Unidade II

5 INTERPOLAÇÃO

5.1 Introdução

Trata-se de uma técnica utilizada no campo do cálculo numérico para estimar valores desconhecidos de uma função existentes entre valores conhecidos. É uma forma de aproximar uma função f(x) a partir de um conjunto discreto de pontos. Em geral, conhecemos apenas um conjunto finito de pontos da função, mas desejamos saber o valor da função em pontos intermediários aos pontos desse conjunto finito ou até mesmo fora desse conjunto.

O objetivo da interpolação é construir uma função, chamada de função interpoladora, que se ajuste aos pontos de dados conhecidos. Ela é escolhida de forma que passe exatamente pelos pontos amostrados, fornecendo estimativas precisas para os valores desconhecidos entre os pontos. Em outras palavras, consideremos (n+1) pontos distintos: $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, chamados de nós da interpolação, e os valores da função f(x) nesses pontos: $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$,..., $f(x_n)$. A interpolação de f(x) consiste em se obter uma função g(x) tal que:

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ g(x_2) = f(x_2) \\ \vdots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

Representando graficamente:

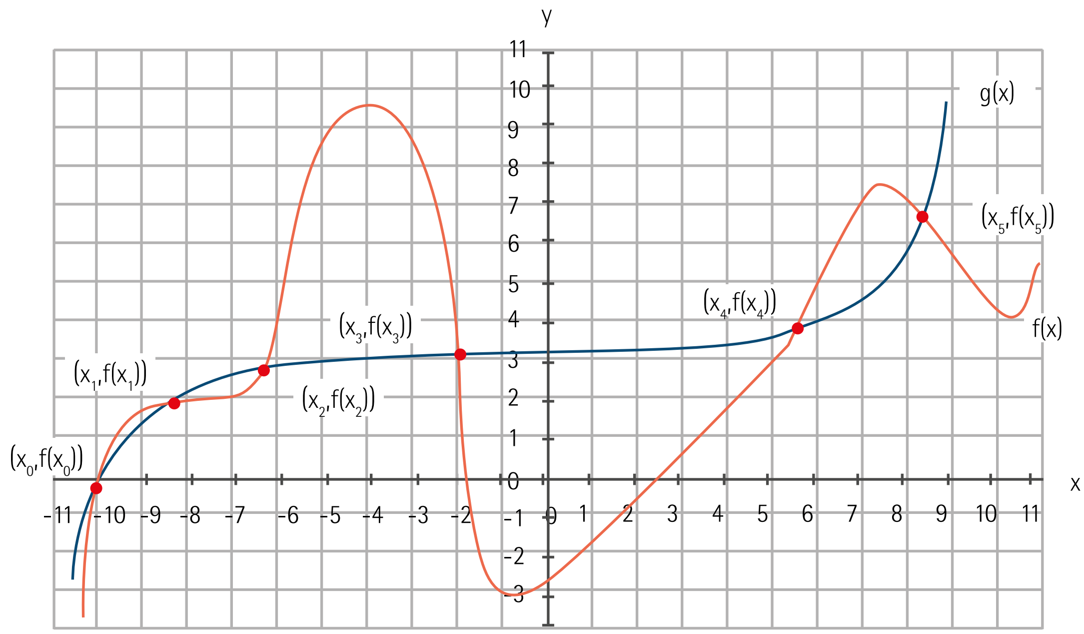

Figura 7

Existem vários métodos de interpolação disponíveis, e os mais comuns são o método de interpolação polinomial, a fórmula de Taylor, a interpolação de Hermite e a interpolação por funções trigonométricas.

5.2 Interpolação polinomial

É um método de interpolação amplamente utilizado no cálculo numérico. Ele aproxima uma função f(x) entre pontos conhecidos por meio de um polinômio que passa exatamente por esses pontos. A ideia básica da interpolação polinomial é construir p(x), um polinômio de grau n e cujo gráfico passe pelos n+1 pontos conhecidos, dados por $(x_0,f(x_0))$, $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$,..., $(x_n,f(x_n)$, ou seja, $p(x_i) = f(x_i)$ para todo $i = 0,1,2,..., n$. Dessa forma, obtemos o seguinte sistema de equações lineares de ordem n+1:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_1x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n = p(x_0) = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n = p(x_1) = f(x_1) \\ a_0 + a_1x_2 + a_1x_2^2 + \ldots + a_nx_2^n = p(x_2) = f(x_2) \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_1x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n = p(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

Nesse caso, a matriz A dos coeficientes do sistema linear anterior será dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Essa matriz dos coeficientes A é uma matriz de Vandermonde, portanto, desde que $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ sejam pontos distintos, teremos det (A) ≠ 0, o que implica que o sistema linear obtido anteriormente admite solução única. Logo, o resultado a seguir fica justificado e garante a existência e unicidade do polinômio interpolador da função f(x).

Teorema

Existe um único polinômio p(x), de grau menor ou igual a n, tal que $p(x_i) = f(x_i)$ para todo i = 0,1,2, ..., n desde que $x_k \neq x_j$ quando $j \neq k$.

Existem várias formas de se obter o polinômio interpolador, e uma delas é resolver o sistema linear obtido anteriormente. Podemos ainda utilizar outras maneiras, como o método de Lagrange e o método de Newton. Ambos são baseados no uso de polinômios interpoladores e diferem na forma como os coeficientes do polinômio são determinados.

Após a definição do polinômio interpolador, ele poderá ser usado para estimar valores da função f(x) para pontos x que estão entre os pontos conhecidos ou, ainda, pontos x que estão fora do conjunto $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ do intervalo amostrado. No entanto, é importante destacar que a interpolação polinomial pode levar a resultados indesejáveis, como oscilações excessivas entre os pontos, especialmente se o número de pontos amostrados for grande ou se os pontos estiverem muito espaçados.

Em casos em que a interpolação polinomial não é adequada, outros métodos de interpolação, como interpolação por splines ou interpolação de Hermite, podem ser aplicados para obter resultados mais suaves e precisos. A escolha do método de interpolação depende da natureza dos dados e dos requisitos específicos da aplicação.

Lembrete

O objetivo da interpolação é construir uma função, chamada de função interpoladora, que se ajuste aos pontos de dados conhecidos.

5.2.1 Forma de Lagrange

Trata-se de um método comum de interpolação polinomial que consiste em determinar p(x) como uma combinação linear de polinômios L_k (x) tais que

$p(x_i) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + y_2L_2(x_i) + \ldots + y_nL_n(x_i) = y_i$

Onde $y_i = f(x_i)$ para todo i = 0,1,2, ..., n

A forma mais simples de se determinar os polinômios $L_k(x_i)$, de modo que a igualdade que define $p(x_i)$ seja verdadeira, é impor:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } k \neq i \\ 1 \text{ se } k = i \end{cases}; \text{ para todo } i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Para isso, definimos $L_k(x)$, para todo i=0,1,2, ..., n por

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

Dessa maneira, para todo K = 0,1,2, ..., n e todo i=0,1,2, ..., n, teremos que

$$\begin{cases} L_k(x_k) = 1 \\ L_k(x_i) = 0 \end{cases}$$

Note que cada um dos polinômios $L_k(x)$ tem grau n, pois é um produto de fatores da forma $(x - x_i)$ para todo i=0,1,2, ..., n com $k \neq i$. Portanto, a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

Exemplo de aplicação

Utilize a forma de Lagrange e os dados da tabela a seguir para determinar a interpolação polinomial de grau 2 para a função f(x).

Tabela 13

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

Solução

Pela forma de Lagrange, temos que o polinômio interpolador p(x) de grau 2 é dado por $p(x) = y_0L_0\,(x) + y_1L_1\,(x) + y_2L_2\,(x)$

Onde

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-(0))(x-(2))}{((-1)-(0))((-1)-(2))}=\frac{x^2-2x}{3}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-(-1))(x-(2))}{((0)-(-1))((-1)-(2))}=\frac{x^2-x-2}{-2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-(-1))(x-(0))}{((2)-(-1))((2)-(0))}=\frac{x^2+x}{6}$$

Dessa forma, substituindo $L_0(x)$, $L_1(x)$, e $L_2(x)$, na igualdade que define o polinômio interpolador, obtemos a seguinte solução:

$$p(x)=(4)\left(\frac{x^2-2x}{3}\right)+(1)\left(\frac{x^2-x-2}{-2}\right)+(-1)\left(\frac{x^2+x}{6}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{7}{3}x+1$$

A forma de Lagrange é uma abordagem bastante simples para a interpolação polinomial. No entanto, ela pode se tornar computacionalmente ineficiente para um grande número de pontos amostrados, uma vez que é necessário calcular todos os polinômios $L_k\,(x)$ do polinômio interpolador. Nesses casos, outros métodos de interpolação podem ser mais eficientes.

