Unidade II

5 SÉRIES DE POTÊNCIAS

5.1 Introdução

O conteúdo abordado anteriormente fornece a base teórica necessária para compreender os assuntos desta segunda unidade sobre **séries de potências**, que são somas que se parecem com polinômios infinitos.

O nome séries de potências vem do fato de serem séries definidas como infinitas e de potências de alguma variável x. Na computação, trabalhar com potências é ideal para o processamento de dados, pois o torna mais rápido. Além disso, é possível operar tais potências de maneira eficiente, podendo somá-las, subtraí-las, multiplicá-las, derivá-las, integrá-las etc.

Essa estratégia é usada, por exemplo, para integrar funções que não têm antiderivadas elementares, tais como a integral clássica $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$, em que nenhuma das técnicas de integração (substituição ou por partes) permite calculá-la, para resolver as equações diferenciais e também para aproximar as funções por polinômios. Por isso, vamos aprender como representar certos tipos de funções como somas de séries de potências pela manipulação de séries geométricas ou pela diferenciação ou integração de tais termos.

Esta unidade tem, portanto, a pretensão de incentivá-lo a conhecer, problematizar e refletir sobre o ensino das séries de potências.

Vamos em frente?

5.2 Definição

Segundo Thomas *et al.* (2012, p. 44):

- Uma expressão da forma $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots + C_nx^n + \cdots$ é uma série de potências centrada em x = 0.
- Uma expressão da forma $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n + \cdots$ é uma série de potências centrada em x = a.

Nas quais:

- O termo $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ é o enésimo termo; o número a é o centro.
- Para cada x fixado, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ é uma série numérica.
- Os valores $C_0, C_1, C_2, C_3, \cdots C_n, \cdots$ são os coeficientes da série.

Veja alguns exemplos:

Exemplo 1

Para a série a seguir, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

- O termo $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é o enésimo termo da série.
- a = 0 é o centro da série.
- Os coeficientes $C_0, C_1, C_2, C_3, \cdots C_n, \cdots$ são todos iguais a 1.

Observe que, se fixarmos x (por exemplo, x = 2), a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots 2^n + \ldots$, que é uma série geométrica em que a = 1 e a razão é r = 2.

Exemplo 2

Para a série a seguir, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-4)^n = 1 + (x-4) + (x-4)^2 + (x-4)^3 + \cdots + (x-4)^n + \cdots$$

- O termo $\sum_{n=0}^{\infty} (x-4)^n$ é o enésimo termo da série.
- a = 4 é o centro da série.
- Os coeficientes $C_0, C_1, C_2, C_3, \cdots C_n, \cdots$ são todos iguais a 1.

Observe que se fixarmos x (por exemplo, x = 1), a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (x-4)^n$ é a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 3^n$, que é uma série alternada.

Exemplo 3

Para a série a seguir, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}(x+2)^n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(x+2)+\frac{1}{3}(x+2)^2+\frac{1}{3}(x+2)^3+\cdots+\frac{1}{3}(x+2)^n+\cdots$$

- O termo $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}(x+2)^n$ é o enésimo termo da série.
- a = -2 é o centro da série.
- Os coeficientes $C_0, C_1, C_2, C_3, \cdots C_n, \cdots$ são todos iguais a 1/3.

Observe que se fixarmos x (por exemplo, x = 3), a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}(x+2)^n$ é a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot(5)^n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot 5+\frac{1}{3}\cdot 5^2+\frac{1}{3}\cdot 5^3+\ldots$, que é uma série geométrica em que a = 1/3 e a razão é r = 5.

6 CONVERGÊNCIA DE UMA SÉRIE DE POTÊNCIAS

Estudamos vários critérios para determinar se uma série infinita converge ou diverge. E no caso das séries de potências? Como determinar se elas convergem ou divergem? Além disso, será que a série de potência converge para qualquer valor de x? Descobrir a resposta para essas questões é o nosso objetivo neste tópico.

6.1 Séries geométricas

Vamos inicialmente estudar as séries de potências que são séries geométricas. Para tais séries, você vai perceber que é fácil determinar para quais valores de x elas convergem (intervalo de convergência) e, além disso, para qual função elas convergem.

Para introduzir esses casos, vamos iniciar com o exemplo mais simples e clássico que temos:

Exemplo 1

A série de potências que segue converge para quais valores de x? Qual é o seu intervalo de convergência?

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$$

Lembrete

A série geométrica é definida por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ..., \text{ em que } a,r \in R \text{ e } a \neq 0.$$

- Se $|r| < 1$, a série geométrica converge e $S = \dfrac{a}{1-r}$.
- Se $|r| \geq 1$, a série geométrica diverge.

Esta série é uma série geométrica de razão r = x e a = 1. É convergente se $|r| < 1$, ou seja, $|x| < 1$ ou $-1 < x < 1$.

Portanto, podemos dizer que a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ é convergente dentro do "raio de convergência" $-1 < x < 1$. Sua soma é: $S = \dfrac{1}{1-x}$, ou seja, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$.

Agora podemos dizer que dentro do raio de convergência $-1 < x < 1$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ representa a função $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Assim, temos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

(Representação da função $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ em série de potência).

Na igualdade $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$, a expressão $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ define uma função cujo domínio é o conjunto de todos os números reais diferentes de 1, e a expressão $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots)$ define uma função cujo domínio é o seu intervalo de convergência.

Portanto, a igualdade só é válida apenas no último domínio, ou seja, para valores dentro do intervalo -1 < x < 1.

Veja algumas aproximações da função $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ graficamente, e observe que elas estão centradas no zero.

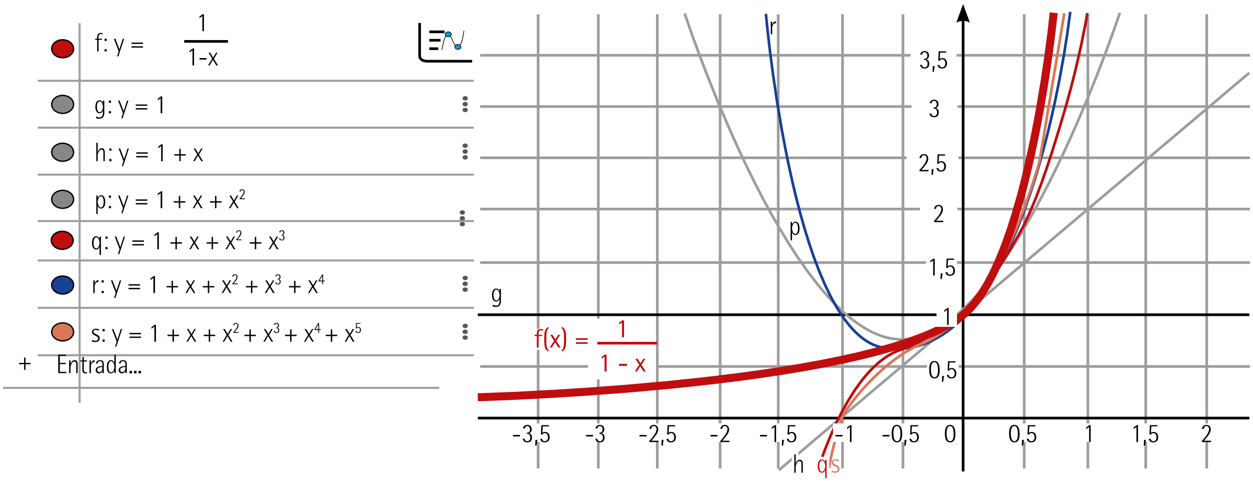

Figura 15 – Gráfico de $y = \dfrac{1}{1-x}$ e seis de suas aproximações polinomiais

Exemplo 2

A série de potências a seguir converge para quais valores de x? Qual é o seu intervalo de convergência?

