de Rham コホモロジーと幾何学

みつば (@hf_725)

2018 年 9 月 10 日

1　de Rham コホモロジーの定義

この章では種々の基本概念を紹介し，de Rham コホモロジーを定義する．$\mathbb{R}^n$ の座標を $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と書き，U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．

定義 1.1（微分形式） $C^\infty(U)$ を U 上の C^∞ 級関数のなす環とする．

(1) U 上の 0 次微分形式とは C^∞ 級関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ のことである．0 次微分形式全体の集合を $\Omega^0(U)$ と書く．これは $C^\infty(U)$ 加群の構造を持つ．

(2) $1 \leq k \leq n$ とする．U 上の k 次微分形式を，次の性質を満たす $C^\infty(U)$ 加群 $\Omega^k(U)$ の元のこととする．

　(a) $\Omega^k(U)$ は

$$\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \mid 1 \leq i_1, \cdots, i_k \leq n\}$$

　によって形式的に生成される．

　(b) $\mathfrak{S}_k$ を k 次対称群とする．任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対し関係式

$$dx_{i_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{\sigma(k)}} = \mathrm{sgn}(\sigma) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

　がある．

(3) $0 \leq k \leq n$ でないとき，$\Omega^k(U) := 0$ (一元集合) と定める．

堅苦しい定義になってしまったが，要するに微分形式とは

1. f を C^∞ 級関数として $f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ の形をしたものを足し合わせたものであり，
2. dx_i の部分を入れ替えると符号が変わる

ようなもののことである．具体的に計算方法を見ていこう．

例 1.2 $n = 3$ のとき

(1) 1 次微分形式： $f dx_1 + g dx_2 + h dx_3$.

(2) 2 次微分形式： $f dx_1 \wedge dx_2 + g dx_2 \wedge dx_3 + h dx_3 \wedge dx_1$.

(3) 3 次微分形式： $f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

また，

$$dx_i \wedge dx_i = 0\,(i = 1, 2, 3)\,,$$
$$dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

である．

$k \in \mathbb{Z}$ について $\Omega^k(U)$ は自然に $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の構造を持つ．また，$1 \leq k \leq n$ のとき $\Omega^k(U)$ は $C^\infty(U)$ 上

$$\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

を基底に持つ．

定義 1.3（外微分） 外微分 d を次のように定義する．

(1) $f \in \Omega^0(U)$ のとき

$$df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

(2) $1 \leq k \leq n$，$\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U)$ のとき

$$d\omega := df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

と定め，これを線型に拡張する．

(3) $\omega \in \Omega^n(U)$ のとき

$$d\omega := 0.$$

$k \geq 0$ に対し，外微分は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の間の線形写像

$$d \colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$$

とみなすことができる．さらに次の性質が成り立つ．

命題 1.4 すべての $k \geq 0$ に対して

$$dd = 0 \colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+2}(U)$$

が成立する．

証明 ここでは $n = 3, k = 1$ のときにのみ証明する (一般の場合でも本質は変わらない)．$\omega := f dx_i \in \Omega^1(U)$ $(i = 1, 2, 3)$ のとき

$$\begin{aligned}
dd\omega &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_i\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_i + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_i\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_i + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_i\right) \\
&\quad\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_i + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_i\right) = 0
\end{aligned}$$

となる． □

例 1.5　$n=3$ とする．
　$f \in \Omega^0(U)$ のとき

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3,$$

$\omega = f dx_1 + g dx_2 + h dx_3 \in \Omega^1(U)$ のとき

$$d\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial g}{\partial x_3}\right)dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial h}{\partial x_1}\right)dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)dx_1 \wedge dx_2,$$

$\eta = f dx_2 \wedge dx_3 + g dx_3 \wedge dx_1 + h dx_1 \wedge dx_2$ のとき

$$d\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial h}{\partial x_3}\right)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

すなわち外微分は

$$\Omega^0(U) \overset{\mathrm{grad}}{\to} \Omega^1(U) \overset{\mathrm{rot}}{\to} \Omega^2(U) \overset{\mathrm{div}}{\to} \Omega^3(U)$$

であり，命題 1.4 は

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = 0, \mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \mathbf{F}) = 0$$

を意味する．

定義 1.6　　(1) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とその間の線形写像が作る図式

$$\cdots \overset{d^{-k-1}}{\to} M^{-k} \overset{d^{-k}}{\to} M^{-k+1} \overset{d^{-k+1}}{\to} \cdots \overset{d^{-2}}{\to} M^{-1} \overset{d^{-1}}{\to} M^0 \overset{d^0}{\to} M^1 \overset{d^1}{\to} \cdots \overset{d^{k-1}}{\to} M^k \overset{d^k}{\to} M^{k+1} \overset{d^{k+1}}{\to} \cdots$$

