EAD

EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UNIDADE I

Geometria Analítica

Prof. Me. Rene Ignácio

Apresentação

- Veremos os elementos básicos de Geometria Analítica.
- Necessários para estudos de Álgebra Linear e importantes em diversas áreas da Ciência da Computação:
- Computação Gráfica e modelos preditivos em *Machine Learning*.
- Vetores são fundamentais em computação gráfica e jogos eletrônicos.
- As imagens digitais são formadas a partir de pontos, retas e polígonos.
- Para efeitos realísticos, precisamos saber a orientação desses polígonos.
- Em animações, devemos manter o aspecto dos objetos para que o movimento seja o mais real possível.

- É necessário o domínio das propriedades e operações vetoriais em espaços bidimensionais e tridimensionais.

Introdução

- Nesta unidade I, veremos:
- a definição e as propriedades dos vetores;
- as operações com vetores (adição de vetores e multiplicação de vetor por escalar);
- o tratamento algébrico dos vetores.

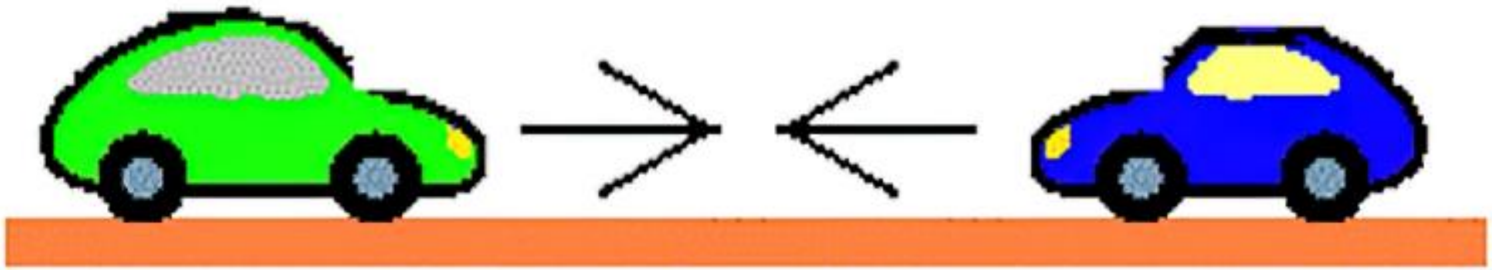
- Mas, antes precisamos fazer uma distinção entre duas grandezas.

Grandeza escalar

- É aquela que fica totalmente definida utilizando apenas um número (que pode ser positivo ou negativo) e uma unidade de medida:
- A massa de um objeto, o preço de um produto e o tempo gasto em um deslocamento entre dois pontos, temperatura, comprimento, área, energia e volume são exemplos de grandezas escalares.
- Comprimento da rua = 1500 m
- Área do jardim = 120 m^2
- Temperatura = -15 °C
- Altura de uma pessoa = 1,80 m

Grandeza vetorial

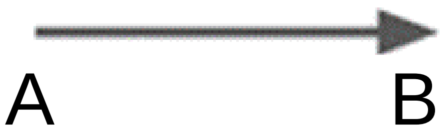
- São aquelas que precisam de intensidade (ou módulo), direção e sentido.
- Intensidade ou módulo é a parte numérica.
- Se fornecermos apenas a intensidade de uma grandeza vetorial, não estamos descrevendo essa grandeza totalmente.
- Velocidade e força são exemplos de grandezas vetoriais.
- Quando falamos de velocidade, devemos expressar a sua intensidade, a sua direção e o seu sentido, como, por exemplo, 60 km/h, na pista da marginal e no sentido oeste.
- Dois carros em uma mesma rua reta, vindo um de encontro ao outro, caminham na mesma direção e com sentidos opostos.



Fonte: acervo pessoal

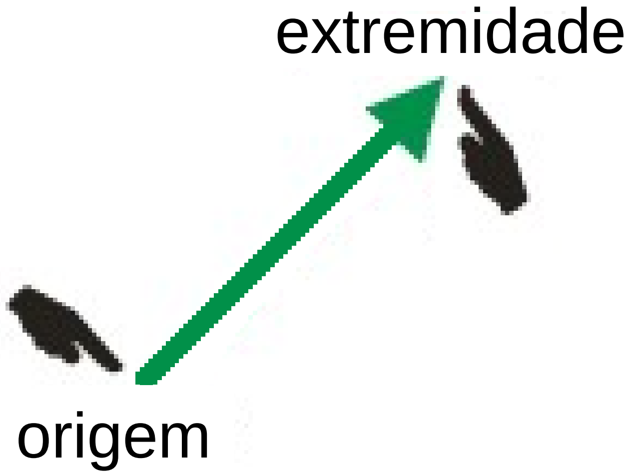
Segmento orientado 1

- Definimos o segmento orientado AB pelo par ordenado (A,B), em que A representa a origem do segmento e B representa a sua extremidade:



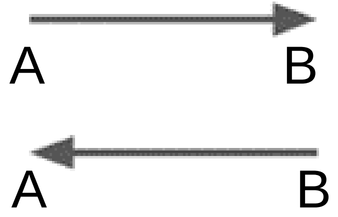
- Definimos o segmento orientado BA pelo par ordenado (B,A), em que B representa a origem do segmento e A representa a sua extremidade:

- Vetor é um segmento de reta orientado, com origem e extremidade:

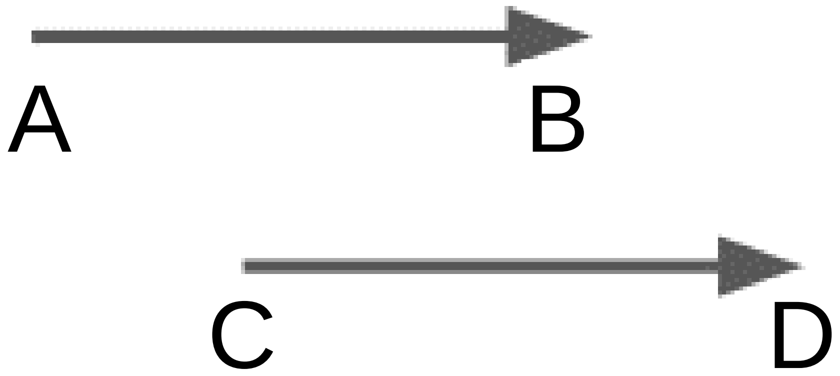


Segmento orientado 2

- Podemos ter um segmento orientado em que a origem e a extremidade coincidem (A,A), por exemplo. Esse tipo de segmento é chamado de segmento nulo.
- Dois segmentos orientados têm o mesmo comprimento quando os segmentos de reta definidos por sua origem e por sua extremidade têm comprimentos iguais.

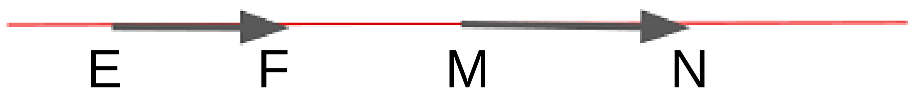


- Dois segmentos orientados são paralelos quando eles têm a mesma direção:
  os segmentos orientados (A,B) e (C,D) são paralelos, pois têm mesma direção.

