Stoffdidaktik Mathematik

Dr. Heiko Etzold, Universität Potsdam

Wintersemester 2022/23; letzte Änderung: 10.09.2022

Inhaltsverzeichnis

Über dieses Dokument

Die Veranstaltung *Stoffdidaktik Mathematik* wird über dieses Dokument begleitet. Es wird fortlaufend aktualisiert und zur Verfügung gestellt. Über ein Git-Respository können Änderungen nachverfolgt werden. In der html-Version gelangt man über die Menüleiste am oberen Rand sowohl zu den Rohdaten als auch zu einer pdf-Version. Die Darstellung der Inhalte ist jedoch optimiert für die html-Version dieses Dokuments.

Das Vorlesungsskript zur letztjährigen Veranstaltung finden Sie unter https://stoffdidaktik.heiko-etzold.de/2021.

Lizenz

Stoffdidaktik Mathematik an der UP

Struktur der Veranstaltung

Die Veranstaltung *Stoffdidaktik Mathematik*[1] besteht aus einer **Vorlesung (2 SWS)** und einem zugehörigen **Seminar (2 SWS)**.

Im Wintersemester 2022/23 wird die **Vorlesung semesterbegleitend** stattfinden. Das **Seminar** können Sie entweder **als Block** am Ende des Wintersemesters oder **semesterbegleitend** im Sommersemester 2023 besuchen.

In der Vorlesung erhalten Sie einen **Input zu stoffdidaktischen Grundlagen**, wobei der Schwerpunkt auf **stoffdidaktischen Theorien** liegt, die über vielfältige Unterrichtsbeispiele illustriert werden. Im Seminar haben Sie die Aufgabe, diese Grundlagen selbstständig **auf verschiedene Lerngegenstände anzuwenden**.

Sie halten einen **Seminarvortrag** (30 bis 45 Minuten) als Voraussetzung für die Zulassung zur Modulprüfung und fassen Ihre Erarbeitungen in einer **Hausarbeit** (6 bis 8 Seiten) zusammen, die als Modulprüfung dient. Genauere Hinweise dazu finden Sie im Anhang A.

Am Ende der Veranstaltung steht damit ein **Katalog an stoffdidaktischen Analysen**, der Ihnen im weiteren Studium und in Ihrer späteren Lehrtätigkeit an der Schule dienlich sein kann.

Einordnung

Die Veranstaltung *Stoffdidaktik Mathematik* findet nach empfohlenem Studienverlaufsplan im **5. Fachsemester parallel zur *Einführung in die Mathematikdidaktik*** statt.

Das heißt insbesondere, dass Sie bereits die **Grundlagen** zur Analysis, Linearen Algebra, Stochastik, Geometrie, Algebra und Numerik studiert haben sollten. Auf diese Grundlagen wird in der Stoffdidaktisch **fachlich aufgebaut**.

Während Sie sich in der *Einführung in die Mathematikdidaktik* mit verschiedenen Lehr-Lern-Theorien, Unterrichtsprinzipien, prozessbezogenen Kompetenzen oder methodischen Grundlagen des Mathematikunterrichtens beschäftigen, liegt in der *Stoffdidaktik Mathematik* der Fokus

[1] Die Modulbeschreibung finden Sie bei PULS.

auf der **Auswahl und Strukturierung der Unterrichtsinhalte**, basierend auf fachlichen und fachdidaktischen Erkenntnissen.

Im Anschluss an beide Veranstaltungen absolvieren Sie die **Schulpraktischen Studien**, in denen Sie die erworbenen Kenntnisse in die **Unterrichtspraxis** transferieren und erste eigene Unterrichtsstunden im Fach Mathematik halten.

Lernziele der Veranstaltung

Als Lernziele, die Sie nach Abschluss von Vorlesung und Seminar erreicht haben sollen, sind angedacht:

- Sie **kennen Aspekte und Grundvorstellungen** zu zentralen mathematischen Begriffen.
- Sie **beurteilen Unterrichtsmaterialien und Lernumgebungen** hinsichtlich ihrer stoffdidaktischen Eignung.
- Sie **erstellen Aufgaben und erste Lernumgebungen** zu konkreten Stoffgebieten.
- Sie **erkennen mathematikdidaktische Prinzipien und Ideen** als **Entscheidungs- und Strukturierungsgrundlage** zu stofflichen Inhalten der mathematischen Bildung.
- Sie **wählen zielgerichtet** analoge und digitale **Medien** zur Unterstützung stofflich orientierter Lehr-Lern-Prozesse aus.
- Sie **setzen sich** selbstständig **mit stoffdidaktischen Fragestellungen auseinander** und nutzen dafür geeignete mathematikdidaktische Literatur.
- Sie **reflektieren die Inhalte der vorangegangenen Mathematik-Fachmodule** unter stoffdidaktischen Gesichtspunkten.

Was ist Stoffdidaktik?

Für die Disziplin der *Stoffdidaktik Mathematik* gibt es keine allgemeingültige Definition, auch haben sich die Schwerpunkte in der historischen Entwicklung stets verschoben.

Grundsätzliches Ziel ist, stoffliche Inhaltsbereiche für den Mathematikunterricht auszuwählen (***Was?***) und aufzubereiten (***Wie?***). Im Sinne dieser Veranstaltung kann Stoffdidaktik grob als **Spezifierung und Strukturierung von Lerngegenständen** aufgefasst werden (zur begrifflichen Einordnung siehe auch Hußmann et al., 2016).

Während hierzu, historisch betrachtet, anfangs der Stoff ausschließlich aus fachmathematischer Perspektive aufbereitet wurde (z. B. durch *didaktisch-orientierte Sachanalysen*), nahmen in der Folgezeit mehr und mehr auch Lehr-Lern-Theorien Einzug – gar ein Verschwinden der stofflichen Orientierung der Mathematikdidaktik wird befürchtet (vgl. Jahnke, 2010).

Mit dem Begriff der **Strukturgenetischen Analyse** erweitert Wittmann (2015) die historische Sichtweise als eine »Mathematikdidaktik *vom Fach aus*«, die sich »auf implizite Theorien des

Lehrens und Lernens, die im Fach selbst liegen[, stützt]« (Wittmann, 2015, S. 240). »Anders als bei der Stoffdidaktik, die sich im Wesentlichen auf die logische Analyse des Stoffes und die Wissensvermittlung konzentriert hat, stehen jetzt aber die Genese des Wissens im Verlauf der Schulzeit und Lernprozesse unter Bezug auf unterschiedliche Lernvoraussetzungen im Vordergrund« (Wittmann, 2015, S. 250). Eine derartig ganzheitliche Sichtweise soll auch den Geist dieser Veranstaltung ausmachen.

Überblicke zur historischen Entwicklung der Stoffdidaktik

- Hefendehl-Hebeker (2016): Subject-matter didactics in German traditions: Early historical developments
- Schupp (2016, S. 79 ff.): Gedanken zum „Stoff" und zur „Stoffdidaktik" sowie zu ihrer Bedeutung für die Qualität des Mathematikunterrichts

Stoffdidaktische Analyse

1 Vier-Ebenen-Ansatz

Lernziele

- Sie kennen typische Fragestellungen, um sich einer stoffdidaktischen Analyse systematisch zu nähern.
- Sie erkennen den Vier-Ebenen-Ansatz als eine Möglichkeit, eine stoffdidaktische Analyse strukturiert vorzunehmen.
- Sie können den Vier-Ebenen-Ansatz anhand eines Beispiels nachvollziehen.
- Sie sind sich der Komplexität einer stoffdidaktischen Analyse bewusst.

Material

- Folien zur Vorlesung zum Vier-Ebenen-Ansatz (pdf, Keynote)
- App *Winkel-Farm* (nur für iOS)

1.1 Analyse von Lerngegenständen

Die inhaltliche Basis der Veranstaltung bietet ein Beitrag von Hußmann & Prediger (2016) zur Spezifizierung und Strukturierung mathematischer Lerngegenstände. Nur einen Artikel als Basis einer kompletten 4 SWS starken Veranstaltung zu nutzen, scheint zunächst unüblich. In diesem Fall ist es jedoch hilfreich, da der Beitrag eine Kategorisierung stoffdidaktischer Analysen vorschlägt und vielfältige Fragen formuliert, woraus sich wieder ein ganzes Repertoir an Themen ergibt, die es im Rahmen von Vorlesung und Seminar zu untersuchen gilt.

Hußmann & Prediger (2016, S. 35 f.) kategorisieren eine stoffdidaktische Analyse in eine **formale**, **semantische**, **konkrete** und **empirische** Ebene, wobei diese nicht hierarchisch aufgebaut sind, sondern sich gegenseitig beeinflussen. Innerhalb der Ebenen wird jeweils noch einmal in die **Spezifizierung** und die **Strukturierung** eines Lerngegenstands unterschieden.

Auf der formalen Ebene wird der Lerngegenstand aus seiner fachlich-logischen Struktur heraus betrachtet.

Die semantische Ebene adressiert Sinn und Bedeutung des mathematischen Gegenstands sowie erkenntnistheoretische Aspekte.

Ziel der konkreten Ebene ist die Umsetzung des Lehr-Lern-Prozesses an konkreten Situationen, über die das mathematische Wissen konstruiert wird.

Über die empirische Ebene werden die kognitiven und ggf. sozialen Aspekte der Schülerinnen und Schüler in die stoffdidaktische Analyse integriert.

Über die **Spezifizierung** wird ermittelt, was genau Schülerinnen und Schüler bezüglich eines bestimmten mathematischen Themas lernen sollen, während die **Strukturierung** analysiert, wie diese Elemente miteinander in Verbindung stehen und wie sie im Lernpfad strukturiert werden können.

Aus den vier Ebenen und der jeweiligen Unterscheidung in Spezifizierung und Strukturierung ergeben sich acht (nicht immer trennscharfe) Dimensionen, die den Analyseprozess zu einem Lerngegenstand kategorisieren können. Um dies für Forschungs- und Entwicklungsprozesse greifbar zu machen, haben Hußmann & Prediger (2016, S. 36) typische Fragestellungen formuliert, an die in Tabelle 1.1 angelehnt wird.

Tabelle 1.1: Typische Fragestellungen, angelehnt an Hußmann & Prediger (2016, S. 36)

	Spezifizierung	Strukturierung
Formale Ebene	**Welche Begriffe und Sätze** sollen erarbeitet werden? **Welche Verfahren** sollen erarbeitet werden und **wie** werden sie **formal begründet**?	Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren **logisch strukturieren**? Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind entscheidend, welche weniger bedeutsam? Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?
Semantische Ebene	**Welche Fundamentalen Ideen** liegen hinter den Begriffen, Sätzen und Verfahren? **Welche Grundvorstellungen und Repräsentationen** (graphisch, verbal, numerisch und algebraisch) sind für den Verständnisaufbau entscheidend?	Wie **verhalten** sich Ideen und Vorstellungen **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**? Wie kann ein **Lernpfad angeordnet** werden, in dem das Verständnis, zusammen mit den Erkenntnissen der formalen Ebene, aufgebaut wird?

	Spezifizierung	Strukturierung
Konkrete Ebene	**Welche Kernfragen und Kernideen** können die Entwicklung der Begriffe, Sätze und Verfahren leiten? **Welche Kontexte und Probleme** sind geeignet, um an ihnen die Kernfragen und -ideen exemplarisch zu behandeln und die Inhalte zu rekonstruieren?	Wie kann das Verständnis sukzessive **über konkrete Situationen** in den beabsichtigten Lernpfaden **konstruiert** werden (*horizontale Mathematisierung*)? Wie können die Lernpfade **in Bezug auf die Problemstruktur angeordnet** werden (*vertikale Mathematisierung*)?
Empirische Ebene	**Welche** typischen **individuellen Voraussetzungen** (Vorstellungen, Kenntnisse, Kompetenzen, …) sind zu erwarten und **wie passen** diese zum **angestrebten Verständnis** (Ressourcen vs. Hindernisse)? **Woher** kommen typische **Hindernisse** oder **unerwünschte Vorstellungen**?	Wie können typische **Vorkenntnisse und Vorstellungen** als **fruchtbare Anknüpfungspunkte** dienen? Welche **Schlüsselstellen** (Hindernisse, Wendepunkte, …) gibt es **im Lernweg** der Schülerinnen und Schüler? Wie kann der angestrebte **Lernpfad** bezüglich der Anknüpfungspunkte und Schlüsselstellen **neu angeordnet** werden?

Diese Fragen können dabei helfen, einen Lerngegenstand aus professioneller Sicht vollumfänglich zu analysieren und daraus die Gestaltung eines Lernpfades für Schülerinnen und Schüler abzuleiten. Noch *nicht* abgeleitet werden kann daraus jedoch die Gestaltung einer *konkreten Unterrichtsstunde* – dies bedarf weiterer Überlegungen, z. B. zu Unterrichtsmethoden, Aufgaben, Klassenmanagement, … (Hußmann & Prediger, 2016, S. 37).

1.2 Themen der Vorlesung

In dem Vier-Ebenen-Ansatz wird auf mehrere mathematikdidaktische Theorien Bezug gekommen, die es näher zu betrachten gilt, um eine stoffdidaktische Analyse in diesem Sinne durchführen zu können. Die zentralen Themen der Vorlesung werden demnach sein:

- **Fundamentale Ideen**

- **Grundvorstellungen**
- **Kernideen, Kernfragen und Kontexte**
- **Lernen mit Aufgaben und Arbeitsmitteln**
- **Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)**

Diese zentralen Themen sind v. a. der semantischen und konkreten Ebene zuzuordnen. Die formale Ebene wird insbesondere im Zusammenhang mit der semantischen betrachtet, indem Ihre Vorkenntnisse aus den Mathematik-Fachveranstaltungen (formale Ebene) rekapituliert und mit Grundvorstellungen und Fundamentalen Ideen (semantische Ebene) in Bezug gebracht werden. Die empirische Ebene wird nur angeschnitten und spielt dann in Ihren schulpraktischen Ausbildungselementen des Lehramtsstudium eine bedeutendere Rolle.

