G grafo conexo pesado con $m \geq n$ $\quad$ QM = quasi-mínimo

Todos los pesos son distintos

a) G tiene al menos un árbol QM: verdadero

Sea T un AGM de G. Como $m \geq n$ y T tiene solo $n-1$ aristas, existe alguna arista e que no está en T.

Notemos que hay un ciclo en $T+e$. Sea e' la arista de mayor peso que está en el ciclo y también en T (por lo tanto $e' \neq e$).

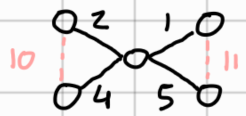
Sea $T' = T + e - e'$ otro AG (intercambiamos 2 aristas de un ciclo).

Como las aristas tienen todas pesos distintos, $w(T') \neq w(T)$.

En particular $w(T') > w(T)$.

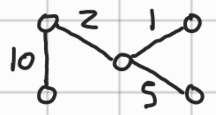
$T' \neq T$ (difieren en una arista), T' es AG. Probamos que existe al menos un AG que no es AGM. Entonces existe al menos un QM pues entre todos los AG que no son AGM, alguno tendrá costo mínimo.

b) G tiene a lo sumo un árbol QM: Falso

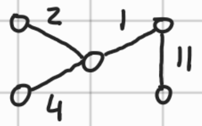


$\sum = 12$

no están en el AGM



$\sum = 18$



$\sum = 18$

AGs quasi-mínimos

Los AG QM se construyen intercambiando una arista del AGM por otra. Pueden haber varias opciones para intercambiar que generan AG del mismo costo.

c) T_1 AGM de G, T_2 AG QM de G

$\Rightarrow T_1$ y T_2 difieren en exactamente una arista

Sea $D = E(T_1) \Delta E(T_2)$ la diferencia simétrica entre las aristas de T_1 y T_2. En D tenemos las aristas que están en T_1 o (exclusivo) en T_2.

Sea $e \in D$ la arista de peso mínimo en D. Hay 2 opciones:

$\overset{AGM}{e \in E(T_1)} \wedge \overset{QM}{e \notin E(T_2)}$

Hay un ciclo en $T_2 + e$. Sea $e' \neq e$ una arista de ese ciclo tal que e' no está en T_1 (pues sino habría un ciclo en T_1).

Entonces $e' \in D$. Como todas las aristas tienen pesos distintos, y $e \in D$ es la mínima en D: $w(e) < w(e')$.

Sea $T_2' = T_2 + e - e'$. $w(T_2') = w(T_2) + w(e) - w(e') < w(T_2)$.

T_2 es QM y al intercambiar una arista con T_1 AGM mejoramos su costo. Por def de QM, T_2 es el AG de segundo costo mínimo, por lo tanto al mejorar su costo necesariamente es AGM. Luego T_1 y T_2 difieren en exactamente una arista.

$\overset{AGM}{e \notin E(T_1)} \wedge \overset{QM}{e \in E(T_2)}$

Análogamente, $T_1 + e$ tiene un ciclo. Sea $e' \neq e$ la arista del ciclo que no está en T_2.

e es la mínima en D: $w(e) < w(e')$.

Sea $T_1' = T_1 + e - e'$. $w(T_1') = w(T_1) + w(e) - w(e') < w(T_1)$.

Absurdo pues T_1 es AGM. Necesariamente se cumple el otro caso si e es la arista de peso mínimo en D.

d) Si no vale $m \geq n$ no podemos afirmar que haya alguna arista fuera del AGM.

e) Si las aristas pueden tener los mismos pesos podrían haber múltiples AGMs, en particular si todas son iguales todos los AGs son AGMs y no existen AG QMs.