EAD

EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

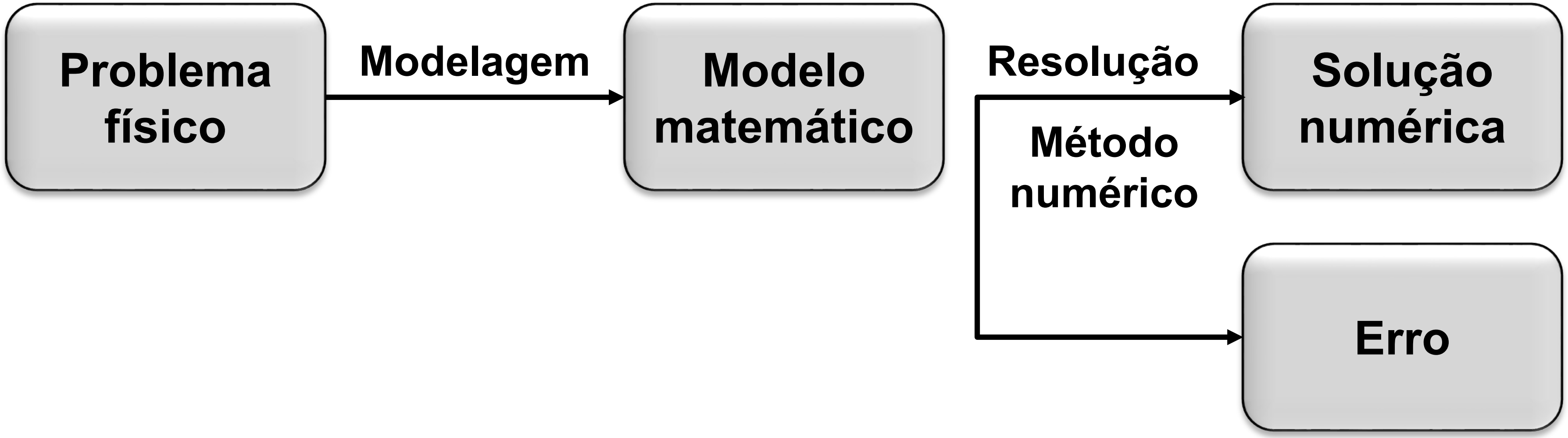
UNIDADE I

Análise Matemática

Prof. Me. Rene Ignácio

Apresentação

- Profissional de ciência da computação tem que resolver problemas físicos do mundo real.
- Deve conhecer ferramentas matemáticas para construir modelos computacionais.
- Modelar um problema físico, obter um modelo matemático, determinar a solução numérica do modelo criado:



Fonte: Adaptado de: livro-texto.

- A fase de obtenção da solução do modelo matemático usa conceitos matemáticos: derivadas, integrais, equações diferenciais e séries numéricas.

Exemplo de um problema físico

Aquecer água que circula dentro de uma tubulação de metal:

Fonte: Autoria própria.

Modelo matemático permitirá determinar a temperatura de saída da água quente a partir das variáveis:

- Temperatura e vazão da água de entrada.
- Comprimento da tubulação.
- Quantidade de calor fornecido.

Introdução

Veremos os principais conceitos relacionados às séries numéricas:

- Começamos com o estudo das sequências infinitas e suas propriedades.

- Depois, o conceito de séries infinitas e seus critérios de convergência.

- E, por fim, as séries de potências.

Sequências

Sequências de ações comuns no dia a dia:

Rotina matinal:

- Acordar, levantar da cama, escovar os dentes, tomar banho, se vestir, tomar café da manhã e sair de casa.

Trabalhar em um projeto:

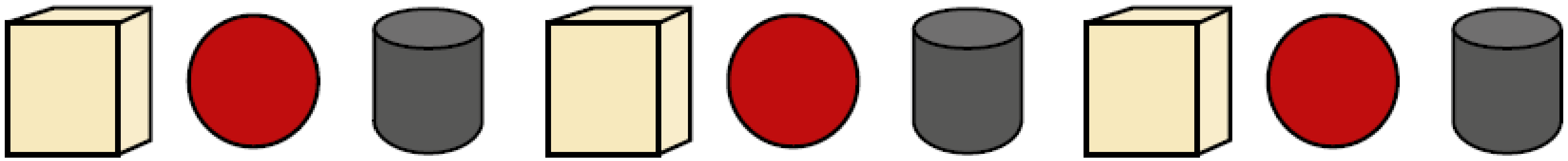
- Definir os objetivos, pesquisar informações relevantes, criar um plano de ação, executar as tarefas, avaliar os resultados e fazer ajustes, se necessário.

Fazer uma viagem:

- Planejar o roteiro, comprar as passagens, reservar hospedagem, preparar as malas, ir ao aeroporto ou à rodoviária, viajar e aproveitar o destino.

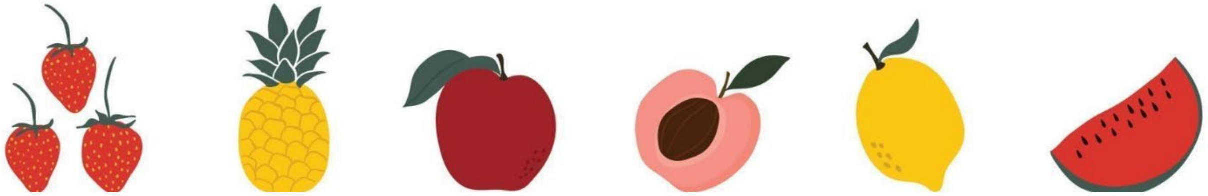
Figuras

Sequência de figuras:



Fonte: livro-texto.

