

Universität Potsdam – Wintersemester 2025/26

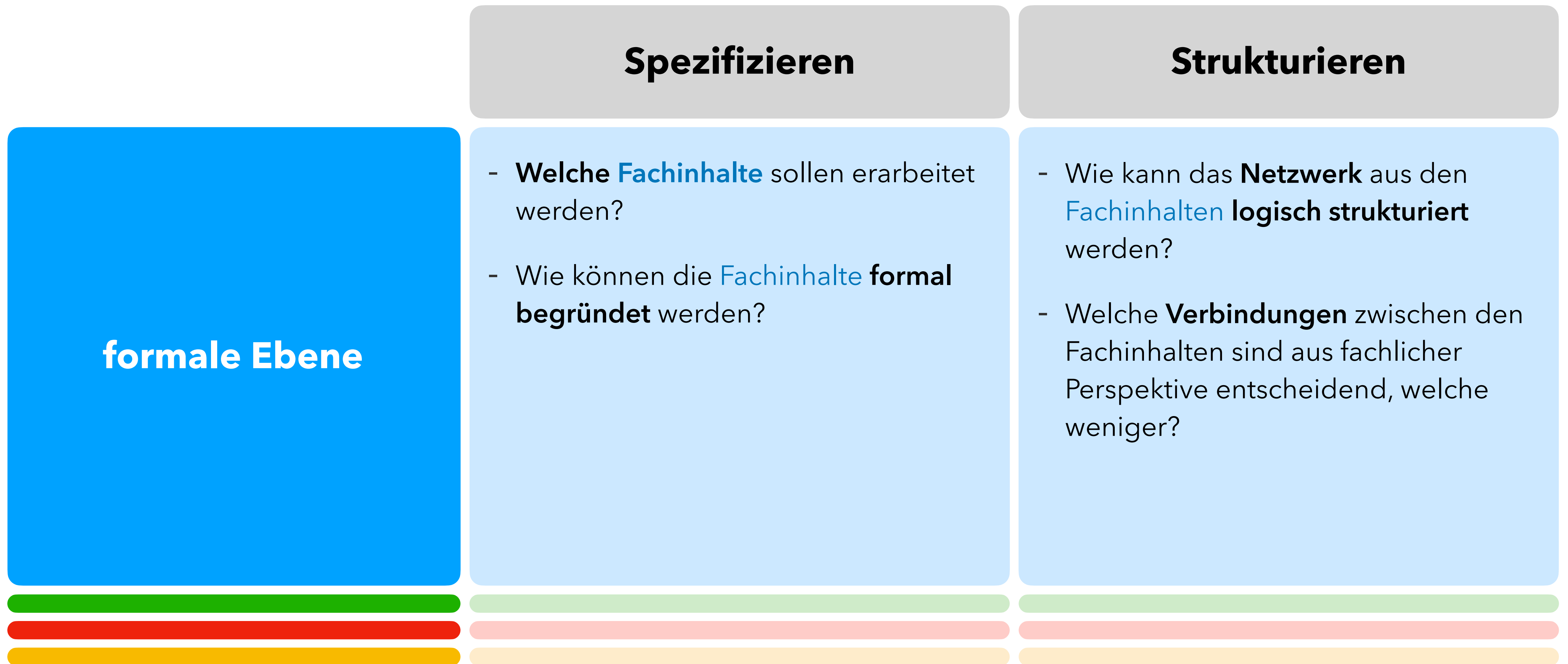
# **Stoffdidaktik Mathematik**

Kapitel 2 – (Hoch-)Schulmathematik strukturieren

# Stoffdidaktik Mathematik

## Kapitel 2 – (Hoch-)Schulmathematik strukturieren

- Sie erkennen den Nutzen der **Hochschulmathematik** bei der Entscheidungsfindung zur Spezifizierung und Strukturierung der **Schulmathematik** auf der **formalen Ebene** des Vier-Ebenen-Ansatzes.
- Sie kennen geeignete Quellen zur Beantwortung der Fragen auf der formalen Ebene des Vier-Ebenen-Ansatz
- Sie kennen verschiedene Möglichkeiten, Mathematik zu strukturieren.
- Sie können beschreiben, woher die verschiedenen Strukturierungsmöglichkeiten kommen.

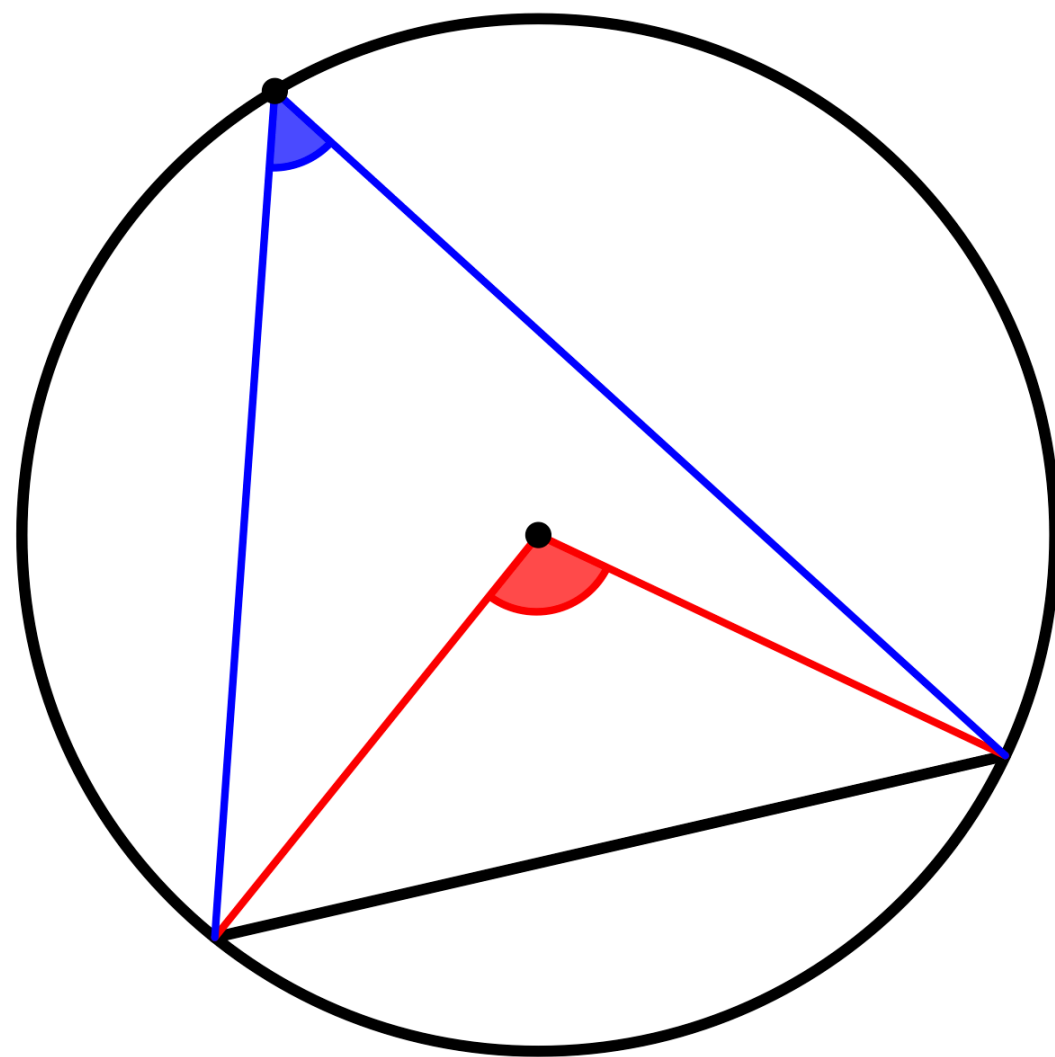


(angelehnt an Hußmann & Prediger, 2016)