がコチェイン複体であるとは，すべての $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$d^{k+1} \circ d^k = 0$$

が成立することである．この図式を (M^*, d^*) または単に M^* と書く．

(2) 命題 1.4 により

$$\overset{d}{\to} \Omega^{-k}(U) \overset{d}{\to} \cdots \overset{d}{\to} \Omega^0(U) \overset{d}{\to} \Omega^1(U) \overset{d}{\to} \cdots \overset{d}{\to} \Omega^k(U) \overset{d}{\to} \cdots$$

はコチェイン複体となる．これを de Rham 複体といい，$(\Omega^*(U), d)$ または単に $\Omega^*(U)$ と書く．

定義 1.7　(M^*, d^*) をコチェイン複体とする．すべての $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Ker}\, d^k \supset \mathrm{Im}\, d^{k-1}$ であるから商ベクトル空間

$$H^k(M^*) := \mathrm{Ker}\, d^k / \mathrm{Im}\, d^{k-1}$$

が定まる．これをコチェイン複体 (M^*, d^*) の k 次コホモロジーという．さらに

$$H^*(M^*) := \{H^k(M^*)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

と書く．

定義 1.8　de Rham 複体 $(\Omega^*(U), d)$ の k 次コホモロジー

$$H^k(U) := H^k(\Omega^*(U))$$

を k 次 de Rham コホモロジーという．

例 1.9　$n=3$ とする．

$$H^1(U)=\mathrm{Ker}(\mathrm{rot})/\,\mathrm{Im}(\mathrm{grad}),$$
$$H^2(U)=\mathrm{Ker}(\mathrm{div})/\,\mathrm{Im}(\mathrm{rot})$$

である．よって，$H^1(U)$，$H^2(U)$ は「スカラーポテンシャル・ベクトルポテンシャルを持たないベクトル場がどのくらいあるか」を測る解析的な量と思える．

例 1.10　$U=\mathbb{R}^1$ のときの de Rham コホモロジーを計算する．$H^0(U)$ について，

$$df=0\Leftrightarrow \frac{df}{dx}=0\Leftrightarrow f=\mathrm{const}.$$

したがって $H^0(U)\cong\mathbb{R}$ である．

次に $H^1(U)$ を計算する．$fdx\in\mathrm{Ker}\,d=\Omega^1(\mathbb{R}^1)$ に対し $F\colon\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}$ を

$$F(x):=\int_0^x f(t)dt$$

で定めると，微分積分学の基本定理から

$$dF=\frac{dF}{dx}dx=fdx.$$

よって $H^1(\mathbb{R}^1)=0$ となる．

実は，より一般に

$$H^k(\mathbb{R}^n)=\begin{cases}\mathbb{R} & (k=0)\\ 0 & (k\neq 0)\end{cases}$$

が成立する．

注意 1.11　上の例からの類推で，U が連結であるとき 0 次 de Rham コホモロジーは $\mathbb{R}$ に同型であることが分かる．

2　de Rham コホモロジーの幾何学的意味

この章では，de Rham コホモロジーの持つ幾何学的意味を解説する．結論から言うと，U が単純な図形であれば，de Rham コホモロジーは「空間内の穴の数を数えている」と考えられる．これを詳しく見ていく[*1]．

空間の穴の個数を数える別の道具として特異ホモロジー群があるが，大雑把に言うと，特異ホモロジーは空間内の穴を包む「非自明な k 次元球」がいくつあるか，を表現している．これに対して de Rham コホモロジーは少し複雑で，空間内に球が置かれているとき，それが穴を含む「非自明な k 次元球」か，穴を含まない「自明な k 次元球」かを選り分ける機械のようなものである．この解釈を正当化してくれる定理として Stokes の定理を紹介する．簡単のため，考える空間は 2 次元空間であるとする．