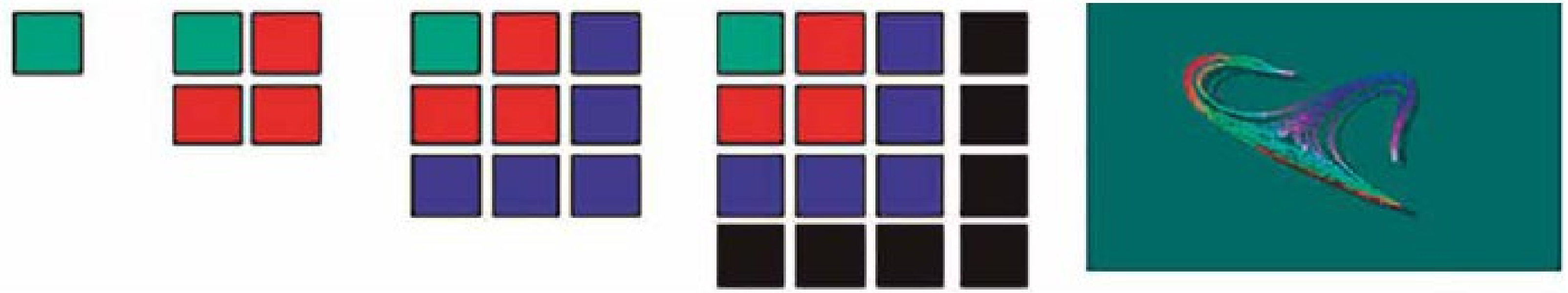
Fonte: Autoria própria.



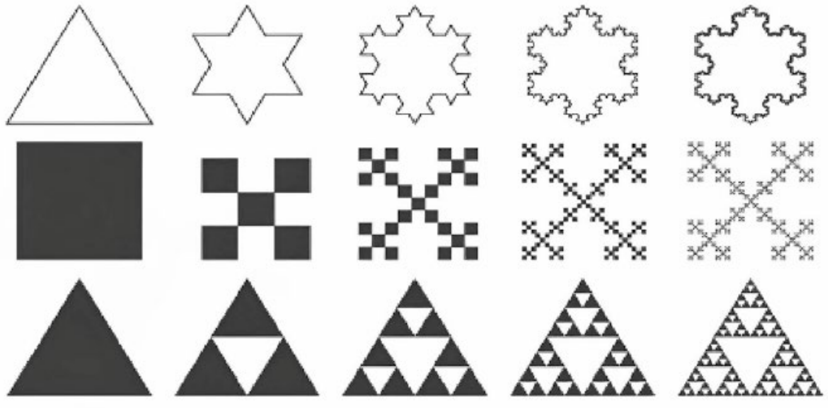
Fonte: Autoria própria.

Imagens digitais

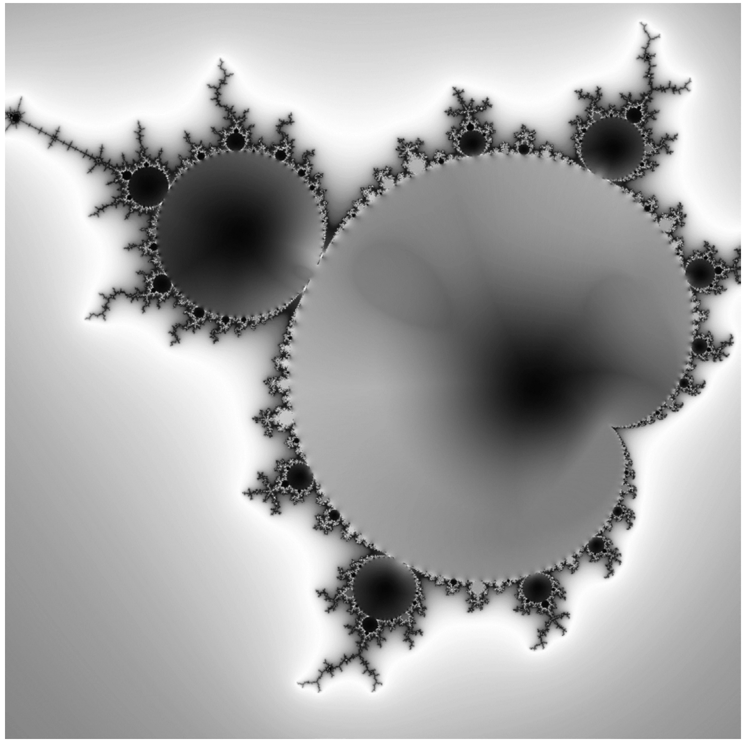
Sequências na era do computador: envolvem sequências numéricas × cores × matrizes.



Fonte: livro-texto.



Fonte: livro-texto.



Fractal Mandelbrot.
Fonte: Adaptado de: http://math.ymsh.tp.edu.tw/Home/gallery/mandelbrot

Somas infinitas: dízimas periódicas

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\bar{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$$

$$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots = 0{,}\bar{6} = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10^n}$$

$$\frac{12}{99} = \frac{4}{33} = 0{,}121212\ldots = 0{,}\overline{12} = \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \frac{12}{1000000} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{100^n}$$

$$\frac{123}{999} = \frac{41}{333} = 0{,}123123\ldots = 0{,}\overline{123} = \frac{123}{1000} + \frac{123}{1000000} + \frac{123}{1000000000} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{123}{1000^n}$$

Fonte: Autoria própria.

