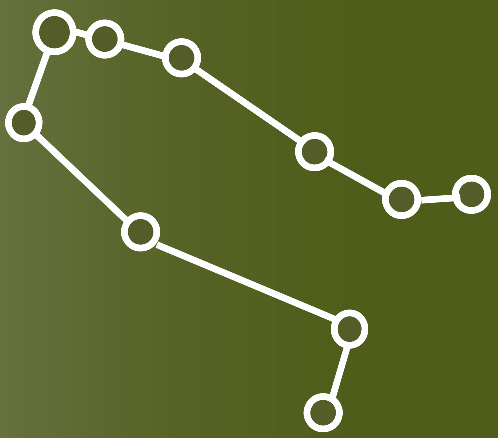
capítulo 2

Modelos de Aplicação



2.1 Exemplos de Aplicação dos Modelos em Grafos

A modelagem em grafos pode ser utilizada em uma enorme gama de aplicações, tanto no que concerne à solução de problemas práticos (do mundo real), como para aplicações na matemática discreta. Entre as aplicações destacam-se, classicamente, as seguintes:

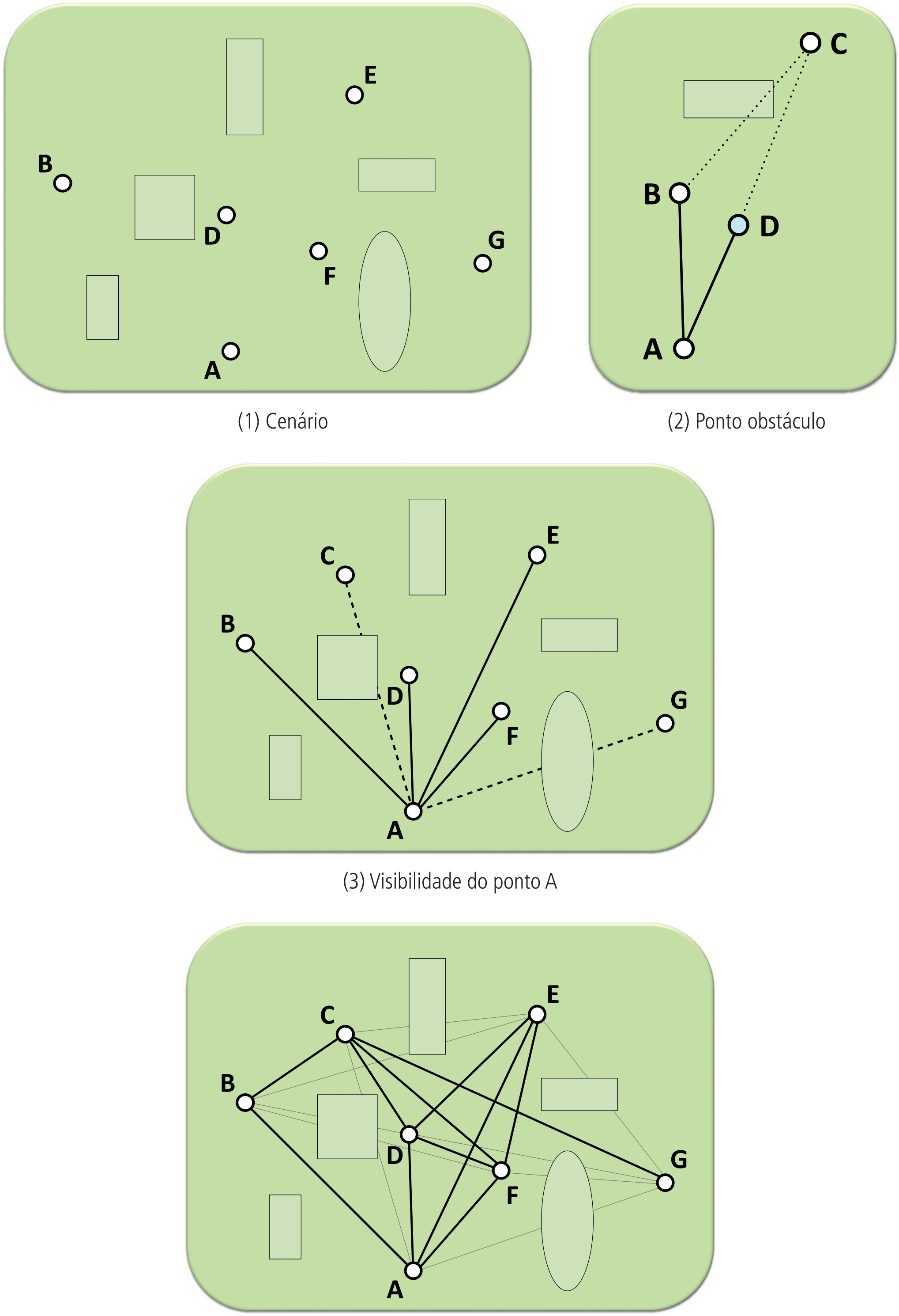
- Mapas, especialmente os rodoviários, de rotas aéreas e os ferroviários.
- Representações geométricas, como as pertinentes às estruturas moleculares e à identificação de componentes químicos.
- Modelagem dos pontos de articulação de estruturas móveis.
- Sistemas de transporte, como redes ferroviárias e metrôs.
- Representações de estruturas hierárquicas, como árvores genealógicas e organogramas de administração.
- Representação de estruturas de relacionamentos sociais.
- Manufaturas para a representação de rotas ou fluxo de materiais.
- Inúmeros modelos de programação matemática representando atribuição de tarefas ou facilidades, localização de facilidades, roteamento de veículos, empacotamento e carregamento de veículos, atribuição de frequências, projeto de redes de água, eletricidade, computacionais.
- Computação gráfica.
- Arquitetura.
- Genética.
- Compondo as Redes Pert-CPM e o planejamento de projetos.

