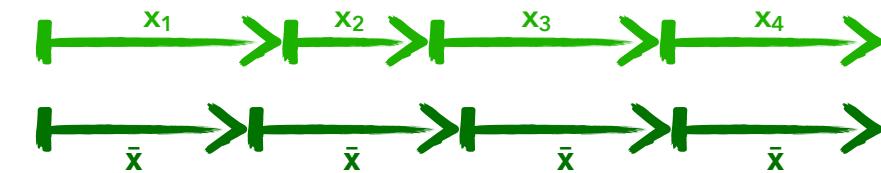
metrische Daten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Vergleichswert

repräsentativer Wert

Grundv.: Wert der gleichm. Verteilung



Kernfrage: Wie kann ich das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe berechnen?

Kontext: Sportliche Leistungen miteinander vergleichen

gemeinsam (z. B. Plenum oder Murmelphase)

- Situation analysieren, Vorschläge zur Lösung einholen
 - »Wie kann ich die beiden miteinander vergleichen?«
 - »Was heißt es, besser zu sein?«
- Lernziel herausarbeiten (und ggf. festhalten)

*Wir wollen nicht nur herausfinden, **wer** besser ist, sondern wollen lernen, **wie** wir das herausfinden.*



Motivierung & Zielbildung

Arithmetisches Mittel

Einstiegsalternativen

- realen Wettbewerb durchführen und Daten nutzen
- Daten aus vorherigen Stunden verwenden
 - Anzahlen der Messwerte sollten nicht gleich sein
 - Messreihe mit mehr Werten sollte keine kleinere Summe haben als andere Messreihe
 - Gefahr der Zielverschiebung (Wettbewerb statt Mathematik)

gemeinsam (z. B. Plenum oder Murmelphase)

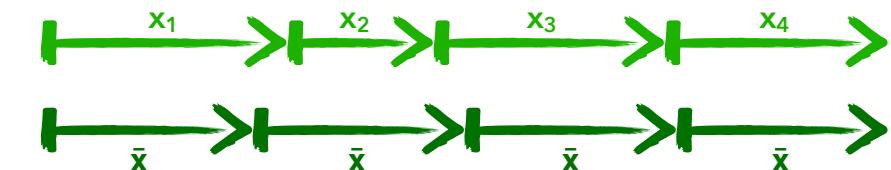
- Situation analysieren, Vorschläge zur Lösung einholen
 - »Wie kann ich die beiden miteinander vergleichen?«
 - »Was heißt es, besser zu sein?«
- Lernziel herausarbeiten (und ggf. festhalten)

metrische Daten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Vergleichswert
repräsentativer Wert

Grundv.: Wert der
gleichm. Verteilung



Kernfrage: Wie kann ich
das durchschnittliche
Ergebnis einer Messreihe
berechnen?

Kontext: Sportliche
Leistungen miteinander
vergleichen

Lernziel: lernen, wie
man das durchschn.
Ergebnis einer
Messreihe berechnet



Stoffvermittlung

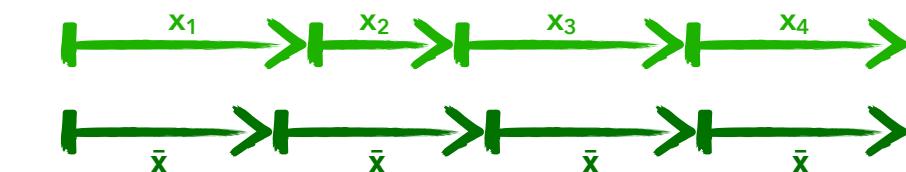
Arithmetisches Mittel

metrische Daten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Vergleichswert
repräsentativer Wert

Grundv.: Wert der
gleichm. Verteilung



Kernfrage: Wie kann ich
das durchschnittliche
Ergebnis einer Messreihe
berechnen?

