EAD

EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UNIDADE I

Cálculo Numérico Computacional

Prof. Me. João Giardulli

Erro

- Modelagem Matemática
- Representação dos Números
- Aritmética de ponto flutuante
- Definição de erro

Erro – Modelagem Matemática

O que é:

- Abordagem que usa a matemática para descrever, analisar e entender fenômenos da natureza que acontecem no mundo no nosso dia a dia.

Etapas:

- Identificação do problema;
- Seleção das variáveis relevantes;
- Formulação de um modelo matemático que relacione essas variáveis;
- Solução do modelo matemático;
- Interpretação dos resultados em termos do problema original.

Erro – Representação dos Números

O que é:

- Representar um número é criar um signo (sinal, numeral) para a ideia de quantidade (número). Para isso usam-se os algarismos.

Erro – Representação dos Números

<u>O que é</u>:

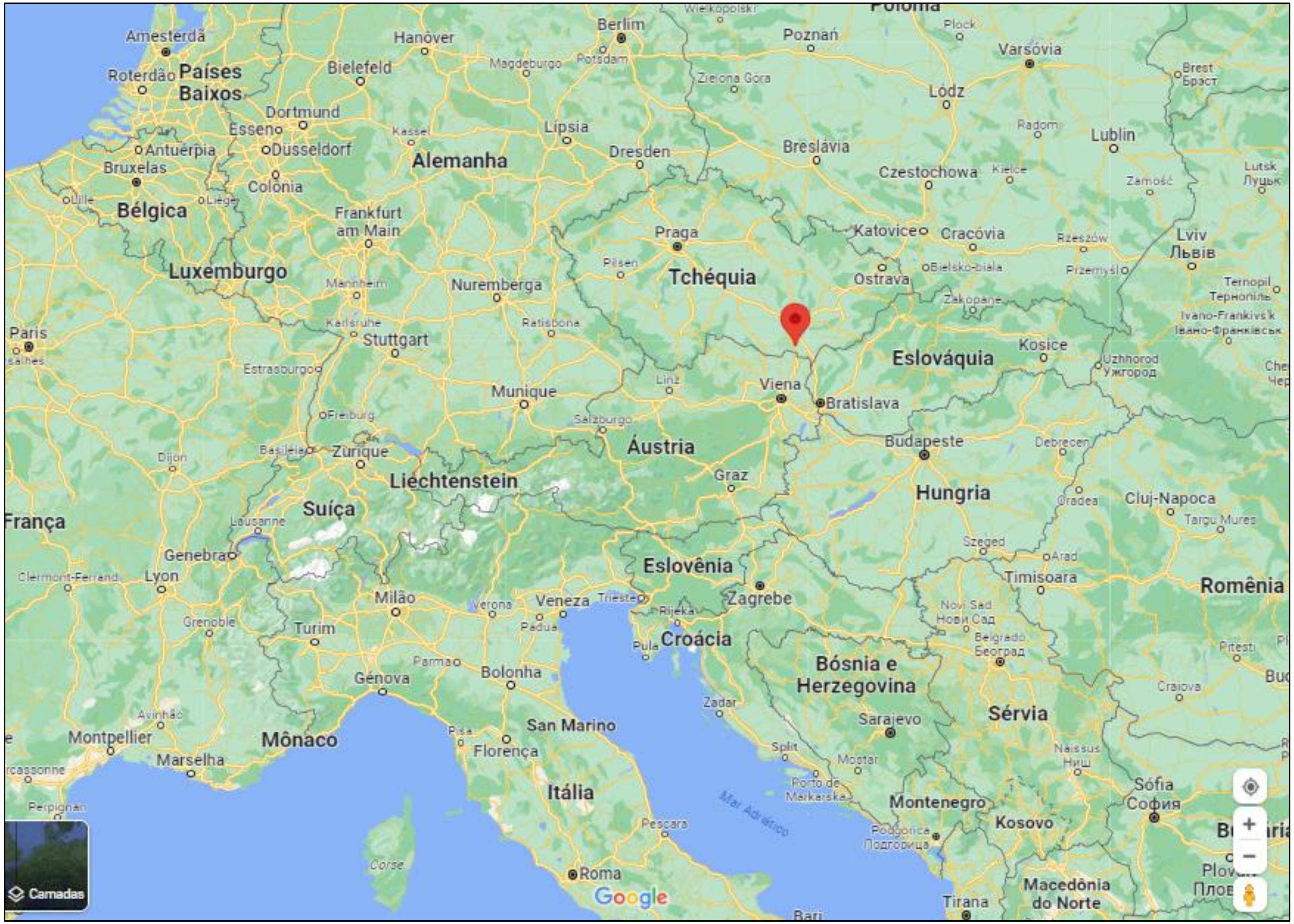
- Representar um número é criar um signo (sinal, numeral) para a ideia de quantidade (número). Para isso usam-se os algarismos.

<u>Exemplos de representações</u>:

- Algarismos Romanos: I, II, III, IV, V...
- Algarismos Arábicos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Números decimais: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15...
- Números binários: 0, 1, 10, 11, 100...
- O rádio de lobo de Dolní Věstonice.

Erro – Representação dos Números

Fonte: Google Maps: Pesquisa “Dolní Věstonice”



Erro – Representação dos Números

Exemplos de representações (continuação):

- O rádio de lobo de Dolní Věstonice.

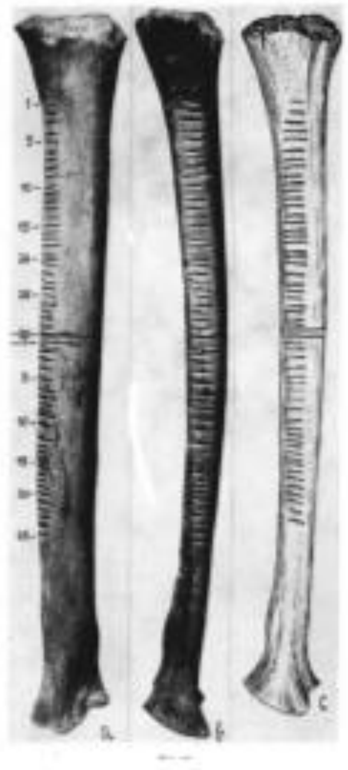


Fig. 3 Ilustração do artigo de Absolon publicado em 1958 no Artibus Asiae.

Fonte: ALMEIDA, Manoel Campus. *Um mito da história da matemática revisitado*, PUCPR, 2002.

Erro – Representação dos Números

O Zero:

- De acordo com J. Pelseneer (*apud* Caraça, 1984), “a criação de um símbolo para representar o nada constituiu um dos actos mais audazes do pensamento, uma das maiores aventuras da razão” (p. 6).

Erro – Representação dos Números

<u>O Zero</u>:

- De acordo com J. Pelseneer (*apud* Caraça, 1984), “a criação de um símbolo para representar o nada constituiu um dos actos mais audazes do pensamento, uma das maiores aventuras da razão” (p. 6).

<u>O Papa Matemático</u>:

- O monge beneditino Gerberto de Aurillac (950-1003), ou mais tarde, quem viria a ser o papa Silvestre II, contribuiu de modo decisivo para a disseminação dos números indo-arábicos durante o período em que lecionou o quadrivium (aritmética, geometria, astronomia e música) na escola da Catedral de Reims.
- Tendo estudado na região da Catalunha em região fronteiriça com o então domínio mouro na Península Ibérica, teria absorvido esse conhecimento e posteriormente levado para seus alunos. Era intenso o intercâmbio cultural entre ambas as culturas.

Erro – Representação dos Números

Sistemas Posicionais:

- Cada algarismo possui um valor absoluto e um valor relativo;
- O valor relativo é relativo à sua posição;
- Contam-se as posições da direita para a esquerda;
- Inicia-se a contagem de posições do zero;
- Lembrar que qualquer número elevado a zero é um, salvo o próprio zero.

Erro – Representação dos Números

O Sistema posicional na base 10 (decimal):

Posição	3	2	1	0
Base	10	10	10	10
Número	2	0	2	3
Relativo	$2 \times 10^3 = 2.000$	$0 \times 10^2 = 0$	$2 \times 10^1 = 20$	$3 \times 10^0 = 3$

Somando os valores relativos de cada posição:

$2000 + 0 + 20 + 3 = 2023$

Erro – Representação dos Números

O Sistema posicional na base 2 (binária): e conversão para sistema decimal

Posição	3	2	1	0
Base	2	2	2	2
Número	1	0	1	1
Relativo	$1 \times 2^3 = 8$	$0 \times 2^2 = 0$	$1 \times 2^1 = 2$	$1 \times 2^0 = 1$

Somando os valores relativos de cada posição:

$8 + 0 + 2 + 1 = (11)_{10}$

Portanto, $(1011)_2 = (11)_{10}$

Erro – Representação dos Números

- O Sistema posicional na base 2 (binária): e conversão do sistema decimal para o binário.
- Faremos sucessivas divisões por 2 e consideraremos os restos apresentados nessas divisões.

347	= 2 .	173	+ 1
173	= 2 .	86	+ 1
86	= 2 ·	43	+ 0
43	= 2 ·	21	+ 1
21	= 2 ·	10	+ 1
10	= 2 ·	5	+ 0
5	= 2 ·	2	+ 1
2	= 2 ·	1	+ 0
1	= 2 ·	0	+ 1

Agrupando os restos das divisões na ordem contrária em que apareceram, obteremos a representação desejada:

$(101011011)_2 = (347)_{10}$

Erro – Aritmética de ponto flutuante

- Aritmética de ponto flutuante é um sistema matemático utilizado em computação para representar números reais.
- Um número real é representado como uma mantissa ou fração significativa, ou ainda coeficiente e um expoente que indica o valor de magnitude do número.

Obtém-se a mantissa posicionando a vírgula à direita do primeiro algarismo significativo, como no exemplo abaixo:

$0{,}002 = 2 \cdot 10^{-3}$

$45.000.000 = 4{,}5 \cdot 10^{7}$

$45.000.000.000 = 4{,}5 \cdot 10^{10}$

Erro – Aritmética de ponto flutuante

- Mais um exemplo, agora prático. Vamos representar a massa do elétron.
- <u>Mantissa</u>: 9,10938356
- <u>Ordem de grandeza</u>: 10^{-28}

Assim, a <u>massa do elétron</u> é de $9{,}10938356 \cdot 10^{-28}$ g

ou, 0,000000000000000000000000000910938356 g

Erro – Aritmética de ponto flutuante

Formalizando, um número real r será representado na seguinte forma:

$$r = \pm(0, d_1 d_2 \ldots d_t) \times \beta^e$$

Em que:

- β: é a base em que a máquina opera;
- t: é o número de dígitos na mantissa;
- e: é o expoente no intervalo [a, b];
- Por exemplo: 9,10938356 . 10^{-28}.

Erro – Aritmética de ponto flutuante

Suponhamos que uma máquina opere no sistema da seguinte forma:

$\beta = 10$;

$t = 3$;

$e \in [-5,5]$.

