

#### Sistemas Nebulosos

Inferência Nebulosa

André Paim Lemos andrepl@cpdee.ufmg.br

#### Inferência Nebulosa

Temperatura = 75°C – Pressão: 2 Psi

SE Temperatura é BAIXA E Pressão é ALTA ENTÃO Vazão é ALTA SE Temperatura é MEDIA E Pressão é MEDIA ENTÃO Vazão é BAIXA SE Temperatura é ALTA E Pressão é BAIXA ENTÃO Vazão é BAIXA

Vazão = ?

Produto Cartesiano

$$U \times V = \{(x, y) | x \in U \ e \ y \in V\}$$

Relação binária R(U,V)

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \iff (x,y) \in R(x,y) \\ 0 & caso \ contrario \end{cases}$$

Exemplo

- -R(U,V): x é divisível por y
  - U = {10, 15, 20}
  - $V = \{2, 3, 5\}$

 $R(U,V) = \{(10,2), (10,5), (15,3), (15,5), (20,2), (20,5)\}$ 

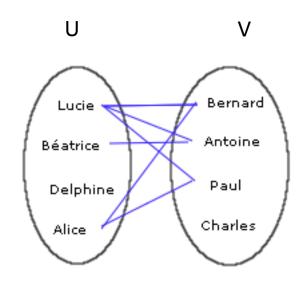
- Conjuntos ordinários
  - Elemento pertence ou não a relação

- -R(U,V): x é divisível por y
  - U = {10, 15, 20}
  - $V = \{2, 3, 5\}$

$$(10,2) \in R$$

$$(10,3) \notin R$$

$$R: (x-1)^2 + (y-1)^2 \le r^2$$



Domínio = U

Co-Domínio = V

Imagem = Subconjunto dos elementos de V associados a elementos de U

 Representa o grau de presença ou ausência de associação, interação entre os elementos de dois ou mais conjuntos nebulosos

#### Exemplos:

- x é bem maior que y
- y é muito próximo de x
- SE x é alto ENTÃO y é baixo

 Relação binária nebulosa é um conjunto nebuloso definido no espaço cartesiano UxV

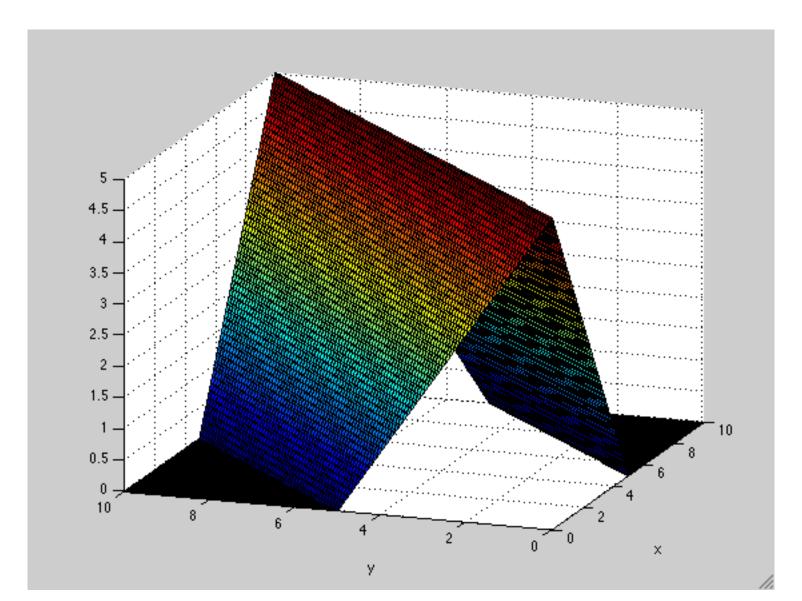
$$R(U, V) = \{(x, y), \mu_R(x, y) | (x, y) \in U \times V\}$$

- Conjuntos ordinários :  $\mu_R(x,y) \in \{0,1\}$
- Conjuntos nebulosos :  $\mu_R(x,y) \in [0,1]$

Exemplo

- Sejam U e V números reais
- -R(x,y): "x é próximo de y"

$$\mu_R(x,y) = \max\{(5 - |x - y|)/5, 0\}$$



- $U = V = \{10,40,80,100,300\}$
- R(x,y): "x é muito maior que y"

	X/Y	10	40	80	100	300
$\mu_R(x,y)=$	10	0	0	0	0	0
	40	0,4	0	0	0	0
	80	0,8	0,2	0	0	0
	100	1,0	0,6	0,2	0	0
	300	1,0	0,8	0,4	0,2	0

 Operações, união, intercessão, complemento também podem ser utilizadas em relações nebulosas

$$\mu_{R \cap S}(x, y) = \mu_R(x, y) \land \mu_S(x, y)$$

$$\mu_{R \cap S}(x, y) = \mu_R(x, y) \vee \mu_S(x, y)$$

- Exemplo:
  - $-U = \{2,12\} e V = \{1,7,13\}$
  - Relações:
    - "u é próximo de v"
    - "u é muito menor que v"

$$\mu_p(u,v) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$\mu_m(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 1\\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

• "u é próximo de v" e "u é muito menor de v"

$$\mu_{p\cap m}(u,v) = \mu_p(u,v) \wedge \mu_m(u,v)$$

$$\mu_p(u,v) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$\mu_m(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{p\cap m}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

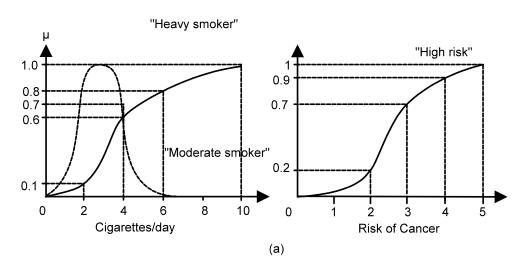
• "u é próximo de v" ou "u é muito menor de v"

$$\mu_{p \cup m}(u, v) = \mu_{p}(u, v) \vee \mu_{m}(u, v)$$

$$\mu_{p}(u, v) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{m}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{p \cup m}(u, v) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.6 & 1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$$

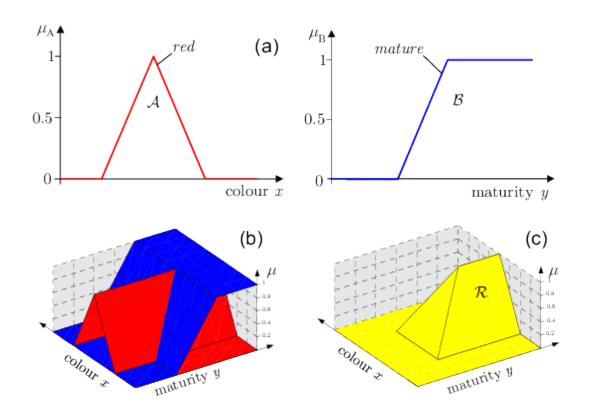


Risk									
es		1	2	3	4	5			
Cigarettes	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0			
ပြိ	2	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1			
	4	0.0	0.2	0.6	0.6	0.6			
	6	0.0	0.2	0.7	0.8	0.8			
	10	0.0	0.2	0.7	0.9	1.0			
			(b)						

If a person is a **Heavy Smoker** then he has a **High Risk** of lung cancer"

Regra nebulosa:

Se a cor da fruta é **vermelho** então a fruta está **madura** 



"u é próximo de v" definida em UxV (U={2,12})
 e V={1,7,13}

$$\mu_p(u,v) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 & 0.1\\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$$

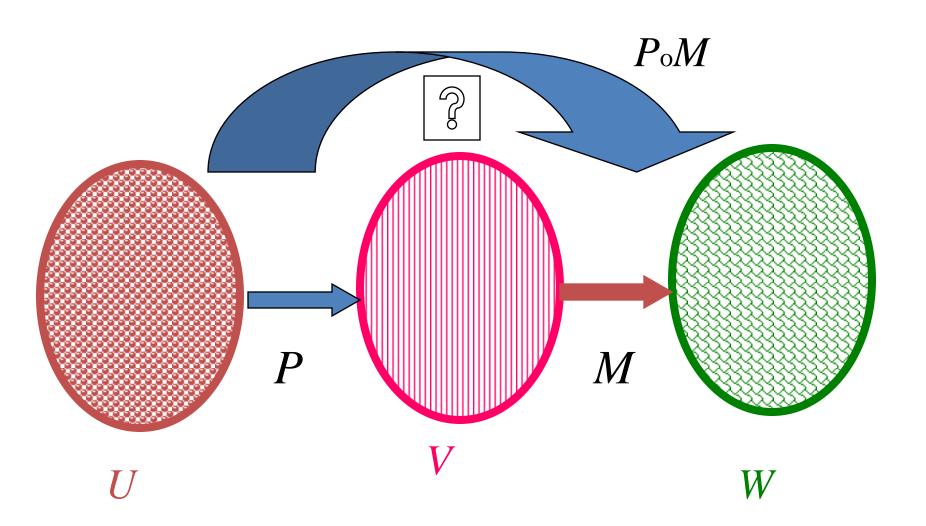
 "v é muito maior que w" definida em VxW (W={4,8})

$$\mu_{mm}(v,w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.6 & 0 \\ 1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