1.3 Beispiel Winkelbegriff

Um sich der Komplexität des Vier-Ebenen-Ansatzes bewusst zu werden, sollen mögliche Gedankengänge am Beispiel des Winkelbegriffs durchgeführt werden. Grundlage hierfür bietet die Dissertation *Neue Zugänge zum Winkelbegriff* (Etzold, 2021). In dieser wird zwar nicht der Vier-Ebenen-Ansatz für die stoffdidaktische Analyse verfolgt, aber dennoch lassen sich die einzelnen Elemente darin wiederfinden. Ziel ist hier keine vollumfängliche stoffdidaktische Analyse, sondern eher eine Darstellung der exemplarischen Herangehensweise, wie man sich einer Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstands *Winkel* auf den vier Ebenen nähern kann.

1.3.1 Formale Ebene

Eine fachmathematische Analyse (bereits mit dem Blick auf eine schulische Nutzung) des Winkelbegriffs bieten u. a. Freudenthal (1973), Strehl (1983) oder Mitchelmore (1990).

Freudenthal (1973, S. 441) unterscheidet einen Winkel bspw. dahingehend, ob er über Geraden oder Halbgeraden (bzw. Strahlen) beschrieben wird, ob diese geordnet oder ungeordnet sind und ob sie in der orientierten oder unorientierten Ebene vorliegen (siehe Abbildung 1.1).

Er diskutiert, welchen Einfluss die jeweilige Sichtweise auf dem Maßbereich hat, wie Winkel überhaupt gemessen werden können und wie mit Winkeln operiert werden kann. Was passiert denn, wenn man ein geordnetes Strahlenpaar in der orientierten Ebene spiegelt (vgl. Freudenthal, 1973, S. 443 ff.)?

Wenn die Reihenfolge der Strahlen erhalten bleibt und die Winkelmessung aufgrund der Orientierung der Ebene vorgegeben ist, ändert sich damit ggf. auch das Maß des Winkels (siehe Abbildung 1.2).

Hierzu stellt Freudenthal (1973, S. 443 ff.) weitere fachmathematische Ausführungen dar und schließt damit, dass der elementargeometrische, goniometrische und analytische Winkelbegriff

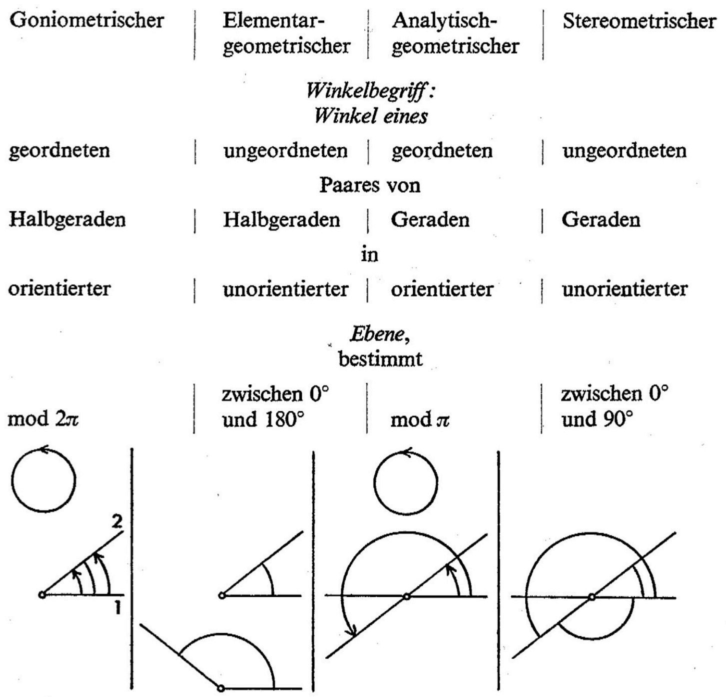


Abbildung 1.1: Winkelbegriffe nach Freudenthal (1973, S. 441)

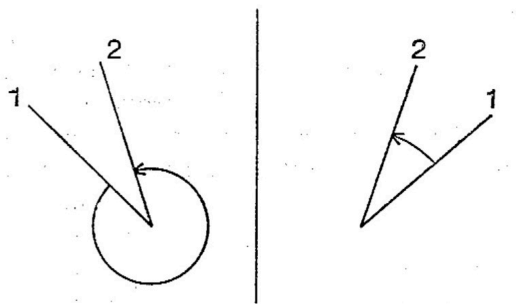


Abbildung 1.2: Spiegelung eines goniometrischen Winkels (Freudenthal, 1973, S. 443)

aus fachlicher Sicht für den schulischen Lernpfad unentbehrlich sind (Freudenthal, 1973, S. 449).

Die *Spezifizierung* besteht also darin, den Begriff zu schärfen und Operationen mit ihm zu beschreiben. Die *Strukturierung* besteht u. a. in der vernetzenden Analyse der verschiedenen Winkelbegriffe und der Schlussfolgerung ihrer gleichermaßen Bedeutsamkeit für den Schulunterricht.

1.3.2 Semantische Ebene

Dazu, welche Vorstellungen Schülerinnen und Schüler zum Winkelbegriff entwickeln sollen, sei u. a. auf Krainer (1989) und Mitchelmore & White (1998) verwiesen. Eine grundsätzliche Schwierigkeit beim Unterrichten von Winkeln sind diverse und (scheinbar) nicht in Verbindung zu bringende Anwendungskontexte, die dennoch über denselben mathematischen Begriff beschrieben werden können. So ist das Sichtfeld eines Tieres ebenso wie die Umdrehung eines Wasserzählers über Winkel beschreibbar – haben doch beide Situationen zunächst nichts miteinander zu tun.

Aufbauend auf den Arbeiten von Krainer (1989) und Mitchelmore & White (1998) können über eine Verknüpfung zur formalen Ebene mithilfe einer *informationstheoretischen Winkeldefinition* (Etzold, 2021, S. 39 f..) vier Grundvorstellungen zum Winkelbegriff ausgearbeitet bzw. validiert werden:

- Winkel als Knick
- Winkel als Feld
- Winkel als Richtungsänderung
- Winkel als Umdrehung

Dabei erhalten die *Bestandteile* eines Winkels (Scheitelpunkt, Schenkel, ggf. Bereich zwischen den Schenkeln, Abweichungsmaß) eine besondere Bedeutung, über die sich auch eine sinnvolle Reihenfolge der Behandlung dieser Grundvorstellungen ableiten lässt. So »bietet es sich an, mit den Winkelfeldern zu beginnen. Bei diesen werden die meisten Bestandteile sichtbar (Scheitelpunkt, beide Schenkel als Begrenzungen sowie der zwischen den Schenkeln relevante Bereich) [...]. Anschließend können Knicke oder Richtungsänderungen behandelt werden, woraufhin die Umdrehungen folgen.« (Etzold, 2021, S. 60)

Die *Spezifizierung* in diesem semantischen Teil ist demnach die Ausarbeitung der Grundvorstellungen. Die Begründung einer möglichen Reihenfolge kann der *Strukturierung* des Lerngegenstands zugeordnet werden.

1.3.3 Konkrete Ebene

Um die einzelnen Vorstellungen zu Winkeln aufzubauen, bedarf es charakteristischer Situationen, an denen der mathematische Kern der jeweiligen Vorstellung besonders gut sichtbar wird.

Abbildung 1.3 zeigt derartige *Winkelsituationen* und die zugehörigen Grundvorstellungen (hier *Winkelkontexte*).

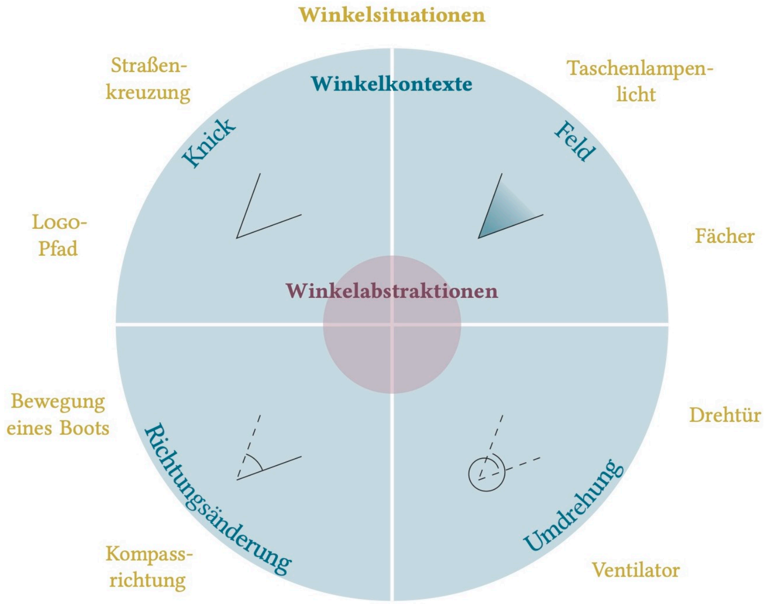


Abbildung 1.3: Winkelsituationen und -kontexte (Etzold, 2021, S. 70)

Exemplarisch für die Grundvorstellung des Winkels als Feld wird darauf aufbauend eine Lernumgebung und darin eingebettetes Unterrichtsmaterial entwickelt, mithilfe dessen die Grundvorstellung ausgebildet werden kann. An der konkreten Situation der *Sichtfelder von Tieren* sollen die Schülerinnen und Schüler Handlungen ausführen, die es ihnen ermöglicht, den mathematischen Kern hinter dem konkreten Beispiel zu erkunden.

Die Schülerinnen und Schüler nutzen dazu eine App (siehe Abbildung 1.4), in der mehrere Tiere mit ihren Sichtfeldern dargestellt werden können, und erhalten u. a. folgende Aufgaben (vgl. Etzold, 2019b, S. 8 ff.):

1. Setze das Schaf an eine Stelle, an der es von der Kuh gesehen wird, aber die Kuh selbst nicht sieht.
2. Setze das Schaf an eine Stelle, an der es nicht von der Kuh gesehen wird.
3. Das Schaf will die Kuh verwirren. Bewege es an möglichst viele Orte, an denen es von der Kuh gesehen wird.
4. Setze das Schaf an eine Stelle, an der es noch gerade so von der Kuh gesehen wird.
5. Wo muss das Schaf lang laufen, damit es die gesamte Zeit gerade so von der Kuh gesehen wird?

An Aufgabe 5 kann z. B. erkundet werde, dass sich das Schaf geradlinig auf der Grenze zwischen Sichtfeld und Nicht-Sichtfeld bewegen muss. In die eine Richtung ist die Bewegung beliebig fortsetzbar, in die andere durch den Kopf der Kuh begrenzt. Eine mathematische Verallgemeinerung dieser Handlung besteht dann in der Identifizierung des Schenkels (Begrenzung) als Strahl (nur in eine Richtung fortsetzbar) mit dem Scheitelpunkt (Kopf der Kuh) als *Quelle* des Winkelfeldes.

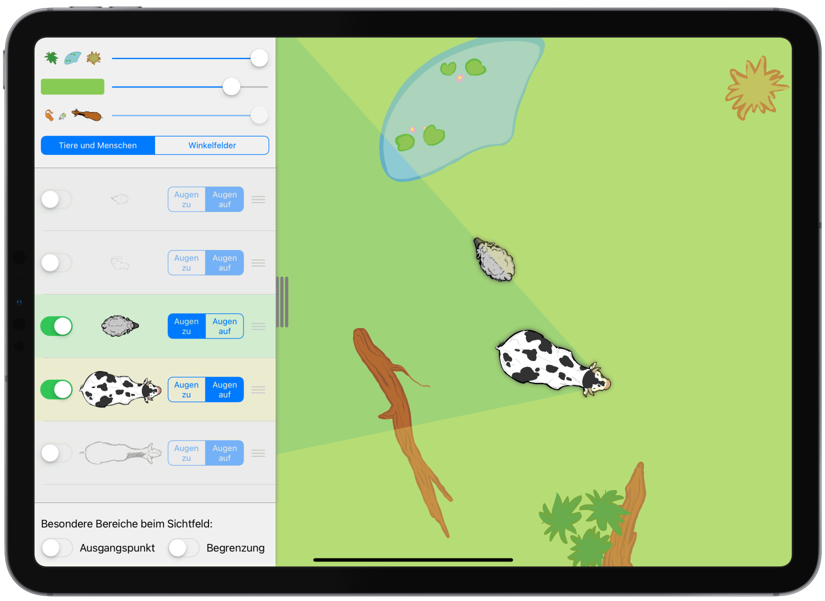


Abbildung 1.4: Screenshot der App Winkel-Farm (Etzold, 2019a)

Als *Spezifizierung* kann das Finden der Sichtfeld-Situation als charakterisches Beispiel für ein Winkelfeld angesehen werden. Die *Strukturierung* führt zum dargestellten Lernpfad und den konkreten Aufgabenstellung, über die konkrete Handlungen verallgemeinert werden und damit das mathematische Verständnis aufgebaut wird.

1.3.4 Empirische Ebene

Die zuvor beschriebene Lernumgebung wurde in mehreren Zyklen erprobt und dabei die Qualität der Handlungen der Schülerinnen und Schüler beobachtet. Ein Ziel bestand darin, dass möglichst verallgemeinerbare Handlungen (wie oben am Beispiel des Schenkels beschrieben) durchgeführt werden.

Es wird erwartet, dass die Repräsentation eines Sichtfeldes von der Draufsicht über eine semintransparent ausgemalte Teilfläche der Ebene noch nicht bekannt ist. Um diese nachzuvollziehen und mit eigenen Erfahrungen in Bezug zu bringen, wird an den Beginn der Unterrichtsstunde ein Bild des Klassenraumes in der Draufsicht präsentiert (siehe Abbildung 1.5). Dann soll eine Schülerin oder ein Schüler beschreiben, was sie/er alles sieht, ohne den Kopf zu drehen. Dieser Bereich wird auf dem Bild eingezeichnet, so dass die Repräsentation des Sichtfeldes im Folgenden zur Verfügung steht.

Abbildung 1.5: Klassenraum von oben (Foto: Christian Dohrmann)

In der Erprobung konnte beobachtet werden, dass einige Bedienschwierigkeiten mit der Anwendung den Lernfortschritt hemmten. Dies konnte u. a. dadurch verbessert werden, dass vor die eigentliche Erarbeitung eine freie Erkundungsphase mit der App (siehe Abbildung 1.6) gesetzt wurde (Etzold, 2021, S. 147, 152). Durch spezifische Aufgabenstellungen wurden bestimmte Funktionen der App fokussiert:

»Das Pferd soll auf dem Steinpflaster stehen, die Frau soll auf dem Pferd sitzen/stehen. Das Pferd guckt in Richtung der grünen Büsche, die Frau hat die Augen zu. Gleichzeitig versteckt sich die Katze unter der Kuh.«

Die Einführungsphase über das Klassenraumfoto folgt aus der *Spezifizierung* innerhalb der empirischen Ebene. Das Hinzufügen der freien Erkundungsphase ist dagegen der *Strukturierung* der Analyse zuzuordnen.