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-5)^n = 1+(x-5)+(x-5)^2+(x-5)^3+\cdots+(x-5)^n+\cdots$$

Esta série é uma série geométrica de razão r = x–5 e a = 1. É convergente se $|r|<1$, ou seja,

$$|x-5|<1$$

$$-1<x-5<1 \Rightarrow -1+5<x<1+5 \Rightarrow 4<x<6$$

Portanto, podemos dizer que a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}(x-5)^n = 1+(x-5)+(x-5)^2+(x-5)^3+\cdots+(x-5)^n+\cdots$ é convergente dentro do "raio de convergência" $4<x<6$.

Sua soma é: $S=\dfrac{1}{1-(x-5)}=\dfrac{1}{6-x}$, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-5)^n = 1+(x-5)+(x-5)^2+(x-5)^3+\cdots+(x-5)^n+\cdots=\frac{1}{6-x}.$$

Agora podemos dizer que dentro do raio de convergência $4<x<6$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}(x-5)^n = 1+(x-5)+(x-5)^2+(x-5)^3+\cdots+(x-5)^n+\cdots$ representa a função $f(x)=\dfrac{1}{6-x}$.

Assim temos que

$$\frac{1}{6-x}=1+(x-5)+(x-5)^2+(x-5)^3+\cdots+(x-5)^n+\cdots$$

(Representação da função $f(x)=\dfrac{1}{6-x}$ em série de potência).

Veja algumas aproximações da função $f(x)=\dfrac{1}{6-x}$ graficamente. Observe que as aproximações estão centradas no 5.

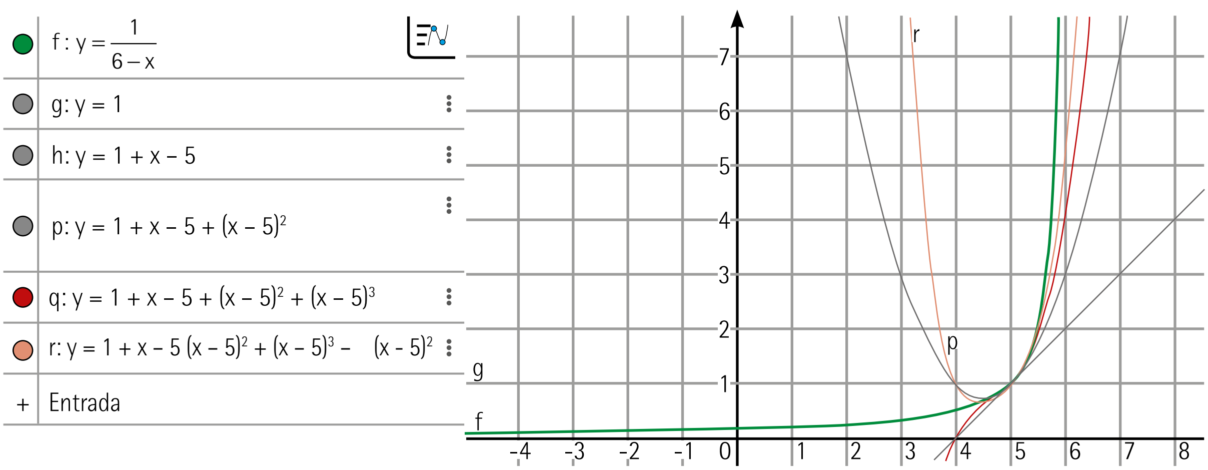

Figura 16 – Gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{6-x}$ e cinco de suas aproximações polinomiais

Exemplo 3

Dada a série de potência

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n(x-3)^n=1-\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{9}(x-3)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^n(x-3)^n+\cdots$$

Determine qual é a função representada por essa série e calcule o seu intervalo de convergência.

Essa é uma série geométrica com a = 1 e razão $r=-\dfrac{1}{3}(x-3)=-\dfrac{(x-3)}{3}$. Ela converge se $|r|<1$, ou seja, se $\left|-\dfrac{x-3}{3}\right|<1$. Resolvendo este módulo, temos:

$$\left|-\frac{x-3}{3}\right|<1\Rightarrow -1<\frac{x-3}{3}<1\Rightarrow -3<x-3<3\Rightarrow -3+3<x<3+3\Rightarrow 0<x<6$$

Assim, podemos concluir que a série de potência é convergente no intervalo $0<x<6$ e sua soma é

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\left(-\frac{x-3}{3}\right)} = \frac{1}{1+\frac{x-3}{3}} = \frac{1}{\frac{3+x-3}{2}} = \frac{1}{\frac{x}{2}} = \frac{2}{x}$$

Então, podemos dizer que dentro do raio de convergência $0 < x < 6$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n (x-3)^n = 1-\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{9}(x-3)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^n (x-3)^n+\cdots$ representa a função $f(x)=\frac{2}{x}$.

Assim, temos que:

$$\frac{2}{x} = 1-\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{9}(x-3)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^n (x-3)^n+\cdots$$

(Representação da função $f(x)=\frac{2}{x}$ em série de potência).

Veja algumas aproximações da função $f(x)=\frac{2}{x}$ graficamente. Observe que as aproximações estão centradas no 3.

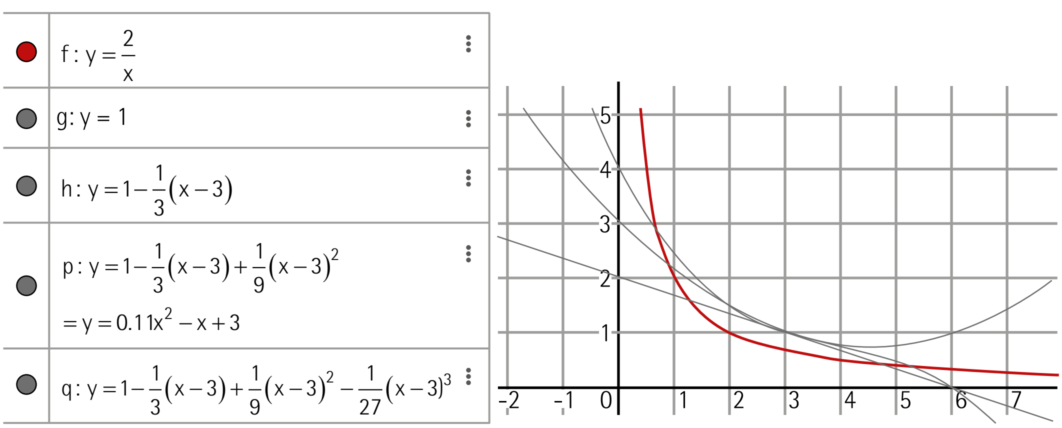

Figura 17 – Gráfico de $f(x)=\frac{2}{x}$ e quatro de suas aproximações polinomiais

As séries de potências estudadas até agora são séries geométricas cujos intervalos de convergência conseguimos encontrar facilmente. Agora, e no caso das séries de potências que não são geométricas? No tópico seguinte estudaremos tais séries e determinaremos o intervalo e o raio de convergência. Vamos lá?

6.2 Séries não geométricas: raio de convergência e intervalo de convergência

Para séries não geométricas, começamos observando que qualquer série de potências da forma $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ sempre converge em x = a, assegurando-nos pelo menos uma coordenada na reta em que a série deve convergir. Mas além da convergência trivial em x = a, quais são as outras possibilidades de convergência?

Observação

O teorema a seguir comprova que há séries de potências que podem convergir em um intervalo finito centrado em a, outras que convergem para todos os números reais e aquelas que convergem somente em x = a. Essas são as únicas possibilidades.

Teorema

De acordo com Stewart (2016, p. 676), para a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge somente em x = a.

(ii) A série converge para todos os valores de x.

(iii) Existe um número R > 0 tal que a série converge se $|x-a|<R$ e diverge se $|x-a|>R$.

O conjunto de todos os valores de x para os quais uma dada série de potências é convergente é chamado **intervalo de convergência** da série.

- Se (i) for válida, dizemos que o raio de convergência é $R=0$.
- Se (ii) for válida, dizemos que o raio de convergência é $R=\infty$.
- Se (iii) for válida, dizemos que o número R é chamado de raio de convergência da série.
- Se R é o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$, o intervalo de convergência é um dos seguintes: (R, R), (-R, R], [-R,R) ou [-R,R]. Se R é o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$, o intervalo de convergência é um dos seguintes: (a-R, a+R), (a-R, a+R], [a-R,a+R) ou [a-R,a+R].
- Uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ define uma função cujo domínio é o intervalo de convergência da série.