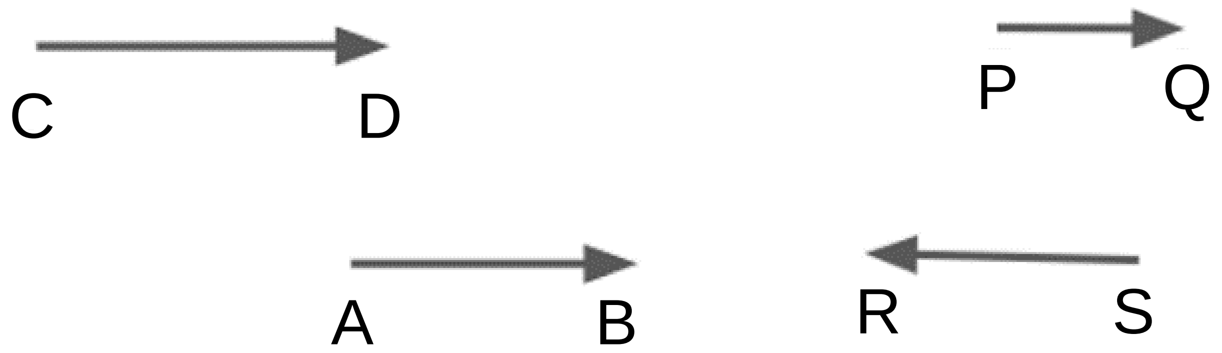


Segmento orientado 3

- Dois segmentos orientados são colineares se eles estão sobre uma mesma reta: os segmentos (E,F) e (M,N) são colineares.

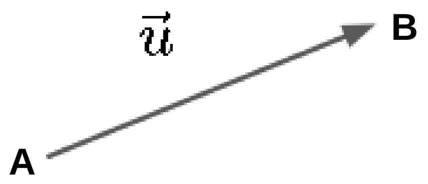


- Os segmentos orientados ainda podem ser classificados em segmentos orientados de mesmo sentido e segmentos orientados de sentidos opostos:
- Os segmentos orientados (C,D) e (A,B) têm o mesmo sentido.
- Os segmentos orientados (P,Q) e (S,R) têm sentidos opostos.



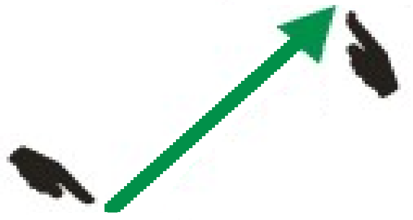
Vetor: definição

- Um vetor $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados (A,B) com mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.
- A notação de um vetor pode ser feita a partir dos pontos de origem e de extremidade, com uma seta por cima, que indica a característica vetorial.
- Um vetor também pode ser indicado por uma única letra minúscula: $\vec{u}$.
- O vetor $\overrightarrow{AB}$ tem como origem o ponto A e como extremidade o ponto B:



- Vetor é um segmento orientado com origem e extremidade:

extremidade



origem

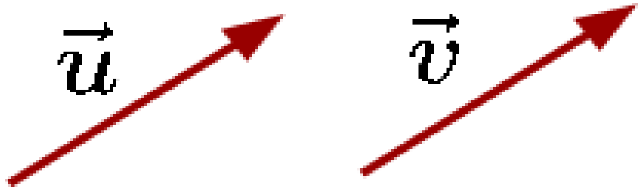
Propriedades dos vetores 1

- Dado o vetor: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
- O vetor oposto ao vetor $\vec{u}$: $-\vec{u} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
- O módulo (tamanho ou comprimento) de um vetor é indicado por: $|\vec{u}|$.
- Vetor é unitário e tem módulo igual a 1, ou seja, para que $\vec{u}$ seja unitário, $|\vec{u}| = 1$.
- Seja $\vec{v}$ um vetor de módulo qualquer.
- O versor de $\vec{v}$ é o vetor que tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$, mas com módulo igual a 1.
- O versor de $\vec{v}$, denotado por $\hat{v}$, é calculado por:

  - $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

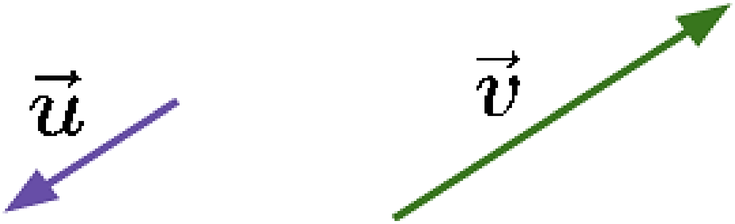
Propriedades dos vetores 2

- Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são iguais se eles têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido:



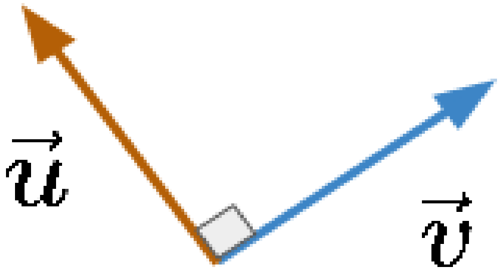
$$\vec{u} = \vec{v}$$

- Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se eles têm a mesma direção. Exemplo de dois vetores paralelos, mas em sentidos opostos:



$$\vec{u} // \vec{v}$$

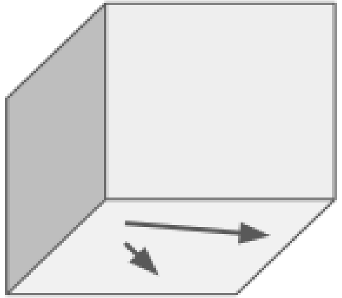
- Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais ou perpendiculares quando há o ângulo de 90º entre eles:



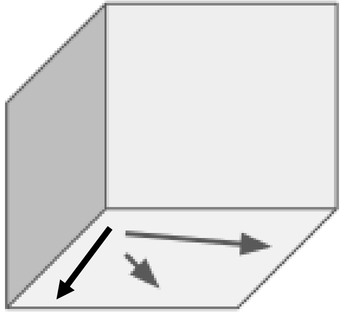
$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

Propriedades dos vetores 3

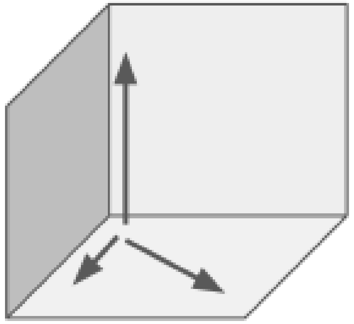
- Dois vetores sempre estão contidos em um mesmo plano:



- Dois vetores definem um plano, logo os vetores são sempre coplanares dois a dois.
- Três ou mais vetores podem ser classificados, quanto à sua orientação, em coplanares, quando estão contidos em um mesmo plano:

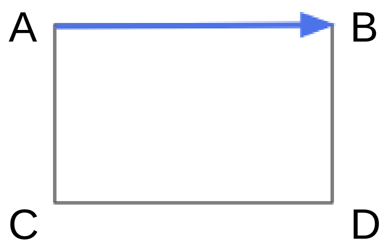


- e não coplanares, quando isso não ocorre:

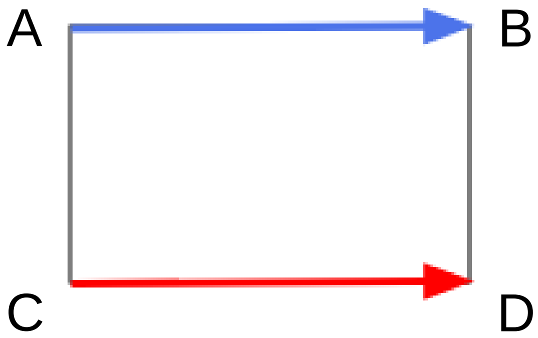


Exemplo 1

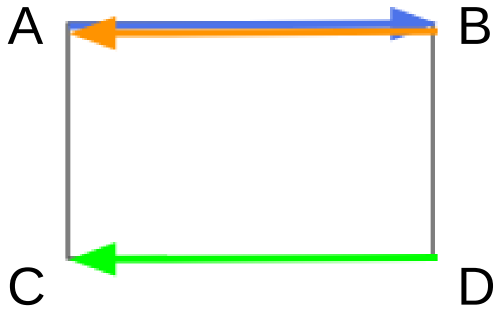
- Quais vetores são paralelos ao vetor $\overrightarrow{AB}$?