1.3.5 Verknüpfung der Ebenen

An den Ausführungen ist schon sichtbar geworden, dass sich die Ebenen nicht immer trennen lassen und teilweise gegenseitig beeinflussen. Auch gehen oft Spezifizierung und Strukturierung ineinander über.

Das ist aber gar nicht schlimm, ganz im Gegenteil. Es zeigt wieder einmal, wie wichtig solch ein ganzheitlicher Ansatz ist, so dass eine stoffdidaktische Analyse aus den diversen Sichtpunkten heraus betrachtet werden sollte.

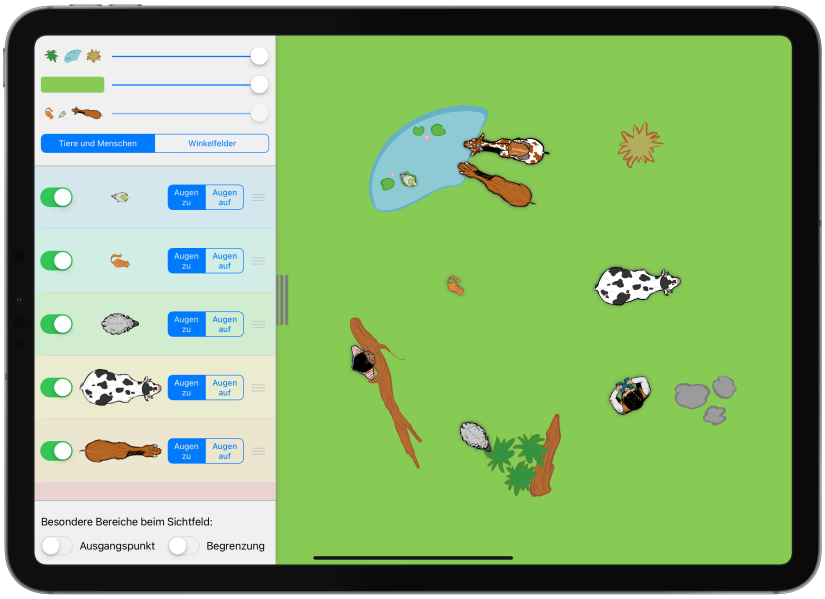


Abbildung 1.6: Möglicher Startbildschirm für die freie Erkundungphase

Wichtig ist v. a., dass Sie sich als Lehrkraft stets darüber im Klaren sind, dass für eine stoffdidaktische Analyse verschiedene Perspektiven verfolgt werden müssen. Sehen Sie den Vier-Ebenen-Ansatz daher auch als Kontrollinstrument, ob Sie an alles gedacht haben, wenn Sie einen Lerngegenstand intensiv analysieren.

1.4 Zum Nachbereiten

1. Lesen Sie den Artikel von Hußmann & Prediger (2016) zum Vier-Ebenen-Ansatz.
2. Reflektieren Sie Ihre bisherige Fach- und Fachdidaktikausbildung in Mathematik dahingehend, welche der aufgeworfenen Fragen Sie zu konkreten Themenbereichen (nicht) beantworten könnten.

2 Fundamentale Ideen

Lernziele

- Sie können Fundamentale Ideen über ihre Kriterien definieren.
- Sie kennen Beispiele für Fundamentale Ideen, auch über die in den Bildungsstandards beschriebenen Kompetenzen hinaus.
- Sie können bei einzelnen Unterrichtsinhalten den Zusammenhang zu zugehörigen Fundamentalen Ideen herstellen.

Material

- Folien zur Vorlesung zu Fundamentalen Ideen (pdf, Keynote)

2.1 Begriffsklärung

Die Entwicklung Fundamentaler Ideen beruft sich auf Bruners Annahme, dass »jedes Kind [...] auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden« kann (vgl. Bruner, 1976, S. 77). Voraussetzung dafür ist, dass die *Struktur* eines Inhaltsbereichs in einer Art und Weise präsentiert wird, dass sie dem Kind zugänglich wird. Diese *hinter den Dingen* liegende Struktur hebt sich vom konkreten Inhaltsbereichen ab, ist allgemeinerer Natur und kann daher über *Fundamentale Ideen* beschrieben werden.

Ziel der Orientierung des Unterrichtens an Fundamentalen Ideen besteht v. a. darin, die (oftmals) isolierten Stoffelemente einzuordnen und in einem größeren Ganzen zu sehen. Im Umkehrschluss heißt dies aber auch, dass die Auswahl des konkreten Stoffes daran orientiert sein muss, wie dieser dazu beitragen kann, den dahinter liegenden mathematischen Kern und die zugehörigen Fundamentalen Ideen zu vertreten.

Die dazu seit den 1960er Jahren in Gang gesetzte Forschung führte zu vielfältigen Vorschlägen Fundamentaler Ideen der Mathematik – jedoch bisher nicht zu einem allgemeingültigen Katalog. Dieser Vielfalt in den Formulierungen und Kategorisierungen kann begegnet werden, indem Fundamentale Ideen über Eigenschaften charakterisiert werden. Im Rahmen dieser Veranstaltung wird folgende Definition genutzt, zitiert aus Schwill (1994).

Definition 2.1 (Fundamentale Idee)**.** Eine **Fundamentale Idee** bzgl. eines Gegenstandsbereichs (Wissenschaft, Teilgebiet) ist ein **Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema**, das

1. in verschiedenen Gebieten des Bereichs vielfältig anwendbar oder erkennbar ist (**Horizontalkriterium**),
2. auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann (**Vertikalkriterium**),
3. in der historischen Entwicklung des Bereichs deutlich wahrnehmbar ist und längerfristig relevant bleibt (**Zeitkriterium**),
4. einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags und der Lebenswelt besitzt (**Sinnkriterium**).

Überblick zur historischen Entwicklung Fundamentaler Ideen

- von der Bank (2016, S. 37 ff.): *Fundamentale Ideen der Mathematik: Weiterentwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung*

2.2 Auswahl fundamentaler Ideen

2.2.1 Kategorisierung

Das Fehlen eines allgemeingültigen Katalogs sollte nicht davon abhalten, bestehende Auflistungen und Strukturierungen Fundamentaler Ideen zu betrachten. Angelehnt an von der Bank (2013, S. 103) und Lambert (2012), die unterschiedliche Kategorisierungen analysiert haben, sollen an dieser Stelle drei grobe Bereiche festgehalten werden.

2.2.1.1 Inhaltsideen

Inhaltsideen beziehen sich auf konkrete Inhaltsbereiche der Mathematik, die die Kriterien Fundamentaler Ideen erfüllen können. Nicht ganz zufällig spiegeln diese sich in den Leitideen der Bildungsstandards wider (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2012, 2022a, 2022b).

Beispiele:

- Zahl
- Algorithmus
- Maß
- Raum und Form
- Funktion
- Zufall

2.2.1.2 Schnittstellenideen

Schnittstellenideen haben die Eigenschaft, dass durch sie die »Mathe(matik) wirkt« und »auch für andere Fächer in ihrer je spezifischen Weise relevant sind« (Lambert, 2012). Damit korrelieren sie mit den prozessbezogenen Kompetenzen der Bildungsstandards.

Beispiele:

- Kommunizieren
- Modellieren
- Argumentieren
- Problemlösen
- Darstellen
- Fragen

2.2.1.3 Tätigkeitsideen

Tätigkeitsideen beziehen sich insbesondere auf innermathematische Tätigkeiten, die sich über verschiedene Inhaltsbereiche hinweg zeigen. Lambert (2012) betont, dass es diese (über die Bildungsstandards hinaus) ebenfalls zu beachten gilt, wenn man einen reichhaltigen Mathematikunterricht bewirken möchte.

Beispiele:

- Approximierung
- Optimierung
- Linearität/Linearisierung
- Symmetrie
- Invarianz
- Rekursion
- Vernetzung
- Ordnen
- Strukturierung
- Formalisierung
- Exaktifizierung
- Verallgemeinern
- Idealisieren

Im Rahmen des Projektmoduls *Erweitertes Fachwissen für den schulischen Kontext in Mathematik*[1] werden Sie insbesondere Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik auf Basis Fundamentaler Ideen herstellen, wofür die Inhalts- und Tätigkeitsideen von hoher Relevanz sind.

[1] siehe Modulbeschreibung bei PULS

Diskussion Fundamentaler Ideen in den Stoffgebieten der Sekundarstufe II

- Analysis: Tietze et al. (2000a)
- Lineare Algebra/Analytische Geometrie: Tietze et al. (2000b)
- Stochastik: Tietze et al. (2002)

2.2.2 Beispiel Linearität

2.2.2.1 Horizontal- und Vertikalkriterium

Linearität ist ein wesentliches Konzept über die gesamte Schullaufbahn hinweg (und darüber hinaus). Dies spiegelt sich in vielfältigen Themenbereichen wider, die sowohl die Breite (*Horizontalkriterium*) als auch Tiefe (*Vertikalkriterium*) von Linearität und (später) auch Linearisierung zeigen. Dieser Abschnitt orientiert sich an den Darstellungen von Danckwerts (1988).

- Linearität als Phänomen tritt schon im Geometrieunterricht der Grundschule mit **Geraden** als essentielle geometrische Objekte auf. In der euklidischen Geometrie sind Geraden neben Punkten die Basisobjekte eines axiomatischen Aufbaus.
- Das **Distributivgesetz** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, ebenfalls bereits in der Grundschule behandelt, beschreibt einen linearen Vorgang und bietet die Grundlage für die halbschriftliche Multiplikation. Über die Schulmathematik hinaus dient es z. B. als eines der Vektorraumaxione (Skalarmultiplikation).
- Das Bestimmen eines **Rechteckflächeninhalts** ist ein linearer Vorgang: Ein Rechteck, das doppelt so breit ist, hat (bei gleicher Höhe) einen doppelt so großen Flächeninhalt. Betrachtet man diese Eigenschaft nicht als Phänomen, sondern als Forderung an eine Flächeninhaltsformel, so kann aus den Bedingungen $A(a_1 + a_2, b) = A(a_1, b) + A(a_2, b)$ und $A(a, b_1 + b_2) = A(a, b_1) + A(a, b_2)$ sowie der Stetigkeit in $\mathbb{R}^+$ die Formel $A(a, b) = a \cdot b$ abgeleitet werden.
- Lineare Zuordnungen der Art $f(x + y) = f(x) + f(y)$ werden zu Beginn der Sekundarstufe I als **proportionale Zuordnungen** behandelt. Dies wird fortgeführt bei **linearen Funktionen** der Art $f(x) = mx+n$, in der Fachmathematik als affin-lineare Abbildungen bezeichnet.
- **Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme** sind ebenfalls bedeutsamer Bestandteil des Mathematikunterrichts. Überhaupt baut die gesamte **Lineare Algebra** auf lineare und affin-lineare Abbildungen auf.
- Die **Strahlensätze** beschreiben ebenfalls ein lineares Verhalten: Geradenabschnitte in c-facher Entfernung sind c mal so lang.

- Beim **Ableitungsbegriff** ist eine wesentliche Vorstellung, dass die Funktion in der Umgebung der zu betrachtenden Stelle linearisiert wird. Insbesondere bei höherdimensionalen Funktionen wird der Linearisierungsansatz weiterverfolgt. Die ebenfalls vorherrschende Tangentenvorstellung ist auf mehr als drei Dimensionen nicht mehr anschau-

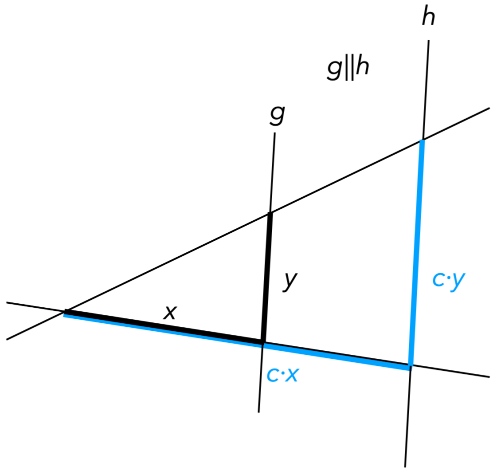


Abbildung 2.1: Strahlensatzfigur

lich übertragbar – der Linearisierungsansatz weist hier aufgrund seiner algebraischen Beschreibung die bessere Verallgemeinerbarkeit auf.

- Eng an den Linearisierungsansatz angelehnt ist die **lineare Approximation** von Funktionen (z. B. $\sin(x) \approx x$ für $x \approx 0$). Die führt sich in der Hochschulmathematik fort, beispielsweise bei Taylor-Reihen.
- Das Bedürfnis der Linearisierung, insbesondere aus der Physik heraus, zeigt sich auch bei der Nutzung **spezifisch skalierter Diagrammachsen**, z. B. von Logarithmuspapier. Wegen der Äquivalenz von $y = c \cdot a^x$ und $\ln y = (\ln a) \cdot x + \ln c$ lassen sich beliebige Exponentialfunktionen auf Logarithmuspapier als lineare Funktionen darstellen.
- Verschiedene Näherungsverfahren, wie das **Newton-Verfahren**, bedienen sich ebenfalls der Linearisierung.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass Linearität derart fundamental ist, dass selbst nicht-lineare Zusammenhänge häufig fälschlicherweise als linear angenommen werden. Dies zeigt sich zum Beispiel an den Fehlannahmen $(x + y)^2 \overset{?!}{=} x^2 + y^2$, $\sqrt{x + y} \overset{?!}{=} \sqrt{x} + \sqrt{y}$ oder $\sin(x + y) \overset{?!}{=} \sin(x) + \sin(y)$. Derartige Fehler können Sie als Lehrkraft besser einordnen (und korrigieren), wenn Sie sich der Fundamentalen Idee *Linearität* (die hier eben *nicht* gilt) bewusst sind. Insbesondere spricht dies auch für ein Explizitmachen der Fundamentalen Idee Ihren Schülerinnen und Schülern gegenüber, so dass Sie derartigen Fehlern nicht nur mit Gegenbeispielen entgegen treten können, sondern auch eine strukturelle Einordnung sichtbar machen können.

