EAD

EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UNIDADE II

Cálculo Numérico Computacional

Prof. Me. João Giardulli

Interpolação

- Interpolação Polinomial.
- Forma de Lagrange.
- Forma de Newton.

Interpolação

O que é:

- Técnica utilizada para estimar valores desconhecidos de uma função entre valores conhecidos.
- Forma de aproximar uma função polinomial $f(x)$ a partir de um conjunto discreto de pontos.

Interpolação

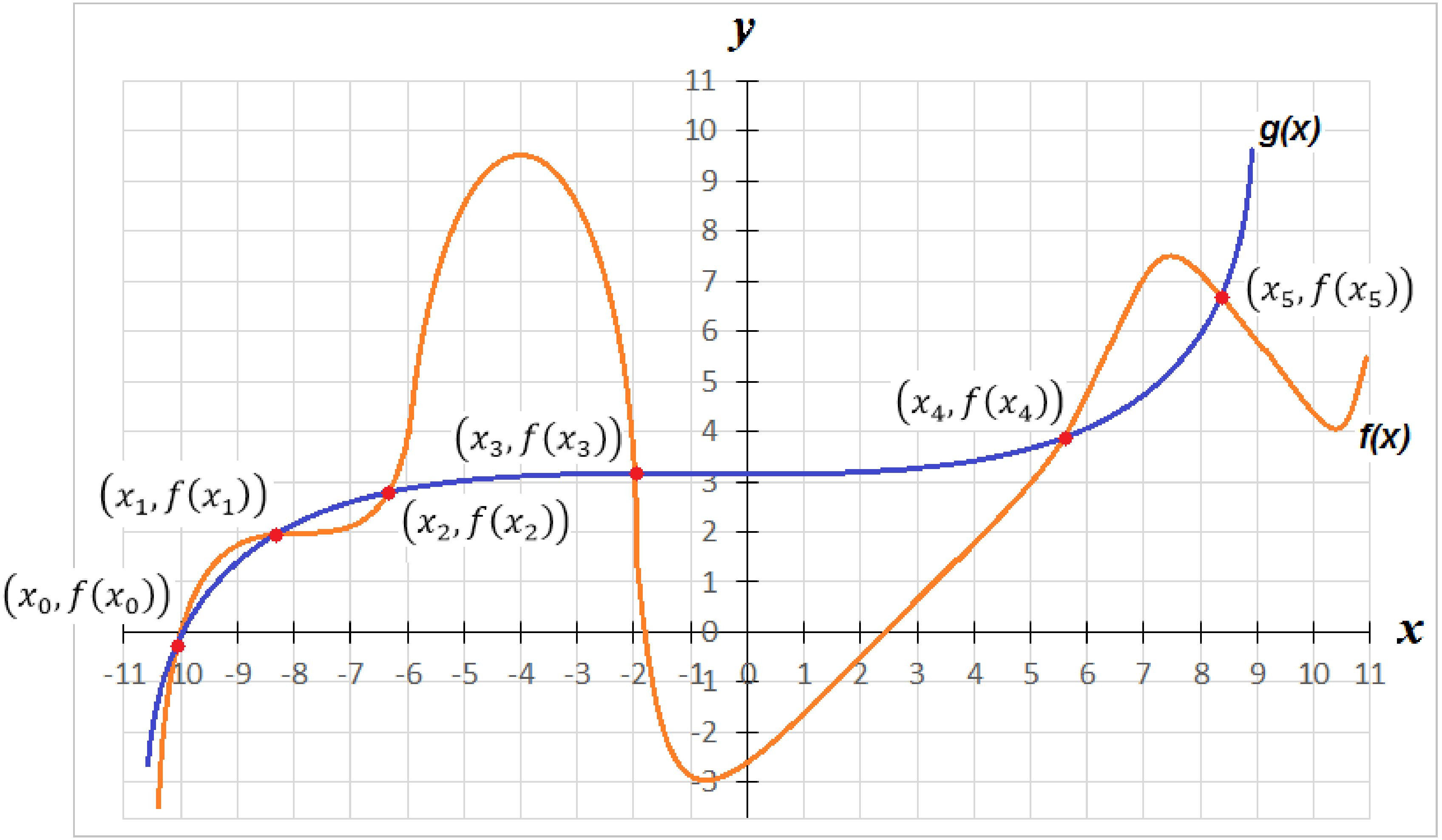
- O objetivo é construir uma função, chamada de função interpoladora, que se ajuste aos pontos de dados conhecidos. Essa função é escolhida de forma que ela passe exatamente pelos pontos amostrados, fornecendo estimativas precisas para os valores desconhecidos entre os pontos.

Consideremos (n+1) pontos distintos: x_0, x_1, x_2, …, x_n, chamados de nós da interpolação, e os valores da função f(x) nesses pontos: $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_n)$. A interpolação de f(x) consiste em se obter uma função g(x), tal que:

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ g(x_2) = f(x_2) \\ \quad\quad\vdots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

Interpolação

Graficamente:



Interpolação Polinomial

- A interpolação polinomial é um método de interpolação amplamente utilizado no cálculo numérico.
- Esse método aproxima uma função f(x) entre pontos conhecidos por meio de um polinômio que passa exatamente por esses pontos.