- Os vetores paralelos ao vetor $\overrightarrow{AB}$ são os que têm a mesma direção de $\overrightarrow{AB}$, mas podem ter o mesmo sentido ou sentido oposto ao vetor $\overrightarrow{AB}$.
- O vetor $\overrightarrow{CD}$ é paralelo e tem o mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$:



- Os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{DC}$ são paralelos a $\overrightarrow{AB}$, mas com sentidos opostos a ele.



Interatividade

Podemos afirmar que o versor do vetor $\overrightarrow{AB}$:

a) Tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$, e módulo igual a 1.
b) Tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$, e módulo maior que 1.
c) Tem a mesma direção, o mesmo sentido e mesmo módulo de $\overrightarrow{AB}$.
d) Não tem a mesma direção, mas tem o mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$ e módulo diferente de 1.
e) Não tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$, mas o módulo é igual a 1.

Resposta

Podemos afirmar que o versor do vetor $\overrightarrow{AB}$:

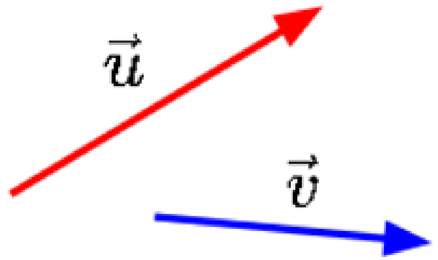
a) Tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$, e módulo igual a 1.
b) Tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$, e módulo maior que 1.
c) Tem a mesma direção, o mesmo sentido e mesmo módulo de $\overrightarrow{AB}$.
d) Não tem a mesma direção, mas tem o mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$ e módulo diferente de 1.
e) Não tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$, mas o módulo é igual a 1.

Adição de vetores

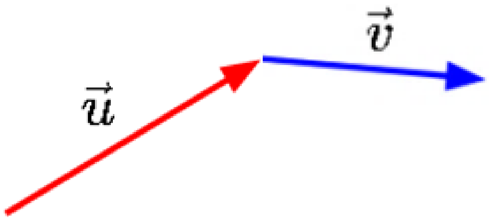
- <u>Regra do polígono:</u>
- Colocamos os vetores em sequência, alinhando a origem de um com a extremidade do outro;
- Traçamos o vetor soma a partir da origem do primeiro vetor da sequência até a extremidade do último vetor da sequência.
- <u>Regra do paralelogramo</u>:
- Conectar a origem de dois vetores;
- Traçar paralelas a esses dois vetores, formando um paralelogramo;
  - O vetor soma se inicia na origem dos dois vetores e tem a extremidade na ponta oposta do paralelogramo;
  - A regra do paralelogramo só permite somar vetores dois a dois.

Regra do polígono: exemplo 1

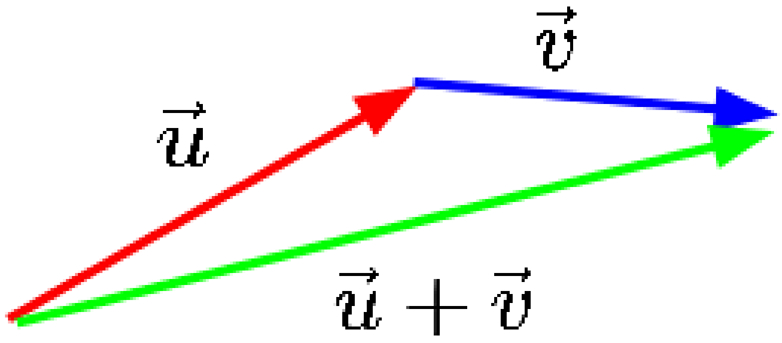
- A soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



- Regra do polígono:
- Colocamos os vetores em sequência, alinhando a origem de um com a extremidade do outro;

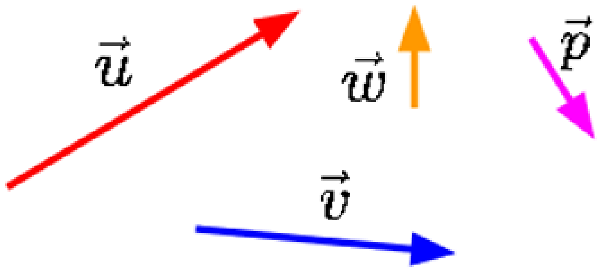


- Traçamos o vetor soma a partir da origem do primeiro vetor da sequência até a extremidade do último vetor da sequência.

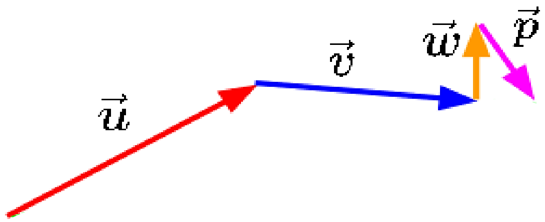


Regra do polígono: exemplo 2

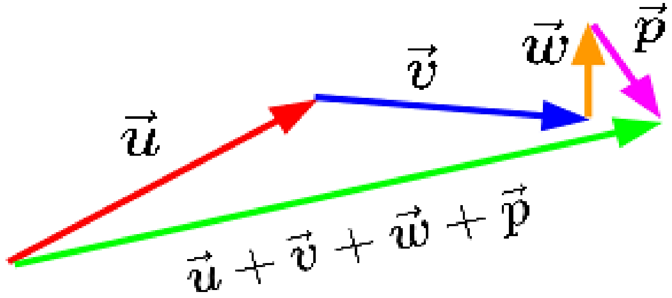
- Esse método pode ser aplicado para somar mais de dois vetores:



- <u>Regra do polígono</u>:
- Colocar os vetores em sequência, alinhando a origem de um com a extremidade do outro:

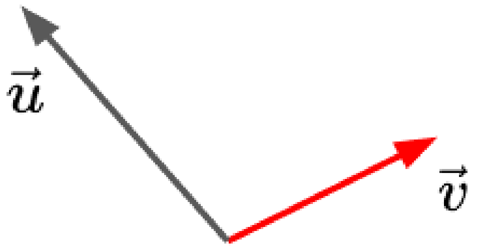


- Traçar o vetor soma a partir da origem do primeiro vetor até a extremidade do último vetor:

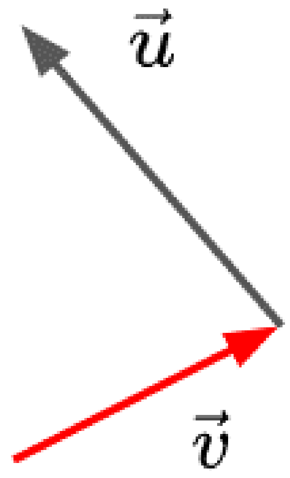


Regra do polígono: exemplo 3

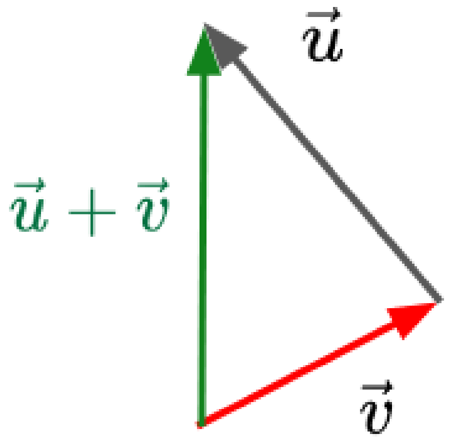
- Somar os dois vetores:



- Colocar os vetores em sequência, alinhando a origem de um com a extremidade do outro:



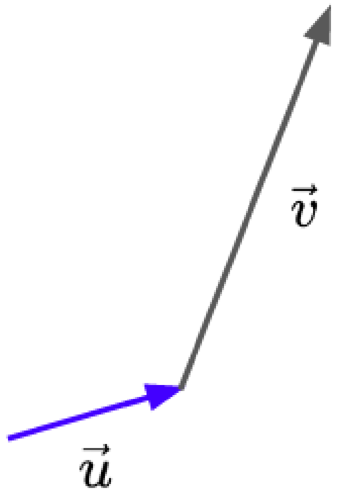
- Traçar o vetor soma a partir da origem do primeiro vetor até a extremidade do último vetor:



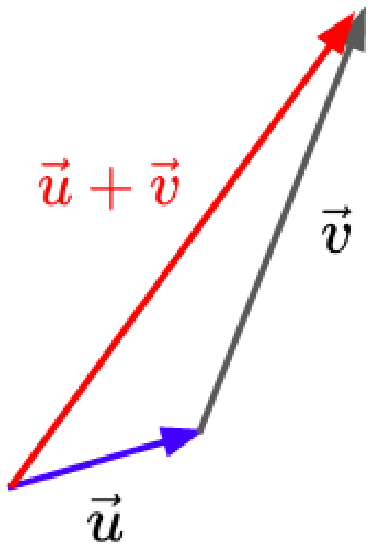
Regra do polígono: exemplo 4

- Somar os dois vetores:

- Colocar os vetores em sequência, alinhando a origem de um com a extremidade do outro:

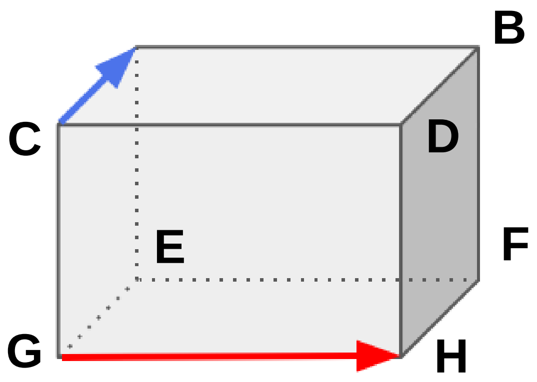


- Traçar o vetor soma a partir da origem do primeiro vetor até a extremidade do último vetor:

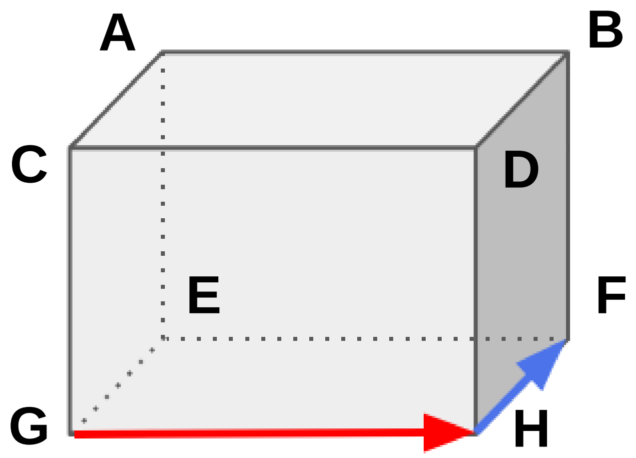


Regra do polígono: exemplo 5

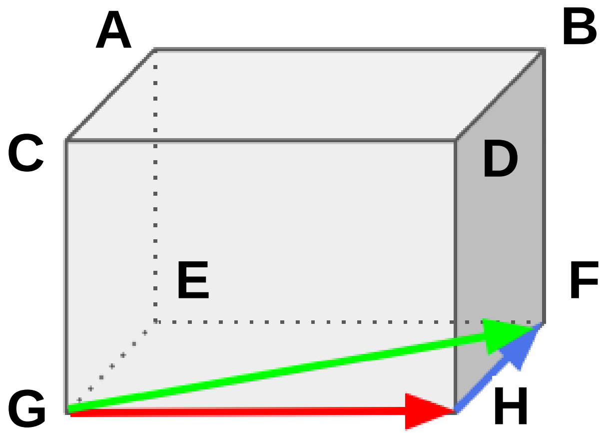
- Somar os vetores:



- Colocar os vetores em sequência, alinhando a origem de um com a extremidade do outro:

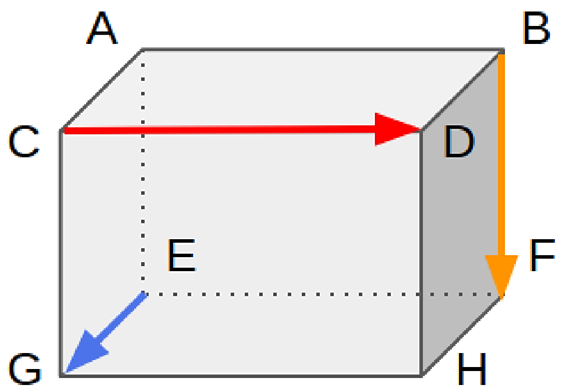


- Traçar da origem do primeiro vetor até a extremidade do último vetor:
- Vetor soma: $\overrightarrow{GF}$

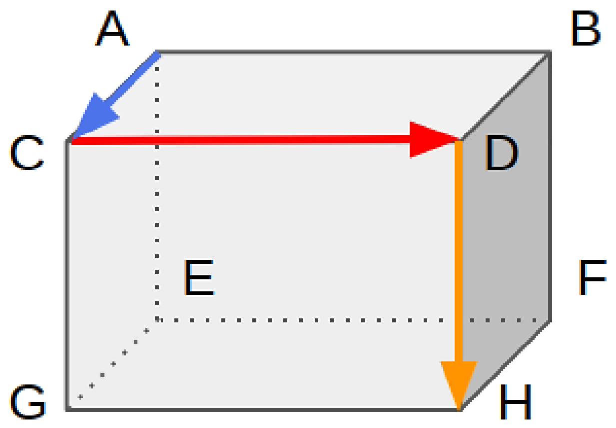


Regra do polígono: exemplo 6

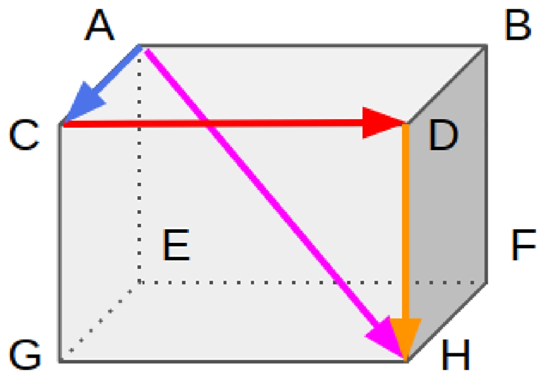
- Somar os vetores:



- Colocar os vetores em sequência, alinhando a origem de um com a extremidade do outro, de forma que eles continuem nas arestas do paralelogramo:

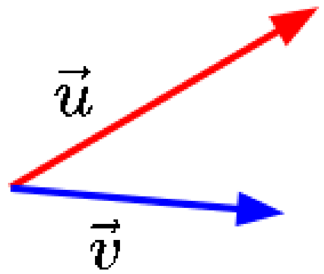


- Traçando da origem do primeiro vetor até a extremidade do último vetor:
- Vetor soma: $\overrightarrow{AH}$

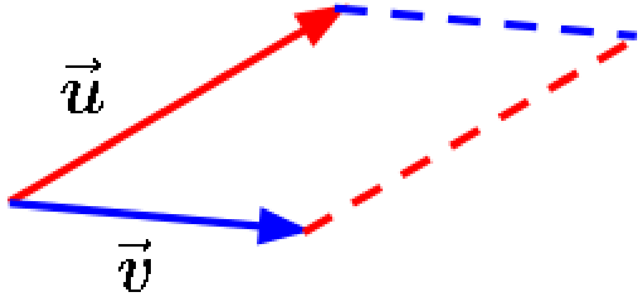


Regra do paralelogramo: exemplo 1

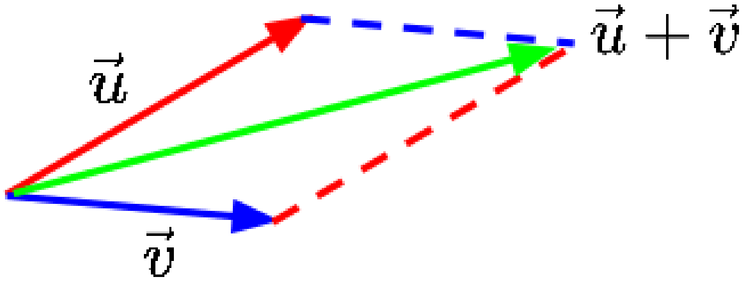
- Somar os vetores:



- Regra do paralelogramo:
- Conectar a origem de dois vetores;
- Traçar paralelas a esses dois vetores, formando um paralelogramo:

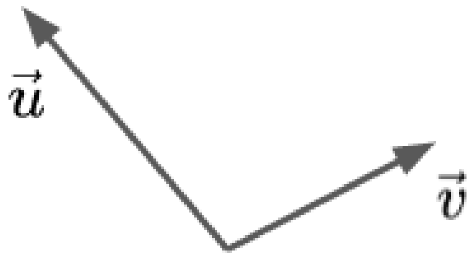


  - O vetor soma se inicia na origem dos dois vetores e tem a extremidade na ponta oposta do paralelogramo.
  - A regra do paralelogramo só permite somar vetores dois a dois!

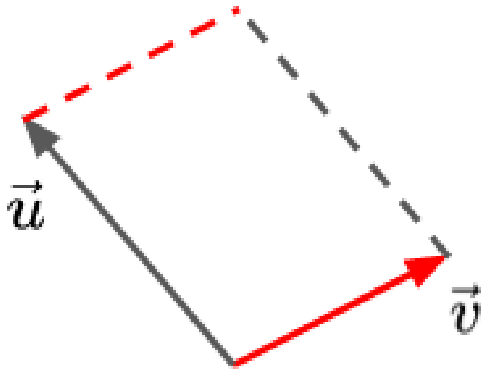


Regra do paralelogramo: exemplo 2

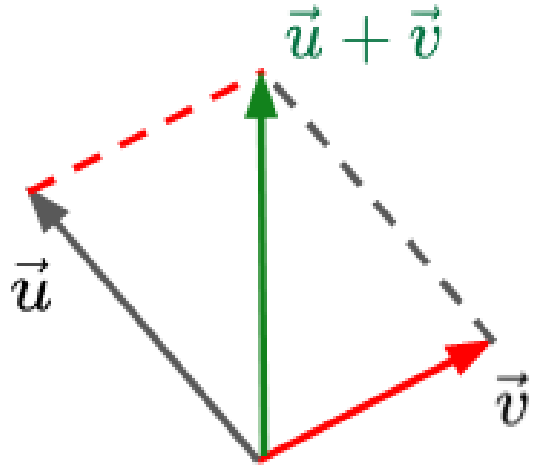
- Somar os vetores:



- <u>Regra do paralelogramo</u>:
- Conectar a origem de dois vetores;
- Traçar paralelas a esses dois vetores, formando um paralelogramo:



  - O vetor soma se inicia na origem dos dois vetores e tem a extremidade na ponta oposta do paralelogramo:



Propriedades da soma de vetores

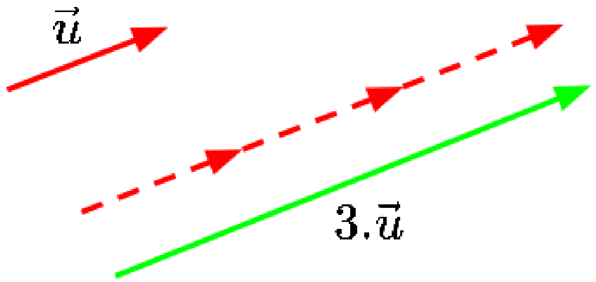
- Propriedade comutativa: a ordem da soma dos vetores não altera o resultado: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Propriedade de elemento neutro: a soma de um vetor nulo $\vec{0}$ a um vetor não altera o resultado: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- Propriedade do elemento oposto: na soma de um vetor com seu oposto, o resultado é o vetor nulo: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
- Propriedade associativa: a soma de mais de dois vetores é independente de quais vetores se iniciar o processo de soma:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

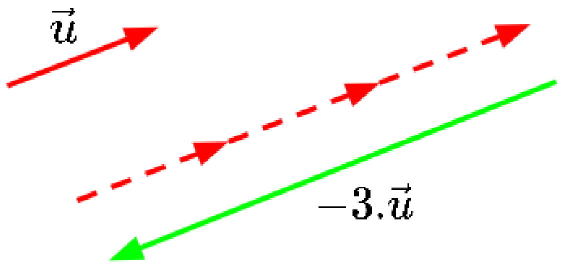
- Na soma de dois vetores, o resultado é o mesmo usando-se o método do paralelogramo ou o método do polígono.
- A regra do paralelogramo só permite somar vetores dois a dois!

Multiplicação de vetor por escalar

- O comprimento de um vetor é dado pelo seu módulo.
- Quando multiplicamos um vetor por um escalar (número), podemos alterar o seu módulo e o seu sentido, mas o resultado é sempre um vetor paralelo ao vetor original.
- A multiplicação do vetor $\vec{u}$ pelo escalar 3:



- Se o escalar é negativo, o vetor resultante da multiplicação tem sentido invertido:



- Para inverter o sentido de um vetor sem alterar seu módulo, basta multiplicá-lo por -1.

