UNIP
UNIVERSIDADE PAULISTA

Pesquisa Operacional

Autor: Prof. Angel Antonio Gonzalez Martinez
Colaboradoras: Profa. Vanessa Santos Lessa
Profa. Larissa Rodrigues Damiani

Professor conteudista: Angel Antonio Gonzalez Martinez

Doutor em Engenharia de Produção pela Universidade Paulista (UNIP), mestre em Engenharia Elétrica pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP) e bacharel em Engenharia Elétrica na modalidade Eletrônica pela Universidade Mackenzie. Atual coordenador geral do curso tecnológico em Análise e Desenvolvimento de Sistemas e coordenador na modalidade EAD do curso tecnológico em Análise e Desenvolvimento de Sistemas. Atua como professor do curso tecnológico em Análise e Desenvolvimento de Sistemas na UNIP tanto na modalidade presencial como na EAD, além de em outros cursos da mesma universidade. Trabalha há mais de 30 anos em cargos técnicos e gerenciais na área de computação.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M385p Martinez, Angel Antonio Gonzalez.

Pesquisa Operacional / Angel Antonio Gonzalez Martinez. – São Paulo: Editora Sol, 2023.

116 p., il.

Nota: este volume está publicado nos Cadernos de Estudos e Pesquisas da UNIP, Série Didática, ISSN 1517-9230.

1. Programação linear. 2. Redes. 3. Simulação. I. Título.

CDU 658.012.122

U518.69 – 24

Material Didático

Comissão editorial:
Profa. Dra. Christiane Mazur Doi
Profa. Dra. Ronilda Ribeiro

Apoio:
Profa. Cláudia Regina Baptista
Profa. M. Deise Alcantara Carreiro
Profa. Ana Paula Tôrres de Novaes Menezes

Projeto gráfico:
Prof. Alexandre Ponzetto

Revisão:
Luiza Gomyde
Andressa Picosque

Sumário

Pesquisa Operacional

APRESENTAÇÃO

Como futuro cientista da computação, você encontrará desafios envolvendo os dados de uma empresa ao tomar decisões para otimizar seus processos e aumentar sua eficiência e competitividade em um mercado altamente disputado. A pesquisa operacional fornece as ferramentas para tomar a decisão mais acertada via sistemas quantitativos nas mais diversas áreas da sociedade.

Este livro-texto tem caráter introdutório, porém lhe fornecerá uma visão abrangente para que se aventure em desafios maiores. Considere este livro apenas o primeiro degrau da escada que leva a uma área que abarca todas as empresas e ramos de negócios do planeta – de um simples comércio próximo aos nossos lares até as corporações multinacionais espalhadas pelo globo.

Vale acrescentar que este material é escrito em linguagem simples e direta, como se houvesse uma conversa entre autor e leitor. As várias figuras auxiliam no entendimento dos tópicos desenvolvidos, os itens Observação e Lembrete são oportunidades para que você solucione eventuais dúvidas, e os Saiba Mais possibilitam que você amplie seus conhecimentos. Há, ainda, muitos exemplos de aplicação, resolvidos em detalhe, que ajudam a fixar os assuntos abordados.

Bons estudos.

INTRODUÇÃO

O livro é dividido em duas unidades, com quatro capítulos cada. A unidade I aborda temas mais generalistas, enquanto a unidade II foca em itens mais específicos. A obra tem uma abordagem introdutória e voltada para a tomada de decisões.

Na unidade I, o tópico 1 trata de aspectos introdutórios e históricos relacionados à pesquisa operacional. No item 2, a programação linear é apresentada com a resolução de modelos matemáticos por métodos algébricos, seguida pela resolução via métodos gráficos e pela resolução com o uso de ferramentas computacionais, utilizando-se do suplemento Solver de uma planilha eletrônica. O tópico 3 é destinado ao método Simplex, que é um ferramental matemático clássico extremamente poderoso usado para auxiliar as tomadas de decisão. O tópico 4 aborda problemas de transporte e designação, úteis em áreas como a logística.

Na unidade II, o item 5 destina-se a problemas de otimização de fluxo em redes, iniciando com uma recordação de temas abordados em outras disciplinas e direcionando o entendimento para problemas clássicos. O tópico 6 aborda temas relacionados à teoria clássica de decisão, considerando aspectos em ambientes de risco e incerteza. O item 7 descreve a teoria das filas com modelos para controle do fluxo, e o tópico 8 apresenta a teoria da simulação com a aplicação de algoritmos clássicos.

A pesquisa operacional é usada em uma infinidade de áreas e se vale de muitos recursos de programação. É um campo que envolve diversos recursos computacionais, e por esse motivo é muito próximo das ciências da computação.

A seguir, apresentamos uma breve lista de recursos computacionais que podem ser úteis para resolver problemas de pesquisa operacional:

- **Microsoft Excel (Solver)**: é uma ferramenta de planilha amplamente utilizada, e vem com um add-in chamado Solver que é capaz de resolver problemas de programação linear usando o método Simplex.

- **Lindo/Lingo**: é um software popular e amplamente utilizado para otimização linear, não linear, inteira e global.

- **IBM Ilog CPLEX Optimization Studio**: é uma das ferramentas mais poderosas para otimização matemática, e inclui solucionadores para programação linear, quadrática e outras formas de otimização.

- **Gams (General Algebraic Modeling System)**: é uma ferramenta de modelagem de alto nível e uma linguagem de programação desenvolvida especificamente para otimização matemática.

- **GLPK (GNU Linear Programming Kit)**: é uma ferramenta de software livre que é utilizada para resolver problemas de programação linear (LP), programação inteira mista (MIP) e outros problemas relacionados.

- **Matlab**: a plataforma Matlab, com seu *toolbox* de otimização, também pode ser utilizada para resolver problemas de programação linear usando o método Simplex.

- **Python (PuLP, SciPy, cvxpy)**: existem várias bibliotecas em Python para otimização matemática e programação linear, sendo PuLP uma das mais conhecidas para essa finalidade.

- **AMPL (A Mathematical Programming Language)**: é uma linguagem de modelagem para problemas de otimização matemática.

- **OR-Tools (Google)**: é uma biblioteca de software livre para otimização combinatória que inclui solucionadores para programação linear e outros problemas de otimização.

- **Mosek**: é uma ferramenta de otimização de software comercial amplamente usada em áreas acadêmicas e industriais.

- **Mathematica**: desenvolvida pela Wolfram Research, é uma poderosa ferramenta de computação simbólica e numérica, com uma ampla gama de funcionalidades, incluindo a capacidade de resolver problemas de programação linear e outras formas de otimização.

- **Scilab**: é uma ferramenta de software livre para cálculos matemáticos e dispõe de um módulo dedicado à otimização e resolução de problemas de programação linear.

- **Octave**: similar ao Matlab em muitos aspectos, o GNU Octave é uma ferramenta de software livre utilizada para computação numérica. Ele também tem capacidade de resolver problemas de programação linear, especialmente quando utilizado em conjunto com pacotes adicionais.

- **Maple**: desenvolvido pela Maplesoft, o Maple é uma ferramenta de computação simbólica que também tem capacidade numérica. Ele pode ser utilizado para resolver uma variedade de problemas de otimização, incluindo programação linear.

R e otimização

Excelente escolha para muitos projetos, o R é amplamente reconhecido por sua capacidade estatística e de análise de dados, mas sua funcionalidade em otimização e programação linear, embora menos conhecida se comparada a softwares dedicados (como CPLEX ou Gurobi), é robusta e muito útil – especialmente ao considerar a facilidade de integração com outras análises estatísticas e de dados em R.

- **lpSolve**: é um dos pacotes mais populares em R para resolver problemas de programação linear, também com funções para resolver problemas de programação linear inteira. A função lp() é comumente usada para resolver problemas.

- **Rglpk**: é uma interface para a biblioteca GNU GLPK, que é usada para resolver problemas de programação linear e mista.

- **Rmosek**: é uma interface para a ferramenta de otimização comercial Mosek.

- **TuneRanger**: enquanto R tem uma série de pacotes para otimização clássica, há também pacotes como o TuneRanger, que usam métodos de otimização para sintonizar modelos de aprendizado de máquina.

Python e otimização

A escolha do solucionador ou biblioteca geralmente depende das necessidades específicas do projeto, como a complexidade do problema, a necessidade de soluções inteiras ou contínuas e o orçamento – já que alguns solucionadores são comerciais e podem ser caros. Para muitos problemas, começar com uma biblioteca gratuita como PuLP ou o módulo optimize do SciPy pode ser o suficiente. Se as necessidades forem mais complexas ou se o desempenho for crítico, solucionadores comerciais como Gurobi ou CPLEX podem ser considerados.

- **PuLP**: é uma biblioteca de programação linear que permite a criação de modelos de otimização de forma intuitiva. Com PuLP é possível escolher solucionadores como CBC (gratuito) ou optar por solucionadores comerciais, como CPLEX e Gurobi.

- **SciPy**: a biblioteca SciPy, amplamente utilizada para computação científica, dispõe de um módulo optimize que inclui funções para otimização linear, como linprog.

- **CVXPy**: é uma biblioteca de modelagem para problemas de otimização convexa. Ela permite definir problemas de otimização de maneira simbólica e fornece interfaces para vários solucionadores, tanto gratuitos quanto comerciais.

- **Gurobi e CPLEX**: são solucionadores comerciais de otimização que oferecem interfaces Python. Ambos são considerados estado da arte em termos de desempenho e são amplamente utilizados na indústria e na academia.

- **Google OR-Tools**: é uma coleção de ferramentas de otimização oferecida pelo Google. Embora não seja exclusiva para programação linear (também oferece soluções para problemas de roteamento, por exemplo), inclui um solucionador de programação linear.

- **GLPK (GNU Linear Programming Kit)**: embora o GLPK tenha sua própria linguagem, também existem interfaces para Python.

- **Pyomo**: é uma linguagem de modelagem baseada em Python que permite definir problemas de otimização de maneira simbólica e suporta uma variedade de solucionadores.

A linguagem C/C++ e Cuda GPU

É possível elaborar uma otimização linear usando a linguagem C++ e tirar proveito das placas de vídeo NVIDIA com núcleos Cuda. No entanto, é importante destacar que a otimização linear e outros métodos de otimização matemática não são intrinsecamente paralelizáveis da mesma maneira que algumas operações gráficas ou certos algoritmos de *machine learning*. Dito isso, há algumas abordagens e ferramentas que podem ser utilizadas:

- **Solução direta com Cuda**: é possível implementar algoritmos de otimização linear diretamente em Cuda, paralelizando partes do algoritmo que assim permitam. Por exemplo: operações matriciais que são frequentemente encontradas em métodos de otimização podem ser aceleradas com GPU.

- **Uso de bibliotecas otimizadas para GPU**: existem bibliotecas que implementam operações matriciais e outros cálculos comuns em otimização e que são otimizadas para Cuda, como cuBLAS e cuSOLVER. Elas podem ser usadas como parte de um algoritmo de otimização implementado em C++.

- **Solução comercial com suporte a Cuda**: alguns pacotes de software comerciais de otimização, como Gurobi ou CPLEX, podem ter algum nível de suporte para aceleração via GPU, embora o foco principal seja o uso de múltiplos núcleos de CPU.

- **Outras abordagens baseadas em GPU**: enquanto a otimização linear tradicional pode não se beneficiar diretamente do uso de GPUs, certos problemas e abordagens que envolvem, por exemplo, simulações, métodos de Monte Carlo ou algoritmos genéticos podem se beneficiar significativamente da paralelização proporcionada pelas GPUs.

- **Frameworks de otimização genérica**: existem frameworks como o OpenCL que permitem a programação paralela e que podem ser usados em GPUs NVIDIA (além de outros dispositivos). Esta é uma opção mais genérica, caso você esteja considerando não apenas NVIDIA/Cuda, mas também outras arquiteturas.

É importante avaliar se a aceleração por GPU proporcionará benefícios significativos para o seu problema específico de otimização linear. Em muitos casos, especialmente para problemas em grande escala, o desempenho pode ser mais impactado por fatores como a eficiência do algoritmo escolhido, a qualidade da implementação e a arquitetura geral do sistema (como acesso à memória, IO etc.) do que pela computação paralela em si.

Unidade I

1 INTRODUÇÃO À PESQUISA OPERACIONAL

A pesquisa operacional é uma área interdisciplinar do conhecimento que emprega modelos matemáticos, estatísticos e algorítmicos para auxiliar a tomar decisões eficientes e otimizadas. Essa ciência surgiu durante a Segunda Guerra Mundial para resolver problemas logísticos e estratégicos, e desde então evoluiu para encontrar aplicações em diversas áreas, como indústria, finanças, saúde e transporte. A seguir, são abordadas algumas das técnicas mais conhecidas e usadas na pesquisa operacional, que serão estudadas neste livro.

Programação linear e métodos gráficos

A programação linear é uma das ferramentas mais antigas e amplamente usadas em pesquisa operacional. Ela é empregada para encontrar a melhor solução possível, geralmente sob um conjunto de limitações expressas em forma de equações ou inequações lineares. Os métodos gráficos são uma forma intuitiva de resolver problemas de programação linear que envolvem duas variáveis, permitindo uma representação visual das soluções viáveis e ótimas.

Método Simplex

Embora os métodos gráficos sejam úteis, são impraticáveis para problemas com muitas variáveis. Para isso, o método Simplex é uma técnica algorítmica eficiente que resolve problemas de programação linear mais complexos, permitindo a inclusão de múltiplas variáveis e restrições.

Problemas de transporte e designação

Essas são categorias especiais de problemas de programação linear que tratam da otimização da distribuição de recursos. Enquanto os problemas de transporte focam na forma mais eficiente de mover bens entre fornecedores e consumidores, os problemas de designação lidam com a alocação de tarefas a recursos de modo a minimizar o custo ou maximizar a eficiência.

Otimização de redes

A otimização de redes aborda problemas que podem ser representados por grafos, como o problema do menor caminho, fluxo máximo e mínima árvore geradora. Esses modelos são muito usados em logística, telecomunicações e pesquisa de operações de sistemas computacionais.

Teoria da decisão

A teoria da decisão oferece um framework formal para tomar decisões em ambientes incertos ou competitivos. Ela abrange vários métodos para avaliar alternativas, riscos e probabilidades, sendo útil em campos como economia, ciência política e medicina.

Teoria das filas

Essencial em sistemas de serviço e produção, a teoria das filas ajuda a entender como os serviços são prestados sob condições de demanda variável. Ela é crucial para o design e a operação eficientes de sistemas como call centers, redes de computadores e linhas de produção.

Simulação

A simulação é uma técnica poderosa que permite modelar e analisar a complexidade do mundo real em um ambiente controlado. Ela é especialmente útil quando os modelos matemáticos são impraticáveis de resolver analiticamente.