- A proposição
  - "u é próximo de v e v é muito maior que w"
- Composição de duas relações nebulosas

$$R(U, W) = P(U, V) \circ M(V, W)$$

• R(U,W) é definida em UxW



Composição Max-Min

$$\mu_{P \circ M(u,w)} = \{(u,w), max_y [min(\mu_p(u,v), \mu_{mm}(v,w))]\}$$

 $\Lambda = \min_{V = \max}$ 

• "u é próximo de v e v é muito maior que w"

$$\mu_p(u,v) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{mm}(v,w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.6 & 0 \\ 1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{p \circ mm} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.9 & 0.7 \end{pmatrix}$$

- Similar a uma multiplicação de matrizes
  - Porém tratar multiplicação como mínimo e adição como máximo

#### Exemplo:

$$\mu_{p \circ mm}(1,1) = max(min(0.9,0),$$
  
 $min(0.4, 0.6), min(0.1, 1)) = 0.4$ 

Caso particular Proposição Nebulosa

#### x é mediamente grande E z é muito menor que x

$$\begin{array}{l} U = \{ \; x_1, \, x_2, \, x_3, \, x_4, \, x_5 \} \\ W = \{ z_1, \, z_2, \, z_3, \, z_4 \} \\ \mu_{mg} \; (x) = \{ .3/5, \, .7/10, \, 1/15, \, .7/20, \, .3/25 \} \\ & \begin{array}{c} z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \\ \{ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \} \end{array} \\ \chi_1 \quad \begin{array}{c} z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \\ \{ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \} \end{array} \\ \chi_2 \quad \begin{array}{c} x_1 \quad 0.3 \quad 0.2 \quad 0.1 \quad 0 \\ 0.8 \quad 0.7 \quad 0.3 \quad 0.2 \\ 1 \quad 0.8 \quad 0.6 \quad 0.4 \\ 1 \quad 1 \quad 0.8 \quad 0.6 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \\ \chi_5 \quad \begin{array}{c} 1 \quad 0.8 \quad 0.6 \quad 0.4 \\ 1 \quad 1 \quad 0.8 \quad 0.6 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \\ \end{array}$$

Composição Max-Produto

$$P \circ M(u, w) = \vee [\mu_P(u, v) \mu_M(v, w)]$$

Composição Max-Estrela (★=t-norma)

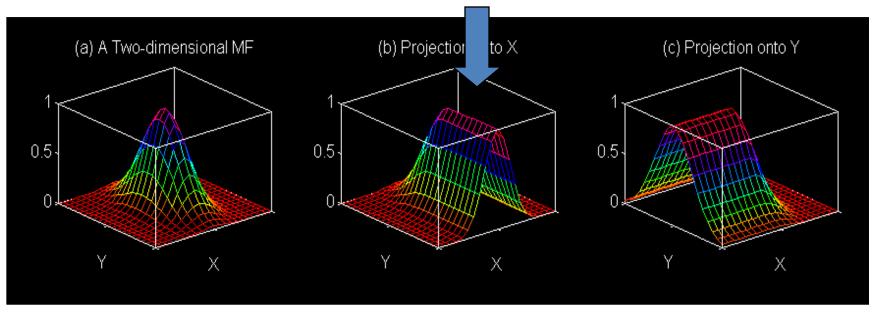
$$P \circ M(u, w) = \vee [\mu_P(u, v) \star \mu_M(v, w)]$$

#### Propriedades de Relações Nebulosas

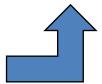
$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$
  
 $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$   
 $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$   
 $S \subset T \implies R \circ S \subset R \circ T$ 

# Projeção de uma Relação Nebulosa

$$\left[R \downarrow x\right] = \left\{ \left[x, \max_{y} \mu_{R}(x, y)\right] / (x, y) \in X \times Y\right\}$$



$$[R \downarrow y] = \{ y, \max_{x} \mu_{R}(x, y) | / (x, y) \in X \times Y \}$$



#### Inferência Nebulosa

Temperatura = 75°

SE Temperatura é ALTA ENTÃO Vazão aumenta



Vazão = ?

R1 ➡ Relação simples (um conjunto nebuloso)

R2 ⇒ Relação de Implicação A → B



Composição das Relações R1 o R2

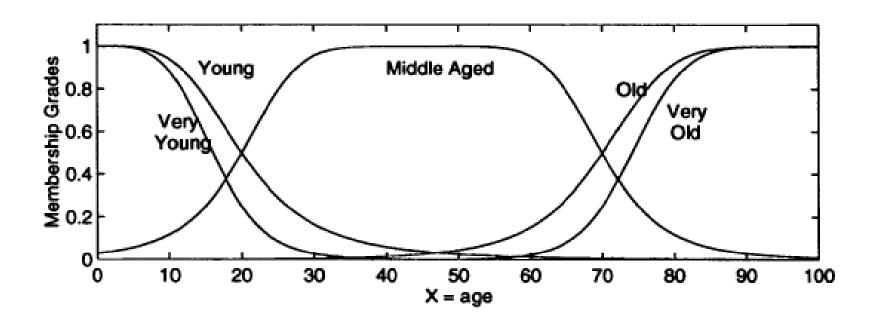
- Variável numérica: assume valor numérico (temperatura = 75°C)
- Variável linguística: assume valor linguístico (jovem, velho, alto, baixo, gordo, magro, quente, frio, etc).
- Valor linguístico é um conjunto nebuloso

- Definida por:
  - x : nome da variável
  - -T(x): conjunto de termos
    - Valores linguísticos ou termos linguísticos
  - X : universo de discurso
  - G : regra sintática
    - Responsável por gerar os termos de T(x)
  - M : regra semântica
    - Responsável por associar cada valor linguístico A com um significado M(A)
    - Significado = conjunto nebuloso

#### Exemplo:

– T(idade) = {novo, muito novo, não tão novo, meia idade, não meia idade, velho, muito velho, não tão velho, mais ou menos velho, extremamente)

- Termos primários: novo, meia-idade, velho
- Negações : não
- Hedges: muito, mais ou menos, extremamente



# Concentração e Dilatação de Valores Linguísticos

 Seja A um valor linguístico caracterizado por um conjunto nebuloso

A<sup>k</sup> é uma versão modificada de A

$$A^k = \int_X [\mu_A(x)]^k / x$$

# Concentração e Dilatação de Valores Linguísticos

Concentração

$$CON(A) = A^2$$

Dilatação

$$DIL(A) = A^{0.5}$$

- Concentração: muito
- Dilatação : mais ou menos

# Negação, Conjunção, Disjunção de Valores Linguísticos

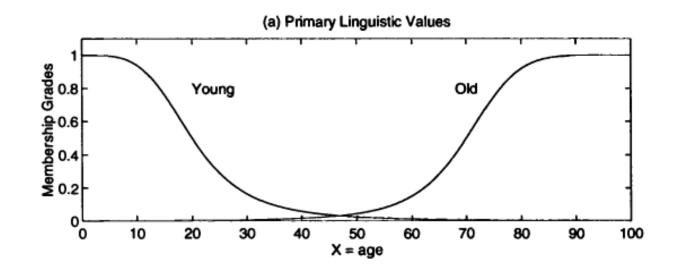
 A negação e os conectivos E e OU podem ser interpretados como:

$$NOT(A) = \neg A = \int_X [1 - \mu_A(x)]/x$$
 $A \ E \ B = A \cap B = \int_X [\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)]/x$ 
 $A \ OU \ B = A \cup B = \int_X [\mu_A(x) \vee \mu_B(x)]/x$ 

## Manipulação de Variáveis Linguísticas

$$\mu_{novo}(x) = bell(x, 20, 2, 0)$$

$$\mu_{velho}(x) = bell(x, 30, 3, 100)$$



## Manipulação de Variáveis Linguísticas

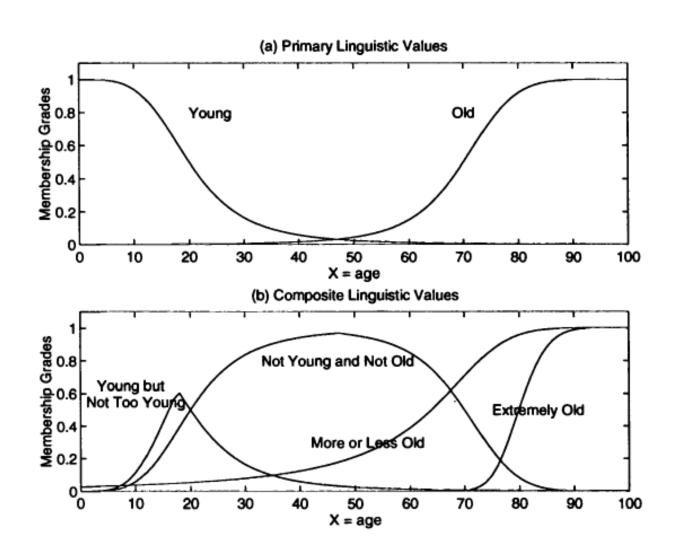
Mais ou menos velho = DIL(velho)

Não novo e não velho = ¬ novo ∩ ¬ velho

Novo mas não muito novo = novo ∩ ¬ CON(novo)

