Stoffdidaktik Mathematik – Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2022/23

Dr. Heiko Etzold, Universität Potsdam

Letzte Änderung: 06.02.2023

Inhaltsverzeichnis

Über dieses Dokument

Die Veranstaltung *Stoffdidaktik Mathematik* wird über dieses Dokument begleitet. Es wird fortlaufend aktualisiert und zur Verfügung gestellt. Über ein Git-Respository können Änderungen nachverfolgt werden. In der html-Version gelangt man über die Menüleiste am oberen Rand sowohl zu den Rohdaten als auch zu einer pdf-Version. Die Darstellung der Inhalte ist jedoch optimiert für die html-Version dieses Dokuments.

Zitiere als:

> Etzold, H. (2023). *Stoffdidaktik Mathematik – Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2022/23* (Version vom 06.02.2023). https://stoffdidaktik.heiko-etzold.de

Das Vorlesungsskript zur letztjährigen Veranstaltung finden Sie unter https://stoffdidaktik.heiko-etzold.de/2021.

Lizenz

Stoffdidaktik Mathematik an der UP

Struktur der Veranstaltung

Die Veranstaltung *Stoffdidaktik Mathematik*[1] besteht aus einer **Vorlesung (2 SWS)** und einem zugehörigen **Seminar (2 SWS)**.

Im Wintersemester 2022/23 wird die **Vorlesung semesterbegleitend** stattfinden. Das **Seminar** können Sie entweder **als Block** am Ende des Wintersemesters oder **semesterbegleitend** im Sommersemester 2023 besuchen.

In der Vorlesung erhalten Sie einen **Input zu stoffdidaktischen Grundlagen**, wobei der Schwerpunkt auf **stoffdidaktischen Theorien** liegt, die über vielfältige Unterrichtsbeispiele illustriert werden. Im Seminar haben Sie die Aufgabe, diese Grundlagen selbstständig **auf verschiedene Lerngegenstände anzuwenden**.

Sie halten einen **Seminarvortrag** (30 bis 45 Minuten) als Voraussetzung für die Zulassung zur Modulprüfung und fassen Ihre Erarbeitungen in einer **Hausarbeit** (6 bis 8 Seiten) zusammen, die als Modulprüfung dient. Genauere Hinweise dazu finden Sie im Anhang A.

Am Ende der Veranstaltung steht damit ein **Katalog an stoffdidaktischen Analysen**, der Ihnen im weiteren Studium und in Ihrer späteren Lehrtätigkeit an der Schule dienlich sein kann.

Einordnung

Die Veranstaltung *Stoffdidaktik Mathematik* findet nach empfohlenem Studienverlaufsplan im **5. Fachsemester parallel zur *Einführung in die Mathematikdidaktik*** statt.

Das heißt insbesondere, dass Sie bereits die **Grundlagen** zur Analysis, Linearen Algebra, Stochastik, Geometrie, Algebra und Numerik studiert haben sollten. Auf diese Grundlagen wird in der Stoffdidaktisch **fachlich aufgebaut**.

Während Sie sich in der *Einführung in die Mathematikdidaktik* mit verschiedenen Lehr-Lern-Theorien, Unterrichtsprinzipien, prozessbezogenen Kompetenzen oder methodischen Grundlagen des Mathematikunterrichtens beschäftigen, liegt in der *Stoffdidaktik Mathematik* der Fokus

[1] Die Modulbeschreibung finden Sie bei PULS.

auf der **Auswahl und Strukturierung der Unterrichtsinhalte**, basierend auf fachlichen und fachdidaktischen Erkenntnissen.

Im Anschluss an beide Veranstaltungen absolvieren Sie die **Schulpraktischen Studien**, in denen Sie die erworbenen Kenntnisse in die **Unterrichtspraxis** transferieren und erste eigene Unterrichtsstunden im Fach Mathematik halten.

Kompetenzziele der Veranstaltung

Als Kompetenzen, die Sie nach Abschluss von Vorlesung und Seminar erreicht haben sollen, sind angedacht:

- Sie **kennen Aspekte und Grundvorstellungen** zu zentralen mathematischen Begriffen.
- Sie **beurteilen Unterrichtsmaterialien und Lernumgebungen** hinsichtlich ihrer stoffdidaktischen Eignung.
- Sie **erstellen Aufgaben und erste Lernumgebungen** zu konkreten Stoffgebieten.
- Sie **erkennen mathematikdidaktische Prinzipien und Ideen** als **Entscheidungs- und Strukturierungsgrundlage** zu stofflichen Inhalten der mathematischen Bildung.
- Sie **wählen zielgerichtet** analoge und digitale **Medien** zur Unterstützung stofflich orientierter Lehr-Lern-Prozesse aus.
- Sie **setzen sich** selbstständig **mit stoffdidaktischen Fragestellungen auseinander** und nutzen dafür geeignete mathematikdidaktische Literatur.
- Sie **reflektieren die Inhalte der vorangegangenen Mathematik-Fachmodule** unter stoffdidaktischen Gesichtspunkten.

Was ist Stoffdidaktik?

Für die Disziplin der *Stoffdidaktik Mathematik* gibt es keine allgemeingültige Definition, auch haben sich die Schwerpunkte in der historischen Entwicklung stets verschoben.

Grundsätzliches Ziel ist, stoffliche Inhaltsbereiche für den Mathematikunterricht auszuwählen (***Was?***) und aufzubereiten (***Wie?***). Im Sinne dieser Veranstaltung kann Stoffdidaktik grob als **Spezifierung und Strukturierung von Lerngegenständen** aufgefasst werden (zur begrifflichen Einordnung siehe auch Hußmann et al., 2016).

Während hierzu, historisch betrachtet, anfangs der Stoff ausschließlich aus fachmathematischer Perspektive aufbereitet wurde (z. B. durch *didaktisch-orientierte Sachanalysen*), nahmen in der Folgezeit mehr und mehr auch Lehr-Lern-Theorien Einzug – gar ein Verschwinden der stofflichen Orientierung der Mathematikdidaktik wird befürchtet (vgl. Jahnke, 2010).

Mit dem Begriff der **Strukturgenetischen Analyse** erweitert Wittmann (2015) die historische Sichtweise als eine »Mathematikdidaktik *vom Fach aus*«, die sich »auf implizite Theorien des

Lehrens und Lernens, die im Fach selbst liegen[, stützt]« (Wittmann, 2015, S. 240). »Anders als bei der Stoffdidaktik, die sich im Wesentlichen auf die logische Analyse des Stoffes und die Wissensvermittlung konzentriert hat, stehen jetzt aber die Genese des Wissens im Verlauf der Schulzeit und Lernprozesse unter Bezug auf unterschiedliche Lernvoraussetzungen im Vordergrund« (Wittmann, 2015, S. 250). Eine derartig ganzheitliche Sichtweise soll auch den Geist dieser Veranstaltung ausmachen.

> **Überblicke zur historischen Entwicklung der Stoffdidaktik**
>
> - Hefendehl-Hebeker (2016): Subject-matter didactics in German traditions: Early historical developments
> - Schupp (2016, S. 79 ff.): Gedanken zum „Stoff" und zur „Stoffdidaktik" sowie zu ihrer Bedeutung für die Qualität des Mathematikunterrichts

Stoffdidaktische Analyse

1 Vier-Ebenen-Ansatz

Ziele

- Sie kennen typische Fragestellungen, um sich einer stoffdidaktischen Analyse systematisch zu nähern.
- Sie erkennen den Vier-Ebenen-Ansatz als eine Möglichkeit, eine stoffdidaktische Analyse strukturiert vorzunehmen.
- Sie können den Vier-Ebenen-Ansatz anhand eines Beispiels nachvollziehen.
- Sie sind sich der Komplexität einer stoffdidaktischen Analyse bewusst.

Material

- Folien zur Vorlesung zum Vier-Ebenen-Ansatz (pdf, Keynote)
- App *Winkel-Farm* (nur für iOS)

1.1 Analyse von Lerngegenständen

Die inhaltliche Basis der Veranstaltung bietet ein Beitrag von Hußmann & Prediger (2016) zur Spezifizierung und Strukturierung mathematischer Lerngegenstände. Nur einen Artikel als Basis einer kompletten 4 SWS starken Veranstaltung zu nutzen, scheint zunächst unüblich. In diesem Fall ist es jedoch hilfreich, da der Beitrag eine Kategorisierung stoffdidaktischer Analysen vorschlägt und vielfältige Fragen formuliert, woraus sich wieder ein ganzes Repertoir an Themen ergibt, die es im Rahmen von Vorlesung und Seminar zu untersuchen gilt.

Hußmann & Prediger (2016, S. 35 f.) kategorisieren eine stoffdidaktische Analyse in eine **formale**, **semantische**, **konkrete** und **empirische** Ebene, wobei diese nicht hierarchisch aufgebaut sind, sondern sich gegenseitig beeinflussen. Innerhalb der Ebenen wird jeweils noch einmal in die **Spezifizierung** und die **Strukturierung** eines Lerngegenstands unterschieden.

Auf der formalen Ebene wird der Lerngegenstand aus seiner fachlich-logischen Struktur heraus betrachtet.

Die semantische Ebene adressiert Sinn und Bedeutung des mathematischen Gegenstands sowie erkenntnistheoretische Aspekte.

Ziel der konkreten Ebene ist die Umsetzung des Lehr-Lern-Prozesses an konkreten Situationen, über die das mathematische Wissen konstruiert wird.

Über die empirische Ebene werden die kognitiven und ggf. sozialen Aspekte der Schülerinnen und Schüler in die stoffdidaktische Analyse integriert.

Über die **Spezifizierung** wird ermittelt, was genau Schülerinnen und Schüler bezüglich eines bestimmten mathematischen Themas lernen sollen, während die **Strukturierung** analysiert, wie diese Elemente miteinander in Verbindung stehen und wie sie im Lernpfad strukturiert werden können.

Aus den vier Ebenen und der jeweiligen Unterscheidung in Spezifizierung und Strukturierung ergeben sich acht (nicht immer trennscharfe) Dimensionen, die den Analyseprozess zu einem Lerngegenstand kategorisieren können. Um dies für Forschungs- und Entwicklungsprozesse greifbar zu machen, haben Hußmann & Prediger (2016, S. 36) typische Fragestellungen formuliert, an die in Tabelle 1.1 angelehnt wird.

Tabelle 1.1: Typische Fragestellungen, angelehnt an Hußmann & Prediger (2016, S. 36)

	Spezifizierung	Strukturierung
Formale Ebene	**Welche Begriffe und Sätze** sollen erarbeitet werden? **Welche Verfahren** sollen erarbeitet werden und **wie** werden sie **formal begründet**?	Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren **logisch strukturieren**? Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind entscheidend, welche weniger bedeutsam? Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?
Semantische Ebene	**Welche Fundamentalen Ideen** liegen hinter den Begriffen, Sätzen und Verfahren? **Welche Grundvorstellungen und Repräsentationen** (graphisch, verbal, numerisch und algebraisch) sind für den Verständnisaufbau entscheidend?	Wie **verhalten** sich Ideen und Vorstellungen **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**? Wie kann ein **Lernpfad angeordnet** werden, in dem das Verständnis, zusammen mit den Erkenntnissen der formalen Ebene, aufgebaut wird?

	Spezifizierung	Strukturierung
Konkrete Ebene	**Welche Kernfragen und Kernideen** können die Entwicklung der Begriffe, Sätze und Verfahren leiten? **Welche Kontexte und Probleme** sind geeignet, um an ihnen die Kernfragen und -ideen exemplarisch zu behandeln und die Inhalte zu rekonstruieren?	Wie kann das Verständnis sukzessive **über konkrete Situationen** in den beabsichtigten Lernpfaden **konstruiert** werden (*horizontale Mathematisierung*)? Wie können die Lernpfade **in Bezug auf die Problemstruktur angeordnet** werden (*vertikale Mathematisierung*)?
Empirische Ebene	**Welche** typischen **individuellen Voraussetzungen** (Vorstellungen, Kenntnisse, Kompetenzen, …) sind zu erwarten und **wie passen** diese zum **angestrebten Verständnis** (Ressourcen vs. Hindernisse)? **Woher** kommen typische **Hindernisse** oder **unerwünschte Vorstellungen**?	Wie können typische **Vorkenntnisse und Vorstellungen** als **fruchtbare Anknüpfungspunkte** dienen? Welche **Schlüsselstellen** (Hindernisse, Wendepunkte, …) gibt es **im Lernweg** der Schülerinnen und Schüler? Wie kann der angestrebte **Lernpfad** bezüglich der Anknüpfungspunkte und Schlüsselstellen **neu angeordnet** werden?

Diese Fragen können dabei helfen, einen Lerngegenstand aus professioneller Sicht vollumfänglich zu analysieren und daraus die Gestaltung eines Lernpfades für Schülerinnen und Schüler abzuleiten. Noch *nicht* abgeleitet werden kann daraus jedoch die Gestaltung einer *konkreten Unterrichtsstunde* – dies bedarf weiterer Überlegungen, z. B. zu Unterrichtsmethoden, Aufgaben, Klassenmanagement, … (Hußmann & Prediger, 2016, S. 37).

1.2 Themen der Vorlesung

In dem Vier-Ebenen-Ansatz wird auf mehrere mathematikdidaktische Theorien Bezug gekommen, die es näher zu betrachten gilt, um eine stoffdidaktische Analyse in diesem Sinne durchführen zu können. Die zentralen Themen der Vorlesung werden demnach sein:

- **Fundamentale Ideen**,

- **Grundvorstellungen**,
- **Kernideen, Kernfragen und Kontexte**,
- **Lernen mit Aufgaben und Arbeitsmitteln**,
- **Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)**.

Diese zentralen Themen sind v. a. der semantischen und konkreten Ebene zuzuordnen. Die formale Ebene wird insbesondere im Zusammenhang mit der semantischen betrachtet, indem Ihre Vorkenntnisse aus den Mathematik-Fachveranstaltungen (formale Ebene) rekapituliert und mit Grundvorstellungen und Fundamentalen Ideen (semantische Ebene) in Bezug gebracht werden. Die empirische Ebene wird nur angeschnitten und spielt dann in Ihren schulpraktischen Ausbildungselementen des Lehramtsstudium eine bedeutendere Rolle.

1.3 Beispiel Winkelbegriff

Um sich der Komplexität des Vier-Ebenen-Ansatzes bewusst zu werden, sollen mögliche Gedankengänge am Beispiel des Winkelbegriffs durchgeführt werden. Grundlage hierfür bietet die Dissertation *Neue Zugänge zum Winkelbegriff* (Etzold, 2021). In dieser wird zwar nicht der Vier-Ebenen-Ansatz für die stoffdidaktische Analyse verfolgt, aber dennoch lassen sich die einzelnen Elemente darin wiederfinden. Ziel ist hier keine vollumfängliche stoffdidaktische Analyse, sondern eher eine Darstellung der exemplarischen Herangehensweise, wie man sich einer Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstands *Winkel* auf den vier Ebenen nähern kann.

1.3.1 Formale Ebene

Eine fachmathematische Analyse (bereits mit dem Blick auf eine schulische Nutzung) des Winkelbegriffs bieten u. a. Freudenthal (1973), Strehl (1983) oder Mitchelmore (1990).

Freudenthal (1973, S. 441) unterscheidet einen Winkel bspw. dahingehend, ob er über Geraden oder Halbgeraden (bzw. Strahlen) beschrieben wird, ob diese geordnet oder ungeordnet sind und ob sie in der orientierten oder unorientierten Ebene vorliegen (siehe Abbildung 1.1).

Er diskutiert, welchen Einfluss die jeweilige Sichtweise auf dem Maßbereich hat, wie Winkel überhaupt gemessen werden können und wie mit Winkeln operiert werden kann. Was passiert denn, wenn man ein geordnetes Strahlenpaar in der orientierten Ebene spiegelt (vgl. Freudenthal, 1973, S. 443 ff.)?

Wenn die Reihenfolge der Strahlen erhalten bleibt und die Winkelmessung aufgrund der Orientierung der Ebene vorgegeben ist, ändert sich damit ggf. auch das Maß des Winkels (siehe Abbildung 1.2).

Hierzu stellt Freudenthal (1973, S. 443 ff.) weitere fachmathematische Ausführungen dar und schließt damit, dass der elementargeometrische, goniometrische und analytische Winkelbegriff

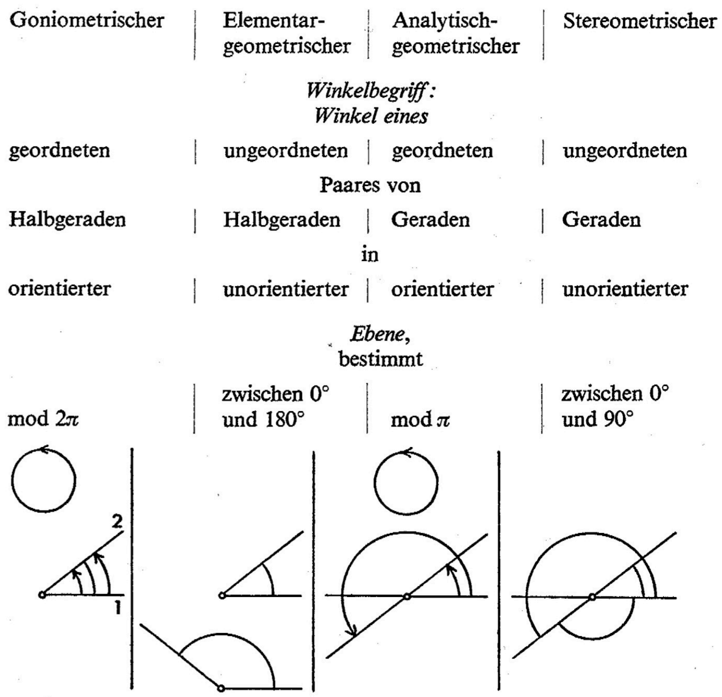


Abbildung 1.1: Winkelbegriffe nach Freudenthal (1973, S. 441)

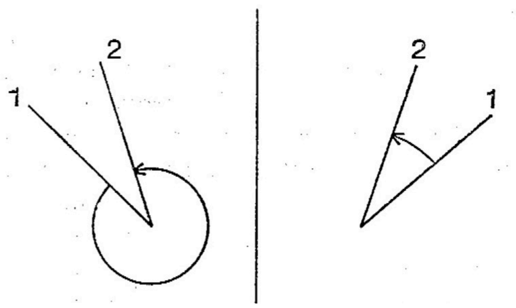


Abbildung 1.2: Spiegelung eines goniometrischen Winkels (Freudenthal, 1973, S. 443)

aus fachlicher Sicht für den schulischen Lernpfad unentbehrlich sind (Freudenthal, 1973, S. 449).

Die *Spezifizierung* besteht also darin, den Begriff zu schärfen und Operationen mit ihm zu beschreiben. Die *Strukturierung* besteht u. a. in der vernetzenden Analyse der verschiedenen Winkelbegriffe und der Schlussfolgerung ihrer gleichermaßen Bedeutsamkeit für den Schulunterricht.

1.3.2 Semantische Ebene

Dazu, welche Vorstellungen Schülerinnen und Schüler zum Winkelbegriff entwickeln sollen, sei u. a. auf Krainer (1989) und Mitchelmore & White (1998) verwiesen. Eine grundsätzliche Schwierigkeit beim Unterrichten von Winkeln sind diverse und (scheinbar) nicht in Verbindung zu bringende Anwendungskontexte, die dennoch über denselben mathematischen Begriff beschrieben werden können. So ist das Sichtfeld eines Tieres ebenso wie die Umdrehung eines Wasserzählers über Winkel beschreibbar – haben doch beide Situationen zunächst nichts miteinander zu tun.

Aufbauend auf den Arbeiten von Krainer (1989) und Mitchelmore & White (1998) können über eine Verknüpfung zur formalen Ebene mithilfe einer *informationstheoretischen Winkeldefinition* (Etzold, 2021, S. 39 f..) vier Grundvorstellungen zum Winkelbegriff ausgearbeitet bzw. validiert werden:

- Winkel als Knick
- Winkel als Feld
- Winkel als Richtungsänderung
- Winkel als Umdrehung

Dabei erhalten die *Bestandteile* eines Winkels (Scheitelpunkt, Schenkel, ggf. Bereich zwischen den Schenkeln, Abweichungsmaß) eine besondere Bedeutung, über die sich auch eine sinnvolle Reihenfolge der Behandlung dieser Grundvorstellungen ableiten lässt. So »bietet es sich an, mit den Winkelfeldern zu beginnen. Bei diesen werden die meisten Bestandteile sichtbar (Scheitelpunkt, beide Schenkel als Begrenzungen sowie der zwischen den Schenkeln relevante Bereich) […]. Anschließend können Knicke oder Richtungsänderungen behandelt werden, woraufhin die Umdrehungen folgen.« (Etzold, 2021, S. 60)

Die *Spezifizierung* in diesem semantischen Teil ist demnach die Ausarbeitung der Grundvorstellungen. Die Begründung einer möglichen Reihenfolge kann der *Strukturierung* des Lerngegenstands zugeordnet werden.

1.3.3 Konkrete Ebene

Um die einzelnen Vorstellungen zu Winkeln aufzubauen, bedarf es charakteristischer Situationen, an denen der mathematische Kern der jeweiligen Vorstellung besonders gut sichtbar wird.

Abbildung 1.3 zeigt derartige *Winkelsituationen* und die zugehörigen Grundvorstellungen (hier *Winkelkontexte*).

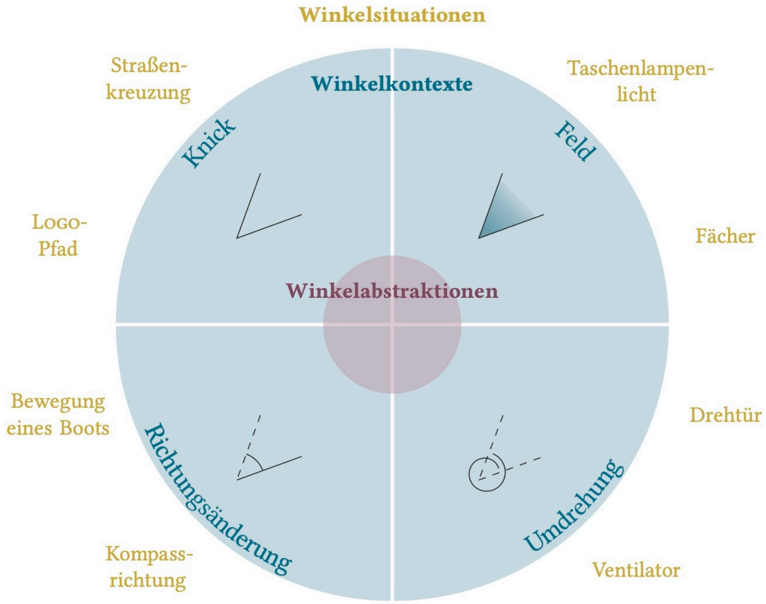


Abbildung 1.3: Winkelsituationen und -kontexte (Etzold, 2021, S. 70)

Exemplarisch für die Grundvorstellung des Winkels als Feld wird darauf aufbauend eine Lernumgebung und darin eingebettetes Unterrichtsmaterial entwickelt, mithilfe dessen die Grundvorstellung ausgebildet werden kann. An der konkreten Situation der *Sichtfelder von Tieren* sollen die Schülerinnen und Schüler Handlungen ausführen, die es ihnen ermöglicht, den mathematischen Kern hinter dem konkreten Beispiel zu erkunden.

Die Schülerinnen und Schüler nutzen dazu eine App (siehe Abbildung 1.4), in der mehrere Tiere mit ihren Sichtfeldern dargestellt werden können, und erhalten u. a. folgende Aufgaben (vgl. Etzold, 2019b, S. 8 ff.):

1. Setze das Schaf an eine Stelle, an der es von der Kuh gesehen wird, aber die Kuh selbst nicht sieht.
2. Setze das Schaf an eine Stelle, an der es nicht von der Kuh gesehen wird.
3. Das Schaf will die Kuh verwirren. Bewege es an möglichst viele Orte, an denen es von der Kuh gesehen wird.
4. Setze das Schaf an eine Stelle, an der es noch gerade so von der Kuh gesehen wird.
5. Wo muss das Schaf lang laufen, damit es die gesamte Zeit gerade so von der Kuh gesehen wird?

An Aufgabe 5 kann z. B. erkundet werde, dass sich das Schaf geradlinig auf der Grenze zwischen Sichtfeld und Nicht-Sichtfeld bewegen muss. In die eine Richtung ist die Bewegung beliebig fortsetzbar, in die andere durch den Kopf der Kuh begrenzt. Eine mathematische Verallgemeinerung dieser Handlung besteht dann in der Identifizierung des Schenkels (Begrenzung) als Strahl (nur in eine Richtung fortsetzbar) mit dem Scheitelpunkt (Kopf der Kuh) als *Quelle* des Winkelfeldes.

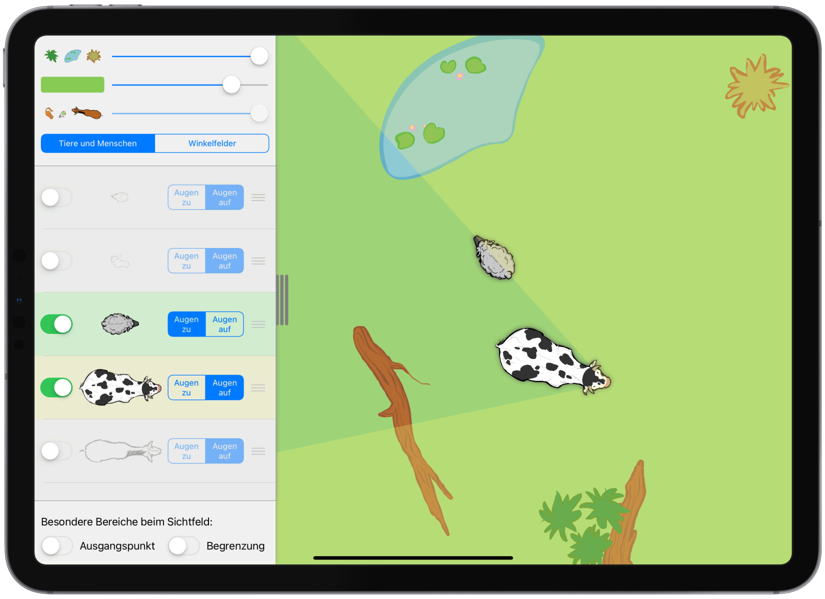


Abbildung 1.4: Screenshot der App Winkel-Farm (Etzold, 2019a)

Als *Spezifizierung* kann das Finden der Sichtfeld-Situation als charakterisches Beispiel für ein Winkelfeld angesehen werden. Die *Strukturierung* führt zum dargestellten Lernpfad und den konkreten Aufgabenstellung, über die konkrete Handlungen verallgemeinert werden und damit das mathematische Verständnis aufgebaut wird.

1.3.4 Empirische Ebene

Die zuvor beschriebene Lernumgebung wurde in mehreren Zyklen erprobt und dabei die Qualität der Handlungen der Schülerinnen und Schüler beobachtet. Ein Ziel bestand darin, dass möglichst verallgemeinerbare Handlungen (wie oben am Beispiel des Schenkels beschrieben) durchgeführt werden.

Es wird erwartet, dass die Repräsentation eines Sichtfeldes von der Draufsicht über eine semintransparent ausgemalte Teilfläche der Ebene noch nicht bekannt ist. Um diese nachzuvollziehen und mit eigenen Erfahrungen in Bezug zu bringen, wird an den Beginn der Unterrichtsstunde ein Bild des Klassenraumes in der Draufsicht präsentiert (siehe Abbildung 1.5). Dann soll eine Schülerin oder ein Schüler beschreiben, was sie/er alles sieht, ohne den Kopf zu drehen. Dieser Bereich wird auf dem Bild eingezeichnet, so dass die Repräsentation des Sichtfeldes im Folgenden zur Verfügung steht.

Abbildung 1.5: Klassenraum von oben (Foto: Christian Dohrmann)

In der Erprobung konnte beobachtet werden, dass einige Bedienschwierigkeiten mit der Anwendung den Lernfortschritt hemmten. Dies konnte u. a. dadurch verbessert werden, dass vor die eigentliche Erarbeitung eine freie Erkundungsphase mit der App (siehe Abbildung 1.6) gesetzt wurde (Etzold, 2021, S. 147, 152). Durch spezifische Aufgabenstellungen wurden bestimmte Funktionen der App fokussiert:

»Das Pferd soll auf dem Steinpflaster stehen, die Frau soll auf dem Pferd sitzen/stehen. Das Pferd guckt in Richtung der grünen Büsche, die Frau hat die Augen zu. Gleichzeitig versteckt sich die Katze unter der Kuh.«

Die Einführungsphase über das Klassenraumfoto folgt aus der *Spezifizierung* innerhalb der empirischen Ebene. Das Hinzufügen der freien Erkundungsphase ist dagegen der *Strukturierung* der Analyse zuzuordnen.

1.3.5 Verknüpfung der Ebenen

An den Ausführungen ist schon sichtbar geworden, dass sich die Ebenen nicht immer trennen lassen und teilweise gegenseitig beeinflussen. Auch gehen oft Spezifizierung und Strukturierung ineinander über.

Das ist aber gar nicht schlimm, ganz im Gegenteil. Es zeigt wieder einmal, wie wichtig solch ein ganzheitlicher Ansatz ist, so dass eine stoffdidaktische Analyse aus den diversen Sichtpunkten heraus betrachtet werden sollte.

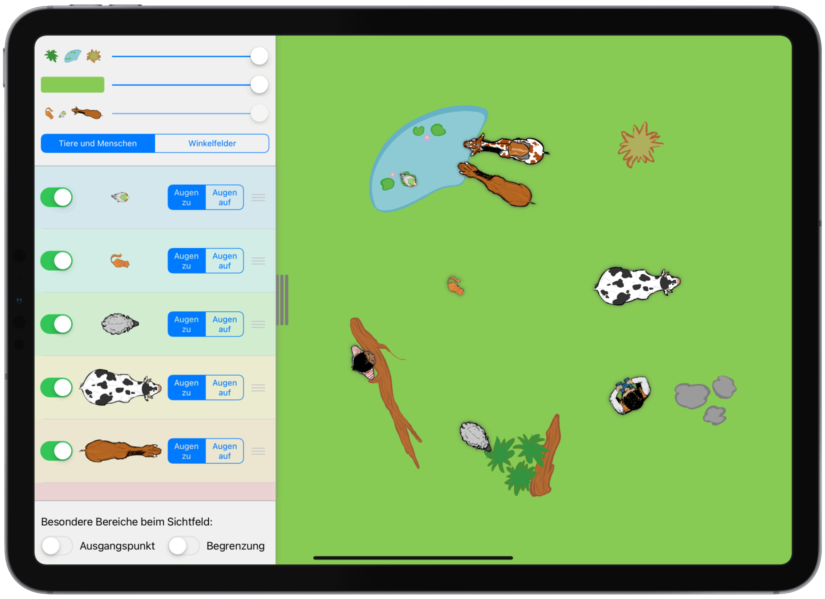


Abbildung 1.6: Möglicher Startbildschirm für die freie Erkundungphase

Wichtig ist v. a., dass Sie sich als Lehrkraft stets darüber im Klaren sind, dass für eine stoffdidaktische Analyse verschiedene Perspektiven verfolgt werden müssen. Sehen Sie den Vier-Ebenen-Ansatz daher auch als Kontrollinstrument, ob Sie an alles gedacht haben, wenn Sie einen Lerngegenstand intensiv analysieren.

1.4 Zum Nachbereiten

1. Lesen Sie den Artikel von Hußmann & Prediger (2016) zum Vier-Ebenen-Ansatz.
2. Reflektieren Sie Ihre bisherige Fach- und Fachdidaktikausbildung in Mathematik dahingehend, welche der aufgeworfenen Fragen Sie zu konkreten Themenbereichen (nicht) beantworten könnten.

2 Fundamentale Ideen

Ziele

- Sie können Fundamentale Ideen über ihre Kriterien definieren.
- Sie kennen Beispiele für Fundamentale Ideen, auch über die in den Bildungsstandards beschriebenen Kompetenzen hinaus.
- Sie können bei einzelnen Unterrichtsinhalten den Zusammenhang zu zugehörigen Fundamentalen Ideen herstellen.

Material

- Folien zur Vorlesung zu Fundamentalen Ideen (pdf, Keynote)

2.1 Begriffsklärung

Die Entwicklung Fundamentaler Ideen beruft sich auf Bruners Annahme, dass »jedes Kind […] auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden« kann (vgl. Bruner, 1976, S. 77). Voraussetzung dafür ist, dass die *Struktur* eines Inhaltsbereichs in einer Art und Weise präsentiert wird, dass sie dem Kind zugänglich wird. Diese *hinter den Dingen* liegende Struktur hebt sich vom konkreten Inhaltsbereich ab, ist allgemeinerer Natur und kann daher über *Fundamentale Ideen* beschrieben werden.

Ziel der Orientierung des Unterrichtens an Fundamentalen Ideen besteht v. a. darin, die (oftmals) isolierten Stoffelemente einzuordnen und in einem größeren Ganzen zu sehen. Im Umkehrschluss heißt dies aber auch, dass die Auswahl des konkreten Stoffes daran orientiert sein muss, wie dieser dazu beitragen kann, den dahinter liegenden mathematischen Kern und die zugehörigen Fundamentalen Ideen zu vertreten.

Die dazu seit den 1960er Jahren in Gang gesetzte Forschung führte zu vielfältigen Vorschlägen Fundamentaler Ideen der Mathematik – jedoch bisher nicht zu einem allgemeingültigen Katalog. Dieser Vielfalt in den Formulierungen und Kategorisierungen kann begegnet werden, indem Fundamentale Ideen über Eigenschaften charakterisiert werden. Im Rahmen dieser Veranstaltung wird folgende Definition genutzt, zitiert aus Schwill (1994).

Definition 2.1 (Fundamentale Idee)**.** Eine **Fundamentale Idee** bzgl. eines Gegenstandsbereichs (Wissenschaft, Teilgebiet) ist ein **Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema**, das

1. in verschiedenen Gebieten des Bereichs vielfältig anwendbar oder erkennbar ist (**Horizontalkriterium**),
2. auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann (**Vertikalkriterium**),
3. in der historischen Entwicklung des Bereichs deutlich wahrnehmbar ist und längerfristig relevant bleibt (**Zeitkriterium**),
4. einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags und der Lebenswelt besitzt (**Sinnkriterium**).

> **Überblick zur historischen Entwicklung Fundamentaler Ideen**
>
> - von der Bank (2016, S. 37 ff.): *Fundamentale Ideen der Mathematik: Weiterentwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung*

2.2 Auswahl fundamentaler Ideen

2.2.1 Kategorisierung

Das Fehlen eines allgemeingültigen Katalogs sollte nicht davon abhalten, bestehende Auflistungen und Strukturierungen Fundamentaler Ideen zu betrachten. Angelehnt an von der Bank (2013, S. 103) und Lambert (2012), die unterschiedliche Kategorisierungen analysiert haben, sollen an dieser Stelle drei grobe Bereiche festgehalten werden.

2.2.1.1 Inhaltsideen

Inhaltsideen beziehen sich auf konkrete Inhaltsbereiche der Mathematik, die die Kriterien Fundamentaler Ideen erfüllen können. Nicht ganz zufällig spiegeln diese sich in den Leitideen der Bildungsstandards wider (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2012, 2022a, 2022b).

Beispiele:

- Zahl
- Algorithmus
- Maß
- Raum und Form
- Funktion
- Zufall

2.2.1.2 Schnittstellenideen

Schnittstellenideen haben die Eigenschaft, dass durch sie die »Mathe(matik) wirkt« und »auch für andere Fächer in ihrer je spezifischen Weise relevant sind« (Lambert, 2012). Damit korrelieren sie mit den prozessbezogenen Kompetenzen der Bildungsstandards.

Beispiele:

- Kommunizieren
- Modellieren
- Argumentieren
- Problemlösen
- Darstellen
- Fragen

2.2.1.3 Tätigkeitsideen

Tätigkeitsideen beziehen sich insbesondere auf innermathematische Tätigkeiten, die sich über verschiedene Inhaltsbereiche hinweg zeigen. Lambert (2012) betont, dass es diese (über die Bildungsstandards hinaus) ebenfalls zu beachten gilt, wenn man einen reichhaltigen Mathematikunterricht bewirken möchte.

Beispiele:

- Approximierung
- Optimierung
- Linearität/Linearisierung
- Symmetrie
- Invarianz
- Rekursion
- Vernetzung
- Ordnen
- Strukturierung
- Formalisierung
- Exaktifizierung
- Verallgemeinern
- Idealisieren

Im Rahmen des Projektmoduls *Erweitertes Fachwissen für den schulischen Kontext in Mathematik*[1] werden Sie insbesondere Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik auf Basis Fundamentaler Ideen herstellen, wofür die Inhalts- und Tätigkeitsideen von hoher Relevanz sind.

[1] siehe Modulbeschreibung bei PULS

Diskussion Fundamentaler Ideen in den Stoffgebieten der Sekundarstufe II

- Analysis: Tietze et al. (2000a)
- Lineare Algebra/Analytische Geometrie: Tietze et al. (2000b)
- Stochastik: Tietze et al. (2002)

2.2.2 Beispiel Linearität

2.2.2.1 Horizontal- und Vertikalkriterium

Linearität ist ein wesentliches Konzept über die gesamte Schullaufbahn hinweg (und darüber hinaus). Dies spiegelt sich in vielfältigen Themenbereichen wider, die sowohl die Breite (*Horizontalkriterium*) als auch Tiefe (*Vertikalkriterium*) von Linearität und (später) auch Linearisierung zeigen. Dieser Abschnitt orientiert sich an den Darstellungen von Danckwerts (1988).

- Linearität als Phänomen tritt schon im Geometrieunterricht der Grundschule mit **Geraden** als essentielle geometrische Objekte auf. In der euklidischen Geometrie sind Geraden neben Punkten die Basisobjekte eines axiomatischen Aufbaus.
- Das **Distributivgesetz** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, das ebenfalls bereits in der Grundschule behandelt wird, beschreibt einen linearen Vorgang und bietet die Grundlage für die halbschriftliche Multiplikation. Über die Schulmathematik hinaus dient es z. B. als eines der Vektorraumaxiome (Skalarmultiplikation).
- Das Bestimmen eines **Rechteckflächeninhalts** ist ein linearer Vorgang: Ein Rechteck, das doppelt so breit ist, hat (bei gleicher Höhe) einen doppelt so großen Flächeninhalt. Betrachtet man diese Eigenschaft nicht als Phänomen, sondern als Forderung an eine Flächeninhaltsformel, so kann aus den Bedingungen $A(a_1 + a_2, b) = A(a_1, b) + A(a_2, b)$ und $A(a, b_1 + b_2) = A(a, b_1) + A(a, b_2)$ sowie der Stetigkeit in $\mathbb{R}^+$ die Formel $A(a, b) = a \cdot b$ abgeleitet werden.
- Lineare Zuordnungen der Art $f(x + y) = f(x) + f(y)$ werden zu Beginn der Sekundarstufe I als **proportionale Zuordnungen** behandelt. Dies wird fortgeführt bei **linearen Funktionen** der Art $f(x) = mx+n$, in der Fachmathematik als affin-lineare Abbildungen bezeichnet.
- **Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme** sind ebenfalls bedeutsamer Bestandteil des Mathematikunterrichts. Überhaupt baut die gesamte **Lineare Algebra** auf lineare und affin-lineare Abbildungen auf.
- Die **Strahlensätze** beschreiben ebenfalls ein lineares Verhalten: Geradenabschnitte in c-facher Entfernung sind c mal so lang.

- Beim **Ableitungsbegriff** ist eine wesentliche Vorstellung, dass die Funktion in der Umgebung der zu betrachtenden Stelle linearisiert wird. Insbesondere bei höherdimensionalen Funktionen wird der Linearisierungsansatz weiterverfolgt. Die ebenfalls vorherrschende Tangentenvorstellung ist auf mehr als drei Dimensionen nicht mehr anschau-

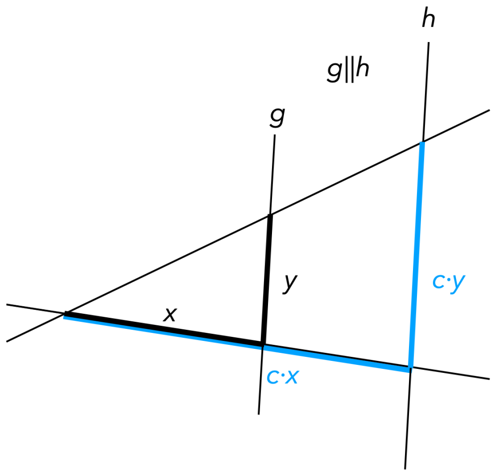


Abbildung 2.1: Strahlensatzfigur

lich übertragbar – der Linearisierungsansatz weist hier aufgrund seiner algebraischen Beschreibung die bessere Verallgemeinerbarkeit auf.

- Eng an den Linearisierungsansatz angelehnt ist die **lineare Approximation** von Funktionen (z. B. $\sin(x) \approx x$ für $x \approx 0$). Die führt sich in der Hochschulmathematik fort, beispielsweise bei Taylor-Reihen.
- Das Bedürfnis der Linearisierung, insbesondere aus der Physik heraus, zeigt sich auch bei der Nutzung **spezifisch skalierter Diagrammachsen**, z. B. von Logarithmuspapier. Wegen der Äquivalenz von $y = c \cdot a^x$ und $\ln y = (\ln a) \cdot x + \ln c$ lassen sich beliebige Exponentialfunktionen auf Logarithmuspapier als lineare Funktionen darstellen.
- Verschiedene Näherungsverfahren, wie das **Newton-Verfahren**, bedienen sich ebenfalls der Linearisierung.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass Linearität derart fundamental ist, dass selbst nicht-lineare Zusammenhänge häufig fälschlicherweise als linear angenommen werden. Dies zeigt sich zum Beispiel an den Fehlannahmen $(x+y)^2 \overset{?!}{=} x^2 + y^2$, $\sqrt{x+y} \overset{?!}{=} \sqrt{x} + \sqrt{y}$ oder $\sin(x+y) \overset{?!}{=} \sin(x) + \sin(y)$. Derartige Fehler können Sie als Lehrkraft besser einordnen (und korrigieren), wenn Sie sich der Fundamentalen Idee *Linearität* (die hier eben *nicht* gilt) bewusst sind. Insbesondere spricht dies auch für ein Explizitmachen der Fundamentalen Idee Ihren Schülerinnen und Schülern gegenüber, so dass Sie derartigen Fehlern nicht nur mit Gegenbeispielen entgegen treten können, sondern auch eine strukturelle Einordnung sichtbar machen können.

Gerade wegen der genannten Fehlannahmen und der für die Schülerinnen und Schüler i. d. R. nicht in Zusammenhang gebrachten Dualität aus *geradlinig* und *additiv und homogen* sehen Tietze et al. (2002, S. 39) die Linearität dagegen nicht als eine im Mathematikunterricht etablierte Fundamentale Idee, »die die Schüler erkennen und die ihr Denken ordnet und anregt«.

2.2.2.2 Zeit- und Sinnkriterium

Linearität zeigt sich auch in der historischen Entwicklung der Mathematik als eine prägende Leitlinie, womit sie das *Zeitkriterium* Fundamentaler Ideen erfüllt. In der Linearen Algebra sei beispielsweise das Lösen linearer Gleichungssysteme im 18. Jahrhundert bis hin zum Gauß-Algorithmus im 19. Jahrhundert oder die Darstellung linearer Vorgänge mit Matrizen im 17./18. Jahrhundert erwähnt (vgl. Tietze et al., 2000b, S. 73 ff.). In der Analysis spiegelt sich die Linearität bzw. Linearisierung in der gesamten Differenzialrechnung wider, von der Interpolation nach der Jahrtausendwende über Taylors *Linear perspective* von 1715 (vgl. Brückler, 2018, S. 39, 119) bis in die Gegenwart der linearen Modellierung nichtlinearer Zusammenhänge.

> **Historische Originalausgabe**
>
> Taylor (1715): *Linear perspective*

Auch Alltagssituationen bzw. die Alltagssprache ist von Linearität geprägt. Beispielsweise treten proportionale Zuordnungen unmittelbar beim Einkaufen auf, wenn Waren abgewogen und der Preis bestimmt wird. Auch reale Messvorgänge, wie z. B. die Geschwindigkeitsmessung, beziehen sich in der Regel auf die Messung von (sehr kurzen) Zeitintervallen, in denen ein lineares Verhalten angenommen wird. Das *Sinnkriterium* zeigt sich aber auch in Begriffen wie *lineares Fernsehen* oder *lineare Erzählungen*. Dies ist zwar keine mathematische Linearität im Sinne der Formel $f(x+y) = f(x) + f(y)$, aber der Begriff findet in einer verwandten Bedeutung in der Alltagssprache Verwendung.

2.2.3 Gegenbeispiele

Zur Verständnisförderung sollen noch ein paar Gegenbeispiele für Fundamentale Ideen angebracht werden.

- Das bereits erwähnte **Distributivgesetz** an sich ist zwar elementar, aber ihm fehlt die Weite, womit es nicht das Horizontalkriterium erfüllt. Die *Linearität* als dahinterliegende Idee ist dagegen weit genug (vgl. ähnliche Argumentation zum **Kommutativgesetz** und der dahinterliegenden Idee der *Invarianz* bei Schubert & Schwill, 2011, S. 63).
- Der **Umkehrfunktion** fehlt das Sinnkriterium, da dieser Begriff in der Lebenswelt außerhab der Mathematik kaum von Relevanz ist. Dahinter liegt vielmehr die Idee der *Reversibilität* als »Umkehrbarkeit von Operationen mit Wiederherstellung des Ausgangszustandes« (Schubert & Schwill, 2011, S. 63).

2.3 Fund. Ideen und Stoffdidaktik

Fundamentale Ideen haben zwar ihren Ursprung in der Fachstruktur, aber sie »sind nicht Elemente der Wissenschaft an sich, sondern Produkte unseres Verstandes, die wir der Wissenschaft aufprägen. Folglich können sie nur relativ zum Menschen objektiviert werden« (Schubert & Schwill, 2011, S. 62). Hinsichtlich des Vier-Ebenen-Ansatzes liegen sie auf der semantischen Ebene mit starken Bezügen zur formalen Ebene.

Für Ihre stoffdidaktische Analyse können Fundamentale Ideen insbesondere hilfreich für die **Dekonstruktion** des Fachwissens und anschließende **Rekonstruktion** des Schulwissens sein.

Wenn sie also beispielsweise eine stoffdidaktische Analyse zur Flächeninhaltsberechnung durchführen, setzen Sie sich mit der Fundamentalen Idee des *Messens* auseinander. Dabei verstehen Sie Messvorgänge als Vergleiche zu einem Standardmaß (z. B. Kästchen auszählen), erkennen Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit als notwendige Prinzipien zur präziseren Beschreibung, sehen Dreiecke als bedeutsame Basisfiguren für Flächeninhaltsberechnungen an und haben den Blick für die Integralrechnung als verallgemeinerbare Methode zur Flächeninhaltsbestimmung krummliniger Figuren (vgl. Vohns, 2000, S. 98 ff.). Sie *dekonstruieren* (zerlegen) damit Ihr eigenes mathematisches Fachwissen.

Nun sind Sie in der Lage, das Wissen zur Flächeninhaltsberechnung für Schülerinnen und Schüler neu aufzubauen, also zu *rekonstruieren* und (unter Hinzunahme der Betrachtung von Grundvorstellungen und den restlichen Ebenen des Vier-Ebenen-Ansatzes) einen Lernpfad zu entwickeln. Im Zusammenhang mit der Integralrechnung kann dies z. B. heißen, dass Sie parallel zum Bilden von Ober- und Untersummen noch einmal eine krummlinig begrenzte Fläche durch Kästchen auszählen lassen – ggf. mit unterschiedlicher Feinheit und einer Abschätzung nach oben und nach unten. Die Fundamentalen Ideen haben für Sie damit auch eine *ordnende Funktion* des Unterrichtsstoffes.

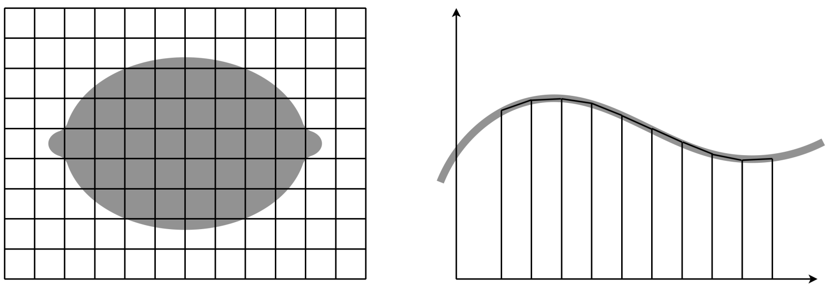


Abbildung 2.2: Flächeninhaltsbestimmung

2.4 Zum Nachbereiten

1. Lesen Sie das Kapitel 3.2.2 *Der Begriff der Fundamentalen Ideen in der Pädagogik* bei Schubert & Schwill (2011, S. 59–65).
2. Wählen Sie ein Unterrichtsthema aus und stellen Sie den Bezug zu Fundamentalen Ideen her, indem Sie die zugehörigen Fragen der semantischen Ebene beantworten.

