11. ⋆Una empresa de comunicaciones modela su red usando un grafo G donde cada arista tiene una capacidad positiva que representa su *ancho de banda*. El *ancho de banda* de la red es el máximo k tal que G_k es conexo, donde G_k es el subgrafo generador de G que se obtiene de eliminar las aristas de peso menor a k (Figura 2).

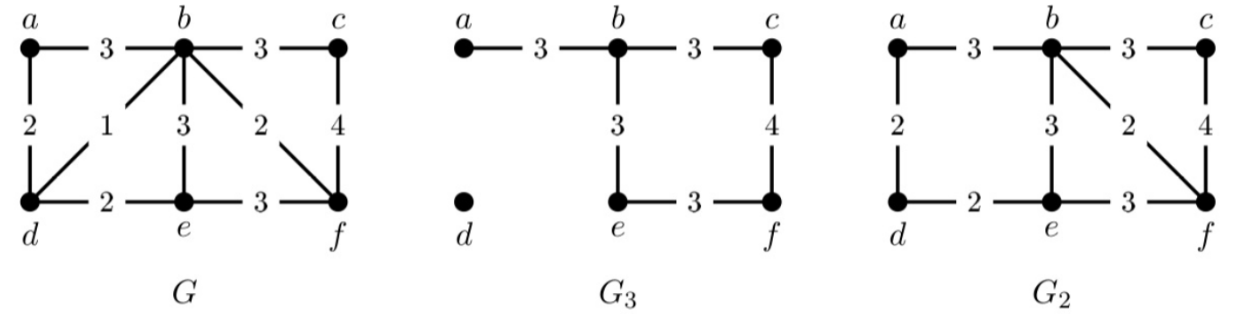

Figura 2. *El grafo G tiene ancho de banda 2 porque G_2 es conexo y G_3 no. Por otra parte, el ancho de banda del camino c, b, d es 1 mientras que el ancho de banda del camino c, b, e, d es 2. En general,* $\mathrm{bwd}(c, d) = 2$ *mientras que* $\mathrm{bwd}(a, e) = \mathrm{bwd}(b, f) = 3$.

a) Proponer un algoritmo eficiente para determinar el ancho de banda de una red dada.

La empresa está dispuesta a hacer una inversión que consiste en actualizar algunos enlaces (aristas) a un ancho de banda que, para la tecnología existente, es virtualmente infinito. Antes de decidir la inversión, quieren determinar cuál es el ancho de banda que se podría obtener si se reemplazan i aristas para todo $0 \leq i < n$.

b) Proponer un algoritmo que dado G determine el vector $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tal que a_i es el ancho de banda máximo que se puede obtener si se reemplazan i aristas de G.

a)

Sea $G = (V, E)$ grafo pesado conexo.

1) Corremos Kruskal para generar un AGMax (en cada paso elegimos la arista más pesada en vez de la mas liviana). Sea T el AGMax de G.

2) Sea $K = \min\{bwd(e) / e \in T_E\}$ el ancho de banda mínimo entre todas las aristas de T. K es el ancho de banda de toda la red:

- $T_E \subseteq E(G_K)$ porque toda las aristas de T tienen peso $\geq K$. Como T es conexo $\Rightarrow G_K$ es conexo.
- G_{K+1} no es conexo porque T es un árbol, y $|E(G_{K+1})| < |E(G_K)|$. Es decir en G_{K+1} hay menos aristas que en G_K (sacamos todas las de peso $\leq K$), y como T es un AGMax, no existen otros caminos que unen los vértices desconectados que usen aristas de mayor peso (las habríamos colocado en T antes que las aristas con peso K).

b)

Corremos el mismo algoritmo y vamos guardando las aristas seleccionadas en una lista L, colocando cada arista al comienzo de la lista.

En L resulta el peso de todas las aristas de T (pueden haber repetidos) ordenadas de forma ascendente.

$L[0]$ es la respuesta del inciso a). $L[i]$ con $0 \leq i < n$ responde el inciso b).