Em resumo, a pesquisa operacional oferece um conjunto diversificado de ferramentas e métodos que auxiliam a tomada de decisões mais eficientes e fundamentadas em diferentes áreas da vida e do conhecimento. É uma disciplina em constante evolução, adaptando-se para atender às necessidades emergentes em um mundo cada vez mais complexo e interconectado.

1.1 Origem e definição de pesquisa operacional

A origem do termo pesquisa operacional é comumente atribuída às atividades militares do início da Segunda Guerra Mundial (Hillier *et al.*, 2012), evento em que foram empregados métodos científicos para alocação eficiente dos recursos nas operações militares.

Com o término do conflito bélico e o sucesso dos métodos empregados na pesquisa operacional, houve um grande interesse do meio empresarial pelo emprego dessas técnicas científicas na gestão da produção industrial, bem como na área de serviços. Diversos cientistas das equipes de pesquisa operacional, entre outros, tomaram conhecimento do assunto e dedicaram-se a pesquisas na área, obtendo resultados importantes. Dentre esses resultados, vale a pena destacar o **método Simplex**, criado por George Dantzig em 1947 enquanto trabalhava para as forças militares de seu país resolvendo problemas de logística (Duarte Júnior, 2023); o método é usado para solucionar problemas de programação linear. Ao final da década de 1950, várias técnicas de pesquisa operacional já estavam bem desenvolvidas, e assim esse campo ganha destaque nas mais diversas áreas da administração eficiente de recursos, tornando-se uma ferramenta indispensável nos mais diversos setores da sociedade.

Observação

O prêmio Nobel de economia de 1975 foi dividido entre o holandês Tjalling Koopmans e o russo Leonid Kantorovich (de família de origem judaica) por suas contribuições para a teoria da alocação ótima de recursos. Em seus discursos de aceitação do prêmio, mencionaram explicitamente o método Simplex de George Dantzig, gerando um desconforto na cerimônia pelo fato de o autor não ter sido indicado para o prêmio daquele ano. Aparentemente, um dos motivos para a Real Academia Sueca de Ciências não o indicar é o fato de Dantzig ter usado suas descobertas para fins militares (Colin, 2017; Duarte Júnior, 2023).

O termo pesquisa operacional é a tradução brasileira do inglês *operational research* – traduzido em Portugal como investigação operacional e no idioma espanhol por *investigación operativa* (Arenales; Armentano, 2006). A definição de pesquisa operacional é controversa, mesmo porque o nome não indica de forma clara todos os assuntos abordados na disciplina. Assim, será adotado de forma objetiva o conceito definido por Silva *et al.* (2017):

> A pesquisa operacional (PO) é uma metodologia criada para auxiliar a tomada de decisão. Em linhas gerais, consiste na descrição de um sistema organizado com o auxílio de um modelo, e através da experimentação com o modelo, na descoberta da melhor maneira de operar o sistema.

1.2 Objetivos do ensino de pesquisa operacional

Moreira (2010) resumiu os objetivos do ensino da pesquisa operacional aos seguintes:

- Melhorar o pensamento lógico dos estudantes para a estruturação de problemas.
- Ensinar técnicas que sejam úteis para o futuro executivo.
- Familiarizar o estudante com o uso de recursos computacionais.

Há uma grande variedade de softwares (programas de computador) usados na pesquisa operacional – desde o Excel da Microsoft com o suplemento Solver, utilizado para problemas de baixa complexidade, até softwares como o CPLEX Optimizer da IBM, destinado a situações mais complexas. Para aqueles com conhecimentos de programação computacional, existe ainda a alternativa da linguagem de programação, tais como Python ou R. Há ainda o GLPK (GNU Linear Programming Kit), pacote muito usado na academia para pesquisas científicas, mas que requer conhecimentos avançados de programação.

1.3 Construção de modelos matemáticos

A construção de modelos matemáticos é considerada por alguns como uma arte. Para tanto, é preciso, já de início, entender o problema – e para isso serão abordados alguns conceitos preliminares antes de expor um fluxograma de construção de modelos matemáticos. O dicionário Houaiss define os termos “problema” e “solução”, centrais para a pesquisa operacional, da seguinte forma:

- **Problema**: uma dificuldade que deve ser de solucionada (Problema, 2009).
- **Situação**: combinação ou concorrência de acontecimentos ou circunstâncias em dado momento (Situação, 2009).

Pode-se inferir que uma situação-problema é uma questão a ser resolvida por uma sequência de ações executadas para atingir um objetivo, em que a situação é o estado inicial e o objetivo é o estado final desejado. Um modelo matemático pode ser um conjunto mínimo de fórmulas usadas para representar uma situação real de forma simplificada; essa simplificação deve ser feita criteriosamente para que os resultados obtidos pelo modelo sejam próximos às condições reais, a fim de que o objetivo atingido esteja próximo ao desejado, admitindo apenas erros desprezíveis.

Os dados costumam ser classificados em dados estruturados, não estruturados e semiestruturados.

- **Dados estruturados**: informações organizadas em uma estrutura rígida previamente planejada.
- **Dados não estruturados**: informações que não estão organizadas de forma rígida.
- **Dados semiestruturados**: informações compostas parcialmente por dados estruturados e não estruturados.

Um exemplo típico de dados estruturados são os bancos de dados relacionais. Neles, as informações são distribuídas em tabelas, cujas colunas apresentam categorias previamente definidas – como "numéricos" ou "alfanuméricos". Como exemplo de dados não estruturados, temos as redes sociais, que contêm muitos textos, imagens, vídeos e diversos outros dados criados sem uma organização prévia. Já um exemplo de semiestruturados são conteúdos gravados em arquivos de extensão .xml, como aqueles eventualmente embutidos – lembrando que em .xml os dados podem estar estruturados.

Saiba mais

XML (*Extensible Markup Language*) é uma linguagem de marcação com regras para formatar documentos que facilita a manipulação dos dados tanto por humanos como por máquinas. Ele foi publicado pela primeira vez em meados da década de 1990 pela W3C (World Web Consortium). O HTML (*HiperText Markup Language*), usado para formatar páginas na internet, é um caso particular de XML. JSON (*JavaScript Object Notation*) também é outro formato para armazenar informações, muito usado na transmissão de informação pela web. Consulte os livros indicados a seguir para conhecer essas linguagens mais a fundo:

MARTIN, D.; BIRBECK, M.; KAY, M. *Professional XML*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2001.

SMITH, B. *JSON básico*: conheça o formato de dados preferido da web. São Paulo: Novatec, 2015.

Após descrever uma situação-problema e as informações sobre ela levantadas, deve-se partir para a análise dos dados, que pode ser realizada pelos métodos quantitativo ou qualitativo. O método quantitativo é mais utilizado nas áreas de ciências exatas, enquanto o método qualitativo é mais utilizado nas áreas de ciências humanas.

- **Método quantitativo**: analisa dados numéricos organizados e objetivamente mensuráveis.

- **Método qualitativo**: estuda fenômenos que requerem descrições e análises não numéricas referentes a um determinado problema.

Na figura a seguir, apresentamos o fluxo típico para a construção de um modelo matemático referente a uma situação-problema.

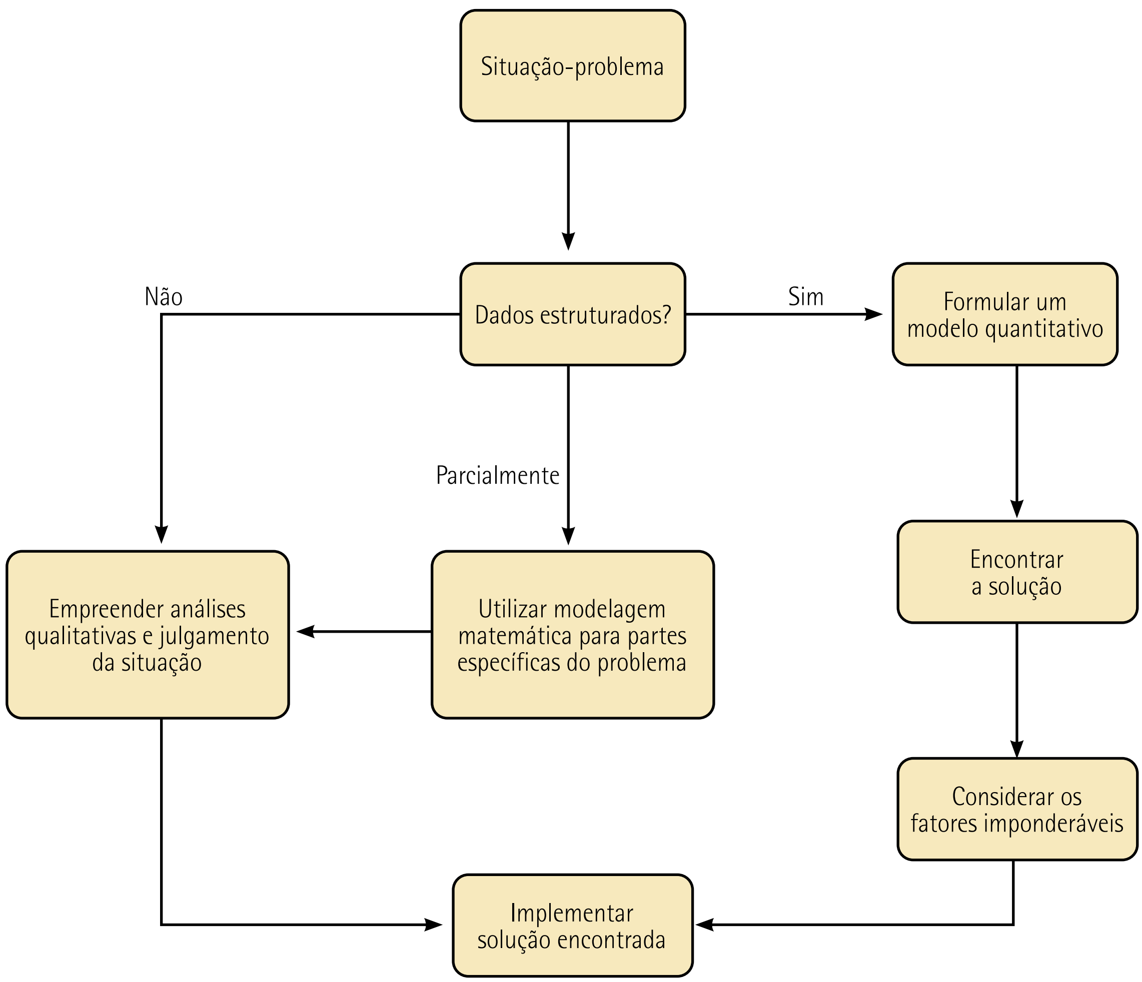

Figura 1 – Fluxo típico

Adaptado de: Moreira (2010).

Existem três possibilidades para definir a organização dos dados:

- Se os dados não forem estruturados, parte-se para uma análise qualitativa.
- Se os dados são estruturados, formula-se um modelo quantitativo através de fórmulas.
- Para dados parcialmente estruturados, usa-se os métodos quantitativos e qualitativos.

Este livro dedica-se ao estudo dos modelos **quantitativos**, em que os dados são apresentados de forma estruturada. Neste caso, serão realizados conjuntos de equações matemáticas cujos resultados deverão se aproximar aos resultados reais.

O problema, após a formulação do modelo, apresentará uma dentre estas três alternativas de solução: o problema não tem solução; o problema tem apenas uma solução; o problema tem várias soluções. Quando se tem problemas com várias soluções viáveis, busca-se a solução ótima – este é o principal objetivo dos estudos deste livro.

Saiba mais

Há casos em que a quantidade de soluções possíveis é um número muito grande, tornando a busca por uma solução ótima inviável. Portanto, buscam-se soluções subótimas. Como exemplo de um algoritmo para soluções subótimas, temos o *simulated annealing*, que é um algoritmo para otimização que consiste numa técnica de busca local probabilística. Esse tipo de estudo está fora do escopo deste texto, mas você pode obter mais informações sobre ele na seguinte obra:

ARENALES, M.; ARMENTANO, V. *Pesquisa operacional*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

2 PROGRAMAÇÃO LINEAR E MÉTODOS GRÁFICOS

A programação linear é um dos métodos de otimização utilizados na pesquisa operacional. A palavra **programação** deve ser entendida como o planejamento em algum processo administrativo, gerencial, industrial etc. Esse planejamento objetiva obter o melhor resultado possível para o processo – seja maximizando o lucro ou minimizando os custos, por exemplo. A palavra **linear** está relacionada ao fato de serem usadas equações lineares.

Em matemática, um problema sem solução já está resolvido. Se o problema tem uma única solução, então o objetivo é encontrá-la; contudo, se um problema tem várias soluções, é necessária uma regra que permita encontrar a melhor solução.

Um problema de programação matemática é composto por uma função objetivo, dependente de um número finito de entradas x_i e que deve ser otimizada – isto é, maximizada ou minimizada. Além da função objetivo, o modelo é sujeito a um conjunto de inequações ou equações que representam as restrições técnicas impostas pela situação-problema. A seguir, descrevemos a forma geral de equacionamento para um problema de programação matemática, adaptada de Bronson (1985):

$$\text{otimizar(Max ou Min)}: \quad Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\text{sujeito} \quad \text{a}: \begin{matrix} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \end{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \left\{\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right. \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{matrix}$$

Um problema de programação matemática é linear se as funções que o compõem são lineares; caso contrário, o problema será não linear (Bronson, 1985). Dessa forma, temos que:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$
$$e$$
$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n$$

$$onde\ c_j\ e\ a_{ij}\ (i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n)$$
$$são\ constantes\ conhecidas$$

Observação

Se as entradas x_i forem números inteiros, então temos um problema de programação inteira.

2.1 Conceito de programação linear

A programação linear é uma técnica matemática usada para encontrar o melhor resultado possível em um modelo matemático cujos requisitos são representados por equações lineares. Em termos simples, existe algo que se deseja otimizar, sujeito a certas restrições, e tudo isso pode ser expresso em equações lineares.

Saiba mais

A programação linear tem um impacto significativo na economia moderna. Ela é uma ferramenta essencial em campos como pesquisa operacional e economia para otimização de produção, logística, finanças, telecomunicações etc. Você pode se aprofundar no tema nos livros indicados a seguir:

COLIN, E. C. *Pesquisa operacional*: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas. 2. ed. Rio de Janeiro: Atlas, 2017.

NASCIMENTO, S. V. *Pesquisa operacional e análise de investimentos*: suas aplicações na indústria e nos serviços: com utilização do software Lindo. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2012.

SILVA, A. M. *Pesquisa operacional aplicada à logística*. Rio de Janeiro: Alta Books, 2023.

Por exemplo: suponha que um fazendeiro deseja obter o maior lucro possível cultivando milho e trigo em um terreno com tamanho e recursos (como água e fertilizantes) limitados. Além disso, o tempo que ele pode dedicar a cada cultura também é limitado. O objetivo é descobrir o quanto de cada cultura plantar para maximizar o lucro.

