UNIDADE II

Álgebra Linear

Prof. Hugo Insua

Transformação linear

Definição:

Sendo U e V espaços vetoriais, e $F: U \rightarrow V$, F uma função com domínio U e contradomínio V, dizemos que uma função F é uma transformação linear se valem as condições:

I. Para qualquer vetor u_1 e u_2 pertencente a U, $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$;

II. Para qualquer vetor *u* pertencente a U e para qualquer número real α pertencente ao conjunto dos números reais, $F(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot F(u)$;

III. Se uma função leva o vetor nulo de U em um vetor não nulo de V, isto é, $F(0U) \neq 0V$; então, ela não pode ser linear.

Vejamos o exemplo:

Transformação linear

Verifique se a função F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $F(x, y) = (2x, 3x + 4y)$ é linear:

Condição I:

- $F(0,0) = (2.0, 3.0 + 4.0) = (0,0)$ *ok*!

Condição II:

Sendo $u_1 = (x, y)$ e $u_2 = (r, s)$, temos:

- $F(u_1 + u_2) = F(x + r, y + s) = (2x+2r, 3x+3r+4y+4s)$;
- $F(u_1) + F(u_2) = F(x, y) + F(r, s) = (2x+2r, 3x+3r+4y+4s)$;
- Portanto, $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$ *ok*!

Transformação linear

Condição III:

Sendo u = (x, y) e *a*, temos:

- $F(\alpha \cdot u) = F(\alpha \cdot (x, y)) = (2ax, 3ay + 4ax)$;
- $\alpha \cdot F(u) = \alpha \cdot F(x, y) = (2ax, 3ay + 4ax)$;
- Portanto, $F(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot F(u)$ ok!
- Satisfeitas as três condições, F é a transformação linear.

Imagem de uma transformação linear

Definimos a imagem da transformação linear $T: U \to V$ o conjunto denotado por:

- $ImT = \{T(u) \in V / u \in U\}$.

Vejamos o exemplo:

- Sejam os vetores u = (1, 2, 3) e v = (0, 0, 1), determine a imagem de *u* e de *v* pela transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, T(x, y, z) = (x + z, y).

Solução:

- T(u) = T(1, 2, 3) = (1+3, 2) = (4, 2);
- T(v) = T(0, 0, 1) = (0+1, 0) = (1, 0).

Núcleo de uma transformação linear

Sejam U e V espaços vetoriais, e a transformação linear T: U → V, definimos como núcleo da transformação linear T o subespaço vetorial de U, representado por N(T) e dado por:

- $N(T) = \{u \in U \,/\, T(u) = 0v\}$.

Vejamos o exemplo:

Núcleo de uma transformação linear

Determinar o núcleo da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (y - 2x, y + 2x)$:

- $N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, T(x, y) = (0, 0)\}$
- $T(x, y) = (y - 2x, y + 2x) = (0, 0) \Rightarrow$
- $\Rightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ y + 2x = 0 \end{cases}$

Somando as duas equações:

- $2y = 0 \Rightarrow y = 0$; logo, $x = 0$;
- $N(T) = \{(0, 0)\}$.

Interatividade

O núcleo da transformação linear T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, T(x, y, z) = (x + z, y) é:

a) N(T) = {(0, 0, -x) | x ∈ R}.
b) N(T) = {(0, x, -x) | x ∈ R}.
c) N(T) = {(x, x, -x) | x ∈ R}.
d) N(T) = {(x, 0, x) | x ∈ R}.
e) N(T) = {(x, 0, -x) | x ∈ R}.

Resposta

O núcleo da transformação linear T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, T(x, y, z) = (x + z, y) é:

a) N(T) = {(0, 0, -x) | x ∈ R}.
b) N(T) = {(0, x, -x) | x ∈ R}.
c) N(T) = {(x, x, -x) | x ∈ R}.
d) N(T) = {(x, 0, x) | x ∈ R}.
e) N(T) = {(x, 0, -x) | x ∈ R}.

Operações com transformações lineares

Sejam as transformações lineares $F: U \to V$ e $G: U \to V$, é possível realizar as seguintes operações:

- <u>Adição</u>: $F + G: U \to V$, definida por $(F + G)(u) = F(u) + G(u), \forall u \in U$.

