UNIP

UNIVERSIDADE PAULISTA

Análise Matemática

Autora: Profa. Juliana Brassolatti Gonçalves
Colaboradoras: Profa. Vanessa Lessa
Profa. Christiane Mazur Doi

Professora conteudista: Juliana Brassolatti Gonçalves

É bacharel em Matemática (1994) pela Universidade Federal de São Carlos (Ufscar), mestre em Matemática (1998) pela mesma instituição, licenciada (2005) em Matemática pela Universidade de Franca (Unifran), especialista (2015) em Ensino a Distância pela Rede de Educação Claretiano e enfim graduada em Pedagogia (2016) pela Universidade Paulista (UNIP). Trabalha como professora no Ensino Superior presencial desde 1998 e, desde 2005, atua com Educação a Distância como professora-tutora e conteudista. Na UNIP, atua há 13 anos ministrando disciplinas para o ciclo básico dos cursos de Engenharia, Ciência da Computação e Biomedicina.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

G635a Gonçalves, Juliana Brassolatti.

Análise Matemática / Juliana Brassolatti Gonçalves. – São Paulo: Editora Sol, 2023.

112 p., il.

Nota: este volume está publicado nos Cadernos de Estudos e Pesquisas da UNIP, Série Didática, ISSN 1517-9230.

1. Sequência. 2. Série. 3. Convergência. I. Título.

CDU 517

U517.39 – 23

Material Didático

Comissão editorial:
Profa. Dra. Christiane Mazur Doi
Profa. Dra. Ronilda Ribeiro

Apoio:
Profa. Cláudia Regina Baptista
Profa. M. Deise Alcantara Carreiro
Profa. Ana Paula Tôrres de Novaes Menezes

Projeto gráfico:
Prof. Alexandre Ponzetto

Revisão:
Luiza Gomyde
Vitor Andrade

Sumário

Análise Matemática

Unidade II

APRESENTAÇÃO

Para que um profissional de ciência da computação seja capaz de resolver um problema físico do mundo real, é necessário que ele conheça ferramentas matemáticas para construir modelos computacionais. Tais modelos devem ser implementados por meio de técnicas, conhecimento e domínio de conceitos matemáticos fundamentais nesse processo.

Como podemos observar no esquema a seguir, modelamos um problema físico, obtendo um modelo matemático, e precisamos então determinar a solução numérica desse modelo.

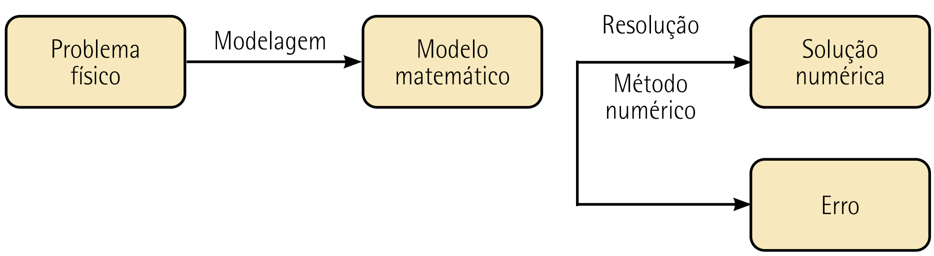

Figura 1 – Esquema problema físico × solução numérica

Para chegarmos a uma solução numérica, fase de obtenção da **solução do modelo matemático**, usamos vários conceitos matemáticos como derivadas, integrais, equações diferenciais e séries numéricas.

Neste livro-texto, mostraremos os principais conceitos relacionados às **séries numéricas**, ou seja, estudaremos como elas, em particular as **séries de potências**, auxiliam na determinação da solução de um problema. Vamos iniciar com o estudo das **sequências infinitas** e suas propriedades; em seguida estudaremos o conceito de **séries infinitas** e seus critérios de convergência; e, por fim, falaremos das **séries de potências**.

O objetivo geral desta disciplina é, em conjunto com as demais disciplinas de matemática, promover o desenvolvimento do raciocínio abstrato do aluno e, como objetivo específico, introduzir as ferramentas de cálculo ao desenvolvimento de outras disciplinas do curso.

Este livro-texto está organizado em duas unidades.

Na unidade I, apresentaremos:

- Sequências numéricas: definição e exemplos.
- Sequências numéricas: aplicações e situações interessantes.
- Sequências limitadas, crescentes, decrescentes e convergentes.
- Séries convergentes e divergentes.
- A série geométrica.

- Critérios de convergência: o critério do confronto e da comparação de razões.
- O critério da razão.
- O critério da raiz.
- Séries alternadas: o critério de Leibniz.

Na unidade II, veremos:

- Série de potências: definição e exemplos.
- Série de potências: raio e intervalo de convergência.
- Funções definidas por séries de potência.
- Séries de Taylor e Maclaurin.
- Polinômios de Taylor.
- Aplicações do conteúdo.

INTRODUÇÃO

Sabemos que a matemática tem o poder de estar presente em diversas áreas do conhecimento, fornecendo suas belas ferramentas para a resolução de problemas. Algumas dessas belas ferramentas serão aqui ensinadas: **sequências infinitas**, **séries infinitas** e **séries de potências**.

Na área da computação, tais ferramentas são importantes pois permitem, por meio de cálculos notáveis, expressar muitas funções, como polinômios infinitos ou somas de séries infinitas. Podemos citar, por exemplo, o valor do pi (π) com um bilhão de casas decimais, que são hoje muito utilizados para testar a precisão de novos supercomputadores; as sequências infinitas recorrentes, que são fundamentais na área da ciência da computação, pois, em razão do estado de um computador, cada tique do seu relógio interno depende do seu estado no tique anterior; na transmissão de sinais, que são estudados os espectros de frequência e os sistemas das respostas de frequência; *machine learning*, subárea da inteligência artificial que tem como pilares, além da computação e estatística, conceitos da matemática, como a aproximação de funções por séries de potências etc.

Preparados para iniciar os estudos?

Lembre-se de que dedicação e participação constantes são fundamentais para o triunfo do processo de aprendizagem!

Desejamos a você muito sucesso nesta caminhada! Bons estudos!

Unidade I

1 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E APLICAÇÕES

1.1 Sequências: algumas situações interessantes

Iniciaremos nosso estudo com as **sequências numéricas**, conceito fundamental para a compreensão das séries infinitas. Antes de apresentar a definição formal, vamos observar algumas curiosidades para compreensão do que é uma **sequência**.

Situação 1: sequência de ações no dia a dia

Acordar, levantar, lavar o rosto, escovar os dentes, tomar água, fazer exercícios, tomar banho, se alimentar, trabalhar etc. Esse é um exemplo de uma sequência cujos elementos são as ações realizadas uma após a outra.

Situação 2: sequência de figuras

Observe a seguinte sequência de figuras:

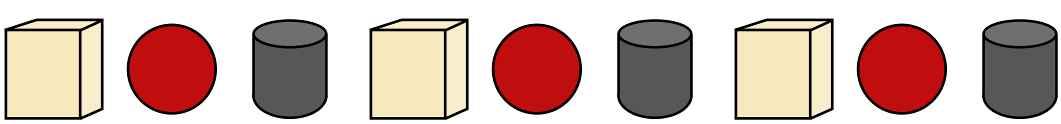

Figura 2 – Sequência de figuras

A figura apresenta um exemplo de sequência cujos componentes são as figuras espaciais que seguem uma dada ordem: cubo, esfera, cilindro, cubo, esfera, cilindro... Observe que existe uma lei de formação da sequência de figuras que se repete e, a partir dessa lei de formação, é possível determinar qual será a próxima figura.

Situação 3: sequências na era do computador

As sequências de imagens a seguir são definidas por regras simples que envolvem sequências numéricas × cores × matrizes. Quando calculadas e desenhadas por um computador, o processo pode continuar indefinidamente, gerando figuras belíssimas.

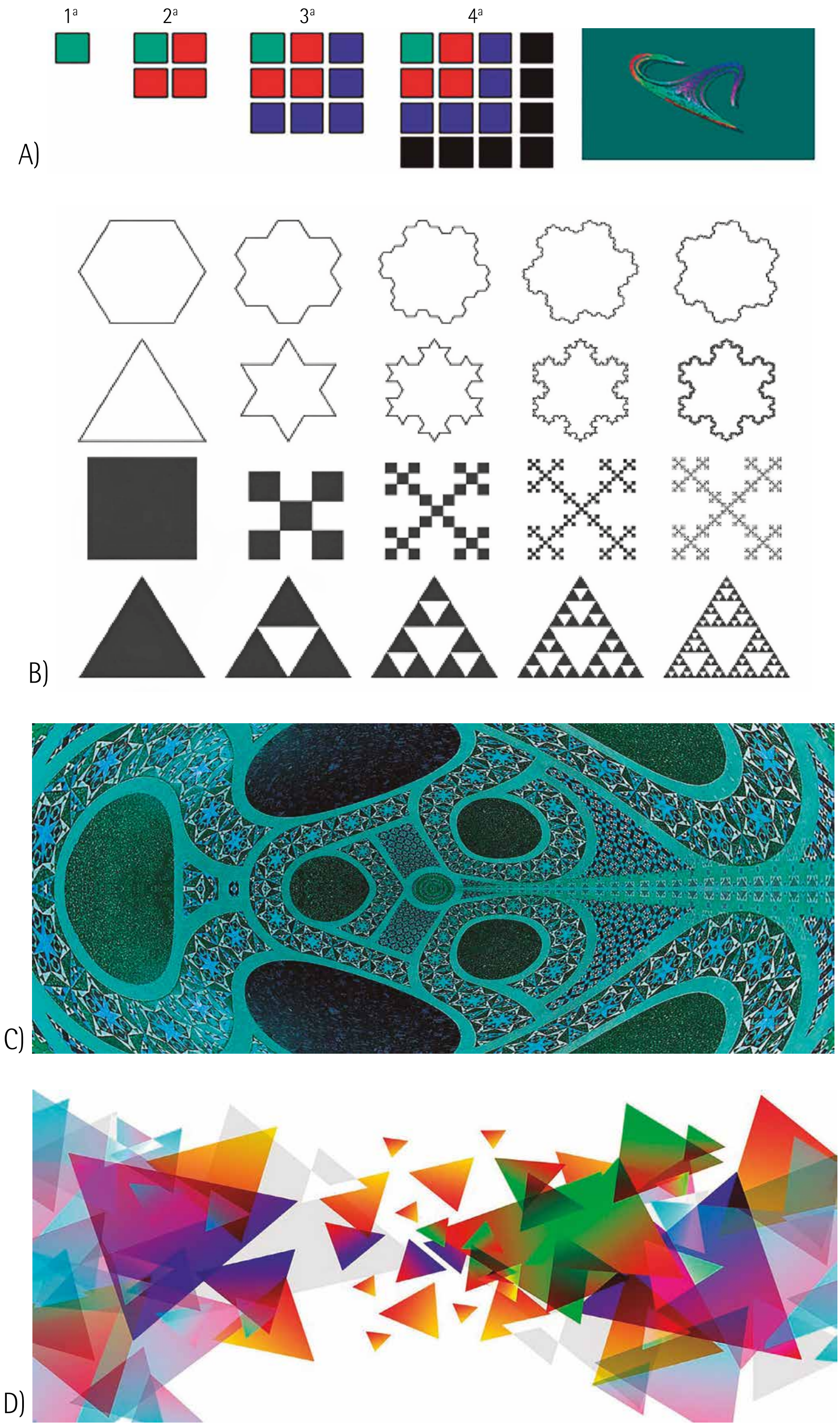

Figura 3 – Mosaicos

Disponível em: C) https://cutt.ly/R9kAP6L; D) https://cutt.ly/u9kAG6E. Acesso em: 14 fev. 2023.