Kontext: Sportliche
Leistungen miteinander
vergleichen

Lernziel: lernen, wie
man das durchschn.
Ergebnis einer
Messreihe berechnet

Erkundungsauftrag (z. B. in Partnerarbeit)

1. Begründe, warum es nicht ausreicht, die Gesamtstrecken von Mara und Lasse zu vergleichen.
2. Zeichne dir die Sprungweiten für Mara in einem geeigneten Maßstab nebeneinander.
Überlege anschließend, wie lang die einzelnen Weiten wären, wenn Mara bei jedem Sprung dieselbe Weite gesprungen hätte.
3. Wiederhole das Vorgehen mit Lasse und vergleiche anschließend die durchschnittlichen Leistungen der beiden.



Stoffvermittlung

Arithmetisches Mittel

Erkundungsauftrag (z. B. in Partnerarbeit)

gemeinsam (Plenum)

- Begründung, dass Addieren nicht reicht, kurz besprechen
- Vorgehen bei Mara beschreiben und begründen lassen.
»Wie bist du vorgegangen?«

- Ergebnis bei Lasse vergleichen
- Allgemeinheit (unabhängig vom Kontext) herausarbeiten.

»Was muss man also allgemein tun, wenn man eine Messreihe hat und den durchschnittlichen Wert berechnen möchte?«

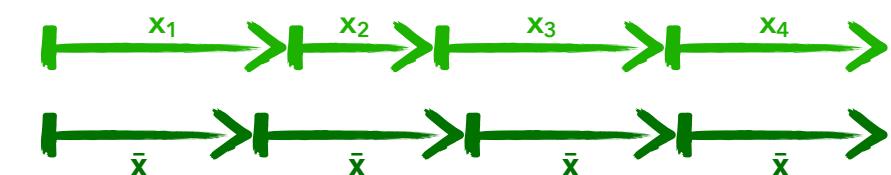
- Bezeichner »arithmetisches Mittel« einführen
- Aufschreiben einer Definition und eines Vorgehens zum Bestimmen des arithmetischen Mittels

metrische Daten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Vergleichswert
repräsentativer Wert

Grundv.: Wert der gleichm. Verteilung



Kernfrage: Wie kann ich das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe berechnen?

Kontext: Sportliche Leistungen miteinander vergleichen

Lernziel: lernen, wie man das durchschn. Ergebnis einer Messreihe berechnet



Stoffvermittlung

Arithmetisches Mittel

möglicher Hefteraufschrieb

Arithmetisches Mittel

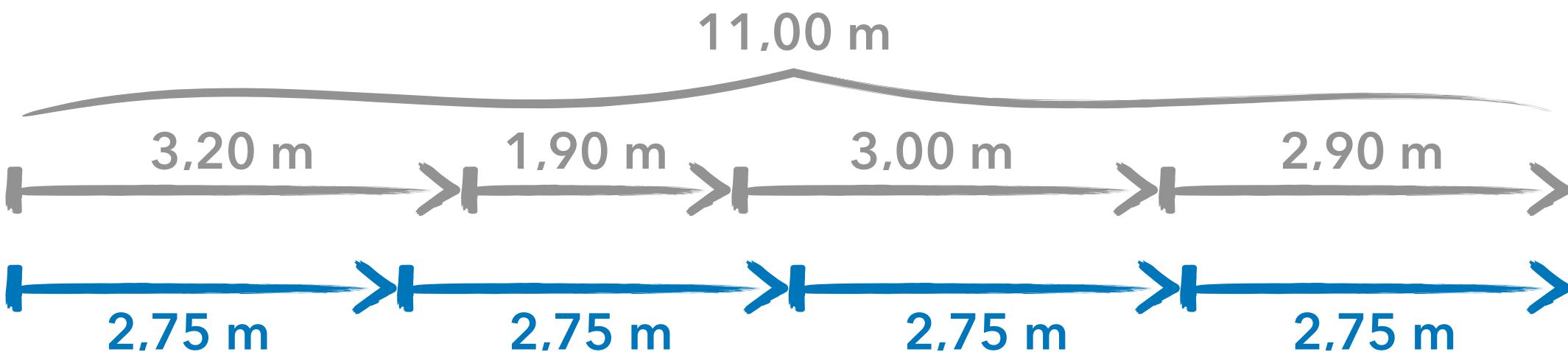
Das arithmetische Mittel \bar{x} beschreibt einen Durchschnittswert einer Messreihe. Hat man die Messwerte x_1, x_2, \dots, x_n , so gilt: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

