

de Rham コホモロジーと幾何学

みく (@hf_725)

2018 年 9 月 10 日

1 de Rham コホモロジーの定義

この章では種々の基本概念を紹介し、de Rham コホモロジーを定義する。 \mathbb{R}^n の座標を (x_1, x_2, \dots, x_n) と書き、 U を \mathbb{R}^n の開集合とする。

定義 1.1 (微分形式) $C^\infty(U)$ を U 上の C^∞ 級関数のなす環とする。

(1) U 上の 0 次微分形式とは C^∞ 級関数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ のことである。0 次微分形式全体の集合を $\Omega^0(U)$ と書く。これは $C^\infty(U)$ 加群の構造を持つ。

(2) $1 \leq k \leq n$ とする。 U 上の k 次微分形式を、次の性質を満たす $C^\infty(U)$ 加群 $\Omega^k(U)$ の元のこととする。

(a) $\Omega^k(U)$ は

$$\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$$

によって形式的に生成される。

(b) \mathfrak{S}_k を k 次対称群とする。任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対し関係式

$$dx_{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge dx_{i_{\sigma(k)}} = \text{sgn}(\sigma) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

がある。

(3) $0 \leq k \leq n$ でないとき、 $\Omega^k(U) := 0$ (一元集合) と定める。

堅苦しい定義になってしまったが、要するに微分形式とは

1. f を C^∞ 級関数として $f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ の形をしたものを足し合わせたものであり、
2. dx_{i_i} の部分を入れ替えると符号が変わる

ようなもののことである。具体的に計算方法を見ていこう。

例 1.2 $n = 3$ のとき

- (1) 1 次微分形式: $f dx_1 + g dx_2 + h dx_3$.
- (2) 2 次微分形式: $f dx_1 \wedge dx_2 + g dx_2 \wedge dx_3 + h dx_3 \wedge dx_1$.
- (3) 3 次微分形式: $f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

また,

$$\begin{aligned} dx_i \wedge dx_i &= 0 \ (i = 1, 2, 3), \\ dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 &= -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

である.

$k \in \mathbb{Z}$ について $\Omega^k(U)$ は自然に \mathbb{R} 上のベクトル空間の構造を持つ. また, $1 \leq k \leq n$ のとき $\Omega^k(U)$ は $C^\infty(U)$ 上

$$\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

を基底に持つ.

定義 1.3 (外微分) 外微分 d を次のように定義する.

(1) $f \in \Omega^0(U)$ のとき

$$df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

(2) $1 \leq k \leq n$, $\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U)$ のとき

$$d\omega := df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

と定め, これを線型に拡張する.

(3) $\omega \in \Omega^n(U)$ のとき

$$d\omega := 0.$$

$k \geq 0$ に対し, 外微分は \mathbb{R} 上のベクトル空間の間の線形写像

$$d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$$

とみなすことができる. さらに次の性質が成り立つ.

命題 1.4 すべての $k \geq 0$ に対して

$$dd = 0: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+2}(U)$$

が成立する.

証明 ここでは $n = 3, k = 1$ のときにのみ証明する (一般の場合でも本質は変わらない). $\omega := f dx_i \in \Omega^1(U)$ ($i = 1, 2, 3$) のとき

$$\begin{aligned} dd\omega &= d \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_i \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_i + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_i \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_i + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_i \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_i + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_i \right) = 0 \end{aligned}$$

となる. □

例 1.5 $n = 3$ とする.

$f \in \Omega^0(U)$ のとき

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3,$$

$\omega = f dx_1 + g dx_2 + h dx_3 \in \Omega^1(U)$ のとき

$$d\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial g}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2,$$

$\eta = f dx_2 \wedge dx_3 + g dx_3 \wedge dx_1 + h dx_1 \wedge dx_2$ のとき

$$d\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial h}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

すなわち外微分は

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{\text{grad}} \Omega^1(U) \xrightarrow{\text{rot}} \Omega^2(U) \xrightarrow{\text{div}} \Omega^3(U)$$

であり, 命題 1.4 は

$$\text{rot}(\text{grad } f) = 0, \text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0$$

を意味する.

定義 1.6 (1) \mathbb{R} 上のベクトル空間とその間の線形写像が作る図式

$$\cdots \xrightarrow{d^{-k-1}} M^{-k} \xrightarrow{d^{-k}} M^{-k+1} \xrightarrow{d^{-k+1}} \cdots \xrightarrow{d^{-2}} M^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} M^0 \xrightarrow{d^0} M^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{k-1}} M^k \xrightarrow{d^k} M^{k+1} \xrightarrow{d^{k+1}} \cdots$$

がコチェイン複体であるとは, すべての $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$d^{k+1} \circ d^k = 0$$

が成立することである. この図式を (M^*, d^*) または単に M^* と書く.