Outro exemplo, mais simples, poderia ser o planejamento de uma festa em que se quer fazer o máximo de sanduíches possíveis com os ingredientes já disponíveis na cozinha, tais como pão, presunto e queijo, mas em quantidades limitadas. O desafio é descobrir quantos sanduíches de cada tipo você pode fazer sem desperdiçar nada e sem exceder o conteúdo disponível. A programação linear é uma ferramenta que auxiliará a resolver esse tipo de problema. Ela te diz a melhor maneira de usar seus recursos (no último caso, ingredientes) para obter o melhor resultado possível (o número máximo de sanduíches).

Em resumo, programação linear é um método para ajudar a tomar as melhores decisões com base nos recursos e limitações em um certo contexto. Apresentamos, a seguir, um exemplo resolvido.

Exemplo de aplicação

Considere o caso de uma pequena cidade estar preparando uma festa comemorativa para a divulgação dos produtos da economia local. Durante o planejamento do evento, foi definido que uma das opções do cardápio serão hambúrgueres especiais feitos com uma mistura de carne bovina magra e carne suína. Esses dois ingredientes são os principais itens da economia local. A carne bovina magra contém 80% de carne e 20% de gordura, e custa R$ 40,00 por kg. A carne suína tem 68% de carne e 32% de gordura, e custa R$ 30,00 por kg. Quanto de carne bovina e de carne suína deve ser utilizado por quilograma de hambúrgueres para minimizar o custo e conservar o teor de gordura de um hambúrguer em níveis inferiores a 25%?

O objetivo é minimizar o custo z (em reais) de um quilograma de hambúrgueres, em que:

z = 40 vezes o peso de carne bovina mais 30 vezes o peso da carne suína, de tal forma que o teor de gordura não ultrapasse os 25%.

Define-se que:

- x_1: peso da carne bovina usada em cada quilograma de hambúrgueres.
- x_2: peso da carne suína usada em cada quilograma de hambúrgueres.

Assim, tem-se a seguinte função objetivo:

Minimizar: $z = 40x_1 + 30x_2$

Como restrições, temos que o teor de gordura proveniente da soma da quantidade de carne bovina com a de suína deve ser inferior a 25%, e que a carne bovina participa da soma com um percentual relativo a 20% de seu peso, e a suína, com 32%. Dessa forma, obtém-se a seguinte equação de restrição:

Sujeito a (sa): $0,20x_1 + 0,32x_2 \leq 0,25$

A soma dos pesos da quantidade de carne bovina e suína deve ser igual a 1 quilograma. Assim, temos: $x_1 + x_2 = 1$. Obviamente, por se tratar de quantidades de carne, as variáveis x_1 e x_2 devem ser positivas, ou seja, $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$.

Este problema pode ser equacionado por:

$$\text{minimizar}: \quad 40x_1 + 30x_2$$

$$\text{sujeito a}: \begin{cases} 0,20x_1 & + & 0,32x_2 & \leq & 0,25 \\ x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

A resolução deste sistema de equações resulta em:

Tabela 1

Passo	Restrições	Solução
1	$\begin{cases} 0,20x_1 + 0,32x_2 \leq 0,25 & (I) \\ x_1 + x_2 = 1 & (II) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$	Toma-se a equação (II), multiplica-se por -0,2 obtendo-se a equação (III)
2	$\begin{cases} 0,20x_1 + 0,32x_2 \leq 0,25 & (I) \\ (-0,2)x_1 + (-0,2)x_2 = (-0,2)1 & (III) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$	Ao somar (I) com (III), obtém-se (IV)
3	$\begin{cases} 0,20x_1 + 0,32x_2 \leq 0,25 & (I) \\ 0,12x_2 = 0,05 & (IV) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$	De (IV), obtém-se a solução para uma das variáveis
4	$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{12} \approx 0,58 \\ x_2 = \frac{5}{12} \approx 0,42 \end{cases}$	Esta é uma possível solução (que, no caso, é a solução ótima)

Este mesmo problema pode ser resolvido de forma gráfica, pois possui apenas duas variáveis.

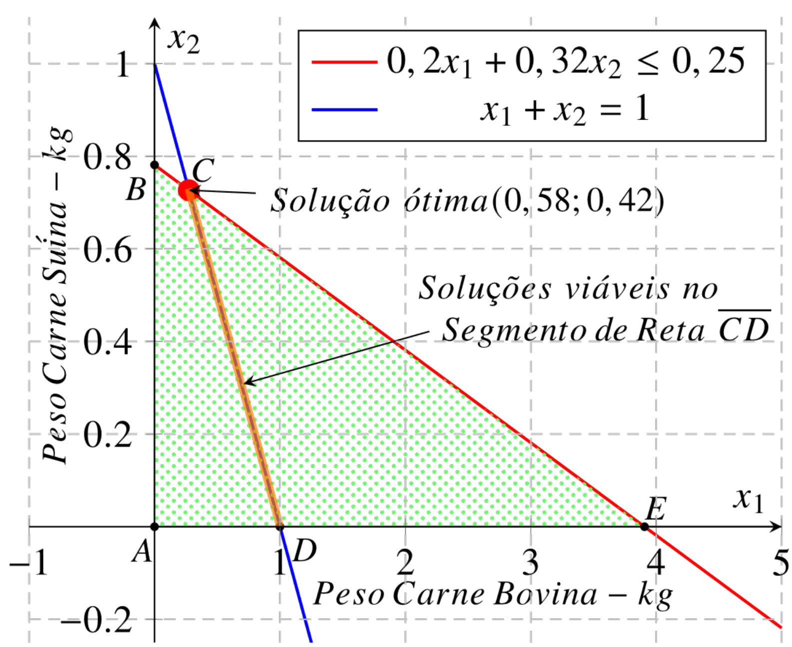

Figura 2

Substituindo esses valores na função objetivo:

Custo = 40 × 0,58 + 30 × 0,42

Custo = R$ 23,20 + R$ 12,60

Custo = R$ 35,80

Portanto, para minimizar o custo e manter o teor de gordura abaixo de 25%, você deverá usar aproximadamente 0,5833 kg de carne bovina magra e 0,4167 kg de carne suína por quilograma de hambúrguer, com um custo total de R$ 35,80 por quilograma de hambúrguer.

2.2 Problemas de maximização e minimização de funções objetivo

Na resolução de problemas de programação linear, a primeira etapa envolve a criação de um modelo matemático. Este modelo é composto por dois elementos principais: uma **função objetivo** e um conjunto de **restrições**.

- **Função objetivo**: é uma equação matemática que serve como medida de eficiência para cada solução possível do problema. O objetivo pode ser maximizar ou minimizar a função, dependendo do contexto do problema (por exemplo, maximizar lucros ou minimizar custos).

- **Restrições**: são as limitações técnicas ou recursos disponíveis expressos como um conjunto de inequações e/ou equações. As restrições definem o espaço de soluções viáveis para o problema.

O modelo também inclui variáveis que aparecem tanto na função objetivo quanto nas restrições. Essas variáveis podem ser classificadas em dois tipos:

- **Variáveis de decisão**: são as variáveis determinantes para resolver o problema. Por exemplo, a quantidade de cada tipo de matéria-prima a ser usada em um processo de fabricação.

- **Variáveis auxiliares**: são variáveis que ajudam a expressar as restrições ou a função objetivo – mas não são, por si só, o foco da otimização.

Compreender esses elementos e como eles interagem é crucial para a formulação e resolução eficaz de problemas de programação linear.

Em outras palavras, **variáveis controladas** ou de **decisão** são variáveis do sistema que estão sob o controle do administrador. Cabe ao administrador decidir qual valor atribuir a cada variável – por exemplo, o número de uma determinada peça a ser produzido em um mês. As **variáveis não controladas** são variáveis cujo valor não pode ser definido pelo administrador do sistema. O valor delas depende de fatores externos ao sistema, como, por exemplo, o preço de uma determinada peça no mercado.

A seguir, apresentamos um exemplo de um modelo já criado. As variáveis de entrada são x_1 e x_2, variáveis controladas (de decisão). As restrições a que o sistema está sujeito (**sujeito a**) são compostas por valores não controlados relativos aos coeficientes das variáveis de entrada nas equações e inequações do exemplo.

$$\text{Maximizar}: \quad Z = 10x_1 + 20x_2$$

$$\text{Sujeito a}: \begin{cases} 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 6 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 4 \\ & & x_1 & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

A construção do modelo linear talvez seja a etapa mais complexa deste estudo, dado que não existe uma regra fixa. Como é possível que analistas diferentes criem modelos diferentes para uma mesma situação-problema, propomos um pequeno roteiro adaptado de Silva *et al.* (2017) para auxiliar na construção de um modelo:

A) Quais são as variáveis de decisão?

B) Qual é o objetivo?

C) Quais são as restrições?

Para compreender o funcionamento do roteiro, seguem alguns exemplos.

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Uma empresa produz dois produtos, A e B. O lucro obtido com A é de 500 unidades monetárias (UM), e com o produto B o lucro obtido é de 900 UM. Sabe-se que a empresa precisa de 10 horas para fabricar uma unidade do produto A e de 15 horas para fabricar uma unidade do produto B. O tempo anual de produção disponível é de 600 horas. A demanda esperada para cada produto é de 20 unidades do produto A e 15 unidades do produto B. Qual é o plano de produção anual da empresa tal que maximize o lucro advindo da produção desses dois produtos?

Solução

Ao seguir o roteiro, tem-se:

Quais são as variáveis de decisão?

Variáveis controladas de entrada:

- x_1: quantidade anual produzida para A
- x_2: quantidade anual produzida para B

Qual é o objetivo?

O objetivo é maximizar o lucro, que pode ser calculado por:

- Lucro obtido pela produção de A: $500x_1$ (lucro com A × quantidade de A)
- Lucro obtido pela produção de B: $900x_2$ (lucro com B × quantidade de B)
- Lucro total: $L = 500x_1 + 900x_2$

  Assim, o objetivo é maximizar a seguinte equação: $L = 500x_1 + 900x_2$

Quais são as restrições?

Restrições do sistema:

- Horas para produzir A: $10x_1$ (tempo da unidade × quantidade produzida)
- Horas para produzir B: $15x_2$ (tempo da unidade × quantidade produzida)
- Tempo total de produção: $10x_1 + 15x_2$
- Disponibilidade em horas para a produção anual: 600
- Fórmula: $10x_1 + 15x_2 \leq 600$

Demanda do mercado para os produtos:

- Demanda de A: 20 unidades
- Demanda de B: 15 unidades

Logo:

- Restrição A: $x_1 \leq 20$
- Restrição B: $x_2 \leq 15$

Restrições de não negatividades:

Visto que são produtos a serem produzidos, não é possível ter números negativos para as quantidades de A e de B. Logo, essas quantidades devem ser maiores ou iguais a zero.

– Restrição A: $x_1 \geq 0$

– Restrição B: $x_2 \geq 0$

Modelo obtido

$$\text{Maximizar}: \quad L = 500x_1 + 900x_2$$

$$\text{Sujeito a}: \begin{cases} 10x_1 + 15x_2 \leq 600 \\ x_1 \leq 20 \\ x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemplo 2

Em uma fazenda, um criador de uma raça de um animal precisa planejar a alimentação de sua criação. O animal necessita de 16 unidades de vitaminas e 18 unidades de proteínas diárias para manter a alimentação nos níveis recomendados pelo seu veterinário. Na propriedade há dois tipos de ração: a ração A e a ração B. Uma unidade da ração A contém 2 unidades de vitaminas e 3 unidades de proteínas, e uma unidade da ração B contém 4 unidades de vitaminas e 3 de proteínas. Qual é o plano alimentar para as quantidades diárias de cada ração que deve ser consumida pelos animais para que eles atendam à necessidade alimentar com o menor custo possível, sabendo que cada unidade de A custa 2 unidades monetárias (UM) e cada unidade de B custa 1,5 UM?

Solução

Ao seguir o roteiro, temos que:

Quais são as variáveis de decisão?

É preciso decidir as quantidades das rações A ou B que o animal deve consumir diariamente.

Variáveis controladas de entrada:

- x_1: quantidade consumida da ração A diariamente
- x_2: quantidade consumida da ração B diariamente

Qual é o objetivo?

O objetivo é minimizar o custo da ração consumida diariamente.

- Custo da ração A: $2x_1$ (custo da unidade × quantidade consumida)
- Custo da ração B: $1,5x_2$ (custo da unidade × quantidade consumida)
- Custo total: $C = 2x_1 + 1,5x_2$
- Objetivo: minimizar $C = 2x_1 + 1,5x_2$ dentro das restrições

Quais são as restrições?

Restrições do sistema.

- Necessidade mínima de vitaminas: 16 unidades:
  - Vitaminas da ração A: $2x_1$ (quantidade por unidade × quantidade consumida)
  - Vitaminas da ração B: $4x_2$ (quantidade por unidade × quantidade consumida)
  - Total de vitaminas: $2x_1 + 84$
  - Restrição: $2x_1 + 4x_2 \geq 16$
- Necessidade mínima de vitaminas: 18 unidades:
  - Proteínas da ração A: $3x_1$ (quantidade por unidade × quantidade consumida)
  - Proteínas da ração B: $3x_2$ (quantidade por unidade × quantidade consumida)
  - Total de proteínas: $3x_1 + 3x_2$
  - Restrição: $3x_1 + 3x_2 \geq 18$

Restrições de não negatividades:

- Restrição A: $x_1 \geq 0$
- Restrição B: $x_2 \geq 0$

Modelo obtido

$$\text{Minimizar}: \quad C = 2x_1 + 1,5x_2$$

$$\text{Sujeito a}: \begin{cases} 2x_1 & + & 4x_2 & \geq & 16 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & \geq & 18 \\ & & x_1 & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

2.3 Resolução de problemas de maximização e minimização por métodos gráficos

A programação linear é uma técnica matemática amplamente utilizada na tomada de decisões para otimizar situações específicas. Essas situações geralmente envolvem a maximização ou minimização de algo, seja lucro, custo, produção ou outros. O método gráfico é uma abordagem visual para resolver problemas de programação linear com duas variáveis de decisão. Vamos entender melhor como ele funciona.

- **Definição do problema**: primeiramente, é necessário definir claramente a função objetivo, que representa a quantidade a ser maximizada ou minimizada. Além disso, as restrições do problema, que são as condições ou limitações, devem ser explicitadas em forma de equações ou inequações.

- **Representação gráfica**: com as equações e inequações em mãos, cada uma delas pode ser representada como uma reta no plano cartesiano (já que estamos lidando com duas variáveis). Para isso, costuma-se encontrar os pontos de intersecção dos eixos e desenhar a reta correspondente.

- **Região viável**: as inequações de restrição determinam áreas no gráfico denominadas regiões viáveis. Estas são as regiões onde todas as restrições são satisfeitas. A região viável pode ter diversas formas, mas frequentemente se apresenta como um polígono convexo.

