Sea T un AGM de G, $e \in E(G) \setminus E(T)$ la arista de peso mínimo que no está en T (existe porque G es completo).

$T+e$ tiene un ciclo. Sea $e' \neq e$ la arista de mayor peso en el ciclo. Notemos que entonces e' está en T y que $w(e') < w(e)$ pues sino podríamos construir un AG $T+e-e'$ de menor costo que el AGM, y también porque todos los pesos son distintos.

Sea $T' = T+e-e'$ que también es AG. Veamos que T' es un AG de segundo costo mínimo.

Sea $T'' = T+f-f'$ con $f \in E(G) \setminus E(T)$, $f \neq e$,
f' la arista de mayor peso en el ciclo que se forma en $T+f$ y $f' \neq f$.

QVQ: $w(T) < w(T') < w(T'')$ para cualquier T''.

$$
\begin{aligned}
w(T'') > w(T') &\iff w(T) + w(f) - w(f') > w(T) + w(e) - w(e') \\
&\iff w(f) - w(f') > w(e) - w(e') \\
&\iff w(f) > w(e) - w(e') + w(f') \\
&\iff w(f) > w(e) + \underbrace{w(e')}_{} + w(f') > w(e) \underbrace{- w(e')}_{} + w(f')
\end{aligned}
$$

$\downarrow$ los pesos son positivos

$w(f) > w(e) > w(e')$ $\wedge$ $w(f) > w(f')$

Todos los pesos son potencias de 2 y vale que:
$\sum_{i=0}^{k} 2^i < 2^{k+1}$

$w(f) > w(e)$ pues e es la mínima fuera de T.
$w(e) > w(e')$ pues sino T no sería AGM.
$w(f) > w(f')$ mismo argumento.

1) Buscamos T AGM usando Prim. $O(n^2)$

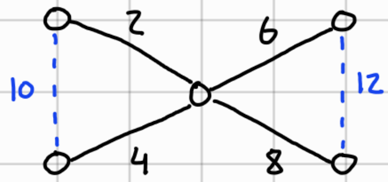
2) Marcamos las aristas que están en T. $O(m) = O(n^2)$
Sabiendo eso, buscamos la arista e de peso mínimo que no está en T. $O(m) = O(n^2)$

3) Buscamos el ciclo que se forma en T+e con DFS. $O(m+n) = O(n^2)$

4) Buscamos la arista e' de peso mayor que está en T y en el ciclo que se forma con e. $O(n^2)$

5) Construimos $T' = T + e - e'$. $O(n^2)$

Contraejemplo



$w(AGM) = 20$
Si T' es el AG de segundo costo mínimo, el algoritmo retorna $w(T') = 26$
Pero lo correcto es $w(T') = 24$