

Klasik Elektrodinamik Ders Notları

Halil Kolatan

2022-2023 Güz Dönemi

İçindekiler

Vektör Formülleri	i
0 Giriş ve Genel Bakış	1
0.1 Boşlukta Maxwell Denklemleri, Alanlar ve Kaynaklar	1
1 Elektrostatığe Giriş	4
1.1 Coulomb Kanunu	4
1.2 Elektrik Alanı	5
1.3 Gauss Kanunu	8
1.4 Gauss Kanununun Diferansiyel Formu	10
1.5 Elektrostatığın Diğer Bir Denklemleri ve Skaler Potansiyeli	10
1.6 Yüklerin ve Dipollerin Yüzey Dağılımları, Potansiyel ve Elektrik Alandaki Süreksizlikler	13
1.6.1 Elektrostatığın Sınır Koşulları	13
1.6.2 Dipolün Potansiyeli	16
1.6.3 Elektrostatik Potansiyelin Dipol Tabakasındaki Süreksizliği	17
1.6.4 Elektrostatik Potansiyel Enerji	19
1.6.5 İletken ve Sığa	21
1.7 Green Teoremi ve Green Fonksiyonları	21
1.7.1 Laplace ve Poisson Denklemlerinin Çözümlerinin Tekilliği ve Green Teoremi	21
1.7.2 Dirichlet veya Neumann Sınır Koşullarına Sahip Poisson Denklemi için Green Fonksiyonları	24
1.7.3 Dirichlet Sınır Koşuluna Sahip Green Fonksiyonu	25
1.7.4 Neumann Sınır Koşuluna Sahip Green Fonksiyonu	25
1.8 Problemler	28
1.9 Ödevler	38
2 Elektrostatikte Sınır Değer Problemleri	48
2.1 Görüntü Yük Yöntemi	48
2.2 Topraklanmış İletken Küre ve Nokta Yük Problemi	51
2.3 Yalıtılmış İletken Küre ve Nokta Yük Problemi	54
2.4 Düzgün Bir Elektrik Alan İçerisine Yerleştirilmiş İletken Küre	56
2.5 Problemler	57

Vektör Formülleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \\
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\
\nabla \times \nabla \psi &= 0 \\
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) &= 0 \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \\
\nabla \cdot (\psi \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{a} \\
\nabla \times (\psi \mathbf{a}) &= \nabla \psi \times \mathbf{a} + \psi \nabla \times \mathbf{a} \\
\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \\
\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \\
\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}
\end{aligned}$$

Of \mathbf{x} is the coordinate of a point with respect to some origin, with magnitude $r = |\mathbf{x}|$, $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$ is a unit radial vector, and $f(r)$ is a well-behaved function of r , then

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{x} &= 3 & \nabla \times \mathbf{x} &= 0 \\
\nabla \cdot [\mathbf{n}f(r)] &= \frac{2}{r}f + \frac{\partial f}{\partial r} & \nabla \times [\mathbf{n}f(r)] &= 0 \\
(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{n}f(r) &= \frac{f(r)}{r}[\mathbf{a} - \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})] + \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\frac{\partial f}{\partial r} \\
\nabla(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) &= \mathbf{a} + \mathbf{x}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + i(\mathbf{L} \times \mathbf{a})
\end{aligned}$$

where $\mathbf{L} = \frac{1}{i}(\mathbf{x} \times \nabla)$ is the angular momentum operator.

Bölüm 0

Giriş ve Genel Bakış

Kehribar ve mıknatıs taşı eski Yunanlılardan beri bilindiği halde, elektrodinamik, nicel olarak bir yüzyıldan daha kısa bir süre içerisinde geliştirilmiştir. Cavendish'in göze çarpan elektrostatik deneyleri 1771 ile 1773 yılları arasında yapılmıştır. Coulomb gösterişli araştırmalarını 1785'te yayınlamaya başlamıştır. Bu, elektrik ve manyetizmada evrensel nitelikli nicel araştırmaların başlangıcını gösterir. Elli yıl sonra, Faraday, zamanla değişen akımların ve manyetik alanların etkilerini inceliyordu. Maxwell, elektromanyetik alanın dinamik kuramı üzerine olan o ünlü makalesini 1864'te yayınlamıştı. Elektrik ile manyetizmayı ve ışığı anlamamızın gelişim öyküsü, kuşkusuz ki bir yüzyıldan birkaç isim vermenin ötesinde, çok daha uzun ve daha zengindir. Okuyucu, bu büyüleyici tarihin ayrıntıları için, Whittaker'in güvenilir ciltlerine bakmalıdır. Optik olaylarına önem veren daha kısa bir öykü ise, Born ve Wolf'un başlangıcında yer alır. Bu kitap kendi kendine yeterlidir; gerçi vektör hesabına ve türevli denklemlere dayanan bir matematiksel temel ister, fakat elektrodinamik konusu, elektrostatikteki temellerinden başlanarak geliştirilmektedir. Bununla beraber okuyucuların çoğu bu konuyla ilk kez karşılaşmıyorlar. Dolayısıyla bu girişin amacı, Coulomb yasası ve diğer temellerin tartışılmasına sahne hazırlamak değil, klasik elektromanyetizmayı özet biçiminde gözden geçirmektir. Bu arada, kuvvet için ters kare yasasının bugünkü doğruluk derecesi (fotonun kütlesi), üst üste gelme ilkesinin geçerlilik limitleri, yükün ve enerji farklarının kesikli oluşlarının etkileri gibi sorular tartışılacaktır. Farklı ortamlar arasındaki yüzeylerde ve iletkenlerde makroskobik alanlar için sınır koşulları gibi "peynir ekmek" cinsinden konulara da değinilecektir. Amaç, klasik elektromanyetizmayı yerli yerine oturtmak, geçerlilik bölgesini göstermek ve kapsadığı idealleştirmelerin bazılarını aydınlatmaktır. Tartışma süresince, kitapta daha sonra çıkarılan bazı sonuçlar ve klasik olmayan bazı düşünceler kullanılacaktır. Kuşkusuz elektromanyetizmaya ilk kez başlayan bir okuyucu kanıtlamaların tümünü izleyemeyecek, ya da onların önemini anlayamayacaktır. Bununla beraber, diğerleri için bu giriş, kitabın 5. Bölümünden sonraki kısımlarına bir sıçrama tahtası rolü oynayacak ve ayrıca bir deneysel bilim olarak konunun nasıl ayakta durduğunu anımsatacaktır kanısındayız.

0.1 Boşlukta Maxwell Denklemleri, Alanlar ve Kaynaklar

Elektromanyetik olayları yöneten denklemler Maxwell denklemleridir,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

vakumdaki dış kaynaklar için $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ ve $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ olacaktır. Bu iki denklem daha sonra

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{c^2 \partial t} &= \mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}\tag{2}$$

şeklinde olacaktır.

Yük yoğunluğu ve akım yoğunluğu için süreklilik denklemi dediğimiz

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3)$$

bağıntısı Maxwell denklemlerinde kapalı olarak bulunmaktadır. (1.1)'deki ilk denklemin zamana göre türevi ile ikinci denklemin ıraksamasını birleştirince bu bağıntı ortaya çıkar.

Tanım (Maxwell denklemlerinden Gauss Yasası ve Ampere-Maxwell Yasasını kullanarak süreklilik denklemini elde ediniz).

$$\text{Ampere - Maxwell Yasası: } \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{Gauss Yasası: } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Maddesel ortamda Maxwell yasaları,

$$\text{Ampere - Maxwell Yasası: } \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{Gauss Yasası: } \nabla \cdot \mathbf{D} = \sigma$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 \text{ olacağı için,}$$

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot (\sigma) = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

Yüklü parçacık hareketinin ele alınışında temel olan bir denklem de, elektromanyetik alanların varlığı halinde, noktasal bir q yüküne etkiyen kuvveti veren

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (4)$$

şeklindeki Lorentz kuvvetidir.

Bu denklemler SI birimleri cinsinden yazılmıştır; bu kitapta kullanılan elektromanyetik birim sistemi budur (Birimler ve boyutlar, kitabın sonundaki Ek'te tartışılmaktadır). Maxwell denklemleri, sözü edilen Ek'teki Çizelge 2'de çeşitli birim sistemleri cinsinden de sergilenmektedir. Bu denklemler, \mathbf{E} ve \mathbf{B} alanları ile ρ ve \mathbf{J} kaynaklarından başka, bir de c parametresi kapsamaktadır. Bu nicelik hız boyutunda olup, ışığın boşluktaki hızıdır. Işık hızının tüm elektromanyetik ve relativistik olaylar için temel bir önemi vardır. Ek'te tartışıldığı gibi, son yıllarda iki farklı atomik geçiş cinsinden ayrı ayrı tanımlanan uzunluk ve zaman birimlerimize dayalı olarak, bu parametre $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ deneysel değerine sahiptir. Bu sonuç, son derece kararlı bir helyum-neon lazeri kullanılarak hem frekansın hem de dalga boyunun ölçüldüğü bir deneyden elde edilir. Bu noktada şuna işaret edelim ki, burada metrenin bugünkü tanımı yerine, c 'yi ve saniyeyi kullanan bir tanım konmuş gibi bir kesinlik vardır. Bu tanımlar, ışık hızının evrensel bir sabit olduğunu varsayar ve kanıtlarla (Kesim 11.2 (c)'ye bakınız) uyumlu olduğunu varsayar; çok alçak frekanslardan en azından $\nu \simeq 10^{24} \text{ Hz}$ 'lik çok yüksek frekanslara (4' GeV'lik fotonlara) kadar, büyük bir doğrulukla, ışığın boşluktaki hızının frekanstan bağımsız olduğunu gösterir. Pek çok pratik araç için, $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ya da daha kesin olan $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$ değeri alınabilir.

Denklem (1.1)'deki \mathbf{E} ve \mathbf{B} elektrik ve manyetik alanları, ilk olarak denklem (1.3)'teki kuvvet denklemi aracılığıyla ortaya atılmıştır. Coulomb'un deneylerinde, yerleşik yük dağılımları arasında etkiyen kuvvetler gözlenmişti. Burada birim yük başına düşen kuvvet olarak \mathbf{E} elektrik alanını ortaya atmak yararlıdır (Bölüm 1.2'ye bak). Benzer şekilde, Ampere'in deneylerinde ise, akım taşıyan halkalar arasındaki karşılıklı kuvvetler incelenmişti (Bölüm 5.2'ye bak). Birim hacminde \mathbf{v} hızlı N tane yük taşıyıcısı bulunan A kesit alanlı bir iletkenin geçen akımı $NAq\mathbf{v}$ olarak saptamakla, denklem (1.3)'teki \mathbf{B} 'nin, büyüklükçe, birim akım başına düşen kuvvet olarak tanımlanabileceğini görürüz. \mathbf{E} ile \mathbf{B} başlangıçta sadece yük ve akım dağılımları tarafından oluşturulan kuvvetlerin yerine konan yararlı yardımcıları gibi gözüktüğü halde, onların başka önemli özellikleri de vardır. Birinci olarak, alanların ortaya atılmasıyla, kavramsal açıdan kaynaklar, elektromanyetik alanları gören test cisimlerinden ayrılmışlardır. İki kaynak dağılımının \mathbf{E} ve \mathbf{B} alanları uzayın verilen bir noktasında aynı iseler, kaynak dağılımları ne kadar farklı olursa olsun, bu noktadaki bir test yüküne ya da test akımına etkiyen kuvvet aynı olacaktır. Bu, denklem (1.3)'teki \mathbf{E} ve \mathbf{B} alanlarına, kaynaklarından bağımsız olarak, kendi hakları olan anlamı verir. İkinci olarak, elektromanyetik alanlar, kaynakların bulunmadığı uzay bölgelerinde de var olabilirler. Enerji, momentum ve açısal momentum taşırlar ve böylece yüklerden ve akımlardan tümüyle bağımsız olarak bir varlığa sahiptirler. Gerçekten de, yüklü parçacıkların etkileşmesini uzaktan-etki şeklinde anlatmayı yeğleyen ve dolayısıyla alanlara açıkça başvurmayı ortadan kaldırmak için tekrarlanan girişimler olsa da, elektromanyetik alan kavramı, hem klasik hem de kuantum mekaniksel olarak, fiziğin en verimli düşüncelerinden biridir.

Alışılmış alanlar olarak \mathbf{E} ve \mathbf{B} klasik bir kavramdır. Gerçek ve sanal fotonlar cinsinden yapılan kuantum mekaniksel anlatımın klasik limiti (büyük kuantum sayıları limiti) gibi düşünülebilir. Makroskobik olaylar bölgesinde ve hatta bazı atomik olaylarda, elektromanyetik alanın kesikli foton görünümü çoğu kez önemsenmeyebilir, ya da en azından törpülenebilir. Örneğin, 100 Watt'lık ışık ampulünden 1 metre ötede, elektrik alanının kare ortalaması kökü (kısaca k.o.k.) 0,5 volt/cm dolayındadır ve saniyede cm^2 'ye 10^{15} kadar görünür foton gelir. Benzer şekilde, 10^8 Hz'de 100 Watt gücünde izotropik bir FM anteni, 100 km'lik bir uzaklıkta ancak 5 mikrovolt/cm'lik bir k.o.k. elektrik alanı oluşturur; fakat bu gene de 10^{12} foton/ $\text{cm}^2 \times \text{s}$ 'lik bir akıya, ya da bu uzaklıktaki 1 dalga boyu küpünün (27 m^3) hacminde 10^9 dolayında foton bulunmasına karşı gelir. Alışıldığı gibi, aygıt, fotonlara tek tek duyarlı olmayacak; yayınlanan ya da soğurulan birçok fotonun toplu etkisi, makroskobik olarak gözlenebilen sürekli bir yanıt olarak görünecektir.

Elektromanyetik alanların klasik anlatımının ne zaman uygun olacağına önsel olarak nasıl karar verilecektir? Bazen biraz karmaşıklık gerekir; fakat genellikle şu yeterli bir ölçüttür: işe karışan foton sayısının büyük alınması yanında, ayrıca bir tek fotonun taşıdığı momentum da maddesel sistemin momentumuna göre küçük ise, o zaman maddesel sistemin yanıtı, elektromanyetik alanların klasik anlatımıyla yeterince saptanabilir. Örneğin, FM antenimiz tarafından yayınlanan 10^8 Hz'lik her bir foton, antene sadece 2.2×10^{-34} newton-saniye'lik bir itme verir. Klasik işlem kuşkusuz yeterlidir. Işığın serbest elektron tarafından saçılması, alçak frekanslarda klasik Thomson formülüyle (Bölüm 14.7) verilir; fakat gelen fotonun $\hbar\omega/c$ momentumu mc 'ye göre önemli hale gelince Compton etkisi yasaları yürürlüğe girer. Fotoelektrik olay maddesel sistem için klasik olmayan bir olgudur; çünkü metal içindeki yarı-serbest elektronlar kendi enerjilerini soğurulan fotonların enerjilerine eşit miktarda değiştirirler; fakat fotoelektrik akım, elektronlar için kuantum mekaniksel biçimde, elektromanyetik alanların klasik anlatımı kullanılarak hesaplanabilir.

Bölüm 1

Elektrostatige Giriş

Elektrodinamiğin tartışılmasına, zamandan bağımsız yük ve alan dağılımlarını kapsayan olaylarla, yani elektrostatik konusu ile başlıyoruz. Bu kısım okuyucuların çoğu için bir tekrar niteliğindedir. Bu bölümde fazla bir şey yapmayıp, ilerdeki tartışmalarda gerekli olan kavram ve tanımları ortaya koyacak ve bazı temel matematiksel araçları vereceğiz. Daha sonraki bölümlerde matematiksel teknikleri geliştireceğiz ve uygulayacağız.

Fiziğin şu yanına değinilmelidir. Tarihsel açıdan elektrostatik büyük-boyuttaki (makroskobik) olayların bilimi olarak geliştirilmiştir. Giriş'in sonunda da belirtildiği gibi, noktasal yük ya da bir noktadaki elektriksel alan gibi soyutlamalar, büyük-boyuttaki olayların anlatılmasına yarayan matematiksel yapılar olarak görülmeli ve bunların küçük-boyuttaki (mikroskobik) düzeyde anlamlarını yitirebilecekleri unutulmamalıdır.

1.1 Coulomb Kanunu

Elektrostatığın tümü, birbirlerine göre duran iki yüklü cisim arasındaki kuvvetin nicel ifadesini veren Coulomb yasasından çıkmaktadır. Coulomb, yaptığı deneyler sonucunda, hava içerisinde kendi boyutlarına göre birbirlerinden çok uzakta bulunan yüklü iki küçük cisim arasındaki kuvvetin,

- 1 her bir yükün büyüklüğüyle doğru orantılı olduğunu,
- 2 aradaki uzaklığın karesiyle ters orantılı olarak değiştiğini,
- 3 yükleri birleştiren çizgi boyunca yöneldiğini ve
- 4 cisimler zıt olarak yüklüseler çekici, aynı yükle yüklüseler itici

olduğunu göstermiştir. Ayrıca deneysel olarak gösterilmiştir ki, yüklü bir küçük cisim üzerine dolayında bulunan diğer yüklü küçük cisimlerin uyguladıkları toplam kuvvet, her çift arasındaki Coulomb kuvvetlerinin vektörel toplamına eşittir. Kesin olarak söylemek gerekirse, Coulomb'un sonuçları, boşluktaki ya da geçirgenliği (susceptibility) önemsenmeyen ortamlardaki yüklere uygulanır. Dielektriksel ortamlardaki yüklerin ele alınışını 4. bölüme bırakıyoruz.

Defter.