- **Identificação da solução**: se o objetivo é maximizar a função objetivo, deve-se procurar o ponto mais "alto" dentro da região viável. Se o objetivo é minimizar, busca-se o ponto mais "baixo". Em termos práticos, a função objetivo é avaliada em cada vértice (ou canto) da região viável, pois é nesses pontos que se encontram os valores máximos ou mínimos da função.

- **Interpretação e solução**: uma vez identificado o ponto ótimo, interpreta-se sua localização em relação ao contexto do problema. Esse ponto fornece as quantidades das duas variáveis que otimizam a situação.

Exemplo de aplicação

Imagine uma empresa que produza dois produtos e deseje maximizar seu lucro. As restrições podem envolver a disponibilidade de matéria-prima, as horas de trabalho e a capacidade de produção. Ao representar essas restrições graficamente e traçar a função de lucro, a empresa pode determinar facilmente a quantidade de cada produto a ser produzida para obter o lucro máximo.

Em resumo, o método gráfico fornece uma representação visual clara de problemas de **programação linear com duas variáveis**, tornando mais intuitivo encontrar a solução ótima. No entanto, para problemas com mais de duas variáveis, são necessários métodos mais sofisticados, como o método Simplex.

2.4 Utilização do Solver no Excel

O Solver do Microsoft Excel é uma ferramenta poderosa que permite resolver problemas de otimização e programação linear. Se você tem um problema de programação linear e deseja encontrar a melhor solução possível com base em algumas restrições, o Solver pode ser extremamente útil. Apresentamos na sequência um guia básico de uso do Solver para resolver problemas de programação linear:

- **Preparando a folha de cálculo**
  - Em uma nova planilha do Excel, insira todos os dados relacionados ao seu problema, incluindo variáveis, constantes, coeficientes e quaisquer outras informações pertinentes.
  - Identifique uma célula que representará sua função objetivo. Use fórmulas do Excel para expressar a função em termos das variáveis de decisão.
- **Ativando o Solver**
  - Se o Solver não estiver ativado, você precisará adicioná-lo primeiro. Vá em Arquivo > Opções > Suplementos. Na parte inferior, Gerenciar, selecione Suplementos do Excel e clique em Ir. Marque a caixa Solver e clique em OK.
- **Usando o Solver**
  - Com a folha de cálculo preparada, vá para a guia Dados e clique em Solver no grupo Análise.
  - No campo Definir Objetivo, selecione a célula que representa sua função objetivo.
  - Escolha se deseja maximizar, minimizar ou definir um valor específico para essa célula.
  - No campo Variáveis do Modelo, selecione todas as células que representam suas variáveis de decisão.
  - Clique em Adicionar para inserir restrições. Por exemplo, se uma variável não pode exceder um valor de 100, você adicionaria essa restrição nesse campo. Repita este passo para todas as restrições do seu modelo.
  - Inseridas todas as restrições, clique em Resolver. O Solver calculará a solução ótima para o seu problema.
  - Um relatório de resultados aparecerá, informando se uma solução foi encontrada e os valores das variáveis de decisão. Se estiver satisfeito com a solução, clique em Manter Resultado do Solver e, em seguida, em OK.

- **Analisando resultados**

  – Depois de executar o Solver, você pode analisar os resultados diretamente na planilha. O Solver também oferece relatórios detalhados que você pode gerar para obter insights sobre a solução, como o Relatório de Sensibilidade.

- **Considerações adicionais**

  – O Solver do Excel tem limitações quanto ao número de variáveis e restrições que suporta; portanto, para problemas muito grandes ou complexos, pode ser necessário usar um software especializado em otimização.

  – A ferramenta também pode resolver problemas não lineares, problemas de programação inteira e outros tipos de problemas de otimização.

O Solver é uma maneira conveniente e acessível de abordar problemas de programação linear sem precisar de softwares de otimização mais complexos e caros. Com prática e familiaridade, ele se torna uma ferramenta valiosa para analistas, engenheiros, pesquisadores e qualquer pessoa interessada em otimização.

2.5 Resolução de problemas de maximização e minimização usando o Solver

Partindo do pressuposto de que a ferramenta Solver está instalada em seu Excel, problemas de otimização linear ou não linear podem ser resolvidos. Segue um exemplo de problema com a sua respectiva modelagem.

Exemplo de aplicação

Em um problema genérico de uma empresa fictícia, cada produto requer uma certa quantidade de horas de trabalho e uma certa quantidade de matéria-prima para ser produzido. Os produtos X_1 e X_2 necessitam respectivamente de 1 e 2 horas de trabalho para serem produzidos, e a quantidade de homens-hora semanal disponível é de 120. Além disso, a quantidade de matéria-prima adquirida semanalmente é de 160 unidades, e os produtos X_1 e X_2 necessitam ambos de 2 unidades de matéria-prima cada um. O preço de venda é de R$ 1,00 e R$ 1,50 para X_1 e X_2, respectivamente, e o objetivo é maximizar o lucro semanal. Para tanto, deseja-se saber qual deve ser a quantidade produzida de cada produto, semanalmente.

Função objetivo

Maximizar: $Z = 1X_1 + 1{,}5X_2$

Restrições

Sujeito a:

$1X_1 + 2X_2 \leq 120$

$2X_1 + 2X_2 \leq 160$

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

Resolução do modelo no Excel

- **Passo 1**: monte a planilha conforme a figura a seguir, em que X1 e X2 representam a quantidade de cada produto semanal.

	A	B	C	D	E
1	Fução Objetivo	Z=X1+1.5X2	0		
2					
3	Coeficientes da				
4	Função Objetivo	1	1,5		
5					
6	Variávaveis	X1	X2		
7		0	0		
8					
9					
10	Restrições:				
11		X1	X2	LHS	RHS
12	Restrição 1:	1	2	0	120
13	Restrição 2:	2	2	0	160

Figura 3

Observação

LHR (*left hand side*) é o lado esquerdo das equações de restrição, e RHS (*right hand side*) é o lado direito das equações de restrição.

- **Passo 2**: função objetivo.
  - Na célula C1, escreva a função objetivo: **=B4*B7+C4*C7**

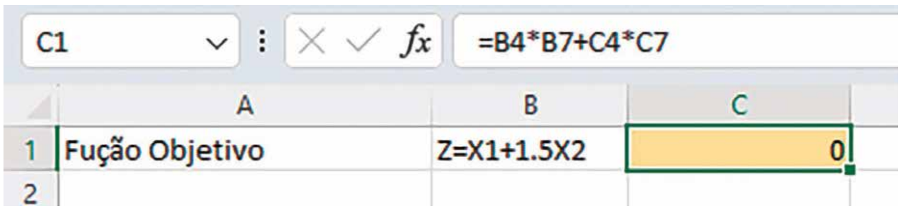

Figura 4

- **Passo 3**: montagem das equações de restrições.
  - Escreva o LHS da restrição.
  - Na célula D12, coloque a seguinte fórmula: **=B7*B12+C7*C12**

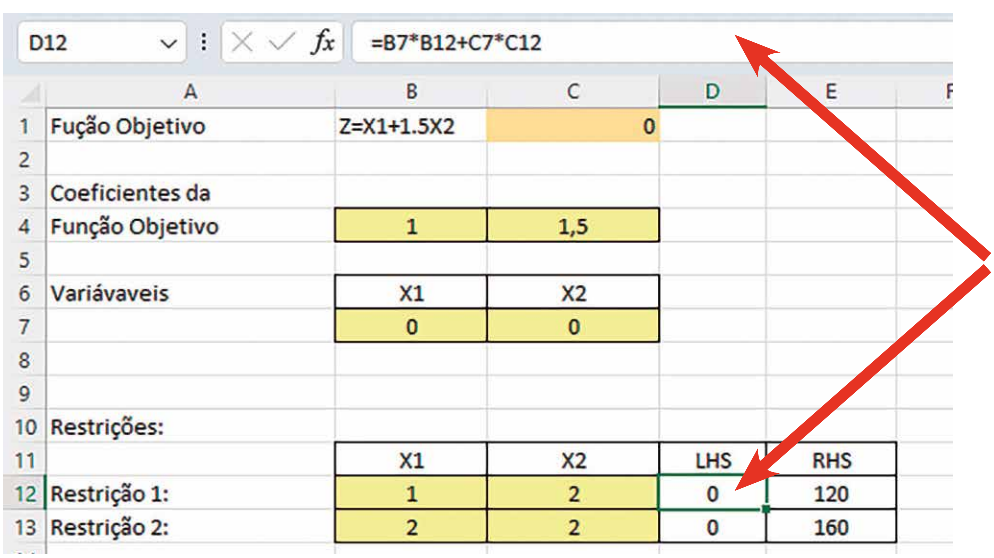

Figura 5

- Na célula D13, coloque a seguinte fórmula: **=B7*B13+C7*C13**

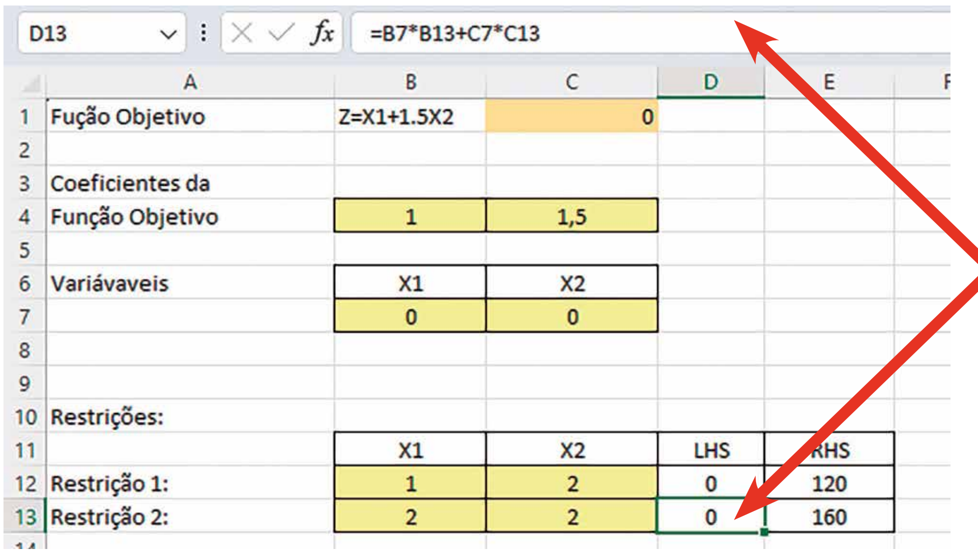

Figura 6

- **Passo 4**: execute o Solver preenchendo os conteúdos.

  – Selecione o Solver que, via de regra, está na aba Dados.

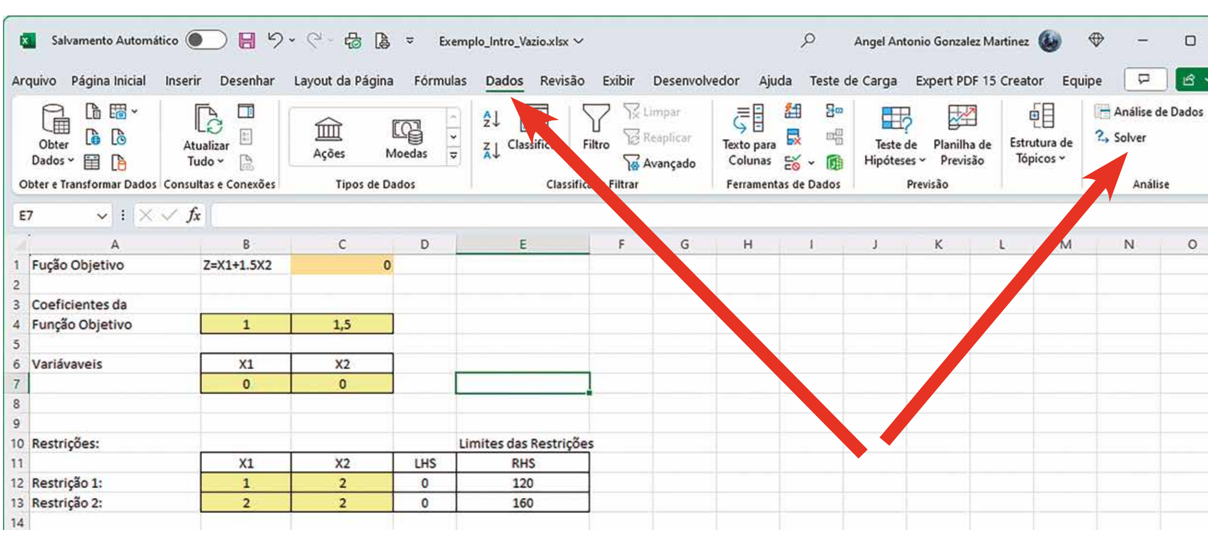

Figura 7

– A seguinte janela deverá aparecer a tela do Solver:

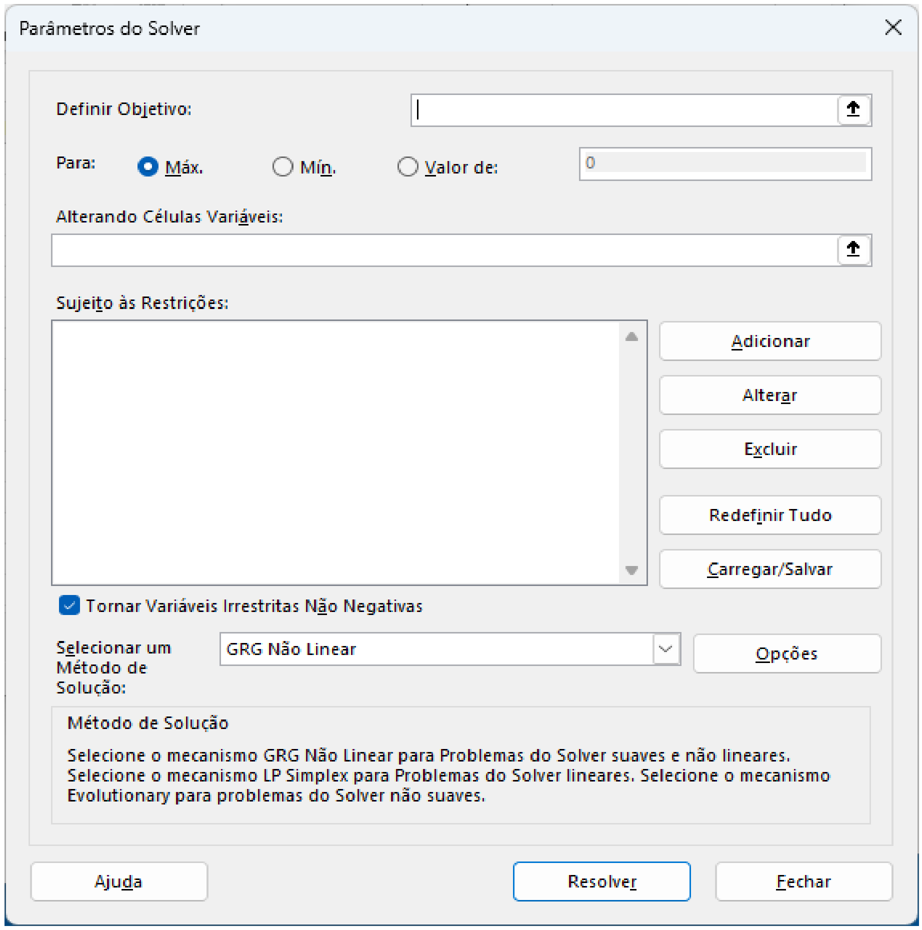

Figura 8

– Preencha o campo Definir Objetivo:

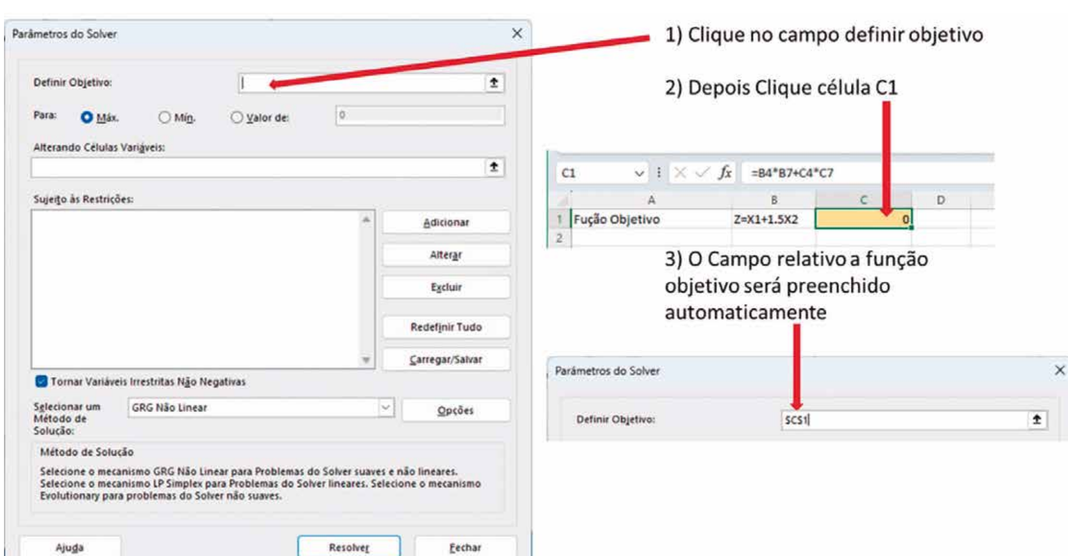

Figura 9

– Defina o objetivo para Máx. (maximizar).

Figura 10

– Insira as células relativas aos parâmetros variáveis (que neste caso são as quantidades de cada produto que devem ser produzidas semanalmente), como exemplificado na figura a seguir:

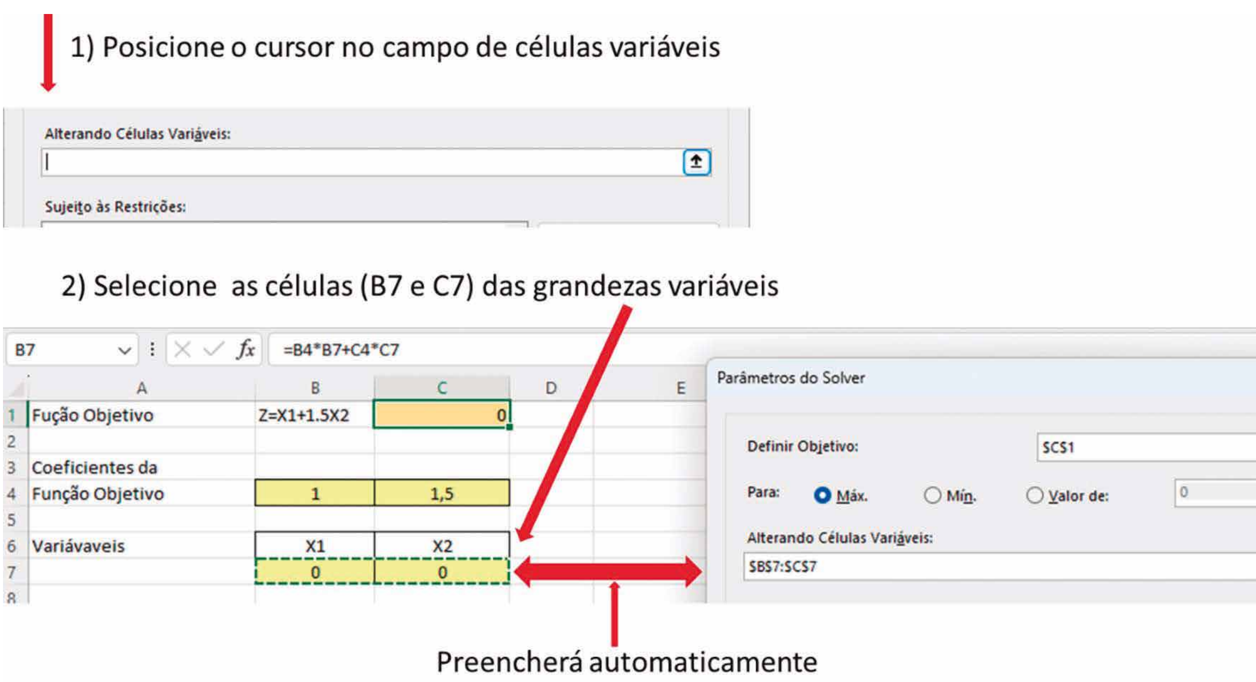

Figura 11

– Insira as restrições, como exemplificado na figura a seguir.

- Primeiro no lado esquerdo.

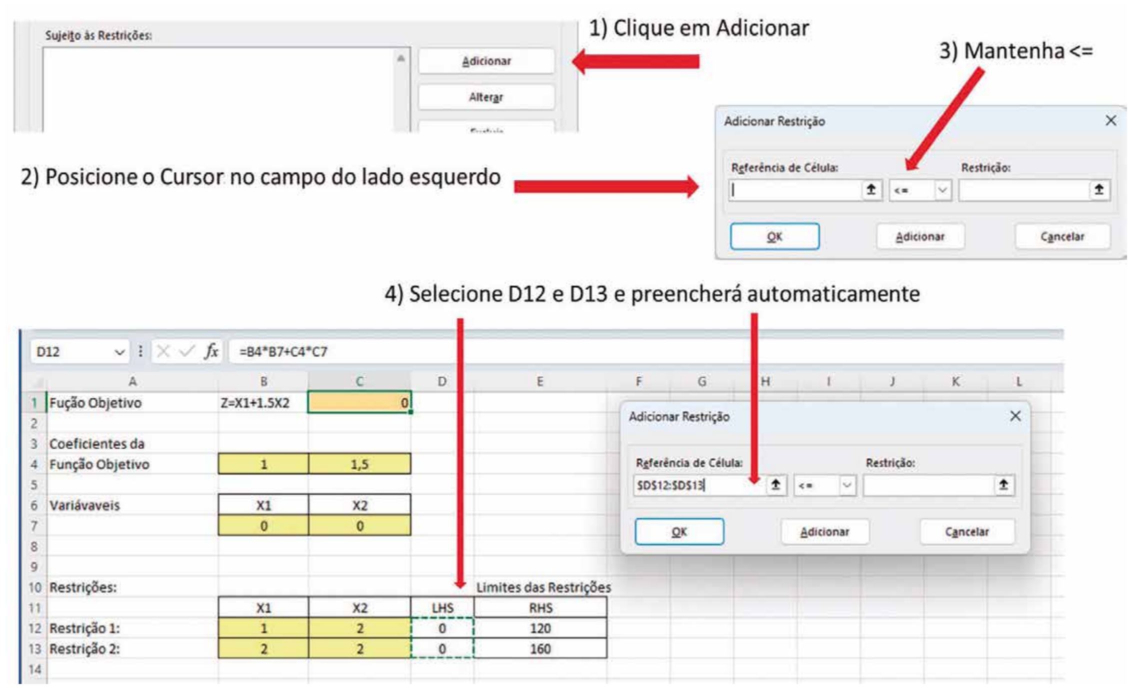

Figura 12

- Depois no lado direito.

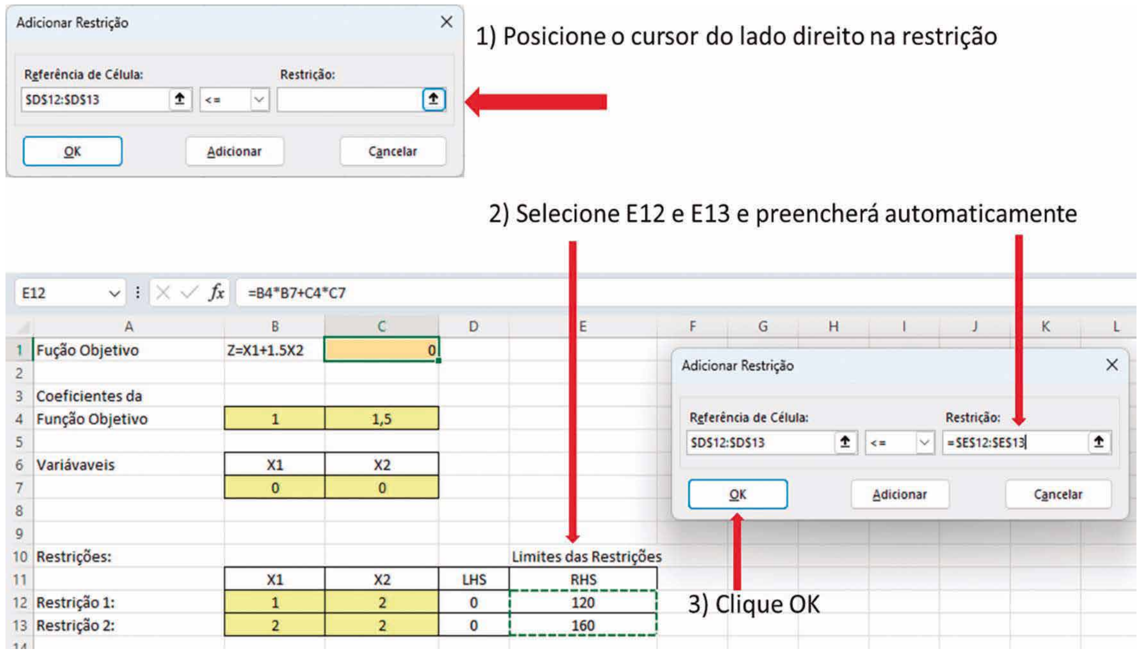

Figura 13

– Clique em OK, e deverá aparecer a seguinte imagem com os campos totalmente preenchidos:

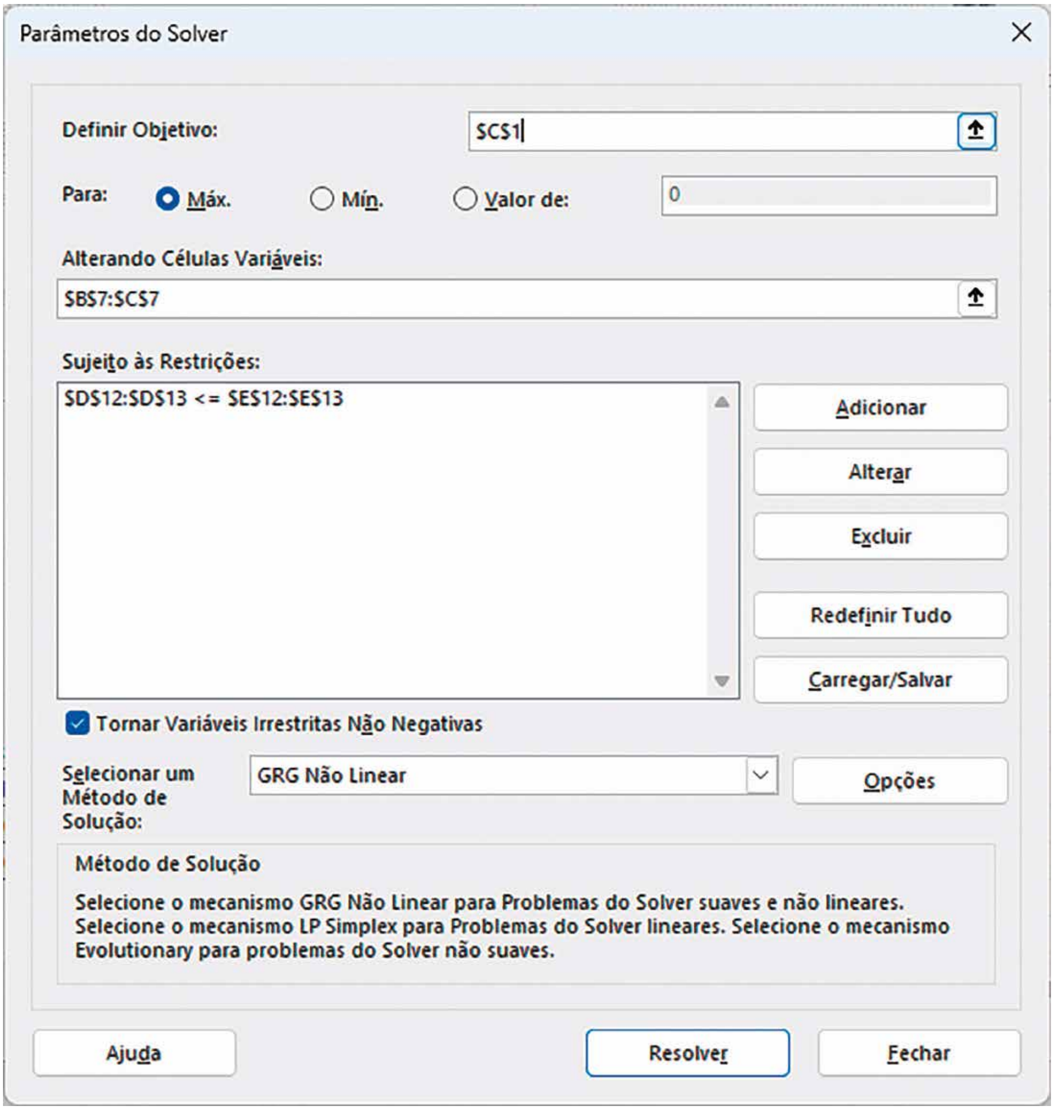

Figura 14

– Clique em Resolver.

