9. Sea S una cadena con n paréntesis que abren y n paréntesis que cierran. Dada una longitud ℓ impar, decimos que $s\colon \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$ es un *ℓ-posicionamiento uniforme* de S si $s(i)$ es par y al escribir el i-ésimo paréntesis que abre en $s(i)$ y el i-ésimo paréntesis que cierra en $s(i) + \ell$, $1 \leq i \leq n$, se obtiene una escritura válida de S. Por ejemplo, si $S = ((()(()()))())$ y $\ell = 15$, entonces $s(1) = 0$, $s(2) = 6$, $s(3) = 10$, $s(4) = 16$, $s(5) = 20$, $s(6) = 22$ y $s(7) = 36$ es un 15-posicionamiento uniforme de S. Definir un SRD que permita resolver el problema de determinar si una cadena dada S tiene un ℓ-posicionamiento uniforme cuando $\ell > 0$ impar también es dado. El mejor SRD que conocemos tiene $O(n)$ inecuaciones y, por lo tanto, permite resolver el problema en $O(n^2)$ de aplicando el algoritmo del ejercicio anterior.

$s(i) = 0 \quad 6 \quad 10 \quad 16 \quad 20 \quad 22 \quad 36$

(((((((

1 2 3 4 5 6 7

$s(i)+15 = 15 \quad 21 \quad 25 \quad 31 \quad 35 \quad 37 \quad 51$

)))))))

1 2 3 4 5 6 7

((( ) (( ) ( ))) ( ))

1 2 3 1 4 5 2 6 3 4 5 7 6 7

$A[1..n]$ A_i posición del i-ésimo "(" en S.

$B[1..n]$ B_i posición del i-ésimo ")" en S.

S es un orden válido entonces:

$\forall 1 \leqslant i < j \leqslant n, \quad A_i < A_j \wedge B_i < B_j \wedge (B_i > A_j \vee B_i < A_j)$

$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \quad A_i < B_i$

ℓ-posicionamiento será válido si:

$\forall 1 \leqslant i < j \leqslant n, \quad s(i) < s(j) \wedge s(i) + \ell < s(j) + \ell \Rightarrow s(i) < s(j)$

$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \quad s(i) < s(i) + \ell$ vale trivialmente pues $\ell > 0$

Además $\forall 1 \leqslant i < j \leqslant n$:

si $B_i > A_j \Rightarrow s(i) + \ell > s(j)$

si $B_i < A_j \Rightarrow s(i) + \ell < s(j)$

Sea $2x_i$ la posición del i-ésimo "C".

$s(i) = 2x_i$

$\forall 1 \leq i \leq n$ planteamos las siguientes ecuaciones:

$2x_i < 2x_j \iff x_i < x_j \iff x_i - x_j < 0 \iff x_i - x_j \leq -1$

Si $B_i > A_j \implies 2x_i + \ell > 2x_j \iff x_j - x_i \leq (\ell-1)/2$

Si $B_i < A_j \implies 2x_i + \ell < 2x_j \iff x_i - x_j \leq (-\ell-1)/2$

Hay que respetar el formato de las ecuaciones: $x_j - x_i \leq b_k$ para poder luego armar el grafo. Entonces las ecuaciones quedan:

$(-x_j) - (-x_i) \leq -1$

$x_j - x_i \leq (\ell-1)/2$

$(-x_j) - (-x_i) \leq (-\ell-1)/2$