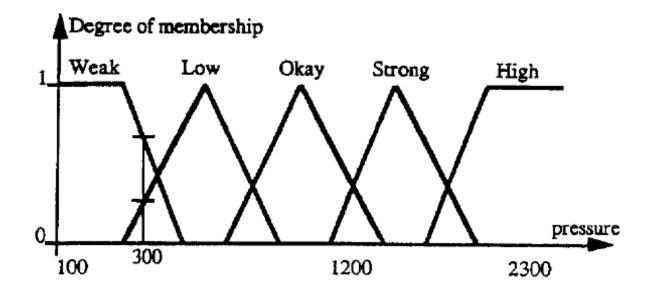
Extremamente velho = CON(CON(CON(velho)))

## Manipulação de Variáveis Linguísticas



## Proposição Nebulosa

- Proposição Nebulosa: atribuição de um valor lingüístico a uma variável lingüística
  - Exemplo:
    - A pressão é alta



## Regra Nebulosa

• Regra SE-ENTÃO nebulosa

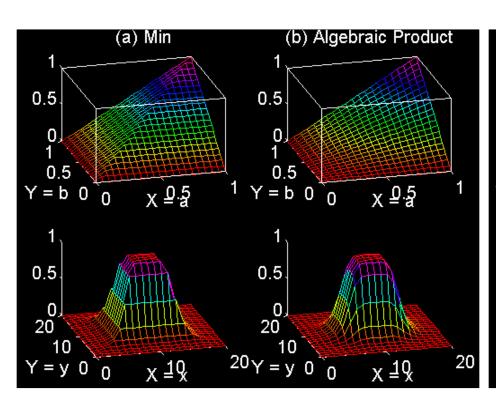
#### SE x é A ENTÃO y é B

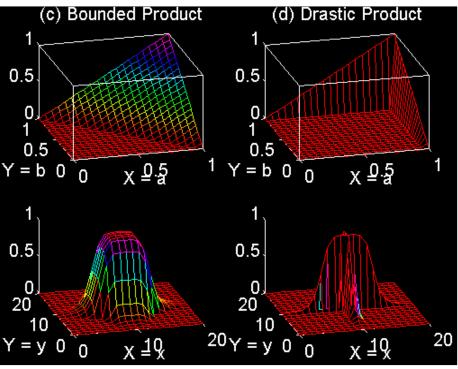
- A e B são valores linguísticos
- "x é A" = antecedente
- "y é B" = consequente

$$\mu_{A\to B}(x, y) = \mu_R(x, y) = f(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

## Regra Nebulosa

$$R = A \rightarrow B = A \times B = \int \mu_A(x) \star \mu_B(x) |(x, y)|$$





 Também conhecido como Raciocínio aproximado

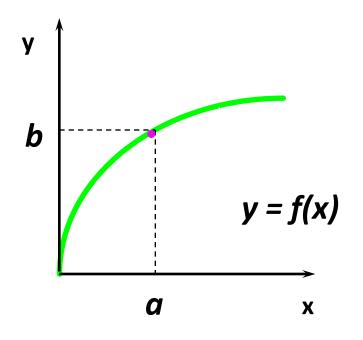
Processo de inferência que produz conclusões a partir de um conjunto de regras SE-ENTÃO e fatos

## Inferência e Raciocínio Nebuloso

Regra: SE x é A ENTÃO y é B

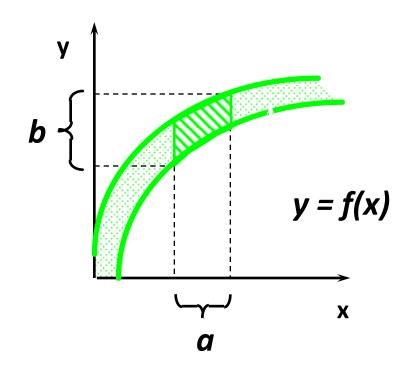
Fato: x é A'

Conclusão: y é B'



a e b: pontos

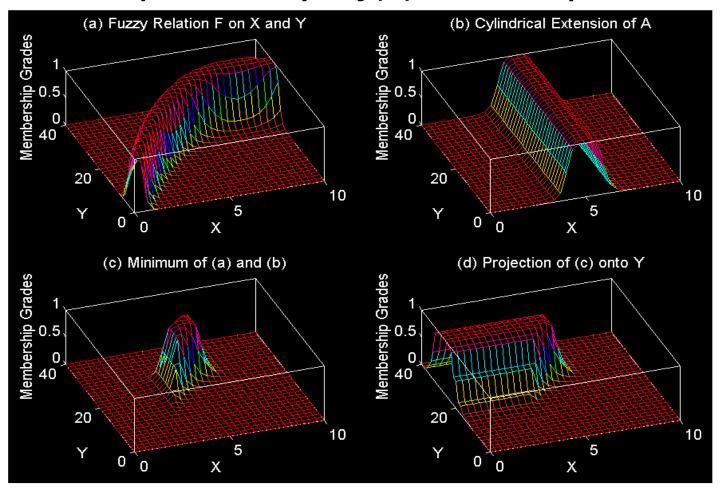
y = f(x): uma curva



a e b: intervalos

y = f(x): uma função intervalar

a is a fuzzy set and y = f(x) is a fuzzy relation



Extensão Cilíndrica de A

$$\mu_{c(A)}(x,y) = \mu_A(x)$$

Intercessão de A com F

$$\mu_{c(A)\cap F}(x,y) = \min[\mu_{c(A)}(x,y), \mu_{F}(x,y)] 
= \min[\mu_{A}(x), \mu_{F}(x,y)].$$

Projeção do resultado em Y

$$\mu_B(y) = \max_x \min[\mu_A(x), \mu_F(x, y)]$$
  
=  $\forall_x [\mu_A(x) \land \mu_F(x, y)].$ 

$$\mu_B(y) = \max_x \min[\mu_A(x), \mu_F(x, y)]$$
  
=  $\forall_x [\mu_A(x) \land \mu_F(x, y)].$ 

Composição Max-min de Relações nebulosas

$$B = A \circ F$$

Utilizada para realizar racicínio nebuloso (ou aproximado)

 Baseado no método de inferência de lógica booleana

#### Modus Ponens

 Infere-se a proposição B a partir de uma proposição verdadeira A e uma implicação

```
A \rightarrow B
```

```
premise 1 (fact): x 	ext{ is } A, factorial premise 2 (rule): <math>factorial factorial factorial
```

Modus Ponens Generalizado

```
premise 1 (fact): x 	ext{ is } A', x 	ext{ premise 2 (rule):} x 	ext{ if } x 	ext{ is } A 	ext{ then y is } B, x 	ext{ consequence (conclusion):} x 	ext{ is } A', x 	ext{ if } x 	ext{ is } A 	ext{ then y is } B',
```

- Onde A' é proximo de A e B' é próximo de B
  - A', A, B' e B são conjuntos nebulosos
- Também conhecido como Raciocínio Aproximado ou Raciocínio Nebuloso

#### Modus Ponens Generalizado

```
premise 1 (fact): x 	ext{ is } A', x 	ext{ premise 2 (rule):} x 	ext{ if } x 	ext{ is } A 	ext{ then y is } B, consequence (conclusion): y 	ext{ is } B',
```

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x} \min[\mu_{A'}(x), \mu_{R}(x, y)]$$

$$= \forall_{x} [\mu_{A'}(x) \land \mu_{R}(x, y)],$$

$$B' = A' \circ R = A' \circ (A \to B).$$

Uma entrada e uma regra

Regra: SE x é A ENTÃO y é B

Fato: x é A'

Conclusão: y é B'

Regra SE-ENTÃO: Relação nebulosa (XxY)

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x} \min[\mu_{A'}(x), \mu_{R}(x, y)]$$
  
=  $\forall_{x} [\mu_{A'}(x) \land \mu_{R}(x, y)],$ 

Uma entrada e uma regra

Regra: SE x é A ENTÃO y is B

Fato: x é A'

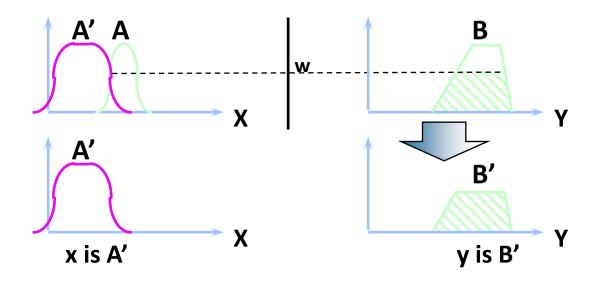
Conclusão: y é B'

Regra SE-ENTÃO : Relação nebulosa  $A \rightarrow B$ 

$$B' = A' \circ R = A' \circ (A \to B)$$

$$\mu_{B'}(y) = [\bigvee_{x} (\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A}(x)] \wedge \mu_{B}(y) \\ = w \wedge \mu_{B}(y).$$

#### Representação Gráfica



Uma regra, múltiplos antecedentes

Regra: Se x é A e y é B Então z é C

Fato: x é A' e y é B'

Conclusão: z é C'

#### Interpretação da regra

$$A \times B \rightarrow C$$

$$R_m(A,B,C) = (A \times B) \times C = \int_{X \times Y \times Z} \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z) / (x,y,z).$$

Uma regra, múltiplos antecedentes

Regra: Se x é A e y é B Então z é C

Fato: x é A' e y é B'

Conclusão: z é C'