Saiba mais

Arquimedes de Siracusa (287 a.C-212 a.C) é considerado um dos maiores cientistas da Antiguidade Clássica, tendo contribuído para o desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento, como a matemática, a física, a astronomia etc. Em matemática, uma de suas mais notáveis contribuições foi o cálculo da área de um círculo por meio de sucessivas aproximações da área por polígonos cujas áreas eram conhecidas. O método desenvolvido por Arquimedes para encontrar a área de um círculo é conhecido como **método da exaustão**.

Para compreender esse método e associá-lo ao conceito de **limite**, assista ao vídeo a seguir:

O MÉTODO de Arquimedes. 2021. 1 vídeo (5:59). Publicado pelo canal GPIMEM UNESP. Disponível em: https://cutt.ly/Z9kSEEI. Acesso em: 24 jan. 2023.

Situação 4: sequência de somas infinitas

No Ensino Básico, são estudadas as dízimas periódicas que podem ser interpretadas como somas infinitas.

Por exemplo, considere a representação decimal da fração 2/3:

$$\frac{2}{3}=0{,}6666\ldots=\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{6}{10000}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{10^n}$$

Podemos dizer que uma dízima periódica é uma sequência de somas infinitas?

Saiba mais

No Ensino Básico aprendemos que para determinar a fração geratriz de uma dízima periódica devemos seguir algumas regras. Para lembrar de tais regras, assista:

CONVERTENDO decimais repetidos em frações -- 1. 2013. 1 vídeo (4:08). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/49kHGMA. Acesso em: 24 jan. 2023.

Uma vez que não faz sentido somar uma quantidade infinita de termos, é necessário estabelecer uma teoria capaz de tornar aceitável a igualdade acentuada, concorda?

Esses foram alguns exemplos de sequências. Agora, vamos prosseguir com nosso estudo introduzindo o conceito formal de **sequência numérica**, que é essencial para compreensão dos próximos tópicos.

1.2 Sequência numérica

As sequências que vamos estudar nesta disciplina são as **sequências numéricas**, ou seja, a sucessão de números cuja ordem é determinada por uma lei ou função e cujo domínio é o conjunto dos números naturais.

Exemplos:

- **Conjunto dos números pares**: 0, 2, 4, 6, 8, 10, ...
- **Conjunto dos números múltiplos de 5**: 0, 5, 10, 15, 20, 25, ...

A **sequência infinita de números reais** é formalmente definida, de acordo com Panonceli (2017, p. 57), como: uma sequência de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que, a cada número natural n, associa um número real x(n) = x. Chamamos o número n de índice da sequência e o x_n, de enésimo termo ou termo geral da sequência.

Podemos também utilizar a notação $a(n) = a_n$ no lugar de x(n) = x. Neste livro-texto, utilizaremos a notação $a(n) = a_n = \{a_n\}$ para representar o enésimo termo das sequências numéricas infinitas (uso de chaves).

Veja um exemplo:

$\{a_n\} = \{n+1\}$

Para o número natural n = 1, associamos o número real $a_1 = 1 + 1 = 2$, que é o primeiro termo da sequência. Para o número natural n = 2, associamos o número real $a_2 = 2 + 1 = 3$, que é o segundo termo da sequência. Para o número natural n = 3, associamos o número real $a_3 = 3 + 1 = 4$, que é o terceiro termo da sequência, e assim por diante.

1.2.1 Classificação das sequências numéricas

As sequências numéricas podem ser classificadas em finitas e infinitas.

Finitas

- A sequência dos quatro primeiros números naturais múltiplos de 5: {0, 5, 10, 15}, que pode ser indicada pelos termos $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

- A sequência dos números de dias dos 12 meses de um ano bissexto: {31, 30, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30, 31}, que pode ser indicada pelos termos $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$.

- A sequência $\{a_n\} = \{3n$, em que n é um número natural tal que $2 \leq n \leq 7\} = \{6, 9, 12, 15, 18\}$.

Infinita

- A sequência dos números naturais ímpares: {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...}, que pode ser indicada pelos termos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a6, ..., a_n, ...}.

- A sequência dos números quadrados perfeitos: {1, 4, 9, 16, 25, 36, ...}, que pode ser indicada pelos termos $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ..., a_n, ...\}$.

- A sequência {an} = {3n}, em que n é um número natural $n \geq 0\} = \{0, 3, 6, 9, 12 ...\}$.

Nesta disciplina, estamos interessados nas sequências infinitas, que podem ser pensadas como uma lista de números escritos em uma ordem definida: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ..., a_n, ...\}$, em que:

- $\mathbf{a_1}$ é o primeiro termo da sequência.

- $\mathbf{a_2}$ é o segundo termo da sequência.

- $\mathbf{a_n}$ é o enésimo termo da sequência.

Observação

Em algumas ocasiões, é conveniente apresentar o primeiro termo da sequência como a_0. Nesse caso, a sequência tem a seguinte forma: $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$.

Não é necessário iniciar uma sequência do 0 ou do 1; isso depende da situação problema e do domínio de definição.

Notação

A notação que vamos usar para sequências numéricas neste livro-texto será $\{a_n\}$.

Exemplo 1

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$$

Os termos desta sequência são {1, 1/2, 1/3, ..., 1/n, ...}, que podem ser representados geometricamente na reta real ou em um gráfico. Observe que como uma sequência nada mais é que uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais, então seu gráfico é representado por pontos isolados.

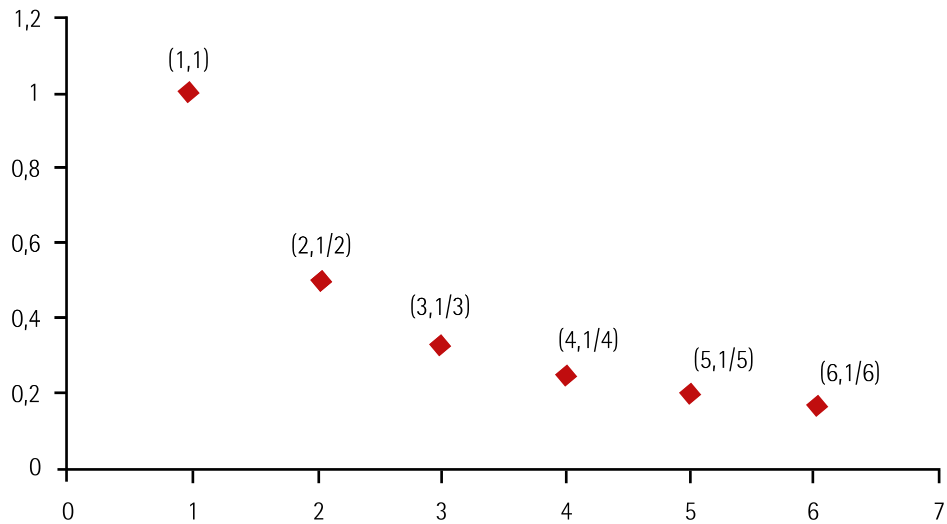

Figura 4 – Representação geométrica da sequência $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

Observe que os termos dessa sequência diminuem constantemente, que chega cada vez mais próxima de 0 quanto maior for o valor de n. Portanto, neste caso, dizemos que a sequência converge para 0.

Exemplo 2

$$\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

Os termos desta sequência são {1/2, 2/3, 3/4, 4/5 ..., n/(n+1), ...}, que podem ser representados geometricamente por:

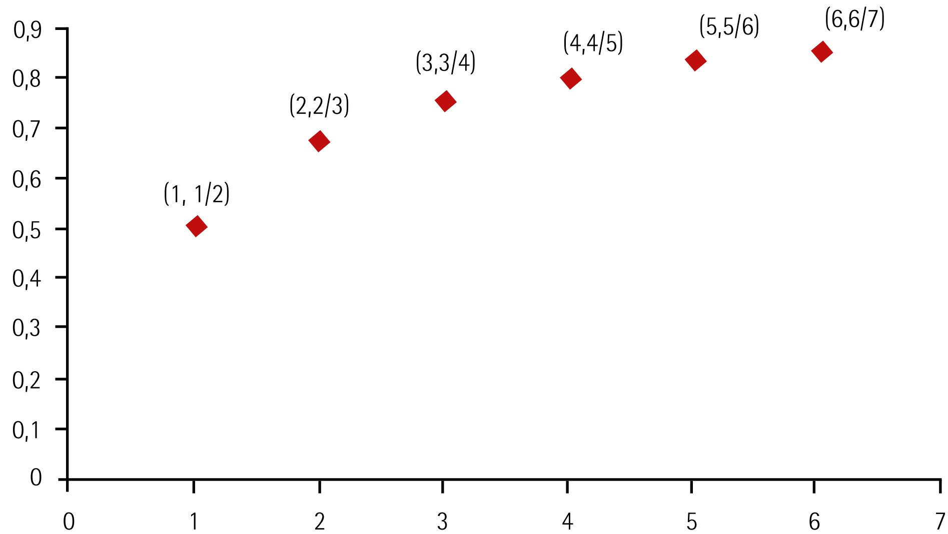

Figura 5 – Representação geométrica da sequência $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

Observe que os termos dessa sequência tendem a 1 quanto maior for o valor de n. Portanto, neste caso, dizemos que a sequência converge para 1.

Exemplo 3

$\{a_n\} = \{5\}$

Os termos desta sequência são {5, 5, 5, 5, 5, ...}, que podem ser representados geometricamente por:

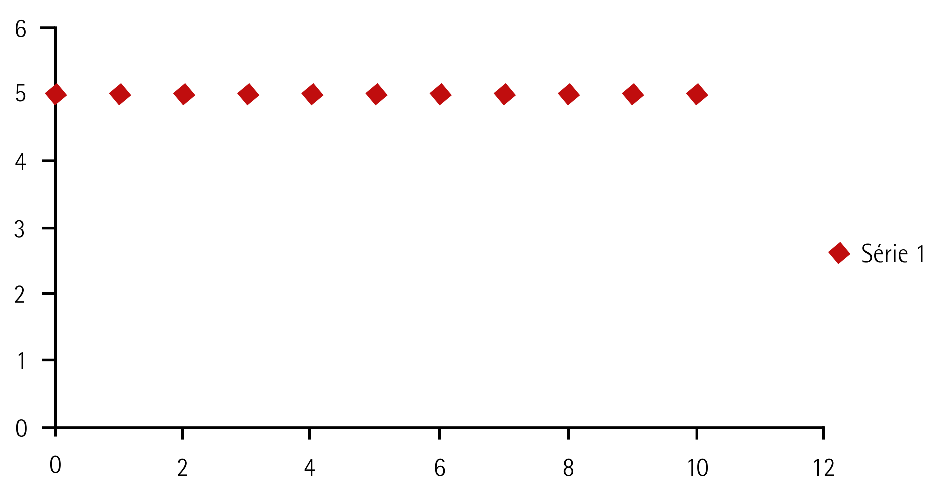

Figura 6 – Representação geométrica da sequência {an} = {5}

Observe que os termos dessa sequência mantêm o mesmo valor quanto maior for o valor de n. Portanto, neste caso, dizemos que a sequência converge para a constante 5.