Este item vai apresentar algumas aplicações gerais de modelagem, e em cada capítulo serão apresentadas aplicações específicas.

Grafo de Visibilidade

Uma utilização do modelo de grafos pode ser encontrada no tratamento da representação da visibilidade, com aplicações em Robótica e Geometria. Considerando-se um grafo $G = (N,M)$ no qual os vértices representam posições de observação e as arestas (i,j) marcam se o vértice i enxerga o vértice j. A Figura 2.1(1) mostra a planta de um cenário em que os pontos de observação são representados pelos pequenos círculos. Uma aresta pontilhada ligando dois pontos de observação implica que não existe visibilidade entre esses pontos. As linhas contínuas representam a situação contrária. A Figura 2.1(2) mostra uma situação em que os próprios pontos de observação representam obstáculos.

A Figura 2.1(3) mostra a visibilidade do vértice A em relação ao grafo da Figura 2.1(1). Assim, o ponto A pode ver os pontos B, D e F, e não pode ver os pontos C, E e G. Eventualmente, os pontos de visibilidade poderão ser considerados transparentes. Nesse caso, somente as barreiras seriam obstáculos para a visão. Com base nas regras anteriores, a Figura 2.1(4) exibe o grafo de visibilidade do problema. No exemplo, nenhum ponto de observação impede a visão de outro ponto de observação, podendo-se desconhecer se o ponto é ou não transparente.



(1) Cenário

(2) Ponto obstáculo

(3) Visibilidade do ponto A

(4) Grafo de visibilidade

Figura 2.1 Formação de um grafo de visibilidade

Grafo de Discos

Dados n pontos distribuídos em um plano e uma unidade de distância r, um grafo de disco $\overset{o}{G}$ é obtido considerando-se que os n pontos formam o conjunto N e que existe a aresta (i,j) se o ponto j está localizado dentro de um circulo de raio r traçado a partir de i, como ilustra a Figura 2.2(1). Se a distância r é única, independentemente do vértice examinado, o grafo é não direcionado. A Figura 2.2(1) mostra o processo de criação do grafo. A Figura 2.2(2) mostra o grafo não direcionado relativo à Figura 2.2(1).

