# Diferansiyel Denklemlerin Tarihsel Gelişimi

Halil Kolatan

Mat2267 - Matematik Tarihi
Ankara Üniversitesi

5 Ocak 2021

# İçerik

# Diferansiyel Denklem Nedir?

Bir **diferansiyel denklem**, bilinmeyen bir fonksiyonunun türevleri, bilinen nicelikler ve fonksiyonlar arasındaki bir denklemdir. Çoğu fiziksel kanun diferansiyel denklemlerle ifade edilirler [1].
Fizik, mühendislik, astronomi, ekonomi ve istatistik gibi disiplinlerdeki gerçek hayat problemlerini ifade etmek üzere kullanılan matematiksel modellerde, genellikle çeşitli diferansiyel denklem türlerinden yararlanılır. Diferansiyel denklemler, fiziksel modeli ifade ederler ve **matematiksel model** şeklinde adlandırılırlar. Bu matematiksel modeller üretilirken birbirine bağlı olarak değişen büyüklükler (değişken) ve bir niceliğin diğer bir niceliğe göre değişim oranına (türev) ihtiyaç duyulur [2,3].

n'inci mertebeden bir diferansiyel denklemin en genel tanımı,

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}\right) = 0$$

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

# Diferansiyel Denklem Nedir?

Örneğin; Newton'un ikinci yasasında $F = ma$ formülü ile gösterilen ivme değişkeni, hızın zamana göre değişimi olarak yorumlandığında birinci mertebeden, mesafenin zamana göre değişimi olarak yorumlandığında ikinci mertebeden bir **diferansiyel denklem** elde edilir. Üstelik türevler arasındaki ilişkiyi diferansiyel denklem modelleri üzerinden çözmek ve günlük hayattaki karşılıklarını yorumlamak daha kolaydır. Yukarıdaki ifadelerden yola çıkarak diferansiyel denklemlerin bir veya birden çok değişken ve bu değişkenlerin türevi arasındaki bağıntıyı açıkladığını söyleyebiliriz [2].

# Diferansiyel Denklem Nedir?

**Matematiksel Modelleme 1.1:** Yeryüzü üzerinde serbest düşme hareketi:

$$F = ma \quad a = -g = -9.8m/s^2$$

$$h = \text{ Yükseklik}$$

$$F = -mg$$

$$\frac{dv}{dt} = -g \qquad \frac{d^2h}{dt^2} = -g$$

$$h = -\frac{g}{2}t^2 + c_1 t + c_2$$

# Diferansiyel Denklem Nedir?

**Matematiksel Modelleme 1.2:** Diferansiyel formda Maxwell Denklemleri:

$$\text{Gauss Yasası} \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\text{Gauss Yasası } (\vec{B} \text{ Fields}) \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\text{Faraday Yasası} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\text{Ampere - Maxwell Yasası} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4}$$

Diferansiyel denklemleri ikiye ayırmak mümkündür.

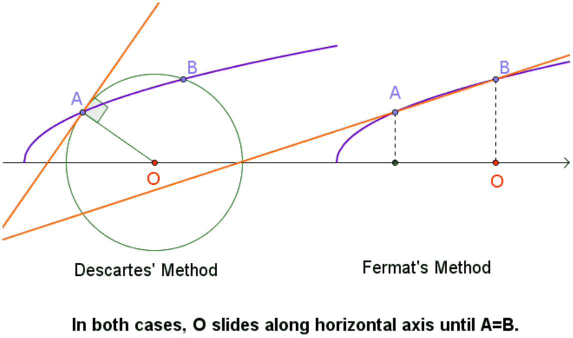
**Adi diferansiyel denklemler**, bilinmeyenleri tek değişkene bağlı fonksiyonların oluşturduğu denklemlerdir. Çoğunlukla, dinamik sistemlerde ve elektrik mühendisliğinde ortaya çıkarlar.

$$\text{Örnek: } y''' + 3x^2y' - 4y = xe^x + 2Cotx$$

**Kısmi diferansiyel denklemler**, bilinmeyen fonksiyonu iki ya da daha fazla bağımsız değişkene bağlı denklemlerdir.

$$\text{Örnek: } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}$$

Bir eğrinin teğetini bulma sorunu, Arşimet'in Antik Çağ'daki soruyu araştırmasından bu yana birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Kalkülüs'ün modern yöntemine benzeyen bir eğrinin tanjantını belirlemeye yönelik ilk girişim 1630'lar ve 1640'larda Gilles Persone de Roberval'den geldi. Roberval'in yöntemini geliştirmesiyle neredeyse aynı zamanda Pierre de Fermat, bir eğriye teğeti bulmak için maksimum ve sonsuz küçük kavramını kullandı. Fermat'a farklılığı keşfettiği için biraz itibar ettiler ancak Leibniz ve Newton teğet yöntemlerini titizlikle tanımlayana kadar genelleştirilmiş bir teknik olarak kabul edildi [5].