- Neste sistema, os números serão representados na seguinte forma: $r = \pm(0,d_1d_2d_3) \text{ X } 10^e$
- O menor número (m) representado nesta máquina é: $m = 0,100 \text{ X } 10^{-5} = 10^{-6}$
- O maior número representado (M) nesta máquina é: $M = 0,999 \text{ X } 10^5 = 99900$

Erro – Aritmética de ponto flutuante

Suponhamos que uma máquina opere no sistema da seguinte forma:

$\beta = 10$;

$t = 3$;

$e \in [-5,5]$.

Com isso em mente, consideremos 3 casos para a representação de um número real nessa máquina:

- <u>Caso 1</u>: O número está entre <u>m</u> e <u>M</u> como, por exemplo: $x = 235{,}89 = 0{,}23589 \times 10^3$

Arredondamento:

- $x = 0{,}235 \times 10^3$ (truncamento)
- $x = 0{,}236 \times 10^3$ (arredondamento)

Erro – Aritmética de ponto flutuante

Suponhamos que uma máquina opere no sistema da seguinte forma:

$\beta = 10$;

$t = 3$;

$e \in [-5,5]$.

Com isso em mente, consideremos 3 casos para a representação de um número real nessa máquina:

- Caso 2: O número é menor do que m como, por exemplo: $x = 0,345 \times 10^{-7}$
  - Como o expoente e = -7 < -5, esse número não pode ser representado por essa máquina.

Erro – Aritmética de ponto flutuante

Suponhamos que uma máquina opere no sistema da seguinte forma:

$\beta = 10$;

$t = 3$;

$e \in [-5,5]$.

Com isso em mente, consideremos 3 casos para a representação de um número real nessa máquina:

- Caso 3: O número é maior do que M como, por exemplo: $x = 0,875 \times 10^9$

    - Como o expoente e = 9 > 5, esse número não pode ser representado por essa máquina.

Erro – Tipos de Erro

- É a diferença entre os valores previstos por determinado modelo matemático e os valores esperados ou os valores observados na coleta de dados.

- Truncamento: É o processo de desprezar a parte da mantissa que não nos interessa.
- Por exemplo: $x = 235{,}89 = 0{,}23589 \text{ x } 10^3 = 0{,}235 \text{ x } 10^3$
- Arredondamento: É o processo de adicionar 1 ao último algarismo a não ser desprezado, se e somente se o 1º algarismo a ser desprezado é maior ou igual a 5 e menor ou igual a 9.
- Por exemplo: $x = 235{,}89 = 0{,}23589 \text{ x } 10^3 = 0{,}236 \text{ x } 10^3$

Interatividade

Efetue a operação na base 10 (B = 10) com 3 algarismos significativos usando truncamento:

(4,26 + 9,24) + 5,06

a) 18,54.
b) 18,5.
c) 18,6.
d) 18,4.
e) 18,55.

Resposta

Efetue a operação na base 10 (B = 10) com 3 algarismos significativos usando truncamento:

(4,26 + 9,24) + 5,06

a) 18,54.
b) 18,5.
c) 18,6.
d) 18,4.
e) 18,55.

$$(4{,}26 + 9{,}24) + 5{,}06 =$$

$$= (13{,}5) + 5{,}06 =$$

$$= 18{,}56 \cong 18{,}5$$

Zeros de Funções

- Inspeção Gráfica e Isolamento das Raízes
- Teorema de Bolzano
- Refinamento
- Critérios de Parada

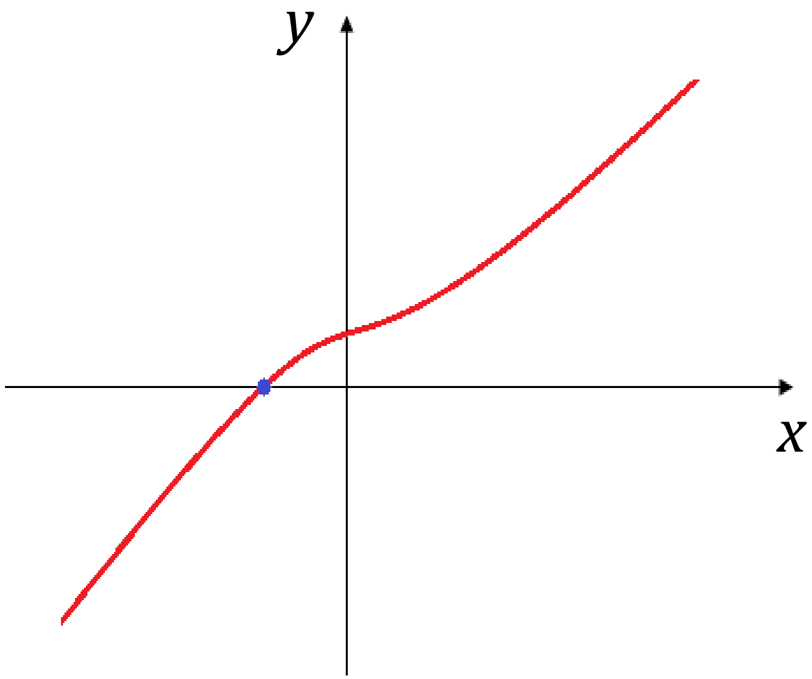
Zeros de Funções – Inspeção Gráfica e Isolamento das Raízes

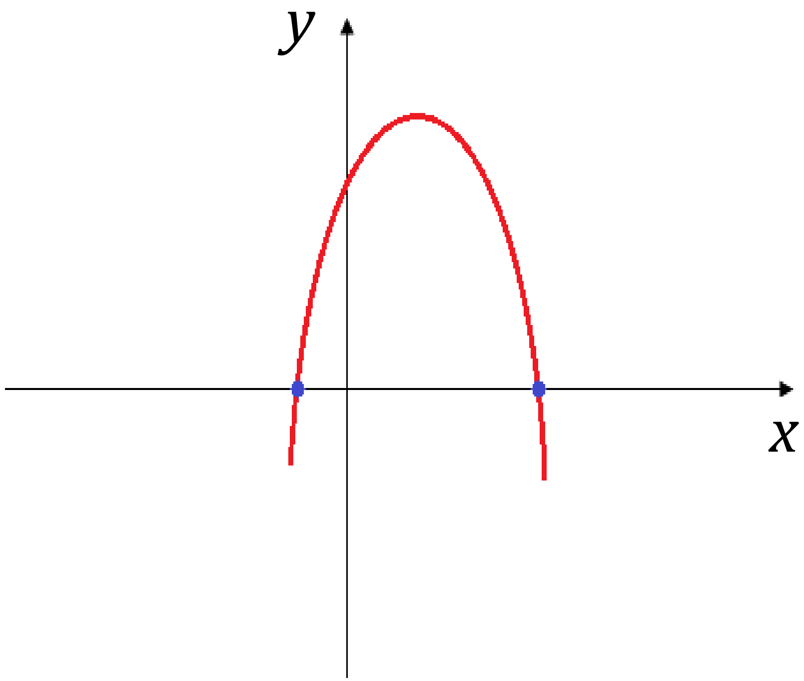
- Determinar os valores de x para os quais uma função f é igual a zero – f(x)=0
- Pontos de interseção entre o gráfico da função f e o eixo x

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \qquad e \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$x_1 = 3 \quad e \quad x_2 = 2$$





Zeros de Funções – Inspeção Gráfica e Isolamento das Raízes

- Determinar as raízes de um polinômio através de seus coeficientes.
- Nem sempre é possível.
- Processos alternativos, por exemplo, para a igualdade $f(x) = 0$, obter uma igualdade equivalente $g(x) = h(x)$ no mesmo eixo cartesiano em que se pode estimar as raízes.

Zeros de Funções – Inspeção Gráfica e Isolamento das Raízes

Por exemplo:

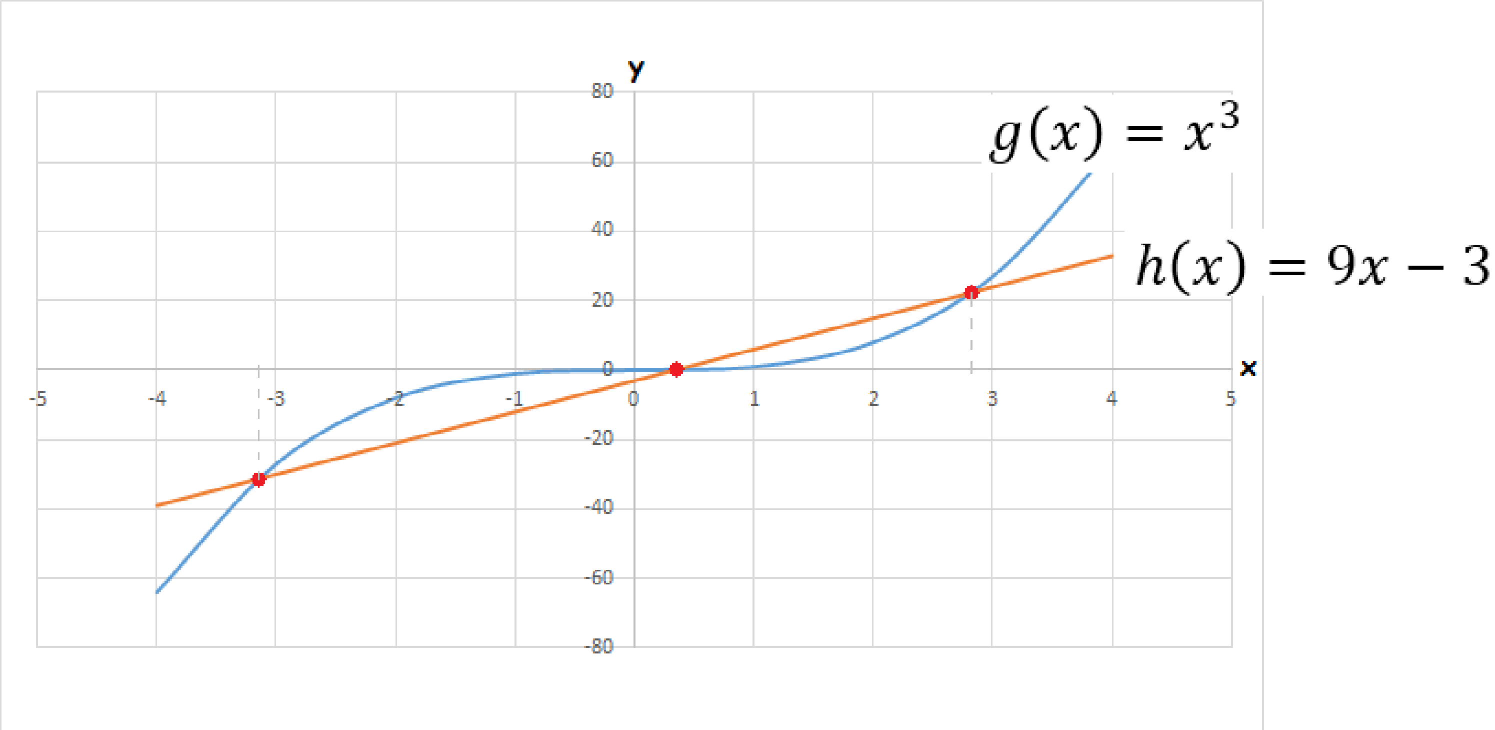
$f(x) = x^3 - 9x + 3$

Fazendo $f(x) = 0$

temos: $x^3 - 9x + 3 = 0$

logo, $x^3 = 9x - 3$

Então $g(x) = x^3$ e $h(x) = 9x - 3$



- $g(x) = h(x)$ nos intervalos [–4; –3], [0; 1] e [2; 3]