So geht man bei der Berechnung vor:

1. Addiere zuerst alle Messwerte.
2. Teile anschließend das Ergebnis durch die Anzahl der Werte.

Beispiel: Sprungweiten 3,20 m; 1,90 m; 3,00 m; 2,90 m

$$\bar{x} = \frac{3,2 + 1,9 + 3 + 2,9}{4} = \frac{11}{4} = 2,75$$

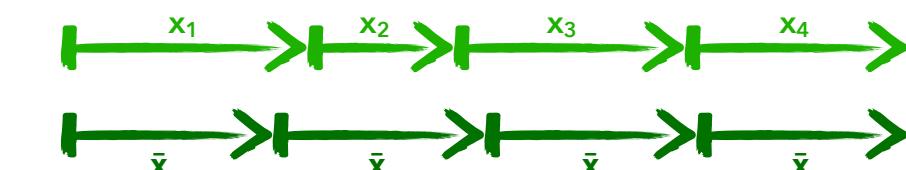


metrische Daten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Vergleichswert
repräsentativer Wert

Grundv.: Wert der gleichm. Verteilung



Kernfrage: Wie kann ich das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe berechnen?

Kontext: Sportliche Leistungen miteinander vergleichen

Lernziel: lernen, wie man das durchschn. Ergebnis einer Messreihe berechnet



Stoffvermittlung

möglicher Hefteraufschrieb

gemeinsam (z. B. Plenum)

- Aufschreiben einer Definition und eines Vorgehens zum Bestimmen des arithmetischen Mittels
- Erstaneignung
 - Beispiel in Anschluss an Definition
 - berechnen und beschreiben
 - Fehler finden und korrigieren

Arithmetisches Mittel

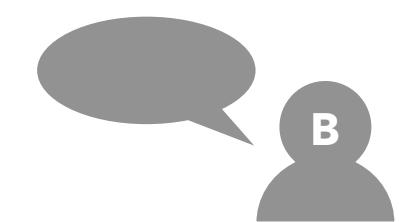
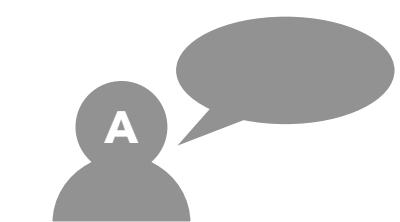
metrische Daten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Vergleichswert
repräsentativer Wert

Aufgaben zur Erstaneignung

1. Berechne das arithmetisches Mittel.
Beschreibe anschließend dein Vorgehen.



- a) 2; 4; 3; 7; 8
- b) 2,5; 1,2; 5; 7,2

- a) 5; 2; 8; 3; 4
- b) 3,1; 1,2; 7; 4,8

2. Erkläre, welcher Fehler, beim Berechnen des arithmetischen Mittels der Datenreihe 10; 17; 12; 13; 20 gemacht wurde und korrigiere ihn.

$$\bar{x} = 10 + 17 + 12 + 13 + 20 : 5 = 56$$

3. Beschreibe, wie du beim Berechnen des arithmetischen Mittels mit dem Taschenrechner vorgehen kannst.



Festigung

vielfältige Übungen

- zum Teil in Einzelarbeit
- Vergleich z. B. über Lösungszettel
- ggf. Unterbrechung für Besprechung im Plenum

Prüfungen nachher: Begeht die Aufgabe

- möglichst effizient (Effizienz)
- auf verschiedenen Niveaus ausüben
- neuwertig durcharbeiten (Neuheit)
- keine Auskunfts- zu reflektieren (Reflexivität)

Aufgaben optimieren:

- Effektivität optimieren: Verändern Sie die Formulierung, z. B. indem Sie die Formulierung vereinfachen, bestmöglichstellen oder Formulieren Sie die optimale Formulierung.
- Flexibilität optimieren: Offen Sie die Aufgabe. Oder lassen Sie die Aufgabe optimieren.