Agora que compreendemos o que é o raio e intervalo de convergência de uma série de potências, vamos ao nosso objetivo, que envolve as séries de potências que não são geométricas, como determiná-las?

Uma forma prática e rápida para determinar o intervalo de convergência é, segundo Thomas *et al.* (2012), por meio desses três passos:

- Use o teste da razão (ou o teste da raiz) para encontrar o intervalo em que a série converge absolutamente. Em geral, esse intervalo é aberto: $a - R < x < a + R$.
- Se o intervalo de convergência absoluta for finito, teste a convergência ou a divergência em cada extremidade. Use o teste da comparação, o teste da integral, teste da série alternada etc.
- Se o intervalo de convergência absoluta for $a - R < x < a + R$, a série diverge para $|x - a| > R$.

Lembrete

Teste da razão para convergência absoluta

Considere uma série infinita com termos positivos ou negativos e suponha que $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

Então:

- A série é absolutamente convergente (e portanto convergente) se $L < 1$.
- A série é divergente se $L > 1$ ou for infinito.
- Nada podemos afirmar se $L = 1$. Deve-se aplicar neste caso um outro teste.

Exemplo de aplicação

Determine o intervalo e o raio de convergência das séries de potências a seguir.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n}$

- **Passo 1**: vamos usar o teste da razão para encontrar o intervalo no qual a série converge absolutamente:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-3)^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{(x-3)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-3)^n}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n\cdot(x-3)}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x-3}{n+1}\cdot\frac{n}{1}\right| = \lim_{n\to\infty}\cdot\frac{n}{n+1}.|x-3| = 1.|x-3| = |x-3|$$

Então, pelo teste da razão, se $|x-3|<1$, ou seja, se $-1<x-3<1 \Rightarrow 2<x<4$, a série é absolutamente convergente, e, se $|x-3|>1$, ela diverge.

- **Passo 2**: como o intervalo de convergência absoluta é finito, vamos testar a convergência ou a divergência em cada extremidade.

– Se x = 2, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ é uma série harmônica alternada que **converge**.

– Se x = 4, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ é a série harmônica que **diverge**.

Assim, concluímos que a série converge em $2 \le x \le 4$ e diverge em qualquer outro valor fora desse intervalo. Dessa forma, temos que o intervalo de convergência é [2,4), e o raio de convergência é R = 1.

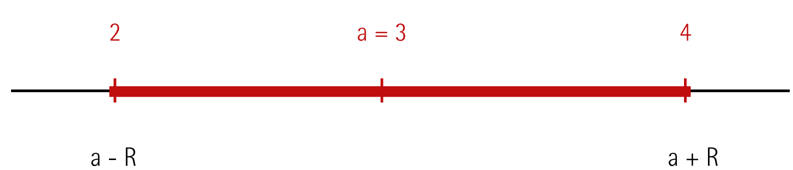

Figura 18 – Intervalo de convergência [2,4)

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ (adaptado de Thomas *et al.*, 2012, p. 46)

- **Passo 1**: vamos usar o teste da razão para encontrar o intervalo no qual a série converge absolutamente:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1}}{\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n}.x^{2}.x^{-1}}{2n+2}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n}.x^{-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2}}{2n+2}\cdot\frac{2n-1}{1}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{2n-1}{2n+2}.\left|x^2\right| = 1.\left|x^2\right| = \left|x^2\right|$$

Então, pelo teste da razão, se $\left|x^2\right|$ < 1, ou seja, se -1 < x < 1, a série é **absolutamente convergente**, e, se $\left|x^2\right|$ >1, ela **diverge**.

- **Passo 2**: como o intervalo de convergência absoluta é finito, vamos testar a convergência ou a divergência em cada extremidade.

— Se x = 1, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots$ é uma série alternada a qual converge.

— Se x = -1, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{n}}{n} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots$ é uma série alternada a qual converge.

Assim, concluímos que a série converge em $-1 \le x \le 1$ e diverge em qualquer outro valor. Dessa forma, temos que o intervalo de convergência é [-1,1] e o raio de convergência é R = 1.

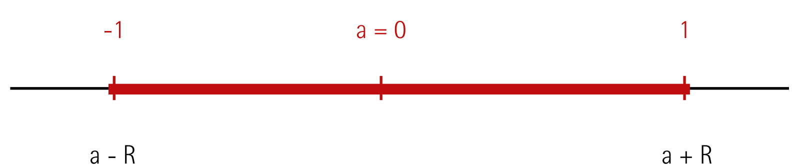

Figura 19 – Intervalo de convergência [-1,1]

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (adaptado de Thomas *et al.*, 2012, p. 46)

- **Passo 1**: vamos usar o teste da razão para encontrar o intervalo onde a série converge absolutamente.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n\cdot x}{(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|x| = 0$$

O limite é $L = 0 < 1$ para todo valor de x. Portanto, a série **converge** para todo valor x e seu raio de convergência é $R=\infty$.

Nosso objetivo agora é, a partir das séries já estudadas, obter outras séries por derivação e integração. E por que isso é importante? No caso da computação, essa estratégia é útil para aproximar funções por polinômios, já que tal representação é útil e simples para programar em calculadoras e computadores.

7 REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES POR SÉRIES DE POTÊNCIAS USANDO DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO

Algumas funções podem ser representadas por séries de potências já conhecidas por meio de alguma manipulação algébrica ou por derivação e integração. De início, vamos conhecer algumas obtidas por manipulações algébricas.

Usando a série de potência geométrica $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots\ (*)$ anteriormente estudada, obtemos as seguintes séries:

- Substituindo x por –x na expressão (*), obtemos

$$\frac{1}{1-(-x)}=1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots+(-x)^n+\cdots$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

O intervalo de convergência da nova série é, sendo a razão r = -x:

$$|-x|<1\to|x|<1\to-1<x<1$$

Portanto,

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \qquad -1<x<1$$

- Substituindo x por x^2 na expressão (*), obtemos

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + (x^2)^2 - (x^2)^3 + \cdots + (-1)^n (x^2)^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

O intervalo de convergência da nova série é, sendo a razão $r = x^2$:

$$\left|x^2\right| < 1 \rightarrow |x| < 1 \rightarrow -1 < x < 1$$

Portanto,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \quad -1 < x < 1$$

- Para a função $\frac{1}{5+x} = \frac{1}{5\cdot\left(1+\frac{x}{5}\right)} = \frac{1}{5\cdot\left(1-\left(-\frac{x}{5}\right)\right)}$, substituindo x por -x/5 na expressão (*), obtemos

$$\frac{1}{5+x} = \frac{1}{5\cdot\left(1-\left(-\frac{x}{5}\right)\right)} = \frac{1}{5}\left[1 + \left(-\frac{x}{5}\right) + \left(-\frac{x}{5}\right)^2 + \left(-\frac{x}{5}\right)^3 + \cdots + \left(-\frac{x}{5}\right)^n + \cdots\right]$$

$$\frac{1}{5+x} = \frac{1}{5\cdot\left(1-\left(-\frac{x}{5}\right)\right)} = \frac{1}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{5}\right)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}x^n$$

O intervalo de convergência da nova série é, sendo a razão r = -x/5:

$$|-x/5| < 1 \rightarrow \left|\frac{x}{5}\right| < 1 \rightarrow -1 < \frac{x}{5} < 1 \rightarrow -5 < x < 5$$

Portanto,

$$\frac{1}{5+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}x^n \quad \text{(dentro do intervalo } -5 < x < 5\text{)}$$

Além das séries de potências obtidas por manipulação algébrica, podemos, devido ao teorema apresentado a seguir, obter outras por derivação e integração de cada termo individual da série.

Teorema

Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ tiver um raio de convergência R > 0, então a função f definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo (a – R, a + R), e

i) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n (x-a)^{n-1}$

ii) $\int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$

Os raios de convergências das séries em i) e ii) são ambos R.