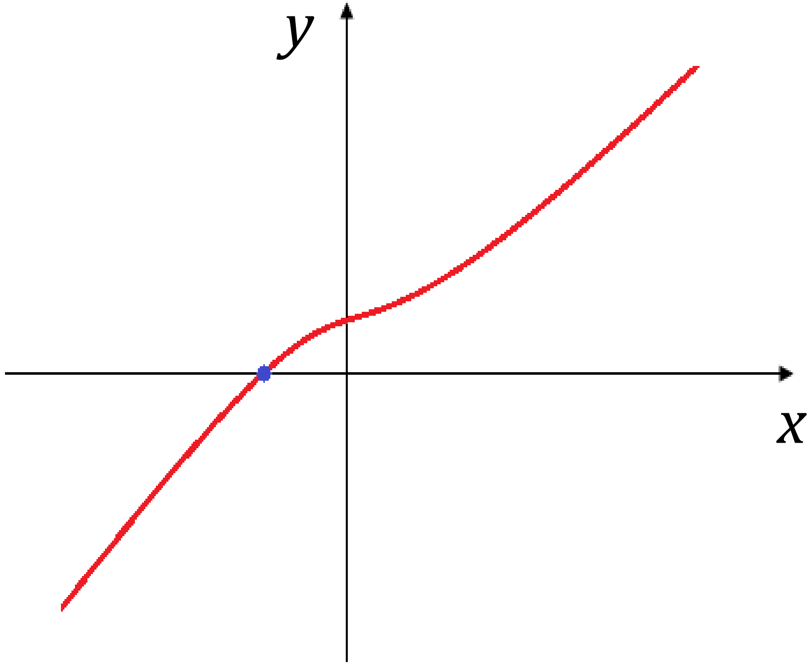
Zeros de Funções – Inspeção Gráfica e Isolamento das Raízes

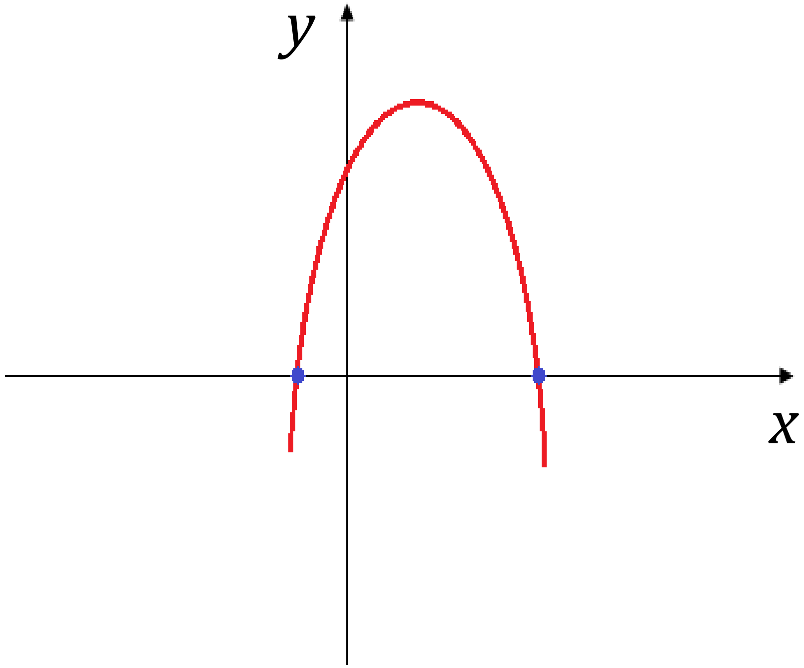
- Uma vez que tenhamos uma estimativa aproximada das raízes de uma função, obtida a partir da inspeção gráfica, podemos utilizar métodos numéricos para realizar o isolamento das raízes de forma mais precisa.
- O isolamento de raízes consiste em determinar um intervalo no qual a raiz de uma função está localizada.
- Para isso, podem ser utilizados métodos como o Método da Dicotomia ou Bisseção, o Método das Aproximações Sucessivas, o Método de Newton-Raphson, entre outros.

Zeros de Funções – Teorema de Bolzano

Teorema:

- "Se f(x) é uma função contínua em um intervalo fechado [a,b], e se f(a) e f(b) têm sinais opostos (ou seja, um é positivo e o outro é negativo), então existe pelo menos um ponto c no intervalo aberto (a,b) em que a função assume o valor zero, ou seja, f(c)=0."





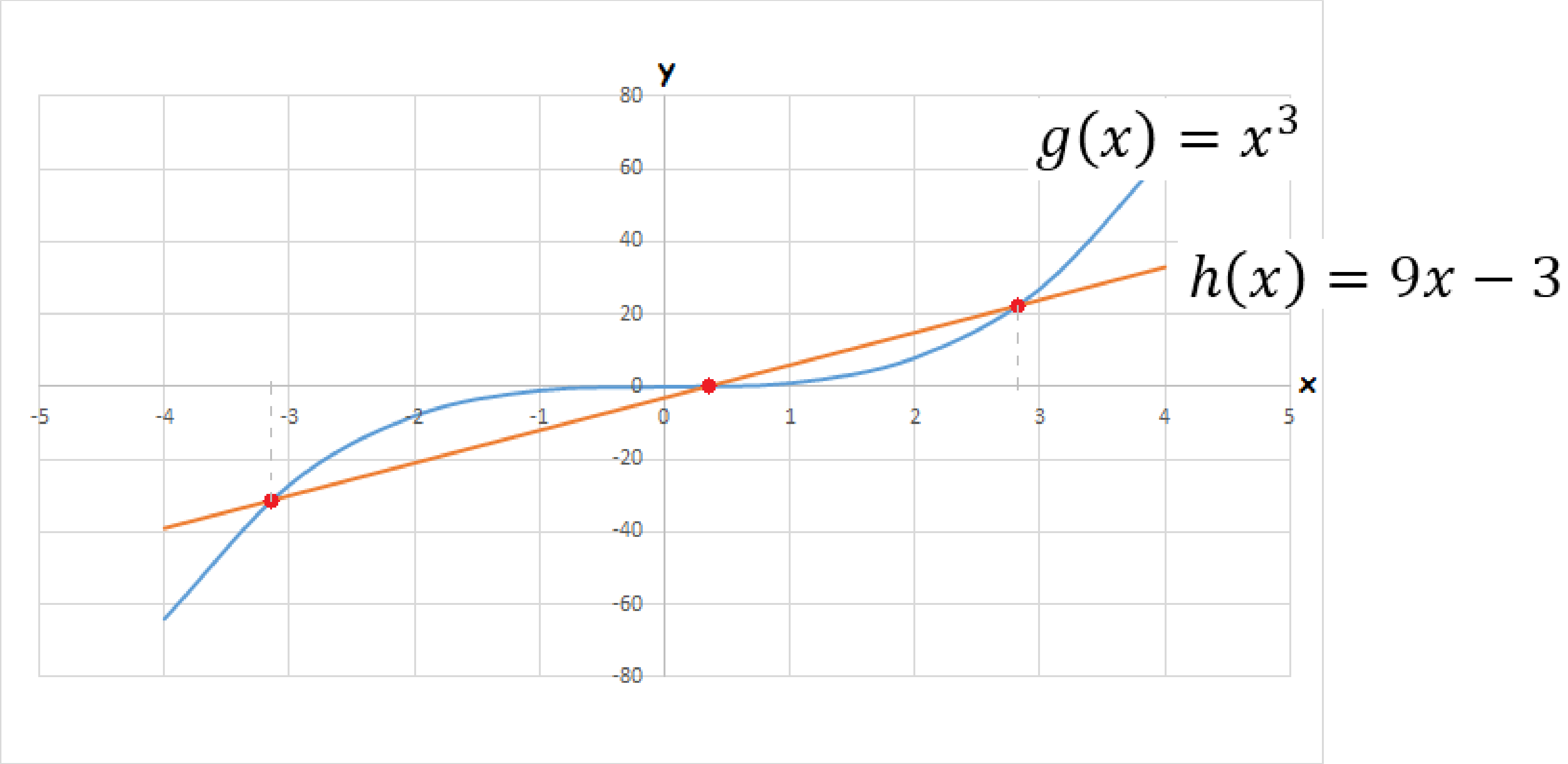
Zeros de Funções – Teorema de Bolzano

Por exemplo:

$f(x) = x^3 - 9x + 3$

$f(0) = +3$

$f(1) = -5$



- $g(x) = h(x)$ nos intervalos [–4; –3], [0; 1] e [2; 3]
- Não garante a unicidade da raiz
- Não fornece um método para a determinação

Zeros de Funções – Possibilidades de Raízes Inteiras e Fracionárias

- Teorema: (Teorema da Raiz Racional ou Teorema de Gauss)
- "Se uma função polinomial tem uma raiz racional (inteira ou fracionária), ela será da forma p/q, em que p é um divisor do termo independente do polinômio e q é um divisor do coeficiente principal."
- Exemplo: $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 16x - 20$
- Possíveis valores para p (divisores de 20): {±1; ±2; ±4; ±5; ±10; ±20}
- Possíveis valores para q (divisores de 4): {± 2; ± 4}

- Possíveis raízes fracionárias de f(x) são os valores $\left\{\pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{5}{2};\ \pm\frac{1}{4};\ \pm\frac{5}{4}\right\}$

De fato, temos que apenas o valor $x = +\frac{5}{4}$, pois

$$f(x) = 4\left(\frac{5}{4}\right)^3 - 5\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 16\left(\frac{5}{4}\right) - 20$$

$$f(x) = \frac{125}{16} - \frac{125}{16} + \frac{80}{4} - 20 = 0$$

Zeros de Funções – Dispositivo de Briot-Ruffini

Teorema:

- “Se uma função polinomial f(x) tem uma raiz r, então o polinômio f(x) pode ser dividido pelo polinômio (x – r) sem deixar resto.”

Recíproca:

- “Se o polinômio f(x) pode ser dividido pelo polinômio (x – r) sem deixar resto, significa que o valor de r é uma raiz da função f(x).”