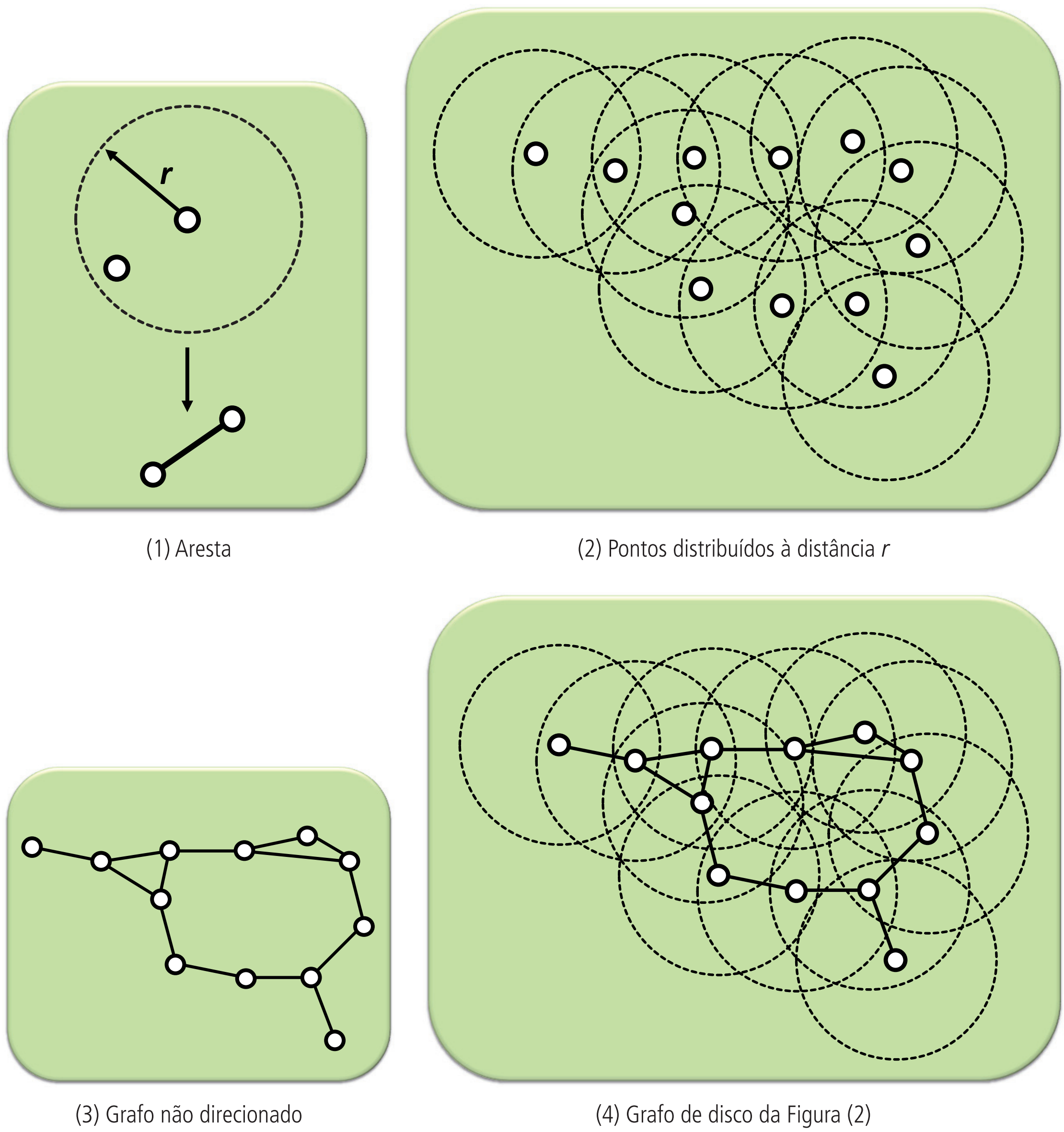
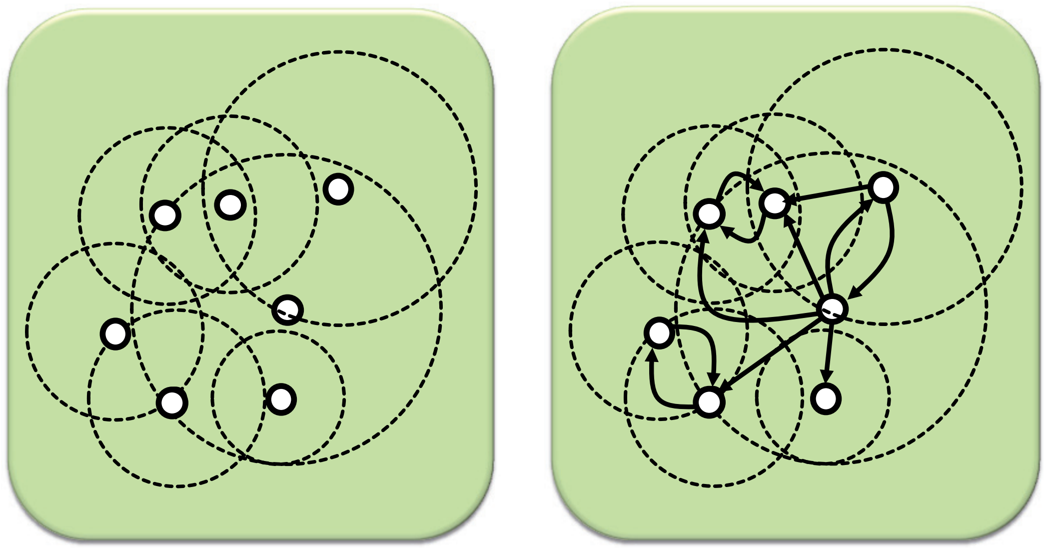