#### Resultado

$$C' = (A' \times B') \circ (A \times B \to C)$$

Uma regra, múltiplos antecedentes

Regra: Se x é A e y é B Então z é C

Fato: x é A' e y é B'

Conclusão: z é C'

$$\mu_{C'}(z) = \bigvee_{x,y} [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)] \wedge [\mu_{A}(x) \wedge \mu_{B}(y) \wedge \mu_{C}(z)]$$

$$= \bigvee_{x,y} \{ [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y) \wedge \mu_{A}(x) \wedge \mu_{B}(y)] \} \wedge \mu_{C}(z)$$

$$= \{ \underbrace{\bigvee_{x} [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A}(x)] \}}_{w_{1}} \wedge \{ \underbrace{\bigvee_{y} [\mu_{B'}(y) \wedge \mu_{B}(y)] \}}_{w_{2}} \wedge \mu_{C}(z)$$

$$= \underbrace{(w_{1} \wedge w_{2})}_{w_{1}} \wedge \mu_{C}(z),$$
firing
$$\text{strength}$$

Uma regra, múltiplos antecedentes

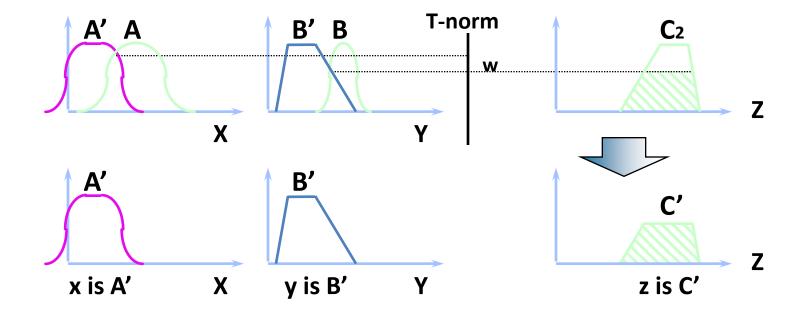
Regra: Se x é A e y é B Então z é C

Fato: x é A' and y é B'

Conclusão: z é C'

Interpretação Alternativa

$$C' = (A' \times B') \circ (A \times B \to C)$$
  
=  $[A' \circ (A \to C)] \cap [B' \circ (B \to C)]$ 



•Múltiplas regras com múltiplos antecedentes:

Regra 1: Se x é A1 e y é B1 Então z é C1

Regra 2: Se x é A2 e y é B2 Então z é C2

Fato: x é A' e y é B'

Conclusão: z é C'

Múltiplas regras com múltiplos antecedentes:

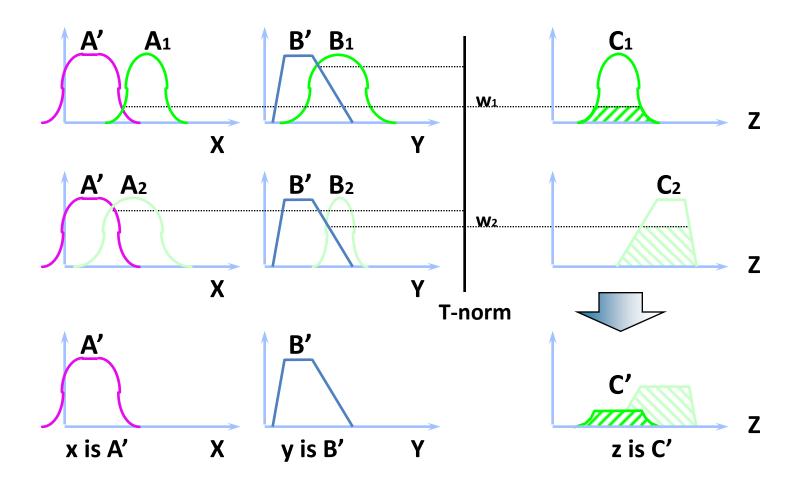
Regra 1: Se x é A1 e y é B1 Então z é C1

Regra 2: Se x é A2 e y é B2 Então z é C2

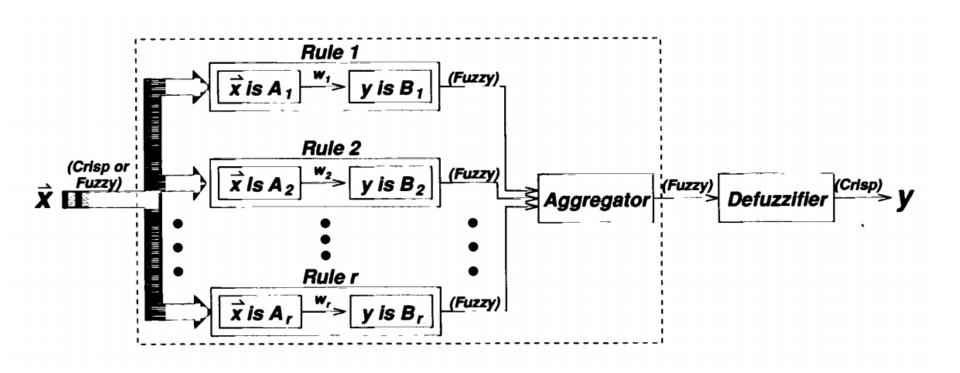
Fato: x é A' e y é B'

Conclusão: z é C'

$$C' = (A' \times B') \circ (R_1 \cup R_2)$$
  
=  $[(A' \times B') \circ R_1] \cup [(A' \times B') \circ R_2]$   
=  $C'_1 \cup C'_2$ ,



## Sistema de Inferência Nebulosa



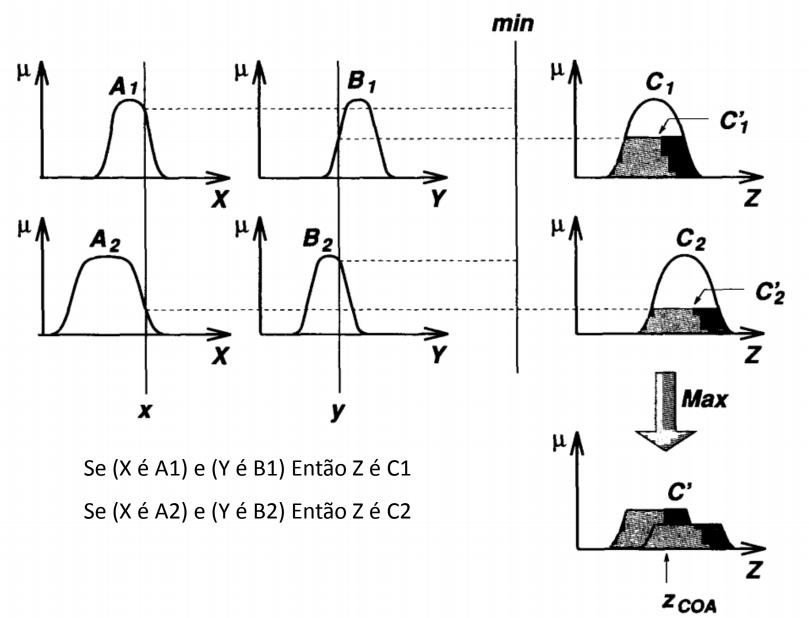
## Sistema de Inferência Nebulosa

MAMDANI

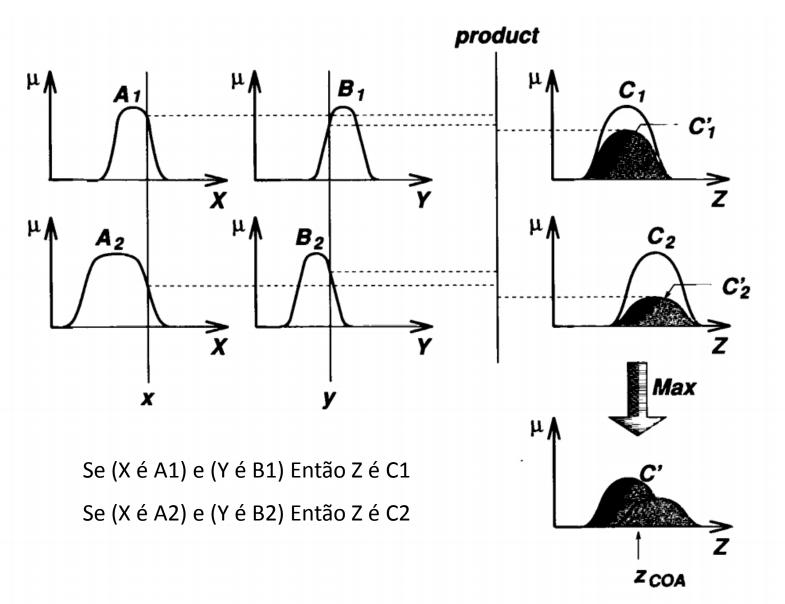
SUGENO

TSUKAMOTO

## Modelo Nebuloso de Mamdani

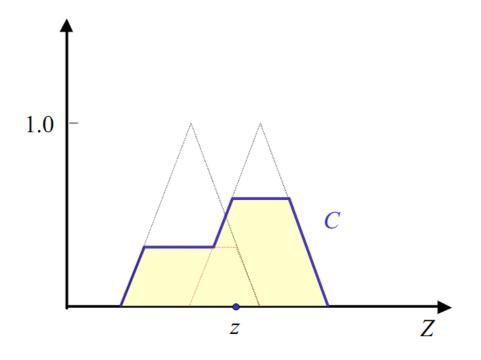


## Modelo Nebuloso de Mamdani



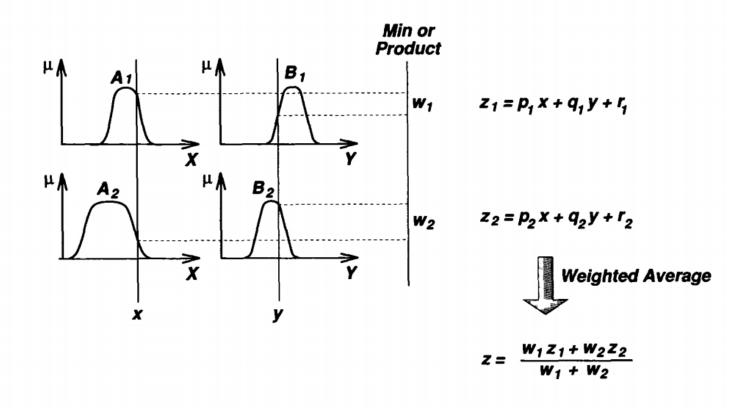
# Defuzzificação

#### Centro de Gravidade



$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i C(z_i)}{\sum_{i=1}^{n} C(z_i)}$$