Tabelle: Techniken für das Erzeugen von Aufgaben:

Aufgabentyp: Probleme lösen	Fragetyp: Problemfrage
Operative Durcharbeitung von Umkabaufgaben/Aufgaben mit Parametern	Umfrage
Funktionslehre	Optimierung
Kombinatorische Auszählung	
Spieldynamische Ausmusterungen mit Spieldynamiken	Übungspäd.
Typische Aufgaben erarbeiten mit Musteraufgaben	Variieren

138

Aufgabentyp: Strukturen reflektieren

Muster	Frage
Muster erkennen und erzeugen in strukturierten Aufgabenarten	an Beispielen anwenden
Muster fortsetzen	Wende ... bei der Bearbeitung folgender Beispiele an.
Analog	Anwendbarkeit
Sortieren	Kann man ... hier Erfolge weiter ... erzielen? Stimmt das ... an?
Klassifizieren	Anwendungen erfinden
Pausen	Wie passt das ... an?
Bewerten	Was kostet da ... schaum einmal gehen? Wie lässt sich ... und ... übertragen?
Muster begründen	Übertragen
Darstellen	
Richtig/Gültig	
Felder	

139

Argumentieren an gestellten/ gelösten Aufgaben

↓ Eine didaktisch und mathematisch dankbare Tätigkeit

Intelligentes Üben hat nach den vorangegangenen Ausführungen einen echten Mehrwert für die Lernenden – und genauso für die Lehrerinnen. Denn Aufgabenkonstruktion ist mehr als langwieriges Alltagsgeschäft. Wenn es sich um eine davon eingespannt haben, werden Sie feststellen, dass Sie im doppelten Sinne wieder zum Forscher werden:

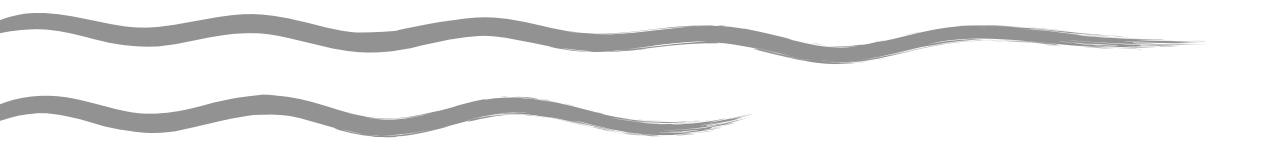
- zum pädagogischen Forscher, denn Sie erkunden den didaktischen Gehalt ihrer Übungsaufgaben
- zum mathematischen Forscher, denn oft geht das Konstruieren von Aufgaben einher mit mathematischen (Wieder)entdeckungen.

Hier nur zwei Beispiele:

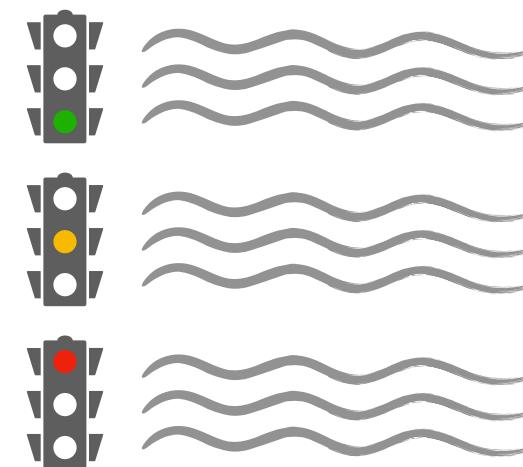
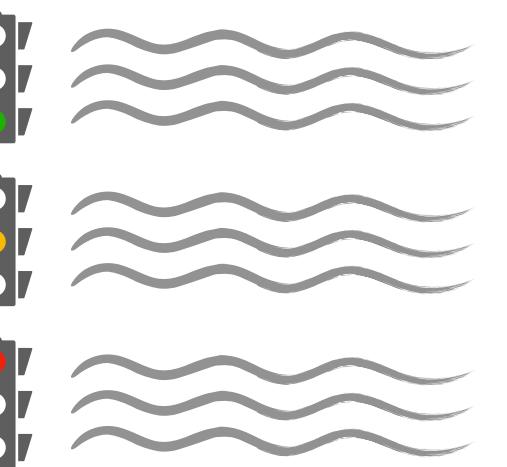
Beispiel 1: Sie möchten, dass Schülerinnen und Schüler die Quadratzahlen und Primzahlen memorieren. Dazu überlegen Sie sich, dass die Schüler möglichst oft mit Quadratzahlen und Primzahlen operieren. Sie nutzen die Technik „Erfinde Aufgaben ... mit den Lösungen ...“, die Ihnen problemorientierte Übungsaufgaben erzeugt. Zum Beispiel:

Suche möglichst viele Lösungen zu der Aufgabe:
 $\square + \square = \square$
 Dabei sollen in den Kästen nur Primzahlen oder Quadratzahlen stehen.

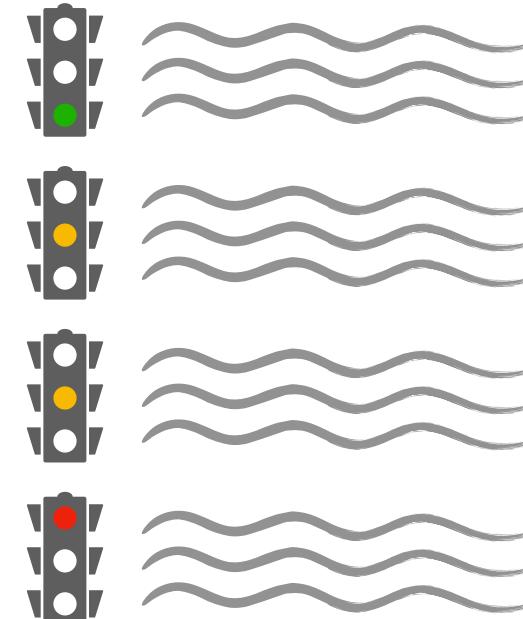
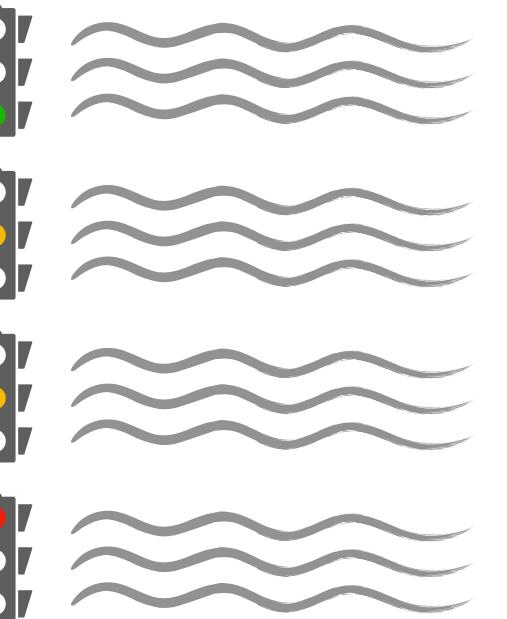
(Leuders, 2009, S. 137 ff.)



mind. 2 Aufgaben



mind. 3 Aufgaben



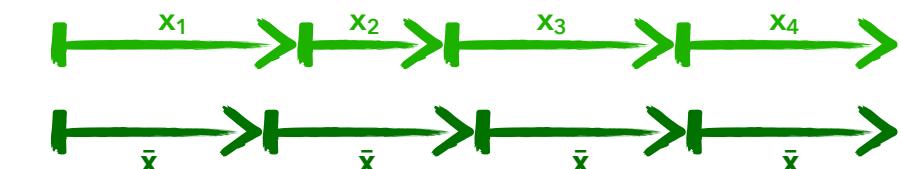
Arithmetisches Mittel

metrische Daten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Vergleichswert
repräsentativer Wert

Grundv.: Wert der gleichm. Verteilung



Kernfrage: Wie kann ich das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe berechnen?

