

Universität Potsdam – Wintersemester 2023/24

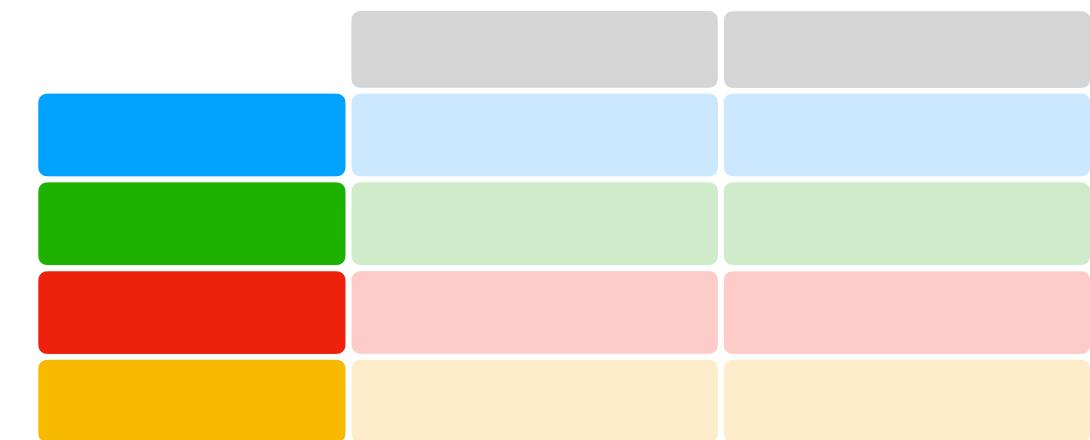
Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 1 – Vier-Ebenen-Ansatz

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 1 – Vier-Ebenen-Ansatz

- Sie kennen typische Fragestellungen, um sich einer stoffdidaktischen Analyse systematisch zu nähern.
- Sie erkennen den Vier-Ebenen-Ansatz als eine Möglichkeit, eine stoffdidaktische Analyse strukturiert vorzunehmen.
- Sie können den Vier-Ebenen-Ansatz anhand eines Beispiels nachvollziehen.
- Sie sind sich der Komplexität einer stoffdidaktischen Analyse bewusst.



Satz des Pythagoras

Wie kann man den beweisen?

Negative Zahlen

Was stellt man sich darunter vor?

Zufallsexperimente

Welche Beispiele sind geeignet?

Logarithmengesetze

Wofür braucht man die?

Darauf bietet die Stoffdidaktik Mathematik Antworten!

Winkel

Was ist das eigentlich?

Tangenten am Kreis

Wie definiert man die am besten?

Rechnen mit Brüchen

Warum fällt das vielen so schwer?

Funktionen

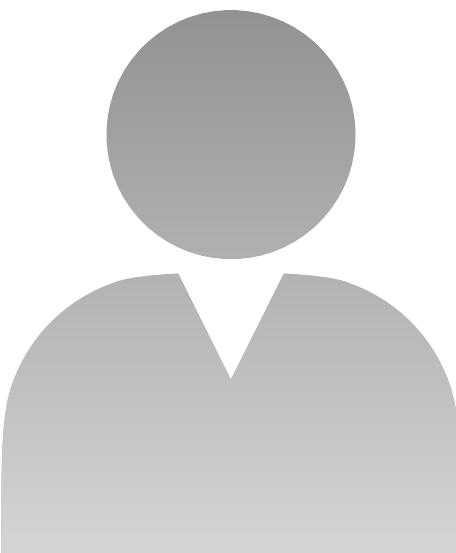
Wie führt ist das am besten ein?

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wie kann ich das visualisieren?

Stoffdidaktik Mathematik

- Sie **kennen Aspekte und Grundvorstellungen** zu zentralen mathematischen Begriffen.
- Sie **beurteilen Unterrichtsmaterialien und Lernumgebungen** hinsichtlich ihrer stoffdidaktischen Eignung.
- Sie **erstellen Aufgaben und erste Lernumgebungen** zu konkreten Stoffgebieten.
- Sie **erkennen mathematikdidaktische Prinzipien und Ideen** als **Entscheidungs- und Strukturierungsgrundlage** zu stofflichen Inhalten der mathematischen Bildung.
- Sie **wählen zielgerichtet** analoge und digitale **Medien** zur Unterstützung stofflich orientierter Lehr-Lern-Prozesse aus.
- Sie **setzen sich** selbstständig **mit stoffdidaktischen Fragestellungen auseinander** und nutzen dafür geeignete mathematikdidaktische Literatur.
- Sie **reflektieren die Inhalte der vorangegangenen Mathematik-Fachmodule** unter stoffdidaktischen Gesichtspunkten.



Wie gestalte ich einen Lernprozess für einen konkreten mathematischen Inhalt?

Inhalt durchdringen

← **Stoffdidaktische Analyse** →

»Lernen« verstehen

Was heißt »Lernen«?

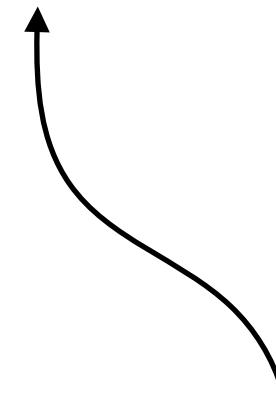


Lerngegenstände: für spezifische Ausbildungszwecke ausgewählte Ausschnitte des gesellschaftlichen Wissens und Könnens, z. B. Begriffe, Gesetzesaussagen, Methoden theoretischer und praktischer Tätigkeit, Werte, Normen, Verhaltensweisen

(Lompscher, 1985)

Vier-Ebenen-Ansatz

Spezifizieren



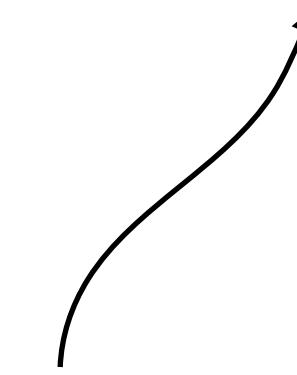
Was genau sollen Schülerinnen und Schüler bezüglich eines bestimmten mathematischen Themas lernen?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz

Spezifizieren

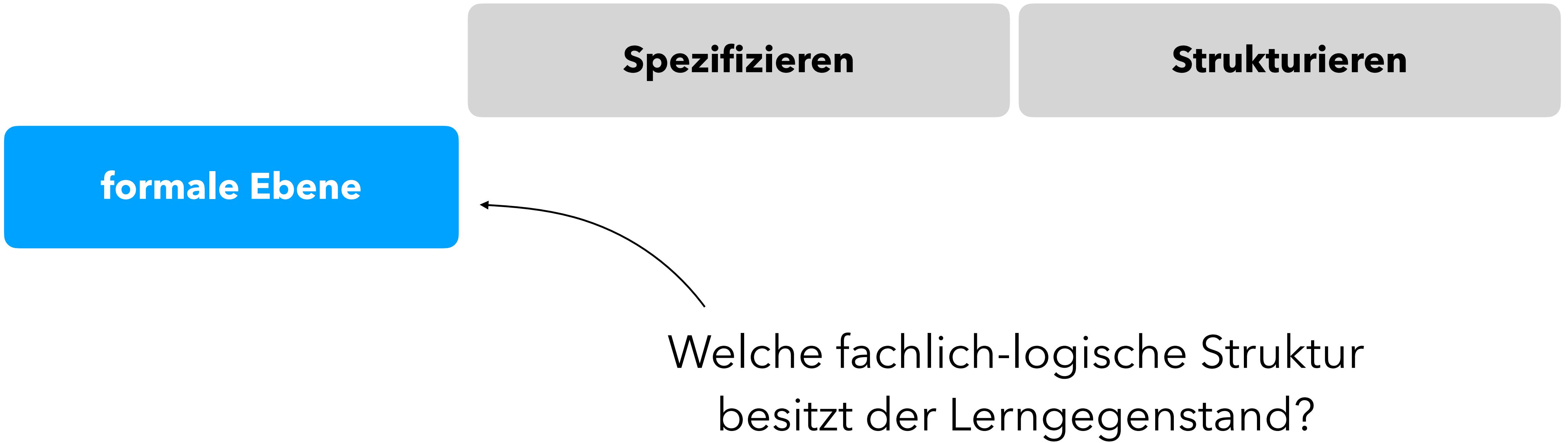
Strukturieren



Wie stehen die Stoffelemente
miteinander in Verbindung und wie können
sie im Lernpfad strukturiert werden?

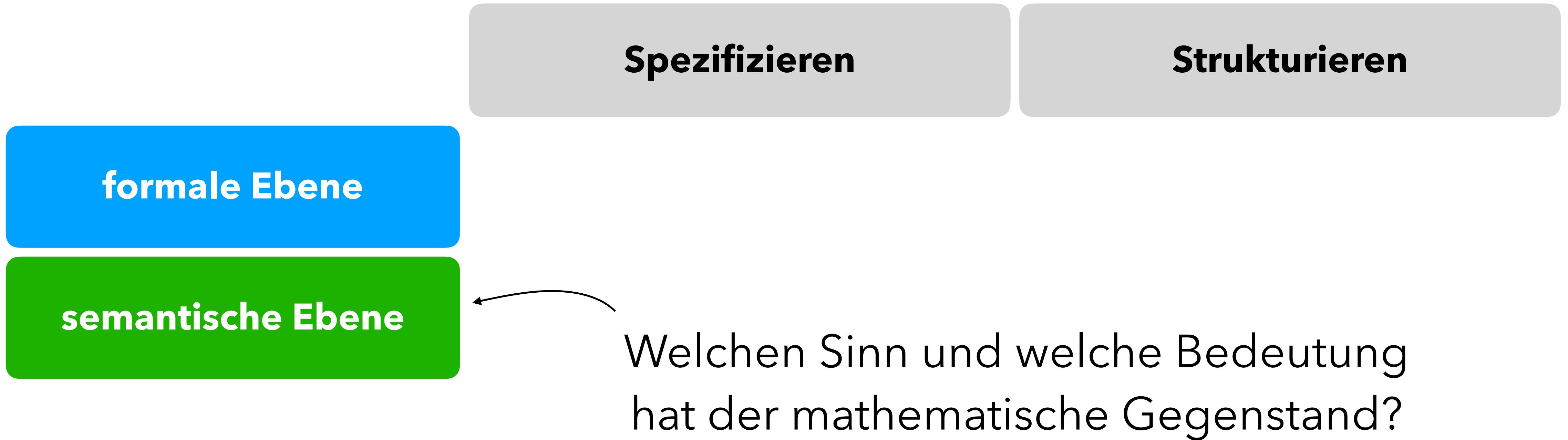
(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz



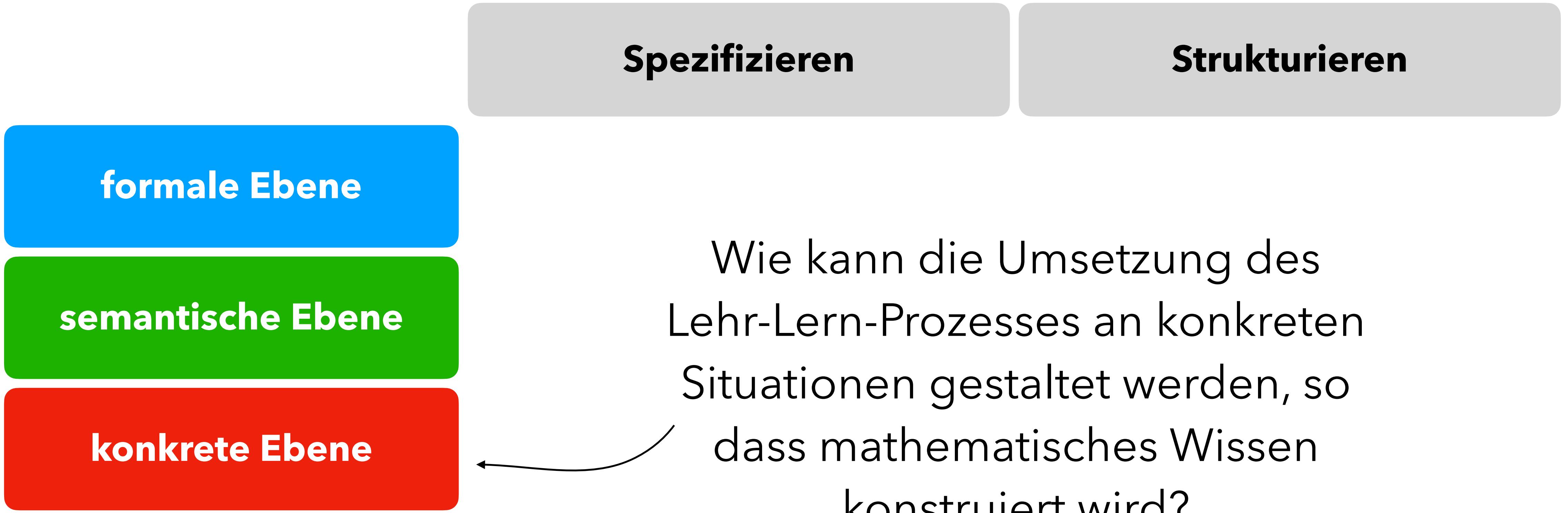
(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz



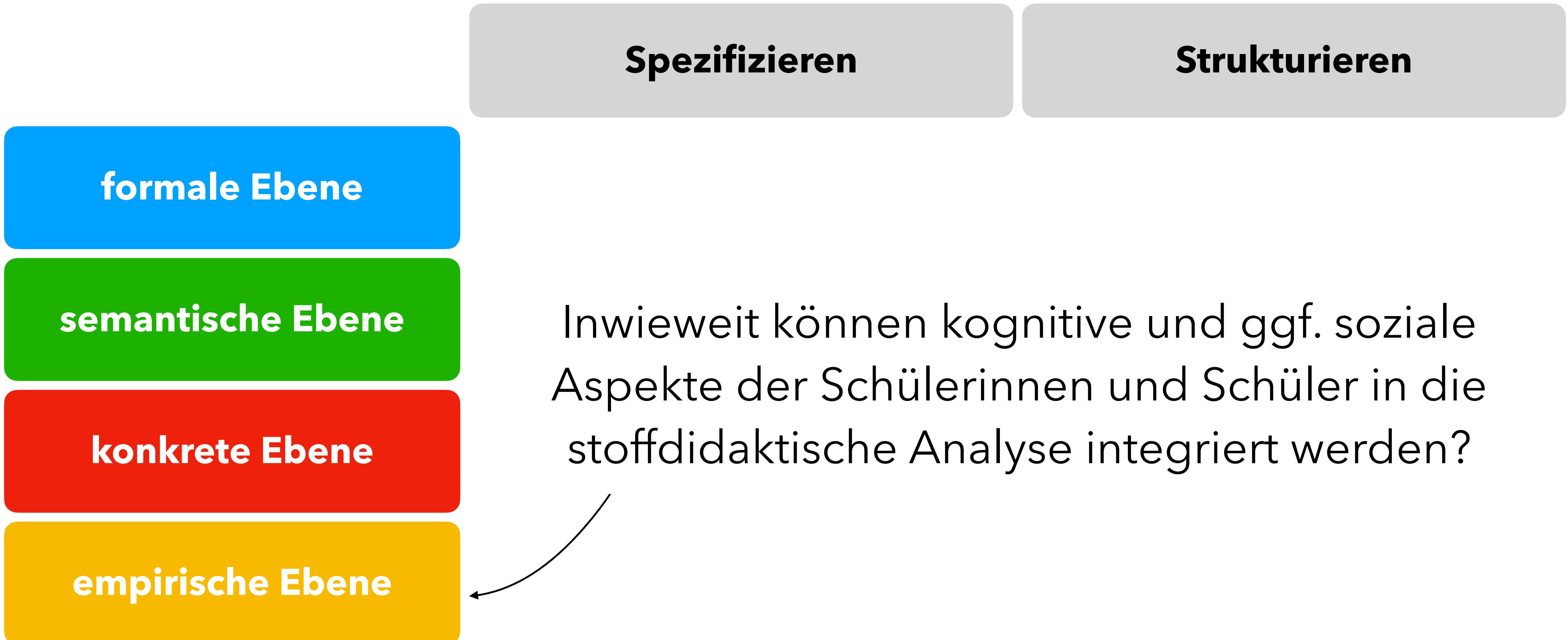
(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz



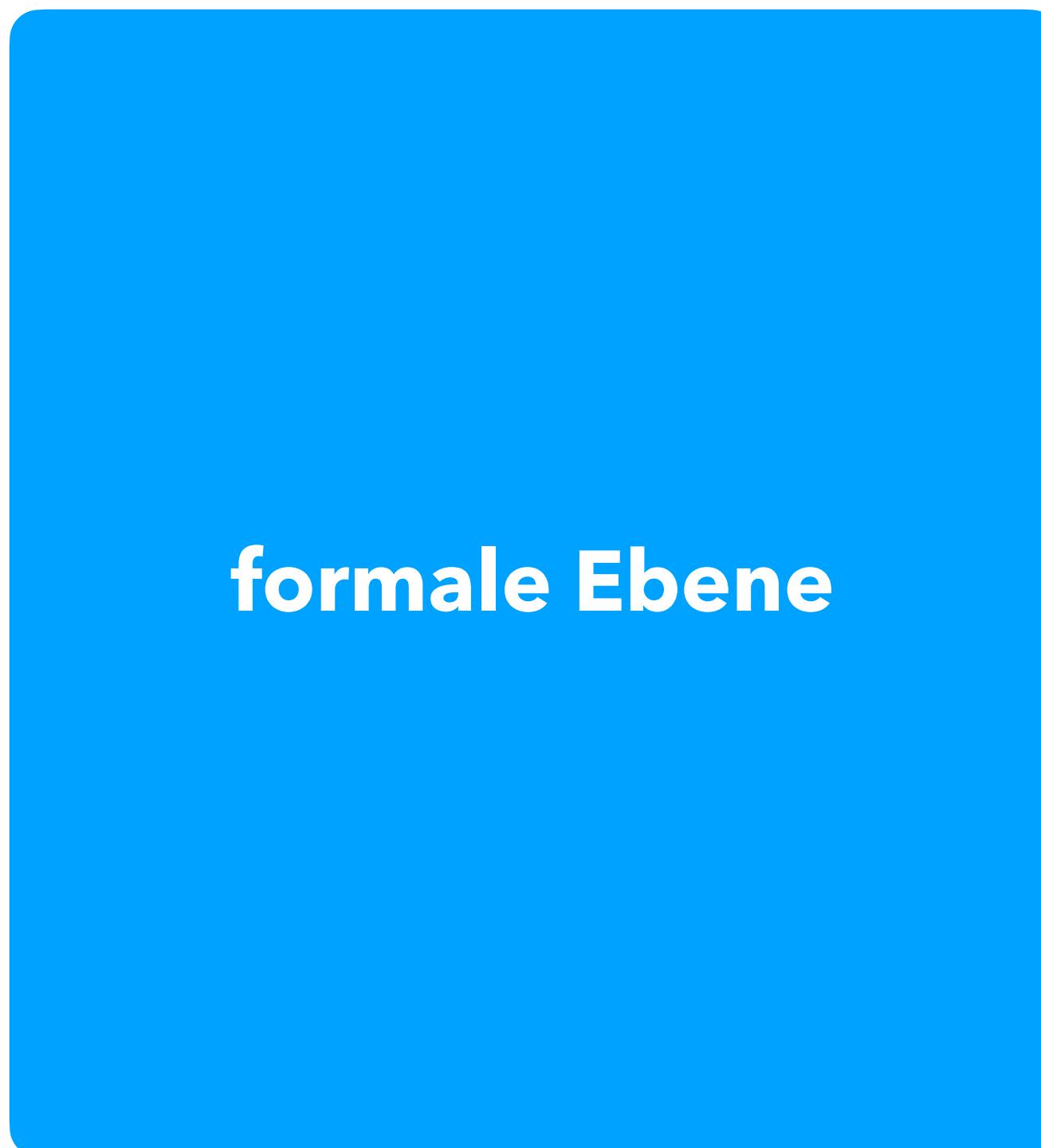
(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz



(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz



Spezifizieren

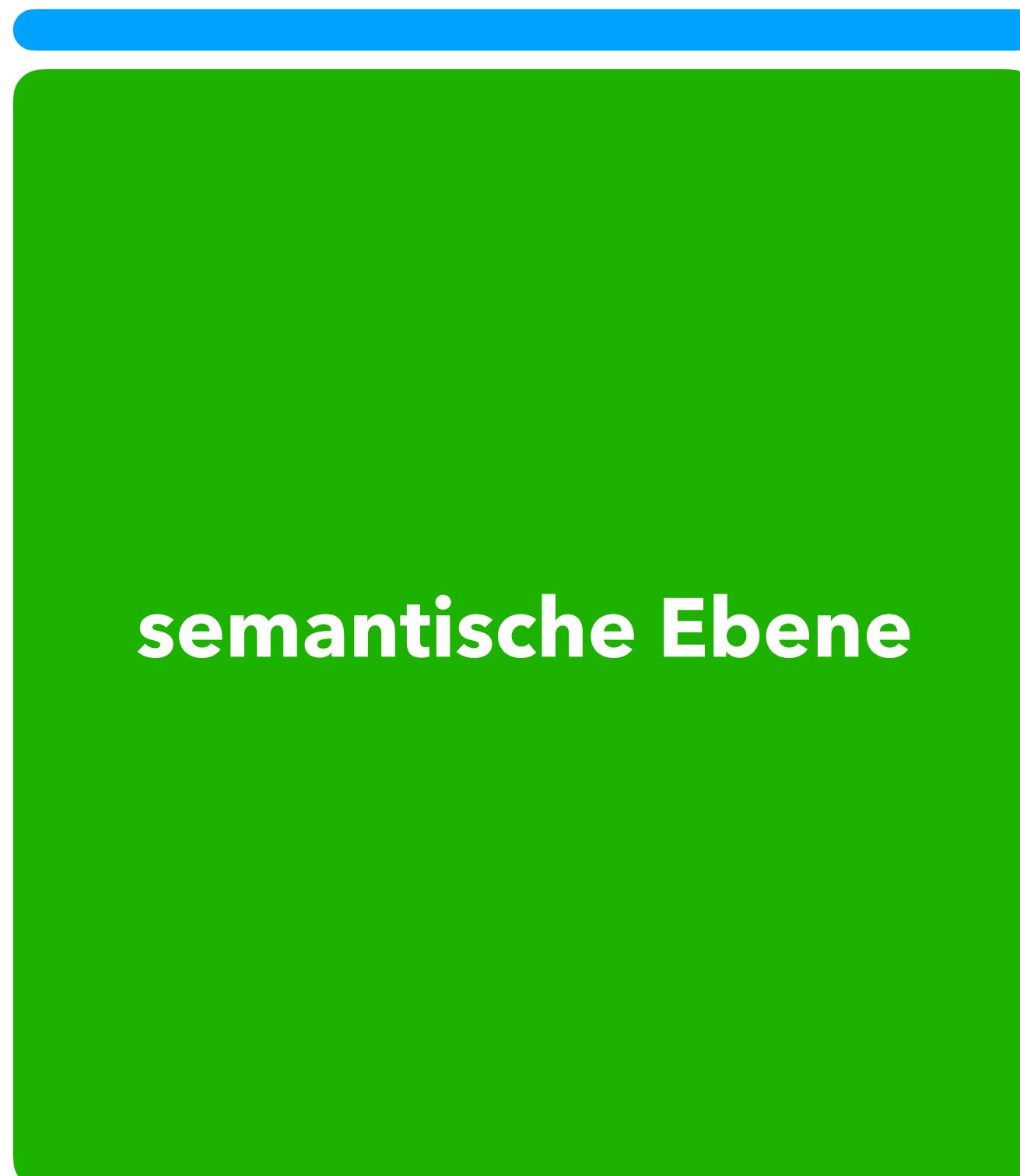
- **Welche Begriffe** und **Sätze** sollen erarbeitet werden?
- **Welche Verfahren** sollen erarbeitet werden und **wie** werden sie **formal begründet**?

Strukturieren

- Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren **logisch strukturieren**?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind entscheidend, welche weniger bedeutsam?
- Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz



semantische Ebene

Spezifizieren

- **Welche Fundamentalen Ideen** liegen hinter den Begriffen, Sätzen und Verfahren?
- **Welche Grundvorstellungen und Repräsentationen** (graphisch, verbal, numerisch und algebraisch) sind für den Verständnisaufbau entscheidend?