Gerade wegen der genannten Fehlannahmen und der für die Schülerinnen und Schüler i. d. R. nicht in Zusammenhang gebrachten Dualität aus *geradlinig* und *additiv und homogen* sehen Tietze et al. (2002, S. 39) die Linearität dagegen nicht als eine im Mathematikunterricht etablierte Fundamentale Idee, »die die Schüler erkennen und die ihr Denken ordnet und anregt«.

2.2.2.2 Zeit- und Sinnkriterium

Linearität zeigt sich auch in der historischen Entwicklung der Mathematik als eine prägende Leitlinie, womit sie das *Zeitkriterium* Fundamentaler Ideen erfüllt. In der Linearen Algebra sei beispielsweise das Lösen linearer Gleichungssysteme im 18. Jahrhundert bis hin zum Gauß-Algorithmus im 19. Jahrhundert oder die Darstellung linearer Vorgänge mit Matrizen im 17./18. Jahrhundert erwähnt (vgl. Tietze et al., 2000b, S. 73 ff.). In der Analysis spiegelt sich die Linearität bzw. Linearisierung in der gesamten Differenzialrechnung wider, von der Interpolation nach der Jahrtausendwende über Taylors *Linear perspective* von 1715 (vgl. Brückler, 2018, S. 39, 119) bis in die Gegenwart der linearen Modellierung nichtlinearer Zusammenhänge.

Historische Originalausgabe

Taylor (1715): *Linear perspective*

Auch Alltagssituationen bzw. die Alltagssprache ist von Linearität geprägt. Beispielsweise treten proportionale Zuordnungen unmittelbar beim Einkaufen auf, wenn Waren abgewogen und der Preis bestimmt wird. Auch reale Messvorgänge, wie z. B. die Geschwindigkeitsmessung, beziehen sich in der Regel auf die Messung von (sehr kurzen) Zeitintervallen, in denen ein lineares Verhalten angenommen wird. Das *Sinnkriterium* zeigt sich aber auch in Begriffen wie *lineares Fernsehen* oder *lineare Erzählungen*. Dies ist zwar keine mathematische Linearität im Sinne der Formel $f(x+y) = f(x) + f(y)$, aber der Begriff findet in einer verwandten Bedeutung in der Alltagssprache Verwendung.

2.2.3 Gegenbeispiele

Zur Verständnisförderung sollen noch ein paar Gegenbeispiele für Fundamentale Ideen angebracht werden.

- Das bereits erwähnte **Distributivgesetz** an sich ist zwar elementar, aber ihm fehlt die Weite, womit es nicht das Horizontalkriterium erfüllt. Die *Linearität* als dahinterliegende Idee ist dagegen weit genug (vgl. ähnliche Argumentation zum **Kommutativgesetz** und der dahinterliegenden Idee der *Invarianz* bei Schubert & Schwill, 2011, S. 63).
- Der **Umkehrfunktion** fehlt das Sinnkriterium, da dieser Begriff in der Lebenswelt außerhab der Mathematik kaum von Relevanz ist. Dahinter liegt vielmehr die Idee der *Reversibilität* als »Umkehrbarkeit von Operationen mit Wiederherstellung des Ausgangszustandes« (Schubert & Schwill, 2011, S. 63).

2.3 Fund. Ideen und Stoffdidaktik

Fundamentale Ideen haben zwar ihren Ursprung in der Fachstruktur, aber sie »sind nicht Elemente der Wissenschaft an sich, sondern Produkte unseres Verstandes, die wir der Wissenschaft aufprägen. Folglich können sie nur relativ zum Menschen objektiviert werden« (Schubert & Schwill, 2011, S. 62). Hinsichtlich des Vier-Ebenen-Ansatzes liegen sie auf der semantischen Ebene mit starken Bezügen zur formalen Ebene.

Für Ihre stoffdidaktische Analyse können Fundamentale Ideen insbesondere hilfreich für die **Dekonstruktion** des Fachwissens und anschließende **Rekonstruktion** des Schulwissens sein.

Wenn sie also beispielsweise eine stoffdidaktische Analyse zur Flächeninhaltsberechnung durchführen, setzen Sie sich mit der Fundamentalen Idee des *Messens* auseinander. Dabei verstehen Sie Messvorgänge als Vergleiche zu einem Standardmaß (z. B. Kästchen auszählen), erkennen Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit als notwendige Prinzipien zur präziseren Beschreibung, sehen Dreiecke als bedeutsame Basisfiguren für Flächeninhaltsberechnungen an und haben den Blick für die Integralrechnung als verallgemeinerbare Methode zur Flächeninhaltsbestimmung krummliniger Figuren (vgl. Vohns, 2000, S. 98 ff.). Sie *dekonstruieren* (zerlegen) damit Ihr eigenes mathematisches Fachwissen.

Nun sind Sie in der Lage, das Wissen zur Flächeninhaltsberechnung für Schülerinnen und Schüler neu aufzubauen, also zu *rekonstruieren* und (unter Hinzunahme der Betrachtung von Grundvorstellungen und den restlichen Ebenen des Vier-Ebenen-Ansatzes) einen Lernpfad zu entwickeln. Im Zusammenhang mit der Integralrechnung kann dies z. B. heißen, dass Sie parallel zum Bilden von Ober- und Untersummen noch einmal eine krummlinig begrenzte Fläche durch Kästchen auszählen lassen – ggf. mit unterschiedlicher Feinheit und einer Abschätzung nach oben und nach unten. Die Fundamentalen Ideen haben für Sie damit auch eine *ordnende Funktion* des Unterrichtsstoffes.

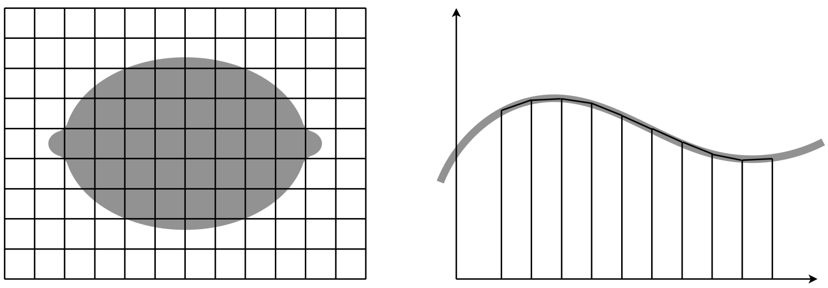


Abbildung 2.2: Flächeninhaltsbestimmung

2.4 Zum Nachbereiten

1. Lesen Sie das Kapitel 3.2.2 *Der Begriff der Fundamentalen Ideen in der Pädagogik* bei Schubert & Schwill (2011, S. 59–65).
2. Wählen Sie ein Unterrichtsthema aus und stellen Sie den Bezug zu Fundamentalen Ideen her, indem Sie die zugehörigen Fragen der semantischen Ebene beantworten.

3 Grundvorstellungen

Lernziele

- Sie können die Grundvorstellungsidee beschreiben und wissen über deren Bedeutung für den Mathematikunterricht.
- Sie kennen Grundvorstellungen zu einzelnen mathematischen Begriffen.

Material

- Folien zur Vorlesung zu Grundvorstellungen (pdf, Keynote)

3.1 Begriffsklärung

3.1.1 Grundvorstellungsidee

Als Sie zu Beginn Ihres Mathematikstudiums die Peano-Axiome zur Definition der Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ kennengelernt haben, konnten Sie dies wahrscheinlich – trotz der Neuigkeit der formalen Beschreibung – derart mit Ihrer Lebenswelterfahrung in Verbindung bringen, dass Natürliche Zahlen abgezählt werden können, also damit z. B. die Platzierungen eines Wettrennens durchnummeriert werden können.

Peano-Axiome (Wikipedia, 2021)

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.
3. 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
5. Enthält die Menge X die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n', so bilden die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von X.

Dieser **Bezug auf eine bekannte Handlung** ist wesentlich dafür, dass die Definition und damit der Begriff der Natürlichen Zahlen für Sie mit einem Sinn behaftet ist. Innerhalb dieser *ordinalen Sichtweise* Natürlicher Zahlen helfen nun geeignete[1] **Repräsentationen** dabei,

[1] *Geeignet* heißt in diesem Fall, dass sich die Kernaussage des Begriffs in der Repräsentation wiederfindet. Im Ordinalzahlaspekt ist dies v. a. die Reihung von Zahlen. Was dabei (noch) nicht relevant ist, ist zum Beispiel die exakte Messbarkeit, wie man sie etwa auf dem Zahlenstrahl repräsentiert.

sich Rechenoperationen vorstellen und sie **operativ**[2] auszuführen zu können, also bspw. das Addieren als ein Weiterzählen aufzufassen (siehe Abbildung 3.1).

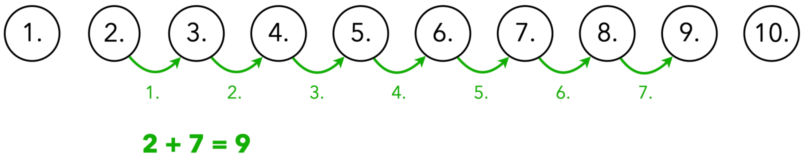


Abbildung 3.1: Additionsaufgabe im ordinalen Zahlaspekt

Mit der Fähigkeit der Verknüpfung des mathematischen Begriffs und der Lebenswelt ist also eine **Anwendung des Begriffs auf die Wirklichkeit** möglich, insbesondere in Modellierungsprozessen. Dabei sind beide Richtungen relevant: Von der Realsituation zur Mathematik und von der Mathematik zur Realität.

Ziel des Mathematikunterrichts sollte es nun sein, für alle relevanten mathematischen Begriffe ein derartiges Verständnis aufzubauen, was auch heißt, verschiedene Vorstellungen zu einem Begriff zu vermitteln. Nach vom Hofe (1995, S. 97 f., Hervorhebung durch H.E.) ergibt sich daraus eine Orientierung an Grundvorstellungen im Mathematikunterricht:

Definition 3.1 (Grundvorstellungen)**.** Die **Grundvorstellungsidee** beschreibt **Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und** dem Phänomen der **individuellen Begriffsbildung**. In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:

- Sinnkonstituierung eines Begriffs durch **Anknüpfung an** bekannte **Sach- oder Handlungszusammenhänge** bzw. **Handlungsvorstellungen**,
- Aufbau entsprechender (visueller) **Repräsentationen bzw. »Verinnerlichungen«**, die **operatives Handeln** auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
- Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch **Erkennen der** entsprechenden **Struktur in Sachzusammenhängen** oder durch **Modellieren** des Sachproblems **mit Hilfe der mathematischen Struktur**.

3.1.2 Ausdifferenzierung

vom Hofe (2014) unterscheidet weiterhin zwischen **primären** und **sekundären** Grundvorstellungen, abhängig von der Erfahrungswelt der Handlungen. Während sich primäre Grundvorstellungen auf reale Handlungserfahrungen stützen (z. B. mit Steckwürfeln in der Arithmetik), entstammen sekundäre Grundvorstellungen aus den Handlungen mit bereits im Mathematikunterricht aufgebauten Repräsentationen (z. B. Operationen auf dem Zahlenstrahl).

[2] *Operativ* heißt hier zum Beispiel, dass Sie zu einer Aufgabe wie $2 + 7$ Nachbaraufgaben ($2 + 8$), Umkehraufgaben ($7 - 2$), Platzhalteraufgaben ($2 + \square = 7$) usw. aufstellen und lösen können.

Ich als Autor dieses Dokuments vertrete die Ansicht, dass Grundvorstellungen zu **Aspekten** eines Begriffs und zu **Operationen** mit diesen Begriffsaspekten formuliert werden können. So wäre das oben angebrachte Beispiel der ordinalen Anordnung der Natürlichen Zahlen ein *Begriffsaspekt* mit der damit verbunden Grundvorstellung, dass die Natürlichen Zahlen eine feste Reihenfolge darstellen, beginnend bei 0. Das *Addieren* ist eine Operation in diesem Aspekt, verbunden mit der Grundvorstellung des Weiterzählens. Eine ähnliche Unterscheidung, jedoch mit inhaltlich anderer Ausrichtung, nehmen auch Greefrath et al. (2016, S. 17) vor. Eine Diskussion dazu findet sich bei Etzold (2021, S. 72 f.). Die genannten Begriffs*aspekte* sind jedoch nicht mit den *Aspekten* der Grundvorstellungsidee in Definition 3.1 zu verwechseln. Auch wenn Sie nicht unmittelbar und sofort jeweils alle Aspekte eine Begriffs im Unterricht ansprechen werden, hilft Ihnen das Wissen über den Aspektreichtum in der Unterrichtsplanung für die Ausbildung eines umfassenden Begriffsverständnisses.

Die in Definition 3.1 dargestellte Grundvorstellungsidee hat einen **normativen** Charakter, d. h. es wird davon ausgegangen, dass (aus professioneller Sicht der Mathematikdidaktik) zu mathematischen Begriffen bestimmte Grundvorstellungen identifiziert werden können, die es im Unterricht zu vermitteln gilt. Oder anders gefragt: »Welche Grundvorstellungen sind zur Lösung des Problems aus der Sicht des Lehrenden adäquat?« (vom Hofe, 1995, S. 106) Diese Sichtweise wird durch eine **deskriptive** Perspektive ergänzt: »Welche individuellen Vorstellungen lassen sich im Lösungsversuch des Schülers erkennen?« (vom Hofe, 1995, S. 107) Diese über empirische Untersuchungen zu ermittelnden Vorstellungen sind das, was sich Schülerinnen und Schüler *tatsächlich* unter einem Begriff vorstellen, wozu ggf. auch typische *Fehlvorstellungen*[3] gehören können. Ein Wissen darüber ist für Lehrkräfte ungemein wichtig, um Ergebnisse von Schülerinnen und Schülern interpretieren und einordnen zu können und dann ggf. entsprechende Hilfsangebote zu machen. Dies entspricht dann einer **konstruktiven** Perspektive auf Grundvorstellungen: »Worauf sind etwaige Divergenzen zurückzuführen, und wie lassen sich diese beheben?« (vom Hofe, 1995, S. 107).

