

Universität Potsdam – Wintersemester 2025/26

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 2 - (Hoch-)Schulmathematik strukturieren

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 2 - (Hoch-)Schulmathematik strukturieren

- Sie erkennen den Nutzen der **Hochschulmathematik** bei der Entscheidungsfindung zur Spezifizierung und Strukturierung der **Schulmathematik** auf der **formalen Ebene** des Vier-Ebenen-Ansatzes.
- Sie kennen geeignete Quellen zur Beantwortung der Fragen auf der formalen Ebene des Vier-Ebenen-Ansatz
- Sie kennen verschiedene Möglichkeiten, Mathematik zu strukturieren.
- Sie können beschreiben, woher die verschiedenen Strukturierungsmöglichkeiten kommen.

formale Ebene

Spezifizieren

- Welche **Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die **Fachinhalte formal begründet** werden?

Strukturieren

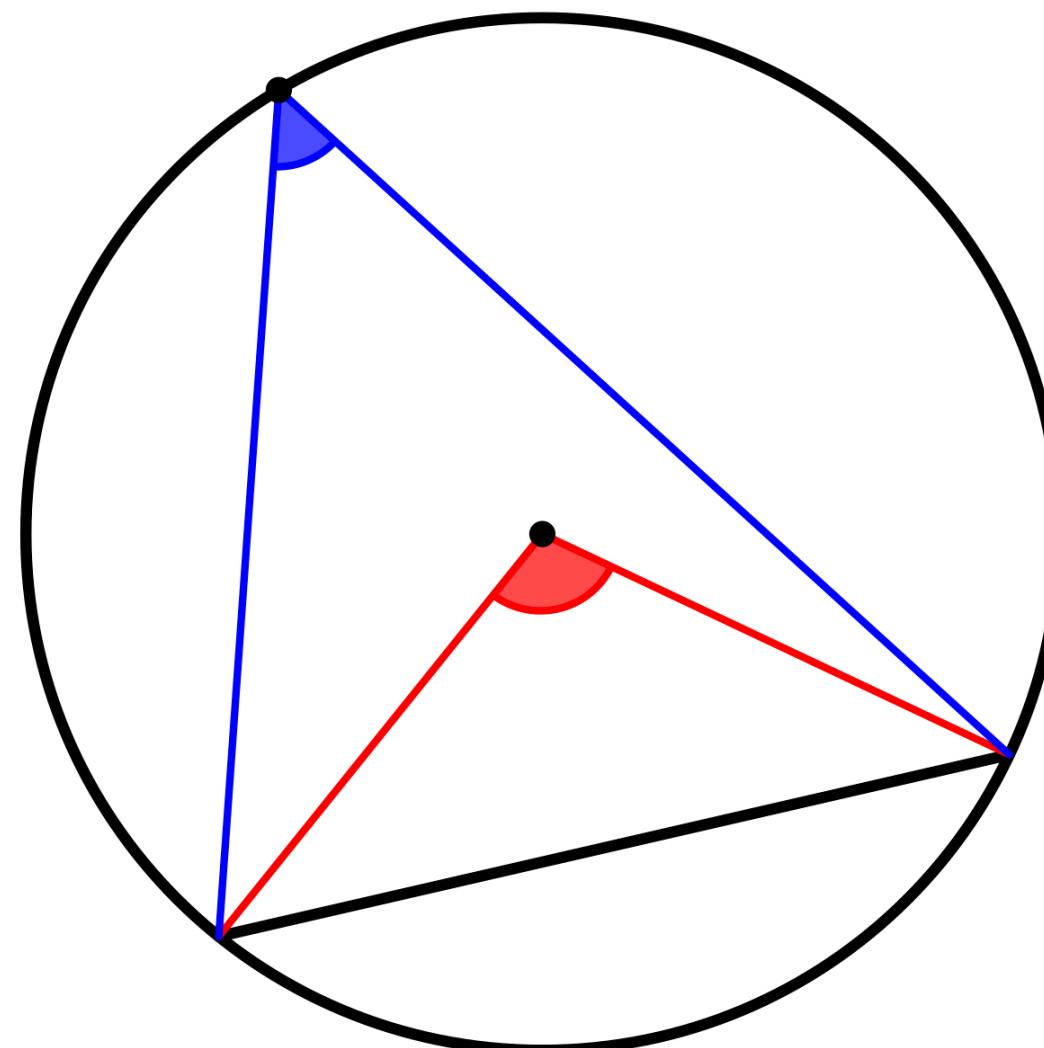
- Wie kann das **Netzwerk** aus den **Fachinhalten logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

(angelehnt an Hußmann & Prediger, 2016)