定義 2.1（微分形式の積分）　U を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする．

[*1] この章では，厳密性よりもイメージをつかむことを重視した．曖昧なところが多いのは許してほしい．

(1) $D \subset U$ を向きづけられた有界閉領域，$\omega := f dx_1 \wedge dx_2 \in \Omega^2(U)$ とする．ω の D 上での積分を

$$\int_D \omega := \int_D f dx_1 \wedge dx_2$$

で定める．

(2) $C \subset U$ を向きづけられた閉曲線とし，$\eta = f dx_1 + g dx_2 \in \Omega^1(U)$ とする．η の C 上での積分を

$$\int_C \eta := \int_C (f dx_1 + g dx_2)$$

で定める．

定理 2.2（Stokes の定理） $U \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，$D \subset U$ を向きづけられた有界閉領域とする．このとき，任意の $\eta \in \Omega^1(U)$ に対して

$$\int_D d\eta = \int_{\partial D} \eta$$

が成立する．

これを基に $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の 1 次 de Rham コホモロジーについて考える．U 上の 1 次微分形式

$$\omega := \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

をとる．計算により，$d\omega = 0$ となるので

$$[\omega] \in H^1(U)$$

が定まる．

$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ は $0 \in U$ に「穴」を持ち，したがってその穴を取り囲む「非自明なループ」が存在する．ω はちょうど，この「非自明なループ」を検出する機械の役割を果たしている．2 つのループ

$$C_1 := \{(x, y) \in U \mid x^2 + y^2 = 1\},$$
$$C_2 := \{(x, y) \in U \mid (x-2)^2 + y^2 = 1\}$$

を考える．C_1 は「非自明なループ」，C_2 は「自明なループ」である．直接計算により

$$\int_{C_1} \omega = 2\pi, \quad \int_{C_2} \omega = 0$$

となることが分かる．さらに，D_1，D_2 として別の「非自明なループ」，「自明なループ」をとると，これらを境界に持つ閉領域 E_1，E_2[*2]に対してストークスの定理を適用することにより

$$\int_{\partial E_1} \omega = \int_{E_1} d\omega = 0, \quad \int_{\partial E_2} \omega = \int_{E_2} d\omega = 0,$$

すなわち

$$\int_{D_1} \omega = 2\pi, \quad \int_{D_2} \omega = 0$$

となる．この結果は，

[*2] もちろんこのような都合のよい領域の存在は非自明であるが，だいたいこのようなイメージでよい．

ω は「非自明なループ」だけをもれなく検出する

と標語化することができる．

実は，次の命題が成り立つ．

命題 2.3 U，ω を上の通りとする．U 上の 1 次微分形式 η が $d\eta = 0$ を満たすとき，$c \in \mathbb{R}$ と $f \in \Omega^0(U)$ が存在して

$$\eta = c\omega + df$$

と書ける．

略証

$$c := \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \eta$$

ととる．また，f は次のように定める．$p \in U$ を固定する．p と原点を結んだ線と C_1 との交点を p' とする．$l_p \colon [0, 1] \to U$ を，$(1, 0)$ を出発して C_1 上を反時計回りに p' まで進み，p' から p までまっすぐ進むような曲線とする．そして

$$f(p) := \int_{l_p} (\eta - c\omega)$$

とおく．これが条件を満たしていることを示せばよい． $\square$

系 2.4 $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とすると，$H^1(U) = \mathbb{R}$.

次に，$\mathbb{R}^2$ から穴を m 個取り除いた空間 V を考える．このとき，「非自明なループ」は各々の穴に対応して存在し，本質的には全部で m 個あると考えられる．そしてそのループそれぞれに，それを検出する 1 次微分形式があるはずである．したがって，

$$H^1(V) = \mathbb{R}^m$$

が成立すると予想される．これが正しいことは次章で見る．

3 Mayer-Vietoris 完全列

前章のような，やや複雑な空間の de Rham コホモロジーはどのようにして計算すればよいのだろうか．この問いに答える道具の一つが Mayer-Vietoris 完全列である．以下，断らない限り U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．

定義 3.1 (1) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の列

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

が完全であるとは，

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$$

が成立することである．

(2) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の列

$$\cdots \to M^{-k} \to M^{-k+1} \to \cdots \to M^0 \to M^1 \to \cdots \to M^k \to M^{k+1} \to \cdots$$

が完全であるとは，すべての $l \in \mathbb{Z}$ で

$$M^{l-1} \to M^l \to M^{l+1}$$

が完全であることである．

定理 3.2（Mayer-Vietoris 完全列） $\{V, W\}$ を U の開被覆とする．このとき完全列

$$\begin{aligned}\cdots \to H^k(U) &\to H^k(V) \oplus H^k(W) \to H^k(V \cap W) \\ &\to H^{k+1}(U) \to H^{k+1}(V) \oplus H^{k+1}(W) \to H^{k+1}(V \cap W) \to \cdots\end{aligned}$$

