



UNIDADE II

Geometria Analítica

Prof. Me. Rene Ignácio

Introdução

Nesta unidade II, veremos:

Produto escalar:

- Ângulo entre dois vetores, perpendicularidade, paralelismo, dependência linear de dois vetores;
- Projeção ortogonal de um vetor sobre o outro;
- Produto vetorial.

Produto escalar de dois vetores

- O resultado do produto escalar entre dois vetores é um escalar e não um vetor.

É indicado por um ponto: $\vec{u} \text{escalar} \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

- Para dois vetores bidimensionais: $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

- Para dois vetores tridimensionais: $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Produto escalar de dois vetores – Atenção!

Quando temos um ponto entre dois números estamos tratando de uma multiplicação algébrica:

$$3.4 = 3 \times 4 = 12$$

Quando temos um ponto entre dois vetores estamos tratando de um produto escalar:

$$\vec{u}escalar\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Propriedades do produto escalar

- Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores e a um escalar.

Propriedade comutativa: a ordem não altera o produto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Propriedade distributiva: o produto de um vetor por uma soma de vetores é igual à soma do produto desse vetor por cada vetor:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Propriedade associativa: o produto é independente da ordem:

$$a \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a \cdot \vec{v})$$

Produto escalar: caso especial

O produto escalar de um vetor \vec{u} por ele mesmo:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} > 0 \text{ se } \vec{u} \neq \vec{0}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \text{ se } \vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

- Essa última expressão é interessante.
 - Ela afirma que o produto escalar de um vetor, por ele mesmo, é igual ao quadrado do módulo desse vetor.

Produto escalar: exemplo 1

- Dados os vetores $\vec{u} = (1,2)$ e $\vec{v} = (3,4)$, calcule o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Aplicando o método de cálculo do produto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,2) \cdot (3,4)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 8$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 11$$

- O produto escalar entre os vetores $\vec{u} = (1,2)$ e $\vec{v} = (3,4)$ é 11.
- Note que a resposta é um número e não um vetor.

Produto escalar: exemplo 2

- Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -5)$ e $\vec{v} = (3, 4, 1)$, calcule o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Aplicando o método de cálculo do produto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2, -5) \cdot (3, 4, 1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 8 - 5$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$$

- O produto escalar entre os vetores $\vec{u} = (1, 2, -5)$ e $\vec{v} = (3, 4, 1)$ é 6.
- Note que a resposta é um número e não um vetor.

Produto escalar usando o ângulo entre dois vetores

- O produto escalar entre dois vetores pode ser calculado a partir das coordenadas.
- Também pode ser calculado a partir do módulo dos vetores e do ângulo formado entre eles.

Para dois vetores \vec{u} e \vec{v} , com ângulo θ entre eles:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$$

- Módulo é a raiz quadrada da soma dos quadrados das coordenadas de um vetor.
- Vetor bidimensional: $\vec{v} = (x, y)$: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
 - Vetor tridimensional: $\vec{v} = (x, y, z)$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Casos simples com o ângulo entre dois vetores

Cálculo de produto escalar para os vetores perpendiculares e para os vetores paralelos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$$

Vetores perpendiculares:

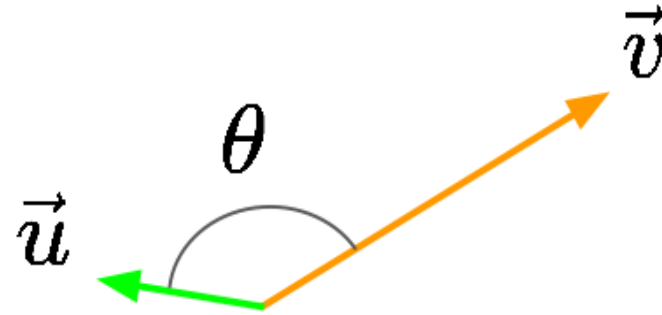
$$\theta = 90^\circ \therefore \cos 90^\circ = 0 \therefore \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Vetores paralelos e de mesmo sentido:

$$\theta = 0^\circ \therefore \cos 0^\circ = 1 \therefore \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

Vetores paralelos e de sentidos opostos:

$$\theta = 180^\circ \therefore \cos 180^\circ = -1 \therefore \vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$



- Os valores de seno e cosseno estão em tabelas.

Produto escalar usando ângulo entre dois vetores: exemplo

Calcule o produto escalar dos vetores \vec{u} e \vec{v} , sabendo que os vetores têm módulos iguais a 2 e 3, respectivamente, e formam um ângulo de 60° entre si:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$$

$$|\vec{u}| = 2$$

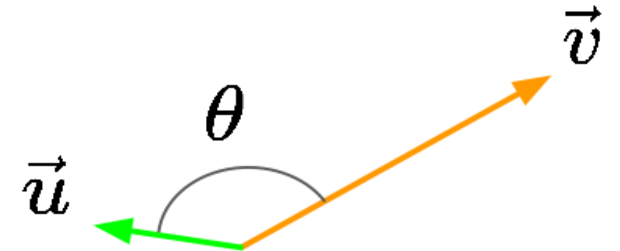
$$|\vec{v}| = 3$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\theta = 60^\circ \therefore \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

- O produto escalar dos vetores \vec{u} e \vec{v} é igual a 3.



Interatividade

Assinale a alternativa **incorreta** sobre o produto escalar dos vetores \vec{u} e \vec{v} :

- a) O produto escalar é calculado por $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } \theta$
- b) Para os vetores perpendiculares $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, pois $\theta = 90^\circ$ e $\cos 90^\circ = 0$
- c) Para os vetores paralelos e de mesmo sentido $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, pois $\theta = 0^\circ$ e $\cos 0^\circ = 1$
- d) Para os vetores paralelos e de sentidos opostos $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, pois $\theta = 180^\circ$ e $\cos 180^\circ = -1$
- e) O produto escalar é calculado por $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$

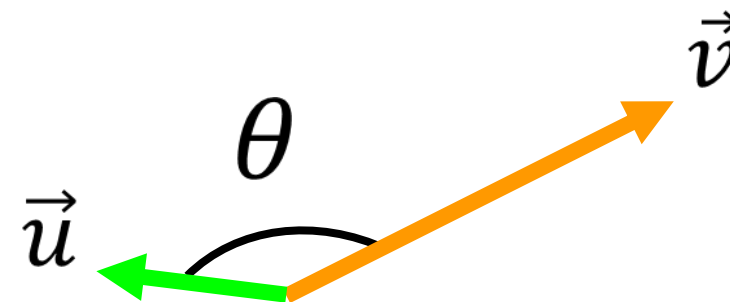
Resposta

Assinale a alternativa incorreta sobre o produto escalar dos vetores \vec{u} e \vec{v} :

- a) O produto escalar é calculado por $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } \theta$
- b) Para os vetores perpendiculares $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, pois $\theta = 90^\circ$ e $\cos 90^\circ = 0$
- c) Para os vetores paralelos e de mesmo sentido $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, pois $\theta = 0^\circ$ e $\cos 0^\circ = 1$
- d) Para os vetores paralelos e de sentidos opostos $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, pois $\theta = 180^\circ$ e $\cos 180^\circ = -1$
- e) O produto escalar é calculado por $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$

Ângulo entre dois vetores usando o produto escalar: etapas

- Determinar o ângulo formado entre os vetores \vec{u} e \vec{v} .
- Produto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$



1. Calcular o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$
2. Calcular o módulo de $|\vec{u}|$ e de $|\vec{v}|$
3. Calcular o $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
4. Com o valor de $\cos \theta$, obter o ângulo θ usando uma tabela de seno e cosseno.