Zeros de Funções – Dispositivo de Briot-Ruffini

<u>Procedimento</u>:

1. O primeiro coeficiente é igual ao primeiro coeficiente da função;
2. O segundo coeficiente é igual ao primeiro coeficiente multiplicado pela possível raiz, mais o segundo coeficiente da função;
3. Essa sequência descrita no item anterior é seguida até obtermos o último coeficiente a ser associado ao último coeficiente da função;
4. O resto é igual ao último coeficiente obtido;
5. Se o último valor for igual a zero, a possível raiz é, de fato, uma raiz da função;
6. Se o último valor for zero, o grau da função é sempre uma unidade inferior ao grau da função anterior;
7. Podemos escrever essa divisão apenas com os coeficientes obtidos nestas ações anteriores.

Zeros de Funções – Dispositivo de Briot-Ruffini

Exemplo: $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 16x - 20$

	4	-5	16	-20
x = 1,25				

Zeros de Funções – Dispositivo de Briot-Ruffini

<u>Exemplo</u>: $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 16x - 20$

	4	-5	16	-20
x = 1,25	4			

Zeros de Funções – Dispositivo de Briot-Ruffini

Exemplo: $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 16x - 20$

	4	-5	16	-20
x = 1,25	4	0		

- $(4 \cdot 1{,}25) + (-5) = 5 - 5 = 0$

Zeros de Funções – Dispositivo de Briot-Ruffini

Exemplo: $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 16x - 20$

	4	-5	16	-20
x = 1,25	4	0	16	

- $(4 \cdot 1{,}25) + (-5) = 5 - 5 = 0$
- $(0 \cdot 1{,}25) + (16) = 0 + 16 = 16$

Zeros de Funções – Dispositivo de Briot-Ruffini

Exemplo: $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 16x - 20$

	4	-5	16	-20
x = 1,25	4	0	16	0

- $(4 \cdot 1{,}25) + (-5) = 5 - 5 = 0$
- $(0 \cdot 1{,}25) + (16) = 0 + 16 = 16$
- $(16 \cdot 1{,}25) + (-20) = 20 - 20 = 0$

Zeros de Funções – Dispositivo de Briot-Ruffini

Exemplo: $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 16x - 20$

	4	-5	16	-20
x = 1,25	4	0	16	0

- O último coeficiente da função é -20 e está associado ao coeficiente 0, então $x = 1{,}25$ é uma raiz da função f(x).

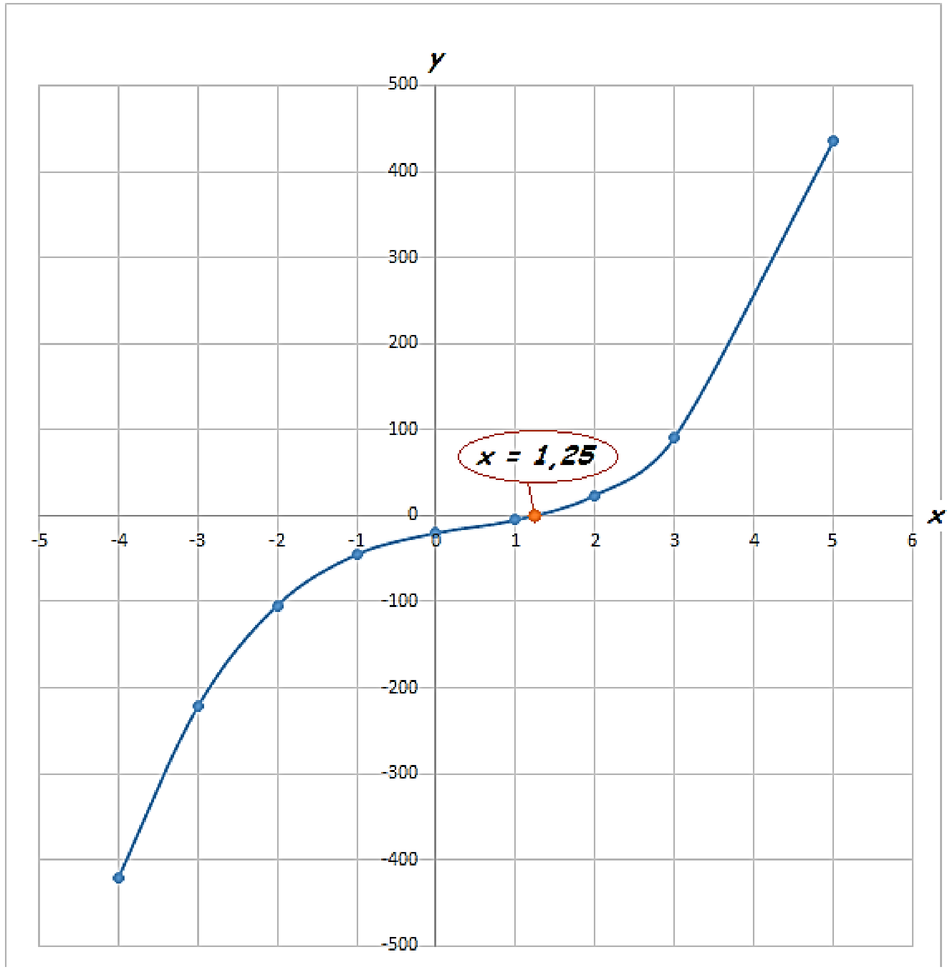
Além disso, esse procedimento decompõe a função $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 16x - 20$ da seguinte maneira:

$$\boxed{f(x) = (4x^2 + 16) \cdot (x - 1{,}25)}$$

Zeros de Funções – Dispositivo de Briot-Ruffini

- <u>Exemplo</u>: $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 16x - 20$
- $f(x) = (4x^2 + 16) \cdot (x - 1{,}25)$
- Como $4x^2 + 16 = 0$ não admite raízes reais, segue que $x - 1{,}25$ é a única raiz de f(x)

Graficamente:



Zeros de Funções – Refinamento

- Para realizar o refinamento dos intervalos que contêm as raízes de uma função, faremos uso de algumas técnicas utilizadas para se obter aproximações mais precisas destas raízes.

- Essas técnicas são especialmente úteis quando não é possível encontrar a solução exata da função de forma analítica e todas elas pertencem à classe dos métodos iterativos.

Zeros de Funções – Refinamento

- Um método iterativo consiste em uma sequência de instruções que são executadas passo a passo. É um procedimento realizado em ciclos, que envolve a repetição de uma série de etapas ou cálculos para se aproximar de uma solução desejada. Esses métodos são especialmente úteis quando não é possível obter uma solução direta ou analítica para um problema matemático complexo.

- No contexto matemático, um método iterativo começa com uma estimativa inicial da solução e, em seguida, aplica-se uma fórmula ou um conjunto de regras para gerar uma nova estimativa.

- Esse processo é repetido várias vezes, utilizando a estimativa atual para calcular uma nova estimativa, até que um critério de parada seja atingido, geralmente relacionado à precisão desejada.

Zeros de Funções – Refinamento

- O processo de refinamento de intervalos começa com a identificação de um intervalo que contenha uma raiz da função. Isso pode ser feito por meio da análise gráfica da função ou utilizando os chamados métodos numéricos, que veremos mais adiante.

- Uma vez que um intervalo contendo uma raiz é identificado, o refinamento ocorre através da divisão sucessiva desse intervalo em subintervalos menores.

- Isso é feito aplicando métodos numéricos iterativos dentro de cada subintervalo para encontrar uma melhor aproximação da raiz.

Zeros de Funções – Critérios de Parada

Definição:

- É uma condição que determina quando o processo de refinamento deve ser encerrado ou

- quando uma aproximação está suficientemente próxima da raiz exata sendo, desta forma, aceitável como uma raiz da função.

Zeros de Funções – Critérios de Parada

Alguns critérios de parada:

- Tolerância: Esse critério envolve definir uma tolerância predeterminada que representa o nível de precisão desejado. O refinamento é encerrado quando a diferença entre as estimativas consecutivas da raiz é menor ou igual à tolerância estabelecida.

- Número máximo de iterações: Um critério de parada simples é estabelecer um número máximo de iterações permitidas no processo de refinamento. Após atingir esse número, o refinamento é interrompido, independentemente da precisão alcançada.

Zeros de Funções – Critérios de Parada

Alguns critérios de parada:

- Convergência: Alguns métodos iterativos possuem critérios específicos de convergência. Por exemplo, no método de Newton-Raphson, o refinamento pode ser interrompido quando a diferença entre as estimativas consecutivas da raiz é menor que um limite estabelecido.

- Estabilidade: Em certos casos, é possível verificar a estabilidade do processo de refinamento. Se as estimativas da raiz começarem a oscilar em torno de um valor específico, pode ser um indicativo de que o refinamento está convergindo para uma solução estável, e o critério de parada pode ser baseado nessa oscilação.

Interatividade

As possíveis raízes racionais da função $f(x) = x^3 - 5x + 4$ são:

a) $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6.$
b) $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6.$
c) $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 6.$
d) $\pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6.$
e) $\pm 1; \pm 2; \pm 4.$

Resposta

As possíveis raízes racionais da função $f(x) = x^3 - 5x + 4$ são:

a) $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6.$
b) $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6.$
c) $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 6.$
d) $\pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6.$
e) $\pm 1; \pm 2; \pm 4.$

Processos Iterativos

- Método da Dicotomia ou Bissecção

- Método das Aproximações Sucessivas

- Método de Newton-Raphson

Processos Iterativos

- Processos iterativos são métodos numéricos que usam aproximações sucessivas para encontrar soluções para problemas matemáticos. Eles envolvem a repetição de uma regra ou fórmula para gerar uma sequência de valores cada vez mais próximos da solução desejada. Vejamos alguns destes métodos numéricos a seguir.

Processos Iterativos – Método da Dicotomia ou Bissecção

- Método é baseado no teorema de Bolzano;

- Garante a convergência da solução para uma aproximação preestabelecida (ε);

- A ideia básica do método é dividir sucessivamente o intervalo em duas partes iguais e verificar em qual delas a função assume valores de sinais opostos;

- Em seguida, o intervalo contendo a raiz é escolhido e a divisão é repetida até que a precisão desejada seja alcançada.

Processos Iterativos – Método da Dicotomia ou Bissecção

Procedimento:

1. Escolha um intervalo [a, b] que contém a raiz e uma precisão ε.
2. Calcule o ponto médio $c = (a + b) / 2$ e os valores da função em c e nos extremos a e b.
3. Se $f(a)$ e $f(c)$ têm sinais opostos, a raiz está no intervalo [a, c]. Caso contrário, a raiz está no intervalo [c, b].
4. Repita o processo a partir do novo intervalo escolhido até que a diferença entre b e a seja menor ou igual a ε.

Processos Iterativos – Método da Dicotomia ou Bissecção

- Exemplo: Determine o valor de $\sqrt{2}$ usando o método da dicotomia.
- Seja $x = \sqrt{2}$

$$(x)^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$f(x) = x^2 - 2$$

- O problema se resume em achar os zeros dessa função.

