

UNIDADE I

Pesquisa Operacional

Prof. Dr. Angel Martinez

Introdução à Pesquisa Operacional

- Neste módulo veremos:
- Origem e definição de Pesquisa Operacional;
- Objetivos do ensino da Pesquisa Operacional;
- Construção de modelos matemáticos.

- A origem do termo Pesquisa Operacional (PO) é comumente atribuída às atividades militares do início da Segunda Guerra Mundial (Hillier et al., 2012), evento em que foram empregados métodos científicos para alocação eficiente dos recursos nas operações militares.
- Com o término do conflito bélico e o sucesso dos métodos empregados na PO, houve um grande interesse do meio empresarial pelo emprego dessas técnicas cientificas na gestão da produção industrial, bem como na área de serviços.

- Diversos cientistas das equipes de PO, entre outros, tomaram conhecimento do assunto e dedicaram-se a pesquisas na área, obtendo resultados importantes. Dentre esses resultados, vale a pena destacar o método Simplex, criado por George Dantzig em 1947, enquanto trabalhava para as forças militares de seu país resolvendo problemas de logística (Duarte Júnior, 2023). O método é usado para solucionar problemas de programação linear.
- Ao final da década de 1950, várias técnicas de PO já estavam bem desenvolvidas, e assim, a PO ganha destaque nas mais diversas áreas da administração eficiente de recursos, tornando-se uma ferramenta indispensável nos mais diversos setores da sociedade.

- O prêmio Nobel de economia de 1975 foi dividido entre o holandês Tjalling Koopmans e o russo Leonid Kantorovich (de família de origem judaica) por suas contribuições para a teoria da alocação ótima de recursos. Em seus discursos de aceitação da premiação, mencionaram explicitamente o método Simplex de George Dantzig, gerando um desconforto na cerimônia pelo fato de o autor não ter sido indicado para o prêmio daquele ano.
- Aparentemente, um dos motivos para a Real Academia Sueca de Ciências não o indicar é o fato de Dantzig ter usado suas descobertas para fins militares (Colin, 2017; Duarte Júnior, 2023).

A expressão "pesquisa operacional" é a tradução brasileira do inglês *operational research* (traduzido em Portugal como investigação operacional e no idioma espanhol por *investigación operativa* (Arenales; Armentano, 2006). A definição de pesquisa operacional é controversa, mesmo porque o nome do termo não indica de forma clara todos os assuntos abordados na disciplina. Assim, será adotado de forma objetiva o conceito definido por Silva *et al.* (2017):

A Pesquisa Operacional (PO) é uma metodologia criada para auxiliar a tomada de decisão. Em linhas gerais, consiste na descrição de um sistema organizado com o auxílio de um modelo e, por meio da experimentação com o modelo, na descoberta da melhor maneira de operar o sistema.

Objetivos do ensino de Pesquisa Operacional

Moreira (2010) resumiu os objetivos do ensino da Pesquisa Operacional aos seguintes:

- Melhorar o pensamento lógico dos estudantes para a estruturação de problemas;
- Conhecer técnicas que sejam úteis para o futuro executivo;
- Familiarizar o estudante com o uso de recursos computacionais.

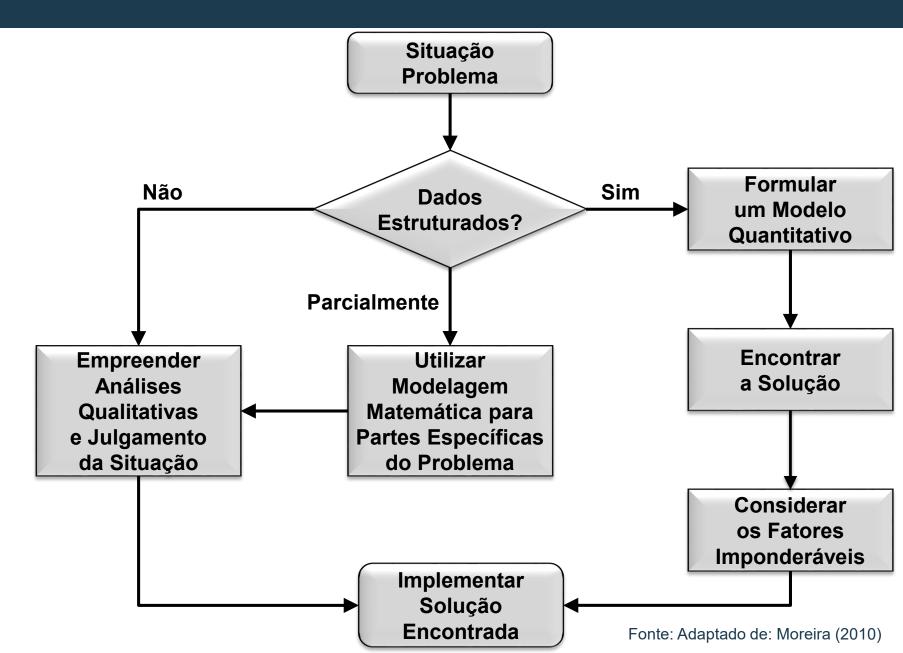
- A construção de modelos matemáticos é considerada por alguns como uma arte. Para tanto, é preciso, já de início, entender o problema. Assim, serão abordados alguns conceitos preliminares antes de expormos um fluxograma de construção de modelos matemáticos.
- O dicionário Houaiss define os termos "problema" e "situação", centrais para a Pesquisa Operacional, da seguinte forma:

<u>Definições</u>:

- Problema: uma dificuldade que deve ser de solucionada;
- Situação: combinação ou concorrência de acontecimentos ou circunstâncias em dado momento.

- Os dados costumam ser classificados em dados estruturados, não estruturados e semiestruturados:
- Dados estruturados: informações organizadas em uma estrutura rígida previamente planejada.
- Dados não estruturados: informações que não estão organizadas de forma rígida.
- Dados semiestruturados: informações compostas parcialmente por dados estruturados e não estruturados.

- Após descrever uma situação problema e as informações sobre ela levantadas, deve-se partir para a análise dos dados, que pode ser realizada pelos métodos quantitativo ou qualitativo. O método quantitativo é mais utilizado nas áreas de ciências exatas, enquanto o método qualitativo é mais utilizado nas áreas de ciências humanas.
- Método quantitativo: analisa dados numéricos organizados e objetivamente mensuráveis.
- Método qualitativo: estuda fenômenos que requerem descrições e análises não numéricas referentes a um determinado problema.



Interatividade

Com relação à classificação dos dados, qual das alternativas abaixo está correta?

- a) Dados estruturados: informações organizadas em uma estrutura rígida previamente planejada.
- b) Dados estruturados: informações que não estão organizadas de forma rígida.
- c) Dados não estruturados: informações organizadas em uma estrutura rígida previamente planejada.
- d) Dados semiestruturados: informações organizadas em uma estrutura rígida previamente planejada.
- e) Dados semiestruturados: informações que não estão organizadas de forma rígida.

Resposta

Com relação à classificação dos dados, qual das alternativas abaixo está correta?

- a) Dados estruturados: informações organizadas em uma estrutura rígida previamente planejada.
- b) Dados estruturados: informações que não estão organizadas de forma rígida.
- c) Dados não estruturados: informações organizadas em uma estrutura rígida previamente planejada.
- d) Dados semiestruturados: informações organizadas em uma estrutura rígida previamente planejada.
- e) Dados semiestruturados: informações que não estão organizadas de forma rígida.

- A programação linear (PL) é um dos métodos de otimização utilizados na Pesquisa Operacional. A palavra programação deve ser entendida como o planejamento em algum processo administrativo, gerencial, industrial etc. Esse planejamento objetiva obter o melhor resultado possível para o processo – seja maximizando o lucro ou minimizando os custos, por exemplo. A palavra linear está relacionada ao fato de serem usadas equações lineares.
- Programação linear.
- Métodos gráficos.

otimizar(Max ou Min):
$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

sujeito a: $\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$ $\geq \begin{cases} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{cases}$

Fonte: Adaptado de: Bronson (1985)

Problema resolvido

Considere o caso de uma pequena cidade que está preparando uma festa comemorativa para a divulgação dos produtos da economia local. No planejamento desse evento, um dos itens do cardápio serão hambúrgueres especiais feitos com uma mistura de carne bovina magra e carne suína. Esses dois itens dos hambúrgueres são os principais itens da economia local. A carne bovina magra contém 80% de carne e 20% de gordura e custa R\$ 40,00 por kg. A carne suína possui 68% de carne e 32% de gordura e custa R\$ 30,00 por kg. Quanto de carne bovina e de carne suína deve ser utilizado por quilograma de hambúrgueres para minimizar o custo e conservar o teor de gordura de um hambúrguer inferior a 25%?