Seguem alguns exemplos clássicos:

Exemplo 1

Obtenha uma representação de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ em série de potências usando derivada.

Solução

Sabemos que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ se $|x| < 1$. Então, pelo teorema anterior,

$$D_x\left(\frac{1}{1-x}\right) = D_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'$$

$$D_x\left((1-x)^{-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots nx^{n-1}$$

$$-1 \cdot (1-x)^{-2}.(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1).x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1).x^n$$

Portanto, a função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ é representada pela série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1).x^n$ se $|x| < 1$.

Exemplo 2

Obtenha uma representação de $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ em série de potências.

Solução

Sabemos que $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ se $|x|<1$. Então, pelo teorema anterior,

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n.x^{n-1}\Rightarrow$$

$$\left((1+x)^{-1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n.x^{n-1}\Rightarrow$$

$$-1\cdot(1+x)^{-2}.(1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n.x^{n-1}\Rightarrow$$

$$\frac{-1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n.x^{n-1}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)(-1)^n n.x^{n-1}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} n.x^{n-1}$$

Portanto, a função $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ é representada pela série de potência $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}n.x^{n-1}$ se $|x|<1$.

Exemplo 3

Obtenha uma representação de $f(x)=\ln(1+x)$ em série de potências.

Solução

Sabemos que $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ se $|x|<1$. Então, pelo teorema anterior,

$$\int\frac{1}{1+x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n x^n dx\Rightarrow$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

Portanto, a função $f(x) = \ln(1+x)$ é representada pela série de potência $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ se $|x| < 1$.

Observação

Por meio da fórmula $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, conseguimos determinar o logaritmo de x tal que $|x| < 1$.

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Calcule o ln (1,1) com uma aproximação de cinco casas decimais.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Então:

$$\ln(1{,}1) = \ln(1+0{,}1) = 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} + \frac{(0{,}1)^3}{3} - \frac{(0{,}1)^4}{4} + \frac{(0{,}1)^5}{5} - \dots$$

$$\ln 1{,}1 = 0{,}100000 - 0{,}005000 + 0{,}000333 - 0{,}000025 + 0{,}000002 - \dots$$
$$\approx 0{,}095310$$

Exemplo 2

Calcule o ln (3,2) com uma aproximação de quatro casas decimais.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Então:

$$\ln(1{,}7) = \ln(1+0{,}7) = 0{,}7 - \frac{(0{,}7)^2}{2} + \frac{(0{,}7)^3}{3} - \frac{(0{,}7)^4}{4} + \frac{(0{,}7)^5}{5} - \dots$$

$$\ln 1{,}7 = 0{,}7000 - 0{,}2450 + 0{,}1143 - 0{,}0600 + 0{,}0336 - \dots$$
$$\approx 0{,}5429$$

8 SÉRIES DE TAYLOR E MACLAURIN

Estudamos, até agora, as séries de potências geométricas, o uso de algumas manipulações algébricas e o importante resultado da derivação e da integração termo a termo de uma série de potências, que são conhecimentos essenciais que nos permitem encontrar séries de potências para representar certa classe restrita de funções sujeitas à condição de convergência. Nossa intenção adiante é investigar problemas mais gerais: quais funções têm representações em séries de potências? Como podemos encontrar tais representações?

Apresentaremos uma "técnica" para a construção de séries de potências; faremos bom uso das ferramentas do cálculo e, com isso, conseguiremos representar em séries de potências funções muito úteis, como exponenciais, senos, cossenos etc. Estudares as séries de Taylor, que podem fornecer aproximações polinomiais das funções dadas.

O teorema a seguir não será demonstrado, mas vocês podem encontrar a demonstração em Stewart (2016, p. 685):

Se f tiver uma representação (expansão) em série de potência em a, isto é, se $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$, com $|x-a|<R$, então seus coeficientes são dados pela fórmula:

$$C_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}$$

Substituindo essa fórmula para C_n na série, então:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n$$

ou seja:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1\,!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3\,!}(x-a)^3+\dots$$

A série $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1\,!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3\,!}(x-a)^3+\dots$ é chamada **série de Taylor** da função f em a (ou ao redor de a ou centrada em a). Para o caso especial a = 0, a série se torna:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n$$, ou seja:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1\,!}x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\frac{f'''(0)}{3\,!}x^3+\dots$$

Esse caso surge com frequência, e lhe foi dado o nome especial de **série de Maclaurin**.

Saiba mais

Para saber mais sobre quem foi Taylor, leia:

DIEDERICHSEN, J. Taylor, Brook (1685-1731). *Faculdade de Engenharia Mecânica Unicamp*, Campinas, 31 jan. 2001. Disponível em: https://cutt.ly/t9ETImS. Acesso em: 24 jan. 2023.

Observe que esse teorema mostra que, se a função f puder ser representada como uma série de potências em torno de a, então f é igual à soma de sua série de Taylor. Mas a pergunta principal é: como saber se uma função f pode ser representada por uma série de potências? Ou sob quais condições uma função f é igual à soma de sua série de Taylor?

Veja alguns exemplos:

Exemplo 1

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = e^x$.

A série de Maclaurin é:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!}x^3 + \ldots$$

$$f(x) = e^x \to f(0) = e^0 \to f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \to f'(0) = e^0 \to f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \to f''(0) = e^0 \to f''(0) = 1$$
$$\vdots$$

$$f^n(x) = e^x \to f^{(n)}(0) = e^0 \to f^{(n)}(0) = 1$$

A série de Maclaurin é:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1\,!}x + \frac{1}{2\,!}x^2 + \frac{1}{3\,!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n\,!}x^n + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + \ldots$$

Podemos verificar que a série à direita $1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + \ldots$ converge dentro do seu raio de convergência, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}}{\frac{x^n}{n\,!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}\cdot\frac{n\,!}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n \cdot x}{(n+1)\cdot n\,!}\cdot\frac{n\,!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot|x| = 0$$

Como L < 1, então a série é convergente para todo x pelo teste da razão, e, portanto, seu raio de convergência é infinito.

Dessa forma, ao encontrarmos a série de Maclaurin para a função $f(x) = e^x$, também sabemos que a série encontrada converge para todo x, mas não sabemos ainda se e^x é igual à sua série de Maclaurin.

Exemplo 2

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = e^{-x}$.

A série de Maclaurin é:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!}x^3 + \ldots$$

$$f(x) = e^{-x} \rightarrow f(0) = e^0 \rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^{-x} \rightarrow f'(0) = e^0 \rightarrow f'(0) = -1$$

$$f''(x) = e^{-x} \rightarrow f''(0) = e^0 \rightarrow f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^{-x} \rightarrow f'''(0) = -e^0 \rightarrow f''(0) = -1$$

$$\vdots$$

A série de Maclaurin é:

$$e^{-x} = 1 + \frac{-1}{1\,!}x + \frac{1}{2\,!}x^2 + \frac{-1}{3\,!}x^3 + \ldots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Da mesma forma, podemos verificar que a série à direita $1 - x + \frac{x^2}{2\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + \ldots$ converge dentro do seu raio de convergência, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}}{(-1)^n\dfrac{x^n}{n\,!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}\cdot\frac{n\,!}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n\cdot x}{(n+1)\cdot n\,!}\cdot\frac{n\,!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot|x| = 0$$

Como L < 1, então a série é convergente para todo x pelo teste da razão, e, portanto, seu raio de convergência é infinito.

Dessa forma, ao encontrarmos a série de Maclaurin para função $f(x) = e^{-x}$, também sabemos que a série encontrada converge para todo x, mas não sabemos ainda se e^{-x} é igual a sua série de Maclaurin.

Exemplo 3

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = e^{x^2}$.