Ângulo entre dois vetores usando o produto escalar: exemplo – 1º etapa

- Determinar o ângulo formado entre os vetores $\vec{u} = (1,1)$ e $\vec{v} = (0,4)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$$

- Calcular o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\vec{u} = (x_1, y_1) \text{ e } \vec{v} = (x_2, y_2)$$

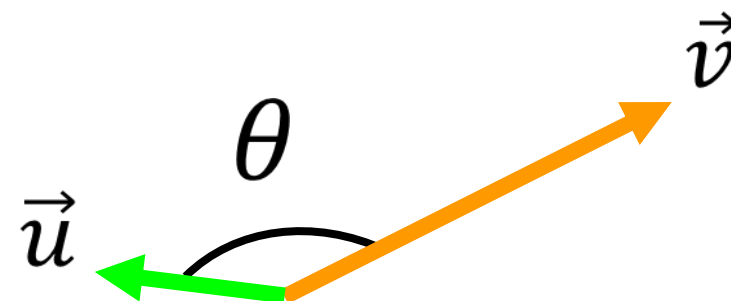
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,1) \cdot (1,4)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 4$$

- Produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$

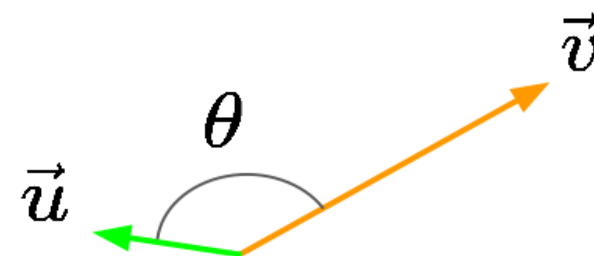
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$$



Ângulo entre dois vetores usando o produto escalar: 2º etapa

- Determinar o ângulo formado entre os vetores $\vec{u} = (1,1)$ e $\vec{v} = (0,4)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$$



2. Calcular o módulo de $|\vec{u}|$ e de $|\vec{v}|$:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$$

3. Módulo de $|\vec{u}|$ e de $|\vec{v}|$:

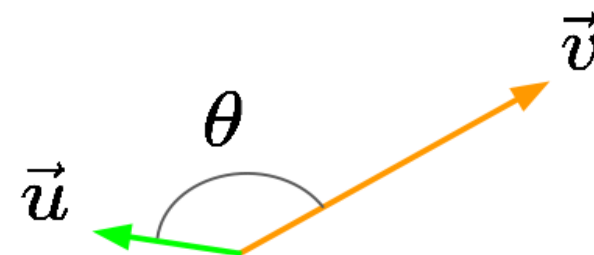
$$|\vec{u}| = \sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = 4$$

Ângulo entre dois vetores usando o produto escalar: 3º etapa

- Determinar o ângulo formado entre os vetores $\vec{u} = (1,1)$ e $\vec{v} = (0,4)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$$



3. Calcular o $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$:

- (Da 1º etapa) – Produto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$
- (Da 2º etapa) – Módulo: $|\vec{u}| = \sqrt{2}$ e $|\vec{v}| = 4$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3. \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

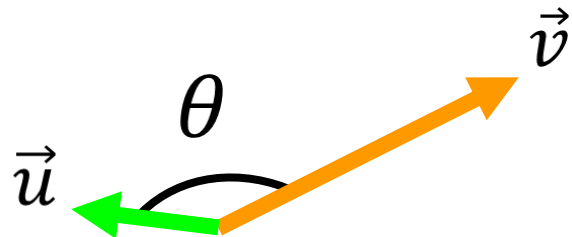
Ângulo entre dois vetores usando o produto escalar: 4ª etapa (final)

- Determinar o ângulo formado entre os vetores $\vec{u} = (1,1)$ e $\vec{v} = (0,4)$.

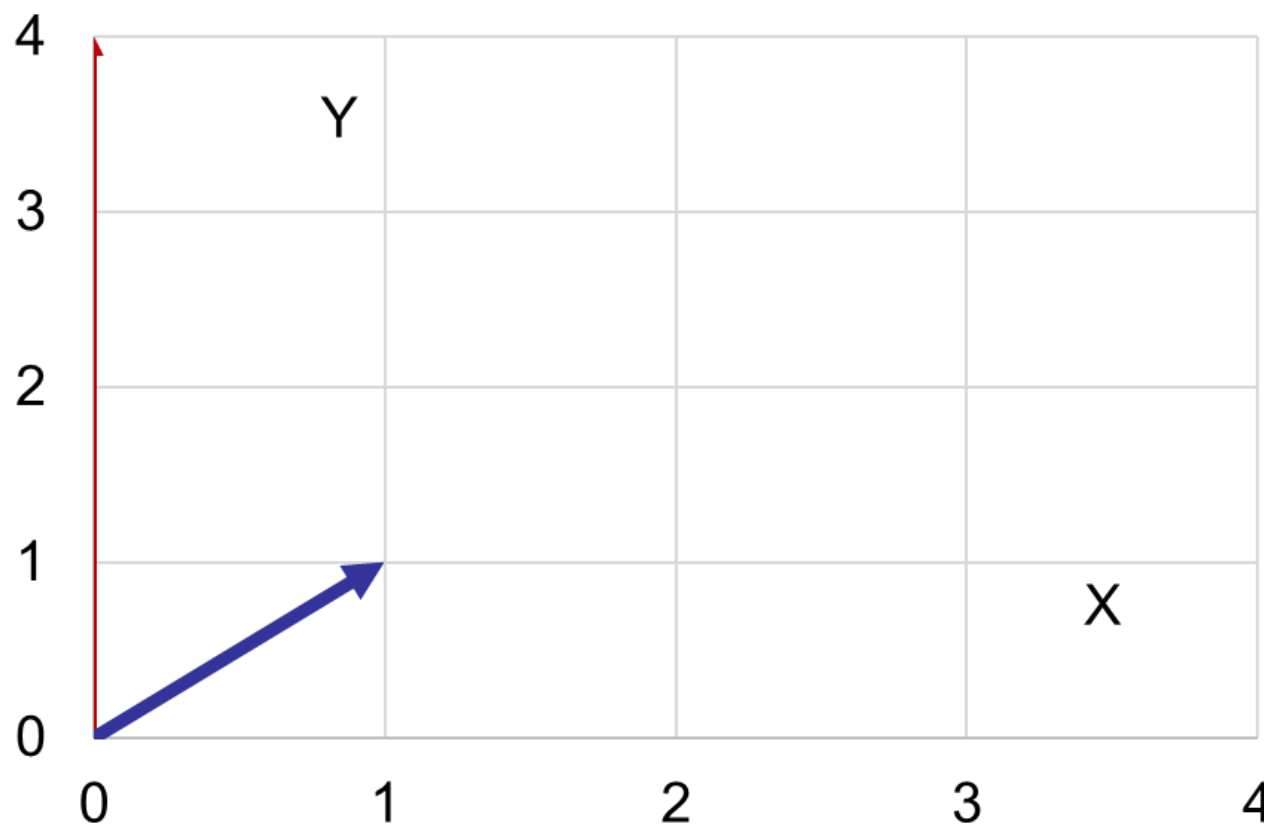
4. Com o valor de $\cos \theta$, obter o ângulo θ usando uma tabela de seno e cosseno:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = 45^\circ$$



