UNIP
UNIVERSIDADE PAULISTA

Cálculo Numérico Computacional

Autor: Prof. Marcos Vinícius dos Santos
Colaboradoras: Profa. Vanessa Santos Lessa
Profa. Christiane Mazur Doi

Professor conteudista: Marcos Vinícius dos Santos

Graduado em Licenciatura em Matemática pela Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (Feis) da Universidade Estadual Paulista – Unesp (2006) e mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Paraná – UFPR (2010). Trabalhou no Departamento de Matemática da UFPR como professor substituto entre 2010 e 2012 atuando nos cursos das áreas das Ciências Exatas e da Terra, bem como no curso de Oceanografia. Desde 2013 é professor da Universidade Paulista – UNIP, *campus* Araçatuba.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S237c Santos, Marcos Vinícius dos.

Cálculo Numérico Computacional / Marcos Vinícius dos Santos. – São Paulo: Editora Sol, 2023.

136 p., il.

Nota: este volume está publicado nos Cadernos de Estudos e Pesquisas da UNIP, Série Didática, ISSN 1517-9230.

1. Erro. 2. Equações lineares. 3. Interpolação. I. Título.

CDU 519.6

U518.53– 23

Material Didático

Comissão editorial:
Profa. Dra. Christiane Mazur Doi
Profa. Dra. Ronilda Ribeiro

Apoio:
Profa. Cláudia Regina Baptista
Profa. M. Deise Alcantara Carreiro
Profa. Ana Paula Tôrres de Novaes Menezes

Projeto gráfico:
Prof. Alexandre Ponzetto

Revisão:
Vitor Andrade
Kleber Souza

Sumário

Cálculo Numérico Computacional

APRESENTAÇÃO

Olá, aluno(a)!

Neste livro-texto, vamos abordar alguns conceitos de cálculo numérico, uma importante área da matemática aplicada que lida com o desenvolvimento de algoritmos e técnicas numéricas para a resolução de problemas realizando uma sequência finita de operações aritméticas.

Ao longo do texto, serão introduzidos conceitos como arredondamento e truncamento de números, erros de aproximação e estabilidade numérica. Além disso, serão apresentados alguns métodos para a solução de problemas envolvendo localização de raízes de funções, processos iterativos e solução de sistemas de equações.

Nosso objetivo é fornecer aos estudantes de computação ferramentas e métodos matemáticos para a resolução de problemas numéricos, bem como para o aprimoramento da capacidade de avaliar a precisão e a eficiência desses métodos, tornando-os aptos a aplicar os conhecimentos adquiridos em diversos campos da ciência.

Além disso, você aprenderá como desenvolver alguns pré-requisitos necessários para a implementação eficiente e bem-estruturada de algoritmos numéricos em linguagens de programação como MATLAB e Python, bastante utilizadas atualmente.

Bons estudos!

INTRODUÇÃO

O cálculo numérico é uma área da matemática aplicada que se preocupa com a resolução de problemas numéricos por meio de algoritmos e técnicas computacionais. Para uma boa compreensão desta disciplina, é importante abordar conceitos fundamentais, como aritmética de ponto flutuante, erro de truncamento e erro de arredondamento, que são essenciais para avaliar a precisão e a estabilidade dos métodos numéricos usados.

Utilizando o teorema de Bolzano, podemos buscar a localização de Zeros ou Raízes Isoladas de Funções, uma tarefa essencial no cálculo numérico. Essa localização de raízes será abordada por meio de processos iterativos, como o método da dicotomia, o método das aproximações sucessivas e o método de Newton-Raphson.

Os sistemas de equações lineares são outro tema vital do cálculo numérico, e sua solução pode envolver um grande esforço computacional. O método da eliminação de Gauss é um clássico para resolver os sistemas lineares, e sua eficiência pode ser melhorada com o uso da condensação pivotal e do refinamento da solução. Por sua vez, o método iterativo de Gauss-Seidel e seus critérios de convergência também são aplicados para determinar e refinar as soluções para os sistemas de equações lineares, temas que serão estudados em detalhes.

Outra técnica importante no cálculo numérico é a interpolação. Ela é utilizada para aproximar uma função por um polinômio que passa por um conjunto de pontos dados. A forma de Lagrange e a forma de Newton são dois métodos comuns para a interpolação, e o estudo do erro na interpolação é fundamental para avaliar a qualidade da aproximação.

Finalmente, o ajuste de curvas pelo método dos quadrados mínimos é usado para encontrar uma função que se ajusta aos dados de forma ótima, minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre a função e os pontos dados. Em resumo, o cálculo numérico é uma disciplina essencial para a resolução de problemas numéricos em diversas áreas das ciências, da engenharia e da computação, e seu estudo permite aos alunos desenvolverem habilidades de programação e resolução de problemas em ambientes computacionais.

Bons cálculos!

Unidade I

1 ERRO

1.1 Modelagem matemática

Podemos considerar que um modelo matemático é uma representação conceitual ou ainda uma idealização de um fato ou evento ocorrido no mundo real. A modelagem matemática é uma abordagem que usa a matemática para descrever, analisar e entender fenômenos da natureza que acontecem no mundo em nosso dia a dia. Esse processo consiste em traduzir problemas do mundo real em modelos matemáticos que podem ser representados por ações e/ou sistemas de equações que descrevem as relações entre as variáveis relevantes para o problema.

Esse processo de modelagem matemática envolve várias etapas, incluindo a identificação do problema a ser resolvido, a seleção das variáveis relevantes, a formulação de um modelo matemático que relaciona essas variáveis, a solução do modelo matemático e a interpretação dos resultados em termos do problema original.

A modelagem matemática é uma ferramenta poderosa que é usada em muitas áreas, incluindo ciência, engenharia, economia, finanças, medicina e muitas outras, tornando-se uma maneira de sugerir previsões razoavelmente precisas sobre como os sistemas reais podem se comportar sob diferentes condições de contorno.

1.2 Representação dos números

Ela depende da base escolhida ou disponível na máquina em uso e do número máximo de dígitos usados em sua representação. Além disso, um número pode ter representação finita em uma base e não finita em outras bases. A base decimal é a que mais empregamos atualmente. Na Antiguidade, foram utilizadas outras, como a base 12 e a 60. Um computador opera normalmente no sistema binário, isto é, na base 2.

Exemplo de aplicação

Para estabelecer uma relação entre a base 10 e a base 2, consideremos os números $(347)_{10}$ e $(10111)_2$. Podemos reescrever os valores da seguinte maneira:

$$(347)_{10} = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

e

$$(10111)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

É possível ainda passar os valores de uma base para outra. Vamos tomar como exemplo os valores anteriores.

Exemplo de aplicação

Da base 10 para a base 2

Faremos sucessivas divisões por 2 e consideraremos os restos apresentados nessas divisões. Assim:

$347 = 2 \cdot 173 + 1$

$173 = 2 \cdot 86 + 1$

$86 = 2 \cdot 43 + 0$

$43 = 2 \cdot 21 + 1$

$21 = 2 \cdot 10 + 1$

$10 = 2 \cdot 5 + 0$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

$1 = 2 \cdot 0 + 1$

Agrupando os restos das divisões na ordem contrária em que apareceram, obteremos a representação desejada $(101011011)_2$.

Também podemos fazer a conversão da base 10 para a base 2 para números decimais entre 0 e 1.

Consideremos, por exemplo, o número $(0{,}125)_{10}$ e sua representação por potências de 2, ou seja:

$(0{,}125)_{10} = d_1 \cdot 2^{-1} + d_2 \cdot 2^{-2} + \ldots + d_j \cdot 2^{-j} + \ldots$

Multiplicando a igualdade anterior por 2, obtemos:

$(0{,}250)_{10} = d_1 + d_2 \cdot 2^{-1} + d_3 \cdot 2^{-2} + \ldots + d_j \cdot 2^{-j+1} + \ldots$

Aplicando o mesmo procedimento para $(0{,}250)_{10}$ e sua representação por potências de 2, isto é, multiplicando a igualdade anterior por 2, obtemos:

$(0{,}50)_{10} = d_2 + d_3 \cdot 2^{-1} + d_4 \cdot 2^{-2} + \ldots + d_j \cdot 2^{-j+2} + \ldots$

Repetindo o processo para $(0{,}50)_{10}$, teremos:

$(1{,}0)_{10} = d_3 + d_4 \cdot 2^{-1} + d_5 \cdot 2^{-2} + \ldots + d_j \cdot 2^{-j+3} + \ldots$

Note que, na igualdade anterior, a parte decimal é igual a 0 e, dessa forma, o processo de conversão termina. Além disso, a partir da parte inteira obtida nas últimas três igualdades anteriores, temos $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 1$. Portanto a representação desejada é $(0{,}001)_2$.

Vejamos um outro exemplo.

Exemplo de aplicação

Da base 2 para a base 10

Basta desenvolvermos as operações contidas na representação do número $(10111)_2$ em potências de 2. Logo:

$$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$
$$= 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =$$
$$= 16 + 0 + 4 + 2 + 1 =$$
$$= 23$$

Dessa forma, a representação desejada é $(23)_{10}$.

É importante observar que o fato de um número não ter representação finita no sistema binário pode gerar a ocorrência de erros aparentemente inexplicáveis em cálculos efetuados em sistemas computacionais binários. Uma vez que esses sistemas têm uma quantidade fixa de posições para guardar os dígitos dos números considerados, não podemos esperar um resultado exato. Assim, serão feitas aproximações para que os cálculos sejam realizados, o que torna necessário o estudo dos erros cometidos ao fazer essas aproximações.

1.3 Aritmética de ponto flutuante

Trata-se de um sistema matemático utilizado em computação para representar números reais. Em contraste com a aritmética de precisão fixa, que lida com números inteiros e frações em que o número de dígitos é fixo, a aritmética de ponto flutuante é projetada para lidar com números maiores ou menores do que os que podem ser expressos em precisão fixa.

Dessa forma, um número real é representado como uma mantissa ou fração significativa e um expoente que indica o valor de magnitude do número. Essa representação permite que o computador trabalhe com números muito grandes ou muito pequenos sem perda significativa de precisão. Nesse sistema, um número real **r** será expresso na forma

$$r = \pm(0{,}d_1d_2 \ldots d_t) \times \beta^e$$

Onde:

β: é a base em que a máquina opera

t: é o número de dígitos na mantissa

e: é o expoente no intervalo [a, b]

Em geral, a representação de um número real é realizada através de **truncamento** ou de **arredondamento**.

Exemplo de aplicação

Considere, por exemplo, uma máquina que opera no sistema com:

$\beta = 10$

$t = 3$

$e \in [-5,5]$

Nesse sistema, os números serão representados na seguinte forma:

$r = \pm(0{,}d_1d_2d_3) \times 10^e$

Onde:

$0 \leq d_j \leq 9$

$d_1 \neq 0$

$e \in [-5,5]$

Lembrete

Um número real é representado como uma mantissa ou fração significativa e um expoente que indica o valor de magnitude do número.

O menor número, em valor absoluto, representado nessa máquina, é:

$m = 0{,}100 \times 10^{-5} = 10^{-6}$

E o maior número, em valor absoluto, representado nessa máquina, é:

$m = 0{,}999 \times 10^{5} = 99900$

Dado um número real qualquer, algumas situações podem acontecer:

Caso 1

O número está entre **m** e **M**, por exemplo:

$x = 235{,}89 = 0{,}23589 \times 10^{3}$

Note que esse número tem cinco dígitos na mantissa e, dependendo do que usarmos para obter apenas três dígitos na mantissa, teremos:

$x = 0{,}235 \times 10^{3}$ (truncamento)

ou

$x = 0{,}236 \times 10^{3}$ (arredondamento)

Abordaremos melhor os conceitos de (truncamento) e de (arredondamento) mais adiante.

Caso 2

O número é menor do que **m**, por exemplo:

$x = 0{,}345 \times 10^{-7}$

Esse número não pode ser representado nessa máquina porque o expoente **e** é menor do que -5.

Caso 3

O número é maior do que **M**, por exemplo:

$x = 0{,}875 \times 10^{9}$

Nesse caso, o expoente **e** é maior do que 5, por isso não pode ser expresso nessa máquina.

A representação de um número real pela aritmética de ponto flutuante é amplamente utilizada em áreas como ciência da computação, engenharia, física, estatística e finanças, pois nelas a precisão numérica é vital. No entanto, é importante lembrar que a aritmética de ponto flutuante não é perfeita e pode levar a erros de arredondamento e outras imprecisões em cálculos muito grandes ou muito pequenos.

Em geral, o zero em ponto flutuante é expresso com o menor expoente possível na máquina, porque a representação por uma mantissa nula poderia gerar um custo adicional à máquina.

1.4 Definição de erro

Definimos o erro na modelagem matemática como a diferença entre os valores previstos por determinado modelo matemático e os valores esperados ou aqueles observados na coleta de dados. Existem diferentes tipos de erros: de aproximação, de medição, de truncamento, de arredondamento etc.

Observação

Truncamento: é quando apenas desprezamos a parte da mantissa que não nos interessa.

$x = 235{,}89 = 0{,}23589 \times 10^3 = 0{,}235 \times 10^3$

Arredondamento: é quando, antes de se utilizar o truncamento, adiciona-se 1 ao último algarismo a não ser desprezado. Isso só ocorre quando o 1º algarismo a ser desprezado é maior ou igual a 5 e menor ou igual a 9.

$x = 235{,}89 = 0{,}23589 \times 10^3 = 0{,}236 \times 10^3$

Na prática, é impossível construir um modelo matemático que preveja com precisão absoluta o comportamento de um sistema real, e sempre haverá algum grau de erro associado ao modelo. O objetivo da modelagem matemática é minimizar esses erros tanto quanto possível para que possamos fazer previsões e tomar decisões com base nas informações fornecidas pelo modelo.

Vejamos alguns exercícios resolvidos como exemplos.

Exemplos de aplicação

Exemplo 1

Efetue as seguintes operações na base 10 (B = 10) com três algarismos significativos usando truncamento.

a) (4,26 + 9,24) + 5,04

Solução

Efetuando os cálculos:

$$\left(4{,}26+9{,}24\right)+5{,}04=$$
$$=\left(13{,}5\right)+5{,}04=$$
$$=18{,}54\cong 18{,}5$$

O algarismo **4** do número 18,5**4** foi desprezado utilizando o truncamento para que o resultado tivesse apenas três algarismos significativos.

b) 4,26 + (9,24 + 5,04)

Solução

Efetuando os cálculos

$$4{,}26+\left(9{,}24+5{,}04\right)=$$
$$=4{,}26+\left(14{,}28\right)=$$
$$=4{,}26+\left(14{,}2\right)=$$
$$=18{,}46\cong 18{,}4$$

Os algarismos **8** e **6** dos números 14,2**8** e 18,4**6**, respectivamente, foram desprezados utilizando o truncamento para que o resultado tivesse apenas três algarismos significativos.

c) (0,123/7,97) . 84,9

Solução

Efetuando os cálculos

$$\left(\frac{0{,}123}{7{,}97}\right).84{,}9=$$
$$=0{,}01543\cdot 84{,}9=$$
$$=0{,}015\cdot 84{,}9=$$
$$=1{,}2735\cong 1{,}27$$

Os algarismos **43** e **35** dos números 0,015**43** e 1,27**35**, respectivamente, foram desprezados utilizando o truncamento para que o resultado tivesse apenas três algarismos significativos.

d) (0,123.84,9) / 7,97

Solução

Efetuando os cálculos

$$\frac{(0{,}123 \cdot 84{,}9)}{7{,}97} =$$

$$= \frac{10{,}4427}{7{,}97} =$$

$$= \frac{10{,}4}{7{,}97} =$$

$$= 1{,}3048 \cong 1{,}30$$

Os algarismos **427** e **48** dos números 10,4**427** e 1,30**48**, respectivamente, foram desprezados utilizando o truncamento para que o resultado tivesse apenas três algarismos significativos.

Exemplo 2

Efetue as seguintes operações na base 10 (B = 10) com três algarismos significativos usando arredondamento.

a) (4,26 + 9,24) + 5,04

Solução

Efetuando os cálculos

$$(4{,}26 + 9{,}24) + 5{,}04 =$$

$$= (13{,}5) + 5{,}04 =$$

$$= 18{,}54 \cong 18{,}5$$

O algarismo **4** do número 18,5**4** foi desprezado utilizando o arredondamento para que o resultado tivesse apenas três algarismos significativos.

b) 4,26 + (9,24 + 5,04)

Solução

Efetuando os cálculos

$$4{,}26 + (9{,}24 + 5{,}04) =$$

$$= 4{,}26 + (14{,}28) =$$

$$= 4{,}26 + (14{,}3) =$$

$$= 18{,}56 \cong 18{,}6$$

Os algarismos **8** e **6** dos números 14,2**8** e 18,5**6**, respectivamente, foram desprezados utilizando o arredondamento, fazendo com que seus antecessores fossem acrescidos de uma unidade (+1) para que o resultado tivesse apenas três algarismos significativos.

c) (0,123/7,97) . 84,9

Solução

Efetuando os cálculos

$$\left(\frac{0{,}123}{7{,}97}\right).84{,}9 =$$
$$= 0{,}01543 \cdot 84{,}9 =$$
$$= 0{,}015 \cdot 84{,}9 =$$
$$= 1{,}2735 \cong 1{,}27$$

Os algarismos **43** e **35** dos números 0,015**43** e 1,27**35**, respectivamente, foram desprezados utilizando o arredondamento para que o resultado tivesse apenas três algarismos significativos.