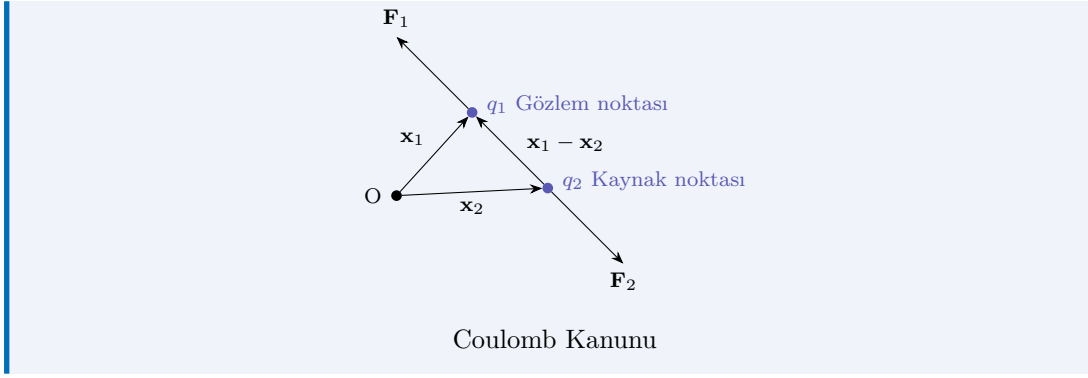
$$\mathbf{F} = kq_1q_2 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \quad (1.2)$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$k = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}, \quad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

Aslında şöyle yazıyorduk,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= k \frac{q_1q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \frac{r}{r} \\ &= k \frac{q_1q_2\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned}$$



1.2 Elektrik Alanı

Ölçülen nicelik kuvvet olmakla birlikte, kuvvetten bir basamak ötede bulunan bir kavramı, yüklü cisimler topluluğunun elektrik alanı kavramını tanımlamak yararlıdır. Şimdilik elektrik alanını, verilen bir noktada birim yük başına etkiyen kuvvet olarak tanımlayabiliriz. Yerin fonksiyonu olan bir vektördür ve \mathbf{E} ile gösterilir. Bununla birlikte, elektrik alanının tanımında dikkatli olunmalıdır. Bunun zorunlu olarak bir balmumu yuvarlağı üzerine yerleştirilen birim yükün söz konusu noktaya getirilmesiyle ölçülen kuvvet olması gerekmez. Nedeni açıktır. Bir birim yük öylesine büyük olabilir ki, orada bulunması yüklü cisimler topluluğunun alanını önemli ölçüde değiştirebilir. Bu nedenle bir limit süreci kullanılmalıdır, yani küçük bir sına cismine etkiyen kuvvetin bu sına cismi üzerindeki yüke oranı, iyice küçük yükler için ölçülmelidir*. Deneysel olarak, sına yükü gitgide küçültüldükçe, bu oran ve kuvvetin yönü sabitleşmeye yüz tutacaktır. Büyüklüğün ve yönün bu limit değerleri, elektrik alanının söz konusu noktadaki büyüklüğünü ve yönünü tanımlar. Elektriksel alanın tanımını simgelerle şöyle yazabiliriz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (1.1)$$

Burada \mathbf{F} kuvveti, \mathbf{E} elektriksel alanı ve q yükü göstermektedir. Bu eşitlikte q yükünün bir noktaya sıkıştırıldığı, kuvvet ve alanın da bu noktada değerlendirildiği varsayılmaktadır.

Coulomb yasası da benzer şekilde yazılabilir. \mathbf{x}_1 noktası sıkıştırılmış q_1 noktasal yükü üzerine \mathbf{x}_2 noktasına sıkıştırılmış başka bir q_2 noktasal yükü tarafından uygulanan kuvvet \mathbf{F} olmak üzere, Coulomb yasası

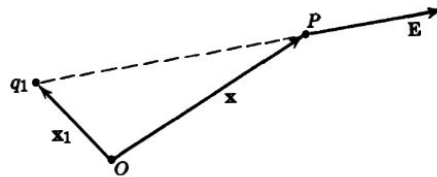
$$\mathbf{F} = kq_1q_2 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \quad (1.2)$$

şeklinde simgelenir. q_1 ve q_2 'nin pozitif ve negatif değerler alabilen cebirsel nicelikler olduğuna dikkat ediniz. k orantı katsayısı ise kullanılan birim sistemine bağlıdır.

\mathbf{x}_1 noktasındaki q_1 noktasal yükünün \mathbf{x} noktasında doğurduğu elektrik alanı, Şekil 1.1'de gösterildiği gibi doğrudan elde edilebilir:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = kq_1 \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \quad (1.3)$$

k sabiti seçilen yük birimi tarafından belirlenir. Elektrostatik birimler (esb)'de birim yük, bir santimetre ötesine konan kendine eşit yüke 1 dyne'lik kuvvet uygulayan yük olarak seçilir. Buna göre CGS birimleriyle birlikte, $k = 1$ 'dir ve yük birimine "stat-coulomb" denir. MKS sisteminde $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ olup, burada ϵ_0 ($= 8.854 \times 10^{-12}$ farad/metre) boş uzayın elektriksel geçirgenliğidir.



Şekil 1.1

Çok sayıda yük tarafından oluşturulan kuvvetlerin deneysel olarak gözlenen çizgisel üst-üste gelme ilkesi, \mathbf{x}_i noktalarında bulunan $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ noktasal yükler sisteminin \mathbf{x} noktasında oluşturduğu elektrik alanının

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \sum_{i=1}^n q_i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \quad (1.4)$$

şeklinde vektörel bir toplam olarak yazılabileceğini söylemektedir. Eğer yükler çok küçük ve $\rho(\mathbf{x}')$ yük yoğunluğuyla anlatılabilecek kadar çok sayıda iseler [\mathbf{x}' noktasındaki $\Delta x' \Delta y' \Delta z'$ küçük hacmi içinde Δq yükü varsa, $\Delta q = \rho(\mathbf{x}') \Delta x' \Delta y' \Delta z'$ yazılabilir], bu durumda üstteki toplam yerine bir integral gelir:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' \quad (1.5)$$

Burada $d^3 x' = dx' dy' dz'$, \mathbf{x}' noktasında üç boyutlu bir hacim elemanıdır.

Defter.

$$\lambda = \frac{q}{l} \text{ c/m} \rightarrow \text{Çizgisel Yük Yoğunluğu}$$

$$\sigma = \frac{q}{A} \text{ c/m}^2 \rightarrow \text{Yüzeysel Yük Yoğunluğu}$$

$$\rho = \frac{q}{V} \text{ c/m}^3 \rightarrow \text{Hacimsel Yük Yoğunluğu}$$

$$\Delta q = \rho(\mathbf{x}') \Delta x' \Delta y' \Delta z'$$

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{x}') d^3 x'$$

Uzayın bir noktasındaki $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ elektrik alanı,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{F}}{q} = k q_1 \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}$$

Benzer şekilde n adet yük varlığında,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k q_1 \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} + k q_2 \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} + \dots = k \sum_{i=1}^n q_i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \sum_{i=1}^n q_i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}$$

Sürekli yük dağılımı varsa,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int dq \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' \quad (1.5)$$

$$d^3 x' = dx' dy' dz'$$

Tanım (The Dirac δ Fonksiyonu).^a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Eğer $f(x)$ herhangi bir iyi fonksiyonsa^b,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} f(x) dx - f(0) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} [f(x) - f(0)] dx \right| \\
&\leq \max \left| \frac{df(x)}{dx} \right| \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} |x| dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \max \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

^aLighthill, M.J. (1959). *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*. Cambridge University Press.

^bgood function

Defter. \mathbf{r}_k noktalarında bulunan N tane q_k nokta yükünden oluşan yük yoğunluğu tanımlayalım:

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N q_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \quad (1.6)$$

Denklem (1.5)'de yerine koyalım,

$$\begin{aligned}
f(a) &= \int f(x) \delta(x - a) dx \\
\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= k \int \frac{\left\{ \sum_k q_k \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_k) \right\} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' \\
&= k \sum_k q_k \int \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \delta(x' - x_k) d^3 x' \\
\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= k \sum_k q_k \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|^3}
\end{aligned}$$

Denklem (1.4) yeniden elde edildi.

Not. Dirac δ 'nın tanımına bak!

Bu noktada Dirac δ fonksiyonunu tanımlamak yararlıdır. Bir boyutta $\delta(x - a)$ şeklinde yazılan δ fonksiyonu, matematiksel açıdan dürüst bir fonksiyon olmayıp aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- 1 $x \neq a$ için $\delta(x - a) = 0$ 'dır.
- 2 İntegrasyon bölgesi $x = a$ 'yı kapsıyorsa $\int \delta(x - a) dx = 1$ 'dir, kapsamıyorsa bu integral sıfırdır.
Delta fonksiyonuna, güçlü olmamakla birlikte, sezgisel bir anlam verilebilir. Çan eğrisi gibi doruklu bir eğrinin, altındaki alanı sabit tutmak koşuluyla, doruğu yükseltirken genişliği gitgide azaltılırsa limit durumunda delta fonksiyonuna varılır. Delta fonksiyonlarına ve kullanımlarına kapsamlı ve güçlü bir matematiksel yaklaşım, Schwartz'ın dağılımlar teorisidir.

Yukarıdaki tanımlardan açıkça görüleceği gibi, keyfi bir $f(x)$ fonksiyonu için

- 3 $\int f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$ 'dır.

Delta fonksiyonunun iyi-davranışlı fakat çok keskin doruklu bir fonksiyon olduğu düşünülürse, $f(x)$ fonksiyonu ile delta fonksiyonunun türevinin integrali kolayca kurulabilir. Buna göre tanım şu şekildedir:

- 4 $\int f(x) \delta'(x - a) dx = -f'(a)$ 'dır.

Burada üs işareti argümana göre türevlendirmeyi göstermektedir.

Delta fonksiyonunun argümanı, bağımsız x değişkeninin bir $f(x)$ fonksiyonu ise, bu delta fonksiyonu şu kurala göre dönüştürülebilir:

$$5 \quad \delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{df}{dx}(x_i) \right|} \delta(x - x_i)$$

$f(x)$ 'in sadece basit sıfırlara sahip olduğu ve bu sıfırların (yani $f(x) = 0$ denkleminin köklerinin) $x = x_i$ noktalarında bulunduğu varsayılmaktadır.

Birden fazla boyutta, sadece her bir boyuttaki delta fonksiyonlarının çarpımlarını alırız. Örneğin üç boyutta, kartezyen koordinatlarla çalıştığımızda,

$$6 \quad \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \delta(x_1 - X_1)\delta(x_2 - X_2)\delta(x_3 - X_3)$$

$\mathbf{x} = \mathbf{X}$ noktasının dışında her yerde sıfır olan bir fonksiyondur ve şu koşulları sağlar:

$$7 \quad \int_{\Delta V} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) d^3x = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \Delta V \text{ hacmi } \mathbf{x} = \mathbf{X} \text{ noktasını kapsıyorsa} \\ 0, & \text{eğer } \Delta V \text{ hacmi } \mathbf{x} = \mathbf{X} \text{ noktasını kapsamıyorsa} \end{cases}$$

Uzayın boyutu ne ise, delta fonksiyonunun da buna uygun hacmin tersine eşit bir boyuta sahip olduğuna dikkat ediniz.

Noktasal yüklerin kesikli bir cümlesi, delta fonksiyonları kullanılarak bir yük yoğunluğu ile betimlenebilir. Örneğin,

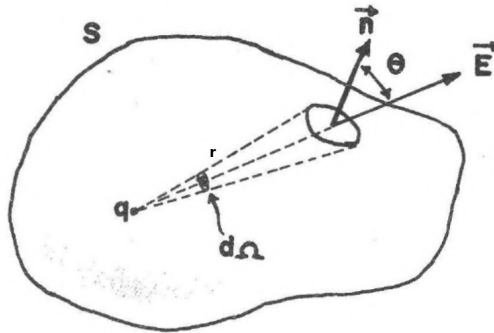
$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (1.6)$$

\mathbf{x}_i noktalarına yerleşmiş n tane q_i noktasal yükünün bir dağılımını göstermektedir. (1.6)'daki bu yük yoğunluğunu (1.5) ifadesinde yerine koyduktan sonra, delta fonksiyonunun özelliklerini kullanarak integralini alırsanız, (1.4)'deki kesikli toplamı elde edersiniz.

1.3 Gauss Kanunu

Denklem (1.5) integrali, elektrik alanını hesaplamak için her zaman en uygun form değildir. Gauss kanunu olarak adlandırılan ve bazı durumlarda çok daha yararlı olan ve ayrıca $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ için bir diferansiyel denkleme yol açan başka bir integral sonucu vardır. Gauss kanununu elde etmek için, Şekil 1.2'de gösterildiği gibi, önce noktasal bir q yükü ve kapalı bir S yüzeyi alalım. q yükünden yüzey üzerindeki bir noktaya olan uzaklık r , bu noktada yüzeye dik olan dışa doğru yönelmiş birim vektör \mathbf{n} ve yüzey elemanı da olsun. q yükünün yüzey üzerindeki noktada oluşturduğu \mathbf{E} elektrik alanı \mathbf{n} ile θ açısı yapıyorsa, bu durumda \mathbf{E} 'nin yüzeye dik bileşeni çarpı yüzey elemanı şu olur:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = kq \frac{\cos \theta}{r^2} da \quad (1.7)$$



Şekil 1.2

Gauss kanununun mantığı aslında akı kavramına dayanır. Zaten diferansiyel formunu elde edebilmek için diverjans formülünü kullanmamız gerekir. Diverjansın anlamı da akı demektir.

Defter. Elektrik alanı radyal yönde tanımlayalım,

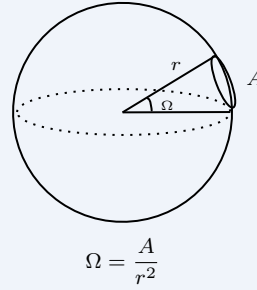
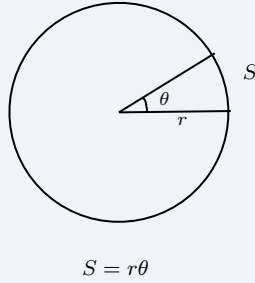
$$\mathbf{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Her iki tarafı \hat{n} ile skaler olarak çarpalım,

$$\mathbf{E} \cdot \hat{n} = k \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n} = k \frac{q}{r^2} \cos \theta$$

Her iki tarafın kapalı bir yüzey üzerinden integralini alalım,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} da = kq \int \frac{\cos \theta}{r^2} da$$



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} da = kq \oint \frac{\cos \theta}{r^2} da = kq \oint \frac{r^2 d\Omega}{r^2}$$

$$d\Omega = \frac{\cos \theta da}{r^2} \quad (1.8)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} da = kq \underbrace{\oint_S d\Omega}_{4\pi} = kq4\pi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi q = \frac{q}{\epsilon_0}$$

q yükü S yüzeyinin dışında ise

$$\oint \mathbf{E} \cdot \hat{n} da = 0$$

$$d\mathbf{a} = \hat{n} da$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad (1.10)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x \quad (1.11)$$

Denklem (1.11), elektrostatik'in temel denklemlerinden biridir.

Not. Diverjansın anlamı akı demektir.

1.4 Gauss Kanununun Diferansiyel Formu

Gauss kanunu, elektrostatığın temel integral formülasyonu olarak düşünülebilir. Diverjans teoremini kullanarak bir diferansiyel form (yani bir diferansiyel denklem) elde edebiliriz.

Defter.

$$\begin{aligned}
 \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z \\
 \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
 \oint_S \hat{A} \cdot \hat{n} da &= \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) d^3x \\
 \oint \mathbf{E} \cdot \hat{n} da &= \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho d^3x \Rightarrow \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) d^3x = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho d^3x \\
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

1.5 Elektrostatığın Diğer Bir Denklemi ve Skaler Potansiyeli

(1.13) denklemi tek başına $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ elektrik alanının üç bileşenini de tam olarak belirtmek için yeterli değildir. Belki de bazı okuyucular bilirler; uzayın her yerinde ıraksaması ve rotasyoneli verilirse, ancak o zaman bir vektör alanı hemen hemen tam olarak belirtilebilir. Bu nedenle $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ rotasyonelini konumun fonksiyonu olarak veren bir denklem arıyoruz. Böyle bir denklem, yani

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{1.14}$$

denklemi doğrudan doğruya (1.5)'deki genelleştirilmiş Coulomb yasasından çıkar.

Defter.

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\
 \mathbf{E} &= k \int \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\
 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} &= -\nabla \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\} \\
 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \right\} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}
 \end{aligned}$$

Türevin ara işlemini yap! (İstersen r diyebilirsin.)

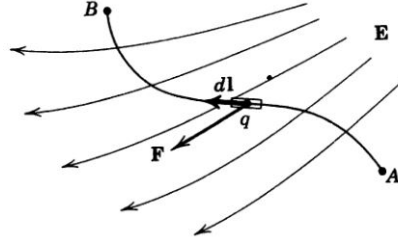
$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= -k \int \rho(\mathbf{x}') \nabla \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\} d^3x' \\
 &= -\nabla k \underbrace{\int \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'}_{\phi(\mathbf{x})} = -\nabla \phi(\mathbf{x}) \\
 \mathbf{E} &= -\nabla \phi
 \end{aligned}$$

Her 2 tarafı soldan ∇ ile çarpalım,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

Not.

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2}$$



Şekil 1.3

Defter. Skaler potansiyel elektrik alan içerisinde q deneme yükünü herhangi bir A noktasından B noktasına taşımak için yapılan iş düşünüldüğünde fiziksel bir anlama sahiptir.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

$$W = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.18)$$

Alanın etkisine karşı yük üzerine yapılan işi hesapladığımız için eksi işaretini kullandık.

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \Rightarrow W = q \int \nabla\phi \cdot d\mathbf{l}$$

$$\nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \hat{a}_x \cdot d\mathbf{x} = d\phi$$

$$W = q \int_A^B \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B d\phi = q\{\Phi(B) - \Phi(A)\} \quad (1.19)$$

Buna göre $q\phi$, elektrostatik alan içinde q deneme yükünün potansiyel enerjisi olarak yorumlanabilir. Denklem (1.18) ve (1.19)'dan görülebileceği gibi, elektrik alanının iki nokta arasındaki çizgi integrali yoldan bağımsız olup, bu iki nokta arasındaki potansiyel farkının eksilisine eşittir.

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.20)$$

İntegral kapalı bir yol boyunca alınırsa,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.21)$$

Bunu da doğrudan doğruya Coulomb yasasından elde etmek olasıdır. Bu sonuca **Stokes teoremi**'nin uygulanması, bizi derhal $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ denkleminde geri götürür. Stokes teoremi: $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ iyi davranışlı bir vektör alanı, S keyfi bir açık yüzey ve C 'de S 'yi sınırlayan kapalı bir eğri olmak üzere,

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}$$

burada $d\mathbf{l}$, C 'nin çizgi elemanıdır.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\Phi(B) = \Phi(A)$$

$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\nabla \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\}$ olduğunu gösterin. Kartezyen koordinatlarda ∇ operatörü,

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

Laplasien,

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Burada $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| = r$ olarak alalım,

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{x} \left\{ -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(2x) \right\} \\ &+ \hat{y} \left\{ -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(2y) \right\} \\ &+ \hat{z} \left\{ -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(2z) \right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}}{2} \left\{ 2x\hat{x} + 2y\hat{y} + 2z\hat{z} \right\}$$

$$= -\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}}{2} 2 \left\{ x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \right\}$$

$$= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left\{ x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \right\}$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| = r \rightarrow \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} = -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right)$$

Tanım (Poisson ve Laplace Denklemleri).