## Modelo Nebuloso de Sugeno



Se (X é A1) e (Y é B1) Então  $Z1=p_1X + q_1Y+r_1$ Se (X é A2) e (Y é B2) Então  $Z2=p_2X + q_2Y+r_2$ 

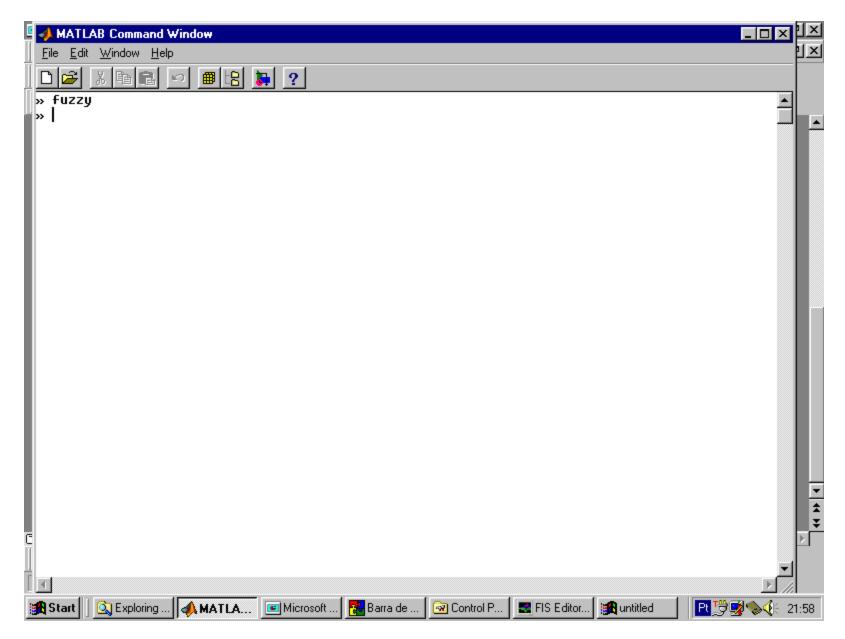
# Exemplo: Projetar um Sistema Nebuloso para Aproximação de Função

Vamos utilizar o toolbox de Fuzzy do MatLab para

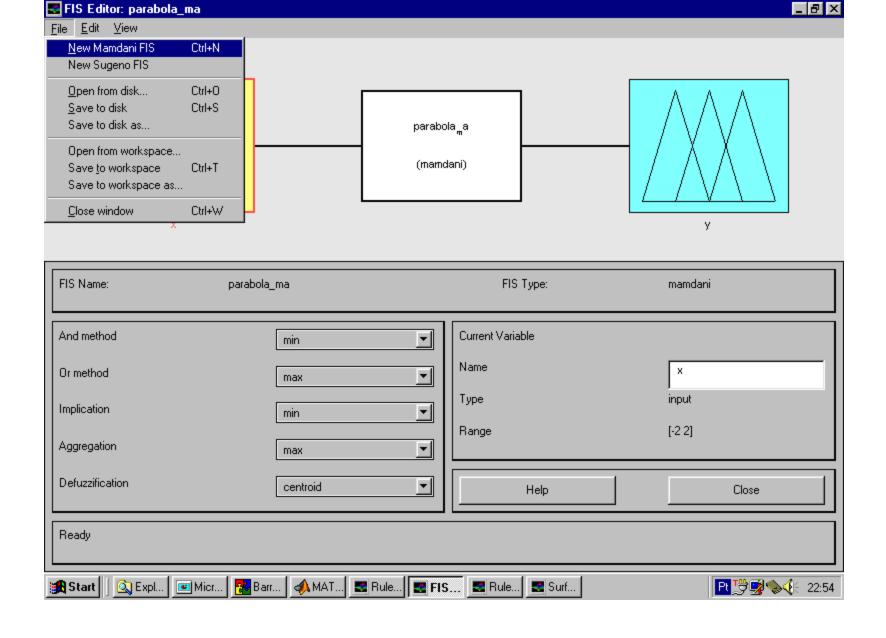
aproximar a função:  $y = x^2$ 

#### PASSOS DO PROJETO

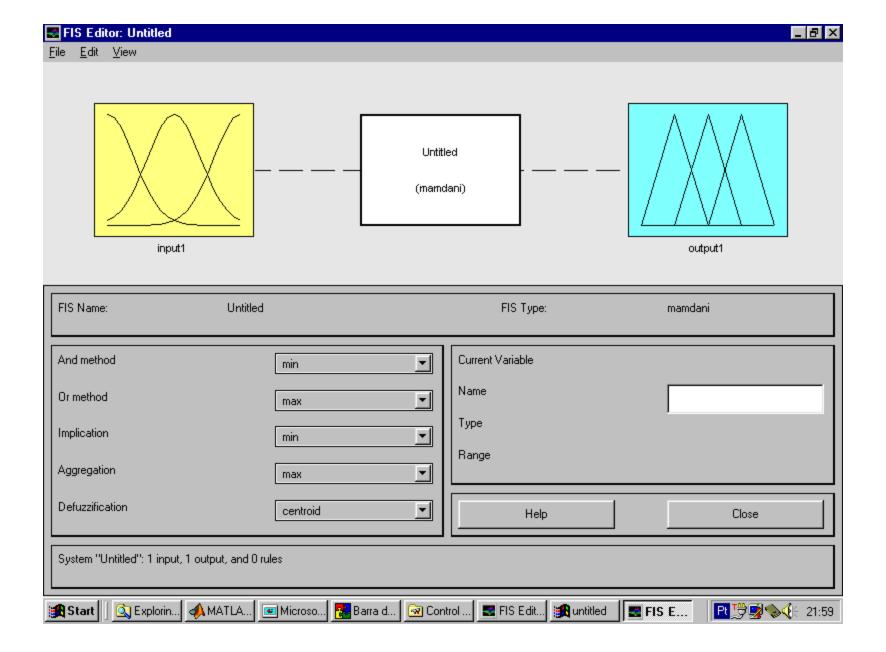
- Definição das variáveis de entrada (x) e saída (y);
- Definição dos universo de discurso das x e y;
- Definição do mecanismo de inferência;
- Definição das funções de pertinência (número e tipo) das x e y;
- Definição dos operadores: AND, OR, implicação, agregação de regras e defuzificação;
- Definição da base de regras;
- Ajustes necessários.



