G grafo pesado

G tiene dos AG T_1 y T_2 tq $w(T_1) \neq w(T_2)$

$\iff$ G tiene ciclo simple con 2 aristas de distinto peso

($\Rightarrow$)

Sean T_1 y T_2 dos AGs de G que comparten la mayor cantidad de aristas y además $w(T_1) \neq w(T_2)$.

Existe una arista e_1 que está en T_1 pero no en T_2.

$T_2 + e_1$ tiene un ciclo $\Rightarrow$ G tiene un ciclo.

Las aristas del ciclo que está en $T_2 + e_1$ no pueden estar todas en T_1 porque sino habría también un ciclo en T_1. Sea e_2 la arista del ciclo que solo está en T_2 pero en T_1.

Sea $T_3 = T_2 - e_2 + e_1$. Notar que T_3 también es AG porque intercambiamos en T_2 2 aristas que están en un mismo ciclo.

Supongamos que $w(e_1) = w(e_2)$.

$w(T_3) = w(T_2) - w(e_2) + w(e_1) = w(T_2) \neq w(T_1)$

T_3 tiene una arista más en común con T_1 que T_2. Absurdo pues T_2 comparte la mayor cantidad posible de aristas con T_1.

$\Rightarrow$ $w(e_1) \neq w(e_2)$

Probamos que G tiene un ciclo y 2 aristas de ese ciclo tienen distintos pesos.

($\Leftarrow$)

Sean e_1 y e_2 aristas de G que pertenecen al mismo ciclo y además $w(e_1) \neq w(e_2)$. Podemos construir 2 AGs T_1 y T_2 que difieren únicamente en estas 2 aristas. Por ejemplo construyendo T_1 con Kruskal habiendo configurado primero todas las aristas del ciclo salvo e_2 con peso 0 y todo el resto con peso 1. Luego copiamos T_1 para construir T_2, intercambiando la arista e_1 por e_2. Finalmente restauramos los pesos originales.

$$w(T_1) = \sum_{\substack{e \in E(T_1) \\ e \neq e_1}} w(e) + w(e_1) = w(e_2) + \sum_{\substack{e \in E(T_2) \\ e \neq e_2}} w(e) = w(T_2)$$

son iguales por construcción

$$\Leftrightarrow \quad w(e_1) = w(e_2)$$

Por construcción $w(e_1) \neq w(e_2) \Rightarrow w(T_1) \neq w(T_2)$