# Sätze am Kreis

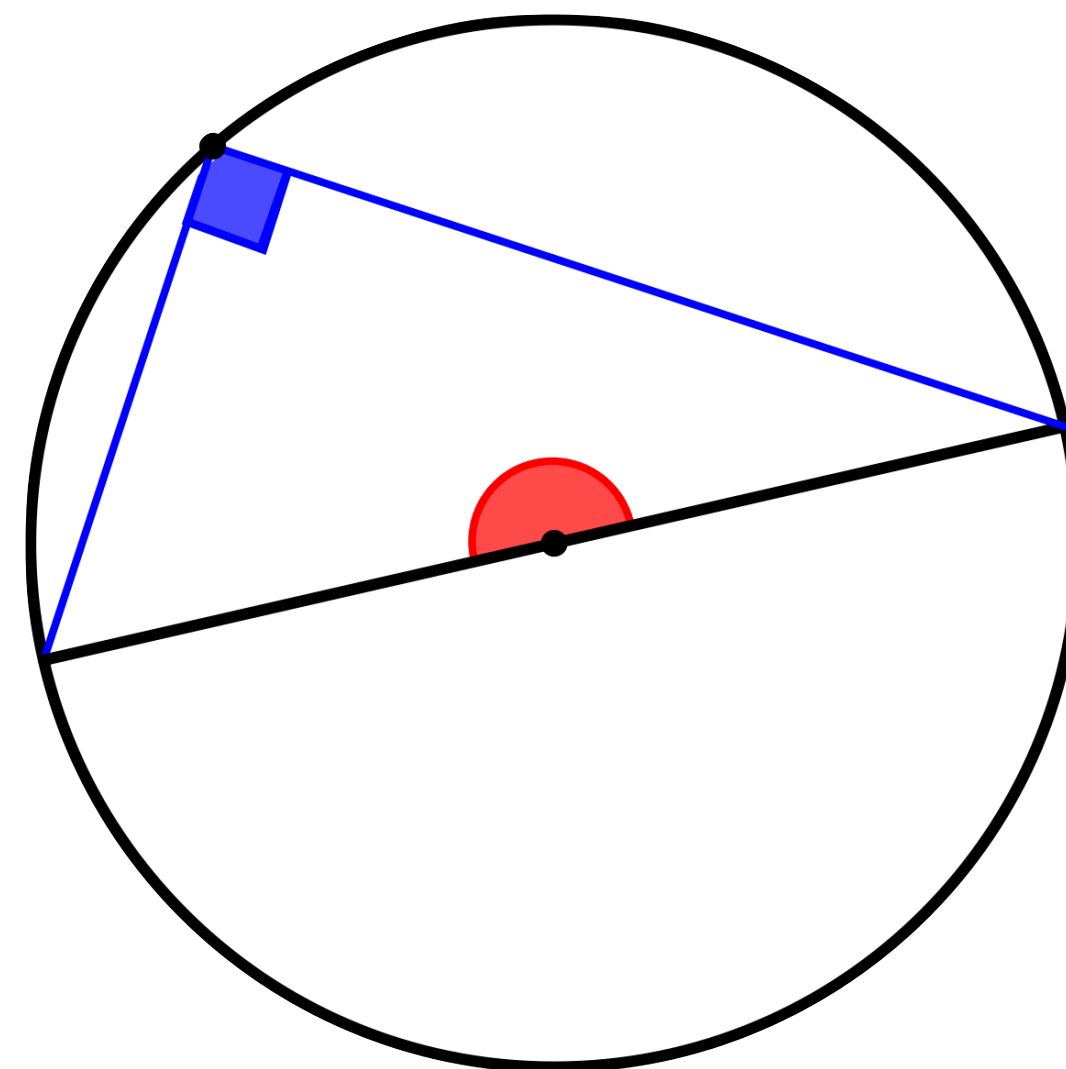
## Zentri-Peripheriewinkelsatz

Der **Zentriwinkel** über der **Sehne** eines Kreises ist stets doppelt so groß wie ein **Peripheriewinkel** auf derselben Seite derselben Sehne.



## Peripheriewinkelsatz

Alle **Peripheriewinkel** auf derselben Seite über derselben Sehne sind gleich groß.



## Satz des Thales

Alle **Peripheriewinkel** über dem **Durchmesser** eines Kreises haben eine Größe von  $90^\circ$ .

## und seine Umkehrung

Der Mittelpunkt der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist Mittelpunkt eines Kreises durch alle drei Ecken des Dreiecks.

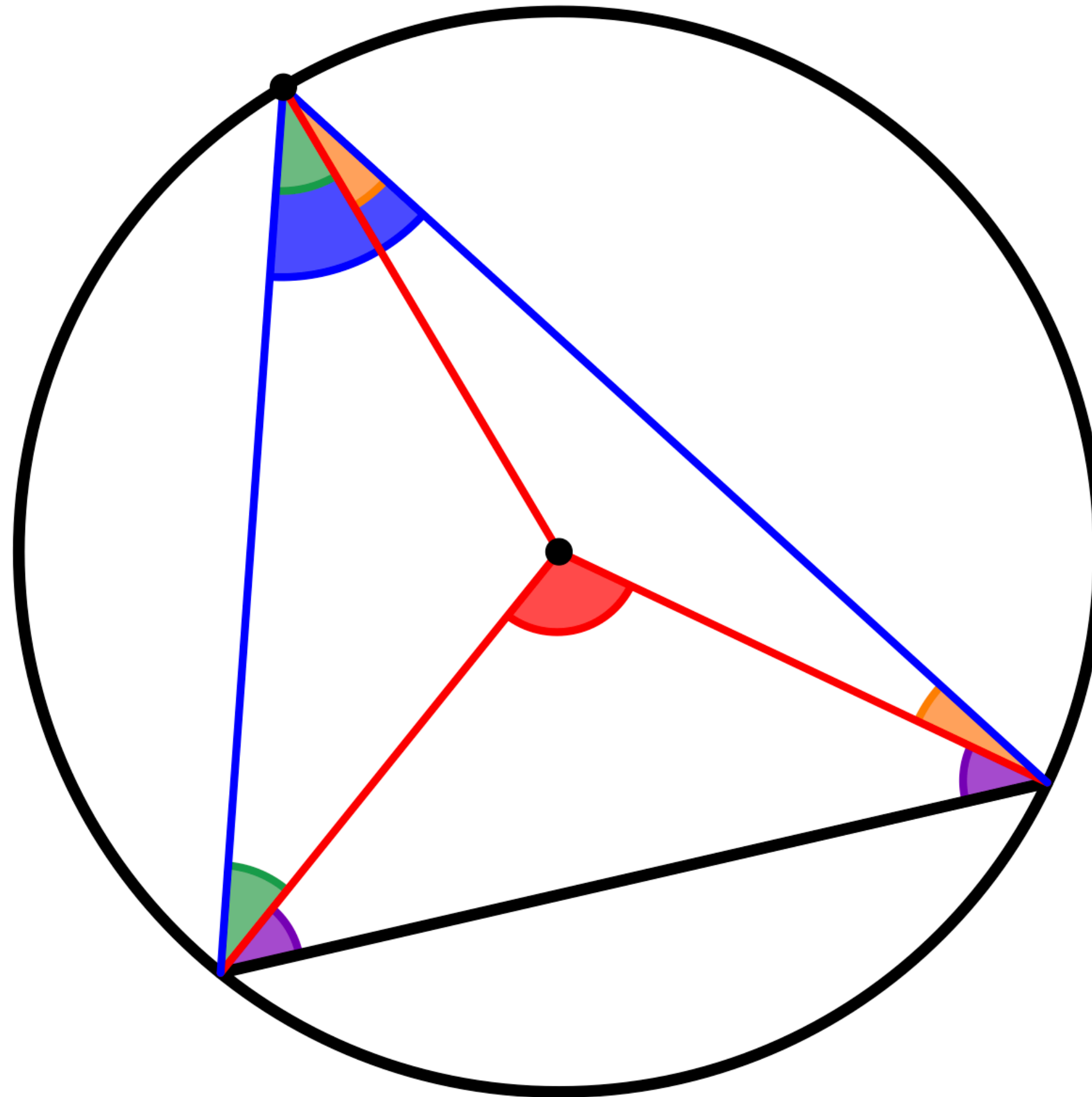
- Welche **Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

# Sätze am Kreis

## Zentri-Peripheriewinkelsatz

Der **Zentriwinkel** über der **Sehne** eines Kreises ist stets doppelt so groß wie ein **Peripheriewinkel** auf derselben Seite derselben Sehne.