Observação

Note que, nesse caso, a resolução é a mesma tanto para o truncamento quanto para o arredondamento.

d) (0,123 . 84,9) / 7,97

Solução

Efetuando os cálculos

$$\frac{(0{,}123 \cdot 84{,}9)}{7{,}97} =$$
$$= \frac{10{,}4427}{7{,}97} =$$
$$= \frac{10{,}4}{7{,}97} =$$
$$= 1{,}3048 \cong 1{,}305 \cong$$
$$\cong 1{,}31$$

Os algarismos **427**, **48** e **5** dos números 10,4**427** e 1,30**48**, respectivamente, foram desprezados utilizando o arredondamento, fazendo com que seus antecessores fossem acrescidos de uma unidade (+1) quando fosse necessário para que o resultado tivesse apenas três algarismos significativos.

Exemplo 3

Para a série $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

a) Em um sistema de ponto flutuante com cinco algarismos significativos, calcule **e** usando os cinco primeiros termos da série.

Solução

Devemos calcular os cinco primeiros termos da série para **x = 1**. Além disso, note que o termo geral da série é:

$$(a_n) = \frac{(1)^n}{n!}$$

Dessa forma, obtemos:

Para n = 0

$$a_0 = \frac{(1)^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

Observação

Recordemos que **0! = 1**.

Para n = 1

$$a_1 = \frac{(1)^1}{1!} = \frac{1}{1} = 1$$

Para n = 2

$$a_2 = \frac{(1)^2}{2!} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Para n = 3

$$a_3 = \frac{(1)^3}{3!} = \frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$$

Para n = 4

$$a_4 = \frac{(1)^4}{4!} = \frac{1}{24} = 0{,}041666\ldots$$

Dessa maneira:

$s_0 = a_0 = 1$

$s_1 = a_0 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + 1 + 0{,}5 = 2{,}5$

$s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 0{,}5 = 0{,}1666... = 2{,}6666...$

$s_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_{3\,+}\, a_4 =$

$= 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}166666... + 0{,}041666... = 2{,}708332...$

Portanto,

$e \cong 2{,}708332...$

b) Houve erro de truncamento?

Solução

Sim, ao utilizarmos apenas cinco termos da série.

c) Houve erro de arredondamento?

Solução

Sim, a partir dos cálculos de $a_3 = 0{,}166666...$

d) Houve erro de dados?

Solução

Não, pois foram utilizados uma série de potências e o valor **x = 1**.

Exemplo 4

Qual é a representação do número 2,47 na base 2 usando oito algarismos significativos? Essa representação é exata?

Solução

Vamos decompor 2,47 na soma da sua parte inteira com a parte decimal da seguinte maneira:

$2{,}47 = 2 + 0{,}47$

Dessa forma, faremos a mudança de base na representação separadamente.

Parte inteira (2): utilizando divisões sucessivas por 2, temos que:

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

$1 = 2 \cdot 0 + 1$

Considerando os restos 0 e 1, obtidos nas divisões anteriores, obtemos a representação desejada:

$(10)_2$

Parte decimal (0,47): consideremos o número $(0{,}47)_{10}$ e sua representação por potências de 2, ou seja:

$(0{,}47)_{10} = d_1 \cdot 2^{-1} + d_2 \cdot 2^{-2} + \ldots + d_j \cdot 2^{-j} + \ldots$

Multiplicando a igualdade anterior por 2, temos:

$(0{,}94)_{10} = d_1 + d_2 \cdot 2^{-1} + d_2 \cdot 2^{-1} + d_3 \cdot 2^{-2} + \ldots + d_j \cdot 2^{-j+1} + \ldots$

Aplicando o mesmo procedimento para a parte decimal de $(0{,}94)_{10}$ e sua representação por potências de 2, obtemos:

$(1{,}88)_{10} = d_2 + d_3 \cdot 2^{-1} + d_4 \cdot 2^{-2} + \ldots + d_j \cdot 2^{-j+2} + \ldots$

Repetindo o processo para a parte decimal de $(1{,}88)_{10}$, temos:

$(1{,}76)_{10} = d_3 + d_4 \cdot 2^{-1} + d_5 \cdot 2^{-2} + \ldots + d_j \cdot 2^{-j+3} + \ldots$

Repetindo o processo para a parte decimal de $(1{,}76)_{10}$:

$(1{,}52)_{10} = d_4 + d_5 \cdot 2^{-1} + d_6 \cdot 2^{-2} + \ldots + d_j \cdot 2^{-j+4} + \ldots$

Repetindo o processo para a parte decimal de $(1{,}52)_{10}$:

$(1{,}04)_{10} = d_5 + d_6 \cdot 2^{-1} + d_7 \cdot 2^{-2} + \ldots + d_j \cdot 2^{-j+5} + \ldots$

Repetindo o processo para a parte decimal de $(1{,}04)_{10}$:

$(0{,}08)_{10} = d_6 + d_7 \cdot 2^{-1} + d_8 \cdot 2^{-2} + \ldots + d_j \cdot 2^{-j+6} + \ldots$

Como utilizaremos apenas oito algarismos significativos na representação na base 2, paramos com a repetição do processo. Considerando a parte inteira dos resultados obtidos nas etapas repetidas anteriormente, obtemos:

$d_1 = 0$; $d_2 = 1$; $d_3 = 1$; $d_4 = 1$; $d_5 = 1$ e $d_6 = 0$

Dessa forma, a representação procurada é

$(011110)_2$

Portanto, a mudança na representação é

$(2{,}47)_{10} = (10{,}011110)_2$

Na representação normalizada é

$(2{,}47)_{10} = 0{,}10011110 \times 2^2$

Lembrete

Definimos o erro na modelagem matemática como a diferença entre os valores previstos por determinado modelo matemático e os valores esperados ou aqueles observados na coleta de dados.

A seguir, será acentuada uma sequência de exercícios resolvidos como exemplos.

Exemplos de aplicação

Exemplo 1

Considere a representação normalizada em ponto flutuante de dois algarismos significativos na base 2 com expoente variando de -2 a 2. Determine o conjunto de valores decimais dessa representação.

Solução

Note que

$$
\begin{aligned}
&0,11\times 2^{-2} = 0,0011 = \\
&= 0\times 2^{0} + 0\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} + 1\times 2^{-4} = \\
&= 1\times \frac{1}{2^{3}} + 1\times \frac{1}{2^{4}} = \\
&= 1\times \frac{1}{8} + 1\times \frac{1}{16} = \\
&= 0,125 + 0,0625 = \\
&= 0,1875
\end{aligned}
$$

Além disso

$$
\begin{aligned}
&0,10\times 2^{-2} = 0,0010 = \\
&= 0\times 2^{0} + 0\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} + 0\times 2^{-4} = \\
&= 1\times \frac{1}{2^{3}} = 1\times \frac{1}{8} = 0,125
\end{aligned}
$$

Repetindo o procedimento novamente

$$
\begin{aligned}
&0,11\times 2^{-1} = 0,011 = \\
&= 0\times 2^{0} + 0\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} = \\
&= 1\times \frac{1}{2^{2}} + 1\times \frac{1}{2^{3}} = \\
&= 1\times \frac{1}{4} + 1\times \frac{1}{8} = \\
&= 0,25 + 0,125 = \\
&= 0,375
\end{aligned}
$$

Repetindo o procedimento

$$\begin{aligned}
&0{,}10\times 2^{-1}=0{,}010=\\
&=0\times 2^{0}+0\times 2^{-1}+1\times 2^{-2}+0\times 2^{-3}=\\
&=1\times\frac{1}{2^{2}}=1\times\frac{1}{4}=\\
&=0{,}25
\end{aligned}$$

Repetindo o procedimento

$$\begin{aligned}
&0{,}11\times 2^{0}=0{,}11=\\
&=0\times 2^{0}+1\times 2^{-1}+1\times 2^{-2}=\\
&=1\times\frac{1}{2^{1}}+1\times\frac{1}{2^{2}}=1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}=\\
&=0{,}5+0{,}25=\\
&=0{,}75
\end{aligned}$$

Repetindo o procedimento

$$\begin{aligned}
&0{,}10\times 2^{0}=0{,}10=\\
&=0\times 2^{0}+1\times 2^{-1}+0\times 2^{-2}=\\
&=1\times\frac{1}{2^{1}}=1\times\frac{1}{2}=\\
&=0{,}5
\end{aligned}$$

Continuando com o procedimento

$$\begin{aligned}
&0{,}11\times 2^{1}=1{,}1=\\
&=1\times 2^{0}+1\times 2^{-1}=\\
&=1+1\times\frac{1}{2^{1}}=1+1\times\frac{1}{2}=\\
&=1+0{,}5=\\
&=1{,}5
\end{aligned}$$

Repetindo o procedimento

$$0{,}10 \times 2^1 = 1{,}0 =$$
$$= 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} =$$
$$= 1$$

Repetindo o procedimento

$$0{,}11 \times 2^2 = 11 =$$
$$= 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 =$$
$$= 1 \times 2 + 1 = 2 + 1 =$$
$$= 3$$

Finalmente

$$0{,}10 \times 2^2 = 10 =$$
$$= 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 =$$
$$= 1 \times 2 =$$
$$= 2$$

Portanto, o conjunto procurado é

$\{\pm 0{,}125;\ \pm 0{,}1875;\ \pm 0{,}25;\ \pm 0{,}375;\ \pm 0{,}5;\ \pm 0{,}75;\ \pm 1;\ \pm 1{,}5;\ \pm 2;\ \pm 3\}$

Exemplo 2

Um número binário tem sua representação normalizada

$n_1 = 0{,}11100110 \times 2^2$

a) Determine o valor referente ao sistema decimal.

Solução

Basta observarmos que

$$
\begin{aligned}
&n_1 = 0{,}11100110 \times 2^2 = 11{,}100110 = \\
&= 1\times 2^1 + 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 0\times 2^{-3} + 1\times 2^{-4} + 1\times 2^{-5} + 0\times 2^{-6} = \\
&= 1\times 2 + 1\times 1 + 1\times \frac{1}{2^1} + 0\times \frac{1}{2^2} + 0\times \frac{1}{2^3} + 1\times \frac{1}{2^4} + 1\times \frac{1}{2^5} + 0\times \frac{1}{2^6} = \\
&= 2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}0625 + 0{,}03125 = \\
&= 3{,}59375
\end{aligned}
$$

b) Determine o valor o binário n_2 sucessor de n_1 nesta normalização e o seu valor decimal.

Solução

De maneira análoga ao item anterior, temos:

$$
\begin{aligned}
&n_2 = 0{,}11100111 \times 2^2 = 11{,}100111 = \\
&= 1\times 2^1 + 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 0\times 2^{-3} + 1\times 2^{-4} + 1\times 2^{-5} + 1\times 2^{-6} = \\
&= 1\times 2 + 1\times 1 + 1\times \frac{1}{2^1} + 0\times \frac{1}{2^2} + 0\times \frac{1}{2^3} + 1\times \frac{1}{2^4} + 1\times \frac{1}{2^5} + 1\times \frac{1}{2^6} = \\
&= 2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}0625 + 0{,}03125 + 0{,}015625 = \\
&= 3{,}609375
\end{aligned}
$$

c) Pelos resultados obtidos nos itens anteriores, a representação do decimal 3,6 é exata?

Solução

A representação do decimal 3,6 em indicação binária normalizada não será exata, pois esse valor está localizado entre:

$n_1 = 0{,}11100110 \text{ x } 2^2 = 3{,}59375$ e $n_2 = 0{,}11100111 \text{ x } 2^2 = 3{,}609375$

Ambos possuem representação exata na sequência.

Exemplo 3

Qual é a representação normalizada do número decimal 7,42 na base 2 usando oito algarismos significativos? Essa representação é exata?

Solução

Note que 7,42 = 7 + 0,42.

Consideremos apenas a parte inteira 7 e observemos que

$7 = 2 \cdot 3 + 1$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$1 = 2 \cdot 0 + 1$

Consideremos agora a parte decimal 0,42 e observemos que

0,42 x 2 = 0,84

0,84 x 2 = 1,68

0,68 x 2 = 1,36

0,36 x 2 = 0,72

0,72 x 2 = 1,44

Dessa maneira, obtemos a igualdade

$(7{,}42)_{10} = (111{,}01101)_2$

Na notação normalizada

$(7{,}42)_{10} = 0{,}11101101 \times 2^3$

Exemplo 4

Usando truncamento de seis termos da série e arredondamento com três algarismos significativos, determine ln(1,5) usando a série $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...$ para $-1 < x < 1$

Solução

Utilizando a série definida no enunciado do exemplo, obtemos

$$\ln(1{,}5) = \ln(1+0{,}5) = 0{,}5 - \frac{(0{,}5)^2}{2} + \frac{(0{,}5)^3}{3} - \frac{(0{,}5)^4}{4} + \frac{(0{,}5)^5}{5} - \frac{(0{,}5)^6}{6} =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}125 + 0{,}0417 - 0{,}0156 + 0{,}00625 - 0{,}00260 =$$

$$= 0{,}4048 \cong 0{,}405$$

Exemplo 5

Um sistema digital armazena valores normalizados em binário (B = 2) com cinco algarismos significativos com expoente variado de -7 a +7. Determine o maior e menor valor positivo decimal armazenado nesse sistema.

A solução desse exemplo será omitida e deixada como desafio para você. Basta seguir de maneira análoga ao exemplo resolvido anteriormente na construção da parte teórica.

Saiba mais

Para saber mais sobre erros e aritmética computacional, leia o capítulo 2 da obra indicada a seguir:

DORNELLES FILHO, A. A. *Fundamentos de cálculo numérico*. São Paulo: Grupo A, 2016.

2 ZEROS DE FUNÇÕES

2.1 Inspeção gráfica e isolamento das raízes

Ao estudar funções matemáticas, uma das questões fundamentais é determinar os valores de x para os quais uma função f seja igual a zero, isto é, $f(x) = 0$. Esses pontos são chamados de zeros ou raízes da função f, e o problema para encontrá-los apresenta várias aplicações, pois eles são essenciais na análise da função nas áreas da ciência, como engenharia, física, estatística, finanças e ciência da computação. Uma das principais características geométricas do zero de uma função é a de que eles fornecem informações sobre os pontos de interseção entre o gráfico da função f e o eixo x.

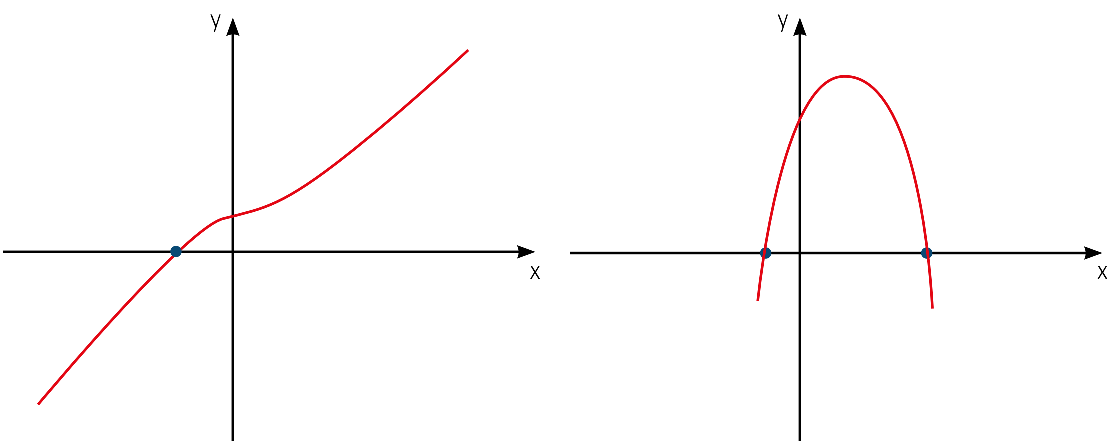

Figura 1

2.1.1 Inspeção gráfica

Uma maneira de obter informações preliminares sobre as raízes de uma função é realizar uma inspeção gráfica. Isso envolve a representação da função em um gráfico cartesiano e a observação da intersecção da curva com o eixo x. No gráfico de uma função, os zeros correspondem aos pontos onde a curva cruza o eixo x. Ou seja, se a curva cruza o eixo x em um ponto específico, isso mostra a presença de uma raiz nesse ponto. No entanto, essa inspeção gráfica pode fornecer apenas estimativas aproximadas das raízes, especialmente quando a função é complexa ou tem múltiplas raízes.

Observação

Recordemos a fórmula de Bháskara que nos fornece uma maneira prática de encontrar soluções da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \qquad \text{e} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

Exemplo de aplicação

Vamos determinar as raízes da função quadrática $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Considerando os coeficientes $a = 1$; $b = -5$; $c = 6$ e utilizando a fórmula de Bháskara, temos

$$\Delta = (-5)^2 - 4.(1).(6) = 25 - 24 = 1$$

Assim:

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2.(1)} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Também temos

$$x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2.(1)} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Logo, $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$ são as duas raízes ou zeros da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Graficamente, temos

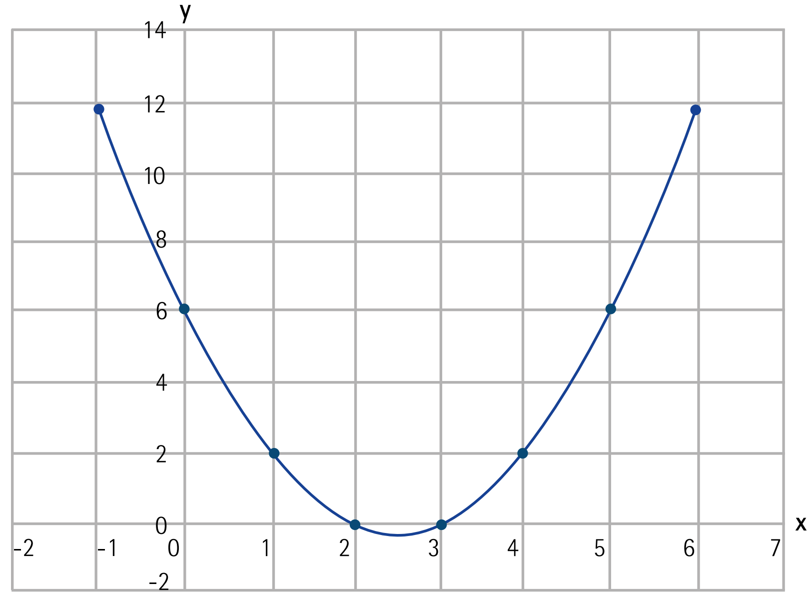

Figura 2

Como visto no exemplo anterior, a algumas funções polinomiais (como as funções do segundo grau) associamos fórmulas que permitem o cálculo de suas raízes com o uso dos coeficientes de seus termos. No entanto, no caso de polinômios de grau mais alto e no caso de funções mais complicadas, é praticamente impossível achar exatamente os zeros.