Descartes'in yöntemi ile Fermat'ın yöntemi [6].

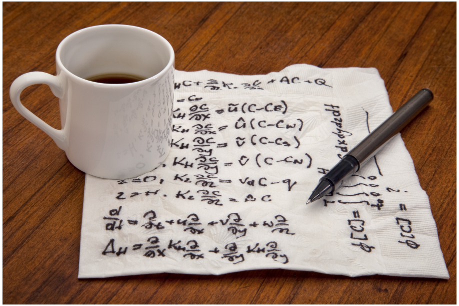
Fermat; Descartes'ten bağımsız olarak "Analitik Geometri"'yi kurdu. Eğrilerin teğetlerinin maksimumlarını ve minimumlarını bulmak için yöntemler geliştirdi; böylece diferansiyel hesabın temellerini attı. Fermat; buluşlarını yayımlamayı savsaklayan, düzenli not tutmayan, kitapların kenarına acele notlar alan, buluşlarını arkadaşlarına alelade mektuplarla bildiren savruk bir kişiydi. Bu yüzden, analitik geometrinin kurucusu olarak Descartes'i, diferansiyel hesabın başlatıcısı olarak da Newton'u biliyoruz. Ama fark etmez. O, bütün bunları zevki için yapmıştı. O, bir amatördü. Günümüzde; "Amatörlerin Prensi" olarak bilinir [7].

Pierre de Fermat (1601-1665) [8].

Bir takım fonksiyonlar ve bunların türevleri arasındaki ilişkiyi konu alan diferansiyel denklemlerin ortaya çıkışı, türev kavramı ile benzerlik göstermektedir. Diferansiyel denklem kavramına ilişkin **resmi olarak kabul edilen ilk çalışmalar**, 17. yüzyılda, Sir Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz tarafından yapılmıştır. Daha sonraki zamanlarda Daniel Bernoulli, Leonhard Euler ve Joseph-Louis Lagrange'ın katkılarıyla akışkanlar mekaniğindeki problem durumlarını açıklamak için çeşitli diferansiyel denklem sistemleri ve hesap yöntemleri geliştirilmiştir. Bu sebeple fen bilimciler; diferansiyel denklemleri, fiziksel kural ve modellerin durumunu açıklayan bir dil olarak görmektedir. Bu kural ve modellere örnek olarak verilebilecek durumlar; radyoaktif bir maddenin parçalanması, sıvı yüzeyinde oluşan dalga hareketinin boyu, bir popülasyonun büyüme aritmetiği ve uçağın kalkış/denge durumunda gerekebilecek hava yakıtının kontrolünü sağlayacak aerodinamik karakterlerdir [2].

Diferansiyel denklemlerin ilk ortaya çıktığı dönemde homojen ve değişkenlerine ayrılabilen adi diferansiyel denklemler üzerinde çalışılmış; 18. yüzyılda matematiğin fizikteki uygulama alanlarının gelişmesiyle birlikte lineer olmayan, birden çok çözümü olan kısmi diferansiyel denklem türleri için de hesap yöntemleri geliştirilmiştir. Diferansiyel denklemlerin çözümünde üç tür hesap yöntemi göze çarpmaktadır. Bunlar; cebirsel, geometrik ve sayısal hesap yöntemleridir. Bu yöntemlerin kullanılması ile diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılabilecek farklı yaklaşımlar ise sırasıyla analitik, nitel ve nümerik yaklaşımlardır. 18. yüzyılın ortalarına kadar diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan yegane yaklaşım analitik iken, diferansiyel denklemlerin büyük çoğunluğunda cebirsel hesap yöntemlerinin uygulanamıyor olması, sayısal yöntemlerin geliştirilmesine neden olmuştur. Diferansiyel denklemlerin karakteristik davranışlarının geometrik olarak yorumlanabilmesi yani topolojik olarak incelenmesine yönelik çalışmalara 20. yüzyılda başlanmıştır [2].

Özellikle teknolojinin son 30 yıldaki gelişimine paralel olarak yüksek matematikte kullanılabilen bilgisayar destekli hesaplama araçlarının da gelişmesi, nitel ve nümerik yaklaşımlar ile diferansiyel denklemlerin daha detaylı analiz edilmesine imkân sağlamıştır. Bugün üniversite düzeyindeki matematik dersleri dizisi içerisinde yer alan diferansiyel denklemler, matematiğin uygulamalarını kullanan farklı programlar için bir ön gerekliliktir [2].



*Coffee and math* [4].