O número pi (π) não pode ser expresso como uma fração, é um número irracional.
Mas é possível usar frações aproximadas:

$\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7} \cong \pi$ (erro de 0,04%)

$\frac{335}{113} = 3\frac{16}{113} \cong \pi$ (erro de 0,000008%)

Sequências numéricas

- São conjuntos de números que seguem uma determinada ordem ou padrão.

Podem ser criadas:

Pela adição/subtração de um número constante:
3, 6, 9, 12, 15 (cada termo é obtido adicionando 3 ao termo anterior).

Pela multiplicação/divisão de um número constante:
2, 4, 8, 16, 32 (cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por 2).

Pelo uso de funções matemáticas para gerar os termos:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

(série de Taylor para o seno de x)

Notação

- A notação de sequência é usada para representar uma lista ordenada de números que seguem um determinado padrão ou regra.
- Geralmente, tem a forma: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$
- a_1 é o primeiro termo da sequência,
- a_2 é o segundo termo da sequência, e assim por diante,
- até o último termo a_n.

Para representar o enésimo termo das sequências numéricas, usaremos a notação:

- $a(n) = a_n = \{a_n\}$
- Exemplo: $\{a_n\} = \{n + 1\}$
- $n = 1 \Rightarrow a_1 = 1 + 1 = 2$ (1º termo da sequência)
- $n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 + 1 = 3$ (2º termo da sequência)
- $n = 3 \Rightarrow a_3 = 3 + 1 = 4$ (3º termo da sequência)

Classificação das sequências numéricas

- As sequências numéricas podem ser classificadas em finitas e infinitas.
- Finitas – têm um número máximo de termos que não pode ser aumentado.

- $\{0,5,10,15\}$
  sequência dos quatro primeiros números naturais múltiplos de 5,
  pode ser indicada pelos termos $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$.

- $\{a_n\} = \{3n|n$ é número natural e $2 \leq n \leq 7\} = \{6,9,12,15,18\}$

  - Vantagens: facilidade de cálculo, memorização, visualização, análise e eficiência computacional.
  - Desvantagens: limitações de modelagem, limitações de previsão e limitações de generalização.

Classificação das sequências numéricas

- Infinitas – têm número infinito de termos.
- A sequência pode continuar indefinidamente e nunca chegar a um fim.

- $\{1,3,5,7,9,11,\ldots\}$
  sequência dos números naturais ímpares pode ser indicada pelos termos
  $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_n, \ldots\}$

- $\{a_n\} = \{3n|n \geq 0\} = \{0,3,6,9,12, \ldots\}$

- Vantagens: representar quantidades muito grandes, modelar fenômenos complexos.
- Desvantagens: difícil manipulação matemática, podem não ser aplicáveis na prática.

Interatividade

Uma sequência numérica começa com 1 e continua com a soma do número anterior com o dobro do número anterior. Qual é o quinto número da sequência?

a) 3.
b) 81.
c) 27.
d) 161.
e) 243.

Resposta

Uma sequência numérica começa com 1 e continua com a soma do número anterior com o dobro do número anterior. Qual é o quinto número da sequência?

a) 3.
b) 81.
c) 27.
d) 161.
e) 243.

A sequência começa em 1 e a partir do 2º termo:

$\{a_n\} = \{a_{n-1} + 2 \text{ X } a_{n-1}\}$

$\{1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots\}$

O quinto termo é 243.

Sequências numéricas infinitas

Lista de números escritos em uma ordem definida:

- $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_n, \dots\}$.
- a_1 é o primeiro termo da sequência.
- a_2 é o segundo termo da sequência.
- a_n é o enésimo termo da sequência.

O primeiro termo também pode ser representado por a_0:

- $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots\}$

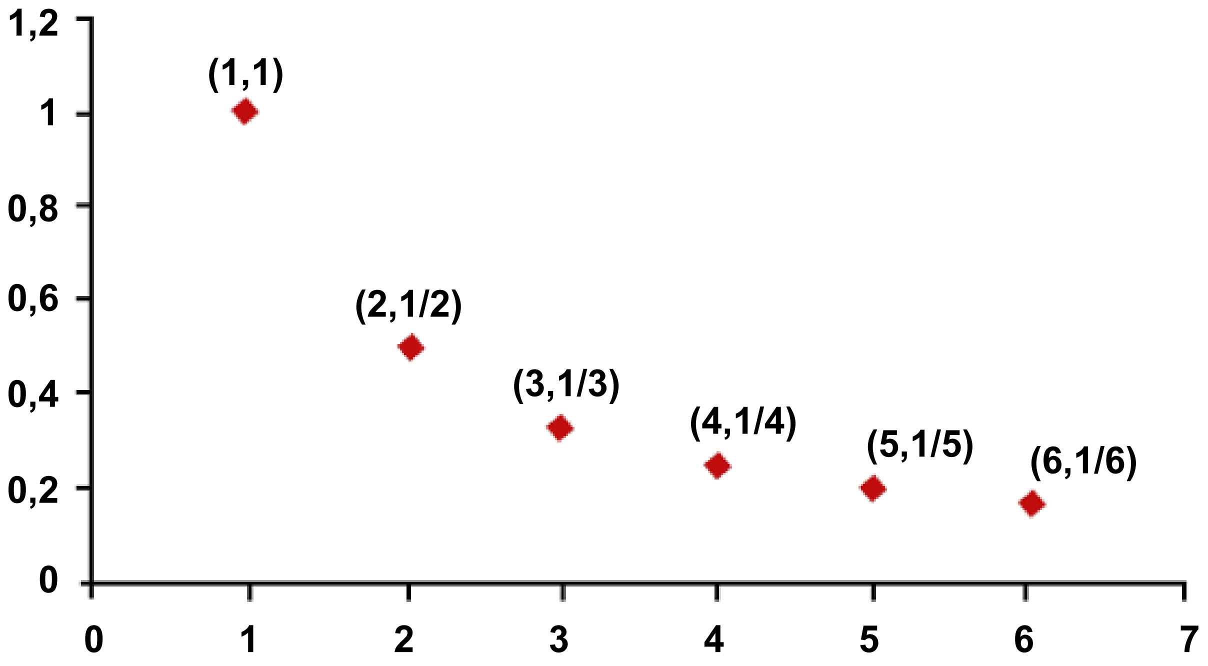
Exemplo 1

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$$

Os termos desta sequência são:

$$\{1, \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$$

- Observe que os termos da sequência diminuem constantemente, chegando cada vez mais próximo de 0 (zero).



Representação geométrica da sequência $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

Fonte: Adaptado de: livro-texto.

- Dizemos que a sequência converge para 0.

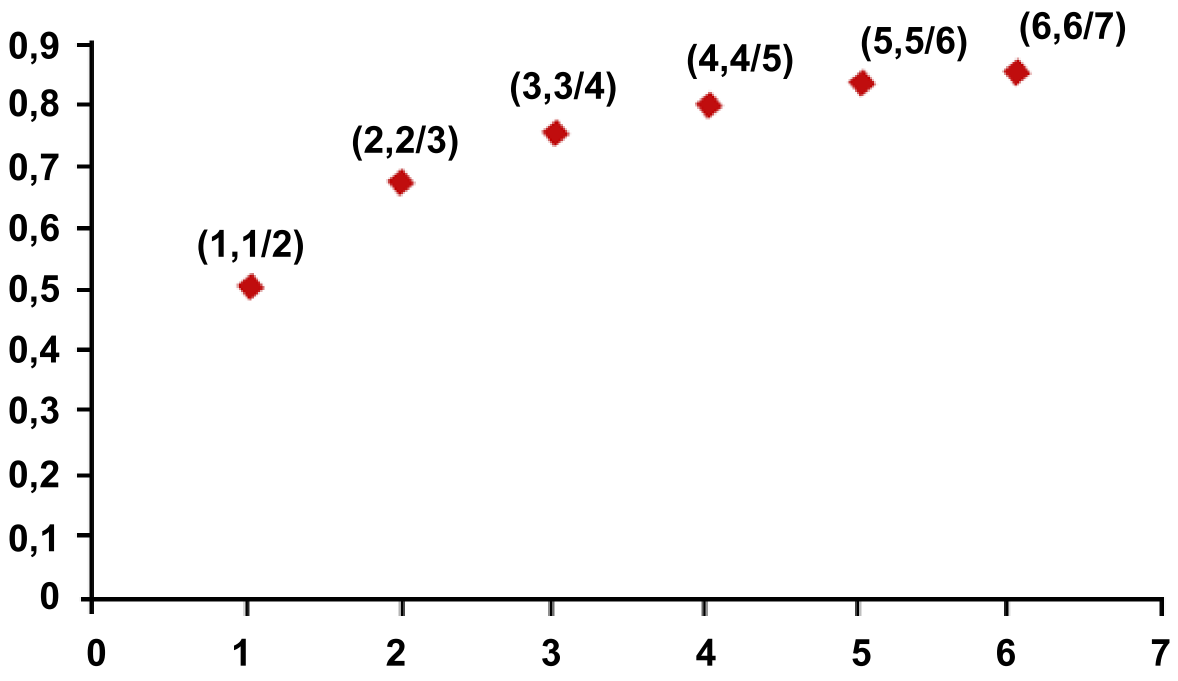
Exemplo 2

$$\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

Os termos desta sequência são:

$$\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\}$$

- Agora, os termos da sequência tendem a 1 (um) quanto maior for o valor de n.



Representação geométrica da sequência $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

Fonte: Adaptado de: livro-texto.

- Aqui dizemos que a sequência converge para 1.