3 Grundvorstellungen

> **Ziele**
>
> - Sie können die Grundvorstellungsidee beschreiben und wissen über deren Bedeutung für den Mathematikunterricht.
> - Sie kennen Grundvorstellungen zu einzelnen mathematischen Begriffen.
>
> **Material**
>
> - Folien zur Vorlesung zu Grundvorstellungen (pdf, Keynote)

3.1 Begriffsklärung

3.1.1 Grundvorstellungsidee

Als Sie zu Beginn Ihres Mathematikstudiums die Peano-Axiome zur Definition der Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ kennengelernt haben, konnten Sie dies wahrscheinlich – trotz der Neuigkeit der formalen Beschreibung – derart mit Ihrer Lebenswelterfahrung in Verbindung bringen, dass Natürliche Zahlen abgezählt werden können, also dass damit z. B. die Platzierungen eines Wettrennens durchnummeriert werden können.

> **Peano-Axiome** (Wikipedia, 2021b)
>
> 1. 0 ist eine natürliche Zahl.
> 2. Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.
> 3. 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
> 4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
> 5. Enthält die Menge X die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n', so bilden die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von X.

Dieser **Bezug auf eine bekannte Handlung** ist wesentlich dafür, dass die Definition und damit der Begriff der Natürlichen Zahlen für Sie mit einem Sinn behaftet ist. Innerhalb dieser *ordinalen Sichtweise* Natürlicher Zahlen helfen nun geeignete[1] **Repräsentationen** dabei,

[1] *Geeignet* heißt in diesem Fall, dass sich die Kernaussage des Begriffs in der Repräsentation wiederfindet. Im Ordinalzahlaspekt ist dies v. a. die Reihung von Zahlen. Was dabei (noch) nicht relevant ist, ist zum Beispiel die exakte Messbarkeit, wie man sie etwa auf dem Zahlenstrahl repräsentiert.

sich Rechenoperationen vorstellen und sie **operativ**[2] auszuführen zu können, also bspw. das Addieren als ein Weiterzählen aufzufassen (siehe Abbildung 3.1).

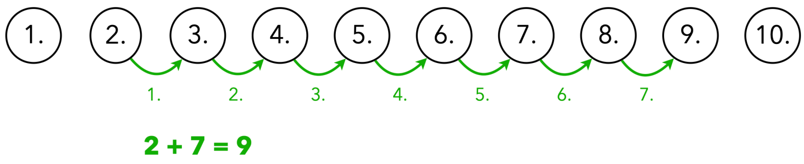


Abbildung 3.1: Additionsaufgabe im ordinalen Zahlaspekt

Mit der Fähigkeit der Verknüpfung des mathematischen Begriffs und der Lebenswelt ist also eine **Anwendung des Begriffs auf die Wirklichkeit** möglich, insbesondere in Modellierungsprozessen. Dabei sind beide Richtungen relevant: Von der Realsituation zur Mathematik und von der Mathematik zur Realität.

Ziel des Mathematikunterrichts sollte es nun sein, für alle relevanten mathematischen Begriffe ein derartiges Verständnis aufzubauen, was auch heißt, verschiedene Vorstellungen zu einem Begriff zu vermitteln. Nach vom Hofe (1995, S. 97 f., Hervorhebung durch H.E.) ergibt sich daraus eine Orientierung an Grundvorstellungen im Mathematikunterricht:

Definition 3.1 (Grundvorstellungen)**.** Die **Grundvorstellungsidee** beschreibt **Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und** dem Phänomen der **individuellen Begriffsbildung**. In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:

- Sinnkonstituierung eines Begriffs durch **Anknüpfung an** bekannte **Sach- oder Handlungszusammenhänge** bzw. **Handlungsvorstellungen**,
- Aufbau entsprechender (visueller) **Repräsentationen bzw. »Verinnerlichungen«**, die **operatives Handeln** auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
- Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch **Erkennen der** entsprechenden **Struktur in Sachzusammenhängen** oder durch **Modellieren** des Sachproblems **mit Hilfe der mathematischen Struktur**.

3.1.2 Ausdifferenzierung

Weiterhin unterscheidet vom Hofe (2014) zwischen **primären** und **sekundären** Grundvorstellungen, abhängig von der Erfahrungswelt der Handlungen. Während sich primäre Grundvorstellungen auf reale Handlungserfahrungen stützen (z. B. mit Steckwürfeln in der Arithmetik), entstammen sekundäre Grundvorstellungen aus den Handlungen mit bereits im Mathematikunterricht aufgebauten Repräsentationen (z. B. Operationen auf dem Zahlenstrahl).

[2] *Operativ* heißt hier zum Beispiel, dass Sie zu einer Aufgabe wie $2 + 7$ Nachbaraufgaben ($2 + 8$), Umkehraufgaben ($7 - 2$), Platzhalteraufgaben ($2 + \square = 7$) usw. aufstellen und lösen können.

Ich als Autor dieses Dokuments vertrete die Ansicht, dass Grundvorstellungen zu **Aspekten** eines Begriffs und zu **Operationen** mit diesen Begriffsaspekten formuliert werden können. So wäre das oben angebrachte Beispiel der ordinalen Anordnung der Natürlichen Zahlen ein *Begriffsaspekt* mit der damit verbunden Grundvorstellung, dass die Natürlichen Zahlen eine feste Reihenfolge darstellen, beginnend bei 0. Das *Addieren* ist eine Operation in diesem Aspekt, verbunden mit der Grundvorstellung des Weiterzählens. Eine ähnliche Unterscheidung, jedoch mit inhaltlich anderer Ausrichtung, nehmen auch Greefrath et al. (2016, S. 17) vor. Eine Diskussion dazu findet sich bei Etzold (2021, S. 72 f.). Die genannten Begriffs*aspekte* sind jedoch nicht mit den *Aspekten* der Grundvorstellungsidee in Definition 3.1 zu verwechseln. Auch wenn Sie nicht unmittelbar und sofort jeweils alle Aspekte eine Begriffs im Unterricht ansprechen werden, hilft Ihnen das Wissen über den Aspektreichtum in der Unterrichtsplanung für die Ausbildung eines umfassenden Begriffsverständnisses.

Die in Definition 3.1 dargestellte Grundvorstellungsidee hat einen **normativen** Charakter, d. h. es wird davon ausgegangen, dass (aus professioneller Sicht der Mathematikdidaktik) zu mathematischen Begriffen bestimmte Grundvorstellungen identifiziert werden können, die es im Unterricht zu vermitteln gilt. Oder anders gefragt: »Welche Grundvorstellungen sind zur Lösung des Problems aus der Sicht des Lehrenden adäquat?« (vom Hofe, 1995, S. 106). Diese Sichtweise wird durch eine **deskriptive** Perspektive ergänzt: »Welche individuellen Vorstellungen lassen sich im Lösungsversuch des Schülers erkennen?« (vom Hofe, 1995, S. 107). Diese über empirische Untersuchungen zu ermittelnden Vorstellungen sind das, was sich Schülerinnen und Schüler *tatsächlich* unter einem Begriff vorstellen, wozu ggf. auch typische *Fehlvorstellungen*[3] gehören können. Ein Wissen darüber ist für Lehrkräfte ungemein wichtig, um Ergebnisse von Schülerinnen und Schülern interpretieren und einordnen zu können und dann ggf. entsprechende Hilfsangebote zu machen. Dies entspricht dann einer **konstruktiven** Perspektive auf Grundvorstellungen: »Worauf sind etwaige Divergenzen zurückzuführen, und wie lassen sich diese beheben?« (vom Hofe, 1995, S. 107).

3.2 GV und Stoffdidaktik

Im Rahmen dieser Veranstaltung, insbesondere den von Ihnen ausgearbeiteten Seminarthemen, wird der Schwerpunkt auf *normative* Grundvorstellungen gelegt, was der semantischen Ebene des Vier-Ebenen-Ansatzes zugeordnet werden kann, weil die mathematischen Begriffe hier mit einem Sinn versehen werden. Die *deskriptive* und *konstruktive* Perspektive sind dagegen der empirischen Ebene zuzuordnen, da hier individuelle Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler von Relevanz sind. Dies betrifft insbesondere auch das Potenzial, (ggf. mathematisch

[3]Mit *Fehlvorstellungen* sind hier individuelle Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler gemeint, die mathematisch nicht tragfähig und daher aus fachlicher Perspektive fehlerhaft sind. So ist etwa die Vorstellung, dass Multiplizieren vervielfacht, in den Natürlichen Zahlen tragfähig (und damit eine Grundvorstellung), in den Bruchzahlen jedoch nicht mehr tragfähig und wird dort dann zur Fehlvorstellung. Neben *Fehlvorstellungen* können weitere individuelle Vorstellungen *Alltagsvorstellungen*, *Präkonzepte* o. ä. sein (siehe auch Schecker et al., 2018, S. 11 f.).

unvollständige) individuelle Vorstellungen aufzugreifen bei der Ausbildung von (normativ erwünschten) Grundvorstellungen.

Das Identifizieren von Grundvorstellungen zu einem Begriff ist, genau wie bei den Fundamentalen Ideen, Aufgabe der mathematikdidaktischen Forschung (ein Modell dafür findet man bei Salle & Clüver, 2021). Als Lehrkraft profitieren Sie von diesen Ergebnissen und nutzen sie für Ihre stoffdidaktische Analyse.

Im Gegensatz zu den Fundamentalen Ideen, die ihren Ursprung in der Sachstruktur des mathematischen Inhalts haben, entstammen die Grundvorstellungen stärker der *Bedeutung* der fachlichen Begriffe *für das Individuum*. Grundvorstellungen beziehen sich auf spezifische Begriffe und Operationen mit Begriffen, während Fundamentale Ideen größere, themenübergreifende Leitlinien für die Stoffauswahl und -strukturierung bilden.

Für die Unterrichtsplanung und -durchführung ist neben der Frage, *welche* Grundvorstellungen von Relevanz sind (Spezifizieren im Vier-Ebenen-Ansatz) vor allem interessant, *wie* diese ausgebildet werden können (Strukturieren im Vier-Ebenen-Ansatz).

vom Hofe (1995, S. 123 ff.) schlägt hierzu vor, zunächst aus Lehrkräftesicht den Lerngegenstand von der Mathematik her zu analysieren, Grundvorstellungen zu identifizieren, geeignete Sachzusammenhänge zu finden und diese mit den Erfahrungsbereichen der Schülerinnen und Schüler zu verknüpfen (linke Seite in Abbildung 3.2), während die Schülerinnen und Schüler dann den umgekehrten Weg zum Begriffserwerb gehen (rechte Seite in Abbildung 3.2).

Konkreter wird es an dieser Stelle jedoch noch nicht. Im Rahmen dieser Veranstaltung wird die Gestaltung von Lernprozessen in den Kapiteln 6 bis 8 in den Blick genommen, wo die Ausbildung von Grundvorstellungen noch einmal eine Rolle spielen wird.

3.3 Beispiele

3.3.1 Natürliche Zahlen

Betrachten Sie folgenden (fiktiven) Zeitungsartikel:

> ***Harlequin erneut auf dem 1. Platz***
>
> *Bei dem traditionellen Pferderennen am 15. Mai hat das Pferd Harlequin erneut gewonnen. Unter den 10 Pferden, die an den Start gingen, belegte es mit 21,3 Sekunden den 1. Platz. Damit war es fast 2 mal so schnell unterwegs wie das letzte Pferd, das ins Ziel kam. Karten für das nächste Rennen können unter 030 23125143 bestellt werden.*

In dem Text tauchen Zahlen unter vielen Aspekten auf: Der **1.** Platz und **15.** Mai sind **Ordinalzahlen**, also Zahlen, die eine Ordnung beschreiben. Wie oben schon beschrieben, lassen diese sich fachmathematisch über die Peano-Axiome beschreiben und wenn mit ihnen gerechnet, entspricht z. B. das Addieren dem **Weiterzählen**.

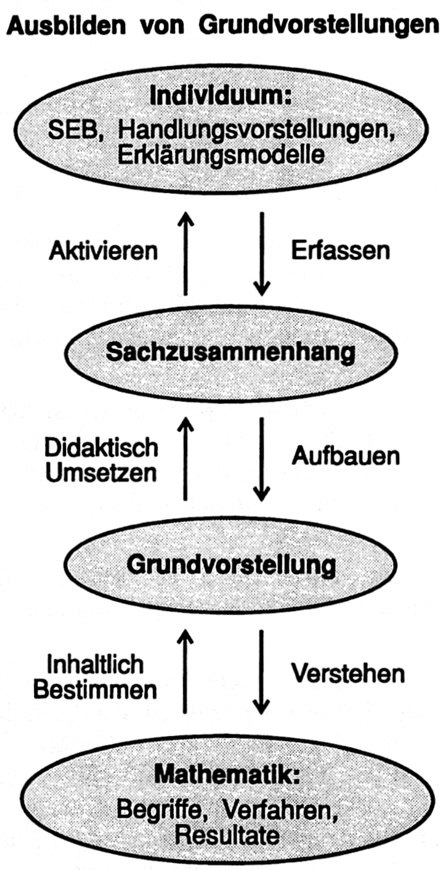


Abbildung 3.2: Ausbilden von Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995, S. 124)

Die **10** Pferde stellen eine **Kardinalzahl** dar, also die Anzahl der Elemente einer Menge. Addiert man Kardinalzahlen, so müssen **Mengen vereinigt** werden, z. B. anschaulich, indem man sie zusammen legt.

Die **21,3** Sekunden entsprechen einer **Maßzahl**, da diese Zahl die Funktion hat, etwas auszumessen (hier die Zeit). Das Addieren in diesem Aspekt entspräche dem **Aneinanderlegen**, z. B. wenn zwei Längenangaben addiert werden.

Dass es **2** mal so schnell wird, enspricht einem **Operatoraspekt**, mit dem die Vielfachheit eines Vorganges beschrieben wird. Das Addieren ist hierin eine **Hinereinanderausführung** eines Vorganges.

Die Telefonnumer **030 23125143** wiederum erfüllt einen **Codierungsaspekt**. Sie hat im mathematischen Sinne keine Bedeutung, nur die Anordnung der Ziffern ist von Relevanz. Entsprechend kann innerhalb dieses Aspektes auch nicht addiert werden. Weitere Beispiele hierfür wären Postleitzahlen oder Identifikationsnummern.

Hinzu kommt noch der Aspekt der **Rechenzahl**. Informationen dazu sowie eine genauere Erläuterung der Zahlaspekte und damit verbundenen Operationen findet man z. B. bei Krauthausen (2018, S. 43 ff.).

3.3.2 Bruchzahlen

Nachdem die Schülerinnen und Schüler ihr gesamte Vorschul- und Primarstufenzeit mit Natürlichen Zahlen verbracht haben, treten mit der Einführung von Bruchzahlen Umbrüche in den subjektiven Vorstellungen auf. Zum Beispiel sind folgende (vermeintlichen) Gesetzmäßigkeiten plötzlich *nicht mehr* gültig:

- Das Produkt zweier Zahlen ist größer als die jeweiligen Faktoren.
- Die Multiplikation kann als wiederholte Addition aufgefasst werden.
- Jede Zahl hat genau einen Repräsentanten.
- Je mehr Stellen eine Zahl hat, desto größer ist sie.

Die Bruchzahlen selbst besitzen nach Padberg & Wartha (2017, S. 19 ff.) folgende Aspekte:

- Bruch als **Anteil eines Ganzen** oder **mehrerer Ganzer** (z. B. $\frac{2}{3}$ als zwei Drittel einer Pizza oder je ein Drittel von zwei Pizzen),
- Bruch als **Maßzahl** (z. B. $\frac{1}{4}$ Liter),
- Bruch als **Operator** (z. B. $\frac{1}{5}$ von 250 €),
- Bruch als **Verhältnis** (z. B. $\frac{2}{3}$ mit der Bedeutung *2 von 3 Schüler/-innen tragen eine Brille*),
- Bruch als **Quotient** (z. B. $\frac{3}{5}$ als Ergebnis bzw. andere Schreibweise von $3 : 5$),
- Bruch als **Lösung einer linearen Gleichung** (z. B. $\frac{3}{5}$ als Lösung von $5x = 3$),
- Bruch als **Skalenwert** (z. B. $\frac{3}{2}$ als Mitte zwischen 1 und 2 auf dem Zahlenstrahl),
- **Quasikardinale Auffassung** von Brüchen (z. B. $\frac{3}{5}$ als 3 mal $\frac{1}{5}$).

Neben den Grundrechenoperationen führt auch das Vergleichen von Brüchen zu Grundvorstellungsumbrüchen. Hinzu kommen noch besondere Operationen mit Bruchzahlen wie das Erweitern und Kürzen.

Das Multiplizieren von Brüchen kann bspw. als Anteilsbildung ($\frac{1}{5}$ mal … heißt $\frac{1}{5}$ *von* …) oder als Rechteckfläche aufgefasst werden (Padberg & Wartha, 2017, S. 108 ff), siehe Abbildung 3.3.

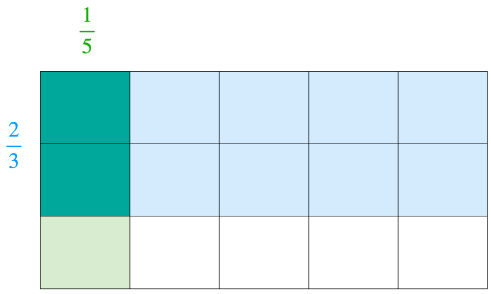


Abbildung 3.3: Vorstellung von $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$ als Rechteckfläche

All dies zeigt, dass Brüche behutsam unterrichtet werden sollten und von einer rein kalkülorientierten Behandlung unbedingt abgesehen werden muss, da diese den nachhaltigen Lernerfolg deutlich mindert.

3.4 Zum Nachbereiten

1. Lesen Sie (mindestens) die Kapitel 1.11.2, 1.11.4., 2.1, 2.2 und 2.4 des Buches *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte* (vom Hofe, 1995).
2. Wählen Sie eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff aus und arbeiten Sie an dieser die Grundvorstellungsidee nach Definition 3.1 durch, d. h.
   - stellen Sie die Sinnhaftigkeit des Begriffs durch mögliche Handlungserfahrungen dar,
   - finden Sie geeignete Repräsentationen, anhand derer operatives Handeln ermöglicht wird und
   - beschreiben Sie mögliche Modellierungsprozesse des Begriffs mithilfe der gewählten Grundvorstellung.
3. Wiederholen Sie Aufgabe 2 an weiteren Begriffen.

4 Kernideen, Kernfragen, Kontexte

Ziele

- Sie können zu ausgewählten Lerngegenständen Kernideen und Kernfragen formulieren.
- Sie können gegebene Kontexte zu Lerngegenständen hinsichtlich ihrer Sinnstiftung beurteilen.
- Sie sind sich der Möglichkeiten und Bedeutung horizontaler und vertikaler Mathematisierung bewusst.

Material

- Folien zur Vorlesung zu Kernideen, Kernfragen und Kontexten (pdf, Keynote)

4.1 Begriffsklärung Kernidee/-frage

Kernideen haben die Aufgabe, den Lernpfad zu leiten und dabei *sinnstiftend* das *Wesen* des neuen Lerngegenstands sichtbar zu machen. Sie müssen dabei sowohl aus objektiver (also mathematischer) Perspektive tragfähig sein, als auch aus subjektiver Perspektive für die Schülerinnen und Schüler greifbar werden können. Kernideen bieten damit im *Vorfeld* des Lernpfades eine Orientierung und im *Nachgang* des Lernpfades eine Reflexionsmöglichkeit über den Lerngegenstand.[1] Um bei den Schülerinnen und Schülern Lernprozesse zu einem Lerngegenstand zu initiieren, werden die Kernideen ansprechend in Form von **Kernfragen** formuliert. Kernfragen sollten daher prinzipiell aus subjektiver Sicht formuliert sein und insbesondere adressieren, wie man selbst mit dem Lerngegenstand umgehen kann.

Am Beispiel des *Funktionsbegriffs* etwa besteht eine Kernidee darin, dass Funktionen den Zusammenhang zwischen zwei Größen beschreiben und damit auch vorhersagen können (vgl. auch Aspekte des Funktionsbegriffs in Kapitel 13). Als Kernfrage formuliert: »Wie kann man die Beziehung zwischen zwei sich verändernden Größen beschreiben und wie kann man damit weitere Werte bestimmen?« (Thiel-Schneider, 2018, S. 49).

In der *Vorschauperspektive* heißt das, die »Kernidee in Frageform schließt an individuelle Vorerfahrungen, Zielperspektiven, Denk- und Handlungsmuster der Lernenden an und initiiert die Auseinandersetzung mit dem mathematischen Gegenstand in den Worten von Schülerinnen und Schülern« (Leuders et al., 2011, S. 8). In der *Rückschauperspektive* dagegen können über

[1] Der Begriff der Kernidee ist geprägt worden über das Dialogische Lernen nach Gallin und Ruf, spricht dort jedoch vorwiegend die Vorschauperspektive an (vgl. Leuders et al., 2011, S. 7).

die Kernidee (dann quasi als Antwort auf die Kernfrage) »eine allgemeine Problemstellung und die zu ihrer Bewältigung notwendigen mathematischen Konzepte benannt« werden (Leuders et al., 2011, S. 8).

Definition 4.1 (Kernidee und Kernfrage)**.** Eine **Kernidee** beschreibt unter sinnstiftender Perspektive das mathematische Wesen eines Lerngegenstands.

Eine **Kernfrage** stellt die Kernidee in Frageform aus der Perspektive der Schülerinnen und Schüler dar.

Kernideen und Kernfragen verfolgen eine ***Vorschauperspektive***, die der Orientierung und Initiierung der Auseinandersetzung mit dem neuen Lerngegenstand dient, sowie eine ***Rückschauperspektive***, die es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, den Lerngegenstand einzuordnen.

Bestandteil Ihrer stoffdidaktischen Analyse auf der konkreten Ebene wird es also sein, zum Lerngegenstand passende Kernideen zu identifizieren und in Form von Kernfragen zu formulieren. Hierzu kann Ihnen die Sinnkonstituierung der jeweiligen Grundvorstellungen dienlich sein (siehe Definition 3.1).

4.2 Begriffsklärung Kontext

Kontexte sollen geeignet sein, sich dem Lerngegenstand exemplarisch zu nähern. Sie weisen damit immer eine Spezialisierung bzw. Konkretisierung des zu betrachtenden Lerngegenstands auf (denn nur so können die Schülerinnen und Schüler einen Zugang dazu finden) – sollen aber so gestaltet sein, dass an Ihnen das Allgemeine erfahrbar ist (denn nur so kann es zu einer Beschäftigung mit der dahinterliegenden Mathematik kommen). Angelehnt an die Sinnstiftung der obigen Kernideen und Kernfragen, kann auch von einem *sinnstiftenden Kontext* gesprochen werden.

Leuders et al. (2011, S. 4, Hervorhebungen im Original) formulieren hierzu:

Definition 4.2 (Sinnstiftender Kontext)**.** Ein **sinnstiftender Kontext** ist ein Ausschnitt einer inner- oder außermathematischen Welt, der folgende Anforderungen möglichst gut erfüllt:

- Er ist anschlussfähig an die Erfahrungen, Interessen und die Denk- und Handlungsmuster der Lernenden **(Lebensweltbezug)**.
- Er ermöglicht es, authentische Fragen zu bearbeiten und dabei auch etwas über den Kontext zu lernen **(Kontextauthentizität)**.
- Er ist problemhaltig und offen genug, um Lernende zum reichhaltigen Fragen und Erkunden anzuregen **(Reichhaltigkeit)**.

Um einer eingeschränkten Sichtweise vorzubeugen, sei gesagt: Der *Lebensweltbezug* heißt nicht zwingend, dass es sich um einen *Realitätsbezug* (im Sinne einer Modellierung) handeln muss. Dies ist zwar in vielen Fällen angebracht, aber auch eine innermathematische Anschlussfähigkeit kann für die Schülerinnen und Schüler ansprechend sein (und damit Bezug zu deren – schulischen – Leben herstellen).

Ein möglicher Kontext, über den die oben formulierte Kernfrage bei *linearen Funktionen* erarbeitet werden kann, wäre die Beschreibung des Abbrennverhaltens einer Kerze (vgl. Böer et al., 2014, S. 108 f). Dieser ist für die Schülerinnen und Schüler aus dem Alltag bekannt (wenn auch nicht alltäglich). Authentisch und reichhaltig ist der Kontext dahingehend, dass die meisten Kerzen zylinderförmig sind und daher tatsächlich ein lineares Abbrennverhalten haben. Auch ist es durchaus von Interesse, die Zeit bis zum vollständigen Abbrennen einer Kerze abschätzen zu können (z. B. bei einer *Kerzenuhr*, vgl. Wikipedia, 2022b). Weiterhin können (später) die Eigenschaften des Funktionsgraphen kontextgebunden interpretiert werden (y-Achsenabschnitt als Ursprungslänge der Kerze, Nullstelle als die Zeit bis zum vollständigen Abbrennen, Anstieg des Graphen als Abbrennverhalten, das direkt mit der Dicke der Kerze in Verbindung gebracht werden kann).

Das Finden derartiger stinnstiftender Kontexte ist enorm anspruchsvoll! Sie sollten hier auf (gute) Lehrwerke zurückgreifen und immer wieder mögliche Kontexte kritisch (mithilfe der Definition 4.2) hinterfragen.

Kernideen/Kernfragen und der sinnstiftende Kontext bilden damit eine Einheit in der Zielbildung und Motivation zu Beginn der Auseinandersetzung mit einem Lerngegenstand – beides muss gemeinsam gedacht werden.

4.3 Mathematisierungstypen

Während Kernideen, Kernfragen und Kontexte in erster Linie der *Spezifizierung* des Lerngegenstandes in Hinblick auf den Lernpfad dienen, kann zur *Strukturierung* der Prozess der Mathematisierung stärker in den Blick genommen werden. Angelehnt an Treffers und Freudenthal stellt van den Heuvel-Panhuizen (2003, S. 12) hierzu dar, dass prinzipiell zwei Wege der Mathematisierung möglich sind:

- Bei der **horizontalen Mathematisierung** werden mithilfe mathematischer Objekte und Operationen reale Situationen und alltägliche Probleme beschrieben, geordnet und gelöst. Es wird also aus der Welt des Lebens in die Welt der Symbole übergegangen.[2]

[2] im Original: »In the case of horizontal mathematizing, mathematical tools are brought forward and used to organize and solve a problem situated in daily life. […] to mathematize horizontally means to go from the world of life to the world of symbols« (van den Heuvel-Panhuizen, 2003, S. 12)

- Bei der **vertikalen Mathematisierung** wird innerhalb des mathematischen Systems reorganisiert und operiert, es wird sich also in der Welt der Symbole bewegt.[3]

Beide Arten sind nicht als Konkurrenten aufzufassen, sondern haben ihre gleiche Berechtigung im Mathematikunterricht. Dies ist v. a. vor dem Hintergrund zu verstehen, dass Mathematik *vom Menschen betrieben* wird. Erst durch das Zusammenwirken von horizontaler und vertikaler Mathematisierung kann Mathematik unter dieser Annahme auf ehrliche Weise durchgeführt und damit auch verstanden werden. Dies heißt insbesondere, dass in jeder Klassenstufe beide Arten der Mathematisierung ihre Berechtigung haben und entsprechend realisiert werden müssen.[4]

Das oben dargestellte Kerzenbeispiel entstammt der horizontalen Mathematisierung. Eine vertikale Mathematisierung könnte bspw. im weiteren Lernverlauf – etwa nachdem die Funktionsgleichung $y = m \cdot x + n$ eingeführt wurde – die Untersuchung des Einflusses der Parameter m und n auf den Funktionsgraphen sein. Daran zeigt sich schon, wie hilfreich eine gleichermaßen Betrachtung horizontaler und vertikaler Prozesse ist, nämlich wenn etwa nach einer Veränderung von m und n rückgefragt wird, inwieweit dies noch mit den Abbrennen einer Kerze in Zusammenhang steht (was spätestens bei einem positiven m an seine Grenzen stößt). Derartige *Grenzbetrachtungen* (die mathematisch greifbar sind, aber in der Realität eben an ihre Grenzen stoßen) bieten ein enormes Potenzial, sich dem abstrakten Wesen von Mathematik zu nähern.

4.4 Zum Nachbereiten

1. Entwickeln Sie für den Begriff der *Exponentialfunktion* eine Kernfrage.
2. Untersuchen Sie, inwieweit folgende Kontexte für Exponentialfunktionen sinnstiftend sind:
   - Bakterienwachstum
   - Bierschaumzerfall
3. Beschreiben und erklären Sie je eine geeignete Variante der horizontalen und vertikalen Mathematisierung am Lerngegenstand der Exponentialfunktion.

[3] im Original: »Vertical mathematizing, on the contrary, stands for all kinds of re-organizations and operations done by the students within the mathematical system itself. [...] to mathematize vertically means to move within the world of symbols« (van den Heuvel-Panhuizen, 2003, S. 12)

[4] im Original: »Freudenthal emphasized, however, that the differences between these two worlds are far from clear cut, and that, in his view, the worlds are not, in fact, separate. Moreover, he found the two forms of mathematizing to be of equal value, and stressed the fact that both activities could take place on all levels of mathematical activity.« (van den Heuvel-Panhuizen, 2003, S. 12)

5 Erstes Intermezzo: Flächeninhalt

Ziele

- Sie vertiefen Ihr Verständnis über den Vier-Ebenen-Ansatz, insbesondere auf der formalen, semantischen und konkreten Ebene.
- Sie verknüpfen Ihr Wissen über Fundamentale Ideen, Grundvorstellungen, Kontexte und Kernideen/Kernfragen am Beispiel des Flächeninhaltsbegriffs.

Material

- Folien zur Vorlesung zum Ersten Intermezzo (pdf, Keynote)

In diesem Kapitel werden Fundamentale Ideen, Grundvorstellungen, Kernideen/Kernfragen und Kontexte im Zusammenhang mit dem Flächeninhaltsbegriff diskutiert. Ein Schulbuchkapitel zum Flächeninhaltsbegriff bietet die Motivation, die formale, semantische und konkrete Ebene des Vier-Ebenen-Ansatzes zu diskutieren und einen ersten Ausblick auf die empirische Ebene zu geben.

In dem Sinne wird also existierendes Material analysiert und hinsichtlich der mathematikdidaktischen Theorie reflektiert. Ein solches Vorgehen wäre auch für Ihren Seminarvortrag bzw. die Hausarbeit im Rahmen dieser Veranstaltung möglich – dann natürlich etwas ausführlicher, als hier dargestellt.

5.1 Darstellung im Schulbuch

In dem Schulbuch *Mathewerkstatt* (Barzel et al., 2012c) wird der Flächeninhalt über den Kontext von Tiergehen eingeführt (siehe Abbildung 5.1). So haben in einem Zoo verschiedene Tiere unterschiedlich große Gehe zur Verfügung. Die Form der Gehege variiert dabei ebenfalls.

Die Schülerinnen und Schüler werden nun in einer Erkundungsphase vor die Aufgabe gestellt, die Gehegegrößen miteinander zu vergleichen sowie möglichst geschickt die Größe eines Geheges messen zu können.

Anschließend erfolgen Ordnungs- und Vertiefungsphasen, in denen das Wissen struktruiert und geübt wird. Das Schulbuch wird durch einen Materialblock begleitet (Barzel et al., 2012b), was in diesem Fall insbesondere dem Auseinanderschneiden und Zusammenlegen bzw. dem

Abbildung 5.1: Einstiegsbild zum Thema Flächeninhalt (Barzel et al., 2012c, S. 168 f.)

Auslegen von Flächen dienen soll. Weiterhin gibt es für Lehrerinnen und Lehrer ein ausführliches Begleitmaterial (Barzel et al., 2012a), in dem alle Seiten des Schulbuches sowie fachdidaktische Hintergründe zur Thematik erläutert sind.

5.2 Formale Ebene

> Welche Begriffe und Sätze sollen erarbeitet werden? Welche Verfahren sollen erarbeitet werden und wie werden sie formal begründet? Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren logisch strukturieren? Welche Verbindungen zwischen den Fachinhalten sind entscheidend, welche weniger bedeutsam? Wie kann das Netzwerk aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?

Fachmathematisch kann der Flächeninhalt einer Figur als ein **nichtnegatives Maß** aufgefasst werden, wobei zwei **zueinander kongruenten Figuren dasselbe Maß** zugeordnet wird und der Flächeninhalt einer Figur gleich der **Summe der Flächeninhalte ihrer Teilfiguren** ist, sofern zerlegbar. Hinzu wird das Flächeninhaltsmaß eines Quadrates der Seitenlänge 1 LE auf 1 LE2 festgelegt (vgl. Kuntze, 2018, S. 161).

Dies ist eine **axiomatische Herangehensweise**, die sich für Schülerinnen und Schüler in der Regel als herausfordernd darstellt (Kuntze, 2018, S. 162). Häufig wird eine umschreibende Definition genutzt, wie: *Der Flächeninhalt einer Fläche gibt an, wie groß diese ist.* Dabei ist jedoch die mögliche Mehrdeutigkeit dieser Formulierung zu beachten – so könnte auch der Umfang einer Figur als Maß für ihre *Größe* aufgefasst werden, da der Größenbegriff in dem Fall unspezifisch ist.

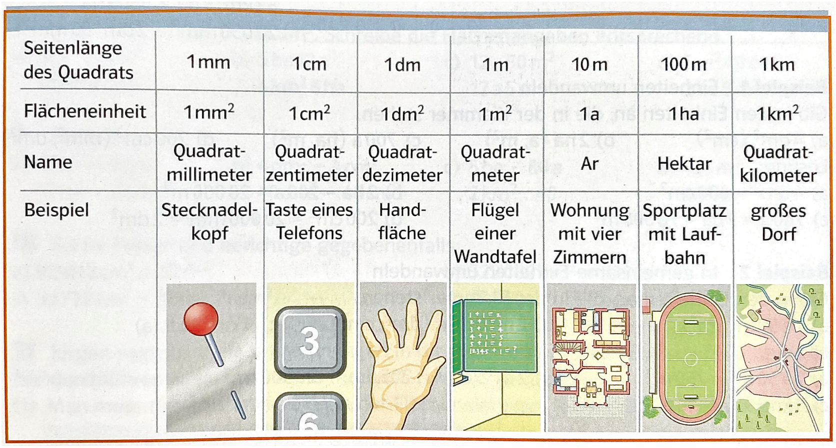
Ob nun eine explizite Definition gewählt wird oder nicht – dies ist auch abhängig von der persönlichen Einstellung der Lehrkraft und den Voraussetzungen der Lerngruppe – in jedem Fall ist ein tragfähiges mathematisches Verständnis aufzubauen. Hierzu können die in den Axiomen enthaltenen Eigenschaften über sinnvolle **Lernhandlungen** aufgebaut werden (siehe auch Wörner, 2014, S. 1328 f.):

- Vergleichen verschiedener Flächen durch Zerlegen, Ergänzen und Übereinanderlegen
- Bestimmen des Maßes einer Fläche über Auszählen mittels eines Vergleichsmaßes
- Nutzen eines quadratischen Vergleichsmaßes, in der Regel 1 cm2

All diese Überlegungen kommen zunächst **ohne Formeln** aus, weshalb diese im Unterricht auch erst im Anschluss an eine inhaltliche Erarbeitung des Flächeninhaltsbegriffs eingeführt und genutzt werden sollten.

Fachsystematisch entscheidend ist, dass ein **Flächenvergleich zunächst ohne ein explizites Maß** möglich ist – hierfür reichen die Kongruenzeigenschaft und das Zerlegen/Ergänzen von Flächen aus. Das Vergleichsmaß ist dann relevant, wenn man den **Flächeninhalt mithilfe einer Zahl objektivieren** bzw. ohne eine explizite Vergleichsfigur auskommen möchte.

Interessant ist hier auch die ***Willkürlichkeit* des Vergleichsmaßes**. Kulturell geprägt ist hier (in Kontinentaleuropa) zwar beispielsweise 1 cm2, aber auch andere Einheiten sind gleichberechtigt möglich. Auch muss das Vergleichsmaß nicht zwingend ein Quadrat sein. Nicht selten wird z. B. von großen Flächen angegeben, wie viele Fußballfelder in sie hineinpassen würden. Für den Unterricht bedeutet das, dass im Sinne einer auf den mathematischen Kern orientierten Sichtweise zunächst möglichst allgemeine und vielfältige (auch *unförmige*) Vergleichsflächen herangezogen werden können. Später ist dann natürlich ein Bezug zu den Standardeinheiten herzustellen (siehe Abbildung 5.2).



Seitenlänge des Quadrats	1 mm	1 cm	1 dm	1 m	10 m	100 m	1 km
Flächeneinheit	1 mm^2	1 cm^2	1 dm^2	1 m^2	1 a	1 ha	1 km^2
Name	Quadrat-millimeter	Quadrat-zentimeter	Quadrat-dezimeter	Quadrat-meter	Ar	Hektar	Quadrat-kilometer
Beispiel	Stecknadel-kopf	Taste eines Telefons	Hand-fläche	Flügel einer Wandtafel	Wohnung mit vier Zimmern	Sportplatz mit Lauf-bahn	großes Dorf

Abbildung 5.2: Standardeinheiten typischer Vergleichsflächen (*Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien. 5, Schülerbuch*, 2010, S. 193)

5.3 Semantische Ebene

> Welche Fundamentalen Ideen liegen hinter den Begriffen, Sätzen und Verfahren? Welche Grundvorstellungen und Repräsentationen (graphisch, verbal, numerisch und algebraisch) sind für den Verständnisaufbau entscheidend? Wie verhalten sich Ideen und Vorstellungen zueinander und zu früheren und späteren Lerninhalten? Wie kann ein Lernpfad angeordnet werden, in dem das Verständnis, zusammen mit den Erkenntnissen der formalen Ebene, aufgebaut wird?

5.3.1 Fundamentale Idee Messen

Dem Flächeninhaltsbegriff liegt zweifelsohne die Fundamentale Idee des *Messens* zugrunde. Vohns (2000, S. 52 ff.) stellt ausführlich dar, warum das Messen als Fundamentale Idee aufgefasst werden kann, worauf in diesem Abschnitt Bezug genommen wird. Besondere Betonung legt Vohns (2000, S. 49) darauf, dass Messen »der indirekte Vergleich von Objekten in bezug [sic] auf eine bestimmte Eigenschaft« ist.

Horizontal zieht sich dies über viele Gebiete der Mathematik hinweg (z. B. Messprozesse in der Geometrie, Maßzahlaspekt von Brüchen in der Arithmetik, Erwartungswert als Lagemaß in der Stochastik, Integral in der Analysis), aber auch darüber hinaus ist das Messen von hoher Relevanz (z. B. Messprozesse in der Physik, quantitative Studien in den Sozialwissenschaften, Pulsmessung in der Medizin). Damit wird auch das *Sinnkriterium* der Fundamentalen Idee offensichtlich.

Das *Vertikalkriterium* zeigt sich beispielsweise in der Längenbestimmung in der Grundschule, Flächeninhaltsbestimmung in der Orientierungsstufe, bei Verwandlungen von Flächen (z. B. beim Beweis des Satzes des Pythagoras) bzw. der Approximation von Flächen (z. B. Bestimmen des Kreisflächeninhalts) bis hin zum Integralbegriff als verallgemeinerter Flächeninhalt.

Historisch ist das Messen ebenfalls in vielen Epochen der Mathematik bedeutsam, worauf typische Wortwendungen wie *Alles ist Zahl!* (bei den Pythagoräern), *Die Vermessung der Welt* (mit der Methode der Triangulation) oder die *Quadratur des Kreises* (als klassisches Problem der Geometrie) hindeuten. Auch die Vereinheitlichung von Maßeinheiten (z. B. SI-Einheiten) zeigt die Bedeutsamkeit des Messens für die wissenschaftliche Entwicklung.

5.3.2 GV zum Flächeninhalt

Die folgenden Überlegungen sind empirisch nicht abgesichert, sondern vorwiegend theoretischer Natur. Ansatzpunkt ist ein Beitrag von Wörner (2014). Setzt man die dortigen Darstellungen genauer mit der Definition 3.1 von Grundvorstellungen in Bezug, lassen sich (meiner Meinung nach) Grundvorstellungen zu drei Aspekten des Flächeninhaltsbegriffs formulieren:

- **Maßzahlaspekt**: Flächeninhalt einer Figur als nichtnegative Maßzahl, die mittels normierter Flächeninhaltsmaße bestimmt wird
- **Vereinigungsaspekt**: Flächeninhalt einer Figur als Summe der Flächeninhalte der Teilfiguren, aus denen sich die Figur zusammensetzen lässt
- **Kongruenzaspekt**: Flächeninhalt einer Figur als invariante Eigenschaft gegenüber Kongruenzabbildungen

Für jeden dieser Aspekte sollen nun Handlungserfahrungen, Repräsentationen und mögliche Anwendungen auf die Realität diskutiert werden. Weiterhin werden einige Operationen mit Flächeninhalten besprochen.

5.3.2.1 Maßzahlaspekt

Eine Erfahrung, die die Grundvorstellung zu diesem Aspekt stützt, ist das Auslegen von Flächen mittels normierter Flächenstücke, wie z. B. Quadrate. Hieraus kann die Erfahrung gewonnen werden, dass die Anzahl der Quadrate direkt den Flächeninhalt (mit der entsprechenden Einheit) angibt.

Als Repräsentation kann hierfür einfaches Kästchenpapier dienen, auf das die auszumessende Fläche gemalt wird (siehe Abbildung 5.3). Daran kann man das Abzählen der normierten Flächenstücke durchführen bzw. sich vorstellen. Insbesondere können daran auch Verfeinerungen (und damit genaueres Messen) nachvollzogen werden.

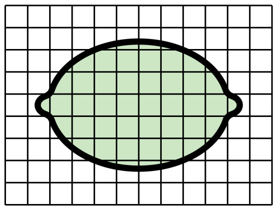


Abbildung 5.3: Repräsentation des Maßzahlaspektes

Eine mögliche Anwendung in der Realität ist das Bestimmen der Größe eines Fußballfeldes. Hier kann man die Länge und Breite in Metern messen, um zu bestimmen, wie viele Quadratmeter in das Feld passen. Dies wird dann zwar nicht über tatsächliches Auslegen realisiert, aber es wird (bei Verwendung der Rechteckinhaltsformel) auf die entsprechende Vorstellung Bezug genommen.

5.3.2.2 Vereinigungsaspekt

Zur Grundvorstellung des Vereinigungsaspektes gehört die Erfahrung, Flächen auseinanderzuschneiden und neu zusammenzulegen, um ihren Flächeninhalt bestimmen bzw. die Größe zweier Flächen miteinander vergleichen zu können.

Die Schnittlinien können bspw. durch gestrichelte Linien repräsentiert werden, so dass die Handlungserfahrung hier in der Vorstellung nachvollzogen werden kann (siehe Abbildung 5.4).

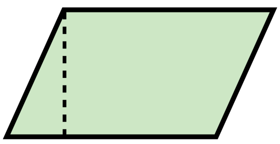


Abbildung 5.4: Repräsentation des Vereinigungsaspektes

Möchte man die Größe eines Landes bestimmen, so ist es in der Regel notwendig, dieses in geeignete Flächenstücke zu zerlegen, deren Flächeninhalte einfacher berechnet werden können. Dies ist also eine mögliche Anwendung in der Realität. Je nach Komplexität der Figur (und ggf. zusätzlichen geometrischen Überlegungen) können so auch Flächeninhaltsformeln gefunden werden (was schon eine innermathematische Anwendung ist).

5.3.2.3 Kongruenzaspekt

Wer hat größere Hände? Um diese Frage zu beantworten, ist eine typische Erfahrung, die Hände aneinanderzulegen und ihre Größen zu vergleichen. Dabei wird die Vorstellung genutzt, dass zueinander kongruente Figuren den gleichen Flächeninhalt haben.

Eine Repräsentation, die dabei unterstützt, im Kongruenzaspekt zu operieren, kann in der Teilung oder *Ummantelung* von Figuren mittels zueinander kongruenter Figuren liegen (siehe Abbildung 5.5). Dies ist z. B. bei der Herleitung der Flächeninhaltsformel für ein Dreieck sinnvoll, um zu erkennen, dass dieser der Hälfte des Flächeninhalts des umschriebenen Rechtecks entspricht[1].

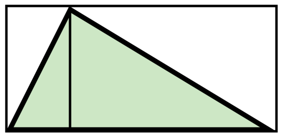


Abbildung 5.5: Repräsentation des Kongruenzaspektes

Eine (innermathematische) Anwendung dieser Vorstellung könnte zum Beispiel bei der Berechnung des Oberflächeninhalts eines Primas liegen, wo die Flächeninhalte von Grund- und Deckfläche i. d. R. nicht einzeln berechnet werden, sondern einer der Flächeninhalte wegen der Kongruenz einfach verdoppelt wird.

5.3.2.4 Operieren mit Flächeninhalten

Für unterschiedliche Operationen, die mit Flächeninhalten durchgeführt werden, können nun in unterschiedlicher Weise die Grundvorstellungen zu den Aspekten aufgegriffen und genutzt werden:

- Um Flächeninhalte direkt miteinander zu **vergleichen**, sind der Vereinigungs- und Kongruenzaspekt relevant, da die Flächen ggf. neu aufgeteilt werden müssen und dann mittels Übereinanderlegen gegeneinander abgeschätzt werden können.
- Um die **Flächeninhaltsformel eines Rechtecks** zu begründen, benötigt es den Maßzahlaspekt, da das Abzählen einbeschriebener Vergleichsquadrate wesentlich ist. Dies hängt auch eng mit der Grundvorstellung der Multiplikation als Rechteckflächeninhalt zusammen (siehe Abbildung 3.3).
- Für die **Flächeninhaltsformel des Dreiecks** sind wieder Kongruenz- und Vereinigungsaspekt relevant, da das Dreieck geeignet zerlegt und mit dem umschriebenen Rechteck verglichen werden muss (siehe Abbildung 5.5). Da Bezug zur Rechteckformel genommen wird, ist natürlich auch der Maßzahlaspekt relevant.

[1]Um diesen Zusammenhang vollumfänglich zu verstehen, sind weiterhin der Vereinigungsapekt (Aufteilen in Teildreiecke) und der Maßzahlaspekt (um die Flächeninhaltsformel fürs Rechteck zu verstehen) nötig.

- Um **Flächeninhalte zu approximieren**, wie z. B. den eines Kreises (siehe Abbildung 5.6), benötigt es wieder alle drei Vorstellungen. So kann der Kreis in zueinander kongruente Teilflächen zerlegt werden (Kongruenz- und Vereinigungsaspekt), deren Gesamtflächeninhalt dann über die Rechteckformel näherungsweise bestimmt wird (Maßzahlaspekt).

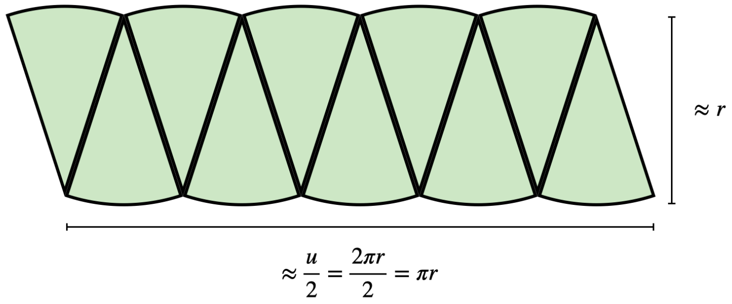


Abbildung 5.6: Approximation des Kreisflächeninhalts

- Bei der **Bestimmung von Oberflächeninhalten** von Körpern, werden der Vereinigungsaspekt für die einzelnen Seitenflächen und ggf. der Kongruenzaspekt angesprochen, wenn es zueinander kongruente Seitenflächen gibt (wie z. B. bei Prismen), deren Flächeninhalte dann mit der entsprechenden Anzahl multipliziert und nicht einzeln ausgerechnet werden.

5.3.3 Auswirkungen auf Lernpfad

Der Lernpfad des Schulbuches greift diese Fundamentale Idee und die Grundvorstellungen auf, indem zunächst Flächeninhalte (durch Ausseinanderschneiden und Zusammenfügen) miteinander verglichen werden, anschließend das Auslegen mit normierten Flächenstücken erfolgt und daraufhin geeignete Maßeinheiten eingeführt werden und die Flächeninhaltsberechnung eines Rechtecks behandelt wird.

Die formale und empirische Ebenen wurden hier getrennt dargestellt, was jedoch für eine stoffdidaktische Analyse gar nicht zwingend nötig ist. Entscheidend ist, dass Sie den ganzheitlichen Blick auf die aufgeworfenen Fragen haben und diese (zumindest in Teilen) beantworten können. Die getrennte Darstellung dient hier noch der Übersicht für Sie als *Anfängerinnen und Anfänger* im Umgang mit stoffdidaktischen Analysen – auch wenn darauf verzichtet wurde, die einzelnen Fragen schrittweise explizit zu beantworten.

5.4 Konkrete Ebene

> Welche Kernfragen und Kernideen können die Entwicklung der Begriffe, Sätze und Verfahren leiten? Welche Kontexte und Probleme sind geeignet, um an ihnen die Kernfragen und -ideen exemplarisch zu behandeln und die Inhalte zu rekonstruieren? Wie kann das Verständnis sukzessive über konkrete Situationen in den beabsichtigten Lernpfaden konstruiert werden (horizontale Mathematisierung)? Wie können die Lernpfade in Bezug auf die Problemstruktur angeordnet werden (vertikale Mathematisierung)?

Als **Kontext** wählt das Schulbuch den Platzbedarf bei **Tiergehegen im Zoo.** Dieser Kontext ist aus mehreren Gründen besonders gut geeignet:

- In der Regel interessiert tatsächlich nur der Flächeninhalt des Geheges. Inhaltliche Verwechslungen mit dem Umfang oder dem Volumen können damit reduziert werden.
- Es ist aus dem Kontext heraus sinnstiftend, die Größe der Gehege miteinander zu vergleichen, da verschiedene Tiere einen unterschiedlichen Platzbedarf haben.[2]
- Verschiedene Formen der Tiergehege lassen sich nutzen, um verschiedene Vergleichsstrategien zu motivieren. So können z. B. Flächen zerlegt und neu zusammengesetzt werden, runde Formen angenähert werden und durch das Ausschneiden der Figuren ist ein Übereinanderlegen möglich.