# Klasik Fiziğin Babası: Sir Isaac Newton

Bilim tarihinde klasik fiziğin babası diye anılan Sir Isaac Newton 25 Aralık 1642 tarihinde İngiltere'nin Colstervvorth kentinde Galileo'nun ölüm yıl dönümünde dünyaya gelmiştir. Bilimin öncülerini tarih sürecinde bir dizi yıldız olarak düşünürsek, dizide konum ve parlaklığıyla hepsini bastıran iki yıldız vardır: Newton ve Einstein. Yaklaşık iki yüzyıl arayla ikisi de fiziğin en temel sorunlarını ele aldılar; ikisinin de getirdiği çözümlerin madde ve enerji dünyasına bakışımızı kökten değiştirdiği söylenebilir [31].

Sir Isaac Newton [12].

# Klasik Fiziğin Babası: Sir Isaac Newton

1661'de Cambridge Üniversitesinde öğrenime başladı ve 1665 yılında bitirdi. Aynı yılda ülkeyi silip süpüren bir salgın hastalık nedeniyle bütün okullar kapanır. Newton, baba çiftliğine döner. Doğanın dinlendirici kucağında geçen iki yıl, yaşamının en verimli iki yılı olur. Kütleçekimi kuramı, kalkülüs ve optik ile ilgili temel buluşlarına burada ulaşır. Bu keşiflerden birincisi diferansiyel hesaptı, Newton bu hesaba "akışkanlar hesabı" adını vermişti. Bu hesap bütün akma, hareket ve dalga problemleri ile ilgiliydi ve her çeşit harekete ait fizik problemlerinin çözümünde kullanılıyordu [13].

Newton'ın temel hareket yasası, hareketli bir cismin ivmesinin ve kütlesinin çarpımının, cisme etki eden kuvvete eşit olduğunu belirtiyor. Hız, konumun türevidir ve ivme de hızın türevidir. Dolayısıyla **Newton yasasını ifade etmek için** bile konumun zamana göre *ikinci türevini* almamız gerekiyor. Bu ifade günümüzde aşağıdaki gibi yazılıyor [9].

$$d^2x/dt^2$$

Newton bu ifade yerine, x üzerine iki nokta koyar ($\ddot{x}$).

# Klasik Fiziğin Babası: Sir Isaac Newton

Yaklaşık 1671'de, o zamanlar yayımlanmamış olan The Method of Fluxions and Infinite Series'i (1736'da yayımlandı) yazdı; burada akı denklemleri olarak bilinen birinci dereceden diferansiyel denklemleri aşağıdaki gibi üç sınıfa ayırdı: [13]

$$1.\ \text{sınıf: } \frac{dy}{dx} = f(y)$$

$$2.\ \text{sınıf: } \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$3.\ \text{sınıf: } x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

İlk iki sınıf, tek bir bağımsız değişkene göre bir veya daha fazla bağımlı değişkenin sadece sıradan türevlerini içerir ve bugün "adi diferansiyel denklemler" olarak bilinir; üçüncü sınıf, bir bağımlı değişkenin kısmi türevlerini içerir ve bugün "kısmi diferansiyel denklemler" olarak adlandırılır [13].

# Klasik Fiziğin Babası: Sir Isaac Newton

Hayatının sonlarına doğru kraliçe, ona "Sir" unvanı verdi; Royal Society'nin başkanı seçildi. Fransız Bilim Akademisi'nin sayılı yabancı bilim insanlarından oldu. Düşmanlarının onun bilim yönünden tamamen tükenmiş olduklarına inandıkları bir sırada onlara güzel bir cevap verdi: Leibniz ve Bernouilli'nin üzerinde aylarca düşündükleri diferansiyel denklem problemlerini bir gecede çözdü ve anonim yayın için o zamanki Royal Society başkanı olan Montague'a gönderdi. Newton'ın çözümü anonim olmasına rağmen, Bernouilli tarafından yazarı tanındı ve konu üzerine *"tanquam ex ungue leonem"* (aslanı pençesinden tanıyoruz) dedi [14,31].

Büyük bilim insanı ölümünden kısa bir süre önce kendinden şöyle söz etmişti: *"Dünyaya nasıl göründüğümü bilmiyorum ama ben kendimi, henüz keşfedilmemiş gerçeklerle dolu bir okyanusun kıyısında oynayan, düzgün bir çakıl taşı ya da güzel bir deniz kabuğu bulduğunda sevinen bir çocuk gibi görüyorum."* Newton 85 yaşındayken 20 Mart 1727'de gözlerini açmamak üzere kapatmıştır [31].