5.2.2 Forma de Newton

É outro método utilizado para construir um polinômio interpolador p(x) para uma função f(x) preestabelecida. Diferentemente da forma de Lagrange, a de Newton expressa o polinômio interpolador em termos das "diferenças divididas dos pontos de dados", representadas por d_k para todo índice k = 1,2,3, ..., n e definidas a seguir.

Cálculo de $\mathbf{d_0}$:

$d_0 = f[x_0] = f(x_0)$

Cálculo de $\mathbf{d}_1$:

$$d_1 = f\left[x_0,\, x_1\right] = \frac{f\left[x_1\right] - f\left[x_0\right]}{x_1 - x_0} = \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}$$

Cálculo de $\mathbf{d}_2$:

$$d_2 = f\left[x_0,\, x_1,\, x_2\right] = \frac{f\left[x_1,\, x_2\right] - f\left[x_0,\, x_1\right]}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Cálculo de $\mathbf{d}_3$:

$$d_3 = f\left[x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3\right] = \frac{f\left[x_1,\, x_2,\, x_3\right] - f\left[x_0,\, x_1,\, x_2\right]}{x_3 - x_0} =$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{f\left(x_3\right) - f\left(x_2\right)}{x_3 - x_2} - \dfrac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_0} - \dfrac{\dfrac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}}{x_3 - x_0}$$

Cálculo de $\mathbf{d}_4$:

$$d_4 = f\left[x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4\right] = \frac{f\left[x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4\right] - f\left[x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3\right]}{x_4 - x_0} =$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f\left(x_3\right) - f\left(x_2\right)}{x_3 - x_2} - \dfrac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_0} - \dfrac{\dfrac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}}{x_3 - x_0}}{x_4 - x_0} -$$

De uma maneira geral, seguindo recursivamente como nos cálculos anteriores para encontrar d_k, podemos determinar o valor do último coeficiente d_n pela igualdade a seguir:

$$d_n = f\left[x_0,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\right] = \frac{f\left[x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\right] - f\left[x_0,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1}\right]}{x_n - x_0}$$

Podemos agora utilizar a forma de Newton para definir p(x), polinômio interpolador para uma função f(x) contínua e com tantas derivadas contínuas quantas necessárias em um intervalo de números reais [a, b]. Considerando os pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, o polinômio que interpola uma função f(x) nos pontos x_{0}, $x0_{1}$, $x0_{2}$, ... x_n é dado pela seguinte igualdade:

$$p(x) = d_0 + d_1 (x - x_0) + d_2 (x - x_0) (x - x_1) + ...$$

$$... + d_n (x - x_0) (x - x_1) ... (x - x_{n-1})$$

Uma das vantagens da forma de Newton é que, uma vez que as diferenças divididas são calculadas, é possível acrescentar pontos adicionais sem a necessidade de recalcular todo o polinômio interpolador, facilitando a atualização do polinômio conforme novos pontos de dados são considerados. Para isso, a tabela a seguir pode tornar a atualização do polinômio interpolador menos trabalhosa, pois já organiza os valores para os cálculos novos dos coeficientes d_k que poderão ser usados.

Tabela 14

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	...	Ordem n
	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$			
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$		
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	$\vdots$	$\ddots$	
		$f[x_3, x_4]$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n]$
x_4	$f[x_4]$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$⋰$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
$\vdots$		$f[x_{n-1}, x_n]$				
x_n	$f[x_n]$					

É importante observar que o grau de p(x), polinômio interpolador obtido através da forma de Newton, pode variar de 1 até n, de acordo com a conveniência ou exigência.

Exemplo de aplicação

Seja f(x) tabelada a seguir.

Tabela 15

x	-1	0	1	2	3
f(x)	1	1	0	-1	-2

Determine, por meio da forma de Newton, o polinômio interpolador de grau 4 para a função f(x) cujo gráfico passa pelos pares de pontos (x, f(x)) tabelados.

Solução

Sua tabela de diferenças divididas é dada por:

Tabela 16

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				

Para fazer os cálculos dos coeficientes dessa tabela, utilizaremos as fórmulas definidas anteriormente. Substituindo esses valores após os cálculos, obtemos a atualização da tabela:

Tabela 17

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-1	1				
		0			
0	1				
			$-1/2$		
		-1			
				$1/6$	
1	0		0		
					$-1/24$
		-1		0	
2	-1		0		
		-1			
3	-1				

Assim, a fórmula do polinômio interpolador de f(x) determinado pela forma de Newton é dada por

$$p(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$
$$+ d_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Logo, substituindo os valores calculados na tabela anterior, obtemos a seguinte igualdade:

$$p(x) = (1) + (0)(x - (1)) + \left(-1/2\right)(x - (1))(x - (0)) +$$
$$+ \left(1/6\right)(x - (1))(x - (0))(x - (1)) +$$
$$+ \left(-1/24\right)(x - (1))(x - (0))(x - (1))(x - (2))$$

Efetuando os cálculos pertinentes

$$p(x) = 1 + 0(x - 1) + \left(-1/2\right)\left(x^2 - x\right) +$$
$$+ \left(1/6\right)\left(x^3 - 2x^2 + x\right) +$$
$$+ \left(-1/24\right)\left(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 2x\right)$$

Seguindo com os cálculos

$$p(x) = 1 + \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x\right) +$$
$$+\left(\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{6}x\right) +$$
$$+\left(-\tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac{1}{24}x^2 + \tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{12}x\right)$$

Colocando as variáveis em evidência, obtemos

$$p(x) = 1 + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{12}\right)x + \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{6}\right)x^2 +$$
$$+\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12}\right)x^3 + \left(-\tfrac{1}{24}\right)x^4$$

Portanto, a solução encontrada utilizando-se a forma de Newton é o seguinte polinômio interpolador:

$$p(x) = 1 + \frac{3}{4}x - \frac{25}{24}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^4$$

Para entender melhor o exposto, observe com atenção a sequência de exercícios resolvidos como exemplos.

Exemplos de aplicação

Exemplo 1

Dada a tabela a seguir, determine a interpolação polinomial para os dados contidos na tabela utilizando a forma de Lagrange.

Tabela 18

x	-2	0	2	4
y	4	2	0	3

Solução

Pela forma de Lagrange, temos que o polinômio interpolador p(x) é dado por:

$$p(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x)$$

Precisamos agora determinar os polinômios de Lagrange $L_i(x)$.

Cálculo de **L_0 (x)**:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=$$
$$=\frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(-2-0)(-2-2)(-2-4)}=\frac{x^3-6x^2+8x}{-48}$$

Cálculo de **L_1 (x)**:

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=$$
$$=\frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(0+2)(0-2)(0-4)}=\frac{x^3-4x^2-4x+16}{16}$$

Cálculo de **L_2 (x)**:

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{(x+2)(x-0)(x-4)}{(2+2)(2-0)(2-4)}=\frac{x^3-2x^2-8x}{-16}$$

Cálculo de **L_3 (x)**:

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{(x+2)(x-0)(x-2)}{(4+2)(4-0)(4-2)}=\frac{x^3-4x}{48}$$

Dessa forma, substituindo $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ e $L_3(x)$ na igualdade que define o polinômio interpolador, obtemos a seguinte solução:

$$p(x)=(4)\left(\frac{x^3-6x^2+8x}{-48}\right)+(2)\left(\frac{x^3-4x^2-4x+16}{16}\right)+$$
$$+(0)\left(\frac{x^3-2x^2-8x}{-16}\right)+(3)\left(\frac{x^3-4x}{48}\right)=$$
$$=\left(\frac{x^3-6x^2+8x}{-12}\right)+\left(\frac{x^3-4x^2-4x+16}{8}\right)+0+\left(\frac{x^3-4x}{16}\right)=$$
$$=\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)x^3+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)x+2$$

Portanto, o polinômio interpolador dos dados iniciais, obtido pela forma de Lagrange, é

$$p(x) = -\frac{5}{24}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{17}{12}x + 2$$

Exemplo 2

Seja a função $f(x) = \sqrt{x} + x^2$ tabelada a seguir.

Tabela 19

x	0	1,5	3	4,5	6
y	0	3,47	10,73	22,37	38,45

Aproxime f(2,9) usando interpolação quadrática pela forma de Newton.

Solução

Como o polinômio interpolador procurado tem grau 2 e, considerando o valor $x = 2{,}9$, vamos conceber a nova tabela de dados.