A série de Maclaurin é:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!}x^3 + \ldots$$

$$f(x) = e^{x^2} \to f(0) = e^0 \to f(0) = 1$$

$$f'(x) = 2x.e^{x^2} \to f'(0) = 2.0.e^0 \to f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 2.e^{x^2} + 2x.2x.e^{x^2} \to f''(0) = 2.e^0 \to f''(0) = 2$$

$$\vdots$$

A série de Maclaurin é:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2\,!} + \frac{x^6}{3\,!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n\,!} + \ldots$$

Da mesma forma, podemos verificar que a série à direita $1 + x^2 + \frac{x^4}{2\,!} + \frac{x^6}{3\,!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n\,!} + \ldots$ converge dentro do seu raio de convergência, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2(n+1)}}{(n+1)\,!}}{\dfrac{x^{2n}}{n\,!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)\,!}\cdot\frac{n\,!}{x^{2n}}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n}\cdot x}{(n+1)\cdot n\,!}\cdot\frac{n\,!}{x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot|x| = 0$$

Como L < 1, então a série é convergente para todo x pelo teste da razão, e, portanto, seu raio de convergência é infinito.

Dessa forma, ao encontrarmos a série de Maclaurin para função $f(x) = e^{x^2}$, também sabemos que a série encontrada converge para todo x, mas não sabemos ainda se e^{x^2} é igual a sua série de Maclaurin.

Exemplo 4

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = \text{sen}x$

A série de Maclaurin é:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!}x^3 + \ldots$$

$$f(x) = \text{sen}x \to f(0) = \text{sen}(0) \to f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \to f'(0) = \cos(0) \to f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\text{sen}x \to f''(0) = -\text{sen}(0) \to f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \to f''(0) = -\cos(0) \to f''(0) = -1$$
$$\vdots$$

A série de Maclaurin é:

$$\operatorname{sen}x = 0 + \frac{1}{1\,!}x + \frac{0}{2\,!}x^2 + \frac{-1}{3\,!}x^3 + \ldots$$

$$\operatorname{sen}x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{(2n+1)}$$

Da mesma forma, podemos verificar que a série à direita $x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \ldots$ converge dentro do seu raio de convergência, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)\,!}}{\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \cdot \frac{(2n+1)\,!}{x^{2n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n} \cdot x^3}{(2n+3)\cdot(2n+2)\cdot(2n+1)!} \cdot \frac{(2n+1)\,!}{x^{2n} \cdot x}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{(2n+3)\cdot(2n+2)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)\cdot(2n+2)} \cdot \left|x^2\right| = 0$$

Como L < 1, então a série é convergente para todo x pelo teste da razão, e portanto seu raio de convergência é infinito.

Dessa forma, ao encontrarmos a série de Maclaurin para função $f(x) = \operatorname{sen}x$, também sabemos que a série encontrada converge para todo x, mas não sabemos ainda se $\operatorname{sen}x$ é igual a sua série de Maclaurin.

8.1 Convergência da série de Taylor

Vamos estudar neste tópico a convergência da série de Taylor. Analisemos as somas parciais da série de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n$$

Utilizamos a notação $P_n(x)$ para as somas parciais. Essas somas parciais são chamadas **polinômios de Taylor**, e são definidos da seguinte forma:

Para Thomas *et al.* (2012), seja f uma função com derivadas de ordem k para k = 1, 2, 3, ..., N em algum intervalo contendo a como um ponto interior. Então, para qualquer número inteiro n de 0 a N, o polinômio de Taylor de ordem n gerado por f em x = a é o polinômio

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Exemplo 1

No caso da função exponencial $f(x) = e^x$, quais os polinômios de Taylor de grau n = 1, 2, 3?

Sabemos que a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ é

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + \ldots$$

Então os polinômios de Taylor (somas parciais) são:

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Observe graficamente em torno do ponto a = 0 que os polinômios de Taylor se aproximam da função exponencial.

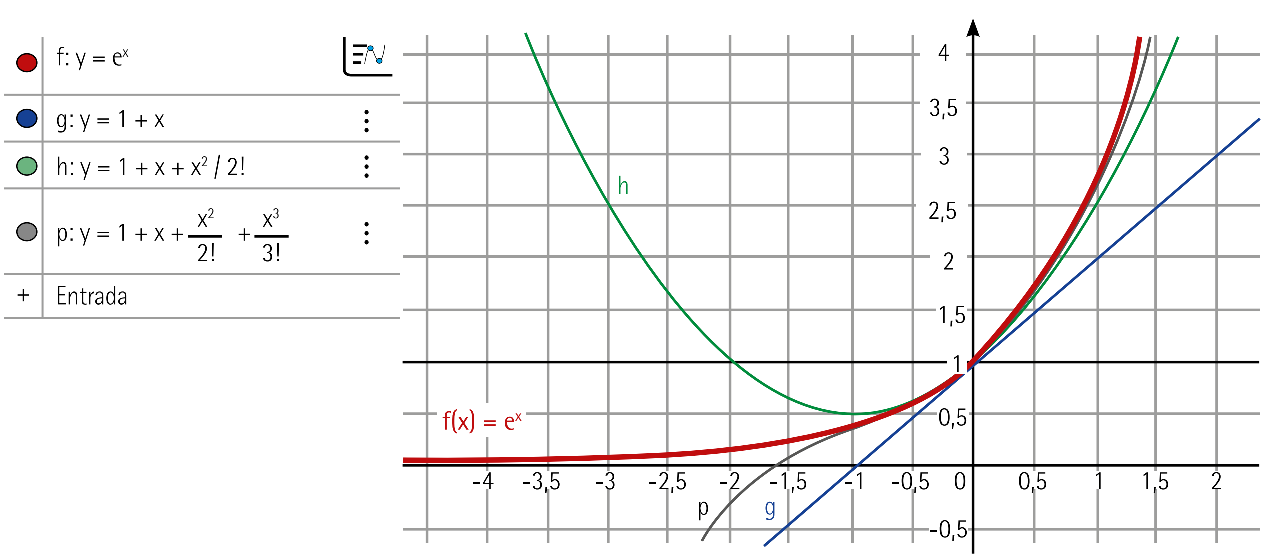

Figura 20 – Polinômios de Taylor da função exponencial para n = 1,2,3

Exemplo 2

No caso da função trigonométrica $f(x) = \operatorname{sen} x$, quais os polinômios de Taylor de grau n = 1, 2, 3?

Sabemos que a série de Maclaurin da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é

$$x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \dots$$

Então os polinômios de Taylor (somas parciais) são:

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = x - \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Observe graficamente em torno do ponto a = 0 que os polinômios de Taylor se aproximam da função senx.

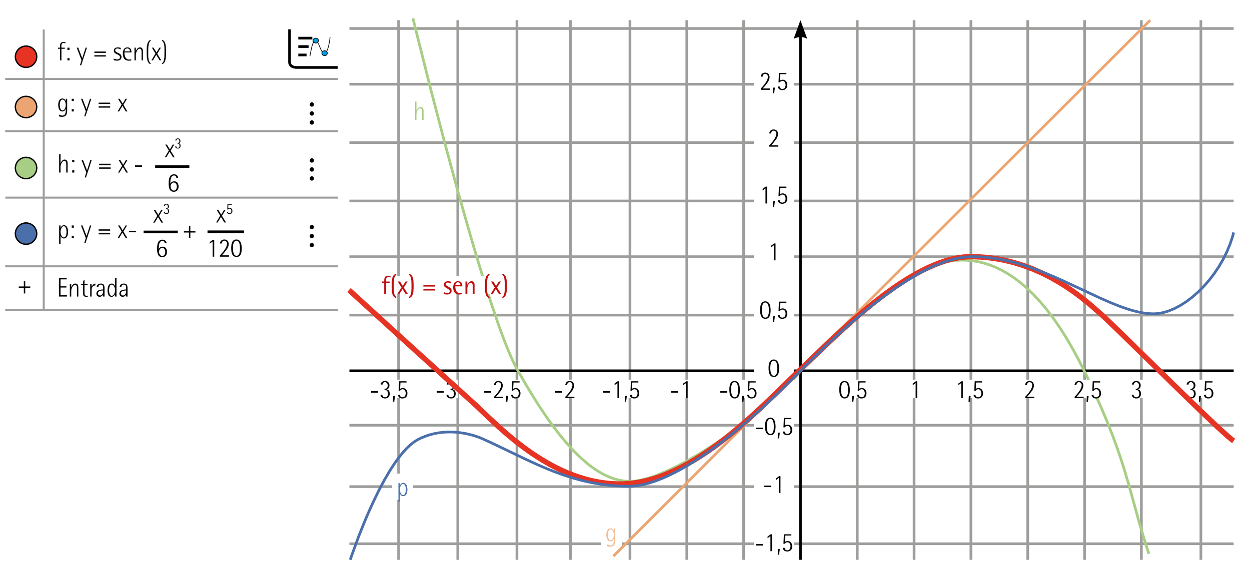

Figura 21 – Polinômios de Taylor da função sen x para n = 1,2,3

De modo geral, podemos dizer que f(x) é a soma da sua série de Taylor se

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

Saiba mais

Assista ao vídeo a seguir, que explica o cálculo do polinômio de Taylor de uma função em torno de um valor x = x0.