Sätze am Kreis

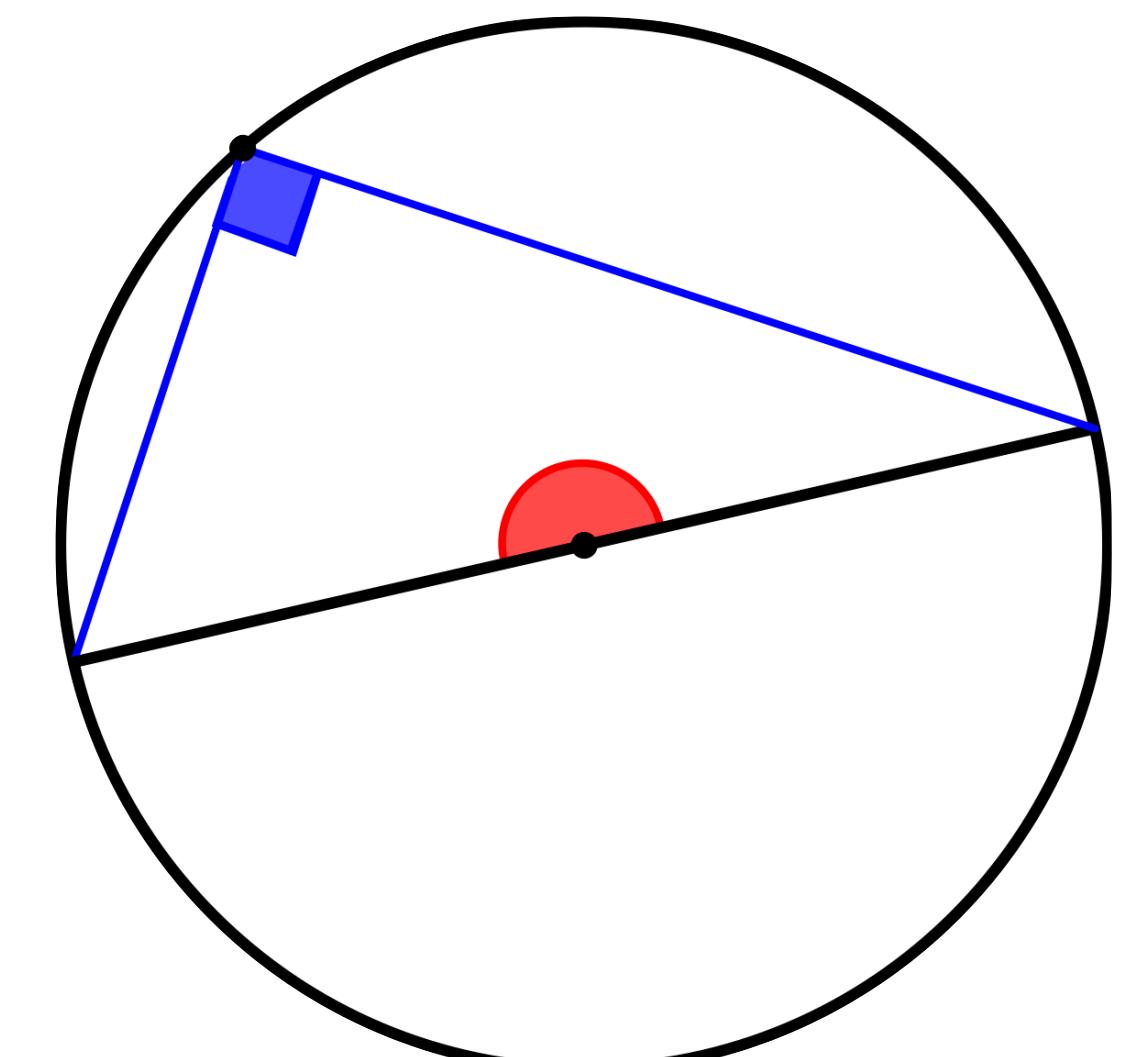
Zentri-Peripheriewinkelsatz

Der **Zentriwinkel** über der **Sehne** eines Kreises ist stets doppelt so groß wie ein **Peripheriewinkel** auf derselben Seite derselben Sehne.



Peripheriewinkelsatz

Alle **Peripheriewinkel** auf derselben Seite über derselben Sehne sind gleich groß.



Satz des Thales

Alle **Peripheriewinkel** über dem **Durchmesser** eines Kreises haben eine Größe von 90° .

und seine Umkehrung

Der Mittelpunkt der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist Mittelpunkt eines Kreises durch alle drei Ecken des Dreiecks.

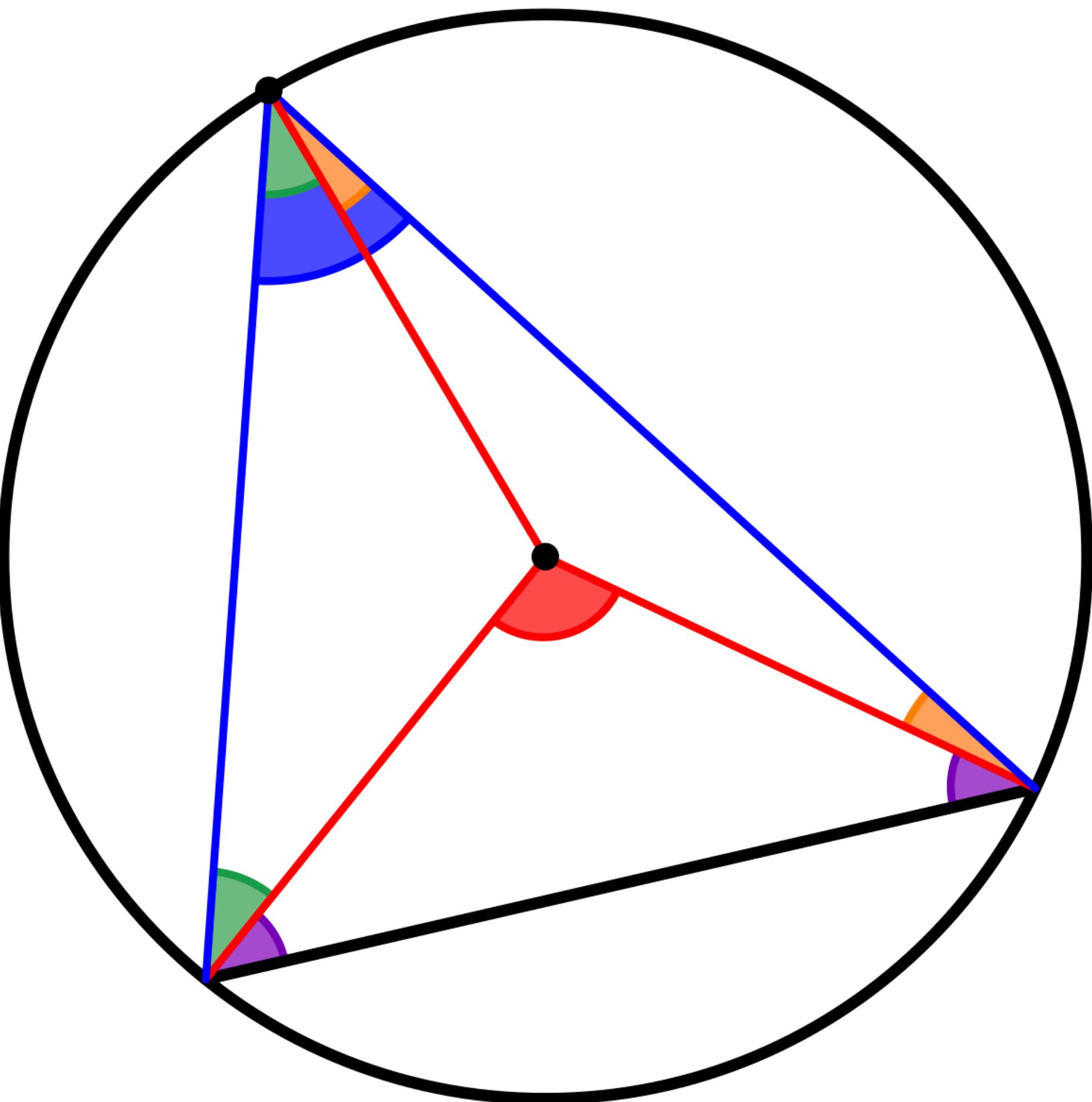
- Welche **Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

Sätze am Kreis

Zentri-Peripheriewinkelsatz

Der **Zentriwinkel** über der **Sehne** eines Kreises ist stets doppelt so groß wie ein **Peripheriewinkel** auf derselben Seite derselben Sehne.

