1. Dado un digrafo D con pesos $c\colon E(D) \to \mathbb{N}$ y dos vértices s y t, decimos que una arista $v \to w$ es *st-eficiente* cuando $v \to w$ pertenece a algún camino mínimo de s a t. Sea $d(\cdot, \cdot)$ la función que indica el peso de un camino mínimo entre dos vértices.

    a. Demostrar que $v \to w$ es st-eficiente si y sólo si $d(s, v) + c(v \to w) + d(w, t) = d(s, t)$.

    b. Usando el inciso anterior, proponga un algoritmo eficiente que encuentre el mínimo de los caminos entre s y t que no use aristas st-eficientes. Si dicho camino no existe, el algoritmo retorna $\perp$.

Arista $v \to w$ es st-eficiente

$\iff d(s,v) + c(v \to w) + d(w,t) = d(s,t)$

$(\Rightarrow)$

Como $v \to w$ es st-eficiente, por def pertenece a algún camino mínimo $P_{st} = s \rightsquigarrow t$.

$P_{st} = P_{sv} + v \to w + P_{wt}$

Cualquier subcamino dentro de un camino mínimo es también un camino mínimo (subestructura óptima).

$c(P_{st}) = c(P_{sv}) + c(v \to w) + c(P_{wt})$

Como P_{st}, P_{sv} y P_{wt} son caminos mínimos su costo es igual a la distancia mínima.

$d(P_{st}) = d(s,v) = d(s,v) + c(v \to w) + d(w,t)$

$(\Leftarrow)$

$d(s,t)$ es la distancia mínima de cualquier camino mínimo entre s y t. Suponiendo $d(s,v) + c(v \to w) + d(w,t) = d(s,t)$ sigue que la arista $v \to w$ pertenece a un camino mínimo entre s y t. Por def entonces $v \to w$ es st-eficiente.

1) Dijkstra desde s en D para calcular $d_D(s,v)$ $\forall v \in V(D)$.

2) Construimos D^T el digrafo transpuesto de D que resulta de invertir todas las aristas. $O(n+m)$

3) Dijkstra desde t en D^T para calcular $d_{D^T}(t,v) = d_D(v,t)$ $\forall v \in V(D)$.

4) Revisamos todas las aristas en D para determinar cuáles son st-eficientes usando la propiedad demostrada en el inciso anterior. $O(m) \cdot O(1) = O(m)$
Mientras hacemos esto, vamos construyendo el digrafo D' que tiene los mismos vértices que D y solamente las aristas que <u>no</u> son st-eficientes.

$$(u,v) \in E(D') \iff d_D(s,u) + c(u,v) + d_D(v,t) > d_D(s,t)$$

5) Dijkstra desde s en D'. Si $d_{D'}(s,t) = \infty$ retornamos $\perp$, caso contrario retornamos $d_{D'}(s,t)$ que es la distancia mínima entre s y t sin usar aristas st-eficientes.