Exemplo:

- <u>Multiplicação por escalar</u>: sejam as transformações lineares $F: U \to V$ e $k \in \mathbb{R}$, definimos o produto F por *k* como $k F: U \to V$, dadas por $(k F)(u) = k F(u), \forall u \in U$;
- <u>Composição</u>: sejam as transformações lineares $F: U \to V$ e $G: V \to W$, chamamos de transformação composta de G com F, denotada por $G \circ F: U \to W$ definida por $(G \circ F)(u) = G(F(u)), \forall u \in U$.

Operações com transformações lineares

Vejamos o exemplo:

Sendo $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (x - 2y, 2x + y)$, e $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $G(x, y) = (x, x - y)$, determine:

a) $F + G = (x - 2y + x, 2x + y + x - y) = (2x - 2y, 3x)$;
b) $3F - 2G = 3(x - 2y, 2x + y) - 2(x, x - y) = (3x - 6y, 6x + 3y) - (2x, 2x - 2y) =$
   $= (3x - 6y - 2x, 6x + 3y - 2x + 2y) = (x - 6y, 4x + 5y)$;
c) $F \circ G = (x - 2(x - y), 2(x) + (x - y)) = (x - 2x + 2y, 2x + x - y) = (-x + 2y, 3x - y)$;
d) $G \circ F = (x - 2y, x - 2y - (2x + y)) = (x - 2y, x - 2y - 2x - y) = (x - 2y, -x - 3y)$.

Matriz de uma transformação linear

- Consideremos os espaços vetoriais U e V sobre R, cujas dimensões sejam, respectivamente, *n* e *m*.

- Tomemos a transformação T: U → V, a base B = {u1, ..., un} de U e a base C = {v1, ..., vn} de V.

- Sabemos que cada um dos vetores T(u1), ...T(un) está em V e, portanto, podem ser escritos como a combinação linear da base C.

Matriz de uma transformação linear

$$
\begin{aligned}
T(u_1) &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \dots + \alpha_{m1}v_m \\
T(u_2) &= \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \dots + \alpha_{m2}v_m \\
&\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
T(u_n) &= \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \dots + \alpha_{mn}v_m
\end{aligned}
$$

A matriz *m* x *n* sobre $\mathbb{R}$ formada pelos coeficientes da combinação linear anterior e dispostos em colunas é a matriz da transformação linear T, em relação às bases B e C:

$$
(T)_{B,C} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}
$$

Matriz de uma transformação linear

Determine a matriz de T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por T(x, y, z) = (x + y, x + z), em relação às bases A = {(1, 0, 0), (0 ,1, 0), (0, 0, 1)} de $\mathbb{R}^3$ e B = {(1, 1), (0 ,1)} de $\mathbb{R}^2$:

$T(1, 0, 0) = (1, 1) = \alpha_{11}(1, 1) + \alpha_{21}(0, 1)$

$$\begin{cases} \alpha_{11} = 1 \\ \alpha_{11} + \alpha_{21} = 1 \end{cases}$$

Logo $\alpha_{11} = 1$ e $\alpha_{21} = 0$

Matriz de uma transformação linear

$T(0, 1, 0) = (1, 0) = \alpha_{12}(1, 1) + \alpha_{22}(0, 1)$

$$\begin{cases} \alpha_{12} = 1 \\ \alpha_{12} + \alpha_{22} = 0 \end{cases}$$

Logo $\alpha_{12} = 1$ e $\alpha_{22} = -1$

Matriz de uma transformação linear

$$T(0, 0, 1) = (0, 1) = \alpha_{13}(1, 1) + \alpha_{23}(0, 1)$$

$$\begin{cases} \alpha_{13} = 0 \\ \alpha_{13} + \alpha_{23} = 1 \end{cases}$$

Logo $\alpha_{13} = 0$ e $\alpha_{23} = 1$

$$(T)_{A,B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Interatividade

A matriz T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por T(x, y, z) = (x + y, x + z), em relação às bases A = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} e B = {(1, 1), (0, 1)}, será de ordem 2x3 e terá os elementos:

a) $a_{11} = -1$; $a_{12} = -1$; $a_{13} = 0$; $a_{21} = 1$; $a_{22} = -1$; $a_{23} = 0$.
b) $a_{11} = 1$; $a_{12} = 1$; $a_{13} = 0$; $a_{21} = 0$; $a_{22} = -1$; $a_{23} = 1$.
c) $a_{11} = 1$; $a_{12} = 1$; $a_{13} = 1$; $a_{21} = 0$; $a_{22} = -1$; $a_{23} = 0$.
d) $a_{11} = -1$; $a_{12} = 1$; $a_{13} = 0$; $a_{21} = 0$; $a_{22} = 1$; $a_{23} = 1$.
e) $a_{11} = 1$; $a_{12} = -1$; $a_{13} = 1$; $a_{21} = 0$; $a_{22} = -1$; $a_{23} = 0$.