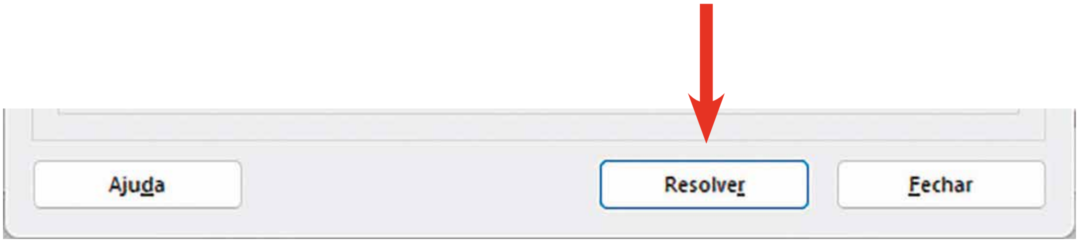

Figura 15

– Se tudo correr bem, aparecerá o resultado final.

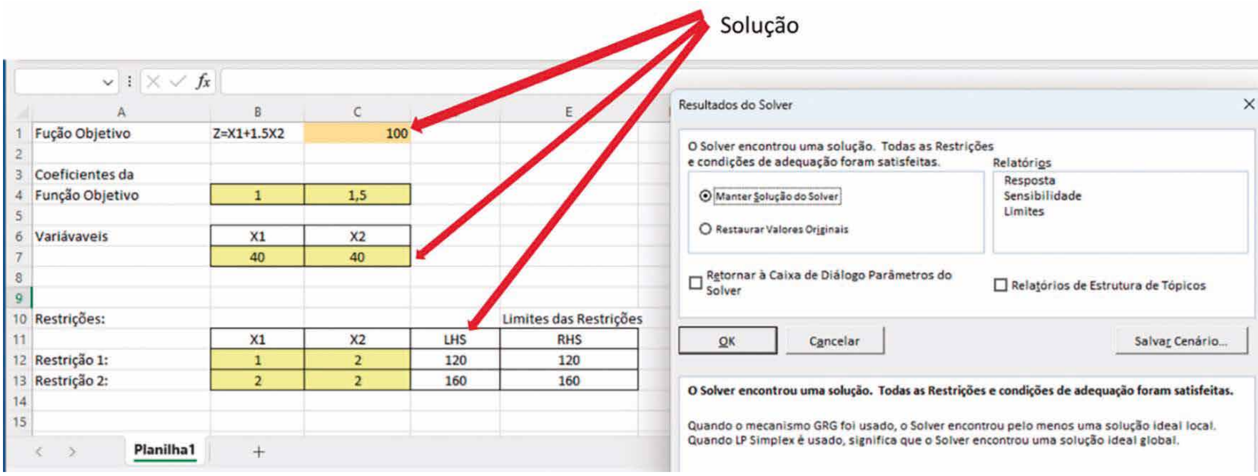

Figura 16

Observa-se que foram produzidas ao todo 100 unidades: 40 unidades de X_1 e 60 unidades de X_2, consumindo exatamente toda a matéria-prima e homens-hora disponíveis. Percebe-se que as restrições foram usadas exatamente até os limites, sem nenhuma folga. Quando o lado esquerdo da restrição atinge um valor igual ao do lado direito, diz-se que essa restrição é uma restrição ativa, pois não houve folga. As restrições raramente são ativas, ainda mais em problemas com mais variáveis.

Relatórios

O Solver fornece três tipos de relatório: relatório de resposta, relatório de sensibilidade e relatório de limites.

Relatório de resposta

Para obter o relatório de resposta, usa-se o Solver novamente, porém deve-se redefinir o valor das variáveis de decisão para zero antes do início do novo cálculo e selecionar o tipo de relatório, conforme figura a seguir.

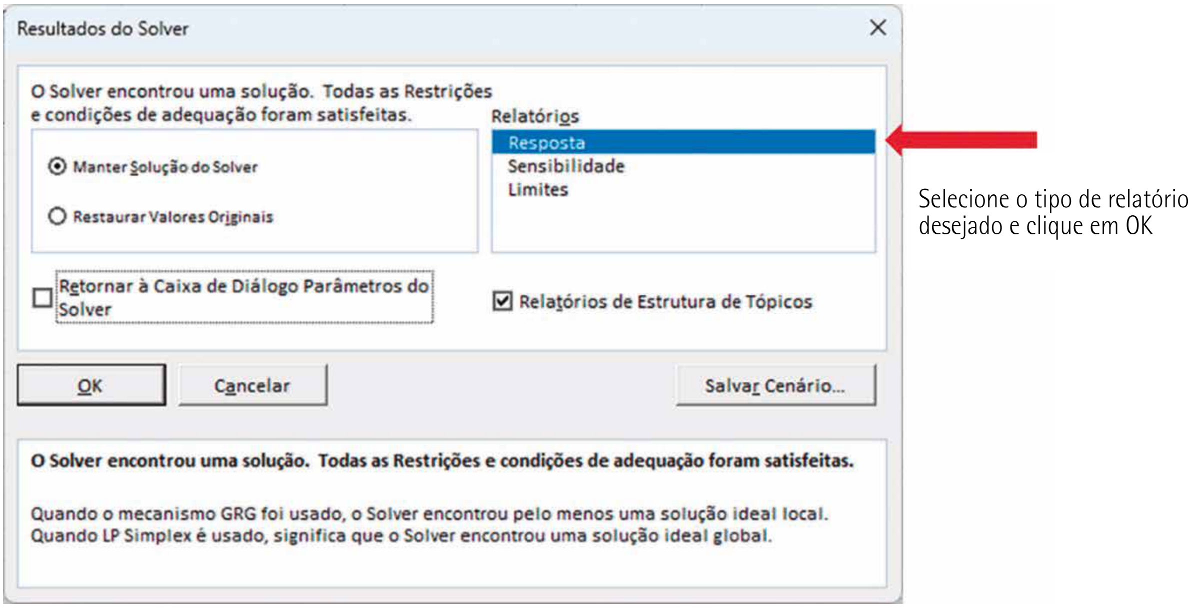

Figura 17

O relatório de resposta cria uma planilha ao lado da planilha do problema.

Figura 18

A nova planilha mostra os valores iniciais e finais da função objetivo e também os valores iniciais e finais das variáveis (ou seja, das variáveis de decisão) e, ao final, os detalhes das restrições. Veja um exemplo na figura a seguir.

Resultado: O Solver encontrou uma solução. Todas as Restrições e condições de adequação foram satisfeitas.

Mecanismo do Solver

Opções do Solver

Célula do Objetivo (Máx.)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
$C$1	Z=X1+1.5X2	0	100

Células Variáveis

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número Inteiro
$B$7	X1	0	40	Conting.
$C$7	X2	0	40	Conting.

Restrições

Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Status	Margem de Atraso
$D$12	Restrição 1: LHS	120	$D$12<=$E$12	Associação	0
$D$13	Restrição 2: LHS	160	$D$13<=$E$13	Associação	0

Figura 19

Relatório de sensibilidade

O relatório de sensibilidade apresenta a análise da sensibilidade do problema em estudo. O relatório é dividido em duas partes, uma para as variáveis de decisão e outra para as restrições.

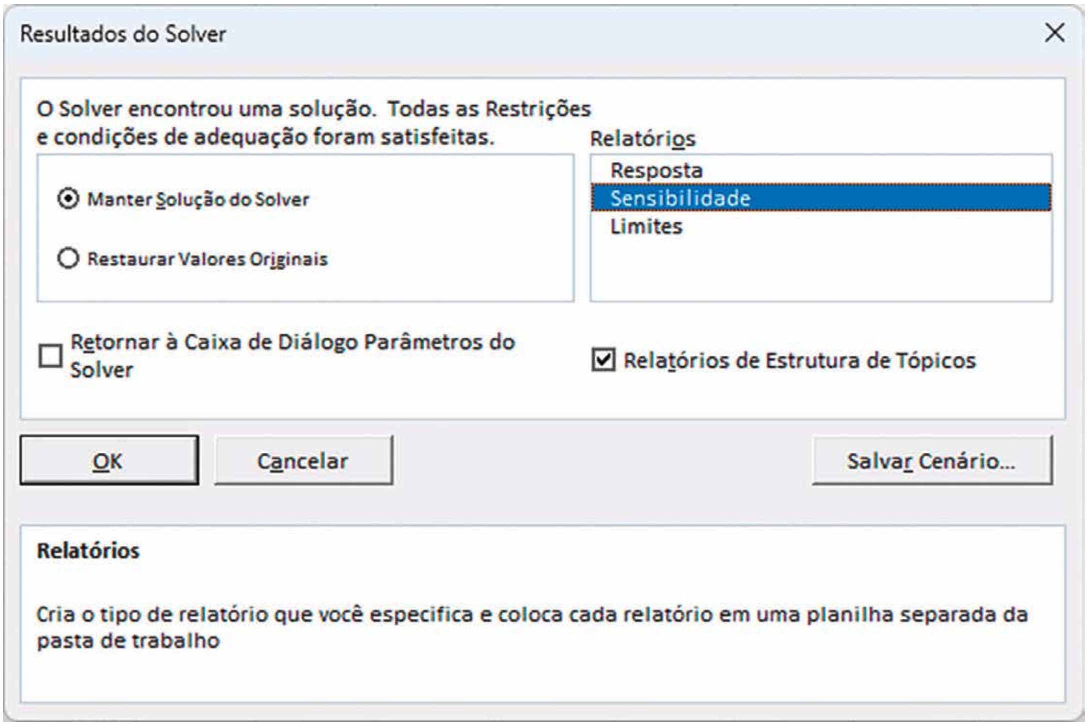

Figura 20

Células Variáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Gradiente
$B$7	X1	40	0
$C$7	X2	40	0

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Lagrange Multiplicador
$D$12	Restrição 1: LHS	120	0,5
$D$13	Restrição 2: LHS	160	0,25

Figura 21

Relatório de limites

O relatório de limites apresenta os valores mínimo e máximo relativos às variáveis de decisão. Na primeira parte, informa a função objetivo e o valor atingido após a otimização; na segunda, exibe os valores limites das variáveis de decisão.

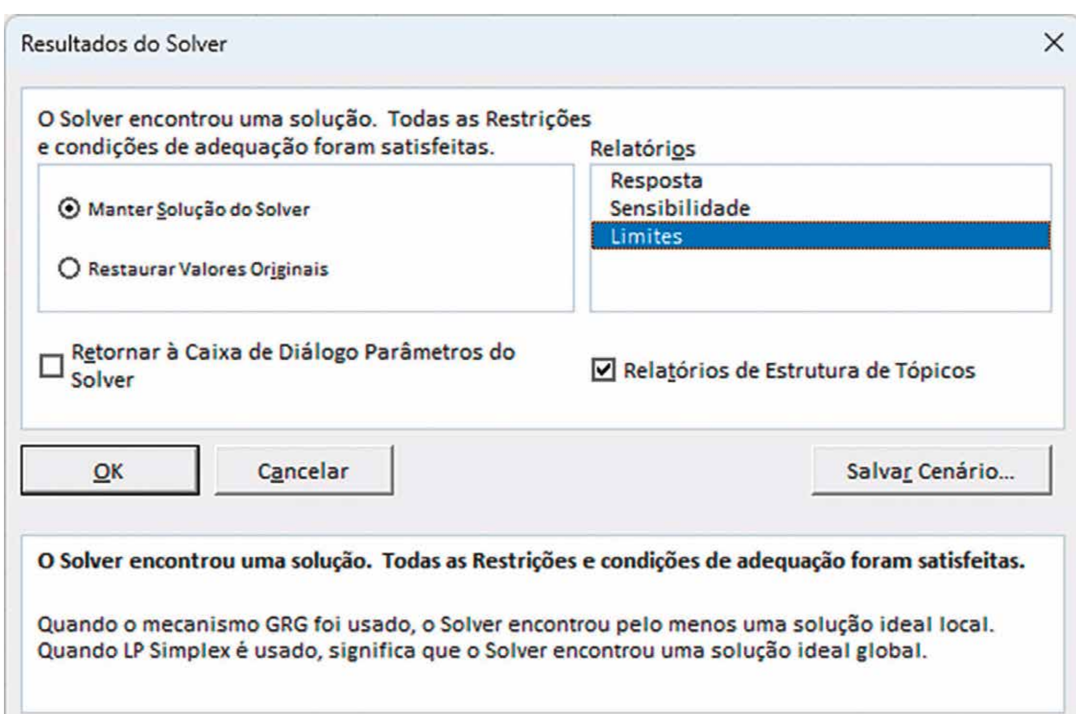

Figura 22

Objetivo		
Célula	Nome	Valor
$C$1	Z=X1+1.5	100

Variável			Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Célula	Nome	Valor	Limite	Resultado	Limite	Resultado
$B$7	X1	40	0	60	40	100
$C$7	X2	40	0	40	40	100

Figura 23

3 MÉTODO SIMPLEX

O método Simplex é um algoritmo desenvolvido para resolver problemas de programação linear, ou seja, problemas que envolvem a otimização de uma função objetivo sujeita a um conjunto de restrições lineares. O nome Simplex se deve ao fato de o algoritmo ser simples, porém ele envolve muitas iterações de cálculo, levando a um procedimento tedioso e trabalhoso, sendo assim necessário um computador para se resolver problemas por este método. Se fosse executado de forma manual, a probabilidade de erro seria muito alta.

Saiba mais

O método Simplex, um dos primeiros e mais amplamente utilizados algoritmos em programação linear, foi desenvolvido pelo matemático George Dantzig em 1947. Dantzig, na verdade, desenvolveu o método Simplex enquanto estava no segundo ano do programa de doutorado em Estatística na Universidade de Berkeley. Consulte a obra de Hillier *et al.* (2012) para saber mais:

HILLIER, F. S. *et al. Introdução à pesquisa operacional*. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

Vejamos a seguir os componentes e o funcionamento básico do método Simplex.

Componentes do método Simplex

- **Função objetivo**: o primeiro passo é definir a função objetivo que se deseja maximizar ou minimizar. Esta é geralmente uma função linear das variáveis de decisão. Por exemplo, se estamos tentando maximizar o lucro de vender dois produtos, a função objetivo poderia ser $Z = c_1x_1 + c_2x_2$, onde c_1 e c_2 são os lucros por unidade de cada produto e x_1 e x_2 são as quantidades de cada produto.

- **Restrições**: além da função objetivo, o problema geralmente contém um conjunto de restrições que as variáveis de decisão devem satisfazer. Estas restrições também são representadas por equações ou inequações lineares.

- **Variáveis de folga**: para transformar as inequações em equações, são introduzidas variáveis de folga. Isso simplifica o problema e facilita a busca pela solução ótima.

- **Solução inicial viável**: o método Simplex começa com uma solução inicial viável, geralmente no ponto onde todas as variáveis de decisão são zero (exceto as variáveis de folga, se presentes).

Funcionamento

- **Ponto de partida**: o algoritmo começa em um vértice do espaço de soluções viáveis, que é um poliedro convexo.

- **Movimentação**: em cada passo, o algoritmo se move para um vértice adjacente do poliedro de soluções viáveis.

- **Critério de otimização**: o algoritmo avalia se essa nova posição é melhor ou pior em relação à função objetivo.

- **Convergência**: o algoritmo repete esses passos até encontrar o vértice que otimize a função objetivo, considerando todas as restrições.