3.2 GV und Stoffdidaktik

Im Rahmen dieser Veranstaltung, insbesondere den von Ihnen ausgearbeiteten Seminarthemen, wird der Schwerpunkt auf *normative* Grundvorstellungen gelegt, was der semantischen Ebene des Vier-Ebenen-Ansatzes zugeordnet werden kann, weil die mathematischen Begriffe hier mit einem Sinn versehen werden. Die *deskriptive* und *konstruktive* Perspektive sind dagegen der empirischen Ebene zuzuordnen, da hier individuelle Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler von Relevanz sind. Dies betrifft insbesondere auch das Potenzial, (ggf. mathematisch

[3]Mit *Fehlvorstellungen* sind hier individuelle Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler gemeint, die mathematisch nicht tragfähig und daher aus fachlicher Perspektive fehlerhaft sind. So ist etwa die Vorstellung, dass Multiplizieren vervielfacht, in den Natürlichen Zahlen tragfähig (und damit eine Grundvorstellung), in den Bruchzahlen jedoch nicht mehr tragfähig und wird dort dann zur Fehlvorstellung. Neben *Fehlvorstellungen* können weitere individuelle Vorstellungen *Alltagsvorstellungen*, *Präkonzepte* o. ä. sein (siehe auch Schecker et al., 2018, S. 11 f.).

unvollständige) individuelle Vorstellungen aufzugreifen bei der Ausbildung von (normativ erwünschten) Grundvorstellungen.

Das Identifizieren von Grundvorstellungen zu einem Begriff ist, genau wie bei den Fundamentalen Ideen, Aufgabe der mathematikdidaktischen Forschung (ein Modell dafür findet man bei Salle & Clüver, 2021). Als Lehrkraft profitieren Sie von diesen Ergebnissen und nutzen sie für Ihre stoffdidaktische Analyse.

Im Gegensatz zu den Fundamentalen Ideen, die ihren Ursprung in der Sachstruktur des mathematischen Inhalts haben, entstammen die Grundvorstellungen stärker der *Bedeutung* der fachlichen Begriffe *für das Individuum*. Grundvorstellungen beziehen sich auf spezifische Begriffe und Operationen mit Begriffen, während Fundamentale Ideen größere, themenübergreifende Leitlinien für die Stoffauswahl und -strukturierung bilden.

Für die Unterrichtsplanung und -durchführung ist neben der Frage, *welche* Grundvorstellungen von Relevanz sind (Spezifizieren im Vier-Ebenen-Ansatz) vor allem interessant, *wie* diese ausgebildet werden können (Strukturieren im Vier-Ebenen-Ansatz).

vom Hofe (1995, S. 123 ff.) schlägt hierzu vor, zunächst aus Lehrkräftesicht den Lerngegenstand von der Mathematik her zu analysieren, Grundvorstellungen zu identifizieren, geeignete Sachzusammenhänge zu finden und diese mit den Erfahrungsbereichen der Schülerinnen und Schüler zu verknüpfen (linke Seite in Abbildung 3.2), während die Schülerinnen und Schüler dann den umgekehrten Weg zum Begriffserwerb gehen (rechte Seite in Abbildung 3.2).

Konkreter wird es an dieser Stelle jedoch noch nicht. Im Rahmen dieser Veranstaltung wird die Gestaltung von Lernprozessen in den Kapiteln 6 bis 8 in den Blick genommen, wo dann Grundvorstellungen noch einmal hinsichtlich der konkreten Ebene des Vier-Ebenen-Ansatzes zur stoffdidaktischen Analyse aufgegriffen werden.

3.3 Beispiele

3.3.1 Natürliche Zahlen

Betrachten Sie folgenden (fiktiven) Zeitungsartikel:

> ***Harlequin erneut auf dem 1. Platz***
>
> *Bei dem traditionellen Pferderennen am 15. Mai hat das Pferd Harlequin erneut gewonnen. Unter den 10 Pferden, die an den Start gingen, belegte es mit 21,3 Sekunden den 1. Platz. Damit war es fast 2 mal so schnell unterwegs wie das letzte Pferd, das ins Ziel kam. Karten für das nächste Rennen können unter 030 23125143 bestellt werden.*

In dem Text tauchen Zahlen unter vielen Aspekten auf: Der **1.** Platz und **15.** Mai sind **Ordinalzahlen**, also Zahlen, die eine Ordnung beschreiben. Wie oben schon beschrieben, lassen diese sich fachmathematisch über die Peano-Axiome beschreiben und wenn mit ihnen gerechnet, entspricht z. B. das Addieren dem **Weiterzählen**.

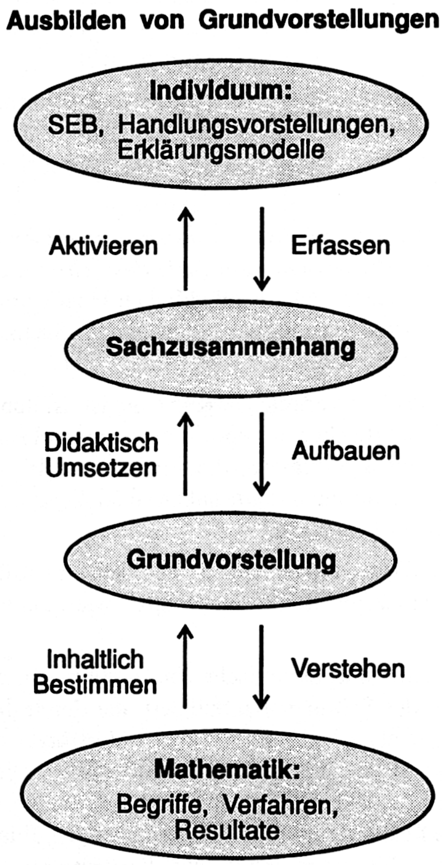


Abbildung 3.2: Ausbilden von Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995, S. 124)

Die **10** Pferde stellen eine **Kardinalzahl** dar, also die Anzahl der Elemente einer Menge. Addiert man Kardinalzahlen, so müssen **Mengen vereinigt** werden, z. B. anschaulich, indem man sie zusammen legt.

Die **21,3** Sekunden entsprechen einer **Maßzahl**, da diese Zahl die Funktion hat, etwas auszumessen (hier die Zeit). Das Addieren in diesem Aspekt entspräche dem **Aneinanderlegen**, z. B. wenn zwei Längenangaben addiert werden.

Dass es **2** mal so schnell wird, enspricht einem **Operatoraspekt**, mit dem die Vielfachheit eines Vorganges beschrieben wird. Das Addieren ist hierin eine **Hinereinanderausführung** eines Vorganges.

Die Telefonnumer **030 23125143** wiederum erfüllt einen **Codierungsaspekt**. Sie hat im mathematischen Sinne keine Bedeutung, nur die Anordnung der Ziffern ist von Relevanz. Entsprechend kann innerhalb dieses Aspektes auch nicht addiert werden. Weitere Beispiele hierfür wären Postleitzahlen oder Identifikationsnummern.

Hinzu kommt noch der Aspekt der **Rechenzahl**. Informationen dazu sowie eine genauere Erläuterung der Zahlaspekte und damit verbundenen Operationen findet man z. B. bei Krauthausen (2018, S. 43 ff.).

3.3.2 Bruchzahlen

Nachdem die Schülerinnen und Schüler ihr gesamte Vorschul- und Primarstufenzeit mit Natürlichen Zahlen verbracht haben, treten mit der Einführung von Bruchzahlen Umbrüche in den subjektiven Vorstellungen auf. Zum Beispiel sind folgende (vermeintlichen) Gesetzmäßigkeiten plötzlich *nicht mehr* gültig:

- Das Produkt zweier Zahlen ist größer als die jeweiligen Faktoren.
- Die Multiplikation kann als wiederholte Addition aufgefasst werden.
- Jede Zahl hat genau einen Repräsentanten.
- Je mehr Stellen eine Zahl hat, desto größer ist sie.

Die Bruchzahlen selbst besitzen nach Padberg & Wartha (2017, S. 19 ff.) folgende Aspekte:

- Bruch als **Anteil eines Ganzen** oder **mehrerer Ganzer** (z. B. $\frac{2}{3}$ als zwei Drittel einer Pizza oder je ein Drittel von zwei Pizzen)
- Bruch als **Maßzahl** (z. B. $\frac{1}{4}$ Liter)
- Bruch als **Operator** (z. B. $\frac{1}{5}$ von 250 €)
- Bruch als **Verhältnis** (z. B. $\frac{2}{3}$ mit der Bedeutung *2 von 3 Schüler/-innen tragen eine Brille*)
- Bruch als **Quotient** (z. B. $\frac{3}{5}$ als Ergebnis bzw. andere Schreibweise von $3 : 5$)
- Bruch als **Lösung einer linearen Gleichung** (z. B. $\frac{3}{5}$ als Lösung von $5x = 3$)
- Bruch als **Skalenwert** (z. B. $\frac{3}{2}$ als Mitte zwischen 1 und 2 auf dem Zahlenstrahl)
- **Quasikardinale Auffassung** von Brüchen (z. B. $\frac{3}{5}$ als 3 mal $\frac{1}{5}$)

Neben den Grundrechenoperationen führt auch das Vergleichen von Brüchen zu Grundvorstellungsumbrüchen. Hinzu kommen noch besondere Operationen mit Bruchzahlen wie das Erweitern und Kürzen.

Das Multiplizieren von Brüchen kann bspw. als Anteilsbildung ($\frac{1}{5}$ mal … heißt $\frac{1}{5}$ *von* …) oder als Rechteckfläche aufgefasst werden (Padberg & Wartha, 2017, S. 108 ff), siehe Abbildung 3.3.

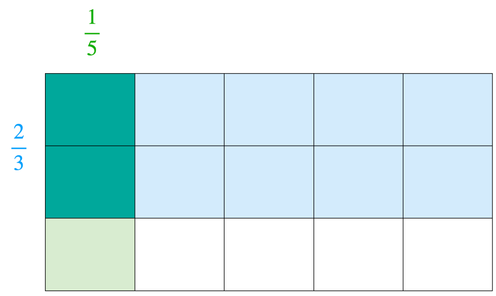


Abbildung 3.3: Vorstellung von $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$ als Rechteckfläche

All dies zeigt, dass Brüche behutsam unterrichtet werden sollten und von einer rein kalkülorientierten Behandlung unbedingt abgesehen werden muss, da diese den nachhaltigen Lernerfolg deutlich mindert.

3.4 Zum Nachbereiten

1. Lesen Sie (mindestens) die Kapitel 1.11.2, 1.11.4., 2.1, 2.2 und 2.4 des Buches *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte* (vom Hofe, 1995).
2. Wählen Sie eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff aus und arbeiten Sie an dieser die Grundvorstellungsidee nach Definition 3.1 durch, d. h.
   - stellen Sie die Sinnhaftigkeit des Begriffs durch mögliche Handlungserfahrungen dar,
   - finden Sie geeignete Repräsentationen, anhand derer operatives Handeln ermöglicht wird und
   - beschreiben Sie mögliche Modellierungsprozesse des Begriffs mithilfe der gewählten Grundvorstellung.
3. Wiederholen Sie Aufgabe 2 an weiteren Begriffen.

4 Kernideen, Kernfragen, Kontexte

Lernziele

- Sie können zu ausgewählten Lerngegenständen Kernideen und Kernfragen formulieren.
- Sie können gegebene Kontexte zu Lerngegenständen hinsichtlich ihrer Sinnstiftung beurteilen.
- Sie sind sich der Möglichkeiten und Bedeutung horizontaler und vertikaler Matheamtisierung bewusst.

4.1 Begriffsklärung Kernidee/-frage

Kernideen haben die Aufgabe, den Lernpfad zu leiten und dabei *sinnstiftend* das *Wesen* des neuen Lerngegenstands sichtbar zu machen. Sie müssen dabei sowohl aus objektiver (also mathematischer) Perspektive tragfähig sein, als auch aus subjektiver Perspektive für die Schülerinnen und Schüler greifbar werden können. Kernideen bieten damit im *Vorfeld* des Lernpfades eine Orientierung und im *Nachgang* des Lernpfades eine Reflexionsmöglichkeit über den Lerngegenstand.[1] Um bei den Schülerinnen und Schülern Lernprozesse zu einem Lerngegenstand zu initiieren, werden die Kernideen ansprechend in Form von **Kernfragen** formuliert. Kernfragen sollten daher prinzipiell aus subjektiver Sicht formuliert sein und insbesondere adressieren, wie man selbst mit dem Lerngegenstand umgehen kann.

Am Beispiel des *Funktionsbegriffs* etwa besteht eine Kernidee darin, dass Funktionen den Zusammenhang zwischen zwei Größen beschreiben und damit auch vorhersagen können (vgl. auch Aspekte des Funktionsbegriffs in Kapitel 13). Als Kernfrage formuliert: »Wie kann man die Beziehung zwischen zwei sich verändernden Größen beschreiben und wie kann man damit weitere Werte bestimmen?« (Thiel-Schneider, 2018, S. 49)

In der *Vorschauperspektive* heißt das, die »Kernidee in Frageform schließt an individuelle Vorerfahrungen, Zielperspektiven, Denk- und Handlungsmuster der Lernenden an und initiiert die Auseinandersetzung mit dem mathematischen Gegenstand in den Worten von Schülerinnen und Schülern« (Leuders et al., 2011, S. 8). In der *Rückschauperspektive* dagegen können über die Kernidee (dann quasi als Antwort auf die Kernfrage) »eine allgemeine Problemstellung und die zu ihrer Bewältigung notwendigen mathematischen Konzepte benannt« werden (Leuders et al., 2011, S. 8).

[1] Der Begriff der Kernidee ist geprägt worden über das Dialogische Lernen nach Gallin und Ruf, spricht dort jedoch vorwiegend die Vorschauperspektive an (vgl. Leuders et al., 2011, S. 7).

Definition 4.1 (Kernidee und Kernfrage)**.** Eine **Kernidee** beschreibt unter sinnstiftender Perspektive das mathematische Wesen eines Lerngegenstand.

Eine **Kernfrage** stellt die Kernidee in Frageform aus der Perspektive der Schülerinnen und Schüler dar.

Kernideen und Kernfragen verfolgen eine ***Vorschauperspektive***, die der Orientierung und Initiierung der Auseinandersetzung mit dem neuen Lerngegenstand dient, sowie eine ***Rückschauperspektive***, die es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, den Lerngegenstand einzuordnen.