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \phi$$

$$\nabla \cdot (-\nabla \phi) = -\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Bu eşitliğe **Poisson** denklemi denir. Yük yoğunluğu olmayan uzay bölgelerinde, skaler potansiyel Laplace denklemini sağlar:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.29)$$

Skaler potansiyelin bir çözümüne zaten daha önceden sahibiz:

$$\phi(\mathbf{x}) = k \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'$$

Bu denklemi Poisson denkleminde yerine koyalım,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \nabla^2 \left\{ k \int \frac{\rho(\mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\} \\ &= k \int \rho(\mathbf{x}') \nabla^2 \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\} d^3 x' \\ \nabla^2 \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\} &= -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \nabla^2 \phi &= k \int \rho(\mathbf{x}') \left\{ -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right\} d^3 x' \\ &= -4\pi k \underbrace{\int \rho(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 x'}_{\rho(\mathbf{x})} = -4\pi k \rho(\mathbf{x}) \\ \nabla^2 \phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (1.28)$$

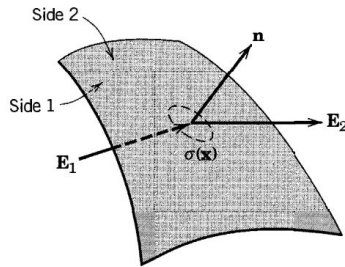
Laplace Denkleminin yük yoğunluğunun olmadığı durumu:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.29)$$

1.6 Yüklerin ve Dipollerin Yüzey Dağılımları, Potansiyel ve Elektrik Alandaki Süreksizlikler

1.6.1 Elektrostatığın Sınır Koşulları

Elektrostatığın en genel problemlerinden biri verilen yüzeysel dağılımın sebep olduğu potansiyelin veya elektrik alanın belirlenmesidir.

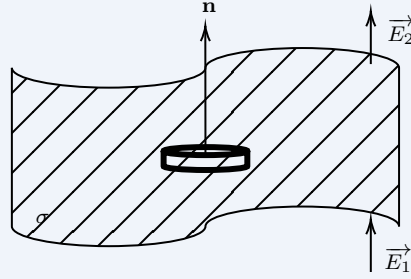


Şekil 1.4: Bir yük yüzeyini geçerken elektrik alanının dik bileşenindeki süreksizlik.

Değer.

$$\sigma = \frac{dq}{da} \Rightarrow Q = \int_S \sigma da$$

$$\sigma \rightarrow \frac{C}{m^2}$$



Yüzeyin her 2 tarafından geçen yeterince küçük bir A yüzey alanına sahip silindiriksel bir Gauss yüzeyi seçelim.

$$\oint \mathbf{E} \cdot \hat{n} da = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma da$$

$$\mathbf{E} \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Yüzeysel yük yoğunluğu homojen değilse,

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.22)$$

Elektrik alanın yüzeye dik bileşeni, yüzeyi geçerken $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ kadarlık bir süreksizliğe sahiptir.

Örnek. Örneğin sonsuz bir düzlemde $\sigma = \text{sabit}$ olsun. Elektrik alanlar zıt yönde yönelsin.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \mathbf{E}_1 = -\mathbf{E}_2$$

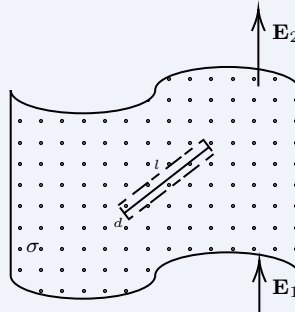
$$2\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Bu denklem kapalı bir çizgi integrali için geçerlidir. Bu durumda σ yüzey yoğunluğuna sahip bir tabakamız olsun. Yüksekliği ihmal edilebilen küçük bir dikdörtgen yol seçelim.

$d \rightarrow$ uzunluk $\hat{a}_p \rightarrow$ yüzeye paralel birim vektör



$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = d(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{a}_p = 0$$

Defter. Burada \hat{a}_p yüzey alanına paralel birim vektör ise çizgi integrali kapalı bir yol boyunca 0 olacaktır. Yüzeye paralel yönde ilerlediğim için skaler çarpımın sonucu 0'dır.

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = d(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{a}_p = 0$$

$$\mathbf{E}_{1,2} \perp \hat{a}_p \text{ ise, } (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{a}_p = 0$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$$

∴ Teğetsel bileşenler birbirine eşit!

∴ Yüzeyi geçerken potansiyelde süreklilik vardır! Elektrik alanda sürekli potansiyeli de sürekli!

Not. Aslında burada elektrik alan için sınır koşullarını elde etmeye çalışıyoruz. Elektrik alan için sınır koşullarını elde ederken Gauss ve Faraday Kanunu'nu kullandık. Bir yüzey integrali, bir çizgi integrali üzerinden elektrik alanın davranışına bakarak sınır koşullarını elde ettik. Burada elektrik alanın bir kapalı yol boyunca çizgi integraline baktık. Kapalı bir yol boyunca çizgi integrali, alan vektörü korunumluysa sıfıra eşittir. Yüzeyin içinden geçen dikdörtgen bir tel düşünelim ve $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ çizgi integrali boyunca değişime bakalım. Böylece elektrik alanın yüzeye teğet bileşeni için sınır koşulunu elde ediyoruz. Sınır koşulunu elde ederken \mathbf{E}_1 ve \mathbf{E}_2 birbirine eşittir yani teğetsel bileşenler birbirine eşittir. Sınırdaki elektrik alanın teğetsel bileşenlerinde bir süreksizlik yok. Yüzeye dik bileşenleri sınırdaki süreksizliğe sahiptir. Bu sonuçlar bizi **eşpotansiyel yüzeylere** getiriyor. Eğer yüzeyi geçerken bir süreklilik varsa eşpotansiyel yüzeylerin olduğu dünyadayız ve yapılan iş yoldan bağımsız olup bir yükü bir noktadan başka bir noktaya götürürken yapılan iş 0'dır. Dolayısıyla potansiyelde bir süreksizlik yok.

Tanım (Eşpotansiyel Yüzey). Bir yük dağılımı tarafından oluşturulan potansiyelin aynı olduğu noktalara eşpotansiyel nokta denir. Bu eşpotansiyel noktalar üç boyutlu uzayda bir yüzey meydana getiriyorsa buna eşpotansiyel yüzey denir.

- Elektrik alan çizgileri daima eşpotansiyel bir yüzeye diktir.
- Eşpotansiyel yüzeyler asla kesişmezler.
- Bir nokta yük için eşpotansiyel yüzeyler eş-merkezli küresel kabuklardır.
- Eşpotansiyel yüzeyde hareket eden bir test yükü elektrik alanda iş yapmış sayılmaz.
- Eşpotansiyel yüzeylerin yönü yüksek potansiyelden düşük potansiyele doğrudur.
- Kuvvetli elektrik alanlarında eşpotansiyel yüzeyler birbirine yakın, zayıf elektrik alanlarında ise eşpotansiyel yüzeyler geniş aralıklarla yerleşmişlerdir.

Nokta yükler için,

$$\mathbf{F} = kq_1q_2 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}$$

$$\mathbf{E} = kq \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}$$

Sürekli yük dağılımları için,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

⚠ $\Phi(\mathbf{x})$ potansiyeli normalde skaler bir nicelik, koordinat sistemine göre tanımladığımız için üstüne bir vektör atıyoruz.

1.6.2 Dipolün Potansiyeli

Defer.

$$\phi(\mathbf{x}) = k \int \frac{\rho(\mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Burada artık potansiyelimizi sürekli yük dağılımları için yazıyoruz. Kaynağın çok çok uzağında olalım,

$$x \gg x', \quad x' \rightarrow \text{kaynağın olduğu nokta}$$

Çok uzaklarda lokalize yük dağılımı, nokta yük gibi görülebilir. $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ teriminin Taylor Serisini açalım,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &\cong \frac{1}{x} - \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \bigg|_{x'=0} \cdot \mathbf{x}' + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathbf{x}' \cdot \nabla)^k \frac{1}{x^{k+1}} \\ &= \frac{1}{x} - (\mathbf{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{x} + (\mathbf{x}' \cdot \nabla)(\mathbf{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{2x} + \dots \\ \nabla \left(\frac{1}{x} \right) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z \right\} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{\mathbf{x}}{x^3} \end{aligned}$$

Notasyon. Burada $\frac{1}{x}$ dediğimiz şey aslında kartezyen koordinatlarda $\frac{1}{r}$ 'dir. Jackson'da x olarak tanımlıdır.

$$-\mathbf{x}' \cdot \nabla \left(\frac{1}{x} \right) = -\mathbf{x}' \cdot \left(-\frac{\mathbf{x}}{x^3} \right) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{x^3}$$

⚠ 3. terimi bize bıraktı.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{1}{x} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{x^3} + \frac{3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2 - x^2 x'^2}{2x^5} + \dots \\ \phi(\mathbf{x}) &= k \int \rho(\mathbf{x}') \left\{ \frac{1}{x} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{x^3} + \frac{3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2 - x^2 x'^2}{2x^5} + \dots \right\} d^3 x' \\ \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{k}{x} \underbrace{\int \rho(\mathbf{x}') d^3 x'}_Q + \underbrace{\frac{k}{x^3} \int \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') d^3 x'}_{\frac{k}{x^3} \mathbf{x} \cdot \int \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d^3 x'} + \frac{k}{2x^5} \int \rho(\mathbf{x}') \{3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2 - x^2 x'^2\} d^3 x' + \dots \end{aligned}$$

Burada 1. terim,

$$q = \int \rho(\mathbf{x}') d^3 x' \quad \text{Monopol Moment!}$$

2. terim,

$$\mathbf{P} = \int \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d^3 x' \quad \text{Dipol Moment! (Bu bir vektördür.)}$$

3. terim,

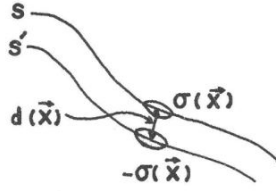
$$Q_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{x}') \{3x'_i x'_j - x'^2 \delta_{ij}\} d^3 x' \quad \text{Quadrapol Moment! (Bu bir tensördür.)}$$

⚠ 3. terim neden tensör? Çünkü boyut yetmiyor. Bu yüzden tensör tanımlamamız gerekiyor. $N \times N$ boyutlu uzaydayız, boyut bize yetmiyor. N boyutlu uzayda determinantlarla iş yapıyoruz.

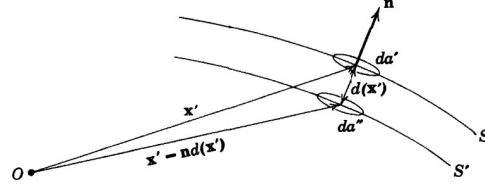
$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= k \frac{q}{x} + k \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}}{x^3} + \dots \\ \mathbf{E} = -\nabla \phi &= k \frac{q}{x^3} \mathbf{x} + k \frac{3(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{P} x^2}{x^5} \end{aligned}$$

Not. Burada aslında sürekli yük dağılımına çok uzak olduğumuzda nokta yük gibi davranmasını matematiksel olarak açıklamaya çalışıyoruz. Bu yüzden $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ ifadesini seriye açıyoruz çünkü kaynağa çok uzak bir noktada bu ifadeyi seriye açabiliriz, yakınsak bir seri olur.

1.6.3 Elektrostatik Potansiyelin Dipol Tabakasındaki Süreksizliği



Şekil 1.5



Dipol-tabaka geometrisi.

İlgileneceğimiz bir başka problem ise, bir S yüzeyi üzerindeki bir dipol tabakası dağılımının oluşturduğu potansiyeldir. Şekil 1.5'te gösterildiği gibi, yüzeysel yük yoğunluğu $\sigma(\mathbf{x})$ olan bir S yüzeyinin iyice yakınına eşit ve zıt yük yoğunluklu başka bir S' yüzeyi getirilerek bir dipol tabakasının oluşturulduğu düşünülebilir. Dipol dağılımının $D(\mathbf{x})$ ile gösterilen şiddetini tanımlamak için S' yüzeyi S'ye sonsuz küçük derecede yaklaştırılırken $\sigma(\mathbf{x})$ yüzeysel yük yoğunluğu sonsuza götürülür.

DeFTER. S ve S' yüzeyleri bir dipol tabaka oluştursun. Her 2 tabaka eşit ancak zıt yüklü yüzeysel yük yoğunluğuna sahip olsun. Dipol tabakasından kaynaklanan potansiyeli bulmak istiyoruz. Burada $d(\mathbf{x})$ tabakalar arasındaki mesafedir. Öyle ki bu iki tabaka birbirine sonsuz küçük yaklaşsın yani aralarındaki uzaklık 0'a gidecek şekilde birbirine son derece yakın hale gelsin. Bu durumda bir tabaka diğer tabakanın yüzeysel yük yoğunluğunu sonsuza götürür.

$$\lim_{d(\mathbf{x}) \rightarrow 0} \sigma(\mathbf{x})d(\mathbf{x}) = D(\mathbf{x})$$

$$\sigma = \frac{dq}{da} \quad Q = \int_S \sigma da$$

Yüzey dipolün dipol-tabaka dağılımı (??)

$$\phi(\mathbf{x}) = k \int \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da' \quad (1.23)$$

Şekil 1.6'da görüldüğü gibi, S'den S'ne yönelen ve S yüzeyine dik olan birim vektör \hat{n} olmak üzere, bu iki yakın yüzeye ait potansiyel,

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da' + k \int_{S'} \frac{-\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \hat{n}d|} da''$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da' - k \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \hat{n}d|} da''$$

2. terimin Taylor serisini açmamız gerekiyor. İlk olarak genel halini yazalım,

$$\frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|} = \frac{1}{x} + \mathbf{a} \cdot \nabla \left(\frac{1}{x} \right) + \dots \quad |\mathbf{a}| \ll |\mathbf{x}|$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \hat{n}d|} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - d\hat{n} \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \dots$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da' - k \left\{ \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da'' - \int_S \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot [\sigma(\mathbf{x}')d\hat{n}]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} da'' \right\}$$

⚠ 2. ve 3. integralde S yazılmış ama S' olması gerekiyordu??

1. integral ve 2. integralin yüzey alanlarını aynı seçersek birbirini götürürler (??).

$\lim_{d(\mathbf{x}) \rightarrow 0} \sigma(\mathbf{x})d(\mathbf{x}) = D(\mathbf{x})$ limitini de uygularsak potansiyel şu şekilde olur,

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int_S D(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} da'$$

⚠ S' ve da'' olması gerekmiyor mu??

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int_S D(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} da'$$

∇' 'ne göre türev alıyoruz,

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \nabla' \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\}$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int_S D(\mathbf{x}') \hat{n} \cdot \nabla' \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\} da'$$

Burada $\mathbf{P} = \hat{n}Dda$ dipol moment için, x' noktasındaki bir dipolden dolayı x noktasındaki potansiyel,

$$\phi(\mathbf{x}) = k \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

Kitapta ekstra olarak, katı açığa bağlı olarak S yüzeyi üzerinden integralini alarak da tanımlamış, (yüzey alanını gören katı açı)

$$\hat{n} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) da' = - \frac{\cos \theta da'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} = -d\Omega$$

Burada $d\Omega$ gözlem noktasından da' yüzey elemanını gören katı açı elemanıdır.

$$\Phi(\mathbf{x}) = -k \int_S D(\mathbf{x}') d\Omega \quad (1.26)$$

Bu şekilde bir çift dipol tabakayı geçerken (dipol) potansiyelde bir süreksizlik vardır.

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{D}{\epsilon_0} \quad (1.27)$$

Bir dipol tabakasını geçerken potansiyelde bir süreksizlik vardır. Bu durum, gözlem noktasını dipol tabakaya sonsuz küçük derecede yaklaştırılarak görülebilir. Bu durumda, gözlem noktasının tam altında olan küçük bir disk ile geri kalan parça olmak üzere, çift tabakasının iki parçadan oluştuğu düşünülebilir. Disk öylesine küçük alınabilir ki, yeterince düz olduğu ve sabit bir D yüzeysel dipol momenti dağılımına sahip olduğu kabul edilebilir. Diskin potansiyeliyle geri kalan kısmının potansiyelinin üst-üste getirilmesiyle toplam potansiyelin elde edilebileceği açıktır. Sadece disk potansiyeli, iç yüzden dış yüze geçerken D/ϵ_0 'lık bir süreksizliğe sahiptir; çünkü Denklem (1.26)'dan açıkça görülebileceği gibi, potansiyel iç yüzde $-D/2\epsilon_0$, dış yüzde ise $+D/2\epsilon_0$ 'dır. Diskin çıkarıldığı bir boşluğu bulunan geri kalan parçanın kendi başına potansiyeli, boş kısımdan geçerken sürekli. Sonuç olarak yüzeyi geçerken potansiyeldeki atlama:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{D}{\epsilon_0} \quad (1.27)$$

kadardır. Bu sonuç, bir yüzeysel yük dağılımını geçerken elektrik alandaki süreksizliği gösteren Denklem (1.22)'nin benzeridir. Denklem (1.27) "fiziksel açıdan" dipol tabakasının "içinde" meydana gelen bir potansiyel düşmesi olarak yorumlanabilir ve iyi yüzeysek yük tabakası arasındaki alan ile limit alınmadan önceki aralığın çarpımı olarak hesaplanabilir.

1.6.4 Elektrostatik Potansiyel Enerji

Bölüm 1.5'te, bir noktasal cismin yükü ile skaler potansiyelin çarpımının potansiyel enerji olarak yorumlanabileceği gösterilmişti. Daha kesin söylemek gerekirse, sonsuzda sıfır olan Φ skaler potansiyeliyle anlatılan elektrik alanlarının bulunduğu bir bölgede bir q_i noktasal yükü sonsuzdan bir \mathbf{x}_i noktaya getirilirse, yük üzerine yapılan iş (dolayısıyla potansiyel enerji),

$$W_i = q_i \Phi(\mathbf{x}_i) \quad (1.47)$$

şeklinde verilir. Φ potansiyeli, \mathbf{x}_j konumlarına yerleşmiş $(n-1)$ tane q_j yükü ($j = 1, 2, \dots, n-1$) tarafından oluşturulmuş gibi düşünülebilir. Buna göre,

$$\Phi(\mathbf{x}_i) = k \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (1.48)$$

olarak verilir. Öyle ki q_i yükünün potansiyel enerjisi,

$$W_i = q_i k \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|x_i - x_j|} \quad (1.49)$$

şeklinde verilir.