## Peripheriewinkelsatz Satz des Thales und seine Umkehrung



- Welche **Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

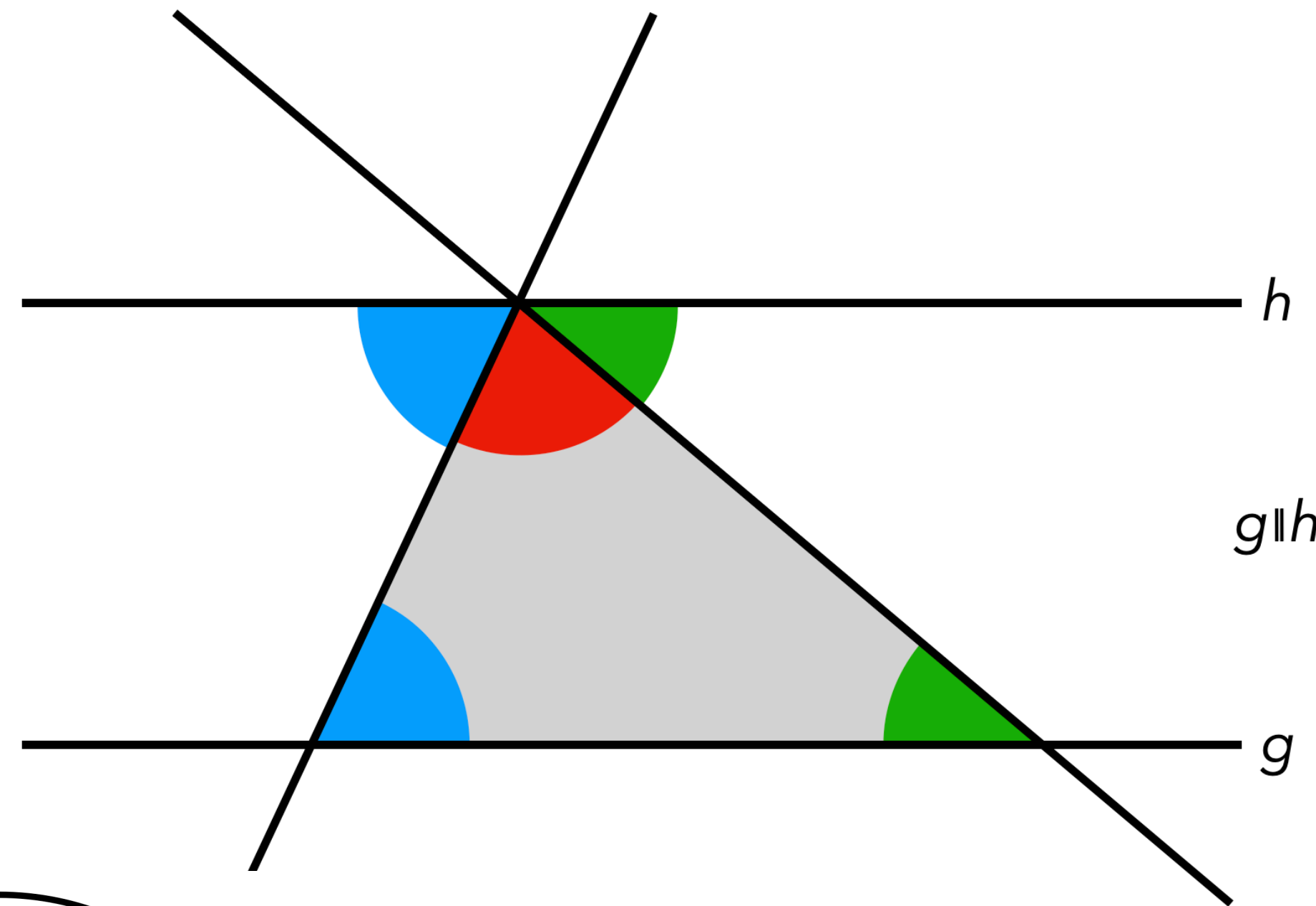
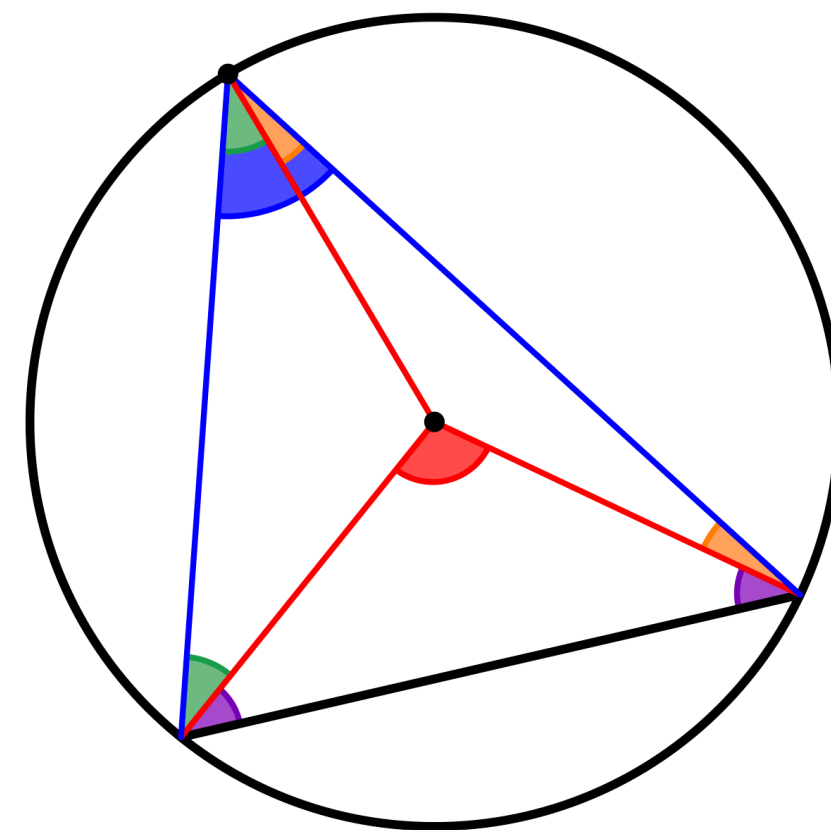
# Sätze am Kreis

Seite-Winkel-Beziehung  
Basiswinkelsatz  
Innenwinkelsatz

## Zentri-Peripheriewinkelsatz

Der **Zentriwinkel** über der **Sehne** eines Kreises ist stets doppelt so groß wie ein **Peripheriewinkel** auf derselben Seite derselben Sehne.

Peripheriewinkelsatz  
Satz des Thales  
und seine Umkehrung

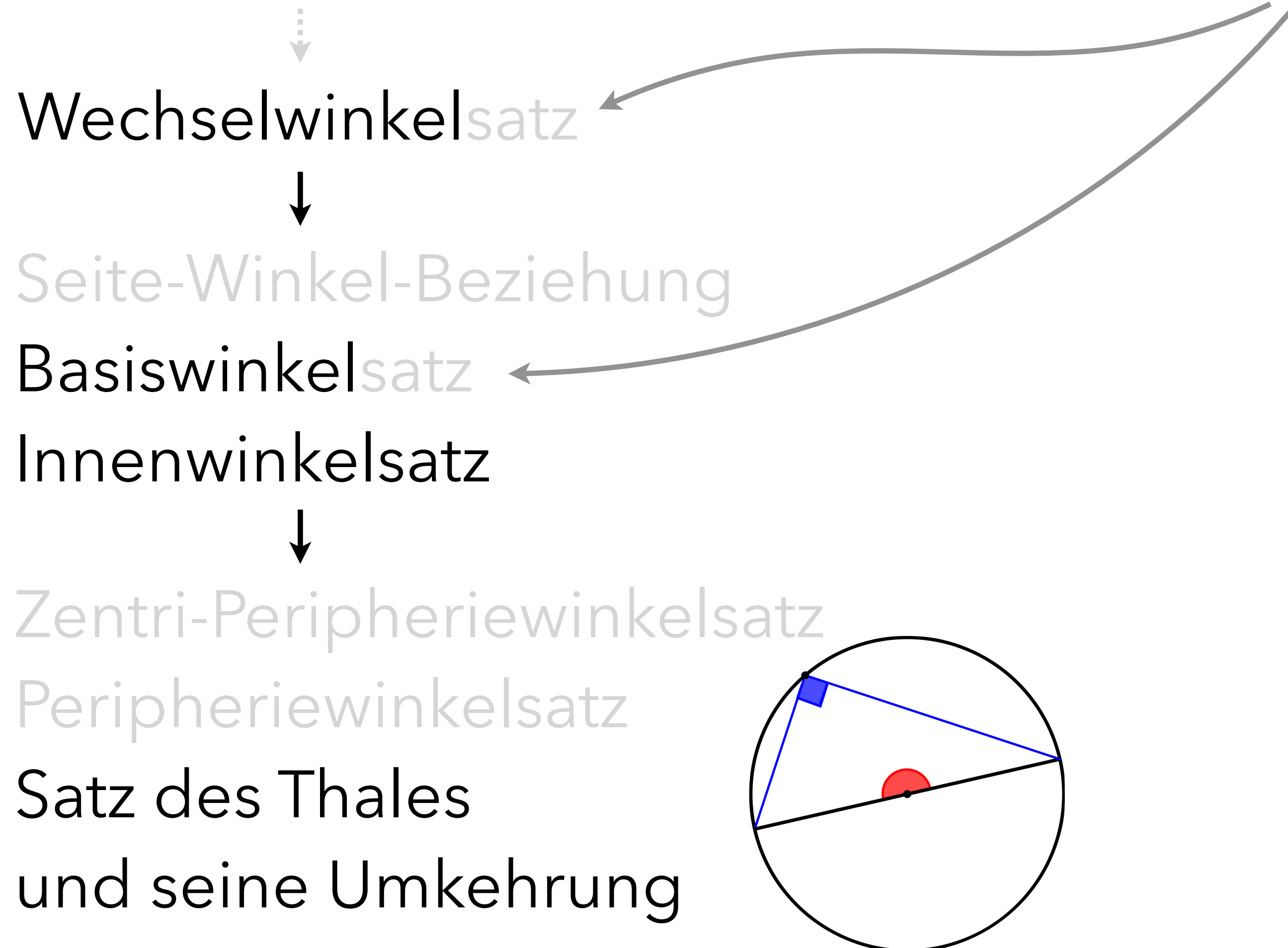


- Welche **Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?