Dabei werden zwei **Kernideen** aufgegriffen (Barzel et al., 2012a, S. 359 f.):

- Eine besteht im **Vergleich der Flächeninhalte** der verschiedenen Gehege. Dieses aus dem Kontext heraus begründbare Vorgehen führt im mathematischen Sinne zum Bedürfnis, Flächen zu vermessen, um sie miteiander vergleichen zu können. Als subjektive Kernfrage wird formuliert: »Wie kann ich die Größe von Flächen vergleichen?« (Barzel et al., 2012c, S. 170)
- Die zweite Kernidee ist das **geschickte Bestimmen eines Flächeninhalts**, wofür zunächst mittels Kästchenpapier das Auszählen von Flächen mit unterschiedlicher Genauigkeit diskutiert wird, anschließend geeignete Maßeinheiten eingeführt werden und die Flächeninhaltsformel des Rechtsecks behandelt wird. Die Formulierung der zugehörigen Kernfrage lautet: »Wie kann ich die Größe von Flächen geschickt bestimmen?« (Barzel et al., 2012c, S. 171)

Diese Ideen werden jeweils über die Prozesse des Erkunden, Ordnens und Vertiefens realisiert. Durch dieses Vorgehen[3] wird das Verständnis sukzessive aufgebaut. Im Erkundungsprozess dient die Kernidee der Vorschauperspektive, während sie beim Ordnen und Vertiefen eher eine rückschauende Perspektive hat. Diese *Objektivierung* wird auch dahingehend sichtbar, dass die Kernfragen im Ordnen-Kapitel nun nicht mehr aus der Ich-Perspektive formuliert werden: »Wie kann man die Größe von Flächen vergleichen?«, »Wie kann man die Größe von Flächen bestimmen?« (Barzel et al., 2012c, S. 176 f.)

[2] Verwiesen wird auch auf ein *Gutachten über Mindestanforderungen an die Haltung von Säugetieren* vom Bundesministerium für Ernährung und Landwirtschaft (2014).

[3] Prediger et al. (2014) bezeichnen diese Prozesse auch als *Kernprozesse* des Unterrichtens.

5.5 Ausblick auf empirische Ebene

> Welche typischen individuellen Voraussetzungen (Vorstellungen, Kenntnisse, Kompetenzen, ...) sind zu erwarten und wie passen diese zum angestrebten Verständnis (Ressourcen vs. Hindernisse)? Woher kommen typische Hindernisse oder unerwünschte Vorstellungen? Wie können typische Vorkenntnisse und Vorstellungen als fruchtbare Anknüpfungspunkte dienen? Welche Schlüsselstellen (Hindernisse, Wendepunkte, ...) gibt es im Lernweg der Schülerinnen und Schüler? Wie kann der angestrebte Lernpfad bezüglich der Anknüpfungspunkte und Schlüsselstellen neu angeordnet werden?

Kuntze (2018, S. 159 f.) verweist auf typische Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Umgang mit dem Flächeninhaltsbegriff.

So kommt es häufig zu einer Verwechslung zwischen Längenmaßen, Flächeninahlten und Volumina. Eine Ursache wird v. a. in der frühzeitigen kalkülhaften Herangehensweise gesehen, Flächeninhalte über Formeln berechnen zu müssen. So fehlt ein tiefergehendes Begriffsverständnis und die Formeln können nicht sinnstiftend genutzt werden. Dem kann u. a. dadurch begegnet werden, indem bewusst die Zusammenhänge hergestellt werden, z. B. zwischen Umfang und Flächeninhalt. Letztlich zeigen empirische Erhebungen, dass Kinder mit einem vertieften Verständnis über Flächeninhalte auch besser in der Lage sind, entsprechende Formeln anzuwenden (Wörner, 2014, S. 1330).

Weiterhin besteht wegen der Wortverwandtschaft von *Fläche* und *Flächeninhalt* die Gefahr, dass entsprechende Vorstellungen nicht aufgebaut werden, insbesondere dann, wenn die Begriffe (zumindest von der Lehrkraft) nicht sauber getrennt verwendet werden. Die Fläche ist die Figur an sich und wird über ihre *Form* bestimmt. Der Flächeninhalt ist ein *Maß* für die Größe der Figur (vgl. Barzel et al., 2012a, S. 362). Insbesondere für Schülerinnen und Schüler, deren Muttersprache nicht Deutsch ist, kann die fehlerhafte Verwendung dieser feinen Unterschiede hinderlich dabei sein, dem Unterricht zu folgen.

Derartige Schwierigkeiten werden im Schulbuch implizit aufgegriffen (z. B. strikte sprachliche Trennung) oder explizit thematisiert (z. B. verbindende und vergleichende Behandlung mit dem Umfang von Figuren), so dass auch dies wieder die Gestaltung des Lernpfades beeinflusst.

5.6 Zum Nachbereiten

1. Diskutieren Sie zu weiteren typischen Operationen mit Flächeninhalten, welche Grundvorstellungen dafür aufgegriffen und genutzt werden.
2. Finden Sie einen alternativen Kontext (statt den Zoogehegen), der geeignet ist, die Kernideen so aspektreich durchzuarbeiten.

Lernprozesse gestalten

6 Lerntätigkeit und Lernhandlungen

Ziele

- Sie kennen Grundideen der Tätigkeitstheorie, insbesondere bezüglich Lehr-Lern-Prozesse.
- Sie können geeignete Lernhandlungen für Lerngegenstände formulieren.
- Sie kennen Möglichkeiten, wie Lernhandlungen in verschiedenen Unterrichtsphasen ausgebildet werden können.

Material

- Folien zur Vorlesung zu Lerntätigkeit und Lernhandlungen (pdf, Keynote)

Mit den Kapiteln 2 bis 5 haben Sie Ansätze kennengelernt, die Fragen der formalen, semantischen und konkreten Ebene des Vier-Ebenen-Ansatzes nach Hußmann & Prediger (2016) zu beantworten. Mit der deskriptiven Perspektive auf Grundvorstellungen kennen Sie auch schon erste Grundlagen, Fragen der empirischen Ebene zu untersuchen. Ziel bei all den Fragen war immer, **Lernpfade** für Lerngegenstände zu generieren, also den Stoff derart auszuwählen (*spezifizieren*) und anzuordnen (*strukturieren*), dass er sinnstiftend gelehrt und gelernt werden kann.

Nach einer solchen stoffdidaktischen Analyse ist nun der nächste Schritt die Planung der Unterrichtsgestaltung an sich. In der fachdidaktischen und bildungswissenschaftlichen Literatur hat sich hierfür der Begriff der **Lernumgebung** durchgesetzt – unter anderem als »pädagogische« Sichtweise (z. B. angenehme Lernatmosphäre, respektvolles Miteinander), als ein »methodisch-organisatorisches Arrangement« (z. B. Gestaltung des Klassenraums) oder eben auch als »inhaltliches Verständnis«, das hier weiter verfolgt werden soll (vgl. Krauthausen, 2018, S. 255).

Nach Leuders (2015, S. 448) beinhalten Lernumgebungen für den Mathematikunterricht **»i) ein nach bestimmten Prinzipien geordnetes System von Aufgaben, ii) methodische Organisationsformen und iii) Stützsysteme, wie z. B. Medien, Lehrerinterventionen und Kommunikationsformen«**. Die Grundlagen für die entsprechenden Bestandteile lernten und lernen Sie v. a. in den weiteren Veranstaltungen der Fachdidaktiken und Bildungswissenschaften sowie in Ihrer schulpraktischen Ausbildung (und auch noch während Ihrer Tätigkeit als voll ausgebildete Lehrkraft). Bezogen auf stoffdidaktische Überlegungen dienen die folgenden drei Kapitel dabei noch einmal einer Schwerpunktbildung:

- In diesem Kapitel werden zunächst allgemein Erkenntnisse über *Lehr-Lern-Prozesse* diskutiert. Dabei wird auf **tätigkeitstheoretische Grundlagen** Bezug genommen. Diese theoretische Grundlage ist dabei *eine* von vielen Möglichkeiten, Lehren und Lernen zu beschreiben und zu erklären, und wird hier aufgrund ihrer Betonung stofflicher Inhalte sowie als Forschungsschwerpunkt und in der Tradition der Potsdamer Mathematiklehrkräftebildung verwendet (siehe z. B. Etzold, 2021, S. 13). Sie sollten natürlich offen und neugierig genug sein, sich auch anderen Theorien zu widmen und diese für Ihre Unterrichtsplanung heranzuziehen.

- Von den *Medien* (zu denen ja beispielsweise auch die Tafel, Computer oder Zettel und Stift gehören – der entsprechende Medienbegriff sollte Ihnen aus den Bildungswissenschaften bekannt sein) werden im nächsten Kapitel v. a. **Arbeitsmittel**[1] herausgegriffen. Diese »repräsentieren mathematische Objekte und erlauben zudem Handlungen oder Operationen mit diesen Objekten« (Schmidt-Thieme & Weigand, 2015, S. 461 f.) Im Sinne der Tätigkeitstheorie dienen sie damit als Mittler zwischen Lerngegenstand und Schülerin bzw. Schüler. Im Schulalltag wird es in der Regel Ihre Aufgabe sein, derartige Arbeitsmittel zu **analysieren**, um sie zielgerichtet auszuwählen und im Unterricht einzusetzen.
- Eng verbunden mit dem Einsatz von Arbeitsmitteln sind **Aufgaben**, die Sie den Schülerinnen und Schülern stellen. Aufgaben können dabei »als Aufforderung an Lernende zum mathematischen Handeln aufgefasst« werden (Leuders, 2015, S. 435). Neben der Auswahl von Aufgaben werden Sie als Lehrkraft aber insbesondere Aufgaben **gestalten**, also selbst welche entwickeln und vorhandene Aufgaben variieren und an Ihre Lerngruppe anpassen. Maßnahmen hierzu finden sich im übernächsten Kapitel.

6.1 Tätigkeitstheorie und Lernen

Eine Grundannahme der Tätigkeitstheorie, die auf Vygotskijs psychologische Arbeiten aus den 1920er Jahren in der Sowjetunion zurück geht, ist das Verständnis, dass sich **Individuen aktiv-handelnd mit ihrer Umwelt auseinandersetzen**, **die Umwelt** dabei in der Interaktion mit der Gesellschaft **verändern**, und beide Prozesse wiederum psychisch im Individuum abgebildet werden. Dies widerspricht bspw. der *behavioristischen* Annahme, dass man sich seiner Umwelt einfach nur anpasst, aber es ist auch nicht mit einer *streng konstruktivistischen* Annahme zu verwechseln, nach der Individuen ein Abbild der Umwelt kognitiv rekonstruieren. Die Tätigkeitstheorie kann eher als »(moderat) konstruktivistische[r][..] Ansatz« bezeichnet werden (Giest, 2016, S. 47).

Zu betonen ist dabei die **beiderseitige Wirkrichtung**: Sowohl das Individuum wirkt auf die Umwelt ein (und verändert sie, es kommt zur *gesellschaftlichen Weiterentwicklung*), als auch die Umwelt auf das Individuum (was zur *Persönlichkeitsentwicklung* führt). Beide Prozesse sind dabei nicht voneinander zu trennen. Eine solche Interaktion ist von (gesellschaftlich entwickelten) Motiven geprägt und wird als ***Tätigkeit*** bezeichnet. Giest & Lompscher (2006, S. 27)

[1] In der englischsprachigen Literatur werden *Arbeitsmittel* oft als *manipulatives* bezeichnet. Dies soll nicht ausdrücken, dass diese Arbeitsmittel in irgendeiner Weise manipulierend auf die Schülerin oder den Schüler wirken, sondern dass die Schülerinnen und Schüler selbst das Arbeitsmittel verändern bzw. mit dessen Hilfe auf den Lerngegenstand einwirken (siehe auch Wikipedia contributors, 2021).

formulieren: »Er [der Mensch] erschafft damit seine Kultur und zugleich die psychischen Funktionen, die ihn dazu in die Lage versetzen.« Dieses Paradoxon, dass die Tätigkeit ihre eigene Voraussetzung ist, kann aufgelöst werden, indem man zunächst kultur-historisch die gemeinschaftliche und erst dann die individuelle Tätigkeit betrachtet: »Durch (gemeinsame) Tätigkeit erfolgte die (kulturelle) Menschwerdung und über ihre individuelle Aneignung verläuft die Persönlichkeitsentwicklung« (Giest & Lompscher, 2006, S. 27).

Für schulische Prozesse von besonderem Interesse ist die ***Lerntätigkeit***, in der Definition nach Giest & Lompscher (2006, S. 67):

Definition 6.1 (Lerntätigkeit)**.** Lerntätigkeit kann man definieren als die speziell auf die Aneignung gesellschaftlichen Wissens und Könnens (Lerngegenstände) gerichtete Tätigkeit, wozu spezifische Mittel (Lernmittel) unter speziell gestalteten Bedingungen eingesetzt werden müssen.

Giest & Lompscher (2006, S. 67) führen fort: »Da die Lerngegenstände und Lernmittel kultureller Natur sind, kann Lerntätigkeit auch nur im Rahmen der Kultur, der Kooperation und Kommunikation mit denen, die über diese Kultur verfügen, angeeignet werden.« Dies betont in der Unterrichtsrealität u. a. die besondere Bedeutung und Verantwortung der Lehrkraft als wissende Person, die den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler steuert. Dies heißt nicht, dass Unterricht lehrerzentriert gestaltet werden soll, ganz im Gegenteil: Entscheidend ist, dass die Lehrperson die Schülerinnen und Schüler dazu befähigt, sich den Lerngegenstand anzueignen, etwa indem sie geeignete Lernmittel zur Verfügung stellt und den Umgang mit ihnen schult.

Auch unabhänging vom Lernen sind Tätigkeiten stets auf einen **Gegenstand** bezogen, können also niemals inhaltsleer erfolgen. Tätigkeiten basieren dabei auf **Motiven**, d. h. »innere Antriebe« (Giest & Lompscher, 2006, S. 39). Im Kontext des Lernens sind dies insbesondere die Motive *Interesse*, *Leistung*, *Affiliation* (soziale Nähe) und *Neugierde* (Mienert & Pitcher, 2011, S. 57). In der Konfrontation mit einem Gegenstand bildet das Individuum, basierend auf die Motive, **Ziele** als »ideell vorweggenommene Resultate der Tätigkeit« aus (Giest & Lompscher, 2006, S. 39), was zu **Handlungen** im Zusammenhang mit dem Gegenstand führt. Handlungen dienen also der (zielgerichteten) Realisierung der Tätigkeit. Im Rahmen der *Lerntätigkeit* führt dies dann zu ***Lernhandlungen***. Lompscher (1983b, S. 46) definiert:

Definition 6.2 (Lernhandlung)**.** Lernhandlungen sind relativ geschlossene und abgrenzbare, zeitlich und logisch strukturierte Abschnitte im Verlauf der Lerntätigkeit, die ein konkretes Lernziel realisieren, durch bestimmte Lernmotive angetrieben werden und entsprechend den konkreten Lernbedingungen durch den Einsatz äußerer und verinnerlichter Lernmittel in einer jeweils spezifischen Folge von Teilhandlungen vollzogen werden.

6.2 Typische Lernhandlungen

Unabhängig von konkreten Lerngegenständen haben Bruder & Brückner (1989) typische Lernhandlungen für den Mathematikunterricht strukturiert beschrieben (Hervorhebungen im Original, auch dargestellt bei Feldt-Caesar, 2017, S. 87 ff.):

6.2.1 Elementare Aneignungshandlungen

- **Identifizieren:** »Vergleichen der aufgenommenen Informationen zu Teilen oder Eigenschaften eines Objektes mit den Merkmalen bestimmter aktualisierter Abbilder (Stoffelemente, Handlungsvorschriften ...) und Feststellung von Übereinstimmung oder Nichtübereinstimmung auf der Grundlage eines den jeweiligen Abbildungsmerkmalen entsprechenden *Idealisierens* der gegebenen Objektsituation«
- **Realisieren:** »*Transferieren*, Konkretisieren oder Spezialisieren eines vorgegebenen (bzw. identifizierten) Handlungsgegenstandes (Stoffelemente, Vorgehensstrategien ...) auf eine gegebene Objektsituation und *Zusammenfügen* der so erzeugten Teile zu einem neuen Ganzen«

6.2.2 Grundhandlungen

- **Erkennen:** »Ausgliedern wahrgenommener Informationen aus der Aufgabenstellung und Inbeziehungsetzen mit ausgegliederten bekannten (gespeicherten) Abbildern bzw. der neu zusammengefügten Abbilder, bis eine Übereinstimmung festgestellt wird«
- **Beschreiben:** »Identifizieren und Realisieren einer dem gespeicherten (oder erzeugten) Abbild adäquaten umgangssprachlichen Formulierung oder Darstellung in mathematischer Terminologie und Symbolik und Entäußerung der Informationen auf sprachlicher oder materialisierter Ebene«
- **Verknüpfen:** »*Transferieren* und *Zusammensetzen* von Zusammenhängen (Sätzen, Verfahren) oder Vorgehensstrategien zu einem neuen Ganzen durch Ersetzungen in der Ausgangskonstellation von Zusammenhängen«
- **Anwenden:** »Feststellen der Übereinstimmung von den Bedingungen der Aufgabenstellung mit der Ausgangskonstellation der zu realisierenden gegebenen (oder erzeugten) Handlungsvorschrift (Identifizieren) und ggf. Herstellen einer solchen Übereinstimmung (Transferieren)«
- **Begründen:** »a) Vergleichen eines vorgegebenen Sachverhalts mit gegebenen bzw. bekannten Normativen; b) Realisieren gegebener bzw. identifizierter elementarer Beweisverfahren«

6.2.3 Komplexe Handlungen

- **Suchen:** »Ergebnis von Suchhandlungen sind zieltaugliche Mittel (Stoffelemente, Zuordnungen, Vorgehensstrategien) zur Lösung der gestellten Aufgabe – gewonnen durch mehr oder weniger bewußte Anwendung von Suchstrategien«
- **Planen:** »Durch Anwenden von Vorgehensstrategien wird ein Arbeitsplan mit den erforderlichen Teilschritten zur Zielrealisierung entwickelt«
- **Ausführen:** »Abarbeiten eines Arbeitsplanes – Handlungsvollzug auf der Grundalge der ausgebildeten Orientierungsgrundlage u. a. als Berechnen, geometrisches Darstellen, Definieren, Darstellen eines Beweises«
- **Kontrollieren:** »Feststellen der Zweckmäßigkeit und Exaktheit von Teilschritten des Aufgabenlösens und des Resultats (Handlungsprodukt!)«

Diese Handlungen müssen nun je nach Lerngegenstand noch konkretisiert werden. Am Beispiel des Winkelfeldes in Abschnitt 1.3.3 lautete eine Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler: »Wo muss das Schaf lang laufen, damit es die gesamte Zeit gerade so von der Kuh gesehen wird?« Hierfür bewegen die Schülerinnen und Schüler in der App das Schaf entlang der Sichtfeldgrenze der Kuh, geradlinig und in Richtung der Augen der Kuh begrenzt und in die andere Richtung unbegrenzt. Sie *identifizieren und realisieren* damit das mathematische Objekt *Strahl*, gebunden am Kontext der Sichtfelder. Im Anschluss wird diese Handlung (kontextunabhängig) verallgemeinert und die Strahl-Eigenschaft des Schenkels charakterisiert. Die App als Lernmittel unterstützt diesen Prozess, indem sich die Bestandteile des Winkelfeldes ein- und ausblenden lassen sowie vom *Tiermodus* in den *Winkelfeldmodus* gewechselt werden kann.

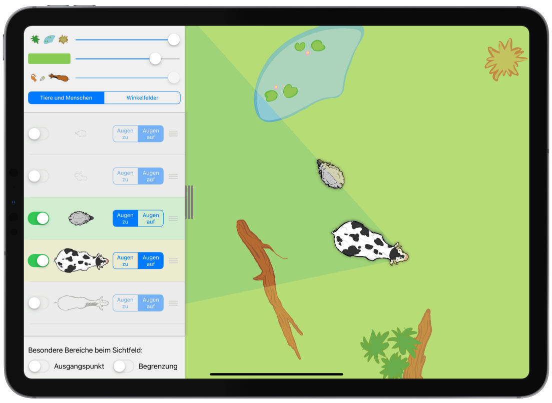


Abbildung 6.1: Lernhandlung in der App *Winkel-Farm* (Etzold, 2019a)

6.3 Lernhandlungen ausbilden

Lernhandlungen sind zwar notwendig, um sich einem Lerngegenstand zu nähern, müssen selbst jedoch auch erst einmal (am Lerngegenstand) ausgebildet werden. Weiterhin sollen die

Lernhandlungen verinnerlicht werden, um sie in Transfersituationen anwenden und komplexere Handlungen darauf aufbauen zu können. Die Qualität der Lernhandlungen verändert sich also im Lernprozess, was sich in verschiedenen Phasen des Unterrichtsgeschehens widerspiegelt.

An dieser Stelle soll auf die von Prediger et al. (2013, S. 770) fomulierten (und nicht originär auf die Tätigkeitstheorie basierenden[2]) vier ***Kernprozesse*** einer Unterrichtssequenz zurückgegriffen werden, die auch den Aufbau der *Mathewerkstatt* (Barzel et al., 2012c) leiten:

- Kernprozess des **Anknüpfens** an Vorerfahrungen und Interessen
- Kernprozess des **Erkundens** neuer Zusammenhänge
- Kernprozess des **Ordnens** als Systematisieren und Sichern
- Kernprozess des **Vertiefens** durch Üben und Wiederholen.

Im Folgenden wird dargestellt, wie einzelne aus der Tätigkeitstheorie stammenden Aspekte zur Ausbildung von Lernhandlungen helfen können, die Kernprozesse, auch unter der stoffdidaktischen Perspektive des Vier-Ebenen-Ansatzes, zu unterstützen. Während die Kernprozesse im Unterricht relativ klar voneinander getrennt werden sollten (weil sie unterschiedliche Funktionen verfolgen), wirken die Theorieelemente teils prozessübergreifend, was sich in den folgenden Überschriften widerspiegelt.

6.3.1 Anknüpfen

Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst in die Lage versetzt werden, sich mit dem Lerngegenstand auseinandersetzen zu *wollen*. Hierzu ist es hilfreich, die Anforderungssituation in der **Zone der nächsten Entwicklung** der Schülerinnen und Schüler zu präsentieren. Dabei handelt es sich um eine Problemsituation, Aufgabe oder Fragestellung, die die Schülerinnen und Schüler zwar mithilfe ihrer bisherigen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten verstehen und nachvollziehen können, zu ihrer Lösung sie jedoch noch nicht *selbstständig* in der Lage sind. Somit wird eine Motivation geschaffen, sich mit der Thematik tiefer auseinanderzusetzen. Es ist durchaus möglich, an dieser Stelle auch schon erste Lösungsversuche zu unternehmen. Daran ist besonders gut zu erkennen, »was wir nicht wissen bzw. können, um die Anforderung zu bewältigen« (Lompscher, 1996, S. 4).

Anschließend werden gemeinsam mit der Lehrkraft die **Lernziele** herausgearbeitet, die den weiteren Verlauf des Lernens strukturieren sollen. Wichtig ist hier eine Unterscheidung zu *Lehrzielen*, die die Sicht der Lehrkraft widerspiegeln. *Lernziele* dagegen sind die Ziele aus Sicht der Schülerinnen und Schüler, auf die sich im individuellen Lernprozess auch bezogen werden können muss. Es bietet sich daher auch eine explizite Formulierung der Lernziele an.

In dieser ersten Phase der Ausbildung von Lernhandlungen sollte gemäß Kapitel 4 auf einen geeigneten **Kontext** zurückgegriffen werden, um den Lerngegenstand zu motivieren, und die **Kernideen bzw. Kernfragen** sollten leitend für die Fomulierung der Lernziele sein.

[2] Prediger et al. (2014, S. 83) erwähnen hier einen Zusammenhang zu *typischen Unterrichtssituationen*, die Bruder (1991), basierend auf tätigkeitstheoretischen Grundlagen, formuliert.

Sowohl in der Anforderungssituation als auch in der Formulierung der Lernziele zeigt sich erneut die **Bedeutung der Lehrkaft**: Sie ist diejenige, die die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzen kann, sich dem Lerngegenstand zu nähern. Das heißt insbesondere auch, dass ein *Ostereiersuchen* vermieden werden muss (bei dem die Schülerinnen und Schüler z. B. so lange raten, um was es denn heute gehen könnte, bis sie die richtige Antwort gefunden haben), sondern die Lehrkraft *instruiert* (persönlich oder durch geeignete Aufgabenstellungen) unter Berücksichtigung der individuellen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler einen ersten Zugang zum Lerngegenstand. Im Sinne der tätigkeitstheoretischen Grundlagen ist die Lehrkraft damit ein Vertreter des gesellschaftlichen Wissens und Könnens, das sich die Schülerinnen und Schüler als Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten aneignen werden.

6.3.2 Anknüpfen/Erkunden

Mit der Anforderungssituation geht ad hoc eine Orientierung der Schülerinnen und Schüler bezüglich der Einwirkung auf den Lerngegenstand einher. Dies erfolgt noch, bevor überhaupt Lernhandlungen ausgeführt werden (also noch vor dem *Erkunden*), es handelt sich also um eine rein kognitive Dimension. Dabei wird in drei Qualitäten von Orientierungsgrundlagen unterschieden (als Zitate gekennzeichnete Formulierungen sind entnommen aus Feldt-Caesar, 2017, S. 83 ff.):

- **Probierorientierung:** Die Schülerinnen und Schüler verfügen noch nicht über für die Anforderungsbewältigung nötigen Kenntnisse, Fähigkeiten oder Fertigkeiten. Stattdessen gehen sie nach Versuch und Irrtum vor. Dabei fehlt ihnen »häufig die Einsicht, warum eine bestimmte Handlung zum Erfolg geführt hat, eine andere jedoch nicht. [...] Aufgrund der mangelnden Einsicht in die wirklichen Bedingungen der Handlungen ist eine erfolgreiche Handlung nicht notwendigerweise reproduzierbar.« Dies führt dazu, dass erfolgreiche Handlungen kaum auf veränderte Situationen übertragen werden können. Eine derartige Orientierung ist also höchstens »in Aneignungsprozessen zu einem Explorieren des neuen Inhaltsbereichs« wünschenswert, darüber hinaus jedoch sollten höhere Orientierungsgrundlagen angestrebt werden.
- **Musterorientierung:** Die Schülerinnen und Schüler gehen nun nicht mehr nach Versuch und Irrtum vor, sondern orientieren sich an bereits erfolgreich durchgeführten Handlungen in ähnlichen Anforderungssituationen – die sozusagen als Muster dienen. »Dieser Orientierungstyp ist nur dann erfolgreich, wenn die gegebene Anforderungssituation dem erlernten Muster ähnlich genug ist, um eine Passung zu ermöglichen. Tragfähig ist ein Muster nur dann, wenn seine Handlungsbedingungen genau gekannt und stets geprüft werden.« Es handelt sich also zwar um eine vollständige Orientierungsgrundlage, jedoch ist eine Transferierbarkeit nicht immer gegeben. Auch kann die »fälschliche Erkennung eines Musters in einer gegebenen Anforderungssituation« zu einer fehlerhaften Übertragung führen.
- **Feldorientierung:** Die Schülerinnen und Schüler sind nun »nicht an eine konkrete Anforderungssituation gebunden, sondern beziehen sich vielmehr auf ganze Anforderungs-

> klassen. Durch das Erkennen der Passung einer solchen Anforderungsklasse kann sich der Lernende für konkrete Situationen selbst eine Orientierung schaffen. Er verfügt über einen gewissen Überblick über die Situation und ist in der Lage zu differenzieren, welche Stoffelemente und welche seiner Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten ihm bei der Bewältigung der Anforderung weiterhelfen können und welche nicht.«

Insbesondere für bedeutsame Lerngegenstände im Mindeststandardbereich ist eine Feldorientierung wünschenswert. Unterstützt werden kann dies etwa durch **reichhaltige Kontexte** und die **Vorschauperspektive der Kernideen/Kernfrage**, so dass sich die Schülerinnen und Schüler darauf einlassen können, nun ein gesamtes Feld zu erschließen. Auch das **Explizitmachen fundamentaler Ideen**[3] hilft für eine derartige Einordnung. Die Orientierungsgrundlage bietet damit eine wichtige Basis für die auszubildenden Handlungen und die Organisation der Handlungsausführung.

Vor allem bei der Gestaltung von Aufgabenstellungen ist es relevant, welche Orientierungsgrundlagen mit diesen angesprochen werden können, siehe dazu auch Abschnitt 8.4.

6.3.3 Erkunden/Ordnen/Vertiefen

Nach dem Orientierungsteil kommt es zum Ausführungsteil der Lernhandlungen. Hierfür schlägt Gal'perin eine »etappenweise Interiorisierung« von Lernhandlungen vor (vgl. Lompscher, 1983a, S. 66 f.):

- **Etappe der materiellen bzw. materialisierten Handlung**: Die Handlungen werden mit konkretem Material bzw. (z. B. auch digitalen) Repräsentationen des Lerngegenstands durchgeführt. Hierfür sind geeignete Materialien notwendig, in Definition 6.2 als *äußere Lernmittel* und in der Mathematikdidaktik i. d. R. als *Arbeitsmittel* bezeichnet (siehe Kapitel 7).
- **Etappe der sprachlichen Handlung**: Die Handlungen werden nicht mehr direkt durchgeführt, aber durch äußeres (oder inneres) Sprechen beschrieben. Dabei wird i. d. R. Bezug auf die vorherigen Handlungen genommen.
- **Etappe der geistigen Handlung**: Die Handlungen werden nun rein kognitiv durchgeführt und bedürfen weder des Materials noch der Sprache.

Letztlich dienen diese Etappen dazu, die Lernhandlungen (und damit auch den Lerngegenstand, an dem diese Handlungen durchgeführt werden) psychisch abbilden zu können, was zur »Verallgemeinerung, Verkürzung und Beherrschung« der Handlungen führt (Steinhöfel et al., 1988, S. 19). Dieses Vorgehen unterstützt übrigens auch dabei, **Grundvorstellungen aufzubauen**. So stellen bspw. Wartha & Schulz (2011, S. 11) ein Vier-Phasen-Modell vor, dass stark an die etappenweise Verinnerlichung von Lernhandlungen nach Gal'perin erinnert, siehe Abbildung 6.2.

[3] Dies ist eine Adaption eines bei Reitz-Koncebovski et al. (2018, S. 182) dargestellten Gestaltprinzips fachwissenschaftlicher Lehrveranstaltungen in der Lehramtsausbildung.

1	*Das Kind handelt am geeigneten Material.* Die mathematische Bedeutung der Handlung wird beschrieben. Zentral: Versprachlichen der Handlung und der mathematischen Symbole.
2	*Das Kind beschreibt die Materialhandlung mit Sicht auf das Material.* Es handelt jedoch nicht mehr selbst, sondern diktiert einem Partner die Handlung und kontrolliert den Handlungsprozess durch Beobachtung.
3	*Das Kind beschreibt die Materialhandlung ohne Sicht auf das Material.* Für die Beschreibung der Handlung ist es darauf angewiesen, sich den Prozess am Material vorzustellen.
4	*Das Kind arbeitet auf symbolischer Ebene, übt und automatisiert.* Gegebenenfalls wird die entsprechende Handlung in der Vorstellung aktiviert.

Abbildung 6.2: Aufbau von Grundvorstellungen nach Wartha & Schulz (2011, S. 11)

Steinhöfel et al. (1988) stellen (für die zur Zeit der Publikation) typische Unterrichtssituationen dar und nennen hierzu einige Möglichkeiten zur etappenweise Verinnerlichungen von Lernhandlungen im Mathematikunterricht, siehe Abbildung 6.3.

6.3.4 Ordnen/Vertiefen

Die Handlungsausführung sollte stets von einer **Handlungskontrolle** begleitet werden. Das bedeutet, dass die Schülerinnen und Schüler eine bewusste Beziehung herstellen zwischen ihren (erreichten oder zu erreichenden) Handlungsergebnissen, den eingesetzten Lernmitteln sowie deren Bedingungen und der eigenen Handlungsausführung. Die Handlungskontrolle ist dabei eine *Selbstkontrolle* und muss dementsprechend auch erst einmal ausgebildet werden. Folgende methodischen Maßnahmen scheinen hierfür hilfreich zu sein:

- Ein Abgleich mit den zu erreichenden Handlungsergebnissen ist nur möglich, wenn im Vorfeld eine Zielklarheit besteht. Es ist daher zu empfehlen, die **Lernziele** (siehe Abschnitt 6.3.1) **explizit zu formulieren und auch festzuhalten**.
- Durch das **Anfertigen eines Lernprotokolls** (vgl. Bruder, 2001) erhalten die Schülerinnen und Schüler eine Möglichkeit, ihre eigenen Lernhandlungen zu dokumentieren und nachzuvollziehen. Insbesondere kann in diesem auch ohne jeglichen Bewertungsdruck dargestellt werden, wo man selbst als Schülerin oder Schüler noch Lücken sieht bzw. was man noch nicht verstanden hat.
- Als weitere effektive Maßnahme in der Ausbildung der Handlungskontrolle hat sich die **gegenseitige Kontrolle der Schülerinnen und Schüler** als hilfreich herausgestellt. »Es läßt sich zunächst beim Partner leichter feststellen als bei sich selbst, inwieweit ein Handlungsergebnis bestimmten Zielkriterien entspricht, die Handlungsausführung

	Realisierung z.B. durch:
1. Etappe der materiellen bzw. materialisierten Handlung	- Umgang mit Modellen, Schemata, Zeichnungen, realen Gegenständen u.ä. (bzw. Bau von Modellen, Anfertigen von Skizzen, ...) - Verwendung von Symbolen - Verwendung von Tabellen und Übersichten
2. Etappe der sprachlichen Handlung	- Kommentierendes Lösen unter zunehmender Zurückdrängung schriftlicher Orientierungsmaterialien - Chorsprechen - Schülervortrag - Wiederholen von Merksätzen u.ä. - Korrektur sprachlicher Äußerungen
3. Etappe der geistigen Handlung	- Stillarbeit (selbständiges Lösen von Aufgaben ohne detaillierte Anleitung, im Prinzip nur Ergebniskontrolle) - mündliches oder schriftliches Formulieren von Antworten (evtl. Ausfüllen von Lückentexten).

Abbildung 6.3: Beispiele zur etappenweisen Verinnerlichung von Handlungen im Mathematikunterricht nach Steinhöfel et al. (1988, S. 19)

anforderungs- und regelgerecht erfolgt, wo Abweichungen und Fehler liegen und worin die Ursachen dafür bestehen können« (Lompscher, 1983a, S. 72). Durch Verinnerlichung dieses Vorgehens kann dann schrittweise auch eine Selbstkontrolle erfolgen.

Die dargestellten Beispiele greifen mit dem Abgleich zwischen Handlungsergebnissen und -zielen auch die **Rückschauperspektive der Kernideen/Kernfragen** auf. Die Handlungskontrolle befähigt damit die Schülerinnen und Schüler langfristig dazu, eine Feldorientierung über den Lerngegenstand zu erlangen.

6.4 Zum Nachbereiten

1. Formulieren Sie eine Anforderungssituation in der Zone der nächsten Entwicklung am Beispiel der Vierecksarten und stellen Sie dar, inwieweit diese zwar verstanden und nachvollzogen, aber noch nicht selbstständig gelöst werden kann.
2. Konkretisieren Sie einige der für den Mathematikunterricht typischen Lernhandlungen (siehe Abschnitt 6.2) am Lerngegenstand *Vierecksarten*.
3. Beschreiben Sie Möglichkeiten zur etappenweisen Verinnerlichung der bei 2. dargestellten Lernhandlungen.

7 Arbeitsmittel

Ziele

- Sie können den Begriff des Arbeitsmittels in den Vier-Ebenen-Ansatz sowie tätigkeitstheoretisch einordnen.
- Sie kennen ein Instrument zur Analyse von Arbeitsmitteln.
- Sie sind, ggf. mit Unterstützung, in der Lage, Arbeitsmittel strukturiert zu analysieren.

Material

- Folien zur Vorlesung zu Arbeitsmitteln (pdf, Keynote)

7.1 Begriffsklärung und Einordnung

Ausgehend von den im letzten Kapitel dargestellten theoretischen Betrachtungen, kommt *Lernmitteln* (siehe Abschnitt 6.1) bzw. *Material* (siehe Abbildung 6.2) eine bedeutsame Rolle in der Ausbildung und Verinnerlichung von Lernhandlungen zu. Die Begrifflichkeiten sind jedoch nicht gleichzusetzen, was in diesem Abschnitt genauer herausgearbeitet werden soll.

Lernmittel haben eine allgemeineren Charakter und entstammen einer weiteren tätigkeitstheoretischen Annahme: Tätigkeiten erfolgen nach Wygotski (1985) niemals direkt zwischen einem Individuum (dem **Subjekt**) und dem zu betrachtenden Gegenstand (dem **Objekt**), sondern geschehen stets über ein **vermittelndes Werkzeug**. Ein solches Werkzeug kann eine Geste sein, die Sprache (als Beispiel für ein sogenanntes *psychisches Werkzeug*), Abbildungen und Skizzen, aber eben auch *echte* Werkzeuge wie Maschinen, Geräte und andere Hilfsmittel.

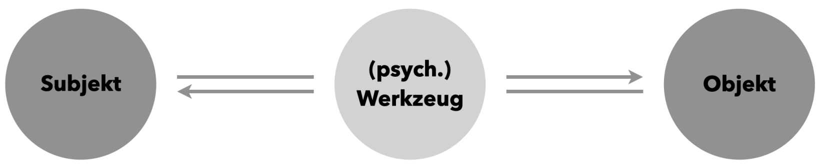


Abbildung 7.1: Werkzeuge als Vermittler in der Tätigkeitstheorie

Durch die Nutzung eines geeigneten Werkzeugs ist das Subjekt damit einerseits in der Lage, sein eigenes Wissen zu ***externalisieren***, d. h. das Werkzeug zielgerichtet so einzusetzen, dass auf das Objekt eingewirkt werden kann. Andererseits kann das Werkzeug auch dabei helfen, Eigenschaften des Objekts zu ***internalisieren***, indem die Werkzeugnutzung dazu führt, dass das Subjekt Kenntnisse über das Objekt gewinnt.

Im Rahmen der Lerntätigkeit sind solche (ggf. psychischen) Werkzeuge dann *Lernmittel* und können vielfältigster Natur sein:

- Mithilfe eines *Zirkels* können Kreise erzeugt werden, indem der Zirkel seiner Funktion entsprechend verwendet wird (Externalisierung der Kenntnisse über den Kreis). Die Gestaltung und Handhabung des Zirkels selbst vermittelt jedoch auch Wissen über den Kreisbegriff, so dass dieses in der Verwendung des Werkzeugs aufgebaut werden kann (Internalisierung des Wissens über den Kreis).
- Die *digitale Stellenwerttafel* ermöglicht es, das Stellenwertverständnis zu Zahlen aufzubauen und Zahlen entsprechend darzustellen. Durch das Verhalten der Anwendung (dass z. B. ein Plättchen beim Verschieben von der Zehner- in die Einer-Spalte automatisch entbündelt wird) unterstützt diesen Aneignungsprozess (siehe Kortenkamp et al., 2018).
- Auch *Aufgaben* haben die Funktion eines (bedeutsamen!) Lernmittels, wenn sie als Aufforderung zum Lernhandeln aufgefasst werden (siehe Abschnitt 8.1). An ihnen erarbeiten sich die Schülerinnen und Schüler bestimmte Elemente des Lerngegenstands und die Gestaltung der Aufgabe sowie die vorhandenen Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler bestimmen den Verlauf und Erfolg der Lernhandlung.

Der *Material*-Begriff dagegen ist enger als der Begriff des *Lernmittels* und stammt nicht aus der Tätigkeitstheorie. Verbreiteter und konkreter fassbar in der Mathematikdidaktik ist hierfür auch der Begriff des **Arbeitsmittels**. Nach Krauthausen (2018, S. 310) sind Arbeitsmittel im Mathematikunterricht Veranschaulichungsmittel (zum Illustrieren oder Visualisieren mathematischer Konzepte) oder Anschauungsmittel (d. h. »Darstellungen mathematischer Ideen in der Hand der Lernenden [...] zur (Re-)Konstruktion mathematischen Verstehens«). Entscheidend ist hierbei eine »aktivistische« Sichtweise, also dass die Schülerinnen und Schüler die Arbeitsmittel aktiv als »Denkwerkzeug« verwenden. Die Aufgabe der Lehrkraft ist es dabei, »in den sachgerechten Gebrauch ein[zu]führen und Hilfen (zur Selbsthilfe) im Umgang mit Anschauungsmitteln [zu] gewähren« (Krauthausen, 2018, S. 310). Schmidt-Thieme & Weigand (2015, S. 461 f.) formulieren in inhaltlich ähnlicher Weise: »Arbeitsmittel repräsentieren mathematische Objekte und erlauben zudem Handlungen oder Operationen mit diesen Objekten«.[1]

In dieser Einordnung übernehmen Arbeitsmittel demnach die Aufgabe eines Lernmittels (auch wenn es weitere Lernmittel gibt, die keine Arbeitsmittel sind). In der obigen Aufzählung der Beispiele kann die *digitale Stellenwerttafel* als Arbeitsmittel aufgefasst werden.

Um den Begriff des Arbeitsmittels anzureichern, soll ein weiteres aus der Tätigkeitstheorie stammendes Konzept aufgegriffen werden, nämlich das des ***Lernmodells***. Lernmodelle sind »sinnliche Stützen geistigen Handelns« (Giest & Lompscher, 2006, S. 225) und können bspw. Zeichnungen, strukturierte Darstellungen, digitale Anwendungen usw. sein. Sie haben als Modelle dabei den Vorteil, dass sie »nicht die konkreten Merkmale der einzelnen Erscheinungen

[1] Den Arbeitsmitteln werden hier *Anschauungsmittel* entgegengestellt, jedoch in einer eher demonstrierenden Bedeutung (Schmidt-Thieme & Weigand, 2015, S. 466 f.), was eher dem Begriff der *Veranschaulichungsmittel* bei Krauthausen (2018, S. 310) entspricht.

oder Situationen, sondern nur konstitutive, im gegebenen Kontext wesentliche Merkmale und Relationen enthalten, also *abstrakt* sind« (Lompscher, 1983a, S. 64, Hervorhebung im Original). Gleichzeitig sind sie aber auch »*anschauliche* Abbildungen und machen damit die grundlegenden Zusammenhänge und Wesensmerkmale der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich« (Lompscher, 1983a, S. 64, Hervorhebung im Original). Lernmodelle können daher insbesondere für mathematische Lerngegenstände dienlich sein, da sie die »abstrakte Struktur des Gegenstands zusammen mit dem prinzipiellen Weg [..], der zur Aufdeckung der Struktur geführt hat«, beinhalten (Lompscher, 1996, S. 6). Dass es sich dabei nicht ausschließlich um Abbildungen, sondern eben auch haptische Materialien oder digitale Anwendungen handeln kann, machen die obigen und noch folgenden Beispiele deutlich.

Bei der Entwicklung oder Auswahl eines Lernmodells ist es für Sie als Lehrkraft daher von besonderer Bedeutung, was der *Kern* des entsprechenden mathematischen Gegenstands ist. Im Sinne der konkreten Ebene des Vier-Ebene-Ansatzes muss also das **Lernmodell mit der Kernidee in Einklang** stehen. Bezugnehmend auf die Grundvorstellungsidee (siehe Definition 3.1) auf der semantischen Ebene dienen damit **Lernmodelle als operationsfähige Repräsentationen** und erfüllen somit auch die Bedingungen an ein Arbeitsmittel.

Als Definition für Arbeitsmittel, die sowohl mathematikdidaktische als auch tätigkeitstheoretische Bezüge aufgreift, wird im Folgenden gewählt:

Definition 7.1 (Arbeitsmittel)**.** Ein Arbeitsmittel ist eine **materielle oder materialisierte**[2] **sowie operierbare Repräsentation** eines Lerngegenstands für die Hand der Schülerinnen und Schüler. Damit muss ein Arbeitsmittel folgende Bedingungen erfüllen:

- Es enthält kontextübergreifend die dem Wesen des Lerngegenstands entsprechenden Merkmale und Relationen **(Abstraktheit)**.
- Es macht die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich **(Anschaulichkeit)**.
- Es ermöglicht, Lernhandlungen durchzuführen, die der Aneignung des Wesens des Lerngegenstands dienlich sind **(Operierbarkeit)**.

7.2 Arbeitsmittel analysieren

7.2.1 ACAT-Modell

Als Lehrkraft werden Sie (wahrscheinlich) selten in der Situation sein, selbst Arbeitsmittel erstellen zu müssen. Bedeutsamer ist es, existierende Arbeitsmittel einschätzen und analysieren zu können – gerade bei einer immer größer werdenden Fülle an digitalen Apps, die durchaus den Charakter eines Arbeitsmittels einnehmen können. Um Arbeitsmittel fundiert und strukturiert zu analysieren, bietet sich als Stütze das auf die Tätigkeitstheorie aufbauende Modell **Artifact-Centric Activity Theory (ACAT)**[3] von Ladel & Kortenkamp (2013) an, siehe Abbil-

[2] Damit sind auch Abbildungen, Strukturdiagramme oder Apps eingeschlossen.
[3] übersetzt: Artefakt-zentrierte Tätigkeitstheorie

dung 7.2.

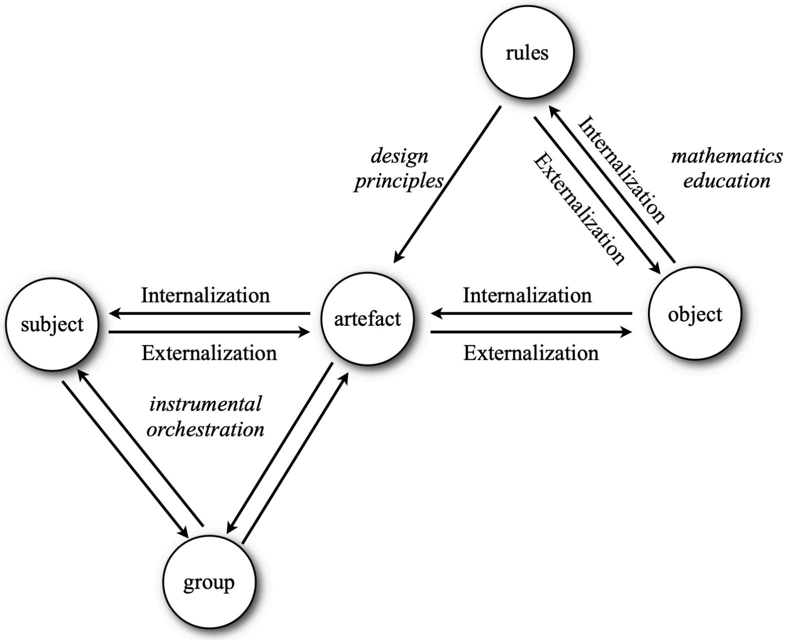


Abbildung 7.2: ACAT-Modell nach Ladel & Kortenkamp (2013, S. 4)

Zunächst einmal ist auf der Hauptachse das Beziehungsgefüge aus Subjekt (Schüler/-in), Objekt (Lerngegenstand) und Artefakt (Arbeitsmittel) dargestellt, das der oben dargestellten Grundannahme der Tätigkeitstheorie entspricht. Statt von einem Werkzeug ist hier von einem *Artefakt* die Rede. Damit soll ausgedrückt werden, dass es sich um ein künstlich geschaffenes Medium handelt, das zum Zwecke des Wissenserwerbs von einer mit dem Lerngegenstand vertrauten Person (z. B. Lehrkraft oder Forscherin bzw. Forscher) entwickelt worden ist. Erst mit dem tatsächlichen und zielgerichteten Einsatz durch die Schülerinnen und Schüler wird es zum *Werkzeug*, weil erst dann Internalisierungs- und Externalisierungsprozesse stattfinden.[4] Diese *Internalisierung- und Externalisierungsprozesse* werden hier im Modell auf der Hauptachse dargestellt.

Das obere rechte Dreieck beschreibt die spezifische Gestaltung des Artefakts über sogenannte *Regeln*. Die Regeln ergeben sich einerseits aus dem mathematischen Gegenstand selbst. Andererseits stammen sie aus weiteren Wissenschaftsbereichen wie der Psychologie, allgemeinen Didaktik, Multimedia-Design usw. und wirken wieder zurück auf das mathematische Objekt, indem die Regeln einen Einfluss darauf haben, welche Eigenschaften des Objektes repräsentiert werden. Wenn beispielsweise ein Spielwürfel aus Design-Gründen abgerundete Ecken und Kanten hat (damit sich die spielenden Kinder nicht verletzen), kann sich dies auf ein (falsches) mathematisches Verständnis des Würfel-Begriffs auswirken. Daher ist ein solcher Spielwür-

[4]Die Entwicklung vom Artefakt zum Werkzeug wird auch als *Instrumentelle Genese* bezeichnet (vgl. Etzold, 2021, S. 101 f.).

fel ungeeignet als Arbeitsmittel für den Erstkontakt mit dem entsprechenden Begriff. Aus den Regeln heraus wird das Artefakt gestaltet.

Im unteren linken Dreieck wird nun der Einsatz des Artefakts in der *Klassensituation* dargestellt. Hierbei spielen z. B. konkrete Aufgabenstellungen eine Rolle, die die Schülerinnen und Schüler zur zielgerichteten Arbeit mit dem Artefakt anregen. Auch ist die Rolle der Lehrkraft im Lehr-Lern-Prozess von Bedeutung, ebenso wie die methodische Ausgestaltung der Artefakt-Nutzung, ggf. auch im Zusammenspiel mit weiteren Artefakten. Dieses komplexe Beziehungsgefüge wird auch als *instrumental orchestration* bezeichnet (siehe z. B. Drijvers et al., 2010, S. 214 f.).

