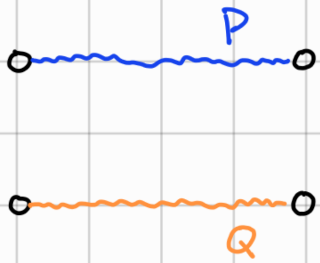
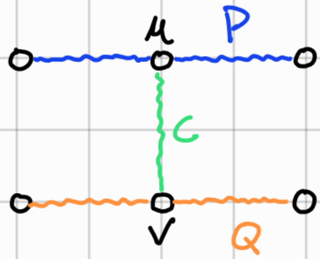
6. ⋆Sea G un grafo conexo. Demostrar por el contrarrecíproco que todo par de caminos simples de longitud máxima de G tienen un vértice en común. **Ayuda:** suponer que hay dos caminos disjuntos en vértices de igual longitud y definir explícitamente un camino que sea más largo que ellos.

Sean P y Q 2 caminos de longitud máxima en G.
Supongamos que estos caminos son disjuntos en vértices.

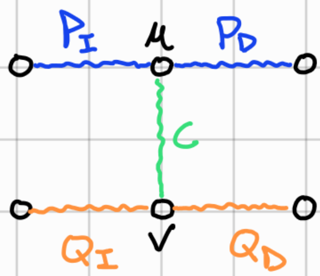


$|P| = |Q|$

Como G es conexo, necesariamente existe un camino C que conecta P y Q. Sin pérdida de generalidad sean $u \in P$ y $v \in Q$ los extremos de C.



Los vértices u y v dividen a P y Q cada uno en 2 partes.
Sean P_I y P_D los 2 subcaminos en P para llegar hasta u desde el extremo izquierdo y derecho. Análogamente definimos Q_I y Q_D.



Sea $P_u = \max\{P_I, P_D\}$ el camino más largo en P para llegar a u desde algún extremo. Análogamente definimos $Q_v = \max\{Q_I, Q_D\}$.

En el dibujo $P_u = P_I$ y $Q_v = Q_D$ solo a modo ilustrativo. Podría darse cualquiera de las 4 combinaciones.

Como u divide a P en 2 caminos y tomamos P_u como el camino más largo, sigue que $|P_u| \geq |P|/2$. Análogamente $|Q_v| \geq |Q|/2$.

Entonces:
$$\begin{aligned} |P_u + C + Q_v| &\geq |P|/2 + 1 + |Q|/2 \\ &= |P|/2 + 1 + |P|/2 \qquad (|Q| = |P|) \\ &= |P| + 1 \end{aligned}$$

Absurdo pues P era un camino de longitud máxima. Por lo tanto P y Q comparten al menos 1 vértice si son caminos de longitud máxima en un grafo conexo. $\boxtimes$