EAD

EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UNIDADE I

Álgebra Linear

Prof. Hugo Insua

Espaços vetoriais

Dizemos que um conjunto de vetores V não vazio, ou seja, $V \neq \emptyset$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ se/e somente se estiver definida:

I. A soma entre quaisquer vetores $(u, v) \in V$ e as propriedades:

a) $u + v = v + u$, para quaisquer $u, v \in V$ (comutativa);
b) $u + (v + w) = (u + v) + w$, para quaisquer $u, v, w \in V$ (associativa);
c) Existe, em V, um único elemento neutro, denotado 0, tal que $u + 0 = 0 + u = u$;
d) Para todo $u \in V$, existe o oposto $(-u) \in V$ tal que $u + (-u) = 0$.

Espaços vetoriais

II. A multiplicação de qualquer vetor $u \in V$ por qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ e as propriedades:

a) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$;
b) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$;
c) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$;
d) $1 \cdot u = u$.

- Note que tanto a soma como a multiplicação devem pertencer a V.

Espaços vetoriais

Vejamos alguns exemplos de espaços vetoriais:

O espaço vetorial $\mathbb{R}$:

- Sendo $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais, fica fácil perceber que, na soma de números reais, se verificam válidas as propriedades em I. Da mesma forma, para a multiplicação, as propriedades em II se verificam válidas.

- O espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, conjunto dos pares ordenados que formam o plano.

Seja $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}$; logo:

- Soma: $u + v = (x, y) + (s, t) = (x + s, y + t) \in \mathbb{R}^2$;
- Multiplicação: $\alpha \cdot u = \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y) \in \mathbb{R}^2$.

Espaços vetoriais

Se $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ são espaços vetoriais, $\mathbb{R}^n$ também poderá ser considerado espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, desde que seja possível a soma e a multiplicação, conforme a seguir:

$\mathbb{R}^n$ = {(x1, x2, ..., xn) / xi ∈ $\mathbb{R}$}; então:

- (x1, x2, ..., xn) + (z1, z2, ..., zn) = (x1+z1, x2+z2, ..., xn+zn) ∈ $\mathbb{R}^n$;
- α · (x1, x2, ..., xn) = (αx1, αx2, ..., αxn) ∈ $\mathbb{R}^n$.

Espaços vetoriais

O espaço vetorial de Matrizes $M_{mxn}(\mathbb{R})$ com as operações da definição:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Definimos:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + bm_1 & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$K.A = K\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Espaços vetoriais

- O espaço $P_n(\mathbb{R})$, conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a *n*, com $n \geq 0$, incluindo o polinômio nulo.

Sejam os polinômios:

- $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_{0;}$
- $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_{0.}$

As operações de soma e multiplicação por escalar são dadas por:

- $p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + ...+ (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \in P_n$;
- $k \cdot p(x) = ka_n x^n + ka_{n-1} x^{n-1} + ... + ka_1 x + ka_0 \in P_n$.

Espaços vetoriais

Será que existe algum conjunto que não seja um espaço vetorial?

Vejamos o exemplo a seguir:

- O conjunto $V = \{(x, 1) \, / \, x \in \mathbb{R}\}$.

Sejam $u = (x, y)$ e $v = (r, t)$, vetores de V, de imediato percebemos que *y* e *t* serão iguais a 1; então:

- $u + v = (x, 1) + (r, 1) = (x + r, 2) \notin V$, pois a segunda componente do par ordenado é 2, o que contradiz a condição dada na definição. Logo, V não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Espaços vetoriais

Propriedades:

Como consequências imediatas da definição de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ apresentamos, a seguir, algumas propriedades:

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot 0 = 0$;
- $\forall u \in V, u \cdot 0 = 0$;
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$, $\alpha \cdot u = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $u = 0$;
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$, $(-\alpha) \cdot u = \alpha \cdot (-u) = -(\alpha u)$.

Espaços vetoriais

Propriedades:

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$, $(\alpha \pm \beta) \cdot u = (\alpha u \pm \beta u)$;
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in V$, $\alpha \cdot (u \pm v) = (\alpha u \pm \alpha v)$.

Espaços vetoriais

Importante:

- Os elementos u,v de V são denominados vetores, e os números reais $\alpha_1, ..., \alpha_n$, escalares;
- Note que *0* é o vetor nulo; não confundi-lo com o escalar 0;
- Em todo espaço vetorial existe o vetor nulo.