(2) 命題 1.4 により

$$\xrightarrow{d} \Omega^{-k}(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^k(U) \xrightarrow{d} \cdots$$

はコチェイン複体となる. これを de Rham 複体といい, $(\Omega^*(U), d)$ または単に $\Omega^*(U)$ と書く.

定義 1.7 (M^*, d^*) をコチェイン複体とする. すべての $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\text{Ker } d^k \supset \text{Im } d^{k-1}$ であるから商ベクトル空間

$$H^k(M^*) := \text{Ker } d^k / \text{Im } d^{k-1}$$

が定まる. これをコチェイン複体 (M^*, d^*) の k 次コホモロジーという. さらに

$$H^*(M^*) := \{H^k(M^*)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

と書く.

定義 1.8 de Rham 複体 $(\Omega^*(U), d)$ の k 次コホモロジー

$$H^k(U) := H^k(\Omega^*(U))$$

を k 次 de Rham コホモロジーという.

例 1.9 $n = 3$ とする.

$$\begin{aligned} H^1(U) &= \text{Ker}(\text{rot}) / \text{Im}(\text{grad}), \\ H^2(U) &= \text{Ker}(\text{div}) / \text{Im}(\text{rot}) \end{aligned}$$

である. よって, $H^1(U)$, $H^2(U)$ は「スカラーポテンシャル・ベクトルポテンシャルを持たないベクトル場がどのくらいあるか」を測る解析的な量と思える.

例 1.10 $U = \mathbb{R}^1$ のときの de Rham コホモロジーを計算する. $H^0(U)$ について,

$$df = 0 \Leftrightarrow \frac{df}{dx} = 0 \Leftrightarrow f = \text{const.}$$

したがって $H^0(U) \cong \mathbb{R}$ である.

次に $H^1(U)$ を計算する. $f dx \in \text{Ker } d = \Omega^1(\mathbb{R}^1)$ に対し $F: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt$$

で定めると, 微分積分学の基本定理から

$$dF = \frac{dF}{dx} dx = f dx.$$

よって $H^1(\mathbb{R}^1) = 0$ となる.

実は, より一般に

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

が成立する.

注意 1.11 上の例からの類推で, U が連結であるとき 0 次 de Rham コホモロジーは \mathbb{R} に同型であることが分かる.

2 de Rham コホモロジーの幾何学的意味

この章では, de Rham コホモロジーの持つ幾何学的意味を解説する. 結論から言うと, U が単純な図形であれば, de Rham コホモロジーは「空間内の穴の数を数えている」と考えられる. これを詳しく見ていく^{*1}.

空間の穴の個数を数える別の道具として特異ホモロジー群があるが, 大雑把に言うと, 特異ホモロジーは空間内の穴を包む「非自明な k 次元球」がいくつあるか, を表現している. これに対して de Rham コホモロジーは少し複雑で, 空間内に球が置かれているとき, それが穴を含む「非自明な k 次元球」か, 穴を含まない「自明な k 次元球」かを選び分ける機械のようなものである. この解釈を正当化してくれる定理として Stokes の定理を紹介する. 簡単のため, 考える空間は 2 次元空間であるとする.

定義 2.1 (微分形式の積分) U を \mathbb{R}^2 の開集合とする.

^{*1} この章では, 厳密性よりもイメージをつかむことを重視した. 曖昧なところが多いのは許してほしい.

(1) $D \subset U$ を向きづけられた有界閉領域, $\omega := f dx_1 \wedge dx_2 \in \Omega^2(U)$ とする. ω の D 上での積分を

$$\int_D \omega := \int_D f dx_1 \wedge dx_2$$

で定める.

(2) $C \subset U$ を向きづけられた閉曲線とし, $\eta = f dx_1 + g dx_2 \in \Omega^1(U)$ とする. η の C 上での積分を

$$\int_C \eta := \int_C (f dx_1 + g dx_2)$$

で定める.

定理 2.2 (Stokes の定理) $U \subset \mathbb{R}^2$ を開集合, $D \subset U$ を向きづけられた有界閉領域とする. このとき, 任意の $\eta \in \Omega^1(U)$ に対して

$$\int_D d\eta = \int_{\partial D} \eta$$

が成立する.