Strukturieren

- Wie **verhalten** sich Ideen und Vorstellungen **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**?
- Wie kann ein **Lernpfad** angeordnet werden, in dem das Verständnis, zusammen mit den Erkenntnissen der formalen Ebene, aufgebaut wird?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz



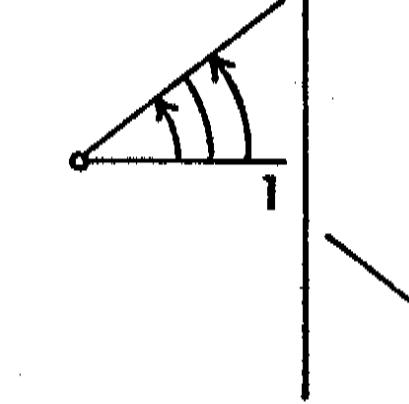
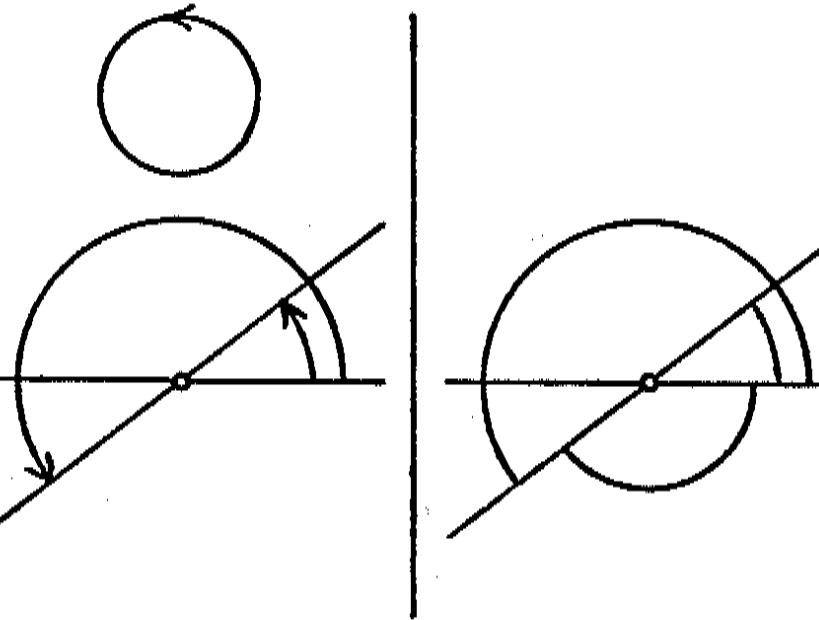
(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz

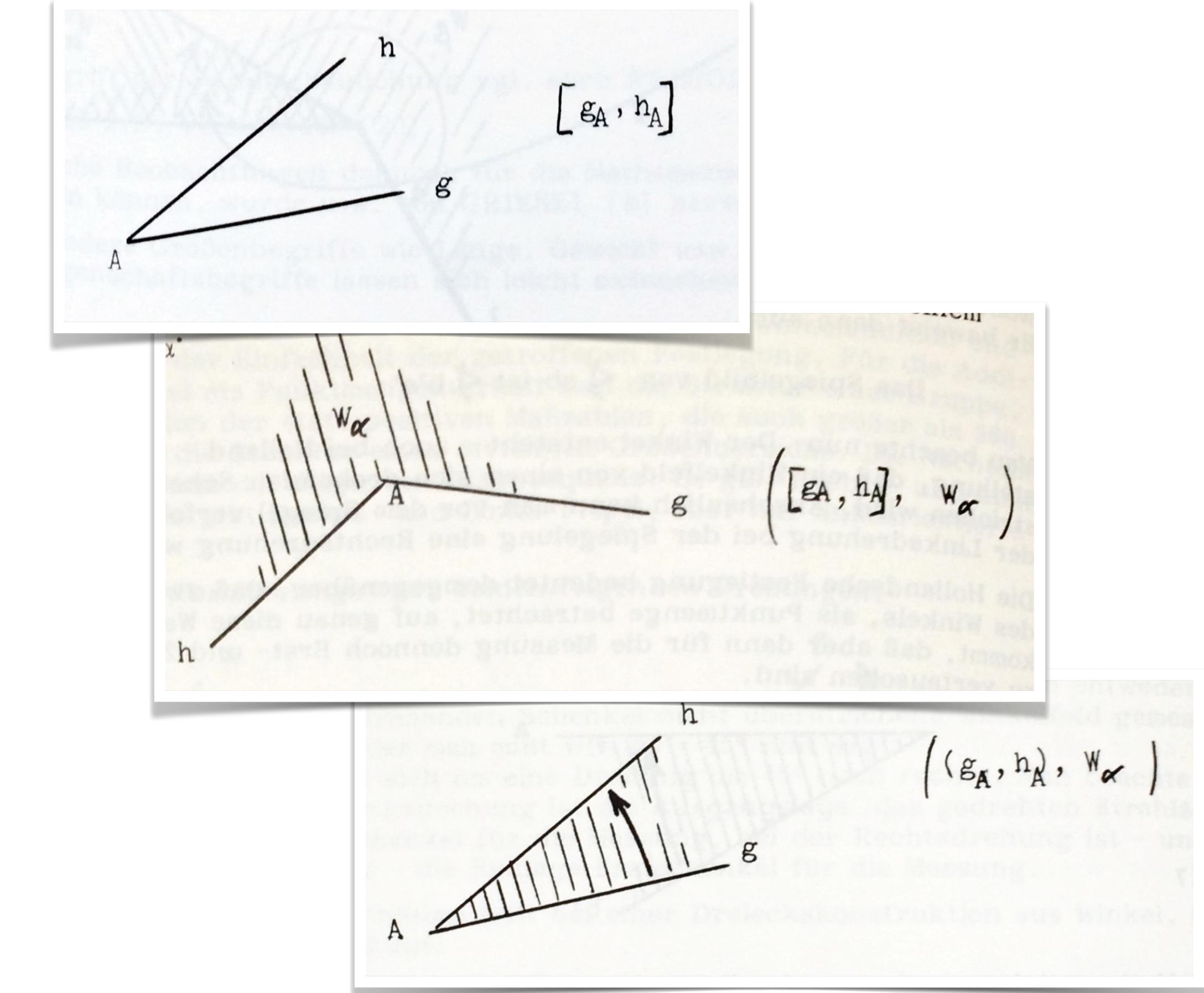


(Hußmann & Prediger, 2016)