Dessa forma, podemos usar outra maneira para encontrar raízes de funções através de uma análise gráfica. Basta partir da igualdade f(x) = 0 e obter uma igualdade equivalente g(x) = h(x). Depois é só esboçar os gráficos das funções g(x) e h(x) no mesmo eixo cartesiano e localizar os pontos x onde as duas curvas se interceptam, pois nesse caso temos:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=h(x)$$

Exemplo de aplicação

Encontre os intervalos onde a função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ possui suas raízes.

Solução

Utilizando as funções auxiliares $g(x) = x^3$ e $h(x) = 9x - 3$ obtidas a partir da igualdade $x^3 - 9x + 3 = 0$, vamos esboçar os gráficos de g(x) e h(x) e observar os seus pontos em comum.

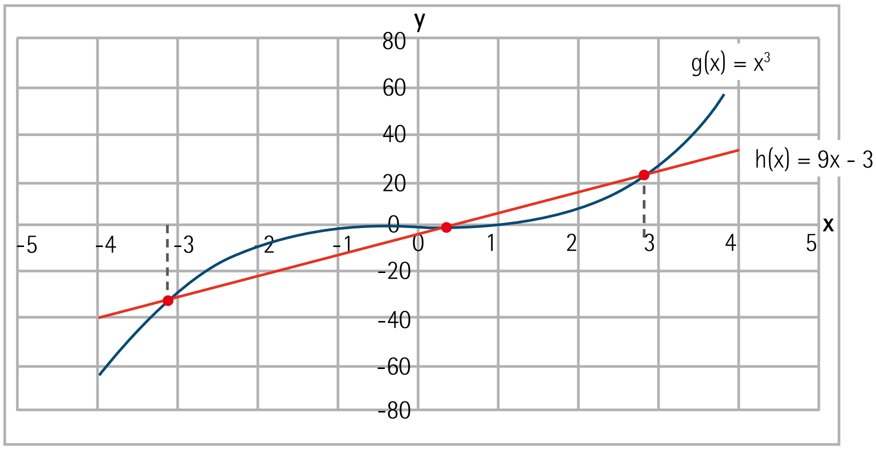

Figura 3

Observe que g(x) = h(x) nos intervalos [-4; -3], [0;1] e [2; 3] . Dessa forma, as raízes de f(x) estão contidas nesses mesmos intervalos.

Note que, no exemplo anterior, não determinamos os valores exatos das raízes da função, nos contentamos em encontrar intervalos que contêm tais raízes, podendo apenas obter aproximações para essas raízes reais. Contudo, essa não é uma limitação muito séria, pois os métodos que serão utilizados neste livro-texto permitirão encontrar os zeros de uma função com qualquer precisão prefixada.

Observação

Vejamos como diferenciar os termos raízes de uma função e soluções de uma equação.

Quando temos uma função y = f(x) e queremos achar os pontos em que seu gráfico intercepta o eixo x, dizemos que estamos procurando as raízes (ou os zeros) dessa função e fazemos f(x) = 0.

Quando queremos achar os valores de x para os quais a equação f(x) = 0 é verdadeira, dizemos que estamos procurando as soluções dessa equação.

2.1.2 Isolamentos de raízes

Se tivermos uma estimativa aproximada das raízes de uma função, obtida a partir da inspeção gráfica, podemos utilizar métodos numéricos para realizar o isolamento das raízes de forma mais precisa. O isolamento de raízes consiste em determinar um intervalo no qual a raiz de uma função está localizada. Para isso, podem ser usados o método da dicotomia ou bisseção, o método das aproximações sucessivas, o método de Newton-Raphson etc.

As técnicas aplicadas nesses métodos são amplamente utilizadas na matemática para resolver problemas de otimização. Além disso, esses métodos permitem encontrar intervalos cada vez menores e nos quais a raiz da função está contida. Por meio de repetidas iterações, o intervalo é refinado até que uma aproximação da raiz seja alcançada com qualquer precisão desejada.

2.2 Teorema de Bolzano

Trata-se de um importante resultado na busca dos zeros de funções e determina as condições para a existência de uma raiz (ou zero) de uma função contínua em um intervalo fechado e limitado.

Formalmente, o teorema afirma o seguinte: se f(x) é uma função contínua em um intervalo fechado [a,b], e se f(a) e f(b) têm sinais opostos (ou seja, um é positivo e o outro negativo), então existe pelo menos um ponto c no intervalo aberto (a,b) onde a função assume o valor zero, ou seja, f(c) = 0.

Em outras palavras, se uma função contínua muda de sinal em um intervalo fechado, ela deve ter pelo menos uma raiz nesse intervalo. Esse resultado é bastante útil para a localização de raízes isoladas de uma função, já que permite restringir a busca a um intervalo específico. Por exemplo, se a função tem um zero em algum lugar entre 0 e 1, podemos verificar os sinais da função nos pontos 0 e 1 para determinar se há um zero no intervalo [0,1] e, se sim, usar métodos numéricos para aproximar o valor da raiz.

Exemplo de aplicação

Para ilustrar o teorema de Bolzano, consideremos a função

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

Solução

Note que:

(i) $\mathbf{f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 1 = -27 + 27 - 1 = -1}$

e $f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 1 = -8 + 12 - 1 + 3.$

(ii) $\mathbf{f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = -1 + 3 - 1 = 1}$

e $f(0) = (0)^3 + 3(0)^2 - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$

(iii) $\mathbf{f(0) = (0)^3 + 3(0)^2 - 1 = 0 + 0 - 1 = -1}$

e $f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 1 = 1 + 3 - 1 = 3$

Logo, considerando os itens **(i)**, **(ii)** e **(iii)** anteriores, $f(x) = x^3 = 3x^2 - 1$ é uma função contínua nos números reais, pois é polinomial, e o teorema de Bolzano segue os intervalos [-3; -2], [-1; 0] e [0;1], os quais possuem pelo menos uma raiz cada um. Geometricamente, temos:

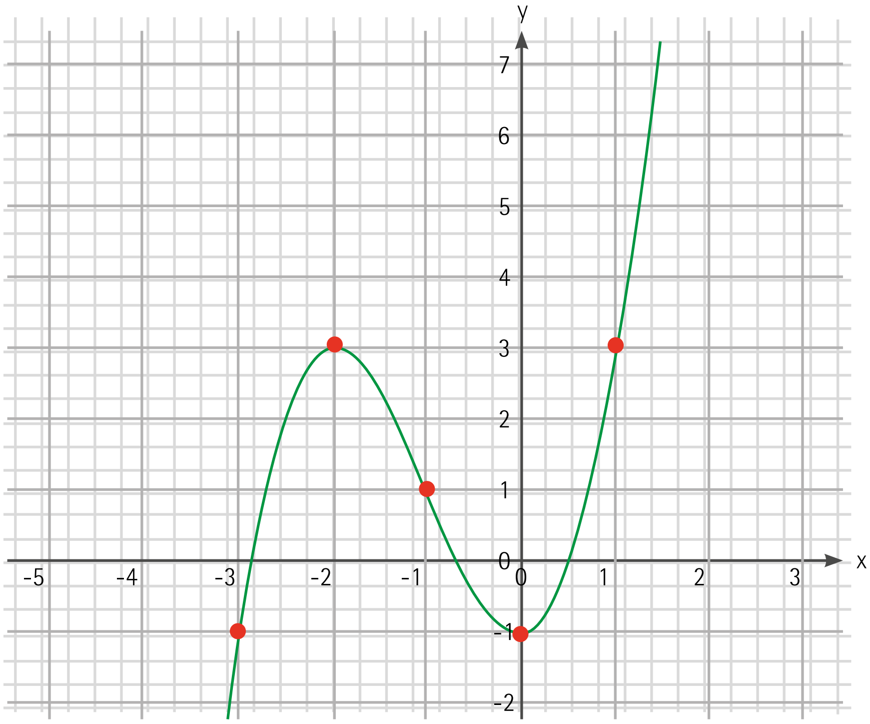

Figura 4

É essencial lembrar que o teorema de Bolzano não garante a unicidade da raiz, nem fornece um método para encontrá-la com precisão. No entanto, é uma ferramenta valiosa para a localização de raízes isoladas e para a análise qualitativa de funções contínuas.

2.2.1 Possibilidades de raízes inteiras e fracionárias

Como mencionado anteriormente, uma característica importante de algumas funções polinomiais é a possibilidade de determinar suas raízes, ou seja, os valores de x que tornam a função igual a zero. Essas raízes podem ser inteiras ou fracionárias, dependendo dos coeficientes do polinômio.

A existência de raízes inteiras ou fracionárias para uma função polinomial pode ser determinada por meio de alguns resultados como o teorema da Raiz Racional, também conhecido como teorema de Gauss. Esse teorema estabelece que se uma função polinomial tem uma raiz racional (inteira ou fracionária), ela será da forma p/q, onde p é um divisor do termo independente do polinômio e q é um divisor do coeficiente principal.

A possibilidade de raízes inteiras ou fracionárias em funções polinomiais é uma propriedade fundamental que permite a resolução de equações polinomiais, a fatoração de polinômios e o estudo do comportamento dessas funções. Além disso, essas raízes desempenham um papel crucial na análise e compreensão dessas funções polinomiais. Nesse contexto, o teorema da raiz racional é uma ferramenta valiosa para determinar a existência dessas raízes, fornecendo um conjunto de valores possíveis a serem verificados.

Exemplo de aplicação

Segundo o teorema de Gauss, a função $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 16x - 20$ tem como possíveis raízes inteiras os divisores de 20, ou seja, o conjunto $\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 5; \pm 10; \pm 20\}$. Além disso, considerando os números $\{2; 4\}$, divisores de 4, as possíveis raízes fracionárias de f(x) são os valores $\left\{\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{5}{2}; \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{5}{4}\right\}$.

De fato, temos que apenas o valor $x = +\frac{5}{4}$, ou ainda x = +1,25 é uma raiz da função f(x), pois

$$f(x) = 4\left(\frac{5}{4}\right)^3 - 5\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 16\left(\frac{5}{4}\right) - 20 = \frac{125}{16} - \frac{125}{16} + \frac{80}{4} - 20 = 0$$

2.2.2 Dispositivo de Briot-Ruffini

Uma maneira de decidir quais dos possíveis valores disponibilizados pelo teorema de Gauss são, de fato, raízes de uma função polinomial f(x) é o dispositivo de Briot-Ruffini. Ele ainda funciona como uma ferramenta para realizar a divisão sintética de polinômios de forma eficiente, sendo uma alternativa ao uso tradicional da divisão longa de polinômios e oferecendo uma abordagem mais simplificada e rápida para encontrar as raízes.

O dispositivo de Briot-Ruffini baseia-se no fato de que, se uma função polinomial f(x) tem uma raiz r, então o polinômio f(x) pode ser dividido pelo polinômio (x – r) sem deixar resto. Esse fato também pode ser expresso de maneira recíproca, isto é, se o polinômio f(x) pode ser dividido pelo polinômio (x – r) sem deixar resto, significa que o valor de r é uma raiz da função f(x), e o método de Briot-Ruffini permite realizar essa divisão de forma sistemática e direta.

O procedimento começa com a organização dos coeficientes do polinômio em uma tabela. Os coeficientes do polinômio são escritos na primeira linha da tabela, e a raiz suspeita é escrita na parte inferior da coluna esquerda. A partir daí, o método envolve uma série de cálculos simples para encontrar os coeficientes do quociente da divisão e o resto, se houver. Esse dispositivo permite reduzir o número de termos envolvidos no polinômio a cada iteração, simplificando a divisão e facilitando a determinação das raízes.

Esse método é especialmente útil quando buscamos raízes racionais, uma vez que, ao encontrar uma raiz, é possível simplificar o polinômio original para continuar a busca por outras raízes. É possível simplificar e agilizar o processo de determinação de raízes de funções polinomiais, economizando tempo e esforço em comparação com métodos mais tradicionais, como a divisão longa. Além disso, esse dispositivo é uma ferramenta útil para a fatoração de polinômios e para a resolução de equações polinomiais, permitindo uma análise mais detalhada das propriedades das funções.

Em suma, o dispositivo de Briot-Ruffini é uma técnica eficiente para determinar as raízes de funções polinomiais. Sua abordagem simplificada e direta, baseada na divisão sintética, oferece uma maneira conveniente de encontrar as raízes de um polinômio e facilita o estudo e a análise dessas funções. Na prática, para utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini, associamos os coeficientes da função polinomial f(x) a outros coeficientes obtidos com as seguintes ações:

1) O primeiro coeficiente é igual ao primeiro coeficiente da função.

2) O segundo coeficiente é igual ao primeiro coeficiente multiplicado pela possível raiz, mais o segundo coeficiente da função.

3) Essa sequência descrita no item anterior é seguida até obtermos o último coeficiente a ser associado ao último coeficiente da função.

4) O resto é igual ao último coeficiente obtido.

5) Se o último valor for zero, a possível raiz é, de fato, uma raiz da função.

6) Se o último valor for zero, o grau da função é sempre uma unidade inferior ao grau da função anterior.

7) Podemos escrever essa divisão apenas com os coeficientes obtidos nas ações anteriores.

Exemplo de aplicação

Vamos utilizar a mesma função polinomial do último exemplo, $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 16x - 20$, para ilustrar o dispositivo de Briot-Ruffini.

Solução

Para resolvermos esse exemplo, vamos usar uma tabela para associar os coeficientes da função polinomial com os coeficientes obtidos através das ações de **1** a **7** descritas anteriormente.

Tabela 1

	4	-5	16	-20
"**Raiz:** x = 1,25"	4	0	16	0

O segundo, o terceiro e o quarto coeficientes da segunda linha da tabela anterior foram obtidos com os seguintes cálculos:

$(4 \cdot 1{,}25) + (-5) = 5 - 5 = 0$

$(0 \cdot 1{,}25) + (16) = 0 + 16 = 16$

$(16 \cdot 1{,}25) + (-20) = 20 - 20 = 0$

Note que o último coeficiente da função é -20 e está associado ao coeficiente 0, ou seja, x = 1,25 é uma raiz da função f(x). Além disso, esse procedimento decompõe a função $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 16x - 20$ da seguinte maneira:

$$f(x) = (4x^2 + 16) \cdot (x - 1{,}25)$$

Como $4x^2 + 16 = 0$ não admite raízes reais, x = 1,25 é a única raiz de f(x). Graficamente, temos:

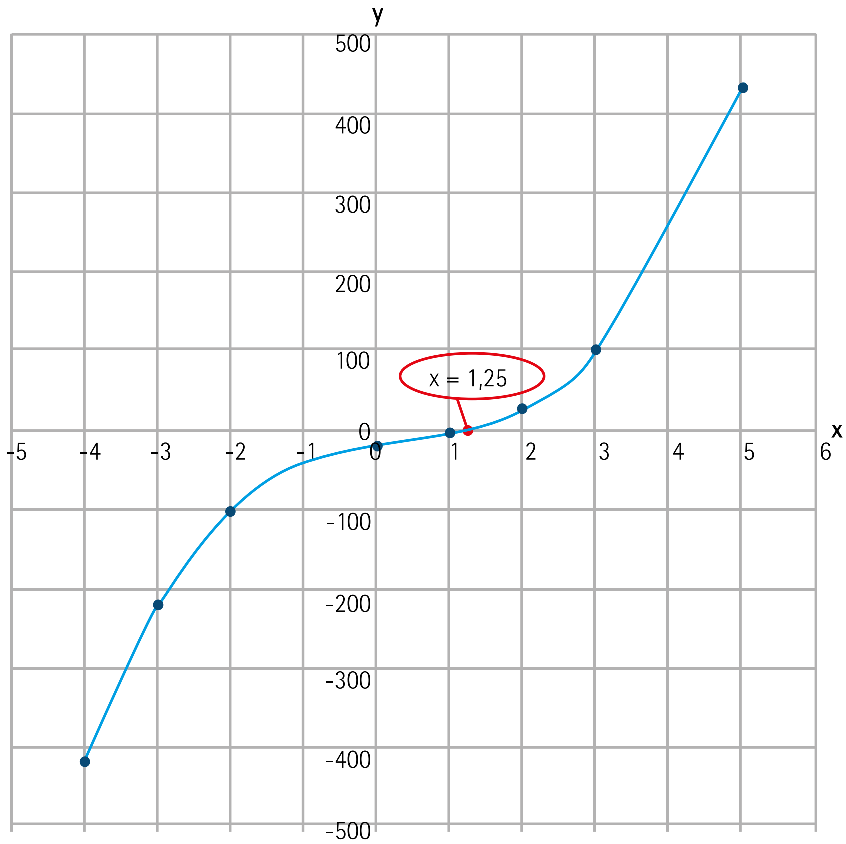

Figura 5

2.3 Refinamento

Para realizar o refinamento dos intervalos que contêm as raízes de uma função, faremos uso de algumas técnicas utilizadas para obter aproximações mais precisas dessas raízes. Essas técnicas são especialmente úteis quando não é possível encontrar a solução exata da função de forma analítica e todas elas pertencem à classe dos métodos iterativos.