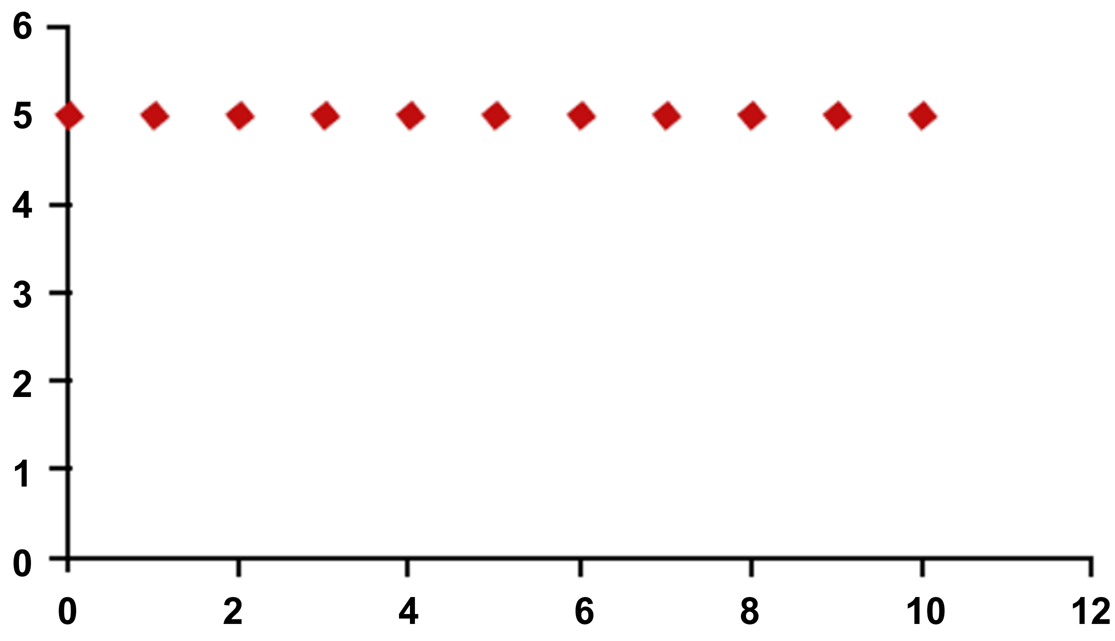
Exemplo 3

$\{a_n\} = \{5\}$

Os termos desta sequência são:

$\{5, 5, 5, 5, 5 \ldots\}$

- Os termos da sequência mantêm o mesmo valor quanto maior for o valor de n.



Representação geométrica da sequência $\{a_n\} = \{5\}$

Fonte: Adaptado de: livro-texto.

- Agora dizemos que a sequência converge para a constante 5.

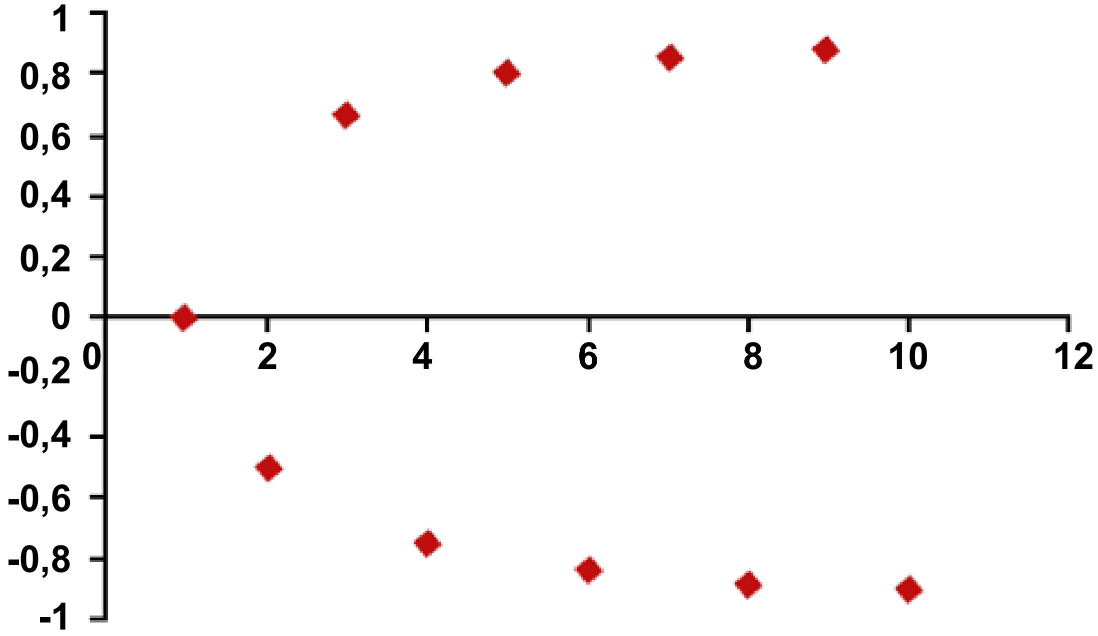
Exemplo 4

$$\{a_n\} = \left\{(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right\}$$

Os termos desta sequência são:

$$\left\{0, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5}, \ldots\right\}$$

- Observe que os termos dessa sequência têm o sinal alternado quanto maior for o valor de n.



Representação geométrica da sequência $\{a_n\} = \left\{(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}$

Fonte: Adaptado de: livro-texto.

- Os termos positivos se aproximam de 1 e os termos negativos se aproximam de -1.
- Neste caso, a sequência é <u>divergente</u>.

Sequências infinitas

- Nem todas sequências têm uma equação simples.
- Sequência de Fibonacci.
- Leonardo Fibonacci a descreveu no século XIII, quando a usou para modelar o crescimento de uma população de coelhos.

- $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 12, 21, \ldots\}$

- $f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_n - 1 + f_n - 2$

- A sequência de Fibonacci aparece em muitas áreas da matemática e da ciência, incluindo a geometria, a teoria dos números, a biologia, a física e até mesmo a análise técnica do mercado financeiro.

Limite de sequências infinitas

- Sequências numéricas convergem e outras divergem.

- Limites de sequências numéricas são utilizados em análise matemática para determinar o comportamento de uma sequência à medida que o número de termos aumenta infinitamente.

- O limite de uma sequência é o valor para o qual a sequência converge ou se aproxima à medida que o número de termos aumenta.

  - Notação: $\lim_{n \to \infty} a_n = L$

  - A sequência tende ao limite L quando n tende ao infinito.

Importância dos limites de sequências numéricas

Análise de algoritmos:

- Em ciência da computação, são usados para analisar o desempenho de algoritmos. O tempo de execução de um algoritmo pode ser descrito como uma sequência numérica, e o limite dessa sequência pode ser usado para determinar a eficiência do algoritmo.

- Exemplo: Algoritmo itera sobre cada elemento de um vetor ordenado e verifica se ele corresponde ao elemento procurado.
- O tempo de execução pode ser descrito como a sequência $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_n, \dots\}$, em que a_n é o tempo necessário para procurar um elemento em um vetor de tamanho n.