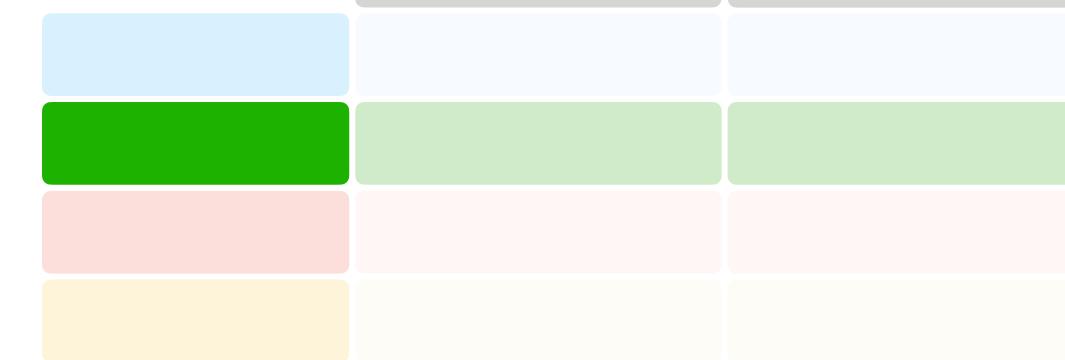
Beispiel: Winkel

Goniometrischer	Elementar-geometrischer	Analytisch-geometrischer	Stereometrischer
<i>Winkelbegriff: Winkel eines</i>			
geordneten	ungeordneten	geordneten	ungeordneten
Halbgeraden	Halbgeraden	Geraden	Geraden
orientierter	unorientierter	orientierter	unorientierter
<i>Ebene, bestimmt</i>			
mod 2π	zwischen 0° und 180°	mod π	zwischen 0° und 90°
			

(Freudenthal, 1973, S. 441)



(Strehl, 1983, S. 143 f.)

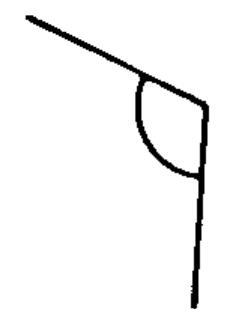


Beispiel: Winkel

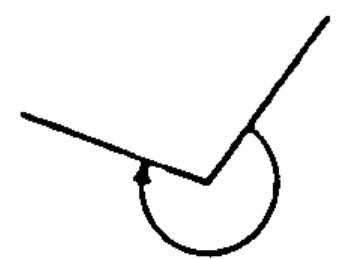
a) Winkel als "geknickte Gerade". (Abb.)



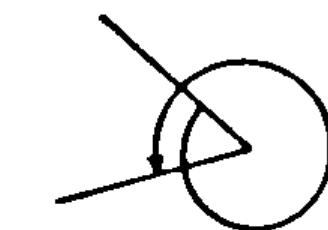
b) Winkel als Ebenenteil, der von zwei geraden Linien mit gemeinsamem Anfangspunkt begrenzt wird. Anstelle eines Bogens kann der Ebenenteil auch durch eine Schraffur angedeutet werden. (Abb.)



c) Winkel als Ebenenteil, dessen "Entstehungsgeschichte" durch die Drehung eines Schenkels beschrieben werden kann. (Abb.)



d) Winkel als "Umlaufwinkel". Der Winkel kann als beliebige Drehung um eine Achse gesehen werden. (Abb.)



Kurz:
"Winkel ohne (Kreis-)Bogen".

Kurz:
"Winkel mit (Kreis-)Bogen" oder "Winkelfeld".

Kurz:
"Winkel mit Kreisbogenpfeil" oder "orientiertes Winkelfeld".

Kurz:
"Winkel mit Umdrehungspfeil".

Knick, Feld, Richtungsänderung und Umdrehung

Wesentlich für die Unterscheidung der Aspekte ist die Relevanz und Bedeutung einzelner Winkelbestandteile.

Beim Knick als Abweichung von einer Geraden ist der Scheitelpunkt die Knickstelle, und die Schenkel beschreiben die jeweiligen geradlinigen Teilstücke.

Beim Feld ist der zwischen den Schenkeln befindliche Bereich der Ebene von Bedeutung, der Scheitelpunkt kann dann als »Quelle« des Feldes mit den Schenkeln als Begrenzung angesehen werden.