Exemplo 4

$$\{a_n\} = \left\{(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

Os termos desta sequência são {0, -1/2, 2/3, -3/4, 4/5, ...}, que podem ser representados geometricamente por:

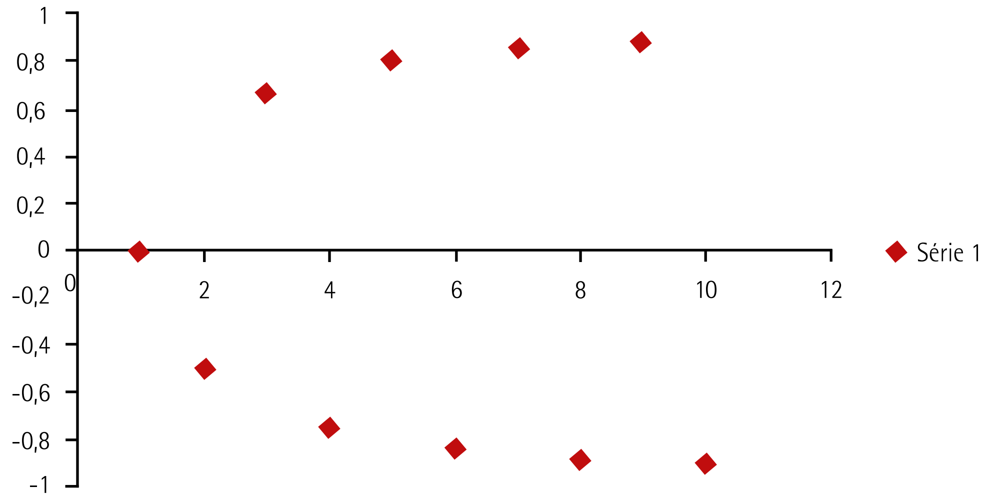

Figura 7 – Representação geométrica da sequência $\{a_n\} = \left\{(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}$

Observe que os termos dessa sequência têm o sinal alternado quanto maior for o valor de n. Os termos positivos se aproximam de 1 e os termos negativos se aproximam de -1. Portanto, neste caso, dizemos que a sequência é divergente.

Pelos exemplos vistos, podemos observar que algumas sequências **convergem** e outras **divergem**.

Saiba mais

As sequências apresentadas anteriormente têm uma equação simples de definição do enésimo termo, mas existem algumas sequências cujas fórmulas de definição não são tão simples assim. Um exemplo conhecido na natureza e muito famoso é a sequência de Fibonacci, que surgiu quando o matemático italiano que deu nome à formula resolveu, no século XIII, um problema envolvendo a reprodução de coelhos, que é definida como:

$$f_1 = 1 \quad f_2 = 1 \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 3$$

Observe que cada termo é a soma dos dois termos precedentes. Dessa forma, os primeiros termos da sequência são {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...} (STEWART, 2016).

Na natureza, essa sequência pode ser observada em vários seres vivos, como insetos, plantas, no rosto humano, espirais etc. O vídeo indicado a seguir mostra o os fundamentos do número de Fibonacci, e evolui até as geometrias plana e espacial, criando verdadeiras obras de arte da natureza.

MATEMÁTICA e natureza – sequência de números de Fibonacci e demais leis que regem o mundo. 2012. 1 vídeo (3:43). Publicado pelo canal Hero X Cast – Anime e Cultura Nerd. Disponível em: https://cutt.ly/z9kCLyS. Acesso em: 24 jan. 2023.

Observação

A notação utilizada, que pode ser entendida como "a sequência tende ao limite L quando n tende a infinito", é a seguinte:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

Stewart (2016) define as sequências convergentes ou divergentes da seguinte forma: uma sequência {an} tem o limite L, e escrevemos $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ se pudermos fazer os termos an tão perto de L quanto se queira ao se fazer n suficientemente grande. Se $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ existir, dizemos que a sequência converge (ou é convergente). Caso contrário, dizemos que a sequência diverge (ou é divergente).

Saiba mais

Existe uma definição formal de limite de sequência por meio de N e ε (épsilon) que não será tratada neste livro-texto, já que usar a definição formal para verificar se o limite de uma sequência numérica converge ou diverge seria uma tarefa extremamente difícil e descomunal. Felizmente, é possível usar outros caminhos utilizando propriedades, exemplos básicos e leis, além do teorema do confronto para sequências, da regra de L'Hôpital etc.

Para mais informação sobre essa definição formal, leia o tópico 2.3, "Definição precisa de limite", do livro indicado a seguir:

THOMAS, G. B. *et al. Cálculo*: volume 2. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. p. 72-76.

Para compreender melhor as notações sobre limites de sequências numéricas, seguem alguns exemplos para estudo.

Observe os seguintes exemplos:

Exemplo de aplicação

Para cada sequência $\{a_n\}$ a seguir, encontre os valores dos quatro primeiros termos:

a) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{1-n}{n^2}\right\}$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1-1}{1^2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1-2}{2^2} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{1-3}{3^2} = \frac{-2}{9} = -\frac{2}{9}$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{1-4}{4^2} = \frac{-3}{16} = -\frac{3}{16}$$

Portanto os quatro primeiros termos da sequência são:

$$\left\{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{9}, -\frac{3}{16}\right\}$$

b) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{1}{n!}\right\}$

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2.1} = \frac{1}{2}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{3.2.1} = \frac{1}{6}$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{4.3.2.1} = \frac{1}{24}$$

Portanto, os quatro primeiros termos da sequência são:

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}\right\}$$

c) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right\}$

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{(-1)^{1+1}}{2.1-1} = \frac{(-1)^2}{1} = 1$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{(-1)^{2+1}}{2.2-1} = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{(-1)^{3+1}}{2.3-1} = \frac{(-1)^4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{(-1)^{4+1}}{2.4-1} = \frac{(-1)^5}{7} = -\frac{1}{7}$$

Portanto, os quatro primeiros termos da sequência são:

$$\left\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}\right\}$$

d) As chamadas **sequências recursivas** ou definidas por uma relação de recorrência são aquelas cujos termos podem ser calculados em função de termos antecessores, ou seja, quando o termo seguinte depende do termo anterior.

$a_1 = 1$

e

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 3)$$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 3) = \frac{1}{2}(1+3) = \frac{4}{2} = 2$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + 3) = \frac{1}{2}(2+3) = \frac{5}{2}$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{2}(a_3 + 3) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+3\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{11}{4}$$

Portanto, os quatro primeiros termos da sequência são:

$$\left\{1, 2, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right\}$$

1.3 Limite de sequências numéricas

Apresentaremos agora algumas propriedades e leis que serão utilizadas como ferramentas importantes para verificar se uma sequência numérica é convergente ou divergente.

1.3.1 Propriedades

Propriedade 1

A sequência $\frac{1}{n}$ tende a zero quando n tende a infinito, ou seja:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \text{ (para } k > 0)$$

Em particular, se k = 1, temos o caso $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Saiba mais

Para conhecer a demonstração formal usando ε e N do limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, leia o tópico “Limite de uma sequência”, do livro de Ayres:

AYRES, F. *Cálculo*. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. p. 364.

Propriedade 2

O limite de constante é a própria constante.

$$\lim_{n\to\infty} k = k$$

1.3.2 Leis do limite para sequências

De acordo com Stewart (2016), se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então são válidas as seguintes regras:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \text{ se } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\,p} = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \quad \text{se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

Seguem alguns exemplos de aplicação utilizando as propriedades e leis:

Exemplo de aplicação

Para cada sequência $\{a_n\}$ a seguir, calcule seus limites usando as leis e propriedades sobre sequências numéricas.

a) $\{a_n\} = \left\{\frac{7}{n}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n}\right) = 7 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 7.0 = 0$$

Portanto, a sequência é **convergente**.

b) $\{a_n\} = \{n+3\}$

$$\lim_{n\to\infty}(n+3) = \lim_{n\to\infty}(n) + \lim_{n\to\infty}(3) = \infty + 3 = \infty$$

Portanto, a sequência é **divergente**.

c) $\{a_n\} = \left\{\frac{4}{n^2}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right) = 4 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = 4 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 4 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Portanto, a sequência é **convergente**.

d) $\{a_n\} = \left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$

Atenção! Para resolver esse limite, devemos dividir o numerador e o denominador pela maior potência de n que aparece no denominador.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n^2}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{n}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\frac{2}{n}}{1}\right) = \left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty} n + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1}\right) =$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} n + 2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{\infty + 2 \cdot 0}{1} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

Portanto, a sequência é divergente.

e) $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{n^2 + 5n - 6}{n^4 + n} \right\}$

Atenção! Para resolver esse limite, devemos dividir o numerador e o denominador pela maior potência de n que aparece no denominador.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5n-6}{n^4+n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{n^2}{n^4}+\dfrac{5n}{n^4}-\dfrac{6}{n^4}}{\dfrac{n^4}{n^4}+\dfrac{n}{n^4}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}-\dfrac{6}{n^4}}{1+\dfrac{1}{n^3}}\right) =$$

$$\left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^3}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6}{n^4}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}}\right) = \frac{0+0-0}{1+0} = 0$$

Portanto, a sequência é convergente.

f) $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{n}{\sqrt{5-n^3}} \right\}$

Atenção! Para resolver esse limite, devemos dividir o numerador e o denominador pela maior potência de n que aparece no denominador.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{5-n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{n}{n}}{\dfrac{\sqrt{5-n}}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{1}{n}}}\right) =$$

$$\left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{0-\lim\limits_{n\to\infty}0}}\right) = \frac{1}{0} = \infty$$

Portanto, a sequência é divergente.

1.3.3 Teorema do confronto para sequências

Sejam $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sequências de números reais. Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ for verdadeiro para todo n além de algum índice N, e se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ também (THOMAS *et al.*, 2012).

Seguem alguns exemplos utilizando o teorema do confronto:

Exemplo de aplicação

Determine se a sequência é convergente ou divergente. Caso seja convergente, encontre seu limite.

a) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{\cos n}{n}\right\}$

Sabemos que o cosseno está definido entre -1 e 1, ou seja, -1 < cosn < 1. Dividindo todos os termos por n (dado que n é um número inteiro e positivo), temos:

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Sabendo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0$$

Pelo teorema do confronto, concluímos que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$. Portanto, a sequência é **convergente**.

b) $\{a_n\} = \left\{(-1)^n \dfrac{1}{n}\right\}$

Sabemos que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Dividindo todos os termos por n (dado que n é um número inteiro e positivo), temos:

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Sabendo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0$$

Pelo teorema do confronto, concluímos que $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n} = 0$. Portanto, a sequência é **convergente**.

Saiba mais

Para saber mais sobre o teorema do confronto, assista ao seguinte vídeo:

EXPRIMIR o exemplo do teorema | matemática | Khan Academy. 2017. 1 vídeo (4:10). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/h9k9CGN. Acesso em: 24 jan. 2023.

1.3.4 Regra de L'Hôpital para limite de sequências numéricas

O teorema que será apresentado a seguir (mas não demonstrado) permite usar a regra de L'Hôpital para determinar alguns limites de sequências numéricas:

Suponha que f(x) seja uma função definida para todo $x \geq n_0$ e que $\{a_n\}$ seja uma sequência de números reais tal que $a_n = f(n)$ para $n \geq n_0$. Então,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = L$$

Observação

A regra de L'Hôpital é usada para calcular limites indeterminados de funções, por exemplo, $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, estudada normalmente em cálculo diferencial. A ferramenta utilizada é a derivada de funções.

A primeira regra de L'Hôpital diz: sejam f e g duas funções contínuas em um intervalo I, deriváveis no interior de I, tais que g'(x) seja diferente de zero para todo x no interior de I.

Seja $a \in I$ e $f(a) = g(a) = 0$ e que exista o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Então, existe o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

E, mais ainda,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Lembrando que a notação da "função linha" é a notação da derivada de primeira ordem da função f(x).

Antes de apresentar alguns exemplos de aplicação, vamos lembrar de algumas **regras de derivação**:

- **Regra 1**: derivada da função constante é zero. Exemplos:

$f(x) = 4 \Longrightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = -6 \Longrightarrow f'(x) = 0$

- **Regra 2**: derivada da função potência: $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$. Exemplos:

$$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1\cdot x^{1-1}=1x^0=1$$

$$f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$$

$$f(x)=x^{-8} \Rightarrow f'(x)=-8\cdot x^{-8-1}=-8\cdot x^{-9}=-\frac{8}{x^9}$$

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Veja na tabela a seguir uma relação de regras importantes a respeito de derivadas imediatas.