Colocando os vetores em um plano cartesiano para visualizar o ângulo:



Condição de perpendicularismo entre dois vetores

- Dois vetores são ditos perpendiculares quando formam um ângulo de 90 graus entre si.

O produto escalar entre vetores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$$

Para os vetores perpendiculares:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 90^\circ$$

Como $\cos 90^\circ = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- Para os vetores perpendiculares o produto escalar é igual a zero.

Condição de perpendicularismo entre dois vetores: exemplo 1

- Verificar se os vetores $\vec{u} = (0,1,0)$ e $\vec{v} = (1,1,1)$ são perpendiculares.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$$

- Se forem perpendiculares, então, formam um ângulo de 90 graus entre si ($\cos 90^\circ = 0$); logo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Então, como $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, basta calcular:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = 0 + 1 + 0 = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$$

- Como o produto escalar entre os vetores não é igual a zero, eles não são perpendiculares.

Condição de perpendicularismo entre dois vetores: exemplo 2

- Determinar a para que os vetores $\vec{u} = (a, 4, -1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 1)$ sejam perpendiculares.

Para serem perpendiculares:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

Então, se obtém a fazendo:

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$$

$$(a \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1) = 0$$

$$a - 8 - 1 = 0 \Rightarrow a = 9$$

- Os vetores $\vec{u} = (a, 4, -1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 1)$ serão perpendiculares, se $a = 9$.

Condição de paralelismo entre dois vetores

- Dois vetores são paralelos se eles formam um ângulo de 0° ou de 180° entre si.
- Se eles formam um ângulo de 0° estão no mesmo sentido.
- Se eles formam um ângulo de 180° estão em sentidos opostos.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$$

- Para os vetores paralelos e de mesmo sentido ($\theta = 0^\circ$, $\cos 0^\circ = 1$):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

- Para os vetores paralelos e de sentido opostos ($\theta = 180^\circ$ e $\cos 180^\circ = -1$):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

Então:

- Vetores são paralelos quando o produto escalar é igual a 1 ou a -1.

Condição de paralelismo entre dois vetores

Podemos juntar essas duas condições de paralelismo usando a noção de módulo (ou valor absoluto) de um número, que nada mais é do que o número em sua forma positiva:

- O módulo de um número positivo é positivo: $|3| = 3$
- O módulo de um número negativo é positivo $|-3| = 3$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

- No lado esquerdo, o produto escalar, um número, cujo módulo será, sempre, positivo.
- No lado direito, o produto de módulos de vetores retorna o tamanho do vetor, também, sempre, positivo.

Ou seja:

- Se os vetores foram paralelos, no mesmo sentido
($\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$) ou em sentidos opostos ($\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$),
o módulo do produto escalar é igual ao produto de módulo dos vetores.

Condição de paralelismo entre dois vetores: exemplo

- Determinar se os vetores $\vec{u} = (1,0,3)$ e $\vec{v} = (-2,0,-6)$ são paralelos.
- Condição de paralelismo: $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

1. Calcular o produto escalar a partir das coordenadas dos vetores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,0,3) \cdot (-2,0,-6) = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-6) = -2 + 0 - 18 = -20$$

O produto escalar resultou em um valor negativo. Ao aplicarmos o módulo ou o valor absoluto a esse resultado, teremos um valor positivo:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |-20| = 20$$

Próxima etapa:

2. Calcular o módulo de cada um dos vetores:

Condição de paralelismo entre dois vetores: exemplo – continuação

- Determinar se os vetores $\vec{u} = (1,0,3)$ e $\vec{v} = (-2,0,-6)$ são paralelos.

2. Calcular o módulo de cada um dos vetores:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

- Condição de paralelismo: $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

$$20 = \sqrt{10}\sqrt{40}$$

$$20 = \sqrt{400}$$

$$20 = 20$$

- Logo, os vetores $\vec{u} = (1,0,3)$ e $\vec{v} = (-2,0,-6)$ são paralelos.

Interatividade

Assinale a alternativa correta sobre o paralelismo entre os vetores:

- a) Vetores são paralelos quando o produto escalar é diferente de 1 ou de -1.
- b) Vetores são paralelos quando formam, entre si, um ângulo de 90° .
- c) Vetores são paralelos quando o produto escalar é igual a 0.
- d) Vetores são paralelos quando o produto escalar é igual a 1 ou a -1.
- e) Vetores são paralelos quando formam, entre si, um ângulo de 45° .

Resposta

Assinale a alternativa correta sobre o paralelismo entre os vetores:

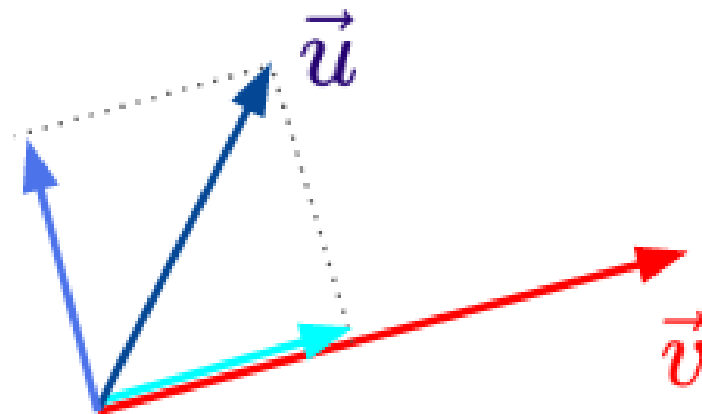
- a) Vetores são paralelos quando o produto escalar é diferente de 1 ou de -1.
- b) Vetores são paralelos quando formam, entre si, um ângulo de 90° .
- c) Vetores são paralelos quando o produto escalar é igual a 0.
- d) Vetores são paralelos quando o produto escalar é igual a 1 ou a -1.
- e) Vetores são paralelos quando formam, entre si, um ângulo de 45° .