Propriedades da multiplicação de vetor por escalar

- Propriedade comutativa: a ordem da multiplicação não altera o resultado: $a.\vec{u} = \vec{u}.a$
- Propriedade de elemento neutro: um vetor multiplicado por 1 produz o mesmo vetor: $\vec{u}.1 = \vec{u}$
- Propriedade distributiva: a multiplicação de um escalar por uma soma de vetores é igual à soma da multiplicação desse escalar por cada vetor: $a.(\vec{u} + \vec{v}) = a.\vec{u} + b.\vec{v}$

Idem na multiplicação de um vetor por uma soma de escalares: $(a + b).\vec{u} = a.\vec{u} + b.\vec{u}$

- Propriedade associativa: o produto de mais de dois escalares por um vetor é independente de quais escalares se iniciar o processo de multiplicação: $(a.b).\vec{u} = a.(b.\vec{u})$

- Multiplicando um vetor por zero, o resultado será um vetor nulo: $\vec{u}.0 = \vec{0}$

Interatividade

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{0}$ (vetor nulo), assinale a alternativa **incorreta**:

a) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}.$

b) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$

c) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}.$

d) $a.\vec{u} = \vec{u}.a.$

e) $\vec{u}.1 = \vec{0}.$

Resposta

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{0}$ (vetor nulo), assinale a alternativa **incorreta**:

a) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$. (elemento neutro da soma)
b) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. (comutativa da soma)
c) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$. (elemento oposto)
d) $a.\vec{u} = \vec{u}.a$. (comutativa da multiplicação)
e) $\vec{u}.1 = \vec{0}$. (elemento neutro da multiplicação: $\vec{u}.1 = \vec{u}$)

Tratamento algébrico de vetores

- Representar um vetor graficamente ou partir de suas coordenadas em relação a uma base.
- Base: qualquer conjunto ordenado de vetores não paralelos.
- A base é utilizada para representar outros vetores.
- Exemplo: vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e uma base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, e um vetor $\vec{v} = a.\vec{v}_1 + b.\vec{v}_2$.

  As coordenadas do vetor $\vec{v}$, na base B, são (a, b).
- No plano XY, a base canônica é $B = \{\hat{x}, \hat{y}\}$.
  - No espaço XYZ, a base canônica é $B = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$.
  - Versor $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$: módulo unitário e conserva apenas a direção e o sentido do eixo ordenado.
  - O plano XY e o espaço XYZ são bases ortonormais (“normal” se refere a um ângulo de 90°).

Representação por versores

- Podemos representar a base canônica usando os versores i, j e k, que correspondem, respectivamente, à direção e ao sentido dos eixos x, y e z.
- Base canônica em <u>duas dimensões</u>: $B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$
  Vetor $\vec{v}$ bidimensional de coordenadas (a, b) no plano XY pode ser representado por:
  $\vec{v} = a.\vec{\imath} + b.\vec{\jmath} = a.\hat{x} + b.\hat{y} = (a, b)$
- Base canônica em <u>três dimensões</u>: $B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

- Vetor $\vec{v}$ tridimensional de coordenadas (a, b, c) no espaço XYZ pode ser representado por:

$$\vec{v} = a.\vec{\imath} + b.\vec{\jmath} + c.\vec{k} = a.\hat{x} + b.\hat{y} + c.\hat{z} = (a, b, c)$$

Representação por pontos

- Podemos definir um vetor a partir dos pontos que o limitam.
- Vetor $\vec{v}$ de origem no ponto $A = (a_1, a_2)$ e extremidade no ponto $B = (b_1, b_2)$ pode ser representado pela diferença das coordenadas desses pontos:
  "coordenadas do ponto da extremidade menos as do ponto da origem":

$$\vec{v} = B - A = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

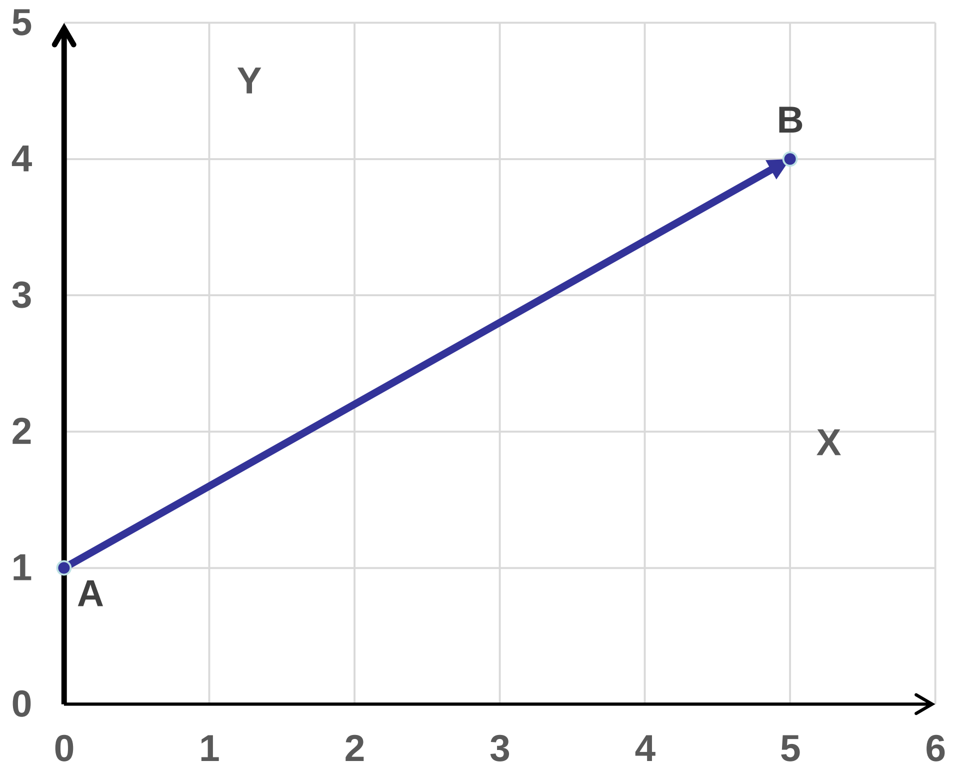
- Vetor tridimensional $\vec{v}$ origem $A = (a_1, a_2, a_3)$ e extremidade $B = (b_1, b_2, b_2)$:
- $\vec{v} = B - A = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

Representação por pontos: exemplo

- Dados os pontos A=(0,1) e B=(5,4), expressar o vetor $\overrightarrow{AB}$ por dois pontos.
- Basta fazer a diferença, coordenada a coordenada, do ponto final e do ponto inicial do vetor:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B, y_B) - (x_A, y_A)$$
$$\overrightarrow{AB} = (5{,}4) - (0{,}1)$$
$$\overrightarrow{AB} = (5 - 0{,}4 - 1)$$
$$\overrightarrow{AB} = (5{,}3)$$

- $A = (x, y)$ é um ponto,
  $\overrightarrow{AB} = (x, y)$ é um vetor.



Módulo de vetor

- O módulo de um vetor é o mesmo que o tamanho de um vetor:

- É calculado como a raiz quadrada da soma dos quadrados de suas coordenadas.