# Sätze am Kreis

Axiome der Elementargeometrie empirische Erarbeitung



- Welche **Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

# Sätze am Kreis

Wechselwinkelsatz

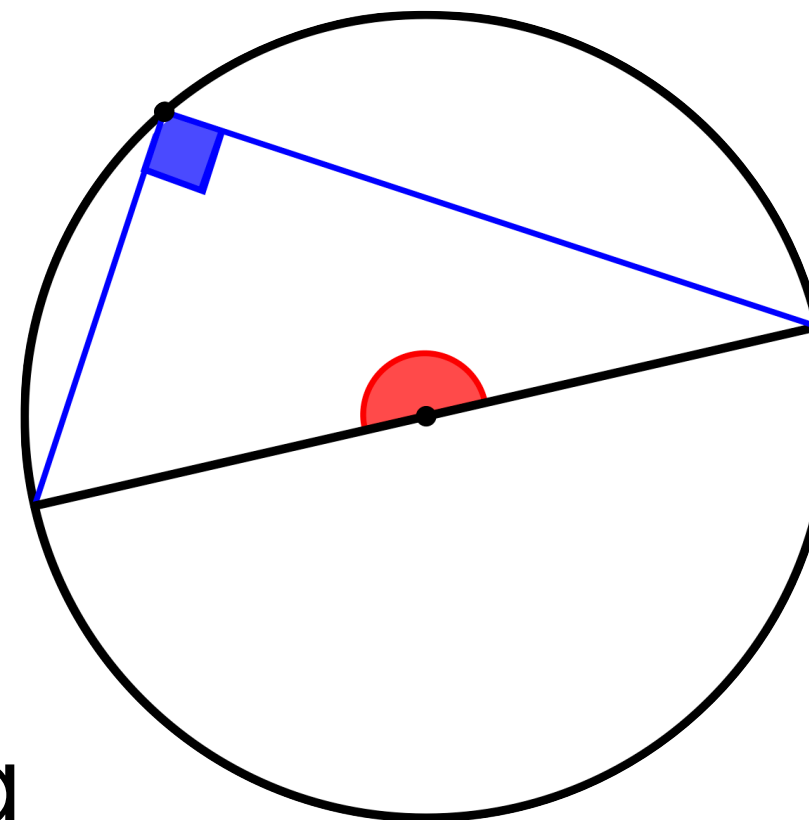


Basiswinkelsatz

Innenwinkelsatz



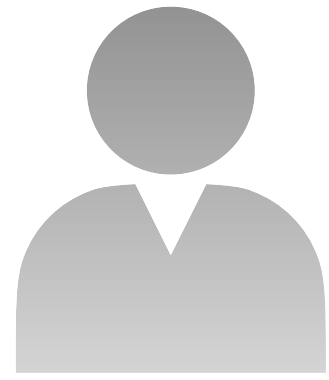
Satz des Thales  
und seine Umkehrung



**Erster Entwurf eines Lernpfades  
aufgrund der stoffdidaktischen  
Analyse auf der **formalen Ebene****

- **Welche Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?





## Welche Quellen helfen euch, diese Fragen zu beantworten?

- **fachmathematische Literatur**
- **Literatur über »Schulmathematik vom höheren Standpunkt«**
- **fachdidaktische Literatur (v. a. Bücher zur »Didaktik der ...«)**
- **Schulbücher**
- **Bildungsstandards, Rahmenlehrplan, schulinterne Curricula**

- **Welche Fachinhalte** sollen erarbeitet werden?
- Wie können die Fachinhalte **formal begründet** werden?
- Wie kann das **Netzwerk** aus den Fachinhalten **logisch strukturiert** werden?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

# Schulmathematik vom höheren Standpunkt

fachliche und verstehensorientierte Durchdringung der Schulmathematik, »ohne im vollen Umfang auf das Instrumentarium der kanonischen [...] [Hochschulmathematik] zurückgreifen zu müssen«

(Danckwerts, 2013, S. 87)



Schulmathematik → Hochschulmathematik → Schulmathematik

**»doppelte Diskontinuität«**

(Klein, 1967, S. 1; Erstausgabe 1908)

# Schulmathematik vom höheren Standpunkt

Weiterführende Literatur

## Felix Klein

*Elementarmathematik vom höheren  
Standpunkte aus*

(Klein, 1925, 1955, 1967)

*Mathematik Neu Denken*

(Beutelspacher et al., 2012)

## Hans Freudenthal

*Mathematik als  
pädagogische Aufgabe*

(Freudenthal, 1973b, 1973c,  
auch auf Englisch: Freudenthal, 1973a)

*Zur doppelten Diskontinuität in der  
Gymnasiallehrerbildung*

(Ableitinger et al., 2013)

# Mathematik strukturieren



1

Sachgebiete

2

Leitideen

3

Stoffelement-Kategorien

# 1 Sachgebiete

Arithmetik

$$9 + 4$$

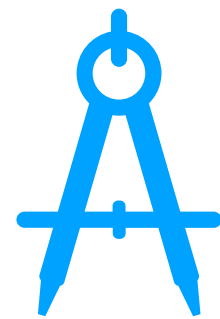
*Leitfaden Arithmetik*  
(Benölken et al., 2018)

Algebra

$$2x = 8$$

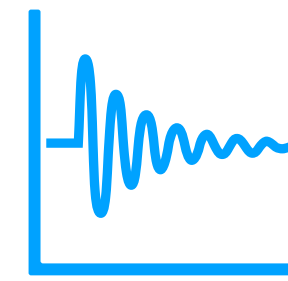
*Didaktik der  
Algebra*  
(Weigand et al., 2022)

Geometrie



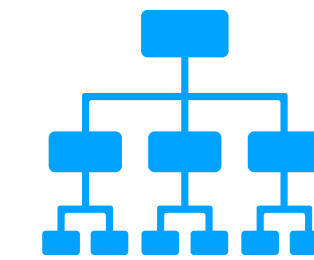
*Didaktik der  
Geometrie für die  
Sekundarstufe I*  
(Weigand et al., 2018)

Analysis



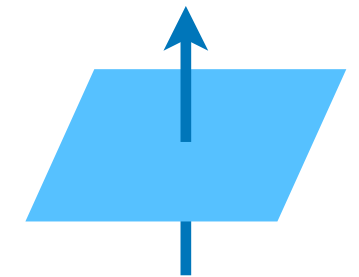
*Didaktik der  
Analysis*  
(Greefrath et al., 2016)

Stochastik



*Didaktik der  
Stochastik für die  
Sekundarstufe I*  
(Krüger et al., 2015)