- **Solução ótima**: uma vez que um vértice é encontrado onde nenhum movimento adjacente melhora a função objetivo, esse vértice é identificado como a solução ótima.

O método Simplex é notável pela sua eficiência. Embora o número de vértices do poliedro possa ser exponencialmente grande em relação ao tamanho do problema, o algoritmo frequentemente encontra a solução ótima em um número de passos que é apenas um polinômio no tamanho do problema.

Aplicações

O método Simplex é aplicado a uma ampla gama de disciplinas para resolver problemas complexos, como planejamento de produção, alocação de recursos, logística, finanças e outras áreas em que a otimização sob restrições é necessária.

Como exemplo, considere o cenário em que há um administrador de sistemas encarregado de gerenciar os recursos computacionais de um *data center*. O *data center* dispõe de uma variedade de servidores, cada um com diferentes capacidades de CPU, memória e armazenamento. O objetivo é alocar tarefas de computação para esses servidores para minimizar o consumo de energia, enquanto ainda atende a todos os requisitos de desempenho. Essa não é uma empreitada simples, especialmente ao considerar que cada tarefa pode ter requisitos muito diferentes.

É nesse momento que o método Simplex pode ser de grande ajuda, ao formular o desafio como um problema de programação linear. Em termos simples, o administrador definiria uma função objetivo que representa o consumo total de energia e, em seguida, adicionaria uma série de restrições relacionadas ao desempenho de cada tarefa e às capacidades dos servidores.

Começando por encontrar uma solução inicial viável considerando todas as restrições do problema (como, por exemplo, não alocar mais memória para um servidor do que ele realmente dispõe), o Simplex prosseguiria passo a passo, sempre buscando diminuir o consumo de energia, até encontrar a solução que minimize esse consumo e respeite todas as restrições de desempenho do *data center*.

O Simplex é como uma ferramenta de otimização que funciona explorando diferentes configurações até encontrar a melhor possível, e faz isso de forma muito eficiente graças à sua abordagem matemática, que garante alcançar a melhor solução possível em um número finito de passos.

3.1 Entendendo o método Simplex

Para explicar o método Simplex de maneira descomplicada, apesentamos um exemplo a seguir.

Exemplo de aplicação

Uma empresa fabrica dois produtos, P1 e P2, e deseja maximizar seu lucro. Cada unidade de P1 dá um lucro de R$ 3,00, e cada unidade de P2 dá um lucro de R$ 2,00.

Modelo de programação linear

$$Z = 3x_1 + 2x_1$$

Restrições

Sujeito a:

$$2x_1 + x_2 \leq 20$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Método Simplex

- **Passo 1**: adição de variáveis de folga.

$2x_1 + x_2 + s_1 = 20$

$4x_1 + 2x_2 + s_2 = 40$

- **Passo 2**: tabela Simplex inicial.

x_1	x_2	s_1	s_2	LD	Razão
2	1	1	0	20	10
4	2	0	1	40	10
−3	−2	0	0	0	

- **Passo 3**: iteração 1.

  – Escolha da coluna do pivô:

  x_1 (coeficiente -3 na linha Z)

  – Escolha da linha do pivô:

  Linha 1 (menor razão positiva: 10)

  – Operações de linha:

  Linha 1 = Linha 1 / 2

  Linha 2 = Linha 2 – 4 * Linha 1

  Linha Z = Linha Z + 3 * Linha 1

x_1	x_2	s_1	s_2	LD
1	0.5	0.5	0	10
0	0	−2	1	0
0	1	1.5	0	30

- **Passo 4**: iteração 2.

  – Análise da Linha Z:

Não há coeficientes negativos. Portanto, alcançamos a solução ótima.

Solução ótima:

$x_1 = 10$

$x_2 = 0$

$s_1 = 0$

$s_2 = 0$

Z = R$ 30,00

Conclusão

A empresa deve produzir 10 unidades de P1 e nenhuma unidade de P2 para maximizar o lucro em R$ 30,00.

3.2 Variáveis de folga e soluções básicas

No método Simplex, as variáveis de folga são introduzidas para converter inequações em equações, simplificando a resolução de problemas de programação linear.

Contexto do método Simplex

O método Simplex lida com sistemas de equações lineares, mas na formulação padrão de um problema de programação linear as restrições são frequentemente **inequações**, e não equações.

Convertendo inequações para equações

Para transformar inequações em equações, adiciona-se o que chamamos de variáveis de folga (*slack*, em inglês – por isso costuma-se usar a letra s para as variáveis de folga). Uma variável de folga é uma variável adicionada a uma inequação para transformá-la em uma equação.

Exemplo de aplicação

Suponha que há a seguinte inequação como uma restrição:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

Para converter essa inequação em uma equação, adiciona-se a variável de folga s:

$$2x_1 + 3x_2 + s = 5$$

Nesse caso, s é a variável de folga, e representa o valor pelo qual o lado esquerdo da inequação original tem um valor menor que o do lado direito. Portanto, s deve ser sempre maior ou igual a zero ($s \geq 0$).

Propósito das variáveis de folga

A adição de variáveis de folga permite que o método Simplex trabalhe com um sistema de equações lineares, mais fácil de resolver e manipular matematicamente do que um sistema de inequações. Além disso, as variáveis de folga são fundamentais para encontrar a solução básica inicial factível e proceder com as iterações do método.

Resumindo, as variáveis de folga são um artifício matemático do método Simplex que transforma inequações em equações, facilitando a resolução de problemas de programação linear.

Exemplo de aplicação

A empresa de tecnologia TechOptimize vende três tipos de pacotes de software: Básico (B), Avançado (A) e Premium (P). A empresa quer determinar quantas unidades de cada pacote de software deve produzir para maximizar seus lucros, dadas as restrições de recursos.

Dados do problema

- Lucro por pacote
  - Básico (B) = R$ 100
  - Avançado (A) = R$ 200
  - Premium (P) = R$ 300
- Recursos (em horas de desenvolvimento)
  - Básico (B) = 2 horas
  - Avançado (A) = 4 horas
  - Premium (P) = 5 horas

- Total de horas de desenvolvimento disponíveis
  - 600 horas.

A demanda prevista indica que **não se venderá** mais de 150 unidades do pacote Básico (B), 100 unidades do Avançado (A) e 80 do Premium (P).

Modelo de programação linear

Maximizar: $Z = 100B + 200A + 300P$

Sujeito a:

$2B + 4A + 5P + s_1 = 600$ (restrição de horas de desenvolvimento)

$B + s\_2 = 150$ (restrição de demanda para o pacote Básico)

$A + s\_3 = 100$ (restrição de demanda para o pacote Avançado)

$P + s_4 = 80$ (restrição de demanda para o pacote Premium)

$B, A, P \geq 0$ (restrição de não negatividade)

Resolução

A resolução deste problema utilizou o método Simplex aliado à ferramenta de software Solver do Microsoft Excel, uma vez que o método envolve muitas iterações, o que o torna inadequado para soluções manuais.

- **Passo 1**: introduza variáveis de folga para transformar as desigualdades em equações.
  - Adicione s_1 para a primeira restrição.
  - Adicione s_2 para a segunda restrição.
  - E assim por diante.

Assim, teremos:

$$
\begin{aligned}
&2B + 4A + 5P + s_1 = 600 \\
&B + s_2 = 150 \\
&A + s_3 = 100 \\
&P + s_4 = 80
\end{aligned}
$$

- **Passo 2**: configure a tabela inicial do Simplex.

Para construir a tabela inicial do Simplex, listamos todas as equações, incluindo a função objetivo, após a introdução das variáveis de folga. A seguir é apresentada uma tabela formatada de acordo com as restrições e a função objetivo definidas:

Tabela 2

	B	A	P	s1	s2	s3	s4	RHS (lado direito)
Z	-100	-200	-300	0	0	0	0	0
s1	2	4	5	1	0	0	0	600
s2	1	0	0	0	1	0	0	150
s3	0	1	0	0	0	1	0	100
s4	0	0	1	0	0	0	1	80

Onde:

– A primeira linha representa a função objetivo. Os coeficientes negativos das variáveis de decisão são usados porque estamos buscando maximizar o lucro.

– As linhas subsequentes representam as restrições.

– A coluna RHS (lado direito) representa os valores do lado direito de cada equação.

- **Passo 3**: escolha a variável de entrada (a que tem o coeficiente mais positivo na linha Z) e a variável de saída.

  A partir da tabela inicial, inicia-se o processo iterativo do Simplex, determinando a variável de entrada (a coluna com o coeficiente mais negativo na linha Z) e a variável de saída (usando a razão mínima).

- **Passo 4**: continue o processo até obter a solução ótima.

  Devido ao número grande de iterações para este problema, elas não estão relacionadas aqui. A solução foi obtida por software.

  Suponha que, após várias iterações, obtivemos a solução ótima:

B = 100

A = 75

P = 50

Lucro máximo

$$Z = 100(100) + 200(75) + 300(50) = 32.500,0$$

Resposta

Para maximizar o lucro, a TechOptimize deve produzir:

- 100 unidades do pacote Básico.
- 75 unidades do pacote Avançado.
- 50 unidades do pacote Premium.

O lucro máximo que pode ser alcançado é R$ 32.500,00.

Observação

O método Simplex pode ser complexo para problemas com muitas variáveis e restrições. O uso de um software de programação linear pode ser útil para problemas mais complicados.

4 PROBLEMAS DE TRANSPORTE E DESIGNAÇÃO

A pesquisa operacional abrange uma série de técnicas matemáticas e computacionais utilizadas para otimizar a tomada de decisões em diversos cenários. Dentre essas técnicas, os problemas de transporte e designação se destacam pela sua aplicabilidade em diversas situações práticas, especialmente quando estamos diante da necessidade de alocar recursos de maneira eficiente.

Problema de transporte

Lembrete

O problema de transporte refere-se à questão de como transportar um produto de várias fontes (como fábricas ou armazéns) para vários destinos (como lojas ou centros de distribuição) de maneira a minimizar o custo total do transporte respeitando as capacidades das fontes e as demandas dos destinos.

Imagine, por exemplo, que você gerencie uma rede de armazéns que fornecem produtos para diversas lojas em uma região. Cada armazém tem uma quantidade fixa de produtos disponíveis, e cada loja tem uma demanda específica. Os custos de transporte variam de acordo com a distância e as rotas disponíveis. O desafio é determinar quanto produto de cada armazém deve ser enviado para cada loja, de forma a atender todas as demandas e ao mesmo tempo minimizar os custos de transporte.

Observação

Assim como muitos conceitos de pesquisa operacional, o problema de transporte tem raízes em desafios logísticos militares. Era crucial, durante a guerra, otimizar o transporte de suprimentos para diferentes locais, minimizando custos (Hillier *et al.*, 2012).

Problema de designação

Diferentemente do problema de transporte, cuja questão principal é o **quanto** alocar, no problema de designação a pergunta principal é **quem** atribuir a **quê**.

Lembrete

O problema de designação trata da alocação de recursos a tarefas para minimizar o custo ou o tempo.

Um exemplo clássico é a atribuição de funcionários a tarefas. Suponha que você tenha um conjunto de trabalhadores e um conjunto de tarefas. Cada trabalhador tem um custo diferente para realizar cada tarefa, seja em termos de tempo, habilidade ou qualquer outro critério. O objetivo é atribuir cada tarefa a um trabalhador de forma que todos os trabalhos sejam concluídos com o menor custo total.

Ambos os problemas, de transporte e de designação, podem ser formulados e resolvidos por técnicas de programação linear. Na pesquisa operacional, esses problemas são comuns e representam situações práticas em que decisões eficientes podem gerar economias significativas e melhorias operacionais nas mais diversas áreas da indústria, logística e gestão.

Observação

O problema de designação é famoso pelo algoritmo húngaro, um método eficiente para resolvê-los. Ele foi desenvolvido por Harold Kuhn em 1955, e é amplamente baseado no trabalho anterior de dois matemáticos húngaros, Dénes Kőnig e Jenő Egerváry (Arenales; Armentano, 2006; Hillier *et al.*, 2012).

4.1 Conceito de problemas de transporte e designação

Problemas de transporte e designação são duas categorias específicas de problemas de otimização em pesquisa operacional, e ambos estão relacionados à alocação de recursos de forma otimizada.

Problemas de transporte

- **Conceito**: os problemas de transporte lidam com a alocação otimizada de produtos ou mercadorias de várias origens (por exemplo, fábricas) a vários destinos (por exemplo, armazéns ou lojas), de tal forma que o custo total do transporte seja minimizado ou o lucro seja maximizado.

- **Origens**: o(s) ponto(s) de partida dos produtos. Cada origem tem uma oferta específica, isto é, a quantidade máxima de produto que ela pode fornecer.

- **Destino**: o(s) ponto(s) de chegada dos produtos. Cada destino tem uma demanda específica, isto é, a quantidade exata de produto que ele requer.

- **Custo**: para cada par origem-destino existe um custo associado para transportar uma unidade de produto.

- **Objetivo**: minimizar o custo total de transporte, satisfazendo todas as ofertas e demandas.

Problemas de designação

- **Conceito**: os problemas de designação lidam com a tarefa de alocar recursos a tarefas para minimizar o custo ou o tempo, ou maximizar o lucro ou a eficiência. Uma característica especial é que exatamente um recurso é atribuído a exatamente uma tarefa.

- **Recursos**: por exemplo, trabalhadores, máquinas, veículos etc.

- **Tarefas**: atividades específicas a serem realizadas.

- **Custos ou benefícios**: para cada par recurso-tarefa há um custo associado para alocar esse recurso específico àquela tarefa específica. Em algumas situações, em vez de um custo, pode-se ter um benefício ou lucro associado.

- **Objetivo**: minimizar o custo total ou maximizar o benefício total da designação.

- **Exemplo simples**: imagine que você tenha três trabalhadores e três tarefas. Cada trabalhador leva um tempo diferente para completar cada tarefa. O problema de designação aqui seria alocar cada trabalhador a uma tarefa específica de tal forma que o tempo total gasto seja minimizado.

Ambos os problemas, de transporte e designação, podem ser resolvidos usando várias técnicas, como o método Simplex especializado para problemas de transporte, o algoritmo húngaro para problemas de designação ou outros.

Lembrete

A pesquisa operacional desenvolveu esses modelos para ajudar as organizações a alocar recursos de maneira eficiente, levando em consideração as restrições e os objetivos desejados.

4.2 Situações-problema com algoritmo de transporte

O algoritmo de transporte é uma ferramenta poderosa na pesquisa operacional, projetada para otimizar a alocação de recursos entre fontes e destinos. Abaixo estão alguns exemplos práticos de situações-problema que podem ser abordadas usando este algoritmo:

Distribuição de mercadorias

- **Situação**: uma empresa administra várias fábricas que produzem um certo produto e precisa distribuí-lo para diversos centros de distribuição em diferentes cidades.
- **Problema**: determinar a quantidade que cada fábrica deve enviar para cada centro de distribuição de forma a minimizar os custos de transporte, considerando as capacidades de produção das fábricas e as demandas dos centros de distribuição.