Alman Gottfried Wilhelm Von Leibniz, 1 Temmuz 1646 tarihinde Almanya'nın Leipzig kentinde dünyaya gelmiştir. Matematikçi, tarihçi, filolog, hukukçu ve teologda olan Leibniz, bunların yanı sıra, aynı zamanda doğa bilimleriyle de uğraşan bir doğa bilgini ve dönemin idarecilerine danışmanlık yapmış bir münevverdir. 17. Yüzyıl'da yetişmiş evrensel bir düşünürdür. Onun felsefesi en değerli düşünce miraslarından birisi olarak kabul edilmektedir. Çünkü yaşadığı dönemin ve geleceğin bilim hayatına önemli katkılar sağlamıştır [9,16,18].

Gottfried Wilhelm Von Leibniz [17].

# Alman Platon'u:[15] Gottfried Wilhelm Von Leibniz

Babası Leibniz henüz altı yaşındayken öldü ve bu olaydan sonra annesi tarafından büyütüldü. Annesinin öğrettikleri Leibniz'in felsefi düşüncelerini ileriki yaşamında etkilemiştir. Leibniz'in babası Leipzig Üniversitesi'nde Ahlak Felsefesi Profesörüydü ve kendisine babasının kişisel kütüphanesi miras kaldı. 7 yaşından sonra bu kütüphaneye ücretsiz erişim hakkı kazandı. Leibniz, yaklaşık 1673 yılında, bir eğrinin teğetini bulmaktan ibaret olan klasik problem üzerine çalışmaya başlamış ve bu problemin aslında alan ve hacim bulma probleminin tersi olduğunu fark etmiştir. Alan ve hacim hesabı, teğeti verilen bir eğrinin bulunmasına indirgenmiş; eğrinin teğetini bulma problemi de bunun tam tersi olmuştur. Leibniz bu bağlantı yardımıyla, omn (Latince "tümü" anlamına gelen *omnia*'nın kısaltılmış hali) terimini kullanarak aslında integrali tanımlar. Leibniz'in el yazmalarında şu tür formüller görürüz: [9,18]

$$omn\ x^2 = x^3/3$$

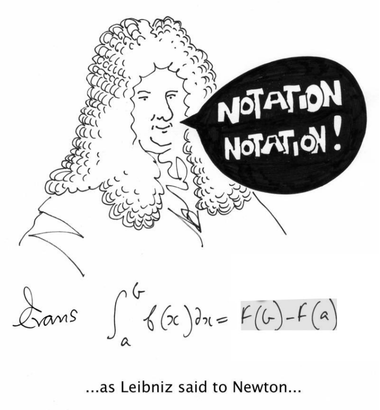
1675'te omn yerine bugün hala kullanmakta olduğumuz $\int$ sembolünü, yani eski tarz uzun s harfini toplam anlamında kullanmıştır. $x$ ve $y$ değerlerindeki ufak artışları gösteren $dx$ ve $dy$ terimlerini de kullanan Leibniz, $y$'nin değişim hızını $x$ cinsinden belirlemek için de $dy/dx$ oranını tercih ediyordu. Leibniz şöyle yazar: $f$ eğer bir fonksiyon ise,

$$dy = f(x + dx) - f(x)$$

Bu durumda,

$$dy/dx = ((f(x + dx) - f(x)))/dx$$

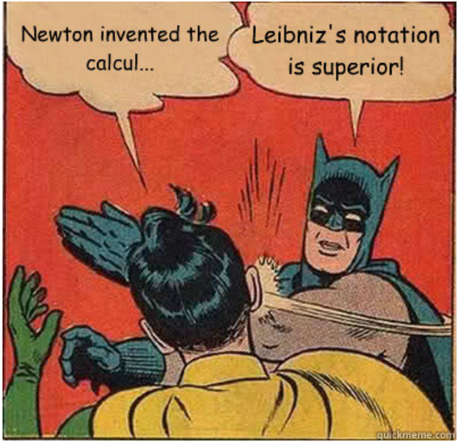
olur ki bu da her zamanki gibi kirişi teğetin eğimine yaklaştırmaktadır [9].




Notasyon meselesi [19].

# Alman Platon'u:[15] Gottfried Wilhelm Von Leibniz

Günümüzde Leibniz'in yayımlanmamış notlarına bakarak bu gerçekleri ve ilgili tarihleri biliyoruz, ancak türev ve integral hesabı hakkındaki fikirlerini daha sonra 1684'te yayımladı. 1684'te diferansiyel hesap üzerine çığır açan altı sayfalık makalesini yayınladı, ardından iki yıl sonra 1686'da integral hesabının temelleri içeren bir makale yayınladı [9,22,23].




Notasyon meselesi [20].

# Alman Platon'u:[15] Gottfried Wilhelm Von Leibniz

Leibniz'in o dönem temel türev ve integral hesabının önemli bir kısmını keşfettiğini biz şimdi anlıyoruz; bu keşfin sikloid gibi çetrefilli eğrilere ait uygulamaları var, ayrıca eğrilik gibi kavramları çok iyi kavrıyor [9].