Projeção ortogonal de vetores

- Uma das aplicações do produto escalar é calcular a projeção ortogonal de um vetor sobre o outro.
- Sejam dois vetores \vec{u} e \vec{v} .

A projeção ortogonal de \vec{u} sobre o vetor \vec{v} significa decompor o vetor \vec{u} em:

- Uma projeção paralela ao vetor \vec{v} ;
- E em outra projeção perpendicular ao vetor \vec{v} .

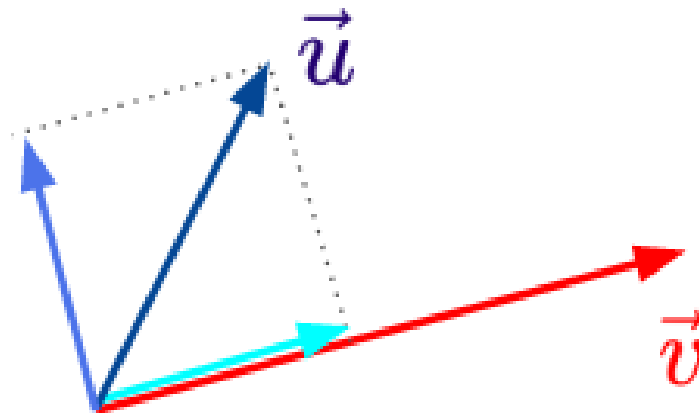


Projeção ortogonal de vetores: projeção paralela

A projeção de \vec{u} paralela (\parallel) a \vec{v} é dada por:

$$proj_{\parallel \vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \cdot \vec{v}$$

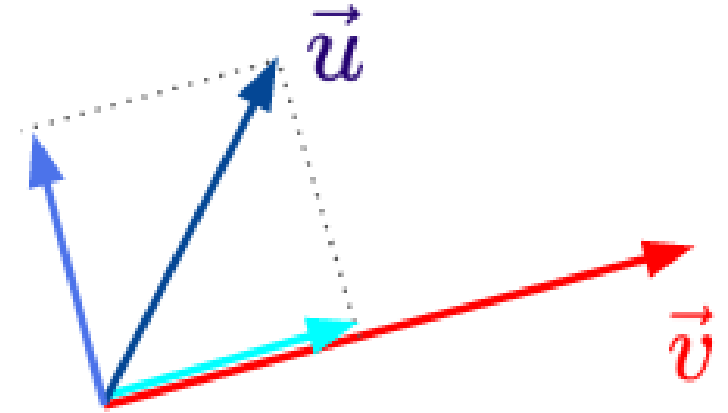
- No parênteses, temos um produto escalar ($\vec{u} \cdot \vec{v}$), que resulta em um número dividido pelo quadrado do módulo de um vetor ($|\vec{v}|^2$), que é outro número.
- Então, a expressão entre os parênteses é um número, ou seja, é um escalar.
- De fato, a projeção do vetor \vec{u} sobre o vetor \vec{v} deve conservar a direção e o sentido de \vec{v} , o que é feito quando multiplicamos um escalar por \vec{v} .



Projeção ortogonal de vetores: projeção perpendicular

O vetor \vec{u} pode ser visto como a soma dos seu vetor paralelo (\parallel) e perpendicular (\perp):

- $\vec{u} = \text{projeção } \vec{u} \text{ paralela } \vec{v} + \text{projeção } \vec{u} \text{ perpendicular } \vec{v}$
- $\vec{u} = \text{proj}_{\parallel \vec{v}} \vec{u} + \text{proj}_{\perp \vec{v}} \vec{u}$



A projeção de \vec{u} perpendicular a \vec{v} pode ser calculada:

$$\text{proj}_{\perp \vec{v}} \vec{u} = \vec{u} - \text{proj}_{\parallel \vec{v}} \vec{u}$$

Projeção ortogonal de vetores: exemplo

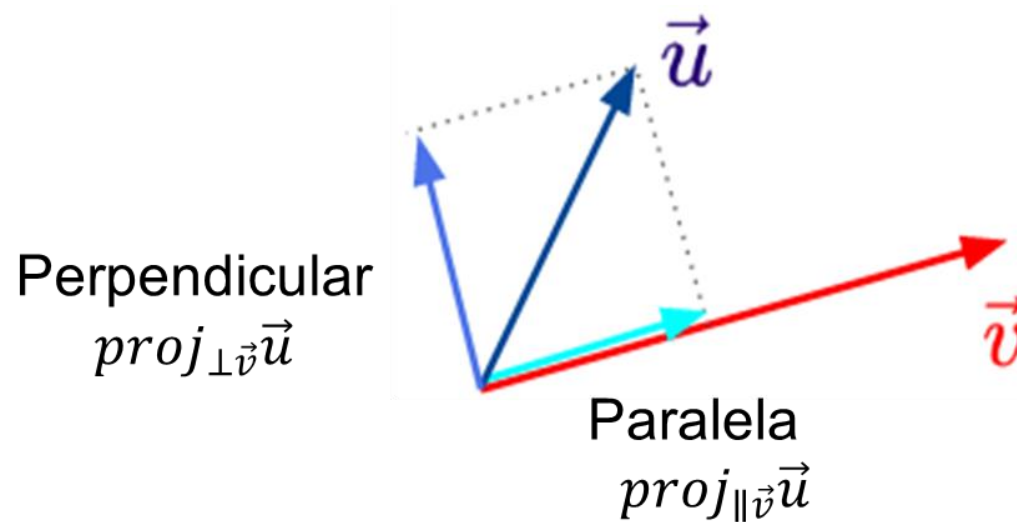
- Determine as projeções ortogonais do vetor $\vec{u} = (1,2,3)$ em relação ao vetor $\vec{v} = (1,0,1)$.
Precisamos calcular a projeção paralela e a perpendicular:

A projeção de \vec{u} paralela a \vec{v} é dada por:

$$proj_{\parallel \vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \cdot \vec{v}$$

A projeção de \vec{u} perpendicular a \vec{v} é dada por:

$$proj_{\perp \vec{v}} \vec{u} = \vec{u} - proj_{\parallel \vec{v}} \vec{u}$$



Projeção ortogonal de vetores: exemplo (paralelo)