Lin. Algebra / Analy-  
tische Geometrie

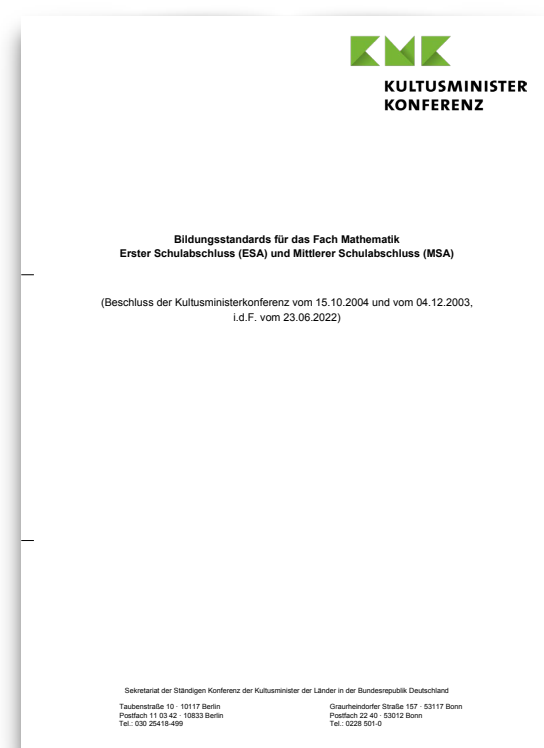


*Didaktik der  
Analytischen  
Geometrie und  
Linearen Algebra*  
(Henn & Filler, 2015)

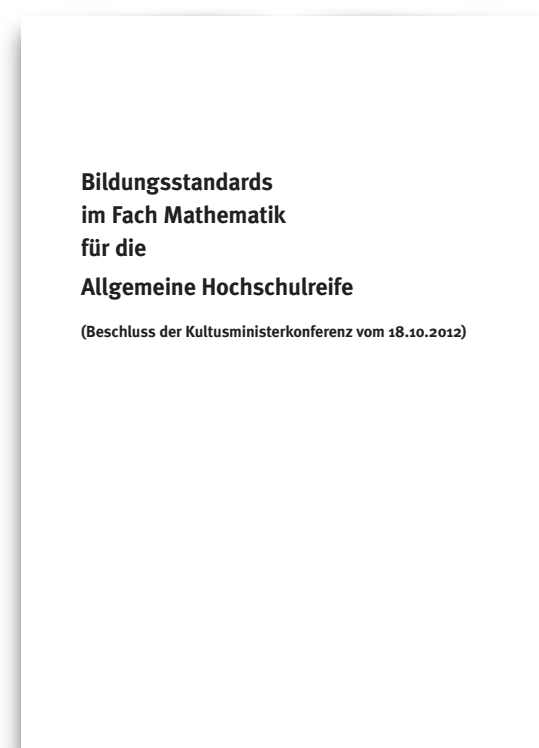
*Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*  
(Tietze et al., 2000a, 2000b, 2002)

## 2 Leitideen (inhaltsbezogene Kompetenzen)

»Kulturhoheit der Länder«  
(Grundgesetz, Artikel 30)



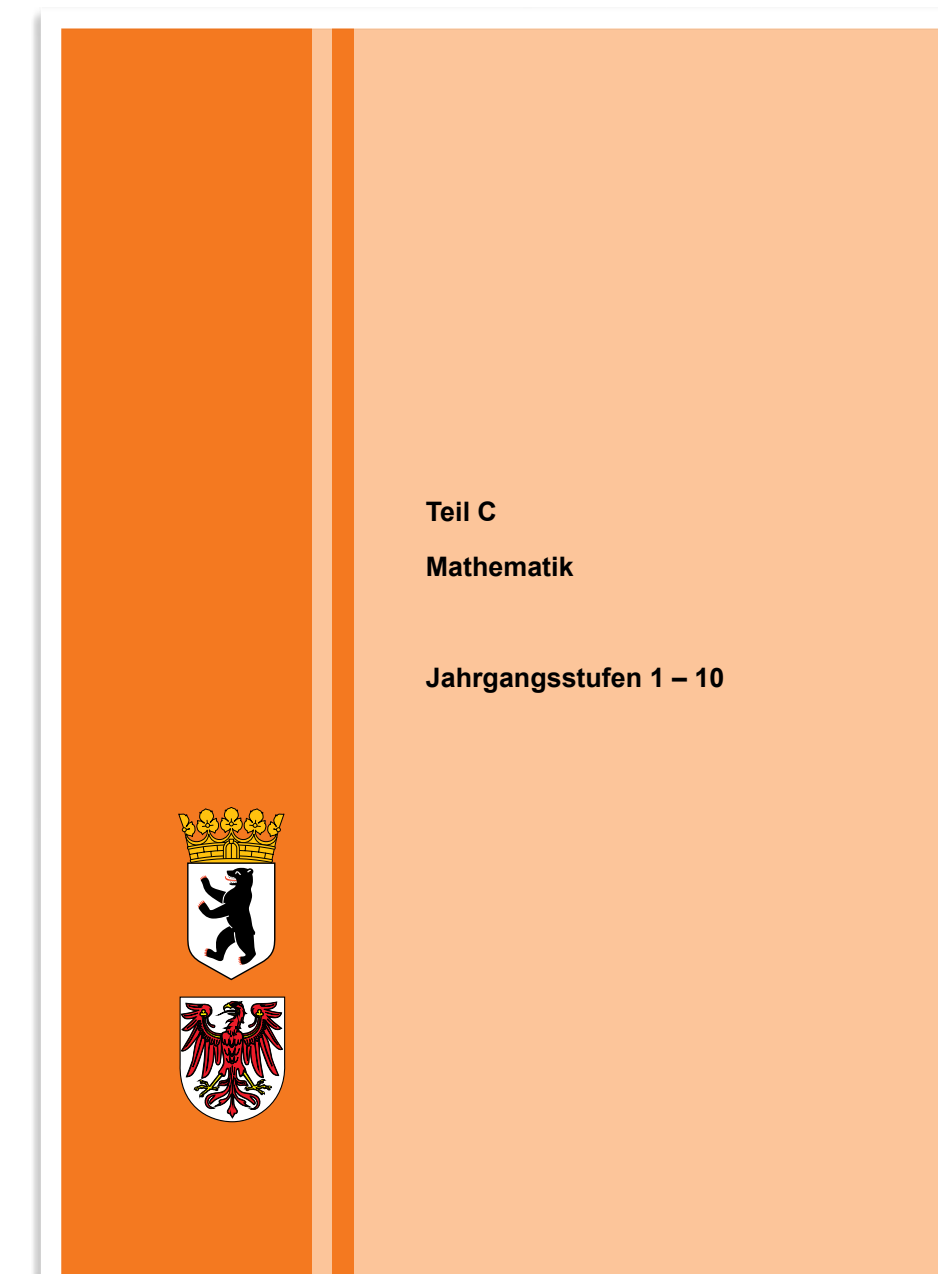
(KMK, 2022)



(KMK, 2012)



(CC-BY-SA-3.0 TUBS, [https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Locator\\_map\\_Brandenburg\\_in\\_Germany.svg](https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Locator_map_Brandenburg_in_Germany.svg))