Um **método iterativo** consiste em uma sequência de instruções que são executadas passo a passo. É um procedimento realizado em ciclos, que envolve a repetição de uma série de etapas ou cálculos para se aproximar de uma solução desejada. Esses métodos são especialmente úteis quando não é possível obter uma solução direta ou analítica para um problema matemático complexo.

No contexto matemático, um método iterativo começa com uma estimativa inicial da solução e, em seguida, aplica uma fórmula ou um conjunto de regras para gerar uma nova estimativa. Esse processo é repetido várias vezes, utilizando a estimativa atual para calcular uma nova estimativa, até que um critério de parada seja atingido, geralmente relacionado à precisão desejada.

É importante notar que a eficácia e a convergência dos métodos iterativos podem variar dependendo do problema e das características da função ou sistema envolvidos. Além disso, a escolha de uma boa estimativa inicial pode ser crucial para a convergência e a precisão dos resultados obtidos pelo método iterativo. Em síntese, um método iterativo é um procedimento que usa repetição de cálculos ou etapas para se aproximar de uma solução desejada. Esses métodos são aplicados em uma ampla gama de problemas matemáticos e científicos e são especialmente úteis quando não é possível obter uma solução direta ou analítica.

O processo de refinamento de intervalos começa com a identificação de um intervalo que contenha uma raiz da função. Isso pode ser feito por meio da análise gráfica da função ou utilizando os chamados métodos numéricos, que veremos mais adiante. Uma vez que um intervalo contendo uma raiz é identificado, o refinamento ocorre por meio da divisão sucessiva desse intervalo em subintervalos menores. Isso é feito aplicando métodos numéricos iterativos dentro de cada subintervalo para encontrar uma melhor aproximação da raiz.

2.4 Critérios de parada

O critério de parada no refinamento de intervalos contendo raízes de funções é uma condição que determina quando o processo de refinamento deve ser encerrado, ou seja, quando uma aproximação está suficientemente próxima da raiz exata, sendo aceitável como uma raiz da função. Esse critério é importante para controlar a precisão e a eficiência do refinamento, evitando que o processo seja executado indefinidamente.

Existem diferentes critérios de parada que podem ser utilizados no refinamento de intervalos. Alguns dos mais comuns são:

- **Tolerância**: envolve definir uma tolerância predeterminada que representa o nível de precisão desejado. O refinamento é encerrado quando a diferença entre as estimativas consecutivas da raiz é menor ou igual à tolerância estabelecida.

- **Número máximo de iterações**: um critério de parada simples é estabelecer um número máximo de iterações permitidas no processo de refinamento. Após atingir esse número, o refinamento é interrompido, independentemente da precisão alcançada.

- **Convergência**: alguns métodos iterativos possuem critérios específicos de convergência. Por exemplo, no método de Newton-Raphson, o refinamento pode ser interrompido quando a diferença entre as estimativas consecutivas da raiz é menor que um limite estabelecido.

- **Estabilidade**: em certos casos, é possível verificar a estabilidade do processo de refinamento. Se as estimativas da raiz começarem a oscilar em torno de um valor específico, pode ser um indicativo de que o refinamento está convergindo para uma solução estável, e o critério de parada pode ser baseado nessa oscilação.

A escolha do critério de parada depende do problema específico e das características da função em questão. É importante encontrar um equilíbrio entre a precisão desejada e o tempo computacional necessário para obter essa precisão. Além disso, é fundamental considerar a estabilidade e a convergência do método iterativo utilizado para garantir resultados confiáveis. Dessa forma, o critério de parada no refinamento de intervalos contendo raízes de funções é uma condição que determina quando as iterações devem ser encerradas. A escolha do critério depende das características do problema e do método iterativo empregado.

A seguir, serão destacados alguns exercícios resolvidos como exemplos.

Exemplos de aplicação

Exemplo 1

A função $f(x) = \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}$ possui ao menos um zero no intervalo:

a) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ b) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ c) $[0, \pi]$ d) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ e) $[\pi, 2\pi]$

Solução

Vamos utilizar o teorema de Bolzano para determinar o intervalo que contém a raiz da função f(x). Dessa forma, basta calcularmos o valor da função nos extremos de cada um dos intervalos considerados para, então, decidirmos.

Intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$: a função não possui raízes nesse intervalo, pois

$$f(\pi) = \cos(\pi) - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cong -1{,}7071 < 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cong -0{,}7071 < 0$$

Intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$: a função possui pelo menos uma raiz nesse intervalo, pois

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}=0-\frac{\sqrt{2}}{2}\cong -0{,}7071<0$$

$$f(2\pi)=\cos(2\pi)-\frac{\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cong 0{,}2929>0$$

Intervalo $[0,\pi]$: a função possui pelo menos uma raiz nesse intervalo, pois

$$f(0)=\cos(0)-\frac{\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cong 0{,}2929$$

$$f(\pi)=\cos(\pi)-\frac{\sqrt{2}}{2}=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cong -1{,}7071$$

Intervalo $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$: a função possui pelo menos uma raiz nesse intervalo, pois

$$f(0)=\cos(0)-\frac{\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cong 0{,}2929>0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

Nesse caso, $x=\pi/4$ é uma raiz para a função.

Intervalo $[\pi,2\pi]$: a função possui pelo menos uma raiz nesse intervalo, pois

$$f(\pi)=\cos(\pi)-\frac{\sqrt{2}}{2}=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cong -1{,}7071<0$$

$$f(2\pi)=\cos(2\pi)-\frac{\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cong 0{,}2929>0$$

Exemplo 2

As possíveis raízes racionais da função $f(x) = x^3 - 5x + 4$ são

a) ± 1; ± 2; ± 3; ±4; ± 6

b) ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

c) ± 1; ± 2; ± 4; ± 6

d) ± 2; ± 3; ± 4; ± 6

e) ± 1; ± 2; ± 4

Solução

Vimos anteriormente que, para uma função polinomial f(x) de coeficientes inteiros, os divisores do termo independente sobre os divisores do termo de maior grau são as possíveis raízes fracionárias. Dessa forma, as possíveis raízes fracionárias serão os divisores 4 valor da função nos valores das possíveis raízes, obtemos sobre 1, ou seja, os possíveis valores serão {±1, ±2, ±4}. Calculando o

$f(1) = (1)^3 - 5(1) + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$

$f(-1) = (-1)^3 - 5(-1) + 4 = -1 + 5 + 4 = 8$

$f(2) = (2)^3 - 5(2) + 4 = 8 - 10 + 4 = 2$

$f(-2) = (-2)^3 - 5(-2) + 4 = - 8 + 10 + 4 = 6$

$f(4) = (4)^3 - 5(4) + 4 = 64 - 20 + 4 = 48$

$f(-4) = (-4)^3 - 5(-4) + 4 = -64 + 20 + 4 = -40$

Portanto, x = 1 é uma raiz para a função $f(x) = x^3 - 5x + 4$.

Exemplo 3

Sendo $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$

a) Quais são as possíveis raízes racionais?

Solução

Conforme mencionado na solução do exemplo anterior, as possíveis raízes racionais da função $f(x) = x^3 - 5x + 4$ serão

$$\left\{\pm\frac{3}{2}; \pm\frac{1}{2}\right\}$$

b) Utilize o dispositivo de Briot-Ruffini para pesquisar as raízes.

Solução

Vamos usar uma tabela para associar os coeficientes da função polinomial com os coeficientes obtidos através das ações de **1** a **7** que foram descritas na definição do método de Briot-Ruffini.

Para $x = \frac{3}{2} = 1,5$

Tabela 2

	2	1	-6	-3
"Raiz: x = 1,5"	2	4	0	-3

Como o último coeficiente calculado é -3, diferente de zero, segue que x = 1,5 não é raiz da função.

Para $x = -\frac{3}{2} = -1,5$

Tabela 3

	2	1	-6	-3
"Raiz: x = 1,5"	2	-2	-3	1,5

Como o último coeficiente calculado é 1,5, diferente de zero, segue que x = -1,5 não é raiz da função.

Para $x = \frac{1}{2} = 0,5$

Tabela 4

	2	1	-6	-3
"Raiz: x = 0,5"	2	2	-5	-4,5

Como o último coeficiente calculado é -4,5, diferente de zero, segue que x = 1,5 não é raiz da função.

Para $x = -\frac{1}{2} = -0,5$

Tabela 5

	2	1	-6	-3
"Raiz: x = -0,5"	2	0	-6	0

Nesse caso, como o último coeficiente calculado é igual a 0, segue que x = -0,5 é uma raiz da função $f(x) = x^3 - 5x + 4$.

Exemplo 4

Qual dos valores a seguir é zero da função $f(x) = x^4 - 5x^2 - 10x - 6 = 0$?

a) 1   b) 2   c) 3   d) 5   e) 6

Solução

Basta aplicarmos à função $f(x) = x^4 - 5x^2 - 10x - 6$ os valores a seguir.

Para x =1

$f(1) = (1)^4 - 5(1)^2 - 10(1) - 6 = 1 - 5 - 10 - 6 = -20$

Para x = 2

$f(2) = (2)^4 - 5(2)^2 - 10(2) - 6 = 16 - 20 - 20 - 6 = -30$

Para x = 3

$f(3) = (3)^4 - 5(3)^2 - 10(3) - 6 = 81 - 45 - 30 - 6 = 0$

Para x = 5

$f(5) = (5)^4 - 5(5)^2 - 10(5) - 6 = 625 - 125 - 50 - 6 = 444$

Para x = -5

$f(6) = (6)^4 - 5(6)^2 - 10(6) - 6 = 1296 - 180 - 60 - 6 = 1050$

Portanto, x = 3 é uma raiz para a função f(x).

Exemplo 5

Qual dos valores a seguir é zero da função $f(x) = x^4 - 5x^2 - 10x - 6 = 0$?

a) -1 b) -2 c) -3 d) -5 e) -6

Solução

Basta aplicarmos à função $f(x) = x^4 - 5x^2 - 10x - 6$ os valores a seguir.

Para x = -1

$f(-1) = (-1)^4 - 5(-1)^2 - 10(-1) - 6 = 1 - 5 + 10 - 6 = 0$

Para x = -2

$f(-2) = (-2)^4 - 5(-2)^2 - 10(-2) - 6 = 16 - 20 + 20 - 6 = 10$

Para x = -3

$f(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 10(-3) - 6 = 81 - 45 + 30 - 6 = 60$

Para x = -5

$f(-5) = (-5)^4 - 5(-5)^2 - 10(-5) - 6 = 625 - 125 + 50 - 6 = 544$

Para x = -6

$f(6) = (-6)^4 - 5(-6)^2 - 10(-6) - 6 = 1296 - 180 + 60 - 6 = 1170$

Portanto, x = -1 é uma raiz para a função f(x).

Exemplo 6

Verifique em quais dos intervalos a seguir a função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ possui alguma raiz.

a) [-5, -3]   b) [0,1]   c) [2,3]

Solução

Vamos utilizar o teorema de Bolzano para determinar em quais intervalos a função possui raízes.

Intervalo [-5, -3]

$f(-5) = (-5)^3 - 9(-5) + 3 = -125 + 45 + 3 - 77 < 0$

$f(-3) = (-3)^3 - 9(-3) + 3 = -27 + 27 + 3 = 3 > 0$

Como a função muda de sinal nesse intervalo, existe pelo menos uma raiz contida nele.

Intervalo [0, 1]

$f(0) = (0)^3 - 9(0) + 3 = 0 + 0 + 3 = 3 > 0$

$f(1) = (1)^3 - 9(1) + 3 = 1 - 9 + 3 = -5 < 0$

Como a função muda de sinal nesse intervalo, existe pelo menos uma raiz contida nele.

Intervalo [2, 3]

$f(2) = (2)^3 - 9(2) + 3 = 8 - 18 + 3 = -7 < 0$

$f(3) = (3)^3 - 9(3) + 3 = 27 - 27 + 3 = 3 > 0$

Como a função muda de sinal nesse intervalo, existe pelo menos uma raiz contida nele.

Exemplo 7

As possíveis raízes racionais e positivas de $f(x) = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$ são:

a) $7; 6; \frac{1}{7}$ b) $5; 7; \frac{1}{5}$ c) $2; 4; \frac{1}{2}$ d) $6; 5; \frac{1}{6}$ e) $1; 3; \frac{1}{3}$

Solução

Observemos que os divisores de 3 são 1 e 3. Logo, as possíveis raízes da função $f(x) = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$ são os valores

$$\left\{\frac{1}{3};1;3\right\}$$

Exemplo 8

A função $f(x) = e^x + x - 3$ possui ao menos um zero no intervalo:

a) [1,2] b) [2,3] c) [4,3] d) [0,1] e) [-1,0]

Solução

Considerando a função dada $f(x) = e^x + x - 3$, vamos calcular seu valor nos extremos dos intervalos em análise. Dessa maneira, temos que

$$f(-1) = e^{(-1)} + (-1) - 3 \cong -3{,}6321 < 0$$

$$f(0) = e^{(0)} + (0) - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$$

$$f(1) = e^{(1)} + (1) - 3 = e - 2 \cong 0{,}7183 > 0$$

$$f(2) = e^{(2)} + (2) - 3 = e^2 - 1 \cong 6{,}3891 > 0$$

$$f(3) = e^{(3)} + (3) - 3 = e^3 \cong 20{,}0855 > 0$$

$$f(4) = e^{(4)} + (4) - 3 = e^4 + 1 \cong 55{,}5982 > 0$$

Portanto, pelo teorema de Bolzano, a função $f(x) = e^x + x - 3$ possui pelo menos uma raiz, no intervalo [0,1].

Exemplo 9

As possíveis raízes racionais da função $f(x) = x^3 - 7x + 6$ são

a) 1; ± 2; ± 3; ±4; ± 6

b) 1; ± 2; ± 3; ± 6

c) 1; ± 2; ± 4; ± 6

d) 2; ± 3; ± 4; ± 6

e) 1; ± 2; ± 4

Solução

Considere a seguinte função $f(x) = x^3 - 7x + 6$. As possíveis raízes racionais dessa função são os valores

{±6; ±3; ±2; ±1}

3 PROCESSOS ITERATIVOS

Trata-se de métodos numéricos que usam aproximações sucessivas para encontrar soluções para problemas matemáticos. Eles envolvem a repetição de uma regra ou fórmula para gerar uma sequência de valores cada vez mais próximos da solução desejada. Estudaremos alguns desses métodos numéricos a seguir.

3.1 Método da dicotomia ou bissecção

É um método numérico utilizado para refinar cada vez mais um intervalo que contenha a raiz (ou zero) de uma função. Baseado no teorema de Bolzano, é simples de implementar e garante a convergência da solução para uma aproximação preestabelecida. A ideia básica do método é dividir sucessivamente o intervalo em duas partes iguais e verificar em qual delas a função assume valores de sinais opostos. Em seguida, o intervalo contendo a raiz é escolhido e a divisão é repetida até que a precisão desejada seja alcançada.

Mais formalmente, o método da dicotomia pode ser descrito da seguinte forma:

1) Escolha um intervalo [a, b] que contém a raiz e uma precisão ε.

2) Calcule o ponto médio c = (a+b)/2 e os valores da função em c e nos extremos a e b.

3) Se f(a) e f(c) têm sinais opostos, a raiz está no intervalo [a,c]. Caso contrário, a raiz está no intervalo [c,b].

4) Repita o processo a partir do novo intervalo escolhido até que a diferença entre b e a seja menor ou igual a ε.

Exemplo de aplicação

Determine o valor de $\sqrt{2}$ usando o método da dicotomia.

Solução

Seja $x = \sqrt{2}$ e considere que

$$x = \sqrt{2} \Leftrightarrow (x)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0$$

Dessa forma, resolver o problema inicial, ou seja, o valor de $\sqrt{2}$, será o mesmo que encontrarmos as raízes da função $f(x) = x^2 - 2$ caso existam. Pelo teorema de Bolzano, podemos garantir a existência de pelo menos uma raiz no intervalo [1, 2], uma vez que f(x) é contínua e troca de sinal nesse intervalo, pois

$f(1) = (1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$ e $f(2) = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

Utilizando os passos de 1 a 4 descritos anteriormente, poderemos refinar o intervalo [1, 2] até uma aproximação suficientemente pequena conforme a exigência requerida. No processo de refinamento, obtemos a tabela a seguir:

Tabela 6

a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	E = (b-a)/2	Sinal f(x)*f(a)
1	2	1,5	0,5	-
1	1,5	1,25	0,25	+
1,25	1,5	1,375	0,125	+
1,375	1,5	1,4375	0,0625	-
1,375	1,4375	1,40625	0,03125	+

Nesse caso, inicialmente, a = 1 e b = 2 e também:

(*) $x = \frac{a+b}{2}$ representa a bissecção do intervalo [a,b].

(*) $E = \frac{b-a}{2}$ *é* o erro que se comete quando adotamos $x = \frac{a+b}{2}$ como raiz.

(*) Caso o sinal f(x)*f(a) seja negativo, isso significa que a raiz está no intervalo [a,x]. Então, o valor de a é mantido e x assume o valor de b

(*) Caso o sinal f(x)*f(a) seja positivo, a raiz não está no intervalo [a,x]. Fazendo f(x)*f(b), provavelmente obteremos um valor negativo, o que significa que a raiz está no intervalo [x,b]. Então, o valor de b é mantido e x assume o valor de a.

(*) O zero da função é $x \pm E$ e, pelo desenvolvimento anterior, temos que $1,375 < \sqrt{2} < 1,4375$, com um erro aproximado de $E = 0,03125$.

Note que a cada iteração o tamanho do intervalo diminui pela metade e a precisão da solução aumenta. No entanto, é importante lembrar que a escolha do método iterativo adequado depende das propriedades do problema em questão e pode exigir ajustes e cuidados especiais para garantir a convergência e a estabilidade da solução.