これを基に $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の 1 次 de Rham コホモロジーについて考える. U 上の 1 次微分形式

$$\omega := \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

をとる. 計算により, $d\omega = 0$ となるので

$$[\omega] \in H^1(U)$$

が定まる.

$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ は $0 \in U$ に「穴」を持ち, したがってその穴を取り囲む「非自明なループ」が存在する. ω はちょうど, この「非自明なループ」を検出する機械の役割を果たしている. 2 つのループ

$$\begin{aligned} C_1 &:= \{(x, y) \in U \mid x^2 + y^2 = 1\}, \\ C_2 &:= \{(x, y) \in U \mid (x - 2)^2 + y^2 = 1\} \end{aligned}$$

を考える. C_1 は「非自明なループ」, C_2 は「自明なループ」である. 直接計算により

$$\int_{C_1} \omega = 2\pi, \quad \int_{C_2} \omega = 0$$

となることが分かる. さらに, D_1, D_2 として別の「非自明なループ」, 「自明なループ」をとると, これらを境界に持つ閉領域 E_1, E_2^{*2} に対してストークスの定理を適用することにより

$$\int_{\partial E_1} \omega = \int_{E_1} d\omega = 0, \quad \int_{\partial E_2} \omega = \int_{E_2} d\omega = 0,$$

すなわち

$$\int_{D_1} \omega = 2\pi, \quad \int_{D_2} \omega = 0$$

となる. この結果は,

*2 もちろんこのような都合のよい領域の存在は非自明であるが, だいたいこのようなイメージでよい.

ω は「非自明なループ」だけをもれなく検出する

と標語化することができる.

実は, 次の命題が成り立つ.

命題 2.3 U , ω を上の通りとする. U 上の 1 次微分形式 η が $d\eta = 0$ を満たすとき, $c \in \mathbb{R}$ と $f \in \Omega^0(U)$ が存在して

$$\eta = c\omega + df$$

と書ける.

略証

$$c := \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \eta$$

ととる. また, f は次のように定める. $p \in U$ を固定する. p と原点を結んだ線と C_1 との交点を p' とする. $l_p: [0, 1] \rightarrow U$ を, $(1, 0)$ を出発して C_1 上を反時計回りに p' まで進み, p' から p までまっすぐ進むような曲線とする. そして

$$f(p) := \int_{l_p} (\eta - c\omega)$$

とおく. これが条件を満たしていることを示せばよい. □

系 2.4 $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とすると, $H^1(U) = \mathbb{R}$.

次に, \mathbb{R}^2 から穴を m 個取り除いた空間 V を考える. このとき, 「非自明なループ」は各々の穴に対応して存在し, 本質的には全部で m 個あると考えられる. そしてそのループそれぞれに, それを検出する 1 次微分形式があるはずである. したがって,

$$H^1(V) = \mathbb{R}^m$$

が成立すると予想される. これが正しいことは次章で見る.

3 Mayer-Vietoris 完全列

前章のような, やや複雑な空間の de Rham コホモロジーはどのようにして計算すればよいのだろうか. この問いに答える道具の一つが Mayer-Vietoris 完全列である. 以下, 断らない限り U を \mathbb{R}^n の開集合とする.

定義 3.1 (1) \mathbb{R} 上のベクトル空間の列

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

が完全であるとは,

$$\text{Im } f = \text{Ker } g$$

が成立することである.

(2) \mathbb{R} 上のベクトル空間の列

$$\cdots \rightarrow M^{-k} \rightarrow M^{-k+1} \rightarrow \cdots \rightarrow M^0 \rightarrow M^1 \rightarrow \cdots \rightarrow M^k \rightarrow M^{k+1} \rightarrow \cdots$$

が完全であるとは, すべての $l \in \mathbb{Z}$ で

$$M^{l-1} \rightarrow M^l \rightarrow M^{l+1}$$

が完全であることである。

定理 3.2 (Mayer-Vietoris 完全列) $\{V, W\}$ を U の開被覆とする。このとき完全列

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^k(U) &\rightarrow H^k(V) \oplus H^k(W) \rightarrow H^k(V \cap W) \\ &\rightarrow H^{k+1}(U) \rightarrow H^{k+1}(V) \oplus H^{k+1}(W) \rightarrow H^{k+1}(V \cap W) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