$f(1) = 1^2 - 2 = -1$

$f(2) = 2^2 - 2 = +2$

- Como a função é contínua nesse intervalo e, ainda, houve mudança de sinal, então existe pelo menos uma raiz da função $f(x) = x^2 - 2$ no intervalo fechado [1, 2].

Processos Iterativos – Método da Dicotomia ou Bissecção

- Exemplo: Determine o valor de $\sqrt{2}$ usando o método da dicotomia.

a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	ε = (b - a) / 2	Sinal f(x)*f(a)
1	2	1,5	0,5	-
1	1,5	1,25	0,25	+
1,25	1,5	1,375	0,125	+
1,375	1,5	1,4375	0,0625	-
1,375	1,4375	1,40625	0,03125	+

- $x = \frac{a+b}{2}$ representa a bissecção do intervalo [a,b];
- $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ é o erro que se comete quando adotamos $x = \frac{a+b}{2}$ como raiz;
- Caso o sinal f(x)*f(a) seja negativo, então isto significa que a raiz está no intervalo [a, x]. Então o valor de a é mantido e x assume o valor de b.

Processos Iterativos – Método da Dicotomia ou Bissecção

- Exemplo: Determine o valor de $\sqrt{2}$ usando o método da dicotomia.

a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	ε = (b - a) / 2	Sinal f(x)*f(a)
1	2	1,5	0,5	-
1	1,5	1,25	0,25	+
1,25	1,5	1,375	0,125	+
1,375	1,5	1,4375	0,0625	-
1,375	1,4375	1,40625	0,03125	+

- O Zero da função é $x \pm E$, pelo desenvolvimento acima, temos que $1{,}375 < \sqrt{2} < 1{,}4375$ com um erro aproximado de ε = 0,03125.

Processos Iterativos – Método da Dicotomia ou Bissecção

- Exemplo: Determine o valor de $\sqrt{2}$ usando o método da dicotomia.

a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	ε = (b - a) / 2	Sinal f(x)*f(a)
1	2	1,5	0,5	-
1	1,5	1,25	0,25	+
1,25	1,5	1,375	0,125	+
1,375	1,5	1,4375	0,0625	-
1,375	1,4375	1,40625	0,03125	+

Processos Iterativos – Método das Aproximações Sucessivas

- Técnica utilizada para encontrar uma sequência de valores cada vez mais próximos da raiz (ou zero) de uma função.

- A ideia básica é iniciar com uma estimativa inicial e, em seguida, aplicar uma fórmula de recorrência que, sendo satisfeitas determinadas condições de convergência, nos fornece uma função iterativa para obtermos novas estimativas com base nas estimativas anteriores.

Processos Iterativos – Método das Aproximações Sucessivas

Procedimento:

1. Escolhe-se uma estimativa inicial para a solução da equação.
2. Usa-se uma função iterativa que relaciona a estimativa anterior com a próxima estimativa.
3. Aplica-se repetidamente a função iterativa para obter uma sequência de estimativas cada vez mais próximas da solução.
4. Verifica-se a convergência da sequência de estimativas para a solução desejada, utilizando critérios de parada adequados.
5. Uma vez que a sequência tenha convergido, a última estimativa obtida é considerada uma solução aproximada da equação.

Processos Iterativos – Método das Aproximações Sucessivas

- A escolha da função iterativa é crucial para o sucesso do método.

- Em alguns casos, a função iterativa pode ser definida diretamente a partir da equação original.

- Em outros casos, podem ser necessárias manipulações algébricas ou transformações da equação f(x) = 0 para se obter uma função iterativa apropriada.

- No método das aproximações sucessivas, a fórmula de recorrência pode ser obtida reescrevendo a equação f(x) = 0 na forma x = f(x) ou ϕ(x). Assim, a partir de um valor inicial x_0, obtém-se uma sequência de valores.

Processos Iterativos – Método das Aproximações Sucessivas

- <u>Exemplo</u>:
- Determinar o zero da função $f(x) = x^2 + 0{,}96\,x - 2{,}08$ usando o método das aproximações sucessivas com o valor inicial para a aproximação da raiz da função como sendo $x_0 = 1$.
- <u>Solução</u>: Inicialmente vamos determinar a igualdade $x = \phi(x)$ da seguinte maneira:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 0{,}96\,x - 2{,}08 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x.(x + 0{,}96) = 2{,}08 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2{,}08}{x + 0{,}96} \Leftrightarrow$$

$$\phi(x) = \frac{2{,}08}{x + 0{,}96}$$

Iterações	x_n	$\phi(x_n)$
0	1	1,061
1	1,061	1,029
2	1,029	1,046
3	1,046	1,037
4	1,037	1,042
5	1,042	1,039
6	1,039	1,041
7	1,041	1,039

Processos Iterativos – Método das Aproximações Sucessivas

<u>Exemplo</u>:

- Podemos notar, através das iterações, que está havendo uma convergência entre os valores 1,041 e 1,039; esta flutuação deve-se à limitação de algarismos utilizados. Dessa maneira pode-se afirmar, por indução, que a raiz da função $f(x) = x^2 + 0{,}96\,x - 2{,}08$ é, aproximadamente, x = 1,040.

Iterações	x_n	$\phi(x_n)$
0	1	1,061
1	1,061	1,029
2	1,029	1,046
3	1,046	1,037
4	1,037	1,042
5	1,042	1,039
6	1,039	1,041
7	1,041	1,039

Processos Iterativos – Método de Newton-Raphson

Trata-se de uma extensão do Método das Aproximações Sucessivas e é amplamente utilizado por ser mais eficiente que o anterior, pois utiliza uma função de recorrência chamada de função de Newton-Raphson dada por:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Processos Iterativos – Método de Newton-Raphson

Procedimento:

1. Escolhe-se uma estimativa inicial para a raiz da equação.
2. Utiliza-se a derivada da função para encontrar a reta tangente à curva no ponto correspondente à estimativa inicial.
3. Encontra-se a interseção dessa reta com o eixo x, determinando uma nova estimativa da raiz.
4. Repete-se o processo, utilizando a nova estimativa como ponto de partida para encontrar uma estimativa ainda mais precisa.
5. O método continua iterando até que a sequência de estimativas convirja para a raiz desejada dentro de uma determinada tolerância.

Processos Iterativos – Método de Newton-Raphson

Procedimento:

O método é matematicamente descrito pela seguinte fórmula de iteração:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Em que x_n é a estimativa atual da raiz, $f(x_n)$ é o valor da função na estimativa atual, $f'(x_n)$ é o valor da derivada da função na estimativa atual e x_{n+1} é a próxima estimativa da raiz.

Observação:

A derivada de uma função polinomial $f(x) = x^n$ pode ser calculada por:

- $(x_n)' = n \cdot x^{n-1}$

Processos Iterativos – Método de Newton-Raphson

<u>Exemplo</u>:

- Determinar o zero da função $f(x) = x^3 + x - 3$ usando o método de Newton-Raphson.

<u>Solução</u>:

Calculando a derivada de f(x), ou seja, f'(x):

$$f'(x) = \left(x^3 + x - 3\right)' = 3x^{3-1} + x^{1-1} - 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 + 1$$

Processos Iterativos – Método de Newton-Raphson

Exemplo:

Determinando a função de Newton-Raphson, obtemos:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\phi(x) = x - \frac{x^3 + x - 3}{3x^2 + 1}$$

$$\phi(x) = \frac{x(3x^2 + 1) - (x^3 + x - 3)}{3x^2 + 1}$$

$$\phi(x) = \frac{3x^3 + x - x^3 - x + 3}{3x^2 + 1}$$

$$\phi(x) = \frac{2x^3 + 3}{3x^2 + 1}$$

Processos Iterativos – Método de Newton-Raphson

Exemplo:

Fazendo as substituições sucessivas $\phi(x) = \dfrac{2x^3 + 3}{3x^2 + 1}$

iterações	x_n	$\phi(x_n)$
0	1	1,25
1	1,25	1,214
2	1,214	1,213
3	1,2,13	1,213

- Logo, x= 1,213 é o zero de $f(x) = x^3 + x - 3$ como uma aproximação de 3 casas decimais.

Processos Iterativos – Estudo da Convergência do Método

Condições:

- Existência da Raiz: O método só pode convergir para uma raiz se houver uma raiz da equação no intervalo considerado. Portanto, é necessário verificar se a equação possui uma raiz no intervalo de interesse.
- Continuidade e Derivabilidade: O Método de Newton-Raphson exige que a função seja contínua e tenha derivada contínua na vizinhança da raiz. Se a função apresentar descontinuidades ou não for diferenciável na região da raiz, o método pode não convergir.
- Escolha Adequada da Estimativa Inicial: A convergência do método pode depender significativamente da escolha da estimativa inicial. Em geral, é desejável escolher uma estimativa inicial próxima o suficiente da raiz para garantir a convergência. Caso contrário, o método pode divergir ou convergir para outra raiz.

Processos Iterativos – Estudo da Convergência do Método

Condições:

- Critério de Parada: Um critério de parada é necessário para determinar quando parar as iterações e considerar a aproximação como a solução. Normalmente, utiliza-se uma tolerância definida, ou seja, quando a diferença entre duas iterações consecutivas é menor que um valor predefinido, considera-se que a convergência foi alcançada.

- Condição de Não Anulação da Derivada: Se a derivada da função se anular em algum ponto próximo à raiz, o método pode falhar em convergir ou convergir muito lentamente. Isso ocorre porque a derivada é usada no cálculo da próxima estimativa, e quando ela se anula, não é possível determinar a direção correta para a convergência.

Processos Iterativos – Estudo da Convergência do Método

Observação Final:

- Além dessas condições, existem outros resultados e teoremas que auxiliam na análise da convergência do Método de Newton-Raphson.

- O Teorema do Valor Médio, por exemplo. Com base nessas análises, é possível investigar a estabilidade do método, a influência de perturbações nos valores iniciais, a sensibilidade a erros de arredondamento e outras propriedades relacionadas à eficácia e confiabilidade do método.

- Será possível ainda, por meio dessa análise, determinar se o método irá convergir e sob quais condições isso ocorrerá.

Processos Iterativos – Sistemas Lineares

- Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações que contêm variáveis lineares e cuja solução é um conjunto de valores para essas variáveis que satisfaz a todas as equações simultaneamente.

Definição:

Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares simultâneas na forma:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 + & & +a_{3n}x_n & = b_3 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & a_{m3}x_3 + & \cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Em que:

- a_{ij} são os coeficientes;
- x_j são as variáveis;
- $i = 1, 2, 3, \dots, m$;
- $j = 1, 2, 3, \dots, n$.
- Neste caso, dizemos que o sistema possui ordem m x n, isto é, m equações e n variáveis.

Processos Iterativos – Sistemas Lineares

Podemos reescrever um sistema linear na forma de um produto matricial da forma $A \cdot X = B$ em que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{11} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{11} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

- A matriz A é chamada de matriz de coeficientes;
- X é a matriz das variáveis;

Quando a matriz $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, o sistema é chamado de sistema homogêneo.