minimizar:
$$40x_1 + 30x_2$$

sujeito a:
$$\begin{cases}
0,20x_1 + 0,32x_2 \le 0,25 \\
x_1 + x_2 = 1 \\
x_1,x_2 \ge 0
\end{cases}$$

minimizar:
$$40x_1 + 30x_2$$

sujeito a:
$$\begin{cases} 0,20x_1 + 0,32x_2 \leq 0,25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1,x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Passo Restrições

1
$$\begin{cases} 0,20x_1 + 0,32x_2 \leq 0,25 & (I) \\ x_1 + x_2 = 1 & (II) \\ x_1,x_2 \geq 0 \end{cases}$$
 Somando-se (I) com (III), obtendo-se (IV);
$$\begin{cases} 0,20x_1 + 0,32x_2 \leq 0,25 & (I) \\ (-0,2)x_1 + (-0,2)x_2 = (-0,2)1 & (III) \\ x_1,x_2 \geq 0 \end{cases}$$
 De (IV) obtem-se a solução para uma das variáveis;
$$\begin{cases} 0,20x_1 + 0,32x_2 \leq 0,25 & (I) \\ x_1,x_2 \geq 0 \end{cases}$$
 Esta é uma possível solução No caso, é a solução ótima.
$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{12} \approx 0,58 \\ x_2 = \frac{5}{12} \approx 0,42 \end{cases}$$

Solução

- Toma-se a equação (II), multiplica-se por -0,2, obtendose a equação (III);
- para uma das variáveis;
- Esta é uma possível solução. No caso, é a solução ótima.

$$\begin{array}{c} \text{minimizar}: & 40x_1 + 30x_2 \\ \text{sujeito a}: & \begin{cases} 0,20x_1 & + & 0,32x_2 & \leq & 0,25 \\ x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1,x_2 & \geq & 0 \end{cases} \\ & x_1,x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Substituindo esses valores na função objetivo:

• Custo =
$$40 \times 0.58 + 30 \times 0.42$$

Minimizar:
$$z = 40x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{12} \approx 0,58 \\ x_2 = \frac{5}{12} \approx 0,42 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{5}{12} \approx 0,42$$

Utilização do Solver no Excel

O Solver do Microsoft Excel é uma ferramenta poderosa que permite resolver problemas de otimização e programação linear. Se você tem um problema de PL e deseja encontrar a melhor solução possível com base em algumas restrições, o Solver pode ser extremamente útil. Aqui está um guia básico para usar o Solver do Excel para resolver problemas de programação linear.

Interatividade

Considerando, em programação linear, a resolução algébrica, o método gráfico e o uso do Solver no Microsoft Excel, indique a alternativa correta na comparação entre esses métodos.

- a) O método gráfico é o mais adequado para problemas que envolvem mais de duas variáveis.
- b) A resolução algébrica é eficiente para problemas de qualquer tamanho e complexidade.
- c) O Solver no Microsoft Excel não é adequado para problemas de programação linear.
- d) O método gráfico é limitado a problemas bidimensionais (duas variáveis de decisão).
 - e) A resolução algébrica e o método gráfico são computacionalmente mais poderosos do que o Solver no Microsoft Excel.

Resposta

Considerando, em programação linear, a resolução algébrica, o método gráfico e o uso do Solver no Microsoft Excel, indique a alternativa correta na comparação entre esses métodos.

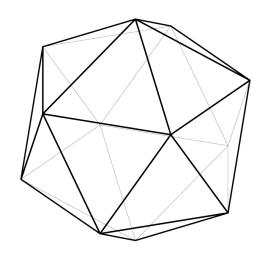
- a) O método gráfico é o mais adequado para problemas que envolvem mais de duas variáveis.
- b) A resolução algébrica é eficiente para problemas de qualquer tamanho e complexidade.
- c) O Solver no Microsoft Excel não é adequado para problemas de programação linear.
- d) O método gráfico é limitado a problemas bidimensionais (duas variáveis de decisão).
 - e) A resolução algébrica e o método gráfico são computacionalmente mais poderosos do que o Solver no Microsoft Excel.

O Método Simplex é um algoritmo desenvolvido para resolver problemas de programação linear, ou seja, problemas que envolvem a otimização de uma função objetivo sujeita a um conjunto de restrições lineares. Foi inventado por George Dantzig em 1947 e é uma das técnicas mais eficientes e amplamente utilizadas em pesquisa operacional e otimização matemática. O Simplex é um algoritmo simples, porém ele envolve muitas iterações de cálculo, o que pode levar a um procedimento tedioso e trabalhoso e, por conta disso, é necessário um computador para resolver problemas por este método. Se ele for executado de forma manual, a probabilidade de erro é muito alta.