Resposta

A matriz T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por T(x, y, z) = (x + y, x + z), em relação às bases A = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} e B = {(1, 1), (0, 1)}, será de ordem 2x3 e terá os elementos:

a) $a_{11} = -1$; $a_{12} = -1$; $a_{13} = 0$; $a_{21} = 1$; $a_{22} = -1$; $a_{23} = 0$.
b) $a_{11} = 1$; $a_{12} = 1$; $a_{13} = 0$; $a_{21} = 0$; $a_{22} = -1$; $a_{23} = 1$.
c) $a_{11} = 1$; $a_{12} = 1$; $a_{13} = 1$; $a_{21} = 0$; $a_{22} = -1$; $a_{23} = 0$.
d) $a_{11} = -1$; $a_{12} = 1$; $a_{13} = 0$; $a_{21} = 0$; $a_{22} = 1$; $a_{23} = 1$.
e) $a_{11} = 1$; $a_{12} = -1$; $a_{13} = 1$; $a_{21} = 0$; $a_{22} = -1$; $a_{23} = 0$.

Transformações lineares planas

Dilatação e contração:

- É uma transformação linear T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que dilata ou contrai um vetor em *k* vezes, o valor de seu módulo na própria direção, na direção do eixo *x* ou na direção do eixo *y*.

Dessa maneira, ocorre:

- Dilatação, se $k > 1$;
- Contração, se $0 < k < 1$.

Transformações lineares planas

a) Dilatação ou contração na direção do vetor:

- T(x, y) = (kx, ky);
- A matriz canônica associada a essa transformação é: $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

b) Dilatação ou contração na direção do eixo *x*:

- T(x, y) = (kx, y);
- A matriz canônica associada a essa transformação é: $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- Se k > 1, o vetor dilata; se 0 < k < 1, contrai o vetor; se *a* < 0, inverte o sentido do vetor.

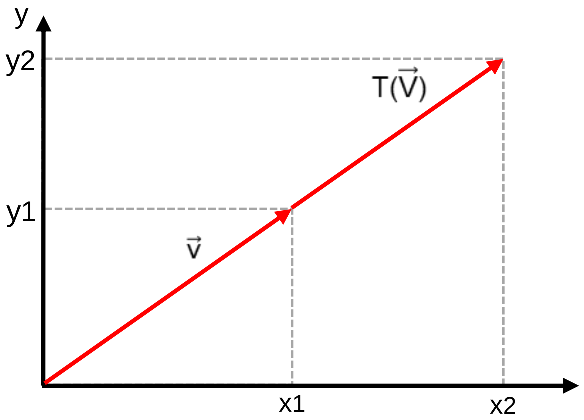
Transformações lineares planas

c) Dilatação ou contração na direção do eixo *y*:

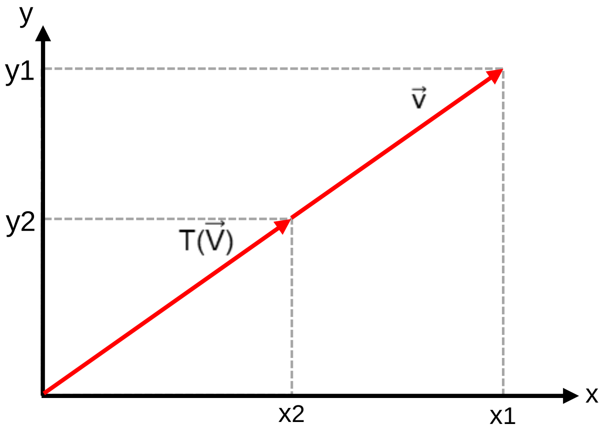
- $T(x, y) = (x, ky)$;
- A matriz canônica associada a essa transformação é: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$;
- Se $k > 1$, o vetor dilata; se $0 < k < 1$, contrai o vetor. A abcissa *x* do vetor se mantém sempre igual.