Defter.

$$W = q \int_A^B \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = q(\Phi_B - \Phi_A)$$

q_2 yükünü, \mathbf{x}_2 noktasına getirmek için yapılan iş

$$W_2 = q_2 \Phi_1(\mathbf{x}_2)$$

Burada $\Phi_1(\mathbf{x}_2)$, \mathbf{x}_2 noktasındaki q_1 yükünden dolayı oluşan potansiyeldir.

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$$

$$W_2 = k \frac{q_2 q_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}$$

$$W_2 = k \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$$

i ve j üzerinden sınırlanmamış toplamlar 2'ye bölerek çok daha simetrik bir ifade bulunur, (seride çift katlı toplam olduğu için aynı terimi iki defa yazmamak için 2'ye bölüyoruz)

$$W_2 = \frac{k}{2} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (1.51)$$

$i = j$ terimlerinin (sonsuz "öz-enerji" terimleri) çift toplamda atlandığı bilinmelidir (ref. Jackson.) ??

Sürekli yük dağılımı için integrale dönüşecek, çift katlı integral olmak zorundadır

$$W = \frac{k}{2} \int \int \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x d^3 x' \quad (1.52)$$

Buradaki integrallerden biri skaler potansiyelin kendisidir. Yerine yazarsak,

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d^3 x \quad (1.53)$$

Denklem (1.51), (1.52) ve (1.53), elektrostatik potansiyel enerjiyi yüklerin konumları cinsinden anlatırlar ve dolayısıyla yükler arasındaki etkileşimleri Coulomb kuvvetleri yoluyla vurgularlar.

Defter. Yüklerin etrafındaki elektrik alanda depolanan enerji Gauss kanunu kullanılarak da bulunabilir.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Buradan ρ 'yu çekersek,

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$$

olacaktır. Bu eşitliği Denklem (1.53)'de yerine yazarsak,

$$W = \frac{1}{2} \int (\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) \phi(\mathbf{x}) d^3x = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) \phi(\mathbf{x}) d^3x$$

Diverjans için çarpım kuralını yazıp hesaplamak istediğimiz terimi çekersek,

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}\phi) = (\nabla \cdot \mathbf{E})\phi + \mathbf{E} \cdot (\nabla \phi)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{E})\phi = \nabla \cdot (\mathbf{E}\phi) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \phi)$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) \phi(\mathbf{x}) d^3x$$

Burada çarpım kuralını yerine yazalım,

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \left\{ \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) \phi d^3x - \int (\mathbf{E} \cdot \underbrace{\nabla \phi}_{-\mathbf{E}}) d^3x \right\}$$

Burada 2. terimi düzenlersek,

$$- \int \mathbf{E} \cdot (-\mathbf{E}) d^3x = \int |\mathbf{E}|^2 d^3x$$

1. terimi düzenlersek, diverjans teoreminden yüzey integraline geçelim

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) \phi d^3x = \int_S \phi (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}) = 0 \quad d\mathbf{a} = \hat{n} da$$


Bütün yüzey üzerinden integral aldığımızda sonuç 0 olacaktır. Dolayısıyla yapılan iş,

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V |\mathbf{E}|^2 d^3x \quad (1.54)$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 V_{\text{hacim}} \Rightarrow \frac{W}{V_h} = \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2$$

Burada artık w enerji yoğunluğudur,

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \rightarrow \frac{\text{Joule}}{\text{m}^3} \quad (1.55)$$

 Burada problem 1.1 ve 1.3 örnek olarak çözülmüştür ama bu çözümleri problemler kısmında vereceğim.

Denklem (1.55)'de şaşırtıcı bir nokta vardır. Enerji yoğunluğu pozitif belirlidir. Sonuç olarak, bunun hacim integralinin negatif olmaması gerekir. Bu ise Denklem (1.51)'den edindiğimiz ters işaretli iki yükün potansiyel enerjisinin negatif olacağı izlenimiyle çelişir gibi görünmektedir. Görünüşteki bu çelişkinin nedeni şudur: Denklem (1.54) ve Denklem (1.55), enerji yoğunluğuna öz-enerji katkılarını kapsamakta, oysa Denklem (1.51)'de çift toplam bu katkılarını kapsamamaktadır.

1.6.5 İletken ve Sığa

DeFTER. N tane iletken oluşturan bir sistemimiz olsun. Bu sistem elektrostatik olarak izole olsun. İletkenin içinde elektrik alan 0 olursa potansiyel tüm iletken boyunca sabittir. Böyle yüzeylere eş potansiyel yüzey denir. (+Q, -Q)

$$\phi_{21} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad C = \frac{Q}{V}$$

Q yükü olan tek bir iletkenin kapasitansını bulalım.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^n \rho(\mathbf{x}) \phi_i d^3x \\ W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_i \underbrace{\int \rho(\mathbf{x}) d^3x}_Q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_i Q_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_i Q_i \\ \phi_i &= \sum_{j=1}^n P_{ij} Q_j \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Burada ϕ_i sütun matrisi, P_{ij} katsayı, Q_j sütun matrisidir. P_{ij} , tüm yük ve potansiyelleri birbirine bağlar. P_{ij} iletkenin geometrisine bağlıdır. Buna potansiyellerin katsayıları denir.

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} Q_j \quad i=1,2,\dots,n \quad (1.61)$$

C'nin diyagonal elemanları sığa, diyagonal olmayan elemanları elektrostatik indüksiyon katsayısı olarak adlandırılır.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} Q_i Q_j \quad (1.62)$$

⚠ Burada kitapta ϕ yerine V kullanılmıştır. Ya da notlarda bir sıkıntı var 1.61'de farklı yazılmış.

$$\begin{pmatrix} Q \\ -Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

1.7 Green Teoremi ve Green Fonksiyonları

⚠ Bu bölüm başlığı, alt bölümlerin düzenlenmesi ve karışıklığa neden olmaması için açılmıştır.

1.7.1 Laplace ve Poisson Denklemlerinin Çözümlerinin Tekilliği ve Green Teoremi

DeFTER. Sınır Koşulları

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{Poisson})$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{Laplace})$$

Burada tüm problemimiz ϕ 'yi bulmaktır.

Tek boyutta $\frac{d^2\phi}{dx^2} = \lambda$, $x \in [0, L]$, $\lambda \rightarrow \text{sabit}$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\lambda x^2 + ax + b$$

a ve b'yi bulabilmek için 2 sınır koşulu gerekir. Bunlar $\phi(0)$ ve $\phi(L)$ 'dir.

Kapalı bir S yüzeyi ile sınırlandırılmış sonlu bir V hacmi içerisinde Poisson denkleminin çözümünü bulalım. Poisson veya Laplace denkleminin V hacmi içinde tek ve iyi davranışlı olmasını sağlayan sınır koşulları nelerdir?

a) Kapalı bir S yüzeyi üzerinde potansiyeli belirlemek için bir koşul,

$$\phi(x) \Big|_{\mathbf{x} \in S} = f(x)$$

Potansiyel sınırdan tanımlıdır. Bu koşula **Dirichlet Koşulu** denir.

b) Yüzey üzerinde her yerde elektrik alanı belirlemek için **Neumann Koşulu**,

$$\hat{n} \cdot \nabla \phi \Big|_{\mathbf{x} \in S} = g(\mathbf{x})$$

Bu koşullar altında Laplace ve Poisson denklemlerinin çözümlerinin tek olduğunu gösterelim. Green özdeşliklerini türetelim.

Sınır koşullarını ele almak için bazı yeni matematiksel araçlar, yani George Green'e (1824) ait özdeşlikler ya da teoremler geliştirmek gereklidir. Bunlar diverjans teoreminin basit uygulamaları olarak ortaya çıkarlar.

A bir vektör alanı olsun.

$$\underbrace{\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} ds}_{\text{Akı (i)}} = \underbrace{\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) d^3x}_{\text{Akı (ii)}}$$

şeklinde ifade edilen diverjans teoremi, kapalı bir S yüzeyi tarafından sınırlanan bir V hacmi içinde tanımlı olan iyi-davranışlı her **A** vektör alanına uygulanabilir. ϕ ve ψ keyfi sabitler olmak üzere,

$$\mathbf{A} = \phi \nabla \psi$$

(ii)'de **A**'yı yerine yazalım,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) \\ &= \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi \end{aligned} \quad (1.32)$$

(i)'de **A**'yı yerine yazalım,

$$\mathbf{A} \cdot \hat{n} = (\phi \nabla \psi) \cdot \hat{n} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad (1.33)$$

Denklem (1.32) ve (1.33)'ü diverjans teoreminde yerine koyalım. Bu aslında I. Green Özdeşliğidir,

$$\oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = \int_V \left\{ \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi \right\} d^3x \Rightarrow \text{I. Green Özdeşliği} \quad (1.34)$$

Denklem (1.34)'de ϕ ve ψ 'yi yer değiştirerek tekrardan yazalım. $\psi \rightarrow \phi$, $\phi \rightarrow \psi$,

$$\oint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \int_V \left\{ \psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi \right\} d^3x$$

Bu denklemi, Denklem (1.34)'den çıkaralım, burada $\nabla \phi \cdot \nabla \psi$ terimleri birbirini yok ederler ve böylece II. Green Özdeşliğini ya da **Green Teoremini** elde ederiz,

$$\oint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds = \int_V \left(\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \right) d^3x \Rightarrow \text{II. Green Özdeşliği} \quad (1.35)$$

Poisson denkleminin çözümünün Neumann ve Dirichlet koşulları altında tek olduğunu göstereyim. Aynı koşulları sağlayan 2 tane çözüm olsun: ϕ_1 ve ϕ_2

$$\phi_{1,2}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x} \in S} = f(x) \rightarrow \text{Dirichlet}$$

$$\frac{\phi_{1,2}}{\partial n} \Big|_{\mathbf{x} \in S} = g(x) \rightarrow \text{Neumann}$$

Kitap. Kapalı S sınır yüzeyi üzerindeki Dirichlet ya da Neumann sınır koşulları bulunan bir V hacmi içerisinde (1.28) Poisson denkleminin çözümlerinin tekliğini göstermek istiyoruz. Tersine, aynı sınır koşullarını sağlayan ϕ_1 ve ϕ_2 gibi iki çözümün bulunduğunu varsayalım.

$$U(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}) - \phi_2(\mathbf{x}) \quad (1.37)$$

$f(x)$ ve $g(x)$ sürekli fonksiyonlar $U(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}) - \phi_2(\mathbf{x})$ olsun. $\nabla^2 U(\mathbf{x}) = 0$ Laplace denklemini sağlar. Öyle ki,

$$\text{a. } U(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x} \in S} = 0 \rightarrow \text{Dirichlet}$$

$$\text{b. } \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\mathbf{x} \in S} = 0 \rightarrow \text{Neumann}$$

I. Green Özdeşliğinde $\psi = \phi = U$ olsun:

$$\oint_S \underbrace{U \frac{\partial U}{\partial n}}_{=0} ds = \int_V \left\{ \underbrace{U \nabla^2 U}_{=0} + \nabla U \cdot \nabla U \right\} d^3x \quad (1.38)$$


Burada V hacminin içinde $\nabla^2 U = 0$ (Laplace'dan dolayı); S üzerinde ise Dirichlet sınır koşulu için $U = 0$, Neumann sınır koşulu içinse $\partial U / \partial n = 0$ 'dır.

$$\int_V |\nabla U|^2 d^3x = 0 \Rightarrow \nabla U = 0 \Rightarrow u = \text{sbt}$$

\therefore Dirichlet sınır koşulu için V hacmi içinde potansiyel sabit olduğundan yani $\phi_1 = \phi_2$ yüzey üzerinde $U = 0$ 'dır ve çözüm tektir.

\therefore Neumann koşulu için yüzey üzerinde $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ çözüm tektir.

\therefore Sınırdaki Neumann ve Dirichlet koşullarından yalnızca bir tanesi sağlanır. Aynı anda ikisi sağlanmaz.

 Sonuç olarak diyebiliriz ki, elektrostatik problemleri, sadece kapalı bir sınır yüzeyi (şüphesiz yüzeyin bir kısmı, ya da tümü sonsuzda olabilir) üzerindeki Dirichlet ya da Neumann sınır koşulları tarafından belirtilir.

1.7.2 Dirichlet veya Neumann Sınır Koşullarına Sahip Poisson Denklemini için Green Fonksiyonları

DeFTER. Sınırlı bir S yüzeyi, V hacmi, Laplace, Poisson, Green fonksiyonu ile çözüm bulunur.

Uygulama 1: Boş uzayda, boşlukta $G(x, x') = \frac{1}{|x - x'|}$ fonksiyonunu kullanarak herhangi bir x noktasındaki elektriksel potansiyeli hesaplayalım.

$$\phi(\mathbf{x}') = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x = k \int \rho(\mathbf{x}') G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x$$

x' 'teki kaynağın varlığında \mathbf{x} 'teki çözümü Poisson denklemi:

$$\nabla'^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Bu denklemin $x = \mathbf{x}'$ noktasında çözümü vardır. Onun dışında 0 verir.

$$\nabla'^2 G_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.39)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = k \int \rho(\mathbf{x}') G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \text{yüzey terimi}$$

II. Green Özdeşliğini ele alalım:

$$\phi = \Phi, \quad \psi = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{R}$$

$$\oint \underbrace{\left\{ \phi \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right\}}_{(i)} da' = \int \underbrace{\left\{ \phi \nabla'^2 \psi - \psi \nabla'^2 \phi \right\}}_{(ii)} d^3x'$$

$$(i) \quad \phi \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n'} = \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'}$$

$$(ii) \quad \phi \nabla'^2 \psi - \psi \nabla'^2 \phi = \underbrace{\Phi \nabla'^2 \left(\frac{1}{R} \right)}_{-4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} - \frac{1}{R} \underbrace{\nabla'^2 \Phi}_{-\rho/\epsilon_0} = \Phi 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{\rho}{R\epsilon_0}$$

Denklemden yerine yazalım,

$$\begin{aligned} \oint_S \left[\Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] da' &= \int_V \left[-\Phi 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{\rho}{\epsilon_0 R} \right] d^3x' \\ &= \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}') d^3x'}{\epsilon_0 R} - 4\pi\Phi(\mathbf{x}) \\ \phi(\mathbf{x}) &= k \int \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{R} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) \right] da' \end{aligned} \quad (1.36)$$

$S \rightarrow \infty$ iken S yüzeyi üzerindeki potansiyel $\frac{1}{R}$ ile hızla azalarak sınır koşullarını ortadan kaldırır.

$$\oint_S \rightarrow 0$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{R} d^3x'$$

\therefore Yükün olmadığı durumda $\rho = 0$, $\phi(\mathbf{x})$ S yüzeyi üzerinde yalnızca ϕ ve $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 'e bağlıdır.

Uygulama 2:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

F bilinmeyen bir fonksiyondur öyle ki:

$$\nabla'^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rightarrow \text{Nokta kaynak}$$

\mathbf{x} ve \mathbf{x}' , V hacminin içinde olmak üzere;

$\nabla'^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ denklemini sağlar.

$F \rightarrow$ Laplace denkleminin bir çözümü

$G \rightarrow$ Poisson denkleminin bir çözümü

II. Gren Özdeşliğinden $\phi = \Phi$, $\psi = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ kullanalım:

$$\oint_S \left\{ \phi \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right\} da' = \int_V \left\{ \phi \nabla'^2 \psi - \psi \nabla'^2 \phi \right\} d^3 x'$$

$$\oint_S \left\{ \Phi \frac{\partial}{\partial n'} G_0 - G_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right\} da' = \int_V \left\{ \Phi \nabla'^2 G_0 - G_0 \nabla'^2 \Phi \right\} d^3 x'$$

Burada $\nabla'^2 G_0 = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ ve $\nabla'^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ yerine konulursa,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x' + \frac{1}{4\pi} \int \left\{ G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right\} da'$$

1.7.3 Dirichlet Sınır Koşuluna Sahip Green Fonksiyonu

Defter.

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0, \mathbf{x}' \in S \quad (1.43)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} da' \quad (1.44)$$

Sistemin geometrisine oldukça bağlıdır ve simetri özelliği vardır. \mathbf{x} ile \mathbf{x}' yer değiştirilebilir.

1.7.4 Neumann Sınır Koşuluna Sahip Green Fonksiyonu

Defter.

$$\frac{\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} = 0, \mathbf{x}' \in S$$

$$\left. \frac{\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right|_{\mathbf{x}' \in S} = \frac{-4\pi}{S} \quad (1.45)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n} da' \quad (1.46)$$

$$\langle \Phi \rangle_S = \frac{1}{S} \oint_S \Phi(\mathbf{x}') da'$$

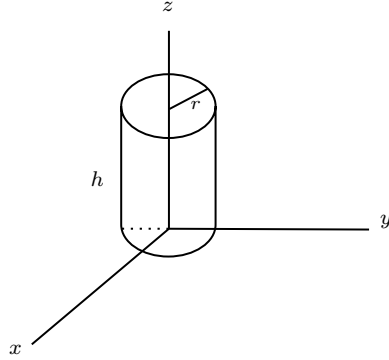
⚠ Burada $\langle \Phi \rangle_S$, potansiyelin tüm yüzey üzerinden ortalama değeridir. Alışlagelen Neumann problemi, "dışsal problem" denendir: bu problemde V hacmi, biri kapalı ve sonlu olan, diğeri ise sonsuzda bulunan iki yüzey tarafından sınırlanmaktadır. Bu durumda S yüzey alanı sonsuzdur; dolayısıyla (1.45) sınır koşulu homojen hale gelir ve $\langle \Phi \rangle_S$ ortalama değeri sıfır olur.

Şuna dikkat edelim: Green fonksiyonları, Dirichlet ya da Neumann sınır değerlerinin ayrıntılı yapılarına bağlı olmayan (1.43) ya da (1.45) gibi basit sınır koşullarını sağlarlar. Böyle olsa bile, çoğunlukla $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 'nü saptamak, S yüzeyinin biçimine bağlılığı nedeniyle, (eğer temelli olanaksız değilse) oldukça karışıktır. İkinci ve üçüncü bölümlerde böyle problemlerle karşılaşacağız.

