4) Sea T un árbol y h_v su altura cuando T está enraizado en $v \in V(T)$.

a) Dar un algoritmo eficiente que calcule la distancia entre todo par de vértices de T.

b) Demostrar que si T está enraizado en v, entonces todo vértice w a distancia h_v de v pertenece a un camino de longitud máxima de T, independientemente de cuál sea la raíz v. **Ayuda:** Considere un camino de longitud máxima $x \rightsquigarrow y$ con $x, y \neq w$ y trate de construir otro camino máximo que empiece en w.

c) Se define el *diámetro* de T como la longitud del camino más largo entre dos vértices de T. Definir un algoritmo que, dado un árbol T, determine el diámetro d de T junto con dos vértices cuya distancia en T sea d.

Complejidad: el algoritmo del inciso *a*) debe tener complejidad temporal $O(n^2)$ y el del inciso *c*), $O(n)$.

1) Inicializamos una matriz $n \times n$ de distancias. $O(n^2)$

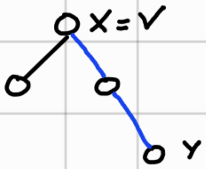
2) Por cada vértice $v \in T_v$, corremos $BFS(T, v)$ para calcular la distancia desde v hacia todos los otros vértices. $O(n^2)$

Sea $w \in T_v$ tq $d(v,w) = h_v$, donde h_v es la altura del árbol T enraizado en v.

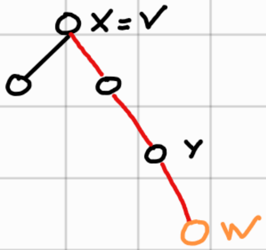
Sean $x, y \in T_v$ tq $x \rightsquigarrow y$ es un camino de longitud máxima.

Supongamos que $d(v,x) < h_v$ y $d(v,y) < h_v$.

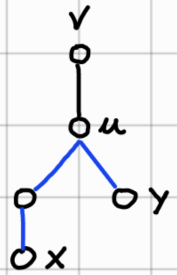
Caso x, y están en la misma rama. Sin pérdida de generalidad, supongamos que x es ancestro de y. Como $x \rightsquigarrow y$ es un camino de longitud máxima, necesariamente $x = v$, pues si no el camino $v \rightsquigarrow x \rightsquigarrow y$ sería más largo.



Por otro lado, como $d(v,y) = d(x,y) < h_v$, existe algún w tq $d(v,w) = d(x,w) = h_v$ y como x es la raíz, el camino $x \rightsquigarrow w$ es más largo que $x \rightsquigarrow y$. Absurdo.

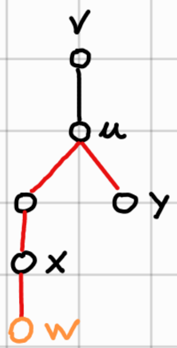


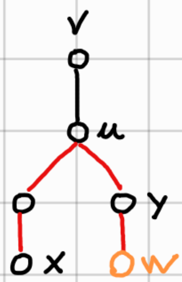
Caso x, y están en distintas ramas. Sea u el primer ancestro en común entre x, y. Necesariamente existe porque si hay vértices que unen ramas T no sería árbol (habría un ciclo). Por otro lado u es el único ancestro en común porque el camino es simple.



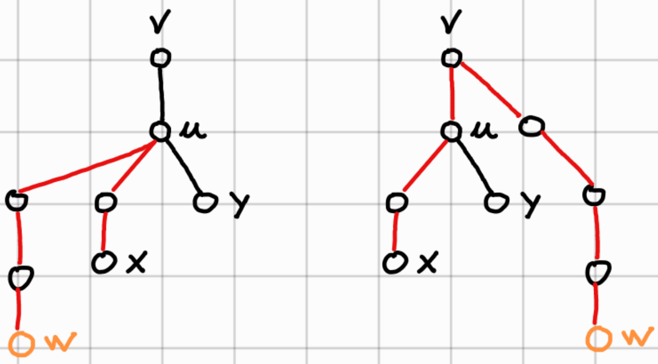
Consideremos ahora el camino $x \rightsquigarrow y$ como $x \rightsquigarrow u \rightsquigarrow y$. Sin pérdida de generalidad, sea $|x \rightsquigarrow u| \geq |u \rightsquigarrow y|$.
Tomemos cualquier w con $d(v,w) = h_v$.

Si w es descendiente de x ó y, entonces u está en $v \rightsquigarrow w$. Por lo tanto el camino $w \rightsquigarrow u \rightsquigarrow y$ ó $x \rightsquigarrow u \rightsquigarrow w$ es más largo que $x \rightsquigarrow u \rightsquigarrow y = x \rightsquigarrow y$ pues $d(v,w) > d(v,x)$ y $d(v,w) > d(v,y)$, es decir w está más "abajo" en el árbol que x ó y. Absurdo.





Si w está en otra rama, el camino $x \rightsquigarrow u \rightsquigarrow w$ es más largo que $x \rightsquigarrow u \rightsquigarrow y = x \rightsquigarrow y$ pues $d(v,w) > d(v,u) + d(u,y) = d(v,y)$.
Absurdo.



En todos los casos llegamos a un absurdo por suponer que en un camino $x \rightsquigarrow y$ de longitud máxima vale $d(v,x), d(v,y) < h_v$.
Entonces cualquier camino de longitud máxima en T pasa por algún $w \in T_v$ tq $d(v,w) = h_v$.

$\boxtimes$

Algoritmo para buscar el diámetro de T.

1) BFS(v). Sea w algún vértice tq $d(v,w) = h_v$. $O(n)$

2) BFS(w). Sea u algún vértice tq $d(w,u) = h_w$. $O(n)$

3) $|w \rightsquigarrow u| = d$ es el diámetro de T.