Peripheriewinkelsatz Satz des Thales und seine Umkehrung



- Welche Fachinhalte sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

Sätze am Kreis

Seite-Winkel-Beziehung

Basiswinkelsatz

Innenwinkelsatz

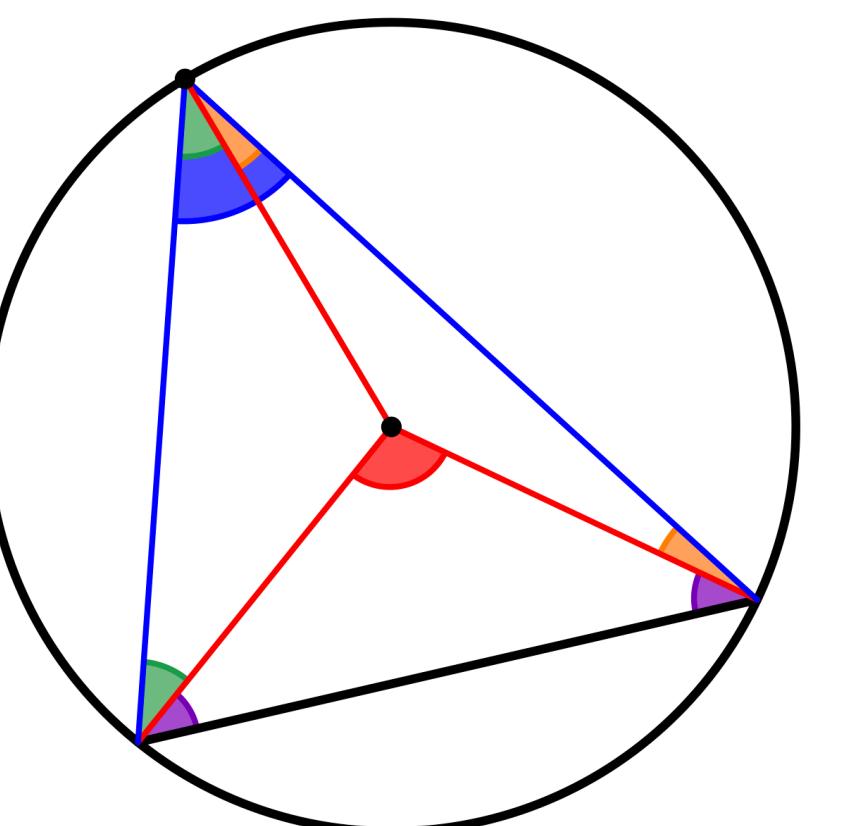
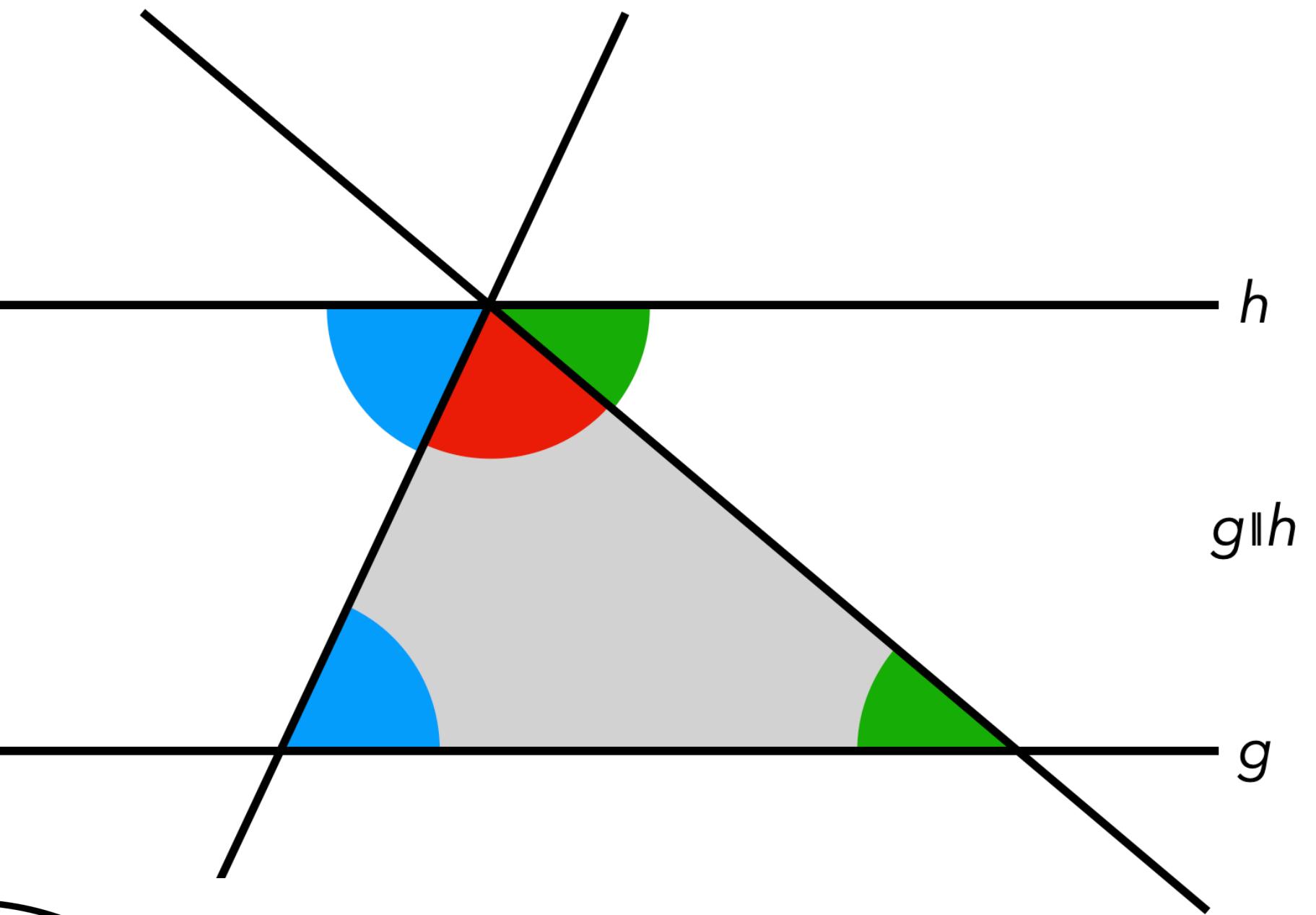
Zentri-Peripheriewinkelsatz

Der **Zentriwinkel** über der **Sehne** eines Kreises ist stets doppelt so groß wie ein **Peripheriewinkel** auf derselben Seite derselben Sehne.