Örnek (Şekildeki silindirin hacimce yük yoğunluğu verilmiştir. Silindirin üzerindeki toplam yük miktarı nedir?).

$$\rho = 100e^{-z}(x^2 + y^2)^{-1/4} \quad \text{Birimi: } \frac{C}{m^3}$$

$$r = 10 \text{ cm}, h = 30 \text{ cm}$$



Silindirde hacimce yük yoğunluğu bilinen bir sistemin toplam yükü nasıl bulunur?

$$Q = \int \rho dV$$

Silindirik koordinatlarda çözeceğiz soruyu,

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r dr d\theta dz$$

$$\begin{aligned} Q &= \int_{r=0}^{0.1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{0.3} 100e^{-z} \{r^2\}^{-1/4} r dr d\theta dz \\ &= 100 \int_0^{0.1} r^{-1/2} r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_0^{0.3} e^{-z} dz \\ &= 100 \int_0^{0.1} r^{1/2} dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^{0.3} e^{-z} dz}_{I_3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_3 = \int e^{-z} dz$$

$$u = -z \rightarrow \frac{du}{dz} = -1 \rightarrow dz = -du$$

$$-\int e^u du = \frac{e^u}{\ln e} = \frac{e^u}{1} = -e^u \Rightarrow -e^{-z}$$

$$\Rightarrow I_3 = -e^{-z}$$

$$\begin{aligned} &= 100 \left\{ \frac{2r^{3/2}}{3} \Big|_0^{0.1} \right\} \left\{ \theta \Big|_0^{2\pi} \right\} \left\{ -e^{-z} \Big|_0^{0.3} \right\} \\ &= 100 \left\{ 0.021 - 0 \right\} \left\{ 2\pi - 0 \right\} \left\{ -e^{-0.3} + e^{-0} \right\} = 100 \left\{ 0.021 \right\} \left\{ 2\pi \right\} \left\{ 1 - e^{-0.3} \right\} \\ &= 100 \left\{ 0.021 \right\} \left\{ 2\pi \right\} \left\{ 0.259 \right\} = 3.417 \text{ Coulomb} \\ &Q = 3.43 \text{ Coulomb} \end{aligned}$$

Örnek $(\phi(x) = \frac{V_0}{2} \{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\})$.

$a \rightarrow$ eklem bölgesinin genişliği

$V_0 \rightarrow$ eklem üzerindeki potansiyel fark

Potansiyel Volt biriminde olmalı!

a) $\mathbf{E} = ?$

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{d\phi}{dx} = -\frac{V_0}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right\} \\
 &= -\frac{V_0}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 1 + x(x^2 + a^2)^{-1/2} \right\} \\
 &= -\frac{V_0}{2} \left\{ 1(x^2 + a^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}(x^2 + a^2)^{-3/2}(2x)x \right\} \\
 &= -V_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \right\} \\
 &= -V_0 \left\{ \frac{(x^2 + a^2)}{(x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \right\} \\
 &= -V_0 \left\{ \frac{(x^2 + a^2)}{(x^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \right\} \\
 &= -V_0 \left\{ \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \right\} = -V_0 \left\{ \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \right\} \\
 E_x &= -\frac{V_0 a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

b) ρ yük yoğunluğunu bulunuz.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = \varepsilon_0 \frac{dE_x}{dx} \\
 \rho &= -\varepsilon_0 V_0 a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x^2 + a^2 \right\}^{-3/2} \\
 \rho &= \frac{3}{2} \varepsilon_0 V_0 a^2 2x \left\{ x^2 + a^2 \right\}^{-5/2} \\
 \rho &= \varepsilon_0 V_0 a^2 \frac{3x}{\left\{ x^2 + a^2 \right\}^{-5/2}}
 \end{aligned}$$

1.8 Problemler

Soru 1.1: Gauss teoremini (ve gerekliyse 1.21 denklemini) kullanarak şunları kanıtlayınız:

- a) Bir iletken üzerine konan her fazlalık yük, tamamıyla iletkenin yüzeyine yayılmalıdır (Bir iletken, tanım gereği, uygulanan elektrik alanlarının etkisi altında serbestçe hareket eden yüklere sahiptir).
- b) İçi boş kapalı bir iletken kabuk, iç bölgeyi dışardaki yüklerin alanlarına karşı perdeler; fakat dış bölgeyi içeriye konacak yüklerin alanlarına karşı perdeleyemez.
- c) Bir iletkenin yüzeyindeki elektrik alanı yüzeye dik olup, $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ değerine sahiptir; burada σ yüzeyin birim alanına düşen yük yoğunluğudur.

Çözüm:

a) Bir iletkenin içinde \mathbf{E} elektrik alanı sıfır olduğu için, Gauss yasası $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ 'a göre iletkenin içinde yük yoğunluğu da olmayabilir. Bu sonuç, fazla yükün tamamen yüzeyde olması gerektiği anlamına gelir.

b) İletkenin hemen içine bir Gauss yüzeyi yerleştirebilirsiniz. İçeride yük yoğunluğu olmadığı için, Gauss yasasına göre (belki integral formda daha kolay görülür) $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{iç}}{\epsilon_0}$ iletkenin dışındaki tüm yüklere rağmen içeride de \mathbf{E} elektrik alanı yoktur. Ancak içi boş iletkenin içinde yükler varsa, aynı yasa size $Q \neq 0$ 'ı söyler, yani dışardaki alan da sıfır değildir. Bu nedenle, içini dışardaki yüklerden korur, ancak dışını içerideki yüklerden korumaz.

c) İletkenin yüzeyindeki \mathbf{E} alanı yüzeye normal (dik) olmalıdır, aksi takdirde yük yüzeyde akacaktır (yükün statik olduğu varsayımını yapıyoruz). Yüke gelince büyüklüğü için Gauss yasasını integral formunda kullanırız:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{iç}}{\epsilon_0}$$

Burada, $dQ_{iç} = \sigma \hat{n} \cdot d\mathbf{a}$ 'dır. Çünkü var olan tek yük yüzeydedir. Gauss yasasını tekrar yazalım,

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \cdot d\mathbf{a} = \int (\mathbf{E} - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}) \cdot d\mathbf{a} = 0$$

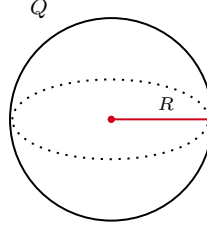
$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

Soru 1.3: Dirac-delta fonksiyonunu uygun koordinatlarda kullanarak, aşağıdaki yük dağılımlarını, üç-boyutlu $\rho(\mathbf{x})$ yük yoğunlukları olarak ifade ediniz:

- a) Küresel koordinatlarda, R yarıçaplı küresel bir kabuk üzerine düzgün dağıtılmış bir Q yükü
b) Silindirik koordinatlarda, b yarıçaplı küresel bir kabuk üzerine düzgün dağıtılmış bir λ yükü.

Çözüm:

a) Küresel bir kabuk üzerine düzgün olarak dağıtılmış Q yükü vardır. Sadece radyal yöndeki değişimi göz önüne alalım. θ ve ϕ 'den bağımsız olsun.



$$\rho(\mathbf{x}) \rightarrow \rho(r, \theta, \phi)$$

$$\rho(r) = A\delta(r - R) = \begin{cases} r = R, & \text{değeri var} \\ r \neq R, & 0 \end{cases}$$

$$Q = \int \rho dV \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty [A\delta(r - R)] r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$Q = A \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty [\delta(r - R)] r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$Q = A \int_0^\infty \delta(r - R) r^2 dr \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi}_{4\pi}$$

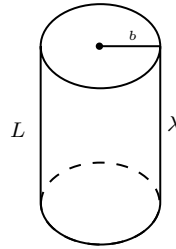
$$Q = 4\pi A \int_0^\infty \delta(r - R) r^2 dr = 4\pi AR^2$$

δ fonk. özelliğini kullanarak $r = R$ yazarsak,

$$Q = 4\pi AR^2 \Rightarrow A = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\rho(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R)$$

b) Silindirik koordinatlarda, b yarıçaplı silindirik bir yüzey üzerinde düzgün bir şekilde dağıtılmış birim uzunluk başına bir λ yükü vardır.



$$\rho(\mathbf{r}) \rightarrow \rho(r, \theta, z)$$

$$\rho(r) = A\delta(r - b) = \begin{cases} r = b, & \text{değeri var} \\ r \neq b, & 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \int \rho dV \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho(r) r dr d\theta$$

$$\lambda = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty [A\delta(r-b)] r dr$$

Yük yoğunluğunu normalize ettiğimiz için z üzerinden integral alınmamıştır.

$$\lambda = 2\pi A \int_0^\infty \delta(r-b) r dr$$

δ fonk. özelliğini kullanarak $r = b$ yazarsak,

$$\lambda = 2\pi A b \Rightarrow A = \frac{\lambda}{2\pi b}$$

$$\rho(r, \theta, z) = \frac{\lambda}{2\pi b} \delta(r-b)$$

⚠ Bu çözüm notlarda Q yükü üzerinden yapıldığı için, çözümde bir karışıklık vardı. Daha sonra tekrar karşılaştı!

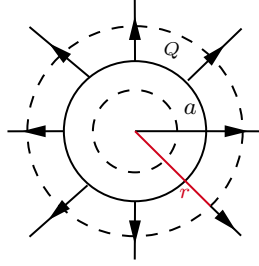
⚠ z üzerinden integral alırsak sonuç ne çıkacak???

Soru 1.4: a) yarıçaplı yüklü üç kürenin her biri toplam Q yüküne sahip olup; biri iletken, birinin hacimsel yük yoğunluğu düzgündür, üçüncüsünün ise r^n ($n > -3$) ile değişen küresel simetrik bir yük yoğunluğu vardır. Gauss yasasını kullanarak, her kürenin hem içindeki hem dışındaki elektrik alanlarını bulunuz. İlk iki küre için, yarıçapın fonksiyonu olarak alanların davranışını çiziniz. Aynı çizimi $n = -2$ ve $+2$ halinde üçüncü küre için yapınız.

Çözüm:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

a)



Bütün yük yüzeyde toplanmıştır. İletken bir kürenin içinde elektrik alan 0'dır.

$$E_{iç} = 0, \quad r < a$$

$$E_{dış} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad r > a$$

\mathbf{E} vektörü radyal yönde, yani $d\mathbf{a}$ yüzey elemanı vektörüyle aynı yönde olduğundan, skaler çarpımı kaldırır ve vektörlerin şiddetlerini yazabiliriz,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_S |\mathbf{E}| da$$

\mathbf{E} vektörünün şiddeti Gauss yüzeyi üzerinde her yerde aynı olduğundan, yüzey integrali dışına alınabilir,

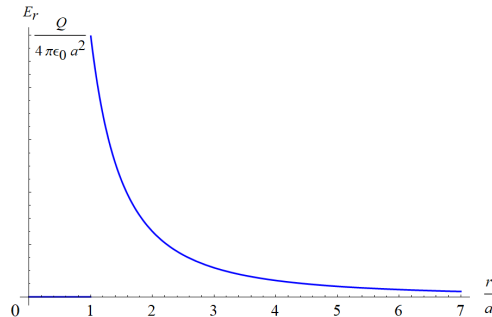
$$\oint_S |\mathbf{E}| da = |\mathbf{E}| \oint_S da = |\mathbf{E}| 4\pi r^2$$

$$|\mathbf{E}| 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

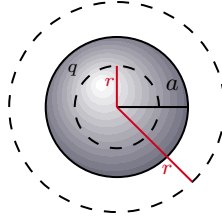
$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Not (Griffiths). Bu sonucun önemli bir özelliğine dikkat edin: Küre dışındaki elektrik alan, merkeze konulan noktasal bir q yükünün alanıyla aynı değerdedir.



b) Düzgün yük yoğunluğuna sahip küre. Burada kürenin dışındaki çözüm yukarıdaki iletken küre ile aynı miktarda yük içerir ve bu nedenle aynı çözüme sahiptir.



Not (Giancoli). Yük, küre içinde simetrik olarak dağıldığından, bütün noktadaki elektrik alanı da simetrik olmalıdır. \mathbf{E} sadece r 'ye bağlıdır ve radyal olarak dışarıya doğru yönelir (veya $Q < 0$ ise içe doğru).

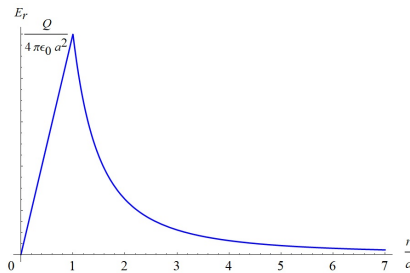
Kürenin dışı için,

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \oint_S |\mathbf{E}| da \\ \oint_S |\mathbf{E}| da &= |\mathbf{E}| \oint_S da = |\mathbf{E}| 4\pi r^2 \\ |\mathbf{E}| 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ |\mathbf{E}| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \\ \mathbf{E}_{\text{dış}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}\end{aligned}$$

Küresel simetrik yük dağılımının dışındaki elektrik alanı, kürenin merkezinde bulunan aynı büyüklükteki nokta yükün alanıyla aynı çıktı.

Kürenin içi için ($r < a$), yine Gauss yüzeyi seçiyoruz ve Gauss yüzeyindeki toplam yükü yazacağız. Hacimsel yük yoğunluğu her yerde aynıdır.

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \frac{q}{\epsilon_0} \\ \rho &= \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \\ q &= \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \right) \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \frac{r^3}{a^3} \\ |\mathbf{E}| 4\pi r^2 &= \frac{Q \frac{r^3}{a^3}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{a^3} \\ |\mathbf{E}| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{a^3} \Rightarrow \mathbf{E}_{\text{iç}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{a^3} \hat{r} \\ \mathbf{E}_{\text{iç}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{a^3} \hat{r}\end{aligned}$$



c) Kürenin dışı için,

$$\begin{aligned}
 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \oint_S |\mathbf{E}| da \\
 \oint_S |\mathbf{E}| da &= |\mathbf{E}| \oint_S da = |\mathbf{E}| 4\pi r^2 \\
 |\mathbf{E}| 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\
 |\mathbf{E}| &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \\
 \mathbf{E}_{\text{dış}} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}
 \end{aligned}$$

Kürenin içi için, öncelikle A sabitini bulmamız gerekiyor.

Katı kürenin yük yoğunluğu, $\rho = Ar^n$

$$\begin{aligned}
 Q &= \int \rho dV = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Ar^n r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
 Q &= A \int_0^a r^{n+2} dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= A \left\{ \frac{r^{n+3}}{n+3} \Big|_0^a \right\} \left\{ -\cos\theta \Big|_0^\pi \right\} \left\{ \phi \Big|_0^{2\pi} \right\} \\
 &= A \left\{ \frac{a^{n+3}}{n+3} \right\} \left\{ -\cos\pi + \cos 0 \right\} \left\{ 2\pi - 0 \right\} \\
 &= A \left\{ \frac{a^{n+3}}{n+3} \right\} \left\{ 1 + 1 \right\} \left\{ 2\pi - 0 \right\} = A \frac{a^{n+3}}{n+3} 4\pi \\
 Q &= 4\pi A \frac{a^{n+3}}{n+3} \Rightarrow A = \frac{Q(n+3)}{4\pi a^{n+3}} \\
 \rho &= \frac{Q(n+3)}{4\pi a^{n+3}} = \frac{Q(n+3)}{4\pi a^{n+3}} r^n
 \end{aligned}$$

Kürenin içinde r yarıçaplı Gauss yüzeyi seçelim,

$$\begin{aligned}
 q &= \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (Ar^n) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
 q &= \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{Q(n+3)}{4\pi a^{n+3}} r^n \right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
 q &= \left(\frac{Q(n+3)}{4\pi a^{n+3}} \right) \int_0^r r^{n+2} dr \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi}_{4\pi} \\
 q &= \left(\frac{Q(n+3)}{4\pi a^{n+3}} \right) 4\pi \int_0^r r^{n+2} dr = \left(\frac{Q(n+3)}{a^{n+3}} \right) \frac{r^{n+3}}{n+3} \\
 q &= Q \frac{r^{n+3}}{a^{n+3}} \\
 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \frac{\sum q_{\text{iç}}}{\varepsilon_0}
 \end{aligned}$$

Burada $\sum q_{\text{iç}}$ seçtiğimiz Gauss yüzeyinin içindeki toplam yük miktarıdır,

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \frac{r^{n+3}}{a^{n+3}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{r^{n+3}}{a^{n+3}}$$

$r = a$ için,

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{a^2}$$

Soru 1.5: Yüksüz hidrojen atomunun zaman-ortalama potansiyeli,

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

şeklinde verilmektedir. Burada q elektronun yükü ve $\alpha^{-1} = a_0/2$ olup, a_0 Bohr yarıçapıdır. Bu potansiyeli verecek yük dağılımını (sürekli ve kesikli) bulunuz ve sonucunu fiziksel olarak yorumlayınız.

Çözüm: Elektriksel potansiyelden ρ 'ya geçmek için,

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Küresel koordinatlarda laplasyeni yazarsak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right) \right] \right\} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right) \right] \right\} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

⚠ Ara işlemi siz yapın!

$$\Rightarrow -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \alpha r E^{-\alpha r} + e^{-\alpha r} + \frac{\alpha^2}{2} r^2 e^{-\alpha r} \right\} = -\rho$$

$$\rho = -\frac{1}{8\pi} \alpha^3 e^{-\alpha r}$$

$$e^{-\alpha r} = 1 \text{ alırsak,}$$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\alpha}{2}$$

2. terimdekiler sabit olduğu için $\phi(r)$ 'yi yaklaşık şöyle alabilirim,

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Şimdi Poissonu uygulayabiliriz,

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$kq \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Burada,

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(r) \text{ 'dir.}$$

$$kq \left(-4\pi \delta(r) \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \delta(r) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\rho = q\delta(r)$$

$$\rho = -\frac{q}{8\pi} \alpha^3 e^{-\alpha r} + q\delta(r)$$

⚠ Buna tekrar bak!

1.14 Consider the electrostatic Green functions of Section 1.10 for Dirichlet and Neumann boundary conditions on the surface S bounding the volume V . Apply Green's theorem (1.35) with integration variables \mathbf{y} and $\phi = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\psi = G(\mathbf{x}', \mathbf{y})$, with $\nabla_y^2 G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = -4\pi\delta(\mathbf{y} - \mathbf{z})$. Find an expression for the difference $[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}', \mathbf{x})]$ in terms of an integral over the boundary surface S .

a) For Dirichlet boundary conditions on the potential and the associated boundary condition on the Green function, show that $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ must be symmetric in \mathbf{x} and \mathbf{x}' .

b) For Neumann boundary conditions, use the boundary condition (1.45) for $G_N = (\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ to show that $G_N = (\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ is not symmetric in general, but that $G_N = (\mathbf{x}, \mathbf{x}') - F(\mathbf{x})$ is symmetric in \mathbf{x} and \mathbf{x}' , where

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{S} \oint_S G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) da_y$$

c) Show that the addition of $F(\mathbf{x})$ to the Green function does not affect the potential $\phi(\mathbf{x})$. See problem 3.26 for an example of the Neumann Green function.