Componentes do Método Simplex:

- 1. Função objetivo;
- 2. Restrições;
- 3. Variáveis de folga;
- 4. Solução inicial viável.

- **1. Função objetivo**: O primeiro passo é definir a função objetivo que se deseja maximizar ou minimizar. Esta é geralmente uma função linear das variáveis de decisão. Por exemplo, se estamos tentando maximizar o lucro de vender dois produtos, a função objetivo poderia ser $z = c_1x_1 + c_2x_2$ onde c_1 e c_2 são os lucros por unidade de cada produto e x_1 e x_2 são as quantidades de cada produto.
- 2. Restrições: Além da função objetivo, o problema geralmente contém um conjunto de restrições que as variáveis de decisão devem satisfazer. Estas restrições também são representadas por equações ou inequações lineares.
- 3. Variáveis de folga: Para transformar as inequações em equações, são introduzidas variáveis de folga. Isso simplifica o problema e facilita a busca pela solução ótima.
 - 4. Solução inicial viável: O Método Simplex começa com uma solução inicial viável, geralmente no ponto onde todas as variáveis de decisão são zero (exceto as variáveis de folga, se presentes).



- 1. Ponto de partida: O algoritmo começa em um vértice do espaço de soluções viáveis, que é um poliedro convexo.
- 2. Movimentação: Em cada passo, o algoritmo se move para um vértice adjacente do poliedro de soluções viáveis.
- 3. Critério de otimização: O algoritmo avalia se essa nova posição é melhor ou pior em relação à função objetivo.
- 4. Convergência: O algoritmo repete esses passos até encontrar o vértice que otimize a função objetivo, considerando todas as restrições.
- 5. Solução ótima: Uma vez que um vértice é encontrado onde nenhum movimento adjacente melhora a função objetivo, esse vértice é identificado como a solução ótima.

Para ilustrar o Método Simplex de uma forma mais simples, consideremos o problema a seguir:

Problema

 Uma empresa fabrica dois produtos P1 e P2 e deseja maximizar seu lucro. Cada unidade de P1 dá um lucro de R\$ 3,00 e cada unidade de P2 dá um lucro de R\$ 2,00.

Modelo de Programação Linear

Maximizar: $z = 3x_1 + 2x_1$

Restrições

Sujeito a:

$$2x_1 + x_2 \le 20$$

$$4x_1 + 2x_2 \le 40$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Passo 1: Adição de Variáveis de Folga

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 20$$

 $4x_1 + 2x_2 + s_2 = 40$

- X1 para P1 e X2 para P2
- Cada unidade de P1 dá um lucro de R\$ 3,00 e cada unidade de P2 dá um lucro de R\$ 2,00.

Passo 2: Tabela Simplex Inicial

x_1	x_2	s_1	s_2	LD	Razão
2	1	1	0	20	10
4	2	0	1	40	10
-3	-2	0	0	0	

- Cada unidade de P1 dá um lucro de R\$ 3,00 e cada unidade de P2 dá um lucro de R\$ 2,00.
- Razão linha 1 = 20/2 = 10
- Razão linha 2 = 40/4 = 10
- -3 refere-se ao valor R\$ 3,00
- -2 refere-se ao valor R\$ 2,00

Passo 3. Iteração 1

Escolha da Coluna do Pivô:

x₁ (coeficiente -3 na linha Z)

Escolha da Linha do Pivô:

Linha 1 (menor razão positiva: 10)

Operações de Linha:

- Linha 1 = Linha 1 / 2
- Linha 2 = Linha 2 4 * Linha 1
- Linha Z = Linha Z + 3 * Linha 1

Solução Ótima:

- $x_1 = 10$
- $x_2 = 0$
- $s_1 = 0$
- $S_2 = 0$
- Z = R\$30,00

Conclusão:

 A empresa deve produzir 10 unidades de P1 e nenhuma unidade de P2 para maximizar o lucro em R\$ 30,00.

Passo 4. Iteração 2 -> Análise da Linha Z:

 Não há coeficientes negativos. Portanto, alcançamos a solução ótima.

Linha Z

Interatividade

Qual é o objetivo da introdução de variáveis de folga no Método Simplex?