Tabela 20

x	1,5	3	4,5
y	3,47	10,73	22,37

A partir da nova tabela de dados (x, y), obtemos a seguinte tabela das diferenças divididas:

Tabela 21

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1]$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$
		$f[x_1, x_2]$	
x_2	$f[x_2]$		

Para fazer os cálculos dos coeficientes dessa tabela, aplicaremos as fórmulas definidas anteriormente. Substituindo esses valores após os cálculos, obtemos a atualização da tabela:

Tabela 22

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1,5	3,47		
		4,84	
3	10,73		0,9733
		7,76	
4,5	22,37		

Assim, a fórmula do polinômio interpolador de f(x) determinado pela forma de Newton é dada por

$p(x) = d_0 + d_1 (x - x_0) + d_2 (x - x_0)(x - x_1) =$

$= 3,47 + (4,84) (x - 1,5) + (0,9733) (x - 1,5) (x - 3) =$

$= 3,47 + 4,84 x - 7,26 + (0,9733) (x^2 - 4,5 x + 4,5) =$

$= 3,47 + 4,84 x - 7,26 + 0,9733 x^2 - 4,3799 x + 4,3799 =$

Portanto, o polinômio interpolador de f(x) obtido pela forma de Newton é

$p(x) = 0,9733 x^2 + 0,4601 x + 0,5899$

Dessa forma, para x = 2,9 teremos a seguinte aproximação:

$$p(x) = 0,9733(2,9)^2 + 0,4601(2,9) + 0,5899 =$$
$$= 0,9733(8,41) + 0,4601(2,9) + 0,5899 =$$
$$\cong 10,1096$$

Exemplo 3

Considere os dados da tabela a seguir para determinar a interpolação polinomial de grau 2 para a função f(x) utilizando a forma de Newton.

Tabela 23

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

Solução

A partir da tabela de dados (x, y), obtemos as seguintes tabelas das diferenças divididas:

Tabela 24

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1]$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$
		$f[x_1, x_2]$	
x_2	$f[x_2]$		

Para fazer os cálculos dos coeficientes desta tabela, utilizaremos as fórmulas definidas anteriormente. Substituindo estes valores após os cálculos obtemos a atualização da tabela dada por

Tabela 25

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
-1	4		
		-3	
0	1		$2/3$
		-1	
2	-1		

Assim, a fórmula do polinômio interpolador de f(x) determinado pela forma de Newton é dada por

$$p(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) =$$
$$= 4 + (-3)(x+1) + 2/3\,(x+1)(x-0)$$

Portanto, o polinômio interpolador de f(x) obtido pela forma de Newton é

$$p(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$$

Lembrete

O grau de $p(x)$, polinômio interpolador obtido através da forma de Newton, pode variar de 1 até n, de acordo com a conveniência ou exigência.

6 ESTUDO DO ERRO NA INTERPOLAÇÃO

O estudo do erro na interpolação é uma parte fundamental da análise e do projeto de métodos de interpolação. Esse estudo nos ajuda a sabermos quão próximo $f(x)$ está de $p(x)$. Em geral, o erro na interpolação pode ser dividido em dois tipos:

- **Erro de interpolação local**: também conhecido como erro de truncamento, refere-se à diferença entre o valor exato da função e o valor interpolado em um ponto específico e é influenciado pelo comportamento local da função e pelo grau do polinômio interpolador.

- **Erro de interpolação global**: também conhecido como erro de aproximação, refere-se à diferença geral entre a função real e o polinômio interpolador em todo o intervalo de interpolação. Esse erro é afetado pela distribuição dos pontos amostrados, pelo grau do polinômio interpolador e pelas propriedades da função a ser interpolada.

Observamos que, ao aproximarmos $f(x)$ pelo polinômio interpolador $p(x)$, de grau menor ou igual a **n**, o erro cometido está relacionado com a derivada de ordem $(n+1)$ de $f(x)$ e pode ser estimado por

$$E(x) = \left|f(x) - p(x)\right| = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi x)}{(n+1)!}$$

Onde $\xi_x \in \left(x_0,\, x_n\right)$

Podemos também estimar o erro utilizando as diferenças divididas até a ordem n por meio da seguinte igualdade:

$$E(x) = \left|f(x) - p(x)\right| = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)\frac{\underset{0 \le k \le n}{\text{máx}} |d_k|}{(n+1)!}$$

É importante ressaltar que, em alguns casos, a interpolação polinomial pode levar a resultados indesejáveis, como oscilações excessivas entre os pontos ou amplificação de erros. Nessas situações, outras abordagens de interpolação podem ser mais adequadas para controlar e minimizar o erro cometido. Além disso, o estudo do erro na interpolação é essencial para compreender a precisão e a confiabilidade dos resultados obtidos por meio de métodos de interpolação.

Exemplo de aplicação

Considere que a função ln (x) está tabelada a seguir. Calcule o valor de ln (3,7) por interpolação linear, onde:

Tabela 26

x	1	2	3	4
ln(x)	0	0,6931	1,0986	1,3863

Seja f(x) = ln (x) . Como x = ln (3,7)$\in$ (3,4), vamos escolher os valores $x_0 = 3$ e $x_1 = 4$. Pela forma de Newton, temos

$$p(x) = d_0 + d_1(x - x_0) = f(x_0) + f[x_0,\ x_1](x - x_0) =$$
$$= \ln(x_0) + \frac{\ln(x_1) - \ln(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) = \ln(3) + \frac{\ln(4) - \ln(3)}{4 - 3}(x - 3) =$$
$$= 1{,}0986 + \frac{1{,}3863 - 1{,}0986}{1}(x - 3)$$

Logo, a interpolação linear será

p(x) = 1,0986 + 0,2877 · (x-3)

O que implica

$$p(3{,}7) = 1{,}0986 + 0{,}2877.((3{,}7) - 3) \cong 1{,}300$$

Assim, com quatro casas decimais, temos

$$\ln(3{,}7) \cong 1{,}3083$$

Dessa forma, o erro cometido é

$$E(3{,}7) = |\ln(3{,}7) - p(3{,}7)| = |1{,}3083 - 1{,}3| = 0{,}0083 = 8{,}3 \times 10^{-3}$$

Queremos, nesse exemplo, mostrar que ξx, que aparece na expressão de estimativa do erro definida anteriormente, é realmente uma função de x.

De fato, pela expressão da estimativa e para x = 3,7, temos que

$$E(x) = (x - x_0)(x - x_1)\frac{f^{(n+1)}(\xi x)}{(n+1)!}$$

$$= (3,7 - 3)(3,7 - 4)\frac{f''(\xi x)}{2!} = 0,0083$$

Mas

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Continuando com os cálculos

$$E(3,7) = (0,7)(-0,3)\left(-\frac{1}{2\xi_x^2}\right) = 0,0083 \Rightarrow \xi_x = 3,5578$$

Note que $\xi_x \in (3,4)$ e, além disso, se $x \neq 3,7$, deveremos ter $\xi_x = 3,5578$.

Saiba mais

Para se aprofundar em interpolação polinomial e erro da interpolação, recomendamos os subcapítulos 3.1 até 3.7 do livro acentuado a seguir:

CAMPOS FILHO, F. F. *Algoritmos numéricos*: uma abordagem moderna de cálculo numérico. 3. ed. São Paulo: Grupo GEN, 2018.

7 AJUSTE DE CURVAS PELO MÉTODO DOS QUADRADOS MÍNIMOS

7.1 Introdução

Vimos anteriormente que uma forma de se trabalhar com uma função definida por um conjunto de valores é a **interpolação polinomial**. Contudo, a interpolação pode não ser aconselhável quando é preciso obter um valor aproximado da função em algum ponto fora do intervalo determinado pelo conjunto de valores dado, ou seja, quando se quer extrapolar. Além disso, quando o conjunto de valores é resultado de algum experimento prático ou de alguma pesquisa, a interpolação pode não ser aconselhável, pois nesses casos os valores podem conter erros inerentes que, em geral, não são previsíveis.

Assim, será necessário ajustar as funções dadas a uma função que seja uma "boa aproximação" para o conjunto de valores dado e que nos permita "extrapolar" esse conjunto de valores com certa margem de segurança. O **ajuste de curvas pelo método dos quadrados mínimos** é uma técnica amplamente utilizada para encontrar tal função, pois oferece uma abordagem sistemática para determinar a função que representa o melhor ajuste possível ao conjunto de dados. O objetivo do ajuste proposto pelo método é encontrar uma curva que minimize a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os valores preditos pela função ajustada.

O procedimento básico do método dos quadrados mínimos envolve a escolha de uma função que representa a curva desejada e a determinação dos valores dos parâmetros que minimizam a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os valores preditos pela função. A partir daí, são aplicadas técnicas de otimização para se determinar os valores dos parâmetros de modo que a solução resultante forneça a função que melhor se adapta ao conjunto de dados.

É importante ressaltar que a escolha adequada da função a ser utilizada na aproximação é fundamental para obter um ajuste de curva preciso e significativo. Diferentes funções podem ser usadas, desde funções polinomiais simples até mais complexas, como exponenciais, logarítmicas ou trigonométricas. A seleção da função depende da natureza dos dados e do conhecimento prévio sobre o fenômeno em estudo, pois poderá proporcionar análises mais precisas e confiáveis.

Além disso, devemos observar que, embora o método dos quadrados mínimos seja uma técnica matemática bastante aplicada no ajuste de curvas a um conjunto de dados experimentais, para garantir que a função obtida no processo minimize a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os valores preditos pela curva ajustada, são necessários alguns pré-requisitos, como o conhecimento do cálculo diferencial e integral.