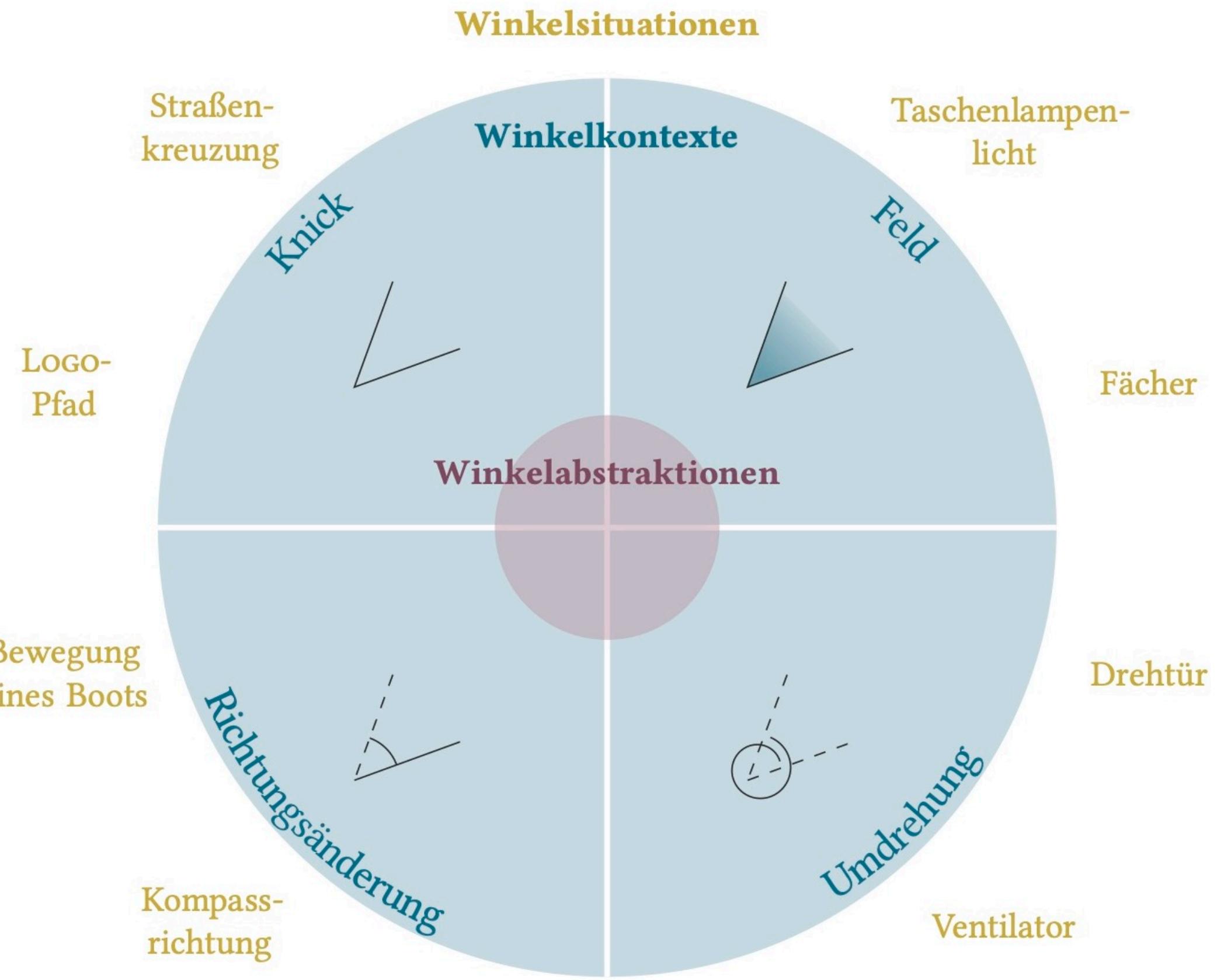
Bei einer Richtungsänderung kann der Scheitelpunkt als »Standpunkt« aufgefasst werden und die Schenkel beschreiben jeweils eine »Blickrichtung«.

Bei der Umdrehung ist der Scheitelpunkt das Drehzentrum, während die Schenkel als geometrische Objekte – also Strahlen – gar nicht eine so hohe Bedeutung erfahren. Vielmehr dienen sie als »Hilfsmittel«, den Anfangs- und Endzustand miteinander vergleichen zu können – interpretierbar als »Greifer« zur Durchführung der Drehung.

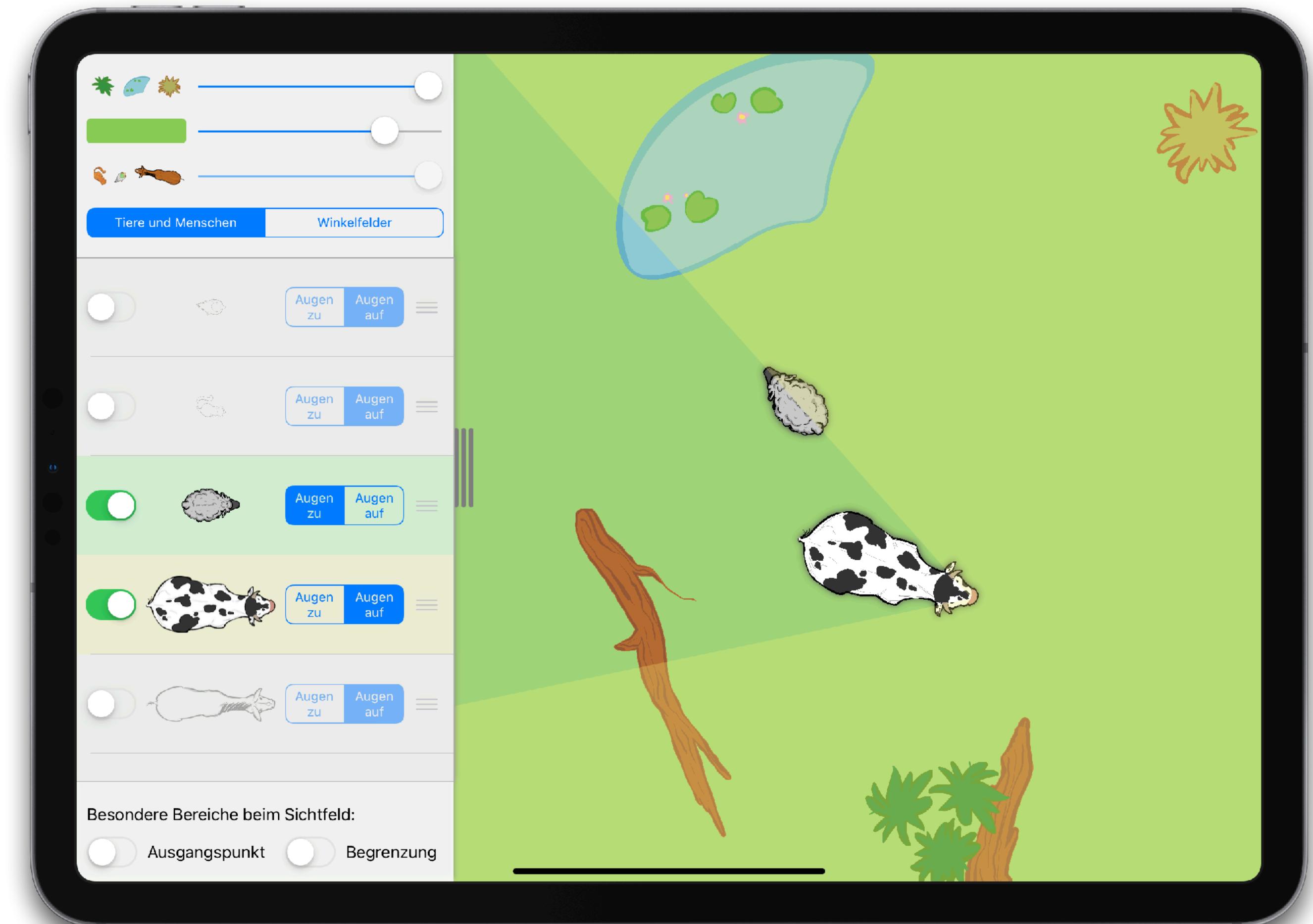
(Krainer, 1989, S. 387)

