Queremos ver que determinar si un 2-CDC es satisfacible es NP-completo sabiendo que 3-coloreo es NP-completo.

QVQ 2-CDC satisfacible? es NP

Certificado: asignación de valores para todas las variables x_i que aparecen en las cláusulas de la instancia 2-CDC. Hay $O(n)$ asignaciones siendo n la cantidad de incógnitas. El certificado es polinomial respecto a la instancia 2-CDC.

Verificador: en tiempo polinomial podemos revisar cada cláusula C_i, reemplazando las incógnitas que aparecen en C_i por sus asignaciones y luego evaluando la fórmula. Si alguna cláusula C_i es falsa entonces la asignación no satisface al 2-CDC. Caso contrario sí.

$\Rightarrow$ 2-CDC satisfacible? es NP

QVQ 2-CDC satisfacible? es NP-completo. Para esto vamos a reducir polinomialmente 3-Coloreo que ya sabemos es NP-Completo.

Buscamos una transformación polinomial $t: \langle G \rangle \rightarrow \langle C_1, \cdots, C_K \rangle$.
Asignamos cada vértice v de G a una incógnita x_v de 2-CDC.
Definimos C_K claúsulas con $K = 1 + 2|V(G)| + |E(G)|$.

Para garantizar que cada vértice tenga una asignación $x_v \in [0,2]$:
$\forall v \in V(G)$: $0 \leqslant x_v \leqslant 2$

$$\iff 0 \leqslant x_v - z \leqslant 2 \quad \wedge \quad z = 0$$

$$\iff 0 \leqslant x_v - z \quad \wedge \quad x_v - z \leqslant 2 \quad \wedge \quad z = 0$$

$$\iff C_{v_1}: z - x_v \leqslant 0 \quad \wedge \quad C_{v_2}: x_v - z \leqslant 2 \quad \wedge \quad C_z: z = 0$$

Obs: La variable z y la cláusula C_z son las mismas para todo v.

Para garantizar que cada par de vértices vecinos tengan una asignación (color) distinta:
$\forall (u,v) \in E(G)$: $x_u \neq x_v$

$$\iff x_u - x_v \neq 0$$

$$\iff x_u - x_v > 0 \quad \vee \quad x_u - x_v < 0$$

$$\iff x_v - x_u < 0 \quad \vee \quad x_u - x_v < 0$$

$$\iff C_{uv}: x_v - x_u \leqslant -1 \quad \vee \quad x_u - x_v \leqslant -1$$

La transformación t recorre una vez los vértices y aristas para construir las C_K cláusulas. t es polinomial respecto a G.

QVQ la transformación mapea correctamente:

3-Coloreo(<G>) = si

$\iff$ 2-CDC(t(<G>)) = 2-CDC(<$C_1, \cdots, C_k$>) satisfacible

($\Rightarrow$)

Suponemos que G es 3-Coloreable $\Rightarrow$ existen a lo sumo 3 conjuntos independientes de vértices de G.

Sea la asignación: $z = 0$

X_v = color del vértice v interpretado como un número $\in [0,2]$ pues hay a lo sumo 3 colores.

Veamos que esta asignación satisface las $C_1, \cdots, C_k$ cláusulas.

C_z: $z = 0$ se cumple trivialmente por la asignación definida.

$$\left.\begin{array}{l} C_{v_1}: z - X_v \leq 0 \iff X_v \geq 0 \\ C_{v_2}: X_v - z \leq 2 \iff X_v \leq 2 \end{array}\right\} \iff X_v \in [0,2]$$

vale pues asignamos cada X_v según el color de v, y hay a lo sumo 3 colores.

C_{uv}: $X_v - X_u \leq -1 \vee X_u - X_v \leq -1 \iff X_v \neq X_u$

La cláusula C_{uv} existe porque u, v son vecinos. Como G es 3-coloreable, u y v tienen colores distintos y por lo tanto asignaciones distintas que satisfacen la cláusula C_{uv}.

Luego $C_1, \cdots, C_k$ son satisfacibles si G es 3-coloreable.

($\Leftarrow$)

Suponemos que las cláusulas $C_1, \cdots, C_K$ son satisfacibles.

Por $C_Z: Z=0$ necesariamente $Z=0$ en cualquier asignación que satisface $C_1, \cdots, C_K$.

$C_{v_1} \wedge C_{v_2}: X_v \in [0,2] \quad \forall v$

$C_{uv}: X_u \neq X_v \quad \forall u,v$

Reinterpretamos la asignación de cada X_v como el color del vértice v en G. Dado que $X_v \in [0,2]$, los vértices tienen todos a lo sumo 3 colores distintos.

Para afirmar que G es 3-coloreable necesitamos garantizar que cualquier par de vértices vecinos u,v tengan colores distintos. La cláusula $C_{uv}: X_u \neq X_v$ nos dice que u y v tienen colores distintos.

Luego, si las cláusulas $C_1, \cdots, C_K$ son satisfacibles entonces G es 3-coloreable.