Peripheriewinkelsatz

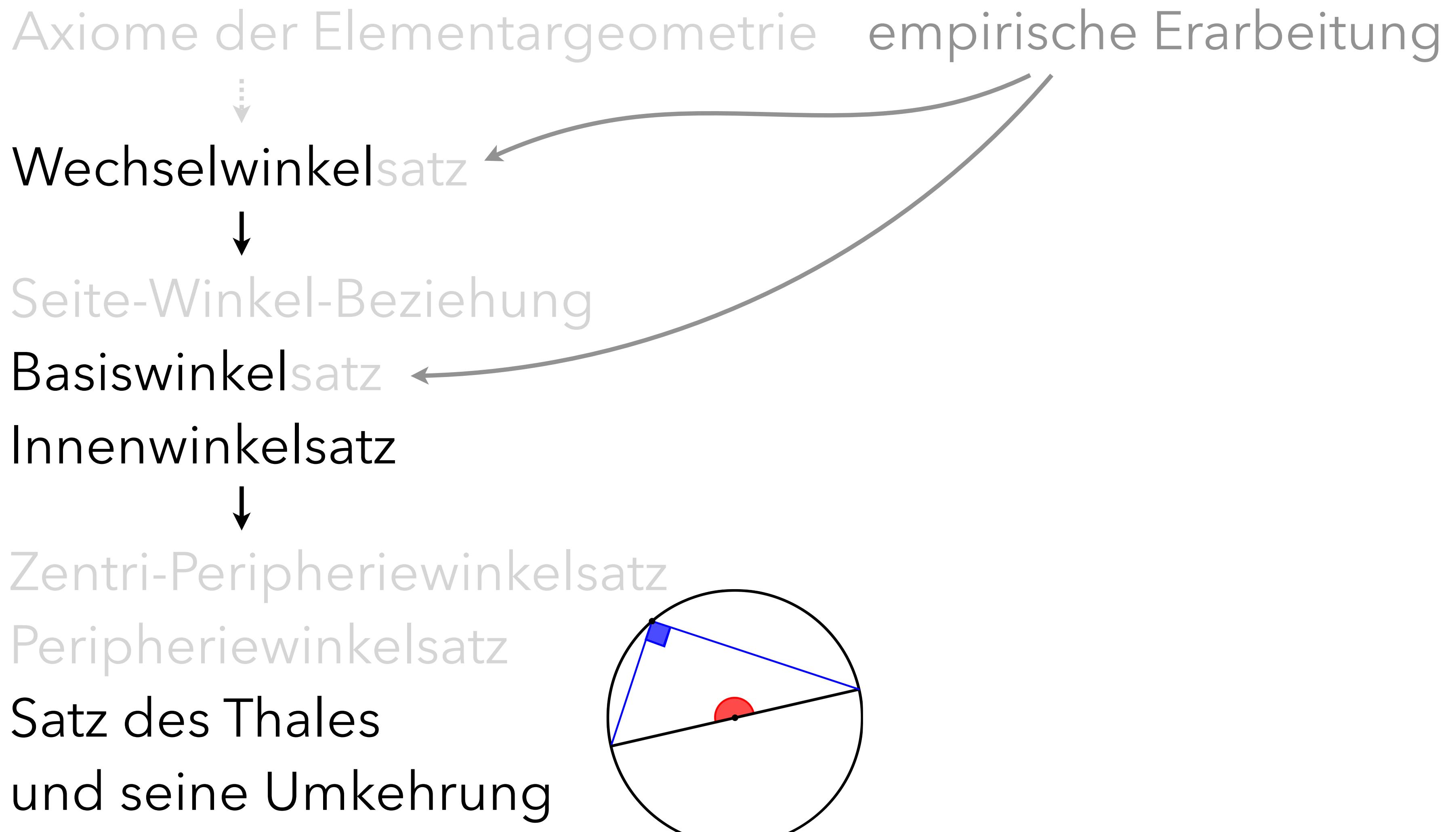
Satz des Thales

und seine Umkehrung



- Welche Fachinhalte sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

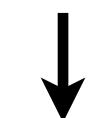
Sätze am Kreis



- Welche Fachinhalte sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

Sätze am Kreis

Wechselwinkel*satz*

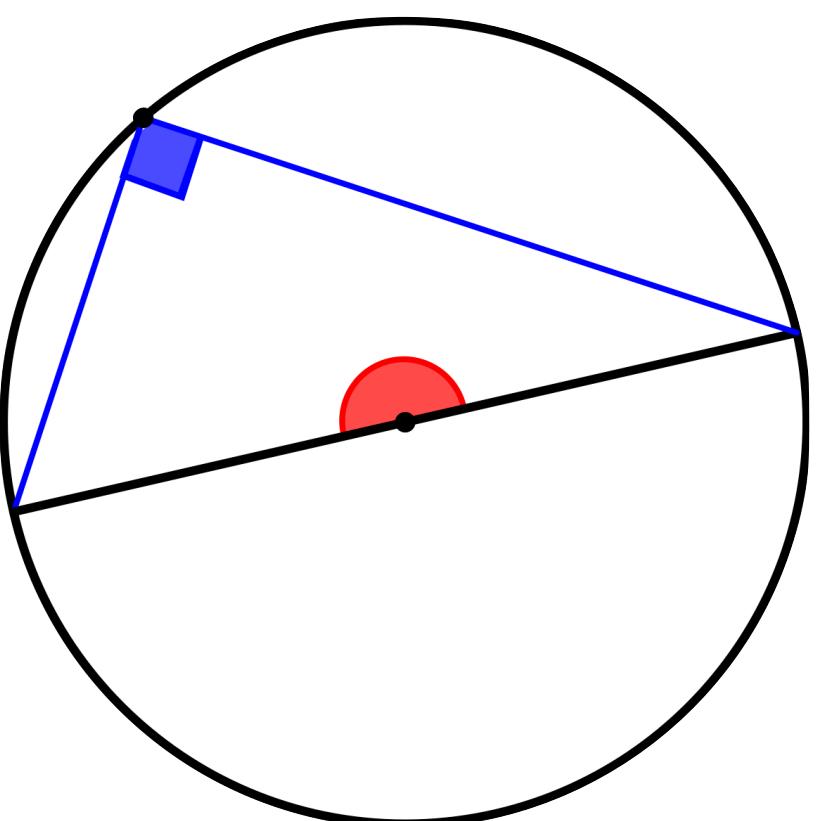


Basiswinkel*satz*

Innenwinkelsatz

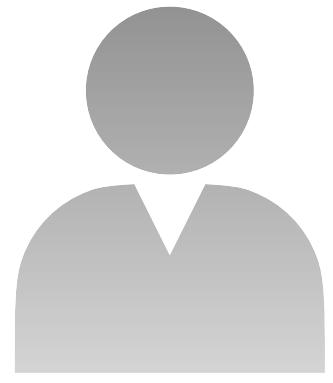


Satz des Thales
und seine Umkehrung



**Erster Entwurf eines Lernpfades
aufgrund der stoffdidaktischen
Analyse auf der **formalen Ebene****

- Welche **Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?