7.2 Método dos quadrados mínimos

Consideremos uma função qualquer $f(x)$ e o conjunto de m pares ordenados $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, ..., $(x_m, f(x_m))$. Sejam $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$ as n funções escolhidas convenientemente de alguma forma. Consideremos que m, o número de pares ordenados $(x_i, f(x_i))$ dados, seja maior ou igual a n, o número de funções $g_1(x)$ escolhidas. Definimos por meio do método dos quadrados mínimos a função $\varphi(x)$ que aproxima melhor a função $f(x)$ pela seguinte igualdade:

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x)$$

Calculando os valores $\varphi(x_1)$ e utilizando a ferramentas do cálculo diferencial e integral para garantir que $\varphi(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$, vamos determinar um sistema linear com n equações e n incógnitas dado por

$$S:\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + & a_{12}\alpha_2 + & a_{13}\alpha_3 + & & +a_{1n}\alpha_n & = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + & a_{22}\alpha_2 + & a_{23}\alpha_3 + & \cdots & +a_{2n}\alpha_n & = b_2 \\ a_{31}\alpha_1 + & a_{32}\alpha_2 + & a_{33}\alpha_3 + & & +a_{3n}\alpha_n & = b_3 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{n1}\alpha_1 + & a_{n2}\alpha_2 + & a_{n3}\alpha_3 + & \cdots & +a_{nn}\alpha_n & = b_n \end{cases}$$

Assim, a matriz dos coeficientes $A = (a_{ij})$ e seus elementos serão dados como descrito a seguir.

- **Caso discreto**: quando f(x) é arbitrária, o que já estamos considerando. Dessa forma, o termo geral da matriz dos coeficiente A será

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)\,g_j(x_k) = a_{ji}$$

A matriz A é simétrica. Além disso, temos a matriz incógnita $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ e a matriz resultante $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, onde

$$b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)\,g_i(x_k)$$

- **Caso contínuo**: essa situação exige a condição extra de que a função f(x) seja contínua em um intervalo [a, b]. Nesse caso, os coeficientes da matriz A serão definidos por

$$a_{ij} = \int_a^b g_i(x)\,g_j(x)\;dx = a_{ji}$$

Além disso, teremos a matriz incógnita $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ e a matriz resultante $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, onde

$$b_i = \int_a^b f(x)\,g_i(x)\;dx$$

Observação

O procedimento básico do método dos quadrados mínimos envolve as seguintes etapas:

- **Formulação do problema:** primeiramente é necessário formular o problema, definindo a função $\varphi(x)$, que representa a curva a ser ajustada. Ela pode ser uma função linear, polinomial, exponencial, logarítmica ou qualquer outra função adequada para o problema em questão. Representar os pontos $(x_i, f(x_i))$ em um diagrama de dispersão pode auxiliar a escolha da função $\varphi(x)$.

- **Resolução do sistema de equações:** a otimização da aproximação $\varphi(x)$ para a função $f(x)$ gera o sistema linear $A \cdot \alpha = b$ na variável $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Esse sistema é resolvido para encontrar os valores ótimos dos parâmetros α_i que minimizam a função objetivo $\varphi(x)$.

- **Caso contínuo e caso não linear:** estamos interessados, apenas, na abordagem detalhada do caso discreto para o método dos quadrados mínimos. Contudo, faremos menções e resolveremos alguns exemplos e exercícios para os casos contínuo e não linear para mostrar a eficiência proporcionada pelo método dos quadrados mínimos.

O método dos quadrados mínimos permite modelar dados experimentais, estimar parâmetros desconhecidos e fazer previsões com base em observações limitadas. É importante reforçar que, em alguns casos, é necessário realizar análises adicionais para verificar a qualidade do ajuste, como análise de resíduos, cálculo de intervalos de confiança ou teste de significância estatística. Essas análises ajudam a avaliar a adequação do modelo aos dados e a identificar possíveis limitações ou problemas no ajuste.

Há ainda o risco de que as funções g_i (x) escolhidas na definição de $\varphi(x)$ sejam não lineares nos valores α_i considerados. Nesse caso, o sistema obtido também será não linear e será mais difícil de resolvê-lo. Dessa forma, primeiro deveremos efetuar uma linearização do problema por meio de alguma transformação conveniente. Depois, o método dos quadrados mínimos poderá ser aplicado na resolução do problema linearizado, conforme descrevemos anteriormente. Todavia, é essencial observar que estamos ajustando o problema linearizado, e não o problema original, portanto não se pode afirmar que os parâmetros α_i obtidos serão os que ajustam $\phi(x)$ à $f(x)$ dentro do critério dos mínimos quadrados.

Exemplos de aplicação

Exemplos 1

(Caso discreto) Considerando os pontos $(x_i, f(x_i))$ dados na tabela a seguir, utilize o método dos quadrados mínimos para a aproximar a função f(x)

Tabela 27

x	-1	-0,75	-0,6	-0,5	-0,3	0	0,2	0,4	0,5	0,7	1
f(x)	2,05	1,153	0,45	0,4	0,5	0	0,2	0,6	0,512	1,2	2,05

Solução

Fazendo o diagrama de dispersão dos pontos da tabela, obtemos:

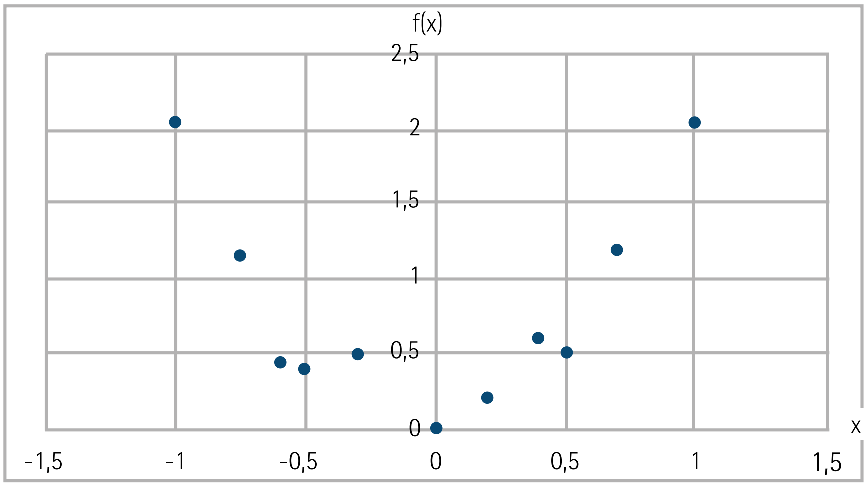

Figura 8

Observando o diagrama de dispersão obtido, podemos concluir que a função f(x) pode ser aproximada por uma parábola passando pela origem do sistema de coordenadas, isto é,

$$f(x) \cong \varphi(x) = \alpha x^2$$

Nesse caso, temos apenas um coeficiente α a determinar e apenas uma função $g(x) = x^2$. Vamos agora definir os parâmetros desejados com o auxílio da tabela a seguir.

Tabela 28

x	-1	-0,75	-0,6	-0,5	-0,3	0	0,2	0,4	0,5	0,7	1
g(x).g(x)	1	0,3164	0,1296	0,0625	0,0081	0	0,0016	0,0256	0,0625	0,2401	1
f(x).g(x)	2,05	0,6486	0,162	0,1	0,045	0	0,008	0,096	0,128	0,588	2,05

Efetuando a soma da segunda e terceira linhas da tabela anterior, obtemos os valores a seguir:

$$a = \sum g(x).g(x) = 2{,}8464$$

E também

$$b = \sum f(x).g(x) = 5{,}8756$$

Logo, a equação que aproxima a função f(x) obtida pelo método dos quadrados mínimos é $a.\alpha = b$ e pode ser resolvida por

$$a.\alpha = b \Rightarrow 2{,}8464.\alpha = 5{,}8756 \Rightarrow \alpha \frac{5{,}8756}{2{,}8464} \Rightarrow \alpha = 2{,}0642$$

Portanto, a função $\varphi(x)=2{,}0642.x^2$ é a parábola que melhor aproxima a função f(x), dada pela tabela inicial, no sentido dos quadrados mínimos. Podemos ainda ilustrar a solução encontrada graficamente:

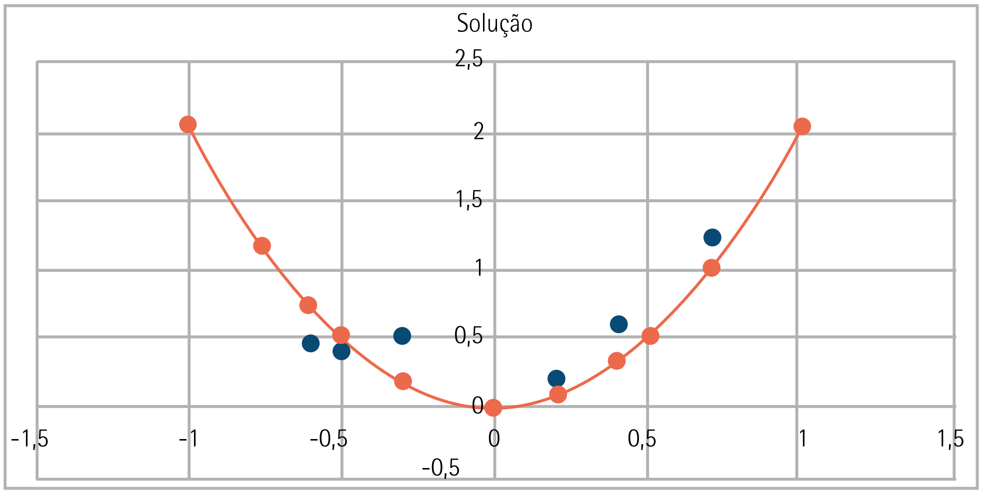

Figura 9

Exemplo 2

(Caso contínuo) Seja $f(x) = e^x$ para todo $x \in [0,1]$. Utilize o método dos quadrados mínimos para aproximar f(x) por uma parábola.