- Determine as projeções ortogonais do vetor $\vec{u} = (1,2,3)$ em relação ao vetor $\vec{v} = (1,0,1)$.
A projeção de \vec{u} paralela a \vec{v} é dada por:

$$proj_{\parallel \vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \cdot \vec{v}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,2,3) \cdot (1,0,1) = 1.1 + 2.0 + 3.1 = 1 + 0 + 3 = 4$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$$

Calculando o módulo do vetor \vec{v} :

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2}$$

Projeção ortogonal de vetores: exemplo

- Determine as projeções ortogonais do vetor $\vec{u} = (1,2,3)$ em relação ao vetor $\vec{v} = (1,0,1)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2}$$

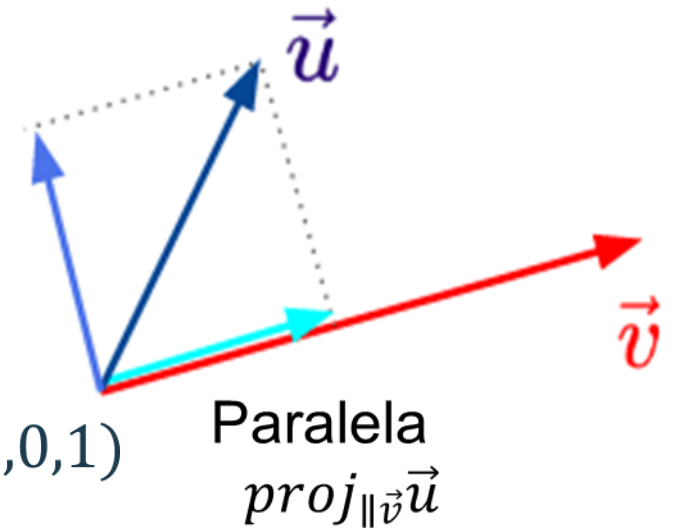
$$proj_{\parallel \vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \cdot \vec{v}$$

$$proj_{\parallel \vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{4}{\sqrt{2}^2} \right) \cdot (1,0,1) = \left(\frac{4}{2} \right) \cdot (1,0,1)$$

$$proj_{\parallel \vec{v}} \vec{u} = 2 \cdot (1,0,1)$$

$$proj_{\parallel \vec{v}} \vec{u} = (2,0,2)$$

- Estas são as coordenadas do vetor \vec{u} paralelo a \vec{v} .



Projeção ortogonal de vetores: exemplo (perpendicular)

- Determine as projeções ortogonais do vetor $\vec{u} = (1,2,3)$ em relação ao vetor $\vec{v} = (1,0,1)$.

A projeção de \vec{u} perpendicular a \vec{v} é dada por:

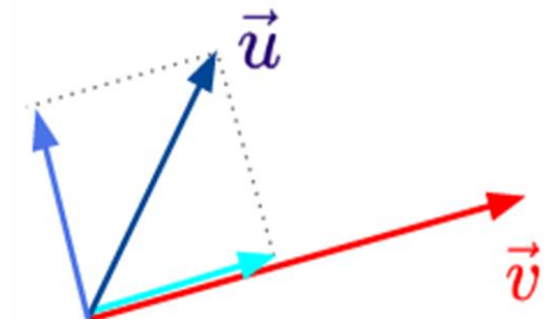
$$proj_{\perp \vec{v}} \vec{u} = \vec{u} - proj_{\parallel \vec{v}} \vec{u} \quad \text{Perpendicular } proj_{\perp \vec{v}} \vec{u}$$

$$proj_{\parallel \vec{v}} \vec{u} = (2,0,2)$$

$$proj_{\perp \vec{v}} \vec{u} = (1,2,3) - (2,0,2)$$

$$proj_{\perp \vec{v}} \vec{u} = (1 - 2, 2 - 0, 3 - 2)$$

$$proj_{\perp \vec{v}} \vec{u} = (-1, 2, 1)$$



- Estas são as coordenadas do vetor \vec{u} perpendicular a \vec{v} .

Projeção ortogonal de vetores: exemplo (resumo)

- Determine as projeções ortogonais do vetor $\vec{u} = (1,2,3)$ em relação ao vetor $\vec{v} = (1,0,1)$.

Coordenadas do vetor \vec{u} paralelo a \vec{v} :

$$proj_{\parallel \vec{v}} \vec{u} = (2,0,2)$$

Coordenadas do vetor \vec{u} perpendicular a \vec{v} :

$$proj_{\perp \vec{v}} \vec{u} = (-1,2,1)$$

- Note que estes vetores estão no espaço XYZ.

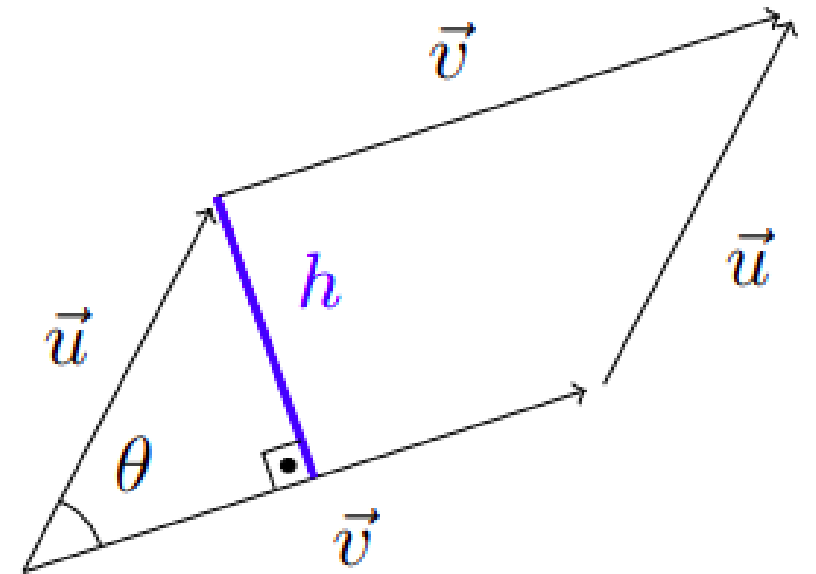
Projeção ortogonal de vetores: aplicações 1

- Uma das aplicações de projeção de um vetor sobre o outro é, em Física, o cálculo da força resultante de um conjunto de forças.
- Pode ser em um plano (XY) ou no espaço (XYZ).

Outra aplicação é o cálculo de áreas de paralelogramos pela fórmula de Lagrange:

$$A^2 = (|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|)^2 - \vec{u} \cdot \vec{v}$$

- Observação: a área do paralelogramo é base X altura.