Bestandteil Ihrer stoffdidaktischen Analyse auf der konkreten Ebene wird es also sein, zum Lerngegenstand passende Kernideen zu identifizieren und in Form von Kernfragen zu formulieren. Hierzu kann Ihnen die Sinnkonstituierung der jeweiligen Grundvorstellungen dienlich sein (siehe Definition 3.1).

4.2 Begriffsklärung Kontext

Kontexte sollen geeignet sein, sich dem Lerngegenstand exemplarisch zu nähern. Sie weisen damit immer eine Spezialisierung bzw. Konkretisierung des zu betrachtenden Lerngegenstands auf (denn nur so können die Schülerinnen und Schüler einen Zugang dazu finden) – sollen aber so gestaltet sein, dass an Ihnen das Allgemeine erfahrbar ist (denn nur so kann es zu einer Beschäftigung mit der dahinterliegenden Mathematik kommen). Angelehnt an die Sinnstiftung der obigen Kernideen und Kernfragen, kann auch von einem *sinnstiftenden Kontext* gesprochen werden.

Leuders et al. (2011, S. 4, Hervorhebungen im Original) formulieren hierzu:

Definition 4.2 (Sinnstiftender Kontext)**.** Ein **sinnstiftender Kontext** ist ein Ausschnitt einer inner- oder außermathematischen Welt, der folgende Anforderungen möglichst gut erfüllt:

- Er ist anschlussfähig an die Erfahrungen, Interessen und die Denk- und Handlungsmuster der Lernenden **(Lebensweltbezug)**.
- Er ermöglicht es, authentische Fragen zu bearbeiten und dabei auch etwas über den Kontext zu lernen **(Kontextauthentizität)**.
- Er ist problemhaltig und offen genug, um Lernende zum reichhaltigen Fragen und Erkunden anzuregen **(Reichhaltigkeit)**.

Um einer eingeschränkten Sichtweise vorzubeugen, sei gesagt: Der *Lebensweltbezug* heißt nicht zwingend, dass es sich um einen *Realitätsbezug* (im Sinne einer Modellierung) handeln muss. Dies ist zwar in vielen Fällen angebracht, aber auch eine innermathematische Anschlussfähigkeit kann für die Schülerinnen und Schüler ansprechend sein (und damit Bezug zu deren – schulischen – Leben herstellen).

Ein möglicher Kontext, über den die oben formulierte Kernfrage bei *linearen Funktionen* erarbeitet werden kann, wäre die Beschreibung des Abbrennverhaltens einer Kerze (vgl. Böer et al., 2014, S. 108 f). Dieser ist für die Schülerinnen und Schüler aus dem Alltag bekannt (wenn auch nicht alltäglich). Authentisch und reichhaltig ist der Kontext dahingehend, dass die meisten Kerzen zylinderförmig sind und daher tatsächlich ein lineares Abbrennverhalten haben. Auch ist es durchaus von Interesse, die Zeit bis zum vollständigen Abbrennen einer Kerze abschätzen zu können. Weiterhin können (späte) die Eigenschaften des Funktionsgraphen kontextgebundene interpretiert werden (y-Achsenabschnitt als Ursprungslänge der Kerze, Nullstelle als die Zeit bis zum vollständigen Abbrennen, Anstieg des Graphen als Abbrennverhalten, das direkt mit der Dicke der Kerze in Verbindung gebracht werden kann).

Das Finden derartiger stinnstiftender Kontexte ist enorm anspruchsvoll! Sie sollten hier auf (gute) Lehrwerke zurückgreifen und immer wieder mögliche Kontexte kritisch (mithilfe der Definition 4.2) hinterfragen.

Kernideen/Kernfragen und der sinnstiftende Kontext bilden damit eine Einheit in der Zielbildung und Motivation zu Beginn der Auseinandersetzung mit einem Lerngegenstand – beides muss gemeinsam gedacht werden. Es bietet sich an, hier Anforderungssituationen in der **Zone der nächsten Entwicklung** zu formulieren. Dabei handelt es sich um eine Problemsituation, Aufgabe oder Fragestellung, die die Schülerinnen und Schüler zwar mithilfe ihrer bisherigen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten verstehen und nachvollziehen können, zu ihrer Lösung sie jedoch noch nicht selbstständig in der Lage sind. Somit wird eine Motivation geschaffen, sich mit der Thematik tiefer auseinanderzusetzen. Es ist sinnvoll, an dieser Stelle auch schon erste Lösungsversuche zu unternehmen – daran ist dann besonders gut zu erkennen, »was wir nicht wissen bzw. können, um die Anforderung zu bewältigen« (Lompscher, 1996, S. 4).

4.3 Mathematisierungstypen

Währen Kernideen, Kernfragen und Kontexte in erster Linie der *Spezifizierung* des Lerngegenstandes in Hinblick auf den Lernpfad dienen, kann zur *Strukturierung* der Prozess der Mathematisierung stärker in den Blick genommen werden. Angelehnt an Treffers und Freudenthal stellt van den Heuvel-Panhuizen (2003, S. 12) hierzu dar, dass prinzipiell zwei Wege der Mathematisierung möglich sind:

- Bei der **horizontalen Mathematisierung** werden mithilfe mathematischer Objekte und Operationen reale Situationen und alltägliche Probleme beschrieben, geordnet und gelöst. Es wird also aus der Welt des Lebens in die Welt der Symbole übergegangen.[2]

[2]im Original: »In the case of horizontal mathematizing, mathematical tools are brought forward and used to organize and solve a problem situated in daily life. […] to mathematize horizontally means to go from the world of life to the world of symbols« (van den Heuvel-Panhuizen, 2003, S. 12)

- Bei der **vertikalen Mathematisierung** wird innerhalb des mathematischen Systems reorganisiert und operiert, es wird sich also in der Welt der Symbole bewegt.[3]

Beide Arten sind nicht als Konkurrenten aufzufassen, sondern haben ihre gleiche Berechtigung im Mathematikunterricht. Dies ist v. a. vor dem Hintergrund zu verstehen, dass Mathematik *vom Menschen betrieben* wird. Erst durch das Zusammenwirken von horizontaler und vertikaler Mathematisierung kann Mathematik unter dieser Annahme auf ehrliche Weise durchgeführt und damit auch verstanden werden. Dies heißt insbesondere, dass in jeder Klassenstufe beide Arten der Mathematisierung ihre Berechtigung haben und entsprechend realisiert werden müssen.[4]

Das oben dargestellte Kerzenbeispiel entstammt der horizontalen Mathematisierung. Eine vertikale Mathematisierung könnte bspw. im weiteren Lernverlauf – etwa nachdem die Funktionsgleichung $y = m \cdot x + n$ eingeführt wurde – die Untersuchung des Einflusses der Parameter m und n auf den Funktionsgraphen sein. Daran zeigt sich schon, wie hilfreich eine gleichermaßen Betrachtung horizontaler und vertikaler Prozesse ist, nämlich wenn etwa nach einer Veränderung von m und n rückgefragt wird, inwieweit dies noch mit den Abbrennen einer Kerze in Zusammenhang steht (was spätestens bei einem positiven m an seine Grenzen stößt). Derartige *Grenzbetrachtungen* (die mathematisch greifbar, aber in der Realität eben an ihre Grenzen stoßen) bieten ein enormes Potenzial, sich dem abstrakten Wesen von Mathematik zu nähern.

4.4 Zum Nachbereiten

1. Entwickeln Sie für den Begriff der *Exponentialfunktion* eine Kernfrage.
2. Untersuchen Sie, inwieweit folgende Kontexte für Exponentialfunktionen sinnstiftend sind:
   - Bakterienwachstum
   - Bierschaumzerfall
3. Beschreiben und erklären Sie je eine geeignete Variante der horizontalen und vertikalen Mathematisierung am Lerngegenstand der Exponentialfunktion.

[3] im Original: »Vertical mathematizing, on the contrary, stands for all kinds of re-organizations and operations done by the students within the mathematical system itself. […] to mathematize vertically means to move within the world of symbols« (van den Heuvel-Panhuizen, 2003, S. 12)

[4] im Original: »Freudenthal emphasized, however, that the differences between these two worlds are far from clear cut, and that, in his view, the worlds are not, in fact, separate. Moreover, he found the two forms of mathematizing to be of equal value, and stressed the fact that both activities could take place on all levels of mathematical activity.« (van den Heuvel-Panhuizen, 2003, S. 12)

5 Erstes Intermezzo: Flächeninhalt

Lernziele

- Sie vertiefen Ihr Verständnis über den Vier-Ebenen-Ansatz, insbesondere auf der formalen, semantischen und konkreten Ebene.
- Sie verknüpfen Ihr Wissen über Fundamentale Ideen, Grundvorstellungen, Kontexte und Kernideen/Kernfragen am Beispiel des Flächeninhaltsbegriffs.

Material

- Folien zur Vorlesung zum Ersten Intermezzo (pdf, Keynote)

In diesem Kapitel werden Fundamentale Ideen, Grundvorstellungen, Kernideen/Kernfragen und Kontexte im Zusammenhang mit dem Flächeninhaltsbegriff diskutiert. Ein Schulbuchkapitel zum Flächeninhaltsbegriff bietet die Motivation, die formale, semantische und konkrete Ebene des Vier-Ebenen-Ansatzes zu diskutieren und einen ersten Ausblick auf die empirische Ebene zu geben.

In dem Sinne wird also existierendes Material analysiert und hinsichtlich der mathematikdidaktischen Theorie reflektiert. Ein solches Vorgehen wäre auch für Ihren Seminarvortrag bzw. die Hausarbeit im Rahmen dieser Veranstaltung möglich – dann natürlich etwas ausführlicher, als hier dargestellt.

5.1 Darstellung im Schulbuch

In dem Schulbuch *Mathewerkstatt* (Barzel et al., 2012c) wird der Flächeninhalt über den Kontext von Tiergehen eingeführt (siehe Abbildung 5.1). So haben in einem Zoo verschiedene Tiere unterschiedlich große Gehe zur Verfügung. Die Form der Gehege variiert dabei ebenfalls.

Die Schülerinnen und Schüler werden nun in einer Erkundungsphase vor die Aufgabe gestellt, die Gehegegrößen miteinander zu vergleichen sowie möglichst geschickt die Größe eines Geheges messen zu können.

Anschließend erfolgen Ordnungs- und Vertiefungsphasen, in denen das Wissen struktruiert und geübt wird. Das Schulbuch wird durch einen Materialblock begleitet (Barzel et al., 2012b), was in diesem Fall insbesondere dem Auseinanderschneiden und Zusammenlegen bzw. dem

Abbildung 5.1: Einstiegsbild zum Thema Flächeninhalt (Barzel et al., 2012c, S. 168 f.)

Auslegen von Flächen dienen soll. Weiterhin gibt es für Lehrerinnen und Lehrer ein ausführliches Begleitmaterial (Barzel et al., 2012a), in dem alle Seiten des Schulbuches sowie fachdidaktische Hintergründe zur Thematik erläutert sind.

5.2 Formale Ebene

> Welche Begriffe und Sätze sollen erarbeitet werden? Welche Verfahren sollen erarbeitet werden und wie werden sie formal begründet? Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren logisch strukturieren? Welche Verbindungen zwischen den Fachinhalten sind entscheidend, welche weniger bedeutsam? Wie kann das Netzwerk aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?

Fachmathematisch kann der Flächeninhalt einer Figur als ein **nichtnegatives Maß** aufgefasst werden, wobei zwei **zueinander kongruenten Figuren dasselbe Maß** zugeordnet wird und der Flächeninhalt einer Figur gleich der **Summe der Flächeninhalte ihrer Teilfiguren** ist, sofern zerlegbar. Hinzu wird das Flächeninhaltsmaß eines Quadrates der Seitenlänge 1 LE auf 1 LE2 festgelegt (vgl. Kuntze, 2018, S. 161).

Dies ist eine **axiomatische Herangehensweise**, die sich für Schülerinnen und Schüler in der Regel als herausfordernd darstellt (Kuntze, 2018, S. 162). Häufig wird eine umschreibende Definition genutzt, wie: *Der Flächeninhalt einer Fläche gibt an, wie groß diese ist.* Dabei ist jedoch die mögliche Mehrdeutigkeit dieser Formulierung zu beachten – so könnte auch der Umfang einer Figur als Maß für ihre *Größe* aufgefasst werden, da der Größenbegriff in dem Fall unspezifisch ist.

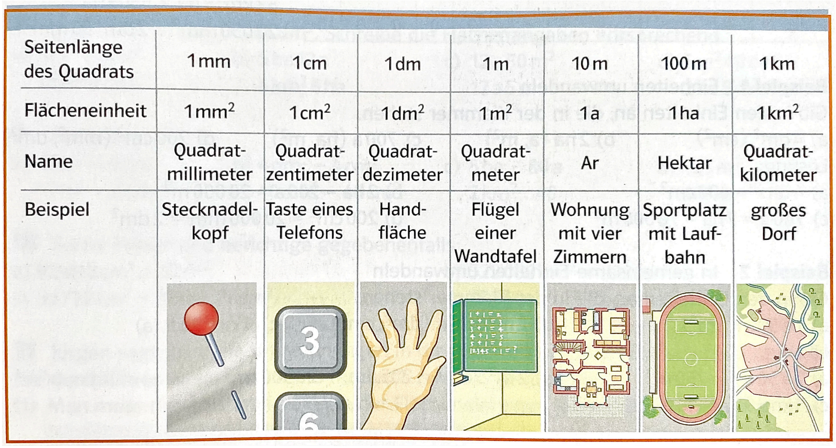
Ob nun eine explizite Definition gewählt wird oder nicht – dies ist auch abhängig von der persönlichen Einstellung der Lehrkraft und den Voraussetzungen der Lerngruppe – in jedem Fall ist ein tragfähiges mathematisches Verständnis aufzubauen. Hierzu können die in den Axiomen enthaltenen Eigenschaften über sinnvolle **Lernhandlungen** aufgebaut werden (siehe auch Wörner, 2014, S. 1328 f.):

- Vergleichen verschiedener Flächen durch Zerlegen, Ergänzen und Übereinanderlegen
- Bestimmen des Maßes einer Fläche über Auszählen mittels eines Vergleichsmaßes
- Nutzen eines quadratischen Vergleichsmaßes, in der Regel 1 cm2

All diese Überlegungen kommen zunächst **ohne Formeln** aus, weshalb diese im Unterricht auch erst im Anschluss an eine inhaltliche Erarbeitung des Flächeninhaltsbegriffs eingeführt und genutzt werden sollten.