Figura 2.2 Construção de um grafo de discos

A Figura 2.3(1) exemplifica uma situação em que diferentes raios são possíveis. Os arcos têm origem no ponto do centro do disco e extremidade nos pontos que se localizam dentro do disco, como mostra a Figura 2.3(2).



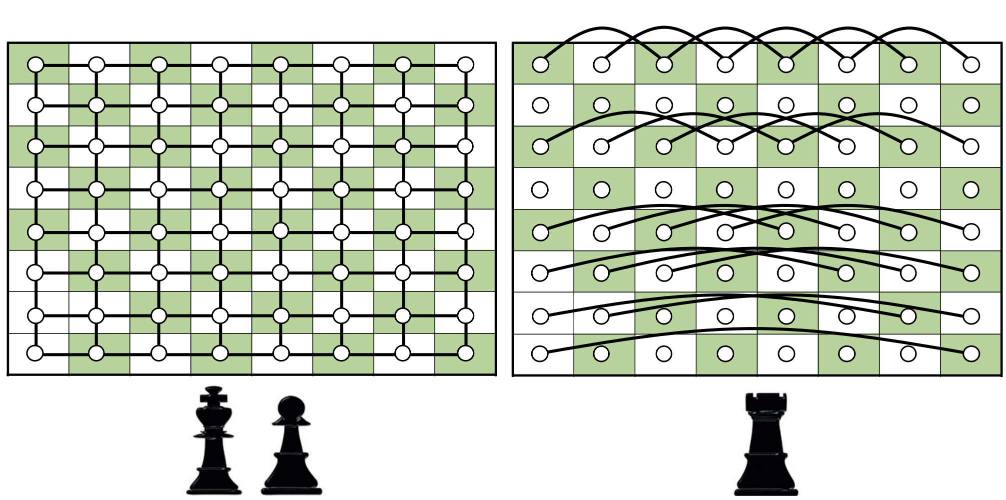
(1) Discos com tamanho variável (2) Grafo de discos direcionado