Análise financeira:

- As taxas de juros são representadas como sequências numéricas, e o limite pode ser usado para prever o retorno do investimento a longo prazo.

Limite

- O limite é um conceito fundamental da análise matemática que descreve o comportamento de uma sequência numérica à medida que seu índice aumenta.
- É um número que a sequência se aproxima à medida que seu índice aumenta infinitamente. Esse número não precisa estar presente na sequência.

Sequência dos inversos dos números naturais:

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$$

Conforme o índice aumenta, a sequência se aproxima de zero, mas nunca alcança zero!

Usando o limite:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- Portanto, dizemos que o limite da sequência é zero.
- É uma sequência convergente.

Divergência

- Uma sequência diverge quando não há um número L para o qual a sequência se aproxima à medida que n aumenta.

Divergente positiva:

- Se ela aumenta sem limites à medida que o índice n aumenta infinitamente. {1, 2, 3, 4, ...}.

Divergente negativa:

- Se ela diminui sem limites à medida que o índice n aumenta infinitamente. {-1, -2, -3, -4, ...}.

Nestes dois casos, temos:

- Divergência positiva: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- Divergência negativa: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Interatividade

Zenão, filósofo grego, século V a.C., criou o paradoxo da corrida: para percorrer uma distância finita, é preciso antes percorrer uma metade dessa distância. E, antes disso, é preciso percorrer metade dessa metade, e assim por diante. Com base nisso, está correto afirmar que:

a) É uma sequência infinita e convergente.
b) É impossível percorrer uma distância finita, pois sempre há uma metade a percorrer antes.
c) É uma sequência infinita e divergente.
d) A velocidade dos corredores diminui pela metade a cada nova distância percorrida.
e) É uma sequência finita.

Resposta

Zenão, filósofo grego, século V a.C., criou o paradoxo da corrida: para percorrer uma distância finita, é preciso antes percorrer uma metade dessa distância. E, antes disso, é preciso percorrer metade dessa metade, e assim por diante. Com base nisso, está correto afirmar que:

a) É uma sequência infinita e convergente.
b) É impossível percorrer uma distância finita, pois sempre há uma metade a percorrer antes.
c) É uma sequência infinita e divergente.
d) A velocidade dos corredores diminui pela metade a cada nova distância percorrida.
e) É uma sequência finita.

Exemplo usando as leis do limite

$$\{a_n\} = \{n + 3\}$$

Propriedades:

$$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} k = k \end{array}\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}(n + 3) = \lim_{n\to\infty} n + \lim_{n\to\infty} 3 = \infty + 3 = \infty$$

- Logo, a sequência é divergente.

Teorema do confronto

- Ideia: aprisionar uma sequência dentro de outras duas conhecidas.
- Sequências numéricas: $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$
- $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ convergem para o mesmo limite L
- Para todo n: $a_n \leq b_n \leq c_n$
- Então, a sequência $\{b_n\}$ também converge para L.

- Observe que as sequências $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ "aprisionam" a sequência $\{b_n\}$.
- Cada termo de $\{a_n\}$ é menor ou igual ao correspondente termo de $\{b_n\}$.

Então, usando limites:

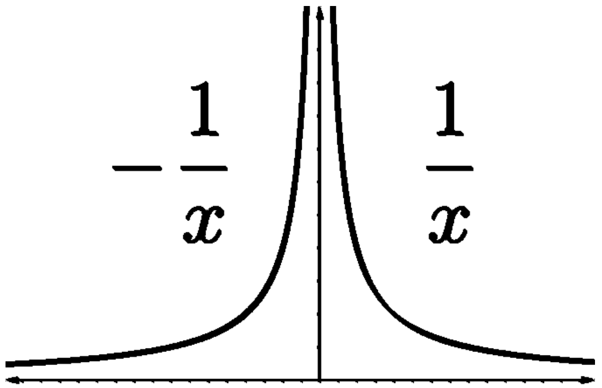
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = L$$

Exemplo com o teorema do confronto

$\{a_n\} = \left\{\frac{\cos n}{n}\right\}$ Converge ou diverge?

O cosseno é uma função que relaciona um ângulo com um número real entre -1 e 1:

$$-1 \leq \cos n \leq 1$$



Fonte: Autoria própria.

- Dividindo todos os membros por n: $\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$
- Aplicando o limite a cada termo: $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$
  - Já sabemos que: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0$
  - Portanto: $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$
  - Sequência convergente.

Regra de L'Hôpital para limite de sequências numéricas

Técnica que pode ser aplicada a sequências numéricas quando:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{g(b_n)} = \frac{0}{0} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{g(b_n)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Proposta – calcular o limite do quociente das derivadas para obter o limite original:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(a_n)}{g'(b_n)}$$

Assim, podemos usar a seguinte regra:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{g(b_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(a_n)}{g'(b_n)}$$

Exemplo com regra de L'Hôpital

$$\{a_n\} = \left\{\frac{\ln n}{n^2}\right\}$$

- Podemos usar a regra, pois temos um limite indeterminado: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Calcular o limite do quociente das derivadas para obter o limite original:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \times \frac{1}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

- Portanto, a sequência é convergente.