Çözüm:

a)

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint \left\{ G \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial G}{\partial n'} \right\} da'$$

$$\int_V \left\{ \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \right\} d^3y = \oint_S \left\{ \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} da_y$$

$$\phi = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \psi = G(\mathbf{x}', \mathbf{y})$$

$$\nabla_y^2 G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = -4\pi\delta(\mathbf{y} - \mathbf{z})$$

$$\int_V \left\{ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \underbrace{\nabla_y^2 G(\mathbf{x}', \mathbf{y})}_{-4\pi\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}')} - G(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \underbrace{\nabla_y^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_{-4\pi\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})} \right\} d^3y = \oint_S \left\{ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{y})}{\partial n} - G(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} \right\} da_y$$

$$-4\pi \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d^3y = \oint_S \left\{ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{y})}{\partial n} - G(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} \right\} da_y$$

$$-4\pi \left\{ G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \right\} = \oint_S \left\{ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{y})}{\partial n} - G(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} \right\} da_y$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{y})}{\partial n} - G(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} \right\} da_y$$

Dirichlet sınır koşulu S yüzeyinde $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ olduğu anlamına gelmektedir. Bu, tüm yüzey integralinin sıfır olduğu anlamına gelir ve G_D 'nin (\mathbf{x} ve \mathbf{x}')'ünde simetrik olduğunu gösterir.

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$$

$$\phi(\mathbf{x}) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi \frac{\partial G_D}{\partial n'} da'$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \underbrace{G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_0 \frac{\overbrace{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{y})}^0}{\partial n} - \underbrace{G(\mathbf{x}', \mathbf{y})}_0 \frac{\overbrace{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}^0}{\partial n} \right\} da_y$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = 0$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \quad \blacksquare$$

$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, \mathbf{x} ve \mathbf{x}' 'nde açıkça simetriktir.

b)

Neumann sınır koşulu,

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{S} \quad \mathbf{x} \text{ on } S$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} da' + \langle \phi \rangle_S$$

$$G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G_N(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \underbrace{\frac{\partial G_N(\mathbf{x}', \mathbf{y})}{\partial n}}_{-\frac{4\pi}{S}} - G_N(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \underbrace{\frac{\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n}}_{-\frac{4\pi}{S}} \right\} da_y$$

$$G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G_N(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{1}{S} \oint_S \left\{ G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_N(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \right\} da_y$$

$$G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \underbrace{\frac{1}{S} \oint_S G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) da_y}_{F(\mathbf{x})} = G_N(\mathbf{x}', \mathbf{x}) - \underbrace{\frac{1}{S} \oint_S G_N(\mathbf{x}', \mathbf{y}) da_y}_{F(\mathbf{x}')} \quad \blacksquare$$

$$G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - F(\mathbf{x}) = G_N(\mathbf{x}', \mathbf{x}) - F(\mathbf{x}') \quad \blacksquare$$

Fark simetriktir!

c)

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\phi}{\partial n'} da' + \langle\phi\rangle_S$$

Green fonksiyonuna $F(\mathbf{x})$ ekleyerek $\phi(\mathbf{x})$ potansiyeli üzerindeki etkisine bakalım,

$$\begin{aligned} \phi'(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') (G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + F(\mathbf{x})) d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S (G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + F(\mathbf{x})) \frac{\partial\phi}{\partial n'} da' + \langle\phi\rangle_S \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \int_V \rho(\mathbf{x}') F(\mathbf{x}) d^3x' \right\} + \frac{1}{4\pi} \left\{ \oint_S G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\phi}{\partial n'} da' + \oint_S F(\mathbf{x}) \frac{\partial\phi}{\partial n'} da' \right\} + \langle\phi\rangle_S \\ \phi'(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') F(\mathbf{x}) d^3x' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\phi}{\partial n'} da' + \frac{1}{4\pi} \oint_S F(\mathbf{x}) \frac{\partial\phi}{\partial n'} da' + \langle\phi\rangle_S \\ \phi'(\mathbf{x}) &= \overbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\phi}{\partial n'} da'}^{\phi(\mathbf{x})} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') F(\mathbf{x}) d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S F(\mathbf{x}) \frac{\partial\phi}{\partial n'} da' + \langle\phi\rangle_S \\ \phi'(\mathbf{x}) &= \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') F(\mathbf{x}) d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S F(\mathbf{x}) \frac{\partial\phi}{\partial n'} da' \\ &= \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} F(\mathbf{x}) \left\{ \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') d^3x' + \oint_S \frac{\partial\phi}{\partial n'} da' \right\} \end{aligned}$$

Gauss yasası,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \cdot dV$$

Kullandığımız notasyona göre değişkenler yerine konunca,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}' da' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') d^3x'$$

$$\phi'(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} F(\mathbf{x}) \left\{ \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}' da' + \oint_S \frac{\partial\phi}{\partial n'} da' \right\}$$

$$\phi'(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} F(\mathbf{x}) \left\{ - \oint_S \nabla\phi \cdot \mathbf{n}' da' + \oint_S \frac{\partial\phi}{\partial n'} da' \right\}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi \cdot \mathbf{n} \text{ olduğundan,}$$

$$\phi'(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} F(\mathbf{x}) \left\{ - \oint_S \frac{\partial\phi}{\partial n'} da' + \oint_S \frac{\partial\phi}{\partial n'} da' \right\}$$

$$\phi'(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} F(\mathbf{x}) \left\{ 0 \right\}$$

$$\phi'(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) \quad \blacksquare$$

$F(\mathbf{x})$ 'in Green fonksiyonuna eklenmesi $\phi(\mathbf{x})$ potansiyelini etkilememektedir.

1.9 Ödevler

Ödev 0

$$\varepsilon_0 = 8.8541 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$$

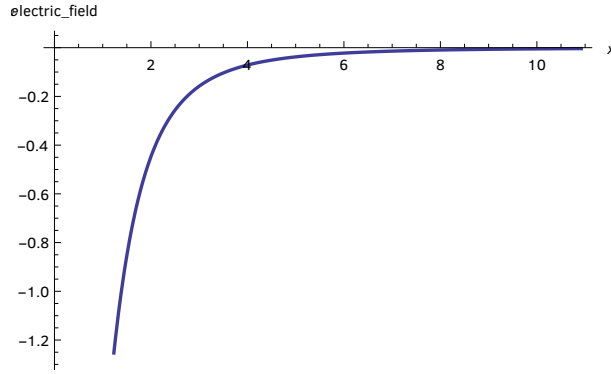
$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.9875 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$$

Soru 1: $\phi(x) = \frac{V_0}{2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)$ denkleminin $\phi(x)$, E_x ve ρ için grafiklerini gösteriniz.

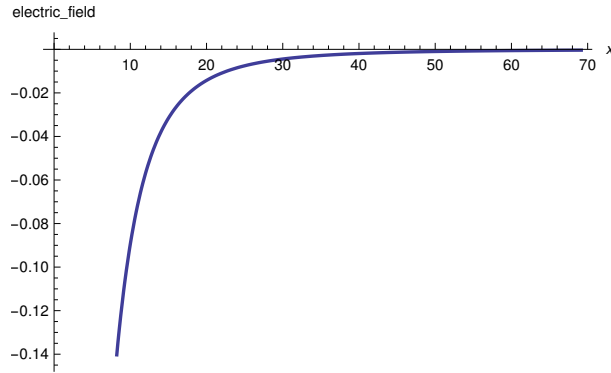
Çözüm:

a)

$$E_x = -\frac{V_0 a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (1.9)$$



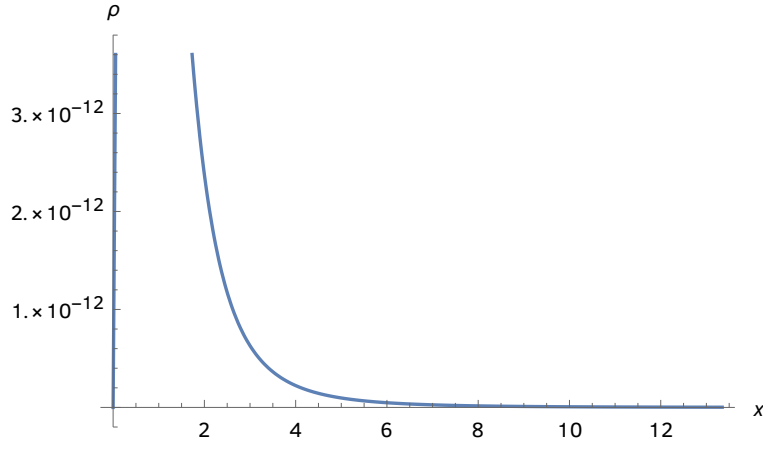
$V_0 = 5V, a = 1br$ alınmıştır.



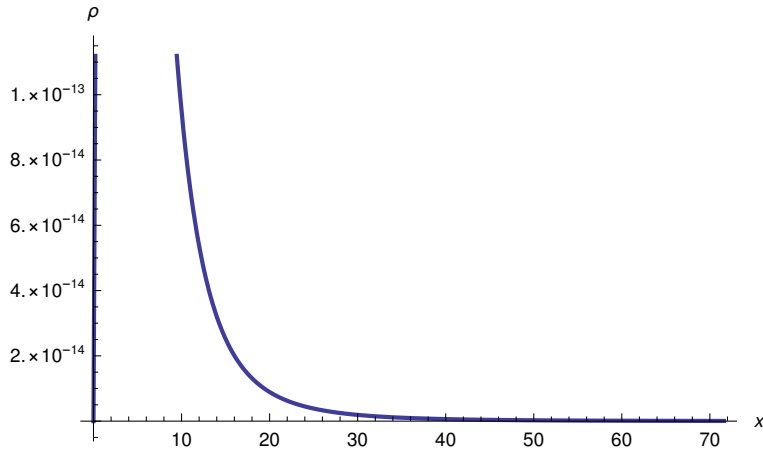
$V_0 = 5V, a = 5br$ alınmıştır.

b)

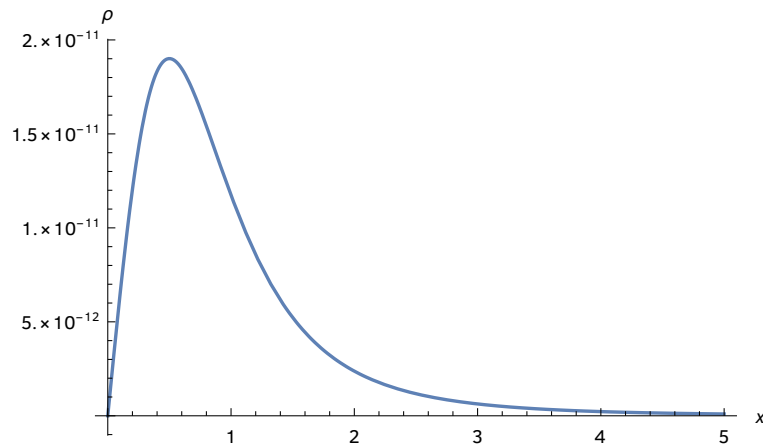
$$\rho = \frac{3}{2}V_0a^2\varepsilon_0x(x^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}} \quad (1.10)$$



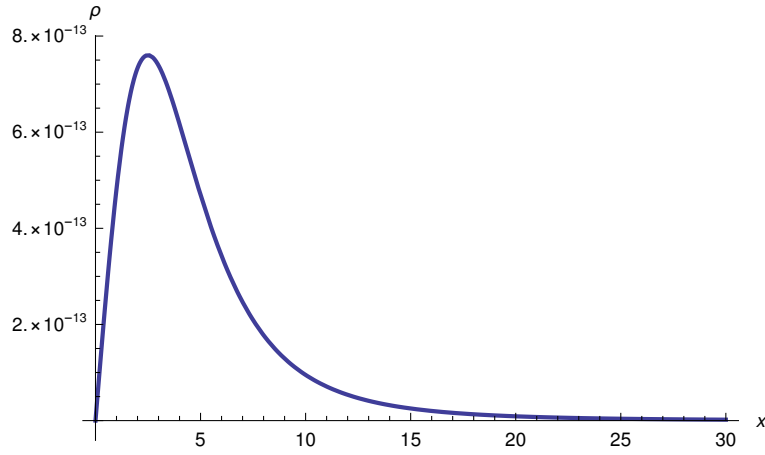
$V_0 = 5V, a = 1br$ alınmıştır.



$V_0 = 5V, a = 5br$ alınmıştır.



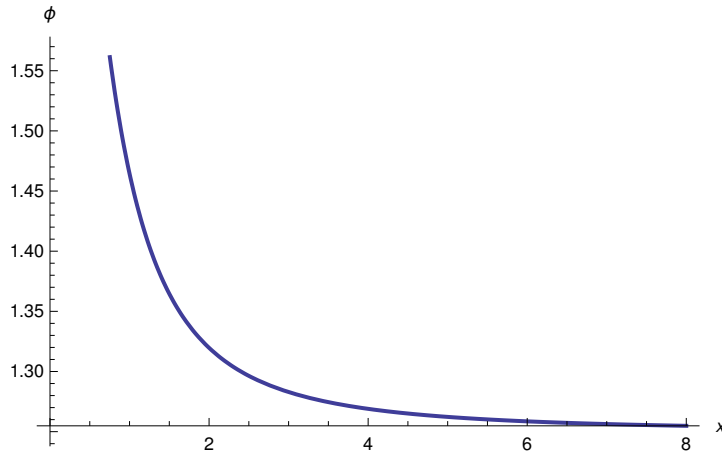
$V_0 = 5V, a = 1br$ alınmıştır.



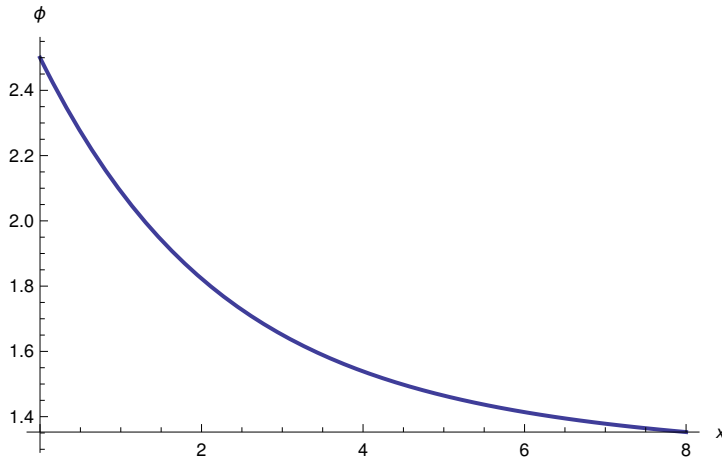
$V_0 = 5V, a = 5br$ alınmıştır.

c)

$$\phi(x) = \frac{V_0}{2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) \quad (1.11)$$



$V_0 = 5V, a = 1br$ alınmıştır.



$V_0 = 5V, a = 5br$ alınmıştır.

⚠ Soru 2 Jackson 1.14 olup problemler bölümünde verilmiştir.

Ödev 1.1

Soru 1: $\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|}\right)$ ifadesini kartezyen koordinatlarda elde ediniz.

Çözüm:

Kartezyen koordinatlarda ∇ operatörü,

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.1)$$

Laplasyen,

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad (1.2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.3)$$

Burada $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| = r$ olarak alalım,

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (1.4)$$

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.5)$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \quad (1.6)$$

$$\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \quad (1.7)$$

$$= \hat{x} \left\{ -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(2x) \right\} \quad (1.8)$$

$$+ \hat{y} \left\{ -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(2y) \right\} \quad (1.9)$$

$$+ \hat{z} \left\{ -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(2z) \right\} \quad (1.10)$$

$$= -\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}}{2} \left\{ 2x\hat{x} + 2y\hat{y} + 2z\hat{z} \right\} \quad (1.11)$$

$$= -\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}}{2} 2 \left\{ x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \right\} \quad (1.12)$$

$$= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left\{ x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \right\} \quad (1.13)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.14)$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| = r \rightarrow \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} = -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \quad (1.15)$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right) \quad (1.16)$$

Diverjans için çarpım kuralını kullanmamız gerekecek,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f\mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_z) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}A_x + f\frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}A_y + f\frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}A_z + f\frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ \nabla \cdot (f\mathbf{A}) &= f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Denklem (1.17)'deki çarpım kuralı Denklem (1.16)'da yerine konulursa, (-'yi daha sonra dahil edebiliriz)

$$\nabla \cdot \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right) = \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right) \nabla \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right) \quad (1.18)$$

İlk olarak $\nabla \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)$ terimini hesaplayalım,

$$\nabla \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = 3 \quad (1.19)$$

İkinci olarak $\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right)$ terimini hesaplayalım. Burada kolaylık olması açısından tekrardan $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| = r$ olarak almaktayız,

$$\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = \nabla \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.20)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{x} \left\{ -\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}(2x) \right\} \\ &\quad + \hat{y} \left\{ -\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}(2y) \right\} \\ &\quad + \hat{z} \left\{ -\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}(2z) \right\} \\ &= -3 \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}}{2} \left\{ 2x\hat{x} + 2y\hat{y} + 2z\hat{z} \right\} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$= -3 \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}}{2} \left\{ x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \right\} \quad (1.23)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3\mathbf{r}}{r^5} \quad (1.24)$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| = r \rightarrow \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right) = - \frac{3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^5} \quad (1.25)$$

Hesapladığımız terimleri Denklem (1.18)'de yerine yazalım,

$$\nabla \cdot \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right) = \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right) \underbrace{\nabla \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}_3 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot \underbrace{\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right)}_{-\frac{3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^5}} \quad (1.26)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right) = \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right) 3 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot \left(- \frac{3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^5} \right) \quad (1.27)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right) = \frac{3}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} - \frac{3|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^5} \quad (1.28)$$

-'yi dahil edip sonucu yazalım,

$$-\nabla \cdot \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right) = -\frac{3}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} + \frac{3}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} = 0 \quad (1.29)$$

Yani,

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right) = 0 \quad (1.30)$$

Soru 2: $0 < r < R$ 'de tanımlı bir küresel bölge $\rho = \frac{K}{r}$ yük yoğunluğuna sahiptir, burada K bir sabittir. Kürenin içinde ve dışında elektrik alanı ve potansiyeli bulunuz. Bulduğunuz potansiyeller için Poisson denklemlerini elde ederek sonucu yorumlayınız.