A ideia básica da interpolação polinomial é construir $p(x)$, um polinômio de grau n, cujo gráfico passe pelos n+1 pontos conhecidos dados por $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, …, $(x_n, f(x_n))$, ou seja, $p(x_i)=f(x_i)$ para todo i = 0, 1, 2, …, n.

Dessa forma, obtemos o seguinte sistema de equações lineares de ordem n+1:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_1 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = p(x_0) = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = p(x_1) = f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_1 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n = p(x_2) = f(x_2) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_1 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = p(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

Interpolação Polinomial

Neste caso, a matriz A dos coeficientes do sistema linear anterior será dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

- <u>Teorema</u>: Existe um único polinômio p(x), de grau menor ou igual a n, tal que $p(x_i) = f(x_i)$ para todo i = 0,1,2, …, n desde que $x_k \neq x_j$ quando $j \neq k$.

Forma de Lagrange

Método comum de interpolação polinomial que consiste em determinar p(x) como uma combinação linear de polinômios $L_k\ (x)$, tais que:

$p(x_i) = y_0L_0\ (x_i) + y_1L_1\ (x_i) + y_2L_2\ (x_i) + \ldots + y_nL_n\ (x_i) = y_i$

Onde $y_i = f(x_i)$ para todo i = 0,1,2, …, n.

A forma mais simples de se determinar os polinômios $L_k(x_i)$, de modo que a igualdade que define $p(x_i)$ seja verdadeira, é impor:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0\ se\ k \neq i \\ 1\ se\ k = i \end{cases};\quad \text{para todo } i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Forma de Lagrange

Para isso, definimos $L_k(x)$, para todo i = 0, 1, 2, …, n por

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

Dessa maneira teremos, para todo K = 0, 1, 2, …, n e todo i = 0, 1, 2, …, n, que

$$\begin{cases} L_k(x_k) = 1 \\ L_k(x_i) = 0 \end{cases}$$

- Note que cada um dos polinômios $L_k(x)$ tem grau n, pois é um produto de fatores da forma $(x - x_i)$ para todo i = 0, 1, 2, …, n com k ≠ i.

Portanto, a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)\,.$$

Forma de Lagrange

- Exemplo: Utilize a forma de Lagrange e os dados da tabela a seguir para determinar a interpolação polinomial de grau 2 para a função $f(x)$.

n	0	1	2
x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

Forma de Lagrange

$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$, onde

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{\big(x - (0)\big)\big(x - (2)\big)}{\big((-1) - (0)\big)\big((-1) - (2)\big)} = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{\big(x - (-1)\big)\big(x - (2)\big)}{\big((0) - (-1)\big)\big((-1) - (2)\big)} = \frac{x^2 - x - 2}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\big(x - (-1)\big)\big(x - (0)\big)}{\big((2) - (-1)\big)\big((2) - (0)\big)} = \frac{x^2 + x}{6}$$

Forma de Lagrange

Dessa forma, substituindo $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$ na igualdade que define o polinômio interpolador, obtemos a seguinte solução:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

n	0	1	2
x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

$$p(x) = (4)\left(\frac{x^2 - 2x}{3}\right) + (1)\left(\frac{x^2 - x - 2}{-2}\right) + (-1)\left(\frac{x^2 + x}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$$

Interatividade

Dada a tabela a seguir, determine a interpolação polinomial para os dados contidos na tabela utilizando a forma de Lagrange.

n	0	1	2	3
x	-2	0	2	4
y	4	2	0	3

a) $p(x) = -\frac{3}{24}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{17}{12}x + 2$

b) $p(x) = -\frac{5}{24}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{17}{12}x + 2$

c) $p(x) = -\frac{5}{24}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{17}{12}x + 2$

d) $p(x) = -\frac{5}{24}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{19}{12}x + 2$

e) $p(x) = -\frac{5}{24}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{17}{12}x + 2$

Resposta

Dada a tabela a seguir, determine a interpolação polinomial para os dados contidos na tabela utilizando a forma de Lagrange.

n	0	1	2	3
x	-2	0	2	4
y	4	2	0	3

a) $p(x) = -\frac{3}{24}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{17}{12}x + 2$

b) $p(x) = -\frac{5}{24}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{17}{12}x + 2$

c) $p(x) = -\frac{5}{24}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{17}{12}x + 2$

d) $p(x) = -\frac{5}{24}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{19}{12}x + 2$

e) $p(x) = -\frac{5}{24}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{17}{12}x + 2$

Forma de Newton

- Diferente da forma de Lagrange, a forma de Newton expressa o polinômio interpolador em termos das "diferenças divididas dos pontos de dados", representadas por d_k para todo índice k = 0,1, 2, 3, …, n e definidas a seguir.