Processos Iterativos – Sistemas Lineares

Uma solução para um sistema linear de equações de ordem m x n é uma n-upla

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

que satisfaz a todas as m equações simultaneamente.

Processos Iterativos – Sistemas Lineares

Um sistema pode ser:

- Possível determinado;
- Possível Indeterminado;
- Impossível.
- Trataremos de soluções de sistemas de ordem m x n.

Processos Iterativos – Esforço computacional

- O esforço computacional é a quantidade de recursos necessários para encontrar a solução do sistema.

- O termo esforço computacional se refere a várias medidas, como o tempo de execução, a quantidade de memória utilizada e o número de operações matemáticas realizadas.

- O esforço computacional é uma medida da carga de trabalho exigida para encontrar a solução e pode variar dependendo do tamanho e da estrutura do sistema, bem como do método utilizado para resolver o sistema.

Processos Iterativos – Esforço computacional

Algumas operações elementares com matrizes:

- Permutar duas equações;
- Multiplicar uma equação por um escalar não nulo;
- Somar a uma equação um múltiplo de uma outra equação.

Interatividade

Determine usando dicotomia o valor de $\sqrt{5}$. Considere um erro menor do que 0,01.

a) $2,2422 \pm 0,0156$.
b) $2,2188 \pm 0,0313$.
c) $2,2422 \pm 0,0078$.
d) $2,2455 \pm 0,0078$.
e) $2,2344 \pm 0,0078$.

Resposta

Determine usando dicotomia o valor de $\sqrt{5}$. Considere um erro menor do que 0,01.

a) $2{,}2422 \pm 0{,}0156$.
b) $2{,}2188 \pm 0{,}0313$.
c) $2{,}2422 \pm 0{,}0078$.
d) $2{,}2455 \pm 0{,}0078$.
e) $2{,}2344 \pm 0{,}0078$.

Processos Iterativos – Método da Eliminação de Gauss

- O objetivo deste método é transformar o sistema original em um sistema equivalente mais simples;

- Forma escalonada;

- Sequência de operações elementares, que envolvem a adição, subtração e multiplicação das equações do sistema.

Processos Iterativos – Método da Eliminação de Gauss

Procedimento:

1. Organizar as equações do sistema em uma matriz ampliada, na forma [A|B], em que A é a matriz dos coeficientes das incógnitas e B é a matriz dos termos constantes;
2. Aplicar a eliminação para obter zeros abaixo do primeiro elemento não nulo da primeira coluna. Para isso, realiza-se a seguinte operação: multiplica-se a primeira equação por um fator adequado e subtrai-se essa equação das demais equações. O objetivo é eliminar o primeiro elemento da coluna nas linhas abaixo da primeira.
3. Repetir o passo (2) para as demais colunas, sempre eliminando os elementos abaixo dos primeiros termos de cada equação em cada interação. Estes termos são chamados de pivôs.
4. Após a eliminação, a matriz ampliada estará na forma escalonada, em que os elementos acima e abaixo dos pivôs são iguais a zero.

Processos Iterativos – Método da Eliminação de Gauss

<u>Procedimento</u>:

2. Aplicar a eliminação para obter zeros abaixo do primeiro elemento não nulo da primeira coluna. Para isso, realiza-se a seguinte operação: multiplica-se a primeira equação por um fator adequado e subtrai-se essa equação das demais equações. O objetivo é eliminar o primeiro elemento da coluna nas linhas abaixo da primeira.
3. Repetir o passo (2) para as demais colunas, sempre eliminando os elementos abaixo dos primeiros termos de cada equação em cada interação. <u>Estes termos são chamados de pivôs</u>.
4. Após a eliminação, a matriz ampliada estará na forma escalonada, em que os elementos acima e abaixo dos pivôs são iguais a zero.
5. Resolver o sistema por substituição retroativa. Começando da última equação, calcula-se o valor da última incógnita e substitui-se esse valor nas equações anteriores, resolvendo-as em ordem.

Processos Iterativos – Método da Eliminação de Gauss

Observações:

O sistema escalonado terá a forma triangular, assim:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & a_{33}x_3 + & & +a_{3n}x_n & = b_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Processos Iterativos – Método da Eliminação de Gauss

Observações:

- É importante ressaltar que, em alguns casos, podem ocorrer situações especiais, como a presença de pivôs nulos ou falta de pivôs em determinadas colunas, o que requer tratamento específico.

Também é importante observar que, na i-ésima etapa do método da Eliminação de Gauss, o pivô considerado será o valor a_{ij} correspondente àquela etapa. Além disso, os multiplicadores utilizados nas operações elementares utilizadas serão dados por:

$$m_{ki} = \frac{a_{ki}}{a_{ii}} \text{, em que } k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Processos Iterativos – Método da Eliminação de Gauss

Exemplos de sistemas de equações lineares:

Sistema inicial: $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Sistema Escalonado: $$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ \quad\quad 7y + 2z = 20 \\ \quad\quad\quad\quad 17z = 51 \end{cases}$$

Solução do Sistema: $$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Processos Iterativos – Pivoteamento

- Pivoteamento Parcial: Nessa estratégia, em cada etapa da eliminação, procura-se o maior elemento (em valor absoluto) na coluna atual, abaixo ou igual à linha atual, e troca-se a linha atual com essa linha de maior elemento. Isso garante que o pivô selecionado seja o maior possível, minimizando o erro numérico. O pivoteamento parcial ajuda a evitar divisões por números muito pequenos ou próximos de zero.

- Pivoteamento Total: Essa estratégia é uma extensão do pivoteamento parcial. Além de procurar o maior elemento em valor absoluto na coluna atual, considera-se toda a matriz (incluindo a matriz ampliada) para determinar o pivô. Essa abordagem garante uma melhor estabilidade numérica, mas pode ser mais custosa computacionalmente, pois exige a comparação de todos os elementos da matriz.

Processos Iterativos – Pivoteamento

- Exemplo: Considere o seguinte sistema de equações lineares. Determine o sistema equivalente na forma escalonada e determine sua solução.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \end{cases}$$

1ª Etapa: Preserve a primeira equação e faça as seguintes operações:

$$2^{a}\ Equação \longleftarrow (-3) \cdot Eq\ 1 + Eq\ 2$$

$$3^{a}\ Equação \longleftarrow (-2) \cdot Eq\ 1 + Eq\ 3$$

Assim,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ -7x_2 - 2x_3 &= -20 \\ -2x_2 - 3x_3 &= -13 \end{aligned}$$

Processos Iterativos – Pivoteamento

- Exemplo: Considere o seguinte sistema de equações lineares. Determine o sistema equivalente na forma escalonada e determine sua solução.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ -7x_2 - 2x_3 &= -20 \\ -2x_2 - 3x_3 &= -13 \end{aligned}$$

2ª Etapa: Preserve a primeira equação e faça a seguinte operação:

$$3^{\underline{a}}\ Equação \longleftarrow (-2) \cdot Eq\ 2 + (7) \cdot Eq\ 3$$

Assim,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ -7x_2 - 2x_3 &= -20 \\ -17x_3 &= -51 \end{aligned}$$

Processos Iterativos – Pivoteamento

- <u>Exemplo</u>: Considere o seguinte sistema de equações lineares. Determine o sistema equivalente na forma escalonada e determine sua solução.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\
- 7x_2 - 2x_3 &= -20 \\
- 17x_3 &= -13
\end{aligned}
$$

A partir da 3ª equação conclui-se que:

$$-17x_3 = -51 \Leftrightarrow x_3 = \frac{-51}{-17} \Leftrightarrow x_3 = 3$$

Substituindo $x_3 = 3$ na segunda equação:

$$-7x_2 - 2.(3) = -20 \Leftrightarrow$$

$$-7x_2 - 6 = -20 \Leftrightarrow$$

$$-7x_2 = -20 + 6 \Leftrightarrow$$

$$x_2 = \frac{-14}{-7} \Leftrightarrow x_2 = 2$$

Processos Iterativos – Matriz Inversa

Definição: Considere uma matriz quadrada A com determinante não nulo. A matriz inversa de A, denotada por A^{-1}, é uma matriz tal que:

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = Id$, em que Id é a matriz identidade.

Observação:

A partir da matriz inversa de uma matriz de coeficientes de um sistema de equações lineares é possível determinar a solução deste sistema. Basta observarmos a sequência de igualdades a seguir:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow$$

$$\left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Processos Iterativos – Matriz Inversa

O método de Gauss-Jordan para encontrar a matriz inversa

Procedimento:

1. Escreva a matriz A original seguida da matriz identidade I, formando uma matriz ampliada [A | I].
2. Aplique operações elementares de linha na matriz ampliada para transformar a parte esquerda (A) em uma matriz identidade. As mesmas operações devem ser aplicadas à matriz identidade à direita.
3. Após realizar todas as operações elementares necessárias, a parte direita da matriz ampliada será a matriz inversa de A.
4. Se a parte esquerda da matriz ampliada não se tornar uma matriz identidade, isso significa que a matriz A não tem uma matriz inversa.

Processos Iterativos – Matriz Inversa

Exemplo: Considere o seguinte sistema de equações lineares.

Solução: O sistema possui $A \cdot X = B$ como representação na forma matricial, em que:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vamos determinar a matriz A^{-1} inversa da matriz A utilizando as etapas descritas nos itens de (1) até (4) descritos anteriormente. Assim:

$$(A|Id) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Processos Iterativos – Matriz Inversa

Exemplo: Considere o seguinte sistema de equações lineares.

Solução: Mantendo a primeira linha da matriz ampliada, fazer as seguintes operações elementares:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Linha 2 ← (−3) . Linha 1 + Linha 2

Linha 3 ← (−2) . Linha 1 + Linha 3

$$(A|Id) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dessa forma, obteremos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Processos Iterativos – Matriz Inversa

Exemplo: Considere o seguinte sistema de equações lineares.

Solução: Agora, vamos manter as duas primeiras linhas da matriz obtida e efetuar a operação elementar:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Linha 2} \leftarrow \left(\frac{-1}{7}\right).\text{Linha 2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dessa forma, obteremos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & 3/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Processos Iterativos – Matriz Inversa

Exemplo: Considere o seguinte sistema de equações lineares.

Solução: Realizando a operação elementar:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Linha 3 ← (2) . Linha 2 + Linha 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & 3/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dessa forma, obteremos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & 3/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & -17/7 & -8/7 & -2/7 & 1 \end{array}\right)$$

Processos Iterativos – Matriz Inversa

Exemplo: Considere o seguinte sistema de equações lineares.