Solução

Como queremos aproximar f(x) por uma parábola, devemos ter a função a ser aproximada dada por

$$\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2. + \alpha_3.x^2$$

Dessa forma, $g_1(x) = 1$; $g_2(x) = x$ e $g_3(x) = x^2$. Nesse caso, já podemos determinar os termos da matriz dos coeficientes do sistema de equações lineares $A \cdot \alpha = b$ obtido, onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Como estamos ponderando o caso contínuo, vamos utilizar as ferramentas do cálculo diferencial e integral que consideramos já conhecidas e dominadas.

Cálculos para os coeficientes a_{ij}:

$$a_{11} = \int_0^1 g_1(x).g_1(x)\ dx = \int_0^1 1\ dx = x\,\Big|_0^1 = (1) - (0) = 1$$

$$a_{22} = \int_0^1 g_2(x).g_2(x)\ dx = \int_0^1 x^2\ dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{(1)^3}{3}\right) - \left(\frac{(0)^3}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$a_{33} = \int_0^1 g_3(x).g_3(x)\ dx = \int_0^1 x^4\ dx = \left.\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \left(\frac{(1)^5}{5}\right) - \left(\frac{(0)^5}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$a_{12} = \int_0^1 g_1(x).g_2(x)\ dx = \int_0^1 x\ dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{(1)^1}{2}\right) - \left(\frac{(0)^2}{2}\right) = \frac{1}{2} = a_{21}$$

$$a_{13} = \int_0^1 g_1(x).g_3(x)\ dx = \int_0^1 x^2\ dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{(1)^3}{3}\right) - \left(\frac{(0)^3}{3}\right) = \frac{1}{3} = a_{31}$$

$$a_{23} = \int_0^1 g_2(x).g_3(x)\ dx = \int_0^1 x^3\ dx = \left.\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{(1)^4}{4}\right) - \left(\frac{(0)^4}{4}\right) = \frac{1}{4} = a_{32}$$

Cálculos para os coeficientes b_i:

$$b_1 = \int_0^1 f(x).g_1(x)\ dx = \int_0^1 e^x\ dx = \left. e^x \right]_0^1 = \left(e^1\right) - \left(e^0\right) = e - 1 \cong 1{,}7183$$

$$b_2 = \int_0^1 f(x).g_2(x)\ dx = \int_0^1 e^x.x\ dx = \ldots = 1$$

$$b_3 = \int_0^1 f(x).g_3(x)\ dx = \int_0^1 e^x.x^2\ dx = \ldots = 0{,}7183$$

Assim, obtemos o sistema

$$A.\,\alpha = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}7183 \\ 1 \\ 0{,}7183 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema linear, obtemos a solução $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e cujos valores são:

$\alpha_1 = 1{,}012$

$\alpha_2 = 0{,}8522$

$\alpha_3 = 0{,}8393$

Portanto, segundo o método dos quadrados mínimos, a solução que melhor aproxima a função exponencial $f(x) = e^x$ por uma função quadrática, isto é, uma parábola, é a função

$$\varphi(x) = 1{,}012 + 0{,}8522 \cdot x + 0{,}8393 \cdot x^2$$

Observação

É importante observar que os detalhes dos cálculos dos coeficientes b_2 e b_3 foram omitidos para não causar grandes confusões na compreensão, pois envolvem uma técnica de integração de funções mais refinada chamada de integração por partes. Contudo, a justificativa dessa técnica, bem como a explicação de sua utilização, é encontrada em qualquer livro de cálculo diferencial e integral.

Exemplo 3

(Caso não linear) Considere o conjunto de dados da tabela a seguir e, utilizando o método dos quadrados mínimos, aproxime f(x) pela seguinte função:

$$\varphi(x) = \alpha^1 \cdot x^{\alpha 2}$$

Tabela 29

x	0,25	1	2	4	8
f(x)	4,5	2	1,5	0,9	0,5

Solução

Inicialmente, observemos que $\varphi(x)$ é não linear, pois α_2 é o expoente da variável x. Para resolvermos esse entrave, faremos uma linearização do problema. Vamos considerar y= $\varphi(x)$ e aplicar o logaritmo natural na igualdade que define $\varphi(x)$.

$$y = \alpha_1 \cdot x^{\alpha 2} \Rightarrow \ln(y) = \ln(\alpha_1 \cdot x^{\alpha 2}) \Rightarrow \ln(y) = \ln(\alpha_1) + \ln(x^{\alpha 2}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln(y) = \ln(\alpha_1) + \alpha_2 \cdot \ln(x) \Rightarrow$$
$$z = \beta_1 + \beta_2 .t$$

Dessa forma, obtemos uma linearização do problema, onde o conjunto de dados é formado pelos pares de pontos (t, z) onde z=ln(y) e t=ln(x). Além disso, as novas variáveis envolvidas são z=ln(y) e t=ln(x). Temos ainda uma nova tabela de dados associada:

Tabela 30

						Soma
t	-1,3863	0	0,6932	1,3863	8	2,7726
z	1,5041	0,6932	0,4055	-0,1054	-0,6932	1,8042

Observemos ainda que, nesse caso, temos $g_1(t)=1$ e $g_2(t)=t$. Além disso, o sistema obtido na otimização do problema linearizado $A \cdot \beta = b$ é tal que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Vamos determinar os coeficientes das matrizes A e b com o auxílio da nova tabela dos dados e da tabela a seguir.

Tabela 31

						Soma
$g_1(t) \cdot g_1(t)$	1	1	1	1	1	5
$g_2(t) \cdot g_2(t)$	1,9218	0	0,4805	1,9218	4,3239	8,6481
$g_1(t) \cdot g_2(t)$	-1,3863	0	0,6932	1,3863	8	2,7726
$f(t) \cdot g_1(t)$	1,5041	0,6932	0,4055	-0,1054	-0,6932	1,8042
$f(t) \cdot g_2(t)$	-2,0851	0	0,2811	-0,1461	-1,4414	-3,3916

Assim, o sistema linear $A \cdot \beta = b$ fica da seguinte maneira

$$A \cdot \beta = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2,7726 \\ 2,7726 & 8,6481 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8042 \\ -3,3916 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema linear, obtemos

$$\beta = \begin{pmatrix} 0,7034 \\ 0,6177 \end{pmatrix}$$

Logo, o problema linearizado tem a solução a seguir:

$Z = 0,7034 + 0,6177 \cdot t$

Contudo, determinando as variáveis inicialmente procuradas, obtemos

$$\alpha_2 = \beta_2 = 0,6177$$
$$\beta_1 = \ln(\alpha_1) \Rightarrow e^{\beta_1} = e^{\ln(\alpha_1)} \Rightarrow \alpha_1 = e^{0,7034} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = 2,0206$$

Portanto, a função de aproximação procurada inicialmente é

$$\varphi(x) = \alpha_1 \cdot x^{\alpha 2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(x) = 2,0206 \cdot x^{0,6177}$$

Observe com atenção a sequência de exercícios exercícios resolvidos como exemplos.

Exemplos de aplicação

Exemplo 1

Ajuste os dados a seguir pelo método dos quadrados mínimos utilizando:

a) Uma reta

b) Uma parábola do tipo $ax^2 + bx + c$

Tabela 32

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,5	0,6	0,9	0,8	1,2	1,5	1,7	2,0

Pergunta: traçando as duas curvas no gráfico de dispersão dos dados, como compararíamos as duas curvas com relação aos dados?

Solução item a

Devemos aproximar y = f(x) por uma reta, isto é, uma função do 1º grau da forma $\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$

Assim, $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$. Além disso, o sistema obtido na otimização do problema $A \cdot \alpha = b$ é tal que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Vamos determinar os coeficientes das matrizes A e b com o auxílio da nova tabela dos dados e da tabela seguinte.