Interatividade

Dado o conjunto $V = \{(r,s,t) \,/\, t = 2s - 1\}$, podemos afirmar que:

a) É um espaço vetorial, pois obedecem às propriedades da adição e da multiplicação por um escalar.
b) Não é um espaço vetorial, pois não obedece, apenas, à propriedade da adição.
c) Não é um espaço vetorial, pois não obedece, apenas, à propriedade da multiplicação por um escalar.
d) Não é um espaço vetorial, pois não possui o vetor (0, 0, 0).
e) Não é um espaço vetorial, pois $x = z$.

Resposta

Dado o conjunto V = {(r,s,t) / t = 2s – 1}, podemos afirmar que:

a) É um espaço vetorial, pois obedecem às propriedades da adição e da multiplicação por um escalar.
b) Não é um espaço vetorial, pois não obedece, apenas, à propriedade da adição.
c) Não é um espaço vetorial, pois não obedece, apenas, à propriedade da multiplicação por um escalar.
d) Não é um espaço vetorial, pois não possui o vetor (0, 0, 0).
e) Não é um espaço vetorial, pois x = z.

Subespaços vetoriais

- Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e S um subconjunto de V, ou seja, $S \subseteq V$, dizemos que S é subespaço vetorial de V, se S, também, for um espaço vetorial.

Portanto, para demonstrar que S é um subespaço vetorial, utilize o teorema a seguir:

Um subconjunto $W \subseteq V$ é um subespaço vetorial de V se/e somente se puderem ser verificadas as três condições a seguir:

I. O vetor nulo $0 \in W$;

II. $\forall u,v \in W$, temos $u + v \in W$;

III. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in W$, temos $\alpha \cdot u \in W$.

Subespaços vetoriais

Vejamos alguns exemplos:

$W = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$?

Verificando a condição I: $0 \in W$:

- Note que a 1ª e a 3ª componentes das coordenadas de todos os vetores que compõem a W devem ser iguais a 0, e que, para a 2ª componente, y, não há uma restrição de valor; logo, $0 = (0, 0, 0) \in W$.

Verificando a condição II: $\forall u,v \in W$, temos $u + v \in W$:

- Sejam $u = (0, y, 0)$ e $v = (0, t, 0)$, com $u, v \in W$;
- Logo, $u + v = (0, y, 0) + (0, t, 0) = (0, y + t, 0) \in W$.

Verificando a condição III: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in W$, temos $\alpha \cdot u \in W$:

- Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (0, y, 0) \in W$;
- $\alpha \cdot u = (0, \alpha y, 0) \in W$;
- Satisfeitas as três condições, W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Subespaços vetoriais

$W = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$?

- Note que, em todos os vetores que compõem a W, a 2ª componente da coordenada será, sempre, igual a 1; assim, $0 = (0, 0) \notin W$. Logo, W não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Subespaços vetoriais

A reta $W = \{y = 2x \in \mathbb{R}^2\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$?

- Note que os pares ordenados que formam o conjunto de retas que compõem W são da forma $(x, 2x)$.

Verificando a condição I: $0 \in W$:

- Se $x = 0$, verifica-se que $y = 2 \cdot 0 = 0$; assim, $0 = (0, 0) \in W$.

Verificando a condição II: $\forall u,v \in W$, temos $u + v \in W$:

Sejam $u = (x, 2x)$ e $v = (s, 2s)$ com $u, s \in W$, temos:

- $u + v = (x, 2x) + (s, 2s) = (x + s, 2x + 2s) \in W$.

Verificando a condição III: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in W$, temos $\alpha \cdot u \in W$:

- Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x, 2x) \in W$; então, $\alpha \cdot u = (\alpha x, 2\alpha x) \in W$;
- Satisfeitas as três condições, W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Subespaços vetoriais

Seja a matriz W a seguir, ela é um subespaço de M2(ℝ)?

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$$

- M2(ℝ) é o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem 2 de números reais;
- Verificando a condição I: $0 \in W$;
- Os elementos a11 e a22 devem ser iguais a 1; dessa forma, $a_{11} = a_{22} = 1 \neq 0$. Logo, W não é um subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$.

Subespaços vetoriais

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y \text{ e } z = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$?

- Percebemos que os vetores de W devem ter o 1º e o 2º componentes da coordenada iguais e o 3º componente deve ser igual a 0. Dessa maneira, os vetores de W são da forma $(x, x, z) \in \mathbb{R}^3$.