Cálculo de d_0: $\mathrm{d}_0 = \mathrm{f}[\mathrm{x}_0] = \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$

Cálculo de d_1: $d_1 = f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Cálculo de d_2: $d_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \dfrac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$

Forma de Newton

Cálculo de d_3:

$$d_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} =$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_0} - \dfrac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}}{x_3 - x_0}$$

Forma de Newton

Cálculo de d_4:

$$d_4 = f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4] - f[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4 - x_0} =$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_0} - \dfrac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}}{x_3 - x_0}}{x_4 - x_0} -$$

$$- \frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_2-x_0} - \dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}}{x_3-x_0}}{x_4-x_0}$$

Forma de Newton

De uma maneira geral, seguindo recursivamente como nos cálculos anteriores para encontrar d_k, podemos determinar o valor do último coeficiente d_n pela igualdade a seguir:

$$d_n = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Forma de Newton

Podemos agora utilizar a forma de Newton para definir p(x), polinômio interpolador para uma função f(x) contínua e com tantas derivadas contínuas quantas necessárias num intervalo de números reais [a, b]. Considerando os pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, o polinômio que interpola uma função f(x) nos pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ é dado pela seguinte igualdade:

$$p(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

- Uma das vantagens da forma de Newton é que, uma vez que as diferenças divididas são calculadas, é possível acrescentar pontos adicionais sem a necessidade de recalcular todo o polinômio interpolador, facilitando a atualização do polinômio conforme novos pontos de dados são considerados.

Forma de Newton

- Para isso, a tabela a seguir pode tornar a atualização do polinômio interpolador menos trabalhosa, pois já organiza os valores para os cálculos novos dos coeficientes d_k que poderão ser utilizados.

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0,x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$			
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$			
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$		
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]$	$\vdots$	$\ddots$	
		$f[x_3,x_4]$	$\vdots$	$\vdots$	...	$f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n]$
x_4	$f[x_4]$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$⋰$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$			
$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-1},x_n]$				
x_n	$f[x_n]$					

Forma de Newton

Exemplo: Seja f(x) tabelada a seguir:

n	0	1	2	3	4
x	-1	0	1	2	3
f(x)	1	1	0	-1	-2

- Determine, através da forma de Newton, o polinômio interpolador de grau 4, para a função f(x) cujo gráfico passa pelos pares de pontos (x, f(x)) tabelados.

Forma de Newton

- Para fazer os cálculos dos coeficientes desta tabela, utilizaremos as fórmulas definidas anteriormente. Substituindo estes valores após os cálculos, obtemos a atualização da tabela dada por:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-1	1				
		0			
0	1		$-1/2$		
		-1		$1/6$	
1	0		0		$-1/24$
		-1		0	
2	-1		0		
		-1			
3	-2				

Forma de Newton

Assim, a fórmula do polinômio interpolador de f(x) determinado pela forma de Newton é dada por:

$$p(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$
$$+d_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Forma de Newton

Substituindo os valores calculados na tabela anterior, obtemos a seguinte igualdade:

$$p(x) = (1) + (0)\big(x - (1)\big) + \left({}^{-1}/_{2}\right)(x - (1))(x - (0)) +$$

$$+\left({}^{1}/_{6}\right)(x - (1))(x - (0))(x - (1)) + \left({}^{-1}/_{24}\right)(\mathrm{x} - (1))(\mathrm{x} - (0))(\mathrm{x} - (1))(\mathrm{x} - (2))$$

$$p(x) = 1 + \frac{3}{4}x - \frac{25}{24}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^4$$

Estudo do Erro de Interpolação

O estudo do erro na interpolação é uma parte fundamental da análise e do projeto de métodos de interpolação. Este estudo nos ajuda a saber quão próximo f(x) está de p(x). Em geral, o erro na interpolação pode ser dividido em dois tipos:

- Erro de interpolação local: Também conhecido como erro de truncamento, refere-se à diferença entre o valor exato da função e o valor interpolado em um ponto específico, e é influenciado pelo comportamento local da função e pelo grau do polinômio interpolador.

- Erro de interpolação global: Também conhecido como erro de aproximação, refere-se à diferença geral entre a função real e o polinômio interpolador em todo o intervalo de interpolação. Esse erro é afetado pela distribuição dos pontos amostrados, pelo grau do polinômio interpolador e pelas propriedades da função a ser interpolada.

Estudo do Erro de Interpolação

Observamos que, ao aproximarmos f(x) pelo polinômio interpolador p(x), de grau menor ou igual a n, o erro cometido está relacionado com a derivada de ordem (n+1) de f(x) e pode ser estimado por:

$$E(x) = |f(x) - p(x)| = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

Estudo do Erro de Interpolação

Podemos também estimar o erro utilizando as diferenças divididas até a ordem n através da seguinte igualdade:

$$E(x) = |f(x) - p(x)| = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{\underset{0 \leq k \leq n}{\text{máx}} |d_k|}{(n+1)!}$$

- É importante ressaltar que, em alguns casos, a interpolação polinomial pode levar a resultados indesejáveis, como oscilações excessivas entre os pontos ou amplificação de erros.

- Nessas situações, outras abordagens de interpolação podem ser mais adequadas para controlar e minimizar o erro cometido. Além disso, o estudo do erro na interpolação é essencial para compreender a precisão e a confiabilidade dos resultados obtidos por meio de métodos de interpolação.