Figura 2.3 Construção de um grafo de discos de diferentes diâmetros

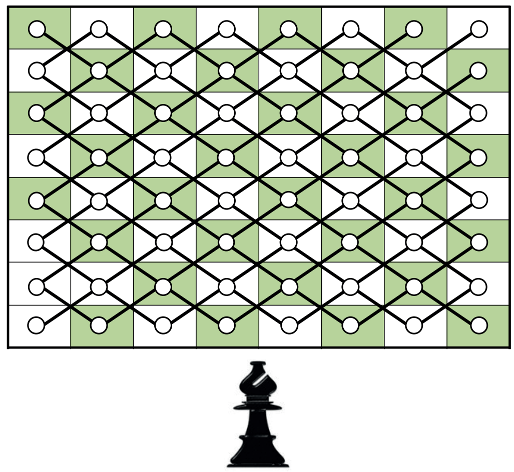
Grafo de Xadrez

Grafo de xadrez é um grafo que representa os movimentos válidos de determinada peça do jogo de xadrez. A Figura 2.4(1) apresenta o grafo dos movimentos válidos para o rei e o peão. Os movimentos válidos serão representados pelas arestas do grafo. Os vértices representarão a posição da peça nas casas do tabuleiro. Como o peão e o rei atacam apenas casas vizinhas em linhas e colunas, o grafo de seus movimentos é também chamado **grafo grade.** A Figura 2.4(2) representa parte do grafo de movimentos de uma torre. A torre pode percorrer as linhas e colunas do tabuleiro sem restrição na extensão dos movimentos. Ou seja, dado que a torre ocupa uma casa do tabuleiro, ela pode se deslocar para qualquer casa na mesma linha ou coluna da casa. Portanto, a torre possui os mesmos movimentos do peão e rei (grafo 2.4(1)), acrescidos dos movimentos de deslocamento mais amplo, em linhas e colunas, que é representado na Figura 2.4(2). A Figura 2.4(2) exibe as possibilidades de arestas de uma linha do tabuleiro para a movimentação da torre. As arestas estão traçadas ao longo de seis linhas para facilitar a visualização, permitindo intervalos entre os traçados. O grafo que modela o movimento de uma torre é um grafo grade que possui, adicionalmente, as arestas exemplificadas na Figura 2.4(2) para todas as linhas e colunas do grafo.

A Figura 2.4(3) exibe os movimentos de vizinhança para o bispo.



(1) Grafo xadrez-rei e peão (2) Complemento para o grafo xadrez-torre



Sugere-se ao leitor, como exercício, que determine os grafos de movimentos do **cavalo** e da **rainha**.

(3) Grafo dos movimentos de vizinhança do bispo

Figura 2.4 **Grafo xadrez – movimentos rei, peão e torre**

Grafo de Estado

Um **grafo de estado** representa o **espaço de estados** de um sistema e exibe **como esses estados se relacionam**. O conjunto de vértices do grafo de estado está normalmente associado às configurações do sistema, que também são denominadas ***estados***. O estado de um sistema pode ser compreendido também como uma dada **atribuição de valores** para as suas **variáveis livres**. Em um grafo de estado, o conjunto de arestas indica as alternativas (ou caminhos) possíveis para executar uma transformação nas configurações do sistema. Os vértices representam essas configurações. Por exemplo, em um grafo de estado, uma aresta pode representar a possibilidade de movimentar uma peça em um tabuleiro. Os tabuleiros, antes e depois de a peça ser movimentada, representam possíveis estados do grafo ou seus vértices.

Observe que uma transformação na configuração do sistema não obrigatoriamente determina a alteração do estado do sistema. Um grafo de estado pode também modelar um processo de decisão. Nesse caso, cada vértice do grafo representa o resultado de certa decisão, enquanto as arestas modelam a forma de transformação sofrida pela decisão anterior para transformá-la na decisão corrente.

A Figura 2.5 exemplifica os elementos envolvidos em um grafo de estado. As mudanças de configurações / decisões (1-2) e (2-3) não modificam o estado 1. A mudança ocorre na alteração (3-4).