Kontext: Sportliche Leistungen miteinander vergleichen

Lernziel: lernen, wie man das durchschn. Ergebnis einer Messreihe berechnet



Kontrolle und Bewertung

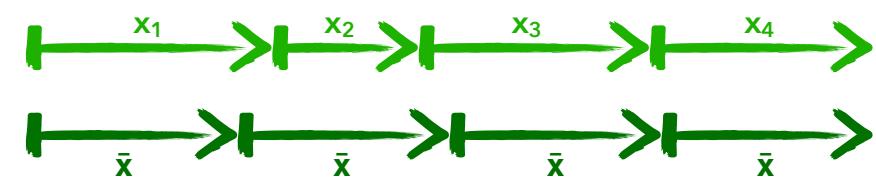
Arithmetisches Mittel

metrische Daten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Vergleichswert
repräsentativer Wert

Grundv.: Wert der
gleichm. Verteilung



Kernfrage: Wie kann ich
das durchschnittliche
Ergebnis einer Messreihe
berechnen?

Kontext: Sportliche
Leistungen miteinander
vergleichen

Lernziel: lernen, wie
man das durchschn.
Ergebnis einer
Messreihe berechnet

Reflexionsfragen mit Bezug zum Lernziel

- »Fasse zusammen, was wir heute neues gelernt haben.«
- »Wofür benötigt man das arithmetische Mittel?«
- »Erkläre, wie man das arithmetische Mittel berechnet.«

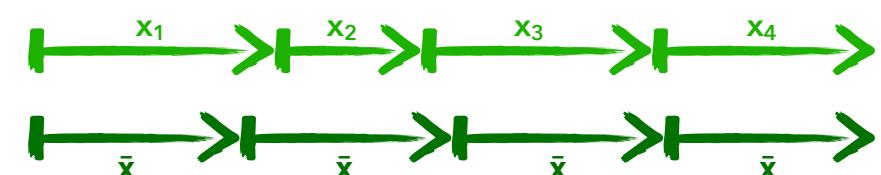
Arithmetisches Mittel

metrische Daten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Vergleichswert
repräsentativer Wert

Grundv.: Wert der
gleichm. Verteilung



Kernfrage: Wie kann ich
das durchschnittliche
Ergebnis einer Messreihe
berechnen?

Kontext: Sportliche
Leistungen miteinander
vergleichen

Lernziel: lernen, wie
man das durchschn.
Ergebnis einer
Messreihe berechnet

5'

Motivierung & Zielbildung

Diskussion des Einstiegsbeispiels und Zielformulierung
für Stunde

Weitsprung von Mara und Lasse

20'

Stoffvermittlung

Erkundungsauftrag und Handlungen am Beispiel



Verallgemeinerung und Erarbeiten der
Berechnungsvorschrift

1. addiere alles, 2. teile durch Anzahl

Erstaneignung (Plenum und Partnerarbeit)

Beispiel, Realisieren, Fehlerfinden

17'

Festigung

vielfältiges Üben mit differenzierenden Aufgaben

3'

Kontrolle und Bewertung

mündliche Zusammenfassung der Stunde,
Bezugnahme zum Lernziel

Literatur

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; 4. Aufl.). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>

Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3>

Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 130–143). Cornelsen. https://home.ph-freiburg.de/leudersfr/preprint/2009_leuders_intelligent_ueben_mathemagische_momente.pdf