3.2 Método das aproximações sucessivas

Também conhecido como método das iterações, é uma técnica utilizada para encontrar uma sequência de valores cada vez mais próximos da raiz (ou zero) de uma função. A ideia básica é iniciar com uma estimativa inicial e, em seguida, aplicar uma fórmula de recorrência que, sendo satisfeitas determinadas condições de convergência, nos fornece uma função iterativa para obtermos novas estimativas com base nas estimativas anteriores. Esse processo é repetido até atingir a sequência de valores cujo limite é a raiz procurada.

O método é geralmente aplicado da seguinte maneira:

1) Escolhe-se uma estimativa inicial para a solução da equação.

2) Usa-se uma função iterativa que relaciona a estimativa anterior com a próxima estimativa.

3) Aplica-se repetidamente a função iterativa para obter uma sequência de estimativas cada vez mais próximas da solução.

4) Verifica-se a convergência da sequência de estimativas para a solução desejada utilizando critérios de parada adequados.

5) Uma vez que a sequência tenha convergido, a última estimativa obtida é considerada uma solução aproximada da equação.

É importante ressaltar que a escolha da função iterativa é crucial para o sucesso do método. Em alguns casos, a função iterativa pode ser definida diretamente a partir da equação original. Em outros casos, podem ser necessárias manipulações algébricas ou transformações da equação f(x) = 0 para se obter uma função iterativa apropriada. No método das aproximações sucessivas, a fórmula de recorrência pode ser obtida reescrevendo a equação f(x) = 0 na forma x = f(x) ou ϕ(x). Assim, a partir de um valor inicial x_0, obtém-se uma sequência de valores.

Exemplo de aplicação

Determine o zero da função $f(x) = x^2 + 0,96\,x - 2,08$ usando o método das aproximações sucessivas com o valor inicial para a aproximação da raiz da função como sendo $x_0 = 1$.

Solução

Inicialmente, vamos determinar a igualdade $x = \phi(x)$ da seguinte maneira

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 0,96\,x - 2,08 = 0 \Leftrightarrow x.(x + 0,96) = 2,08 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2,08}{x + 0,96} \Leftrightarrow \phi(x) = \frac{2,08}{x + 0,96}$$

Utilizando os procedimentos de 1 a 5 descritos anteriormente, obtemos a tabela a seguir, onde $x_0 = 1$ e

$$x_{n+1} = \frac{2,08}{x_n + 0,96}$$

Tabela 7

Iterações	x_n	$\phi(x_n)$
0	1	1,061
1	1,061	1,029
2	1,029	1,046
3	1,046	1,037
4	1,037	1,042
5	1,042	1,039
6	1,039	1,041
7	1,041	1,039

Podemos notar através das iterações que está havendo uma convergência entre os valores 1,041 e 1,039. Essa flutuação ocorre por causa da limitação de algarismos utilizados. Dessa maneira, pode-se afirmar, por indução, que a raiz da função $f(x) = x^2 + 0,96\,x - 2,08$ é, aproximadamente, x = 1,040.

3.3 Método de Newton-Raphson

É outra forma iterativa para encontrar raízes de uma função f(x). Ele é uma extensão do método das aproximações sucessivas e é amplamente usado por ser mais eficiente que o anterior, pois utiliza uma função de recorrência chamada função de Newton-Raphson, dada por

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Onde f'(x) é a derivada de f(x).

Observação

A derivada de f(x) é a função f(x) que fornece a taxa de variação de f(x) em relação à variável x. Ela é dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Além da definição dada na igualdade anterior, existem regras de derivação que facilitam os cálculos na busca das derivadas de funções.

O método de Newton-Raphson recebe esse nome em homenagem a Isaac Newton e Joseph Raphson, que contribuíram para o seu desenvolvimento. Além disso, a aplicação desse método envolve os seguintes passos:

1) Escolhe-se uma estimativa inicial para a raiz da equação.

2) Utiliza-se a derivada da função para encontrar a reta tangente à curva no ponto correspondente à estimativa inicial.

3) Encontra-se a interseção dessa reta com o eixo x, determinando uma nova estimativa da raiz.

4) Repete-se o processo utilizando a nova estimativa como ponto de partida para encontrar uma estimativa ainda mais precisa.

5) O método continua iterando até que a sequência de estimativas convirja para a raiz desejada em uma determinada tolerância.

O método é matematicamente descrito pela seguinte fórmula de iteração:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Onde x_n é a estimativa atual da raiz, $f(x_n)$ é o valor da função na estimativa atual, $f'(x_n)$ é o valor da derivada da função na estimativa atual e x_{n+1} é a próxima estimativa da raiz.

Observação

A derivada de uma função polinomial $f(x) = x^n$ pode ser calculada por $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$ Utilizamos também outras regras de derivação que serão explicitadas quando for necessário.

O método de Newton-Raphson tem convergência rápida quando a estimativa inicial está suficientemente próxima da raiz procurada e quando a função possui derivada contínua e não se anula próximo à raiz. No entanto, o método pode apresentar problemas de convergência (ou seja, divergência) se a estimativa inicial for escolhida incorretamente ou se a função apresentar comportamento complexo nas proximidades da raiz. Em resumo, o método de Newton-Raphson é uma técnica eficaz para encontrar raízes de equações não lineares, fornecendo resultados precisos quando aplicado corretamente.

Exemplo de aplicação

Determine o zero da função $f(x) = x^3 + x - 3$ usando o método de Newton-Raphson.

Solução

Vamos calcular a derivada de f(x).

$$f'(x) = \left(x^3 + x - 3\right)' = 3x^{3-1} + x^{1-1} - 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 + 1$$

Determinando a função de Newton-Raphson, obtemos

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \varphi(x) = x - \frac{x^3 + x - 3}{3x^2 + 1} \rightarrow \varphi(x) = \frac{x(3x^2+1) - (x^3 + x - 3)}{3x^2+1}$$

$$\varphi(x) = \frac{3x^3 + x - x^3 - x + 3}{3x^2+1} \rightarrow \varphi(x) = \frac{2x^3+3}{3x^2+1}$$

Depois, deve-se fazer as substituições sucessivas $x_{n+1} = \phi(x_n)$ escolhendo como $x_0 = 1$. Para isso, montamos a seguinte tabela:

Tabela 8

Iterações	x_n	$\phi(x_n)$
0	1	1,25
1	1,25	1,214
2	1,214	1,213
3	1,213	1,213

Logo x = 1,213 é o zero de $f(x) = x^3 + x - 3$ como uma aproximação de três casas decimais.

3.3.1 Estudo da convergência do método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é amplamente utilizado para encontrar as raízes de funções diversas e é conhecido por sua rapidez e eficiência. O estudo da convergência desse método consiste em uma análise matemática que investiga as condições sob as quais esse método iterativo converge para a solução desejada, isto é, a raiz da função. Existem alguns conceitos e critérios que são usados no estudo da convergência do método de Newton-Raphson, o que envolve analisar as condições sob as quais o método converge para a raiz desejada de uma equação não linear.

Vejamos a seguir algumas das principais condições para a convergência:

1) **Condição de existência da raiz**: o método só pode convergir para uma raiz se houver uma raiz da equação no intervalo considerado. Portanto, é necessário verificar se a equação possui uma raiz no intervalo de interesse.

2) **Condição de continuidade e derivabilidade**: o método de Newton-Raphson exige que a função seja contínua e tenha derivada contínua na vizinhança da raiz. Se a função apresentar descontinuidades ou não for diferenciável na região da raiz, o método pode não convergir.

3) **Escolha adequada da estimativa inicial**: a convergência do método pode depender significativamente da escolha da estimativa inicial. Em geral, é desejável escolher uma estimativa inicial próxima o suficiente da raiz para garantir a convergência. Caso contrário, o método pode divergir ou convergir para outra raiz.

4) **Critério de parada**: um critério de parada é necessário para determinar quando parar as iterações e considerar a aproximação como a solução. Normalmente, utiliza-se uma tolerância definida, ou seja, quando a diferença entre duas iterações consecutivas é menor que um valor predefinido, considera-se que a convergência foi alcançada.

5) **Condição de não anulação da derivada**: se a derivada da função se anular em algum ponto próximo à raiz, o método pode falhar em convergir ou convergir muito lentamente. Isso ocorre porque a derivada é usada no cálculo da próxima estimativa, e quando ela se anula não é possível determinar a direção correta para a convergência.

Além dessas condições, existem outros resultados e teoremas que auxiliam na análise da convergência do método de Newton-Raphson, a exemplo do teorema do valor médio. Com base nessas análises, é possível investigar a estabilidade do método, a influência de perturbações nos valores iniciais, a sensibilidade a erros de arredondamento e outras propriedades relacionadas à eficácia e confiabilidade do método. Ainda será possível, por meio dessa análise, determinar se o método irá convergir e sob quais condições isso ocorrerá.

Observe com atenção a sequência de exercícios resolvidos como exemplos.

Exemplos de aplicação

Exemplo 1

Determine usando a dicotomia com o valor de $\sqrt{5}$. Considere um erro menor que 0,01.

Solução

Seja $x = \sqrt{5}$ e observe que

$$x = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0$$

Dessa forma, deve-se resolver o problema inicial, ou seja, o valor de $\sqrt{5}$ será equivalente ao problema de encontrarmos as raízes da função $f(x) = x^2 - 5$, caso existam. Pelo teorema de Bolzano podemos garantir a existência de pelo menos uma raiz no intervalo [1, 3] uma vez que f(x) é contínua e troca de sinal neste intervalo, pois

$f(1) = (1)^2 - 5 = 1 - 5 = -4 < 0$

$f(3) = (3)^2 - 5 = 9 - 5 = 4 > 0$

Seguindo os passos de 1 a 4 utilizados anteriormente para descrever o método da dicotomia, poderemos refinar o intervalo [1, 3] até uma aproximação suficientemente pequena conforme a exigência requerida. No processo de refinamento, usaremos a tabela a seguir.

Tabela 9

a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$E = \frac{b-a}{2}$	Sinal f(x)*f(a)
1	3	2	1	+
2	3	2,5	0,5	-
2	2,5	2,25	0,25	-
2	2,25	2,125	0,125	+
2,125	2,25	2,1875	0,0625	+
2,1875	2,25	2,2188	0,0313	+
2,2188	2,25	2,2344	0,0156	+
2,2344	2,25	2,2422	0,0078	-

Além de utilizar a = 1 e b = 3, determinamos alguns valores da tabela anterior através dos cálculos a seguir.

$f(2,5) = (2,5)^2 – 5 = 6,25 – 5 = 1,25$

$f(2,25) = (2,25)^2 – 5 = 5,0625 – 5 = 0,0625$

$f(2,125) = (2,125)^2 – 5 = 4,5156 – 5 = 0,4844$

$f(2,1875) = (2,1875)^2 – 5 = 4,7852 – 5 = – 0,2148$

$f(2,2188) = (2,2188)^2 – 5 = 4,9231 – 5 = – 0,0769$

$f(2,2344) = (2,2344)^2 – 5 = 4,9925 – 5 = – 0,0075$

$f(2,2422) = (2,2422)^2 – 5 = 5,0275 – 5 = – 0,0275$

Dessa maneira, podemos estimar o valor de $\sqrt{5}$ com erro E = 0,0078<0,01 por

$$\sqrt{5} = x \pm E = 2,2422 \pm 0,0078 \Rightarrow 2,2344 < \sqrt{5} < 2,25$$

Exemplo 2

Usar o processo da bissecção para calcular $\sqrt[3]{5}$

a) Determinar função adequada.

b) Desenvolver o processo até um erro inferior a 0,01.

Solução

Seja $x=\sqrt[3]{5}$ e observe que

$$x=\sqrt[3]{5}\Leftrightarrow(x)^3=\left(\sqrt[3]{5}\right)^3\Leftrightarrow x^3=5\Leftrightarrow x^3-5=0$$

Dessa forma, resolver o problema inicial, ou seja, o valor de $\sqrt[3]{5}$, será equivalente ao problema de encontrarmos as raízes da função $f(x) = x^3 - 5$ caso existam. Pelo teorema de Bolzano, podemos garantir a existência de pelo menos uma raiz no intervalo [1, 2], uma vez que f(x) é contínua e troca de sinal nesse intervalo, pois

$f(1) = (1)^3 - 5 = 1 - 5 = -4 < 0$

$f(2) = (2)^3 - 5 = 8 - 5 = 3 > 0$

Seguindo os passos de 1 a 4 usados anteriormente para descrever o método da dicotomia, poderemos refinar o intervalo [1, 2] até uma aproximação suficientemente pequena conforme a exigência requerida. No processo de refinamento utilizaremos a tabela a seguir.

Tabela 10

a	b	$x=\frac{a+b}{2}$	$E=\frac{b-a}{2}$	Sinal f(x)*f(a)
1	2	1,5	0,5	+
1,5	2	1,75	0,25	-
1,5	1,75	1,6250	0,125	+
1,6250	1,75	1,6875	0,0625	+
1,6875	1,75	1,7188	0,0313	-
1,6875	1,7188	1,7032	0,0157	+
1,7032	1,7188	1,7110	0,0078	-

Além de utilizar a = 1 e b = 2, determinamos alguns valores da tabela anterior através dos cálculos a seguir.

$$f(1{,}5)=(1{,}5)^3-5\cong 3{,}375-5=-1{,}625$$

$$f(1{,}75)=(1{,}75)^3-5=5{,}3594-5=0{,}3594$$

$$f(1{,}625)=(1{,}625)^3-5=4{,}2910-5=-0{,}7090$$

$$f(1{,}6875)=(1{,}6875)^3-5=4{,}8054-5=-0{,}1946$$

$$f(1{,}7188) = (1{,}7188)^3 - 5 = 5{,}0774 - 5 = 0{,}0774$$

$$f(1{,}7032) = (1{,}7032)^3 - 5 = 4{,}9404 - 5 = -0{,}0596$$

$$f(1{,}7110) = (1{,}7110)^3 - 5 = 5{,}0090 - 5 = 0{,}0090$$

Dessa maneira, podemos estimar o valor de $\sqrt[3]{5}$ com erro $E = 0{,}0078 < 0{,}01$ por

$$\sqrt[3]{5} = x \pm E = 1{,}7110 \pm 0{,}0078 \Rightarrow 1{,}7032 < \sqrt[3]{5} < 1{,}7188$$

Exemplo 3

Ao se pesquisar as raízes de $f(x) = x^3 + x - 5$ pelo teorema de Bolzano, verificou-se que no intervalo [1; 2] existe pelo menos um "zero" real.

a) Dê a função de Newton-Raphson $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ para a determinação aproximada desta raiz

b) Desenvolva o método Newton-Raphson $x_{n+1} = \phi(x_n)$ para calcular a raiz de $f(x) = x^3 + x - 5$ no intervalo citado com uma aproximação de três casas decimais.

Solução

Para determinar a função de Newton-Raphson, primeiro vamos calcular a derivada de $f(x) = x^3 + x - 5$. Dessa maneira, a derivada de f(x) é

$$f'(x) = \left(x^3 + x - 5\right)' = 3x^{3-1} + x^{1-1} - 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 + 1$$

Determinando a função de Newton-Raphson, obtemos

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \phi(x) = x - \frac{x^3 + x - 5}{3x^2 + 1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{x\left(3x^2 + 1\right) - x^3 - x + 5}{3x^2 + 1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{3x^3 + x - x^3 - x + 5}{3x^2 + 1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{2x^3 + 5}{3x^2 + 1}$$

Agora vamos fazer as iterações sucessivas para determinar os valores

$x_{n+1} = \phi(x_n)$

Para isso, vamos escolher um ponto inicial pertencente ao intervalo [1,2], que contém a raiz procurada. Consideremos x_0 = 1,5 como nosso ponto inicial e a tabela a seguir.

Tabela 11

Iterações	x_n	$\phi(x_n)$
0	1,5	1,5161
1	1,5161	1,5160
2	1,5160	1,5160

Os valores da tabela anterior foram obtidos através dos seguintes cálculos:

$$\phi(1{,}5) = \frac{2(1{,}5)^3 + 5}{3(1{,}5)^2 + 1} = \frac{6{,}7500 + 5}{6{,}7500 + 1} = \frac{11{,}7500}{7{,}7500} = 1{,}5161$$

$$\phi(1{,}5161) = \frac{2(1{,}5161)^3 + 5}{3(1{,}5161)^2 + 1} = \frac{6{,}9697 + 5}{6{,}8957 + 1} = \frac{11{,}9697}{7{,}8957} = 1{,}5160$$

$$\phi(1{,}5160) = \frac{2(1{,}5160)^3 + 5}{3(1{,}5160)^2 + 1} = \frac{6{,}9683 + 5}{6{,}8948 + 1} = \frac{11{,}9683}{7{,}8948} = 1{,}5160$$

Note que

$$\begin{aligned}
&f(1{,}5160) = (1{,}5160)^3 + (5160) - 5 = \\
&= 3{,}4842 + 1{,}5160 - 5 = \\
&= 5{,}0002 - 5 = \\
&= 0{,}0002 \cong 0
\end{aligned}$$

Portanto, x = 1,5160 é a raiz da função $f(x) = x^3 + x - 5$ com uma aproximação de três casas decimais.

Exemplo 4

Considere a função dada a seguir.

$f(x) = x^3 - 9x + 3$

Utilizando-se o teorema de Bolzano, é possível verificar que essa função possui pelo menos uma raiz no intervalo [2, 3].

a) Dê a função de Newton-Raphson $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ para a determinação aproximada dessa raiz.

b) Desenvolva o método Newton-Raphson $x_{n+1} = \phi(x_n)$ para calcular a raiz de $f(x) = x^3 - 9x + 3$ no intervalo citado com uma aproximação de três casas decimais.