SÉRIE de Taylor. 2021. 1 vídeo (22:19). Publicado pelo canal Prof. Rex Medeiros – ECT/UFRN. Disponível em: https://cutt.ly/H9EP0yD. Acesso em: 24 jan. 2023.

Podemos observar, porém, que nessa aproximação sobra um "resto" (resto da série de Taylor): $R_n(x) = f(x) - P_n(x) \Rightarrow f(x) = R_n(x) + P_n(x)$. A partir disso, se mostrarmos que esse resto é zero, ou seja, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, então teremos mostrado que a função f(x) é a soma da sua série de Taylor. O teorema a seguir nos garante isso:

- Se $f(x) = R_n(x) + P_n(x)$, onde $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de enésimo grau de f em a e $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para $|x - a| < R$, então f(x) é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x - a| < R$.

Normalmente, ao tentarmos mostrar que o limite do resto é zero, também usamos o seguinte teorema que versa sobre a **desigualdade de Taylor**:

- Se $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ para $|x - a| < d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade $|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \cdot |x - a|^{n+1}$. Se essa desigualdade for válida para todo n e as outras condições do teorema de Taylor forem satisfeitas por f, então a série converge para f(x).

Saiba mais

Para saber mais sobre as desigualdades modulares, assista:

INEQUAÇÕES com valor absoluto. 2014. 1 vídeo (13:14). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/q9m84Vu. Acesso em: 24 jan. 2023.

Veja alguns exemplos a seguir.

Exemplo 1

Demonstre que a série de Maclaurin para f(x) = senx representa a função senx para todo x.

A série de Maclaurin para função seno é

$$x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Vamos usar o teorema da desigualdade de Taylor:

1) Verificar se $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ para $|x-a| < d$.

As derivadas da função seno são:

$$f'(x) = \cos x$$
$$f''(x) = -\mathrm{sen}x$$
$$f'''(x) = -\cos x$$
$$\vdots$$

A partir disso, temos que $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq 1$ para todo x, pois as funções trigonométricas senos e cossenos são definidas no intervalo [-1,1]. Assim, podemos tomar M = 1 na desigualdade de Taylor.

2) Como a = 0 e M = 1, temos

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot |x-0|^{n+1} \Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

3) Aplicando o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ estudado anteriormente como $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, e sabendo que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ pelo teorema do confronto, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$.

Portanto, a função f(x) = senx é igual à soma de sua série de Maclaurin:

$$\mathrm{sen}x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \quad = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Exemplo 2

Demonstre que a série de Maclaurin para f(x) = cosx representa a função cosx para todo x.

A série de Maclaurin para função cosx é $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Vamos usar o teorema da desigualdade de Taylor.

1) Verificar se $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\leq M$ para $|x-a|<d$.

As derivadas da função cosseno são

$$
\begin{aligned}
&f'(x)=-\operatorname{sen}x\\
&f''(x)=-\cos x\\
&f'''(x)=\operatorname{sen}x\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Dessa forma, temos que $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\leq 1$ para todo x, pois as funções trigonométricas senos e cossenos são definidas no intervalo [-1,1]. Assim, podemos tomar M = 1 na desigualdade de Taylor.

2) Como a = 0 e M = 1, temos

$$|R_n(x)|\leq\frac{1}{(n+1)!}\cdot|x-0|^{n+1}\Rightarrow|R_n(x)|\leq\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

3) Aplicando o limite $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ estudado anteriormente I como $|R_n(x)|\leq\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, e sabendo que $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ pelo teorema do confronto, concluímos que $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$.

Portanto, a função f(x) = cosx é igual à soma de sua série de Maclaurin.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Poderíamos também ter usado derivada para provar que a série de Maclaurin para f(x) = cosx representa a função cosx para todo x.

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

$$= \left(1 - \frac{3x^2}{3.2!} + \frac{5x^4}{5.4!} - \frac{7x^6}{7.6!} + \dots\right) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right)$$

Como a série de Maclaurin de seno converge, então também converge a série de Maclaurin do cosseno.

Exemplo 3

Demonstre que a série de Maclaurin para $f(x) = e^x$ representa a função e^x para todo x.
A série de Maclaurin para função exponencial é

$$1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \dots + \frac{x^n}{n\,!} + \dots$$

Vamos usar o teorema da desigualdade de Taylor.

1) Verificar se $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M$ para $|x - a| < d$.

As derivadas da função exponencial são

$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x$$
$$f'''(x) = e^x$$
$$\vdots$$

Dessa forma, temos que $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n. Se d é qualquer número positivo e $|x| \le d$, então $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = e^x \le e^d$. Assim, podemos tomar $M = e^d$ na desigualdade de Taylor.

2) Como a = 0 e $M = e^d$, temos

$$|R_n(x)| \le \frac{e^d}{(n+1)!} \cdot |x - 0|^{n+1} \Rightarrow |R_n(x)| \le \frac{e^d \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

3) Aplicando o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ estudado anteriormente I como $|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, e sabendo que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ pelo teorema do confronto, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$.

Portanto, a função $f(x) = e^x$ é igual à soma de sua série de Maclaurin

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + \ldots$$

Saiba mais

O que é o "e" para o computador? Como é que o computador ou a máquina de calcular nos fornecem o valor de e? E de $e^{0,1}$? A mesma questão pode ser colocada para o valor de outras funções num ponto: por exemplo, sin, cos e log. Se pensarmos que um computador trabalha apenas com as operações elementares de soma, subtração, multiplicação e divisão, então o cálculo deve passar por exprimir a função exponencial em termos dessas operações. Para saber mais sobre o e, leia:

VASCONCELOS, P. B. O que é o e para o computador? *Revista de Ciência Elementar*, Porto, v. 10, n. 1, p. 1-6, 2022. Disponível em: https://cutt.ly/r9AhFQg. Acesso em: 24 jan. 2023.

Segue uma tabela com algumas funções e suas representações em séries e seus intervalos de convergência para referência futura:

Tabela 4 – Representação de algumas funções em séries e seus intervalos de convergência

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots (-1,1)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots (-1,1)$
$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots (-1,1)$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots (-\infty, \infty)$
$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots (-\infty, \infty)$
$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots (-\infty, \infty)$

Seguem alguns exemplos de aplicação para as séries de potências.

Exemplo de aplicação

a) (Adaptado de Stewart, 2016, p. 698) Aproxime a função $f(x)=\sqrt{x}$ por um polinômio de Taylor de grau 2 em a = 4. Qual é a precisão dessa aproximação quando $3 \leq x \leq 5$?

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2} \Rightarrow f(4)=\sqrt{4}=2$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \Rightarrow f''(4)=-\frac{1}{4\sqrt{4^3}}=-\frac{1}{32}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-5/2}=\frac{3}{8\sqrt{x^5}} \Rightarrow f'''(4)=\frac{3}{8\sqrt{4^5}}=\frac{1}{256}$$

Então, o polinômio de Taylor de segundo grau é:

$$P_2(x)=f(4)+\frac{f'(4)}{1!}(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2$$

$$P_2(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)+\frac{-\frac{1}{32}}{2!}(x-4)^2 \Rightarrow P_2(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2$$

E a aproximação desejada é:

$$\sqrt{x} \approx P_2(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2$$

Qual é a precisão dessa aproximação quando $3 \leq x \leq 5$?