Verificando a condição I: $0 \in \mathbb{R}^3$:

- $0 = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Verificando a condição II: $\forall u,v \in W$, temos $u + v \in W$:

- Sejam $u = (x, x, z)$ e $v = (r, r, t)$, ambos $\in W$ com $z = t = 0$;
- $u + v = (x + r, x + r, z + t) = (x + r, x + r, 0) \in W$.

Verificando a condição III: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in W$, temos $\alpha \cdot u \in W$:

- $\alpha \cdot u = \alpha \cdot (x, x, z) = (\alpha x, \alpha x, \alpha z) = (\alpha x, \alpha x, 0) \in W$;
- Satisfeitas as três condições, W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Subespaços vetoriais

Seja a matriz W a seguir, ela é um subespaço de M2(ℝ)?

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$$

- Note que pertencem a W todas as matrizes cujos elementos das posições a_{12} e a_{21} são iguais a 0, e os demais elementos podem ser quaisquer. Assim:

Verificando a condição I: 0 ∈ W:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Subespaços vetoriais

Verificando a condição II:

- $\forall A,B \in W$, temos $A + B \in W$.
- Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ pertencentes a W.
- $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & 0 \\ 0 & b + d \end{pmatrix} \in W$

Subespaços vetoriais

Verificando a condição III:

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in W$, temos $\alpha \cdot A \in W$.
- $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & 0 \\ 0 & \alpha b \end{pmatrix}$
- Satisfeitas as três condições, podemos afirmar que W é um subespaço vetorial de $M(\mathbb{R}_2)$.

Interatividade

Dados os subconjuntos $W = \{(x, y, z) / x = 0\}$; $U = \{(x, y, z) / y = z\}$ e $V = \{(x, y, z) / x = 2\}$, podemos afirmar que:

a) Todos são subespaços vetoriais de R^3.
b) Apenas W não é um subespaço vetorial de R^3.
c) Apenas U não é um subespaço vetorial de R^3.
d) Apenas V não é um subespaço vetorial de R^3.
e) Nenhum deles é um subespaço vetorial de R^3.

Resposta

Dados os subconjuntos W = {(x, y, z) / x = 0}; U = {(x, y, z) / y = z} e V = {(x, y, z) / x = 2}, podemos afirmar que:

a) Todos são subespaços vetoriais de R^3.
b) Apenas W não é um subespaço vetorial de R^3.
c) Apenas U não é um subespaço vetorial de R^3.
d) Apenas V não é um subespaço vetorial de R^3.
e) Nenhum deles é um subespaço vetorial de R^3.

Operações com os subespaços vetoriais

Soma:

Dados U e W, subespaços vetoriais de V, definimos a soma de U com W, denotada por $U + W$, como:

- $U + W = \{s \in W \,/\, s = u + w \text{ com } u \in U \text{ e } w \in W\}$.

É imediato perceber que, para a soma $U + W$, vale a propriedade comutativa e a propriedade do elemento neutro para a adição, ou seja:

- $U + W = W + U$ e que $U + 0 = 0$.
- Note que, pela definição, se U e W são subespaços vetoriais de V; então, $U + W$ também é um subespaço vetorial de V.

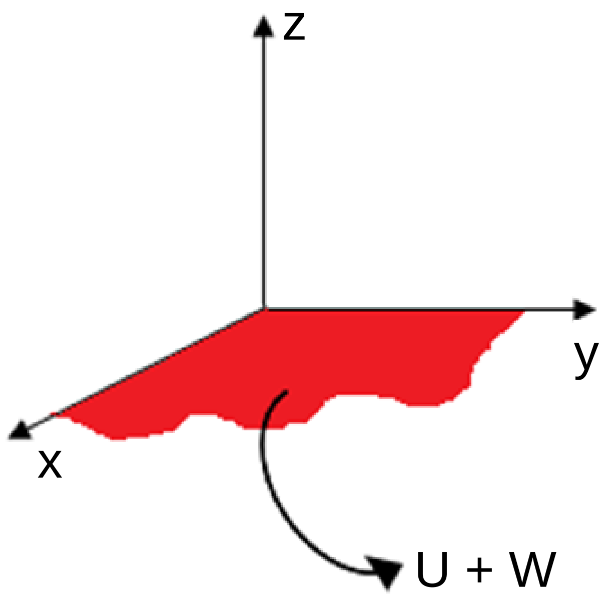
Soma de subespaços vetoriais

Vejamos o exemplo a seguir:

Sejam U = {(x, 0, 0) ∈ R^3} e W = {(0, y, 0) ∈ R^3}, determine a soma U + V:

Chamamos u = (x, 0, 0) e w = (0, y, 0); então:

- s = u + w = (x, 0, 0) + (0, y, 0) = (x + 0, 0 + y, 0 + 0);
- ∴ U + W = (x, y, 0);
- Graficamente, a soma U + W corresponde ao plano formado pelos eixos *x* e *y*.