Transformações lineares planas

Geometricamente:

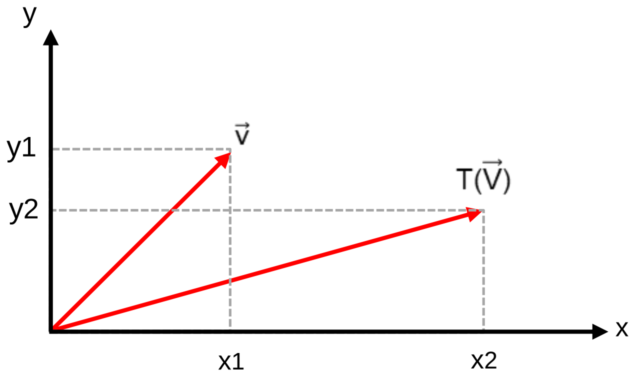


$k > 1$

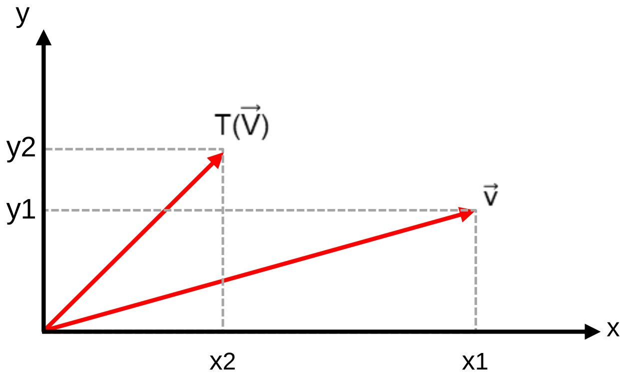


$0 < k < 1$

Na própria direção

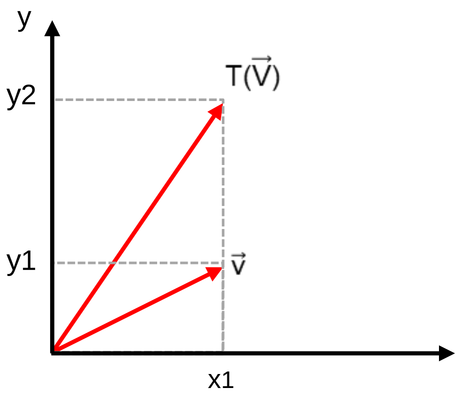


$k > 1$

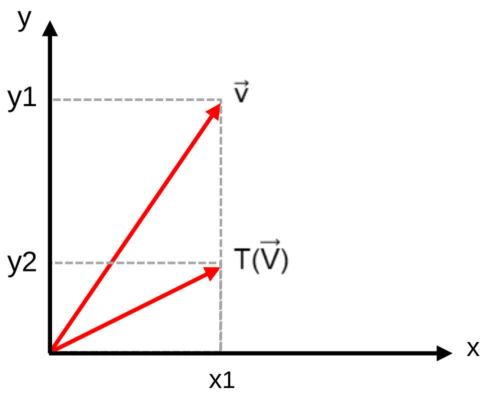


$0 < k < 1$

Na direção *x*



$k > 1$



$0 < k < 1$

Na direção *y*

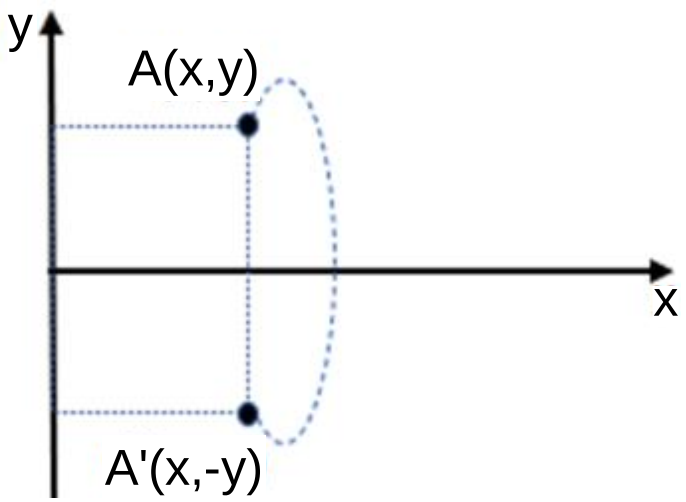
Transformações lineares planas

É uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que leva um ponto do plano ao seu simétrico em relação:

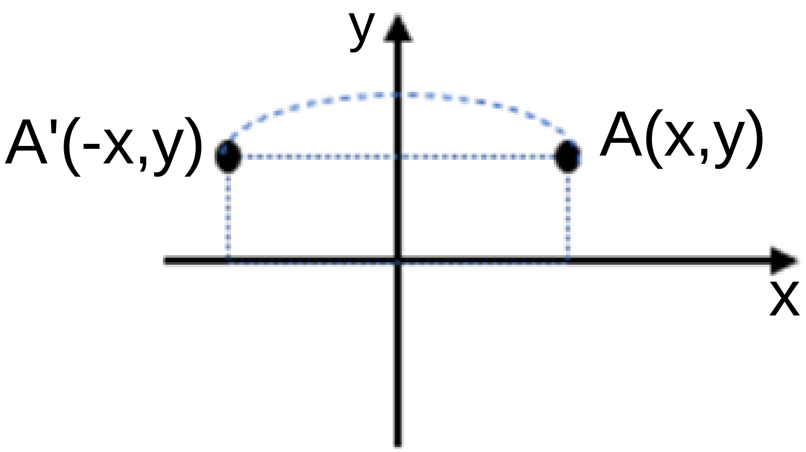
a) Ao eixo *x*: T(x, y) = (x, -y). A matriz canônica dessa transformação é: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Ao eixo *y*: T(x, y) = (-x, y). A matriz canônica dessa transformação é: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Geometricamente:



Ao eixo *x*



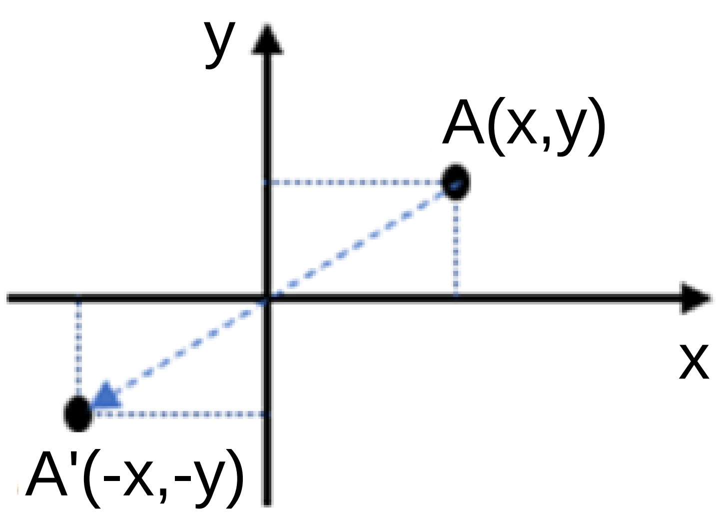
Ao eixo *y*

Transformações lineares planas

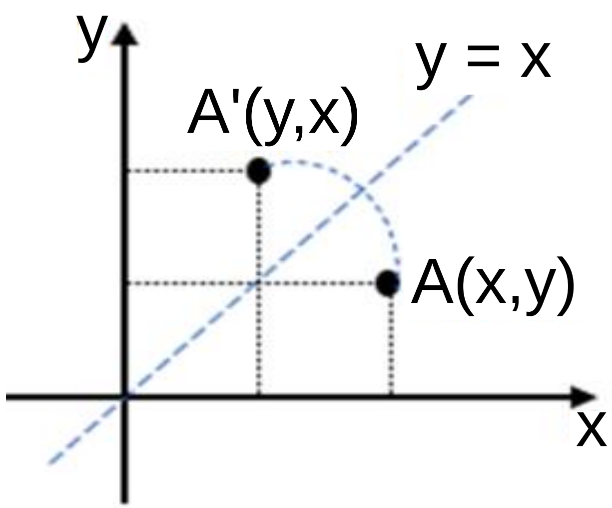
c) À origem: T(x, y) = (-x, -y). A matriz canônica dessa transformação é: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d) À reta y = x: T(x, y) = (y, x). A matriz canônica dessa transformação é: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Geometricamente:



À origem



À reta y = x

Interatividade

A transformação linear de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que representa uma reflexão em torno do eixo *y*, f(x, y) = (-x, y), seguida de uma dilatação de fator 2 na direção do próprio vetor, f(x, y) = (kx, ky), é:

a) T(x, y) = (-2x, -2y).
b) T(x, y) = (-2x, 2y).
c) T(x, y) = (-2x, 6x).
d) T(x, y) = (2x, -6x).
e) T(x, y) = (x, x + 2y).