Tabela 1 – Derivadas imediatas

1	$(c)'=0$ (em que c é uma constante real)
2	$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$
3	$(x)'=1$
4	$(\operatorname{sen} x)'=\cos x$
5	$(\cos x)'=-\operatorname{sen} x$

6	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
7	$\left(e^x\right)' = e^x$
8	$(tgx)' = \sec^2 x$

Seguem alguns exemplos de aplicação que utilizam a regra de L'Hôpital para determinar o limite de uma sequência numérica:

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Determine se as sequências a seguir convergem ou divergem.

a) $\{a_n\} = \left\{\frac{\ln n}{n^2}\right\}$

Podemos aplicar aqui a regra de L'Hôpital, pois temos uma indeterminação do tipo infinito/infinito. Além disso, devemos lembrar que a derivada da função f(x) = lnx é f'(x) = 1/x.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Portanto, a sequência é **convergente**.

b) $\{a_n\} = \left\{\frac{3n^3+1}{2n^2+n}\right\}$

Podemos aplicar aqui a regra de L'Hôpital, pois temos uma indeterminação do tipo infinito/infinito.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3+1}{2n^2+n}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3+1}{2x^2+x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(3x^3+1)'}{(2x^2+x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{9x^2}{4x+1}$$

Como a indeterminação ainda não sumiu, continuamos derivando.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2}{4x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{18x}{4} = \frac{18\cdot\infty}{4} = \infty$$

Portanto, a sequência é **divergente**.

c) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{5n}{e^n}\right\}$

Podemos aplicar aqui a regra de L'Hôpital, pois temos uma indeterminação do tipo infinito/infinito.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{e^n}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{e^x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(5x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{5}{e^x} = \frac{5}{\infty} = 0$$

Portanto, a sequência é **convergente**.

Exemplo 2

Comprove se os resultados apresentados nos limites a seguir estão corretos.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{3n^2+7} = 0$

(Lembre-se que $\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}$ e $(C)' = 0$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{3n^2+7} = \lim_{n\to\infty}\frac{(5n)'}{\left(3n^2+7\right)'} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{6n} = \frac{5}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{5}{6}.0 = 0$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2}{2n^2-10} = 2$

(Lembre-se que $\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}$ e $(C)' = 0$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{2n^2-10} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(4n^2\right)'}{\left(2n^2-10\right)'} = \lim_{n\to\infty}\frac{8n}{4n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}-9} = 7$

(Lembre-se que $\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}$ e $(C)' = 0$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}-9} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n\cdot n^{1/2}}{n\cdot n^{1/2}-9} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n^{3/2}}{n^{3/2}-9} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^{3/2}}{n^{3/2}-9} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(7n^{3/2}\right)'}{\left(n^{3/2}-9\right)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot\frac{3}{2}n^{\frac{3}{2}-1}}{\frac{3}{2}n^{\frac{3}{2}-1}-0} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{21}{2}n^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{21}{2}\cdot\frac{2}{3} = 7$$

Observe que com o auxílio de propriedades, leis, teorema do confronto, regra de L'Hôpital e certas manipulações algébricas, conseguimos determinar o limite de algumas sequências numéricas sem utilizar a definição formal do épsilon. É claro que neste livro-texto não são apresentados todos os exemplos de limites, mas é pertinente pesquisar outros exemplos para conhecer melhor o universo dos limites.

A seguir, serão apresentados alguns limites usuais, e alguns serão demonstrados.

Tabela 2 – Limites importantes

1	$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
2	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3	$\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1 \quad x > 0$
4	$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$
5	$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad \lvert x\rvert < 1$
6	$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

Fonte: Thomas *et al.* (2012, p. 71).

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

Observação

$\frac{\infty}{\infty}$ = indeterminação

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Observação

$\ln a^b = b \ln a$

$$a_n = \sqrt[n]{n} = (n)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \ln a_n = \ln(n)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \ln a_n = \frac{1}{n}\ln(n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(n) \text{ (infinito/infinito)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)'}{(n)'}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = 0 \Rightarrow \ln a_n \to 0 \Rightarrow e^{\ln a_n} \to e^0 \Rightarrow a_n \to 1$$

Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

3) $$\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$$

Observação

$$e^{\ln x} = x$$

$$a_n = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \ln a_n = \ln x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \ln a_n = \frac{1}{n}\ln x$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln x$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = 0 \Rightarrow \ln a_n \to 0 \Rightarrow e^{\ln a_n} \to e^0 \Rightarrow a_n \to 1$$

Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$$

4) $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Observação

$$e^{\ln x} = x$$

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \Rightarrow \ln a_n = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \Rightarrow \ln a_n = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \text{ (Indeterminação 0/0)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-xn^{-2}}{1+\frac{x}{n}}}{\frac{-1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+x/n} = x$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = x$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = x \Rightarrow \ln a_n \to x \Rightarrow e^{\ln a_n} \to e^x \Rightarrow a_n \to e^x$$

Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

1.3.5 Sequências crescentes e decrescentes

Estudaremos a seguir o que são sequências crescentes, decrescentes e limitadas. Para isso, vamos observar alguns exemplos:

Exemplo 1

Veja no gráfico a seguir que, para a sequência $\{a_n = n\}$, temos que $a_n < a_n + 1$ para todo n. Este é o exemplo de uma sequência crescente.

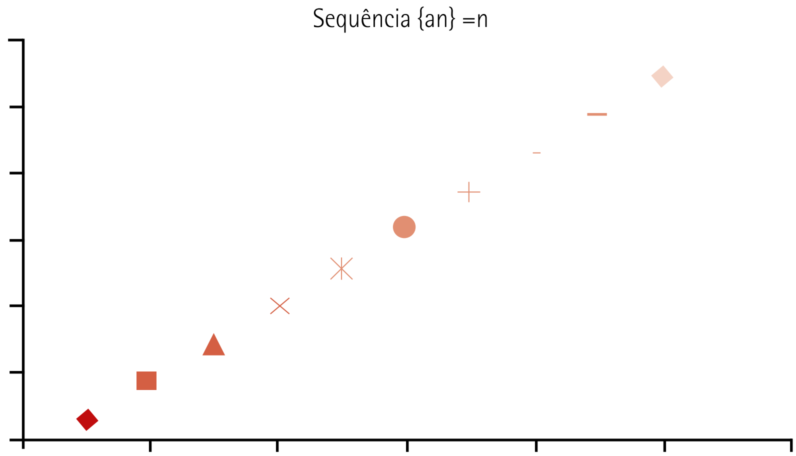

Figura 8 – Gráfico de sequência crescente

Exemplo 2

Veja no gráfico a seguir que, para a sequência $\left\{a_n = \dfrac{3}{n+5}\right\}$, temos que $a_n > a_{n+1}$ para todo n. Este é o exemplo de uma sequência decrescente.

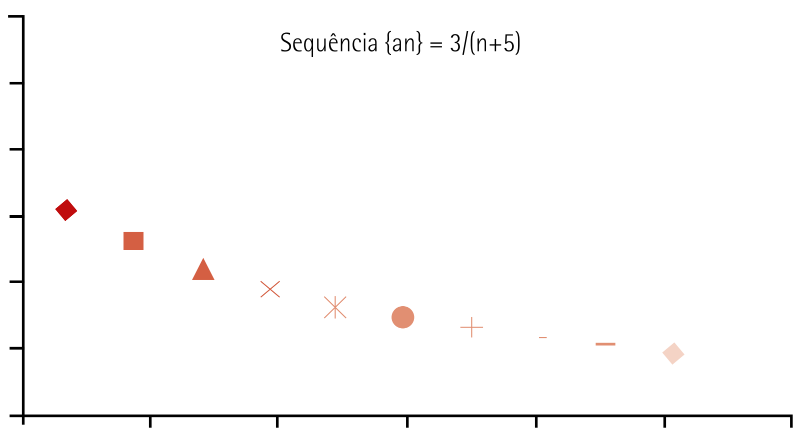

Figura 9 – Gráfico de sequência decrescente

De modo geral, temos que uma sequência $\{a_n\}$ é chamada:

- **Crescente** se $a_n < a_n+1$ para todo $n \geq 1$.
- **Decrescente** se $a_n > a_n+1$ para todo $n \geq 1$.
- **Não decrescente** se $a_n \leq a_n+1$ para todo $n \geq 1$.
- **Não crescente** se $a_n \geq a_n+1$ para todo $n \geq 1$.

A sequência $\{a_n\}$ é **monotônica** se ela for crescente ou decrescente.

Veja alguns exemplos:

- A sequência $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{(n+1)}, \ldots$ é **crescente**.
- A sequência $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ é **decrescente**.
- A sequência $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 \ldots$ é **não decrescente** (mas não é crescente).
- A sequência $-1, -1, -2, -2, -3, -3, -4, -4 \ldots$ é **não crescente** (mas não é decrescente).

1.3.6 Sequências limitadas

Uma sequência $\{a_n\}$ é limitada superiormente se existir um número M tal que $a_n \leq M$ para todo $n \geq 1$. Ela é limitada inferiormente se existir um número m tal que an $\geq$ m para todo $n \geq 1$ (STEWART, 2016).

Se ela for limitada superior e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma sequência **limitada**.

Veja o exemplo de uma sequência limitada no gráfico a seguir.

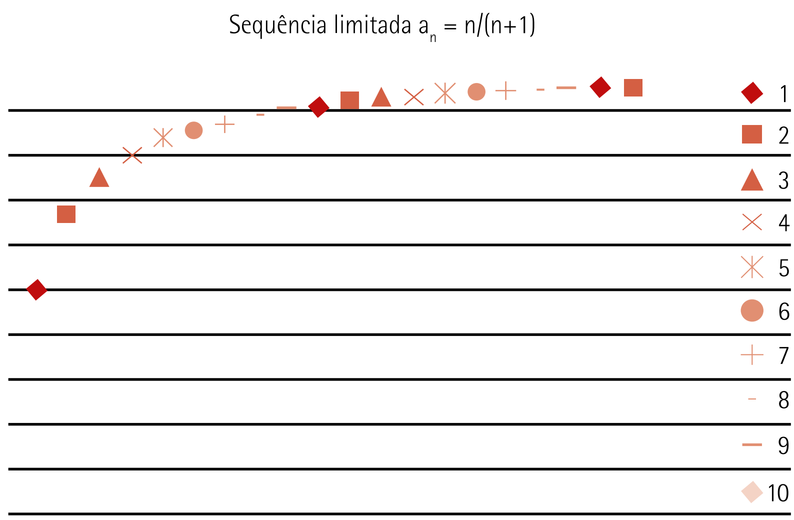

Figura 10 – Gráfico de sequência limitada

Os elementos dessa sequência são

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$$

E o limite é

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)=\left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{1+0}=1$$

Portanto, essa sequência é limitada inferiormente pelo 1/2 e superiormente pelo 1; Logo, é **limitada**.

Observação

Nesse contexto, vale destacar o seguinte teorema: **toda sequência convergente é limitada**.

Porém, **nem toda sequência limitada é convergente**. Um exemplo clássico disso é a sequência $\left\{(-1)^n\right\}$, pois ela é limitada pelo -1 e 1, mas é divergente.

Além disso, **nem toda sequência monótona é convergente**. Por exemplo: a sequência {n} é crescente (monótona), mas divergente.

Por fim, um teorema muito importante conhecido como teorema da convergência monótona afirma que **toda sequência monótona e limitada é convergente**.

Saiba mais

Para saber mais sobre a demonstração desse teorema, consulte a seção "Teorema da convergência monótona" em:

STEWART, J. *Cálculo*: volume 2. São Paulo: Cengage Learning, 2016. p. 635-636.

Exemplos clássicos de sequências numéricas que mostram a veracidade do **teorema da convergência monótona** são:

- $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ é uma sequência limitada e crescente, e portanto convergente, e converge para o número de Euler, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

- $\{\sqrt[n]{n}\}$ é uma sequência limitada e decrescente, e portanto convergente, e converge para 1, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Com o que foi trabalhado até aqui sobre sequências numéricas e limite de sequências numéricas, adquirimos base teórica para compreender as **séries infinitas**. Vale ressaltar que neste livro-texto não são abordadas demonstrações nem teoremas sobre subsequências e outros, pois não é objeto do nosso estudo; mas caso haja o interesse de se aprofundar mais, é proveitoso fazer leituras complementares sobre os assuntos que não foram abordados.