Fachsystematisch entscheidend ist, dass ein **Flächenvergleich zunächst ohne ein explizites Maß** möglich ist – hierfür reichen die Kongruenzeigenschaft und das Zerlegen/Ergänzen von Flächen aus. Das Vergleichsmaß ist dann relevant, wenn man den **Flächeninhalt mithilfe einer Zahl objektivieren** bzw. ohne eine explizite Vergleichsfigur auskommen möchte.

Interessant ist hier auch die ***Willkürlichkeit* des Vergleichsmaßes**. Kulturell geprägt ist hier (in Kontinentaleuropa) zwar beispielsweise 1 cm2, aber auch andere Einheiten sind gleichberechtigt möglich. Auch muss das Vergleichsmaß nicht zwingend ein Quadrat sein. Nicht selten wird z. B. von großen Flächen angegeben, wie viele Fußballfelder in sie hineinpassen würden. Für den Unterricht bedeutet das, dass im Sinne einer auf den mathematischen Kern orientierten Sichtweise zunächst möglichst allgemeine und vielfältige (auch *unförmige*) Vergleichsflächen herangezogen werden können. Später ist dann natürlich ein Bezug zu den Standardeinheiten herzustellen (siehe Abbildung 5.2).



Seitenlänge des Quadrats	1 mm	1 cm	1 dm	1 m	10 m	100 m	1 km
Flächeneinheit	1 mm^2	1 cm^2	1 dm^2	1 m^2	1 a	1 ha	1 km^2
Name	Quadratmillimeter	Quadratzentimeter	Quadratdezimeter	Quadratmeter	Ar	Hektar	Quadratkilometer
Beispiel	Stecknadelkopf	Taste eines Telefons	Handfläche	Flügel einer Wandtafel	Wohnung mit vier Zimmern	Sportplatz mit Laufbahn	großes Dorf

Abbildung 5.2: Standardeinheiten typischer Vergleichsflächen (*Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien. 5, Schülerbuch*, 2010, S. 193)

5.3 Semantische Ebene

> Welche Fundamentalen Ideen liegen hinter den Begriffen, Sätzen und Verfahren? Welche Grundvorstellungen und Repräsentationen (graphisch, verbal, numerisch und algebraisch) sind für den Verständnisaufbau entscheidend? Wie verhalten sich Ideen und Vorstellungen zueinander und zu früheren und späteren Lerninhalten? Wie kann ein Lernpfad angeordnet werden, in dem das Verständnis, zusammen mit den Erkenntnissen der formalen Ebene, aufgebaut wird?

5.3.1 Fundamentale Idee Messen

Dem Flächeninhaltsbegriff liegt zweifelsohne die Fundamentale Idee des *Messens* zugrunde. Vohns (2000, S. 52 ff.) stellt ausführlich dar, warum das Messen als Fundamentale Idee aufgefasst werden kann, worauf in diesem Abschnitt Bezug genommen wird. Besondere Betonung legt Vohns (2000, S. 49) darauf, dass Messen »der indirekte Vergleich von Objekten in bezug [sic] auf eine bestimmte Eigenschaft« ist.

Horizontal zieht sich dies über viele Gebiete der Mathematik hinweg (z. B. Messprozesse in der Geometrie, Maßzahlaspekt von Brüchen in der Arithmetik, Erwartungswert als Lagemaß in der Stochastik, Integral in der Analysis), aber auch darüber hinaus ist das Messen von hoher Relevanz (z. B. Messprozesse in der Physik, quantitative Studien in den Sozialwissenschaften, Pulsmessung in der Medizin). Damit wird auch das *Sinnkriterium* der Fundamentalen Idee offensichtlich.

Das *Vertikalkriterium* zeigt sich beispielsweise in der Längenbestimmung in der Grundschule, Flächeninhaltsbestimmung in der Orientierungsstufe, bei Verwandlungen von Flächen (z. B. beim Beweis des Satzes des Pythagoras) bzw. der Approximation von Flächen (z. B. Bestimmen des Kreisflächeninhalts) bis hin zum Integralbegriff als verallgemeinerter Flächeninhalt.

Historisch ist das Messen ebenfalls in vielen Epochen der Mathematik bedeutsam, worauf typische Wortwendungen wie *Alles ist Zahl!* (bei den Pythagoräern), *Die Vermessung der Welt* (mit der Methode der Triangulation) oder die *Quadratur des Kreises* (als klassisches Problem der Geometrie) hindeuten. Auch die Vereinheitlichung von Maßeinheiten (z. B. SI-Einheiten) zeigt die Bedeutsamkeit des Messens für die wissenschaftliche Entwicklung.

5.3.2 GV zum Flächeninhalt

Die folgenden Überlegungen sind empirisch nicht abgesichert, sondern vorwiegend theoretischer Natur. Ansatzpunkt ist ein Beitrag von Wörner (2014). Setzt man die dortigen Darstellungen genauer mit der Definition 3.1 von Grundvorstellungen in Bezug, lassen sich (meiner Meinung nach) Grundvorstellungen zu drei Aspekten des Flächeninhaltsbegriffs formulieren:

- **Maßzahlaspekt**: Flächeninhalt einer Figur als nichtnegative Maßzahl, die mittels normierter Flächeninhaltsmaße bestimmt wird
- **Vereinigungsaspekt**: Flächeninhalt einer Figur als Summe der Flächeninhalte der Teilfiguren, aus denen sich die Figur zusammensetzen lässt
- **Kongruenzaspekt**: Flächeninhalt einer Figur als invariante Eigenschaft gegenüber Kongruenzabbildungen

Für jeden dieser Aspekte sollen nun Handlungserfahrungen, Repräsentationen und mögliche Anwendungen auf die Realität diskutiert werden. Weiterhin werden einige Operationen mit Flächeninhalten besprochen.

5.3.2.1 Maßzahlaspekt

Eine Erfahrung, die die Grundvorstellung zu diesem Aspekt stützt, ist das Auslegen von Flächen mittels normierter Flächenstücke, wie z. B. Quadrate. Hieraus kann die Erfahrung gewonnen werden, dass die Anzahl der Quadrate direkt den Flächeninhalt (mit der entsprechenden Einheit) angibt.

Als Repräsentation kann hierfür einfaches Kästchenpapier dienen, auf das die auszumessende Fläche gemalt wird (siehe Abbildung 5.3). Daran kann man das Abzählen der normierten Flächenstücke durchführen bzw. sich vorstellen. Insbesondere können daran auch Verfeinerungen (und damit genaueres Messen) nachvollzogen werden.

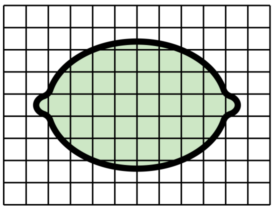


Abbildung 5.3: Repräsentation des Maßzahlaspektes

Eine mögliche Anwendung in der Realität ist das Bestimmen der Größe eines Fußballfeldes. Hier kann man die Länge und Breite in Metern messen, um zu bestimmen, wie viele Quadratmeter in das Feld passen. Dies wird dann zwar nicht über tatsächliches Auslegen realisiert, aber es wird (bei Verwendung der Rechteckinhaltsformel) auf die entsprechende Vorstellung Bezug genommen.

5.3.2.2 Vereinigungsaspekt

Zur Grundvorstellung des Vereinigungsaspektes gehört die Erfahrung, Flächen auseinanderzuschneiden und neu zusammenzulegen, um ihren Flächeninhalt bestimmen bzw. die Größe zweier Flächen miteinander vergleichen zu können.

Die Schnittlinien können bspw. durch gestrichelte Linien repräsentiert werden, so dass die Handlungserfahrung hier in der Vorstellung nachvollzogen werden kann (siehe Abbildung 5.4).

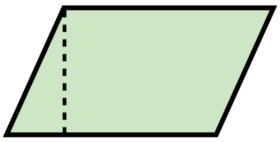


Abbildung 5.4: Repräsentation des Vereinigungsaspektes

Möchte man die Größe eines Landes bestimmen, so ist es in der Regel notwendig, dieses in geeignete Flächenstücke zu zerlegen, deren Flächeninhalte einfacher berechnet werden können. Dies ist also eine mögliche Anwendung in der Realität. Je nach Komplexität der Figur (und ggf. zusätzlichen geometrischen Überlegungen) können so auch Flächeninhaltsformeln gefunden werden (was schon eine innermathematische Anwendung ist).

5.3.2.3 Kongruenzaspekt

Wer hat größere Hände? Um diese Frage zu beantworten, ist eine typische Erfahrung, die Hände aneinanderzulegen und ihre Größen zu vergleichen. Dabei wird die Vorstellung genutzt, dass zueinander kongruente Figuren den gleichen Flächeninhalt haben.

Eine Repräsentation, die dabei unterstützt, im Kongruenzaspekt zu operieren, kann in der Teilung oder *Ummantelung* von Figuren mittels zueinander kongruenter Figuren liegen (siehe Abbildung 5.5). Dies ist z. B. bei der Herleitung der Flächeninhaltsformel für ein Dreieck sinnvoll, um zu erkennen, dass dieser der Hälfte des Flächeninhalts des umschriebenen Rechtecks entspricht[1].

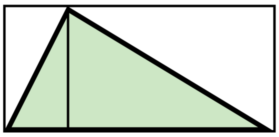


Abbildung 5.5: Repräsentation des Kongruenzaspektes

Eine (innermathematische) Anwendung dieser Vorstellung könnte zum Beispiel bei der Berechnung des Oberflächeninhalts eines Primas liegen, wo die Flächeninhalte von Grund- und Deckfläche i. d. R. nicht einzeln berechnet werden, sondern einer der Flächeninhalte wegen der Kongruenz einfach verdoppelt wird.

5.3.2.4 Operieren mit Flächeninhalten

Für unterschiedliche Operationen, die mit Flächeninhalten durchgeführt werden, können nun in unterschiedlicher Weise die Grundvorstellungen zu den Aspekten aufgegriffen und genutzt werden:

- Um Flächeninhalte direkt miteinander zu **vergleichen**, sind der Vereinigungs- und Kongruenzaspekt relevant, da die Flächen ggf. neu aufgeteilt werden müssen und dann mittels Übereinanderlegen gegeneinander abgeschätzt werden können.
- Um die **Flächeninhaltsformel eines Rechtecks** zu begründen, benötigt es den Maßzahlaspekt, da das Abzählen einbeschriebener Vergleichsquadrate wesentlich ist. Dies hängt auch eng mit der Grundvorstellung der Multiplikation als Rechteckflächeninhalt zusammen (siehe Abbildung 3.3).
- Für die **Flächeninhaltsformel des Dreiecks** sind wieder Kongruenz- und Vereinigungsaspekt relevant, da das Dreieck geeignet zerlegt und mit dem umschriebenen Rechteck verglichen werden muss (siehe Abbildung 5.5). Da Bezug zur Rechteckformel genommen wird, ist natürlich auch der Maßzahlaspekt relevant.

[1] Um diesen Zusammenhang vollumfänglich zu verstehen, sind weiterhin der Vereinigungsapekt (Aufteilen in Teildreiecke) und der Maßzahlaspekt (um die Flächeninhaltsformel fürs Rechteck zu verstehen) nötig.

- Um **Flächeninhalte zu approximieren**, wie z. B. den eines Kreises (siehe Abbildung 5.6), benötigt es wieder alle drei Vorstellungen. So kann der Kreis in zueinander kongruente Teilflächen zerlegt werden (Kongruenz- und Vereinigungsaspekt), deren Gesamtflächeninhalt dann über die Rechteckformel näherungsweise bestimmt wird (Maßzahlaspekt).

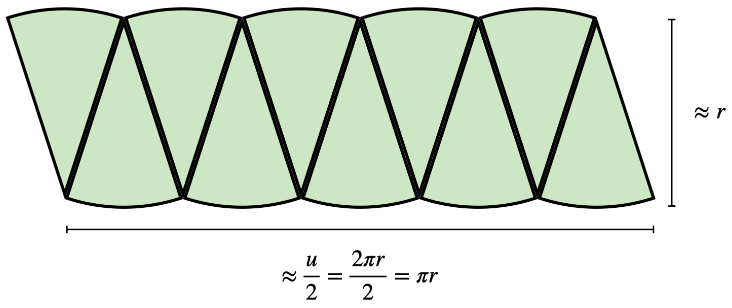


Abbildung 5.6: Approximation des Kreisflächeninhalts

- Bei der **Bestimmung von Oberflächeninhalten** von Körpern, werden der Vereinigungsaspekt für die einzelnen Seitenflächen und ggf. der Kongruenzaspekt angesprochen, wenn es zueinander kongruente Seitenflächen gibt (wie z. B. bei Prismen), deren Flächeninhalte dann mit der entsprechenden Anzahl multipliziert und nicht einzeln ausgerechnet werden.

5.3.3 Auswirkungen auf Lernpfad

Der Lernpfad des Schulbuches greift diese Fundamentale Idee und die Grundvorstellungen auf, indem zunächst Flächeninhalte (durch Ausseinanderschneiden und Zusammenfügen) miteinander verglichen werden, anschließend das Auslegen mit normierten Flächenstücken erfolgt und daraufhin geeignete Maßeinheiten eingeführt werden und die Flächeninhaltsberechnung eines Rechtecks behandelt wird.

Die formale und empirische Ebenen wurden hier getrennt dargestellt, was jedoch für eine stoffdidaktische Analyse gar nicht zwingend nötig ist. Entscheidend ist, dass Sie den ganzheitlichen Blick auf die aufgeworfenen Fragen haben und diese (zumindest in Teilen) beantworten können. Die getrennte Darstellung dient hier noch der Übersicht für Sie als *Anfängerinnen und Anfänger* im Umgang mit stoffdidaktischen Analysen – auch wenn darauf verzichtet wurde, die einzelnen Fragen schrittweise explizit zu beantworten.

