



DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Algoritmos y Estructuras de Datos III

Primer cuatrimestre 2021 (*dictado a distancia*)

Grafos eulerianos y hamiltonianos

Grafos eulerianos y hamiltonianos

- ▶ Los problemas relativos a grafos eulerianos y hamiltonianos tienen una gran cantidad de aplicaciones, como por ejemplo el problema del cartero chino, del viajante de comercio, de scheduling, etc.
- ▶ Tienen su orígenes en los comienzos de la teoría de grafos.
- ▶ Aunque parecen dos problemas bastante similares en cuanto a su formulación, son muy diferentes desde el punto de vista de resolución computacional:
 - ▶ Existen algoritmos polinomiales para saber si un grafo dado tiene un circuito euleriano.
 - ▶ Sin embargo, no se conocen (y no se sabe si existen) algoritmos polinomiales para la versión hamiltoniana.

Grafos eulerianos

- ▶ Volvamos al problema de los puentes de Königsberg.
- ▶ Si representamos a cada territorio mediante un vértice y cada puente por una arista, lo que obtenemos es un multigrafo.
- ▶ Euler estaba interesado en un circuito que pasara exáctamente una vez por cada arista (por cada puente).
- ▶ Ésto dio origen a las siguientes definiciones.

Grafos eulerianos

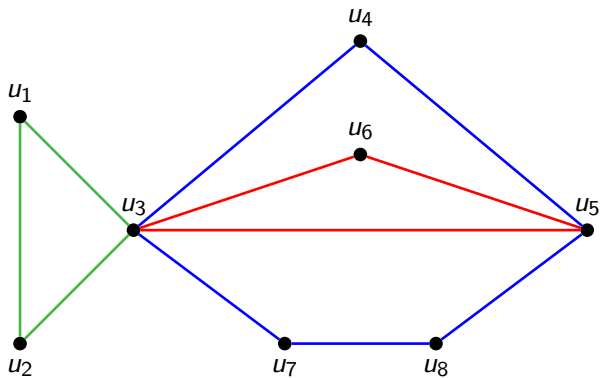
- ▶ Un circuito C en un grafo (o multigrafo) G es un *circuito euleriano* si C pasa por todas las aristas de G una y sólo una vez.
- ▶ Un *grafo euleriano* es un grafo que tiene un circuito euleriano (o multigrafo).

Grafos eulerianos

Teorema de Euler: Sea G un grafo (o multigrafo) conexo. Las siguientes sentencias son equivalentes:

1. G es euleriano.
2. Todos los vértices de G tienen grado par.
3. Las aristas de G pueden ser particionadas en ciclos (circuitos simples).

Grafos eulerianos



Grafos eulerianos

- ▶ A partir de la idea de la demostración del teorema de Euler se puede definir un algoritmo para construir un circuito euleriano para un grafo que tiene todos sus vértices de grado par.
- ▶ La idea es construir un circuito que no use la misma arista más de una vez.
- ▶ Se parte de cualquier vértice, u_0 , y se avanza mientras sea posible.
- ▶ Cuando ya no sea posible avanzar, debemos estar en u_0 , porque como todos los vértices par cada vez que *llegamos* a un vértice seguro también *podes salir* de ese vértice. Así formamos un circuito Z .

Grafos eulerianos

- ▶ Si no quedan aristas del grafo sin recorrer, terminamos el procedimiento obteniendo un circuito euleriano.
- ▶ Si aun quedan aristas sin recorrer, sea $G_1 = (V, X_1)$, donde X_1 son las aristas aún no recorridas.
- ▶ Elegimos cualquier vértice u_1 de G_1 sobre el que incida alguna arista de Z y alguna de X_1 (seguro que existe porque G es conexo).
- ▶ A partir de u_1 construimos un circuito de G_1 avanzando mientras sea posible. Seguro volveremos a u_1 , porque G_1 tiene todos sus vértices de grado par (o 0).
- ▶ Intercalamos este nuevo circuito en Z las aristas del nuevo circuito.
- ▶ Siguiendo este esquema, vamos *pegando* circuitos en Z hasta incluir a todas las aristas de G .