2 SÉRIES NUMÉRICAS INFINITAS

2.1 Introdução

Neste tópico estudaremos muitas definições, regras e critérios de convergência sobre as **séries infinitas**. Para isso, é importante que saibamos em que casos são aplicadas tais séries, certo?

Vamos iniciar esse tópico refletindo sobre algumas curiosidades a respeito das séries infinitas aplicadas na computação.

Vocês já devem ter estudado o que é ponto flutuante. Em um computador, um número real é normalmente representado na notação de ponto flutuante, mas essa notação envolve restrição e limitação de dígitos e, portanto, os resultados de vários cálculos realizados pelos computadores apresentam erros, pois são aproximações dos valores reais. Para minimizar a propagação desses erros, podemos usar as séries infinitas.

No caso das funções, podemos calcular uma aproximação para as funções cos(x), sen(x) e exp(x) por meio dos n primeiros termos de uma série de potências (que serão estudadas mais adiante), e essa estratégia torna os cálculos realizados pelos computadores mais fáceis e certeiros, pois é mais fácil trabalhar computacional e algebricamente com polinômios do que com a função propriamente dita.

Saiba mais

Para saber mais sobre algumas curiosidades das séries infinitas aplicadas na computação, leia o seguinte artigo:

GUILLERA, J. Dia do Pi: os algoritmos permitem obter novas cifras do π. *El País Brasil*, São Paulo, 14 mar. 2018. Disponível em: https://cutt.ly/J9ldGze. Acesso em: 24 jan. 2023.

Depois de refletir sobre algumas curiosidades, vamos definir o que são séries infinitas e quais são os seus critérios de convergência:

Sabemos somar um número finito de termos, certo? Por exemplo: 1 + 2; 1 + 2 + 3; 2 + 3 + 4 + 5 etc.

Mas o que significa somar um número infinito de termos? Será que faz sentido somar com uma infinidade de parcelas?

Um processo infinito que intrigou os matemáticos por séculos foi a soma de séries infinitas. Algumas vezes, uma soma infinita de termos resultava em um número, como em:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

$$0{,}1+0{,}01+0{,}001+0{,}0001+\cdots=0{,}11111\ldots$$

$$3+\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\cdots=\pi$$

Entretanto, algumas vezes a soma infinita era, de fato, infinita, como em:

$$1+2+3+4+5+6+\cdots=\infty$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\infty$$

E outros casos, dependendo da forma como os números eram agrupados, resultavam em valores diferentes, como a famosa **série de Grandi**:

$$S=1-1+1-1+1-1+\ldots$$

Podemos agrupar essa série de três maneiras distintas:

- $S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0$
- $S=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots=1$
- $S=1-(1-1+1-1+1-\ldots)=1-S\Rightarrow 2S=1\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}$

Como decidir qual é a verdadeira soma? É 0? É 1? É 1/2?

Como podemos observar pelos exemplos anteriores, uma soma finita de números reais sempre produz um número real, mas uma soma infinita de números reais é algo completamente diferente. Por isso, precisamos de uma definição cuidadosa de somas infinitas.

Para entender o conceito, definiremos somas infinitas através do limite de uma sequência numérica muito especial. Em vez de "soma infinita", usaremos o termo "série infinita".

O principal problema da teoria das séries infinitas é determinar **quais são convergentes e quais são divergentes**. Esse será nosso principal objetivo!

2.1.1 Somas parciais

Vamos inicialmente compreender o que são somas parciais. Veja um exemplo:

- Dada a sequência numérica $\{a_n = n\}$ cujos elementos são $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, vamos construir a partir dessa sequência uma outra sequência $\{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$ da seguinte forma:

$S_1 = a_1 = 1$

$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, e assim por diante temos as somas parciais.

Veja outro exemplo:

- Dada a sequência numérica $\{a_n = n + 2\}$ cujos elementos são $\{3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$, vamos construir a partir dessa sequência uma outra sequência $\{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$, da seguinte forma:

$S_1 = a_1 = 3$

$S_2 = a_1 + a_2 = 3 + 4 = 7$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3 + 4 + 5 = 12$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

Assim por diante, temos as somas parciais.

A partir dessas somas parciais, construímos uma nova sequência $\{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$ e designamos essa sequência $\{S_n\}$ pela notação $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ chamada série infinita. Observe que todas as somas parciais são somas finitas de números reais e, portanto, é possível operar de maneira usual (PANONCELI, 2017).

2.2 Definição

Seja $\{a_n\}$ uma sequência numérica infinita. Partindo dessa sequência, podemos formar uma nova sequência infinita de somas parciais $\{S_n\}$, como segue:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$
$$\vdots$$

A sequência construída $\{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots\}$ é uma sequência em que cada elemento são somas parciais. Designamos essa sequência $\{S_n\}$ pela notação $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, chamada **série infinita**.

Observação

A notação que será utilizada neste livro-texto para séries infinitas será $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + \cdots$

Observe que:

- $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ são chamados termos da série.
- A notação acima é simbólica; a operação de adição só tem sentido para um número finito de termos.
- A série é uma soma infinita.

Como as séries infinitas são obtidas por sequências de somas parciais, o nosso objetivo é saber se essas séries convergem ou divergem.

2.3 Séries numéricas convergentes e divergentes

De acordo com Ayres (2013), se a sequência de somas parciais convergir para um limite L, ou seja, se $\lim_{n\to\infty} S_n = L$, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + \cdots$ **converge** e que a soma é L.

Nesse caso, escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + \cdots = L$.

Se o valor L não existir, dizemos que a série **diverge**.

Além disso, se $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, então a série diverge para $+\infty$ e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + \cdots = +\infty.$$

Analogamente, se $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$, então a série diverge para $-\infty$ e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + \cdots = -\infty.$$

Veja alguns exemplos para compreensão da definição de séries infinitas.

Exemplo 1

Ache os quatro primeiros termos das somas parciais da série a seguir. Essa série converge ou diverge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{30}{60} + \frac{10}{60} + \frac{5}{60} + \frac{3}{60} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$$

Os quatro primeiros termos das somas parciais são $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right\}$.

Percebe-se que existe um padrão! As somas parciais formam uma sequência infinita cujo enésimo termo é: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$.

Como $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n)'}{(n+1)'} = 1$ pela regra de L'Hôpital, então concluímos que a série infinita **converge** e sua soma é 1, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Exemplo 2

Ache os quatro primeiros termos das somas parciais da série a seguir. Essa série converge ou diverge?

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

$$S_1 = a_1 = 1 \quad \boxed{2-1}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{2}{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \boxed{2-\frac{1}{2}}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{4}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4} = \frac{7}{4} \quad \boxed{2-\frac{1}{4}}$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{8}{8}+\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8} = \frac{15}{8} \quad \boxed{2-\frac{1}{8}}$$

Os quatro primeiros termos das somas parciais são $\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}\right\}$.

Percebe-se que existe um padrão! As somas parciais formam uma sequência infinita cujo enésimo termo é: $\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \cdots, 2-\frac{1}{2^{n-1}}, \cdots\right\}$.

Como $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2$, então concluímos que a série infinita **converge** e sua soma é 2, ou seja, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots = 2$.

Exemplo 3

Ache os quatro primeiros termos das somas parciais da série a seguir. Essa série converge ou diverge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^n}$$

$$S_1 = a_1 = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2 = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} = \frac{55}{100} = 0,55$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3 = \frac{55}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{555}{1000} = 0,555$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_3 + a_4 = \frac{555}{1000} + \frac{5}{10000} = \frac{5555}{10000} = 0,5555$$

Os quatro primeiros termos das somas parciais são $\{0.5, 0.55, 0.555, 0.5555\}$.

Percebe-se que existe um padrão! A soma parcial forma uma sequência cujo enésimo termo é:

$$0,5; 0,55; 0,555; 0,5555; \cdots = 0,\bar{5} = \frac{1}{5} \cdot$$

Observe que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{10^n} = \frac{1}{5}$$

Neste caso, concluímos que a soma da série infinita é 1/5. Portanto, a série é **convergente**!

Percebemos nos três exemplos prévios que para algumas séries infinitas é fácil obter o enésimo termo da sequência de somas parciais, e, consequentemente, saber se a série infinita converge ou diverge baseado na teoria do limite das sequências infinitas que estudamos no tópico 1.

Lembrete

As sequências infinitas podem ser pensadas como uma lista de números escritos em uma ordem definida: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_n, \ldots\}$, em que:

- $\mathbf{a_1}$ é o primeiro termo da sequência.
- $\mathbf{a_2}$ é o segundo termo da sequência.
- $\mathbf{a_n}$ é o enésimo termo da sequência.

Mas geralmente não é fácil encontrar tal expressão. A pergunta que surge é: como saber se uma série infinita converge ou diverge se não temos o termo geral da sequência de somas parciais? Essa será a nossa próxima meta: conhecer, além de algumas séries clássicas cujos termos gerais conseguimos determinar (série geométrica, telescópica e série harmônica), e dominar os critérios de convergência de uma série infinita. Vamos lá?

2.4 Série geométrica

A série geométrica é definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = a + a.r + a.r^2 + ... + ar^{n-1} + ... \quad \text{onde } a, r \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Observação

r é a razão da série geométrica e segue as seguintes condições:

- Se $|r| < 1$, a série geométrica **converge** e sua soma é $S = \frac{a}{1-r}$.
- Se $|r| \geq 1$, a série geométrica **diverge**.

Saiba mais

Para saber mais sobre as séries geométricas, leia o tópico "Séries geométricas" do livro indicado a seguir:

THOMAS, G. B. *et al. Cálculo*: volume 2. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. p. 15.

Conheça alguns exemplos de aplicação das séries geométricas a seguir

Exemplo de aplicação

Prove que as séries a seguir são convergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^n} = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \cdots + \frac{5}{10^n} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{10^n}=\frac{5}{10}+\frac{5}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{5}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{5}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3\cdots+\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{10^{n-1}}+\cdots$$

Comparando a série anterior com a fórmula geral, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}a.r^{n-1}=a+a.r+a.r^2+...+ar^{n-1}+...$$

Podemos observar que é uma série geométrica em que $a=\frac{5}{10}$ e $r=\frac{1}{10}$.

Como a razão é $r=\frac{1}{10}<1$, então a série geométrica **converge** e sua soma é

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{5}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{5}{9}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=4+4\left(\frac{1}{3}\right)+4\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots$$

Comparando a série anterior com a fórmula geral, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}a.r^{n-1}=a+a.r+a.r^2+...+ar^{n-1}+...$$

Podemos observar que é uma série geométrica em que $a=4$ e $r=\frac{1}{3}$.

Como a razão é $r=\frac{1}{3}<1$, então a série geométrica **converge** e sua soma é

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{4}{1-\frac{1}{3}}=\frac{4}{\frac{2}{3}}=4\cdot\frac{3}{2}=6$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n=\frac{\pi}{3}+\left(\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(\frac{\pi}{3}\right)^3+\left(\frac{\pi}{3}\right)^4+\cdots+\left(\frac{\pi}{3}\right)^n+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^3+\cdots+\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^{n-1}+\cdots$$

Comparando a série anterior com a fórmula geral, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}a.r^{n-1}=a+a.r+a.r^2+...+ar^{n-1}+...$$

Podemos observar que é uma série geométrica em que $a=\frac{\pi}{3}$ e $r=\frac{\pi}{3}$.

Como a razão é $r=\frac{\pi}{3}>1$, então a série geométrica **diverge**.

2.5 Série telescópica

Ao estudar as séries geométricas convergentes, conseguimos determinar sua soma por meio de sua fórmula geral. Outro caso em que isso é possível são nas séries telescópicas. O nome deriva do fato de os cancelamentos que são feitos na soma reduzirem a série em apenas dois termos, ou seja, a soma se retrai como um telescópio (STEWART, 2016).