7.2.2 Analyseschritte

Larkin et al. (2019) stellen dar, wie sich das ACAT-Modell als Analyseinstrument für Unterrichtsapps einsetzen lässt, eine Übersetzung des Beurteilungsleitfadens findet sich bei Etzold et al. (2018) und eine für Lehrkräfte angepasste Variante bieten Kortenkamp et al. (2019). Daran angelehnt bieten sich folgende Prozessschritte für die Analyse eines Arbeitsmittels an:

1. **Identifizieren des mathematischen Objekts**

   Zunächst muss klar sein, für welches mathematische Objekt – also für welchen Begriff, welchen Inhalt, welches Thema – das Arbeitsmittel eingesetzt werden soll. Sind mehrere mathematische Objekte möglich, muss die Analyse auch für jedes getrennt erfolgen, da das Arbeitsmittel ggf. unterschiedlich gut geeignet sein kann. Theoretischer Hintergrund ist, dass **ohne Objekt keine zielgerichtete Handlung eines Subjekts möglich** ist. Daher können Handlungen von Schülerinnen und Schülern mit einem Arbeitsmittel nur dann bewertet werden, wenn Klarheit bezüglich des (mathematischen) Objekts besteht.

   Mögliche Quellen hierfür sind die Bezeichnung des Arbeitsmittels bzw. eine offizielle Beschreibung, Zusatzmaterialien zum Arbeitsmittel (wie Arbeitsblätter, Handreichungen, …), externe Referenzen (z. B. Empfehlungen durch Dritte) oder auch das selbstständige Ausprobieren des Arbeitsmittels.

2. **Herausstellen der Interaktionsmöglichkeiten mit dem mathematischen Objekt über das Arbeitsmittel**

   Anschließend kann man sich Gedanken darüber machen, welche Interaktionsmöglichkeiten das Arbeitsmittel den Schülerinnen und Schülern mit dem mathematischen Objekt anbietet. Theoretischer Hintergrund hierfür ist, dass externe Handlungen des Subjekts (zum Beispiel das Vergrößern oder Verkleinern eines Landkarten-Ausschnittes auf einem Tablet-Bildschirm) interne Handlungen wiederspiegeln (hier: zentrische Streckungen), die das Verständnis repräsentieren – man spricht von **Externalisierung**. Ebenso führen externe Handlungen aber auch zum Aufbau interner Repräsentationen (hier z. B.: Veränderung der Fingerposition zu Beginn der Handlung ändert das Streckungszentrum) – man spricht von **Internalisierung**. Um diese Nutzerinteraktion besser zu verstehen und in Bezug auf das mathematische Objekt zu sehen, ist es hilfreich, den Prozess zwischen

Subjekt und Objekt am Artefakt (dem Arbeitsmittel) aufzutrennen und in Teilfragen zu beantworten:

S ⟶ A: Welche Handlungen sind mit dem Arbeitsmittel möglich?
A ⟶ O: Wie repräsentiert das Arbeitsmittel das mathematische Objekt?
O ⟶ A: Wie beeinflusst das Objekt das Verhalten des Arbeitsmittels?
A ⟶ S: Welche Erfahrungen können Schülerinnen und Schüler dadurch machen?

Eine ***mögliche Quelle*** ist die eigene, systematische Nutzung des Arbeitsmittels.

3. **Analyse der Entwicklung der Interaktion**

   Nun werden die möglichen Interaktionen qualitativ strukturiert, um die mögliche Entwicklung des Lernens der Schülerinnen und Schüler besser zu beschreiben. Die Strukturierung bezieht sich auf die in der Tätigkeitstheorie übliche Unterscheidung in Tätigkeiten, Handlungen und Operationen:

   - **Tätigkeiten** sind übergeordnete, an *Motiven* orientierte Interaktionen (z. B. das Lesen einer Landkarte).
   - **Handlungen** sind *zielgerichtete*, individuelle Interaktionen, die die Tätigkeit realisieren (z. B. das Vergrößern eines Kartenausschnittes, um diesen detaillierter betrachten zu können).
   - **Operationen** sind zur Handlungsausführung notwendige Interaktionen, die jedoch kein weiteres Nachdenken erfordern und ggf. *instrumentellen Zwängen* unterworfen sind (z. B. das Ausführen der *pinch-to-zoom*-Geste oder das Verschieben der Karte mit dem Finger).

   In einem erfolgreichen Lernprozess verschieben sich (durch Verinnerlichungsprozesse) insbesondere Handlungen zu Operationen, um darauf neue, komplexere Handlungen aufbauen zu können. Es ist also darzustellen, wie eine dartige Entwicklung mithilfe des Arbeitsmittels unterstützt werden kann.

   Mögliche Quellen sind hypothetische Diskussionen potenzieller Entwicklungen, aber auch empirische Untersuchungen.

4. **Überprüfung der Eignung des Arbeitsmittels für die Vermittlung des mathematischen Objekts**

   In diesem Schritt wird die Realisierung des Arbeitsmittels für das spezielle mathematische Objekt mit den Erkenntnissen aus Fachdidaktik, Fachwissenschaft und Psychologie verglichen. Dabei wird geprüft, ob die in den Schritten 2 und 3 analysierten Interaktionen tatsächlich die aus Sicht der Mathematik(-didaktik) erwünschten oder benötigten Vorstellungen, Erfahrungen und Kompetenzen unterstützen. Im ACAT-Modell entspricht dies der regelgeleiteten Gestaltung des Artefakts, wobei diese Regeln wiederum aus mathematikdidaktischen Überlegungen, allgemeinem Multimediadesign, usw. stammen.

   Mögliche Quellen für diesen Schritt sind neben der Synthese der vorherigen Diskussionen v. a. auch wissenschaftliche Referenzen und Veröffentlichungen.

5. **Möglichkeiten zur Verwendung des Arbeitsmittels in der Klassensituation**

   In einem letzten Schritt werden Möglichkeiten dargestellt, wie der Einsatz des Arbeitsmittels im Unterricht konkret aussehen kann. Folgende Fragen bieten eine Orientierung:

   - Ist das Arbeitsmittel für individuelle Arbeit, Partnerarbeit oder Kleingruppenarbeit geeignet?
   - Was sind mögliche Impulse und Aufgabenstellungen, die Sie als Lehrerin oder Lehrer geben können?
   - Welche Differenzierungsmaßnahmen und verschiedenen Schwierigkeitsgrade sind möglich?
   - Handelt es sich um Übungsmaterial oder dient es zur Einführung neuer Lerninhalte und dem Aufbau von Grundvorstellungen?
   - Welche Voraussetzungen/Kompetenzen werden an die Schülerinnen und Schüler für die Nutzung des Arbeitsmittels gestellt?
   - Wie können Diskussionen bzw. Interaktionen innerhalb der Klasse mithilfe des Arbeitsmittels direkt oder indirekt gefördert werden?

   Tätigkeitstheoretischer Hintergrund ist hierbei, dass Lernen niemals als eine rein individuelle Tätigkeit eines Schülers oder einer Schülerin angenommen wird, sondern immer im gesellschaftlichen und sozialen Kontext geschieht. Oder mit anderen Worten: »Im Unterricht agiert immer ein pädagogisches Gesamtsubjekt« (Giest & Lompscher, 2004, S. 112).

   Mögliche Quellen für derarbeite Überlegungen sind Materialien für Lehrerinnen und Lehrer, wissenschaftliche Ergebnisse, bspw. aus experimentellen Studien, bzw. Versuchsdurchführungen im Unterricht.

Diese fünf Schritte sprechen damit jeweils verschiedene Elemente des ACAT-Modells an. Abbildung 7.3 fasst dies noch einmal zusammen.

Am Beispiel der App *Klipp Klapp* (Etzold, 2020) stellt Stein (2018) eine entsprechende Analyse dar, die englischsprachige Übersetzung ist bei Larkin et al. (2019, S. 85 ff.) zu finden.

7.3 Zum Nachbereiten

1. Lesen Sie als Hintergrundtheorie zur Analyse von Unterrichtsapps den Artikel von Larkin et al. (2019).

2. Führen Sie nach der hier vorgestellten Schrittfolge eine Analyse des Arbeitsmittels *Zahlenstrahl* durch (siehe z. B. auch Schulz, 2018).

3. Wählen Sie einen mathematischen Begriff und überlegen Sie sich, wie ein geeignetes Arbeitsmittel für diesen Begriff aussehen kann. Sie können dabei auch spekulieren, was dieses Arbeitsmittel können müsste (z. B. wenn es digital umgesetzt werden könnte).

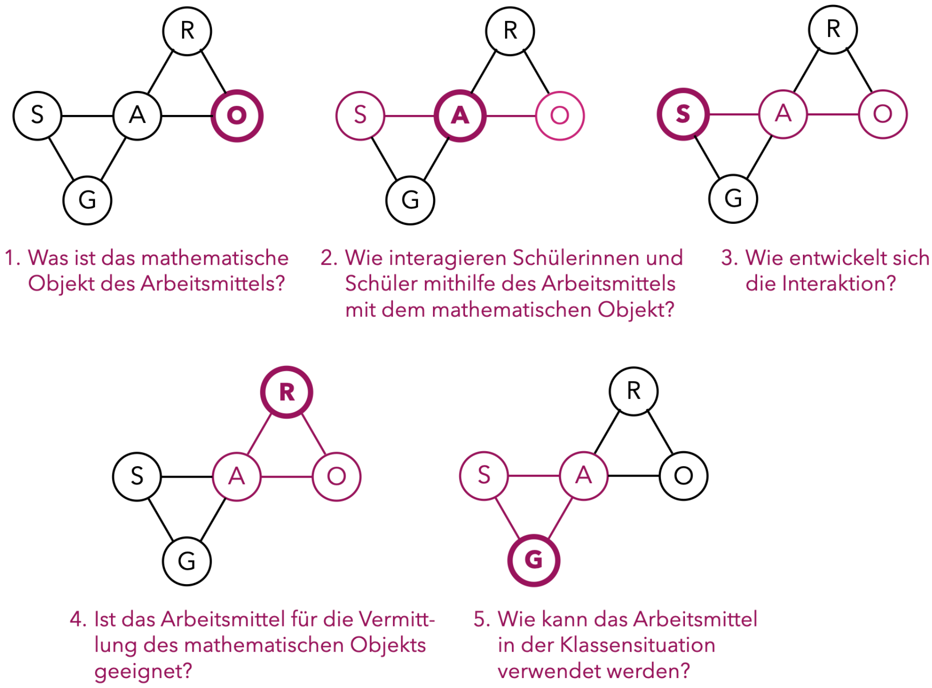


Abbildung 7.3: ACAT-Analysemodell für Arbeitsmittel

8 Aufgabengestaltung

> **Ziele**
>
> - Sie kennen Möglichkeiten, Aufgaben je nach ihrer Funktion und den auszubildenden Fähigkeitsaspekten auszuwählen bzw. zu erstellen.
> - Sie können Aufgaben aus Schulbüchern für enstpechende Funktionen und Fähigkeitsaspekte anpassen.
> - Sie kennen Differenzierungsmöglichkeiten mithilfe von Aufgaben, insbesondere durch geeignete Hilfestellungen.
>
> **Material**
>
> - Folien zur Vorlesung zur Aufgabengestaltung (pdf, Keynote)

In der Veranstaltung *Einführung in die Mathematikdidaktik* lern(t)en Sie zentrale Aufgabentypen kennen, die Ihnen Aussage über die *Offenheit* von Aufgaben liefern (siehe auch Bruder, o. J., S. 2). Weiterhin wird an dieser Stelle davon ausgegangen, dass Sie *Operatoren* kennen, die für eine präzise Formulierung von Aufgabenstellungen genutzt werden können (siehe auch Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen, 2019; Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg, 2015a, S. 11). Dieses Kapitel soll Ihnen darauf aufbauend eine Sammlung unterrichtspraktischer Maßnahmen anbieten, Aufgaben zu gestalten. Explizite Bezüge zu tätigkeitstheoretischen Grundlagen finden Sie am Ende des Kapitels in Abschnitt 8.4.

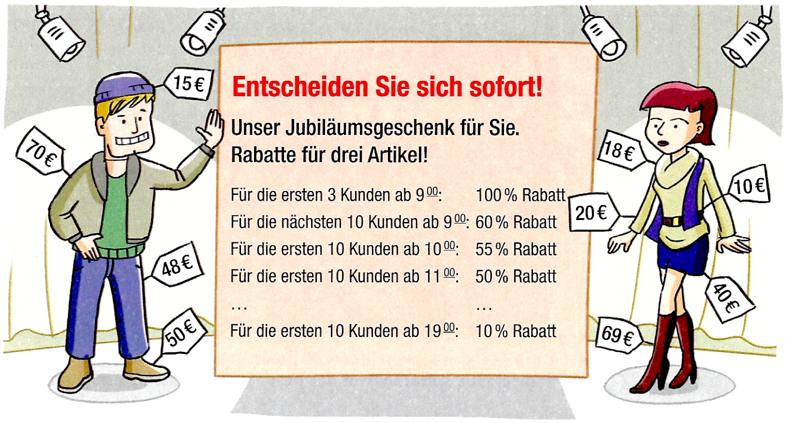
8.1 Funktionen von Aufgaben

»Eine Aufforderung zum Lern-Handeln im Mathematikunterricht wird als **Aufgabe** bezeichnet« (Bruder, 2012, S. 19, Hervorhebung im Original). Mit diesem Aufgabenbegriff sind Sie nun als Lehrkraft gefordert, Ihre Schülerinnen und Schüler anzuregen, sich aktiv mit mathematischen Lerngegenständen auseinanderzusetzen. Dabei sollten Sie sich der verschiedenen möglichen **Funktionen von Aufgaben** bewusst sein, da dies jeweils die Art und Weise, wie Sie Aufgaben formulieren und sie im Unterricht einsetzen, beeinflussen (vgl. Leuders, 2015, S. 439; SINUS Bayern, o. J.). Die hier angebrachten Beispiele beziehen sich auf den Lerngegenstand *Prozentrechnung*.

- Aufgaben können dem **Erkunden**, **Entdecken** und **Erfinden** dienen. Diese in der Regel am Anfang eines Themengebiets stehenden Aufgaben sollten möglich offen formuliert sein und in besonderer Weise Motivation schaffen, sich mit dem Lerngegenstand erstmals auseinanderzusetzen (siehe Abbildung 8.1). An dieser Stelle können auch typische W-Fragen gestellt werden – es ist im Sinne der Offenheit nicht zwingend notwendig, sich an den Operatoren zu orientieren.

2 Prozente runterrechnen

Pia hat beim Einkaufsbummel in einem Geschäft ein verlockendes Angebot für den nächsten Tag gesehen. Nun überlegt sie, um wie viel Uhr sie morgen einkaufen soll.



a) Was meinst du zu der Rabattaktion? Beantworte dazu die folgenden Fragen:
- Du bist um 9.00 Uhr der erste Kunde. Was bezahlst du dann für eine Hose?
- Was bezahlst du, wenn du später am Tag kommst?
- Welche unterschiedlichen Preise werden an diesem Tag für eine Hose bezahlt? Wann kostet eine Hose 36 €?

b) Welchen Anteil vom ursprünglichen Preis bezahlt man bei 100 %, 60 %, 55 % Rabatt? Zeichne zu mindestens drei Rabatten einen Prozentstreifen zum Verdeutlichen.

Abbildung 8.1: Erkundungsaufgabe zur Prozentrechnung (Leuders et al., 2015, S. 223)

- Aufgaben zum **Sammeln**, **Sichern** und **Systematisieren** greifen vorherige Ideen auf, mit denen dann eine gewünschte mathematische Struktur herausgearbeitet werden soll (siehe Abbildung 8.2). In derartigen Aufgaben können Schülerinnen und Schüler auch angeleitet werden, sinnvolle Repräsentationen zu nutzen, um Grundvorstellungen auszubilden.

- **Üben**, **Festigen** und **Wiederholen** sind weitere wesentliche Funktionen von Aufgaben im Mathematikunterricht. Hier sollten Sie eine möglichst große Vielfalt an Fähigkeitsaspekten ansprechen (siehe Abschnitt 8.2.1), um sowohl Automatisierungsprozesse als auch den Transfer anzuregen. Sowohl geschlossene als auch teilweise geöffnete Aufgaben bieten sich hier an – auch sind die verschiedenen Anforderungsbereiche anzusprechen, was sich in einer gezielten Auswahl an Operatoren widerspiegeln sollte (siehe Abbildung 8.3).

- Das **Vertiefen**, **Strukturieren** und **Vernetzen** stärkt das Kompetenzerleben der Schü-

2 Umrechnungstabelle für wichtige Werte beim Rechnen mit Prozenten erstellen

a) Damit man Prozente schnell einschätzen kann, ist es gut, wenn man weiß, was die wichtigsten Prozente, Brüche und Dezimalzahlen bedeuten.
Übertrage die Tabelle ins Heft und fülle sie aus.

b) Beim Ausfüllen der Tabelle hilft die Darstellung am Bruchstreifen oder am Prozentstreifen. Welcher Streifen hilft bei welcher Zeile? Zeichne beide Streifen ins Heft und trage alle Werte in einen der beiden Streifen ein.

Prozent	Dezimalzahl	Bruch
1 %		
	0,05	
		$\frac{1}{10}$
	0,2	
25 %		
	0,5	
		$\frac{3}{4}$
		$\frac{1}{1}$
	1,5	
200 %		

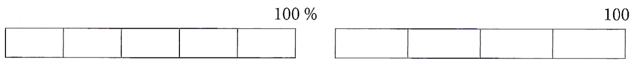


Abbildung 8.2: Systematisierungsaufgabe zur Prozentrechnung (Leuders et al., 2015, S. 226)

1 Prozente verschieden darstellen

a) Stelle die Prozente in einem Streifen dar. Schreibe sie auch als Dezimalzahl und als Bruch.

(1) 25 % (2) 75 % (3) 15 % | (1) 4 % (2) 16 % (3) 24 %
(4) 30 % (5) 90 % (6) 80 % | (4) 96 % (5) 72 % (6) 83 %
(7) 55 % (8) 40 % | (7) 33 % (8) 66,7 %

b) Welche Prozente lassen sich besonders einfach darstellen?
Welche Prozente lassen sich nur schwierig darstellen? Begründe.

c) Finde zu drei der Prozente Beispiele aus dem Alltag.

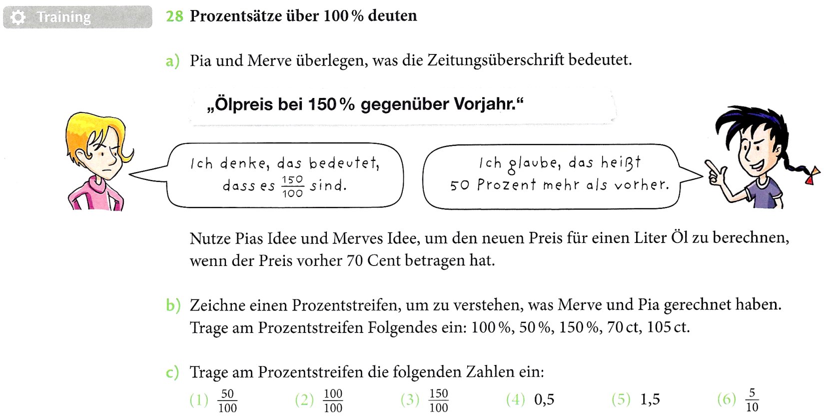
2 Prozente mit Papier falten

a) Durch Papierfalten kannst du ein quadratisches Blatt Papier in gleich große Teile teilen.
Stelle auf diese Weise mindestens drei verschiedene Prozente dar.

b) Stelle durch Falten die folgenden Prozente dar:
25 %, 12,5 %, 6,25 %, 18,75 % | 33,3 %, 16,7 %, 50 %, 8,3 %

c) Erkläre, warum es bei manchen Werten besonders schwierig ist.

Abbildung 8.3: Übungsaufgaben zur Prozentrechnung (Leuders et al., 2015, S. 232) lerinnen und Schüler. Die Aufgaben werden wieder offener und können mit anderen Lerngegenständen in Bezug gebracht werden. Auch können Sonder- oder Grenzfälle der bisher betrachteten Aufgaben nun verstärkt eine Rolle spielen (siehe Abbildung 8.4).


Training

28 Prozentsätze über 100 % deuten

a) Pia und Merve überlegen, was die Zeitungsüberschrift bedeutet.

Nutze Pias Idee und Merves Idee, um den neuen Preis für einen Liter Öl zu berechnen, wenn der Preis vorher 70 Cent betragen hat.

b) Zeichne einen Prozentstreifen, um zu verstehen, was Merve und Pia gerechnet haben. Trage am Prozentstreifen Folgendes ein: 100 %, 50 %, 150 %, 70 ct, 105 ct.

c) Trage am Prozentstreifen die folgenden Zahlen ein:
(1) $\frac{50}{100}$ (2) $\frac{100}{100}$ (3) $\frac{150}{100}$ (4) 0,5 (5) 1,5 (6) $\frac{5}{10}$

Abbildung 8.4: Vertiefungsaufgabe zur Prozentrechnung (Leuders et al., 2015, S. 241)

- Die bisher genannten Funktionen hängen oftmals eng mit entsprechenden Unterrichtsphasen zusammen. Davon unabhängig können Aufgaben auch die Funktion des **Differenzierens** haben. Maßnahmen dafür werden in Abschnitt 8.3 näher erläutert.

- Weiterhin ist zwischen **Lernaufgaben** und **Leistungsaufgaben** zu unterscheiden. Letztere spielen bei der **Selbsteinschätzung**, **Diagnose** und **Leistungsmessung** eine besondere Rolle (siehe Abbildung 8.5). Insbesondere für solche Aufgaben sollten Operatoren genutzt werden, um die gewünschten Komptenzen gezielt überprüfen zu können, Erwartungen an die Schülerinnen und Schüler transparent zu machen und eine Vergleichbarkeit zu sichern.

Ich kann Prozentaufgaben berechnen, indem ich Prozentstreifen, Minitabelle oder eine Rechnung verwende.
Berechne die Aufgaben auf verschiedenen Wegen:
- Wie viel Euro sind 24 % von 165 €?
- Wie viel Prozent sind 12,5 m von 138 m?
- Wie hoch stand das Wasser vorher, wenn es um 18 cm und damit um 20 % gestiegen ist?

Abbildung 8.5: Selbsteinschätzungsaufgabe zur Prozentrechnung (Leuders et al., 2015, S. 244)

8.2 Produktives Üben

8.2.1 Fähigkeitsaspekte

Nicht selten wird man in Schulbüchern mit sogenannten *Aufgabenplantagen* konfrontiert, also einer Vielzahl an Aufgaben immer derselben Art. Diese haben in der Regel das (berechtigte) Ziel, dass bestimmte Rechenoperation durch wiederholtes Üben automatisiert durchgeführt werden können. Im Schulalltag besteht jedoch die Gefahr, dass das Üben im Mathematikunterricht dann zum alleinigen *Päckchenrechnen* verkommt, was der Vielzahl an **Fähigkeitsaspekten**, die ausgeprägt werden sollen, nicht gerecht wird.

Diese Fähigkeitsaspekte sind nach Leuders (2009, S. 133):

- **Kenntnisse**, es kann z. B. die Definition eines math. Inhalts mit eigenen Worten wiedergegeben werden.
- **Fertigkeiten**, es können z. B. bestimmte Rechenoperationen durchgeführt werden.
- **Verstehen/Vorstellungen**, es kann z. B. an einem Bild der entsprechende math. Inhalt erklärt werden.
- **Anwendungsfähigkeit**, es können z. B. unbekannte Situationen mithilfe des math. Inhalts gelöst werden.
- **(übergreifende) Strategien**, es können z. B. Heurismen (vgl. Kuzle, o. J.) mithilfe des math. Inhalts angewandt werden.
- **Reflexionsfähigkeit**, es kann z. B. beurteilt werden, inwieweit der math. Inhalt in einer Situation relevant ist.
- **Einstellungen**, es besteht z. B. die Bereitschaft, sich mit dem math. Inhalt auseinanderzusetzen.

Diese Fähigkeitsaspekte sind nicht als Stufen aufzufassen, sondern gleichermaßen und unabhängig voneinander bedeutsam (Leuders, 2009, S. 133).

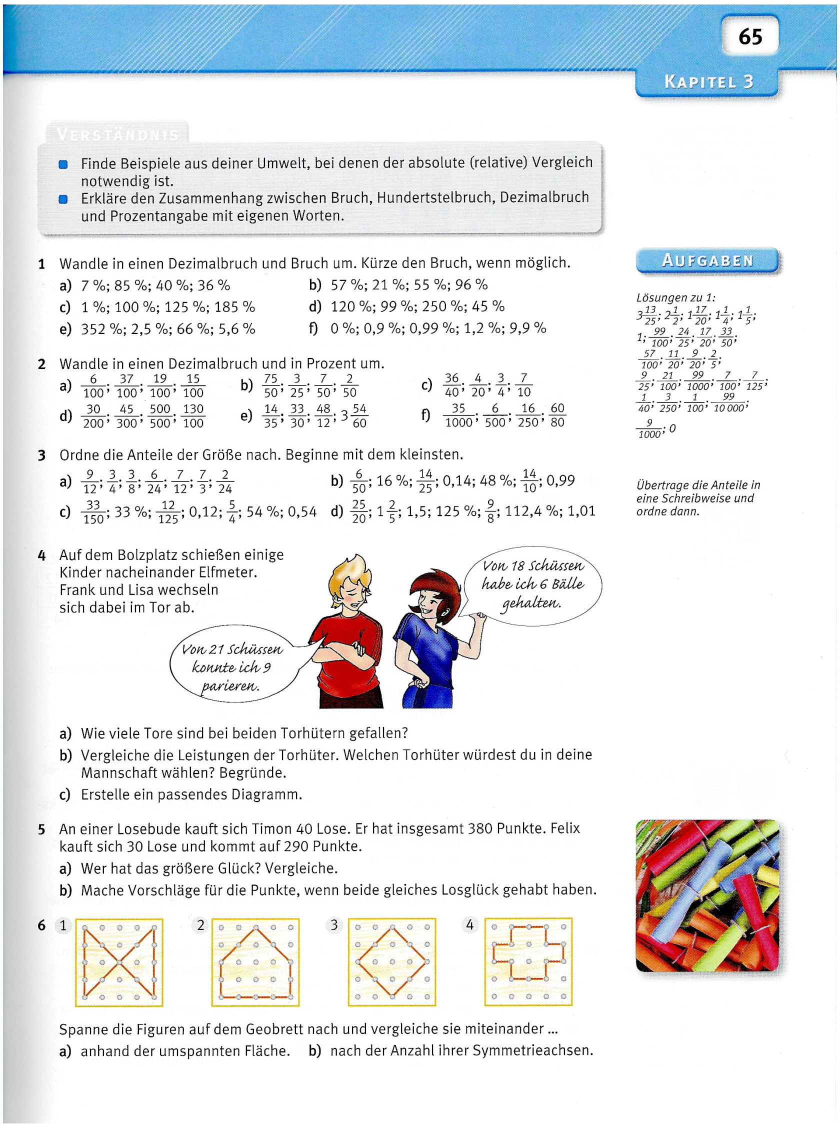
8.2.2 Aufgaben verändern

Einerseits sollten Sie als Lehrkraft in der Lage sein, zielgerichtet je nach Fähigkeitsaspekt Aufgaben auszuwählen. Andererseits, und das ist dann notwendig, wenn Sie keine guten Aufgaben finden, müssten Sie auch selbst welche entwickeln können – was jedoch sehr zeitaufwendig ist. Ein in der Unterrichtspraxis effektiver Umgang ist das Verändern von existierenden Aufgaben, um diese *produktiver* zu machen, d. h. vielfältige Fähigkeitsaspekte anzusprechen.

Leuders (2009, S. 137 ff.) stellt in einer ausführlichen Tabelle (am Beispiel des arithmetischen Mittels) dar, wie man sich ausgehend vom gewünschten Fähigkeitsaspekt (z. B. »Strukturen reflektieren«) und damit zusammenhängenden Aufgabentypen (z. B. »Muster erkennen und erzeugen«) an geeigneten Fragetypen (z. B.»Muster fortsetzen«) orientieren kann, um einen produktiven Umgang mit Aufgaben zu ermöglichen. Mit diesem Hintergrundwissen können

Sie Ihren Blick auf existierende Schulbuchaufgaben richten und diese dann zielgerichtet anpassen.

Die soll am Beispiel einer Schulbuchseite zur Prozentrechnung dargestellt werden, siehe Abbildung 8.6.



65

KAPITEL 3

VERSTÄNDNIS

- Finde Beispiele aus deiner Umwelt, bei denen der absolute (relative) Vergleich notwendig ist.
- Erkläre den Zusammenhang zwischen Bruch, Hundertstelbruch, Dezimalbruch und Prozentangabe mit eigenen Worten.

AUFGABEN

1 Wandle in einen Dezimalbruch und Bruch um. Kürze den Bruch, wenn möglich.

a) 7 %; 85 %; 40 %; 36 % **b)** 57 %; 21 %; 55 %; 96 %
c) 1 %; 100 %; 125 %; 185 % **d)** 120 %; 99 %; 250 %; 45 %
e) 352 %; 2,5 %; 66 %; 5,6 % **f)** 0 %; 0,9 %; 0,99 %; 1,2 %; 9,9 %

Lösungen zu 1: $3\frac{13}{25}$; $2\frac{1}{2}$; $1\frac{17}{20}$; $1\frac{1}{4}$; $1\frac{1}{5}$; 1; $\frac{99}{100}$; $\frac{24}{25}$; $\frac{17}{20}$; $\frac{33}{50}$; $\frac{57}{100}$; $\frac{11}{20}$; $\frac{9}{20}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{9}{25}$; $\frac{21}{100}$; $\frac{99}{1000}$; $\frac{7}{100}$; $\frac{7}{125}$; $\frac{1}{40}$; $\frac{3}{250}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{99}{10\,000}$; $\frac{9}{1000}$; 0

2 Wandle in einen Dezimalbruch und in Prozent um.

a) $\frac{6}{100}$; $\frac{37}{100}$; $\frac{19}{100}$; $\frac{15}{100}$ **b)** $\frac{75}{50}$; $\frac{3}{25}$; $\frac{7}{50}$; $\frac{2}{50}$ **c)** $\frac{36}{40}$; $\frac{4}{20}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{10}$
d) $\frac{30}{200}$; $\frac{45}{300}$; $\frac{500}{500}$; $\frac{130}{100}$ **e)** $\frac{14}{35}$; $\frac{33}{30}$; $\frac{48}{12}$; $3\frac{54}{60}$ **f)** $\frac{35}{1000}$; $\frac{6}{500}$; $\frac{16}{250}$; $\frac{60}{80}$

3 Ordne die Anteile der Größe nach. Beginne mit dem kleinsten.

a) $\frac{9}{12}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{6}{24}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{2}{24}$ **b)** $\frac{6}{50}$; 16 %; $\frac{14}{25}$; 0,14; 48 %; $\frac{14}{10}$; 0,99
c) $\frac{33}{150}$; 33 %; $\frac{12}{125}$; 0,12; $\frac{5}{4}$; 54 %; 0,54 **d)** $\frac{25}{20}$; $1\frac{2}{5}$; 1,5; 125 %; $\frac{9}{8}$; 112,4 %; 1,01

Übertrage die Anteile in eine Schreibweise und ordne dann.

4 Auf dem Bolzplatz schießen einige Kinder nacheinander Elfmeter. Frank und Lisa wechseln sich dabei im Tor ab.

a) Wie viele Tore sind bei beiden Torhütern gefallen?
b) Vergleiche die Leistungen der Torhüter. Welchen Torhüter würdest du in deine Mannschaft wählen? Begründe.
c) Erstelle ein passendes Diagramm.

5 An einer Losebude kauft sich Timon 40 Lose. Er hat insgesamt 380 Punkte. Felix kauft sich 30 Lose und kommt auf 290 Punkte.
a) Wer hat das größere Glück? Vergleiche.
b) Mache Vorschläge für die Punkte, wenn beide gleiches Losglück gehabt haben.

6 1 2 3 4

Spanne die Figuren auf dem Geobrett nach und vergleiche sie miteinander …
a) anhand der umspannten Fläche. **b)** nach der Anzahl ihrer Symmetrieachsen.

Abbildung 8.6: Schulbuchseite zur Prozentrechnung (Kleine & Ludwig, 2011, S. 65)

- Bei Aufgabe 2 könnte ergänzt werden:

  Welche Brüche lassen sich besonders leicht, welche schwerer in Dezimalbrüche und Prozent umrechnen? Woran liegt das?

Damit soll die Reflexion darüber angeregt werden, dass das Erweitern und Kürzen, sodass der Nenner 100 ergibt, je nach gegebenem Nenner unterschiedlich schwer sein kann. Hinsichtlich der Tabelle von Leuders (2009, S. 138) kann diese Aufgabe der Situation »Strukturen reflektieren« ⟶ »Strukturieren« ⟶ »Bewerten« zugeordnet werden. Statt alle Päckchen rechnen zu müssen, könnte nach der obigen Reflexion auch aufgefodert werden:

Wähle eine leichte und eine schwere Teilaufgabe aus und löse sie.

- Aufgabe 4 ließe sich ergänzen durch:

  Wie ändert sich Lisas Leistung, wenn du weitere Schüsse aufs Tor zielst, die sie alle hält?

  Diese Aufgabe betont den Zusammenhang zwischen Grundwert, Prozentwert und Protenzsatz, da jeder weitere Schuss sowohl den Grundwert als auch Prozentwert um 1 erhöht, womit zwar der Prozentsatz zunimmt, aber nicht linear steigt. Damit kann gleichzeitig eine tiefere Beschäftigung mit der dahinterliegenden arithmetischen Struktur angeregt werden. Nach Leuders (2009, S. 137) gehört diese Aufgabe zum Bereich »Probleme lösen« ⟶ »Operatives Durcharbeiten« ⟶ »Funktionale Abhängigkeit«.

- Aufgabe 5 könnte ergänzt werden:

  Erfinde eine andere Situation, in der auf dieselbe Art und Weise gerechnet werden kann. Welche deiner Größen entsprechen den »Punkten« und der »Anzahl der Lose« und welche Rolle spielen diese Größen bei der Berechnung?

  Hierüber wird eine strukturgleiche Übertragung der gegebenen Situation auf eine neue Situation gefordert. Dies führt dazu, sich tiefer mit dem Zusammenhang aus Rechenoperation und Anwendungskontext auseinanderzusetzen und entspricht bei Leuders (2009, S. 139) der Kategorie »Anwendungen erkunden« ⟶ »Anwenden« ⟶ »Anwendungen erfinden«.

8.3 Differenzieren

Um differenzierenden Unterricht zu ermöglichen, können Aufgaben entsprechend gestaltet werden. Dies kann mit *leichten* und *schweren* Aufgaben erfolgen – es gibt aber noch weitaus mehr Möglichkeiten. Davon sollen hier einige exemplarisch vorgestellt werden, genauere Maßnahmen finden sich in den jeweils zitierten Quellen.

8.3.1 Gestufte Hilfen

Bei komplexen Aufgaben bietet es sich an, den Schülerinnen und Schülern gestufte Hilfen bereitzustellen, damit diese im Lösungsweg individuell unterstützt werden können (siehe auch Zech, 1998, S. 315 ff.). Auch wenn Motivationshilfen (*Die Aufgabe ist nicht so schwer.*), Rückmeldungshilfen (*Du bist auf einem guten Weg.*) oder allgemeine strategische Hilfen (*Lies die Aufgabe* *noch mal durch.*) deratige Unterstützungen sind, sollte bei der stoffdidaktisch-orientierten Unterrichtsplanung der Schwerpunkt auf **inhaltsorientierten strategischen Hilfen** sowie auf **inhaltlichen Hilfen** im Zusammenhang mit dem Lerngegenstand liegen.

- Inhaltsorientierte strategische Hilfen beziehen sich auf typische am Lerngegenstand orientierte Herangehensweisen zur Lösung einer Aufgabe. Mögliche Beispiele sind:

  Veranschauliche dir die Situation mit einer Skizze. Stelle eine Gleichung auf. Orientiere dich beim Vorgehen an dem Beispiel, das du bereits gerechnet hast.

- Inhaltliche Hilfen beziehen sich direkt auf die mit der Aufgabe verbundenen Begriffe, Regeln und Zusammenhänge. Dies können z. B. sein:

  Überlege, was mit dem Flächeninhalt passiert, wenn du die Seitenlängen verdoppelst. Du kannst hier das Kommutativgesetz anwenden.

Zech (1998, S. 315) betont, »nie mehr [zu] helfen als erforderlich«, um eine Aufgabe erfolgreich lösen zu können. Gestufte Hilfen haben demnach die Funktion, trotz ggf. vorhandener Schwierigkeiten Erfolgserlebnisse bei den Schülerinnen und Schülern zu ermöglichen.

8.3.2 Differenzierende Aufgaben

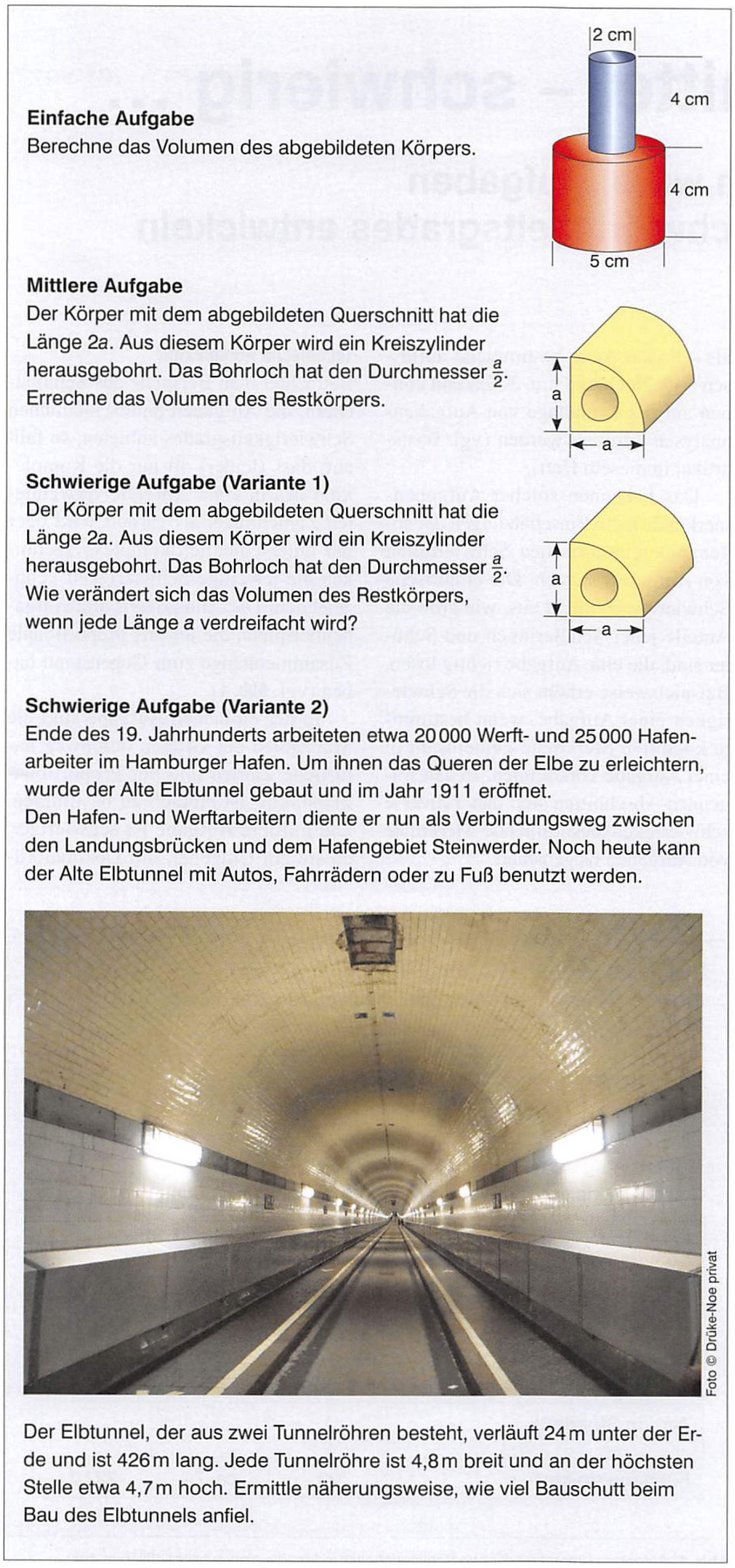
8.3.2.1 Schwierigkeitsbestimmende Merkmale

Ob eine Aufgabe leicht oder schwer ist, wird natürlich stets subjektiv beeinflusst. Dennoch können schwierigkeitsbestimmende Merkmale von Aufgaben identifiziert werden, die bspw. bei der Konstruktion differenzierender Aufgaben hilfreich sind. Nach Drüke-Noe (2018, S. 11) sind diese Merkmale:

- Zugehörigkeit zu einer curricularen Wissensstufe,
- Komplexität und Qualität einer erforderlichen Modellierung,
- Offenheit des Modellierungsprozesses,
- Art des Kontextes,
- Erfordernis, mathematische Argumente zu formulieren,
- Anzahl zu steuernder Denkprozesse,
- Technische Komplexität,
- „Umfang“ eines Verarbeitungsprozesses (u. a. Anzahl der Rechenschritte, Art des Zahlenmaterials),
- Sprachlogische Komplexität.

Abbildung 8.7 zeigt eine mögliche Realisierung zur Generierung unterschiedlich schwerer Aufgaben.

In der Unterrichtspraxis kann dies nun bedeuten, dass Sie auswählen, welche Schülerinnen und Schüler welche Aufgaben lösen (sogenannte **paralleldifferenzierende Aufgaben**, vgl. Leuders, 2015, S. 441), Sie können die Auswahl den Lernenden selbst überlassen oder auch



Einfache Aufgabe
Berechne das Volumen des abgebildeten Körpers.

2 cm
4 cm
4 cm
5 cm

Mittlere Aufgabe
Der Körper mit dem abgebildeten Querschnitt hat die Länge $2a$. Aus diesem Körper wird ein Kreiszylinder herausgebohrt. Das Bohrloch hat den Durchmesser $\frac{a}{2}$. Errechne das Volumen des Restkörpers.

Schwierige Aufgabe (Variante 1)
Der Körper mit dem abgebildeten Querschnitt hat die Länge $2a$. Aus diesem Körper wird ein Kreiszylinder herausgebohrt. Das Bohrloch hat den Durchmesser $\frac{a}{2}$. Wie verändert sich das Volumen des Restkörpers, wenn jede Länge a verdreifacht wird?

Schwierige Aufgabe (Variante 2)
Ende des 19. Jahrhunderts arbeiteten etwa 20 000 Werft- und 25 000 Hafenarbeiter im Hamburger Hafen. Um ihnen das Queren der Elbe zu erleichtern, wurde der Alte Elbtunnel gebaut und im Jahr 1911 eröffnet.
Den Hafen- und Werftarbeitern diente er nun als Verbindungsweg zwischen den Landungsbrücken und dem Hafengebiet Steinwerder. Noch heute kann der Alte Elbtunnel mit Autos, Fahrrädern oder zu Fuß benutzt werden.

Foto © Drüke-Noe privat

Der Elbtunnel, der aus zwei Tunnelröhren besteht, verläuft 24 m unter der Erde und ist 426 m lang. Jede Tunnelröhre ist 4,8 m breit und an der höchsten Stelle etwa 4,7 m hoch. Ermittle näherungsweise, wie viel Bauschutt beim Bau des Elbtunnels anfiel.

Abbildung 8.7: Unterschiedlich schwere Aufgaben zum Prismenvolumen (aus Drüke-Noe, 2018, S. 10) eine Stufung im Schwierigkeitsgrad vornehmen, die dann durchlaufen werden soll (**gestuft differenzierende Aufgaben**).

8.3.2.2 Blütenaufgaben

Eine besondere Form gestufter Aufgaben sind **Blütenaufgaben**. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass der **Offenheitscharakter der Teilaufgaben steigt**, wobei alle Teilaufgaben einem **gemeinsamen Kontext** zuzuordnen sind. Die Schülerinnen und Schüler entscheiden dabei selbst, wie weit sie in der Bearbeitung der Aufgabe vordringen, womit Blütenaufgaben *anforderungsgestuft* und *selbstdifferenzierend* sind (vgl. Bruder et al., 2015, S. 528 f.).

Einen etwas ausführlicheren Hintergrund und einige Beispiele zeigt ein Video von Quarder (2020).

8.3.3 Natürliche Differenzierung

Eine noch offenere und für die Unterrichtsplanung durchaus anspruchsvollere Form ist die **natürliche Differenzierung**. Nach Krauthausen & Scherer (2010, S. 5 f.) weist eine natürlich differenzierte Lernumgebung folgende Merkmale auf:

- Alle Schülerinnen und Schüler arbeiten an einem gemeinsamen Lerngegenstand mit **demselben Lernangebot**, d. h. allen wird dasselbe Material zur Verfügung gestellt.
- Das Material weist eine **inhaltliche Ganzheitlichkeit** auf, d. h. es ist komplex genug, um sich tiefgründig mit dem Lerngegenstand auseinandersetzen zu können.
- Es erfolgt (durch die Lehrkraft) eine **fachliche Rahmung**, die naturgemäß zu **Fragestellungen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades** führt. Daraufhin haben die Schülerinnen und Schüler die **Wahl, auf welchem Nivau** die Problemstellung betrachtet wird – das Material muss hier also verschiedene Niveaus gleichermaßen ermöglichen.
- Den Schülerinnen und Schülern ist es **freigestellt, welche Wege, Hilfsmittel und Darstellungsweisen** genutzt werden, um die Problemstellung zu bearbeiten. Die Lehrkraft hat hier die Veranwortung, die Schülerinnen und Schüler zu *befähigen*, eine sinnvolle Auswahl zu treffen. Dies kann bspw. durch geeignete Impulse erfolgen, auch ist ggf. eine explizite Heurismenschulung notwendig.
- Letztlich ist natürliche Differenzierung durch ein intensives **soziales Mit- und Voneinanderlernen** geprägt, wofür eine kommunikationsfreundliche Umgebung geschaffen werden muss. Dies betrifft z. B. die Diskussion unterschiedlicher Lösungswege, *natürlich* entstandene (ggf. abweichende) Fragestellungen oder auch unterschiedliche Auffassungen.

Bisher existieren wenige Aufgaben zur natürlichen Differenzierung für die Sekundarstufe. Ein Beispiel zur Bruchrechnung zeigen Föckler et al. (2018, S. 2).

8.4 Theoretischer Rückblick

Wirft man einen tätigkeitstheoretischen Blick auf Aufgaben im Mathematikunterricht, kann man diese als Aufforderung verstehen, Lernhandlungen durchzuführen (siehe Beginn des Abschnitts 8.1). Entsprechend der im Kapitel 6 dargestellten Überlegungen, bedarf es vor einer Ausführung des Aufgabenlösen einer *Zielbildung* sowie einer *Orientierungsgrundlage*.

Die Zielbildung erfolgt in diesem Fall über die *selbst gestellte Lernaufgabe* (vgl. Bruder, im druck), die man auch als ***interne Aufgabe***[1] bezeichnen kann. Damit soll ausgedrückt werden, dass die (von außen) gestellte Aufgabe zunächst von den Schülerinnen und Schülern verarbeitet und mit einer individuellen Zielbildung (als ideell vorweggenommenes Ergebnis der noch durchzuführenden Handlung) in Bezug gebracht wird. Zu beachten ist hierbei, dass die interne Aufgabe »nicht notwendigerweise bezüglich Umfang und Inhalt mit den Erwartungen der Lehrkraft übereinstimmen muss«. Ursachen können hier in fehlenden Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten liegen, aber auch affektive, motivationale und volitive Gründe können dies beeinflussen (Bruder, im druck).

Hat sich die Schülerin oder Schüler eine interne Aufgabe gestellt, bildet sich (ebenfalls noch vor dem Bearbeiten der Aufgabe) eine Orientierungsgrundlage heraus (vgl. Abschnitt 6.3.2), je nach Qualität als *Probierorientierung*, *Musterorientierung* oder *Feldorientierung*. Diese »ist Voraussetzung für die Bewältigung von aufgabenbasierten Anforderungen, aber zugleich auch ein Ziel individueller Aneignungsprozesse« (Bruder, im druck). Um hochwertige Orientierungsgrundlagen zu ermöglichen und auszubilden, bedarf es also entsprechender Aufgabenstellungen, die nicht ausschließlich eine Probier- oder Musterorientierung forcieren. Eine Maßnahme hierzu ist die Variation der Aufgabentypen und das Öffnen von Aufgaben.

- Wird etwa zur Abbildung 8.8 die Aufgabe *»Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks«* formuliert, spricht dies v. a. eine Musterorientierung an, da der Aufgabentyp in dieser Form bereits mehrfach geübt wurde.
- Die Aufgabe *»Zeichne ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 13 cm².«* ermöglicht dagegen alle Orientierungstypen. Die Aufgabe ist sowohl über Versuch und Irrtum lösbar (z. B. mit einem Dynamischen Geometriesystem, das den Flächeninhalt eines Dreicks unmittelbar angeben kann, sobald es gezeichnet ist), als auch mit einer Musterorientierung (wenn man sich an ähnlich durchgeführten Beispielen orientiert) sowie einer Feldorientierung (wenn man sich über den Bezug zur Flächeninhaltsformel darüber im Klaren wird, dass ausschließlich die Grundseite und Höhe des Dreiecks relevant sind – also bspw. auch eine ganze Klasse von Lösungen erzeugt werden kann).