が存在する．

証明のためには，まずコホモロジーの間の準同型の構成から始めなければならない．

定義 3.3 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，V を $\mathbb{R}^m$ の開集合とする．写像 $p_i \colon V \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \cdots m)$ を第 i 成分への射影とする．また，C^∞ 級写像 $f \colon U \to V$ に対して $f_i := p_i \circ f \colon U \to \mathbb{R}$ とする．$f^* \colon \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$ を，$\omega = g dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k} \in \Omega^k(V)$ に対し

$$f^*\omega := (g \circ f)\, df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}$$

で定め，これを線型に拡張する．$\eta \in \Omega^k(V)$ に対し，$f^*\eta$ を η の f による引き戻しという．

引き戻しの簡単な性質を述べる．

命題 3.4 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，V を $\mathbb{R}^m$ の開集合，W を $\mathbb{R}^l$ の開集合とする．

(1) $\mathrm{id}_U \colon U \to U$ について，すべての $k \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\mathrm{id}_U^* = \mathrm{id}_{\Omega^k(U)} \colon \Omega^k(U) \to \Omega^k(U).$$

(2) $f \colon U \to V$，$g \colon V \to W$ を C^∞ 級写像とすると，

$$(g \circ f)^* = f^* g^* \colon \Omega^k(W) \to \Omega^k(U).$$

証明 どちらも定義から明らか． □

定義 3.5 (M^*, d_M^*)，(N^*, d_N^*) をコチェイン複体とする．$\varphi^* = \{\varphi^k \colon M^k \to N^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ がコチェイン写像であるとは，すべての $k \in \mathbb{Z}$ で

$$d_N^k \circ \varphi^k = \varphi^{k+1} \circ d_M^k$$

が成立していることをいう．このとき $\varphi^* \colon (M^*, d_M^*) \to (N^*, d_N^*)$ と書く．

命題 3.6 $f^* := \{f^k \colon \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ はコチェイン写像である．

証明

$$
\begin{aligned}
& f^* d\left(g dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}\right) \\
&= f^*\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i \wedge dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \circ f\right) df_i \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \circ f\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j\right) \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \circ f\right) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j\right) \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j} dx_j \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \\
&= d\left((g \circ f)\, df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}\right) \\
&= df^*\left(g dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\right).
\end{aligned}
$$

□

コチェイン写像の重要性は，それがコホモロジーの間の準同型を誘導することにある．

命題 3.7　(L^*, d_L^*)，(M^*, d_M^*) をコチェイン複体とし，$f^*\colon (L^*, d_L^*) \to (M^*, d_M^*)$ をコチェイン写像とする．f^* はすべての $k \in \mathbb{Z}$ で

$$H^k(f^*)\colon H^k(L^*) \to H^k(M^*); [l] \mapsto [f^k(l)]$$

を満たす線型写像を誘導する．さらに，(N^*, d_N^*) をコチェイン複体，$g^*\colon (M^*, d_M^*) \to (N^*, d_N^*)$ をコチェイン写像とすると，すべての $k \in \mathbb{Z}$ で

$$
\begin{gathered}
H^k(\mathrm{id}_L^*) = \mathrm{id}_{H^k(L^*)}, \\
H^k(g^* \circ f^*) = H^k(g^*) \circ H^k(f^*)\colon H^k(L^*) \to H^k(N^*)
\end{gathered}
$$

が成立する．

証明は省略する．$H^k(f^*)$ のことを f^* と略記することがある．

定義 3.8　複体の図式

$$(L^*, d_L^*) \xrightarrow{f^*} (M^*, d_M^*) \xrightarrow{g^*} (N^*, d_N^*)$$

が完全であるとは，すべての $k \in \mathbb{Z}$ で

$$L^k \xrightarrow{f^k} M^k \xrightarrow{g^k} N^k$$

が完全であることである．

命題 3.9　複体の完全列

$$0 \to (L^*, d_L^*) \xrightarrow{f^*} (M^*, d_M^*) \xrightarrow{g^*} (N^*, d_N^*) \to 0$$

は完全列

$$
\begin{aligned}
\cdots &\to H^k(L^*) \xrightarrow{f^*} H^k(M^*) \xrightarrow{g^*} H^k(N^*) \\
&\to H^{k+1}(L^*) \xrightarrow{f^*} H^{k+1}(M^*) \xrightarrow{g^*} H^{k+1}(N^*) \to \cdots
\end{aligned}
$$

を誘導する．これをコホモロジー長完全列という．

この命題は (コ) ホモロジー論において非常に重要である．証明はたとえば [3] にある．
この命題により，次の補題を示せばよいことが分かる．

補題 3.10　記号を定理 3.2 の通りとし，

$$i_V : V \to U, i_W : W \to U, \iota_V : V \cap W \to V, \iota_W : V \cap W \to W$$