Welche Quellen helfen euch, diese Fragen zu beantworten?

- **fachmathematische Literatur**
- **Literatur über »Schulmathematik vom höheren Standpunkt«**
- **fachdidaktische Literatur (v. a. Bücher zur »Didaktik der ...«)**
- **Schulbücher**
- Bildungsstandards, Rahmenlehrplan, schulinterne Curricula

- Welche Fachinhalte sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

Schulmathematik vom höheren Standpunkt

fachliche und verstehensorientierte Durchdringung der Schulmathematik, »ohne im vollen Umfang auf das Instrumentarium der kanonischen [...] [Hochschulmathematik] zurückgreifen zu müssen«

(Danckwerts, 2013, S. 87)



Schulmathematik → Hochschulmathematik → Schulmathematik

»doppelte Diskontinuität«

(Klein, 1967, S. 1; Erstausgabe 1908)

Schulmathematik vom höheren Standpunkt

Weiterführende Literatur

Felix Klein

*Elementarmathematik vom höheren
Standpunkte aus*

(Klein, 1925, 1955, 1967)

Mathematik Neu Denken

(Beutelspacher et al., 2012)

Hans Freudenthal

*Mathematik als
pädagogische Aufgabe*

(Freudenthal, 1973b, 1973c,
auch auf Englisch: Freudenthal, 1973a)

*Zur doppelten Diskontinuität in der
Gymnasiallehrerbildung*

(Ableitinger et al., 2013)

Mathematik strukturieren

- 1 Sachgebiete
- 2 Leitideen
- 3 Stoffelement-Kategorien



Lerntätigkeit als
Aneignung
gesellschaftlichen Wissen
& Könnens



1

Sachgebiete

Arithmetik

$$9 + 4$$

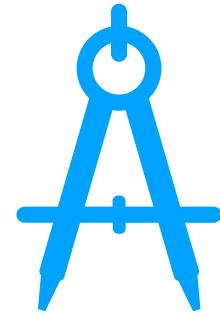
Leitfaden Arithmetik
(Benölken et al., 2018)

Algebra

$$2x = 8$$

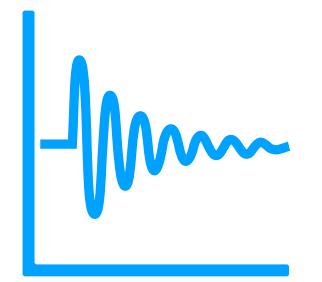
*Didaktik der
Algebra*
(Weigand et al., 2022)

Geometrie



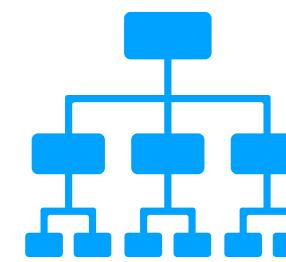
*Didaktik der
Geometrie für die
Sekundarstufe I*
(Weigand et al., 2018)

Analysis



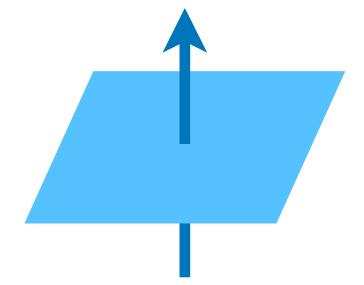
*Didaktik der
Analysis*
(Greefrath et al., 2016)

Stochastik



*Didaktik der
Stochastik für die
Sekundarstufe I*
(Krüger et al., 2015)

Lin. Algebra / Analytische Geometrie



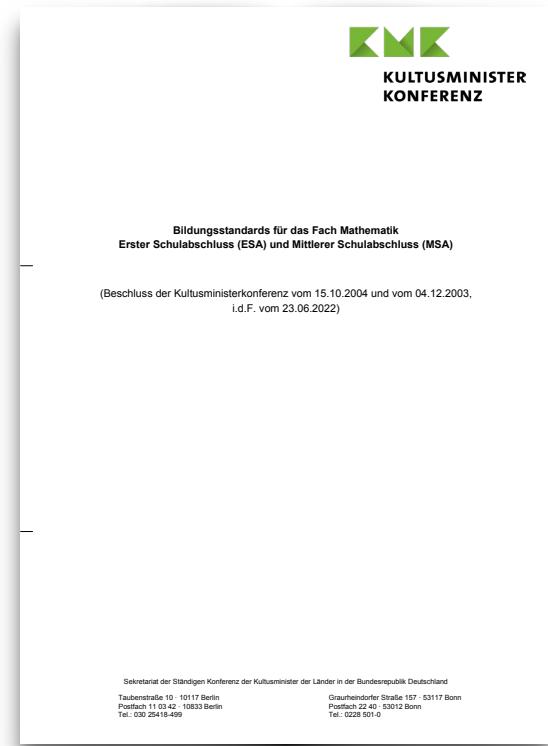
*Didaktik der
Analytischen
Geometrie und
Linearen Algebra*
(Henn & Filler, 2015)

Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II
(Tietze et al., 2000a, 2000b, 2002)

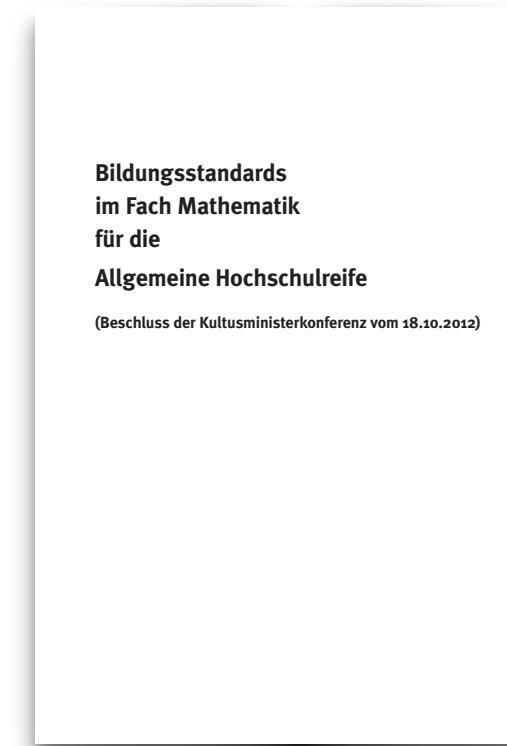
2

Leitideen (inhaltsbezogene Kompetenzen)

»Kulturhoheit der Länder«
(Grundgesetz, Artikel 30)



(KMK, 2022)



(KMK, 2012)