Die Ermöglichung vielfältiger Orientierungsgrundlagen trägt damit auch zur Differenzierung des Unterrichts bei.

[1] Bruder verwendete diese Bezeichnung am 2. September 2022 im Rahmen eines Konferenzvortrags auf der Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik in Frankfurt am Main.

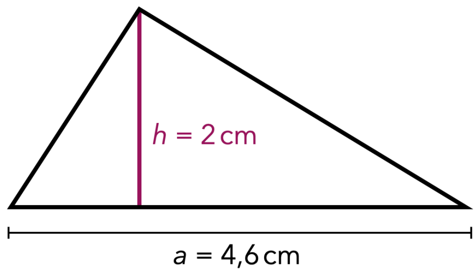


Abbildung 8.8: Flächeninhaltsbestimmung mit Musterorientierung

8.5 Zum Nachbereiten

Erstellen Sie zum Lerngegenstand *Rechnen mit negativen Zahlen*

a) jeweils eine Aufgabe zum Erkunden, Sichern, Üben und Vertiefen,
b) für die Vertiefungsaufgabe zwei bis drei gestufte Hilfen, sowie
c) eine Blütenaufgabe.

9 Zweites Intermezzo: Ganze Zahlen

> **Ziele**
>
> - Sie vertiefen am Beispiel ganzer Zahlen Ihr Verständnis über den Vier-Ebenen-Ansatz, insbesondere wie aus den Ebenen heraus Rückschlüsse zum Aufbau eines Lernpfades entwickelt werden können.
>
> **Material**
>
> - Folien zur Vorlesung zum Zweiten Intermezzo (pdf, Keynote)

9.1 Stoffdidaktische Analyse

9.1.1 Formale Ebene

9.1.1.1 Natürliche Zahlen

Fachmathematisch können die ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen generiert werden. Hierzu sollen zunächst die natürlichen Zahlen selbst fachmathematisch eingeordnet werden. Im Prinzip bestehen zwei Sichtweisen, nämlich die Einführung über die **Peano-Axiome** sowie die Betrachtung **gleichmächtiger Mengen**.

Aus den Peano-Axiomen (Wikipedia, 2021b) folgt zunächst die Existenz einer Reihenfolge von Zahlen (also Nachfolger der 0), die dann mit 1, 2, 3 usw. bezeichnet werden können.[1] Diese Bezeichnung erlaubt jedoch noch keinerlei Berechnungen, nicht einmal eine Ordnungsrelation ist vorhanden. Es kann also (noch) nicht gesagt werden, dass 3 größer ist als 1. Vielmehr lässt sich die Situation eher mit einem Alphabet vergleichen[2], bei dem auch nicht C größer als A ist.

Für eine Ordnungsrelation bedarf es zunächst der Definition der Addition über $n + 0 := n$ und $n + k' := (n + k)'$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit der (aus den Peano-Axiomen existierenden) Nachfolgerbildung $'$. So gilt etwa mit $1 := 0'$: $1 + 1 = 1 + 0' = (1 + 0)' = 1' =: 2$. So kann nun induktiv jede höhere Additionsaufgabe generiert werden. Darauf aufbauend kann die Ordnungsrelation $n < m$ über die Existenz eines $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit $m = n + k$ definiert werden. Die Subtraktion $m - n = k$ ist nun wiederum über die Umkehroperation $n + k = m$ definierbar, sofern $m \geq n$.

[1] Ab 10 wird bei der Bezeichnung jedoch das Stellenwertsystem genutzt – das geht schon weiter als hier zulässig.

[2] Ein wesentlicher Unterschied dieses Vergleiches ist, dass das Alphabet endlich ist, die Menge der natürlichen Zahlen jedoch nicht.

Die Gleichmächtigkeit (z. B. endlicher) Mengen M und N wird über die Existenz einer Bijektion zwischen diesen beiden Mengen definiert, siehe Abbildung 9.1.

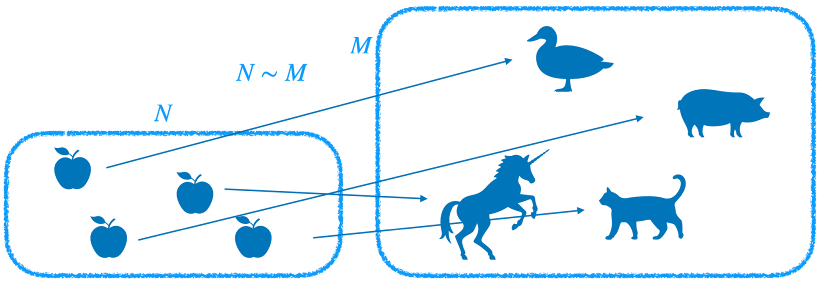


Abbildung 9.1: Gleichmächtigkeit von Mengen

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, also symmetrisch, reflexiv und transitiv. Damit können Äquivalenzklassen gebildet werden, die die Mächtigkeit der Menge angeben. Statt [4] als Bezeichner für die Äquivalenzklasse von vierelementigen Mengen kann dann auch kurz die Zahl 4 genutzt werden. Die Addition $n + k$ entspricht dann der Mächtigkeit der Vereinigungsmenge von $[n]$ und $[k]$, vgl. Abbildung 9.2.

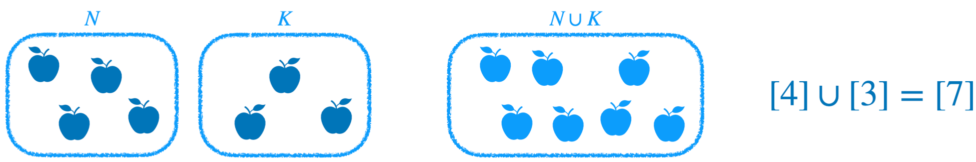


Abbildung 9.2: Additionsergebnis als Äquivalenzklasse der Vereinigungsmenge

9.1.1.2 Ganze Zahlen

Da innerhalb der natürlichen Zahlen noch nicht beliebig subtrahiert werden darf, stehen auch keine negativen Zahlen als Ergebnisse zur Verfügung. Um dennoch das Ergebnis bspw. der Aufgabe $2 - 7$ »definieren« zu können, bietet sich erneut eine **Äquivalenzrelation** über die »Differenzengleichheit« an. Konkret lässt sich für $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ sagen: $(k, l) \sim (m, n) \;:\Leftrightarrow\; k + n = l + m$ Das heißt z. B., dass die Zahlenpaare $(2, 7)$, $(0, 5)$ und $(4, 9)$ in Relation zueinander stehen, weil sie dieselbe »Differenz« haben (obwohl es die Differenz formal noch nicht gibt). Dies ermöglicht nun die Einführung des Bezeichners -5 für die Äquivalenzklasse $[(0, 5)]$.

Das Vorgehen ist *verträglich* mit den bisherigen Regeln in $\mathbb{N}$, d. h. es führt nicht zu Widersprüchen, wenn etwa das Zahlenpaar $(7, 4)$ betrachtet wird mit dem Repräsentanten-Bezeichner 3. Die Menge aller Äquivalenzklassen (bzw. deren Kurzbezeichner) ist nun $\mathbb{Z}$.

Die Addition und Subtraktion zweier Zahlenpaare sind nun definierbar:

$$(k,l) + (m,n) := (k+m, l+n) \tag{9.1}$$
$$(k,l) - (m,n) := (k,l) + (n,m) \tag{9.2}$$

Als Alternative bietet sich ein **axiomatisches Vorgehen** an, also dass die ganzen Zahlen mit der Addition als abelsche Gruppe definiert werden – bedeutsam ist hier insbesondere die Existenz eines Inversen zu jeder Zahl.

Aus all den bisherigen Überlegungen auf der formalen Ebene lassen sich für den Unterricht zentrale Fachinhalte ableiten:

Ganze Zahlen können über Zahlenpaare aus den natürlichen Zahlen oder als »Gegenzahlen« der natürlichen Zahlen entwickelt werden.

- Natürliche Zahlen sind als Teilmenge in die ganzen Zahlen eingebettet.
- Die Subtraktion natürlicher Zahlen $m - n$ mit $n > m$ ist nun lösbar.
- Die Rechenregeln werden erweitert, wobei die bekannten weiter gelten.

9.1.2 Semantische Ebene

9.1.2.1 Grundvorstellungen

Die Einführung ganzer Zahlen ist für Schülerinnen und Schüler mit zahlreichen Schwierigkeiten verbunden (vom Hofe & Hattermann, 2014). Diese sind eigentlich auf der empirischen Ebene der stoffdidaktischen Analyse angesiedelt (mehr dazu siehe auch Abschnitt 9.1.4), sollen aber hier wegen ihrer Nähe zu den Grundvorstellungen schon einmal erwähnt werden.

- So bestehen etwa für das **Minus-Zeichen vielfältige Interpretationsmöglichkeiten** als **Vorzeichen** (z. B. in der Rechnung $-5+2$), als **Rechenzeichen** (z. B. in der Rechnung $7-2$) oder als **Inversionszeichen** (z. B. bei der Darstellung $-a$ als Gegenzahl für a).
- Der in den natürlichen Zahlen vorhandene **Kardinalzahlaspekt** (dass die Zahl die Mächtigkeit einer Menge angibt), ist in den negativen Zahlen **nicht mehr tragfähig** (es existiert keine -4-elementige Menge). Auch der **Ordinalzahlaspekt** (dass die Zahl eine Position angibt) ist nur **eingeschränkt tragfähig** (eine -4-te Position bedarf vielfältiger Zwischeninterpretationen). Der **Maßzahlaspekt** (z. B. über die Angabe einer Zahl auf dem Zahlenstrahl) dagegen ist auf die ganzen Zahlen **erweiterbar**.
- Die **Ordnungsrelation** wird häufig **fehlinterpretiert** über eine spiegelbildliche Interpretation (z. B. kann fälschlicherweise $-5 > -3$ angenommen werden). Eine Ursache kann hier darin liegen, dass die Ordnungsrelation zuvor über die Mächtigkeit von Mengen hergestellt wurde, was nun nicht mehr möglich ist.

Gegenüber den natürlichen Zahlen sind also im Umgang mit (negativen) ganzen Zahlen einige Grundvorstellungsumbrüche zu absolvieren. Als normativ auszubildende Grundvorstellungen fassen vom Hofe & Hattermann (2014) zusammen:

- Ganze Zahlen als **relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke**: Dies ist etwa bei Etagen-Angaben, Temperaturen oder der Position über/unter dem Wasserspiegel der Fall. Gerade bei Temperaturen kann die Beliebigkeit der Vergleichsmarke (0 °C) gut diskutiert werden, da etwa andere Temperaturskalen (°F, K) eine andere Vergleichsmarke gewählt haben.
- Ganze Zahlen als **Gegensätze**: Diese Vorstellung wird z. B. sichtbar, wenn über Guthaben und Schulden gesprochen wird. Hat man 5 € Schulden, so ist dies der Gegensatz von 5 € Guthaben. Die Vergleichsmarke (0 €) ist hier nicht beliebig gewählt, sondern natürlicherweise über »weder Guthaben noch Schulden« gegeben. Auch der Betrag einer Zahl kann in dieser Vorstellung besonders gut verstanden werden.
- Ganze Zahlen als **Richtungen**: Negative Zahlen beschreiben in dieser Vorstellung die entgegengesetzte Richtung der positiven Zahlen. Dies ist z. B. bei der Verwendung von Koordinatensystemen der Fall, oder ganz allgemein bei der Zahlengeraden.
- Ganze Zahlen als **Zustände und Zustandsänderungen**: In dieser Vorstellung bieten ganze Zahlen nicht nur die Möglichkeit, einen Zustand (wie Guthaben oder Schulden) zu beschreiben, sondern auch den Prozess der Änderung dieser Zustände (Erhalt von Guthaben, Erlass von Schulden, ...). Eine solche Vorstellung etwa ist nötig, um die verschiedenen Interpretationen des Minus-Zeichens nachvollziehen zu können.

Als bedeutsamste Repräsentation negativer Zahlen gilt die Zahlengerade. Diese stützt einerseits den Maßzahlaspekt und ermöglicht über die Darstellung von Punkten und Pfeilen (siehe Abbildung 9.3) auch eine Interpretation in den verschiedenen Grundvorstellungen.

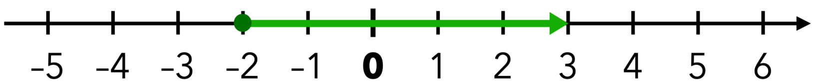


Abbildung 9.3: Zahlengerade

Auch Operationen mit ganzen Zahlen sind hierzu nun verständlich behandelbar:

- So kann das **Addieren/Subtrahieren** als Anlegen von Pfeilen, gerichtetes Weiter-/Zurückzählen oder als Subtraktion/Addition der Gegenzahl aufgefasst werden.

- Das **Multiplizieren** kann bei der Multiplikation mit einer positiven Zahl als Streckung/Stauchung aufgefasst werden, die Multiplikation mit -1 entspricht der Spiegelung an der Null und die Multiplikation mit einer beliebigen negativen Zahl ist eine Kombination aus beidem.

- Der **Größenvergleich** ist nun über einen Lagevergleich auf der Zahlengeraden möglich, wobei weiter links liegende Zahlen immer kleiner sind als weiter rechts liegende.

9.1.2.2 Fundamentale Ideen

Hinsichtlich des Katalogs an Tätigkeitsideen (siehe Abschnitt 2.2.1.3) besteht die Möglichkeit, ganze Zahlen als Verallgemeinerung oder Vernetzung aufzufassen. Sinnvoller erscheint mir jedoch, von einer **Erweiterung** zu sprechen – nicht im Sinne des Erweiterns von Brüchen, sondern der Zahlbereichserweiterung und in dem Zusammenhang auch einer Erweiterung der nötigen Rechenregeln. Auch Freudenthal (1989, S. 27) spricht von der »Idee der Erweiterung unter Aufrechterhaltung gewisser Gesetze«. Auf eine ausführliche Darstellung der Kriterien fundamentaler Ideen wird hier verzichtet – als Ausblick auf das Vertikalkriterium sei nur auf andere Erweiterungssituationen des Mathematikunterrichts verwiesen wie die sonstigen Zahlbereichserweiterungen, die Übertragung der Potenzgesetze auf rationale Exponenten oder eine Herleitung, dass $a^0 = 1$ und 0^0 nicht definiert ist.

Ein typisches Erweiterungsbeispiel im Zusammenhang mit ganzen Zahlen ist die Multiplikation zweier negativer Zahlen. Kann die Multiplikation einer natürlichen Zahl (erster Summand) mit einer negativen Zahl (zweiter Summand) außermathematisch noch als mehrfache Verschuldung aufgefasst und die Vertauschung von erstem und zweitem Summanden über das Kommutativgesetz innermathematisch erklärt werden, bietet die Multiplikation zweier negativer Zahlen keine so naheliegende Interpretation. Abhilfe schafft hier das ***Permanenzprinzip***, nach dem neue Theorien (z. B. das Rechnen mit negativen Zahlen) soweit wie möglich verträglich sein muss mit bisherigen Theorien (z. B. das Rechnen mit positiven Zahlen). Sichtbar gemacht werden kann dieses Prinzip und die Herleitung gewisser Rechenregeln über ***Permanenzreihen***. Abbildung 9.4 stellt dies am Beispiel der Aufgabe $(-3) \cdot (-5)$ dar.

$$\begin{aligned}
2 \cdot (-5) &= -10 \\
&\quad \big\downarrow +5 \\
1 \cdot (-5) &= -5 \\
&\quad \big\downarrow +5 \\
0 \cdot (-5) &= 0 \\
&\quad \big\downarrow +5 \\
-1 \cdot (-5) &= 5 \\
&\quad \big\downarrow +5 \\
-2 \cdot (-5) &= 10 \\
&\quad \big\downarrow +5 \\
(-3) \cdot (-5) &= 15
\end{aligned}$$

Abbildung 9.4: Permanenzreihe zur Multiplikation zweier negativer Zahlen

Zusammenfassend lassen sich auf der semantischen Ebene folgende für den Lernpfad relevanten Zusammenhänge ableiten:

- Ganze Zahlen sollten als relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke, als Gegensätze, als Richtungen sowie als Zustände und Zustandsänderungen aufgefasst werden können

- Die Zahlengerade ist eine wesentliche Repräsentation ganzer Zahlen, anhand derer auch die Operationen mit ganzen Zahlen sichtbar gemacht werden können.

- Die Einführung ganzer Zahlen soll über das Permanenzprinzip begleitet werden, bei der Herleitung von Rechenregeln bietet sich die Nutzung von Permanenzreihen an.

9.1.3 Konkrete Ebene

Aus den Überlegungen auf der formalen und semantischen Ebene kann als mathematischer Kern der Betrachtung ganzer Zahlen herausgearbeitet werden, dass mit diesen nun stets subtrahiert werden kann (als Neuheit gegenüber den natürlichen Zahlen) und dass in ihnen spezifische Rechenregeln gelten, die so zuvor nicht bekannt waren. Als **Kernfragen** formuliert, kann dies heißen (vgl. Leuders et al., 2015, S. 80, 82):

- »Wie kann man rechnen, wenn man mehr wegnimmt, als man hat?«
- »Wie kann man mit negativen Zahlen wiederholt dasselbe rechnen?«

Bei der Wahl eines geeigneten **Kontextes** besteht die Herausforderung, dass die Zahlen und Rechnungen eine Relevanz im Kontext haben und nicht nur konstruiert sind. In der zunächst naheliegenden Temperaturbetrachtung bestehen einige physikalische Schwierigkeiten, nämlich dass auf der Celsius-Skala Temperaturen stets Zustände und keine Zustandsänderungen beschreiben (letztere werden in Kelvin angeben). Auch die Existenz eines absoluten Nullpunkts (−273,15 °C) widerspricht der mathematischen Betrachtung beliebig kleiner negativer Zahlen. Hinzu kommt, dass die Gegensatz-Vorstellung keine praktische Bedeutung hat: −2 °C ist nicht das Gegenteil von 2 °C.

Wie schon die Beispiele zu den Grundvorstellungen in Abschnitt 9.1.2.1 gezeigt haben, bietet dagegen das **Guthaben-Schulden-Modell** vielfältige sinnstiftende (also lebensweltbezogene, kontextauthentische und reichhaltige) Anknüpfungspunkte. Eingeführt werden kann dieser Kontext z. B. spielerisch über Guthaben- und Schuldenkarten, wobei Würfel dafür eingesetzt werden können, wie viele Guthaben- oder Schuldenkarten man abgeben muss bzw. erhält. Über die Dokumentation von »Kontoständen und -bewegungen« kann der Prozess festgehalten werden. Weitere Anregungen zu diesem Kontext findet man auch bei Hattermann et al. (2014) sowie Hußmann & Schindler (2014).

Während sich aus dem Kontext heraus Additions- und Subtraktionsaufgaben beschreiben lassen, bei denen die zweite Zahl positiv ist (was einer **horizontalen Mathematisierung** entspricht), sind derartige Aufgaben mit negativer zweiter Zahl besser über Pfeile auf Zahlengeraden zu veranschaulichen. Dabei kann das Rechenzeichen als Blick- (+ rechts, − links) und das Vorzeichen der zweiten Zahl als Bewegungsrichtung (+ vorwärts, − rückwärts) aufgefasst werden. Dieses Vorgehen bietet jedoch keine innermathematische Erklärung, vielmehr ist dies eher eine Art Eselbrücke. Eine **vertikale Mathematisierung** wird dann insbesondere bei der innermathematischen Erklärung von Multiplikationsaufgaben relevant. Abbildung 9.5 zeigt noch einmal die verschiedenen Mathematisierungsarten.

Blick- und Bewegungsrichtungen auf Zahlengeraden

7 - 2	(positive Zahl) – (positive Zahl)	**h** Geldzu- und -abflüsse
- 2 + 7	(negative Zahl) + (positive Zahl)	
- 2 - 7	(negative Zahl) – (positive Zahl)	
7 + (- 2)	(positive Zahl) + (negative Zahl)	**(v)** Pfeile auf Zahlengerade, Permanenzreihen
7 - (- 2)	(positive Zahl) – (negative Zahl)	
- 2 + (- 7)	(negative Zahl) + (negative Zahl)	
- 2 + (- 7)	(negative Zahl) – (negative Zahl)	
2 · (- 7)	(positive Zahl) · (negative Zahl)	**h** mehrfache Schulden
- 2 · 7	(negative Zahl) · (positive Zahl)	**v** Kommutativität
- 2 · (- 7)	(negative Zahl) · (negative Zahl)	**v** Permanenzreihen

Abbildung 9.5: Horizontale (h) und vertikale (v) Mathematisierungsmöglichkeiten bei ganzen Zahlen

Zusammenfassend lässt sich sagen:

- Über den Kontext von Guthaben-Schulden-Situationen lässt sich das Wesen ganzer Zahlen erarbeiten.
- Als Kernideen sollten deutlich werden, dass man mit ganzen Zahlen beschreiben kann, wie man mehr wegnehmen kann, als man hat, und dass mit ihnen die bekannten Rechengesetze erweitert werden.
- Im Guthaben-Schulden-Kontext lassen sich einige der Rechengesetze veranschaulichen, andere wiederum können über Permanenzreihen erklärt werden.

9.1.4 Empirische Ebene

Neben den bereits in Abschnitt 9.1.2.1 erwähnten typischen Schwierigkeiten mit ganzen Zahln, sollen hier noch einige weitere aufgezählt und ihre Konsequenzen für die Entwicklung eines Lernpfades abgeleitet werden.

- Die Einführung negativer Zahlen ist für Schülerinnen und Schüler mit hohen **sprachlichen Hürden** verbunden (siehe z. B. Fabian, 2022). Dies betrifft einmal den *negativ*-Begriff, der in der Alltagssprache i. d. R. mit etwas schlechtem verbunden ist (»negative Stimmung«), aber auch eine positive Bedeutung haben kann (»negativer Corona-Test«), im mathematischen Kontext jedoch bei der »negativen Zahl« eine gänzlich andere Bedeutung hat. Diese Bedeutungsvielfalt sollte daher im Unterricht angesprochen und die mathematische Bedeutung entsprechend abgegrenzt werden. Eine weitere Hürde ist ein **komplexer Wortschatzaufbau**, abhängig von den verwendeten Kontexten. So muss nicht nur der neue mathematische Inhalt erlernt, sondern es müssen in dem Zusammenhang auch noch die verwendeten Wörter wie »Meeresspiegel«, »Normal-Null«, »Gefrierpunkt«, »Frost« usw. mit ihrer mathematischen Bedeutung hinsichtlich der positiven und negativen Zahlen in Bezug gebracht werden. Dieses Problem lässt sich umgehen, indem die Einführung möglichst nur in einem Kontext erfolgt und dieser nur geringe sprachliche Hürden aufweist.

- Aus den natürlichen Zahlen herrscht die Vorstellung vor, dass Hinzufügen, also (ggf. mehrfaches) Addieren, immer vermehre. Diese **»Hinzufügen vemehrt immer«-Vorstellung** ist jedoch **nicht mehr tragfähig**. Ihre Ursache hat die Vorstellung aus einer jahrelangen Betrachtung ausschließlich positiver Zahlen und wird teils auch sprachlich gestützt (z. B. durch »noch mehr Schulden«). Einer entsprechenden Übergeneralisierung muss also durch einen verständnisfördernden Aufbau entgegengewirkt werden, ggf. auch mit einer expliziten Besprechung der Fehlvorstellung.
- Ebenfalls sichtbar wird eine Häufige **Vermischung der Rechenregeln**, z. B. die fehlerhafte Aussage »minus plus minus ist plus«, die aus einer Übertragung der Merkregel »minus mal minus ist plus« kommen könnte. Eine solche Vermischung kommt insbesondere dann zutage, wenn die Rechenregeln (falsch) auswendig gelernt und nicht mit einer geeigneten Vorstellung in Bezug gebracht werden können. Für die Unterrichtsdurchführung bedeutet das, dass die entsprechenden Repräsentationen (wie Pfeile am Zahlenstrahl) behutsam eingeführt, ausführlich behandelt sowie durch operatives Durcharbeiten verinnerlicht werden sollten. Auch der Verzicht auf Merksätze kann hierbei tatsächlich hilfreich sein, um nicht auf solch ein kalkülhaftes Vorgehen (welches sich dann falsch eingeprägt wird) hinzuwirken.

9.2 Lernpfad

Aus den Überlegungen der stoffdidaktischen Analyse lässt sich nun ein möglicher Lernpfad ableiten, nach dem ganze Zahlen unterrichtet werden können. Abbildung 9.6 stellt diesen übersichtlich dar.

Dabei zeigt sich, dass in der oberen Zeile zunächst die Zahlen als Objekte betrachtet werden, wobei schon vielfältige Grundvorstellungen aufgebaut werden können. Der komplette Lernpfad lässt sich dabei am Guthaben-Schulden-Modell durcharbeiten, wobei natürlich in Anwendungsituationen und zur Verinnerlichung auch weitere Kontexte nötig werden.

Die Einführung des Zahlbereichs $\mathbb{Z}$ ist in der Darstellung gestrichelt dargestellt, da dieser nicht zwingend an der Stelle nötig ist, um anschließend mit ganzen Zahlen rechnen zu können. Hier kann auch die Leistungsfähigkeit der Klasse sowie die Schuform darüber entscheiden, ob und an welcher Stelle der Zahlbereich als Begriff eingeführt werden muss.

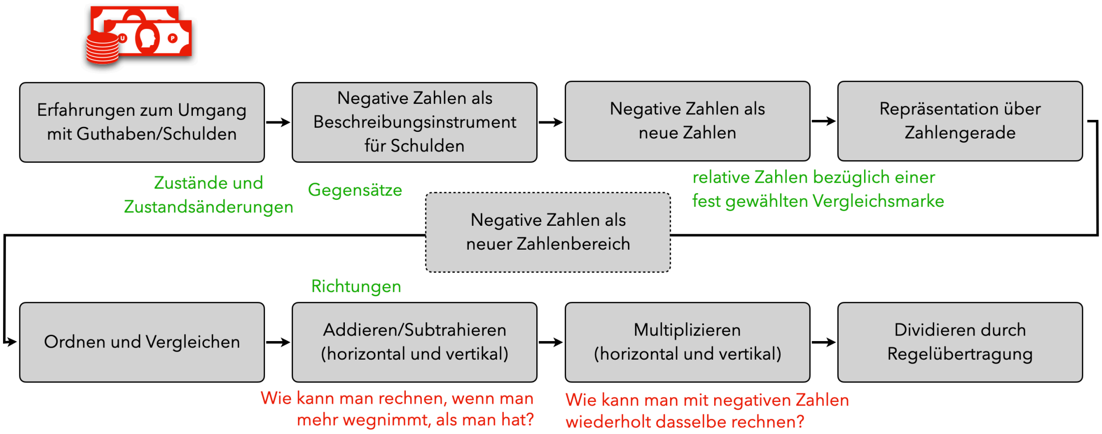


Abbildung 9.6: Möglicher Lernpfad zu ganzen Zahlen

Die untere Zeile beschäftigt sich nun mit dem Operieren mit ganzen Zahlen, v. a. an der Repräsentation der Zahlengeraden. Dabei werden nun die Kernfragen (bzw. deren Beantwortung) besonders deutlich und die Richtungsvorstellung erhält eine größere Bedeutung.

Dieser Lernpfad stellt *eine* Möglichkeit dar, ganze Zahlen zu behandeln und baut auf die obigen Diskussionen zur formalen, semantischen, konkreten und empirischen Ebene auf. Damit allein jedoch ist noch kein Unterricht möglich! Eine konkrete Unterrichtsplanung kann nun erst, auf den Lernpfad aufbauend, begonnen werden. Abhängig von der Klasse und anderen äußeren Bedingungen (»Bedingungsanalyse«) sind nun geeignete Aufgabenstellungen und Arbeitsmittel auszuwählen, methodisch in Lernumgebungen zu integrieren und damit konkrete Stundenplanungen zu entwickeln.

Inhaltsbezogene Kompetenzen

10 Leitidee Zahl und Operation

> **Material**
>
> - Folien zur Vorlesung zur Leitidee Zahl und Operation (pdf, Keynote)
>
> **Literaturempfehlungen**
>
> - Padberg & Benz (2021): *Didaktik der Arithmetik: fundiert, vielseitig, praxisnah*
> - Padberg & Wartha (2017): *Didaktik der Bruchrechnung*
> - Schulz & Wartha (2021): *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe*

10.1 Strukturierung der Leitidee

Die Strukturierung mathematischer Inhalte in Leitideen ist seit Anfang der 2000er Jahre im deutschen Bildungswesen etabliert, als die KMK[1] Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (2004), den Primarbereich (2005) und später auch die Allgemeine Hochschulreife (2012) herausgebracht hat (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2012, 2004, 2005). Darauf aufbauend wurden in den meisten Bundesländern die Lehrpläne angepasst, in Brandenburg für die Jahrgangsstufen 1 – 10 und die Gymnasiale Oberstufe (Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg, 2015b, 2018). Zwischenzeitlich wurden die Bildungsstandards für den Primarbereich sowie den Ersten und Mittleren Schulabschluss überarbeitet (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2022b, 2022a). So haben sich für die Leitideen teils verschiedene Bezeichnungen ergeben, was am Anfang dieses und der folgenden Kapitel jeweils in einer Tabelle zusammengefasst werden soll. Die in den Überschriften gewählten Bezeichnungen orientieren sich an den aktuellen Bildungsstandards des Ersten und Mittleren Schulabschlusses (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2022a).

Tabelle 10.1: Bezeichnungen der Leitidee Zahl und Operation

Dokument	Bezeichnung der Leitidee
Bildungsstandards Primarbereich (2005)	Zahlen und Operationen
Bildungsstandards Primarbereich (2022)	Zahl und Operation
Bildungsstandards Mittlerer Schulabschluss (2004)	Zahl

[1] Mehr zur Kultusministerkonferenz (KMK) und ihrer eigentlichen Bezeichnungen siehe Wikipedia (2022c).

Dokument	Bezeichnung der Leitidee
Bildungsstandards Erster und Mittlerer Schulabschluss (2022)	Zahl und Operation
Rahmenlehrplan Brandenburg, Jahrgangsstufen 1 – 10	Zahlen und Operationen
Bildungsstandards Allgemeine Hochschulreife (2012)	Algorithmus und Zahl
Rahmenlehrplan Brandenburg, Gymnasiale Oberstufe	Algorithmus und Zahl

Das LISUM (2021) hat für die Leitidee Zahl und Operation für die Jahrgangsstufen 1 – 10 ein Konzeptbild herausgegeben (siehe Abbildung 10.1), ergänzt durch einen didaktischen Kommentar von Schulz (o. J.) und Materialien zur Diagnose und Förderung (LISUM, o. J.-g).

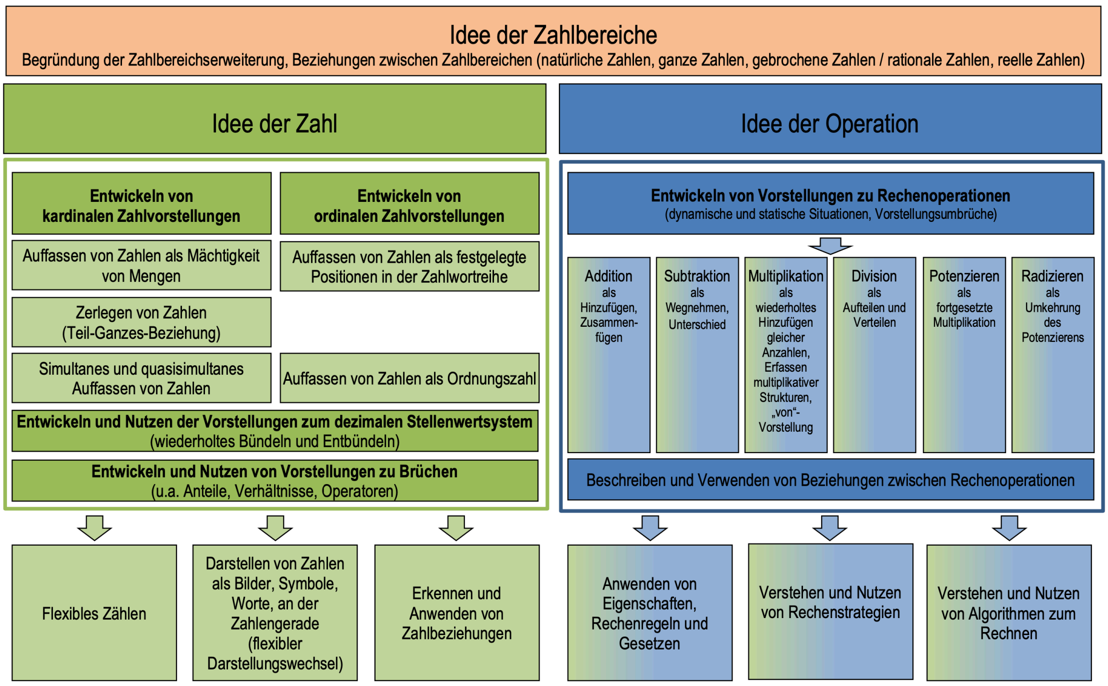


Abbildung 10.1: Konzeptbild zur Leitidee *Zahlen und Operationen* (LISUM, 2021)

Aus diesen Materialien sowie den Beschreibungen in den Bildungsstandards für die Sekundarstufen (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2012, S. 18; 2022a, S. 15 f.) lassen sich einige bedeutsame Lerngegenstände ableiten:

Bedeutsame Lerngegenstände

> - Zahlbereiche und Zahlbereichserweiterungen
> - Vorstellungen reeller Zahlen (z. B. Vollständigkeit der Zahlengerade),
> - Operationen rationaler Zahlen (z. B. schrittweise, halbschriftliche Verfahren)
> - Faktorisierung von Zahlen
> - Darstellungen von Zahlen
> - Rechnen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen
> - Zahlbereichserweiterungen
> - Brüche
> - Rechengesetze
> - Überschlagsrechnen, Runden, Prüfen und Interpretieren von Ergebnissen
> - Rechenoperationen und deren Umkehrungen
> - Prozentrechnung
> - Zinsrechnung
> - Potenzen
> - Wurzeln
> - Algorithmische Verfahren (z. B. schriftliche Rechenoperationen, Bestimmung von Quadratwurzeln, Intervallschachtelung, lineare Gleichungssysteme)
> - Kombinatorik
> - Zahlenfolgen
> - Gleichungen
> - Gleichungssysteme
> - Grenzwerte
> - Tupel und Matrizen
> - Grenzmatrizen und Fixvektoren

Ausführlich am Beispiel des Wurzelbegriffs und überblicksartig am Beispiel der Kombinatorik werden im Folgenden einige stoffdidaktische Überlegungen angestellt – insbesondere hinsichtlich der Nutzung geeigneter Repräsentationen.

10.2 Wurzeln

10.2.1 Begriffsverständnis

In diesem Abschnitt werden **Begriffsinhalt**, **Begriffsumfang** und **Begriffsnetz** sowie verschiedene **Stufen des Begriffsverständnisses** zum Wurzelbegriff diskutiert[2].

Zunächst ist festzuhalten, dass die Wurzel bzw. das Wurzelziehen die Umkehrung des Quadrierens im Bereich der nichtnegativen Zahlen ist. Diese Nichtnegativität ist übrigens im Unterricht besonders herauszuarbeiten. Während $(-3)^2 = 9$ und $3^2 = 9$ ist, also die Gleichung $x^2 = 9$ zwei Lösungen in den reellen Zahlen hat, ist $\sqrt{9} = 3$ eindeutig festgelegt. Man kann also nicht

[2] Mehr zu diesen Begriffen siehe im Kapitel 6.1 des Skripts von 2021/22 zur Stoffdidaktik Mathematik

pauschal von der Wurzel als die Umkehrung des Quadrates sprechen.[3] Weiterhin gehört zum Begriffsinhalt die Eigenschaft, dass Wurzeln nicht immer rational sein müssen, auch wenn die Zahl, aus der die Wurzel gezogen wird, rational ist (z. B. bei $\sqrt{2}$). Der Wert einer Wurzel lässt sich jedoch mittels rationaler Zahlen annähern[4]. Das Vorgehen zum Finden einer Annäherung kann durchaus auch als Bestandteil des Begriffsinhalts aufgefasst werden.

Wurzeln können demnach alle nichtnegativen reellen Zahlen sein, da für jede (rationale oder reelle) Zahl $a \geq 0$ eine reelle Zahl $x \geq 0$ gefunden werden kann, für die $x^2 = a$ gilt. Dieser Begriffsumfang kann sich jedoch erst schrittweise entwickeln, da mit der Einführung des Wurzelbegriffs in der Regel noch nicht die reellen Zahlen bekannt sind. Die Menge aller Wurzeln rationaler Zahlen besteht zwar aus nichtnegativen reellen Zahlen – aber noch nicht aus allen (denn z. B. $\sqrt{\pi}$ existiert ja auch). Ein vollständiger Begriffsumfang des Wurzelbegriffs ist also erst dann ausgeprägt, wenn die reellen Zahlen eingeführt wurden.

Eng verbunden ist der Wurzelbegriff mit dem des *Quadrates* (sowohl algebraisch als auch geometrisch) und den *reellen Zahlen* (als *Lückenfüller* der rationalen Achse). Auch das *Wurzelziehen* bzw. *Radizieren*[5] als verwandte Arbeitsbegriffe gehören zum engen Begriffsnetz. Bei der Betrachtung der Gleichung $x^2 = a$ sind auch *Basis* und *Exponent* sowie der *Radikant*, v. a. in der Schreibweise $\sqrt{a} = x$, Bestandteile des Begriffsnetzes. Der *Wurzelexponent* wird dann v. a. bei höheren Exponenten von Bedeutung, wenn er in der Schreibweise $\sqrt[n]{a}$ auftritt. Ob die *Intervallschachtelung* als Fachbegriff im Zusammenhang mit dem Wurzelziehen auftauchen muss, sollte abhängig von der Lerngruppe entschieden werden – bekommt damit aber eine besondere Bedeutung als Begriff eines Verfahrens.

Hinsichtlich des Wurzelbegriffs liegt ein *intuitive Begriffsverständnis* vor, wenn die Schülerinnen und Schüler Wurzeln als Seitenlängen zu Quadraten mit vorgegebenen Flächeninhalten auffassen oder dies in einer algebraischen Sichtweise nachvollziehen. Zum *inhaltlichen Begriffsverständnis* gehört darauf aufbauend hinzu, dass es sich stets um nichtnegative Werte handeln muss. Ein *integriertes Begriffsverständnis* liegt vor, wenn die Monotonie und nicht-Linearität erkannt ist, also bspw. die näherungsweise Bestimmung einer Wurzel möglich ist. Auch der begriffliche Zusammenhang zu *Quadrat*, *Basis* und *Exponent* kann auf dieser Stufe von den Schülerinnen und Schülern hergestellt werden. Bestandteil der Stufe ist (später) ebenfalls die Verknüpfung zu höheren Potenzen und deren n-te Wurzeln. Das *formale Begriffsverständnis* geht einher mit der Kenntnis und Anwendbarkeit der Definition der Wurzel, hier insbesondere auch die Fähigkeit zu begründen, warum es keine negativen Wurzeln bzw. keine Wurzeln aus negativen Zahlen gibt.

[3] Dies wird bei höheren Exponenten sogar noch bedeutsamer: Dort ist $(-3)^3 = -27$. Die Gleichung $x^3 = -27$ ist im Reellen sogar eindeutig lösbar (im Komplexen dagegen hat sie drei Lösungen), aber $\sqrt[3]{-27}$ ist nicht definiert. Gerade, weil einige Taschenrechner fälschlicherweise die dritte Wurzel aus -27 mit -3 angeben, muss auf eine derartige Gefahr eingegangen werden, wenn Wurzeln höherer Exponenten behandelt werden. Dies zeigt einmal mehr, dass Sie als Lehrkraft über den aktuellen Unterrichtsstoff (z. B. Quadratwurzeln) hinausdenken müssen (z. B. Kubikwurzeln), um Rückschlüsse ziehen zu können, welche inhaltlichen Besonderheiten zu betonen sind.

[4] Die fachmathematische Grundlage hierfür ist, dass Cauchy-Folgen in den reellen Zahlen immer konvergieren und sich die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$ mit $a \geq 0$ über eine rationale Cauchy-Folge nähern lässt – konkret mit dem *Heron-Verfahren.*

[5] Hier lohnt es sich übrigens, auf die Wortherkunft einzugehen und zu begründen, warum Radieschen als solche bezeichnet werden.

10.2.2 Begriffseinführung

Angelehnt an die *Mathewerkstatt* für die Klassenstufe 9 (Barzel et al., 2016, S. 92 ff.) sowie die Überlegungen in den Kapiteln 6 und 7.1, bietet sich folgende Einführung des Wurzelbegriffs an:

1. Es kann prinzipiell davon ausgegangen werden, dass den Schülerinnen und Schülern Quadrate bekannt sind und sie aus diesen Seitenlängen abmessen und den Flächeninhalt berechnen können. In Hinblick auf die *Zone der nächsten Entwicklung* sind sie noch nicht in der Lage, aus gegebenen Flächeninhalten die Seitenlänge eines Quadrates zu berechnen bzw. halbquantitive Zusammenhänge zu erzeugen (z. B. *Wie ändert sich die Seitenlänge, wenn der Flächeninhalt halbiert wird?*). Jedoch können sie diese Anforderungssituation mit ihrem bisherigen Wissen verstehen.

   Der (innermathematische) **Kontext** ist also das Bestimmen einer Seitenlänge eines Quadrates bei gegebenem Flächeninhalt. Dies kann u. a. dadurch konkretisiert werden, dass zu einem Quadrat dasjenige mit dem halben Flächeninhalt gesucht wird. Dies erhöht die Konxtauthentizität dahingehend, das es sich um ein historisch relevantes Problem handelt (vgl. Barzel et al., 2016, S. 94). Dabei ist es reichthaltig genug, auch von der Halbierung abzusehen und allgemeinere Zusammenhänge zu erkunden. Ein erster Lösungsversuch ist zum Beispiel über das Falten eines quadratischen Blatt Papiers möglich (indem alle vier Ecken auf den Mittelpunkt gefaltet werden). Durch einen Vergleich des ursprünglichen und des gefalteten Quadrates kann man erkennen, dass die Seitenlänge nicht einfach halbiert werden kann.

2. Als **Lernziel** kann herausgearbeitet und formuliert werden: *Wir wollen für ein Quadrat mit einem bestimmten Flächeninhalt die Seitenlänge bestimmen können.* Dies ist allgemeiner formuliert als das Halbierungsproblem, aber eine solch allgemeine Formulierung ist durchaus sinnvoll, um das übergeordnete Ziel während des Lernprozesses stets vor Augen zu haben. Wichtig ist hierbei, dass auch das Ziel selbst von den Lernenden verstanden wird und sie jederzeit überprüfen können, inwieweit sie das Ziel schon erreicht haben.

3. Bei der Überlegung, welche **Lernhandlungen** geeignet sind, sich dem Wurzelbegriff zu nähern, sollen diese aus den fachlich relevanten Zusammenhängen extrahiert und am gewählten Kontext konkretisiert werden:

   - Ein wesentlicher Zusammenhang ist, dass sich **Seitenlänge und Flächeninhalt eines Quadrates nicht proportional zueinander** verhalten, also eine doppelte Seitenlänge nicht zu einem doppelten Flächeninhalt führt. Dieser nicht-Zusammenhang gilt aber dann natürlich auch umkehrt: Der doppelte Flächeninhalt wird nicht durch eine doppelte Seitenlänge verursacht. Diese Perspektive ist wichtig, um zu erkennen, dass sich Wurzeln unbekannter Zahlen nicht so einfach linear aus Wurzeln bekannter Zahlen konstruieren lassen. Als konkrete Lernhandlung lässt sich die umsetzen, indem **zu vorgegebenen Quadraten Seitenlängen und Flächeninhalte bestimmt werden** müssen. Die Auswahl sollte derart erfolgen, dass sowohl vielfache Seitenlängen als auch vielfache Flächeninhalte auftreten, damit bei den jeweils anderen Größen erkannt wird, dass diese keine entsprechenden Vielfachen darstellen.

- Trotz der nicht-Linearität ist die bestehende **(strenge) Monotonie** ein weiterer Zusammenhang **zwischen Seitenlängen und Flächeninhalt.** Dieser kann herausgearbeitet werden, indem (nach der vorherigen Erfahrung) **Flächeninhalte und Seitenlängen von Quadraten** gegeben werden und zwischen diesen eine **Zuordnung** erfolgen muss. Dies betont den qualitativen Zusammenhang – auch wenn ein konkretes Ausrechnen damit noch nicht möglich ist.
- Der nächste Handlungsschritt ist nun das **näherungsweise Bestimmen von Seitenlängen** über das Intervallschachtelungsprinzip. Dieses baut in fachlicher Hinsicht auf die Monotonie auf und es sind nun immer Zahlenpaare a_1 und a_2 gesucht, für die $a_1^2 \leq A \leq a_2^2$ für einen gegebenen Flächeninhalt A gilt. Über eine vorstrukturierte (und ggf. auch schon über Beispiele vorausgefüllte) Tabelle kann dieses Vorgehen unterstützt werden. Begleitet werden kann dieses Vorgehen natürlich auch über ein zeichnerisches Nähern, indem den Quadraten weitere einbeschrieben werden, deren Seitenlängen gemessen und daraus der Flächeninhalt berechnet wird.

Tabelle 10.2: Intervallschachtelung zur Bestimmung von $\sqrt{8}$

a_1^2	$a_1 \leq \sqrt{8\,\text{cm}^2} \leq a_2$	a_2^2
$4\,\text{cm}^2$	$2\,\text{cm} \leq \sqrt{8\,\text{cm}^2} \leq 3\,\text{cm}$	$9\,\text{cm}^2$
$7{,}84\,\text{cm}^2$	$2{,}8\,\text{cm} \leq \sqrt{8\,\text{cm}^2} \leq 3\,\text{cm}$	$9\,\text{cm}^2$
$7{,}84\,\text{cm}^2$	$2{,}8\,\text{cm} \leq \sqrt{8\,\text{cm}^2} \leq 2{,}9\,\text{cm}$	$8{,}41\,\text{cm}^2$
$7{,}84\,\text{cm}^2$	$2{,}8\,\text{cm} \leq \sqrt{8\,\text{cm}^2} \leq 2{,}85\,\text{cm}$	$8{,}1225\,\text{cm}^2$
	$\vdots$	

All die Handlungen haben gemeinsam, dass dabei zwar an konkreten Quadraten mit bestimmten Flächeninhalten und Seitenlängen agiert wird, allerdings sind sie verallgemeinerbar und in ihrer Ausführung nicht an die genutzen Größen- und Zahlenwerte gebunden. Die mit den Lernhandlungen verbunden Aufgabenstellungen sollten dabei über eine **Kernfrage** in ihrer Vorschauperspektive begleitet werden. Aus dem Lernziel heraus lässt sich beispielsweise formulieren (siehe Barzel et al., 2016, S. 94): »Warum ist es so schwierig, das Quadrieren rückwärts zu rechnen?«

4. Die **etappenweise Verinnerlichung von Handlungen** bietet sich insbesondere für die dritte Lernhandlung an (in der die Wurzeln näherungsweise bestimmt werden), da in dieser Handlung alle vorherigen Zusammenhänge integriert sind. Eine *materielle bzw. materialisierte Handlung* ist schwer zu identifizieren, ggf. noch das Ausmessen der Seitenlänge eines Quadrates. In der *sprachlichen Handlung* sollte das Vorgehen der Intervallschachtelung von den Schülerinnen und Schülern beschrieben werden. Die *geistige*

Handlung ist dann das Ausführen der Intervallschachtelung selbst (wobei natürlich die errechneten Zahlen notiert werden).

Die bei der Diskussion der Lernhandlungen dargestellten wesentlichen Begriffseigenschaften müssen nun den Schülerinnen und Schülern über die **Verallgemeinerung der Lernhandlungen** explizit gemacht werden. Dies kann bspw. im Unterrichtsgespräch erfolgen, indem das Vorgehen am konkreten Beispiel reflektiert und dabei das Allgemeine daran herausgearbeit wird. Es müssen natürlich nicht Begriffe wie *nicht-Linearität*, *Monotonie* und *Intervallschachtelung* genutzt werden, aber deren inhaltliche Aussagekraft muss sichtbar werden. Daraus abgeleitet bietet sich folgende Definition der Wurzel an:

Die Wurzel einer nichtnegativen Zahl A ist diejenige nichtnegative Zahl a, für die $a^2 = A$ gilt.

Man schreibt: $a = \sqrt{A}$.

Beispiel: $\sqrt{9} = 3$, denn $3^2 = 9$.

(ref:citeLernmodellWurzel) Veranschaulichung der *Wurzel*

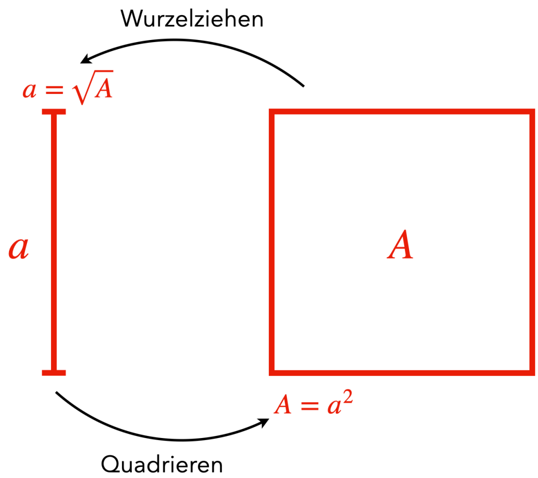


Abbildung 10.2: (ref:citeLernmodellWurzel)

Achtung! Es ist zwar $(-3)^2 = 9$, aber $\sqrt{9} \neq -3$, da -3 negativ ist. Außerdem ist $\sqrt{-9}$ nicht definiert, da -9 negativ ist.