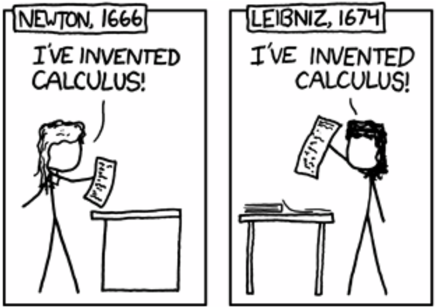
**İngiliz matematikçi Edward Ince ve bazı matematik tarihçilerine göre**, diferansiyel denklemler çalışmasının, Alman matematikçi Gottfried Wilhelm von Leibniz'in aşağıdaki denklemi yazmasıyla 1675'te başladığı söyleniyor: [21]

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2$$

# İlk Kim Keşfetti?

Kalkülüsün önemi netleştikçe, yaratıcısının itibarı artmıştır. İyi de yaratıcısı kimdi?

Newton'ın 1665'te türev ve integral hesabı üzerine düşünmeye başladığını görüyoruz, ama 1687'ye kadar bu konuda hiçbir şey yayımlamadı. Düşünce tarzı aşağı yukarı Newton'ın düşüncelerine benzeyen Leibniz, 1673'te türev ve integral hesabı üstünde çalışmaya başlamış ve konuyla ilgili ilk makalelerini 1684'te yayımlamıştı. İkisi birbirinden bağımsız çalışmış, ama Leibniz'in 1672'deki Paris ve 1673'teki Londra ziyaretleri sırasında Newton'ın çalışmalarını öğrenmiş olması da *mümkündür* [9].

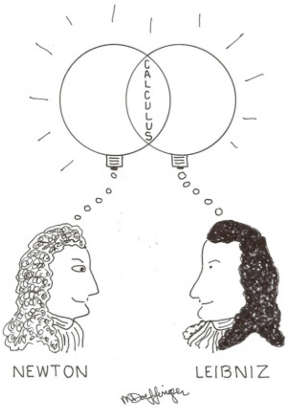



*Newton vs Leibniz* [10].

# İlk Kim Keşfetti?

Newton *On Analysis'in* bir kopyasını 1669'da Barrow'a göndermiş ve Leibniz de Barrow'u tanıyan birçok kişiyle konuşmuştu; o yüzden Leibniz'in Newton'ın çalışmalarından haberi olabilir [9].

Leibniz çalışmalarını 1684'te yayımladığı zaman Newton'ın bazı arkadaşları gücenip Leibniz'i Newton'ın fikirlerini çalmakla suçladılar. Avrupa kıtasındaki matematikçiler, özellikle Bernoulliler pat diye Leibniz'i savunup asıl hırsızın Leibniz değil Newton olduğunu öne sürdüler [9].




*Newton ve Leibniz, bağımsız olarak kalkülüsü icat ettikleri için ödüllendirildi. Leibniz'in doğumunun 300. yıldönümü anısına* [11].

# İlk Kim Keşfetti?

Yayımlamlanmamış el yazmalarına bakılırsa, Leibniz ve Newton aslında birbirlerinden bağımsız olarak keşifte bulunmuştu; her ikisinin de yoğun bir şekilde Barrow'un önceki çalışmalarına dayanmış olması kafaları daha da karıştırıyor. Asıl şikayet etmesi gereken belki de Barrow'du [9].

Suçlamalar çok rahat geri çekilebilirmiş, ama tersine tartışmalar alevlenmiş; John Bernoulli, Newton'a olan duygularını genelleyip İngiliz ulusunun nefretini dile getirmiştir. Sonuç İngiliz matematikçiler için felaket niteliğindeydi, çünkü İngilizler inatla Newton'ın o zor kullanılan geometrik düşünce tarzına bağlı kalırken Avrupa kıtasındaki analistler Leibniz'in daha düzgün cebirsel yöntemlerini kullanmışlar ve matematikte hızla ilerlemişlerdi. Dolayısıyla matematiksel fiziğin meyvelerinden en çok Fransızlar, Almanlar, İsviçreliler ve Hollandalılar yararlanırken İngilizler akıntıya karşı kürek çekmişlerdir [9].

Leibniz ve Newton arasındaki tartışmada kimin haklı ya da haksız olduğundan ziyade, kalkülüs üzerine yapılan çalışmalar, bilim insanlarına değişimi incelemek için matematiksel araçlar sağlamış **bu sayede modern fizik bilimi var olmuştur** [13].

