IEI $\in$ coNP $\iff \neg$IEI $\in$ NP

$\neg$IEI = DEI (Divisible en independientes)

DEI: Dado un grafo G y $K \in \mathbb{N} > 0$ retorna si
$\iff$ Se puede particionar G en conjuntos independientes de
vértices de tamaño $\geq K$

OBS: 2 conjuntos de vértices son independientes si no existe una arista que conecte un vértice de un conjunto con un vértice del otro conjunto.

QVQ: DEI $\in$ NP

Certificado: conjuntos $C_1, \cdots, C_r$

Verificador:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \bigcup C_i = V(G) \\ \bullet\ C_i \cap C_j = \emptyset \quad \forall i,j,\ i \neq j \end{array}\right\} \text{Los conjuntos } C_1, \cdots, C_r \text{ son una partición de } V(G)$$

- $\nexists (u,v) \in E(G)$ tq $u \in C_i \wedge v \in C_j \wedge i \neq j$ } Conjuntos independientes
- $\forall 1 \leq i \leq r \ \#C_i \geq K$

Todas operaciones polinomiales $\Rightarrow$ verificador polinomial
$\Rightarrow$ DEI $\in$ NP
$\Rightarrow$ IEI $\in$ coNP

QVQ DEI $\in$ NPC

3-Coloreo $\in$ NPC: 3-Coloreo $\geq_p$ DEI

Buscamos una transformación $t: \langle G \rangle \to \langle G', K \rangle$ para transformar instancias de 3-Coloreo en instancias de DEI.

Necesitamos un K que fuerce a DEI armar solo 3 conjuntos de vértices. A su vez, como no sabemos la distribución de 3-Coloreo para algún grafo G, hay que permitir cualquier asignación de colores, y en particular el caso extremo donde G no tiene aristas y se pueden pintar todos los vértices del mismo color.

Tomamos $K = n$ siendo $n = |V(G)|$.

$V(G') = V(G) \cup \{u_1, \dots, u_{2n}\}$

$E(G') = E(G)$

G' es G con 2n vértices nuevos sin conectar.

3-Coloreo($\langle G \rangle$) = si $\iff$ DEI($\langle G', K \rangle$) = si

($\Rightarrow$)

Suponemos que G es 3 coloreable $\Rightarrow$ existen a lo sumo 3 conjuntos independientes de vértices en G (pueden haber menos). DEI busca conjuntos de tamaño $\geq$ K. Como $|V(G')| = 3K$ solo puede encontrar 1, 2 ó 3 conjuntos, pero no más. Los vértices que agregamos a G' no están conectados con ningún otro vértice, por lo que DEI puede colocarlos en cualquier conjunto. Entonces DEI responde si.

($\Leftarrow$)

Suponemos que G' es divisible en conjuntos independientes de tamaño $\geq K$. Por lo expuesto en ($\Rightarrow$) solo puede haber 1, 2 ó 3 conjuntos. Si miramos solo los vértices de G, éstos están divididos en a lo sumo 3 conjuntos independientes, entonces se pueden colorear con a lo sumo 3 colores (se asigna un color distinto a cada conjunto). Entonces G es 3 coloreable.