Operações com os subespaços vetoriais

Intersecção de subespaços vetoriais:

Dados dois subespaços vetoriais U e W do espaço vetorial V, a intersecção entre U e W, denotada por $U \cap W$, é dada por:

- $U \cap W = \{r \in V \,/\, r \in U \text{ e } r \in W\}$.

Demostraremos a seguir que, se U e W são subespaços vetoriais de V, a intersecção $U \cap W$ também é um subespaço de V:

- $0 \in U \cap W$, pois $0 \in U$ e $0 \in W$;
- $\forall\ r, s \in U \cap W,\ r + s \in U \cap W$;
- $\forall\ r \in U \cap W,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \cdot r \in U \cap W$.

Operações com os subespaços vetoriais

Vejamos o exemplo a seguir:

Dado $U = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$ e $W = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$, ambos subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$, determine $U \cap W$:

- Pela definição, a intersecção entre U e W é todo vetor que, ao mesmo tempo, pertença a U e a W. Dessa forma, para determinarmos $U \cap W$ devemos igualar os vetores de U com o vetor de W;
- $(0, y) = (x, 0)$;
- Para este sistema, há uma única solução possível, portanto, o sistema possível e determinado (SPD), $x = 0$ e $y = 0$. Logo, $U \cap W = \{(0, 0)\}$.

Operações com os subespaços vetoriais

Soma direta de subespaços vetoriais:

- Sejam os subespaços vetoriais U e W do espaço vetorial V, tal que $U \cap W = \{0\}$ e $U + W = V$. Neste caso, dizemos que V é a soma direta dos subespaços U e W, e indicaremos por $V = U \oplus W$.

- Dados os subespaços $U = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ e $W = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$, verificar se $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de U e W.

Devemos verificar as condições da definição:

- I. $U \cap W = \{0\}$;
- $(x, y, 0) = (0, a, z) \Rightarrow x = 0, y = a$ e $z = 0$. Logo, $U \cap W = \{(0, a, 0) \neq (0, 0, 0)\}$;
- Como a condição (I) não foi satisfeita, $\mathbb{R}^3$ não é a soma direta de U e W.

Operações com os subespaços vetoriais

- Dados os subespaços $U = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ e $W = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$, verificar se $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de U e W.

Devemos verificar as condições da definição:

- I. $U \cap W = \{0\}$;
- $(x, 0, 0) = (0, y, z) \Rightarrow x = 0,\ y = 0$ e $z = 0$;
- Logo $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$;
- II. $U + W = V$;
- $(x, 0, 0) + (0, y, z) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$;
  - Satisfeitas as condições (I) e (II), podemos afirmar que $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de U e W.

Interatividade

Dados os subespaços S = {(x, y, 0) pertencente a $\mathbb{R}^3$} e T = {(z, z, z) pertencente a $\mathbb{R}^3$}, podemos afirmar que:

a) S + T = (x + z, y + z, z) e S intersecção T = (0, 0, 0); portanto, $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de S e T.
b) S + T = (x + z, y + z, z) e S intersecção T = (0, 0, 0); portanto, $\mathbb{R}^3$ não é a soma direta de S e T.
c) S + T = (x + z, y + z, z) e S intersecção T = (0, 0, z); portanto, $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de S e T.
d) S + T = (x + z, y + z, z) e S intersecção T = (0, 0, z); portanto, $\mathbb{R}^3$ não é a soma direta de S e T.
e) S + T = (x + z, y + z, 2z) e S intersecção T = (0, 0, 0); portanto, $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de S e T.