Para compreender esse tipo de série infinita, vamos desenvolver dois exemplos passo a passo. Veja:

Exemplo 1

Encontre a soma da série a seguir, conhecida como série telescópica, usando como ferramenta a decomposição em frações parciais.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{An+A+Bn}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A+n(A+B)}{n(n+1)}$$

Comparando o lado esquerdo com o lado direito, temos:

$$\begin{cases}A=1\\A+B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$$

Portanto, conseguimos decompor a série infinita como:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\text{, ou seja}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

A decomposição anterior em frações parciais nos permite escrever a soma parcial como:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

A remoção dos parênteses e o cancelamento dos termos de sinais opostos reduzem a soma para:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Observe que:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Neste caso, concluímos que a soma da série infinita é 1. Portanto, a série é **convergente**.

Exemplo 2

Encontre a soma da série a seguir, conhecida como série telescópica, usando como ferramenta a decomposição em frações parciais.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{A}{(4n-3)}+\frac{B}{(4n+1)}$$

$$\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{A(4n+1)+B(4n-3)}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{4An+A+4Bn-3B}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n(4A+4B)+(A-3B)}{(4n-3)(4n+1)}$$

Comparando o lado esquerdo com o lado direito, temos:

$$\begin{cases}4A+4B=0\\ A-3B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\ A-3B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-B\\ -B-3B=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=-B\\ -B-3B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-B\\ -4B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ B=-1\end{cases}$$

Portanto, conseguimos decompor a série infinita como:

$$\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{(4n-3)}+\frac{-1}{(4n+1)}$$, ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)}-\frac{1}{(4n+1)}$$

A decomposição anterior em frações parciais nos permite escrever a soma parcial como:

$$S_k=\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)\cdots+\left(\frac{1}{(4k-3)}-\frac{1}{(4k+1)}\right)$$

A remoção dos parênteses e o cancelamento dos termos de sinais opostos reduzem a soma para:

$$S_k = 1 - \frac{1}{(4k+1)}$$

Observe que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right) = 1$$

Neste caso, concluímos que a soma da série infinita é 1. Portanto, a série é **convergente**!

Saiba mais

Para saber mais sobre decomposição em frações parciais, assista:

EXPANSÃO em frações parciais 1. 2014. 1 vídeo (11:30). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/a9nCi6y. Acesso em: 24 jan. 2023.

2.6 Série harmônica

Outra série clássica, mas que não será demonstrada aqui, é a **série harmônica**.

Observação

A série harmônica é definida como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

e é uma série **divergente**.

Saiba mais

Para saber mais sobre a série harmônica, leia o capítulo 43, "Séries infinitas", do livro de Ayres:

AYRES, F. *Cálculo*. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. p. 362.

Agora que conhecemos algumas séries infinitas clássicas cujas fórmulas gerais são possíveis de obter, vamos estudar os critérios de convergência de uma série. A ideia sempre será, dada uma série infinita, buscar se ela converge ou diverge. Primeiro eliminamos o fato de ser uma série clássica, como a telescópica, a geométrica ou a harmônica, ou ainda se é ou não possível obter uma fórmula geral para o enésimo termo. Caso nenhum desses requisitos sejam satisfeitos, será preciso buscar um critério de convergência, como veremos no tópico a seguir.

3 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA DE UMA SÉRIE NUMÉRICA INFINITA

3.1 Teste do enésimo termo para divergência

Antes de apresentar o teste propriamente dito, segue um teorema importante, mas que não será demonstrado neste livro-texto:

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Saiba mais

Para saber mais sobre esse teorema, leia o tópico 11.2, "Séries", do livro de Stewart:

STEWART, J. *Cálculo*: volume 2. São Paulo: Cengage Learning, 2016. p. 645.

A recíproca desse teorema é falsa, ou seja, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, não podemos afirmar que a série é convergente. Devemos nesse caso recorrer a outro teste, como o da **série harmônica**:

Na série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, temos que o $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, mas a série é divergente.

O teste para saber o enésimo termo para divergência é o seguinte:

Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **divergente**.

Exemplos

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n^2}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(3+n^2\right)'}{\left(n^2\right)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n} = 1$$

Portanto pelo teste do enésimo termo a série é **divergente**.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$

$$\lim_{n\to\infty} n^3 = \lim_{n\to\infty} \infty^3 = \infty$$

Portanto pelo teste do enésimo termo a série é **divergente**.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

O limite do enésimo termo da sequência não existe, pois fica oscilando entre 1 e –1. Portanto pelo teste do enésimo termo a série é **divergente**.

3.2 Propriedades das séries convergentes

As propriedades apresentadas a seguir e que ajudam na decisão da convergência ou não de uma série infinita vêm das propriedades de limites e portanto são possíveis de serem aplicadas. São elas:

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ forem séries convergentes e c uma constante, então também serão convergentes as séries:

- **Propriedade da multiplicação por constante**: $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- **Propriedade da soma**: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
- **Propriedade da diferença**: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Exemplo de aplicação

Calcule a soma das seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^{n-1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^{n-1}} = 5 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots$$

Essa é uma série geométrica em que a = 1 e a razão é 1/3, portanto, **convergente**. Sua soma é

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

Dessa forma, pela propriedade da multiplicação por constante, se a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ converge, então $5\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ também converge e sua soma é $S=5.\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{5}{10^n}\right)$

Pela propriedade da diferença, temos que $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{5}{10^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{10^n}$

Já vimos anteriormente que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ converge e sua soma é 1. Também já vimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{10^n}\right)$ é geométrica convergente e sua soma é $\frac{5}{9}$. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{5}{10^n}\right)$ converge e sua soma é $S=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.

3.2.1 Adicionando e retirando termos

É importante ressaltar que:

- $\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n=c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, onde c é uma constante. Se $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é convergente e sua soma é S, então (divergente), então a série $\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n=c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é convergente e sua soma é $c\cdot S$ (divergente).
- $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Se $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ são convergentes, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ é convergente.
- Se $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ é divergente.

Exemplo de aplicação

Calcule a soma das seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}-3}{8^{n-1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}-3}{8^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{8^{n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{8^{n-1}}=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{8^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^{n-1}}$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots$ é uma série geométrica convergente pois a sua razão é r = 1/2 e o valor de a = 1.

A série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^{n-1}}=1+\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^3+\cdots$ é uma série geométrica convergente pois a sua razão é r = 1/8 e o valor de a = 1.

Como ambas são convergentes dado que r < 1, a subtração entre elas também é convergente e a soma é:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}-3}{8^{n-1}}=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)-3\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{8}}\right)=\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)-3\cdot\left(\frac{1}{\frac{7}{8}}\right)=2-3\cdot\frac{8}{7}=2-\frac{24}{7}=-\frac{10}{7}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

Já vimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ é convergente por decomposição em fração parcial, e converge para 1.

Já vimos também que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ é uma série geométrica convergente com a = 1/2 e r = ½, e converge para 1.

Portanto a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$ também é convergente pelo nosso teorema, e a soma é:

$S=3.1+1=4$

A seguir conheceremos os critérios de convergência para as séries com termos positivos, que são o **teste da integral**, **p-séries**, **teste da comparação** e **teste limite da comparação**. Para cada um deles serão apresentados o teste e exemplos de aplicação.

3.3 Séries com termos positivos

Como comentado anteriormente, não é fácil determinar uma fórmula para a enésima soma parcial.

Conseguimos fazê-lo para algumas séries clássicas, mas sabemos que, na maioria das vezes, isso não é possível. Portanto, apresentaremos alguns testes de convergência que permitirão determinar se uma série converge ou diverge, mas sem encontrar sua soma explicitamente.

3.3.1 Teste da integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1,\infty)$, e seja $a_n = f(n)$. Então:

- Se $\int_1^\infty f(x)dx$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^\infty a_n$ é **convergente**.
- Se $\int_1^\infty f(x)dx$ for divergente, então a série $\sum_{n=1}^\infty a_n$ é **divergente**.

Observação

O teorema fundamental do cálculo destaca que a integral definida de uma função de uma variável é:

$$\int^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

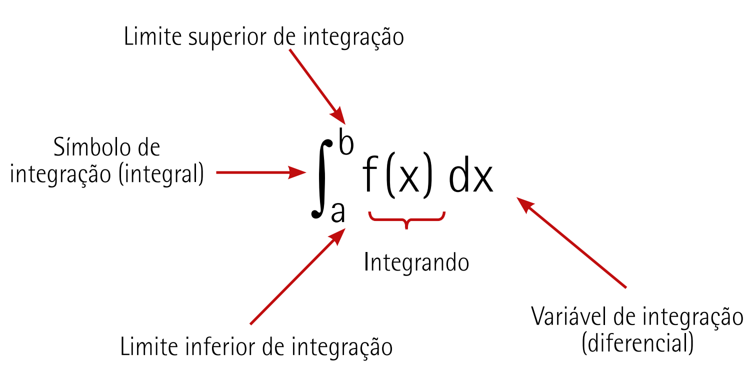

Figura 11 – Integral definida de uma função de uma variável

Saiba mais

A integral que aparece no teste é chamada integral imprópria. Para saber mais sobre ela, assista:

INTRODUÇÃO a integrais impróprias | matemática | Khan Academy. 2018. 1 vídeo (3:56). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/F9n4OmW. Acesso em: 24 jan. 2023.

Exemplo de aplicação

Exemplo 1

Determine se a série de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ diverge ou converge.

Pelo gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x^3}$, temos que é uma função contínua, positiva e decrescente em $[1,\infty)$. Portanto, vamos usar o teste da integral.

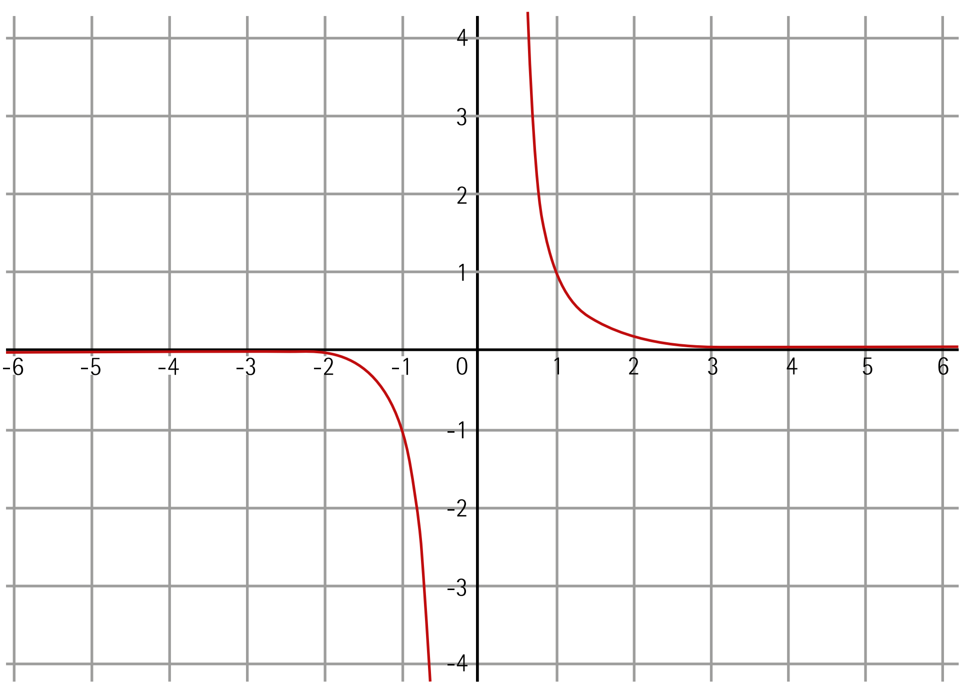

Figura 12 – Gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x^3}$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3}dx=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n}x^{-3}dx$$

Vamos primeiramente resolver a integral definida $\int_1^n x^{-3}dx$ pela regra da potência:

$$\int_1^n x^{-3}dx = \left.\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^n = \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^n = -\left.\frac{1}{2x^2}\right]_1^n = \left(-\frac{1}{2n^2}\right)-\left(-\frac{1}{2.1^2}\right) = -\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2}$$

Calculando o limite, temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n x^{-3}dx = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2.\infty^2}+\frac{1}{2} = 0+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Como a integral imprópria $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ é **convergente**.