Bernoulli ailesi, üç kuşak içinde sekiz seçkin matematikçi yetiştiren, Basel'den olağanüstü bir İsviçre ailesidir. Nikolaus Bernoulli (1623-1708), bu ünlü matematikçiler ailesinin atasıydı. James, Johann ve Daniel bu yeni diferansiyel denklemler alanına birçok katkı yapan Bernoulli ailesinin en tanınmış üyeleridir. Hatta erkek kardeşleri ve oğulları ile arasında, derin bir akademik rekabet vardı. Jacob (1654-1705) ve Johann (1667-1748) kalkülüsün en önemli kurucuları olarak kabul edilirler (Newton ve Leibniz hariç). Birinci dereceden diferansiyel denklemleri çözmenin pratik olarak bilinen tüm temel yöntemlerinin orijinal keşifleri, Bernoulli hanedanı sırasında gerçekleşti. 1684'te Leibniz'in kalkülüs hakkındaki en önemli çalışması yayımlandı. Jacob ve Johann, bu çalışmanın önemini anladılar ve Gottfried Leibniz ile yazışmalar yoluyla kalkülüs ile tanışmaya başladılar. O zamanlar Leibniz'in hesapla ilgili yayınları matematikçiler için çok belirsizdi ve Leibniz'in teorilerini anlamaya ve uygulamaya ilk çalışan Bernoulli kardeşlerdi [13,24,26].


Bernoulli Hanedanı [25].

Jacob Bernoulli, Leibniz tarafından üretilen kalkülüs hesabında önemli gelişmeler kaydetmiş, değişimler hesabı alanını yaratmış, temel bir sabit olan e'yi keşfetmiş, diferansiyel denklemleri çözmek için teknikler geliştirmiş ve bunun gibi bir çok başarıya imza atmıştır [26].

Bernuolli difarensiyel denklemini ilk olarak 1965 yılında Jacob Bernoulli tarafından basılı olarak önerildi. Birkaç aydır bu soruna takılıp kalmıştı ve çözmek için bir yarışma düzenlemeye karar verdi. Latince yazılmış olmasına rağmen, Almanya'nın önde gelen bilimsel dergisi olan Acta Eruditorum dergisinde Aralık 1695 sayısında bir makale yayımladı [29].

*Problema*: Æquationem $ady = ypdx + by^n qdx$ ( ubi $a$ & $b$ quantitates datas & conſtantes, $n$ poteſtatem quamvis ſit, $y$, $p$ & $q$ quantitates utcunque datas per $x$ denotant ) conſtruere, ſaltem per quadraturas, hoc eſt, ſeparare in illa literas indeterminatas $x$ & $y$ cum ſuis differentialibus a ſe invicem.

Jacob, Bernoulli diferansiyel denklemini öneriyor [30, s.553].

Bernoulli Diferansiyel Denklemi: $y' = P(x)y + Q(x)y^n$

# Matematiğin Mafyası: Bernoulli Hanedanı

Problemin yayımlanmasından üç ay sonra Leibniz, Acta'da bir çözüm yayımladı [29].

dis, ſeparandisve ab invicem indeterminatis. *Problema* de eo præſtando circa æquationem differentialem $ady = ypdx + by^n.\,qdx$ ſolvere poſſum, & reduco ad æquationem, cujus forma eſt $\ldots dv + \ldots vdz + \ldots dz = o$, ubi per puncta intelliguntur quantitates utcunque datæ per $z$. Talis autem æquatio generaliter per me reducta eſt ad quadraturas, ratione jam dudum amicis communicata, quā hic exponere neceſſarium non puto, contentus effeciſſe, ut acutiſſimus Autor problematis agnoſcere poſſit methodum (ut opinor) non diſſimilem ſuæ. Neque enim dubito & hoc ipſi innotuiſſe. Et ſunt a me in iſtis multa olim tentata,

Leibniz'in Bernoulli denklemi çözümü [29, s.553].

Leibniz'in değişkenlerin "$z$" olarak değiştirdiğini ve Bernoulli denklemini $\ldots dv + \ldots vdz + dz = 0$ formuna indirgediğini görüyoruz. Bu doğrusal bir diferansiyel denklemdir ve Leibniz bugün kullandığımız tekniği tam olarak yazmaktadır. Fakat Leibniz doğrusal diferansiyel denklemin nasıl çözüleceğine dair hiçbir ipucu vermiyor [29].

Tüm bunlara rağmen, Temmuz 1696'da Jacob Bernoulli Acta'da sorununun çözüldüğünü duyuran ikinci bir makale yayımladı. Bernoulli, Leibniz'in zorluğunu çözdüğünü ve diferansiyel denklemini de Beaune denklemiyle ilişkilendirdiğini yazıyor [29].

Bir yıldan kısa bir süre sonra, Mart 1697'de Johann Bernoulli *De conoidibus et spaeroidibus quaedam*'ı yayımladı. Başlık bize Johann'ın kardeşinin denklemini çözdüğünü söylüyor. Johann aslında bize iki çözüm sunuyor [29].