Resposta

A transformação linear de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que representa uma reflexão em torno do eixo *y*, f(x, y) = (-x, y), seguida de uma dilatação de fator 2 na direção do próprio vetor, f(x, y) = (kx, ky), é:

a) T(x, y) = (-2x, -2y).
b) T(x, y) = (-2x, 2y).
c) T(x, y) = (-2x, 6x).
d) T(x, y) = (2x, -6x).
e) T(x, y) = (x, x + 2y).

Transformações lineares planas

Cisalhamento:

a) Na direção do eixo *x* (cisalhamento horizontal): T(x, y) = (x + ky, y).

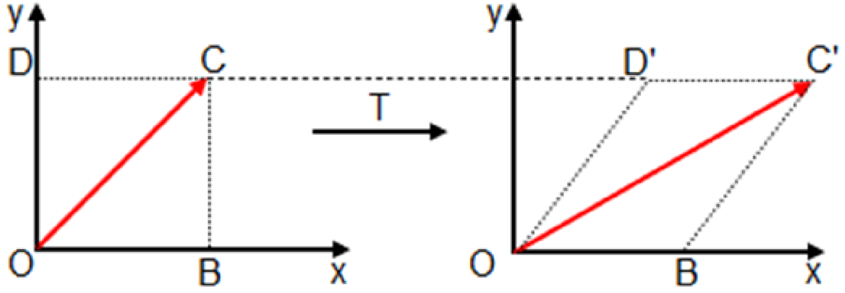
- A matriz canônica dessa transformação é: $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Na direção do eixo *y* (cisalhamento vertical): T(x, y) = (x, y + kx).

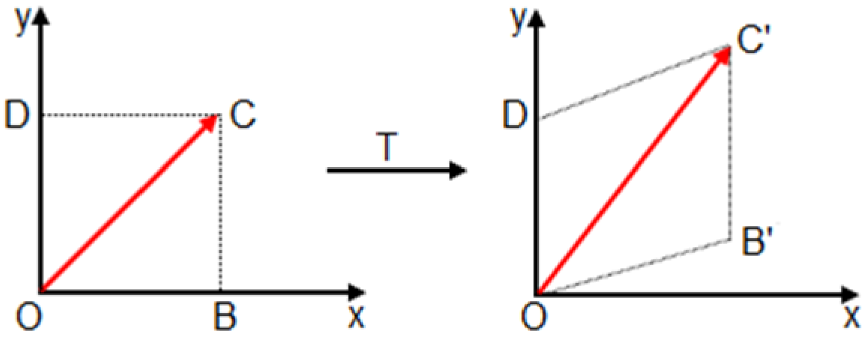
- A matriz canônica dessa transformação é: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$.

Geometricamente:

Na direção *x*



Na direção *y*



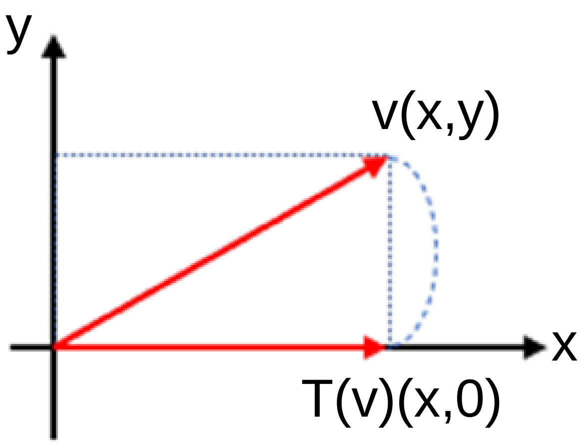
Transformações lineares planas

Projeção:

- É uma transformação linear T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que leva um vetor do plano à sua projeção ortogonal sobre o eixo *x* ou sobre o eixo *y*.