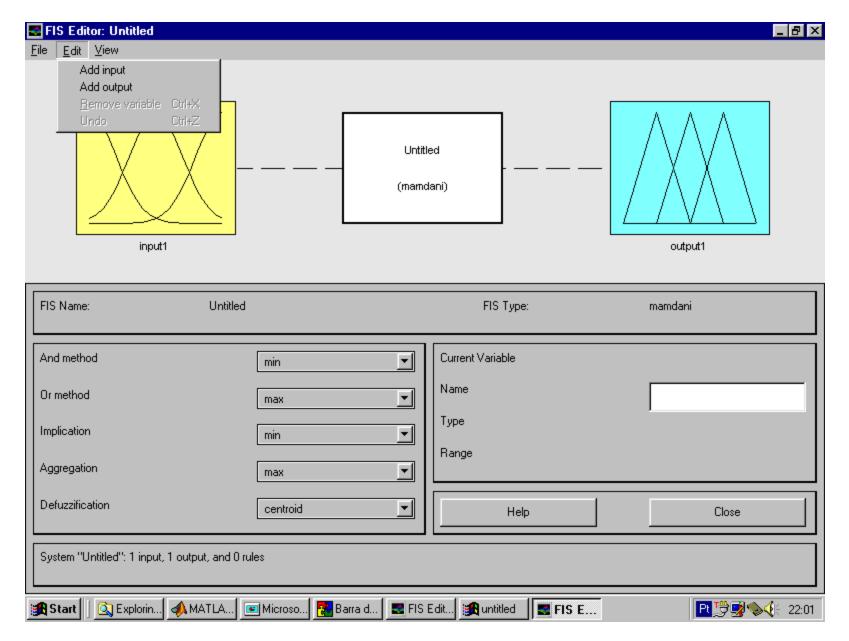
Chamando o Toolbox de Fuzzy Logic



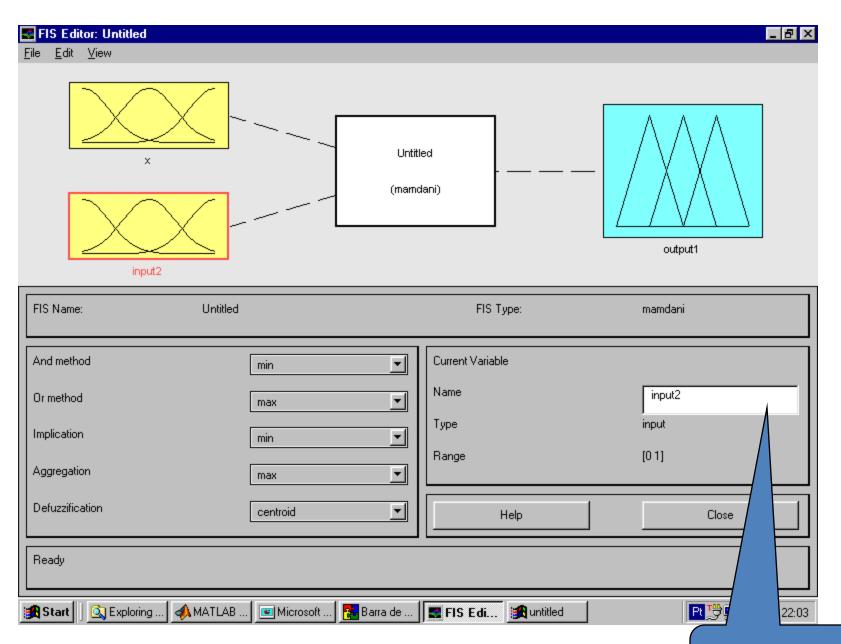
Escolhendo o sistema de inferência



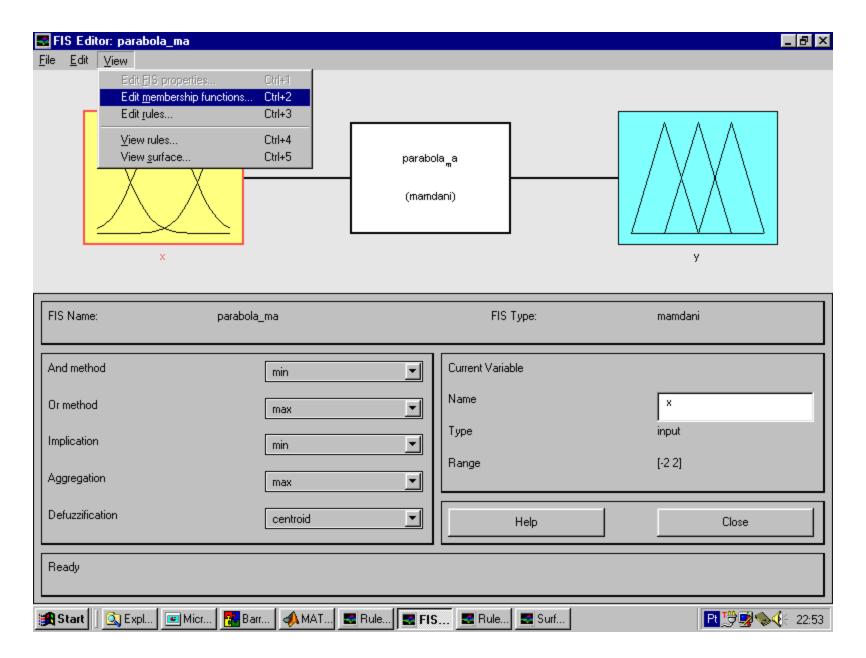
Tela principal



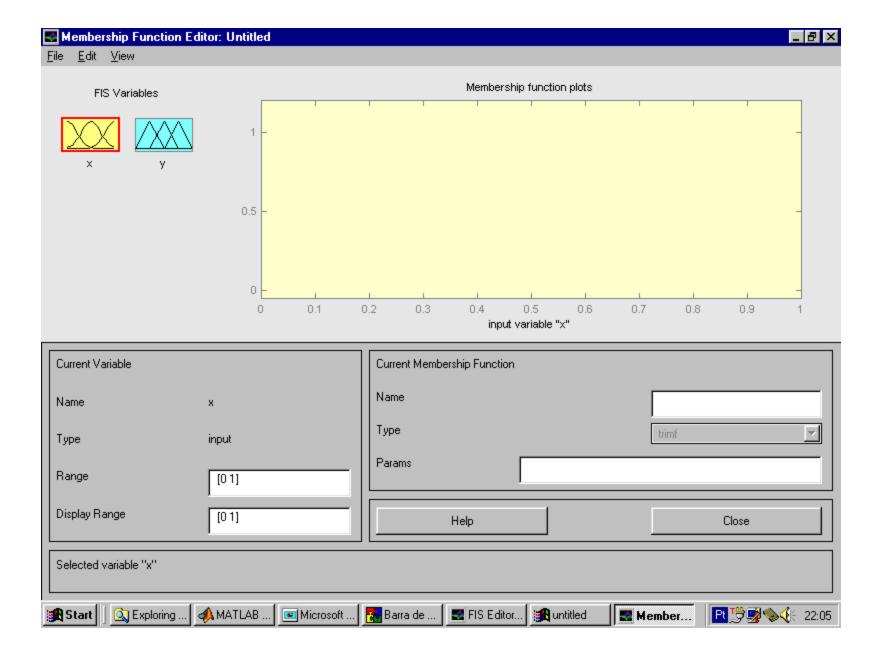
Alterando o número de entrada e saídas

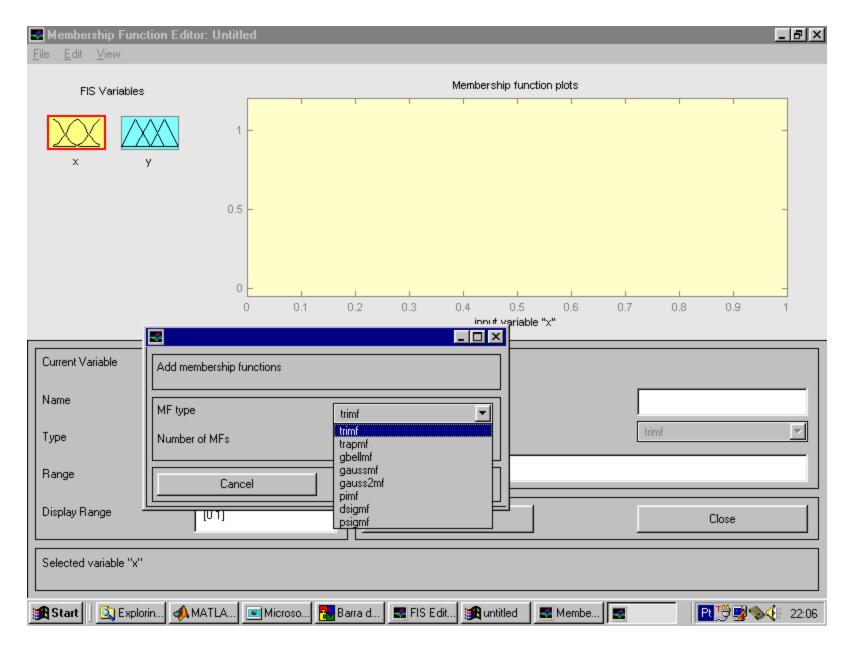


Alterando o nome da variável

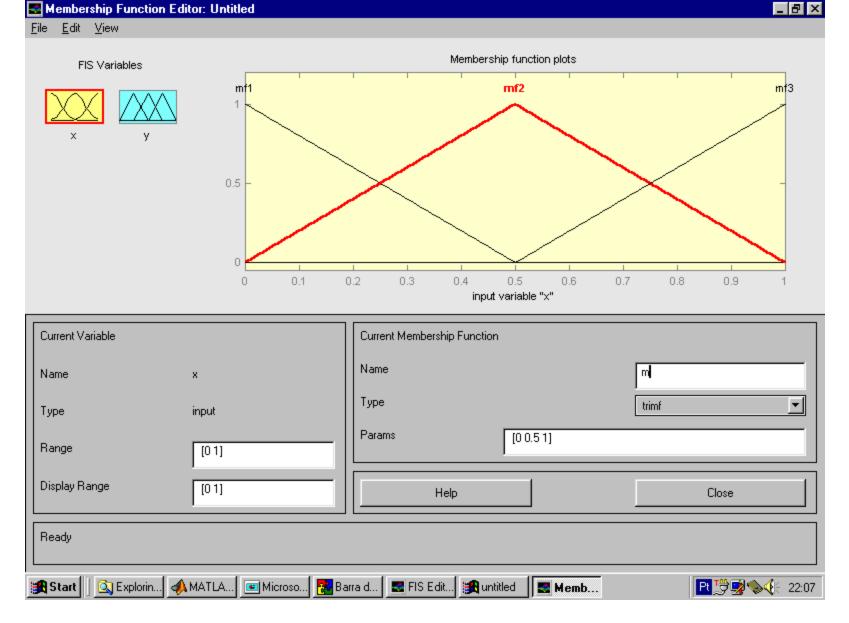


Editar as funções de pertinência