Podemos usar a desigualdade de Taylor com n = 2 e a = 4:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\cdot|x-a|^{n+1}$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{3!} \cdot |x-4|^3$$

Em que $|f'''(x)| \leq M$. Como $x \geq 3$, temos $x^{5/2} \geq 3^{5/2}$ e, dessa forma:

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x^{5/2}} \leq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3^{5/2}} < 0{,}024$$

Portanto, podemos tomar M = 0,024. Além disso, $3 \leq x \leq 5 \Rightarrow -1 \leq x-4 \leq 1$, e portanto $|x-4| \leq 1$. Dessa forma, a desigualdade de Taylor fica

$$|R_2(x)| \leq \frac{0{,}024}{3!} \cdot 1^3 = \frac{0{,}024}{6} = 0{,}004$$

Logo, se $3 \leq x \leq 5$, então a aproximação da função tem precisão de 0,004.

b) Se $f(x) = tg^{-1}(x)$, calcule $f^{(38)}(0)$.

Já sabemos que:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

Como a integral $\int \frac{1}{1+x^2}dx = tg^{-1}(x)$, então podemos integrar a série de potência termo a termo, ou seja:

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{2n}dx = \int \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\right)dx$$

$$tg^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + C$$

Nessa série de potências, o coeficiente de x^{38} é $\frac{f^{(38)}(0)}{(38)!} = 0$, e, portanto, $f^{(38)}(0) = 0$.

8.2 Cálculo de integrais

As séries de potências são utilizadas para integrar funções que não têm antiderivadas elementares, como $x \geq 3$, temos $x^{5/2} \geq 3^{5/2}$ $\int e^{x^2} dx$, na qual nenhuma das técnicas de integração (substituição ou por partes) permite calcular essa integral.

Vimos que o desenvolvimento da função e^{x^2} em série de potências é:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2\,!} + \frac{x^6}{3\,!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n\,!} + \ldots$$

Assim, conseguimos agora determinar a integral $\int e^{x^2} dx$:

$$\int e^{x^2} dx = \int \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2\,!} + \frac{x^6}{3\,!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n\,!} + \ldots \right) dx =$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2\,!} + \frac{x^7}{7.3\,!} + \ldots + \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1).n\,!} + \ldots$$

8.2.1 Soluções para equações diferenciais

Quando não é possível encontrar uma expressão simples para a solução de uma equação diferencial com condição inicial dada, tentamos através das séries de potências uma boa representação da solução. Na sequência, serão apresentados dois exemplos: o primeiro é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem que poderia ser resolvida por fator integrante, mas que vamos resolver por série de potências. O segundo exemplo é uma equação que não pode ser resolvida pelos métodos estudados na disciplina de cálculo.

Exemplo 1 (adaptado de Thomas, 2003, p. 77)

Usando séries de potências, resolva o problema de valor inicial $y' - y = x$, $y(0) = 1$.

Solução

Começamos supondo que exista uma solução da forma

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (*)$$

Nosso objetivo é encontrar valores para os coeficientes a_k que façam com que a série e suas derivadas primeiras

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n.a_n x^{n-1} + \ldots \quad (**)$$

Satisfaçam a equação diferencial $y' - y = x$, $y(0) = 1$.

Ao substituir (*) e (**) por $y' - y = x$, obtemos:

$$(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + n.a_nx^{n-1} + \ldots) - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots) = x$$
$$(a_1 - a_0) + (2a_2 + a_1)x + (3a_3 + a_2)x^2 + \ldots + (n.a_n - a_{n-1})x^{n-1} + \ldots = 0 + x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots$$

Portanto, comparando o lado esquerdo da igualdade com o lado direito, obtemos:

$$a_1 - a_0 = 0$$
$$2a_2 - a_1 = 1$$
$$3a_3 - a_2 = 0$$
$$\vdots$$
$$n.a_n - a_{n-1} = 0$$

Como $y(0) = 1$, então:

$$1 = a_0 + a_1.0 + a_2.0^2 + a_3.0^3 + \ldots + a_n.0^n + \ldots \Rightarrow a_0 = 1$$

Logo:

$$a_1 - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1$$
$$2a_2 - 1 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{2}$$
$$3a_3 - \frac{2}{2} = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{2}{3.2} = \frac{2}{3!}$$
$$\vdots$$
$$n.a_n - a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{2}{n!}$$

Ao substituir esses coeficientes por

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

obtemos:

$$y = 1 + x + 2.\frac{x^2}{2!} + 2.\frac{x^3}{3!} + \ldots + 2.\frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$y = 1 + x + 2.\underbrace{\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \right)}_{\text{Série de Maclaurin para } e^x - 1 - x} \ldots$$

$$y = 1 + x + 2.\left(e^x - 1 - x\right) = 1 + x + 2e^x - 2 - 2x$$

$$y = 2e^x - 1 - x$$

Exemplo 2 (adaptado de Thomas, 2003, p. 78)

Encontre uma solução na forma de série de potências para $y'' + x^2 y = 0$

Solução

Começamos supondo que exista uma solução da forma

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (*)$$

Nosso objetivo é encontrar valores para os coeficientes a_k que façam com que a série e suas derivadas primeiras

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n.a_n x^{n-1} + \ldots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots + n..(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots \quad (**)$$

Satisfaçam a equação diferencial $y'' + x^2 y = 0$.

Ao substituir (*) (**) por $y'' + x^2 y = 0$, obtemos:

$$(2a_2 + 6a_3 x + \ldots + n..(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots) - x^2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots) = 0$$

$$(2a_2) + (6a_3)x + (12a_4 + a_0)x^2 + \ldots + (n.(n-1).a_n - a_{n-4})x^{n-2} + \ldots = 0$$

Portanto, comparando o lado esquerdo da igualdade com o lado direito, obtemos:

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 6a_3 = 0 \\ 12a_4 + a_0 = 0 \\ 20a_5 + a_1 = 0 \\ \vdots \\ n.(n-1)a_n + a_{n-4} = 0 \end{cases}$$

Podemos verificar pela equação (*) que $a_0 = y(0)$ e $a_1 = y'(0)$.

O sistema acima nos permite determinar todos os outros coeficientes em termos de a_0 e a_1, ou seja:

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = \dfrac{-a_0}{4.3} \\ a_5 = \dfrac{-a_1}{5.4} \\ \vdots \\ a_n = \dfrac{-a_{n-4}}{n.(n-1)}, \text{ com exceção de } n = 4k+2 \text{ ou } 4k+3, \text{ em que } a_n = 0 \end{cases}$$

Assim, a solução da equação $y'' + x^2 y = 0$ é bem expressa como a soma de duas séries:

$$y = a_{0.}\left(1 - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^8}{3.4.7.8} - \frac{x^{12}}{3.4.7.8.11.12} + \ldots\right) + a_{1.}\left(x - \frac{x^5}{4.5} + \frac{x^9}{4.5.8.9} - \frac{x^{13}}{4.5.8.9.12.13} + \ldots\right)$$

Resumo

Nesta unidade, começamos com a definição de séries de potências, que permitem expressar muitas funções, como polinômios infinitos ou somas de séries infinitas. Na computação, trabalhar com esses polinômios é ideal no processamento de dados, pois o torna mais rápido. Além disso, é possível operar tais potências de maneira eficiente: somá-las, subtraí-las, multiplicá-las, derivá-las, integrá-las etc. As séries de potências são usadas também para integrar funções que não têm antiderivadas elementares para resolver as equações diferenciais, para aproximar as funções por polinômios, para transformar uma equação diferencial ordinária com valor inicial (PVI) em uma equação algébrica, tudo isso de modo a solucionar os problemas de forma simples e indireta.

Depois seguimos com as séries de potências geométricas, então as não geométricas, obtendo o intervalo e o raio de convergência. Além disso, vimos a representação de funções por séries de potências usando derivação e integração e, por fim, as séries de Taylor e Maclaurin, além de algumas de suas aplicações.