- a) Maximizar o valor das variáveis de decisão.
- b) Converter restrições de desigualdade em igualdades para facilitar o cálculo.
- c) Reduzir o custo computacional do algoritmo.
- d) Permitir a negatividade das variáveis de decisão.
- e) Aumentar o número de soluções ótimas possíveis.

Resposta

Qual é o objetivo da introdução de variáveis de folga no Método Simplex?

- a) Maximizar o valor das variáveis de decisão.
- b) Converter restrições de desigualdade em igualdades para facilitar o cálculo.
- c) Reduzir o custo computacional do algoritmo.
- d) Permitir a negatividade das variáveis de decisão.
- e) Aumentar o número de soluções ótimas possíveis.

- A pesquisa operacional abrange uma série de técnicas matemáticas e computacionais utilizadas para otimizar a tomada de decisões em diversos cenários da vida real.
- Dentre essas técnicas, os problemas de transporte e designação se destacam pela sua aplicabilidade em diversas situações práticas, especialmente quando estamos diante da necessidade de alocar recursos de maneira eficiente.
 - Ambos os problemas, de transporte e de designação, podem ser formulados e resolvidos por meio de técnicas de programação linear. Na pesquisa operacional, esses problemas são comuns e representam situações práticas em que decisões eficientes podem gerar economias significativas e melhorias operacionais em diversas áreas da indústria, logística e gestão.

Problema de transporte

- O problema de transporte refere-se à questão de como transportar um produto de várias fontes (como fábricas ou armazéns) para vários destinos (como lojas ou centros de distribuição) de maneira que se minimize o custo total do transporte, respeitando as capacidades das fontes e as demandas dos destinos.
 - Imagine, por exemplo, que você gerencie uma rede de armazéns que fornecem produtos para diversas lojas em uma região. Cada armazém tem uma quantidade fixa de produtos disponíveis, e cada loja tem uma demanda específica. Os custos de transporte variam de acordo com a distância e as rotas disponíveis. O desafio é determinar quanto produto de cada armazém deve ser enviado para cada loja, de forma a atender todas as demandas e ao mesmo tempo minimizar os custos de transporte.

Problema de designação

- O problema de designação trata da alocação de recursos a tarefas de forma que o custo ou o tempo seja minimizado. Diferentemente do problema de transporte, em que a questão principal é "quanto" alocar, no problema de designação a pergunta principal é "quem" atribuir a "quê".
 - Um exemplo clássico é a atribuição de funcionários a tarefas. Suponha que você tenha um conjunto de trabalhadores e um conjunto de tarefas. Cada trabalhador tem um custo diferente para realizar cada tarefa, seja em termos de tempo, habilidade ou qualquer outro critério. O objetivo é atribuir cada tarefa a um trabalhador de forma que todos os trabalhos sejam concluídos com o menor custo total.

Problemas de transporte

Conceito: Os problemas de transporte lidam com a alocação otimizada de produtos ou mercadorias de várias origens (por exemplo, fábricas) a vários destinos (por exemplo, armazéns ou lojas), de tal forma que o custo total do transporte seja minimizado, ou o lucro seja maximizado.

Componentes

- Origens: Os pontos de partida dos produtos. Cada origem tem uma oferta específica, isto é, a quantidade máxima de produto que ela pode fornecer.
- Destinos: Os pontos de chegada dos produtos. Cada destino tem uma demanda específica, isto é, a quantidade exata de produto que ele requer.
- Custos: Para cada par origem-destino, existe um custo associado para transportar uma unidade de produto.
- Objetivo: Minimizar o custo total de transporte, satisfazendo todas as ofertas e demandas.

Problemas de designação

Conceito: Os problemas de designação lidam com a tarefa de alocar recursos a tarefas de maneira que o custo ou o tempo total sejam minimizados, ou que o lucro ou a eficiência sejam maximizados. Uma característica especial é que exatamente um recurso é atribuído a exatamente uma tarefa.

Componentes:

- Recursos: Por exemplo, trabalhadores, máquinas, veículos etc.
- Tarefas: Atividades específicas a serem realizadas.
- Custos ou benefícios: Para cada par recurso-tarefa, há um custo associado para alocar esse recurso específico àquela tarefa específica. Em algumas situações, em vez de um custo, pode-se ter um benefício ou lucro associado.
- Objetivo: Minimizar o custo total ou maximizar o benefício total da designação.