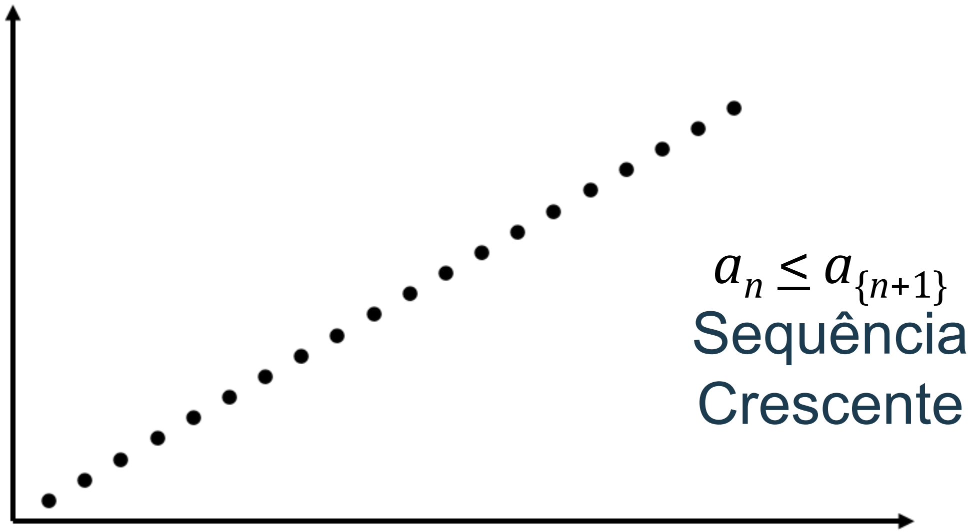
$\{b_n\} = \left\{\frac{n^2}{\ln n}\right\} \Rightarrow$ é o inverso da $\{a_n\}$, logo, divergente!

Sequências crescentes

- Uma sequência numérica é crescente se cada termo subsequente é maior ou igual ao termo anterior.

Por exemplo, a sequência:

- $\{a_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- É crescente, porque cada termo subsequente é maior do que o termo anterior.
- Seus termos crescem indefinidamente.



Fonte: Autoria própria.

Sequências decrescentes

- Uma sequência numérica é decrescente se cada termo subsequente é menor ou igual ao termo anterior.

Por exemplo, a sequência:

- $\{a_n\} = \{5, 4, 3, 2, 1, \ldots\}$
- É decrescente, porque cada termo subsequente é menor do que o termo anterior.
- Seus termos diminuem indefinidamente.

$a_n \geq a_{\{n+1\}}$

Sequência Decrescente

Fonte: Autoria própria.

Sequências limitadas

- É uma sequência que está "presa" entre dois valores finitos, e seus termos não divergem para o infinito.
- $L \leq a_n \leq M$
- $a_n = (1, 2, 3, 4, 5)$
  é limitada: termos estão entre 1 e 5.
- $b_n = (-1, -2, -3, \dots, -n)$
  é limitada: termos são menores ou iguais a -1 e maiores ou iguais a -n.

Soma de uma série infinita

Matematicamente, a soma de uma série infinita é definida como o limite da soma dos seus n primeiros termos quando n tende ao infinito:

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

- Se o limite existe e é finito, a série infinita é convergente e sua soma é o valor do limite.
- Caso contrário, a série é divergente e não tem uma soma finita.
- Usamos o termo “série infinita” em vez de “soma infinita”.

Problema das séries infinitas:

Determinar quais são convergentes e quais são divergentes!

Somas parciais

É uma sequência infinita de números obtida pela soma acumulada dos primeiros termos da sequência numérica original:

- $S_1 = a_1$
- $S_2 = a_1 + a_2$
- $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
- $\vdots$
- $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum a_n$

- $\{a_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- $\{S_1, S_2, S_3, \ldots\} = \{1, 3, 6, 10, 15, \ldots\}$
- Cada elemento da sequência construída são somas parciais.

Limite de somas parciais

- Na análise de uma sequência de números que cresce rapidamente, a sequência original pode parecer caótica e difícil de entender.
- Usando somas parciais, podemos começar a ver um padrão emergir até mesmo determinar se a sequência original converge ou diverge.
- Aplicando limites, podemos entender a sequência original:

Convergência: $\left\langle \lim_{n\to\infty} S_n = L \right\rangle \Rightarrow \left\langle \lim_{n\to\infty} a_n = L \right\rangle$

Divergência: $\left\langle \lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty \right\rangle \Rightarrow \left\langle \lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \right\rangle$

Interatividade

A alternativa correta que define soma parcial é:

a) A soma dos primeiros n termos da série infinita.
b) A soma dos termos ímpares da série infinita.
c) A soma dos termos pares da série infinita.
d) A soma dos últimos n termos da série infinita.
e) A soma dos termos consecutivos da série infinita.

Resposta

A alternativa correta que define soma parcial é:

a) A soma dos primeiros n termos da série infinita.
b) A soma dos termos ímpares da série infinita.
c) A soma dos termos pares da série infinita.
d) A soma dos últimos n termos da série infinita.
e) A soma dos termos consecutivos da série infinita.