Æquatio propoſita eſt hæc: $ady = ypdx + by^n qdx$ (ubi a & b quantitates datas & conſtantes, n poteſtatem quamvis literæ y; p & q quantitates utcunque datas per x denotant) ſeparandæ ſunt in illa literæ indeterminatæ x & y cum ſuis differentialibus a ſe invicem, ut ſaltem per quadraturas conſtrui poſſit; idquod ſic facio: Ut poteſtas n deprimatur ponendum eſt $y^n = \frac{n}{v^{1-n}}$, unde propoſita mutatur in hanc ulterius reſolvendam $\frac{1}{1-n} adv = vpdx + bqdx$, quæ reſpondet formulæ Leibnitianæ in Martio 1696 traditæ. Sed hac de-

Johann, Leibniz'in çözümünü açıklar [29].

İlk çözümü, Leibniz'in yönteminin ayrıntılı bir şekilde geliştirilmesidir. Bernoulli denklemini doğrusal bir diferansiyel denkleme dönüştüren $y = v^{1/(1-n)}$ dönüşümüdür. İkinci çözümünde ise Johann, çözümü $y = zm$ olarak yazmamızı öneriyor [29]. İlk çözümü ele alırsak:

$$y' = P(x)y + Q(x)y^n$$

$$n \neq 0, 1 \quad v = y^{1-n}$$

$$v' = (1-n)P(x)v + (1-n)Q(x)$$

Çözüm: $x^2y' + 2xy - y^3 = 0, \quad x > 0$

$$y = \pm\sqrt{\frac{5x}{2 + 5Cx^5}}$$

# Sonuç

18. yüzyılda, diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemler üzerine Leonhard Euler, Daniel Bernoulli, Joseph Lagrange ve Pierre Laplace gibi isimler tarafından yapılan yayınların çoğu, Leibniz tarafından geliştirilen versiyonu geliştirmek gibiydi [27].

20. yüzyıl, diferansiyel denklemlerin geometrik ve topoloji olarak yeni bir kreasyonudur. Amaç, çözümün geometriksel olarak davranış niteliğini anlamaktır. Daha fazla bilgiye ihtiyaç duyulduğunda, nümerik yöntem ile elde edilen veriler kullanılmıştır. Son birkaç yılda bu iki trend birlikte gelmiştir. Bilgisayarlar, lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin çalışılmasına hız katmıştır [3].

Matematik tarihinde kim, ne, ne zaman, nerede ve neden soruları kimi zaman önemsiz sorulardır. Önemli olan elde ettiğimiz sonuçlar, tekniklerin geliştirilebilmesi ve bundan alınan hazdır. Sonuç olarak kazanan bilim olacaktır.

# Kaynakça


[1] Birkhoff, G.; Rota, G. (1989). *Ordinary Differential Equations*. 4th ed. New York: Wiley.

[2] Sevimli, E. (2016). *Diferansiyel Denklemlerin Öğreniminde Yaşanan Zorluklar ve Alternatif Öğretim Yaklaşımları*. Sakarya University Journal of Education , 6 (2) , 154-171. doi: 10.19126/suje.15063

[3] Erdem, A. (2009). *Adi diferansiyel denklemler notlari* [PDF Belgesi]. Web Sitesi: `https://kisi.deu.edu.tr/ali.sevimlican/aerdem-dif1.pdf`. Erişim tarihi: 25.12.2020.

[4] Najera, J. (2019). Web sitesi: `https://miro.medium.com/max/2160/1*BDHw-7yN3uBpbTCsw0NP8w.jpeg`. Erişim tarihi: 25.12.2020.

# Kaynakça (cont.)


[5] Ginsburg, D.; Groose, B.; Taylor, J.; Vernescu, B. *The History of the Calculus and the Development of Computer Algebra Systems*.
Web sitesi: http://www.math.wpi.edu/IQP/BVCalcHist/calctoc.html. Erişim tarihi: 25.12.2020.

[6] Sanchis, G.R.; *Historical Activities for Calculus - Module 2: Tangent Lines Then and Now*.
Web sitesi: https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/historical-activities-for-calculus-module-2-tangent-lines-then-and-now.
Erişim tarihi: 26.12.2020.

[7] Struik, J.D. (1948) *A Concise History of Mathematics*. New York: Dover Publications, Inc.

[8] (Dijital Görsel) Web sitesi: https://mathenchant.wordpress.com/2016/05/16/fermats-last-theorem-the-curious-incident-of-the-boasting-frenchman/.
Erişim tarihi: 26.12.2020.

[9] Stewart, I. (2017). *Matematiğin Kısa Tarihi*. Çev., Sibel Sevinç. İstanbul: Alfa Yayınları.