Interatividade

Seja a função $f(x) = \sqrt{x} + x^2$ tabelada abaixo, aproxime f(2,9) usando interpolação quadrática pela forma de Newton.

n	0	1	2	3	4
x	0	1,5	3	4,5	6
y	0	3,47	10,73	22,37	38,45

a) 10,1096
b) 10,1010
c) 10,1101
d) 9,9901
e) 9,9909

Resposta

Seja a função $f(x) = \sqrt{x} + x^2$ tabelada abaixo, aproxime f(2,9) usando interpolação quadrática pela forma de Newton.

n	0	1	2	3	4
x	0	1,5	3	4,5	6
y	0	3,47	10,73	22,37	38,45

a) 10,1096
b) 10,1010
c) 10,1101
d) 9,9901
e) 9,9909

Método dos Quadrados Mínimos

- Consideremos uma função qualquer f(x) e os conjuntos de m pares ordenados $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_m, f(x_m))$.

- Sejam $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ as n funções escolhidas convenientemente de alguma forma. Consideremos que m, número de pares ordenados $(x_i, f(x_i))$ dados, seja maior ou igual a n, o número de funções $g_i(x)$ escolhidas.

Definimos, através do método dos quadrados mínimos, a função $\varphi(x)$ que melhor aproxima a função f(x) pela seguinte igualdade:

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x)$$

Método dos Quadrados Mínimos

Calculando os valores $\varphi(x_i)$ e utilizando a ferramenta do Cálculo Diferencial e Integral para garantir que $\varphi(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$, vamos determinar um sistema linear com n equações e n incógnitas dado por:

$$
S: \begin{cases}
a_{11}\alpha_1 + & a_{12}\alpha_2 + & a_{13}\alpha_3 + & & +a_{1n}\alpha_n & = b_1 \\
a_{21}\alpha_1 + & a_{22}\alpha_2 + & a_{23}\alpha_3 + & \cdots & +a_{2n}\alpha_n & = b_2 \\
a_{31}\alpha_1 + & a_{32}\alpha_2 + & a_{33}\alpha_3 + & & +a_{3n}\alpha_n & = b_3 \\
 & \vdots & & \ddots & \vdots & \\
a_{n1}\alpha_1 + & a_{n2}\alpha_2 + & a_{n3}\alpha_3 + & \cdots & +a_{nn}\alpha_n & = b_n
\end{cases}
$$

Método dos Quadrados Mínimos

Na matriz dos coeficientes $A = (a_{ij})$, seus elementos serão dados como segue:

- Caso discreto;
- Caso contínuo.

Método dos Quadrados Mínimos

<u>Caso Discreto</u>: É o caso em que f(x) é arbitrária, que já estamos considerando. Neste caso, o termo geral da matriz A dos coeficiente será:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k) g_j(x_k) = a_{ji}$$

Dessa maneira, a matriz A é simétrica. Além disso, temos ainda a matriz incógnita $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ e a matriz resultante $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, onde:

$$\mathrm{b_i} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{m}} \mathrm{f(x_k) g_i(x_k)}\,.$$

Método dos Quadrados Mínimos

Caso Contínuo: Esta situação exige a condição extra de que a função f(x) seja contínua num intervalo [a, b]. Neste caso, os coeficientes da matriz A serão definidos por:

$$a_{ij} = \int_a^b g_i(x) g_j(x)\, dx = a_{ji}$$

Além disso, teremos ainda a matriz incógnita $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ e a matriz resultante $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, onde:

$$b_i = \int_a^b f(x) g_i(x)\, dx$$

Método dos Quadrados Mínimos – Procedimento

- Formulação do problema: Primeiramente, é necessário formular o problema, definindo a função $\varphi(x)$ que representa a curva a ser ajustada. Essa função pode ser uma função linear, polinomial, exponencial, logarítmica ou qualquer outra função adequada para o problema em questão. Representar os pontos $(x_i, f(x_i))$ em um diagrama de dispersão pode auxiliar em uma boa escolha para a função $\varphi(x)$.

- Resolução do sistema de equações: A otimização da aproximação $\varphi(x)$ para a função f(x) gera o sistema linear $A \cdot \alpha = b$ na variável $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Esse sistema é resolvido para encontrar os valores ótimos dos parâmetros α_i que minimizam a função objetivo $\varphi(x)$.

- Caso Contínuo e Caso Não linear: Estamos interessados, apenas, na abordagem detalhada do caso discreto para o método dos quadrados mínimos.