5.4 Konkrete Ebene

Welche Kernfragen und Kernideen können die Entwicklung der Begriffe, Sätze und Verfahren leiten? Welche Kontexte und Probleme sind geeignet, um an ihnen die

Kernfragen und -ideen exemplarisch zu behandeln und die Inhalte zu rekonstruieren? Wie kann das Verständnis sukzessive über konkrete Situationen in den beabsichtigten Lernpfaden konstruiert werden (horizontale Mathematisierung)? Wie können die Lernpfade in Bezug auf die Problemstruktur angeordnet werden (vertikale Mathematisierung)?

Als **Kontext** wählt das Schulbuch den Platzbedarf bei **Tiergehegen im Zoo.** Dieser Kontext ist aus mehreren Gründen besonders gut geeignet:

- In der Regel interessiert tatsächlich nur der Flächeninhalt des Geheges. Inhaltliche Verwechslungen mit dem Umfang oder dem Volumen können damit reduziert werden.
- Es ist aus dem Kontext heraus sinnstiftend, die Größe der Gehege miteinander zu vergleichen, da verschiedene Tiere einen unterschiedlichen Platzbedarf haben.[2]
- Verschiedene Formen der Tiergehege lassen sich nutzen, um verschiedene Vergleichsstrategien zu motivieren. So können z. B. Flächen zerlegt und neu zusammengesetzt werden, runde Formen angenähert werden und durch das Ausschneiden der Figuren ist ein Übereinanderlegen möglich.

Dabei werden zwei **Kernideen** aufgegriffen (Barzel et al., 2012a, S. 359 f.):

- Eine besteht im **Vergleich der Flächeninhalte** der verschiedenen Gehege. Dieses aus dem Kontext heraus begründbare Vorgehen führt im mathematischen Sinne zum Bedürfnis, Flächen zu vermessen, um sie miteiander vergleichen zu können. Als subjektive Kernfrage wird formuliert: »Wie kann ich die Größe von Flächen vergleichen?« (Barzel et al., 2012c, S. 170)
- Die zweite Kernidee ist das **geschickte Bestimmen eines Flächeninhalts**, wofür zunächst mittels Kästchenpapier das Auszählen von Flächen mit unterschiedlicher Genauigkeit diskutiert wird, anschließend geeignete Maßeinheiten eingeführt werden und die Flächeninhaltsformel des Rechtsecks behandelt wird. Die Formulierung der zugehörigen Kernfrage lautet: »Wie kann ich die Größe von Flächen geschickt bestimmen?« (Barzel et al., 2012c, S. 171)

Diese Ideen werden jeweils über die Prozesse des Erkunden, Ordnens und Vertiefens realisiert. Durch dieses Vorgehen[3] wird das Verständnis sukzessive aufgebaut. Im Erkundungsprozess dient die Kernidee der Vorschauperspektive, während sie beim Ordnen und Vertiefen eher eine rückschauende Perspektive hat. Diese *Objektivierung* wird auch dahingehend sichtbar, dass die Kernfragen im Ordnen-Kapitel nun nicht mehr aus der Ich-Perspektive formuliert werden: »Wie kann man die Größe von Flächen vergleichen?«, »Wie kann man die Größe von Flächen bestimmen?« (Barzel et al., 2012c, S. 176 f.)

[2] Verwiesen wird auch auf ein *Gutachten über Mindestanforderungen an die Haltung von Säugetieren* vom Bundesministerium für Ernährung und Landwirtschaft (2014).

[3] Prediger et al. (2014) bezeichnen diese Prozesse auch als *Kernprozesse* des Unterrichtens.

5.5 Ausblick auf empirische Ebene

> Welche typischen individuellen Voraussetzungen (Vorstellungen, Kenntnisse, Kompetenzen, ...) sind zu erwarten und wie passen diese zum angestrebten Verständnis (Ressourcen vs. Hindernisse)? Woher kommen typische Hindernisse oder unerwünschte Vorstellungen? Wie können typische Vorkenntnisse und Vorstellungen als fruchtbare Anknüpfungspunkte dienen? Welche Schlüsselstellen (Hindernisse, Wendepunkte, ...) gibt es im Lernweg der Schülerinnen und Schüler? Wie kann der angestrebte Lernpfad bezüglich der Anknüpfungspunkte und Schlüsselstellen neu angeordnet werden?

Kuntze (2018, S. 159 f.) verweist auf typische Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Umgang mit dem Flächeninhaltsbegriff.

So kommt es häufig zu einer Verwechslung zwischen Längenmaßen, Flächeninahlten und Volumina. Eine Ursache wird v. a. in der frühzeitigen kalkülhaften Herangehensweise gesehen, Flächeninhalte über Formeln berechnen zu müssen. So fehlt ein tiefergehendes Begriffsverständnis und die Formeln können nicht sinnstiftend genutzt werden. Dem kann u. a. dadurch begegnet werden, indem bewusst die Zusammenhänge hergestellt werden, z. B. zwischen Umfang und Flächeninhalt. Letztlich zeigen empirische Erhebungen, dass Kinder mit einem vertieften Verständnis über Flächeninhalte auch besser in der Lage sind, entsprechende Formeln anzuwenden (Wörner, 2014, S. 1330).

Weiterhin besteht wegen der Wortverwandtschaft von *Fläche* und *Flächeninhalt* die Gefahr, dass entsprechende Vorstellungen nicht aufgebaut werden, insbesondere dann, wenn die Begriffe (zumindest von der Lehrkraft) nicht sauber getrennt verwendet werden. Die Fläche ist die Figur an sich und wird über ihre *Form* bestimmt. Der Flächeninhalt ist ein *Maß* für die Größe der Figur (vgl. Barzel et al., 2012a, S. 362). Insbesondere für Schülerinnen und Schüler, deren Muttersprache nicht Deutsch ist, kann die fehlerhafte Verwendung dieser feinen Unterschiede hinderlich dabei sein, dem Unterricht zu folgen.

Derartige Schwierigkeiten werden im Schulbuch implizit aufgegriffen (z. B. strikte sprachliche Trennung) oder explizit thematisiert (z. B. verbindende und vergleichende Behandlung mit dem Umfang von Figuren), so dass auch dies wieder die Gestaltung des Lernpfades beeinflusst.

5.6 Zum Nachbereiten

1. Diskutieren Sie zu weiteren typischen Operationen mit Flächeninhalten, welche Grundvorstellungen dafür aufgegriffen und genutzt werden.
2. Finden Sie einen alternativen Kontext (statt den Zoogehegen), der geeignet ist, die Kernideen so aspektreich durchzuarbeiten.

Lernprozesse gestalten

6 Lernhandlungen

7 Arbeitsmittel

8 Aufgabengestaltung

9 Zweites Intermezzo

Inhaltsbezogene Kompetenzen

10 Leitidee Zahl und Operation

11 Leitidee Messen und Größen

12 Leitidee Raum und Form

13 Leitidee Strukturen und funktionaler Zusammenhang

14 Leitidee Daten und Zufall

A Seminar und Hausarbeit

B Vollständiges Literaturverzeichnis

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2012a). *Mathewerkstatt. 5, Handreichungen* [DVD]. Cornelsen.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2012b). *Mathewerkstatt. 5, Materialblock* (Mittlerer Schulabschluss, allgemeine Ausg., 1. Aufl). Cornelsen.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2012c). *Mathewerkstatt. 5, Schulbuch* (Mittlerer Schulabschluss, allgemeine Ausg., 1. Aufl.). Cornelsen.

Böer, H., Göckel, D., Kliemann, S., Koepsell, A., Puscher, R., Schmidt, W., & Vernay, R. (2014). *Mathe live. 8, Schülerbuch* (1. Aufl). Klett.

Brückler, F. M. (2018). *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-55574-3

Bruner, J. S. (1976). Die Bedeutung der Struktur im Lernprozeß. In A. Holtmann (Hrsg.), *Das sozialwissenschaftliche Curriculum in der Schule: Neue Formen und Inhalte* (S. 77–90). VS Verlag für Sozialwissenschaften. https://doi.org/10.1007/978-3-322-85275-5

Bundesministerium für Ernährung und Landwirtschaft. (2014). *Gutachten über Mindestanforderungen an die Haltung von Säugetieren.* https://www.bmel.de/SharedDocs/Downloads/DE/_Tiere/Tierschutz/HaltungSaeugetiere.pdf;jsessionid=6B0914AB410E7E118E6CC87C65735734.live832?__blob=publicationFile&v=7

Danckwerts, R. (1988). Linearität als organisierendes Element zentraler Inhalte der Schulmathematik. *Didaktik der Mathematik*, *16*(2), 149–160.

Etzold, H. (2019a). *Winkel-Farm* (Version 2) [App]. https://apps.apple.com/de/app/winkel-farm/id1369585218

Etzold, H. (2019b). *Winkel-Farm – Leitfaden für Lehrerinnen und Lehrer* (Version 2). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.4747700

Etzold, H. (2021). *Neue Zugänge zum Winkelbegriff* [Dissertation, Universität Potsdam]. https://doi.org/10.25932/publishup-50418

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 2). Klett.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; 4. Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Subject-matter didactics in German traditions: Early historical developments. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 11–31. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0103-7

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 33–67. https:

//doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8

Hußmann, S., Rezat, S., & Sträßer, R. (2016). Subject Matter Didactics in Mathematics Education. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 1–9. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0105-5

Jahnke, T. (2010). Vom mählichen Verschwinden des Fachs aus der Mathematikdidaktik. *GDM-Mitteilungen 89*, 21–24. https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/559/550

Krainer, K. (1989). *Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs* [Dissertation]. Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5

Kuntze, S. (2018). Flächeninhalt und Volumen. In *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 149–177). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8_7

Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien. 5, Schülerbuch (Sachsen, 1. Aufl). (2010). Klett.

Lambert, A. (2012). *Gedanken zum aktuellen Kompetenzbegriff für den (Mathematik-)unterricht* [Vortrag]. Eingangsstatement zur Podiumsdiskussion im Rahmen des 3. Fachdidaktischen Kolloquiums an der Universität des Saarlandes, Saarbrücken. https://www.uni-saarland.de/fileadmin/upload/einrichtung/zfl/PDF_Fachdidaktik/PDF_Kolloquium_FD/Kompetenzbegriff_für_den_Mathematikunterricht_Statement_mit_Folien.pdf

Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B., & Prediger, S. (2011). Das macht Sinn! Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *53*(37), 2–9. https://www.researchgate.net/publication/233978329

Lompscher, J. (1996). *Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten - Lernen und Lehren in Zonen der nächsten Entwicklung*. https://publishup.uni-potsdam.de/opus4-ubp/frontdoor/deliver/index/docId/444/file/AUFSTEIG.pdf

Mitchelmore, M. (1990). Psychologische und mathematische Schwierigkeiten beim Lernen des Winkelbegriffs. *mathematica didactica*, *13*, 19–37.

Mitchelmore, M., & White, P. (1998). Development of Angle Concepts: A Framework for Research. *Mathematics Education Research Journal*, *10*(3), 4–27.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52969-0

Prediger, S., Hußmann, S., Leuders, T., & Barzel, B. (2014). Kernprozesse – Ein Modell zur Strukturierung von Unterrichtsdesign und Unterrichtshandeln. In I. Bausch, G. Pinkernell, & O. Schmitt (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung. Festschrift für Regina Bruder* (S. 81–92). WTM. https://www.researchgate.net/publication/261402528_Fachspezifische_Differenzierungsansatze_fur_unterschiedliche_Unterrichtsphasen

Salle, A., & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik*. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5

Schecker, H., Wilhelm, T., Hopf, M., & Duit, R. (Hrsg.). (2018). *Schülervorstellungen und Physikunterricht: Ein Lehrbuch für Studium, Referendariat und Unterrichtspraxis*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57270-2

Schubert, S., & Schwill, A. (2011). *Didaktik der Informatik* (2. Aufl). Spektrum, Akad. Verl. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2653-6

Schupp, H. (2016). Gedanken zum „Stoff“ und zur „Stoffdidaktik“ sowie zu ihrer Bedeutung für die Qualität des Mathematikunterrichts. *Mathematische Semesterberichte*, *63*(1), 69–92. https://doi.org/10.1007/s00591-016-0159-y

Schwill, A. (1994). *Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik*. Herbsttagung des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik, Wolfenbüttel. http://www.informatikdidaktik.de/didaktik/Forschung/Wolfenbuettel94.pdf

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012).* https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022a). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA). (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022).* https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022b). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004, i.d.F. vom 23.06.2022).* https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf

Strehl, R. (1983). Anschauliche Vorstellung und mathematische Theorie beim Winkelbegriff. *mathematica didactica*, *6*, 129–146.

Taylor, B. (1715). *Linear perspective*. printed for R. Knaplock at the Bishop’s-Head in St. Paul’s Church-Yard. https://nl.sub.uni-goettingen.de/id/0590700700

Thiel-Schneider, A. (2018). *Zum Begriff des exponentiellen Wachstums*. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21895-9

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000a). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis* (2. Aufl.). Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-90568-0

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000b). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-86479-6

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2002). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 3: Didaktik der Stochastik*. Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-83144-6

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 9–35. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Vohns, A. (2000). *Das Messen als fundamentale Idee* [1. Staatsexamensarbeit, Universität-Gesamthochschule Siegen]. https://wwwu.aau.at/avohns/pdf/messen.pdf

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag.

vom Hofe, R. (2014). Primäre und sekundäre Grundvorstellungen. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10.03.2014 bis 14.03.2014 in Koblenz*. WTM. https://doi.org/10.17877/DE290R-8808

von der Bank, M.-C. (2013). Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung. In A. Filler & M. Ludwig (Hrsg.), *Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken* (S. 83–124). Franzbecker. https://www.math.uni-sb.de/service/lehramt/AKGeometrie/AKGeometrie2012.pdf

von der Bank, M.-C. (2016). *Fundamentale Ideen der Mathematik: Weiterentwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung* [Dissertation, Universität des Saarlandes]. https://doi.org/10.22028/D291-26673

Wikipedia. (2021). *Peano-Axiome — Wikipedia, die freie Enzyklopädie*. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Peano-Axiome&oldid=216675163

Wittmann, E. C. (2015). Strukturgenetische didaktische Analysen – empirische Forschung „erster Art“. *mathematica didactica*, 239–255. http://www.mathematica-didactica.com/altejahrgaenge/md_2015/md_2015_Wittmann_Stoffdidaktik.pdf

Wörner, D. (2014). Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff ausbilden – eine exemplarische Studie. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10.03.2014 bis 14.03.2014 in Koblenz* (S. 1327–1330). https://doi.org/10.17877/DE290R-1049