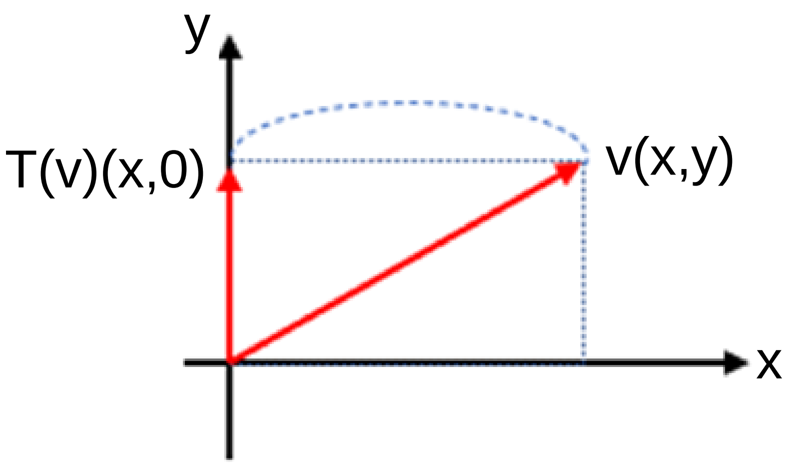
a) Projeção em relação ao eixo *x*: T(x, y) = (x, 0).

- A matriz canônica dessa transformação é: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.



b) Projeção em relação ao eixo *y*: T(x, y) = (0, y).

- A matriz canônica dessa transformação é: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

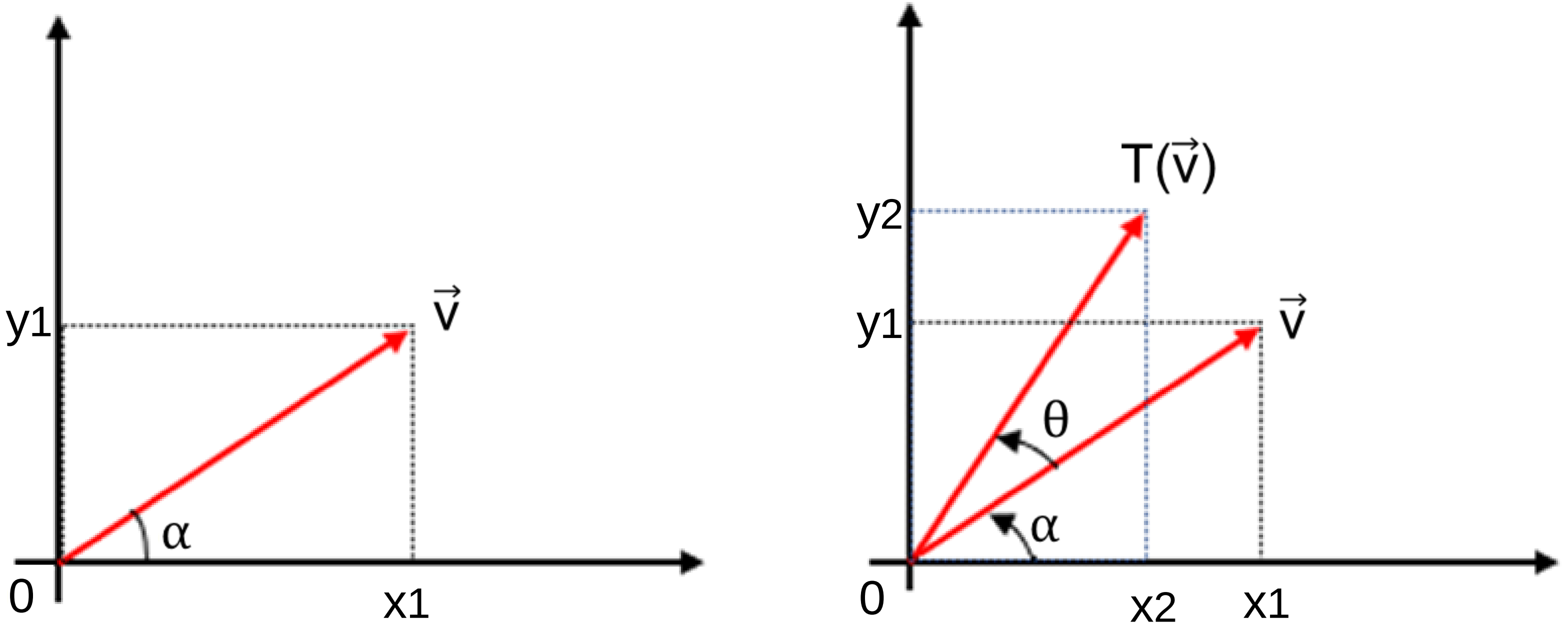


Transformações lineares planas

Rotação:

- A transformação linear plana da rotação faz cada ponto (vetor) descrever, em volta da origem, um ângulo “θ” no sentido anti-horário.