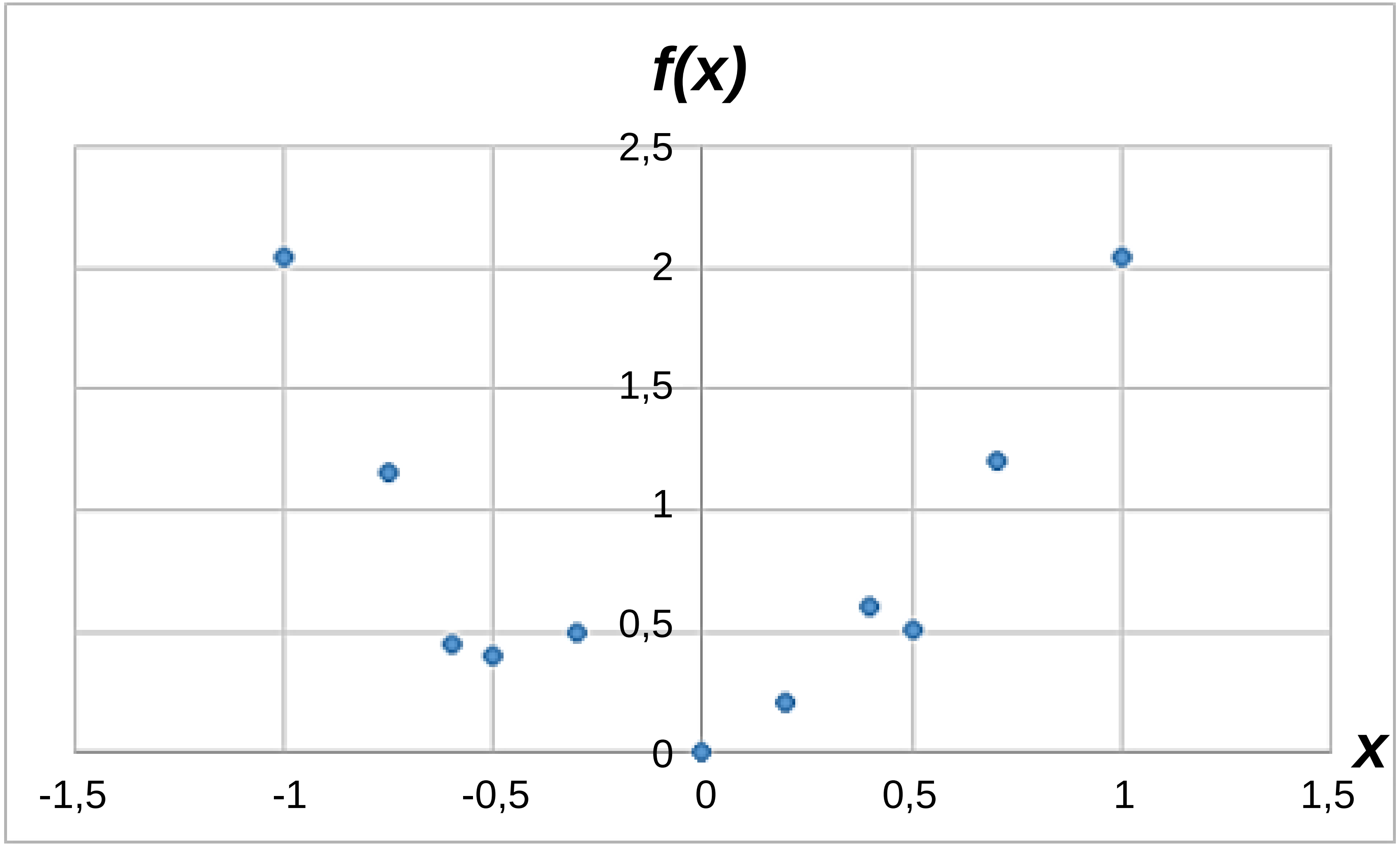
Método dos Quadrados Mínimos

- Exemplo (Caso Discreto): Considerando os pontos $(x_i, f(x_i))$ dados na tabela a seguir, utilize o método dos quadrados mínimos para aproximar a função f(x):

x	-1	-0,75	-0,6	-0,5	-0,3	0	0,2	0,4	0,5	0,7	1
f(x)	2,05	1,153	0,45	0,4	0,5	0	0,2	0,6	0,512	1,2	2,05

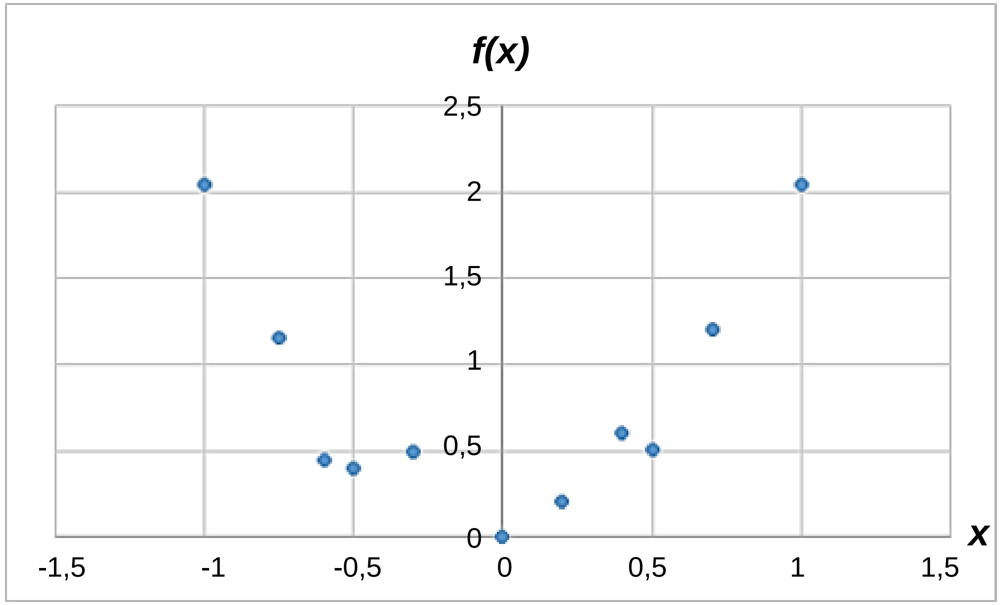
Método dos Quadrados Mínimos

- Fazendo o diagrama de dispersão dos pontos da tabela, obtemos:



Método dos Quadrados Mínimos

Fazendo o diagrama de dispersão dos pontos da tabela, obtemos



Observando o diagrama de dispersão obtido, podemos concluir que a função f(x) pode ser aproximada por uma parábola passando pela origem do sistema de coordenadas, isto é:

$f(x) \cong \varphi(x) = \alpha x^2$

- Neste caso, temos apenas um coeficiente α a determinar e apenas uma função $g(x) = x^2$.