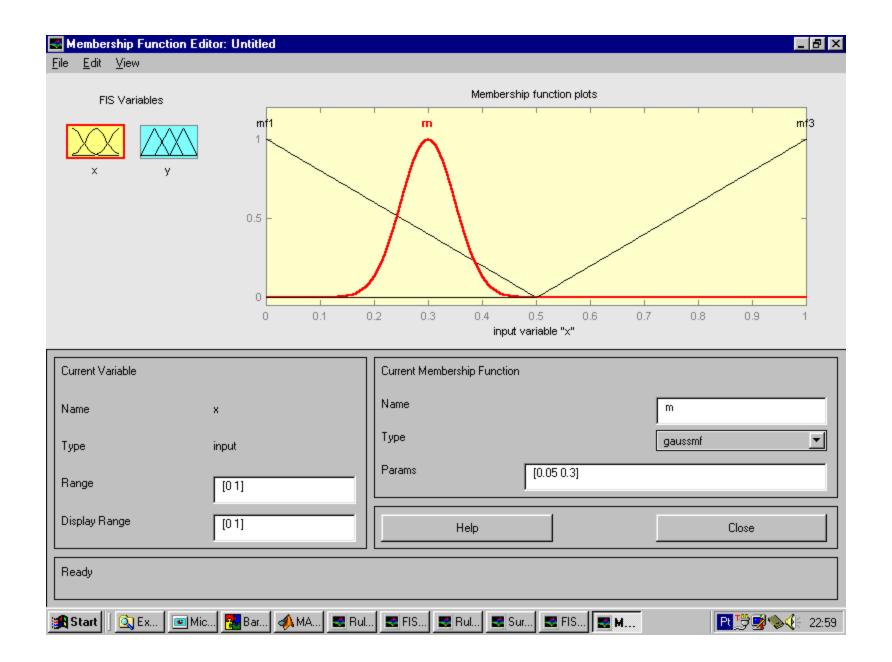


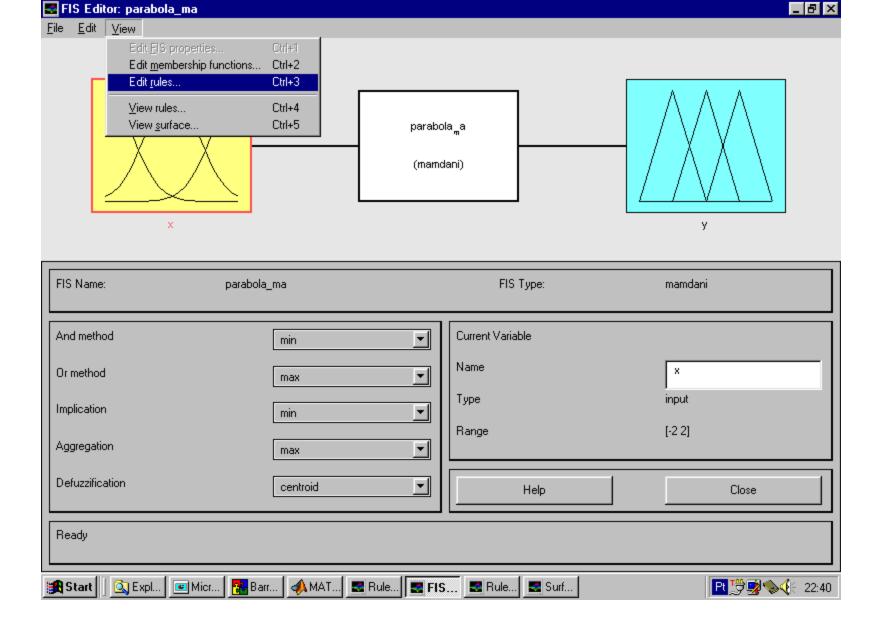


Escolhendo o tipo de função de pertinência

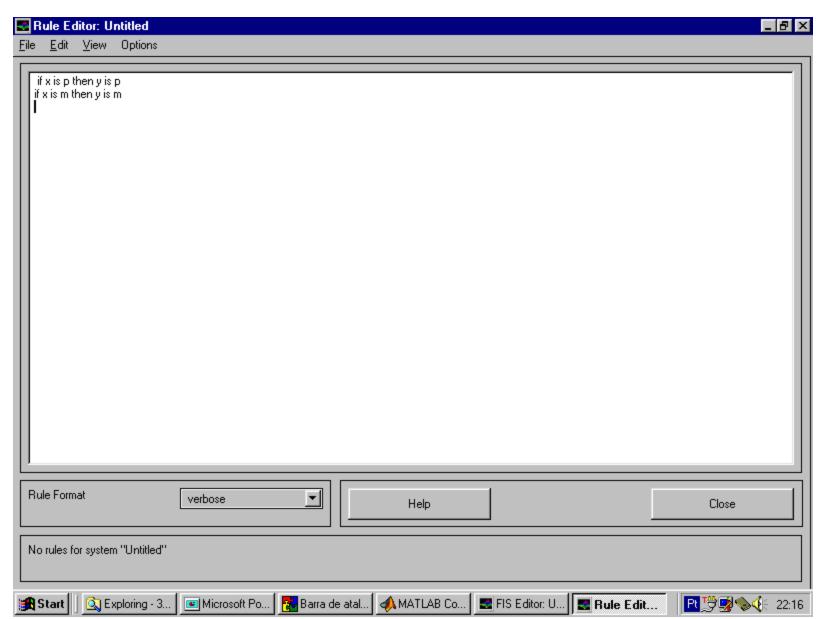


Alterando os parâmetros da função selecionada

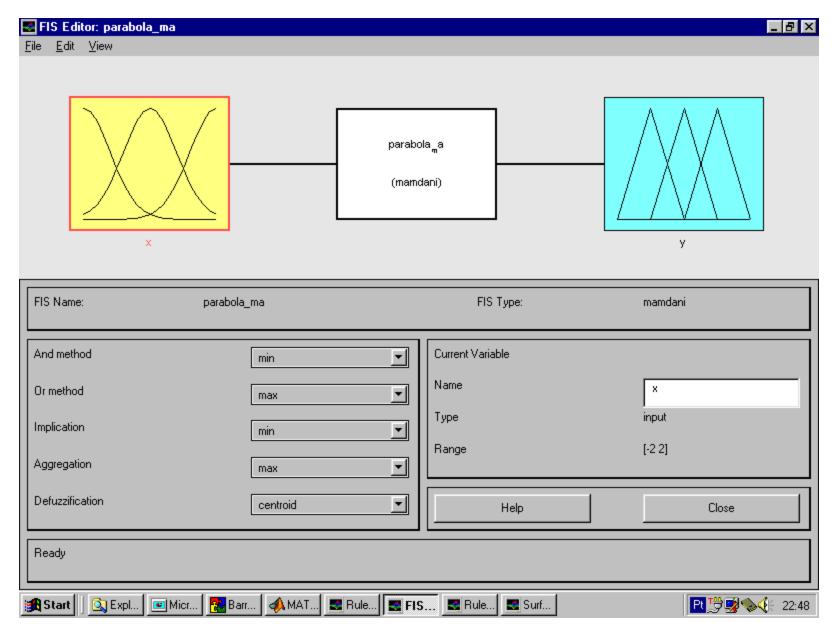




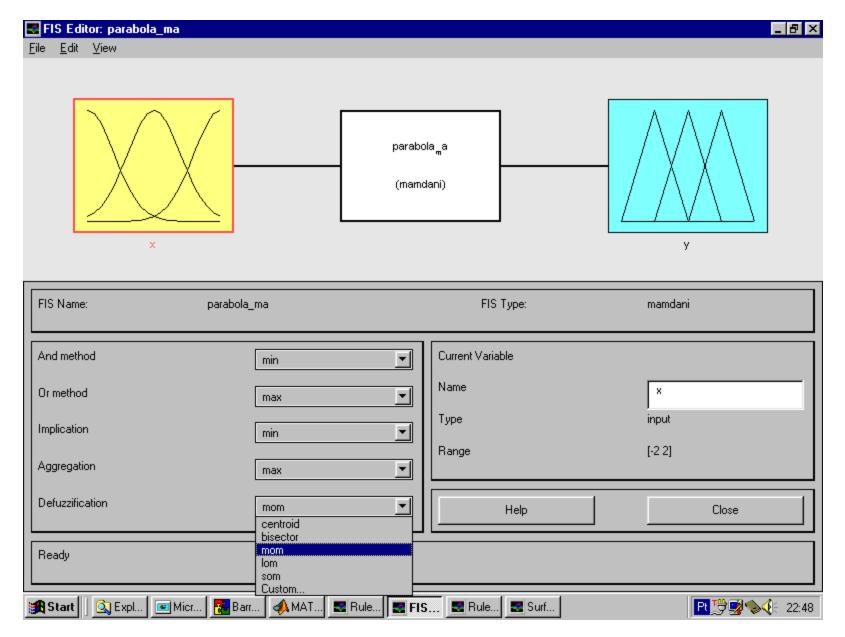
Chamando o editor de regras



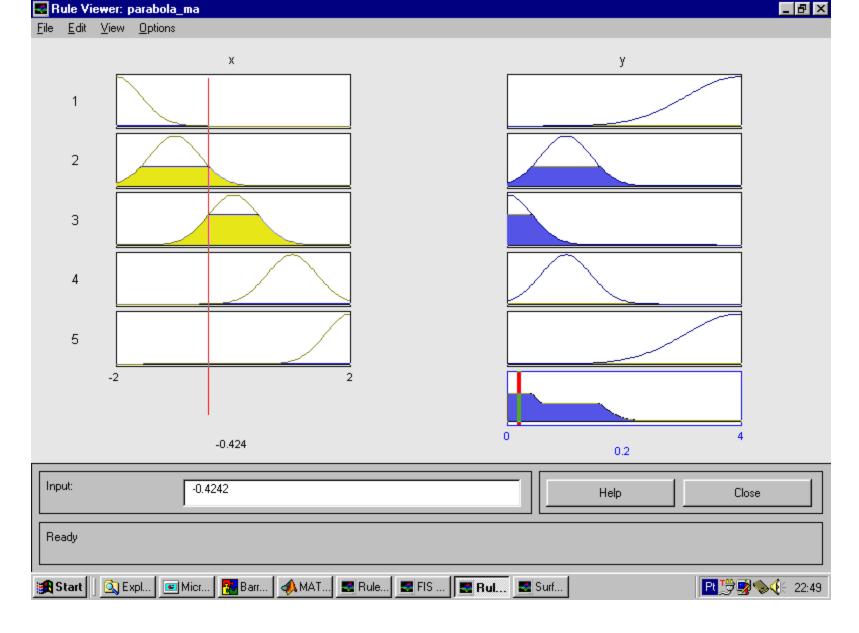
Escrevendo regras



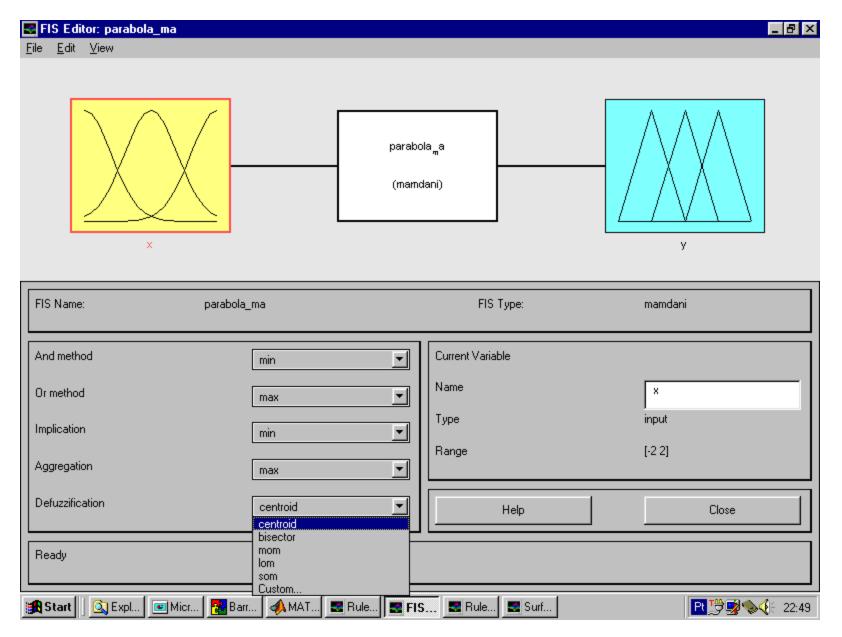