Geometricamente:



Transformações lineares planas

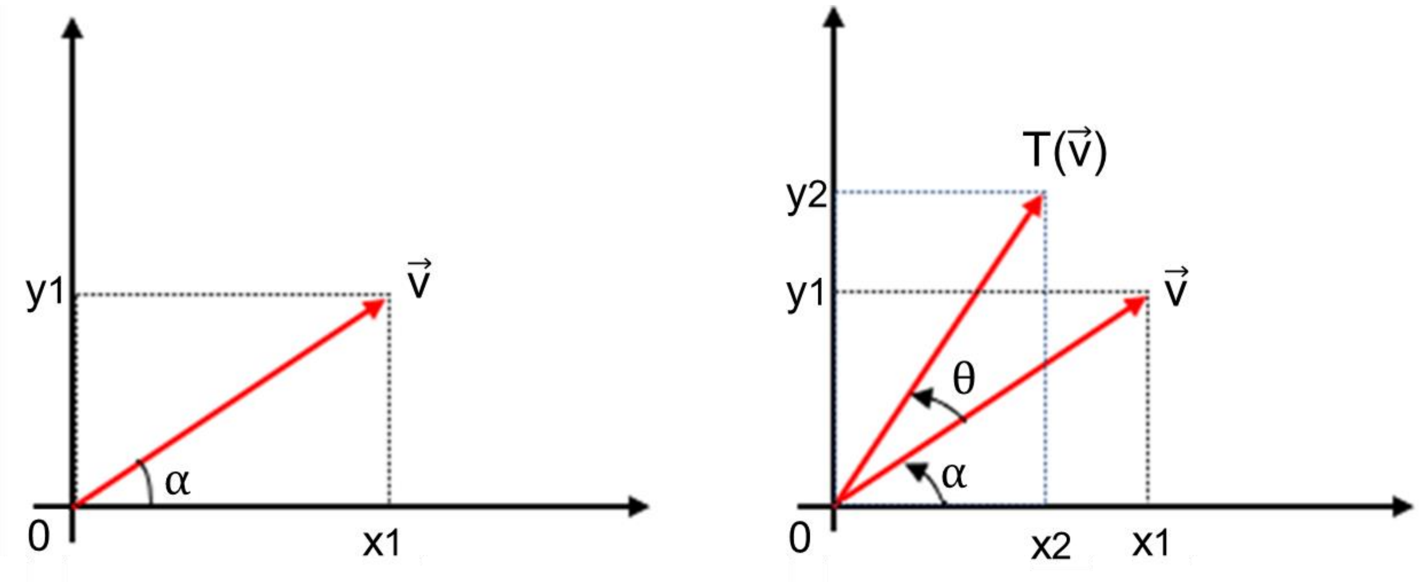
Rotação:

- A transformação linear plana da rotação faz cada ponto (vetor) descrever, em volta da origem, um ângulo “θ” no sentido anti-horário.

Assim, podemos dizer que a rotação é uma transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que:

- $T(x, y) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\theta,\ x\,\text{sen}\theta + y\cos\theta)$;
- A matriz canônica dessa transformação é: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Geometricamente:



Interatividade

A transformação linear de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que representa uma rotação de 90°, f(x, y) = (xcosθ - ysenθ, xsenθ + ycosθ), seguida de reflexão em torno do eixo *x*, f(x, y) = (x -y), é:

a) T(x, y) = (x, y).
b) T(x, y) = (-y, -x).
c) T(x, y) = (y, -x).
d) T(x, y) = (y, x).
e) T(x, y) = (x, -y).

Resposta

A transformação linear de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que representa uma rotação de 90°, $f(x, y) = (x\cos\theta - y\text{sen}\theta, x\text{sen}\theta + y\cos\theta)$, seguida de reflexão em torno do eixo *x*, $f(x, y) = (x -y)$, é:

a) $T(x, y) = (x, y)$.
b) $T(x, y) = (-y, -x)$.
c) $T(x, y) = (y, -x)$.
d) $T(x, y) = (y, x)$.
e) $T(x, y) = (x, -y)$.

ATÉ A PRÓXIMA!