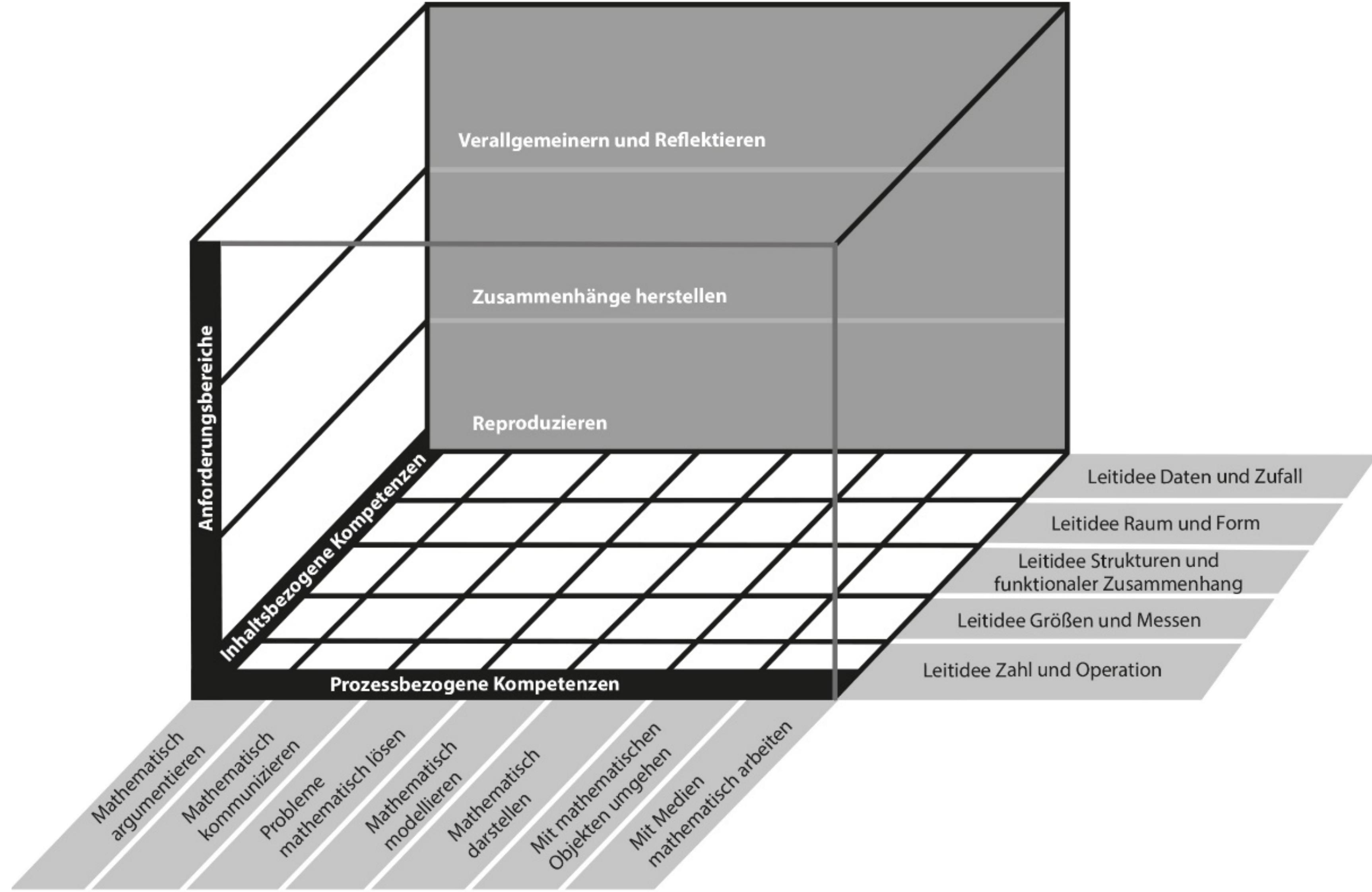


(CC-BY-SA-3.0 TUBS, https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Locator_map_Brandenburg_in_Germany.svg)



(MBJS, 2023)

(MBJS, 2022)



(KMK, 2022, S. 8)

Leitidee Zahl und Operation

Diese Leitidee umfasst sinntragende Vorstellungen und Darstellungen von Zahlen und Operationen sowie die Nutzung von Rechengesetzen und Kontrollverfahren. Dazu gehören die sachgerechte Nutzung von Prozent- und Zinsrechnung ebenso wie kombinatorische Überlegungen und Verfahren, denen Algorithmen zu Grunde liegen. Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe I sind die Arithmetik, Algebra und Stochastik.