Çözüm: Karışıklık olmaması adına kürenin yarıçapına r_0 diyelim. Kürenin dışı için elektrik alanı bulmak için r yarıçaplı bir Gauss yüzeyi alalım,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{i\zeta}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_S |\mathbf{E}| da$$

$$\oint_S |\mathbf{E}| da = |\mathbf{E}| \oint_S da = |\mathbf{E}| 4\pi r^2$$

$$Q = \int \rho dV = \int_0^{r_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{K}{r} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$Q = K \int_0^{r_0} r dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= K \left\{ \frac{r^2}{2} \Big|_0^{r_0} \right\} \left\{ -\cos \theta \Big|_0^\pi \right\} \left\{ \phi \Big|_0^{2\pi} \right\}$$

$$= K \left\{ \frac{r_0^2}{2} \right\} \left\{ -\cos \pi + \cos 0 \right\} \left\{ 2\pi - 0 \right\}$$

$$= K \left\{ \frac{r_0^2}{2} \right\} \left\{ 1 + 1 \right\} \left\{ 2\pi - 0 \right\} = K \frac{r_0^2}{2} 4\pi$$

$$Q = K \frac{r_0^2}{2} 4\pi$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\sum Q_{i\zeta}}{\varepsilon_0}$$

$$|\mathbf{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} K \frac{r_0^2}{2} 4\pi$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi r^2 \varepsilon_0} K \frac{r_0^2}{2} 4\pi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \frac{r_0^2}{r^2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \frac{r_0^2}{r^2} \hat{r}$$

Kürenin dışında elektrik potansiyelini hesaplayalım,

$$V_b - V_a = \Delta V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Ashında burada θ ve ϕ 'de vektördür.

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{r} + r d\theta + r \sin \theta d\phi$$

$$d\mathbf{r} = \hat{r} dr$$

$$V_r - V_\infty^0 = - \int_\infty^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$V_r = - \int_\infty^r \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \frac{r_0^2}{r^2} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{r}}_1 dr$$

$$V_r = - \frac{r_0^2}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \int_\infty^r \frac{1}{r'^2} dr'$$

$$V_r = -\frac{r_0^2}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \left\{ \frac{r'^{-1}}{-1} \bigg|_{\infty}^r \right\}$$

$$V_r = -\frac{r_0^2}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \left\{ -\frac{1}{r} + \cancel{\frac{1}{\infty}} \right\}$$

$$V_r = \frac{r_0^2}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \frac{1}{r}$$

Kürenin içinde elektrik alanı bulmak için yine r yarıçaplı bir Gauss yüzeyi alalım,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{i\zeta}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_S |\mathbf{E}| da$$

$$\oint_S |\mathbf{E}| da = |\mathbf{E}| \oint_S da = |\mathbf{E}| 4\pi r^2$$

$$Q = \int \rho dV = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{K}{r} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

Hem içerde, hem de integralin sınırlarında r olduğu için integralin içindeki r 'leri r' olarak gösterelim,

$$Q = K \int_0^r r' dr' \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= K \left\{ \frac{r'^2}{2} \bigg|_0^r \right\} \left\{ -\cos \theta \bigg|_0^\pi \right\} \left\{ \phi \bigg|_0^{2\pi} \right\}$$

$$= K \left\{ \frac{r^2}{2} \right\} \left\{ -\cos \pi + \cos 0 \right\} \left\{ 2\pi - 0 \right\}$$

$$= K \left\{ \frac{r^2}{2} \right\} \left\{ 1 + 1 \right\} \left\{ 2\pi - 0 \right\} = K \frac{r^2}{2} 4\pi$$

$$Q = K \frac{r^2}{2} 4\pi$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$|\mathbf{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} K \frac{r^2}{2} 4\pi$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi r^2 \varepsilon_0} K \frac{r^2}{2} 4\pi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{K}{2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \hat{r}$$

Kürenin içinde elektrik potansiyelini hesaplayalım,

$$V_b - V_a = \Delta V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$V_r - V_{r_0} = - \int_{r_0}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$= - \int_{r_0}^r \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{r}}_1 dr'$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \int_{r_0}^r dr' = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \left\{ r' \bigg|_{r_0}^r \right\}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \left\{ r' \right\}_{r_0}^r = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \left\{ r - r_0 \right\}$$

$$V_r - V_{r_0} = -\frac{r}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} + \frac{r_0}{\varepsilon_0} \frac{K}{2}$$

$$V_{r=r_0} = \frac{r_0^2}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \frac{1}{r_0} = \frac{r_0}{\varepsilon_0} \frac{K}{2}$$

$$V_r - \frac{r_0}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} = -\frac{r}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} + \frac{r_0}{\varepsilon_0} \frac{K}{2}$$

$$V_r = -\frac{r}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} + \frac{r_0}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} + \frac{r_0}{\varepsilon_0} \frac{K}{2}$$

$$V_r = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{K}{2} \left\{ 2r_0 - r \right\}$$

Soru 3: Keyfi bir F skaleri için $\nabla \times (\nabla F)$ ifadesini kartezyen koordinatlarda hesaplayınız. F fonksiyonunun 2. mertebeden kısmi türevleri süreklidir.

Çözüm:

$\nabla \times (\nabla F)$ ifadesi aslında gradyanın rotasyonelidir.

$$\nabla F(x, y, z) = (\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}) F \quad (1.31)$$

$$\nabla F(x, y, z) = (\hat{x} \frac{\partial F}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial F}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial F}{\partial z}) \quad (1.32)$$

$$\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}) \quad (1.33)$$

$$\nabla \times (\nabla F) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (1.34)$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \right\} \hat{x} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right\} \hat{y} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right\} \hat{z} \quad (1.35)$$

$$= \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \right\} \hat{x} - \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \right\} \hat{y} + \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \right\} \hat{z} \quad (1.36)$$

\therefore Eğer F fonksiyonunun ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli ise Clairaut teoreminden

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \quad (1.37)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada karışık kısmi türevlerin eşitliğini kullanıyoruz. Böylece,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \quad (1.38)$$

eşitliklerini elde ederiz. Elde edilen terimler Denklem (1.37)'de yerine yazılırsa,

$$\nabla \times (\nabla F) = \nabla \times \mathbf{F} = \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right\} \hat{x} - \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right\} \hat{y} + \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right\} \hat{z} \quad (1.39)$$

$$= \{0\} \hat{x} - \{0\} \hat{y} + \{0\} \hat{z} = 0 \quad (1.40)$$

$$\therefore \nabla \times (\nabla F) = 0 \quad (1.41)$$

Bölüm 2

Elektrostatikte Sınır Değer Problemleri

Birçok elektrostatik probleminde, üzerlerinde ya potansiyelin ya da yüzeysel yük yoğunluğunun belirtildiği sınır yüzeyleri yer alır. Green fonksiyonları yöntemini kullanarak, bu tür problemlerin biçimsel çözümlerini 1.10 kesiminde vermiştik. Uygulamaya elverişli durumlarda (ya da uygulamaya elverişli durumlara yapılan soyut yaklaşımlarda) doğru Green fonksiyonunun bulunması kimi kez kolay kimi kez zordur. Bu nedenle elektrostatikteki sınır değer problemleri için çeşitli yaklaşımlar geliştirilmiştir; bunlardan bazılarının Green fonksiyonları yöntemiyle olan ilişkileri yok denecek kadar azdır. Bu bölümde bu özel tekniklerden şu ikisini inceleyeceğiz: (1) Görüntü yükleri yöntemi. 2) Dik fonksiyonlar cinsinden açılım. Birincisi Green fonksiyonlarının kullanımıyla sıkı sıkıya ilgilidir; ikincisi ise doğrudan doğruya diferansiyel denklem çözmeye dayalı bir yaklaşım olup, Green fonksiyonu kurma yöntemine iyice uzaktır.

2.1 Görüntü Yük Yöntemi

Görüntü yükleri yöntemi, bir ya da daha fazla noktasal yük ile, örneğin topraklanmış ya da sabit potansiyelde tutulan iletkenler gibi, sınır yüzeyleri kapsayan problemlerde kullanılır. Uygun koşullar altında, problemin geometrisinden esinlenerek, ilgilenilen bölgenin dışına uygun yerlere uygun büyüklükte az sayıda yük yerleştirilerek verilen sınır koşullarının aynısını oluşturmak olasıdır. İşte bu yüklere görüntü yükleri ve sınır yüzeyli gerçek problem yerine, sınırların kaldırılarak görüntü yükleriyle genişletilmiş bölgenin konmasına **görüntü yükleri yöntemi** denir. Görüntü yükleri ilgilenilen hacmin dışında yer almalıdır; çünkü onların potansiyelleri Laplace denkleminin hacim içindeki çözümleri olmalıdır. *Özel integral* (yani Poisson denkleminin çözümü) ise hacmin içindeki gerçek yüklerin potansiyellerinin toplamı ile verilir.

Tanım (Teklik Teoremi). Bir bölgede verilen bir hacimsel yük yoğunluğu $\rho(x, y, z)$, sınırlardaki elektriksel potansiyel de $\phi(x, y, z)$ olsun. Bu bölgede elektriksel potansiyeli açıklayan tek bir $\phi(x, y, z)$ fonksiyonu vardır. Çözüm tektir.

I. Teklik Teoremi: Laplace denkleminin çözümünün tek olduğunu söyler.

II. Teklik Teoremi: Birden fazla iletkenin olduğu durumda her bir iletkenin üzerindeki toplam yük verilmişse ve iletkenler arasındaki bölgedeki yük dağılımı biliniyorsa, elektrik alanının değeri tektir.

∴ Şekli ne olursa olsun, içinde boşluk olan bir iletkenin boşluğunda yük yoksa elektrik alanı sıfırdır.

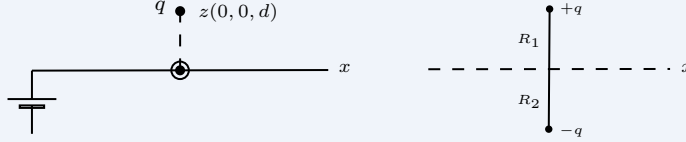
Defer. Bizim şimdiye kadar elektrostatikte yaptığımız şeyler aslında hep aynıdır. Verilen problemin şartlarına uygun olarak, elektriksel potansiyeli hangi yöntemle çözebileceğimizi inceledik.

Bir diğer yöntem ise görüntü yük yöntemidir. Bu yöntem de elektriksel potansiyeli bulmak için kullanılan bir yöntemidir. Burada işin püf noktası ne zaman neyi kullanacağımıza dikkat etmek olacaktır. Kendimize, "hangi formülden elektriksel potansiyel kullanırsam bu

soruyu ben daha kolay çözerim?" sorusunu sormamız gerekmektedir. Görüntü yük yöntemi, problemi basitleştirmek için orijinal problemin sınır koşullarını sağlayacak uygun yeni bir fiziksel ortam kurmamıza olanak sağlar.

Jackson: Basit bir örnek, şekilde görüldüğü gibi, sıfır potansiyelli sonsuz genişlikteki bir iletken düzlemin önünde duran bir noktasal yüküdür. Bu gerçek problemin eşdeğerinin, ilk yük ile iletkenin yerinde düşünülen geometrik düzlemin arkasındaki ayna-görüntüsü noktasına konan eşit ve karşıt yüklü problem olduğu açıktır.

Bu şekilde problemi çözmek o kadar kolay değildir. Bunu çözmek yerine, sağda verilen şekil gibi bir ayna simetrisi kuralım. Böylece tam orta noktada topraklanmış iletkenin potansiyeli sıfır olmalıdır. Böylece görüntü yük yöntemine geçmiş oluyoruz.



Burada yüzey yükünden kaynaklanan bir katkı daha vardır. Topraklasak bile burada, ρ_s yüzey yükünden kaynaklanan bir katkı daha vardır çünkü bütün yükleri toplamamız gerekmektedir.

$$V(x, y, z) = \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} + k \int_S \frac{\rho_s}{R_1} ds$$

$$V = k \frac{q}{R_1} + \frac{k(-q)}{R_2}$$

Bu sonuç, sınır koşulunun sağlandığı durumda ortaya çıkmaktadır. Bu durumda çözüm tektir diyerek ayna simetrisini kullanabiliriz.

- ∴ Görüntü yük her zaman gerçek yükün zıt işaretlisi olmalıdır.
- ∴ Elektriksel potansiyel gerçek yükün ve görüntü yükün dışında bir noktada bulunur.
- ∴ Görüntü yükün varlığından kaynaklanan yüke indüklenmiş yüzey yükü denir.

İndüklenmiş yüzey yükünü bulalım. İletkenin hemen dışında elektrik alan,

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial n} \hat{n}$$

$$\hat{a}_n \rightarrow \hat{a}_z \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 E_z = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0}$$

İncelediğimiz problemde uzaklığı d alarak yerine koyalım,

$$V(x, y, z) = \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} + \frac{k(-q)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}}$$

$z = 0$ 'da indüklenmiş yüzey yükünü bulalım,

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0}$$

İlk olarak kısmi türevi alarak yerine koyalım,

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ için}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2 + (z - d)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{\sqrt{r^2 + (z + d)^2}} \right\}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + d)^2}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (r^2 + (z-d)^2)^{-1/2} - (r^2 + (z+d)^2)^{-1/2} \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[-\frac{1}{2} (r^2 + (z-d)^2)^{-3/2} 2(z-d)(1) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[-\frac{1}{2} (r^2 + (z+d)^2)^{-3/2} 2(z+d)(1) \right] \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[- (r^2 + (z-d)^2)^{-3/2} (z-d) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[(r^2 + (z+d)^2)^{-3/2} (z+d) \right] \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{(z-d)}{(r^2 + (z-d)^2)^{3/2}} + \frac{(z+d)}{(r^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right\} \Big|_{z=0} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{(-d)}{(r^2 + (-d)^2)^{3/2}} + \frac{(d)}{(r^2 + (d)^2)^{3/2}} \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{d}{(r^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{d}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right\} \\
&\quad \frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{2d}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right\} \\
&\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\cancel{\epsilon_0} \frac{q}{4\cancel{\pi}\cancel{\epsilon_0}} \left\{ \frac{2d}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right\} \\
&\quad \sigma = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(r^2 + d^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Sistemin toplam Q yükünü bulalım,

$$\begin{aligned}
Q_{\text{toplamlam}} &= \int \sigma da \\
Q &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sigma r dr d\theta dr \\
Q &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right\} r d\theta dr \\
Q &= \int_0^\infty \left\{ -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right\} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \\
Q &= -\frac{qd}{2\pi} \underbrace{\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right\} r dr}_I \\
&\Rightarrow I = \int \left\{ \frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right\} r dr \\
u &= r^2 + d^2 \rightarrow \frac{du}{dr} = 2r \rightarrow du = 2r dr \\
I &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right\} 2r dr
\end{aligned}$$

Böylece,

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{3/2}} du = \frac{1}{2} \frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\sqrt{u}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{u}}$$

$u = r^2 + d^2$ yerine yazılırsa,

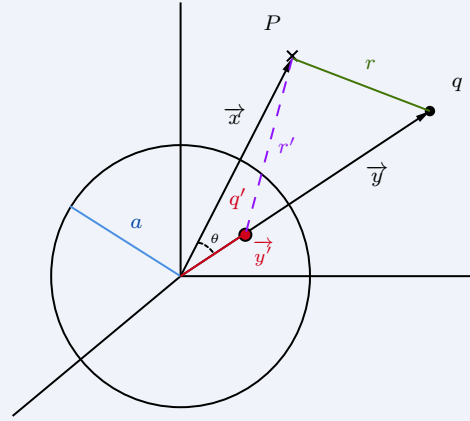
$$\Rightarrow I = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}}$$

$$Q = -qd \left\{ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right\} \Big|_0^\infty$$

$$Q = -qd \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\infty^2 + d^2}} + \frac{1}{\sqrt{d^2}} \right\} = -q \frac{d}{d} = -q$$

2.2 Topraklanmış İletken Küre ve Nokta Yük Problemi

Defter.



a yarıçaplı iletken küre karşısında q yükü ve q' görüntü yükü.

Görüntü yükleri problemi açıklamak için, şekilde verilmiş a yarıçaplı topraklanmış bir iletken kürenin karşısına merkezden \mathbf{y} uzaklığına konmuş noktasal q yükü problemi ele alalım. $\phi(|\mathbf{x}| = a) = 0$ olacak şekilde $\phi(\mathbf{x})$ potansiyelini arıyoruz. Simetri nedeniyle q' görüntü yükünün (sadece bir tek görüntü yükünün gerekli olduğunu varsayıyoruz) başlangıçtan q yüküne uzanan ışın üzerinde olacağı açıktır. q yükünün küre dışında bulunduğunu varsayarsak, \mathbf{y}' görüntü yeri küre içinde olacaktır. q ve q' yüklerince oluşturulan potansiyeli yazalım [Jackson].

$q' \rightarrow$ görüntü yükü

$$q \rightarrow \mathbf{y} + \mathbf{r} = \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$$

$$q' \rightarrow \mathbf{y}' + \mathbf{r}' = \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{x} - \mathbf{y}'$$

$$\mathbf{x} = x\hat{n} \quad \mathbf{y} = y\hat{n}'$$

q' ve y' öyle olmalı ki $|\mathbf{x}| = a$ 'da potansiyel sıfır.