Solução

Para determinar a função de Newton-Raphson, primeiro vamos calcular a derivada da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$. Dessa maneira, a derivada de f(x) é

$$f'(x) = \left(x^3 - 9x + 3\right)' = 3x^{3-1} - 9x^{1-1} - 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 9$$

Determinando a função de Newton-Raphson, obtemos

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \phi(x) = x - \frac{x^3 - 9x + 3}{3x^2 - 9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{x\left(3x^2 - 9\right) - \left(x^3 - 9x + 3\right)}{3x^2 - 9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{3x^3 - 9x - x^3 + 9x - 3}{3x^2 - 9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{2x^3 - 3}{3x^2 - 9}$$

Vamos agora fazer as iterações sucessivas para determinar os valores de

$x_{n+1} = \phi(x_n)$

Para isso, vamos escolher um ponto inicial pertencente ao intervalo [2; 3], que contém a raiz procurada. Consideremos $x_0 = 2,5$ como nosso ponto inicial e a tabela a seguir.

Tabela 12

Iterações	x_n	$\phi(x_n)$
0	2,5	2,8974
1	2,8974	2,8204
2	2,8204	2,8169

Os valores da tabela anterior foram obtidos através dos seguintes cálculos:

$$\phi(2,5)=\frac{2(2,5)^3-3}{3(2,5)^2-9}=\frac{2(15,6250)-3}{3(6,2500)-9}=\frac{28,2500}{9,7500}=2,8974$$

$$\phi(2,8974)=\frac{2(2,8974)^3-3}{3(2,8974)^2-9}=\frac{2(24,3235)-3}{3(8,3949)-9}=\frac{45,6470}{16,1847}=2,8204$$

$$\phi(2,8204)=\frac{2(2,8204)^3-3}{3(2,8204)^2-9}=\frac{2(22,4353)-3}{3(7,9547)-9}=\frac{41,8706}{14,8640}=2,8169$$

Note que

$$\begin{aligned}
&f(2,8169)=(2,8169)^3-9(2,8169)+3=\\
&=22,3519-25,3521+3=\\
&=-3,0002+3=\\
&=-0,0002\cong 0
\end{aligned}$$

Portanto, x = 2,8169 é uma raiz da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ com uma aproximação de três casas decimais.

4 SISTEMAS LINEARES

4.1 Introdução: esforço computacional

Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações que contém variáveis lineares e cuja solução é um conjunto de valores para essas variáveis que satisfaz todas as equações simultaneamente. Mais formalmente, um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares simultâneas na forma:

$$S:\begin{cases}
a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & a_{13}x_3+ & & +a_{1n}x_n & =b_1\\
a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & a_{23}x_3+ & \cdots & +a_{2n}x_n & =b_2\\
a_{31}x_1+ & a_{32}x_2+ & a_{33}x_3+ & & +a_{3n}x_n & =b_3\\
 & \vdots & & \ddots & \vdots & \\
a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & a_{m3}x_3+ & \cdots & +a_{mn}x_n & =b_m
\end{cases}$$

Nesse caso, temos que:

(*) aij são os coeficientes

(*) x_j são as variáveis

(*) i = 1,2,3, ... , m

(*) j = 1,2,3, ... , n

Assim, dizemos que o sistema possui ordem m x n, isto é, m equações e n variáveis. Podemos reescrever um sistema linear na forma de um produto matricial da forma A · X = B, onde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{11} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{11} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A matriz A é chamada de matriz de coeficientes, X é a matriz das variáveis e, quando $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, o sistema é chamado de sistema homogêneo.

Além disso, uma solução para um sistema linear de equações de ordem m x n ordem é uma n-upla $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ que satisfaz todas as m equações simultaneamente.

Quanto às soluções, podemos classificar um sistema linear em possível (determinado ou indeterminado) e impossível. Para resolvermos um sistema linear de equações, vamos considerar sua ordem m = n.

Existem diferentes métodos para resolver sistemas de equações lineares, como eliminação de Gauss, decomposição LU, método de Jacobi, método de Gauss-Seidel e métodos iterativos. Cada um deles possui diferentes requisitos e, consequentemente, um custo variado em sua implementação computacional.

Esse custo ou esforço computacional no cálculo de soluções de sistemas de equações lineares refere-se à quantidade de recursos computacionais necessários para encontrar a solução do sistema. O termo esforço computacional pode abranger várias medidas, como o tempo de execução, a quantidade de memória utilizada e o número de operações matemáticas realizadas.

Em resumo, o esforço computacional no cálculo de soluções de sistemas de equações lineares é uma medida da carga de trabalho exigida para encontrar a solução e pode variar dependendo do tamanho e da estrutura do sistema, bem como do método aplicado para resolver o sistema. Quanto maior o sistema, mais complexo é o cálculo e maior é o esforço computacional necessário. Além disso, a estrutura do sistema de equações pode afetar o esforço computacional. Por exemplo, sistemas esparsos, nos quais a maioria dos coeficientes é zero, podem ser resolvidos de maneira mais eficiente do que sistemas densos, nos quais a maioria dos coeficientes é diferente de zero.

Os sistemas de equações lineares têm diversas aplicações práticas, como em resolução de problemas de otimização, análise de redes elétricas, modelagem de sistemas físicos, planejamento de produção e alocação de recursos. Existem diferentes métodos para resolver sistemas de equações lineares, como o da substituição, o da eliminação e o método da matriz inversa. Alguns são chamados de **métodos diretos** e envolvem a aplicação de operações matemáticas às equações para simplificá-las e obter a solução.

Observação

Antes de abordarmos alguns métodos para a resolução de sistemas de equações lineares, é importante conhecermos as operações utilizadas no processo de escalonamento e na busca por uma matriz inversa. Essas operações são as chamadas operações elementares e serão apresentadas a seguir:

1) Permutar duas equações.

2) Multiplicar uma equação por um escalar não nulo.

3) Somar a uma equação um múltiplo de outra equação.

4.2 Método da eliminação de Gauss

É um dos métodos mais utilizados para resolver sistemas de equações lineares. Desenvolvido pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss, seu objetivo é transformar o sistema original em um sistema equivalente mais simples, chamado de forma escalonada. Isso é feito por meio de uma sequência de operações elementares que envolvem a adição, subtração e multiplicação das equações do sistema.

O método consiste nos seguintes passos:

1) Organizar as equações do sistema em uma matriz ampliada, na forma [A|B], em que A é a matriz dos coeficientes das incógnitas e B é a matriz dos termos constantes.

2) Aplicar a eliminação para obter zeros abaixo do primeiro elemento não nulo da primeira coluna. Para isso, realiza-se a seguinte operação: multiplica-se a primeira equação por um fator adequado e subtrai-se essa equação das demais equações. O objetivo é eliminar o primeiro elemento da coluna nas linhas abaixo da primeira.

3) Repetir o passo anterior para as demais colunas, sempre eliminando os elementos abaixo dos primeiros termos de cada equação em cada interação. Esses termos são chamados de pivôs.

4) Após a eliminação, a matriz ampliada estará na forma escalonada, em que os elementos acima e abaixo dos pivôs são iguais a zero.

5) Resolver o sistema por substituição retroativa. Começando da última equação, calcula-se o valor da última incógnita e substitui-se esse valor nas equações anteriores, resolvendo-as em ordem.

Destaca-se que no item 4 o sistema escalonado obtido tem a forma triangular, como o sistema a seguir:

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & a_{33}x_3 + & & +a_{3n}x_n & = b_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Ao final do método da eliminação de Gauss, obtém-se a solução do sistema de equações lineares. É importante ressaltar que, em alguns casos, podem ocorrer situações especiais, como a presença de pivôs nulos ou falta de pivôs em determinadas colunas, o que requer tratamento específico.

Também é essencial observar que na i-ésima etapa do método da eliminação de Gauss o pivô considerado será o valor a_{ii} correspondente àquela etapa. Além disso, os multiplicadores aplicados nas operações elementares utilizadas serão dados por $m_{ki} = \frac{a_{ki}}{a_{ii}}$, onde k = 1,2,3,...,n.

Exemplo de aplicação

Vejamos alguns exemplos de sistemas de equações lineares.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \end{cases} \quad \text{Sistema inicial}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 7y + 2z = 20 \\ 17z = 51 \end{cases}$$ Sistema escalonado

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$ Solução do sistema

O método da eliminação de Gauss é eficiente e relativamente simples de ser implementado. Contudo, em sistemas muito grandes, pode demandar um esforço computacional significativo. Existem também variantes e melhorias do método, como a eliminação de Gauss-Jordan, que permite obter a matriz escalonada reduzida, facilitando a identificação de soluções singulares e a obtenção de soluções únicas.

4.2.1 Estratégias de pivoteamento

O método da eliminação de Gauss requer alguns cálculos utilizando os elementos chamados de pivôs, o que pode proporcionar situações que demandam mais atenção. Essas situações ocorrem quando os pivôs são nulos ou muito próximos de zero, uma vez que é impossível a divisão por zero e a divisão por números muito pequenos pode gerar erros exagerados devido aos cálculos serem efetuados com aritmética de precisão finita.

Para contornar esses problemas, deve-se adotar uma estratégia de pivoteamento, ou seja, estratégias usadas para lidar com situações especiais que podem surgir durante o processo de eliminação.

As estratégias de pivoteamento mais comumente usadas são:

- **Pivoteamento parcial**: em cada etapa da eliminação, procura-se o maior elemento (em valor absoluto) na coluna atual, abaixo ou igual à linha atual, e troca-se a linha atual com essa linha de maior elemento. Isso garante que o pivô selecionado seja o maior possível, minimizando o erro numérico. O pivoteamento parcial ajuda a evitar divisões por números muito pequenos ou próximos de zero.

- **Pivoteamento total**: é uma extensão do pivoteamento parcial. Além de procurar o maior elemento em valor absoluto na coluna atual, considera-se toda a matriz (incluindo a matriz ampliada) para determinar o pivô. Essa abordagem garante melhor estabilidade numérica, mas pode ser mais custosa computacionalmente, pois exige a comparação de todos os elementos da matriz.

É importante observar que o pivoteamento pode introduzir uma sobrecarga computacional adicional, pois requer a identificação e a troca das linhas (ou equações). No entanto, essas estratégias de pivoteamento são essenciais para garantir a estabilidade numérica e a precisão dos resultados na eliminação de Gauss. A escolha da estratégia de pivoteamento depende da aplicação específica, do tamanho e da natureza do sistema de equações lineares a ser resolvido.

Exemplo de aplicação

Considere o seguinte sistema de equações lineares. Dê o sistema equivalente na forma escalonada e determine sua solução.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Solução

Vamos utilizar as três operações elementares apresentadas anteriormente.

1º passo

Preserve a primeira equação e faça as seguintes operações:

2ª Equação $\leftarrow$ (-3) · Eq1 + Eq2

3ª Equação $\leftarrow$ (-2) · Eq1 + Eq3

Assim,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\ -7x_2 - 2x_3 & = & -20 \\ -2x_2 - 3x_3 & = & -13 \end{cases}$$

2º passo

Preserve a primeira e a segunda equações e faça as seguintes operações:

3ª Equação $\leftarrow$ (-2) · Eq2 + (7) · Eq3

Dessa forma, obtemos o sistema escalonado

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -7x_2 - 2x_3 = -20 \\ -17x_3 = -51 \end{cases}$$

A partir da terceira equação, temos

$$-17x_3 = -51 \Leftrightarrow x_3 = \frac{-51}{-17} \Leftrightarrow x_3 = 3$$

Substituindo $x_3 = 3$ na segunda equação:

$$-7x_2 - 2.(3) = -20 \Leftrightarrow -7x_2 - 6 = -20 \Leftrightarrow -7x_2 = -20 + 6 \Leftrightarrow x_2 = \frac{-14}{-7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 2$$

Finalmente, substituindo $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$ na primeira equação, obtemos:

$$x_1 + 2.(2) + (3) = 8 \Leftrightarrow x_1 + 4 + 3 = 8 \Leftrightarrow x_1 = 8 - 7 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

4.3 Matriz inversa

Considere uma matriz quadrada A com determinante não nulo. A matriz inversa de A, denotada por A^{-1}, é uma matriz tal que:

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = Id$

Onde Id é a matriz identidade.

Observação

A partir da matriz inversa de uma matriz de coeficientes de um sistema de equações lineares, é possível determinar a solução desse sistema. Basta observarmos a sequência de igualdades a seguir:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow \left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

É importante destacar novamente que, para calcular a matriz inversa, é preciso garantir que o determinante da matriz A seja diferente de zero. Caso contrário, a matriz não terá uma inversa. Além disso, o cálculo da matriz inversa pode ser computacionalmente bastante exigente, em especial para matrizes de ordens grandes. Logo, deve-se considerar a eficiência computacional no cálculo das matrizes inversas na busca por soluções de sistemas lineares.

O método de Gauss-Jordan, a fatoração LU e a regra de Cramer são métodos comumente aplicados para encontrar a matriz inversa de uma matriz A. Vejamos, brevemente, o método de Gauss-Jordan:

1) Escreva a matriz A original seguida da matriz identidade I, formando uma matriz ampliada [A | I].

2) Aplique operações elementares de linha na matriz ampliada para transformar a parte esquerda (A) em uma matriz identidade. As mesmas operações devem ser aplicadas à matriz identidade à direita.

3) Após realizar todas as operações elementares necessárias, a parte direita da matriz ampliada será a matriz inversa de A.

4) Se a parte esquerda da matriz ampliada não se tornar uma matriz identidade, isso significa que a matriz A não tem uma matriz inversa.

Exemplo de aplicação

Considere o seguinte sistema de equações lineares. Determine a sua solução utilizando a matriz inversa da matriz dos coeficientes.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Solução

O sistema possui $A \cdot X = B$ como representação na forma matricial, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vamos determinar a matriz A^{-1} inversa da matriz A utilizando as etapas descritas nos itens de 1 até 4 descritos anteriormente. Assim,

$$(A\,|\,Id) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vamos manter a primeira linha da matriz ampliada (A|Id) e fazer as seguintes operações elementares:

Linha 2 ← (-3) · Linha 1 + Linha 2

Linha 3 ← (-2) · Linha 1 + Linha 3

Dessa forma, obteremos a seguinte matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Agora vamos manter as duas primeiras linhas da matriz obtida e efetuar a operação elementar

$$\text{Linha2} \leftarrow \left(\frac{-1}{7}\right).\text{Linha2}$$

Obtemos então a matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & 3/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Realizando a operação elementar

Linha 3 ← (-2) · Linha 2 + Linha 3

Obteremos a matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & 3/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & -17/7 & -8/7 & -2/7 & 1 \end{array}\right)$$

Realizando a operação elementar

$$\text{Linha3} \leftarrow \left(-7/17\right).\text{Linha3}$$

Obtemos a matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & 3/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8/17 & 2/17 & -7/17 \end{array}\right)$$

Realizaremos agora as operações elementares, mantendo a linha 3 sem mudanças

$$\text{Linha1} \leftarrow (-1).\text{Linha3} + \text{Linha1}$$

$$\text{Linha2} \leftarrow \left(-2/7\right).\text{Linha3} + \text{Linha2}$$

Obteremos a matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 9/17 & -2/17 & 7/17 \\ 0 & 1 & 0 & 5/17 & -3/17 & 2/17 \\ 0 & 0 & 1 & 8/17 & 2/17 & -7/17 \end{array}\right)$$

Por fim, mantemos as linhas 2 e 3 e fazemos a operação elementar a seguir:

Linha 1 $\leftarrow$ (-2) · Linha 2 + Linha 1

Obteremos a matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/17 & 4/17 & 3/17 \\ 0 & 1 & 0 & 5/17 & -3/17 & 2/17 \\ 0 & 0 & 1 & 8/17 & 2/17 & -7/17 \end{array}\right)$$

Como a parte esquerda da matriz ampliada obtida na etapa anterior é a matriz identidade, a parte direita da mesma matriz ampliada obtida é a matriz inversa de A, a matriz dos coeficientes do sistema linear dado no início do problema, ou seja

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{8}{17} & \frac{2}{17} & -\frac{7}{17} \end{pmatrix}$$

Dessa maneira, podemos encontrar a solução do sistema linear dado inicialmente através da igualdade

$$X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{8}{17} & \frac{2}{17} & -\frac{7}{17} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4.4 Método iterativo de Gauss-Jacobi

Trata-se de um algoritmo utilizado para resolver sistemas de equações lineares. É um dos métodos iterativos mais comuns e tem o nome dos matemáticos Carl Friedrich Gauss e Carl Gustav Jakob Jacobi. Diferentemente do método direto de Gauss, que fornece uma solução exata em um número finito de etapas, o método iterativo de Gauss-Jacobi provê uma solução aproximada por meio de iterações sucessivas.

Esse método é particularmente útil para sistemas de equações grandes, nas quais o cálculo direto se torna muito caro computacionalmente e consiste na seguinte transformação do sistema linear: $A \cdot X = B$ em $X + C \cdot X + G$, onde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{31}}{a_{33}} & 0 & & -\frac{a_{31}}{a_{33}} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Note que a matriz C possui a diagonal nula e a igualdade $X = C \cdot X + G$ consiste em isolar as variáveis correspondentes às linhas as quais pertencem.

O método de Gauss-Jacobi consiste em, a partir de uma possível solução $X^{(0)}$, obter uma sequência $\left(X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(K)}, \ldots\right)$ por meio da relação recursiva

$$X^{(K += 1)} = C \cdot X^{(K)} + G$$

É importante observar que a i-ésima linha da igualdade anterior, na etapa K+1 das iterações, será dada por:

$$x_i^{(K+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - a_{i1}x_1^{(K)} - a_{i2}x_2^{(K)} - \ldots - a_{i\,i-1}x_{i-1}^{(K)} - a_{i\,i+1}x_{i+1}^{(K)} - \ldots - a_{in}x_n^{(K)}\right)$$

Esse procedimento deve ser repetido até que a sequência de possíveis soluções $\left(X^{(K)}\right)$ possa ser tomada como uma solução aproximada. Isso geralmente é feito verificando e comparando o erro proporcionado pelas iterações sucessivas e aplicando um critério de parada adequado.