In der Definition werden beschreibende Elemente mit der ikonischen und symbolischen Darstellungsebene in Bezug gebracht. Abbildung 10.2 kann gleichzeitig als **Lernmodell** aufgefasst werden: Sie veranschaulicht den Begriff und stellt gleichzeitig dar, wie zum Begriff gelangt werden kann. Damit liefert sie auch eine anschauliche Orientierung, wie das näherungsweise Bestimmen von Wurzeln über das Einbeschreiben von Quadraten erfolgen kann (siehe Abbildung 10.3).

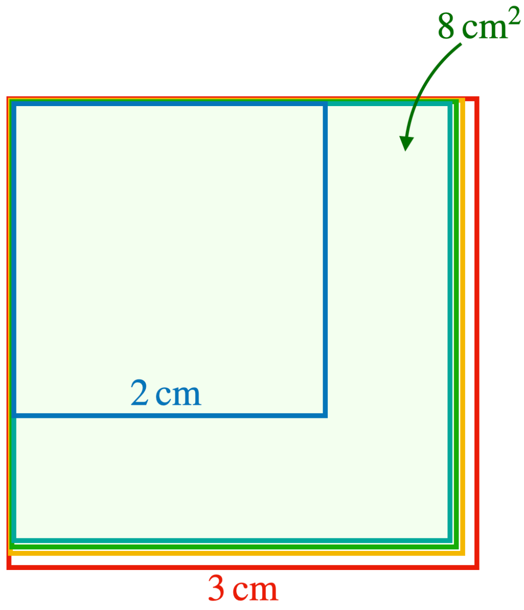


Abbildung 10.3: Nutzung des Lernmodells für die Intervallschachtelung

Auch die Auswahl des **Beispiels** $\sqrt{9} = 3$ war nicht zufällig. Als Einstiegsbeispiel sollte ein leicht nachvollziehbares gewählt werden, daher sollte es sich um (möglichst kleine) natürliche Zahlen handeln und nicht mit Einheiten agiert werden. $\sqrt{0}$ und $\sqrt{1}$ fallen weg, da dies Spezialfälle sind, in denen die Werte für Wurzel und Quadrat identisch sind. $\sqrt{4}$ ist ebenfalls ungünstig, weil dann bei der Erklärung der Umkehrung $2^2 = 4$ die Ziffer 2 doppelt (und in verschiedenen Funktionen) auftaucht, nämlich als Basis und als Exponent. Um derartige *Anfangsverwirrungen* zu vermeiden, ist dann $\sqrt{9}$ das nächstliegende Einstiegsbeispiel. Entsprechend dem Kontrastprinzip müssen auch nahe **Gegenbeispiele** wie $\sqrt{-9}$ sowie $\sqrt{9} \neq -3$ gebracht werden. Das Variationsprinzip für die Auswahl von Beispielen kann über die verschiedenen Quadrate am Ausgangskonkretum erfüllt werden, in dem dort etwa nicht nur natürliche Zahlen auftreten.

5. Anschließend erfolgen vertiefende Übungen und die Betrachtung weiterer Zusammenhänge, anhand derer das Begriffsverständnis vertieft wird.

   - Beim Wurzelbegriff geht dies insbesondere mit der Zahlbereichserweiterung in die reellen Zahlen einher. Dabei werden Wurzeln als Zahlen (und nicht Seitenlängen) aufgefasst und bspw. auch auf dem Zahlenstrahl geordnet.

   - Eine weitere charakteristische Anwendung der Lernhandlungen am Lernmodell ist bei der Betrachtung des Wurzelgesetzes $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ möglich. Wird die Wurzel als *Aufforderung* verstanden, zu einem Flächeninhalt die Seitenlänge des zugehörigen Quadrates zu finden, kann man den Term $\sqrt{9 \cdot 5}$ auffassen als die Suche nach der Seitenlänge des Quadrates mit dem 9-Fachen des Flächeninhalts von 5 cm^2. Geometrisch interpretiert und angelehnt ans Lernmodell kann dies als ein Quadrat von Quadraten dargestellt werden (siehe Abbildung 10.4). Dann ist die gesuchte Seitenlänge gerade das $\sqrt{9}$-Fache der Seitenlänge des Quadrates mit 5 cm^2 Flächeninhalt, also $\sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5}$. Dies ist natürlich nur eine Plausibilitätsbetrachtung. Eine Begründung ist dann aber ebenfalls mithilfe der Definition über die Umkehrung und Nutzung der Potenzgesetze möglich: $x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2$.

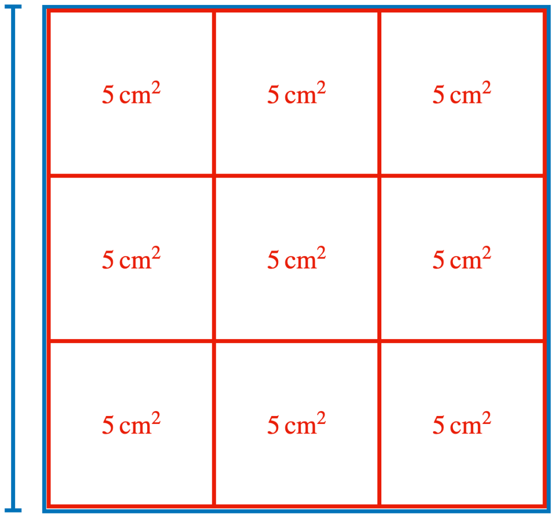


Abbildung 10.4: Nutzung des Lernmodells für Quadrate von Quadraten

10.3 Kombinatorik

Eine Herausforderung kombinatorischer Fragestellungen besteht für Schülerinnen und Schüler oftmals in der korrekten Zuordnung zwischen kombinatorischer Situation und dem entsprechenden mathematischen Modell. Bei fehlendem Verständnis kann es daher in der Unterrichtsrealität schnell zum Raten kommen, welches der vier Modelle aus dem Tafelwerk gewählt wird (vgl. Tabelle 10.3).

Tabelle 10.3: Typische Darstellung von Kombinatorik-Modellen in Tafelwerken

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
Variation mit Beachtung der Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
Kombination ohne Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Es soll hier nicht diskutiert werden, wie die entsprechenden Formeln begründet werden können oder in welcher Reihenfolge sich welche Einführung anbietet. Vielmehr soll überlegt werden, welche Unterstützungsmöglichkeiten Schülerinnen und Schülern geboten werden können, um verständnisfördernd Situationen den entsprechenden mathematischen Modellen zuordnen zu können. Im Prinzip sind diese Unterstützungsmöglichkeiten selbst wieder Modelle als »Brücke zwischen einer stochastischen Realsituation und dem formalen Modell« (Tietze et al., 2002, S. 197).

Zunächst gilt in allen vier Fällen: Aus einer Gesamtheit von n Objekten werden (unter bestimmten Voraussetzungen) k Objekte ausgewählt und (unter bestimmten Voraussetzungen) auf Plätze verteilt. Die Voraussetzung der Auswahl bestimmt, ob es sich um einen Vorgang mit oder ohne Wiederholung handelt. Die Voraussetzung der Verteilung ist mit oder ohne Beachtung der Reihenfolge.

Die Dichotomie **»mit Beachtung der Reihenfolge« – »ohne Beachtung der Reihenfolge«** kann auch über die Frage *»Ist es relevant, ob ich im Nachhein meine Objekte umsortiere oder nicht?«* betrachtet werden. Eine Repräsentation sollte diese Relevanz der Reihenfolge unterstützen. Abbildung 10.5 zeigt einen entsprechenden Vorschlag.

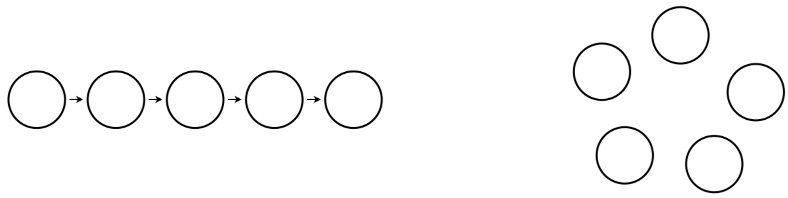


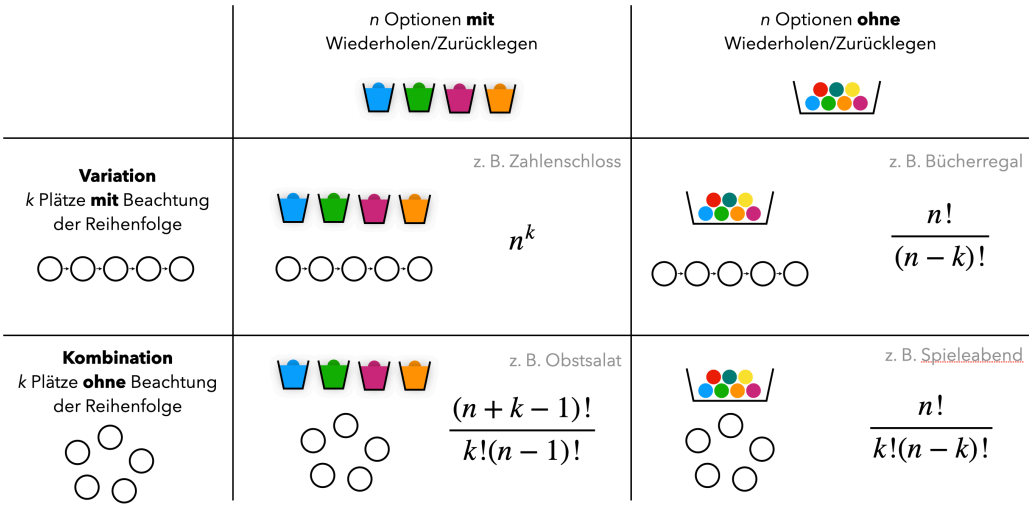
Abbildung 10.5: Repräsentation für Auswahl mit (links) und ohne (rechts) Beachtung der Reihenfolge

Die Dichotomie **»mit Zurücklegen« – »ohne Zurücklegen«** kann alternativ auch als **»mit Wiederholung« – »ohne Wiederholung«** aufgefasst werden. Darf nicht wiederholt werden, ergibt sich schnell, dass $n \geq k$ gelten muss, da sonst nicht genügend Objekte vorhanden sind, aus denen gewählt wird. Die wählbaren Objekte können also als Ansammlung in einem großen Topf aufgefasst werden, aus dem sie jweils einmalig gezogen werden können. Bei Wiederholung kann einerseits die Auffassung bestehen, dass die Objekte zurückgelegt werden dürfen (z. B. beim Ziehen bestimmter farbiger Kugeln), andererseits dass das Objekt hinreichend oft verfügbar ist (wenn z. B. Früchte für einen Obstsalat ausgewählt werden oder wenn bei einem

Zahlenschloss jeweils die Ziffern 0 bis 9 zur Verfügung stehen). Abbildung 10.6 macht einen Vorschlag, wie dies allgemein repräsentiert werden kann.

Abbildung 10.6: Repräsentation für Auswahl ohne (links) und mit (rechts) Wiederholen/Zurücklegen

Daraus ergeben sich nun die vier Optionen, dargestellt als Tabelle in Abbildung 10.7.



	n Optionen **mit** Wiederholen/Zurücklegen	*n* Optionen **ohne** Wiederholen/Zurücklegen
Variation *k* Plätze **mit** Beachtung der Reihenfolge	z. B. Zahlenschloss n^k	z. B. Bücherregal $\frac{n!}{(n-k)!}$
Kombination *k* Plätze **ohne** Beachtung der Reihenfolge	z. B. Obstsalat $\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	z. B. Spieleabend $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Abbildung 10.7: Tabelle zur Variation/Kombination mit unterstützenden Repräsentationen

Diese Repräsentation kann nun unterstützen, Realsituationen zu abstrahieren und dann dem entsprechenden mathematischen Modell zuzuordnen.

11 Leitidee Größen und Messen

Material

- Folien zur Vorlesung zur Leitidee Größen und Messen (pdf, Keynote)
- Kopiervorlage zur Winkelscheibe (pdf, svg)
- Virtuelles Arbeitsmittel zu arithmetischem Mittel und Median (html, Cinderella)
- Virtuelles Arbeitsmittel zum Boxplot (html, Cinderella)

Literaturempfehlungen

- siehe Leitidee Raum und Form

- Büchter & Holzäpfel (2018): *mathematik lehren 210: Messen*

11.1 Strukturierung der Leitidee

Tabelle 11.1: Bezeichnungen der Leitidee Größen und Messen

Dokument	Bezeichnung der Leitidee
Bildungsstandards Primarbereich (2005)	Größen und Messen
Bildungsstandards Primarbereich (2022)	Größen und Messen
Bildungsstandards Mittlerer Schulabschluss (2004)	Messen
Bildungsstandards Erster und Mittlerer Schulabschluss (2022)	Größen und Messen
Rahmenlehrplan Brandenburg, Jahrgangsstufen 1 – 10	Größen und Messen
Bildungsstandards Allgemeine Hochschulreife (2012)	Messen
Rahmenlehrplan Brandenburg, Gymnasiale Oberstufe	Messen

Abbildung 11.1 zeigt das vom LISUM (o. J.-f) herausgegebene Konzeptbild zur Leitidee Größen und Messen die Jahrgangsstufen 1 – 10, das ebenfalls durch einen didaktischen Kommentar von Kortenkamp & Kuzle (o. J.-c) und Materialien zur Diagnose und Förderung (LISUM, o. J.-e)

ergänzt wurde.

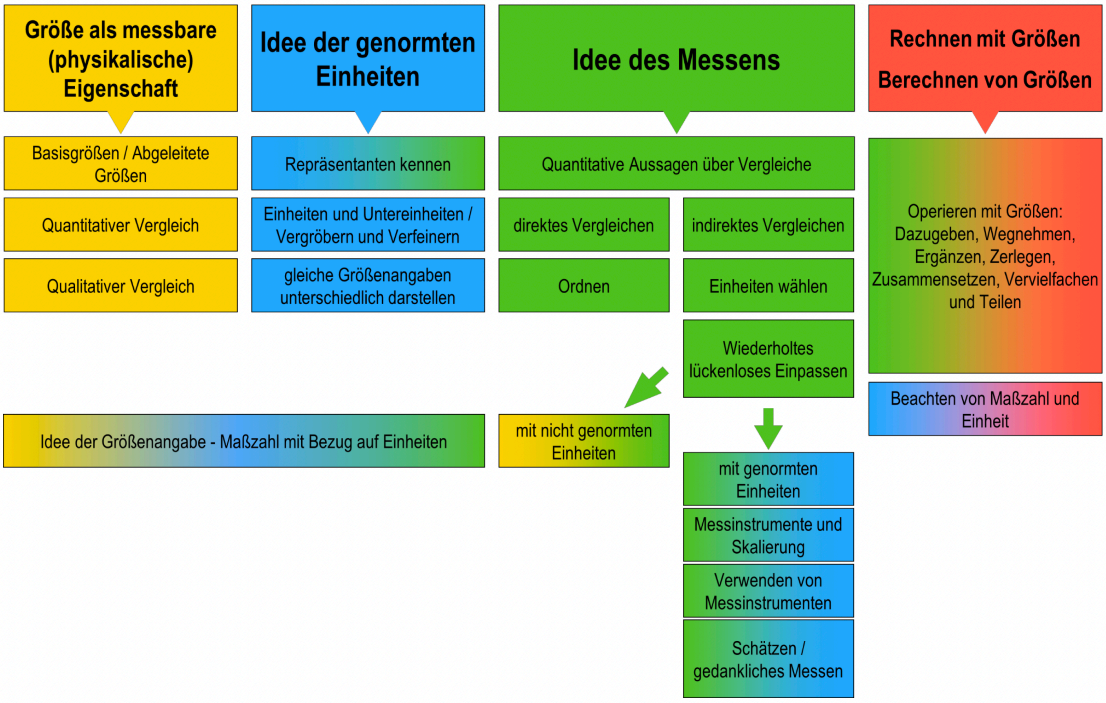


Abbildung 11.1: Konzeptbild zur Leitidee *Größen und Messen* (LISUM, o. J.-f)

Aus diesen Materialien sowie den Beschreibungen in den Bildungsstandards für die Sekundarstufen (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2012, S. 19; 2022a, S. 17 f.) lassen sich folgende bedeutsame Lerngegenstände ableiten:

> **Bedeutsame Lerngegenstände**
>
> - Messens als Vergleichen mit (Standard-)Einheiten bei Längen, Flächeninhalten und Volumina
> - Einheiten von Größen (insbesondere für Zeit, Masse, Geld, Länge, Fläche, Volumen und Winkel)
> - Schätzen von Größen
> - Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren
> - Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel sowie daraus zusammengesetzten Körpern
> - Berechnen von Streckenlängen und Winkelgrößen mittels Satz des Pythagoras, trigonometrischer Beziehungen und Ähnlichkeitsbeziehungen
> - Skalarprodukt
> - Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen

> - Sekanten- und Tangentensteigungen an Funktionsgraphen
> - Änderungsraten
> - Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind
> - Volumen von Rotationskörpern
> - Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand
> - Lage- und Streumaße einer Stichprobe
> - Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen

Bereits im ersten Intermezzo wurde die Idee des Messens am Beispiel des Flächeninhalts dargestellt. Im Folgenden sollen am Beispiel des Winkels sowie an Lage- und Streumaßen einzelne Elemente der Leitidee Größen und Messen diskutiert werden. Während beim Winkel der Schwerpunkt auf der Nutzung von Messinstrumenten liegt, sollen bei Lage- und Streumaßen insbesondere digitale Arbeitsmittel und deren Nutzung in Lernumgebungen betrachtet werden.

11.2 Winkelgrößen

Im Abschnitt 1.3 wurde eine kurze stoffdidaktische Analyse zum Winkelbegriff vorgestellt und in Abschnitt 6.2.3 die Unterstützung einzelner Lernhandlungen mithilfe des Arbeitsmittels *Winkel-Farm* diskutiert.

Aus den beiden Abschnitten ist bereits bekannt, dass der Winkelbegriff eine hohe Vorstellungsvielfalt aufweist (Winkel als Knick, als Feld, als Richtungsänderung und als Umdrehung). Dies beeinflusst letztlich auch den Messprozess, da verschiedene Vorstellungen unterschiedliche Messprozesse fordern bzw. unterstützen. Während bspw. bei der Feld-Vorstellung ein direkter Vergleich zwischen Winkelfeldern angebracht ist (siehe Etzold, 2021, S. 88 f.), bietet sich bei der Richtungsänderung-Vorstellung eher eine dynamische Sichtweise der Änderung eines Schenkels in Richtung des anderen Schenkels an. Die Vorstellungsvielfalt führt also einerseits zu verschiedenen Messverfahren, andererseits ist sie auch notwendig, um Messprozesse ganzheitlich vorstellungsbasiert zu verinnerlichen.

Bevor konkrete Messverfahren diskustiert werden, soll noch auf eine sprachliche Komponente eingegangen werden. Aus fachlicher Perspektive ist es notwendig, **zwischen *Winkeln* und *Winkelgrößen* zu unterscheiden**, um klar zu machen, dass es sich bei einem *Winkel* um ein geometrisches Objekt handelt, dem dann ein Maß, die *Winkelgröße*, zugeordnet wird (vgl. auch Filler, 2011, S. 32). Der Rahmenlehrplan von Brandenburg nimmt diese Unterscheidung ebenfalls vor (siehe z. B. Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg, 2015b, S. 42). In der Unterrichtssprache wird diese Unterscheidung oftmals vernachlässigt, etwa bei der Aufgabenstellung *»Bestimme den Winkel!«*, die korrekterweise *»Bestimme die Größe des Winkels!«* lauten müsste. Als Lehrkraft sollten Sie hier, angepasst an die Lerngruppe, sensibel gegenüber solchen Formulierungen sein.

Entsprechend der Idee des Messens (siehe grüne Felder in Abbildung 11.1) bieten sich folgende Schritte bei der Bestimmung von Winkelgrößen an, wie sie auch schon am Beispiel des Flächeninhalts in Kapitel 5 dargestellt wurden:

1. Direktes Vergleichen und Ordnen

Der erste Schritt des Messens ist der direkte Größenvergleich zwischen zwei Objekten. Dies ist insbesondere mit Winkelfeldern gut zu realisieren, indem deren Scheitelpunkte übereinandergelegt und die Felder geeignet ausgerichtet werden, sodass ein direkter Vergleich möglich ist.

Beim direkten Vergleich ist noch keine Quantifizierung der Winkelgröße notwendig, jedoch besteht bereits eine Ordnungsrelation. Das bedeutet, dass mehrere Winkel nun auch ihrer Größe nach sortiert werden können bzw. Winkel größer oder kleiner gemacht werden können.

Ein typisches Arbeitsmittel hierfür ist die **Winkelscheibe**, bestehend aus zwei verschiedenfarbigen Papierkreisscheiben, die jeweils durch einen Halbschlitz ineinander gesteckt werden (siehe Abbildung 11.2). Dabei sollte zunächst auf Skalierungen verzichtet werden, später können diese aufgegriffen und auch Bezüge zu Brüchen als Anteile des Vollwinkels hergestellt werden. Die Winkelscheibe steht auch als Kopiervorlage zur Verfügung.

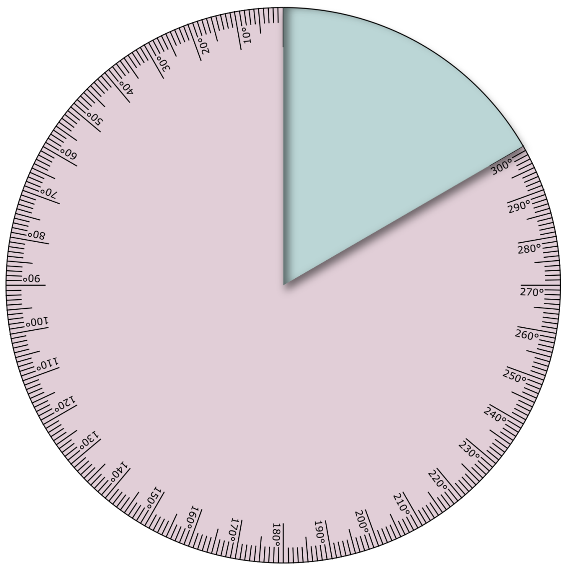


Abbildung 11.2: Winkelscheibe mit Skalierung

Eine typische Schwierigkeiten für Schülerinnen und Schüler ist an dieser Stelle, dass es sich bei dem Winkelfeld um einen unendlich ausgedehnten Teilbereich der Ebene handelt. Mit der Erfahrung der Flächeninhaltsmessung könnte dies zu der Fehlvorstellung führen, *Winkelfelder seien unendlich groß*. Es muss also deutlich gemacht werden, dass die **Winkelgröße kein Flächeninhalt** ist, sondern vielmehr eine Aussage über die **Öffnungsweite** des Winkels trifft. Dohrmann (2018, S. 22) stellt dies am Bezug zur Längenmessung dar: »Analog verhält es sich bei einer Strecke: Auch da ist die Mächtigkeit der im entsprechenden Intervall befindlichen Punkte nicht finit (sondern überabzählbar unendlich). Doch die Winkelmessung verlang eben nicht die Messung der Mächtigkeit der Punktmenge – in dem Sinne wären alle Winkelfelder gleichmächtig – sondern die Bestimmung der *Spannweite* durch die begrenzenden Schenkel (so wie die Längenmessung einer Strecke die Weite der Begrenzungspunkte verlangt).«

2. Auslegen mit einem Vergleichsmaß

Im nächsten Schritt werden Winkel mithilfe von Vergleichswinkeln ausgelegt.[1] Hierzu bieten sich **gleich große Winkelkeile** an. Dies ermöglicht nun eine erste Quantifizierung, ähnlich wie bei Flächeninhalt mit bekannten Vergleichmaßen (z. B. Fußballfelder) argumentiert wird. Abbildung 11.3 zeigt ein derartiges Auslegen.

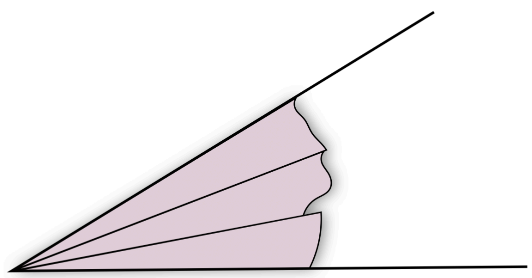


Abbildung 11.3: Auslegen eines Winkels mit Winkelkeilen

Dieses Vorgehen kann weiteren typischen Fehlvorstellungen entgegentreten, nämlich dass die Größe eines Winkels abhängig wäre von der Schenkellänge und von der Lage des Winkels in der Ebene. Zum Abbau der Fehlvorstellung trägt weiterhin bei, wenn man die Vergleichskeile unterschiedlich lang gestaltet und ihre Enden verschieden abschneidet bzw. abreißt. So wird deutlich gemacht, dass es tatsächlich nur um die Öffnungsweite geht, wenn man die Größe eines Winkels bestimmen möchte. Dies kann im Übrigen auch bei zwei gleich großen Winkeln veranschaulicht werden (siehe Abbildung 11.4).

3. Nutzen von Standardeinheiten und Messinstrument

Der letzte Schritt ist nun die Einführung einer Standardeinheit und die Nutzung von standardisierten Messinstrumenten.

Hierbei kann 1° als der 360-te Teil eines Vollwinkels definiert werden oder 90° als die Größe eines rechten Winkels. Ersteres ist die mathematisch übliche Herangehensweise, bedarf aber

[1] Hierzu noch einige Hinweise: Beim Auslegen ist relevant, dass dies *mathematisch korrekt* durchgeführt wird, also die Scheitelpunkte der Keile identisch sind und die Schenkel plan aneinander gelegt werden. Dieses Vorgehen ist zwar intuitiv richtig zu erwarten, aber dennoch nicht trivial (oder gar mathematisch selbstverständlich). Hierbei wird gleichzeitig über die Auslegehandlung ein Verständnis zum Winkelbegriff (in der Feld-Vorstellung) ausgebildet bzw. aufgerufen. Dieses Verständnis spielt dann auch eine Rolle beim Addieren von Winkelgrößen. Das (korrekte) Hintereinanderlegen der als *Lernmittel* aufzufassenden Winkelkeile ist eine *Lernhandlung*, deren Verallgemeinerung und Verinnerlichung eine Vorstellung zum Addieren von Winkelgrößen ausbildet.

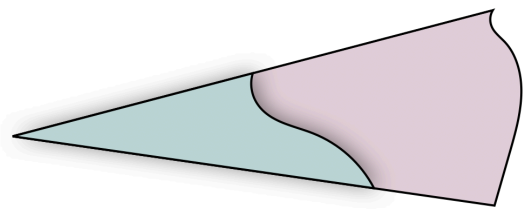


Abbildung 11.4: Unterschiedliche Winkelkeile mit demselben Maß

einer vorherigen Vorstellung des Vollwinkels. Der rechte Winkel dagegen ist den Schülerinnen und Schülern in der Regel schon länger bekannt und über die zueinander senkrechten Schenkeln besser greifbar. Wenn bsp. ein rechter Winkel zuvor mit neun 10°-Keilen ausgelegt worden ist, kann so schrittweise über eine Verfeierung dieser Keile in 10 gleich große Teile die Winkelgröße von 1° definiert werden.

Übliche Messgeräte sind das Geodreieck, der Winkelmesser (als Halb- oder Vollkreiswinkelmesser) oder auch das Goniometer.

Das **Geodreieck** ist insofern problematisch, als dass seine (unkritische) Verwendung zu einer Verwechslung von Winkelgrößen und Streckenlängen führen kann. In einer Studie von Dohrmann & Kuzle (2014, S. 303 f.) haben etwa 10 % der Schülerinnen und Schüler die Vorstellung geäußert, 1° sei so groß wie 1 mm. Wendet man die im Abschnitt 7.2.2 dargestellten Schritte zur Analyse eines Arbeitsmittels hierauf an, wäre für diese Fehlvorstellung ein tätigkeitstheoretischer Erklärungsansatz, dass sowohl beim Messen eines Winkels als auch beim Messen einer Strecken dieselbe *Operation* mit demselben *Arbeitsmittel* durchgeführt wird (nämlich das Ablesen der Skala am geradlinig verlaufenden Rand des Geodreiecks, siehe Abbildung 11.5). Damit verbinden die Schülerinnen (fälschlicherweise) dieselbe mathematische Handlung, sehen also das Winkelmessen als dasselbe an wie das ihnen bereits bekannte Streckenmessen (vgl. auch Dohrmann & Etzold, 2018, S. 450 f.).

Zum Einstieg des Winkelmessen sollte aus dieser Perspektive daher auf das Geodreieck verzichtet werden. Stattdessen können **Winkelmesser** benutzt werden, die keinen oder einen optisch zumindest abgrenzenden Bezug zur Längenmessung haben (letzteres etwa bei Halbkreiswinkelmessern, die mit Linealen kombiniert sind). Winkel können dabei durch Anlegen und Ablesen gemessen werden oder über Anlegen, Drehen und anschließendem Ablesen (siehe Abbildung 11.6). Die Methoden unterstützen in unterschiedlicher Weise eine statische bzw. dynamische Sichtweise auf Winkel und sollten daher beide eingeführt werden. Beide Vorgehen sind übrigens auch mit dem Geodreieck möglich, vgl. Dohrmann (2018, S. 21).

Im Unterricht sollte dabei auf jeden Fall thematisiert werden, dass das Verlängern (oder Einkürzen) der Schenkel nicht das Maß des Winkels beeinflusst. Dies ist sogar auch teilweise als Vorgehensstrategie notwendig, wenn bspw. ein Schenkel des Winkels zu kurz ist, um seine Größe am Winkelmesser ablesen zu können.

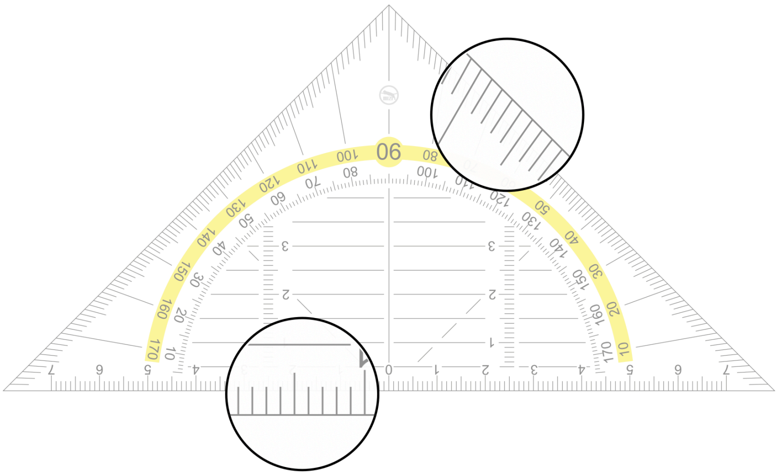


Abbildung 11.5: Längen- und Winkelmessung mit dem Geodreieck (Original-Geodreieck: Michael Zimmermann, Public domain, via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Set_square_Geodreieck.svg)

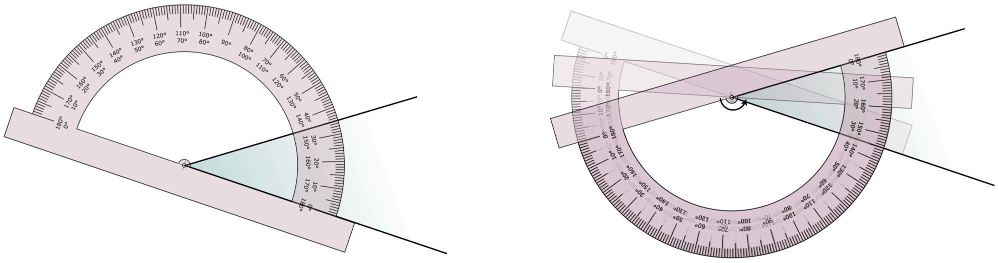


Abbildung 11.6: Statisches und dynamisches Vorgehen mit einem Winkelmesser

Ein im deutschsprachigen Mathematikunterricht kaum verbreitetes Arbeitsmittel zum Winkelmessen ist das **Goniometer**, siehe Abbildung 11.7. Dieses weist jedoch die Stärke auf, dass hier die Messhandlung nun eine deutlich andere ist als die beim Streckenmessen. Weiterhin kann der dynamische Charakter und das Identifizieren von Scheitelpunkt und Schenkel in besonderer Weise hervorgehoben werden. Weitere Hinweise zur Nutzung finden Sie bei Dohrmann (2018, S. 22).

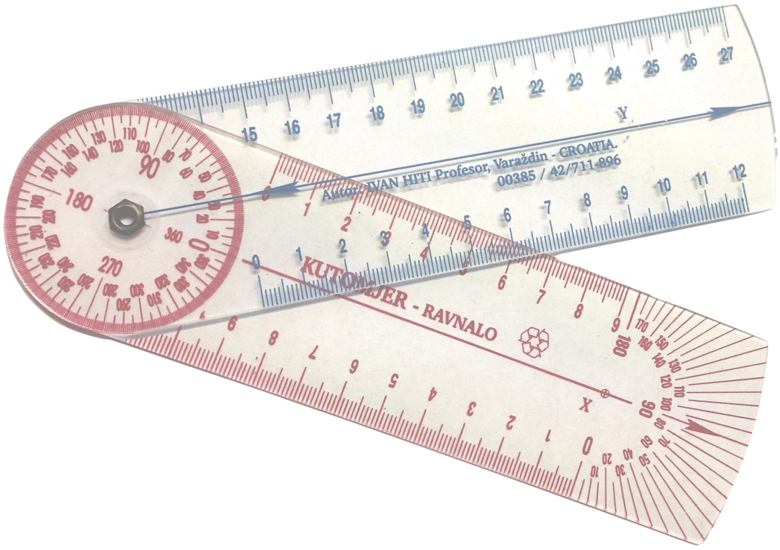


Abbildung 11.7: Goniometer

11.3 Lage- und Streumaße

In den Bildungsstandards für den Mittleren und Ersten Schulabschluss sind Lage- und Straumaße nicht Bestandteil der Leitidee, sondern als Kenngrößen in der Leitidee Daten und Zufall enthalten. Allerdings sind sie in den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife in der Leitidee Messen dargestellt – und auch fachlich wie begrifflich lassen sie sich dort einordnen.

An dieser Stelle sollen einige virtuelle Arbeitsmittel betrachtet werden, die eine operative Auseinandersetzung mit Lage- und Streumaßen ermöglichen.

Zur Erkundung von **arithmetischem Mittel** und **Median** erstellt bietet sich das in Abbildung 11.8 dargestellte virtuelle Arbeitsmittel an.

Auf einer skalierten Achse sind dabei Punkte markiert und es wird das arithmetische Mittel (gelb) sowie der Median (blau) dargestellt. Die Punkte können verschoben werden und es ist

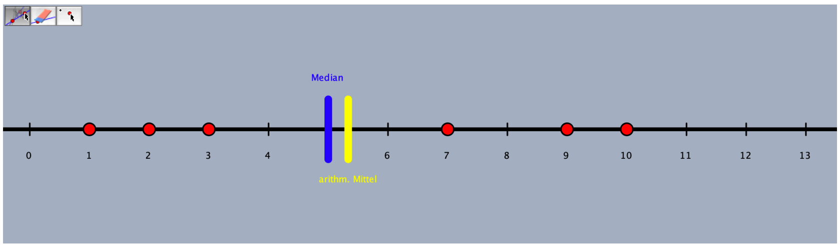


Abbildung 11.8: Screenshot des virtuellen Arbeitsmittels zu Lagemaßen

möglich, neue Punkte hinzuzufügen bzw. existierende Punkte zu entfernen, wobei sich arithmetisches Mittel und Median automatisiert anpassen. Die folgenden Aufgabenstellungen zeigen exemplarisch, wie ein derartiges Arbeitsmittel genutzt werden kann, um Schülerinnen und Schüler zum operativen Durcharbeiten bezüglich dieser Lagemaße anzuregen:

- *Verändere die Punkte so, dass Median und arithmetisches Mittel gleich sind.*
- *Kannst du Punkte verschieben, so dass Median oder arithmetisches Mittel unverändert bleiben? Bei welchen Punkten geht das (nicht) und warum (nicht)?*
- *Wie verändert sich das beobachtete Verhalten von arithmetischem Mittel und Median bei ungerader Anzahl an Punkten?*
- *Zeige mit dem Arbeitsmittel, dass der Median stabil gegenüber Ausreißern ist, das arithmetische Mittel jedoch nicht.*

Der **Median** und die **Spannweite** sowie **oberes und unteres Quartil** spielen eine bedeutsame Rolle beim Erstellen von Boxplots. Abbildung 11.9 zeigt den Screenshot eines virtuellen Arbeitsmittels zur Erkundung von Zusammenhängen am Boxplot, das im Rahmen einer Masterarbeit an der Universität Potsdam entstanden ist (Korn, 2023).

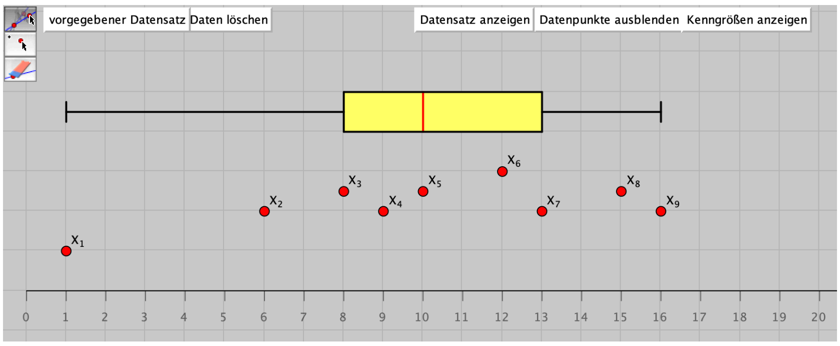


Abbildung 11.9: Screenshot des virtuellen Arbeitsmittels zum Boxplot

Auch bei diesem Arbeitsmittel wird der Boxplot abhängig von der Lage der variierbaren Punkte automatisiert dargestellt. Über weitere Konfigurationen wie das Einblenden des Datensatzes oder das Ausblenden der Daten selbst können vielfältige Aufgaben bearbeitet werden (vgl. Korn, 2023):

- *Verändere den Datensatz so, dass*
  - *die Box kleiner wird,*
  - *die linke Antenne ganz lang und die rechte Antenne ganz kurz wird,*
  - *die rechte Hälfte der Box größer wird, aber der Median gleich bleibt.*
- *Erstelle einen eigenen Datensatz, blende ihn aus und lass deinen Partner bzw. deine Partnerin einen passenden Datensatz mit mindestens neun Werten finden, der denselben Boxplot produziert.*

12 Leitidee Raum und Form

12.1 Strukturierung der Leitidee

Material

- Folien zur Vorlesung zur Leitidee Raum und Form (pdf, Keynote)

Literaturempfehlungen

- Franke & Reinhold (2016): *Didaktik der Geometrie. In der Grundschule*
- Weigand et al. (2018): *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*
- Henn & Filler (2015): *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden*
- Tietze et al. (2000b): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*

Tabelle 12.1: Bezeichnungen der Leitidee Raum und Form

Dokument	Bezeichnung der Leitidee
Bildungsstandards Primarbereich (2005)	Raum und Form
Bildungsstandards Primarbereich (2022)	Raum und Form
Bildungsstandards Mittlerer Schulabschluss (2004)	Raum und Form
Bildungsstandards Erster und Mittlerer Schulabschluss (2022)	Raum und Form
Rahmenlehrplan Brandenburg, Jahrgangsstufen 1 – 10	Raum und Form
Bildungsstandards Allgemeine Hochschulreife (2012)	Raum und Form
Rahmenlehrplan Brandenburg, Gymnasiale Oberstufe	Raum und Form

Auch zur Leitidee Raum und Form hat das LISUM (2022) Materialien zur Diagnose und Förderung, einen didaktischen Kommentar sowie ein Konzeptbild für die Jahrgangsstufen 1 – 10 herausgegeben (siehe Abbildung 12.1).

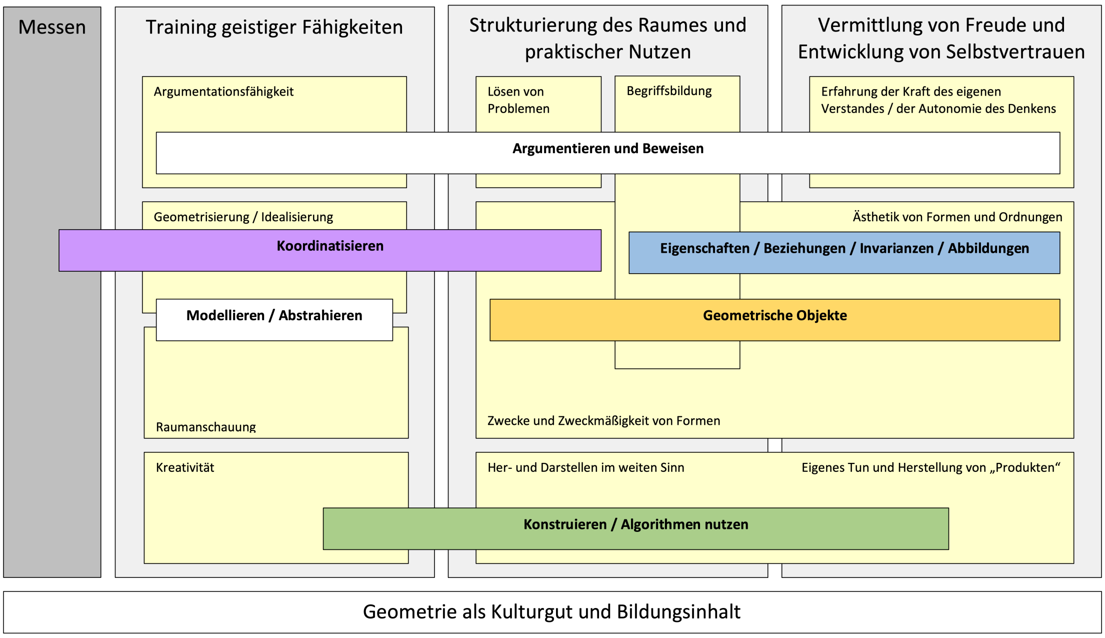


Abbildung 12.1: Konzeptbild zur Leitidee *Raum und Form* (LISUM, 2022, S. 23)

Mit den Beschreibungen in den Bildungsstandards für die Sekundarstufen (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2012, S. 19; 2022a, S. 20 f.) ergeben sich folgende bedeutsame Lerngegenstände:

> **Bedeutsame Lerngegenstände**
>
> - geometrische Objekte (Punkte, Winkel, Strecken, Geraden, Flächen, Körper)
> - Beziehungen geometrischer Objekte (z. B. Symmetrie, Idee der Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen)
> - Operieren im zwei- und dreidimensionalen Raum (z. B. verschieben, drehen, spiegeln)
> - Darstellen ebener geometrischer Figuren (z. B. Dreiecke, Vierecke) und elementarer geometrischer Abbildungen (z. B. Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen, zentrische Streckungen) im ebenen kartesischen Koordinatensystem
> - Netze, Schrägbilder und Modelle ausgewählter Körper (z. B. Prisma, Pyramide)
> - Analysieren und Klassifizieren geometrischer Objekte der Ebene (insbesondere Winkel, Dreiecke, Vierecke) und des Raumes (insbesondere Prismen, Pyramiden, Zylinder, Kegel, Kugel)
> - Sätze der ebenen Geometrie (insbesondere Satz des Pythagoras, Satz des Thales, Ähnlichkeitsbeziehungen und trigonometrische Beziehungen)
> - Zeichnen und Konstruieren geometrischer Figuren
> - Untersuchung der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von Konstruktionsaufgaben
> - Koordinatisieren geometrischer Sachverhalte in Ebene und Raum
> - Vektoren

- Geometrische Deutung des Skalarprodukts
- Analytische Beschreibung von Geraden und Ebenen sowie deren Lagebeziehungen

Über Falthandlungen soll im Folgenden dargestellt werden, wie auf enaktive Weise Lagebeziehungen von Punkten, Gerade und Ebenen anschaulich im Mathmatikunterricht behandelt werden können. Weiterhin werden exemplarisch an einigen elementargeometrischen Sätzen Argumentations- und Beweisanlässe diskutiert, die sich im Geometrieunterricht der frühen Sekundarstufe anbieten.

12.2 Lagebeziehungen

Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen spielen über die gesamte Schullaufbahn eine bedeutsame Rolle. Es beginnt in der Grundschule über die Lage von Punkten auf Geraden, zueinander senkrechte und parallele Geraden, den Winkelbegriff zu Beginn der Sekundarstufe, bis hin zur Analytischen Geometrie in der Sekundarstufe II, wenn die Lagebeziehungen algebraisch beschrieben werden. An dieser Stelle sollen einige grundlegende Gedanken dargstellt und mit enaktiven Erfahrungen in Bezug gebracht werden.

12.2.1 Lagebeziehungen falten

Werden auf einem Blatt Papier zwei Punkte markiert und dieser aufeinandergefaltet, entsteht als Faltlinie die Mittelsenkrechte zwischen diesen beiden Punkten (siehe Abbildung 12.2).

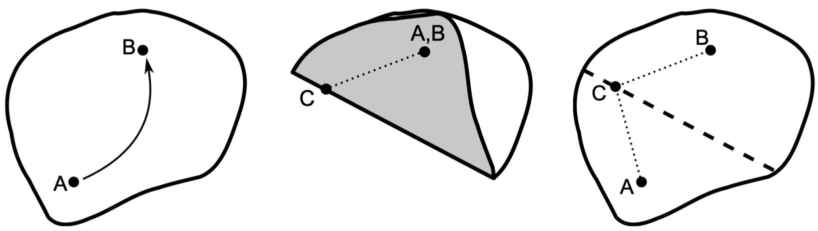


Abbildung 12.2: Mittelsenkrechte durch Faltung (Etzold & Petzschler, 2014, S. 5)

Um dies zu begründen, muss die Faltung analysiert und mit der geometrischen Konfiguration in Zusammenhang gebracht werden. Betrachtet man einen Punkt C auf der Faltlinie, so hat dieser zu A und B denselben Abstand, was aus dem Übereinanderlegen von A und B durch die Faltung bekommt. Die Faltlinie ist damit die Menge aller Punkte (in der Ebene des Papierstücks), die zu A und B denselben Abstand haben – und dies ist gerade die *Mittelsenkrechte*.

Lerntheoretisch kann als **Lernhandlung** das *Erkennen* (als mehrfaches *Identifizieren* und *Realisieren*) der geometrischen Konfiguration der Faltung aufgefasst werden (vgl. typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht in Abschnitt 6.2). Die **Analyse dieser Lernhandlungen** führt nun zur Aneignung geometrischen Wissens.

Fachdidaktisch interessant ist hier die Betonung der **Ortslinieneigenschaft** der Mittelsenkrechten. Diese Abstandsbedingung zu zwei Punkten ist auch relevant, um die Konstruktion einer Mittelsenkrechten durchzuführen – also das Zeichnen zweier Kreisbögen mit demselben Radius von den Punkten ausgehend, die Schnittpunkte liegen dann auf der Mittelsenkrechten. Auch wenn begründet werden soll, dass sich die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks im Umkreismittelpunkt schneiden, bedarf es dieser Eigenschaft. Aus dem Bezeichner *Mittelsenkrechte* ist die entsprechende Eigenschaft dagegen nicht direkt ablesbar – handelt es sich demnach doch »nur« um eine Gerade, die senkrecht zur Strecke $\overline{AB}$ und durch deren Mitte verläuft.[1]

Der Faltprozess kann also eine Motivation bieten, über eine zunächst enaktive Handlung die geometrische Eigenschaft der Faltprodukte genauer zu betrachten und die Faltung selbst »auseinanderzunehmen«. Ein solcher Analyseprozess kann nochmal verstärkt gefordert werden, wenn bspw. das Faltergebnis in einer **Dynamischen Geometriesoftware** (DGS) realisiert wird. Dann nämlich ist es notwendig, die Faltlinie über die im DGS zur Verfügung stehenden Werkzeuge zu realisieren (vgl. Etzold & Petzschler, 2014, S. 6).

In analoger Weise zur Faltung der Mittelsenkrechten durch Punkt-auf-Punkt-Faltung kann auch das Falten einer Winkelhalbierenden durch Kante-auf-Kante-Faltung realisiert werden. Darauf aufbauend wiederum können Senkrechten, Parallelen oder sogar Quadrate bzw. Kreismittelpunkte gefaltet werden (siehe Etzold & Petzschler, 2014, S. 10, 82 f., 86 f.).

12.2.2 3D-Koordinatensystem

Aus 6 quadratischen Blättern lässt sich ein Oktaeder basteln, wenn man die Blätter entsprechend Abbildung 12.3 faltet und entsprechend Abbildung 12.4 ineinander steckt.

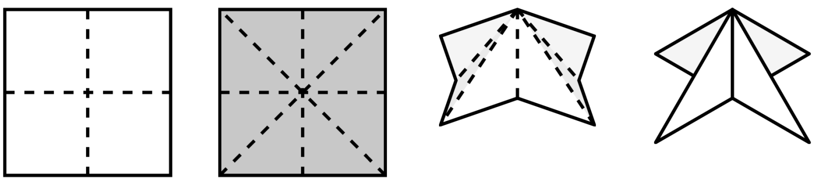


Abbildung 12.3: Faltung für einen Oktaeder (Etzold & Petzschler, 2014, S. 64)

Dieser Oktaeder kann nun als dreidimensionales Koordinatensystem aufgefasst werden (siehe Abbildung 12.5).