Grafos eulerianos

circuitoEuleriano(G)

entrada: $G = (V, X)$ conexo, todos los vertices de grado par

salida: Z circuito euleriano

$v \leftarrow$ cualquier vertice de V

$Z \leftarrow$ un circuito que empieza y termina en v

mientras exista $e \in X \setminus Z$ **hacer**

 elegir w tal que existe $(w, u) \in Z$ y $(w, z) \in X \setminus Z$

$D \leftarrow$ un circuito en $X \setminus Z$ que empieza y termina en w

$Z \leftarrow$ unir Z y D por medio de w

fin mientras

retornar Z

¿Cuál es la complejidad de este algoritmo?

Grafos eulerianos

- ▶ Un *camino euleriano* en un grafo (o multigrafo) G es un camino que pasa por cada arista de G una y sólo una vez.
- ▶ Un digrafo, se dice *euleriano* si tiene un circuito orientado que pasa por cada arco de G una y sólo una vez.

Teorema: Un grafo (o multigrafo) conexo tiene un camino euleriano si, y sólo si, tiene exactamente dos nodos de grado impar.

Teorema: Un digrafo conexo es euleriano si, y sólo si, para todo nodo v de G se verifica que $d_{in}(v) = d_{out}(v)$.

Problema del cartero chino (Kwan, 1962)

Dado un grafo $G = (V, X)$ con longitudes asignadas a sus aristas, $l : X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, el *problema del cartero chino* consiste en encontrar un circuito que pase por cada arista de G *al menos* una vez de longitud mínima.

- ▶ Si G es euleriano, un circuito euleriano es la solución del problema del cartero chino.
- ▶ Hay algoritmos polinomiales para el problema del cartero chino cuando G es orientado o no orientado.
- ▶ Pero no se conocen algoritmos polinomiales (el problema no está computacionalmente resuelto) si el grafo es mixto (algunas aristas orientados y otros no).

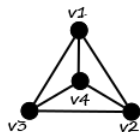
Grafos hamiltonianos

- ▶ Como comentamos hace algunas semanas, la noción de lo que hoy conocemos como ciclo hamiltoniano ya se mencionó en 1771, cuando Vandermonde estudió el problema del caballo de ajedrez , cuyo objetivo era encontrar un camino circular de un caballo de ajedrez que visite todas las casillas del tablero exáctamente una vez.
- ▶ Muchos años después, en 1855, Kirkman volvió a esta idea.
- ▶ Un tiempito más tarde, en 1857, Hamilton creó el juego icosiano, y aunque fue un fracaso comercial, difundió este problema como unos desafíos ingeniosos y se ganó el reconocimiento imponiendo su nombre a este concepto.
- ▶ Tiene muchas aplicaciones práctica, en la clase comentaremos la más conocida que es el problema del viajante de comercio.

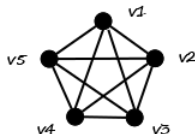
Grafos hamiltonianos

- ▶ Un ciclo en un grafo G es un *ciclo hamiltoniano* si pasa por cada nodo de G una y sólo una vez.
- ▶ Un grafo se dice *hamiltoniano* si tiene un ciclo hamiltoniano.
- ▶ Un camino en un grafo G es un *camino hamiltoniano* si pasa por cada nodo de G una y sólo una vez.

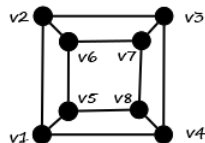
Grafos hamiltonianos



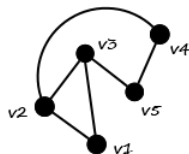
$C = v1, v2, v3, v4, v1$



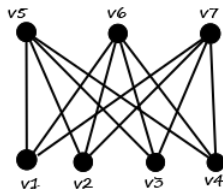
$C = v1, v2, v3, v4, v5, v1$



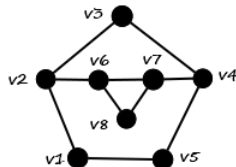
$C = v1, v5, v6, v7, v8, v4, v3, v2, v1$