Dessa forma, o método iterativo de Gauss-Jacobi continua iterando até que a solução convirja para um resultado aceitável. A velocidade de convergência do método pode variar dependendo da matriz A e dos valores iniciais escolhidos. É importante observar que o método iterativo de Gauss-Jacobi pode não convergir para todos os sistemas de equações lineares. Em alguns casos, pode ser necessário aplicar condições prévias extras ou utilizar outros métodos iterativos mais avançados para obter uma solução adequada.

Observação

O resultado a seguir garante, sob algumas condições prévias, a convergência da sequência $(X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}, \ldots)$ de candidatas à solução de um sistema de equações lineares, obtida pelo método de Gauss-Jacobi.

Teorema (critério das linhas): seja o sistema linear A . X = B e seja

$$\alpha_k = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\right) / |a_{kk}|$$

Se $\alpha = \underset{1\leq k\leq n}{\text{máx}}\, \alpha_k < 1$, então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{X^{(K)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial $X^{(0)}$ considerada.

Exemplo de aplicação

Resolva o sistema a seguir pelo método de Gauss-Jacobi. Utilize como o valor inicial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{pmatrix}$ e uma tolerância para o erro de $\varepsilon = 0,05$.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

Solução

Para usar o método de Gauss-Jacobi, utilizaremos a igualdade matricial $X = C.X + G$, onde as matrizes C e G são as seguintes:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-3}{10} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{-8}{5} \\ \frac{6}{10} \end{pmatrix}$$

Dessa forma, a partir da matriz $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{pmatrix}$, obteremos a matriz x^1 e cujos elementos serão os seguintes:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0,2x_2^{(0)} - 0,1x_3^{(0)} + 0,7 = -0,2(-1,6) - 0,1(0,6) + 0,7 = 0,96 \\ x_2^{(1)} = -0,2x_1^{(0)} - 0,2x_3^{(0)} - 1,6 = -0,2(0,7) - 0,2(0,6) - 1,6 = -1,86 \\ x_3^{(1)} = -0,2x_1^{(0)} - 0,3x_2^{(0)} + 0,6 = -0,2(0,7) - 0,3(-1,6) + 0,6 = 0,94 \end{cases}$$

Ou seja

$$X^{(1)} = C.X^{(0)} + G = \begin{pmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{pmatrix}$$

Observemos os seguintes valores:

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = \left|0,96 - 0,7\right| = 0,26$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = \left|-1,86 + 1,6\right| = 0,26$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = \left|0,94 - 0,6\right| = 0,34$$

Dessa forma, utilizaremos como parâmetro para o erro a seguinte razão, onde o numerador é o maior valor absoluto calculado anteriormente e o denominador é o maior valor absoluto dos termos da matriz $X^{(1)}$. Assim:

$$\varepsilon_1 = \frac{0,34}{1,86} = 0,1828 > 0,05 = \varepsilon$$

Logo, a solução $X^{(1)}$ ainda não é uma aproximação aceitável como solução para o sistema e deveremos fazer uma nova iteração com o método de Gauss-Jacobi. Dessa forma, a partir da matriz $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{pmatrix}$ obteremos a matriz $X^{(2)}$ e cujos elementos serão os seguintes:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -0,2x_2^{(1)} - 0,1x_3^{(1)} + 0,7 = -0,2(-1,86) - 0,1(0,94) + 0,7 = 0,978 \\ x_2^{(2)} = -0,2x_1^{(1)} - 0,2x_3^{(1)} - 1,6 = -0,2(0,96) - 0,2(0,94) - 1,6 = -1,98 \\ x_3^{(2)} = -0,2x_1^{(1)} - 0,3x_2^{(1)} + 0,6 = -0,2(0,96) - 0,3(-1,86) + 0,6 = 0,966 \end{cases}$$

Ou seja

$$X^{(2)} = C.X^{(1)} + G = \begin{pmatrix} 0,978 \\ -1,98 \\ 0,966 \end{pmatrix}$$

Observemos agora os seguintes valores:

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = \left|0,978 - 0,96\right| = 0,018$$

$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = \left|-1,98 + 1,86\right| = 0,12$$

$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = \left|0,966 - 0,94\right| = 0,026$$

Dessa forma, utilizaremos como parâmetro para o erro ε_2 a seguinte razão, onde o numerador é o maior valor absoluto calculado anteriormente e o denominador é o maior valor absoluto dos termos da matriz $X^{(2)}$. Assim

$$\varepsilon_2 = \frac{0,12}{1,98} = 0,0606 > 0,05 = \varepsilon$$

Logo, a solução $X^{(2)}$ ainda não é uma aproximação aceitável como solução para o sistema e deveremos fazer uma nova iteração com o método de Gauss-Jacobi. Dessa forma, a partir da matriz $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,978 \\ -1,98 \\ 0,966 \end{pmatrix}$ obteremos a matriz $X^{(3)}$ e cujos elementos serão os seguintes:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -0,2x_2^{(2)} - 0,1x_3^{(2)} + 0,7 = -0,2(-1,98) - 0,1(0,966) + 0,7 = 0,9994 \\ x_2^{(3)} = -0,2x_1^{(2)} - 0,2x_3^{(2)} - 1,6 = -0,2(0,978) - 0,2(0,966) - 1,6 = -1,9888 \\ x_3^{(3)} = -0,2x_1^{(2)} - 0,3x_2^{(2)} + 0,6 = -0,2(0,978) - 0,3(-1,98) + 0,6 = 0,9984 \end{cases}$$

Ou seja

$$X^{(3)} = C.X^{(1)} + G = \begin{pmatrix} 0,9994 \\ -1,9888 \\ 0,9984 \end{pmatrix}$$

Observemos agora os seguintes valores:

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |0,9994 - 0,978| = 0,0214$$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |-1,9888 + 1,98| = 0,0088$$

$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |0,9984 - 0,966| = 0,0324$$

Utilizaremos como parâmetro para o erro a seguinte razão, onde o numerador é o maior valor absoluto calculado anteriormente e o denominador é o maior valor absoluto dos termos da matriz $X^{(3)}$. Assim

$$\varepsilon_2 = \frac{0,0324}{1,9888} = 0,0163 < 0,05 = \varepsilon$$

Portanto, a solução do sistema linear dado no início do nosso problema, com um erro menor que $\varepsilon = 0{,}05$, obtida pelo método de Gauss-Jacobi, é

$$\overline{X} = X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}9994 \\ -1{,}9888 \\ 0{,}9984 \end{pmatrix}$$

Nesse último exemplo, tomamos como valor inicial para solução o valor

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}6 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{pmatrix}$$

Todavia, o valor inicial $X^{(0)}$ pode ser arbitrário, pois o teorema critério das linhas garante a convergência do método iterativo de Gauss-Jacobi, que é independente da aproximação inicial escolhida.

4.5 Método iterativo de Gauss-Seidel

Recebe o nome dos matemáticos Carl Friedrich Gauss e Philipp Ludwig von Seidel, que contribuíram para o seu desenvolvimento. Usa outro algoritmo para resolver sistemas de equações lineares que é derivado do método de Gauss-Jacobi, o que significa que ele também fornece soluções aproximadas para sistemas de equações lineares por meio de iterações sucessivas.

Da mesma forma que no método de Gauss-Jacobi, no método de Gauss-Seidel o sistema linear A . X = B é escrito na forma X = C . X + G por separação da diagonal. O processo iterativo consiste em, a partir de $X^{(0)}$, uma aproximação inicial, calcular $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(K)}, \ldots$ da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x_1^{(K+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(K)} - a_{13}x_3^{(K)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(K)}\right) \\ x_2^{(K+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(K+1)} - a_{23}x_3^{(K)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(K)}\right) \\ x_3^{(K+1)} = \dfrac{1}{33}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(K+1)} - a_{32}x_2^{(K+1)} - a_{42}x_2^{(K)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(K)}\right) \\ \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n^{(K+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(K+1)} - a_{n2}x_2^{(K+1)} - a_{n2}x_2^{(K+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(K+1)}\right) \end{cases}$$

Portanto, no método iterativo de Gauss-Seidel, no momento de se calcular $x_j^{(K+1)}$ usamos todos os valores $x_1^{(K+1)}, x_2^{(K+1)}, \ldots, x_{j-1}^{(K+1)}$ que já foram calculados e os valores $x_{j+1}^{(K)}, x_{j+2}^{(K)}, \ldots, x_n^{(K)}$ restantes.

Em geral, quando usamos o método de Gauss-Seidel, após os primeiros cálculos, como a decomposição do sistema linear inicial A . X = B na igualdade matricial X = C . X + G, por exemplo, iniciamos com uma aproximação inicial nula, isto é,

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Depois, repetimos as iterações para obtermos a sequência convergente $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(K)}, \ldots$, que nos fornecerá a solução aproximada desejada. As iterações se repetem geralmente até que a comparação entre o erro obtido até então e o erro preestabelecido seja aceitável ou aplicando um critério de parada adequado.

No método de Gauss-Seidel, ao calcular os novos valores de X, as informações atualizadas dos elementos anteriores são usadas imediatamente. Isso torna o método de Gauss-Seidel mais rápido em termos de convergência do que o método de Gauss-Jacobi.

Assim como no método de Gauss-Jacobi, a velocidade de convergência do método de Gauss-Seidel pode variar dependendo da matriz A e dos valores iniciais escolhidos. Em alguns casos, pode ser necessário ajustar os valores iniciais ou utilizar outros métodos iterativos mais avançados para obter uma convergência mais rápida.

Também é importante observar que, assim como o método de Gauss-Jacobi, o método de Gauss-Seidel pode não convergir para todos os sistemas de equações lineares. Em alguns casos, pode ser necessário aplicar pré-condicionadores ou utilizar outros métodos iterativos para obter uma solução adequada.

Exemplo de aplicação

Resolva, pelo método de Gauss-Seidel, o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Utilize como tolerância para a aproximação o valor $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$ e a aproximação inicial nula, ou seja, $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solução

Para usar o método de Gauss-Seidel, utilizaremos a igualdade matricial X = C . X + G, onde C e G são as matrizes a seguir:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{6} & \frac{3}{6} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} \frac{5}{5} \\ \frac{6}{4} \\ \frac{0}{6} \end{pmatrix}$$

Dessa forma, a partir da aproximação inicial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ obteremos a matriz X^1 e cujos elementos serão os seguintes:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1 - 0,2x_2^{(0)} - 0,2x_3^{(0)} = 1 - 0,2(0) - 0,2(0) & = 1 \\ x_2^{(1)} = 1,5 - 0,75x_1^{(1)} - 0,25x_3^{(0)} = 1,5 - 0,75(1) - 0,25(0) & = 0,75 \\ x_3^{(1)} = 0 - 0,5x_1^{(1)} - 0,5x_2^{(1)} = -0,5(1) - 0,5(0,75) & = -0,875 \end{cases}$$

Ou seja:

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,75 \\ -0,875 \end{pmatrix}$$

Observemos os seguintes valores:

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |1 - 0| = 1$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |0,75 - 0| = 0,75$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |0,875 - 0| = 0,875$$

Dessa forma, utilizaremos como parâmetro para o erro ε_1 a razão a seguir, onde o numerador é o maior valor absoluto calculado anteriormente e o denominador é o maior valor absoluto dos termos da matriz $X^{(1)}$. Assim

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1} = 1 > 5 \times 10^{-2} = \varepsilon$$

Logo, a solução $X^{(1)}$ ainda não é uma aproximação aceitável como solução para o sistema linear dado, assim, deveremos fazer uma nova iteração com o método de Gauss-Seidel. Dessa forma, a partir da matriz $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,75 \\ -0,875 \end{pmatrix}$ obteremos a matriz $X^{(2)}$ e cujos elementos serão os seguintes:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1 - 0,2x_2^{(1)} - 0,2x_3^{(1)} = 1 - 0,2(0,75) - 0,2(-0,875) = 1,025 \\ x_2^{(2)} = 1,5 - 0,75x_1^{(2)} - 0,25x_3^{(1)} = 1,5 - 0,75(1,025) - 0,25(-0,875) = 0,95 \\ x_3^{(2)} = 0 - 0,5x_1^{(2)} - 0,5x_2^{(2)} = -0,5(1,025) - 0,5(0,95) = -0,9875 \end{cases}$$

Ou seja:

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1,025 \\ 0,95 \\ -0,9875 \end{pmatrix}$$

Observemos agora os seguintes valores:

$$\left| x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \right| = |1,025 - 1| = 0,025$$

$$\left| x_2^{(2)} - x_2^{(1)} \right| = |0,95 - 0,75| = 0,20$$

$$\left| x_3^{(2)} - x_3^{(1)} \right| = |-0,9875 - 0,875| = 0,1125$$

Usaremos como parâmetro para o erro ε_2 a seguinte razão, onde o numerador é o maior valor absoluto calculado anteriormente e o denominador é o maior valor absoluto dos termos da matriz $X^{(2)}$. Assim

$$\varepsilon_2 = \frac{0,2}{1,025} = 0,1951 > 5 \times 10^{-2} = \varepsilon$$

Logo, a solução $X^{(2)}$ ainda não é uma aproximação aceitável como solução para o sistema linear dado, assim, deveremos fazer uma nova iteração com o método de Gauss-Seidel. Dessa forma, a partir da matriz $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1,025 \\ 0,95 \\ -0,9875 \end{pmatrix}$ obteremos a matriz $X^{(3)}$ e cujos elementos serão os seguintes:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 1 - 0,2x_2^{(2)} - 0,2x_3^{(2)} = 1 - 0,2(0,95) - 0,2(-0,9875) = 1,0075 \\ x_2^{(3)} = 1,5 - 0,75x_1^{(3)} - 0,25x_3^{(2)} = 1,5 - 0,75(1,0075) - 0,25(-0,9875) = 0,9912 \\ x_3^{(3)} = 0 - 0,5x_1^{(3)} - 0,5x_2^{(3)} = -0,5(1,0075) - 0,5(0,9912) = -0,9993 \end{cases}$$

Ou seja:

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,0075 \\ 0,9912 \\ -0,9993 \end{pmatrix}$$

Observemos agora os seguintes valores:

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |1,0075 - 1,025| = 0,0175$$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |0,9912 - 0,95| = 0,0412$$

$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |-0,9993 - 0,9875| = 0,0118$$

Usaremos como parâmetro para o erro ε_3 a seguinte razão, onde o numerador é o maior valor absoluto calculado anteriormente e o denominador é o maior valor absoluto dos termos da matriz $X^{(3)}$. Assim

$$\varepsilon_2 = \frac{0,0412}{1,0075} = 0,0409 < 5 \times 10^{-2} = \varepsilon$$

Portanto, a solução do sistema linear dado no início do nosso problema, com um erro menor que $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$, obtida pelo método de Gauss-Seidel, é

$$\overline{X} = X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,0075 \\ 0,9912 \\ -0,9993 \end{pmatrix}$$

A seguir, será acentuada uma sequência de exercícios resolvidos como exemplos.

Exemplos de aplicação

Exemplo 1

Utilize o método da eliminação de Gauss para resolver o sistema de equações lineares a seguir.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 16 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Solução

Vamos aplicar o método da eliminação de Gauss por meio das operações elementares sobre as equações do sistema considerado.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 16 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Dessa forma, teremos as etapas a seguir.

Primeira etapa: considere a primeira equação e faça a seguinte operação:

$$Eq1 \leftarrow \left(1/3\right) \cdot Eq1$$

Assim,

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{4}{3} \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 16 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Segunda etapa: preserve a primeira equação e faça as seguintes operações:

$Eq2 \leftarrow (-2) \cdot Eq1 + Eq2$

$Eq3 \leftarrow (-2) \cdot Eq1 + Eq3$

Dessa forma, obtemos o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = \frac{40}{3} \\ + \frac{8}{3}x_2 - \frac{11}{3}x_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Terceira etapa: conserve a primeira e a terceira equações e efetue a operação elementar a seguir.

$$Eq2 \leftarrow \left(\frac{3}{14}\right) \cdot Eq2$$

Assim,

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{4}{3} \\ x_2 + \frac{2}{7}x_3 = \frac{20}{7} \\ + \frac{8}{3}x_2 - \frac{11}{3}x_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Quarta etapa: preserve a segunda equação e faça a seguinte operação elementar:

$$Eq3 \leftarrow \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot Eq2 + Eq3$$

Logo

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{4}{3} \\ x_2 + \frac{2}{7}x_3 = \frac{20}{7} \\ -\frac{31}{7}x_3 = -\frac{51}{7} \end{cases}$$

A partir da terceira equação, temos:

$$-\frac{31}{7}x_3 = -\frac{51}{7} \Leftrightarrow x_3 = \frac{-51}{-31} \Leftrightarrow x_3 \cong 1{,}6452$$

Substituindo $x_3 = 1{,}6452$ na segunda equação:

$$x_2 + \frac{2}{7}(1{,}6452) = \frac{20}{7} \Leftrightarrow x_2 = 2{,}8571 - 0{,}4701 \Leftrightarrow x_2 \cong 2{,}3870 \Leftrightarrow$$

Finalmente, substituindo $x_2 \cong 2{,}3870$ e $x_3 \cong 1{,}6452$ na primeira equação, obtemos:

$$x_1 - \frac{1}{3}(2{,}3870) + \frac{1}{3}(1{,}6452) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x_1 - 0{,}2473 \cong 1{,}3333 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 \cong 1{,}3333 + 0{,}2473 \Leftrightarrow x_1 = 1{,}5806$$

Portanto, a solução para o sistema de equações dado inicialmente é

$$X \cong \begin{pmatrix} 1{,}5806 \\ 2{,}8571 \\ 1{,}6452 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2

Use o método da eliminação de Gauss para determinar a matriz inversa de matriz A dada a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Para determinar A^{-1}, a inversa da matriz A, vamos usar a seguinte matriz ampliada:

$$(A \mid Id_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vamos efetuar a seguinte operação elementar sobre a primeira linha matriz ampliada

$$L_1 \leftarrow \left(\frac{1}{5}\right) \cdot L_1$$

Obtemos então

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/5 & 1/5 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Consideremos, agora, a operação elementar

$L_2 \leftarrow (-5) \cdot L_1 + L_2$

Calculando, obtemos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Para a operação elementar a seguir

$$L_2 \leftarrow \left(\frac{1}{2}\right) \cdot L_2$$

Obteremos, após os cálculos, a seguinte matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Finalmente, para a seguinte operação elementar

$$L_1 \leftarrow \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot L_2 + L_1$$

Obtemos a matriz

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) = \left(Id_2 \mid A^{-1}\right)$$

Portanto, como à direita da matriz ampliada obtida temos a matriz Id_2, segue que a matriz inversa procurada é

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 & = & 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 8 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Aproxime a solução do sistema linear usando o método de Gauss-Jacobi a partir da aproximação inicial $X^0 = (1,1,1)$. Utilize como tolerância para a aproximação o valor $\varepsilon < 0,3$.