Resposta

Dados os subespaços S = {(x, y, 0) pertencente a $\mathbb{R}^3$} e T = {(z, z, z) pertencente a $\mathbb{R}^3$}, podemos afirmar que:

a) S + T = (x + z, y + z, z) e S intersecção T = (0, 0, 0); portanto, $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de S e T.
b) S + T = (x + z, y + z, z) e S intersecção T = (0, 0, 0); portanto, $\mathbb{R}^3$ não é a soma direta de S e T.
c) S + T = (x + z, y + z, z) e S intersecção T = (0, 0, z); portanto, $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de S e T.
d) S + T = (x + z, y + z, z) e S intersecção T = (0, 0, z); portanto, $\mathbb{R}^3$ não é a soma direta de S e T.
e) S + T = (x + z, y + z, 2z) e S intersecção T = (0, 0, 0); portanto, $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de S e T.

Combinação linear

- Seja V um espaço vetorial sobre R, considere o subconjunto $U = \{(u_1, u_2, ..., u_n) \subset V\}$. Tomemos, agora, um subconjunto de V, formado a partir de U, denotado por $[U] = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n \,/\, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ e subespaço de V.

Definição:

- Chamamos [U] de <u>subespaço gerado</u> de U e cada elemento de [U] é uma <u>combinação linear</u> de u1, u2, ..., un, ou a combinação linear de U. Podemos dizer que os vetores de U geram [U] ou, ainda, que os vetores de U são geradores.

Combinação linear

Escrever o vetor u = (4, 3) como a combinação linear dos vetores v = (1, 0) e w = (0, 1), para que *u* seja a combinação linear de *v* e *w* devemos ter:

- u = αv + βw;
- (4, 3) = α(1, 0) + β(0, 1);
- (4, 3) = (α, 0) + (0, β);
- (4, 3) = (α, β);
- Da igualdade, podemos montar o sistema: $\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 3 \end{cases}$. Logo, (4, 3) = 4(1, 0) + 3(0,1).

Base e dimensão

Dependência e independência linear:

- Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, um conjunto S = {u1, u2, ..., un} $\subset$ V, e um conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$.

I. S será linearmente independente (LI), se:

- $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0$, com $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

II. S será linearmente dependente (LD) se:

- $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0$, com, ao menos, um escalar diferente de zero.

Base e dimensão

Base:

Considere um espaço vetorial, finitamente, gerado V. Designamos de base de V o subconjunto $B \subset V$, se/e somente se:

I. $[B] = V$;

II. B é LI.

- De acordo com a definição, podemos dizer que todo vetor *v* de V é a combinação linear dos vetores da base B. Denotaremos os escalares desta combinação linear de coordenadas de *v* na base B, de acordo com a notação $v = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)_B$.

Base e dimensão

Dimensão:

- Denominamos dimensão um espaço vetorial finitamente gerado em V e a quantidade de vetores de qualquer uma de suas bases. Para a dimensão de um espaço vetorial, usaremos a notação dim V.

Vejamos o exemplo a seguir:

Base e dimensão

- Seja $V = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}^3\}$, consideremos o subconjunto $U = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Mostremos que U é a base de V.

I. [U] = V:

- $x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = (x, y, z) = V$.

II. U é LI:

- $\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \delta(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$;
- $(\alpha, 0, 0) + (0, \beta, 0) + (0, 0, \delta) = (0, 0, 0)$;
  - $(\alpha, \beta, \delta) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = \delta = 0$;
  - Como o sistema apresentou uma solução única (SPD), U é LI. Logo, U é a base V e dim V = 3.

Interatividade

Dado o subespaço $S = \{(x, y, z) \; / \; z = 2x + 3y\}$ do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, assinale a alternativa que indica uma base e a dimensão do subespaço indicado:

a) $S = [(1, 0, -2), (0, 1, -3)]$ e dimensão 2.
b) $S = [(1, 0, 2), (0, 1, 3)]$ e dimensão 2.
c) $S = [(1, 0, -2), (0, 1, 3)]$ e dimensão 3.
d) $S = [(1, 0, 2), (0, 1, 3)]$ e dimensão 3.
e) $S = [(1, 0, 2), (0, 1, -3)]$ e dimensão 2.

Resposta

Dado o subespaço $S = \{(x, y, z) \mid z = 2x + 3y\}$ do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, assinale a alternativa que indica uma base e a dimensão do subespaço indicado:

a) S = [(1, 0, -2), (0, 1, -3)] e dimensão 2.
b) S = [(1, 0, 2), (0, 1, 3)] e dimensão 2.
c) S = [(1, 0, -2), (0, 1, 3)] e dimensão 3.
d) S = [(1, 0, 2), (0, 1, 3)] e dimensão 3.
e) S = [(1, 0, 2), (0, 1, -3)] e dimensão 2.

ATÉ A PRÓXIMA!