Tabela 33

									Soma
$g_1(x) \cdot g_1(x)$	1	1	1	1	1	1	1	1	8
$g_2(x) \cdot g_2(x)$	1	4	9	16	25	36	49	64	204
$g_1(x)\ g_2(x)$	1	2	3	4	5	6	7	8	36
$f(x) \cdot g_1(x)$	0,5	0,6	0,9	0,8	1,2	1,5	1,7	2,0	9,2
$f(x) \cdot g_2(x)$	0,5	1,2	2,7	3,2	6,0	9,0	11,9	16,0	50,5

O sistema linear $A \cdot \alpha = b$ fica da seguinte maneira:

$$A \cdot \alpha = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 36 \\ 36 & 204 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,2 \\ 50,5 \end{pmatrix}$$

Ou ainda

$$\begin{cases} 8\alpha_1 + 36\alpha_2 = 9{,}2 \\ 36\alpha_1 + 204\alpha_2 = 50{,}5 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema pelo método da eliminação de Gauss. Considere a seguinte operação elementar sobre a primeira equação

$$E_1 \leftarrow \left(\frac{1}{8}\right) \cdot E_1$$

Fazendo os cálculos obtemos

$$\begin{cases} \alpha_1 + 4{,}5\alpha_2 = 1{,}15 \\ 36\alpha_1 + 204\alpha_2 = 50{,}5 \end{cases}$$

Considere agora a operação elementar sobre a segunda equação a seguir:

$$E_2 \leftarrow (-36) \cdot E_1 + E_2$$

Efetuando os cálculos novamente, obtemos

$$\begin{cases} \alpha_1 + 4{,}5\alpha_2 = 1{,}15 \\ \quad + \; 42\alpha_2 = 9{,}1 \end{cases}$$

Calculando o valor de α_2, temos que

$$42\,\alpha_2 = 9{,}1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{9{,}1}{42} \Rightarrow \alpha_2 = 0{,}2167$$

Substituindo o valor de $\alpha_2 = 0{,}2167$ na primeira equação, obtemos

$$\alpha_1 + 4{,}5(0{,}2167) = 1{,}15 \Rightarrow \alpha_1 = 1{,}15 - 0{,}9752 \Rightarrow \alpha_1 = 0{,}1748$$

Portanto, a aproximação dos dados por uma função do primeiro grau, obtida pelo método dos quadrados mínimos, é

$$\varphi(x) = 0{,}1748 + 0{,}2167\,x$$

Solução item b

Agora devemos aproximar y = f(x) por uma parábola, isto é, uma função do 2º grau da forma

$$\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_2 x^2$$

Assim, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$ e $g_3(x) = x^2$. Além disso, o sistema obtido na otimização do problema $A \cdot \alpha = b$ é tal que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad e \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Vamos determinar os coeficientes das matrizes A e b com o auxílio da nova tabela dos dados e da tabela a seguinte.

Tabela 34

									Soma
$g_1(x) \cdot g_1(x)$	1	1	1	1	1	1	1	1	8
$g_2(x) \cdot g_2(x)$	1	4	9	16	25	36	49	64	204
$g_3(x) \cdot g_3(x)$	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	8772
$g_1(x) \cdot g_2(x)$	1	2	3	4	5	6	7	8	36
$g_1(x) \cdot g_3(x)$	1	4	9	16	25	36	49	64	204
$g_2(x) \cdot g_3(x)$	1	8	27	64	125	216	343	512	1296
$f(x) \cdot g_1(x)$	0,5	0,6	0,9	0,8	1,2	1,5	1,7	2,0	9,2
$f(x) \cdot g_2(x)$	0,5	1,2	2,7	3,2	6,0	9,0	11,9	16,0	50,5
$f(x) \cdot g_3(x)$	0,5	2,4	8,1	12,8	30	54	83,3	128	319,1

Assim, o sistema linear $A \cdot \alpha = b$ fica da seguinte maneira:

$$A \cdot \alpha = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 36 & 204 \\ 36 & 204 & 1296 \\ 204 & 1296 & 8772 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}2 \\ 50{,}5 \\ 319{,}1 \end{pmatrix}.$$

Ou ainda

$$\begin{cases} 8\alpha_1 + 36\alpha_2 + 204\alpha_3 = 9{,}2 \\ 36\alpha_1 + 204\alpha_2 + 1296\alpha_3 = 50{,}5 \\ 204\alpha_1 + 1296\alpha_2 + 8772\alpha_3 = 319{,}1 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema pelo método da eliminação de Gauss. Considere a seguinte operação elementar sobre a primeira equação:

$$E_1 \leftarrow \left(\tfrac{1}{8} \right) \cdot E_1$$

Fazendo os cálculos, obtemos

$$\begin{cases} \alpha_1 + 4{,}5\alpha_2 + 25{,}5\alpha_3 = 1{,}15 \\ 36\alpha_1 + 204\alpha_2 + 1296\alpha_3 = 50{,}5 \\ 204\alpha_1 + 1296\alpha_2 + 8772\alpha_3 = 319{,}1 \end{cases}$$

Considere agora as operações elementares sobre a segunda e terceira equações:

$$E_2 \leftarrow (-36) \cdot E_1 + E_2$$
$$E_3 \leftarrow (-204) \cdot E_1 + E_3$$

Efetuando os cálculos novamente, obtemos

$$\begin{cases} \alpha_1 + 4{,}5\alpha_2 + 25{,}5\alpha_3 = 1{,}15 \\ 42\alpha_2 + 378\alpha_3 = 9{,}1 \\ 378\alpha_2 + 3570\alpha_3 = 84{,}5 \end{cases}$$

Logo, considerando a seguinte operação elementar sobre a segunda equação, temos

$$E_2 \leftarrow \left(\frac{1}{42}\right) \cdot E_2$$

Efetuando os cálculos

$$\begin{cases} \alpha_1 + 4{,}5\alpha_2 + 25{,}5\alpha_3 = 1{,}15 \\ \alpha_2 + 9\alpha_3 = 0{,}2167 \\ 378\alpha_2 + 3570\alpha_3 = 84{,}5 \end{cases}$$

Assim, considerando a operação elementar sobre a segunda equação dada a seguir, temos

$$E_3 \leftarrow (-378) \cdot E_2 + E_3$$

Calculando o sistema equivalente:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 4{,}5\alpha_2 + 25{,}5\alpha_3 = 1{,}15 \\ \alpha_2 + 9\alpha_3 = 0{,}2167 \\ +168\,\alpha_3 = 2{,}5874 \end{cases}$$

Calculando o valor de α_3, temos que

$$168\,\alpha_3 = 2{,}5874 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{2{,}5874}{168} \Rightarrow \alpha_3 = 0{,}0154$$

Substituindo o valor de α_3=0,0154 na segunda equação, obtemos

$$\alpha_2 + 9(0{,}0154) = 0{,}2167 \Rightarrow \alpha_2 = 0{,}2167 - 0{,}1386 \Rightarrow \alpha_2 = 0{,}0781$$

Agora, substituindo os valores de α_2 = 0,0781 e α_3 = 0,0154 na primeira equação, obtemos

$$\alpha_1 + 4{,}5(0{,}0781) + 25{,}5(0{,}0154) = 1{,}15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = 1{,}15 - 0{,}3515 - 0{,}3927 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = 0{,}4058$$

Portanto, a aproximação dos dados por uma função do 1º grau, obtida pelo método dos quadrados mínimos, é

$$\varphi(x) = 0,4058 + 0,0781\,x + 0,0154\,x^2$$

Exemplo 2

Considere o seguinte conjunto de dados.

Tabela 35

x	0	0,5	1	1,2	1,8
y	1,5	1,2	0,8	0,9	0,4

Faça o gráfico da dispersão com os pontos (x, y) da tabela anterior.

Depois, aproxime os pontos (x, y) da tabela utilizando o método dos quadrados mínimos por meio da função

$\varphi(x) = \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot \cos(x)$

Solução

Podemos ilustrar os pontos (x, y) e as funções aproximadas encontradas nas resoluções do que se pede por meio do gráfico a seguir.