が存在する。

証明のためには、まずコホモロジーの間の準同型の構成から始めなければならない。

定義 3.3 U を \mathbb{R}^n の開集合、 V を \mathbb{R}^m の開集合とする。写像 $p_i: V \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) を第 i 成分への射影とする。また、 C^∞ 級写像 $f: U \rightarrow V$ に対して $f_i := p_i \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 $f^*: \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U)$ を、 $\omega = g dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k} \in \Omega^k(V)$ に対し

$$f^*\omega := (g \circ f) df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}$$

で定め、これを線型に拡張する。 $\eta \in \Omega^k(V)$ に対し、 $f^*\eta$ を η の f による引き戻しという。

引き戻しの簡単な性質を述べる。

命題 3.4 U を \mathbb{R}^n の開集合、 V を \mathbb{R}^m の開集合、 W を \mathbb{R}^l の開集合とする。

(1) $\text{id}_U: U \rightarrow U$ について、すべての $k \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\text{id}_U^* = \text{id}_{\Omega^k(U)}: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^k(U).$$

(2) $f: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow W$ を C^∞ 級写像とすると、

$$(g \circ f)^* = f^* g^*: \Omega^k(W) \rightarrow \Omega^k(U).$$

証明 どちらも定義から明らか。 □

定義 3.5 (M^*, d_M^*) , (N^*, d_N^*) をコチェイン複体とする。 $\varphi^* = \{\varphi^k: M^k \rightarrow N^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ がコチェイン写像であるとは、すべての $k \in \mathbb{Z}$ で

$$d_N^k \circ \varphi^k = \varphi^{k+1} \circ d_M^k$$

が成立していることをいう。このとき $\varphi^*: (M^*, d_M^*) \rightarrow (N^*, d_N^*)$ と書く。

命題 3.6 $f^* := \{f^k: \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ はコチェイン写像である。

証明

$$\begin{aligned}
& f^* d(gdy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) \\
&= f^* \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i \wedge dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k} \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \circ f \right) df_i \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \circ f \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \circ f \right) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j} dx_j \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \\
&= d((g \circ f) df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}) \\
&= df^*(gdy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}). \quad \square
\end{aligned}$$

コチェイン写像の重要性は、それがコホモロジーの間の準同型を誘導することにある。

命題 3.7 (L^*, d_L^*) , (M^*, d_M^*) をコチェイン複体とし, $f^*: (L^*, d_L^*) \rightarrow (M^*, d_M^*)$ をコチェイン写像とする.
 f^* はすべての $k \in \mathbb{Z}$ で

$$H^k(f^*): H^k(L^*) \rightarrow H^k(M^*); [l] \mapsto [f^k(l)]$$

を満たす線型写像を誘導する. さらに, (N^*, d_N^*) をコチェイン複体, $g^*: (M^*, d_M^*) \rightarrow (N^*, d_N^*)$ をコチェイン写像とすると, すべての $k \in \mathbb{Z}$ で

$$\begin{aligned}
H^k(\text{id}_L^*) &= \text{id}_{H^k(L^*)}, \\
H^k(g^* \circ f^*) &= H^k(g^*) \circ H^k(f^*): H^k(L^*) \rightarrow H^k(N^*)
\end{aligned}$$

が成立する.

証明は省略する. $H^k(f^*)$ のことを f^* と略記することがある.

定義 3.8 複体の図式

$$(L^*, d_L^*) \xrightarrow{f^*} (M^*, d_M^*) \xrightarrow{g^*} (N^*, d_N^*)$$

が完全であるとは, すべての $k \in \mathbb{Z}$ で

$$L^k \xrightarrow{f^k} M^k \xrightarrow{g^k} N^k$$

が完全であることである.

命題 3.9 複体の完全列

$$0 \rightarrow (L^*, d_L^*) \xrightarrow{f^*} (M^*, d_M^*) \xrightarrow{g^*} (N^*, d_N^*) \rightarrow 0$$

は完全列

$$\begin{aligned}
& \cdots \rightarrow H^k(L^*) \xrightarrow{f^*} H^k(M^*) \xrightarrow{g^*} H^k(N^*) \\
& \rightarrow H^{k+1}(L^*) \xrightarrow{f^*} H^{k+1}(M^*) \xrightarrow{g^*} H^{k+1}(N^*) \rightarrow \cdots
\end{aligned}$$

を誘導する．これをコホモロジー長完全列という．

この命題は (コ) ホモロジー論において非常に重要である．証明はたとえば [3] にある．

この命題により，次の補題を示せばよいことが分かる．

補題 3.10 記号を定理 3.2 の通りとし，

$$i_V: V \rightarrow U, i_W: W \rightarrow U, \iota_V: V \cap W \rightarrow V, \iota_W: V \cap W \rightarrow W$$