Método dos Quadrados Mínimos

Vamos agora determinar os parâmetros desejados com o auxílio da tabela a seguir.

x	-1	-0,75	-0,6	-0,5	-0,3	0	0,2	0,4	0,5	0,7	1
f(x)	2,05	1,153	0,45	0,4	0,5	0	0,2	0,6	0,512	1,2	2,05

x	-1	-0,75	-0,6	-0,5	-0,3	0	0,2	0,4	0,5	0,7	1
g(x).g(x)	1	0,3164	0,1296	0,0625	0,0081	0	0,0016	0,0256	0,0625	0,2401	1
f(x).g(x)	2,5	0,6486	0,162	0,1	0,045	0	0,008	0,096	0,128	0,588	2,05

Efetuando a soma da segunda linha e da terceira linha da tabela anterior, obtemos os valores a seguir:

$a = \sum g(x).g(x) = 2{,}8464$ e também

$b = \sum f(x).g(x) = 5{,}8756$

Método dos Quadrados Mínimos

Logo, a equação que aproxima a função f(x) obtida pelo método dos quadrados mínimos é $a.\alpha = b$ e pode ser resolvida por:

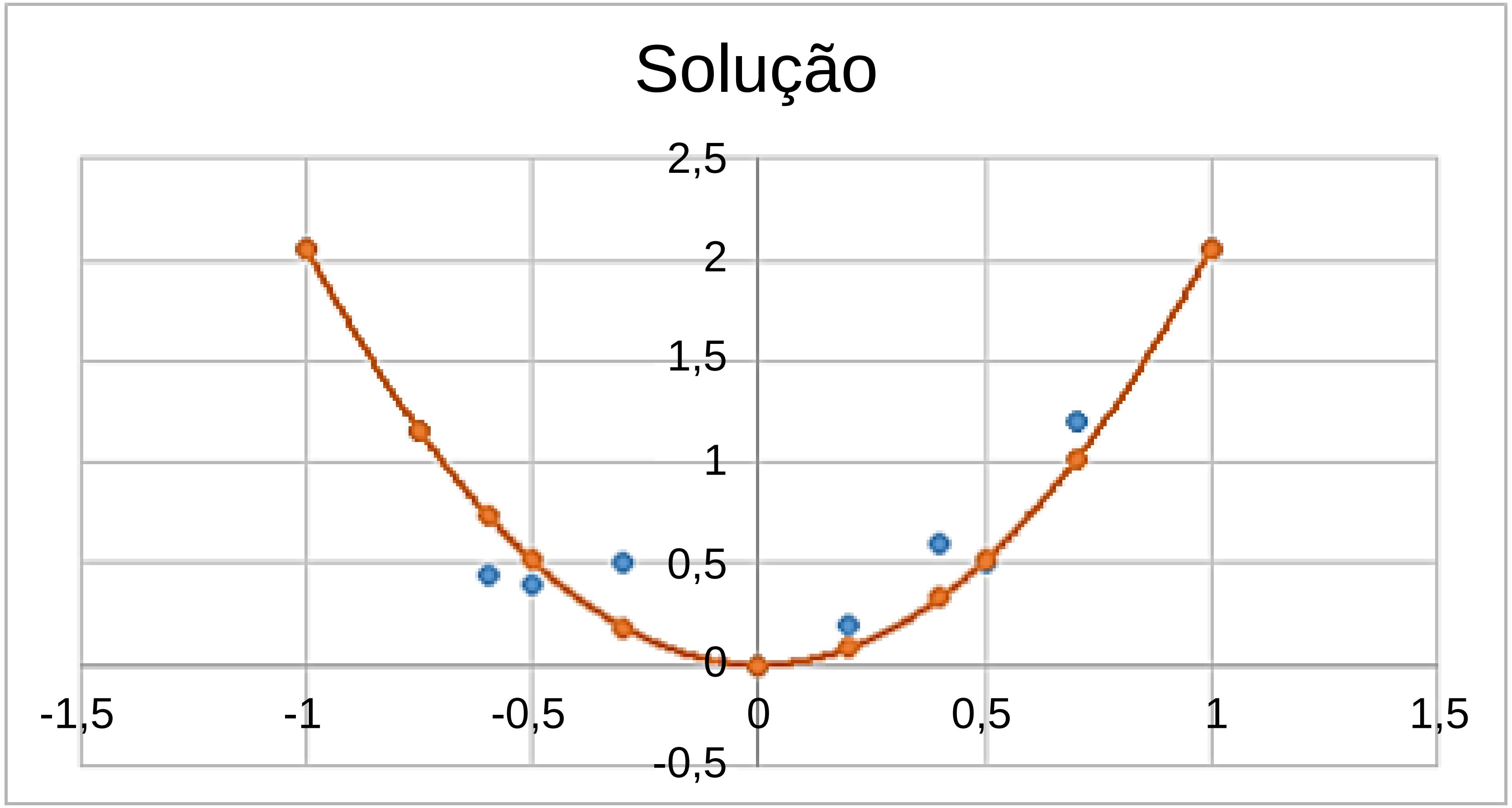
$$a.\alpha = b \Longrightarrow$$

$$2{,}8464.\alpha = 5{,}8756 \Longrightarrow$$

$$\alpha = \frac{5{,}8756}{2{,}8464} \Longrightarrow \alpha = 2{,}0642$$

Método dos Quadrados Mínimos

- Portanto, a função $\varphi(x) = 2{,}0642.\ x^2$ é a parábola que melhor aproxima a função f(x), dada pela tabela inicial, no sentido dos quadrados mínimos. Podemos ainda ilustrar a solução encontrada graficamente:



Interatividade

Ajuste os dados da tabela abaixo pelo método dos mínimos quadrados utilizando uma parábola do tipo $ax^2 + bx + c$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,5	0,6	0,9	0,8	1,2	1,5	1,7	2,0

a) $\varphi(x) = 0{,}4058 + 0{,}7810\, x + 0{,}0154\, x^2$

b) $\varphi(x) = 0{,}4058 + 0{,}7081\, x + 0{,}0154\, x^2$

c) $\varphi(x) = 0{,}4058 + 0{,}0781\, x + 0{,}1540\, x^2$

d) $\varphi(x) = 0{,}4058 + 0{,}0781\, x + 0{,}0154\, x^2$

e) $\varphi(x) = 0{,}4070 + 0{,}0781\, x + 0{,}0154\, x^2$

Resposta

Ajuste os dados da tabela abaixo pelo método dos mínimos quadrados utilizando uma parábola do tipo $ax^2 + bx + c$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,5	0,6	0,9	0,8	1,2	1,5	1,7	2,0

a) $\varphi(x) = 0{,}4058 + 0{,}7810\,x + 0{,}0154\,x^2$

b) $\varphi(x) = 0{,}4058 + 0{,}7081\,x + 0{,}0154\,x^2$

c) $\varphi(x) = 0{,}4058 + 0{,}0781\,x + 0{,}1540\,x^2$

d) $\varphi(x) = 0{,}4058 + 0{,}0781\,x + 0{,}0154\,x^2$

e) $\varphi(x) = 0{,}4070 + 0{,}0781\,x + 0{,}0154\,x^2$

Método dos Quadrados Mínimos