$C = v2, v1, v3, v5, v4, v2$



No es hamiltoniano



No es hamiltoniano

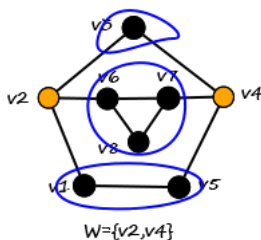
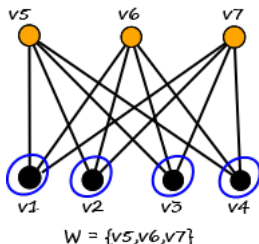
Grafos hamiltonianos

- ▶ No se conocen buenas caracterizaciones para grafos hamiltonianos.
- ▶ ¿Cómo intentar construir un ciclo hamiltoniano?
- ▶ No se conocen algoritmos polinomiales para decidir si un grafo es hamiltoniano o no.
- ▶ Más aún, se sospecha que no existen algoritmos polinomiales para este problema.
- ▶ Vamos a estudiar distintas condiciones necesarias o suficientes para la existencia de un ciclo hamiltoniano en un grafo dado.

Grafos hamiltonianos

Teorema (condición necesaria): Sea G un grafo conexo. Si existe $W \subset V$ tal que $G \setminus W$ tiene c componentes conexas con $c > |W|$ entonces G no es hamiltoniano.

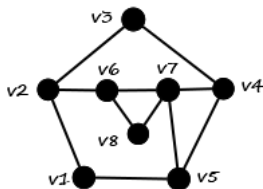
Mediante este teorema, tomando los W indicados, podemos demostrar que los siguientes grafos no son hamiltonianos:



Grafos hamiltonianos

¿Es cierta la recíproca de este teorema?

Este grafo no es hamiltoniano, sin embargo no existe W que cumpla las hipótesis del teorema.

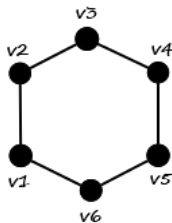


Grafos hamiltonianos

Teorema (Dirac) (condición suficiente): Sea G un grafo con $n \geq 3$ y tal que para todo $v \in V$ se verifica que $d(v) \geq n/2$ entonces G es hamiltoniano.

¿Es cierta la recíproca de este teorema?

Este es un grafo hamiltoniano, sin embargo $d(v) = 2 \forall v \in V$ y $n/2 = 3$, es decir que no cumple las hipótesis del teorema de Dirac.



Problema del viajante de comercio (TSP)

Un viajante debe recorrer un conjunto determinado de ciudades:

- ▶ cuenta con un vehículo,
- ▶ debe visitar exactamente una vez cada ciudad,
- ▶ debe retornar al origen,
- ▶ quiere seguir el **mejor** recorrido.

¿Pero cuál es el **mejor** recorrido?

- ▶ El más corto: minimiza la distancia recorrida,
- ▶ el más rápido: minimiza el tiempo total de viaje.

Problema del viajante de comercio (TSP)

- ▶ En términos de grafos, es encontrar un ciclo hamiltoniano de longitud mínima en un grafo completo con longitudes asociadas a sus aristas.
- ▶ En su versión de decisión, la entrada es un grafo completo G con longitudes asociadas a sus aristas y un número k , y la pregunta es:
 - ¿Existe en G un ciclo hamiltoniano de longitud $\leq k$?

Problema del viajante de comercio (TSP)

Problema: Dado un grafo $G = (V, X)$ con longitudes asignadas a las aristas, $l : X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, queremos determinar un circuito hamiltoniano de longitud mínima. Es decir, encontrar C^0 tal que:

$$l(C^0) = \min\{l(C) \mid C \text{ es un ciclo hamiltoniano de } G\}.$$

- ▶ Se trata de una generalización de ciclo hamiltoniano.
- ▶ No se conocen algoritmos polinomiales para resolverlo.
- ▶ Tampoco se conocen algoritmos ϵ -aproximados polinomiales para el TSP general (si se conocen cuando las distancias son euclidianas).
- ▶ Y si necesitamos resolverlo, ¿qué hacemos? En la próxima clase veremos...