- Módulo de um vetor bidimensional $\vec{v} = (x, y)$:
  $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- Módulo de um vetor tridimensional $\vec{v} = (x, y, z)$:
  $$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Módulo de vetor: exemplo 1

- Determinar o módulo do vetor $\vec{u} = (2,4)$.
- $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- Substituindo as coordenadas dadas na expressão:
- $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 4^2}$
- $|\vec{u}| = \sqrt{4 + 16}$

- $|\vec{u}| = \sqrt{20}$
- $|\vec{u}| = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5}$
- $|\vec{u}| = 2\sqrt{5}$
- O módulo do vetor $\vec{u} = (2,4)$ é $|\vec{u}| = 2\sqrt{5}$

Módulo de vetor: exemplo 2

- Determinar o módulo do vetor $\vec{u} = (3,4,1)$.
- $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- Substituindo as coordenadas dadas na expressão:
- $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2}$
- $|\vec{u}| = \sqrt{9 + 16 + 1}$
- $|\vec{u}| = \sqrt{26}$
- O módulo do vetor $\vec{u} = (3,4,1)$ é $|\vec{u}| = \sqrt{26}$

Calculando o versor de um vetor

- O versor conserva as informações de direção e de sentido do vetor e tem tamanho unitário.
- Para obter o versor de um vetor, basta dividi-lo pelo seu comprimento, ou seja, basta dividi-lo pelo seu módulo: $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

- Calcular o versor do vetor $\vec{u} = (1,2,5)$.
- $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$

- $\hat{u} = \frac{(1,2,5)}{\sqrt{30}} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$

- Racionalizando para não deixar raízes no denominador:

- $\hat{u} = \left(\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{2.\sqrt{30}}{30}, \frac{5.\sqrt{30}}{30}\right)$

Soma de vetores em coordenadas

- Na soma de vetores é feita a soma coordenada a coordenada.
- A soma dos dois vetores bidimensionais $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ é dada por:
- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

- Fazendo a soma coordenada a coordenada:
- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

- A soma dos dois vetores tridimensionais $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ é dada por:
  - $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$

  - Fazendo a soma coordenada a coordenada:
  - $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

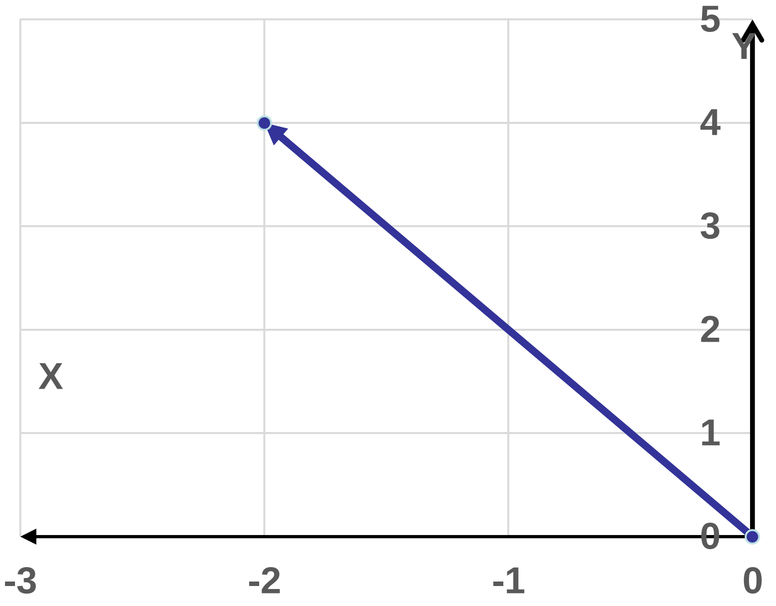
Soma de vetores em coordenadas: exemplo

- Uma bola de bilhar sofre duas forças distintas, $\vec{F}_1 = (0{,}1)$ e $\vec{F}_2 = (-2{,}3)$, ao ser atingida por duas outras bolas durante um jogo. Calcule a força resultante $\vec{F}_R$ que atua sobre essa primeira bola de bilhar, dada pela soma das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

- Calcular a soma das forças:
- $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (0{,}1) + (-2{,}3)$

- Fazendo a soma coordenada a coordenada:
  - $\vec{F}_R = (0 + (-2), 1 + 3)$
  - $\vec{F}_R = (-2{,}4)$

  - O vetor (-2,4) tem extremidade no ponto (-2,4)
    e origem no ponto (0,0).



Multiplicação de vetor por escalar em coordenadas

- De forma similar à soma de vetores, na multiplicação de um vetor por um escalar, basta multiplicar cada componente do vetor pelo escalar.

- A multiplicação do vetor bidimensional $\vec{u} = (x_1, y_1)$ pelo escalar a é dada por:
- $a.\vec{u} = a.(x_1, y_1)$
- $a.\vec{u} = (a.x_1, a.y_1)$

- A multiplicação do vetor tridimensional $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ pelo escalar a é dada por:
  - $a.\vec{u} = a.(x_1, y_1, z_1)$
  - $a.\vec{u} = (a.x_1, a.y_1, a.z_1)$

Multiplicação de vetor por escalar em coordenadas: exemplo

- Considere a velocidade inicial representada pelo vetor $\vec{v}_0 = (1,0,2)$. Qual vetor representa a velocidade final, após dado tempo, dada pelo triplo da velocidade inicial?

- A multiplicação de um vetor $\vec{v}_0 = (1,0,2)$ pelo escalar 3:
- $\vec{v} = 3.\vec{v}_0$

- Substituindo o vetor $\vec{v}_0 = (1,0,2)$ na expressão:
- $\vec{v} = 3.(1,0,2)$

- Da multiplicação de escalar por vetor:
- $\vec{v} = (3.1,3.0,3.2) = (3,0,6)$
- O vetor triplo de $\vec{v}_0 = (1,0,2)$ é $\vec{v} = (3,0,6)$.

Interatividade

Assinale a alternativa que representa a soma dos vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$.

b) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$.

c) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$.

d) $\vec{u} + \vec{v} = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} + \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$.

e) $\vec{u}. + \vec{v} = \vec{u}.\vec{v}$.

Resposta

Assinale a alternativa que representa a soma dos vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$.

b) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$.

c) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$.

d) $\vec{u} + \vec{v} = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} + \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$.

e) $\vec{u}. + \vec{v} = \vec{u}. \vec{v}$.

Dependência linear entre vetores

- Considere dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Dizemos que há dependência linear entre esses dois vetores ou, ainda, que esses vetores são linearmente dependentes, se:
- $\vec{u} = a.\vec{v}$

- Na equação, a é um escalar.
- Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão <u>linearmente dependentes</u> (LD) se forem paralelos a uma mesma reta.
- Caso contrário, serão vetores <u>linearmente independentes</u> (LI).

Dependência linear entre vetores

- O conceito de dependência linear pode ser ampliado para o caso de mais de dois vetores.
- Um vetor $\vec{w}$ é combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se ele puder ser escrito da seguinte forma:
- $\vec{w} = a.\vec{u} + b.\vec{v}$ (a e b são escalares)

- Os vetores $\vec{w}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão linearmente dependentes (LD) se forem paralelos a um mesmo plano.
- Caso contrário, serão vetores linearmente independentes (LI).