[1] Im Übrigen sind beide Eigenschaften äquivalent zueinander – es lohnt sich, den Beweis dafür einmal durchzuführen.

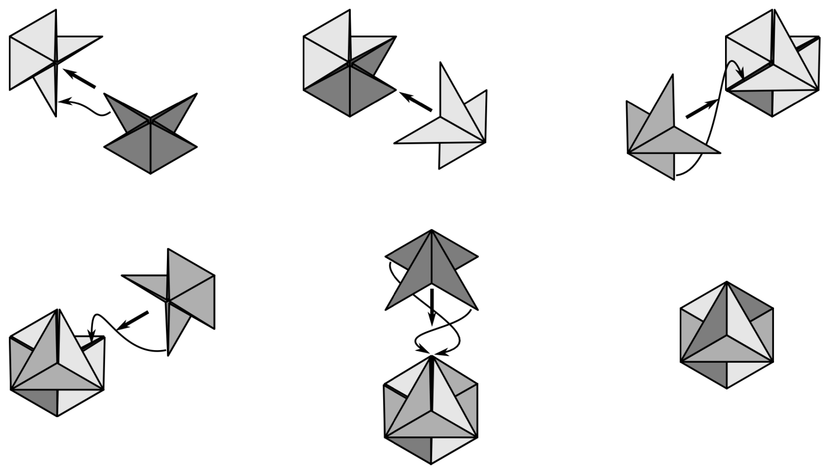


Abbildung 12.4: Zusammenfügen zum Oktaeder (Etzold & Petzschler, 2014, S. 64)

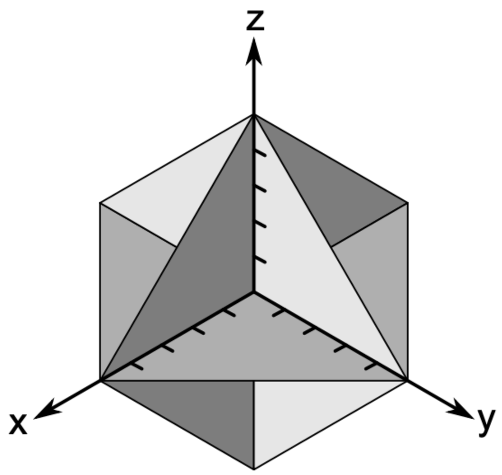


Abbildung 12.5: Dreidimensionales Koordinatensystem (Etzold & Petzschler, 2014, S. 65)

An diesem lassen sich vielfältige Aufgaben zur Koordinatengeometrie in der Sekundarstufe II veranschaulichen, zum Beispiel (vgl. Etzold & Petzschler, 2014, S. 65):

- *Spanne mit Nadel und Faden eine Strecke von* (2|0|0) *nach* (0|3|0). *Gib die Gleichung der Geraden g an, auf der diese Strecke liegt.*
- *Spanne mit Nadel und Faden eine beliebige Strecke, die parallel zu g liegt. Gib deren Gleichung an.*
- *Stecke mit dem Zahnstocher eine Strecke, die senkrecht zu g liegt.*

An dieser Stelle wird jedoch nicht mehr die durchgeführte Falthandlung geometrisch analysiert, sondern das gefaltetes Objekt dient lediglich als **Visualisierungsobjekt** – in dem Fall für das dreidimensionale Koordinatensystem.

12.3 Elementargeometrische Sätze

Elementargeometrische Sätze bieten eine gute Möglichkeit, Argumentieren und Beweisen auf verschiedenen Niveaus im Mathematikunterricht zu realisieren. Am Beispiel des Innenwinkelsatzes für Dreiecke und anhand von Sätzen am Kreis wird dies im Folgenden dargestellt.

12.3.1 Innenwinkelsatz für Dreiecke

Dass die Innenwinkelsumme von (ebenen) Dreiecken stets 180° beträgt, lässt sich auf verschiedene Weisen plausibel machen und begründen.

Zunächst einmal ist es möglich, die Innenwinkel tatsächlich **auszumessen und ihre Größen zu addieren**. Dies ist besonders dann überzeugend, wenn die Schülerinnen und Schüler selbst ein beliebiges Dreieck zeichnen und daran ihre Messungen vornehmen. Aufgrund von Messungenauigkeiten wird es ggf. vorkommen, dass die Summe nicht exakt 180° beträgt, aber immerhin sollten sich alle Innenwinkelsummen in diesem Bereich bewegen. Ein nächster Schritt könnte die Nutzung **Dynamischer Geometriesoftware** sein, wo die Messungen und die Summe exakter bestimmt werden können. Dabei überzeugt weiterhin die Möglichkeit, das Dreieck selbst zu variieren und simultan zu erkennen, dass sich zwar die Größen der drei Innenwinkel ändern, nicht jedoch ihre Summe.

Auf enaktiver Ebene sind das **Abreißen von Ecken**[2] oder das **Aneinanderlegen zueinander kongruenter Dreiecke** mögliche Herangehensweisen, um einen gestreckten Winkel von 180° zu erzeugen (siehe Abbildung 12.6).

Gegenüber dem Messen und Rechnen hat dieses Vorgehen, insbesondere das Aneinanderlegen, die Besonderheit, dass daran schon eine allgemeine Beweisidee sichtbar wird. Dies ist auch der

[2] Es ist darauf zu achten, dass wirklich *gerissen* und nicht *geschnitten* wird, weil sonst nicht mehr erkennbar ist, was die eigentliche Ecke war.

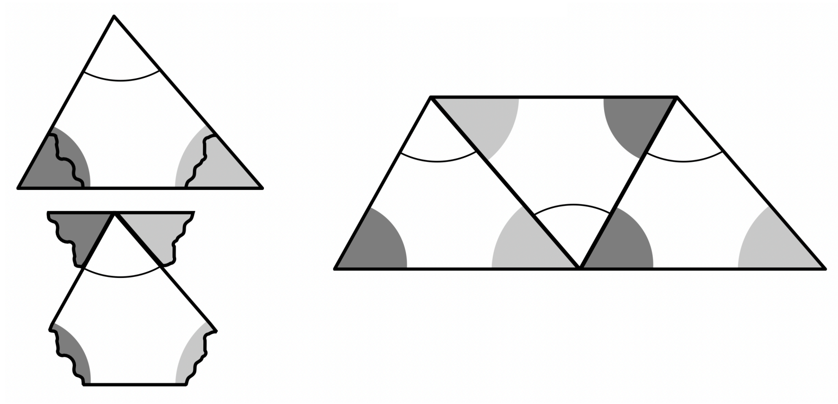


Abbildung 12.6: Innenwinkelsumme enaktiv bestimmen (Etzold & Petzschler, 2014, S. 32)

Fall, wenn man einen **Stift im Inneren des Dreiecks wandern** lässt. Dieser hat dann, wenn er alle Ecken einmal abgelaufen ist, insgesamt eine halbe Drehung (also um 180°) vollführt (siehe Abbildung 12.7).

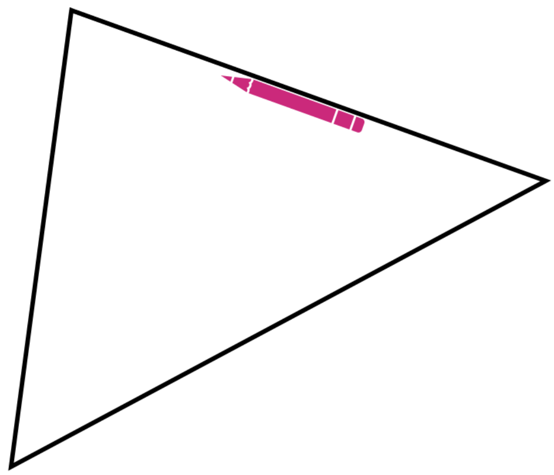


Abbildung 12.7: Innenwinkelsumme mit Stiftbewegung erfahren

Für den eigentlichen Beweis kann man parallel zu einer Dreiecksseite einen Gerade durch den gegenüberliegenden Punkt zeichnen (siehe Abbildung 12.8) und den gestreckten Winkel von 180° mithilfe des Wechselwinkelsatzes begründen.

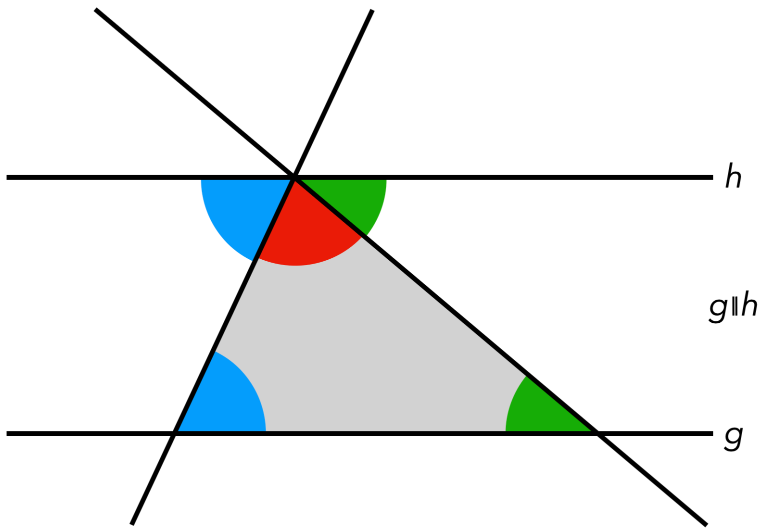


Abbildung 12.8: Beweisfigur des Innenwinkelsatzes für Dreiecke

12.3.2 Sätze am Kreis

12.3.2.1 Zentri-Peripheriewinkelsatz

Der Zentri-Peripheriewinkelsatz besagt, dass der Zentriwinkel über der Sehne eines Kreises stets doppelt so groß ist wie ein Peripheriewinkel auf derselben Seite derselben Sehne (siehe Abbildung 12.9).

Um diesen Satz zu beweisen, bedarf es vielfältiger Heurismen, wie das Zeichnen geeigneter Hilfslinien (Radius), die Bezugnahme auf bekannte Sätze (Basiswinkelsatz im gleichschenkligen Dreieck, Innenwinkelsatz im Dreieck) und das Erkennen der Gleichheit von Termen.

Mit den Farben der Winkel aus Abbildung 12.10 gilt dann in den jeweiligen Dreiecken:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{grün} + 2 \cdot \text{orange} + 2 \cdot \text{lila} &= 180^\circ \\ \text{rot} + 2 \cdot \text{lila} &= 180^\circ \end{aligned}$$

Daraus folgt aus dem Vergleich der beiden Zeilen direkt die Aussage des Satzes:

$$\begin{aligned} \text{rot} &= 2 \cdot \text{grün} + 2 \cdot \text{orange} \\ \text{rot} &= 2 \cdot (\text{grün} + \text{orange}) \\ \text{rot} &= 2 \cdot \text{blau} \end{aligned}$$

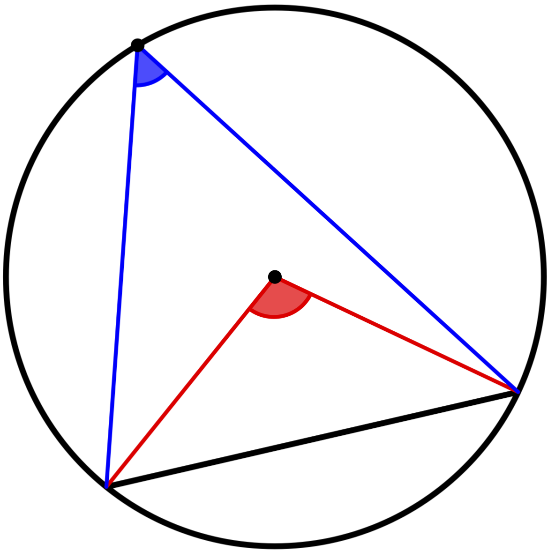


Abbildung 12.9: Zentriwinkel (rot) und Peripheriewinkel (blau) auf derselben Seite über derselben Kreissehne

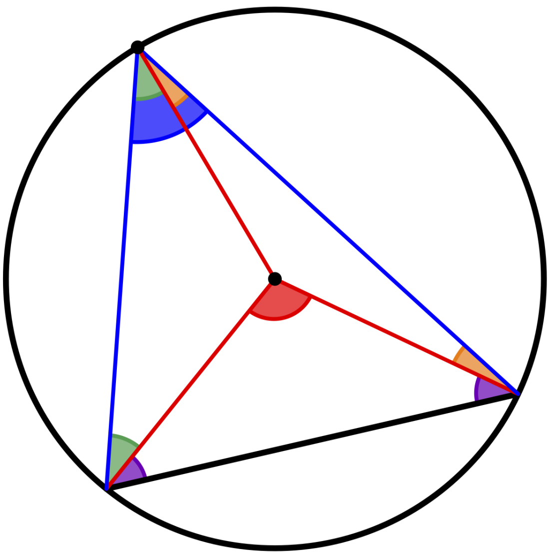


Abbildung 12.10: Beweisfigur des Zentri-Peripherwiewinkelsatzes

Da der Satz selbst für den weiteren Schulunterricht keine so hohe Bedeutung hat, müssen Sie als Lehrkraft besonders abwägen, ob Sie diesen Beweis besprechen wollen – auch abhängig von Ihrer Lerngruppe. Im Sinne der Schulung von Heurismen in der Geometrie hat er aber durchaus Potenzial.

12.3.2.2 Peripheriewinkelsatz

Der Peripheriewinkelsatz besagt, dass alle Peripheriewinkel auf derselben Seite über derselben Sehne eines Kreises gleich groß sind. Eine Erkundung dieses Satzes ist – wie beim Innenwinkelsatz für Dreiecke – bspw. mit Dynamischer Geometriesoftware möglich, indem bei Bewegung des Punktes auf dem Kreis der Peripherwiewinkel permanent gemessen wird.

Formal folgt der Satz direkt aus dem Zentri-Peripherwiewinkelsatz, da der Zentriwinkel bei fester Sehne gleich groß bleibt.

12.3.2.3 Satz des Thales

Eine weitere direkte Folgerung aus dem Zentri-Peripherwiewinkelsatz ist der Satz des Thales, also dass Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises stets 90° betragen. Dies liegt daran, dass der Zentriwinkel in diesem Fall 180° beträgt (siehe Abbildung 12.11).

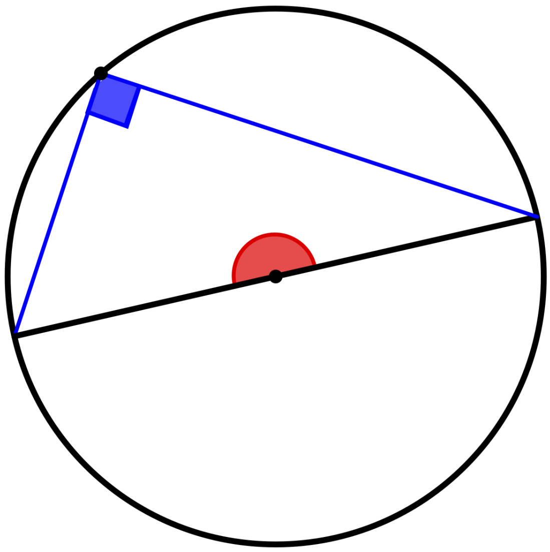
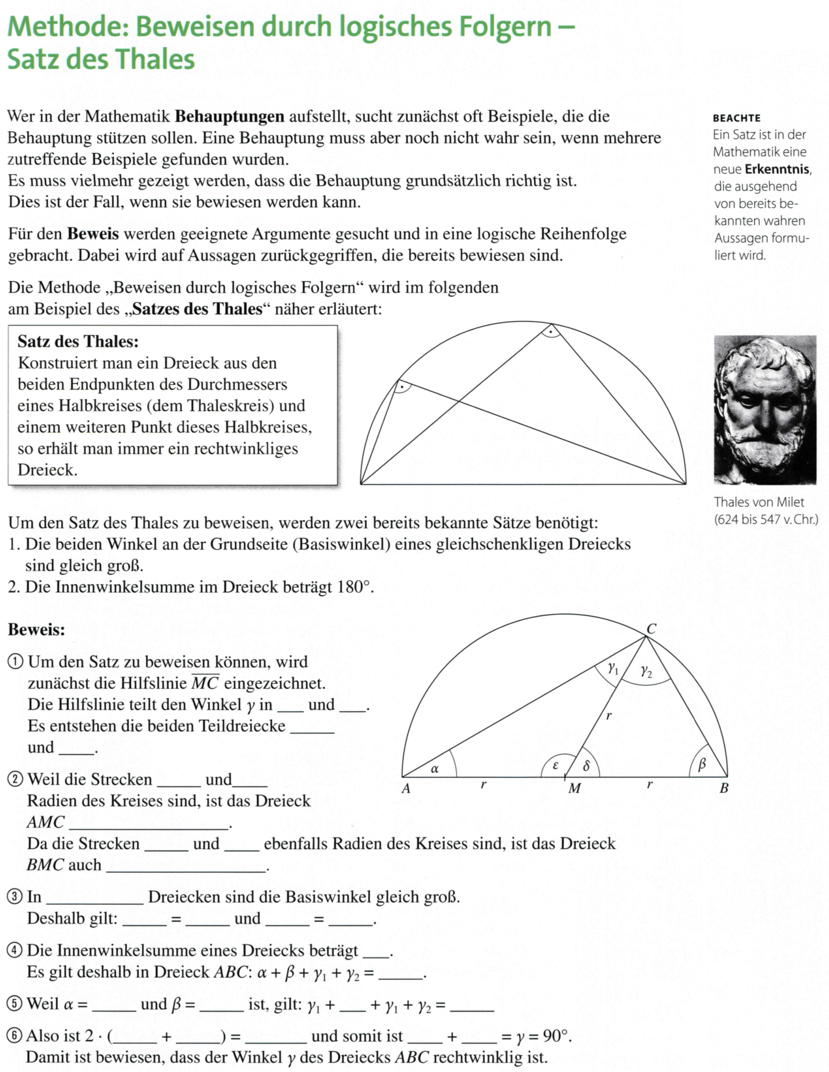


Abbildung 12.11: Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises

Der Zusammenhang zwischen Satz des Thales und Zentri-Peripherwiewinkelsatz sollte v. a. dann hergestellt werden, wenn der Zentri-Peripherwiewinkelsatz intensiv behandelt worden ist. Alternativ lässt sich der Satz des Thales auch direkt beweisen – und das ist als Spezialfall sogar einfacher als der Beweis des Zentri-Peripherwiewinkelsatzes. Abbildung 12.12 zeigt einen Lückentext-Beweis, wie er von Schülerinnen und Schülern durchgeführt werden könnte.



Methode: Beweisen durch logisches Folgern – Satz des Thales

Wer in der Mathematik **Behauptungen** aufstellt, sucht zunächst oft Beispiele, die die Behauptung stützen sollen. Eine Behauptung muss aber noch nicht wahr sein, wenn mehrere zutreffende Beispiele gefunden wurden.
Es muss vielmehr gezeigt werden, dass die Behauptung grundsätzlich richtig ist.
Dies ist der Fall, wenn sie bewiesen werden kann.

Für den **Beweis** werden geeignete Argumente gesucht und in eine logische Reihenfolge gebracht. Dabei wird auf Aussagen zurückgegriffen, die bereits bewiesen sind.

Die Methode „Beweisen durch logisches Folgern“ wird im folgenden am Beispiel des **„Satzes des Thales“** näher erläutert:

BEACHTE
Ein Satz ist in der Mathematik eine neue **Erkenntnis**, die ausgehend von bereits bekannten wahren Aussagen formuliert wird.

Satz des Thales:
Konstruiert man ein Dreieck aus den beiden Endpunkten des Durchmessers eines Halbkreises (dem Thaleskreis) und einem weiteren Punkt dieses Halbkreises, so erhält man immer ein rechtwinkliges Dreieck.

Thales von Milet (624 bis 547 v. Chr.)

Um den Satz des Thales zu beweisen, werden zwei bereits bekannte Sätze benötigt:
1. Die beiden Winkel an der Grundseite (Basiswinkel) eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich groß.
2. Die Innenwinkelsumme im Dreieck beträgt 180°.

Beweis:

① Um den Satz zu beweisen können, wird zunächst die Hilfslinie $\overline{MC}$ eingezeichnet.
Die Hilfslinie teilt den Winkel γ in ___ und ___.
Es entstehen die beiden Teildreiecke _____ und ____.

② Weil die Strecken _____ und____ Radien des Kreises sind, ist das Dreieck *AMC* _________________.
Da die Strecken _____ und ____ ebenfalls Radien des Kreises sind, ist das Dreieck *BMC* auch _________________.

③ In ___________ Dreiecken sind die Basiswinkel gleich groß.
Deshalb gilt: _____ = _____ und _____ = _____.

④ Die Innenwinkelsumme eines Dreiecks beträgt ___.
Es gilt deshalb in Dreieck *ABC*: $\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 =$ _____.

⑤ Weil $\alpha =$ _____ und $\beta =$ _____ ist, gilt: $\gamma_1 +$ ___ $+ \gamma_1 + \gamma_2 =$ _____

⑥ Also ist $2 \cdot ($_____ + _____$) =$ _______ und somit ist ____ + ____ $= \gamma = 90°$.
Damit ist bewiesen, dass der Winkel γ des Dreiecks *ABC* rechtwinklig ist.

Abbildung 12.12: Lückentext-Beweis des Satz des Thales (Wennekers, 2016, S. 173)

13 Leitidee Strukturen und funktionaler Zusammenhang

Material

- Folien zur Vorlesung zur Leitidee Strukturen und funktionaler Zusammenhang (pdf, Keynote)

Literaturempfehlungen

- Greefrath et al. (2016): *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*
- Danckwerts & Vogel (2010): *Analysis verständlich unterrichten*
- Weigand et al. (2022): *Didaktik der Algebra: nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*
- Tietze et al. (2000a): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis*

13.1 Strukturierung der Leitidee

Tabelle 13.1: Bezeichnungen der Leitidee Strukturen und funktionaler Zusammenhang

Dokument	Bezeichnung der Leitidee
Bildungsstandards Primarbereich (2005)	Muster und Strukturen
Bildungsstandards Primarbereich (2022)	Muster, Strukturen, funktionaler Zusammenhang[1]
Bildungsstandards Mittlerer Schulabschluss (2004)	Funktionaler Zusammenhang
Bildungsstandards Erster und Mittlerer Schulabschluss (2022)	Strukturen und funktionaler Zusammenhang
Rahmenlehrplan Brandenburg, Jahrgangsstufen 1 – 10	Gleichungen und Funktionen
Bildungsstandards Allgemeine Hochschulreife (2012)	Funktionaler Zusammenhang

[1] Die Leitidee dient hier als Hintergrund-Leitidee hinter den anderen, vgl. Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2022b, S. 6).

Dokument	Bezeichnung der Leitidee
Rahmenlehrplan Brandenburg, Gymnasiale Oberstufe	Funktionaler Zusammenhang

Abbildung 13.1 zeigt das vom LISUM (o. J.-d) für die Jahrgangsstufen 1 – 10 herausgegebene Konzeptbild zur Leitidee Strukturen und Funktionaler Zusammenhang, ergänzt durch einen didaktischen Kommentar von Kortenkamp & Kuzle (o. J.-b) und Materialien zur Diagnose und Förderung (LISUM, o. J.-c).

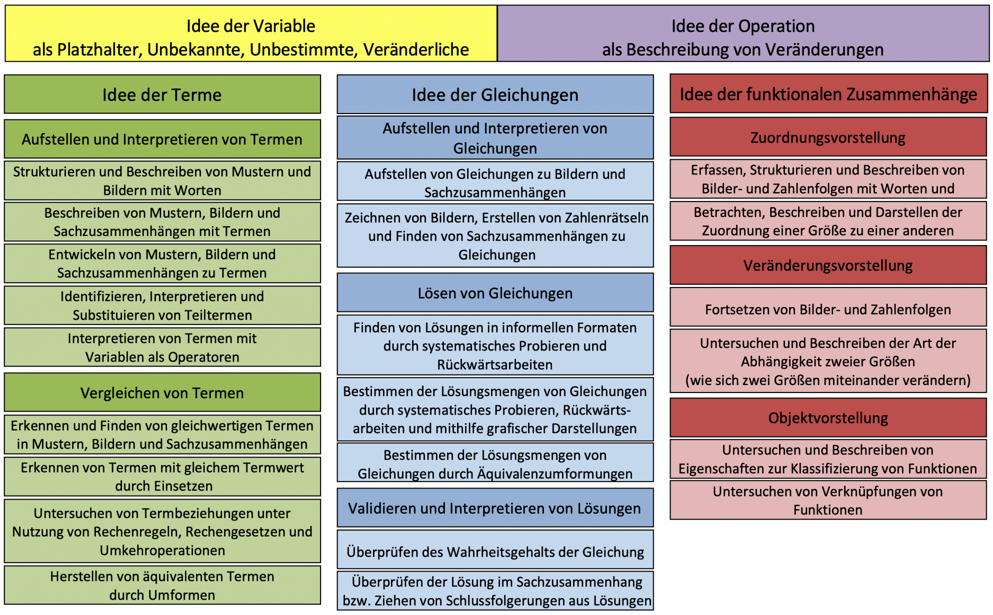


Abbildung 13.1: Konzeptbild zur Leitidee *Gleichungen und Funktionen* (LISUM, o. J.-d)

Daraus sowie mit den Beschreibungen in den Bildungsstandards für die Sekundarstufen (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2012, S. 20; 2022a, S. 18 f.) können folgende Lerngegenstände als bedeutsam angesehen werden:

Bedeutsame Lerngegenstände

- Variablen
- Terme
- Wachstumsprozesse
- Maßstäbe
- Darstellungformen funktionaler Zusammenhänge (sprachlich, tabellarisch, grafisch, algebraisch)
- proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen, Dreisatz

- lineare und quadratische Gleichungen
- lineare Gleichungssysteme
- Lösbarkeit und der Lösungsvielfalt von linearen und quadratischen Gleichungen sowie linearen Gleichungssystemen
- Merkmale von Funktionen aus Funktionsterm, Graph und Wertetabelle
- lineare Funktionen
- quadratische Funktionen
- Exponentialfunktionen
- Logarithmusfunktion
- Sinusfunktion
- Verknüpfungen und Verkettungen von Funktionen
- Ableitung und Ableitungsfunktion
- Ableitungsregeln
- Monotonie und Extrema
- Bestimmtes Integral
- Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung
- Stammfunktionen
- Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Im Folgenden werden kurz Grundvorstellungen zum Variablen- und zum Funktionenbegriff vorgestellt, bevor dann näher auf die Analyses der Sekundarstufe II, insbesondere hinsichtlich den Ableitungsbegriffs, eingegangen wird.

13.2 Variablenaspekte

Gemäß der in Kapitel 3 eingeführten Bezeichnungen können zu drei Grundvorstellungen des Variablenbegriffs Aspekte formuliert werden, hier entnommen aus Weigand et al. (2022, S. 35 f.)

- Grundvorstellung zum Aspekt als ***Unbekannte***: »Die Variable ist ein Platzhalter für eine Zahl, deren Wert nicht bekannt ist, aber prinzipiell bestimmt werden kann, etwa durch regelgeleitete Umformungen.«

  Diese Vorstellung ist i. d. R. die zuerst vorkommente Vorstellung zum Variablenbegriff in der Schullaufbahn. Betrachtet man etwa die Gleichung $x + 5 = 15$, so ist die Variable x zunächst unbekannt, kann aber hier bestimmt werden mit $x = 10$. In der Grundschuldidaktik Mathematik taucht auch der Begriff ***Platzhalteraspekt*** auf, der einer Variablen zugeschrieben wird (siehe auch Abbildung 13.1). Dies wird etwa in Aufgaben der Art $2 + \square = 7$ sichtbar. Im Platzhalteraspekt hat die Variable jedoch noch nicht die Funktion eines eigenständigen mathematischen Objektes – den erhält sie erst im Unbekanntenaspekt. Im dem Sinne befindet man sich hier also gerade im Übergang von der Arithmetik zur Algebra (vgl. Weigand et al., 2022, S. 39 ff.).

- Grundvorstellung zum Aspekt als ***Unbestimmte bzw. allgemeine Zahl***: »Die Variable ist eine allgemeine Zahl, deren Wert nicht gegeben ist bzw. zunächst nicht von Interesse ist.«

  Wird etwa die Flächeninhaltsformel eines Rechteckts mit $A = a \cdot b$ angegeben, so ist bspw. a eine Variable, deren Größe nicht interessiert (solange keine konkrete Berechnung angestellt wird). Relevant ist nur, dass a hier für die Länge einer Rechtseckseite steht.

- Grundvorstellung zum Aspekt ***Veränderliche***: »Die Variable ist eine Zahl oder Größe, die verschiedene Werte aus einem festgelegten Bereich annehmen kann, also veränderlich ist.«

  Dieser Aspekt ist insbesondere bei der Betrachtung von Funktionen relevant. In der Gleichung $y = 2x + 5$ etwa steht die Variable x für eine Zahl (aus $\mathbb{R}$)), die verändert werden kann (woraufhin ihr Einfluss auf y betrachtet wird.)

Alle drei Aspekte sind notwendig, um mathematische Fragestellungen zu lösen. Betrachtet man etwa die Flächeninhaltsformel $A = \frac{1}{2}ah$ für ein Dreieck mit Grundseite a und Höhe h, ermöglichen die Aspekte, folgende Zusammenhänge zu verstehen (vgl. Barzel & Holzäpfel, 2011, S. 4):

- Unbekannte: *Wie groß ist h für* $A = 20\,\text{cm}^2$ *und* $a = 5\,\text{cm}$*?*
- Unbestimmte: *Zur Berechnung des Flächeninhalts muss ich h einsetzen.*
- Veränderliche: *Wie ändert sich der Flächeninhalt, wenn ich h verdopple?*

Inwiefern die hier genannten Aspekte einen Einfluss darauf haben, welche mathematischen Handlungen nun mit Variablen möglich sind (wie etwa *Einsetzen*, *Beschreiben eines Zusammenhangs*, ...), wird bei Weigand et al. (2022, S. 42) dargestellt.[2]

Hinweise zum Formelsatz im Zusammenhang mit Variablen, was für Sie inbesondere bei der Gestaltung von Arbeitsblättern von Relevanz sein kann, finden sich unter Wikipedia (2022a).

13.3 Funktionsaspekte

Dreh- und Angelpunkt der Leitidee Funktionaler Zusammenhang und damit auch des Stoffgebiets Analysis ist der **Funktionsbegriff**. Die hier formulieren Funktionsaspekte sind entnommen aus Greefrath et al. (2016, S. 47 ff.)[3]:

- Grundvorstellung zum **Zuordnungsaspekt**: »Eine Funktion ordnet jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer zweiten Größe zu. Mit dem Mengenbegriff formuliert

[2] Die Begrifflichkeiten zu *Aspekten* und *Grundvorstellungen* unterscheiden sich dort teils von den hier im Dokument verwendeten.

[3] Es ist erneut zu beachten, dass dort die Bezeichnung *Aspekt* in einer anderen Bedeutung als hier im Dokument verwendet wird, siehe dazu eine Diskussion bei Etzold (2021, S. 72 f.).

bedeutet dies: Eine Funktion ordnet jedem Element einer Definitionsmenge genau ein Element einer Zielmenge zu.«

Typische Repräsentationen dieser Vorstellung sind Wertetabellen oder Pfeildiagramme. Über die (nicht-)Eindeutigkeit abgehender und ankommender Pfeile in der Definitions- und Zielmenge kann bspw. operativ an Beispielen diskutiert werden, ob eine Funktion vorliegt oder nicht. Die einführende Definition des formalen Funktionsbegriffs (meist in Klassenstufe 8) erfolgt in der Regel über den Zuordnungsaspekt – was die Gefahr einer einseitigen Betrachtung des Begriffs mit sich bringt. Sie müssen sich als Lehrkraft also zunächst einmal der Aspektvielfalt bewusst sein und diese dann auch bei Ihrer Unterrichtsgestaltung beachten.

- Grundvorstellung zum **Kovariationsaspekt/Änderungsaspekt**: »Mit Funktionen wird erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird.«

  Ohne den Kovariationsaspekt ist kein inhaltliches Verständnis von Differenzialrechnung möglich, da der Ableitungsbegriff ja gerade die lokale Änderung einer Funktion beschreibt. Aber auch in der Sekundarstufe I spielt dieser Aspekt schon eine bedeutsame Rolle, bspw. bei der Betrachtung proportionaler Zuordnungen als *gleichmäßige Zunahme* oder wenn unterschiedlich steile lineare Funktionen und das entsprechende Anstiegsdreick behandelt werden.

- Grundvorstellung zum **Objektaspekt**: »Eine Funktion ist ein einziges Objekt, das einen Zusammenhang als Ganzes beschreibt.«

  Insbesondere bei der Betrachtung von Funktionsgraphen wird ein solcher Gesamtblick geschult und die Funktion als Objekt aufgefasst. Der Objektaspekt ist u. a. auch bei der Betrachtung des Parametereinflusses von Relevanz, da dort die Funktion *als Ganzes* manipuliert wird. Algebraisch spielt der Aspekt eine Rolle, wenn Funktionsterme addiert werden oder Funktionen bspw. als Elemente eines Vektorraumes aufgefasst werden.

13.4 Analysis in der Sek. II

13.4.1 Konflikt zur Fachmathematik

Der Analysisunterricht in der Schule unterscheidet sich wesentlich von dem in der Hochschule, womit aus fachlicher wie fachdidaktischer Sicht einige Herausforderungen einhergehen. Neben der grundsätzlichen nicht streng deduktiven Herangehensweise werden i. d. R. zentrale Begriffe der Analysis im Schulunterricht kaum oder nur propädeutisch-anschaulich behandelt. Die betrifft zunächst einmal den **Folgen-, Grenzwert- und Stetigkeitsbegriff** (Danckwerts & Vogel, 2010, S. 17 ff.; Greefrath et al., 2016, S. 23 ff.; Tietze et al., 2000a, S. 252 ff.). Der Ableitungsbegriff bedarf bspw. des Grenzwertes des Differenzenquotienten. Ein solcher Grenzwert einer Funktion f an einer Stelle a existiert, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to a$ auch die Folge der Funktionswerte konvergiert, also $f(x_n) \to f(a)$. Für den Konvergenzbegriff einer

Folge ist nun zum anderen die **Vollständigkeit der reellen Zahlen** von enormer Bedeutung, was ebenfalls in der Schule nicht in einer derartigen Strenge behandelt wird (siehe z. B. Danckwerts & Vogel, 2010, S. 27 ff.). Mathematisch relevant ist für die Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a eben nicht nur, dass die Folgenglieder dem a beliebig nahe kommen, sondern dass a im betrachteten Zahlbereich tatsächlich existiert. Ein klassisches Beispiel hierfür ist das Heronverfahren zum Wurzelbestimmen. So liefert die rekursive Folge[4] $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$ mit bspw. $x_0 = 1$ ausschließlich Folgenglieder aus $\mathbb{Q}$, die sich auch beliebig nahe kommen (eine sogenannte *Cauchy-Folge*), der Grenzwert selbst ist aber $\sqrt{5}$, was nicht in $\mathbb{Q}$, sondern nur in $\mathbb{R}$ liegt.

Ohne derartige zentrale (im fachmathematischen Sinne sauber ausgeprägte) Begriffe Analysisunterricht zu betreiben, bedarf also einer starken Orientierung an den hinter den Begriffen liegenden Grundvorstellungen, damit dennoch ein inhaltlich-anschauliches Verständnis aufgebaut werden kann und der Unterricht nicht zu einem kalkülhaften Vorgehen verkommt. Spezifische Anregungen für einzelne Lerngegenstände bieten die bereits zitierten Quellen.

13.4.2 Beispiel Ableitungsbegriff

Für den Ableitungsbegriff (einer Funktion an einer Stelle) haben sich sowohl historisch als auch in der fachdidaktischen Literatur zwei wesentliche Vorstellungen herausgebildet (Danckwerts & Vogel, 2010, S. 45 ff.; Greefrath et al., 2016, S. 147 ff.):

- Grundvorstellung zum Aspekt der **lokalen Änderungsrate**: Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle beschreibt, wie stark sich die Funktionswerte in der Umgebung dieser Stelle verändern. Wird sich dieser Änderungsrate graphisch genähert, erfolgt dies i. d. R. durch den Übergang des Anstiegs einer Sekante zu dem einer Tangente[5], womit die Ableitung über den **Grenzwert des Differenzenquotienten** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ quantifiziert werden kann und dem **Anstieg der Tangente** entspricht.

  Diese Sichtweise ermöglicht, den Ableitungbegriff konstruktiv über den Sekanten-Tangenten-Übergang einzuführen und unmittelbar numerisch zu beschreiben. Auch bedienen sich vielfältige Anwendungen (z. B. Momentan- vs. Durchschnittsgeschwindigkeit) dieser Vorstellung.

- Grundvorstellung zum Aspekt der **lokalen Linearität**: Diese Vorstellung betont noch stärker die Differenzierbarkeit als Eigenschaft einer Funktion, nämlich die Möglichkeit, sie lokal durch eine lineare Funktion annähern zu können. Eine typische Repräsentation ist das Heranzoomen an die Funktion, sodass dabei die lokale Linearität besonders deutlich wird. Mathematisch greifbar wird diese Vorstellung darüber, dass sich die Funktion über $f(x) = f(x_0) + m \cdot x + r(h)$ beschreiben lässt, wobei der *Fehler* $r(h)$ so schnell gegen

[4] Für eine geometrische Interpretation dieser Formel siehe auch Wikipedia (2021a, Abschn. 2). Hat man diese Interpretation im Hinterkopf, muss man sich nicht einmal die Formel merken.

[5] Zur Diskussion der Vorstellung, was eine Tangente ist, siehe auch Greefrath et al. (2016, S. 149)

0 geht, dass sogar $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ gilt. m selbst ist dann die Ableitung und der Anstieg der *besten linearen Näherung* – was natürlich wieder die Tangente an entsprechender Stelle ist.

Dieses Vorgehen besticht v. a. durch seine mathematische Verallgemeinerbarkeit für die höherdimensionale Analysis. Auch entspricht es dem Bedürfnis, Prozesse linear zu approximieren (vgl. Abschnitt 2.2.2).

14 Leitidee Daten und Zufall

Material

- Folien zur Vorlesung zur Leitidee Daten und Zufall (pdf, Keynote)

Literaturempfehlungen

- Sill & Kurtzmann (2019): *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*
- Krüger et al. (2015): *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*
- Tietze et al. (2002): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 3: Didaktik der Stochastik*

14.1 Strukturierung der Leitidee

Tabelle 14.1: Bezeichnungen der Leitidee Daten und Zufall

Dokument	Bezeichnung der Leitidee
Bildungsstandards Primarbereich (2005)	Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit
Bildungsstandards Primarbereich (2022)	Daten und Zufall
Bildungsstandards Mittlerer Schulabschluss (2004)	Daten und Zufall
Bildungsstandards Erster und Mittlerer Schulabschluss (2022)	Daten und Zufall
Rahmenlehrplan Brandenburg, Jahrgangsstufen 1 – 10	Daten und Zufall
Bildungsstandards Allgemeine Hochschulreife (2012)	Daten und Zufall
Rahmenlehrplan Brandenburg, Gymnasiale Oberstufe	Daten und Zufall

Auch für diese Leitidee hat das LISUM (o. J.-b) für die Jahrgangsstufen 1 – 10 ein Konzeptbild herausgegeben (siehe Abbildung 14.1), ergänzt durch einen didaktischen Kommentar von Kortenkamp & Kuzle (o. J.-a) und Materialien zur Diagnose und Förderung (LISUM, o. J.-a).

Aus den Beschreibungen in den Bildungsstandards für die Sekundarstufen (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2012, S. 21;

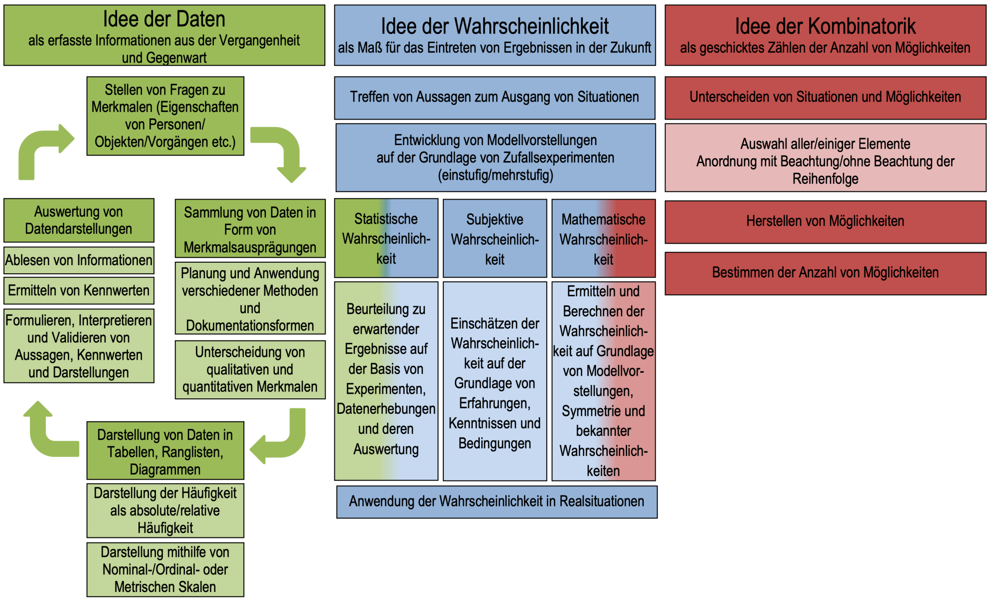


Abbildung 14.1: Konzeptbild zur Leitidee *Daten und Zufall* (LISUM, o. J.-b)

2022a, S. 22 f.) lassen sich folgende bedeutsamen Lerngegenstände folgern:

Bedeutsame Lerngegenstände

- statistische Erhebungen und deren Darstellungen
- Simulationen
- statistische Kenngrößen (z. B. Minimum, Maximum, arithmetisches Mittel, Median, Spannweite, Quartile),
- Diagramme (z. B. Säulen- oder Balkendiagramm, Histogramme, Kreisdiagramm, Liniendiagramm, Boxplot)
- Zufallserscheinungen und Wahrscheinlichkeitsaussagen
- Zufallsexperimente, relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten
- ein- oder mehrstufige Zufallsexperimente
- bedingte Wahrscheinlichkeiten
- Baumdiagramme und Vierfeldertafeln
- stochastische Unabhängigkeit
- diskrete und stetige Zufallsgrößen
- Binomialverteilung
- Normalverteilung
- Hypothesentests

Im Folgenden sollen einige Grundgedanken zur Stochastik, insbesondere im Zusammenhang mit dem Begriff des *stochastischen Vorgangs*, diskutiert werden. Anschließend erfolgen noch Darstellungen zum Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten.

14.2 Stochastische Vorgänge

14.2.1 »Zufallsexperiment«-Kritik

Krüger et al. (2015, S. 219 f.) argumentieren, dass der häufig verbreitete Begriff des **Zufallsexperiments** aus fachlicher wie didaktischer Sicht ungeeignet für den Unterricht erscheint. Sie begründen dies u. a. mit der Nichtnotwendigkeit des Begriffs in der Fachmathematik und damit, dass es sich nicht um ein *Experiment* im naturwissenschaftlichen Sinne der Hypothesenüberprüfung unter kontrollierten Bedingungen handele – die oftmals formulierte Regel der »beliebige[n] Wiederholbarkeit unter gleichen Bedingungen« sei letztlich schon ein Modell mit der Annahme der stochastischen Unabhängigkeit (Krüger et al., 2015, S. 219). Spiele, in denen der Zufall eine Rolle spielt, sind für den Mathematikunterricht höchst relevant – sollten aber nicht als Experimente aufgefasst werden. Stattdessen werden für die Grundschule der Begriff ***Vorgang mit mehreren möglichen Ergebnissen*** und für die weiterführenden Schulen der Begriff ***stochastischer Vorgang*** vorgeschlagen (Krüger et al., 2015, S. 220)

Für die tatsächliche Unterrichtsausführung ist dies insofern problematisch, da der Begriff *Zufallsexperiment* i. d. R. Bestandtteil der Lehrpläne ist (siehe z. B. Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg, 2015b, S. 59, 61) und damit unterrichtet werden muss. Sie als Lehrkraft sollten also stets die an der Verwendung des Begriffs vorgebrachte Kritik im Hinterkopf haben und dies sensibel bei Ihrer Unterrichtsgestaltung beachten. Dies kann etwa bedeuten, dass Sie dennoch eine *übliche* Definition des Begriffs Zufallsexperiment nutzen (siehe Abbildung 14.2), aber im Unterricht die Unterschiede zu *echten* Experimenten thematisieren und über geeignete Beispiele und Gegenbeispiele den Begriff ausschärfen.

Verstehen

In der Mathematik beschäftigt man sich systematisch mit Zufallsexperimenten und Zufallsgeräten wie z. B. Würfeln, Glücksrädern oder Lostrommeln.

Manchmal spricht man auch von Zufallsversuchen statt von Zufallsexperimenten.

Ein Versuch, dessen Ausgang bzw. **Ergebnis zufällig** ist, heißt **Zufallsexperiment**, wenn zusätzlich folgende drei Eigenschaften gelten:

1. Die Durchführung erfolgt nach genauen Regeln und ist beliebig wiederholbar.
2. Es müssen mindestens zwei verschiedene Ergebnisse möglich sein.
3. Das Ergebnis ist nicht vorhersagbar.

Alle möglichen Ergebnisse zusammen bilden die **Ergebnismenge Ω**. Ein bestimmter Teil aller möglichen Ergebnisse, für den man sich interessiert, wird **Ereignis** genannt. Ein Ereignis kann **sicher**, **möglich** oder **unmöglich** sein.

Beispiel: Würfelwurf

Ergebnismenge	Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6}
Ereignis A: „Augenzahl gerade“	A = {2; 4; 6}. Das Ereignis ist möglich.
Ereignis B: „Augenzahl 0“	B = { }. Das Ereignis ist unmöglich.
Ereignis C: „Augenzahl höchstens 6“	C = {1; 2; 3; 4; 5; 6}. Das Ereignis ist sicher.

Ein Gegenereignis $\overline{A}$ enthält alle Ereignisse, die nicht in A enthalten sind.

Abbildung 14.2: Schulbuchdefinition des Begriffs *Zufallsexperiment* (Adam & Kleine, 2016, S. 18)

14.2.2 Modellierungsstruktur

Grundsätzlich ist es Aufgabe der Stochastik, reale Prozesse zu modellieren, um diese mit mathematischen Mitteln, also einem ***theoretischen Modell***, greifbar (und bearbeitbar) zu machen. Dazu ist es normalerweise notwendig, die ***reale Situation*** erst einmal zu vereinfachen und in ein ***Realmodell*** zu überführen (siehe Abbildung 14.3). Dieses Vorgehen ist nicht spezifisch für die Stochastik – jedoch ist der Zwischenschritt des Realmodells hier aufgrund der vielfältigen Modellierungsmöglichkeiten von besonderer Bedeutung. Der Begriff *stochastischer Vorgang* ist dann »auf der Ebene der Realmodelle angesiedelt«, mit der Verwendung des Begriffs *Zufallsexperiment* dagegen »verwischt man die Grenzen zwischen Realität und Modellebene« (Krüger et al., 2015, S. 219 f.).

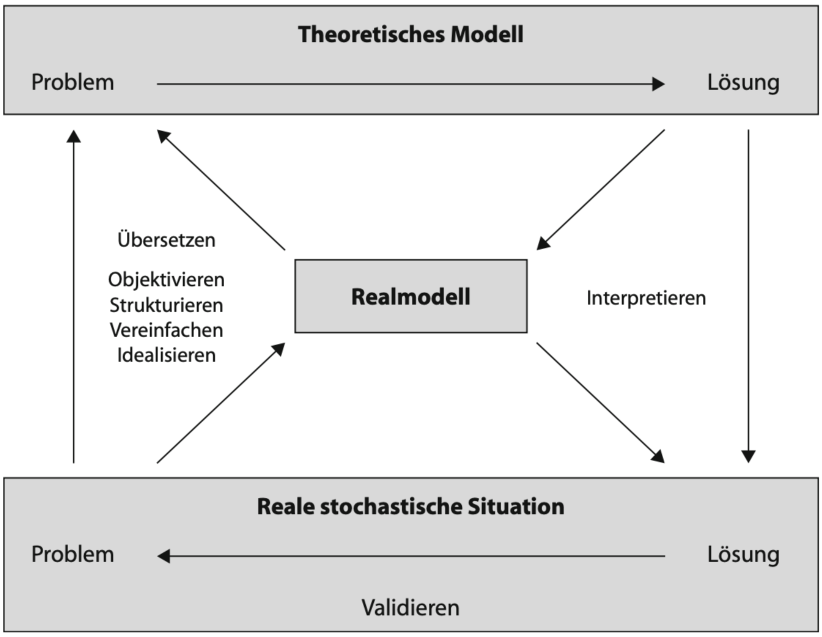


Abbildung 14.3: Modellierungsstruktur in der Stochastik (Krüger et al., 2015, S. 13)

Aufbauend auf diese Struktur (die »nicht als expliziter Gegenstand des Stochastikunterrichts aufzufassen« ist, Krüger et al., 2015, S. 13) können Sie Ihre Diskussionen im Unterricht leiten und Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler besser einordnen, z. B.:

- Wenn ein Würfel geworfen wird (reale Situation) und man die Wahrscheinlichkeit für eine Augenzahl angibt (theoretisches Modell), geht man davon aus, dass der Würfel aus sechs identischen Seiten besteht und in sich homogen ist (Realmodell). Mögliche Fragen, die auf eine solche Denkweise hinarbeiten, könnten sein: *Welche Annahmen triffst du? Welche Eigenschaften muss der Würfel haben, damit du so rechnen darfst?*
- Wenn erstmals *Zufallsgeräte* (übrigens auch ein Begriff auf der Ebene der Realmodelle) genutzt werden, muss eine Untergeneralisierung vermieden werden, es sollten also

frühzeitig auch nicht-Laplace-Geräte eingesetzt werden, wie Reißzwecken, Quader, sogenannte Riemer-Würfel (Riemer, 1988) oder auch *Würfel-Schweine* (Wikipedia, o. J.).