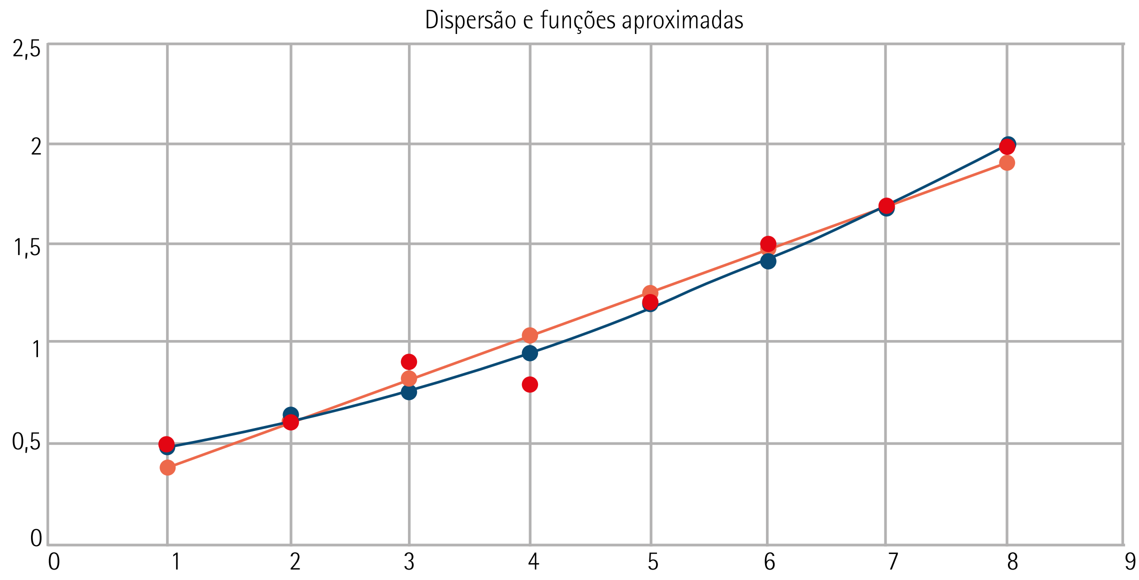

Figura 10

Saiba mais

Para saber mais sobre ajuste de curva, recomenda-se a leitura do capítulo 4 do livro a seguir.

CAMPOS FILHO, F. F. *Algoritmos numéricos*: uma abordagem moderna de cálculo numérico. 3. ed. São Paulo: Grupo GEN, 2018.

8 UM POUCO MAIS SOBRE AJUSTES DE FUNÇÕES

A aproximação de funções é uma abordagem essencial em matemática e ciência da computação, permitindo estimar o comportamento de uma função complexa por intermédio de funções aproximadas, consideravelmente mais simples e computacionalmente viáveis. Existem várias abordagens para realizar essas aproximações, cada uma com suas vantagens e limitações.

Vimos anteriormente o método da interpolação polinomial, no qual uma curva polinomial é ajustada aos pontos conhecidos de uma função, passando exatamente por esses pontos. No entanto, a interpolação polinomial pode levar a oscilações indesejadas e resultados imprecisos dependendo de eventuais particularidades da função a ser aproximada.

Abordamos também o método dos quadrados mínimos, uma técnica matemática utilizada para encontrar uma função, passando por um conjunto de pontos que melhor se aproxima da função determinada por esse conjunto, minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre os valores reais e os valores estimados pela função aproximada.

Outra maneira comum para aproximar uma função determinada por um conjunto de pontos é a regressão, que visa encontrar a função paramétrica que melhor se ajusta aos dados disponíveis. A regressão permite lidar, razoavelmente bem, com discrepâncias nos dados e é frequentemente usada em análises estatísticas. No entanto, a escolha ruim do modelo funcional pode levar a resultados inadequados.

Métodos mais avançados incluem aproximações por séries, como a de Taylor, que estima uma função por meio de sua expansão em uma série infinita de termos. Esse método é eficaz em torno de pontos específicos, mas pode divergir para pontos distantes.

Além disso, técnicas modernas como interpolação por splines cúbicos e métodos baseados em redes neurais têm ganhado destaque. Splines cúbicos dividem a função em segmentos suaves, proporcionando uma aproximação mais precisa. Redes neurais, por outro lado, são capazes de aprender padrões complexos nos dados, tornando-as úteis para aproximações não lineares.

A escolha do método de aproximação depende da natureza da função, da disponibilidade de dados e da precisão desejada. Em muitos casos, uma combinação de diferentes métodos pode ser empregada para obter resultados mais robustos. Vale ressaltar que a seleção criteriosa do método é vital para garantir que a aproximação seja precisa e útil para o contexto em questão.

8.1 Interpolação de Hermite

A interpolação polinomial que se obtém das formas de Lagrange ou de Newton utiliza como única informação as abscissas e as ordenadas de um conjunto de pontos tabelados. Se, adicionalmente, dispusermos de informação sobre as derivadas da função, poderemos melhorar a qualidade da aproximação aumentando-se o grau do polinômio interpolador. Essa técnica pode ser designada pela interpolação de Hermite e, geralmente, apresenta uma menor tendência para o comportamento oscilatório.

O objetivo da interpolação de Hermite é o de representar uma função f(x) por um polinômio que seja interpolador de f em alguns pontos de seu domínio e que a sua derivada seja interpoladora da derivada de f nesses mesmos pontos. Assim, supondo que f seja derivável, a interpolação de Hermite procura um polinômio H tal que para alguns pontos x_i do domínio de f tenhamos:

$F(x_i) = H(x_i)$ e $f'(x_i) = H'(x_i)$

8.2 Interpolação com spline cúbico

É uma metodologia de interpolação numérica, assim como interpolação linear, exponencial etc. De fato, expressa uma forma de interpolação através de polinômios de terceira ordem, por isso o nome cúbico. A principal característica das interpolações com spline cúbico é o amortecimento ou suavidade que apresentam na transição de um nó para outro. É uma técnica de aproximação que consiste em se dividir o intervalo de interesse em vários subintervalos e interpolar, da forma mais suave possível, nesses subintervalos com polinômios de grau pequeno.

Para a interpolação de todos os pontos do intervalo considerando um só polinômio, ocorre muitas vezes o inconveniente, especialmente no caso de polinômios de alta ordem, de grandes flutuações. Uma solução para isso é a utilização de vários polinômios de grau reduzido que interpolam seções do intervalo e que garantam a continuidade. Esses polinômios são usualmente chamados de splines. Essa técnica é muito aplicada em projetos de construção naval para apurar a forma dos cascos dos navios a partir de esboços relativamente grosseiros.

A spline cúbica S_3 (x) é a mais utilizada por ter derivadas de primeira e segunda ordens contínuas, fazendo com que S_3 (x) seja mais suave nos nós. Além disso, convém ressaltar que a spline linear S_1 (x) tem a derivada de primeira ordem descontínua nos nós e que a spline quadrática S_2 (x) tem apenas a derivada de primeira ordem contínua, portanto, pode ter picos ou troca abrupta de curvatura nos nós.

8.3 Extrapolação

No meio matemático, extrapolação é o processo de construção de novos pontos que se encontram fora dos limites dos pontos conhecidos. É similar ao processo de interpolação, que constrói novos pontos entre os pontos conhecidos, mas os resultados de extrapolação são frequentemente sujeitos a incerteza.

- **Extrapolação linear**: nesse caso, uma linha tangente é criada no final do intervalo de dados conhecidos e estendida além desse limite. Esse método promoverá em bons resultados apenas se for aplicado para extrapolar funções aproximadamente lineares ou quando não se estender para muito longe do intervalo de dados conhecidos.

- **Extrapolação polinomial**: nesse método, uma curva polinomial pode ser criada através de todos os dados do intervalo ou dos dados bem próximos do final. Dessa forma, a curva resultante pode ser estendida além do intervalo de dados conhecidos. A extrapolação polinomial é tipicamente feita por meio da interpolação de Lagrange, ou usando o método de Newton ou, ainda, **diferenças finitas** para criar uma série de Newton que se adeque aos dados. O polinômio resultante pode ser usado para a extrapolação.

Observação

É importante considerar que os polinômios com ordens mais elevadas devem ser usados com cuidado.

- **Extrapolação cônica**: nesse caso, uma seção cônica (parábolas, elipses ou hipérboles) pode ser criada usando cinco pontos próximos ao final do intervalo conhecido.

Resumo

Nesta unidade, estudamos a forma de Lagrange e a forma de Newton na determinação da interpolação polinomial de funções definidas por um conjunto de pontos conhecido. Além disso, abordamos o método dos quadrados mínimos bastante utilizado quando a interpolação polinomial fornece funções que, apesar de passar pelos pontos dados inicialmente, não caracteriza uma boa aproximação para o comportamento da variação da função.

Depois, acentuamos as técnicas utilizadas na interpolação polinomial e no método dos quadrados mínimos. Vimos importantes ferramentas matemáticas para resolver problemas, produzindo as soluções desejadas ou boas aproximações.

Os métodos descritos e utilizados nesta unidade devem ser aplicados com bastante atenção e minúcia para que os detalhes possam ser compreendidos e replicados nas resoluções dos problemas de interpolação polinomial e do método dos quadrados mínimos.