- <u>Exemplo (Caso Contínuo)</u>: Seja $f(x) = e^x$ para todo $x \in [0,1]$. Utilize o método dos quadrados mínimos para aproximar f(x) por uma parábola.

- <u>Solução</u>: Como queremos aproximar f(x) por uma parábola, devemos ter a função a ser aproximada dada por $\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2.x + \alpha_3.x^2$

Dessa forma, teremos que $g_1(x) = 1$; $g_2(x) = x$ e $g_3(x) = x^2$. Neste caso já podemos determinar os termos da matriz dos coeficientes do sistema de equações lineares $A \cdot \alpha = b$ obtido, onde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad e \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Método dos Quadrados Mínimos

- Como estamos considerando o caso contínuo, vamos utilizar as ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral que consideraremos já conhecidas e dominadas.
- Lembrete: $g_1(x) = 1$; $g_2(x) = x$ e $g_3(x) = x^2$

$$a_{11} = \int_0^1 g_1(x).\, g_1(x)\, dx = \int_0^1 1\, dx = x|_0^1 = (1) - (0) = 1$$

$$a_{22} = \int_0^1 g_2(x).\, g_2(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{(1)^3}{3}\right) - \left(\frac{(0)^3}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Método dos Quadrados Mínimos

$$a_{33} = \int_0^1 g_3(x).\, g_3(x)\, dx = \int_0^1 x^4\, dx = \left.\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \left(\frac{(1)^5}{5}\right) - \left(\frac{(0)^5}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$a_{12} = \int_0^1 g_1(x).\, g_2(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{(1)^1}{2}\right) - \left(\frac{(0)^2}{2}\right) = \frac{1}{2} = a_{21}$$

$$a_{13} = \int_0^1 g_1(x).\, g_3(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{(1)^3}{3}\right) - \left(\frac{(0)^3}{3}\right) = \frac{1}{3} = a_{31}$$

Método dos Quadrados Mínimos

$$a_{23} = \int_0^1 g_2(x).\, g_3(x)\; dx = \int_0^1 x^3\; dx = \left.\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{(1)^4}{4}\right) - \left(\frac{(0)^4}{4}\right) = \frac{1}{4} = a_{32}$$

Método dos Quadrados Mínimos

Cálculos para os coeficientes $\mathbf{b_i}$:

$$b_1 = \int_0^1 f(x).\, g_1(x)\, dx = \int_0^1 e^x\, dx = e^x]_0^1 = (e^1) - (e^0) = e - 1 \cong 1{,}7183$$

$$b_2 = \int_0^1 f(x).\, g_2(x)\, dx = \int_0^1 e^x.\, x\, dx = \cdots = 1$$

$$b_3 = \int_0^1 f(x).\, g_3(x)\, dx = \int_0^1 e^x.\, x^2\, dx = \cdots = 0{,}7183$$

