1. Para cada una de las siguientes sentencias sobre el problema de flujo máximo en una red N: demostrar que es verdadera o dar un contraejemplo.

   a) Si la capacidad de cada arista de N es par, entonces el valor del flujo máximo es par.

   b) Si la capacidad de cada arista de N es par, entonces existe un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arista de N es par.

   c) Si la capacidad de cada arista de N es impar, entonces el valor del flujo máximo es impar.

   d) Si la capacidad de cada arista de N es impar, entonces existe un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arista de N es impar.

   e) Si todas las aristas de N tienen capacidades racionales, entonces el flujo máximo es racional.

a) Verdadero

Por el teorema de flujo máximo / corte mínimo, si F es el flujo máximo de una red cualquiera N, y S un corte mínimo de N, entonces:

$$F = \sum_{\substack{(u,v)\in E(N)\\ u\in S\\ v\notin S}} w(u,v) = \sum 2K_{uv} = 2\sum K_{uv} \Rightarrow F \text{ es par}$$

Si todos los pesos son pares:
$w(u,v) = 2K_{uv}$ para algún $K_{uv} \in \mathbb{Z}$

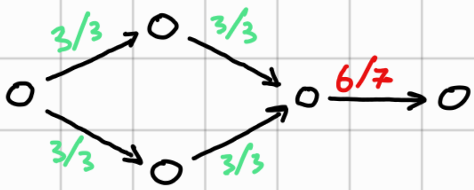
b) Verdadero

Inducción en las iteraciones de Ford-Fulkerson. En particular, miramos los posibles cuellos de botella encontrados en cada camino de aumento.

Caso base:
Inicialmente el flujo en la red es 0 y por lo tanto todas las aristas tienen disponible toda su capacidad, que es par, y el flujo sobre ellas es 0.

Paso inductivo:
El flujo sobre cada arista es par.
Si existe camino de aumento, el cuello de botella será par.
Al actualizar las capacidades de las aristas del camino de aumento, éstas resultan pares pues restamos un flujo par a capacidades pares.

c) Falso d) Falso



e) Creo que Verdadero