Saiba mais

Para saber mais sobre a regra da integral usando potência e integral definida, assista aos seguintes vídeos:

REGRA de potência | matemática | Khan Academy. 2017. 1 vídeo (5:57). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/l3ek9YB. Acesso em: 24 jan. 2023.

INTEGRAIS definidas: regra da potência reversa. 2021. 1 vídeo (5:23). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/n9n6oV2. Acesso em: 24 jan. 2023.

Exemplo 2

Determine se a série de termos positivos $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-2)^2}\right)$ diverge ou converge.

Pelo gráfico da função $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$, temos que é uma função contínua, positiva e decrescente em $[3,\infty)$. Portanto, usaremos o teste da integral.

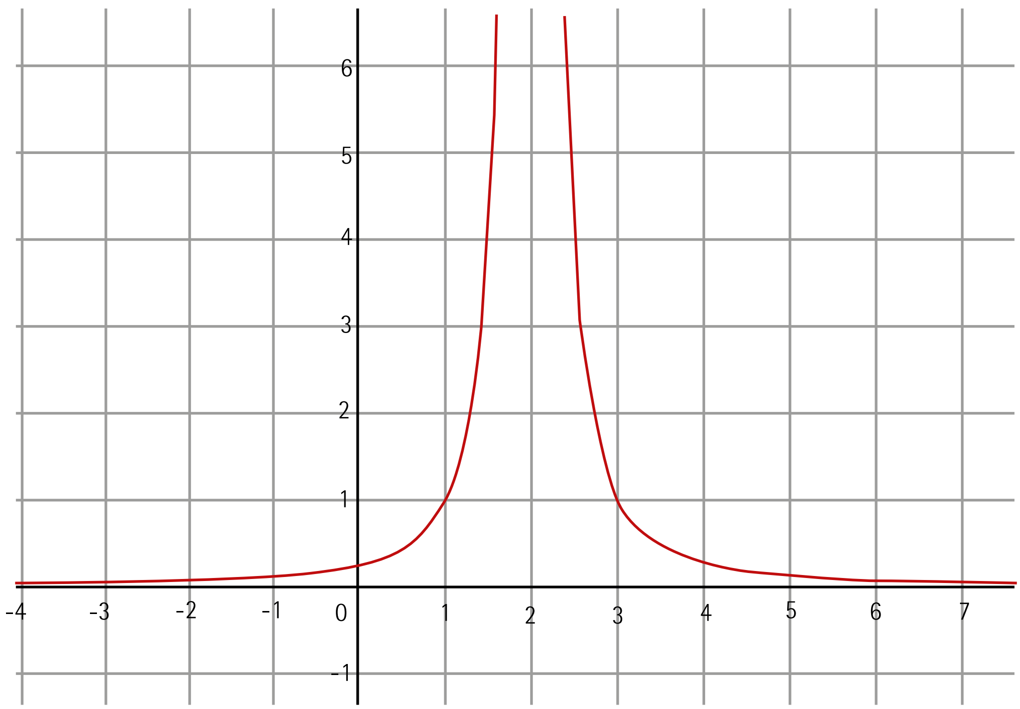

Figura 13 – Gráfico da função $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$

$$\int_3^{\infty}\frac{1}{(x-2)^2}dx=\lim_{n\to\infty}\int_3^{n}\frac{1}{(x-2)^2}dx$$

Vamos primeiramente resolver a integral definida $\int_3^{n}\frac{1}{(x-2)^2}dx$ pela regra da integral por substituição:

Fazendo $u=x-2$, temos $\dfrac{du}{dx}=1\Rightarrow du=dx$. Portanto, temos que:

$$\int_3^{n}\frac{1}{(x-2)^2}dx=\int_3^{n}\frac{1}{(u)^2}du=\int_3^{n}u^{-2}du=\left.\frac{u^{-1}}{-1}\right]_3^n=\left.-\frac{1}{u}\right]_3^n=\left(-\frac{1}{n}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{n}+\frac{1}{3}$$

Calculando o limite, temos

$$\int_3^{\infty}\frac{1}{(x-2)^2}dx=\lim_{n\to\infty}\int_3^{n}\frac{1}{(x-2)^2}dx=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{3}=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Como a integral imprópria $\int_3^{\infty}\frac{1}{(x-2)^2}dx$ é convergente, então a série $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-2)^2}\right)$ é **convergente**.

Saiba mais

Para saber mais sobre a regra da integral por substituição, assista:

INTRODUÇÃO *u*-substitution | matemática | Khan Academy. 2018. 1 vídeo (3:34). Publicado pelo canal Khan Academy Brasil. Disponível em: https://cutt.ly/K9mw1Zv. Acesso em: 24 jan. 2023.

3.3.2 P-séries (ou série hiper-harmônica)

A p-série definida por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$:

- É **convergente** se $p > 1$.
- É **divergente** se $p \leq 1$, sendo p uma constante real.

Exemplo de aplicação

Verifique se as séries a seguir são convergentes ou divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

É **convergente** porque ela é uma p-série com $p = 4 > 1$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

É **divergente** porque ela é uma p-série com $p = 1$. Observe que essa série é a série harmônica.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$

É **divergente** porque ela é uma p-série com $p = 3/4 < 1$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}}$

É **convergente** porque ela é uma p-série com $p = 5/3 > 1$.

3.3.3 Teste da comparação

Como o próprio nome diz, o teste da comparação nada mais é que testar a convergência de outras séries comparando seus termos com uma série já conhecida, por exemplo as p-séries, séries geométricas, telescópicas etc.

Para aplicarmos o teste da comparação, devemos ter à mão uma lista de séries cuja convergência ou divergência são conhecidas. A tabela a seguir agrupa algumas importantes que já conhecemos!

Tabela 3 – Séries conhecidas

Séries convergentes	Séries divergentes
Série geométrica com $\|r\| < 1$	Série geométrica com $\|r\| \geq 1$
Série telescópica do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$	Série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
Série do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$	Qualquer série cujo limite de a_n não existe ou é diferente de zero
Qualquer p-série com p > 1	Qualquer p-série com p ≤ 1

O teste da comparação diz o seguinte:

- Se existir uma série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ que converge e $a_n \leq b_n$ para todo n, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.
- Se existir uma série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ que diverge e $a_n \geq b_n$ para todo n, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também diverge.

Exemplo de aplicação

Verifique se as séries a seguir são convergentes ou divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^3 + 2n^2 + 1}$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é uma série **convergente** pois trata-se de uma constante vezes uma p-série com p = 3 > 1. Portanto, pelo teste da comparação, a série dada também é **convergente**, pois $\frac{1}{3n^3 + 2n^2 + 1} \leq \frac{1}{3n^3}$ para todo n, pois quanto maior o denominador, menor é a fração.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 5}$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ é uma série geométrica com a = 1/3 e a razão r = 1/3 e é portanto **convergente**.

Portanto, pelo teste da comparação, a série dada também é **convergente**, pois $\frac{1}{3^n+5} \leq \frac{1}{3^n}$ para todo n, pois quanto maior o denominador, menor é a fração.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{6n-1}$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é a série harmônica e portanto **divergente**. Portanto, pelo teste da comparação, a série dada também é **divergente**, pois $\frac{6}{6n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{6}} > \frac{1}{n}$ para todo n, pois quanto menor o denominador, maior é a fração.

Lembrete

Lembre-se que a série harmônica estudada anteriormente é a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, e ela é divergente.

3.3.4 Teste limite da comparação

Suponha que as séries infinitas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sejam séries com termos positivos. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, em que c é um número finito e c > 0, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Exemplo de aplicação

Verifique se os itens a) e c) do exemplo anterior são convergentes ou divergentes, mas agora usando o **teste limite de comparação**.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^3+2n^2+1}$

Considere as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^3+2n^2+1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^3}$.

Já vimos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série convergente pois trata-se de uma constante vezes uma p-série com p = 3 > 1. Calculando o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n^3+2n^2+1}}{\frac{1}{3n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n^3+2n^2+1}\cdot\frac{3n^3}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3}{3n^3+2n^2+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^3}{n^3}}{\frac{3n^3}{n^3}+\frac{2n^2}{n^3}+\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}=$$

$$\frac{3}{3+0+0}=1$$

Como c = 1 é um número finito e c > 0, então ambas as séries **convergem** pelo teste limite de comparação.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{6n-1}$

Considere as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{6n-1}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Já vimos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ é uma série divergente pois trata-se da série harmônica. Calculando o limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{6n-1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{6n-1}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{6n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6n}{n}}{\frac{6n}{n}-\frac{1}{n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6}{6-\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}6}{\lim\limits_{n\to\infty}6-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{6}{6-0}=1$$

Como c = 1 é um número finito e c > 0, então ambas as séries **divergem** pelo teste limite de comparação.

Os testes de convergência apresentados até o momento se aplicam para séries de termos positivos, mas como podemos analisar a convergência ou não de uma série infinita se os termos não são todos positivos? Agora estudaremos como lidar com séries que podem ter termos negativos e positivos alternadamente, e também os casos em que os sinais dos termos mudam irregularmente. No caso dos sinais dos termos das séries que mudam alternadamente, o exemplo clássico são as **séries alternadas** e o teste é o de Leibniz. No caso dos sinais dos termos que mudam irregularmente, vamos estudar a **convergência absoluta**, e os testes são da razão e da raiz.

Vamos lá?

4 SÉRIES ALTERNADAS

Uma série cujos termos são alternadamente positivos e negativos é denominada **série alternada**. As séries alternadas em geral se apresentam em uma das seguintes formas equivalentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^{n}a_n + \cdots$$

Exemplos:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2+1} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{3}{10} + \cdots$

4.1 O teste das séries alternadas (teorema de Leibniz)

Para as séries alternadas, um teste muito utilizado para determinar se a série converge ou diverge é o **teste de Leibniz** (ou teste das séries alternadas): se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ com $\{a_n\}$, uma sequência de termos positivos satisfaz as seguintes propriedades para todo n:

- $a_n \geq a_{n+1}$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Então a série alternada é **convergente**.

Exemplo 1 (série harmônica alternada)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots$$

Se a sequência $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ é uma sequência de termos positivos e satisfaz as seguintes propriedades para todo n:

- $a_n \geq a_{n+1}$, pois $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\frac{1}{5}>\cdots$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pois $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Então a série alternada é **convergente**.

Exemplo 2

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n=1-2+3-4+5-\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n+\cdots$$

Se a sequência $\{n\}$ é uma sequência de termos positivos mas não satisfaz as seguintes propriedades para todo n:

- $a_n \geq a_{n+1}$ (falso!), pois $1<2<3<4<5<\cdots$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pois $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$

Então a série alternada é **divergente**.

4.2 Convergência absoluta e condicional

Para o caso das séries de termos positivos e negativos irregulares, é necessário estudarmos o conceito de **convergência absoluta**.

Dada qualquer série (de termos positivos ou negativos ou alternados), podemos considerar a série correspondente $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+\cdots$ cujos termos são os valores absolutos dos termos da série original.

Definindo, uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ é denominada absolutamente convergente se a série de valores absolutos $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ for convergente.

Exemplo 1

Destaca-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n^5} = -1 + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} - \cdots$ é absolutamente convergente porque $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n^5}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ é uma p-série convergente (p = 5).

Exemplo 2 (série harmônica alternada)

Acentua-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$ não é absolutamente convergente porque $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$ é a série harmônica divergente (p-série com p = 1).