Método dos Quadrados Mínimos

E assim surge o sistema:

$$A.\alpha = b \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}7183 \\ 1 \\ 0{,}7183 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema linear, obtém-se a solução $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, cujos valores são:

α_1 = 1,012

α_2 = 0,8522

α_3 = 0,8393

Método dos Quadrados Mínimos

Portanto, segundo o método dos quadrados mínimos, a solução que melhor aproxima a função exponencial $f(x) = e^x$ por uma função quadrática é:

$$\varphi(x) = 1{,}012 + 0{,}8522 \cdot x + 0{,}8393 \cdot x^2$$

Um pouco mais sobre ajustes de funções

- A aproximação de funções é uma abordagem essencial em matemática e ciência da computação, permitindo estimar o comportamento de uma função complexa por intermédio de funções aproximadas, consideravelmente mais simples e computacionalmente viáveis. Existem várias abordagens para realizar essas aproximações, cada uma com suas vantagens e limitações.

- Vimos anteriormente o método da interpolação polinomial, no qual uma curva polinomial é ajustada aos pontos conhecidos de uma função, passando exatamente por esses pontos.

  - No entanto, a interpolação polinomial pode levar a oscilações indesejadas e a resultados imprecisos dependendo de eventuais particularidades da função a ser aproximada.

Um pouco mais sobre ajustes de funções

- Abordamos também o método dos quadrados mínimos, uma técnica matemática utilizada para encontrar uma função, passando por um conjunto de pontos que melhor se aproxima da função determinada por este conjunto, minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre os valores reais e os valores estimados pela função aproximada.

- Uma outra maneira comum para aproximar uma função determinada por um conjunto de pontos é a regressão, que visa encontrar uma função paramétrica que melhor se ajuste aos dados disponíveis.

- A regressão permite lidar, razoavelmente bem, com discrepâncias nos dados e é frequentemente usada em análises estatísticas. No entanto, a escolha ruim do modelo funcional pode levar a resultados inadequados.

Um pouco mais sobre ajustes de funções

- Métodos mais avançados incluem aproximações por séries, como a série de Taylor, que estima uma função por meio de sua expansão em uma série infinita de termos. Esse método é eficaz em torno de pontos específicos, mas pode divergir para pontos distantes.

- Além disso, técnicas modernas como interpolação por splines cúbicos e métodos baseados em redes neurais têm ganhado destaque. Splines cúbicos dividem a função em segmentos suaves, proporcionando uma aproximação mais precisa.

- Redes neurais, por outro lado, são capazes de aprender padrões complexos nos dados, tornando-as úteis para aproximações não lineares.

Um pouco mais sobre ajustes de funções

- A escolha do método de aproximação depende da natureza da função, da disponibilidade de dados e da precisão desejada. Em muitos casos, uma combinação de diferentes métodos pode ser empregada para obter resultados mais robustos. Vale ressaltar que a seleção criteriosa do método é fundamental para garantir que a aproximação seja precisa e útil para o contexto em questão.

Um pouco mais sobre ajustes de funções

Interpolação de Hermite:

O objetivo da interpolação de Hermite é o de representar uma função f(x) por um polinômio que seja interpolador de f em alguns pontos do seu domínio e que a sua derivada seja interpoladora da derivada de f nesses mesmos pontos. Isto é, supondo que f seja derivável, a interpolação de Hermite procura um polinômio H, tal que, para alguns pontos x_i do domínio de f, tenhamos:

$$f(x_i) = H(x_i) \ e \ f'(x_i) = H'(x_i)$$

Um pouco mais sobre ajustes de funções

Interpolação com spline cúbico

- É uma metodologia de interpolação numérica, assim como interpolação linear, exponencial etc. De fato, representa uma forma de interpolação através de polinômios de 3ª ordem, sendo daí originado o nome cúbico. A maior característica das interpolações com spline cúbico é o amortecimento ou suavidade que apresentam na transição de um nó para outro. É uma técnica de aproximação que consiste em dividir o intervalo de interesse em vários subintervalos, e interpolá-lo, da forma mais suave possível, nestes subintervalos com polinômios de grau pequeno.

Um pouco mais sobre ajustes de funções

Extrapolação:

- No meio matemático, extrapolação é o processo de construção de novos pontos que se encontram fora dos limites dos pontos conhecidos. É similar ao processo de interpolação, que constrói novos pontos entre os pontos conhecidos, mas os resultados de extrapolação são frequentemente sujeitos à incerteza.
- Extrapolação linear;
- Extrapolação polinomial;
- Extrapolação cônica.

Interatividade

Considere os dados da tabela a seguir e determine a interpolação polinomial de grau 2 para a função f(x) utilizando a forma de Newton.

x	-1	0	2
y	4	1	-1

a) $p(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{7}{3}x + 2$

b) $p(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$

c) $p(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 1$

d) $p(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 2$

e) $p(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 3$

Resposta

Considere os dados da tabela a seguir e determine a interpolação polinomial de grau 2 para a função f(x) utilizando a forma de Newton.

x	-1	0	2
y	4	1	-1

a) $p(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{7}{3}x + 2$

b) $p(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$

c) $p(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 1$

d) $p(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 2$

e) $p(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 3$

ATÉ A PRÓXIMA!