Projeção ortogonal de vetores: aplicações 2

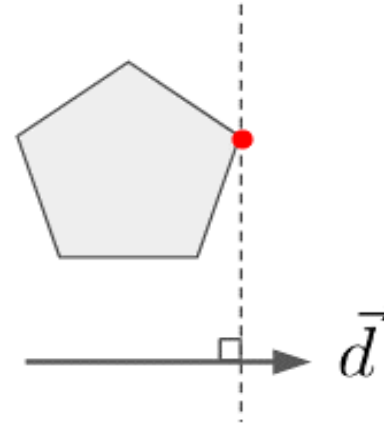
- O produto escalar é utilizado no campo da computação gráfica.
- Exemplo: determinação de pontos de suporte de figuras.
- O ponto de suporte é o ponto mais afastado da figura na direção de um vetor.
- Esse ponto é identificado quando o valor do produto escalar de um vértice da figura pela direção \vec{d} é máximo.

É necessário fazer a projeção de um vetor que tem:

- A origem na origem do vetor \vec{d} ;
- E a extremidade no ponto de suporte.

Ou seja:

- É preciso calcular a projeção paralela deste sobre \vec{d} .



Interatividade

Podemos afirmar que, para se calcular a projeção ortogonal de um vetor sobre o outro:

- a) É necessário calcular o produto escalar e o módulo de vetor.
- b) O produto escalar e o módulo de vetor não são utilizados.
- c) É necessário calcular o produto escalar, mas não se utiliza o módulo de vetor.
- d) Os vetores devem ser, necessariamente, paralelos.
- e) Os vetores devem ser, necessariamente, perpendiculares.

Resposta

Podemos afirmar que, para se calcular a projeção ortogonal de um vetor sobre o outro:

- a) É necessário calcular o produto escalar e o módulo de vetor.
- b) O produto escalar e o módulo de vetor não são utilizados.
- c) É necessário calcular o produto escalar, mas não se utiliza o módulo de vetor.
- d) Os vetores devem ser, necessariamente, paralelos.
- e) Os vetores devem ser, necessariamente, perpendiculares.

Produto vetorial

Sejam dois vetores \vec{u} e \vec{v} :

O produto vetorial entre esses dois vetores é indicado por:

$\vec{u} \times \vec{v}$ ou por $\vec{u}\vec{v}$

- O produto vetorial é calculado a partir do determinante de uma matriz cuja primeira linha é composta pelos versores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , e a segunda e a terceira linhas são compostas pelas coordenadas dos vetores \vec{u} e \vec{v} .

Produto vetorial

Se $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é calculado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

- A primeira linha da matriz é composta pelos versores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , e a segunda e a terceira linhas são compostas pelas coordenadas dos vetores \vec{u} e \vec{v} .
 - Os versores i , j e k têm módulo igual a 1 e correspondem, respectivamente, à direção e ao sentido dos eixos x , y e z (unidade I).
 - O resultado de um produto vetorial é um vetor.

Produto vetorial: exemplo

- Sejam os vetores $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (1,1,0)$, calcule o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Produto vetorial: exemplo

Copiando as duas primeiras colunas no final da matriz para auxiliar no cálculo do determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = 0.0\vec{i} + 1.1\vec{j} + 1.1\vec{k} - 1.0\vec{k} - 1.1\vec{i} - 0.1\vec{j}$$

Agrupando os termos de cada versor:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -1.1\vec{i} + 1.1\vec{j} + 1.1\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -1\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}$$

O produto vetorial dos vetores $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (1,1,0)$ é:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-1,1,1)$$

Propriedades do produto vetorial

O produto vetorial é **anticomutativo**, ou seja, a ordem com que é calculado é importante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

Propriedade **distributiva** se aplica ao produto vetorial:

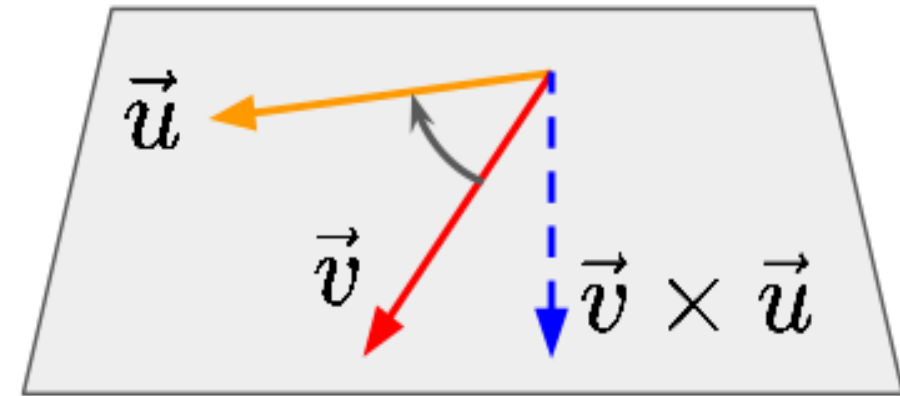
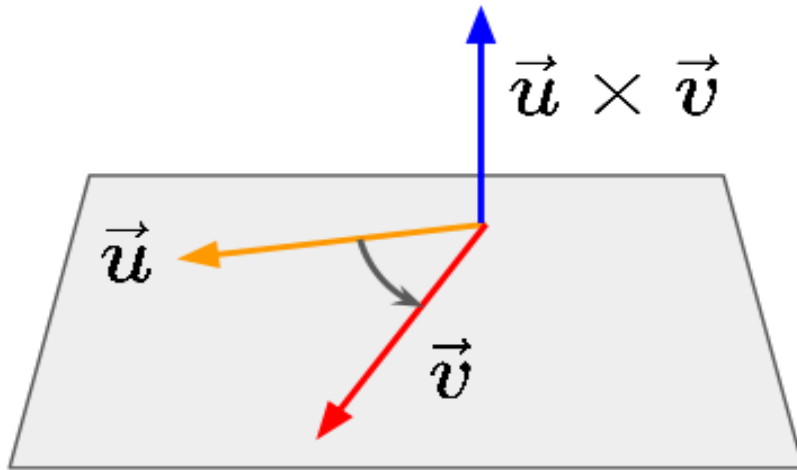
- Com vetores, apenas: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- Ou com escalar: $a. (\vec{u} \times \vec{v}) = (a. \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (a. \vec{v})$

Relação entre o módulo do produto vetorial e o ângulo θ formado pelos:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|. |\vec{v}|. \textit{sen}\theta$$

Propriedades do produto vetorial: direção e sentido

Note que dois vetores definem um plano e o produto vetorial desses dois vetores, sempre, será perpendicular a esse plano:



- Regra da mão direita: polegar erguido e os 4 dedos curvados;
- 4 dedos curvados: ligam a extremidade do 1º com a extremidade do 2º vetor;
- Polegar: a direção e o sentido do produto vetorial;
- O produto vetorial é anticomutativo.