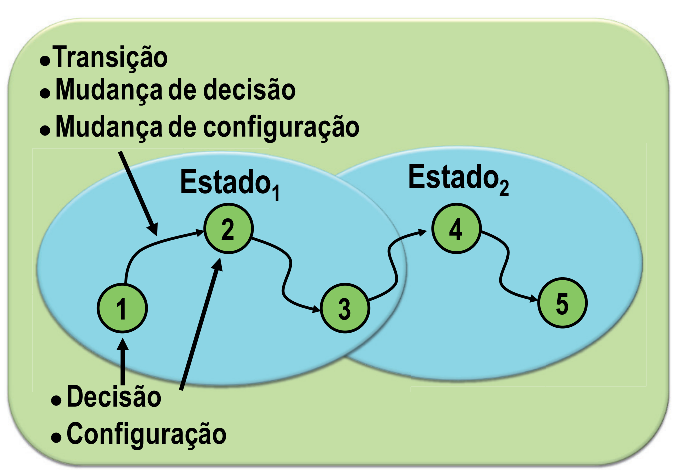


Figura 2.5 **Evolução de um grafo de estados**

▶ Exemplo 1 – Um Grafo de Estado para a Solução de um Problema de Lógica

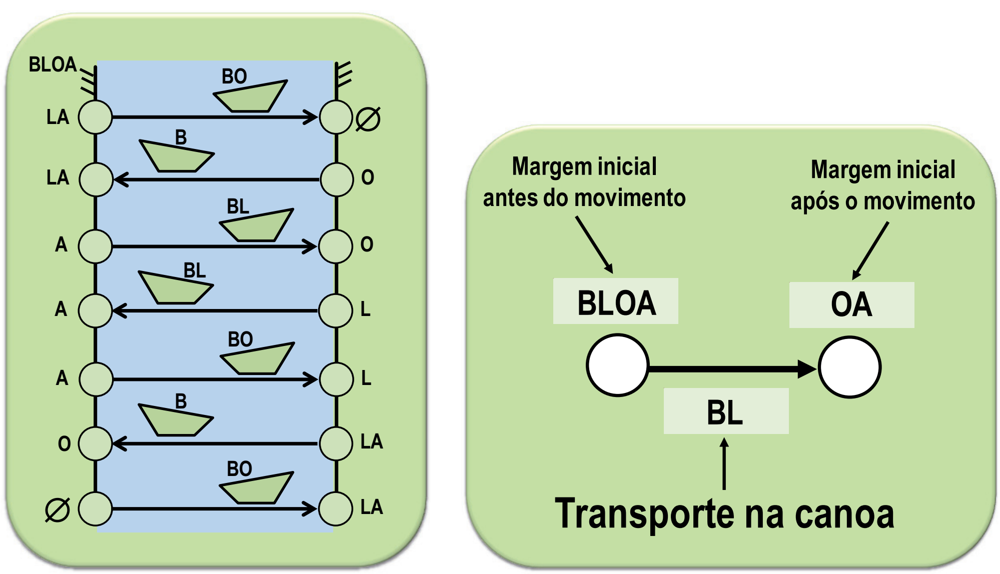
O problema:

Um barqueiro recebeu a empreitada de atravessar em sua canoa de dois lugares uma ovelha, um lobo e um pacote de alface. O barqueiro será pago tão logo faça o transporte e entregue a encomenda do outro lado do rio. Se o lobo permanecer em alguma das margens sozinho com a ovelha, fatalmente a devorará. Por outro lado se a ovelha permanecer sozinha com o pacote de alface, o comerá. Em nenhuma das margens o barqueiro pode contar com alguém que o possa ajudar vigiando os animais. Como programar a travessia de modo que a carga seja transportada em segurança?

A modelagem:

Considerando (B) o rótulo para representar o **barqueiro**, (L) o rótulo para representar o **lobo**, (A) o rótulo para representar o **pacote de alface** e (O) o rótulo para representar a **ovelha**, pode-se interpretar o problema como sugere o esquema de movimentos da Figura 2.6.

A Figura 2.6(1) exibe a solução do problema. O problema inicia com todos em uma margem e termina com todos na outra. Em nenhum momento, em nenhuma margem, o lobo e a ovelha (LO) ficam sozinhos ou a ovelha com a alface (AO). Todavia, com o esquema da Figura 2.6(1), qual seria a necessidade de um grafo para solucionar o problema? Então, considere um grafo de movimentos cujos vértices representam a população da margem inicial e as arestas representam as viagens na canoa, como exemplifica a Figura 2.6(2).



(1) A solução do problema (2) O modelo do grafo

Figura 2.6 Elementos de modelagem do problema do barqueiro

Com base nessa formulação, é possível organizar um grafo, como mostra a Figura 2.7, que analisa parte das opções de movimento do problema e controla a margem inicial do problema.