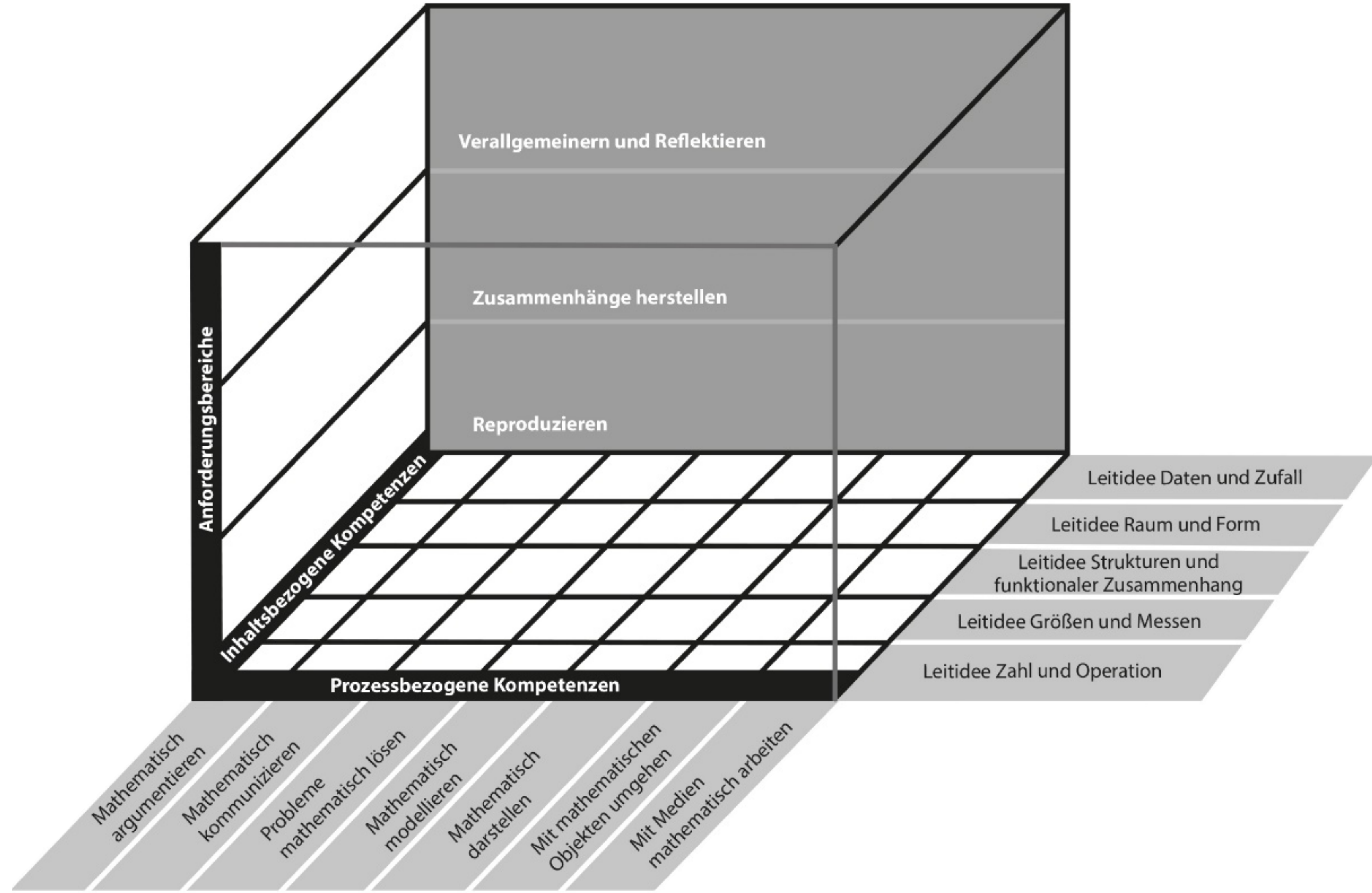


(MBJS, 2023)



(MBJS, 2022)





(KMK, 2022, S. 8)

# Leitidee Zahl und Operation

Diese Leitidee umfasst sinntragende Vorstellungen und Darstellungen von Zahlen und Operationen sowie die Nutzung von Rechengesetzen und Kontrollverfahren. Dazu gehören die sachgerechte Nutzung von Prozent- und Zinsrechnung ebenso wie kombinatorische Überlegungen und Verfahren, denen Algorithmen zu Grunde liegen. Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe I sind die Arithmetik, Algebra und Stochastik.

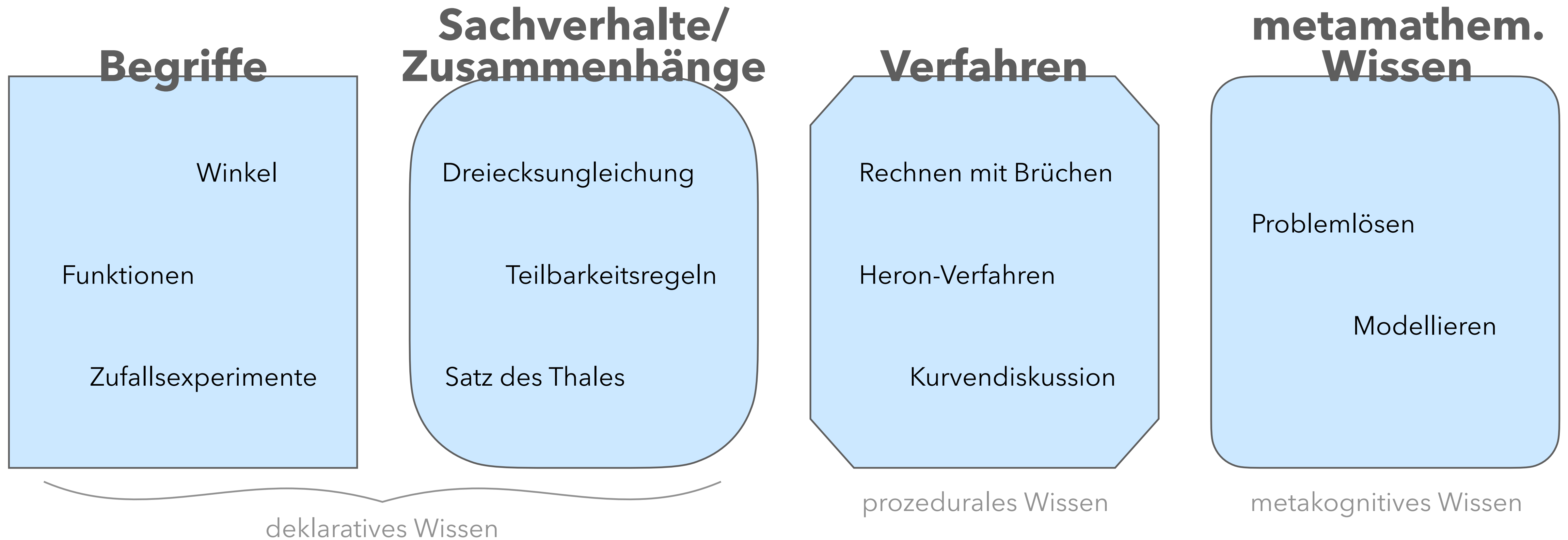
## 2 Leitideen

### Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen, insbesondere von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit,
- nutzen sinntragende Vorstellungen von reellen Zahlen (z. B. Vollständigkeit der Zahlengerade),
- nutzen sinntragende Vorstellungen von Operationen rationaler Zahlen (z. B. schrittweiser, halbschriftlicher Verfahren),
- untersuchen Zahlen nach ihren Faktoren, in einfachen Fällen ohne digitale Mathematikwerkzeuge,
- stellen Zahlen der Situation angemessen dar, z.B. unter anderem in Zehnerpotenzschreibweise,
- rechnen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen, die im täglichen Leben vorkommen, sowohl zur Kontrolle als auch im Kopf und erklären die Bedeutung der Rechenoperationen,
- beschreiben die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$  sowie von  $\mathbb{Q}$  nach  $\mathbb{R}$  an Beispielen,
- erläutern an Beispielen die verschiedenen Vorstellungen zum Bruchbegriff (insbesondere Teile eines oder mehrerer Ganzer, relative Anteile),
- nutzen Rechengesetze (z. B. Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz), auch zum vorteilhaften Rechnen,
- nutzen Überschlagsrechnungen zur Orientierung und zur Kontrolle,
- runden Zahlen dem Sachverhalt entsprechend sinnvoll,
- prüfen und interpretieren Ergebnisse, auch in Sachsituationen,
- erläutern an Beispielen den Zusammenhang zwischen Rechenoperationen und deren Umkehrungen und nutzen diese Zusammenhänge,
- verwenden Prozent- und Zinsrechnung vorstellungsbasiert (z. B. Prozentstreifen) und sachgerecht,
- erläutern Potenzen und Wurzeln und berechnen einfache Potenzen und Wurzeln,
- wenden insbesondere lineare und quadratische Funktionen sowie Exponentialfunktionen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Problemen an,
- wählen, beschreiben und bewerten Vorgehensweisen und Verfahren, denen Algorithmen bzw. Kalküle zu Grunde liegen und führen diese aus (z. B. schriftliche Rechenoperationen sowie bei Wurzeln und Potenzen),
- implementieren ein algorithmisches Verfahren (z. B. Heron-Verfahren zur Bestimmung von Quadratwurzeln, Intervallschachtelung) mit digitalen Mathematikwerkzeugen,
- führen in konkreten Situationen systematische Zählprinzipien aus (z. B. Anzahl Händeschütteln, wenn man jeder Person die Hand gibt),
- führen Zahlenfolgen fort, auch unter Verwendung von Variablen als allgemeine Zahl.

(KMK, 2022, S. 15 f.)

# 3 Stoffelement-Kategorien



(Vollrath & Roth, 2012, S. 48 ff.)