[10] (Dijital Görsel) Web sitesi: https://sites.google.com/site/mrreedsmathwebpage/calculus. Erişim tarihi: 26.12.2020.

[11] Doeffinger, M. (2016). (Dijital Görsel) Web sitesi: https://thelitestuffcartoons.com/home/March_21-April_2.html. Erişim tarihi: 26.12.2020.

[12] Freeman, M. British Library/National Endowment for the Humanities. Web sitesi: https://www.nationalgalleries.org/art-and-artists/48896/sir-isaac-newton-1642-1727-natural-philosopher. Erişim tarihi: 26.12.2020.

[13] Sasser, E.J. *History Of Ordinary Differential Equations: The First Hundred Years* [PDF Belgesi]. Web Sitesi: https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.112.3646&rep=rep1&type=pdf. Erişim tarihi: 26.12.2020.

[14] *Later life of Isaac Newton*. InWikipedia, Özgür Ansiklopedi. Web Sitesi: https://en.wikipedia.org/wiki/Later_life_of_Isaac_Newton. Erişim tarihi: 26.12.2020.

[15] Klemme, F.H.; Kuehn, M. (2016). *The Bloomsbury Dictionary of Eighteenth-Century German Philosophers*. New York: Bloomsbury Publisging Plc.

[16] Kahveci, K. (2012). *Monodic World: The Nature Based On Ration*. Atatürk Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 12 (49), 51-61. Retrieved from https://dergipark.org.tr/tr/pub/ataunisosbd/issue/36246/408460

[17] Francke, B.C. *Bildnis des Philosophen Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz*. Web sitesi: https://www.bildindex.de/document/obj00010888. Erişim tarihi: 27.12.2020.

[18] *Gottfried Leibniz*. InWikipedia, Özgür Ansiklopedi. Web Sitesi: https://tr.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz. Erişim tarihi: 27.12.2020.

[19] Evans, A. (Dijital Görsel) Web sitesi: `https://www.cartoonstock.com/directory/g/gottfried_leibniz.asp`. Erişim tarihi: 28.12.2020.

[20] (Dijital Görsel) Web sitesi: `http://www.quickmeme.com/meme/3qtm3t`. Erişim tarihi: 28.12.2020.

[21] Ince, E.L. (1956). *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover Publications, Inc.

[22] Leibniz, G. (1849-63). *Mathematische Schriften*. ed. by C.J. Gerhardt, Gesammelte Werke. Ed. by G.H. Pertz. Third Series, Mathematik. 7 vols., Halle.

[23] Struik, D.J. (1986). *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. New Jersey: Princeton University Press.

[24] Ji, S. . *Lecture 29. Bernouilli Brothers* [PDF Belgesi]. Web sitesi: `https://www.math.uh.edu/~shanyuji/History/h-29.pdf`. Erişim tarihi: 28.12.2020.

# Kaynakça (cont.)


[25] (Dijital Görsel) Web sitesi: https://frbr.reasonablegraph.org/archive/item/575. Erişim tarihi: 28.12.2020.

[26] *Jacob Bernoulli*. Matematiğin Peşinde. Web sitesi: https://matematiginpesinde.com/jacob-bernoulli/. Erişim tarihi: 28.12.2020.

[27] *The Bernoulli brothers*. Web sitesi: http://www2.linnaeus.uu.se/online/math/1_5_1.html. Erişim tarihi: 28.12.2020.

[28] Hairer, E.; Nørsett, P.S.; Wanner, G. (1993). *Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems*. Berlin, New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-540-78862-1

[29] Parker, E.A. (2003). *Who Solved the Bernoulli Differential Equation and How Did They Do It?*. The College Mathematics Journal, 44(2), 89-97. doi:10.4169/college.math.j.44.2.089

[30] Bernoulli, J. (1695). *Explicationes, annotationes et additiones ad ea quæin actis superiorum annorum de curvaelastica, isochrona paracentrica, velaria, hinc inde memorata, partim controversa leguntur; ubi de lineamediarum directionum, aliisque novis*. Acta EruditorumDec 537–553.

[31] Özdemir, Y. (2016). *Bilime Yön Verenler*. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

# İleri Okuma


[1] Cajori, F. (1928). *The Early History of Partial Differential Equations and of Partial Differentiation and Integration*. The American Mathematical Monthly, 35(9), 459-467. doi:10.2307/2298771

[2] Boole, G. (1859). *A Treatise on Differential Equations*. Cambridge: Macmillan and Company.

[3] Forsyth, R.A (1890). *Theory of Differential Equations: Part I. Exact Equations and Pfaff's Problems*. Cambridge: At The University Press.

[4] Parker, E.A. (2003). *Who Solved the Bernoulli Differential Equation and How Did They Do It?*. The College Mathematics Journal, 44(2), 89-97. doi:10.4169/college.math.j.44.2.089