Exercícios

Questão 1. Vimos, no livro-texto, que a forma de Lagrange é um método de interpolação polinomial que consiste em determinar p(x) como uma combinação linear de polinômios $L_k(x)$:

$$p(x_i) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + y_2L_2(x_i) + \ldots + y_nL_n(x_i) = y_i$$

Na igualdade, $y_i = f(x_i)$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Para determinarmos os polinômios $L_k(x_i)$, de modo que a igualdade que define $p(x_i)$ seja verdadeira, fazemos:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } k \neq i \\ 1 \text{ se } k = i \end{cases}; \quad \text{para todo } i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Para isso, definimos $L_k(x)$, para todo i=0,1,2, ..., n, como:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

Dessa maneira, teremos para todo k=0,1,2, ..., n e todo i=0,1,2, ..., n:

$$\begin{cases} L_k(x_k) = 1 \\ L_k(x_i) = 0 \end{cases}$$

Cada um dos polinômios $L_k(x)$ tem grau n, pois é um produto de fatores da forma $(x\text{-}x_i)$ para todo i=0,1,2, ..., n, com k≠i. Portanto, a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_kL_k(x)$$

Com base no exposto e nos seus conhecimentos, assinale a alternativa que mostra corretamente o polinômio interpolador de Lagrange de grau 2 para a os dados tabela a seguir.

Tabela 36

x	-4	0	4
f(x)	-2	5	4

A) $p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 5$

B) $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 5$

C) $p(x) = -4x^2 + 3x + 5$

D) $p(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x - 5$

E) $p(x) = 5x^2 + 4x + 5$

Resposta correta: alternativa A.

Análise da questão

Da tabela, lemos que: $x_0 = -4$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $y_0 = -2$, $y_1 = 5$ e $y_2 = 4$.

Pela forma de Lagrange, temos que o polinômio interpolador *p(x)* de grau 2 é dado por:

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

Além disso:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - (0))(x - (4))}{((-4) - (0))((-4) - (4))} = \frac{(x)(x - 4)}{(-4)(-8)} = \frac{x^2 - 4x}{32}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - (-4))(x - (4))}{((0) - (-4))((0) - (4))} = \frac{(x + 4)(x - 4)}{(4)(-4)} = \frac{x^2 - 16}{-16}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - (-4))(x - (0))}{((4) - (-4))((4) - (0))} = \frac{(x + 4)(x)}{(8)(4)} = \frac{x^2 + 4x}{32}$$

Substituindo $L_0(x),L_1(x)$, e $L_2(x)$, na igualdade que define o polinômio interpolador, obtemos a seguinte solução:

$$p(x)=(-2)\left(\frac{x^2-4x}{32}\right)+(5)\left(\frac{x^2-16}{-16}\right)+(4)\left(\frac{x^2+4x}{32}\right)$$

$$p(x)=\left(\frac{-2x^2+8x}{32}\right)+\left(\frac{80-5x^2}{16}\right)+\left(\frac{4x^2+16x}{32}\right)$$

$$p(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+5$$

Questão 2. Assinale a alternativa que mostra corretamente o ajuste dos dados da tabela a seguir por uma reta com a utilização do método dos mínimos quadrados.

Tabela 37

x	y
-1	-3,5
0	-2
1	-1
2	0,5
3	1,5
4	3
5	4,5

A) y = 1,5x + 2,5

B) y = 2,5 – 2x

C) y = 1,3036x – 2,1786

D) y = 2,1972x – 1,6677

E) y = 1,9555x – 3,3333

Resposta correta: alternativa C.

Análise da questão

Se usarmos ferramentas do Excel para construir a reta ajustada aos pontos da tabela, com a exibição da equação de reta dada pelo método dos mínimos quadrados, teremos a solução mostrada na figura a seguir.

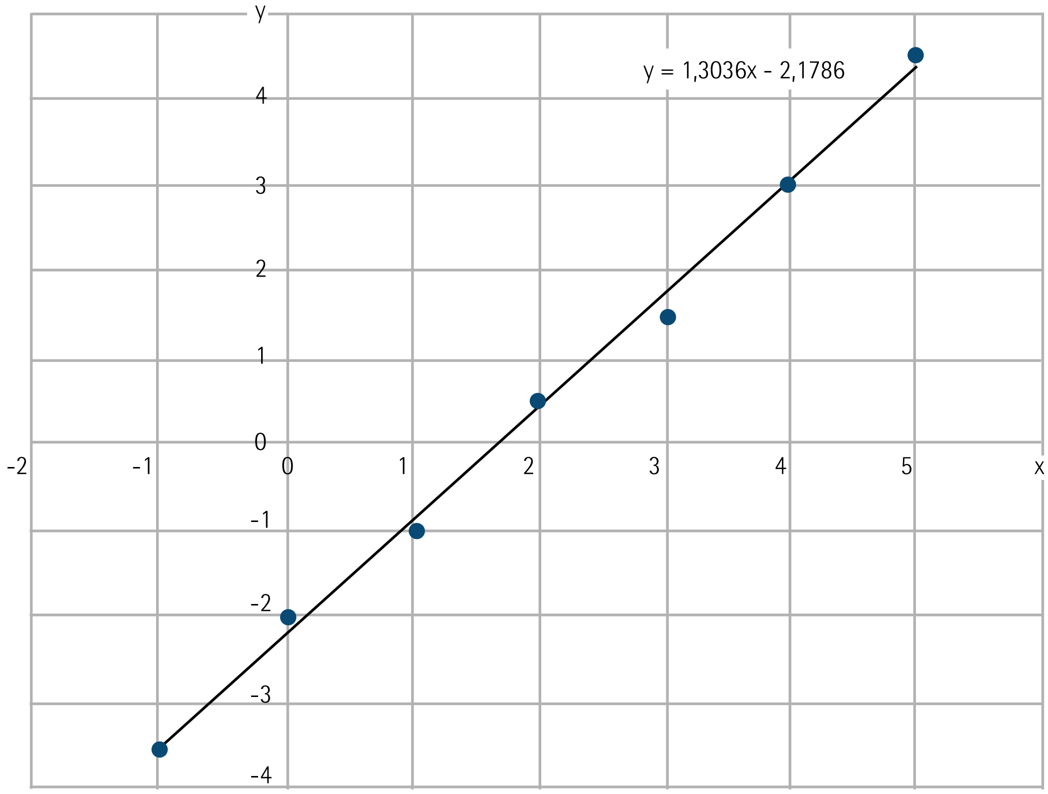

Figura 11 – Reta ajustada pelo método dos mínimos quadrados

Primeiramente, calculamos os valores apresentados na tabela a seguir.

Tabela 38

x	y	x^2	xy
-1	-3,5	1	3,5
0	-2	0	0
1	-1	1	-1
2	0,5	4	1
3	1,5	9	4,5
4	3	16	12
5	4,5	25	22,5

Agora, calculamos:

$$\sum x = 14$$
$$\sum y = 3$$
$$\sum x^2 = 56$$
$$\sum xy = 42,5$$

Sabemos que N = 7 (existem sete pontos).

Com isso, calculamos o coeficiente angular da reta (m):

$$m = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{N\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}$$

$$m = \frac{7 \cdot 42{,}5 - 14 \cdot 3}{7 \cdot 56 - \left(14\right)^2} \approx 1{,}3036$$

Conhecendo o valor de m, calculamos o coeficiente linear da reta (b):

$$b = \frac{\sum y - m\sum x}{N}$$

$$b = \frac{3 - 1{,}304 \cdot 14}{7} \approx -2{,}1786$$

Assim, obtemos a seguinte equação de reta:

$y = mx + b$

$y = 1{,}3036x - 2{,}1786$

REFERÊNCIAS

Textuais

BURIAN, R.; LIMA, A. C. *Cálculo numérico*. São Paulo: LTC, 2007.

CAMPOS FILHO, F. F. *Algoritmos numéricos*: uma abordagem moderna de cálculo numérico. 3. ed. São Paulo: Grupo GEN, 2018.

CONTE, D. *Elementary numerical analysis*. New York: McGraw-Hill, 1998.

DORNELLES FILHO, A. A. *Fundamentos de cálculo numérico*. São Paulo: Grupo A, 2016.

FRANCO, N. M. B. *Cálculo numérico*. São Paulo: Prentice Hall Brasil, 2006.

HUMES, A. F. P. C. *et al. Noções de cálculo numérico*. São Paulo: McGraw-Hill, 1984.

NEPOMUCENO, E. G. *Métodos numéricos*: interpolação, extrapolação, aproximação e ajustes de funções. São Paulo: UFSJ, 2016. Disponível em: https://shre.ink/20N9. Acesso em: 19 ago. 2023.

PORTO, J. C. A. *Cálculo numérico*: Notas de aula – ICET. Araçatuba: UNIP, 2016.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. *Cálculo numérico*: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

SADIKU, M. N. O. *Numerical techniques in electromagnetics*. Boca Raton (EUA): CRC Press, 2000.

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M. *Cálculo numérico*. São Paulo: Prentice Hall, 2003.

VARGAS, J. V. C.; ARAKI, L. K. *Cálculo numérico aplicado*. Barueri: Manole, 2017.

UNIP
UNIVERSIDADE PAULISTA

Informações:
www.sepi.unip.br ou 0800 010 9000