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{kq}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{kq'}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} = \frac{kq}{|x\hat{n} - y\hat{n}'|} + \frac{kq'}{|x\hat{n} - y'\hat{n}'|} \quad (2.1)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = k \left\{ \frac{q}{|x\hat{n} - y\hat{n}'|} + \frac{q'}{|x\hat{n} - y'\hat{n}'|} \right\} \quad (2.2)$$

Daha sonra kolaylık olması için, birinci terimde x 'i, ikinci terimde y' 'nü mutlak değer işaretinin dışına çıkartalım,

$$\phi(\mathbf{x}) = k \left\{ \frac{q}{x|\hat{n} - \frac{y}{x}\hat{n}'|} + \frac{q'}{y'|\frac{x}{y'}\hat{n} - \hat{n}'|} \right\}$$

$$\phi(x = a) = k \left\{ \frac{q}{a|\hat{n} - \frac{y}{a}\hat{n}'|} + \frac{q'}{y'|\frac{a}{y'}\hat{n} - \hat{n}'|} \right\} = 0$$

Bu potansiyeli şu şekilde yazalım,

$$\phi(x = a) = k \left\{ \frac{q}{a|\hat{n} - \frac{y}{a}\hat{n}'|} + \frac{q'}{y'|\hat{n}' - \frac{a}{y'}\hat{n}|} \right\} = 0 \quad (2.3)$$

Burada büyüklük olarak yazdığımız için 2. terimde yaptığımız değişiklik herhangi bir şeyi etkilememektedir.

$$0 = \frac{q}{a} \frac{k}{|\hat{n} - \frac{y}{a}\hat{n}'|} + \frac{q'}{y'} \frac{k}{|\hat{n}' - \frac{a}{y'}\hat{n}|}$$

Bu ifadenin 0'a eşit olabilmesi için,

$$\frac{q}{a} = -\frac{q'}{y'} \text{ ve } \frac{y}{a} = \frac{a}{y'}$$

olmalıdır. Bu eşitliklerin seçimi $\hat{n} \cdot \hat{n}'$ 'nin her değeri için $\phi(x = a) = 0$ yapacaktır. Bu durumda görüntü yükünün büyüklüğü ve yeri,

$$q' = -\frac{q}{a}y' = -\frac{q}{a}\left(\frac{a^2}{y}\right) = -\frac{qa}{y}$$

$$q' = -\frac{qa}{y} \quad y' = \frac{a^2}{y}$$

şeklinde yazılabilir. q yükü küreye yaklaştıkça, görüntü yükünün mutlak değerce büyüdüğüne ve merkezden dış doğru uzaklaştığına dikkat ediniz. q yükü, küre yüzeyinin hemen dışında ise, görüntü yükü buna eşit ve karşıt işaretli olup yüzeyin hemen içindedir. Görüntü yükünü hesapladığımıza göre, artık topraklanmış iletken küre dışında duran q yükü biçimindeki esas problemimize dönebilir ve çeşitli etkileri ele alabiliriz [**Jackson**].

İndüklenmiş yüzey yükünü bulmamız gerekiyor. Görüntü yük varlığından kaynaklanan kürenin yüzeyi üzerinde bulunan yük yoğunluğunu bulalım. $\phi(\mathbf{x})$ 'i yazıp, türevini alıp σ yük yoğunluğunu hesaplayacağız.

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}$$

$$\phi(x) = \frac{kq}{\left\{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta\right\}^{1/2}} + \frac{kq'}{\left\{x^2 + y'^2 - 2xy' \cos \theta\right\}^{1/2}}$$

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = kq \left(-\frac{1}{2}\right) \left\{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta\right\}^{-3/2} (2x - 2y \cos \theta)$$

$$+ kq' \left(-\frac{1}{2}\right) \left\{x^2 + y'^2 - 2xy' \cos \theta\right\}^{-3/2} (2x - 2y' \cos \theta)$$

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = kq \left\{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta\right\}^{-3/2} (-x + y \cos \theta)$$

$$+ kq' \left\{x^2 + y'^2 - 2xy' \cos \theta\right\}^{-3/2} (-x + y' \cos \theta)$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\right|_{x=a} &= kq\left\{a^2 + y^2 - 2ay \cos \theta\right\}^{-3/2} (y \cos \theta - a) \\ &\quad + kq'\left\{a^2 + y'^2 - 2ay' \cos \theta\right\}^{-3/2} (y' \cos \theta - a)\end{aligned}$$

Burada q' ve y' terimlerini yerine yazalım,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\right|_{x=a} &= kq\left\{a^2 + y^2 - 2ay \cos \theta\right\}^{-3/2} (y \cos \theta - a) \\ &\quad + k\left(-\frac{qa}{y}\right)\left\{a^2 + \left(\frac{a^2}{y}\right)^2 - 2x\left(\frac{a^2}{y}\right) \cos \theta\right\}^{-3/2} \left(\left(\frac{a^2}{y}\right) \cos \theta - a\right)\end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\right|_{x=a} = \frac{kq(y \cos \theta - a)}{\left\{a^2 + y^2 - 2ay \cos \theta\right\}^{3/2}} - kq \frac{a}{y} \frac{\left(\frac{a^2}{y} \cos \theta - a\right)}{\left\{a^2 + \frac{a^4}{y^2} - 2\frac{a^3}{y} \cos \theta\right\}^{3/2}}$$

Burada sadeleştirme işlemi yapabilmek için 2. terimi düzenleyelim,

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{a}{y} \frac{\left(\frac{a^2}{y} \cos \theta - a\right)}{\left\{\frac{a^2}{y^2} \left[y^2 + a^2 - 2ay \cos \theta\right]\right\}^{3/2}} &= \frac{\frac{a}{y} \frac{y^3}{a^3} \left(\frac{a^2}{y} \cos \theta - a\right)}{\left\{y^2 + a^2 - 2ay \cos \theta\right\}^{3/2}} \\ \Rightarrow \frac{\frac{y^2}{a^2} \left(\frac{a^2}{y} \cos \theta - a\right)}{\left\{y^2 + a^2 - 2ay \cos \theta\right\}^{3/2}} &= \frac{\left(y \cos \theta - \frac{y^2}{a}\right)}{\left\{y^2 + a^2 - 2ay \cos \theta\right\}^{3/2}}\end{aligned}$$

Düzenledikten sonra tekrar $\phi(x)$ 'de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\right|_{x=a} &= \frac{kq(y \cos \theta - a)}{\left\{a^2 + y^2 - 2ay \cos \theta\right\}^{3/2}} - kq \frac{\left(y \cos \theta - \frac{y^2}{a}\right)}{\left\{y^2 + a^2 - 2ay \cos \theta\right\}^{3/2}} \\ \left.\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\right|_{x=a} &= \frac{kq\left(\frac{y^2}{a} - a\right)}{\left\{a^2 + y^2 - 2ay \cos \theta\right\}^{3/2}} = \frac{kq}{a} \frac{(y^2 - a^2)}{\left\{a^2 + y^2 - 2ay \cos \theta\right\}^{3/2}} \\ \left.\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\right|_{x=a} &= \frac{kq}{a} \frac{(y^2 - a^2)}{\left\{a^2 + y^2 - 2ay \cos \theta\right\}^{3/2}} = \frac{kq}{a} \frac{y^2\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)}{\left\{y^2 \left[\frac{a^2}{y^2} + 1 - \frac{2a}{y} \cos \theta\right]\right\}^{3/2}} \\ \left.\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\right|_{x=a} &= \frac{kq}{a} \frac{y^2\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)}{\left\{y^2 \left[\frac{a^2}{y^2} + 1 - \frac{2a}{y} \cos \theta\right]\right\}^{3/2}} = \frac{kq}{a} \frac{1}{y^3} \frac{y^2\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)}{\left\{\frac{a^2}{y^2} + 1 - \frac{2a}{y} \cos \theta\right\}^{3/2}}\end{aligned}$$

Denklemi a ile çarpıp bölersek,

$$\left.\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\right|_{x=a} = \frac{kq}{a^2} \frac{a}{y} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right) \frac{1}{\left\{\frac{a^2}{y^2} + 1 - \frac{2a}{y} \cos \theta\right\}^{3/2}}$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=a} = -\epsilon_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \frac{a}{y} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right) \frac{1}{\left\{\frac{a^2}{y^2} + 1 - \frac{2a}{y} \cos \theta\right\}^{3/2}}$$

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{q}{a^2} \frac{a}{y} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right) \frac{1}{\left\{\frac{a^2}{y^2} + 1 - \frac{2a}{y} \cos \theta\right\}^{3/2}} \quad (2.5)$$

q yükünü etkileyen kuvveti hesaplayalım. En kolay yol q yüküyle q' görüntü yükü arasındaki kuvveti yazmaktır. Aralarındaki uzaklık $y - y' = y(1 - a^2/y^2)$ 'dir. Dolayısıyla Coulomb yasasına göre, bu çekici kuvveti yazalım,

$$y - y' = y - \frac{a^2}{y} = y\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)$$

$$|\mathbf{F}| = k \frac{qq'}{\left\{y\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)\right\}^2} = \frac{kq\left(-\frac{qa}{y}\right)}{y^2\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^2}$$

Denklemleri a^2 ile çarpıp bölersek,

$$|\mathbf{F}| = -k \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{a^3}{y^3}\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^2} \quad (2.6)$$

$y \gg a$ için,

$$|\mathbf{F}| = -k \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{a^3}{y^3}\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^2}$$

$$|\mathbf{F}| = -k \frac{q^2}{a^2} \frac{a^3}{y^3} = -kq^2 \frac{a}{y^3}$$

⚠ Burada büyüklük olduğu için $-$ işareti olmayacak ama yükün işaretini göz önüne alarak koymuş olalım ki çekici bir kuvvet olduğunu görelim.

Bu kuvvet, büyük aralıklar için ters küp yasasıdır; fakat küreye yakın durumlarda, küre yüzeyinden olan uzaklığın karesiyle ters orantılıdır.

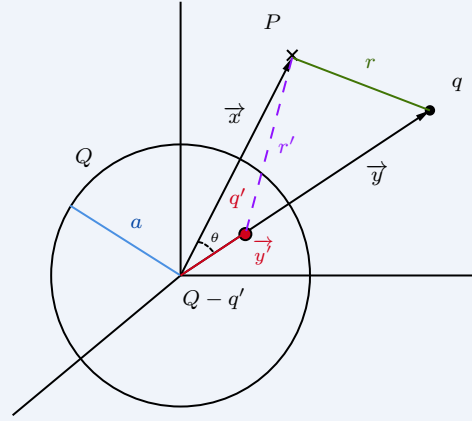
Tüm tartışma, küre dışındaki noktasal q yükü varsayımına dayandırıldı. Gerçekte sonuçlarımızı olduğu gibi küre içindeki q yükü haline de uygulayabiliriz. Gerekli tek değişiklik Denklem (2.5)'teki yüzeysel yük yoğunluğunda ortaya çıkar. İletkenden dışa doğru olan dik türev bu kez içeriye doğru olup bir işaret değişikliği getirir. Bu durumda $y \leq a$ olduğunu gözönünde tutarak tüm formüllerin aynısını kopya edebilir.

2.3 Yalıtılmış İletken Küre ve Nokta Yük Problemi

Önceki kısımda topraklanmış bir küre karşısında noktasal q yükü problemini ele almış ve küre üzerinde bir yüzeysel yük yoğunluğu oluşturduğunu görmüştük. Bu yükün toplamı $q' = -aq/y$ idi ve tüm kuvvetlerin etkisi altında dengece olacak biçimde yüzey üzerine dağılmıştı.

Eğer üzerinde toplam Q yükü bulunduran yalıtılmış bir iletken küre karşısında noktasal q yükü problemini ele alırsak, potansiyeli çizgisel üst üste binme ilkesi yardımıyla bulabiliriz. İşlemsel anlamda, üzerinde yüzeyine dağılmış q' yükü bulunan topraklanmış iletken küre ile başlarız. Sonra topraklama telini kesip küre üzerine $(Q - q')$ kadar yük ekleriz. Bu, küre üzerindeki toplam yükü Q 'ya çıkarır. Potansiyelini bulmak için şuna dikkat etmemiz yeter: q noktasal yüküyle ilgili elektrostatik kuvvetler q' yükü tarafından dengelendiklerinden, eklenen $(Q - q')$ yükü yüzey üzerinde düzgün olarak dağılacaktır. Dolayısıyla eklenen bu $(Q - q')$ yükünün potansiyeli, en azından küre dışındaki noktalar için, merkeze konan aynı büyüklükteki noktasal bir yükün potansiyeliyle aynı olacaktır.

DeFTER. İletken küreyi topraklayalım. Topraklanmış kürenin yükü q' olsun. Kürenin toprak hattını keselim ve küreye $(Q - q')$ kadar yük ekleyelim. $\phi_p = ?$



$q \rightarrow y$ noktasındaki gerçek yük

$q' \rightarrow y'$ noktasındaki görüntü yük

$Q - q' \rightarrow$ orijindeki görüntü yük

$$q \rightarrow \mathbf{y} + \mathbf{r} = \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$$

$$q' \rightarrow \mathbf{y}' + \mathbf{r}' = \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{x} - \mathbf{y}'$$

$$\mathbf{x} = x\hat{n} \quad \mathbf{y} = y\hat{n}'$$

$$q' = -\frac{qa}{y} \quad y' = \frac{a^2}{y}$$

$$Q - q' \Rightarrow Q + \frac{qa}{y}$$

$$\phi(\mathbf{x}) = k \frac{(Q - q')}{|\mathbf{x}|} + \frac{kq}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{kq'}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}$$

$$\phi(\mathbf{x}) = k \frac{(Q - (-\frac{qa}{y}))}{|\mathbf{x}|} + \frac{kq}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{k(-\frac{qa}{y})}{|\mathbf{x} - \frac{a^2}{y^2}\mathbf{y}|}$$

$$\phi(\mathbf{x}) = k \frac{(Q + \frac{qa}{y})}{|\mathbf{x}|} + \frac{kq}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{kqa}{y|\mathbf{x} - \frac{a^2}{y^2}\mathbf{y}|} \quad (2.8)$$

Daha öncesinde topraklanmış iletken küre ve nokta yük probleminde hesapladığımız σ 'nın terimleri yine burada da aynı olacaktır.

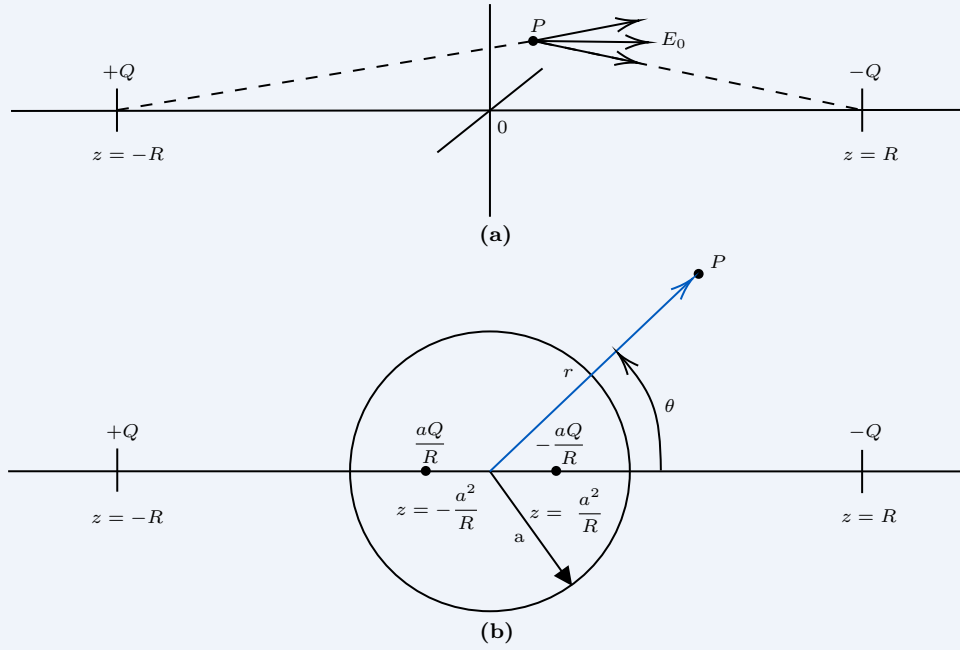
$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=a} = -\epsilon_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \frac{a}{y} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right) \frac{1}{\left\{\frac{a^2}{y^2} + 1 - \frac{2a}{y} \cos \theta\right\}^{3/2}} + \frac{(Q + \frac{qa}{y})}{4\pi a^2}$$

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{q}{a^2} \frac{a}{y} \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right) \frac{1}{\left\{\frac{a^2}{y^2} + 1 - \frac{2a}{y} \cos \theta\right\}^{3/2}} + \frac{(Q + \frac{qa}{y})}{4\pi a^2}$$

2.4 Düzgün Bir Elektrik Alan İçerisine Yerleştirilmiş İletken Küre

Görüntü yükleri yönteminin son bir örneği olarak, düzgün bir E_0 elektrik alanında a yarıçaplı iletken bir küreyi ele alıyoruz. Düzgün elektrik alan, sonsuzda varsayılan uygun pozitif ve negatif yüklü $+Q$ ve $-Q$ yükleri tarafından oluşturulmuş gibi düşünülebilir. Örneğin Şekil 2.6a'da görüldüğü gibi, $z=R$ konumlarına yerleşmiş Q gibi iki yük varsa, o zaman başlangıç noktası dolayında R 'ye göre çok küçük boyutlu bir bölgede, z eksenine paralel $E_0 \simeq 2Q/R^2$ değerli yaklaşık olarak sabit bir elektrik alanı vardır. Q/R^2 sabit kalmak koşuluyla R ve $Q \rightarrow \infty$ limitinde bu yaklaşıklık kalkar.

DeFTER. Düzgün bir E_0 elektrik alan içerisinde bulunan a yarıçaplı iletken küre olsun. Küre iletken ve topraklanmıştır. Elektrik alan sonsuzdaki bir noktada bulunan $+Q$ ve $-Q$ yükleri ile oluşturulmuş olsun.



Şekil 2.1: Düzgün elektrik alanında iletken küre probleminin görüntü yükleri yöntemiyle çözümü.

$$\phi(a) = 0$$

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{|\mathbf{r} + \mathbf{R}|} + \frac{-Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} + \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|} + \frac{-q}{|\mathbf{r} + \mathbf{R}'|} \right\} \\ &= k \left\{ \frac{Q}{|\mathbf{r} + \mathbf{R}|} + \frac{-Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} + \frac{aQ}{R|\mathbf{r} - \frac{a^2}{R^2}\mathbf{R}'|} + \frac{-aQ}{R|\mathbf{r} + \frac{a^2}{R^2}\mathbf{R}'|} \right\} \end{aligned}$$

Orijinal problemin $\phi(a) = 0$ sınır koşulu sağlanır.

$$= kQ \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{R}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \right\} + \frac{aQ}{R} k \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{a^2}{R^2}\mathbf{R}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{a^2}{R^2}\mathbf{R}|} \right\}$$

\mathbf{r} ve \mathbf{R} arasındaki açı θ 'dır.

$$\phi(\mathbf{r}) = \left\{ \frac{1}{[r^2 + R^2 + 2Rr \cos \theta]^{1/2}} - \frac{1}{[r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta]^{1/2}} \right\} \\ + \frac{aQ}{R} k \left\{ \frac{1}{\left[r^2 + R^2 \frac{a^4}{R^4} - 2r \frac{a^2}{R^2} R \cos \theta \right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[r^2 + R^2 \frac{a^4}{R^4} + 2r \frac{a^2}{R^2} R \cos \theta \right]^{1/2}} \right\}$$

2.5 Problemler