Esperamos que através do estudo deste livro-texto você tenha compreendido as séries infinitas e suas aplicações. Vale reforçar que é fundamental pesquisar outras fontes e também outros exemplos de aplicação. A prática e a pesquisa constante são a chave da conquista!

Exercícios

Questão 1. Considere a série de potências dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-7)^n = 1+(x-7)+(x-7)^2+(x-7)^3+\cdots+(x-7)^n+\cdots$$

Assinale a alternativa que mostra corretamente o intervalo de convergência dessa série.

A) $x > 0$

B) $0 < x < 7$

C) $6 < x < 8$

D) $-7 < x < 7$

E) $x > 7$

Resposta correta: alternativa C.

Análise da questão

Inicialmente, vamos pensar na série geométrica dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$$

Na igualdade, a e r são números reais, com $a \neq 0$.

Sabemos o que segue:

- Se $|r| < 1$, a série geométrica converge e $S = \dfrac{a}{1-r}$.
- Se $|r| \geq 1$, a série geométrica diverge.

Agora, tomemos a série dada no enunciado:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-7)^n = 1+(x-7)+(x-7)^2+(x-7)^3+\cdots+(x-7)^n+\cdots$$

Trata-se de série geométrica de razão $r = x - 7$ e de coeficiente $a = 1$. Ela é convergente se $|r| < 1$. Ou seja:

$$|x - 7| < 1$$

$$-1 < x - 7 < 1 \Rightarrow -1 + 7 < x < 1 + 7 \Rightarrow 6 < x < 8$$

Logo, a série dada no enunciado é convergente dentro do seguinte raio de convergência: $6 < x < 8$.

Questão 2. Assinale a alternativa que mostra corretamente a série de Maclaurin da função $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

A) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

B) $\sum_{n=0}^{\infty} (n-1)x^n$

C) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^n x^n$

D) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^n x$

E) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)}{x^n}$

Resposta correta: alternativa A.

Análise da questão

Tomemos a função do enunciado, dada por:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$$

Em x = 0, temos:

$$f(0) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1$$

Calculemos as derivadas de 1ª, 2ª e 3ª ordens dessa função e seus respectivos valores em x = 0:

$$f'(x) = -2(-1)(1-x)^{-2-1} = 2(1-x)^{-3} = \frac{2}{(1-x)^3} \rightarrow f'(0) = \frac{2}{(1-0)^3} \rightarrow f'(0) = 2$$

$$f''(x) = 2(-3)(-1)(1-x)^{-3-1} = 6(1-x)^{-4} = \frac{6}{(1-x)^4} \rightarrow f''(0) = \frac{6}{(1-0)^4} = 6 = 3.2$$

$$f'''(x) = 6(-4)(-1)(1-x)^{-4-1} = 24(1-x)^{-5} = \frac{24}{(1-x)^5} \rightarrow f'''(0) = \frac{24}{(1-0)^5} = 24 = 4.3.2$$

Em resumo, temos o que se mostra na tabela a seguir:

Tabela 5

n=0	n=1	n=2	n=3
f'(0)=1	f''(0)=2	f''(0)=6=3.2	f'''(0)=24=6.3.2

Assim, podemos inferir o seguinte:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Logo, para x = 0, ficamos, para todo $n \geq 0$, com:

$$f^{(n)}(0) = \frac{(n+1)!}{(1-0)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{1} = (n+1)!$$

A série de MacLaurin pode ser vista como a série de Taylor ao redor de x = 0. Ou seja:

$$T_0 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

No caso, ficamos com:

$$T_0 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

REFERÊNCIAS

Audiovisuais

CONVERTENDO decimais repetidos em frações -- 1. 2013. 1 vídeo (4:08). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/49kHGMA. Acesso em: 24 jan. 2023.

EXPANSÃO em frações parciais 1. 2014. 1 vídeo (11:30). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/a9nCi6y. Acesso em: 24 jan. 2023.

EXPRIMIR o exemplo do teorema | matemática | Khan Academy. 2017. 1 vídeo (4:10). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/h9k9CGN. Acesso em: 24 jan. 2023.

INEQUAÇÕES com valor absoluto. 2014. 1 vídeo (13:14). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/q9m84Vu. Acesso em: 24 jan. 2023.

INTEGRAIS definidas: regra da potência reversa. 2021. 1 vídeo (5:23). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/n9n6oV2. Acesso em: 24 jan. 2023.

INTRODUÇÃO A INTEGRAIS impróprias | matemática | Khan Academy. 2018. 1 vídeo (3:56). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/F9n4OmW. Acesso em: 24 jan. 2023.

INTRODUÇÃO *u*-SUBSTITUTION | matemática | Khan Academy. 2018. 1 vídeo (3:34). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/K9mw1Zv. Acesso em: 24 jan. 2023.

MATEMÁTICA e natureza – sequência de números de Fibonacci e demais leis que regem o mundo. 2012. 1 vídeo (3:43). Publicado pelo canal Hero X Cast – Anime e Cultura Nerd. Disponível em: https://cutt.ly/z9kCLyS. Acesso em: 24 jan. 2023.

O MÉTODO de Arquimedes. 2021. 1 vídeo (5:59). Publicado pelo canal GPIMEM UNESP. Disponível em: https://cutt.ly/Z9kSEEI. Acesso em: 24 jan. 2023.

REGRA de potência | matemática | Khan Academy. 2017. 1 vídeo (5:57). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/I3ek9YB. Acesso em: 24 jan. 2023.

SÉRIE de Taylor. 2021. 1 vídeo (22:19). Publicado pelo canal Prof. Rex Medeiros – ECT/UFRN. Disponível em: https://cutt.ly/H9EP0yD. Acesso em: 24 jan. 2023.

Textuais

ÁVILA, G. *Introdução à análise matemática*. 2. ed. rev. São Paulo: Blucher, 1999.

AYRES, F. *Cálculo*. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

BORTOLOSSI, H. J. *Cálculo diferencial a várias variáveis*: uma introdução à teoria de otimização. São Paulo: Loyola, 2002.

BOULOS, P. *Cálculo diferencial e integral*: volume 1. São Paulo: Pearson, 1999a.

BOULOS, P. *Introdução ao cálculo*: volume 2: cálculo integral. São Paulo: Blucher, 1983.

BOULOS, P. *Pré-cálculo*. São Paulo: Pearson, 1999b.

CARNEIRO, C. E. I.; PRADO, C. P. C.; SALINAS, S. R. A. *Introdução elementar às técnicas do cálculo diferencial e integral*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DIEDERICHSEN, J. Taylor, Brook (1685-1731). *Faculdade de Engenharia Mecânica Unicamp*, Campinas, 31 jan. 2001. Disponível em: https://cutt.ly/t9ETImS. Acesso em: 24 jan. 2023.

FIGUEIREDO, V. L. X.; MELLO, M. P.; SANTOS, S. A. *Cálculo com aplicações*: atividades computacionais e projetos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2005.

GUILLERA, J. Dia do Pi: os algoritmos permitem obter novas cifras do π. *El País Brasil*, São Paulo, 14 mar. 2018. Disponível em: https://cutt.ly/J9ldGze. Acesso em: 24 jan. 2023.

KOJIMA, H.; TOGAMI, S. *Guia mangá de cálculo diferencial e integral*. São Paulo: Novatec, 2010.

PANONCELI, D. M. *Análise matemática*. Curitiba: InterSaberes, 2017.

SILVA, S. M.; SILVA, E. M.; SILVA, E. M. *Matemática básica para cursos superiores*. São Paulo: Atlas, 2002.

STEWART, J. *Cálculo*: volume 2. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*: volume 1. São Paulo: Makron Books, 1995.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*: volume 2. São Paulo: Makron Books, 2006.

THOMAS, G. B. *et al. Cálculo*: volume 2. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

VASCONCELOS, P. B. O que é o e para o computador? *Revista de Ciência Elementar*, Porto, v. 10, n. 1, p. 1-6, 2022. Disponível em: https://cutt.ly/r9AhFQg. Acesso em: 24 jan. 2023.

UNIP
UNIVERSIDADE PAULISTA

Informações:
www.sepi.unip.br ou 0800 010 9000