Transporte de grãos

- **Situação**: diferentes fazendas produzem grãos e precisam enviá-los para vários moinhos em uma região.
- **Problema**: distribuir os grãos das fazendas para os moinhos de forma a atender à demanda de cada moinho e minimizando os custos de transporte, dadas as diferentes distâncias e capacidades das fazendas.

Distribuição de água

- **Situação**: uma cidade dispõe de vários reservatórios de água e uma rede de distribuição que serve diferentes bairros com demandas variáveis.
- **Problema**: distribuir a água dos reservatórios para os bairros de maneira eficiente, garantindo o abastecimento e minimizando os custos associados ao bombeamento e transporte da água.

Alocação de recursos em hospitais

- **Situação**: diversos hospitais de uma região recebem medicamentos e equipamentos de vários fornecedores.
- **Problema**: determinar a quantidade de medicamentos e equipamentos que cada fornecedor deve enviar para cada hospital, levando em consideração as necessidades de cada hospital e os custos de transporte.

Produção e distribuição de energia

- **Situação**: uma empresa geradora de energia tem várias usinas que produzem energia e precisa distribuí-la para diferentes subestações.

- **Problema**: alocar a produção de cada usina para as subestações, considerando a demanda, a capacidade de produção e os custos associados ao transporte da energia.

Em cada um dos cenários descritos, o algoritmo de transporte pode ser aplicado para determinar a melhor estratégia de distribuição com o objetivo principal de minimizar os custos associados ao transporte, respeitando as capacidades de oferta e as demandas de recebimento.

4.3 Situações-problema com modelos de designação

Os modelos de designação na pesquisa operacional são ferramentas extremamente úteis para resolver problemas que envolvem a atribuição de recursos a tarefas, pessoas a projetos, ou qualquer cenário semelhante. A seguir estão alguns exemplos:

Alocação de funcionários a projetos

- **Situação**: uma empresa de TI tem diversos projetos e um conjunto de desenvolvedores com diferentes habilidades.

- **Problema**: alocar os desenvolvedores de forma a minimizar o tempo total necessário para completar todos os projetos.

Atribuição de máquinas a operadores

- **Situação**: uma fábrica tem várias máquinas e operadores. Cada operador leva um tempo diferente para operar cada máquina.

- **Problema**: alocar operadores a máquinas de forma a minimizar o tempo total de produção ou o custo total.

Alocação de professores a cursos

- **Situação**: uma universidade tem uma variedade de cursos a serem oferecidos no próximo semestre e um grupo de professores com diferentes especialidades.

- **Problema**: alocar os professores de forma que todos os cursos sejam ministrados e que a qualificação dos professores seja aproveitada da melhor maneira possível.

Atribuição de tarefas em centros de atendimento

- **Situação**: um centro de atendimento ao cliente recebe diferentes tipos de chamadas que requerem diferentes níveis de especialização.

- **Problema**: atribuir os diferentes tipos de chamadas aos atendentes de forma a minimizar o tempo de espera do cliente.

Planejamento de rotas de entrega

- **Situação**: uma empresa de logística precisa fazer entregas em diferentes locais e tem diferentes motoristas e veículos à disposição.
- **Problema**: alocar motoristas e veículos às rotas de forma a minimizar o tempo total de entrega ou o custo total.

Alocação de pacientes a médicos

- **Situação**: um hospital tem diversos médicos especialistas e pacientes necessitando de diferentes tipos de tratamento.
- **Problema**: alocar pacientes a médicos de forma a minimizar o tempo de espera para tratamento e maximizar a eficiência dos médicos.

Atribuição de árbitros a jogos de futebol

- **Situação**: uma liga de futebol tem um conjunto de árbitros e diversos jogos programados.
- **Problema**: atribuir árbitros a jogos de forma a cumprir com as restrições de disponibilidade e minimizar os custos de deslocamento.

Em cada um desses cenários, o objetivo é otimizar algum aspecto da atribuição, como o custo total, o tempo total ou outros critérios específicos. Os modelos de designação ajudam a encontrar a solução ideal para esses problemas complexos de alocação de recursos.

Exemplo de aplicação

Exemplo: problema de transporte

Uma empresa de venda de computadores, denominada TechPCs, tem três centros de distribuição (A, B e C) e precisa enviar computadores para quatro revendedores distintos (X, Y, Z e W). O objetivo é determinar a quantidade de computadores que devem ser enviados de cada centro de distribuição para cada revendedor de forma a minimizar o custo total de transporte.

Dados do problema

- Oferta nos centros de distribuição:
  - A: 60 computadores
  - B: 70 computadores
  - C: 50 computadores

- Demanda dos revendedores:
  - X: 40 computadores
  - Y: 50 computadores
  - Z: 60 computadores
  - W: 30 computadores
- Custo de transporte por computador (em R$):

Tabela 3

	X	Y	Z	W
A	8	6	10	9
B	6	8	11	5
C	9	7	13	12

Solução

Vamos criar uma matriz de alocação que representará a quantidade de computadores enviados de cada centro de distribuição para cada revendedor.

- **Passo 1**: atribuição inicial.

  Começamos por atribuir os computadores às rotas de menor custo até atender a oferta ou a demanda.

Tabela 4

	X	Y	Z	W	Oferta
A	40	20	0	0	60
B	0	30	40	0	70
C	0	0	20	30	50
Demanda	40	50	60	30	

- **Passo 2**: ajuste para atender a demanda e a oferta.

  A matriz inicial já satisfaz todas as demandas e ofertas; portanto, não é necessário nenhum ajuste.

- **Passo 3**: Cálculo do custo total.

  Custo = (40 * 8) + (20 * 6) + (30 * 8) + (40 * 11) + (20 * 13) + (30 * 12) =

  320 + 120 + 240 + 440 + 260 + 360 =

  R$ 1.740

Resposta

A solução ótima para o problema de transporte, considerando a minimização dos custos, indica que:

- **Do centro A**: 40 computadores devem ser enviados para o revendedor X e 20 para o revendedor Y.
- **Do centro B**: 30 computadores devem ser enviados para o revendedor Y e 40 para o revendedor Z.
- **Do centro C**: 20 computadores devem ser enviados para o revendedor Z e 30 para o revendedor W.

O custo total de transporte será de R$ 1.740,00.

Observação

A resolução acima é simplificada, e em casos práticos mais complexos pode-se utilizar softwares específicos ou técnicas mais aprofundadas para obter a solução ótima.

Exemplo de aplicação

Exemplo: problema de designação

A empresa DevSolutions é uma companhia de desenvolvimento de software que atualmente tem quatro projetos (P1, P2, P3, P4) para realizar. Ela precisa designar quatro de seus principais desenvolvedores (D1, D2, D3, D4) para esses projetos. Cada desenvolvedor tem uma habilidade específica e, portanto, um tempo estimado diferente para concluir cada projeto. O objetivo é designar os desenvolvedores aos projetos de modo a minimizar o tempo total de conclusão.

Dados do problema

Tempo estimado (em horas) para cada desenvolvedor completar cada projeto:

Tabela 5

	P1	P2	P3	P4
D1	4	7	6	8
D2	6	8	5	7
D3	7	6	7	7
D4	5	6	7	8

Solução

Vamos designar os desenvolvedores aos projetos de maneira a minimizar o tempo total.

- **Passo 1**: iniciamos identificando as menores horas em cada linha e subtraindo-as de cada entrada dessa linha.

Tabela 6

	P1	P2	P3	P4
D1	0	3	2	4
D2	1	3	0	2
D3	1	0	1	1
D4	0	1	2	3

- **Passo 2**: subtraímos as menores horas de cada coluna de cada entrada dessa coluna.

Tabela 7

	P1	P2	P3	P4
D1	0	2	1	3
D2	1	2	0	1
D3	1	0	1	0
D4	0	1	2	2

- **Passo 3**: faça designações óbvias (quando um 0 é o único em sua linha ou coluna). Caso não haja designações óbvias, escolha um zero e risque sua linha e coluna. Continue até que todos os zeros estejam riscados ou haja uma designação em cada linha e coluna.

Designando de acordo com os menores valores:

D1 → P1

D2 → P3

D3 → P2

D4 → P4

- **Passo 4**: calcule o tempo total usando as designações feitas.

  Tempo total = 4 (D1-P1) + 5 (D2-P3) + 6 (D3-P2) + 8 (D4-P4) = 23 horas

Resposta

A designação ótima para minimizar o tempo total é:

- Desenvolvedor D1 deve trabalhar no projeto P1.
- Desenvolvedor D2 deve trabalhar no projeto P3.
- Desenvolvedor D3 deve trabalhar no projeto P2.
- Desenvolvedor D4 deve trabalhar no projeto P4.

O tempo total para conclusão de todos os projetos será de 23 horas.

Observação

A solução aqui apresentada é uma simplificação. Em cenários reais e mais complexos podem ser necessárias técnicas adicionais ou o uso de softwares específicos.

Resumo

Nesta unidade, vimos alguns métodos da pesquisa operacional para resolver problemas mais genéricos e que podem ser utilizados em diversas áreas do conhecimento, entre eles o método algébrico de resolução de problemas de programação linear e o método gráfico.

O método gráfico é limitado, dado que o número de variáveis envolvidas é baixo. O método algébrico faz uso de um número maior de variáveis, porém, justamente porque problemas práticos de programação linear utilizam muitas variáveis, deve-se adotar métodos computacionais.

Dentre os métodos computacionais, exibimos o uso do Solver, um add-in do Microsoft Excel que nos permite resolver problemas computacionais maiores – mas ainda assim limitados, pois o Excel é uma ferramenta destinada a problemas computacionais de pequeno porte. Também trabalhamos o Simplex, que é um algoritmo para a resolução de problemas de otimização que exige, via de regra, várias iterações. O Simplex foi criado justamente para o uso de computadores em problemas mais complexos.

Foram apresentados ainda problemas de transporte e designação bastante genéricos, aplicados à área de informática de forma simplificada para poderem ser entendidos de forma introdutória.

Exercícios

Questão 1. Um produtor de doces artesanais fabrica dois tipos de produtos: chocolates e pães de mel. O produtor deseja determinar quantas unidades de cada produto deve produzir diariamente para maximizar seu lucro.

Cada chocolate gera lucro de 10 unidades monetárias (UM), enquanto cada pão de mel gera lucro de 15 UM. Para produzir um chocolate, o produtor precisa de 2 minutos de trabalho e 3 gramas de açúcar. Para produzir um pão de mel, são necessários 4 minutos de trabalho e 5 gramas de açúcar. O produtor tem disponíveis, diariamente, 480 minutos de trabalho e 600 gramas de açúcar.

Considerando x_1 o número de chocolates produzido diariamente e x_2 o número de pães de mel, assinale qual é o plano de produção diário que maximiza o lucro L na produção desses dois doces.

A) $\text{Maximizar}: L = 10x_1 + 15x_2$

$$\text{Restrições}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 600 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

B) $\text{Maximizar}: L = 15x_1 + 10x_2$

$$\text{Restrições}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 600 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

C) $\text{Maximizar}: L = 10x_1 + 15x_2$

$$\text{Restrições}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 500 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 480 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

D) Maximizar : $L = 10x_1 + 10x_2$

$$\text{Restrições}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 600 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

E) Maximizar : $L = 10x_1 + 15x_2$

$$\text{Restrições}: \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 480 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 600 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resposta correta: alternativa A.

Resolução da questão

Para resolvermos esse problema de otimização, podemos usar a programação linear. As variáveis de decisão para o problema são expostas a seguir.

- x_1: número de chocolates produzidos por dia.
- x_2 : número de pães de mel produzidos por dia.

O objetivo do produtor é maximizar o lucro L. Como cada chocolate gera lucro de 10 UM e cada pão de mel gera lucro de 15 UM, a função L, a ser maximizada, é caracterizada por:

$$L = 10x_1 + 15x_2$$

Vamos, agora, definir as restrições do sistema. O produtor tem disponibilidade de tempo de 480 minutos diários de trabalho. Cada chocolate demanda 2 minutos de trabalho, enquanto cada pão de mel demanda 4 minutos. Com isso, temos a restrição disposta a seguir.

$$2x_1 + 4x_2 \leq 480$$

Além disso, há outra restrição: a quantidade de açúcar. O produtor tem disponíveis, diariamente, 600 gramas de açúcar. Cada chocolate demanda 3 gramas de açúcar, enquanto cada pão de mel demanda 5 gramas. Com isso, temos a restrição disposta a seguir.

$$3x_1 + 5x_2 \leq 600$$

No mais, pelo contexto dos itens produzidos, temos que as variáveis de decisão x_1 e x_2 não podem assumir valores negativos:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Logo, o plano de produção diário que maximiza o lucro L na produção desses dois doces é explicitado a seguir:

$$\text{Maximizar}: L = 10x_1 + 15x_2$$

$$\text{Restrições}: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 600 \\ \quad x_1 \geq 0 \\ \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Questão 2. Quando deparamos com situações que envolvem programação linear, devemos, em primeiro lugar, criar um modelo matemático. Esse modelo é composto por dois elementos principais: uma função objetivo e um conjunto de restrições. Além disso, o modelo apresenta variáveis de decisão e possíveis variáveis auxiliares. Uma vez que o modelo foi criado, há diferentes métodos pelos quais podemos resolvê-lo. A respeito desses métodos, avalie as afirmativas.

I – O método gráfico é uma abordagem visual adequada para resolver problemas de programação linear com pelo menos cinco variáveis de decisão.

II – O Solver é a ferramenta de resolução de modelos de programação linear do Microsoft Excel.

III – O método Simplex é um algoritmo desenvolvido para resolver problemas de programação linear que, normalmente, é implementado por um sistema computacional.

É correto o que se afirma em:

A) I, apenas.

B) III, apenas.

C) I e II, apenas.

D) II e III, apenas.

E) I, II, III.

Resposta correta: alternativa D.

Análise das afirmativas

I – Afirmativa incorreta.

Justificativa: o método gráfico é uma abordagem visual adequada para resolver problemas de programação linear com, no máximo, três variáveis de decisão, sendo ideal para sistemas de apenas duas. Métodos mais complexos devem ser utilizados para resolver modelos com mais variáveis.

II – Afirmativa correta.

Justificativa: o Solver é uma ferramenta específica do Microsoft Excel, já que é integrado diretamente a esse programa. No entanto, existem ferramentas similares e conceitos de otimização que são usados em outros softwares e plataformas.

III – Afirmativa correta.

Justificativa: o nome Simplex se deve ao fato de a sequência de instruções do algoritmo ser relativamente simples. Ele pode ser implementado tanto por um computador quanto manualmente. No entanto, ele envolve muitas iterações de cálculo, o que leva a um procedimento tedioso e trabalhoso, caso seja executado de forma manual. Logo, é esperado que o algoritmo seja executado por meio de um software.