Exemplo de problema com algoritmo de transporte:

Distribuição de mercadorias

- Situação: Uma empresa possui várias fábricas que produzem um certo produto e precisa distribuí-lo para diversos centros de distribuição em diferentes cidades.
- Problema: Determinar a quantidade que cada fábrica deve enviar para cada centro de distribuição de forma a minimizar os custos de transporte, considerando as capacidades de produção das fábricas e as demandas dos centros de distribuição.

Exemplo de problema com algoritmo de transporte:

Transporte de grãos

- Situação: Diferentes fazendas produzem grãos e precisam enviá-los para vários moinhos em uma região.
- Problema: Como distribuir os grãos das fazendas para os moinhos de forma a atender à demanda de cada moinho minimizando os custos de transporte, dadas as diferentes distâncias e capacidades das fazendas?

Exemplo de problema com modelos de designação:

Alocação de funcionários a projetos

- **Situação**: Uma empresa de TI tem diversos projetos e um conjunto de desenvolvedores com diferentes habilidades.
- Problema: Como alocar os desenvolvedores aos projetos de forma a minimizar o tempo total necessário para completar todos os projetos?

Exemplo de problema com modelos de designação:

Atribuição de máquinas a operadores

- Situação: Uma fábrica tem várias máquinas e operadores. Cada operador leva um tempo diferente para operar cada máquina.
- Problema: Como alocar operadores a máquinas de forma a minimizar o tempo total de produção ou o custo total?

Exemplo de problema com modelos de designação:

Atribuição de tarefas em centros de atendimento

- Situação: Um centro de atendimento ao cliente recebe diferentes tipos de chamadas que requerem diferentes níveis de especialização.
- Problema: Como atribuir os diferentes tipos de chamadas aos atendentes de forma a minimizar o tempo de espera do cliente?

Resumo

- Nesta unidade foram vistos alguns métodos da pesquisa operacional para a resolução de problemas mais genéricos, que podem ser utilizados em diversas áreas do conhecimento.
 Entre eles o método algébrico de resolução de problemas de programação linear bem como o método gráfico.
- O método gráfico é muito limitado, pois o número de variáveis envolvidas é baixo.
- O método algébrico permite um número maior de variáveis, porém os problemas práticos de programação linear envolvem muitas variáveis e por isso devem ser usados métodos computacionais.

Resumo

- Como métodos computacionais, tratamos do uso do Solver, um ADD-IN do Microsoft Excel que nos permite resolver problemas computacionais maiores, mas ainda assim limitados, pois o Excel é uma ferramenta destinada a problemas computacionais de pequeno porte. Descrevemos o Método Simplex, que é um algoritmo para a resolução de problemas de otimização que exige várias iterações. O Simplex foi criado justamente para o uso de computadores em problemas mais complexos.
- Foram apresentados problemas de transporte e de designação bastante genéricos e aplicados à área de informática de forma simplificada para entendimento em um texto introdutório.

Interatividade

Em problemas de transporte e de designação, o que se busca minimizar ou maximizar?

- a) O número de variáveis de decisão no modelo.
- b) A distância média percorrida pelos veículos de transporte.
- c) O custo total de transporte ou a eficiência total da designação de recursos.
- d) O tempo total de transporte ou o tempo de execução das tarefas.
- e) A quantidade de produtos a serem transportados ou o número de tarefas a serem designadas.

Resposta

Em problemas de transporte e de designação, o que se busca minimizar ou maximizar?

- a) O número de variáveis de decisão no modelo.
- b) A distância média percorrida pelos veículos de transporte.
- c) O custo total de transporte ou a eficiência total da designação de recursos.
- d) O tempo total de transporte ou o tempo de execução das tarefas.
- e) A quantidade de produtos a serem transportados ou o número de tarefas a serem designadas.

Referências

- ARENALES, M; ARMENTANO, V. Pesquisa operacional. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.
- BRONSON, R. *Pesquisa operacional*. São Paulo: McGraw-Hill, 1985.
- COLIN, E. C. Pesquisa operacional: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas. 2. ed. Rio de Janeiro: Atlas, 2017.
- DUARTE JÚNIOR, A. M. *Programação linear*. Curitiba: Appris, 2023.
- HILLIER, F. S. et al. Introdução à pesquisa operacional. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.
- MOREIRA, D. Pesquisa operacional: programação linear, simulação. 5 ed. Rio de Janeiro: Atlas, 2017.
 - SILVA, E. M. et al. Pesquisa operacional: programação linear, simulação. 5. ed. Rio de Janeiro: Atlas, 2017.

ATÉ A PRÓXIMA!