を包含とする．このとき

$$0 \to \Omega^*(U) \overset{(i_V^*, i_W^*)}{\to} \Omega^*(V) \oplus \Omega^*(W) \overset{-\iota_V^* + \iota_W^*}{\to} \Omega^*(V \cap W) \to 0$$

は完全である．ただし，$\omega \in \Omega^k(U)$，$(\eta, \tau) \in \Omega^k(V) \oplus \Omega^k(W)$ に対して

$$(i_V^*, i_W^*)(\omega) = (i_V^* \omega, i_W^* \omega),$$
$$(-\iota_V^* + \iota_W^*)(\eta, \tau) = -\iota_V^* \eta + \iota_W^* \tau$$

である．

準備として，次の事実を認める．証明は [2] を参照.

命題 3.11　記号を定理 3.2 の通りとする．このとき，C^∞ 級関数 $\rho_V, \rho_W : U \to \mathbb{R}$ が存在して次が成り立つ．

(i) $0 \leq \rho_V \leq 1, 0 \leq \rho_W \leq 1$.
(ii) $\mathrm{supp}(\rho_V) \subset V, \mathrm{supp}(\rho_W) \subset W$．ただし，$f : U \to \mathbb{R}$ に対し $\mathrm{supp}(f)$ は $\{p \in U \mid f(p) \neq 0\}$ の閉包である．
(iii) すべての $p \in U$ で $\rho_V(p) + \rho_W(p) = 1$.

$\{\rho_V, \rho_W\}$ のことを $\{V, W\}$ に従属する 1 の分割という．

補題 3.10 の証明　$-\iota_V^* + \iota_W^*$ の全射性だけ示す．$\{\rho_V, \rho_W\}$ を $\{V, W\}$ に従属する 1 の分割とする．$\alpha \in \Omega^k(V \cap W)$ を任意にとると，

$$-\rho_W \alpha \in \Omega^k(V), \quad \rho_V \alpha \in \Omega^k(W)$$

と見なせる．さらにこのとき，

$$(-\iota_V^* + \iota_W^*)(-\rho_W \alpha, \rho_V \alpha) = \alpha$$

となる．　□

これで定理 3.2 の証明が完了した．これを用いて 2 章の予想を証明する．

定理 3.12　$\mathbb{R}^2$ から m 個の点を取り除いた空間を U_m とする．このとき

$$H^k(U_m) = \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0) \\ \mathbb{R}^m & (k = 1) \\ 0 & (k \neq 0, 1) \end{cases}$$

証明　m についての帰納法で示す．$m = 1$ のときは系 2.4 で示されている．$l \leq m$ で正しいとき $l = m + 1$ で正しいことを示す．U_m の開被覆 $\{V, W\}$ を，V が穴を 1 個，W が穴を m 個含み，さらに $V \cap W$ が $\mathbb{R}^2$

と微分同相になるようにとる．すると，定理 3.2 から完全列

$$H^0(V) \oplus H^0(W) \to H^0(V \cap W) \to H^1(U_{m+1}) \to H^1(V) \oplus H^1(W)$$

がある．

$$\mathrm{Ker}(H^0(V \cap W) \to H^1(U_{m+1})) = \mathrm{Im}(H^0(V) \oplus H^0(W) \to H^0(V \cap W)) = \mathbb{R}$$

であるから，

$$\mathrm{Ker}(H^1(U_{m+1}) \to H^1(V) \oplus H^1(W)) = \mathrm{Im}(H^0(V \cap W) \to H^1(U_{m+1})) = 0$$

となり，$H^1(U_{m+1}) \to H^1(V) \oplus H^1(W)$ の単射性が分かる．再び定理 3.2 から

$$H^1(U_{m+1}) \to H^1(V) \oplus H^1(W) \to H^1(V \cap W) = 0$$

は完全なので $H^1(U_{m+1}) \to H^1(V) \oplus H^1(W)$ は全射でもある．以上より

$$H^1(U_{m+1}) = \mathbb{R}^{m+1}$$

となる．他の k についても同様にできる． □

参考文献

[1] Bott, R., and Tu, L., *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer, 1982.
[2] 松本幸夫,『多様体の基礎』，東京大学出版会，1998.
[3] 枡田幹也,『代数的トポロジー』，朝倉出版，2002.
[4] 小林昭七,『曲線と曲面の微分幾何』，裳華房，1995.