- Wenn eine Schülerin oder ein Schüler nicht in der Lage ist, für das Ziehen einer Herz-Karte aus einem Skatblatt die Wahrscheinlichkeit anzugeben, sollten Sie als Lehrkraft herausfinden, auf welcher Ebene Schwierigkeiten bestehen. Wird die reale Situation nicht verstanden (weil z. B. die Spielkartenfarben oder der Begriff *Skatblatt* unbekannt sind)? Bestehen Schwierigkeiten im Aufstellen eines Realmodells (dass also das Ziehen jeder Karte mit derselben Wahrscheinlichkeit verbunden ist und dafür die Anzahl der relevanten Karten bestimmt werden muss)? Oder sind Defizite in der Theorie verortet (weil etwa nicht die Laplace-Formel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit angewandt werden kann oder gar Schwierigkeiten bei der Division bestehen)?

14.2.3 Prozessbetrachtung

Zur Unterstützung der Schülerinnen und Schüler in der Beschreibung stochastischer Vorgänge schlagen Krüger et al. (2015, S. 14 f.) die Nutzung einer **Prozessbetrachtung** vor (siehe Abbildung 14.4).

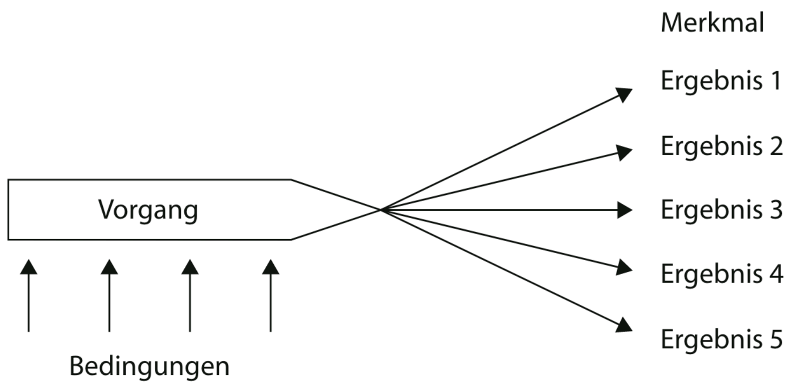


Abbildung 14.4: Vorgangsbetrachtung nach Krüger et al. (2015, S. 16)

Es handelt sich hierbei um eine schematische Darstellung, wobei vier wesentliche Fragen relevant sind (Krüger et al., 2015, S. 15):

1. »Welcher Vorgang läuft mit welchen Objekten oder Personen ab?«
2. »Welches Merkmal interessiert mich? Wie kann ich das Merkmal erfassen?«
3. »Welche Ergebnisse sind möglich?«
4. »Welche Bedingungen beeinflussen den Vorgang?«

Das Schema kann im tätigkeitstheoretischen Sinne als *Lernmodell* aufgefasst werden, da es die Struktur des stochastischen Vorgangs darstellt und den Weg zur Struktur sichtbar macht. Ein solches Vorgehen ist dabei sowohl für Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung als auch für die Beschreibung von Statistiken möglich, womit auch beides als Teildisziplinen der Stochastik sichtbar werden kann. Abbildung 14.5 zeigt exemplarisch zwei derartige Prozessbetrachtungen.

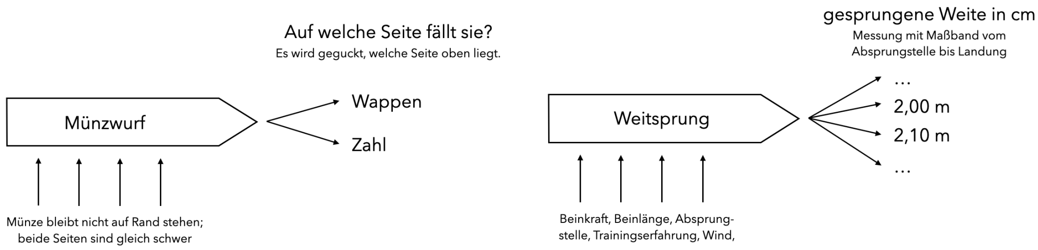


Abbildung 14.5: Prozessbetrachtungen für zwei stochastische Vorgänge

14.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bei der Betrachtung von Situationen, in denen bedingte Wahrscheinlichkeiten eine Rolle spielen, haben Schülerinnen und Schüler (und nicht nur die) oftmals die Schwierigkeit, die verschiedenen Bedingungen auseinanderzuhalten, weshalb fehlerhafte Schlüsse gezogen werden (vgl. Binder et al., 2020).

Ist beispielsweise bekannt, dass ein Corona-Test mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit eine Person, die an Corona erkrankt ist, auch positiv testet und mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit eine Person, die nicht an Corona erkrankt ist, auch negativ testet, so stellt sich die Frage, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass man tatsächlich an Corona erkrankt ist, wenn der Test positiv ausfällt. Um diese Frage zu beantworten, ist es weiterhin noch nötig zu wissen (oder zu schätzen), wie hoch der Anteil tatsöchlich erkrankter Personen in der Gesamtbevölkerung ist. Geht man von einem Anteil von 1% aus, so stellt Abbildung 14.6 eine (nicht maßstäbliche) Vierfeldertafel dieser Situationen dar.

Es sind demnach bekannt:

$$P(C) = 0{,}01 \text{ (Prävalenz)} \tag{14.1}$$

$$P_C(T) = 0{,}95 \text{ (Sensitivität)} \tag{14.2}$$

$$P_{\neg C}(\neg T) = 0{,}99 \text{ (Spezifität)} \tag{14.3}$$

Grundsätzlich gilt als Definition für bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

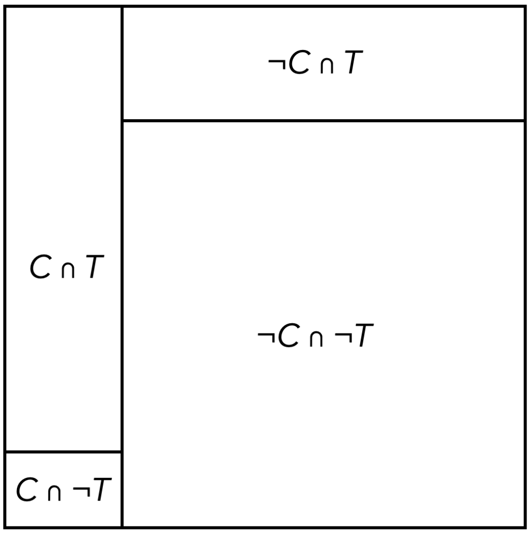


Abbildung 14.6: Vierfeldertafel für bedingte Wahrscheinlichkeiten

Nach dem Satz von Bayes und dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\neg A) \cdot P_{\neg A}(B)}$$

Hieran zeigt sich schon, dass Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten haben könnten, wenn sie nicht die hinter den Formeln liegenden Vorstellungen entwickeln, welche Wahrscheinlichkeiten jeweils aufeinander Bezug genommen werden. Geeignete Repräsentationen sollen nun helfen, die Zusammenhänge nachvollziehen zu können. Die **Vierfeldertafel** aus Abbildung 14.6 ist eine solche. Abbildung 14.7 zeigt, wie die Wahrscheinlichkeiten $P(C)$, $P_C(T)$ und $P_T(C)$ darin jeweils als Anteil einer Teilmengenbeziehung aufgefasst werden können.

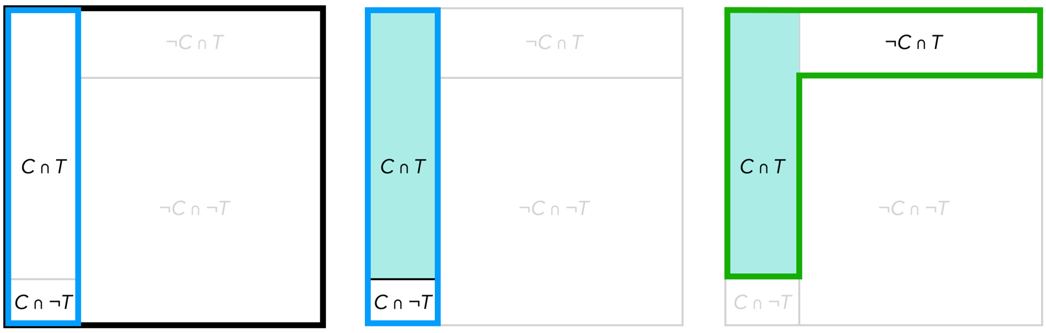


Abbildung 14.7: Vierfeldertafeln zur Visualisierung der Wahrscheinlichkeiten $P(C)$, $P_C(T)$ und $P_T(C)$

Als Repräsentation ebenfalls verbreitet sind sogenannte **Doppelbäume**, siehe Abbildung 14.8. Auch dort kann nachvollzogen werden, welche Beziehung jeweils betrachtet wird.

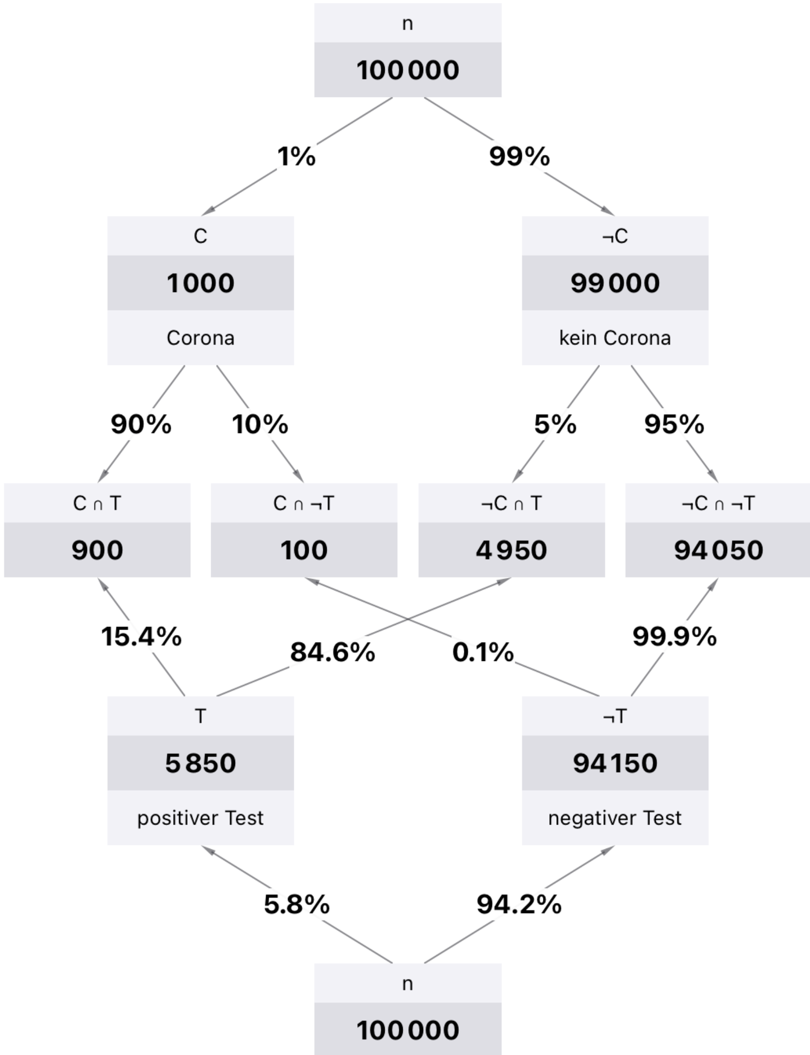


Abbildung 14.8: Doppelbaum für bedingte Wahrscheinlichkeiten

Nach Binder et al. (2020) bietet sich ebenfalls ein **Häufigkeitsnetz** an, siehe Abbildung 14.9. Gegenüber den bisherigen Darstellungen können in diesem auch direkt die Schnittwahrscheinlichkeiten abgelesen werden.

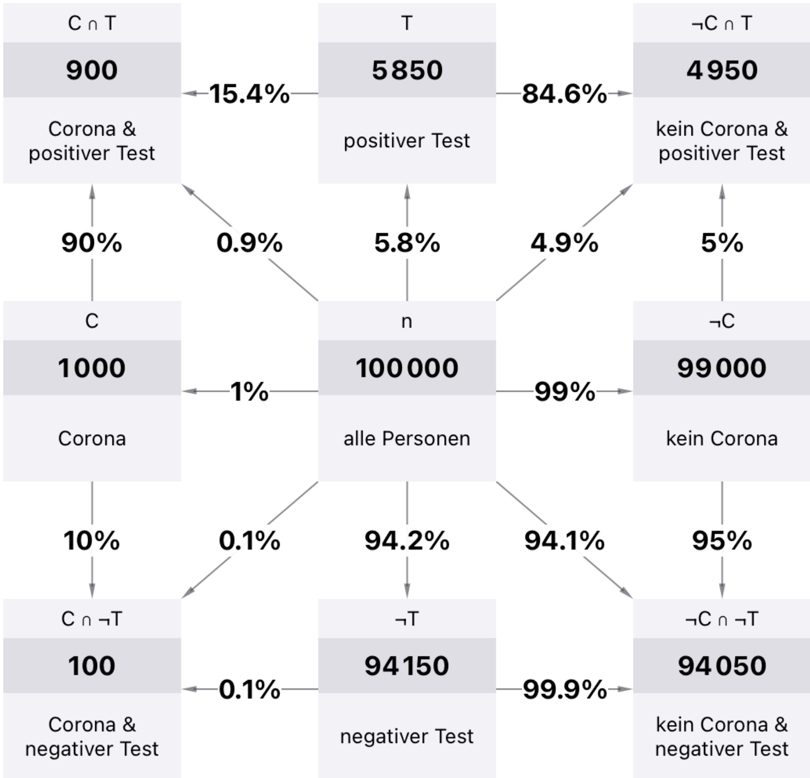


Abbildung 14.9: Häufigkeitsnetz für bedingte Wahrscheinlichkeiten

Als weitere Unterstützungsmöglichkeit, so hat es sich auch in empirischen Studien gezeigt (vgl. Binder et al., 2020), bietet es sich an, mit **absoluten Häufigkeiten statt Wahrscheinlichkeiten** in den Repräsentationen zu arbeiten. Diese bieten Schülerinnen und Schülern eine bessere Zugänglichkeit zur Thematik und über Anteilsbetrachtungen können dann auch die Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden.[1] Als (fiktive) Anzahl für die Grundgesamtheit bietet sich eine hohe Zehnerpotenz an, da so auch noch kleine Anteile mit sinnvollen (ggf. gerundeten) ganzen Zahlen bestimmt werden können.

[1]Mathematisch präzise müsste hier von *relativen Häufigkeiten* anstatt von *Wahrscheinlichkeiten* gesprochen werden.

A Seminar und Hausarbeit

A.1 Hausarbeit

A.1.1 Aufgabenstellung

Erstellen Sie eine **ausführliche stoffdidaktische** Analyse zu einem bestimmten Lerngegenstand. Das heißt konkret:

- Beantworten Sie inhaltlich die Fragen der **formalen, semantischen und konkreten Ebene** des Vier-Ebenen-Ansatzes. Es ist jedoch nicht notwendig, die Fragen einzeln »abzuarbeiten« – vielmehr geht es darum, dass Sie in Ihrer Darstellung deutlich machen, all die verschiedenen Punkte beachtet zu haben. Sie können natürlich auch Schwerpunkte legen und müssen nicht alle Fragen in gleicher Qualität bzw. Quantität beantworten.
- Nutzen Sie für Ihre Analyse **geeignete fachmathematische und fachdidaktische Literatur sowie ggf. auch Schulbücher**. Sie müssen die einzelnen Ebenen nicht zwingend getrennt betrachten, können dies aber, wenn es sich anbietet (z. B. ist es häufig sinnvoll, die konkrete Ebene im Anschluss an die formale und semantische zu betrachten).
- Als Ergebnis der Analyse soll ein möglicher **Lernpfad** stehen, anhand dessen der Lerngegenstand im Unterricht behandelt werden kann. Es ist also insbesondere auch möglich, einen bereits existierenden Lernpfad (z. B. aus einem Schulbuch oder einer fachdidaktischen Literatur) zu nutzen und diesen mittels der stoffdidaktischen Analyse zu begründen (bzw. ggf. Änderungen vorzuschlagen).
- Gehen Sie im Rahmen Ihrer Entwicklung des Lernpfades auf **einen der folgenden Punkte** besonders ein (wenden Sie also die in der Vorlesung vermittelte Theorie auf Ihren Lerngegenstand an):

  - Analyse des Lerngegenstands auf der empirischen Ebene
  - Psychologische Grundlagen zur Vermittlung des Lerngegenstands
  - Nutzung von Arbeitsmitteln
  - Gestaltung von Aufgaben

  Es ist auch möglich, einen anderen Schwerpunkt zu wählen (z. B. angelehnt an die Inhalte der Einführung in die Mathematikdidaktik). Sprechen Sie diesen aber bitte im Vorfeld mit der prüfenden Person ab.

A.1.2 Bewertungskriterien

Ausreichende Leistung (4,0): Die Analyse der formalen, semantischen und konkreten Ebene ist erkennbar und fachlich im Wesentlichen korrekt. Es wird geeignete Literatur verwendet. Einer der Schwerpunkte wird aufgegriffen.

Befriedigende Leistung (3,0): Zusätzlich: Die Analyse auf der formalen, semantischen und konkreten Ebene wird vollständig durchgeführt. Die Literatur wird korrekt und einheitlich zitiert. Der Schwerpunkt wird ausführlich am gewählten Lerngegenstand dargestellt.

Gute Leistung (2,0): Zusätzlich: Die Analyse wird sprachlich überzeugend dargestellt und es wird sinnvoll logisch argumentiert. Inhaltlich werden geeignete Querbezüge hergestellt, z. B. zu anderen Lerngegenständen, fachmathematischen Inhalten bzw. zu weiteren (fach-)didaktischen, pädagogischen oder lernpsychologischen Theorien.

Sehr gute Leistung (1,0): Die Arbeit übertrifft bei Weitem die vorherigen Anforderungen, z. B. wird auf mehrere Schwerpunkte eingegangen oder es wird anderweitig eine besonders kreative Leistung sichtbar.

Entsprechende Abstufungen (+/− 0,3) sind möglich.

A.1.3 Formale Hinweise

- Die Hausarbeit soll **6 bis 8 Textseiten** beinhalten (ohne Deckblatt, Inhaltsverzeichnis, Literaturverzeichnis, Anhang, …), wobei natürlich geeignete Abbildungen in den 6 bis 8 Seiten enthalten sein können.
- Es ist angedacht, die Hausarbeit **im Nachgang den anderen Studierenden zur Verfügung zu stellen** – gern auch im Anschluss an eine freiwillige Überarbeitung nach erhaltenen Rückmeldungen. Für die weitere Verwendung Ihrer Arbeit beachten Sie bitte:
  - Nummerieren Sie Ihre Seiten durch, so dass die auf dem Blatt stehende Seitenzahl auch der Seitenzahl der pdf-Datei entspricht.
  - Verzichten Sie auf Leerseiten.
  - Auf dem Deckblatt der Arbeit sollte Ihr Name, das Thema und Abgabedatum stehen, nicht jedoch Ihre Matrikelnummer, Adresse oder andere persönliche Daten (siehe Beispiel in Abbildung A.1).

A.2 Themenauswahl

Die möglichen Lerngegenstände ergeben sich aus den Beschreibungen der inhaltsbezogenen Komptenzen (Leitideen) in den Bildungsstandards für die Sekundarstufen (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2012, 2022a). Sie könnnen die möglichen Lerngegenstände den Kapiteln 10 bis 14 entnehmen.

Abbildung A.1: Beispielhaftes Deckblatt für Hausarbeit

Die konkrete Themenwahl erfolgt in der letzten Vorlesungsveranstaltung. Individuelle Themen sind nach Rücksprache möglich.

A.3 Seminarvortrag

Stellen Sie in einer **ansprechenden Seminarsitzung** einen **Lernpfad zu Ihrem gewählten Lerngegenstand** vor, den Sie später in Ihrer Hausarbeit bearbeiten.

- Planen Sie etwa **30 bis 45 Minuten** ein – je nachdem, wie viele interaktive Elemente Sie mit Ihren Kommiliton/-innen einsetzen. Im Anschluss sollte auf jeden Fall noch Raum für Rückfragen bestehen. Pro Thema stehen insgesamt 60 Minuten zur Verfügung.
- Ihre Seminarsitzung soll **Lust darauf machen**, das jeweilige Thema zu unterrichten. Dabei muss sichtbar werden, dass Sie den **Lernpfad fachlich und fachdidaktisch professionell begründen** können, also auf formaler, semantischer und konkreter Ebene einer stoffdidaktischen Analyse einordnen können.
- Es ist nicht zwingend nötig, eine vollständige und strukturierte stoffdidaktische Analyse zu präsentieren (das machen Sie ja in der Hausarbeit), aber Sie sollten Klarheit über die einzelnen Bestandteile haben, um auch **souverän auf Rückfragen reagieren** zu können.
- Der Seminarvortrag ist eine **Prüfungsnebenleistung**, das heißt, er ist zwar unbenotet, aber muss eine entsprechende Qualität aufweisen, um als *bestanden* zu gelten. Er hat nicht die Aufgabe, Sie final zu prüfen, sondern soll vielmehr zur gemeinsamen Diskussion anzuregen. Mithilfe der Diskussion erhalten Sie auch vielfältige Rückmeldungen, die Sie in Ihre Hausarbeit einarbeiten können.

A.4 Quellenarbeit

Um Ihre Recherche nach geeigneter fachdidaktischer Literatur zu unterstützen, sollen an dieser Stelle noch einige Hinweise zur Quellenarbeit gegeben werden.

- Auf der Webseite https://juergen-roth.de/zeitschriften/ finden Sie eine Übersicht über **mathematikdidaktische Zeitschriften**. Als besonders geeignet für unterrichtspraktische und zugleich theoretisch fundierte Ideen soll die Zeitschrift ***mathematik lehren*** empfohlen werden. Einen Themenüberblick bietet die Seite https://juergen-roth.de/zeitschriften/mathematik-lehren/, die Universitätsbibliothek Potsdam (https://opac.ub.uni-potsdam.de) verfügt über nahezu alle Ausgaben.[1]
- Über die Webseite https://eldorado.tu-dortmund.de gelangen Sie an die ***Beiträge zum Mathematikunterricht*** (BzMU). Dies sind Sammelbände, die jährlich zur Tagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) herausgegeben werden, bei der sich

[1] Bei der Suche nach dem Standort der Zeitschrift sollten Sie in der Recherche nach Zeitschriften filtern.

nahezu die komplette mathematikdidaktische Community im deutschsprachigen Raum trifft. Die Beiträge haben i. d. R. nur eine Länge von vier Seiten und geben einen kurzen Überblick über aktuelle Forschungsthemen. Am sinnvollsten erscheint eine Stichwortsuche über die Webseite. Die Beiträge selbst durchlaufen jedoch keinen *Review-Prozess*, es kann also nicht per se eine Aussage über deren Qualität getroffen werden.

- Aus dem universitätsinternen Netz bietet https://link.springer.com eine große Auswahl an **Monographien und Zeitschriften**. Einige der bei https://juergen-roth.de/zeitschriften/ dargestellten Zeitschriften werden über Springer vertrieben.
- Über die Seite https://www.fachportal-paedagogik.de können Sie zu den von Ihnen präferierten Stichworten Beiträge finden, die dort auch kurz zusammengefasst werden. Dies ist inbesondere für kurze **Überblicksrecherchen** sinnvoll. Die Verfügbarkeit der entsprechenden Beiträge wird dann über das Fachportal dargestellt.
- Inbesondere **digital zugängliche Publikationen** lassen sich über die Webseite https://www.base-search.net recherchieren. Eine ähnliche Funktionalität, aber eher international orientiert, bietet die Seite https://eric.ed.gov.

B Vollständiges Literaturverzeichnis

Adam, V., & Kleine, M. (2016). *Mathe.delta: Mathematik für das Gymnasium 8, Berlin/Brandenburg*. C.C.Buchner.

Barzel, B., & Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen verstehen. *mathematik lehren*, *169*, 2–7.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2012a). *Mathewerkstatt. 5, Handreichungen* [DVD]. Cornelsen.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2012b). *Mathewerkstatt. 5, Materialblock* (Mittlerer Schulabschluss, allgemeine Ausg., 1. Aufl.). Cornelsen.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2012c). *Mathewerkstatt. 5, Schulbuch* (Mittlerer Schulabschluss, allgemeine Ausg., 1. Aufl.). Cornelsen.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2016). *Mathewerkstatt. 9, Schulbuch* (Mittlerer Schulabschluss, allgemeine Ausg., 1. Aufl.). Cornelsen.

Binder, K., Krauss, S., & Wiesner, P. (2020). A New Visualization for Probabilistic Situations Containing Two Binary Events: The Frequency Net. *Frontiers in Psychology*, *11*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00750

Böer, H., Göckel, D., Kliemann, S., Koepsell, A., Puscher, R., Schmidt, W., & Vernay, R. (2014). *Mathe live. 8, Schülerbuch* (1. Aufl.). Klett.

Brückler, F. M. (2018). *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-55574-3

Bruder, R. (o. J.). *Eine akzentuierte Aufgabenauswahl und Vermitteln heuristischer Erfahrung – Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle*. Abgerufen 2. Januar 2022, von http://www.math-learning.com/files/extremal.pdf

Bruder, R. (1991). Unterrichtssituationen – ein Modell für die Aus- und Weiterbildung zur Gestaltung von Mathematikunterricht. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Potsdam*, *35*(2), 129–134.

Bruder, R. (2001). Mathematik lernen und behalten. *Pädagogik (Weinheim)*, *53*(10), 15–18.

Bruder, R. (2012). Vielseitig mit Aufgaben arbeiten – Mathematische Kompetenzen nachhaltig entwickeln und sichern. In R. Bruder, T. Leuders, & A. Büchter (Hrsg.), *Mathematikunterricht entwickeln* (S. 18–52). Cornelsen Scriptor.

Bruder, R. (im druck). Orientierungsgrundlagen der Lerntätigkeit nach Lompscher – Potenziale und Einordnung eines theoretischen Konzepts. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022*.

Bruder, R., & Brückner, A. (1989). Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht – ein allgemeiner Ansatz. *Pädagogische Forschung. Wissenschaftliche Nachrichten*, *30*(6), 72–82.

Bruder, R., Linneweber-Lammerskitten, H., & Reibold, J. (2015). Individualisieren und differenzieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 513–534). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8_19

Bruner, J. S. (1976). Die Bedeutung der Struktur im Lernprozeß. In A. Holtmann (Hrsg.), *Das sozialwissenschaftliche Curriculum in der Schule: Neue Formen und Inhalte* (S. 77–90). VS Verlag für Sozialwissenschaften. https://doi.org/10.1007/978-3-322-85275-5

Büchter, A., & Holzäpfel, L. (Hrsg.). (2018). *mathematik lehren 210: Messen*. Friedrich Verlag.

Bundesministerium für Ernährung und Landwirtschaft. (2014). *Gutachten über Mindestanforderungen an die Haltung von Säugetieren*. https://www.bmel.de/SharedDocs/Downloads/DE/_Tiere/Tierschutz/HaltungSaeugetiere.pdf;jsessionid=6B0914AB410E7E118E6CC87C65735734.live832?__blob=publicationFile&v=7

Danckwerts, R. (1988). Linearität als organisierendes Element zentraler Inhalte der Schulmathematik. *Didaktik der Mathematik*, *16*(2), 149–160.

Danckwerts, R., & Vogel, D. (2010). *Analysis verständlich unterrichten* (1. Aufl., 2. Nachdruck). Spektrum Akad. Verl.

Dohrmann, C. (2018). Herausforderungen bei der Winkelmessung. *mathematik lehren*, *210*, 20–23.

Dohrmann, C., & Etzold, H. (2018). Tätigkeitstheoretische Begriffsbildung – ACAT-basierte Entwicklung von Material am Beispiel des Winkelfeldes. In F. D. der M. der U. Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Vorträge zur Mathematikdidaktik und zur Schnittstelle Mathematik/Mathematikdidaktik auf der gemeinsamen Jahrestagung GDM und DMV 2018 (52. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik)* (S. 449–452). WTM-Verlag. https://doi.org/10.17877/DE290R-19296

Dohrmann, C., & Kuzle, A. (2014). Auf der Suche nach Grundvorstellungen zum Winkel. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 301–304). WTM. https://doi.org/10.17877/DE290R-15897

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 213–234. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5

Drüke-Noe, C. (2018). Einfach – mittel – schwierig ... Wenn das so einfach wäre: Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades entwickeln. *mathematik lehren*, *209*, 9–12.

Etzold, H. (2019a). *Winkel-Farm* (Version 2) [App]. https://apps.apple.com/de/app/winkel-farm/id1369585218

Etzold, H. (2019b). *Winkel-Farm – Leitfaden für Lehrerinnen und Lehrer* (Version 2). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.4747700

Etzold, H. (2020). *Klipp Klapp* [App]. https://apps.apple.com/de/app/klipp-klapp/id1157365733

Etzold, H. (2021). *Neue Zugänge zum Winkelbegriff* [Dissertation, Universität Potsdam]. https://doi.org/10.25932/publishup-50418

Etzold, H., Kortenkamp, U., & Ladel, S. (2018). ACAT-Review-Guide – Ein tätigkeitstheoretischer Blick auf die Beurteilung von Mathematik-Apps. In S. Ladel, U. Kortenkamp, & H. Etzold (Hrsg.), *Mathematik mit digitalen Medien – konkret* (S. 91–98). WTM-Verlag. https://doi.org/10.37626/GA9783959870788.0.07

Etzold, H., & Petzschler, I. (2014). *Mathe verstehen durch Papierfalten*. Verlag an der Ruhr.

Fabian, M. (2022). Minusgrade, Schulden, Tauchtiefen – Spezifizierung von Sprachmitteln zur Einführung negativer Zahlen. *Journal für Mathematik-Didaktik*. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00208-8

Feldt-Caesar, N. (2017). *Konzeptualisierung und Diagnose von mathematischem Grundwissen und Grundkönnen*. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-17373-9

Filler, A. (2011). *Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung Didaktik der Elementargeometrie*. didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/did_elemgeo-skript.pdf

Föckler, F., Leuders, T., & Holzäpfel, L. (2018). Die selbstdifferenzierende Aufgabe als Form der Differenzierung im Mathematikunterricht. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 541–544). WTM. https://doi.org/10.17877/DE290R-19327

Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie. In der Grundschule* (3. Aufl.). Springer Spektrum.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 2). Klett.

Freudenthal, H. (1989). Einführung der negativen Zahlen nach dem geometrisch-algebraischen Permanenzprinzip. *mathematik lehren*, *35*, 27–37.

Giest, H. (2016). Kulturhistorische Didaktik und Bildungstheorie. *Tätigkeitstheorie. Journal für tätigkeitstheoretische Forschung in Deutschland*, *14*, 24–48. http://www.ich-sciences.de/media/journal/Ausgabe_14/heft_14.pdf

Giest, H., & Lompscher, J. (2004). Tätigkeitstheoretische Überlegungen zu einer neuen Lernkultur. *Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät*, *72*, 101–123. https://leibnizsozietaet.de/wp-content/uploads/2012/11/07_giest.pdf

Giest, H., & Lompscher, J. (2006). *Lerntätigkeit – Lernen aus kultur-historischer Perspektive. Ein Beitrag zur Entwicklung einer neuen Lernkultur im Unterricht*. Lehmanns Media.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; 4. Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Hattermann, M., Hofe, R. vom, & Viehmeister, F. (2014). Rote Karte? Ich hab' grün! Ein Spiel zur Addition und Subtraktion ganzer Zahlen. *mathematik lehren*, *183*, 15–19.

Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Subject-matter didactics in German traditions: Early historical developments. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 11–31. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0103-7

Henn, H.-W., & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden*. Springer Spektrum.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 33–67. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8

Hußmann, S., Rezat, S., & Sträßer, R. (2016). Subject Matter Didactics in Mathematics Education. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 1–9. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0105-5

Hußmann, S., & Schindler, M. (2014). En Kontext für negative Zahlen – auch für die Multiplikation. *mathematik lehren*, *183*, 28–32.

Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen. (2019). *Gemeinsame Aufgabenpools der*

Länder. Aufgaben für das Fach Mathematik. Grundstock von Operatoren. https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/abitur/dokumente/mathematik/M_Grundstock_von.pdf

Jahnke, T. (2010). Vom mählichen Verschwinden des Fachs aus der Mathematikdidaktik. *GDM-Mitteilungen 89*, 21–24. https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/559/550

Kleine, M., & Ludwig, M. (Hrsg.). (2011). *Mathe.Logo. 7, Gymnasium Thüringen, Schülerband* (1. Aufl.). C.C.Buchner.

Korn, M.-L. (2023). *Kognitive Aktivierung mit digitalen Medien im Mathematikunterricht. Ein Beispiel einer digitalen Lernumgebung zum Thema Boxplots* [Unveröffentlichte Masterarbeit]. Universität Potsdam.

Kortenkamp, U., Etzold, H., Goral, J., Schmidt, A., & Börrnert, M. (2018). *Digitale Stellenwerttafel – Leitfaden für Lehrerinnen und Lehrer (Version 5).* Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.4761419

Kortenkamp, U., Etzold, H., & Ladel, S. (2019). *Leitfaden zur Beurteilung von Apps.* Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.5091906

Kortenkamp, U., & Kuzle, A. (o. J.-a). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht – Leitidee „Daten und Zufall". Didaktischer Kommentar.* Abgerufen 25. Januar 2022, von https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/faecher/naturwissenschaften/mathematik/Materialien_zur_Diagnose_und_Foerderung_im_Mathematikunterricht/Daten_und_Zufall/059_Daten_und_Zufall_didaktischer_Kommentar_181019.pdf

Kortenkamp, U., & Kuzle, A. (o. J.-b). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht – Leitidee „Gleichungen und Funktionen". Didaktischer Kommentar.* Abgerufen 25. Januar 2022, von https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/rlp-online/Teil_C/Mathematik/Materialien/Materialien_zum_Themenfeld_Gleichungen_und_Funktionen/008_L4_Didaktischer_Text.pdf

Kortenkamp, U., & Kuzle, A. (o. J.-c). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht – Leitidee „Größen und Messen". Didaktischer Kommentar.* Abgerufen 18. Februar 2022, von https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/faecher/naturwissenschaften/mathematik/Materialien_zur_Diagnose_und_Foerderung_im_Mathematikunterricht/Groessen_und_Messen/008_Gri_en_und_Messen_didaktischer_Text_181019.pdf

Krainer, K. (1989). *Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs* [Dissertation]. Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2010). *Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule.* IPN. http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Krauthausen-Scherer.pdf

Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I.* Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3

Kuntze, S. (2018). Flächeninhalt und Volumen. In *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe*

I (S. 149–177). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8_7
Kuzle, A. (o. J.). *Theoretischer Hintergrund zum Problemlösen.* Abgerufen 9. Januar 2022, von https://proffi-m.de/theorie
Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2013). An Activity-Theoretic Approach to Multi-Touch Tools in Early Mathematics Learning. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, *1*(20), 3–8. https://www.researchgate.net/publication/261823263_An_activity-theoretic_approach_to_multi-touch_tools_in_early_maths_learning
Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien. 5, Schülerbuch (Sachsen, 1. Aufl.). (2010). [Computer software]. Klett.
Lambert, A. (2012). *Gedanken zum aktuellen Kompetenzbegriff für den (Mathematik-)unterricht* [Vortrag]. Eingangsstatement zur Podiumsdiskussion im Rahmen des 3. Fachdidaktischen Kolloquiums an der Universität des Saarlandes, Saarbrücken. https://www.uni-saarland.de/fileadmin/upload/einrichtung/zfl/PDF_Fachdidaktik/PDF_Kolloquium_FD/Kompetenzbegriff_für_den_Mathematikunterricht_Statement_mit_Folien.pdf
Larkin, K., Kortenkamp, U., Ladel, S., & Etzold, H. (2019). Using the ACAT Framework to Evaluate the Design of Two Geometry Apps: an Exploratory Study. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *5*(1), 59–92. https://doi.org/10.1007/s40751-018-0045-4
Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 130–143). Cornelsen. https://home.ph-freiburg.de/leudersfr/preprint/2009_leuders_intelligent_ueben_mathemagische_momente.pdf
Leuders, T. (2015). Aufgaben in Forschung und Praxis. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 435–460). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8
Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B., & Prediger, S. (2011). Das macht Sinn! Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *53*(37), 2–9. https://www.researchgate.net/publication/233978329
Leuders, T., Prediger, S., Barzel, B., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2015). *Mathewerkstatt. 7, Schulbuch* (Mittlerer Schulabschluss, allgemeine Ausg., 1. Aufl.). Cornelsen.
LISUM. (o. J.-a). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht – Leitidee „Daten und Zufall“.* Abgerufen 25. Januar 2022, von https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/unterricht/faecher/mathematik-naturwissenschaften/mathematik/unterrichtsmaterialien-und-fachthemen/1-materialien-zu-den-themen-des-rlp-1-10/sekundarstufe-i/materialien-zur-diagnose-und-foerderung-im-mathematikunterricht/themenfeld-5-daten-und-zufall
LISUM. (o. J.-b). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht – Leitidee „Daten und Zufall“. Inhaltliches Konzeptbild.* Abgerufen 25. Januar 2022, von https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/faecher/naturwissenschaften/mathematik/Materialien_zur_Diagnose_und_Foerderung_im_Mathematikunterricht/Daten_und_Zufall/060_Konzept_Daten_und_Zufall__180625.pdf
LISUM. (o. J.-c). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht – Leitidee „Gleichungen und Funktionen“.* Abgerufen 25. Januar 2022, von https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/rlp-online/c-faecher/mathematik/materialien/materialien-zur-diagnose-und-foerderung-im-mathematikunterricht-leitidee-gleichungen-und-funktionen

LISUM. (o. J.-d). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht – Leitidee „Gleichungen und Funktionen". Inhaltliches Konzeptbild.* Abgerufen 25. Januar 2022, von https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/rlp-online/Teil_C/Mathematik/Materialien/Materialien_zum_Themenfeld_Gleichungen_und_Funktionen/009_L4_Konzeptbild.pdf

LISUM. (o. J.-e). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht – Leitidee „Größen und Messen".* Abgerufen 18. Februar 2022, von https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/unterricht/faecher/mathematik-naturwissenschaften/mathematik/unterrichtsmaterialien-und-fachthemen/1-materialien-zu-den-themen-des-rlp-1-10/sekundarstufe-i/materialien-zur-diagnose-und-foerderung-im-mathematikunterricht/themenfeld-2-groessen-und-messen

LISUM. (o. J.-f). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht – Leitidee „Größen und Messen". Inhaltliches Konzeptbild.* Abgerufen 18. Februar 2022, von https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/faecher/naturwissenschaften/mathematik/Materialien_zur_Diagnose_und_Foerderung_im_Mathematikunterricht/Groessen_und_Messen/009_Konzeptbild_Gri_en_und_Messen.pdf

LISUM. (o. J.-g). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht – Leitidee „Zahlen und Operationen".* Abgerufen 28. Januar 2022, von https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/rlp-online/c-faecher/mathematik/materialien/materialien-zur-diagnose-und-foerderung-im-mathematikunterricht-leitidee-zahlen-und-operationen

LISUM. (2021). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht – Leitidee „Zahlen und Operationen". Inhaltliches Konzeptbild.* https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/rlp-online/Teil_C/Mathematik/Materialien/Materialien_zum_Themenfeld1_Zahlen_und_Operationen/070_L1_Konzeptbild.pdf

LISUM (Hrsg.). (2022). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht. Raum und Form.* https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/rlp-online/Teil_C/Mathematik/Materialien/Mathe-Ordner_3_-_Gesamtdatei.pdf

Lompscher, J. (1983a). Die Ausbildung von Lernhandlungen. In J. Lompscher (Hrsg.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 53–78). Volk und Wissen.

Lompscher, J. (1983b). Die Lerntätigkeit als dominierende Tätigkeit des jüngeren Schülers. In J. Lompscher (Hrsg.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 23–52). Volk und Wissen.

Lompscher, J. (1996). *Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten - Lernen und Lehren in Zonen der nächsten Entwicklung.* https://publishup.uni-potsdam.de/opus4-ubp/frontdoor/deliver/index/docId/444/file/AUFSTEIG.pdf

Mienert, M., & Pitcher, S. (2011). *Pädagogische Psychologie.* VS Verlag für Sozialwissenschaften. https://doi.org/10.1007/978-3-531-92095-5

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2015a). *Rahmenlehrplan Brandenburg Sek. I. Teil B - Fachübergreifende Kompetenzentwicklung.* https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/Teil_B_2015_11_10_WEB.pdf

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2015b). *Rahmenlehrplan Brandenburg. Teil C, Mathematik, Jahrgangsstufen 1 – 10.* https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanproje

kt/amtliche_Fassung/Teil_C_Mathematik_2015_11_10_WEB.pdf
Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2018). *Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe im Land Brandenburg.*
Mitchelmore, M. (1990). Psychologische und mathematische Schwierigkeiten beim Lernen des Winkelbegriffs. *mathematica didactica*, *13*, 19–37.
Mitchelmore, M., & White, P. (1998). Development of Angle Concepts: A Framework for Research. *Mathematics Education Research Journal*, *10*(3), 4–27.
Padberg, F., & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik: fundiert, vielseitig, praxisnah* (5., überarbeitete Aufl.). Springer Spektrum.
Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52969-0
Prediger, S., Hußmann, S., Leuders, T., & Barzel, B. (2014). Kernprozesse – Ein Modell zur Strukturierung von Unterrichtsdesign und Unterrichtshandeln. In I. Bausch, G. Pinkernell, & O. Schmitt (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung. Festschrift für Regina Bruder* (S. 81–92). WTM. https://www.researchgate.net/publication/261402528_Fachspezifische_Differenzierungsansatze_fur_unterschiedliche_Unterrichtsphasen
Prediger, S., Leuders, T., Barzel, B., & Hussmann, S. (2013). Anknüpfen, Erkunden, Ordnen, Vertiefen. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, 47. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 4.3.2013 bis 8.3.2013 in Münster* (S. 769–772). Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. https://doi.org/10.17877/DE290R-1474
Quarder, J. (2020). *Blütenaufgaben im Mathematikunterricht.* https://www.youtube.com/watch?v=zrEimaARq7w
Reitz-Koncebovski, K., Kortenkamp, U., & Goral, J. (2018). Gestaltungsprinzipien für fachwissenschaftliche Einführungsveranstaltungen. In A. Borowski, A. Ehlert, & H. Prechtl (Hrsg.), *PSI-Potsdam. Ergebnisbericht zu den Aktivitäten im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung (2015-2018)* (S. 175–188). Universitätsverlag Potsdam. https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:kobv:517-opus4-420301
Riemer, W. (1988). *Riemer-Würfel.* Klett. http://www.riemer-koeln.de/mathematik/quader/riemer-wuerfel-klett.pdf
Salle, A., & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik.* https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5
Schecker, H., Wilhelm, T., Hopf, M., & Duit, R. (Hrsg.). (2018). *Schülervorstellungen und Physikunterricht: Ein Lehrbuch für Studium, Referendariat und Unterrichtspraxis.* Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57270-2
Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (2015). Medien. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 461–490). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8_17
Schubert, S., & Schwill, A. (2011). *Didaktik der Informatik* (2. Aufl). Spektrum, Akad. Verl. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2653-6
Schulz, A. (o. J.). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht – Leitidee „Zahlen und Operationen". Didaktischer Kommentar.* Abgerufen 28. Januar 2022, von https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/rlp-online/Teil_C/Mathematik/Ma

terialien/Materialien_zum_Themenfeld1_Zahlen_und_Operationen/069_L1_Didaktischer_Kommentar.pdf

Schulz, A. (2018). Orientierung am Zahlenstrahl – Funktionen und Deutung. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Vorträge auf der 52. Tagung für Didaktik der Mathematik - Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 05.03. bis 09.03.2018 in Paderborn* (S. 1663–1666). WTM-Verlag. https://doi.org/10.17877/DE290R-19688

Schulz, A., & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe: Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-62096-0

Schupp, H. (2016). Gedanken zum „Stoff" und zur „Stoffdidaktik" sowie zu ihrer Bedeutung für die Qualität des Mathematikunterrichts. *Mathematische Semesterberichte*, *63*(1), 69–92. https://doi.org/10.1007/s00591-016-0159-y

Schwill, A. (1994). *Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik*. Herbsttagung des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik, Wolfenbüttel. http://www.informatikdidaktik.de/didaktik/Forschung/Wolfenbuettel94.pdf

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. Luchterhand. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10. 2004*. Luchterhand. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022a). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA). (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022)*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022b). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004, i.d.F. vom 23.06.2022)*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf

Sill, H.-D., & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-59268-7

SINUS Bayern. (o. J.). *Aufgabenkultur*. Abgerufen 2. Januar 2022, von https://www.deltaplus.bayern.de/fileadmin/user_upload/DELTAplus/1_Aufgabenkultur/Aufgabenkultur.pdf

Stein, S. (2018). ACAT-Review zur App „Klipp Klapp". In S. Ladel, U. Kortenkamp, & H. Etzold (Hrsg.), *Mathematik mit digitalen Medien – konkret* (S. 121–128). WTM-Verlag. https://doi.org/10.37626/GA9783959870788.0.10

Steinhöfel, W., Reichold, K., & Frenzel, L. (1988). *Zur Gestaltung typischer Unterrichtssituationen im Mathematikunterricht.* Ministerium für Volksbildung.

Strehl, R. (1983). Anschauliche Vorstellung und mathematische Theorie beim Winkelbegriff. *mathematica didactica*, *6*, 129–146.

Taylor, B. (1715). *Linear perspective.* printed for R. Knaplock at the Bishop's-Head in St. Paul's Church-Yard. https://nl.sub.uni-goettingen.de/id/0590700700

Thiel-Schneider, A. (2018). *Zum Begriff des exponentiellen Wachstums.* Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21895-9

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000a). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis* (2. Aufl.). Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-90568-0

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000b). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra.* Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-86479-6

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2002). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 3: Didaktik der Stochastik.* Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-83144-6

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 9–35. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Vohns, A. (2000). *Das Messen als fundamentale Idee* [1. Staatsexamensarbeit, Universität-Gesamthochschule Siegen]. https://wwwu.aau.at/avohns/pdf/messen.pdf

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Spektrum Akademischer Verlag.

vom Hofe, R. (2014). Primäre und sekundäre Grundvorstellungen. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10.03.2014 bis 14.03.2014 in Koblenz.* WTM. https://doi.org/10.17877/DE290R-8808

vom Hofe, R., & Hattermann, M. (2014). Zugänge zu negativen Zahlen. *mathematik lehren*, 2–7.

von der Bank, M.-C. (2013). Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung. In A. Filler & M. Ludwig (Hrsg.), *Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken* (S. 83–124). Franzbecker. https://www.math.uni-sb.de/service/lehramt/AKGeometrie/AKGeometrie2012.pdf

von der Bank, M.-C. (2016). *Fundamentale Ideen der Mathematik: Weiterentwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung* [Dissertation, Universität des Saarlandes]. https://doi.org/10.22028/D291-26673

Wartha, S., & Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen.* IPN Kiel. http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_WarthaSchulz.pdf

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8

Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-64660-1

Wennekers, U. (Hrsg.). (2016). *Zahlen und Größen 7 - Berlin/Brandenburg*. Cornelsen.

Wikipedia. (o. J.). *Schweinerei (Spiel) — Wikipedia, die freie Enzyklopädie*. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Schweinerei_(Spiel)&oldid=214496187

Wikipedia. (2021a). *Heron-Verfahren — Wikipedia, die freie Enzyklopädie*. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Heron-Verfahren&oldid=216870314

Wikipedia. (2021b). *Peano-Axiome — Wikipedia, die freie Enzyklopädie*. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Peano-Axiome&oldid=216675163

Wikipedia. (2022a). *Formelsatz — Wikipedia, die freie Enzyklopädie*. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Formelsatz&oldid=225284496

Wikipedia. (2022b). *Kerzenuhr — Wikipedia, die freie Enzyklopädie*. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Kerzenuhr&oldid=227115991

Wikipedia. (2022c). *Kultusministerkonferenz — Wikipedia, die freie Enzyklopädie*. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Kultusministerkonferenz&oldid=228417777

Wikipedia contributors. (2021). *Manipulative (mathematics education) — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Manipulative_(mathematics_education)&oldid=1023437370

Wittmann, E. C. (2015). Strukturgenetische didaktische Analysen – empirische Forschung „erster Art“. *mathematica didactica*, 239–255. http://www.mathematica-didactica.com/altejahrgaenge/md_2015/md_2015_Wittmann_Stoffdidaktik.pdf

Wörner, D. (2014). Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff ausbilden – eine exemplarische Studie. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10.03.2014 bis 14.03.2014 in Koblenz* (S. 1327–1330). https://doi.org/10.17877/DE290R-1049

Wygotski, L. (1985). Die instrumentelle Methode in der Psychologie. In J. Lompscher (Hrsg.), *Lew Wygotski. Ausgewählte Schriften. Teil 1: Arbeiten zu theoretischen und methodologischen Problemen der Psychologie* (S. 309–317). Volk und Wissen.

Zech, F. (1998). *Grundkurs Mathematikdidaktik* (9. Aufl.). Beltz Verlag.