Dependência linear entre vetores: exemplo 1

- Dados os vetores $\vec{u} = (-5, -10)$ e $\vec{v} = (1,2)$, verificar se eles são linearmente dependentes (LD) ou linearmente independentes (LI).
- $\vec{u} = a.\vec{v}$
- $(-5, -10) = a.(1,2)$

- Do produto de um escalar por um vetor:
- $(-5, -10) = (a.1, a.2)$

- Como a igualdade de vetores implica igualdade coordenada a coordenada, montamos um sistema de duas equações lineares (cada equação é dada por uma coordenada):
- $\begin{cases} -5 = a.1\ (X) \\ -10 = a.2\ (Y) \end{cases}$

Dependência linear entre vetores: exemplo 1 continuação

- Isolando a em ambas as equações:
- $\begin{cases} -5 = a.1\ (X) \\ -10 = a.2\ (Y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{1} = -5 \\ a = -\frac{10}{2} = -5 \end{cases}$
- Como existe valor de a que satisfaz simultaneamente às duas equações do sistema:
- Os vetores $\vec{u} = (-5, -10)$ e $\vec{v} = (1,2)$ são linearmente dependentes (LD).

Dependência linear entre vetores: exemplo 2

- Dados os vetores $\vec{u} = (-5, -10)$ e $\vec{v} = (1,3)$, verificar se eles são linearmente dependentes (LD) ou linearmente independentes (LI).
- $\vec{u} = a.\vec{v}$
- $(-5, -10) = a.(1,3)$

- Do produto de um escalar por um vetor:
- $(-5, -10) = (a.1, a.3)$

- Como a igualdade de vetores implica igualdade coordenada a coordenada, montamos um sistema de duas equações lineares (cada equação é dada por uma coordenada):
- $\begin{cases} -5 = a.1\ (X) \\ -10 = a.3\ (Y) \end{cases}$

Dependência linear entre vetores: exemplo 2 continuação

- Isolando a em ambas as equações:
- $\begin{cases} -5 = a.1\ (X) \\ -10 = a.3\ (Y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{1} = -5 \\ a = -\frac{10}{3} \end{cases}$
- Como <u>não existe</u> valor de a que satisfaça simultaneamente às duas equações do sistema:
- Os vetores $\vec{u} = (-5, -10)$ e $\vec{v} = (1,3)$ são <u>linearmente independentes</u> (LI).

- Para haver dependência linear, é necessário existir um valor para o escalar a, de tal forma que:
  $\vec{u} = a.\vec{v}$

Dependência linear entre vetores: exemplo 3

- Determine x para que os vetores $\vec{u} = (1,6)$ e $\vec{v} = (4,2x-1)$ sejam linearmente dependentes (LD).
- $\vec{u} = a.\vec{v}$
- $(1,6) = a.(4,2x-1)$

- Do produto de um escalar por um vetor:
- $(1,6) = (a.4, a.(2x-1))$
- Como a igualdade de vetores implica igualdade coordenada a coordenada, montamos um sistema de duas equações lineares (cada equação é dada por uma coordenada):
- $\begin{cases} 1 = a.4 \\ 6 = a.(2x-1) \end{cases}$

Dependência linear entre vetores: exemplo 3 continuação

- $\begin{cases} 1 = a.4 \\ 6 = a.(2x - 1) \end{cases}$

- Isolando a na equação superior: $a = \frac{1}{4}$
- Usando a para calcular o valor de x na segunda equação:
- $6 = \frac{1}{4}.(2x - 1) \Rightarrow 6 = \frac{1}{4}.2x - \frac{1}{4}.1 \Rightarrow 6 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

- Isolar o valor de x:
- $\frac{x}{2} = 6 + \frac{1}{4}$

Dependência linear entre vetores: exemplo 3 continuação

- $\frac{x}{2} = 6 + \frac{1}{4}$
- $\frac{x}{2} = \frac{24+1}{4}$
- $\frac{x}{2} = \frac{25}{4}$
- $x = 2.\frac{25}{4} \Rightarrow x = \frac{25}{2}$

- Voltando ao sistema e substituindo o valor de x:
- $\begin{cases} 1 = a.4 \\ 6 = a.(2x - 1) \end{cases}$
- $\begin{cases} 1 = a.4 \\ 6 = a.(2\frac{25}{2} - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a.4 \\ 6 = a.24 \end{cases}$
- Lembrando que $a = \frac{1}{4}$

Dependência linear entre vetores: exemplo 4

- Dados os vetores $\vec{w} = (1,2,3)$, $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (0,1,1)$, determine a e b de forma que o $\vec{w}$ vetor seja combinação linear (CL) dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

- Para que o vetor $\vec{w}$ seja combinação linear (CL) dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:
- $\vec{w} = a.\vec{u} + b.\vec{v} \Rightarrow (1,2,3) = a.(1,0,1) + b.(0,1,1)$

- Do produto de um escalar por um vetor:
- $(1,2,3) = (a, 0, a) + (0, b, b)$
- Sistema de três equações lineares (igualdade coordenada a coordenada):
- $\begin{cases} 1 = a \ (X) \\ 2 = b \ (Y) \\ 3 = a + b \ (Z) \end{cases}$

Dependência linear entre vetores: exemplo 4 continuação

- $$\begin{cases} 1 = a \\ 2 = b \\ 3 = a + b \end{cases}$$
- As duas primeiras equações do sistema já fornecem os valores de a e b:
- a=1 e b=2

- Precisamos verificar se esses valores satisfazem à terceira equação:
- Substituindo a=1 e b=2 na terceira equação: $3 = a + b \Rightarrow 3 = 1 + 2 \Rightarrow 3 = 3$
  - $3 = a + b \Rightarrow 3 = 1 + 2 \Rightarrow 3 = 3$

  - Vemos que se trata de uma expressão verdadeira. Logo, a=1 e b=2 também satisfazem à terceira equação. Desse modo, a=1 e b=2 fazem com que o vetor $\vec{w}$ seja combinação linear (CL) dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Dependência linear entre vetores: exemplo 4 continuação

- Podemos concluir vetor $\vec{w} = (1,2,3)$ será uma combinação linear (CL) dos vetores $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (0,1,1)$, quando na relação:
- $\vec{w} = a.\vec{u} + b.\vec{v}$
- Tivermos:
- a=1
- b=2

Interatividade

Assinale a alternativa correta:

a) Dois vetores serão linearmente dependentes se forem paralelos a uma mesma reta.
b) Dois vetores serão linearmente independentes se forem paralelos a uma mesma reta.
c) Três vetores serão linearmente independentes se forem paralelos a um mesmo plano.
d) Para haver dependência linear não é necessário existir um valor para o escalar a, de tal forma que $\vec{u} = a.\vec{v}$.
e) Um vetor $\vec{w}$ não é uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se ele puder ser escrito da seguinte forma: $\vec{w} = a.\vec{u} + b.\vec{v}$.

Resposta

Assinale a alternativa correta:

a) Dois vetores serão linearmente dependentes se forem paralelos a uma mesma reta.
b) Dois vetores serão linearmente independentes se forem paralelos a uma mesma reta.
c) Três vetores serão linearmente independentes se forem paralelos a um mesmo plano.
d) Para haver dependência linear não é necessário existir um valor para o escalar a, de tal forma que $\vec{u} = a.\vec{v}$.
e) Um vetor $\vec{w}$ não é uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se ele puder ser escrito da seguinte forma: $\vec{w} = a.\vec{u} + b.\vec{v}$.

ATÉ A PRÓXIMA!