Solução: Realizaremos agora as operações elementares, mantendo a linha 3 sem mudanças

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$\text{Linha } 1 \leftarrow (-1).\text{Linha } 3 + \text{Linha } 1$ e

$\text{Linha } 2 \leftarrow \left(-2/_7\right).\text{Linha } 3 + \text{Linha } 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & 3/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8/17 & 2/17 & -7/17 \end{array}\right)$$

Dessa forma, obteremos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 9/_{17} & -2/_{17} & 7/_{17} \\ 0 & 1 & 0 & 5/_{17} & -3/_{17} & 2/_{17} \\ 0 & 0 & 1 & 8/_{17} & 2/_{17} & -7/_{17} \end{array}\right)$$

Processos Iterativos – Matriz Inversa

Exemplo: Considere o seguinte sistema de equações lineares.

Solução: Por fim, mantendo as linhas 2 e 3 e fazendo a operação elementar a seguir:

$$Linha\ 1 \leftarrow (-2)\ .\ Linha\ 2 + Linha\ 1$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & {}^{9}/_{17} & {}^{-2}/_{17} & {}^{7}/_{17} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{5}/_{17} & {}^{-3}/_{17} & {}^{2}/_{17} \\ 0 & 0 & 1 & {}^{8}/_{17} & {}^{2}/_{17} & {}^{-7}/_{17} \end{array}\right)$$

Dessa forma, obteremos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & {}^{-1}/_{17} & {}^{4}/_{17} & {}^{3}/_{17} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{5}/_{17} & {}^{-3}/_{17} & {}^{2}/_{17} \\ 0 & 0 & 1 & {}^{8}/_{17} & {}^{2}/_{17} & {}^{-7}/_{17} \end{array}\right)$$

Processos Iterativos – Matriz Inversa

<u>Exemplo</u>: Considere o seguinte sistema de equações lineares.

<u>Solução</u>: Como a parte esquerda da matriz ampliada obtida na etapa anterior é a matriz identidade, segue que a parte direita da mesma matriz ampliada obtida é a matriz inversa de A, a matriz dos coeficientes do sistema linear dado no início do problema, ou seja:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/17 & 4/17 & 3/17 \\ 0 & 1 & 0 & 5/17 & -3/17 & 2/17 \\ 0 & 0 & 1 & 8/17 & 2/17 & -7/17 \end{array}\right)$$

Processos Iterativos – Matriz Inversa

Exemplo: Considere o seguinte sistema de equações lineares.

Solução: Como a parte esquerda da matriz ampliada obtida na etapa anterior é a matriz identidade, segue que a parte direita da mesma matriz ampliada obtida é a matriz inversa de A, a matriz dos coeficientes do sistema linear dado no início do problema, ou seja:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} {}^{-1}/_{17} & {}^{4}/_{17} & {}^{3}/_{17} \\ {}^{5}/_{17} & {}^{-3}/_{17} & {}^{2}/_{17} \\ {}^{8}/_{17} & {}^{2}/_{17} & {}^{-7}/_{17} \end{pmatrix}$$

Processos Iterativos – Matriz Inversa

Exemplo: Considere o seguinte sistema de equações lineares.

Solução: Dessa maneira, podemos encontrar a solução do sistema linear dado inicialmente através da igualdade:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \end{cases}$$

$$X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} -1/17 & 4/17 & 3/17 \\ 5/17 & -3/17 & 2/17 \\ 8/17 & 2/17 & -7/17 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Processos Iterativos – Matriz Inversa

Multiplicando a matriz A^{-1} (3x3) pela matriz B (3x1):

	$\begin{matrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}$
$\begin{pmatrix} -1/17 & 4/17 & 3/17 \\ 5/17 & -3/17 & 2/17 \\ 8/17 & 2/17 & -7/17 \end{pmatrix}$	8.(-1/17) + 4.(4/17) + 3.(3/17) = 1 8.(5/17) + 4.(-3/17) + 3.(2/17) = 2 8.(8/17) + 4.(2/17) + 3.(-7/17) = 3

Processos Iterativos – Gauss-Jacobi

- Método de solução de sistemas lineares que fornece <u>solução aproximada</u> através de iterações sucessivas.

Esse método é particularmente útil para sistemas de equações grandes, em que o cálculo direto se torna muito caro computacionalmente e consiste na seguinte transformação do sistema linear $A\,.\,X = B$ em $X = C\,.\,X + G$ em, em que:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & {-a_{12}}/{a_{11}} & {-a_{13}}/{a_{11}} & & {-a_{1n}}/{a_{11}} \\ {-a_{21}}/{a_{22}} & 0 & {-a_{23}}/{a_{22}} & \cdots & {-a_{2n}}/{a_{22}} \\ {-a_{31}}/{a_{33}} & {-a_{31}}/{a_{33}} & 0 & & {-a_{31}}/{a_{33}} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ {-a_{n1}}/{a_{nn}} & {-a_{n2}}/{a_{nn}} & {-a_{n3}}/{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ e } G = \begin{pmatrix} {b_1}/{a_{11}} \\ {b_2}/{a_{22}} \\ {b_3}/{a_{33}} \\ \vdots \\ {b_n}/{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

<u>Importante</u>:

- A matriz C possui a diagonal nula e a igualdade $X = C\,.\,X + G$ <u>consiste em isolar as variáveis correspondentes às linhas a que pertencem.</u>

Processos Iterativos – Gauss-Jacobi

- O método de Gauss-Jacobi consiste em, a partir de uma possível solução $X^{(0)}$, obtermos uma sequência ($X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(K)}, \ldots$) através da relação recursiva

$$X^{(K+1)} = C.X^{(K)} + G$$

É importante observar que a i-ésima linha da igualdade acima, na etapa K+1 das iterações, será dada por:

$$x_i^{(K+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - a_{i1}x_1^{(K)} - a_{i2}x_2^{(K)} - \cdots - a_{i\,i-1}x_{i-1}^{(K)} - a_{i\,i+1}x_{i+1}^{(K)} - \cdots - a_{in}x_n^{(K)}\right)$$

- Esse procedimento deve ser repetido até que a sequência de possíveis soluções ($X^{(K)}$) possa ser tomada como uma solução aproximada. Isso geralmente é feito verificando e comparando o erro proporcionado pelas iterações sucessivas e aplicando um critério de parada adequado.

Processos Iterativos – Gauss-Jacobi

<u>Exemplo</u>: Resolva o sistema a seguir pelo método de Gauss-Jacobi. Utilize como valor inicial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}6 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$. Adote uma tolerância para o erro de $\varepsilon = 0{,}05$.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

$10x_1 = 7 + 0x_1 - 2x_2 - x_3 \Leftrightarrow x_1 = (7/10) + 0x_1 - (2/10)x_2 - (1/10)\,x_3$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-3}{10} & 0 \end{pmatrix} \; e \; G = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{-8}{5} \\ \frac{6}{10} \end{pmatrix}.$$

Processos Iterativos – Gauss-Jacobi

Exemplo: Resolva o sistema a seguir pelo método de Gauss-Jacobi. Utilize como valor inicial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{pmatrix}$. Adote uma tolerância para o erro de $\varepsilon = 0,05$.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-3}{10} & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad G = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{-8}{5} \\ \frac{6}{10} \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad G = \begin{pmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{pmatrix}.$$

Processos Iterativos – Gauss-Jacobi

Exemplo: Resolva o sistema a seguir pelo método de Gauss-Jacobi. Utilize como valor inicial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{pmatrix}$. Adote uma tolerância para o erro de $\varepsilon = 0,05$.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0,2x_2^{(0)} - 0,1x_3^{(0)} + 0,7 = -0,2(-1,6) - 0,1(0,6) + 0,7 = 0,96 \\ x_2^{(1)} = -0,2x_1^{(0)} - 0,2x_3^{(0)} - 1,6 = -0,2(0,7) - 0,2(0,6) - 1,6 = -1,86 \\ x_3^{(1)} = -0,2x_1^{(0)} - 0,3x_2^{(0)} + 0,6 = -0,2(0,7) - 0,3(-1,6) + 0,6 = 0,94 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad G = \begin{pmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{pmatrix}.$$

Processos Iterativos – Gauss-Jacobi

Exemplo: Resolva o sistema a seguir pelo método de Gauss-Jacobi. Utilize como valor inicial $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}96 \\ -1{,}86 \\ 0{,}94 \end{pmatrix}$. Adote uma tolerância para o erro de $\varepsilon = 0{,}05$.

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |+0{,}96 - 0{,}7| = 0{,}26$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |-1{,}86 + 1{,}6| = 0{,}26$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |+0{,}94 - 0{,}6| = 0{,}34$$

O numerador é o maior valor absoluto calculado anteriormente e o denominador é o maior valor absoluto dos termos da matriz $X^{(1)}$.

$$\varepsilon_1 = \frac{0{,}34}{1{,}86} = 0{,}1828 > 0{,}05 = \varepsilon$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad G = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}6 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Processos Iterativos – Gauss-Jacobi

<u>Exemplo</u>: Resolva o sistema a seguir pelo método de Gauss-Jacobi. Utilize como valor inicial $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{pmatrix}$. Adote uma tolerância para o erro de $\varepsilon = 0,05$.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -0,2x_2^{(1)} - 0,1x_3^{(1)} + 0,7 = -0,2(-1,86) - 0,1(0,94) + 0,7 = 0,978 \\ x_2^{(2)} = -0,2x_1^{(1)} - 0,2x_3^{(1)} - 1,6 = -0,2(0,96) - 0,2(0,94) - 1,6 = -1,98 \\ x_3^{(2)} = -0,2x_1^{(1)} - 0,3x_2^{(1)} + 0,6 = -0,2(0,96) - 0,3(-1,86) + 0,6 = 0,966 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad G = \begin{pmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{pmatrix}.$$

Processos Iterativos – Gauss-Jacobi

Exemplo: Resolva o sistema a seguir pelo método de Gauss-Jacobi. Utilize como valor inicial $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,978 \\ -1,98 \\ 0,966 \end{pmatrix}$. Adote uma tolerância para o erro de $\varepsilon = 0,05$.

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |0,978 - 0,96| = 0,018$$

$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |-1,98 + 1,86| = 0,12$$

$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |0,966 - 0,94| = 0,026$$

O numerador é o maior valor absoluto calculado anteriormente e o denominador é o maior valor absoluto dos termos da matriz $X^{(2)}$.

$$\varepsilon_2 = \frac{0,12}{1,98} = 0,0606 > 0,05 = \varepsilon$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad G = \begin{pmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{pmatrix}.$$

Processos Iterativos – Gauss-Jacobi

Exemplo: Resolva o sistema a seguir pelo método de Gauss-Jacobi. Utilize como valor inicial $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,978 \\ -1,98 \\ 0,966 \end{pmatrix}$. Adote uma tolerância para o erro de $\varepsilon = 0,05$.