Atente ao fato de que o exemplo mostra que é possível uma série ser convergente, porém não absolutamente convergente!

Observação

A convergência absoluta implica convergência: se uma série infinita for absolutamente convergente, então ela é convergente.

Se uma série é convergente, mas não é absolutamente convergente, então ela é chamada de **condicionalmente convergente**. Eis um exemplo clássico:

A série harmônica alternada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$ é condicionalmente convergente, pois converge, mas não é absolutamente convergente.

Estudaremos em seguida dois testes de convergência muito utilizados e importantes: os testes da razão e da raiz.

4.3 Teste da razão e da raiz

4.3.1 Teste da razão para convergência absoluta

Considere uma série infinita com termos positivos ou negativos e suponha que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

Então:

- A série é absolutamente convergente (e portanto convergente) se $L < 1$.
- A série é divergente se $L > 1$ ou for infinito.
- Nada podemos afirmar se $L = 1$. Deve-se aplicar neste caso um outro teste.

Exemplo de aplicação

Verifique se as séries são convergentes ou divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{n^5}{5^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{(-1)^n\cdot\dfrac{n^5}{5^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n^5} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{5^n\cdot 5}\cdot\frac{5^n}{n^5} = \frac{1}{5}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{1}{5} < 1$$

Como $L < 1$, então, pelo teste da razão, a série é absolutamente convergente, e, portanto, **convergente**.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{7^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{7^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{7^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n\cdot 7}{(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n!}{7^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{7}{(n+1)} = 0$$

Como $L < 1$, então pelo teste da razão, a série é absolutamente convergente, e, portanto, **convergente**.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{4^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{4^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot 4}{n^2+2n+1}\cdot\frac{n^2}{4^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{8n}{2n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{2} = 4$$

Como L > 1, então pelo teste da razão a série é **divergente**.

4.3.2 Teste da raiz para convergência absoluta

Considere uma série infinita com termos positivos ou negativos e suponha que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| = L$$

Então:

- A série é absolutamente convergente (e, portanto, convergente) se L < 1.
- A série é divergente se L > 1 ou for infinito.
- Nada podemos afirmar se L = 1. Deve-se aplicar neste caso um outro teste.

Exemplo de aplicação

Verifique se as séries são convergentes ou divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Como L < 1, então pelo teste da raiz a série é absolutamente convergente, e, portanto, **convergente**.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+5}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

Como $L < 1$, então pelo teste da raiz a série é absolutamente convergente, e, portanto, **convergente**.

Observação

Existem várias maneiras de testar a convergência ou divergência de uma série. Mas como decidir qual utilizar? Não há regras certeiras e rápidas, mas sim algumas dicas que podem ajudar!

- Se a série for uma p-série, sabemos que ela converge se $p > 1$ e que diverge se $p \leq 1$.
- Se a série tiver as formas $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n}$, ela é uma série geométrica que converge se $|r| < 1$ ou $|r| \geq 1$. Algumas manipulações algébricas podem ser necessárias para deixar a série dessa forma.
- Se a série tiver uma forma similar a uma p-série ou a uma série geométrica, então o teste da comparação deve ser considerado. Se a série for uma função racional ou uma função que envolve raiz, a série deve ser comparada com uma p-série.
- O teste de comparação se aplica para séries de termos positivos, mas se tiver alguns termos negativos, então pode-se aplicar o teste da comparação para testar a convergência absoluta.
- Se testar o limite do enésimo termo e for diferente de 0, o teste da divergência deve ser utilizado.
- Se a série for das formas $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$, então o teste da série alternada é uma possibilidade óbvia.
- Séries que envolvem fatoriais ou outros produtos (incluindo uma constante elevada à enésima potência) são com frequência testadas convenientemente usando-se o teste da razão.
- Se a_n for da forma $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)^n$, então o teste da raiz é uma possibilidade.

A figura a seguir mostra alguns dos testes de convergência estudados resumidos em um esquema prático.

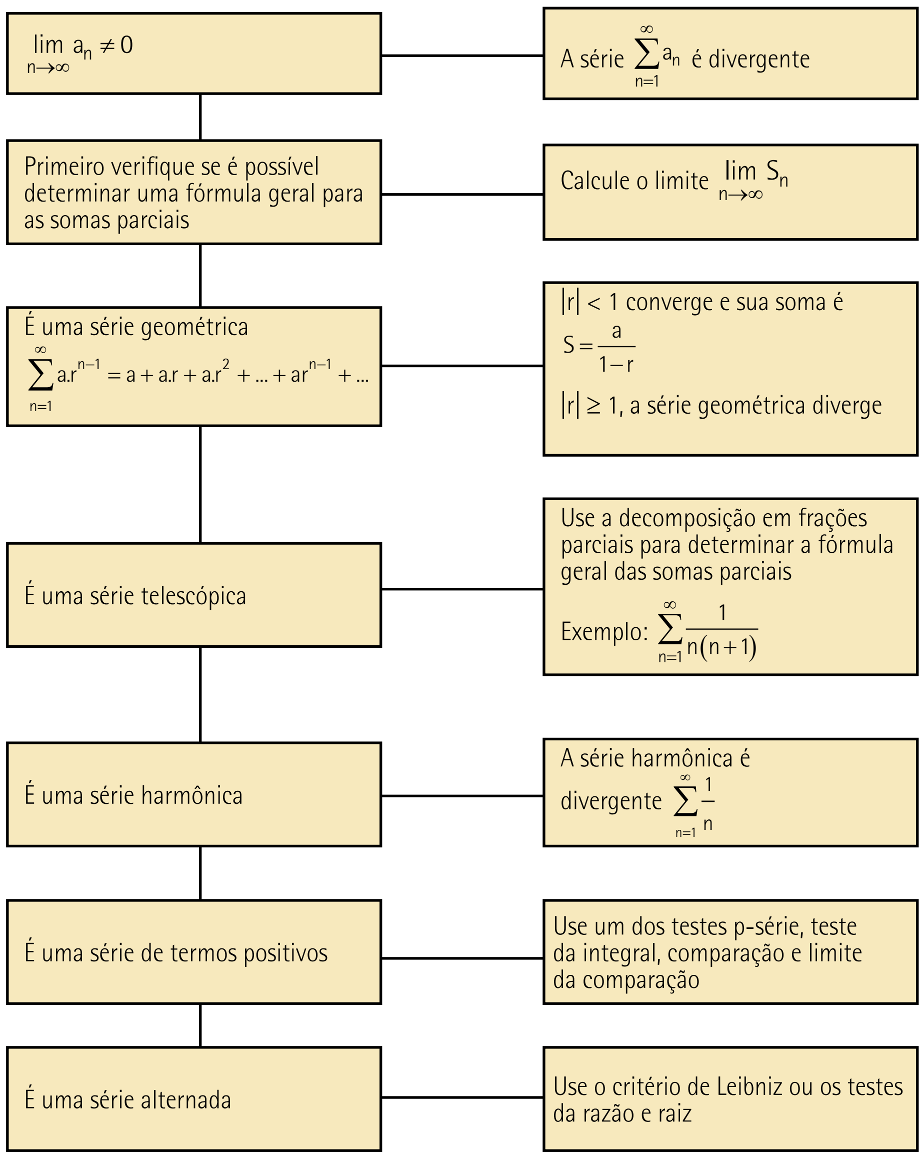

Figura 14 – Esquema prático dos testes de convergência estudados

Adaptada de: Thomas *et al.* (2012, p. 50).

Resumo

Nesta unidade, estudamos as sequências e séries infinitas. Para as sequências infinitas, vimos sua definição, propriedades, limite de sequências numéricas, alguns limites fundamentais e exemplos. Abordamos também os conceitos de sequências limitadas, crescentes, decrescentes e por fim as sequências divergentes e convergentes.

Seguimos nosso estudo com as séries infinitas, conhecendo o conceito de somas parciais e então vários critérios de convergência das séries de termos positivos (as p-séries, teste da integral, teste da comparação e limite de comparação) e das séries alternadas (critério de Leibniz, teste da razão e da raiz). Essas são importantes ferramentas que auxiliam na resolução de diversos problemas.

Exercícios

Questão 1. Uma sequência infinita de números reais pode ser definida como uma função a: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada número natural n, associa um número real $a(n) = a_n$. O número n é o índice da sequência, e a_n é o enésimo termo, ou termo geral, da sequência.

Com base no exposto, avalie as afirmativas a seguir:

I – A sequência do dobro dos quadrados perfeitos é {1, 4, 9, 16, 25, 36, ...}.

II – A sequência $\{a_n\} = \{2(n+1)$, em que n é um número natural tal que $5 < n \leq 8\}$ é {12, 14, 16, 18}.

III – O terceiro termo da sequência $\{a_n\} = \{5\,n^2 - 55\}$ é -10.

É correto o que se afirma em

A) I, apenas.

B) II, apenas.

C) III, apenas.

D) I e III, apenas.

E) I, II e III.

Resposta correta: alternativa C.

Análise das afirmativas

I – Afirmativa incorreta.

Justificativa: a sequência do dos quadrados perfeitos é {1, 4, 9, 16, 25, 36, ...}. Já a sequência do dobro dos quadrados perfeitos é {2, 8, 18, 32, 50, 72, ...}.

II – Afirmativa incorreta.

Justificativa: a sequência $\{a_n\} = \{2(n+1)$, em que n é um número natural tal que $5<n\leq 8\}$ é {14, 16, 18}. Ou seja, essa sequência é finita e tem 3 termos, correspondentes a n=6, n=7 e n=8.

III – Afirmativa correta.

Justificativa: o terceiro termo da sequência $\{a_n\} = \{5n^2\text{-}55\}$ é $a_3 = 5.9\text{-}55 = \text{-}10$.

Questão 2. Uma sequência $\{a_n\}$, de termo geral $a(n) = a_n$, com $a: \mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$, tem limite L dado por $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ se pudermos fazer a_n tão perto de L quanto queiramos ao termo n suficientemente grande. Se esse limite existir, dizemos que a sequência é convergente.

Com base no exposto, avalie as asserções e a relação proposta entre elas.

I – A sequência $\{a_n\} = \left\{\dfrac{7n^3 - 9n + 23}{n^3 + 2n^2}\right\}$, sendo n um número natural, é convergente.

porque

II – O limite da sequência $\{a_n\} = \left\{\dfrac{7n^3 - 9n + 23}{n^3 + 2n^2}\right\}$ quando n tende a ∞ existe.

Assinale a alternativa correta.

A) As asserções I e II são verdadeiras, e a asserção II justifica a I.

B) As asserções I e II são verdadeiras, e a asserção II não justifica a I.

C) A asserção I é verdadeira, e a asserção II é falsa.

D) A asserção I é falsa, e a asserção II é verdadeira.

E) As asserções I e II são falsas.

Resposta correta: alternativa A.

Análise da questão

Comecemos calculando o limite da sequência $\{a_n\} = \left\{\dfrac{7n^3 - 9n + 23}{n^3 + 2n^2}\right\}$ quando n tende a ∞. Vale destacar que, aqui, entendemos ∞ como $+\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^3 - 9n + 23}{n^3 + 2n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{7n^3}{n^3} - \dfrac{9n}{n^3} + \dfrac{23}{n^3}}{\dfrac{n^3}{n^3} + \dfrac{2n^2}{n^3}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7 - \dfrac{9}{n^2} + \dfrac{23}{n^3}}{1 + \dfrac{2}{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 7 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{9}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{23}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}} \right) = \left(\frac{7 - 9\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + 23\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{1 + 2\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \right) = \left(\frac{7 - 9.0 + 23.0}{1 + 2.0} \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\frac{7 - 0 + 0}{1 + 0} \right) = \frac{7}{1} = 7$$

Vemos que o limite da sequência $\{a_n\} = \left\{ \frac{7n^3 - 9n + 23}{n^3 + 2n^2} \right\}$ quando n tende a ∞ existe e vale 7. Por isso, esta sequência é **convergente**.