2

Leitideen

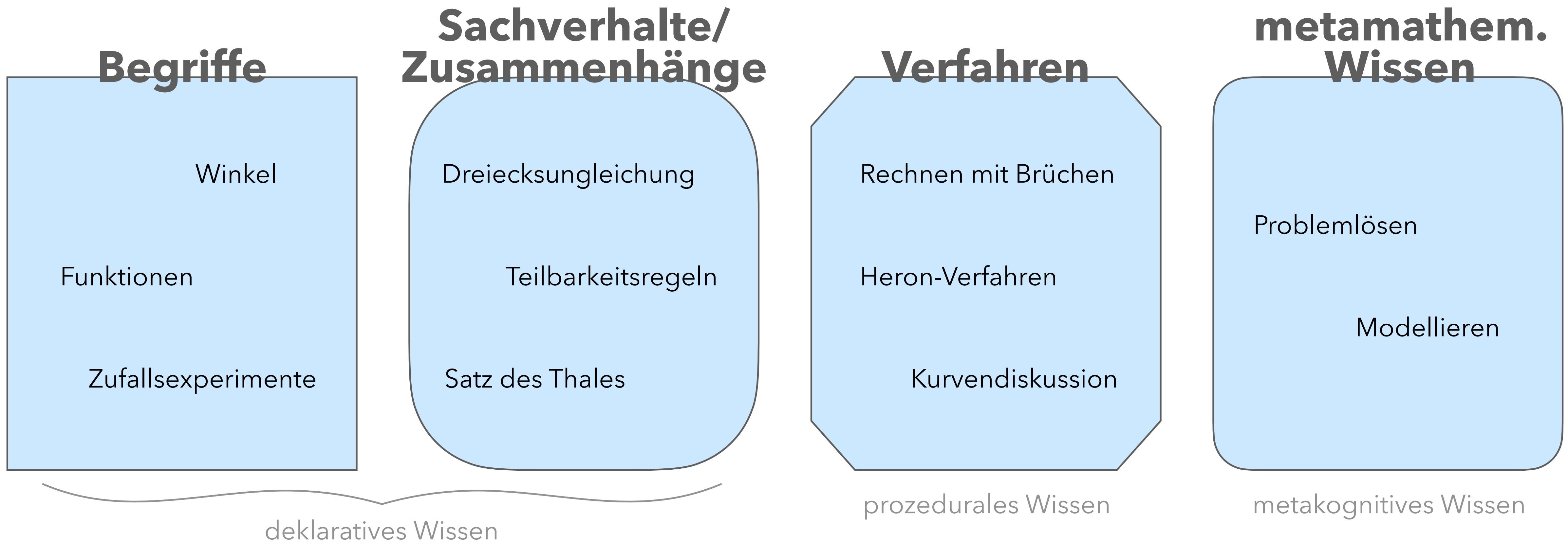
Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen, insbesondere von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit,
- nutzen sinntragende Vorstellungen von reellen Zahlen (z. B. Vollständigkeit der Zahlengerade),
- nutzen sinntragende Vorstellungen von Operationen rationaler Zahlen (z. B. schrittweiser, halbschriftlicher Verfahren),
- untersuchen Zahlen nach ihren Faktoren, in einfachen Fällen ohne digitale Mathematikwerkzeuge,
- stellen Zahlen der Situation angemessen dar, z.B. unter anderem in Zehnerpotenzschreibweise,
- rechnen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen, die im täglichen Leben vorkommen, sowohl zur Kontrolle als auch im Kopf und erklären die Bedeutung der Rechenoperationen,
- beschreiben die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen von \mathbb{N} nach \mathbb{Z} und \mathbb{Q} sowie von \mathbb{Q} nach \mathbb{R} an Beispielen,
- erläutern an Beispielen die verschiedenen Vorstellungen zum Bruchbegriff (insbesondere Teile eines oder mehrerer Ganzer, relative Anteile),
- nutzen Rechengesetze (z. B. Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz), auch zum vorteilhaften Rechnen,
- nutzen Überschlagsrechnungen zur Orientierung und zur Kontrolle,
- runden Zahlen dem Sachverhalt entsprechend sinnvoll,
- prüfen und interpretieren Ergebnisse, auch in Sachsituationen,
- erläutern an Beispielen den Zusammenhang zwischen Rechenoperationen und deren Umkehrungen und nutzen diese Zusammenhänge,
- verwenden Prozent- und Zinsrechnung vorstellungsbasiert (z. B. Prozentstreifen) und sachgerecht,
- erläutern Potenzen und Wurzeln und berechnen einfache Potenzen und Wurzeln,
- wenden insbesondere lineare und quadratische Funktionen sowie Exponentialfunktionen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Problemen an,
- wählen, beschreiben und bewerten Vorgehensweisen und Verfahren, denen Algorithmen bzw. Kalküle zu Grunde liegen und führen diese aus (z. B. schriftliche Rechenoperationen sowie bei Wurzeln und Potenzen),
- implementieren ein algorithmisches Verfahren (z. B. Heron-Verfahren zur Bestimmung von Quadratwurzeln, Intervallschachtelung) mit digitalen Mathematikwerkzeugen,
- führen in konkreten Situationen systematische Zählprinzipien aus (z. B. Anzahl Händeschütteln, wenn man jeder Person die Hand gibt),
- führen Zahlenfolgen fort, auch unter Verwendung von Variablen als allgemeine Zahl.

(KMK, 2022, S. 15 f.)

3

Stoffelement-Kategorien



(Vollrath & Roth, 2012, S. 48 ff.)

Kenntnisse/Fähigkeiten/Fertigkeiten über ...

Begriffe

- die Bezeichnung des Begriffs kennen
- Beispiele angeben und jeweils begründen können, weshalb es sich um ein Beispiel handelt
- begründen können, weshalb etwas nicht unter den Begriff fällt
- charakteristische Eigenschaften des Begriffs kennen
- Oberbegriffe, Unterbegriffe und Nachbarbegriffe kennen
- mit dem Begriff beim Argumentieren und Problemlösen arbeiten können

Sachverhalte/ Zusammenhänge

- den Sachverhalt angemessen formulieren können
- Beispiele für den Sachverhalt angeben können
- wissen, unter welchen Voraussetzungen der Sachverhalt gilt
- den Sachverhalt begründen können
- Konsequenzen des Sachverhalts kennen
- Anwendungen des Sachverhalts kennen

Verfahren

- wissen, was man damit erreicht
- wissen, wie es geht
- es auf Beispiele anwenden können
- wissen, unter welchen Voraussetzungen es funktioniert
- wissen, warum es funktioniert

(Vollrath & Roth, 2012, S. 48 ff.)

1. Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren (unstrukturiert) sammeln

Fachliteratur, fachdid. Literatur, RLP/SchiC, Bildungsstandards, Schulbücher

2. Begründungsideen skizzieren

Fachliteratur, fachdid. Literatur, ggf. Schulbücher

3. Abhängigkeiten darstellen

4. Fachlich Entscheidendes und weniger Entscheidendes identifizieren

Fachliteratur, fachdid. Literatur

Zusammenhang

Umkehrung des Satz des Thales

Begriff
»Dreieck«

Zusammenhang
Satz des Thales

über gleichsch. Dreiecke

Begriff
»Kreis«

direkt als wenn-dann-Aussage

Verfahren
Tangente konstruieren

über Umkehrung des Satz d. Thales

Spezifizieren

Welche Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren sollen erarbeitet werden?

Wie können die Zusammenhänge und Verfahren **formal begründet** werden?

Strukturieren

Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren **logisch strukturiert** werden?