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -0,2x_2^{(2)} - 0,1x_3^{(2)} + 0,7 = -0,2(-1,98) - 0,1(0,966) + 0,7 = 0,9994 \\ x_2^{(3)} = -0,2x_1^{(2)} - 0,2x_3^{(2)} - 1,6 = -0,2(0,978) - 0,2(0,966) - 1,6 = -1,9888 \\ x_3^{(3)} = -0,2x_1^{(2)} - 0,3x_2^{(2)} + 0,6 = -0,2(0,978) - 0,3(-1,98) + 0,6 = 0,9984 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad G = \begin{pmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{pmatrix}.$$

Processos Iterativos – Gauss-Jacobi

Exemplo: Resolva o sistema a seguir pelo método de Gauss-Jacobi. Utilize como valor inicial $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,978 \\ -1,98 \\ 0,966 \end{pmatrix}$. Adote uma tolerância para o erro de $\varepsilon = 0,05$.

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |0,9994 - 0,978| = 0,0214$$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |-1,9888 + 1,98| = 0,0088$$

$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |0,9984 - 0,966| = 0,0324$$

O numerador é o maior valor absoluto calculado anteriormente e o denominador é o maior valor absoluto dos termos da matriz $X^{(2)}$.

$$\varepsilon_2 = \frac{0,0324}{1,9888} = 0,0163 < 0,05 = \varepsilon$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad G = \begin{pmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{pmatrix}.$$

Processos Iterativos – Gauss-Jacobi

Exemplo: Resolva o sistema a seguir pelo método de Gauss-Jacobi. Utilize como valor inicial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{pmatrix}$. Adote uma tolerância para o erro de $\varepsilon = 0,05$.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\bar{X} = X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,9994 \\ -1,9888 \\ 0,9984 \end{pmatrix}$$

Processos Iterativos – Gauss-Seidel

- Método semelhante ao anterior com a única diferença que se pode ir usando os resultados da k-ésima iteração conforme eles vão surgindo na própria k-ésima iteração.

Da mesma forma que no método de Gauss-Jacobi, no método de Gauss-Seidel, o sistema linear $A\,.\,X = B$ é escrito na forma $X = C\,.\,X + G$ por separação da diagonal. O processo iterativo consiste em, a partir de $X^{(0)}$, uma aproximação inicial, calcular $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(K)}, \dots$ da seguinte maneira:

$$
\begin{cases}
x_1^{(K+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(K)} - a_{13}x_3^{(K)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(K)}\right) \\
x_2^{(K+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(K+1)} - a_{23}x_3^{(K)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(K)}\right) \\
x_3^{(K+1)} = \dfrac{1}{33}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(K+1)} - a_{32}x_2^{(K+1)} - a_{42}x_2^{(K)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(K)}\right) \\
\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
x_n^{(K+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(K+1)} - a_{n2}x_2^{(K+1)} - \cdots - a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(K+1)}\right)
\end{cases}
$$

Processos Iterativos – Gauss-Seidel

Exemplo: Resolva pelo método de Gauss-Seidel o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

. Utilize como tolerância para a aproximação o valor de $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$ e a aproximação inicial nula, ou seja, $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solução:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}75 & 0 & -0{,}25 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Processos Iterativos – Gauss-Seidel

Exemplo: Resolva pelo método de Gauss-Seidel o seguinte sistema de equações lineares:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{cases} x_1^{(1)} = 1 - 0{,}2x_2^{(0)} - 0{,}2x_3^{(0)} = 1 - 0{,}2(0) - 0{,}2(0) = 1 \\ x_2^{(1)} = 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(1)} - 0{,}25x_3^{(0)} = 1{,}5 - 0{,}75(1) - 0{,}25(0) = 0{,}75 \\ x_3^{(1)} = 0 - 0{,}5x_1^{(1)} - 0{,}5x_2^{(1)} = -0{,}5(1) - 0{,}5(0{,}75) = -0{,}875 \end{cases}$$

Solução:

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}75 & 0 & -0{,}25 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Processos Iterativos – Gauss-Seidel

Exemplo: Resolva pelo método de Gauss-Seidel o seguinte sistema de equações lineares:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{cases} x_1^{(1)} = 1 - 0{,}2x_2^{(0)} - 0{,}2x_3^{(0)} = 1 - 0{,}2(0) - 0{,}2(0) = 1 \\ x_2^{(1)} = 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(1)} - 0{,}25x_3^{(0)} = 1{,}5 - 0{,}75(1) - 0{,}25(0) = 0{,}75 \\ x_3^{(1)} = 0 - 0{,}5x_1^{(1)} - 0{,}5x_2^{(1)} = -0{,}5(1) - 0{,}5(0{,}75) = -0{,}875 \end{cases}$$

Ou seja, $\mathrm{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}75 \\ -0{,}875 \end{pmatrix}$

Critério de parada: ($\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$)

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |1 - 0| = 1$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |0{,}75 - 0| = 0{,}75$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |-0{,}875 - 0| = 0{,}875$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1} = 1 > 5 \times 10^{-2} = \varepsilon.$$

Processos Iterativos – Gauss-Seidel

Exemplo: Resolva pelo método de Gauss-Seidel o seguinte sistema de equações lineares:

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}75 \\ -0{,}875 \end{pmatrix}; \begin{cases} x_1^{(2)} = 1 - 0{,}2x_2^{(1)} - 0{,}2x_3^{(1)} = 1 - 0{,}2(0{,}75) - 0{,}2(-0{,}875) = 1{,}025 \\ x_2^{(2)} = 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(2)} - 0{,}25x_3^{(1)} = 1{,}5 - 0{,}75(1{,}025) - 0{,}25(-0{,}875) = 0{,}95 \\ x_3^{(2)} = 0 - 0{,}5x_1^{(2)} - 0{,}5x_2^{(2)} = -0{,}5(1{,}025) - 0{,}5(0{,}95) = -0{,}9875 \end{cases}$$

Solução:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}75 & 0 & -0{,}25 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Processos Iterativos – Gauss-Seidel

Exemplo: Resolva pelo método de Gauss-Seidel o seguinte sistema de equações lineares:

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}75 \\ -0{,}875 \end{pmatrix}; \begin{cases} x_1^{(2)} = 1 - 0{,}2x_2^{(1)} - 0{,}2x_3^{(1)} = 1 - 0{,}2(0{,}75) - 0{,}2(-0{,}875) = 1{,}025 \\ x_2^{(2)} = 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(2)} - 0{,}25x_3^{(1)} = 1{,}5 - 0{,}75(1{,}025) - 0{,}25(-0{,}875) = 0{,}95 \\ x_3^{(2)} = 0 - 0{,}5x_1^{(2)} - 0{,}5x_2^{(2)} = -0{,}5(1{,}025) - 0{,}5(0{,}95) = -0{,}9875 \end{cases}$$

Ou seja, $\mathrm{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1{,}025 \\ 0{,}95 \\ -0{,}9875 \end{pmatrix}$

Critério de parada: ($\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$)

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |1{,}025 - 1| = 0{,}025$$

$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |0{,}95 - 075| = 0{,}2$$

$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |-0{,}9875 - 0| = 0{,}1125$$

$$\varepsilon_2 = \frac{0{,}2}{1{,}025} = 0{,}1951 > 5 \times 10^{-2} = \varepsilon.$$

Processos Iterativos – Gauss-Seidel

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1{,}025 \\ 0{,}95 \\ -0{,}9875 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 1 - 0{,}2x_2^{(2)} - 0{,}2x_3^{(2)} = 1 - 0{,}2(0{,}95) - 0{,}2(-0{,}9875) = 1{,}0075 \\ x_2^{(3)} = 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(3)} - 0{,}25x_3^{(2)} = 1{,}5 - 0{,}75(1{,}0075) - 0{,}25(-0{,}9875) = 0{,}9912 \\ x_3^{(3)} = 0 - 0{,}5x_1^{(3)} - 0{,}5x_2^{(3)} = -0{,}5(1{,}0075) - 0{,}5(0{,}9912) = -0{,}9993 \end{cases}$$

Solução:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}75 & 0 & -0{,}25 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Processos Iterativos – Gauss-Seidel

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1{,}025 \\ 0{,}95 \\ -0{,}9875 \end{pmatrix};$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1{,}0075 \\ 0{,}9912 \\ -0{,}9993 \end{pmatrix}.$$

Critério de parada: ($\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$)

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |1{,}0075 - 1{,}025| = 0{,}0175$$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |0{,}9912 - 0{,}95| = 0{,}0412$$

$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |-0{,}9993 - 0{,}9875| = 0{,}0118$$

$$\varepsilon_2 = \frac{0{,}0412}{1{,}0075} = 0{,}0409 < 5 \times 10^{-2} = \varepsilon$$

Portanto, a solução do sistema linear dado no início do nosso problema com um erro menor que $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$ é:

$$\bar{X} = X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1{,}0075 \\ 0{,}9912 \\ -0{,}9993 \end{pmatrix}.$$

Interatividade

Determine uma solução aproximada para o sistema linear $\begin{cases} 5x_1 - 2{,}5\,x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 3{,}1\,x_1 + 5\,x_2 + 2\,x_3 & = & 6 \\ x_1 - 3\,x_2 + 5\,x_3 & = & -7 \end{cases}$

Aproxime a solução para sistema linear utilizando o método de Gauss-Seidel a partir da aproximação inicial $X^0 = (1; 1; -0{,}7)$. Utilize como tolerância para a aproximação o valor $\varepsilon < 0{,}2$.

a) $x_1 = 1{,}1190$; $x_2 = 0{,}9353$; $x_3 = -1{,}0626$.
b) $x_1 = 1{,}0652$; $x_2 = 0{,}9686$; $x_3 = -1{,}0319$.
c) $x_1 = 0{,}9800$; $x_2 = 0{,}8724$; $x_3 = -1{,}0726$.
d) $x_1 = 1{,}0971$; $x_2 = 0{,}9326$; $x_3 = -1{,}0599$.
e) $x_1 = 1{,}0902$; $x_2 = 0{,}9480$; $x_3 = -1{,}0492$.

Resposta

Determine uma solução aproximada para o sistema linear $\begin{cases} 5x_1 - 2{,}5\,x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 3{,}1\,x_1 + 5\,x_2 + 2\,x_3 & = & 6 \\ x_1 - 3\,x_2 + 5\,x_3 & = & -7 \end{cases}$

Aproxime a solução para sistema linear utilizando o método de Gauss-Seidel a partir da aproximação inicial $X^0 = (1; 1; -0{,}7)$. Utilize como tolerância para a aproximação o valor $\varepsilon < 0{,}2$.

a) $x_1 = 1{,}1190$; $x_2 = 0{,}9353$; $x_3 = -1{,}0626$.
b) $x_1 = 1{,}0652$; $x_2 = 0{,}9686$; $x_3 = -1{,}0319$.
c) $x_1 = 0{,}9800$; $x_2 = 0{,}8724$; $x_3 = -1{,}0726$.
d) $x_1 = 1{,}0971$; $x_2 = 0{,}9326$; $x_3 = -1{,}0599$.
e) $x_1 = 1{,}0902$; $x_2 = 0{,}9480$; $x_3 = -1{,}0492$.

Referências

- CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais de Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

ATÉ A PRÓXIMA!