2. Diseñar un algoritmo eficiente que, dado un digrafo G con pesos no negativos, dos vértices s y t y una cota c, determine una arista de peso máximo de entre aquellas que se encuentran en algún recorrido de s a t cuyo peso (del recorrido, no de la arista) sea a lo sumo c. **Demostrar** que el algoritmo propuesto es correcto.

1) Dijkstra desde s en G para calcular $d(s,v)$ $\forall v \in V(G)$.
$O(m \lg n)$

2) Dijkstra desde t en G^T (G con las aristas invertidas) para calcular $d(v,t)$ $\forall v \in V(G)$.
$\underbrace{O(n+m)}_{\text{calcular } G^T} + O(m \lg n) = O(m \lg n)$

3) Recorremos todas las aristas de G buscando la de mayor peso tq el costo del camino entre s y t sea $\leq C$. $O(m)$

$m \leftarrow -\infty$
$e \leftarrow \perp$
For $v \to w \in E(G)$:
  $m' \leftarrow d(s,v) + c(v \to w) + d(w,t)$
  if $m' \leq c \wedge m' > m$:
    $m \leftarrow m'$
    $e \leftarrow v \to w$

Notemos que basta con mirar los caminos simples pues cualquier recorrido que tiene ciclos podemos transformarlo en un camino simple sacando todos los ciclos, y el peso del camino será $\leq$ al del recorrido porque sacamos aristas de peso no negativo.

Si el camino mínimo entre s y t resulta ∞ entonces no existe camino que conecta s y t, por lo tanto nunca vamos a poder encontrar una arista que cumpla la condición del enunciado. En este caso el algoritmo retorna $\perp$.

De forma similar, si $d(s,t) > c$ no puede existir arista que mejore el camino mínimo entre s y t pues sería absurdo. En este caso también retornamos $\perp$.

Suponiendo $d(s,t) \leq c$, queremos ver cuál es la arista de peso máximo tq el peso del camino entre s y t que pasa por esa arista sea $\leq c$.

Sea P_{st} algún camino entre s y t que pasa por la arista $v \to w$. Notemos entonces que $P_{st} = P_{sv} + v \to w + P_{wt}$. Supongamos además que construimos los subcaminos P_{sv} y P_{wt} de forma óptima, así permitimos tomar una arista $v \to w$ tan grande como sea posible.

$$
\begin{aligned}
c(P_{st}) &= c(P_{sv}) + c(v \to w) + c(P_{wt}) \\
&= d(s,v) + c(v \to w) + d(w,t) \quad \leq c
\end{aligned}
$$

Luego la arista que buscamos es la de mayor peso entre todas aquellas que cumplen la desigualdad anterior.