4. Sea G un digrafo con pesos positivos que tiene dos vértices especiales s y t. Para una arista $e \notin E(G)$ con peso positivo, definimos $G + e$ como el digrafo que se obtiene de agregar e a G. Decimos que e mejora el camino de s a t cuando $d_G(s,t) > d_{G+e}(s,t)$. Diseñar un algoritmo eficiente que, dado un grafo G y un conjunto de aristas $E \notin E(G)$ con pesos positivos, determine cuáles aristas de E mejoran el camino de s a t en G. **Demostrar** que el algoritmo es correcto.

1) Corremos Dijkstra en G desde s para calcular $d_G(s,v)$ $\forall v \in V(G)$. $O(m \lg n)$

2) Construimos G^T: G transpuesto, digrafo con los mismos vértices que G y todas las aristas con dirección invertida. $O(m+n)$

3) Corremos Dijkstra en G^T desde t para calcular $d_{G^T}(t,v) = d_G(v,t)$ $\forall v \in V(G)$

4) Recorremos todas las aristas $e=(u,v) \in E$ y verificamos cuáles mejoran el camino entre s y t.

$e=(u,v)$ mejora el camino entre s y t

$$\iff d_G(s,u) + c(u,v) + d_G(v,t) < d_G(s,t)$$

El chequeo es $O(1)$ por lo calculado en 1 y 3.
Revisar todas las aristas en E es $O(|E|)$.

Colocamos cada arista e que mejora el camino en un conjunto R de aristas.

5) Retornamos el conjunto R.

Para probar la correctitud basta ver que para cualquier arista $e=(u,v) \in \bar{E}$:

$$d_{G+e}(s,t) < d_G(s,t) \iff d_G(s,u) + c(\underbrace{u,v}_{=e}) + d_G(v,t) < d_G(s,t)$$

($\Rightarrow$)

Notemos que necesariamente la arista $e=(u,v)$ está en el nuevo camino mínimo entre s y t en $G+e$. Pues si no, el camino mínimo entre s y t es el mismo en $G+e$ y en G, y así $d_{G+e}(s,t) = d_G(s,t)$ lo cual sería una contradicción.

Como e es parte del camino mínimo entre s y t, podemos descomponer $d_{G+e}(s,t)$ en 2 subcaminos que también serán mínimos por la subestructura óptima de los caminos mínimos.

$$\begin{aligned} d_{G+e}(s,t) &= d_{G+e}(s,u) + c(u,v) + d_{G+e}(v,t) \\ &= d_G(s,u) + c(u,v) + d_G(v,t) \\ &< d_G(s,t) \quad \text{por hipótesis} \end{aligned}$$

$(u,v)=e$ es la única arista extra en $G+e$

($\Leftarrow$)

Los subcaminos mínimos en G van a ser $\leq$ a los que están en $G+e$. O es el mismo camino ó usa la nueva arista e y mejora el camino.

$d_{G+e}(s,u) \leq d_G(s,u)$

$d_{G+e}(v,t) \leq d_G(v,t)$

Usando la arista $e=(u,v)$ el camino entre s y t en $G+e$ resulta:

$$d_{G+e}(s,t) \leq d_{G+e}(s,u) + c(u,v) + d_{G+e}(v,t) \leq d_G(s,u) + c(u,v) + d_G(v,t) \overset{\text{hipótesis}}{<} d_G(s,t)$$

$\Rightarrow d_{G+e}(s,t) < d_G(s,t)$