Definindo os parâmetros de inferência



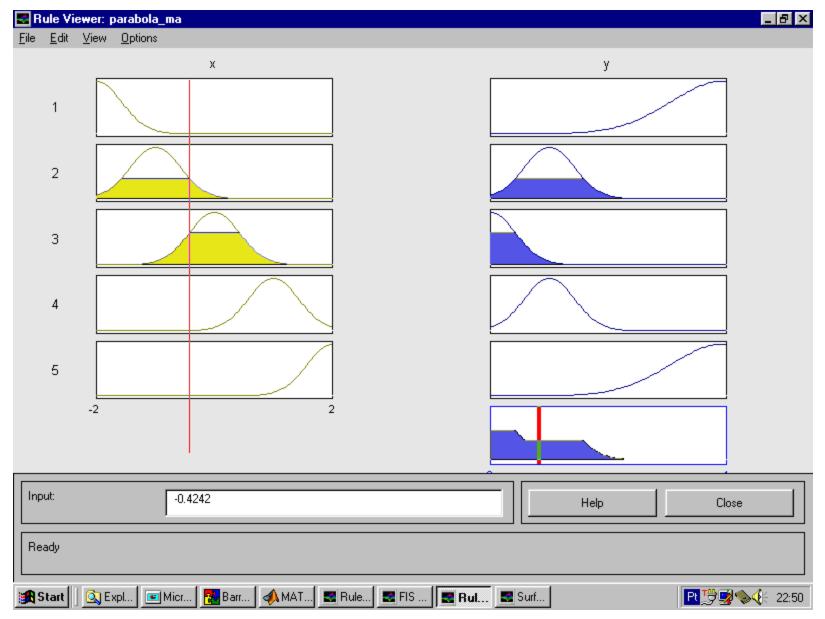
Escolhendo o método de defuzzicação (média dos máximos)



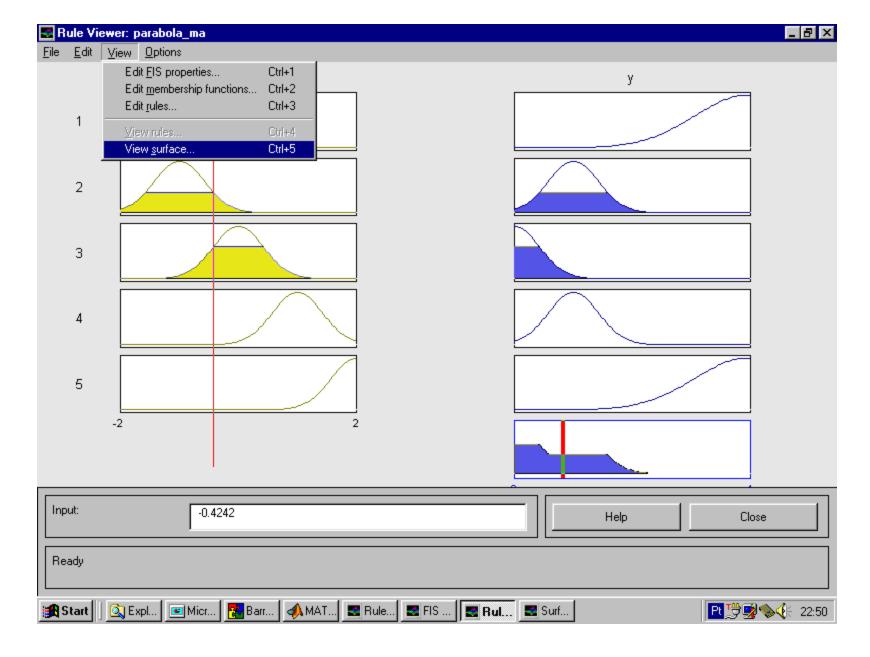
Visualizando o processamento das regras



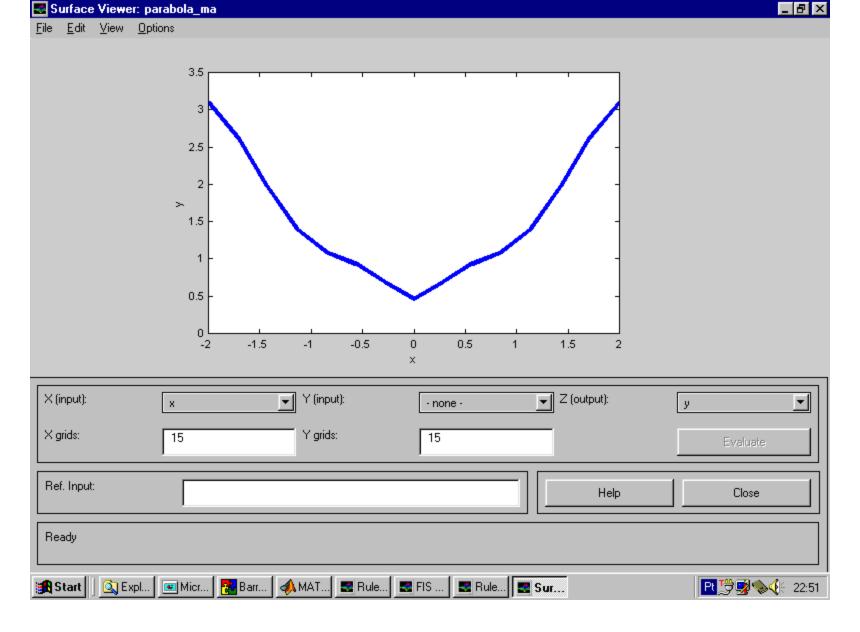
Escolhendo o método de defuzzicação (centroide)



Visualizando o processamento das regras



Visualização da superfície de mapeamento



Visualização da superfície de mapeamento