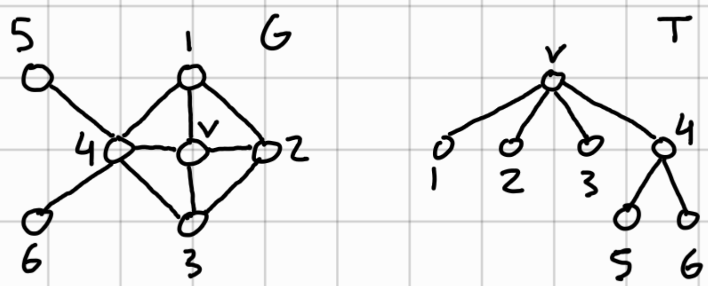
5. ⋆Un árbol generador T de un grafo G es *v-geodésico* si la distancia entre v y w en T es igual a la distancia entre v y w en G para todo $w \in V(G)$. Demostrar que todo árbol BFS de G enraizado en v es v-geodésico. Dar un contraejemplo para la vuelta, i.e., mostrar un árbol generador v-geodésico de un grafo G que no pueda ser obtenido cuando BFS se ejecuta en G desde v.

QVQ: Todo árbol BFS de G enraizado en v es v-geodésico



Def: $d_T(v,w) = d_G(v,w) \ \forall w \in G_v \iff T$ es v-geodésico

Supongamos que existe algún vértice $w \in G_v$ tq
$d_T(v,w) \neq d_G(v,w)$

Por def de distancia, $d_G(v,w)$ el la longitud del camino simple más corto que conecta v y w en G.

Caso $d_T(v,w) < d_G(v,w)$
BFS enraizado en v encontró un camino más corto entre v y w.
Absurdo pues $d_G(v,w)$ el la longitud mínima.

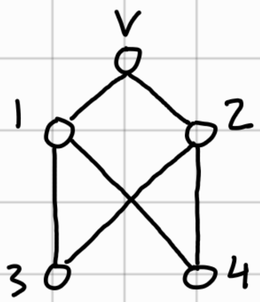
Caso $d_T(v,w) > d_G(v,w)$
Por def BFS enraizado en v construye un camino mínimo entre v y w en el árbol T. La longitud del camino mínimo es $d_G(v,w)$ por lo tanto absurdo que el camino entre v y w en T sea más largo.

Como en ambos casos llegamos a un absurdo, la suposición original no vale y entonces $d_T(v,w) = d_G(v,w) \ \forall v \in G_v$ lo cual implica que T es v-geodésico.

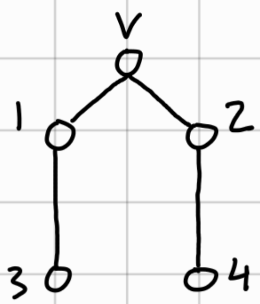
Contraejemplo para la vuelta:

AG v-geodésico T $\not\Rightarrow$ BFS enraizado en v genera T

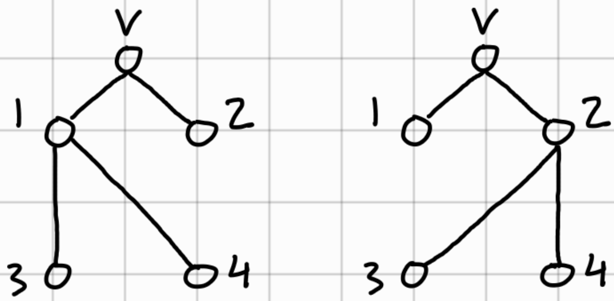
G



AG



BFS



BFS siempre recorre todos los vecinos de un vértice antes de seguir con los vécinos de otro vértice.