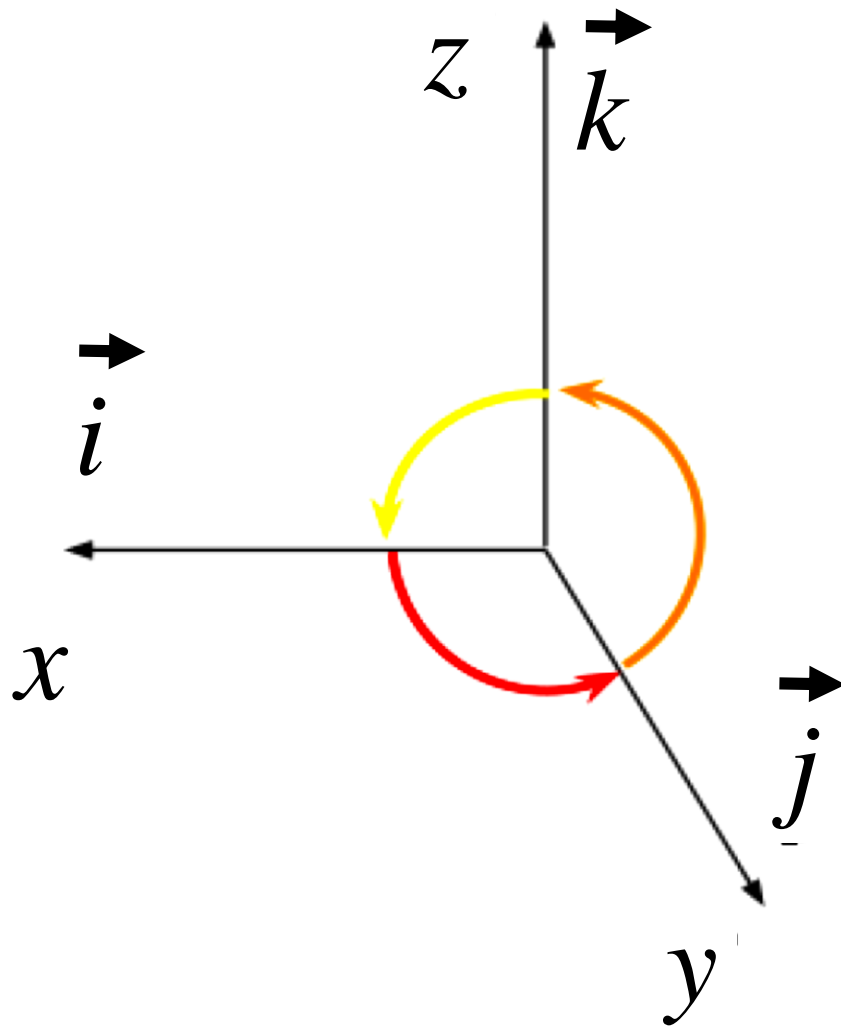
Propriedades do produto vetorial: versores

Aplicando a regra da mão direita para os versores da base canônica, que determinam a direção e sentido dos eixos cartesianos:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$



Aplicações do produto vetorial

Cálculo da área de polígonos dos tipos paralelogramo e triângulo:

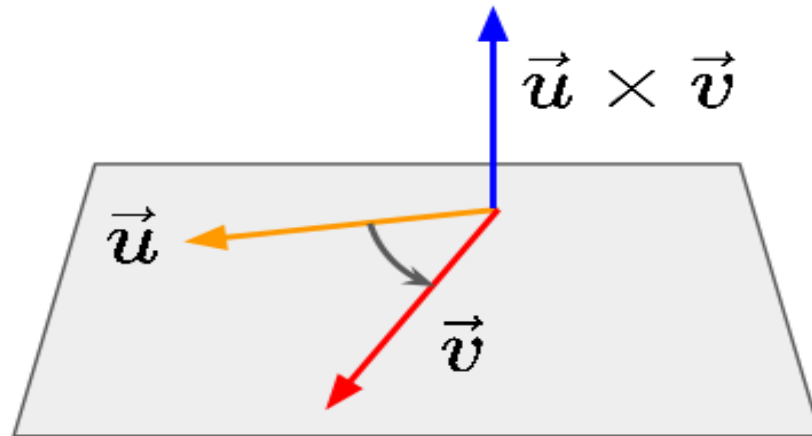
- Utilizados em computação gráfica e no desenvolvimento de jogos eletrônicos.

Cálculo da normal à superfície desses polígonos:

- Permite a criação de efeitos de iluminação dos polígonos, tornando a imagem mais realista.

O termo “normal” refere-se a um ângulo de 90° :

- Dois vetores são ditos normais se há, entre eles, um ângulo de 90° ;
- Produto vetorial produz um vetor normal ao plano dos vetores envolvidos.



Cálculo da área de um paralelogramo

- Sejam dois vetores \vec{u} e \vec{v} não paralelos.
- Esses vetores definem um paralelogramo.

A área “A”, desse paralelogramo, é igual ao módulo do produto vetorial dos vetores:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

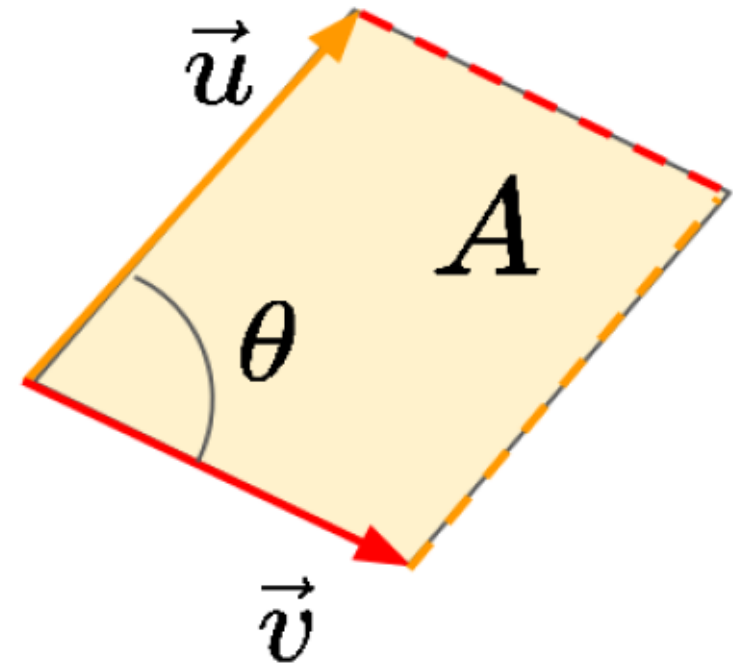
- Módulo: tamanho ou comprimento de um vetor.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}\theta$$