を包含とする．このとき

$$0 \rightarrow \Omega^*(U) \xrightarrow{(i_V^*, i_W^*)} \Omega^*(V) \oplus \Omega^*(W) \xrightarrow{-\iota_V^* + \iota_W^*} \Omega^*(V \cap W) \rightarrow 0$$

は完全である．ただし， $\omega \in \Omega^k(U)$ ， $(\eta, \tau) \in \Omega^k(V) \oplus \Omega^k(W)$ に対して

$$\begin{aligned} (i_V^*, i_W^*)(\omega) &= (i_V^* \omega, i_W^* \omega), \\ (-\iota_V^* + \iota_W^*)(\eta, \tau) &= -\iota_V^* \eta + \iota_W^* \tau \end{aligned}$$

である．

準備として，次の事実を認める．証明は [2] を参照．

命題 3.11 記号を定理 3.2 の通りとする．このとき， C^∞ 級関数 $\rho_V, \rho_W: U \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して次が成り立つ．

- (i) $0 \leq \rho_V \leq 1, 0 \leq \rho_W \leq 1$.
- (ii) $\text{supp}(\rho_V) \subset V, \text{supp}(\rho_W) \subset W$ ．ただし， $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ に対し $\text{supp}(f)$ は $\{p \in U \mid f(p) \neq 0\}$ の閉包である．
- (iii) すべての $p \in U$ で $\rho_V(p) + \rho_W(p) = 1$.

$\{\rho_V, \rho_W\}$ のことを $\{V, W\}$ に従属する 1 の分割という．

補題 3.10 の証明 $-\iota_V^* + \iota_W^*$ の全射性だけ示す． $\{\rho_V, \rho_W\}$ を $\{V, W\}$ に従属する 1 の分割とする． $\alpha \in \Omega^k(V \cap W)$ を任意にとると，

$$-\rho_W \alpha \in \Omega^k(V), \quad \rho_V \alpha \in \Omega^k(W)$$

と見なせる．さらにこのとき，

$$(-\iota_V^* + \iota_W^*)(-\rho_W \alpha, \rho_V \alpha) = \alpha$$

となる． □

これで定理 3.2 の証明が完了した．これを用いて 2 章の予想を証明する．

定理 3.12 \mathbb{R}^2 から m 個の点を取り除いた空間を U_m とする．このとき

$$H^k(U_m) = \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0) \\ \mathbb{R}^m & (k = 1) \\ 0 & (k \neq 0, 1) \end{cases}$$

証明 m についての帰納法で示す． $m = 1$ のときは系 2.4 で示されている． $l \leq m$ で正しいとき $l = m + 1$ で正しいことを示す． U_m の開被覆 $\{V, W\}$ を， V が穴を 1 個， W が穴を m 個含み，さらに $V \cap W$ が \mathbb{R}^2

と微分同相になるようにとる．すると，定理 3.2 から完全列

$$H^0(V) \oplus H^0(W) \rightarrow H^0(V \cap W) \rightarrow H^1(U_{m+1}) \rightarrow H^1(V) \oplus H^1(W)$$

がある．

$$\text{Ker}(H^0(V \cap W) \rightarrow H^1(U_{m+1})) = \text{Im}(H^0(V) \oplus H^0(W) \rightarrow H^0(V \cap W)) = \mathbb{R}$$

であるから，

$$\text{Ker}(H^1(U_{m+1}) \rightarrow H^1(V) \oplus H^1(W)) = \text{Im}(H^0(V \cap W) \rightarrow H^1(U_{m+1})) = 0$$

となり， $H^1(U_{m+1}) \rightarrow H^1(V) \oplus H^1(W)$ の単射性が分かる．再び定理 3.2 から

$$H^1(U_{m+1}) \rightarrow H^1(V) \oplus H^1(W) \rightarrow H^1(V \cap W) = 0$$

は完全なので $H^1(U_{m+1}) \rightarrow H^1(V) \oplus H^1(W)$ は全射でもある．以上より

$$H^1(U_{m+1}) = \mathbb{R}^{m+1}$$

となる．他の k についても同様にできる．

□

参考文献

- [1] Bott, R., and Tu, L., *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer, 1982.
- [2] 松本幸夫, 『多様体の基礎』, 東京大学出版会, 1998.
- [3] 柘田幹也, 『代数的トポロジー』, 朝倉出版, 2002.
- [4] 小林昭七, 『曲線と曲面の微分幾何』, 裳華房, 1995.