Exemplo usando somas parciais

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots$$

$S_1 = \frac{1}{2}$ $\quad$ $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ $\quad$ $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$ $\quad$ $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$

Os quatro primeiros termos das somas são: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \right\} \xrightarrow{\text{padrão}}, S_n = \frac{n}{n+1}$

Usando limites e a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n)'}{(n+1)'} = 1$$

Logo, a série infinita converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Série geométrica

- Série infinita em que cada termo é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma razão.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + a.r + a.r^2 + \cdots + a.r^{n-1} + \cdots$$

$\boxed{\text{Razão geométrica: } r}$ $\therefore$ $\boxed{|r| < 1 \Rightarrow \text{ converge } \Rightarrow S = \dfrac{a}{1-r}}$ $\therefore$ $\boxed{|r| > 1 \Rightarrow \text{ diverge}}$

Exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^n} = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \cdots = \frac{5}{10} + \frac{5}{10}.\left(\frac{1}{10}\right)^1 + \frac{5}{10}.\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots + \underbrace{\frac{5}{10}}_{a}.\underbrace{\left(\frac{1}{10}\right)}_{r<1}^{n-1}$$

Esta série geométrica converge e a soma é:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{5}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{9}$$

Série telescópica

Série infinita de termos que se cancelam mutuamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

- Todos os termos intermediários se cancelam, restando o primeiro e o último termo na soma.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1+\frac{1}{n+1}$$

Usando limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=1+\frac{1}{\infty}=1$$

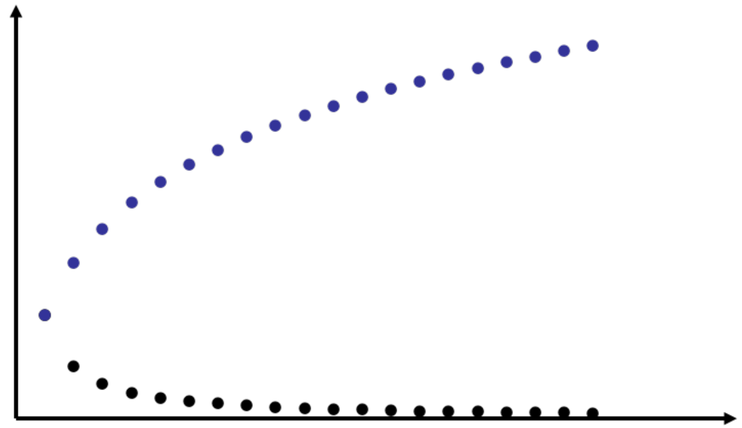
- Esta série telescópica converge e a soma é 1.

Série harmônica

Série infinita cujos termos são os inversos dos números naturais:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ \dots$$

- É um exemplo clássico de uma série divergente.
- Cada termo desta série tende a zero quando o índice da sequência tende ao infinito.
- No entanto, a soma dos termos da série não converge para um valor finito.
- Isso ocorre porque, à medida que adicionamos mais termos, a soma aumenta sem limite.



Fonte: Autoria própria.

Teste do enésimo termo para divergência

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{convergente} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

No entanto, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \nRightarrow$ não se pode afirmar que a série é convergente! (Série harmônica).

Regra $\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \\ ou \\ não\ existe \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_n$ é divergente

Teste da integral

Se a integral definida de uma função decrescente diverge, então a série infinita correspondente também diverge:

$$
\begin{array}{ccc}
\int_1^\infty f(x)dx & \Rightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\
converge & \Rightarrow & converge \\
diverge & \Rightarrow & diverge
\end{array}
$$

Série harmônica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{x \to \infty} \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \ln(x)\Big|_1^\infty = \ln(\infty) - \ln(1) = \infty - 0 = \infty$$

- Portanto, esta série harmônica é divergente.

P-séries (ou série hiper-harmônica)

Série cujos termos são os inversos das potências de um número natural maior que 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Rightarrow \begin{cases} p > 1 \longrightarrow convergente \\ p \leq 1 \longrightarrow divergente \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \Rightarrow p = 4 > 1 \longrightarrow convergente$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow p = 1 \longrightarrow divergente$$

- Série harmônica.

O teste das séries alternadas (teorema de Leibniz)

Séries alternadas têm os termos alternadamente positivos e negativos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ \ldots$$

Teste de Leibniz, uma sequência de termos positivos $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ deve satisfazer as seguintes propriedades, <u>para ser convergente</u>:

$$\boxed{a_n \geq a_{n+1}} \text{ (satisfaz: } 1 > \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{3} > \tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{5} > \cdots)$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0} \text{ (satisfaz: } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0)$$

- Portanto, esta série alternada é convergente.

Convergência absoluta e condicional

Uma série é dita convergente absoluta se a série dos valores absolutos de seus termos for convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots \text{ é } convergente \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ é } absolutamente\ convergente$$

Por outro lado, é dita convergente condicional se a série converge apenas quando os valores absolutos dos termos da série são somados, mas não converge quando os termos são somados sem considerar seus sinais.

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ \ldots \text{ (série alternada)}$$

- É convergente: os termos diminuem e tendem a zero.
- Não é absolutamente convergente: a série dos valores absolutos é a série harmônica, que é divergente.

Teste da razão e da raiz

Teste da razão – divisão de dois termos consecutivos da série:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \Rightarrow \begin{cases} L < 1 \longrightarrow absolutamente\ convergente \\ L > 1\ ou\ \infty \longrightarrow divergente \\ L = 1 \longrightarrow nada\ se\ pode\ afirmar, fazer\ outro\ teste \end{cases}$$

Teste da raiz – utilização da raiz n-ésima de um termo da série:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L \Rightarrow \begin{cases} L < 1 \longrightarrow absolutamente\ convergente \\ L > 1\ ou\ \infty \longrightarrow divergente \\ L = 1 \longrightarrow nada\ se\ pode\ afirmar, fazer\ outro\ teste \end{cases}$$

Interatividade

A série cujos termos são os inversos dos números naturais é chamada de:

a) Série geométrica.
b) Série aritmética.
c) Série harmônica.
d) Série telescópica.
e) Série de Taylor.

Resposta

A série cujos termos são os inversos dos números naturais é chamada de:

a) Série geométrica.
b) Série aritmética.
c) Série harmônica.
d) Série telescópica.
e) Série de Taylor.

ATÉ A PRÓXIMA!