

$$IEI \in \text{coNP} \Leftrightarrow \neg IEI \in \text{NP}$$

$$\neg IEI = DEI \text{ (Divisible en independientes)}$$

DEI: Dado un grafo G y $k \in \mathbb{N} > 0$ retorna si

\Leftrightarrow Se puede particionar G en conjuntos independientes de vértices de tamaño $\geq k$

OBS: 2 conjuntos de vértices son independientes si no existe una arista que conecte un vértice de un conjunto con un vértice del otro conjunto.

$$QVQ: DEI \in \text{NP}$$

Certificado: conjuntos C_1, \dots, C_r

Verificador:

- $\bigcup C_i = V(G)$
 - $C_i \cap C_j = \emptyset \quad \forall i, j, i \neq j$
 - $\nexists (u, v) \in E(G) \text{ t.q. } u \in C_i \wedge v \in C_j \wedge i \neq j$
 - $\forall i \leq r \quad \#C_i \geq k$
- $\left. \begin{array}{l} \text{Los conjuntos } C_1, \dots, C_r \text{ son una} \\ \text{partición de } V(G) \end{array} \right\}$
- $\left. \begin{array}{l} \text{Conjuntos independientes} \end{array} \right\}$

Todas operaciones polinomiales \Rightarrow Verificador polinomial

$$\Rightarrow DEI \in \text{NP}$$

$$\Rightarrow IEI \in \text{coNP}$$

$\forall \langle G \rangle \text{ DEI} \in \text{NPC}$

3-Coloreo $\in \text{NPC}$: 3-Coloreo \leq_p DEI

Buscamos una transformación $t: \langle G \rangle \rightarrow \langle G', k \rangle$ para transformar instancias de 3-Coloreo en instancias de DEI.

Necesitamos un k que fuerce a DEI armar solo 3 conjuntos de vértices. A su vez, como no sabemos la distribución de 3-Coloreo para algún grafo G , hay que permitir cualquier asignación de colores, y en particular el caso extremo donde G no tiene aristas y se pueden pintar todos los vértices del mismo color.

Tomamos $k = n$ siendo $n = |V(G)|$.

$$V(G') = V(G) \cup \{u_1, \dots, u_{2n}\}$$

$$E(G') = E(G)$$

G' es G con $2n$ vértices nuevos sin conectar.

$$3\text{-Coloreo}(\langle G \rangle) = \text{si} \iff \text{DEI}(\langle G', k \rangle) = \text{si}$$

(\Rightarrow)

Suponemos que G es 3 coloreable \Rightarrow existen a lo sumo 3 conjuntos independientes de vértices en G (pueden haber menos).

DEI busca conjuntos de tamaño $\geq k$. Como $|V(G')| = 3k$ solo puede encontrar 1, 2 ó 3 conjuntos, pero no más. Los vértices que agregamos a G' no están conectados con ningún otro vértice, por lo que DEI puede colocarlos en cualquier conjunto. Entonces DEI responde si.

(\Leftarrow)

Suponemos que G' es divisible en conjuntos independientes de tamaño $\geq K$. Por lo expuesto en (\Rightarrow) solo puede haber 1, 2 ó 3 conjuntos. Si miramos solo los vértices de G , éstos están divididos en a lo sumo 3 conjuntos independientes, entonces se pueden colorear con a lo sumo 3 colores (se asigna un color distinto a cada conjunto). Entonces G es 3 coloreable.