# Kenntnisse/Fähigkeiten/Fertigkeiten über ...

## Begriffe

- die Bezeichnung des Begriffs kennen
- Beispiele angeben und jeweils begründen können, weshalb es sich um ein Beispiel handelt
- begründen können, weshalb etwas nicht unter den Begriff fällt
- charakteristische Eigenschaften des Begriffs kennen
- Oberbegriffe, Unterbegriffe und Nachbarbegriffe kennen
- mit dem Begriff beim Argumentieren und Problemlösen arbeiten können

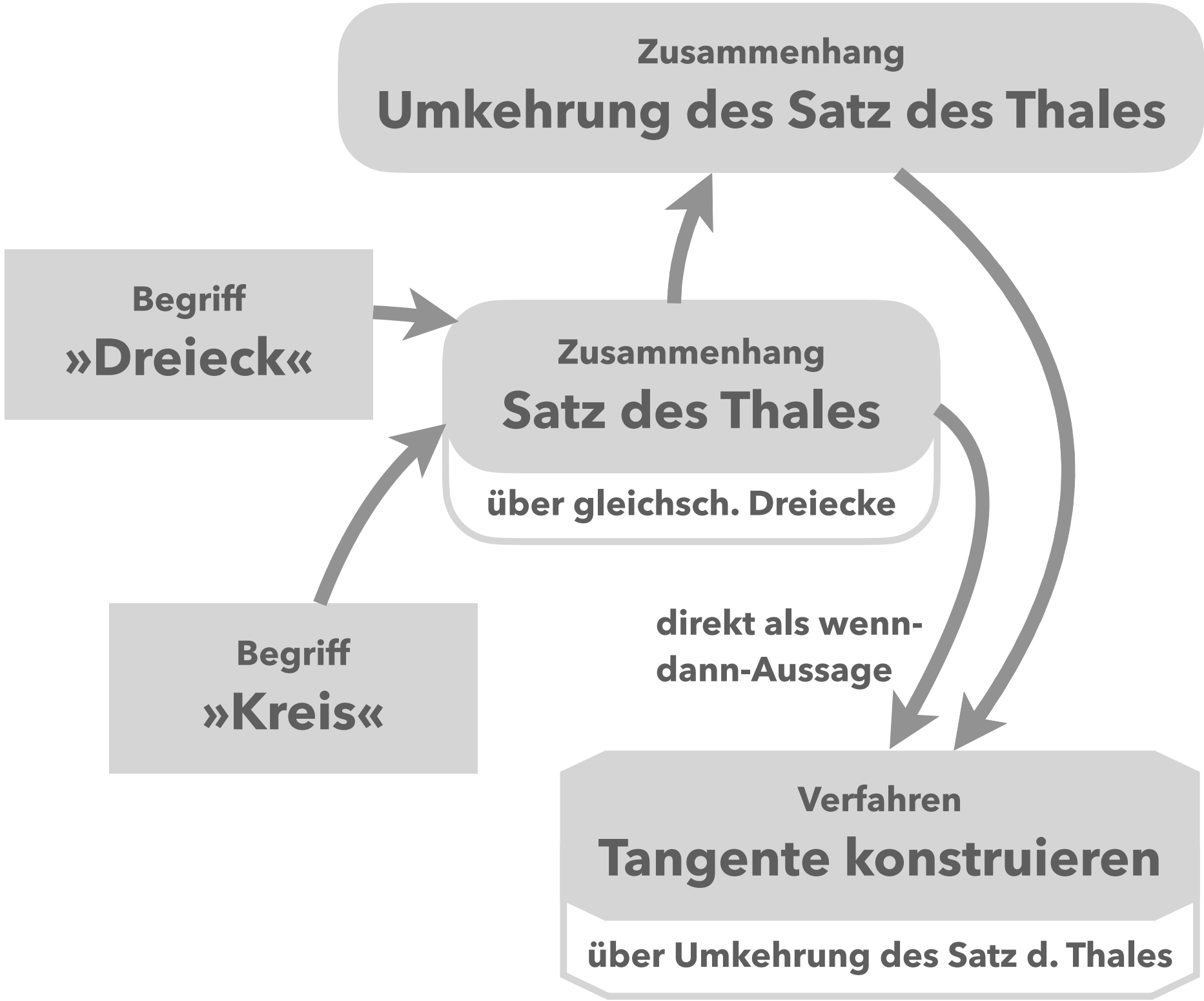
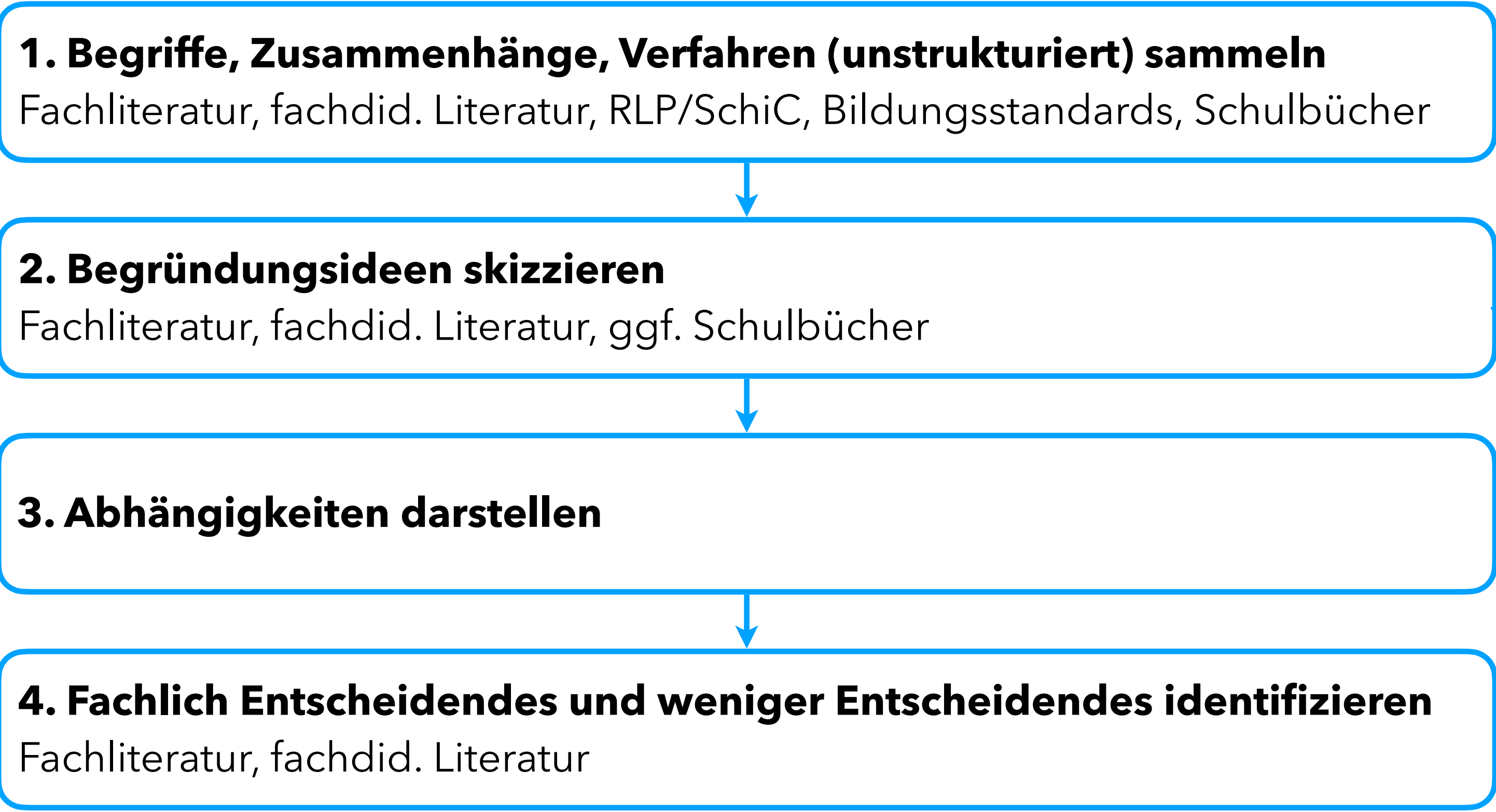
## Sachverhalte/ Zusammenhänge

- den Sachverhalt angemessen formulieren können
- Beispiele für den Sachverhalt angeben können
- wissen, unter welchen Voraussetzungen der Sachverhalt gilt
- den Sachverhalt begründen können
- Konsequenzen des Sachverhalts kennen
- Anwendungen des Sachverhalts kennen

## Verfahren

- wissen, was man damit erreicht
- wissen, wie es geht
- es auf Beispiele anwenden können
- wissen, unter welchen Voraussetzungen es funktioniert
- wissen, warum es funktioniert

(Vollrath & Roth, 2012, S. 48 ff.)



## Spezifizieren

## Strukturieren

Welche **Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren** sollen erarbeitet werden?

Wie können die Zusammenhänge und Verfahren **formal begründet** werden?

Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren **logisch strukturiert** werden?

Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalten sind aus fachlicher Perspektive entscheidend, welche weniger?