(Etzold, 2021, S. 53)

Beispiel: Winkel



(Etzold, 2021, S. 70)



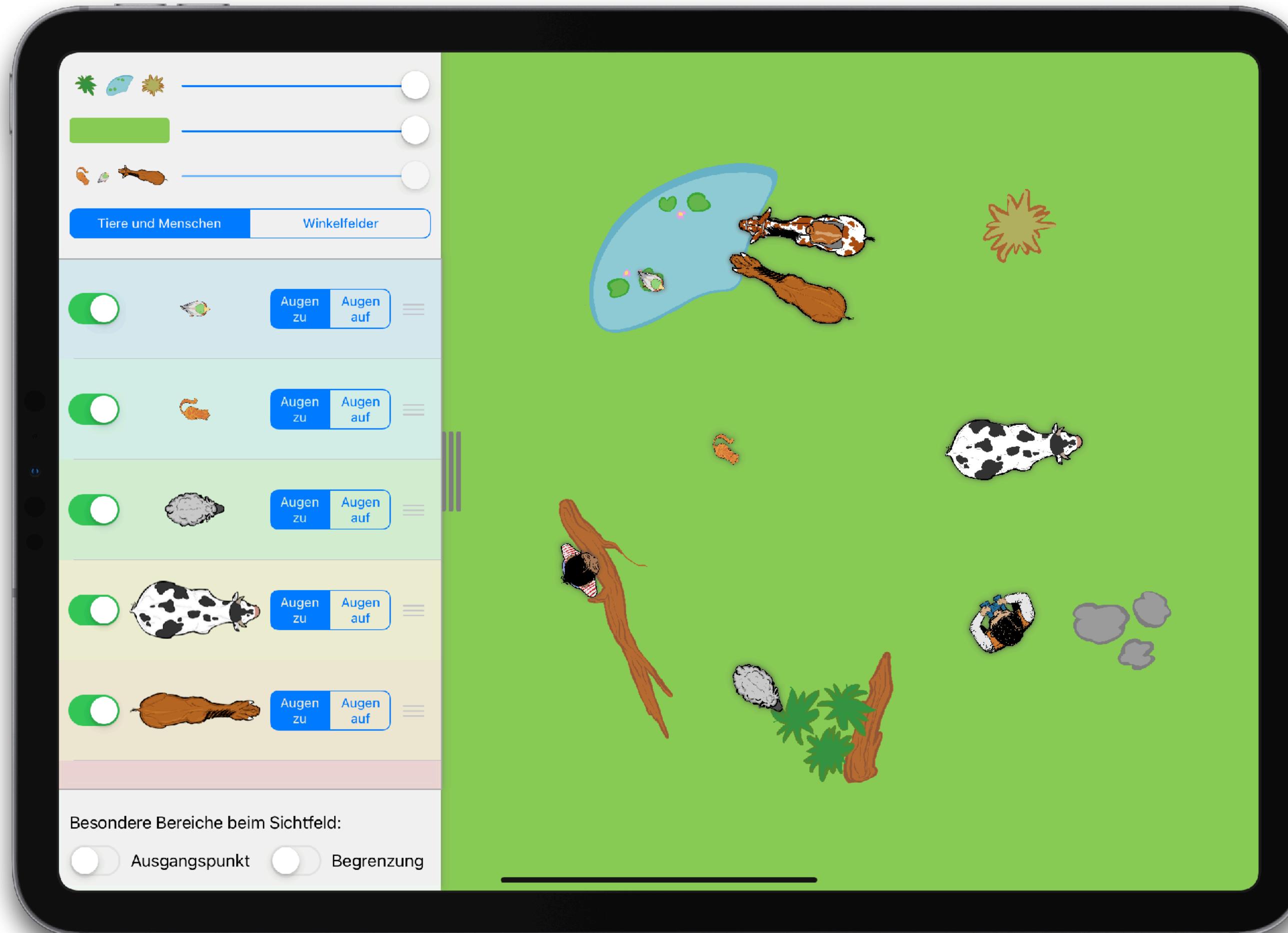
(Etzold, 2019a)

Beispiel: Winkel



(Etzold, 2019b, Foto: Christian Dohrmann)

Beispiel: Winkel



»Das Pferd soll auf dem Steinpflaster stehen, die Frau soll auf dem Pferd sitzen/stehen. Das Pferd guckt in Richtung der grünen Büsche, die Frau hat die Augen zu. Gleichzeitig versteckt sich die Katze unter der Kuh.«

(Etzold, 2021, S. 152)

Literatur

- Etzold, H. (2019a). *Winkel-Farm* (Version 2) [App]. <https://apps.apple.com/de/app/winkel-farm/id1369585218>
- Etzold, H. (2019b). *Winkel-Farm - Leitfaden für Lehrerinnen und Lehrer* (Version 2). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.4747700>
- Etzold, H. (2021). *Neue Zugänge zum Winkelbegriff* [Dissertation, Universität Potsdam]. <https://doi.org/10.25932/publishup-50418>
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 2). Klett.
- Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 33-67. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8>
- Krainer, K. (1989). *Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs* [Dissertation]. Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.
- Lompscher, J. (1985). Die Lerntätigkeit als dominierende Tätigkeit des jüngeren Schülers. In J. Lompscher (Hrsg.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 23-52). Volk und Wissen.
- Mitchelmore, M. (1990). Psychologische und mathematische Schwierigkeiten beim Lernen des Winkelbegriffs. *mathematica didactica*, 13, 19-37.
- Mitchelmore, M., & White, P. (1998). Development of Angle Concepts: A Framework for Research. *Mathematics Education Research Journal*, 10(3), 4-27.
- Strehl, R. (1983). *Anschauliche Vorstellung und mathematische Theorie beim Winkelbegriff*. *mathematica didactica*, 6, 129-146.