2) Un grafo *etiquetado* G es un grafo cuyos vértices tienen cada uno una etiqueta distinta en el conjunto $\{1, \ldots, n\}$, donde n es la cantidad de vértices de G. En G, cada arista se etiqueta utilizando las etiquetas de sus vértices incidentes. Dos grafos etiquetados de n vértices son *iguales* cuando tienen el mismo conjunto de aristas etiquetadas. Una *orientacion acíclica* de un grafo (etiquetado o no) G es un grafo orientado H que no tiene ciclos dirigidos y que resulta de asignarle una dirección a cada arista de G. Ciertamente, si G es etiquetado, entonces H mantiene las mismas etiquetas que G. Probar las siguientes afirmaciones:

a) Todo grafo etiquetado con al menos una arista tiene una cantidad par de orientaciones acíclicas distintas.

b) Toda orientación acíclica de un grafo tiene al menos un *sumidero* (es decir un vértice con grado de salida cero).

c) Toda orientación acíclica de K_n (el grafo completo de n vértices) tiene un único sumidero.

d) Si a una orientación acíclica H de un grafo le agregamos un nuevo vértice v junto a una arista $u \to v$ para todo vértice u de H, entonces el grafo resultante es la orientación acíclica de un grafo.

e) El grafo K_n etiquetado tiene exactamente $n!$ orientaciones acíclicas distintas.

Aprobación: demostrar correctamente al menos 3 de los enunciados propuestos.

a)

Inducción en la cantidad de aristas.

$P(m)$: Todo grafo etiquetado G con m aristas tiene una cantidad par de orientaciones acíclicas.

Caso base: $|G_E| = 1$

Un ciclo requiere al menos 2 aristas. Si $G_E = \{(u,v)\}$ hay exactamente 2 orientaciones acíclicas: (u,v) y (v,u).

Paso inductivo: $P(m) \Rightarrow P(m+1)$

Sea G tq $|G_E| = m+1$, y $e \in G_E$ una arista cualquiera.

Por HI $G-e$ tiene $2k$ orientaciones acíclicas pues $|E(G-e)| = m$.

Por cada orientación acíclica H_i en la cual existe una orientación para e tq H_i sigue siendo acíclico, existe un H_j con $j \neq i$ tq todas las aristas de $G-e$ tienen dirección opuesta respecto a H_i. Basta con darle a e la orientación opuesta respecto a la asignada en H_i para que H_j también sea acíclico. Luego la cantidad de orientaciones acíclicas en G respecto a $G-e$ difiere en $2q$. Como había una cantidad par en $G-e$, hay tambien una cantidad par en G.

b)

Toda orientación acíclica H de un grafo G tiene un sumidero.

$\exists v \in H_V$ tq $d_{out}(v) = 0$

Supongamos que no existe v tq $d_{out}(v)=0$.
Es decir $\forall v \in H_V$, $d_{out}(v) > 0$. Como todos los vértices tienen al menos una arista que sale desde ellos, podemos construir un recorrido arbitrariamente largo en H. Sea R un recorrido tq $|R| = n+1$. Por el principio del palomar, como solo hay n vértices en H, necesariamente hay un vértice en R que visitamos al menos 2 veces. Entonces hay un ciclo en H. Absurdo pues H es acíclico.

Práctica 2 / Ej 14 / a)

c)