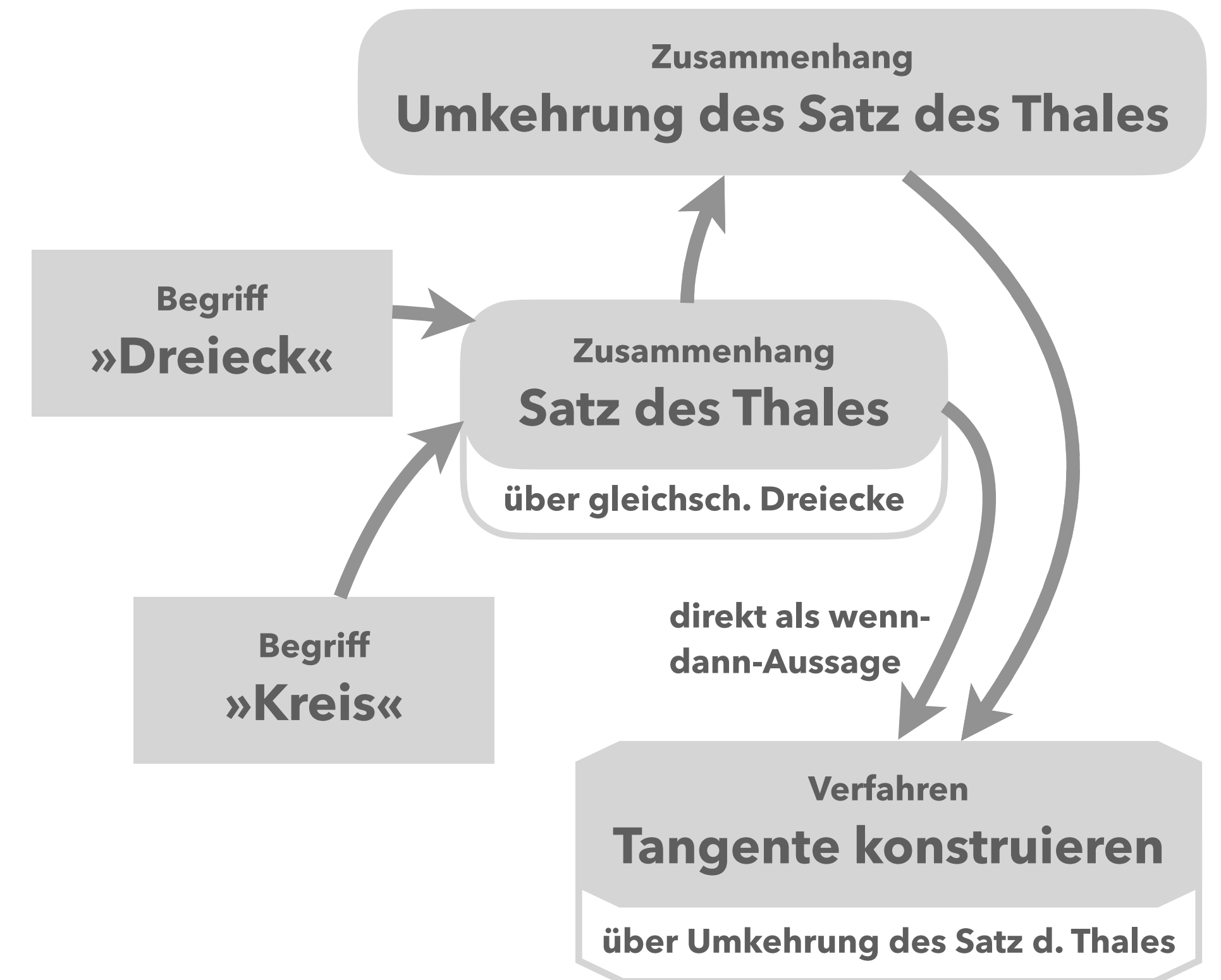
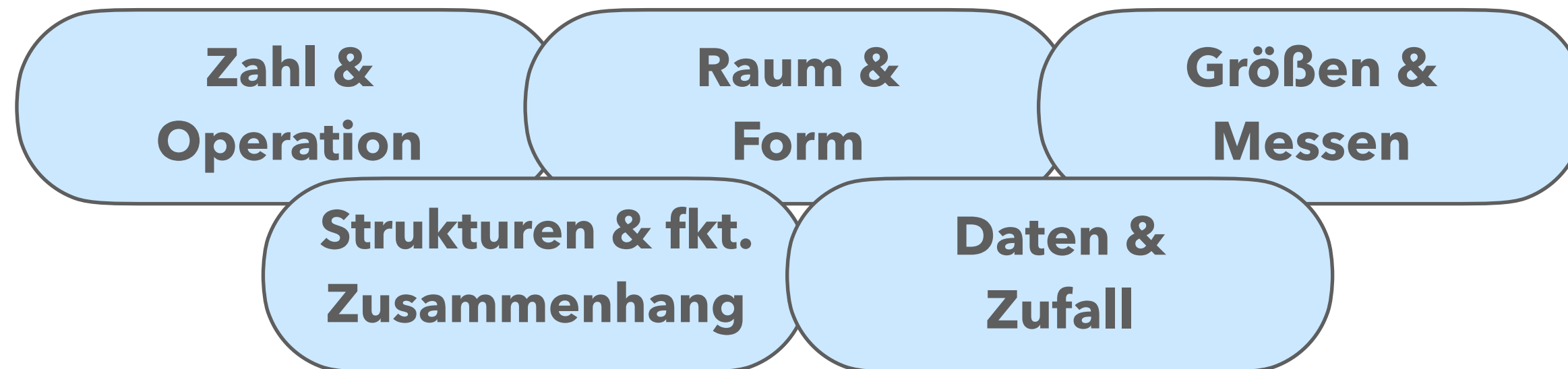
# Zusammenfassung

## Kapitel 2 - (Hoch-)Schulmathematik strukturieren

### Stoffelement-Kategorien



### Leitideen





- Ableitinger, C., Kramer, J., & Prediger, S. (Hrsg.). (2013). *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8>
- Benölken, R., Gorski, H.-J., & Müller-Philipp, S. (2018). *Leitfaden Arithmetik: Für Studierende der Lehrämter*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-22852-1>
- Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2012). *Mathematik Neu Denken*. Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8250-9>
- Danckwerts, R. (2013). Angehende Gymnasiallehrer(innen) brauchen eine „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“! In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 77–94). Springer Fachmedien Wiesbaden. [https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8_5)
- Freudenthal, H. (1973a). *Mathematics as an Educational Task*. Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2>
- Freudenthal, H. (1973b). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 1). Klett.
- Freudenthal, H. (1973c). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 2). Klett.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; 4. Aufl.). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>

*Grundgesetz für die Bundesrepublik Deutschland.* <https://www.gesetze-im-internet.de/gg/BJNR000010949.html>

Henn, H.-W., & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden.* Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43435-2>

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 33-67. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8>

Klein, F. (1925). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus II. Geometrie.* Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-90852-1>

Klein, F. (1955). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus III. Präzisions- und Approximationsmathematik* (C. H. Müller, Hrsg.). Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-00246-9>

Klein, F. (1967). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus I. Arithmetik, Algebra, Analysis.* Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-11652-4>

Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I.* Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3>

Lompscher, J. (1985). Die Lerntätigkeit als dominierende Tätigkeit des jüngeren Schülers. In J. Lompscher (Hrsg.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 23-52). Volk und Wissen.

- [MBS] Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2023). *Rahmenlehrplan Brandenburg. Teil C, Mathematik, Jahrgangsstufen 1–10*. [https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche\\_Fassung/getrennt\\_2023/BB\\_RLP\\_2023\\_Teil\\_C\\_Ma\\_GenF\\_1.pdf](https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/getrennt_2023/BB_RLP_2023_Teil_C_Ma_GenF_1.pdf)
- [MBS] Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2022). *Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe im Land Brandenburg*. [https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale\\_oberstufe/curricula/2022/Teil\\_C\\_RLP\\_GOST\\_2022\\_Mathematik.pdf](https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale_oberstufe/curricula/2022/Teil_C_RLP_GOST_2022_Mathematik.pdf)
- [KMK] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland . (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). [https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen\\_beschluesse/2012/2012\\_10\\_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf](https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf)
- [KMK] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022a). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022). [https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen\\_beschluesse/2022/2022\\_06\\_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf](https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf)
- Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000a). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis* (2. Aufl.). Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-90568-0>
- Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000b). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-86479-6>



Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2002). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 3: Didaktik der Stochastik*. Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-83144-6>

Vollrath, H.-J., & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (F. Padberg, Hrsg.; 2. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2855-4>

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8>

Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: Nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-64660-1>