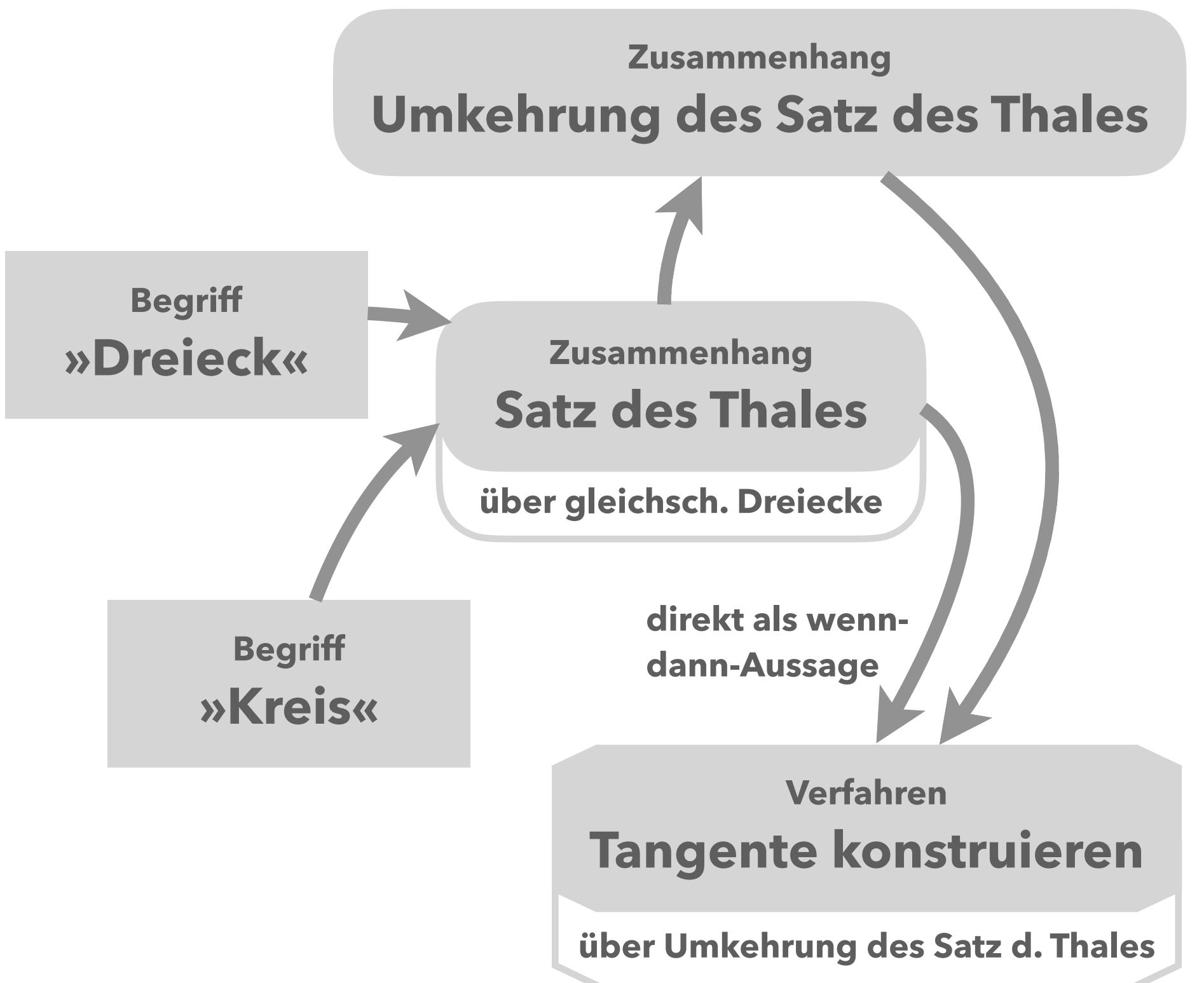
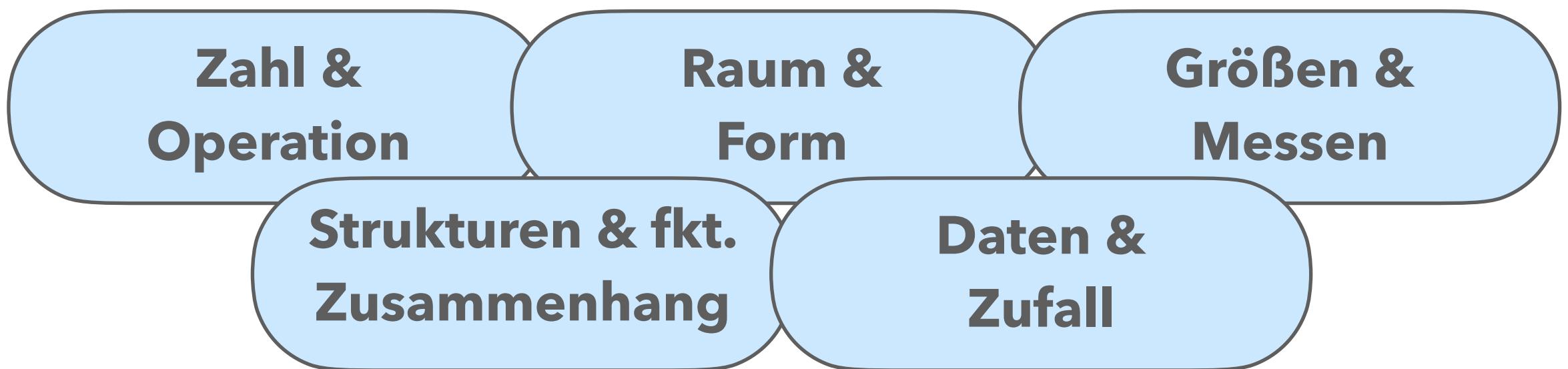
Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

Zusammenfassung Kapitel 2 - (Hoch-)Schulmathematik strukturieren

Stoffelement-Kategorien



Leitideen



Literatur

- Ableitinger, C., Kramer, J., & Prediger, S. (Hrsg.). (2013). *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8>
- Benölken, R., Gorski, H.-J., & Müller-Philipp, S. (2018). *Leitfaden Arithmetik: Für Studierende der Lehrämter*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-22852-1>
- Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2012). *Mathematik Neu Denken*. Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8250-9>
- Danckwerts, R. (2013). Angehende Gymnasiallehrer(innen) brauchen eine „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“! In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 77–94). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8_5
- Freudenthal, H. (1973a). *Mathematics as an Educational Task*. Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2>
- Freudenthal, H. (1973b). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 1). Klett.
- Freudenthal, H. (1973c). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 2). Klett.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; 4. Aufl.). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>

Literatur

- Grundgesetz für die Bundesrepublik Deutschland. <https://www.gesetze-im-internet.de/gg/BJNR000010949.html>
- Henn, H.-W., & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen - Geometrisch veranschaulichen und anwenden*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43435-2>
- Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 33–67. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8>
- Klein, F. (1925). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus II. Geometrie*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-90852-1>
- Klein, F. (1955). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus III. Präzisions- und Approximationsmathematik* (C. H. Müller, Hrsg.). Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-00246-9>
- Klein, F. (1967). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus I. Arithmetik, Algebra, Analysis*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-11652-4>
- Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3>
- Lompscher, J. (1985). Die Lerntätigkeit als dominierende Tätigkeit des jüngeren Schülers. In J. Lompscher (Hrsg.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 23–52). Volk und Wissen.

Literatur

- [MBJS] Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2023). *Rahmenlehrplan Brandenburg. Teil C, Mathematik, Jahrgangsstufen 1–10.* https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/getrennt_2023/BB_RLP_2023_Teil_C_Ma_GenF_1.pdf
- [MBJS] Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2022). *Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe im Land Brandenburg.* https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale_oberstufe/curricula/2022/Teil_C_RLP_GOST_2022_Mathematik.pdf
- [KMK] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland . (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf
- [KMK] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022a). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA).* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf
- Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000a). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis* (2. Aufl.). Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-90568-0>
- Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000b). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra.* Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-86479-6>

Literatur

- Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2002). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 3: Didaktik der Stochastik.* Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-83144-6>
- Vollrath, H.-J., & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (F. Padberg, Hrsg.; 2. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2855-4>
- Weigand, H.-G., Filler, A., Hözl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8>
- Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: Nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath.* Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-64660-1>