10. Tenemos a n clientes de un supermercado $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ y queremos asignarle a cada uno, una caja para hacer fila. Las cajas están ordenadas en una línea y numeradas de izquierda a derecha de la 1 a la M y se encuentran separadas por pasillos. Durante el proceso de asignación algunos clientes se pelean entre sí y son separados por seguridad. Si dos clientes c_i y c_j pelean, los guardias les dicen que tienen que ponerse en filas distintas que se encuentren separadas por $K_{ij} > 0$ pasillos intermedios, para que no se vuelvan a pelear. Notar que cuando seguridad separa una pelea naturalmente hay un cliente que queda más a la izquierda (cerca de la caja 1) y el otro más a la derecha (cerca de la caja M). Con la restricción de no volver a acercarse, ese orden ya no puede cambiar. A su vez hay pares de clientes c_k y c_m que son amigos y no queremos que haya más que $L_{km} = L_{mk} \geq 0$ pasillos intermedios entre las filas de c_k y c_m. ¿será posible asignarlos a todos?

   a. Modelar el problema utilizando un sistema de resticciones de diferencias (no olviden justificar).

   b. Proponer un algoritmo polinomial que lo resuelva.

   c. ¿Qué complejidad tiene el algoritmo propuesto? Para la respuesta, tener en cuenta las cantidades m_1 y m_2 de amistades y peleas, respectivamente.

   Nota: K_{ij} de alguna manera captura la intensidad de la pelea y L_{ij} captura (inversamente) la intensidad de la amistad. Es posible que dos amigos se peleen y en ese caso hay que cumplir las dos condiciones. Si eso pasa solo puede haber soluciones si $K_{ij} \leq L_{ij}$. Para todo par de clientes sabemos si son amigos o si se pelearon, la intensidad de cada relación. Además, para aquellos clientes que se pelearon, conocemos cuál cliente quedó a la izquierda y cuál a la derecha.
   Ayuda: Si tenemos n variables x_i en un SRD y queremos acotarlas entre A y B ($x_i \in [A, B]$) podemos agregar una variable auxiliar z, sumar restricciones del tipo $A \leq x_i - z \leq B$ y luego correr la solución para que z sea 0.

Planteamos las siguientes ecuaciones:

$\forall\ 1 \leq i < j \leq n$

Si c_i y c_j están peleados:

Si c_i quedó a la izquierda de c_j:

$$c_j - c_i \geq K_{ij} \iff c_i - c_j \leq -K_{ij}$$

Caso contrario:

$$c_i - c_j \geq K_{ij} \iff c_j - c_i \leq -K_{ij}$$

Si c_i y c_j son amigos:

$$\begin{aligned} |c_i - c_j| \leq L_{ij} &\iff -L_{ij} \leq c_i - c_j \leq L_{ij} \\ &\iff -L_{ij} \leq c_i - c_j \ \wedge\ c_i - c_j \leq L_{ij} \\ &\iff c_j - c_i \leq L_{ij} \ \wedge\ c_i - c_j \leq L_{ij} \end{aligned}$$

Además tenemos que pedir que todos los clientes estén en filas válidas entre 1 y M. Para esto usamos el truco de agregar una incógnita adicional z que luego usamos para correr la solución tq $z=0$.

$$\begin{aligned} \forall\ 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq c_i - z \leq M &\iff 1 \leq c_i - z \ \wedge\ c_i - z \leq M \\ &\iff z - c_i \leq -1 \ \wedge\ c_i - z \leq M \end{aligned}$$

Construimos el grafo de restricciones a partir de las ecuaciones planteadas y luego corremos Bellman-Ford. Si hay ciclos negativos entonces no hay solución. Caso contrario obtenemos una solución $(c_1, \cdots, c_n, z)$. Definimos la solución final al problema como $(c_1 - z, \cdots, c_n - z)$.

Tamaño del grafo de restricciones:

Vértices : $\Theta(n+2)$ $\quad c_1, \cdots, c_n, z, c_0$

Aristas : $\Theta(n+1)$ $\quad (c_0, c_i)$ y (c_0, z)

$\Theta(2m_1)$ amigos

$\Theta(m_2)$ peleados

$\Theta(2n)$ $\quad 1 \leq c_i \leq M$

$\Rightarrow O(n + m_1 + m_2)$

Bellman-Ford : $O(VE) = O(n(n+m_1+m_2)) = O(n^2 + nm_1 + nm_2)$