AULA 1

Representando números e calculando erros

Olá! Iniciaremos aqui os nossos estudos sobre o Cálculo Numérico. Nesta primeira aula, apresentamos uma breve visão sobre a disciplina, destacando, de modo geral, os conteúdos que serão abordados e procurando mostrar a importância dessa ferramenta para a resolução de diversos problemas que surgem, principalmente das ciências exatas e engenharias.

Nesta aula, trataremos ainda das formas de representação dos números em sistemas de numeração, enfatizando a representação em ponto flutuante, comumente adotada em sistemas digitais como calculadoras e computadores. Apresentaremos também noções de erro e de aproximação numérica, fundamentais para o trabalho com as técnicas do cálculo numérico.

Objetivos

- Formular uma visão geral do cálculo numérico
- Estabelecer, em linhas gerais, os conteúdos que serão abordados na disciplina
- Estudar noções de erro e de aproximação numérica
- Conhecer formas de representação numérica

TÓPICO 1

Cálculo numérico: Por que e para quê?

Objetivos

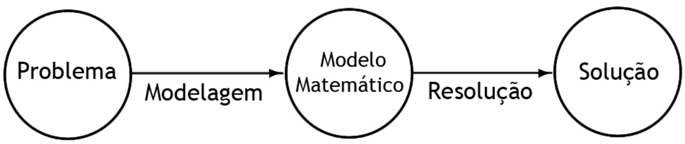
- Reconhecer a importância do cálculo numérico
- Conhecer princípios básicos usados em cálculo numérico
- Reconhecer problemas que podem ser resolvidos por cálculo numérico
- Estabelecer fases para a resolução de problemas reais

Neste tópico, estabelecemos as bases gerais para o nosso trabalho na disciplina, apontando os conteúdos que serão trabalhados. Com isso, estaremos realçando a importância do cálculo numérico e a sua utilidade como ferramenta para a resolução de problemas reais oriundos da própria Matemática, de outras ciências exatas e das engenharias.

Grande parte dos problemas matemáticos surge da necessidade de solucionar problemas da natureza, sendo que é possível descrever muitos fenômenos naturais por meio de modelos matemáticos (HUMES *et. al,* 1984). De acordo com Ohse (2005, p. 1):

> Desde que o homem começou a observar os fenômenos naturais e verificar que os mesmos seguiam princípios constantes, ele observou que estes fenômenos podiam ser colocados por meio de "fórmulas". Este princípio levou a utilização da matemática como uma ferramenta para auxiliar estas observações. Este é o princípio da matemática como um modelo, ou seja, modelar matematicamente o mundo em que vivemos e suas leis naturais.

A figura 1 apresenta, de forma sucinta, as etapas para solucionar um problema da natureza.



Fonte: Humes et. al (1984, p. 1)

Figura 1: Etapas para solucionar um problema da natureza.

O esquema da figura 1 mostra duas etapas fundamentais para a solução de um problema:

1. Modelagem do problema: etapa inicial que consiste na representação do problema por um modelo matemático conveniente. Em geral, o modelo é obtido a partir de teorias das área específicas que originaram o problema e, com vistas a tornar o modelo um problema matemático resolvível, podem conter simplificações do problema real. Dependendo da abordagem dada ao problema, é mesmo possível obtermos modelos matemáticos diferentes.
2. Resolução do modelo: etapa em que buscamos encontrar uma solução para o modelo matemático obtido na fase de modelagem. É nesta fase que necessitamos de métodos numéricos específicos para resolver o modelo correspondente.

A ideia de modelo matemático tem sido discutida por vários autores. Uma boa definição para a expressão modelo matemático é a de Biembengut e Hein (2000, p. 12), segundo a qual "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduz, de alguma forma, um fenômeno em questão ou um problema de situação real, é denominado de modelo matemático".

Os métodos utilizados na resolução dos modelos matemáticos de problemas, nos vários ramos das engenharias ou ciências aplicadas, baseiam-se, atualmente, em uma de duas categorias: *métodos analíticos* e *métodos numéricos* .

ATENÇÃO!

Entendemos por método analítico aquele que, a menos de erros de arredondamentos, fornece as soluções exatas do problema real. Em geral, tais soluções são obtidas a partir de fórmulas explícitas. Por outro lado, um método numérico é constituído por uma sequência finita de operações aritméticas que, sob certas condições, levam a uma solução ou a uma aproximação de uma solução do problema.

Sempre que possível, e em especial quando desejamos exatidão na solução do problema, é preferível a utilização dos métodos analíticos na resolução dos modelos matemáticos. Tais métodos têm a vantagem de fornecer informações gerais em vez de particularizadas, além de uma maior informação quanto à natureza e à dependência das funções envolvidas no modelo.

No entanto, a resolução de modelos matemáticos obtidos na modelagem de problemas reais de diversas áreas é muitas vezes complexa e envolve fenômenos não-lineares, podendo tornar impossível a descoberta de uma solução analítica para o problema dado. Nestes casos, e/ou quando for possível aceitar soluções aproximadas para os problemas reais, os métodos numéricos são ferramentas importantes para sua solução.

Para compreender melhor e diferenciar os métodos analíticos dos métodos numéricos, vejamos agora dois exemplos simples característicos.

GUARDE BEM ISSO!

Em um método numérico, uma solução aproximada é, em geral, obtida de forma construtiva: partindo de aproximações iniciais, vão sendo construídas novas aproximações até que uma aproximação considerada "boa" seja obtida. Desse modo, um método numérico pode ser escrito em forma de algoritmo com as operações (ou grupos de operações), podendo ser executadas repetidamente.