$$\theta = ? \therefore A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

θ é conhecido:

$$A = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}\theta$$

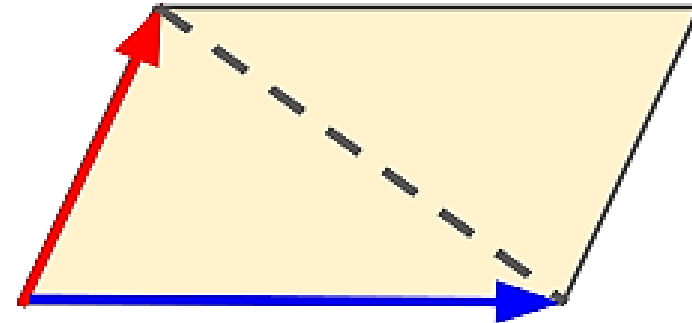


Cálculo da área de um triângulo

- Área de triângulos: extensão do cálculo da área de paralelogramos usando produto vetorial.
- Um triângulo, nada mais é, do que a metade de um paralelogramo.

Área “A” de um triângulo determinado por dois vetores \vec{u} e \vec{v} :

$$A = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$$



- Lembrando: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}\theta$

Se o ângulo entre os vetores é conhecido, a área do triângulo é:

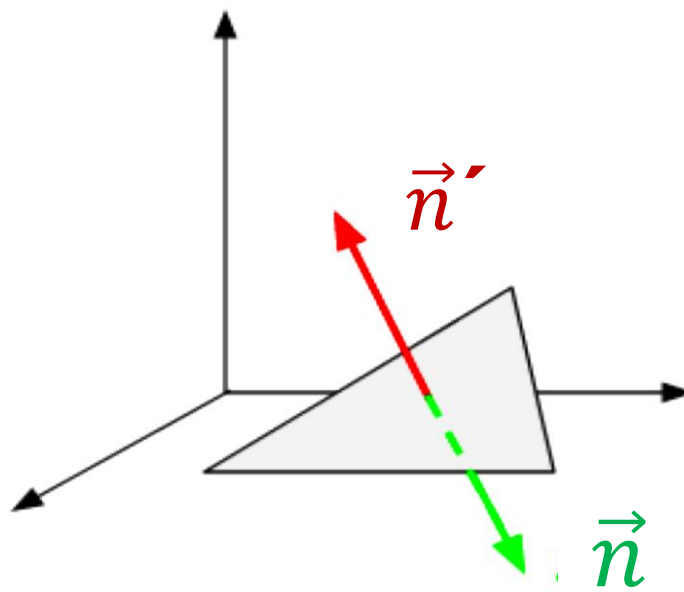
$$A = \frac{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}\theta}{2}$$

Vetor normal a uma figura plana determinada por dois vetores

- Considere uma figura plana, ou seja, bidimensional, definida por dois vetores.
- Um vetor normal ao plano definido pelos dois vetores e, conseqüentemente, à figura plana determinada pelos dois vetores, é dado pelo produto vetorial dos dois vetores.

Há dois sentidos possíveis e, portanto, dois vetores normais possíveis:

- Os vetores normais \vec{n} e \vec{n}' .



Vetor normal a uma figura plana determinada por dois vetores

- Considere uma figura plana definida por dois vetores $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$

Usando a regra da mão direita:

- O resultado do produto vetorial $\vec{v} \times \vec{u}$ é o vetor \vec{n} ;
- O resultado do produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é o vetor \vec{n}' .

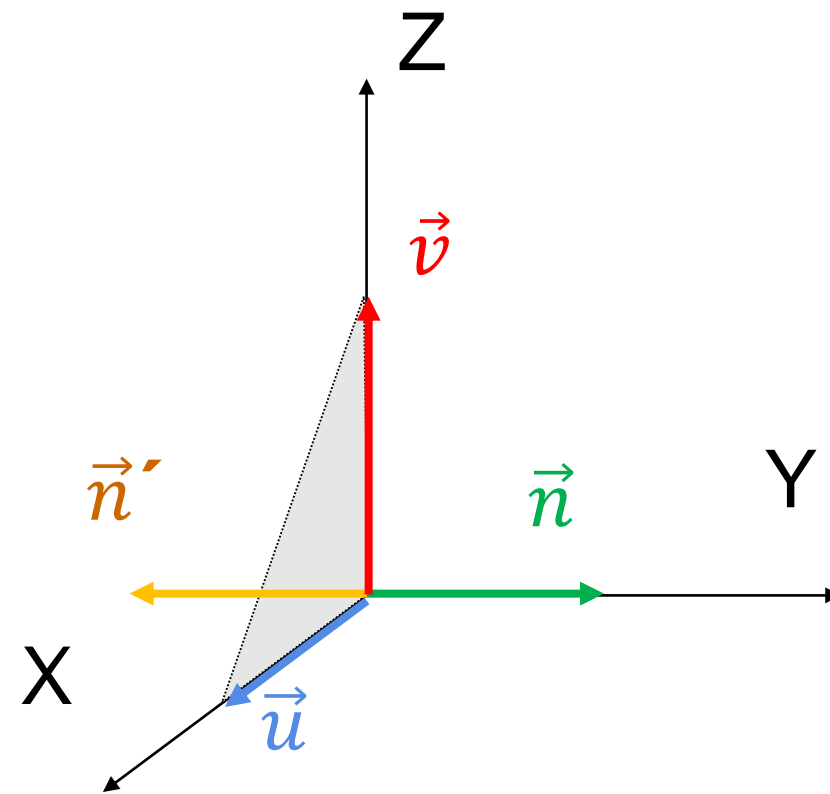
Lembrando:

O produto vetorial é anticomutativo:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

Logo:

$$\vec{n}' = \vec{n}$$



Interatividade

Assinale a alternativa correta sobre o produto vetorial de dois vetores:

- a) Produz um vetor que forma 60° com o plano formado pelos vetores.
- b) Produz um vetor normal com o plano formado pelos vetores.
- c) A regra da mão direita define o módulo do vetor normal.
- d) A ordem dos vetores não influi no produto vetorial.
- e) Só é possível se os vetores forem paralelos.

Resposta

Assinale a alternativa correta sobre o produto vetorial de dois vetores:

- a) Produz um vetor que forma 60° com o plano formado pelos vetores.
- b) Produz um vetor normal com o plano formado pelos vetores.**
- c) A regra da mão direita define o módulo do vetor normal.
- d) A ordem dos vetores não influi no produto vetorial.
- e) Só é possível se os vetores forem paralelos.

ATÉ A PRÓXIMA!