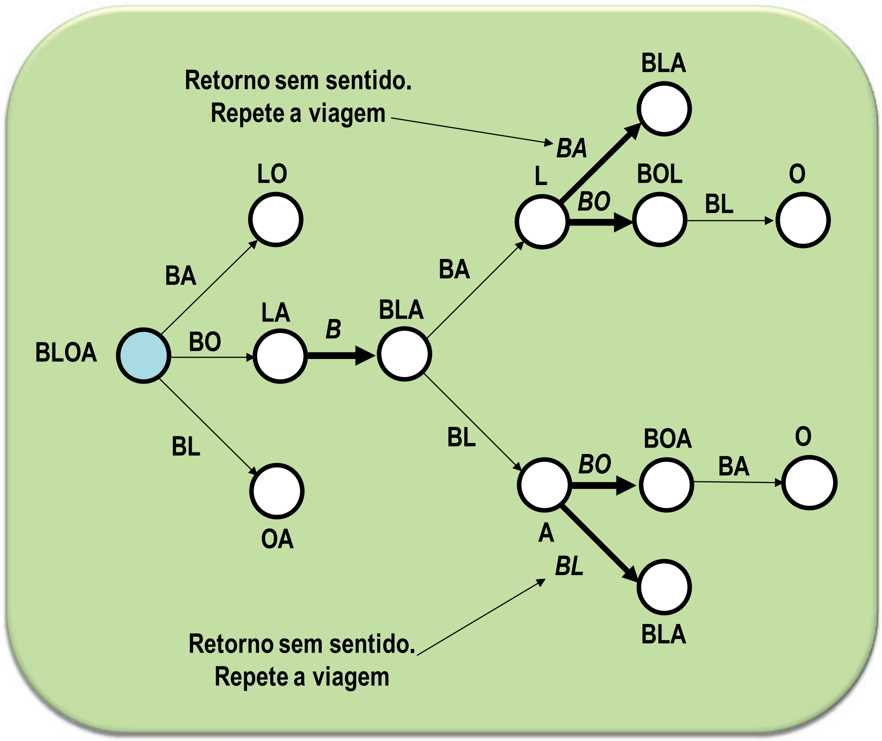


Figura 2.7 **Grafo de estado parcial do problema do barqueiro – margem inicial**

Observe que os movimentos de retorno à margem inicial foram representados através de arestas reforçadas. O problema será solucionado quando a margem inicial ficar vazia, ou seja, um vértice vazio for alcançado no desenvolvimento do grafo. Como o grafo não necessita explorar movimentos que implicam violação das regras de segurança nas margens ou repetem operações, o grafo da Figura 2.7 pode ser reduzido ao grafo da Figura 2.8.

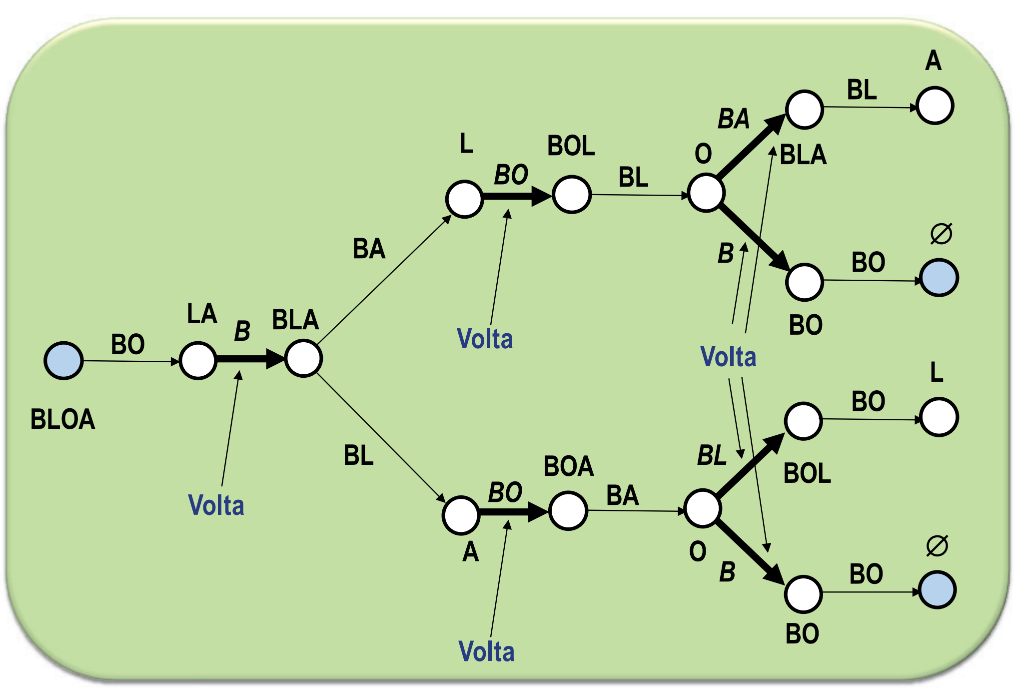


Figura 2.8 **Grafo de movimentos do problema do barqueiro – margem inicial**