Exemplo 1:

Um método analítico para determinar (quando existem) os zeros reais de uma função quadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$

é dado pela fórmula de Bhaskara, a saber:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Desse modo, os zeros reais de $f(x) = x^2 - 5x + 6$ são

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} = 2 \text{ e } x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} = 3$$

Exemplo 2:

Um método numérico para determinar uma aproximação para a raiz quadrada de um número real p, maior que 1, é o algoritmo de Eudoxo:

VOCÊ SABIA?

Eudoxo de Cnidos astrônomo, matemático e filósofo grego que viveu de 408 a.C a 355 a.C. Cnidos, onde nasceu, corresponde hoje à Turquia.

Do fato que $p > 1$, temos que $1 < \sqrt{p} < p$.

Escolhe-se, como uma primeira aproximação para $\sqrt{p}$, $x_0 = (1 + p)/2$, ou seja, a média aritmética entre 1 e p. Pode-se mostrar que $p/x_0 < \sqrt{p} < x_0$.

Escolhe-se como uma nova aproximação $x_1 = (p/x_0 + x_0)/2$, isto é, a média aritmética entre p/x_0 e x_0. Novamente, pode-se mostrar que $p/x_1 < \sqrt{p} < x_1$.

Continuando desse modo, podemos construir uma sequência de aproximações dada por:

$$x_n = \begin{cases} (1+p)/2 & \text{se} \quad n=0 \\ (\dfrac{p}{x_{n-1}} + x_{n-1})/2 & \text{se} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

A tabela 1 fornece os valores de algumas aproximações para $\sqrt{2}$ obtidas pelo algoritmo de Eudoxo. Para que se possa avaliar a precisão das aproximações, são fornecidos também os quadrados dessas aproximações. Trabalhando com 14 dígitos depois do ponto decimal, é possível observar que, na quinta aproximação, x_4 temos, x_4=2,00000000000000

Algoritmo de Eudoxo para $\sqrt{2}$		
n	x_n	x_n^2
0	1,50000000000000	2,25000000000000
1	1,41666666666667	2,00694444444444
2	1,41421568627451	2,00000600730488
3	1,41421356237469	2,00000000000451
4	1,41421356237310	2,00000000000000

Tabela 1: Algoritmo de Eudoxo para $\sqrt{2}$. Fonte: de Freitas (2000, p. 11).

Grosso modo, o cálculo numérico tem por objetivo estudar *técnicas numéricas* ou *métodos numéricos* para obter soluções de problemas reais que possam ser representados por *modelos matemáticos*, ou seja, o cálculo numérico busca produzir respostas numéricas para problemas matemáticos.

Torna-se evidente que o cálculo numérico é uma disciplina fundamental para a formação de profissionais das áreas de ciências exatas e engenharias, pois possibilita que os alunos conheçam várias técnicas para a solução de determinadas classes de problemas, saibam escolher entre estes métodos os mais adequados

SAIBA MAIS!

Para saber mais sobre o algoritmo de Eudoxo, consulte o artigo publicado na Revista do Professor de Matemática 45 intitulado *Raiz Quadrada Utilizando Médias* (CARNEIRO, 2001). Nele você encontrará as justificativas para o funcionamento deste formidável método, bem como conhecerá um procedimento generalizado para o cálculo aproximado de raízes quadradas de números reais maiores que 1 usando médias. Encontrará ainda uma discussão sobre a precisão do processo, calculando-se o erro cometido nas aproximações.

a um problema específico e aplicá-los de modo a obter soluções de seus problemas. Desse modo, o cálculo numérico estabelece uma ligação entre a Matemática e os problemas práticos de áreas específicas.

Antes de tudo, devemos deixar claro que este é apenas um curso introdutório de cálculo numérico. Nele, esperamos que você, caro (a) aluno (a), adquira habilidades para:

- Compreender como os números são representados nas calculadoras e computadores e como são realizadas as operações numéricas nestes sistemas digitais.
- Entender o que são *métodos numéricos* de aproximação, como e por que utilizá-los, e quando é esperado que eles funcionem.
- Identificar problemas que requerem o uso de técnicas numéricas para a obtenção de sua solução.
- Conhecer e aplicar os principais métodos numéricos para a solução de certos problemas clássicos, por exemplo, obter zeros reais de funções reais, resolver sistemas de equações lineares, fazer interpolação polinomial, ajustar curvas e fazer integração numérica.
- Estimar e analisar os erros obtidos devido à aplicação de métodos numéricos e propor soluções para minimizá-los ou mesmo, quando possível, eliminá-los.

VOCÊ SABIA?

Os métodos numéricos desenvolvidos e estudados no cálculo numérico servem, em geral, para a aproximação da solução de problemas complexos que normalmente não são resolúveis por técnicas analíticas.

A aplicação das técnicas desenvolvidas no cálculo numérico para a resolução de problemas envolve, normalmente, um grande volume de cálculos (ou seja, o esforço computacional é alto), tornando imprescindível o trabalho de forma integrada com calculadoras, preferencialmente, científicas, gráficas ou programáveis ou com ambientes computacionais programáveis, os quais normalmente dispõem de ferramentas algébricas, numéricas e gráficas, facilitando e possibilitando o trabalho.

Com o desenvolvimento de rápidos e eficientes computadores digitais e de avançados ambientes de programação, a importância dos métodos numéricos tem aumentado significativamente na resolução de problemas.

Neste tópico, esperamos ter deixado claro para você, caro aluno, o papel e a importância do cálculo numérico como ferramenta para a resolução de problemas reais em diversas áreas e, especialmente, nas ciências exatas e engenharias. No próximo tópico, faremos um breve estudo sobre erros. Uma vez que os métodos numéricos fornecem soluções aproximadas para os problemas, tal análise se torna essencial.