Exemplo 3

Considere o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 & = & 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 8 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Aproxime a solução do sistema linear usando o método de Gauss-Jacobi a partir da aproximação inicial $X^0 = (1,1,1)$. Utilize como tolerância para a aproximação o valor $\varepsilon < 0,3$.

Para utilizar o método de Gauss-Jacobi, utilizaremos a igualdade matricial X = C . X + G, onde as matrizes C e G são as seguintes:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 1/5 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & -1/4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 8/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, a partir da matriz $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ obteremos a matriz X^1 e cujos elementos serão os seguintes:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0,2x_2^{(0)} - 0,2x_3^{(0)} + 1,6 = -0,2(1) - 0,2(1) + 1,6 = 1,2 \\ x_2^{(1)} = -0,25x_1^{(0)} - 0,25x_3^{(0)} + 1,6 = -0,25(1) - 0,25(1) + 1,6 = 1,1 \\ x_3^{(1)} = -0,5x_1^{(0)} - 0,25x_2^{(0)} + 0 = -0,5(1) - 0,25(1) + 0 = -0,75 \end{cases}$$

Ou seja

$$X^{(1)} = C.X^{(0)} + G = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,1 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

Observemos os seguintes valores:

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |1,2 - 1| = 0,2$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |1,1 - 1| = 0,1$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |-0,75 - 1| = 1,75$$

Dessa forma, utilizaremos como parâmetro para o erro ε_1 a seguinte razão, onde o numerador é o maior valor absoluto calculado anteriormente e o denominador é o maior valor absoluto dos termos da matriz $X^{(1)}$. Assim,

$$\varepsilon_1 = \frac{1,75}{1,2} = 1,4583 > 0,3 = \varepsilon$$

Logo, a solução ainda não é uma aproximação aceitável como solução para o sistema e deveremos fazer uma nova iteração com o método de Gauss-Jacobi. Dessa forma, a partir da matriz $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,1 \\ -0,75 \end{pmatrix}$ obteremos a matriz $X^{(2)}$ e cujos elementos serão os seguintes:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -0,2x_2^{(1)} - 0,2x_3^{(1)} + 1,6 = -0,2(1,1) - 0,2(-0,75) + 1,6 = 1,53 \\ x_2^{(2)} = -0,25x_1^{(1)} - 0,25x_3^{(1)} + 1,6 = -0,25(1,2) - 0,25(-0,75) + 1,6 = 1,4875 \\ x_3^{(2)} = -0,5x_1^{(1)} - 0,25x_2^{(1)} + 0 = -0,5(1,2) - 0,25(1,1) + 0 = -0,875 \end{cases}$$

Ou seja

$$X^{(2)} = C.X^{(1)} + G = \begin{pmatrix} 1,5300 \\ 1,4875 \\ -0,875 \end{pmatrix}$$

Observemos agora os seguintes valores:

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |1,53 - 1,2| = 0,33$$
$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |1,4875 - 1,1| = 0,3875$$
$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |-0,875 + 0,75| = 0,125$$

Dessa forma, utilizaremos como parâmetro para o erro ε_2 a seguinte razão, onde o numerador é o maior valor absoluto calculado anteriormente e o denominador é o maior valor absoluto dos termos da matriz $X^{(2)}$. Assim,

$$\varepsilon_2 = \frac{0,3875}{1,53} = 0,2533 < 0,3 = \varepsilon$$

Portanto, a solução do sistema linear dado no início do nosso problema, com um erro menor que $\varepsilon = 0,3$, obtida pelo método de Gauss-Jacobi, é

$$\overline{X} = X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1,5300 \\ 1,4875 \\ -0,875 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2,5\,x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3,1\,x_1 + 5\,x_2 + 2\,x_3 = 6 \\ x_1 - 3\,x_2 + 5\,x_3 = -7 \end{cases}$$

Aproxime a solução para sistema linear utilizando o método de Gauss-Seidel a partir da aproximação inicial X^0 = 1;1; - 0,7). Utilize como tolerância para a aproximação o valor $\varepsilon < 0,2$.

Exemplo 4

Determine uma solução aproximada para o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2,5\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3,1\ x_1 + 5\ x_2 + 2\ x_3 = 6 \\ x_1 - 3\ x_2 + 5\ x_3 = -7 \end{cases}$$

Aproxime a solução para sistema linear utilizando o método de Gauss-Seidel a partir da aproximação inicial X^0 = 1;1; - 0,7) . Use como tolerância para a aproximação o valor $\varepsilon < 0,2$.

Solução

Para usar o método de Gauss-Seidel, utilizaremos a igualdade matricial X = C . X + G, onde C e G são as matrizes a seguir:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & -0,4 \\ -0,62 & 0 & -0,4 \\ -0,2 & 0,6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 1,2 \\ -1,4 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, a partir da aproximação inicial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -0,7 \end{pmatrix}$ obteremos a matriz X^1 e cujos elementos serão os seguintes:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,2 + 0,5x_2^{(0)} - 0,4x_3^{(0)} = 0,2 + 0,5(1) - 0,4(-0,7) = 0,98 \\ x_2^{(1)} = 1,2 - 0,62x_1^{(1)} - 0,4x_3^{(0)} = 1,2 - 0,62(0,98) - 0,4(-0,7) = 0,8724 \\ x_3^{(1)} = -1,4 - 0,2x_1^{(1)} + 0,6x_2^{(1)} = -1,4 - 0,2(0,98) + 0,6(0,8724) = -1,0726 \end{cases}$$

Ou seja

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,98 \\ 0,8724 \\ -1,0726 \end{pmatrix}$$

Observemos os seguintes valores:

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |0{,}98 - 1| = 0{,}02$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |0{,}8724 - 1| = 0{,}1276$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |-1{,}0726 + 0{,}7| = -1{,}7726$$

Utilizaremos como parâmetro para o erro ε_1 a razão a seguir, onde o numerador é o maior valor absoluto calculado anteriormente e o denominador é o maior valor absoluto dos termos da matriz $X^{(1)}$. Assim,

$$\varepsilon_1 = \frac{1{,}7726}{1} = 1{,}7726 > 0{,}2 = \varepsilon$$

Logo, a solução $X^{(1)}$ ainda não é uma aproximação aceitável como solução para o sistema linear dado e deveremos fazer uma nova iteração com o método de Gauss-Seidel. Dessa forma, a partir da matriz $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}98 \\ 0{,}8724 \\ -1{,}0726 \end{pmatrix}$ obteremos a matriz $X^{(2)}$ e cujos elementos serão os seguintes:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0{,}2 + 0{,}5x_2^{(1)} - 0{,}4x_3^{(1)} = 0{,}2 + 0{,}5(0{,}98) - 0{,}4(-1{,}0726) \cong 1{,}1190 \\ x_2^{(2)} = 1{,}2 - 0{,}62x_1^{(2)} - 0{,}4x_3^{(1)} = 1{,}2 - 0{,}62(1{,}1190) - 0{,}4(-1{,}0726) = 0{,}9353 \\ x_3^{(2)} = -1{,}4 - 0{,}2x_1^{(2)} + 0{,}6x_2^{(2)} = -1{,}4 - 0{,}2(1{,}1190) + 0{,}6(0{,}9353) = -1{,}0626 \end{cases}$$

Ou seja:

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1{,}1190 \\ 0{,}9353 \\ -1{,}0626 \end{pmatrix}$$

Observemos agora os seguintes valores:

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |1{,}1190 - 0{,}98| = 0{,}1390$$

$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |0{,}9353 - 0{,}8724| = 0{,}0629$$

$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |-1{,}0626 + 1{,}0726| = 0{,}01$$

Usaremos como parâmetro para o erro ε_2 a seguinte razão, onde o numerador é o maior valor absoluto calculado anteriormente e o denominador é o maior valor absoluto dos termos da matriz $X^{(2)}$. Assim,

$$\varepsilon_2 = \frac{0{,}1390}{1{,}0726} = 0{,}1296 < 0{,}2 = \varepsilon$$

Portanto, a solução do sistema linear dado no início do nosso problema, com um erro menor que $\varepsilon = 0{,}2$, obtida pelo método de Gauss-Seidel, é

$$\overline{X} = X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1{,}1190 \\ 0{,}9353 \\ -1{,}0626 \end{pmatrix}$$

Saiba mais

Para saber mais sobre sistemas de equações lineares, leia o capítulo 3 da referência a seguir:

VARGAS, J. V. C.; ARAKI, L. K. *Cálculo numérico aplicado*. Barueri: Manole, 2017.

Resumo

Nesta unidade, abordamos o conceito de modelagem matemática, uma importante ferramenta que visa estruturar problemas do nosso dia a dia utilizando linguagem matemática, tornando esses problemas mais suscetíveis à aplicação de teorias e técnicas que fornecem suas soluções ou aproximações para tais questões.

Algumas dessas teorias e técnicas consistem em repetições de procedimentos preestabelecidos que produzem uma sequência de valores e resultados que se aproximam cada vez mais da solução desejada.

Vimos que é vital que os métodos descritos e usados nas soluções dos exemplos no decorrer do texto sejam lidos com bastante atenção e minúcia para que os detalhes possam ser compreendidos e replicados nas resoluções dos problemas e atividades envolvendo a determinação de raízes de funções e soluções de sistemas lineares de equações.

Exercícios

Questão 1. Vimos, no livro-texto, que o erro na modelagem matemática pode ser definido como a diferença entre os valores previstos por determinado modelo e os valores esperados ou os valores observados na coleta de dados.

Assinale a alternativa que mostra o erro, em módulo (valor absoluto), cometido quando aproximamos ln(0,3) pela série a seguir. Use o truncamento de cinco termos da série e o arredondamento com três casas decimais.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ... \text{ para } -1 < x < 1$$

A) 1,141

B) 1,204

C) 0,300

D) 0,153

E) 0,051

Resposta correta: alternativa E.

Análise da questão

Queremos calcular o valor aproximado de ln(0,3) usando a série dada no enunciado. Logo:

$1 + x = 0{,}3 \rightarrow x = 0{,}3 - 1 \rightarrow x = -0{,}7$

Vamos substituir x por -0,7 nos cinco primeiros termos da série:

$$\ln(0,3) = \ln(1+(-0,7)) = (-0,7) - \frac{(-0,7)^2}{2} + \frac{(-0,7)^3}{3} - \frac{(-0,7)^4}{4} + \frac{(-0,7)^5}{5}$$

$$\ln(0,3) = -0,7 - 0,245 - 0,11433 - 0,060025 - 0,03361$$

$$\ln(0,3) = -1,153 \, (\text{valor aproximado})$$

Se usarmos a calculadora, teremos:

In(0,3) = – 1,204 (valor calculado)

O erro E, em valor absoluto, é o módulo da diferença entre o valor calculado e o valor aproximado:

$$\text{Erro} = E = |\text{valor calculado} - \text{valor aproximado}|$$
$$\text{Erro} = E = |(-1{,}204) - (-1{,}153)| = |-1{,}204 + 1{,}153| = |-0{,}051|$$
$$\text{Erro} = E = 0{,}051$$

Questão 2. Vimos, no livro-texto, que o teorema de Bolzano determina as condições para a existência de uma raiz (ou zero) de uma função contínua em um intervalo fechado.

Esse teorema pode ser enunciado como lemos a seguir.

Se f(x) é uma função contínua em um intervalo fechado [a,b] e se f(a) e f(b) têm sinais opostos (ou seja, um é positivo e o outro negativo), então existe pelo menos um ponto c no intervalo aberto (a,b) onde a função assume o valor zero, ou seja, f(c) = 0.

Com base exposto e nos seus conhecimentos, avalie as asserções e a relação proposta entre elas.

I – Segundo o teorema de Bolzano, a função f(x) = 2 x 3 + 7 x 2 + 2 x – 3 não apresenta raízes entre x = -2 e x = 1.

porque

II – As imagens de f(x) = 2 x 3 + 7 x 2 + 2 x – 3 em x = -2 e em x = 1, ou seja, f(-2) e f(1), têm o mesmo sinal (são positivas).

Assinale a alternativa correta.

A) As asserções I e II são verdadeiras, e a asserção II justifica a I.

B) As asserções I e II são verdadeiras, e a asserção II não justifica a I.

C) A asserção I é verdadeira, e a II é falsa.

D) A asserção I é falsa, e a II é verdadeira.

E) As asserções I e II são falsas.

Resposta correta: alternativa D.

Análise da questão

Vamos calcular as imagens de f(x) = 2 x 3 + 7 x 2 + 2 x – 3 em x = -2 e em x = 1, ou seja, f(-2) e f(1).

f(-2)=2(-2)3+7(-2)2+2(-2)-3 → f(-2)=5

f(1)=2(1)3+7(1)2+2(1)-3 → f(1)=8

Concluímos que a asserção II é verdadeira, pois as imagens de f(x) = 2 x 3 + 7 x 2 + 2 x – 3 em x = -2 e em x = 1, ou seja, f(-2) e f(1), têm o mesmo sinal (são positivas), sendo f(-2) = 5 e f(1) = 8.

Veja, na figura a seguir, o gráfico de f(x) = 2 x 3 + 7 x 2 + 2 x – 3.

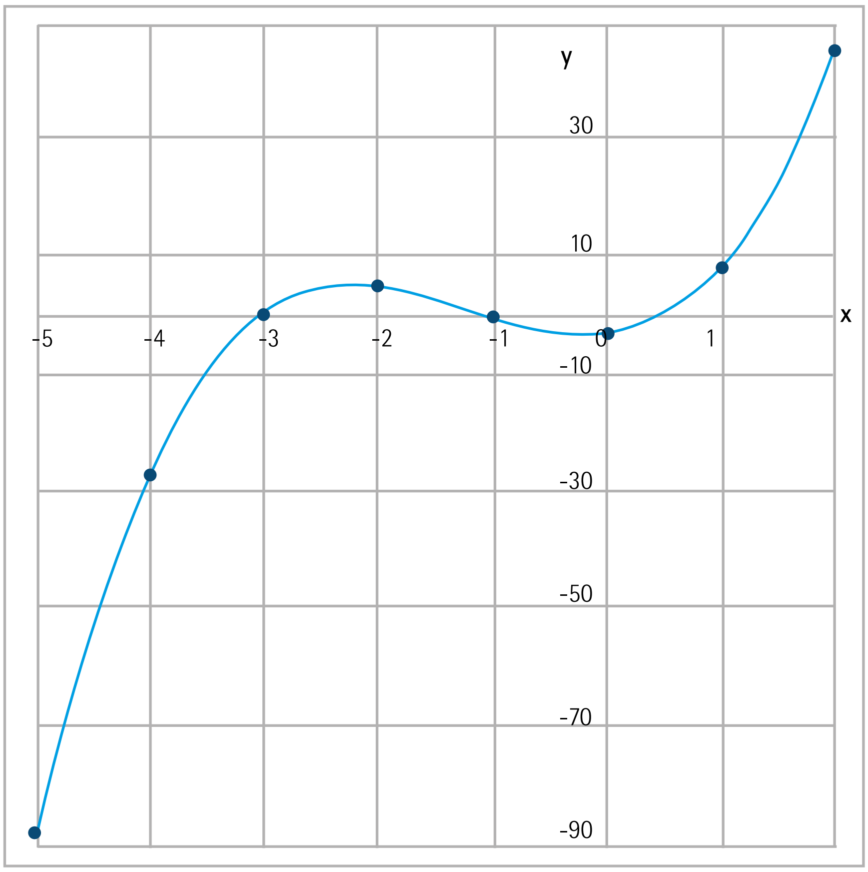

Figura 6 – Gráfico de f(x)= 2 x 3 + 7 x 2 + 2 x – 3

Pelo gráfico, vemos que f(x) = 2 x 3 + 7 x 2 + 2 x – 3 é uma função contínua que tem três raízes reais: em x = -3, em x = -1 e em x = 0,5. Ou seja, f(-3) = f(-1) =f (0,5) = 0.

Concluímos que a asserção I é falsa, pois a função f(x) = 2 x 3 + 7 x 2 + 2 x – 3 apresenta duas raízes entre x = -2 e x = 1 (em x = -1 e em x = 0,5).

Veja que isso está de acordo com o teorema de Bolzano, pois:

- se $f(-2) = 5$ (maior do que 0) e $f(0) = -3$ (menor do que 0), $f(x)$ tem raiz entre $x = -2$ e $x = 0$;
- se $f(0) = -3$ (menor do que 0) e $f(1) = 8$ (maior do que 0), $f(x)$ tem raiz entre $x = 0$ e $x = 1$.