4) Sea T un árbol y h_v su altura cuando T está enraizado en $v \in V(T)$.

a) Dar un algoritmo eficiente que calcule la distancia entre todo par de vértices de T.

b) Demostrar que si T está enraizado en v, entonces todo vértice w a distancia h_v de v pertenece a un camino de longitud máxima de T, independientemente de cuál sea la raíz v. **Ayuda:** Considere un camino de longitud máxima $x \rightsquigarrow y$ con $x, y \neq w$ y trate de construir otro camino máximo que empiece en w.

c) Se define el *diámetro* de T como la longitud del camino más largo entre dos vértices de T. Definir un algoritmo que, dado un árbol T, determine el diámetro d de T junto con dos vértices cuya distancia en T sea d.

Complejidad: el algoritmo del inciso a) debe tener complejidad temporal $O(n^2)$ y el del inciso c), $O(n)$.

1) Inicializamos una matriz nxn de distancias. $O(n^2)$

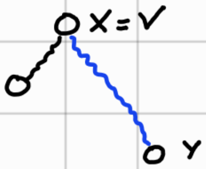
2) Por cada vértice $v \in T_v$, corremos BFS (T, v) para calcular la distancia desde v hacia todos los otros vértices. $O(n^2)$

Sea $w \in T_v$ tq $d(v,w) = h_v$, donde h_v es la altura del árbol T enraizado en v.

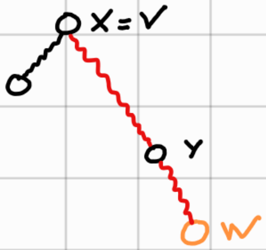
Sean $x, y \in T_v$ tq $x \leadsto y$ es un camino de longitud máxima.

Supongamos que $d(v,x) < h_v$ y $d(v,y) < h_v$.

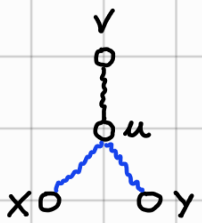
Caso x, y están en la misma rama. Sin pérdida de generalidad, supongamos que x es ancestro de y. Como $x \leadsto y$ es un camino de longitud máxima, necesariamente $x = v$, pues si no el camino $v \leadsto x \leadsto y$ sería más largo.



Por otro lado, como $d(v,y) = d(x,y) < h_v$, existe algún w tq $d(v,w) = d(x,w) = h_v$, y como x es la raíz, el camino $x \leadsto w$ es más largo que $x \leadsto y$. Absurdo.

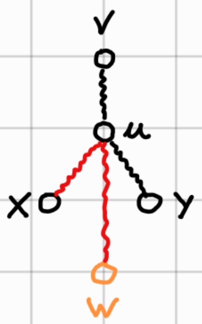


Caso x, y están en distintas ramas. Sea u el primer ancestro en común entre x, y.



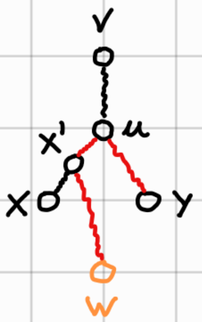
Sean $w \in T_v$ tq $d(v,w) = h_v$, $z \in T_v$ el primer ancestro en común entre u y w.

Caso $z = u$: w está en el subárbol enraizado en u.



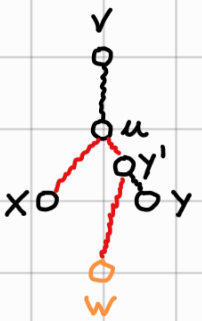
$|w \rightsquigarrow u \rightsquigarrow x| > |x \rightsquigarrow y|$

pues $d(u,w) > d(u,y)$. Absurdo



$|w \rightsquigarrow x' \rightsquigarrow u \rightsquigarrow y| > |x \rightsquigarrow y|$

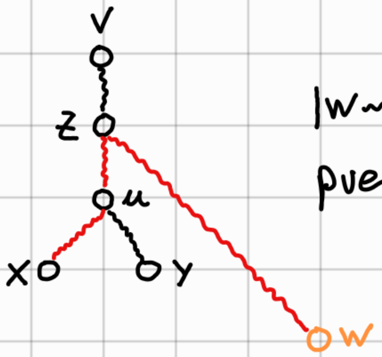
pues $d(x',w) > d(x',x)$. Absurdo



$|w \rightsquigarrow y' \rightsquigarrow u \rightsquigarrow x| > |x \rightsquigarrow y|$

pues $d(y',w) > d(y',y)$. Absurdo

Caso $z \neq u$.



$|w \rightsquigarrow z \rightsquigarrow x| > |x \rightsquigarrow y|$

pues $d(z,w) > d(z,y)$. Absurdo

En todos los casos llegamos a un absurdo por suponer que en un camino $x \rightsquigarrow y$ de longitud máxima vale $d(v,x), d(v,y) < h_v$. Entonces cualquier camino de longitud máxima en T pasa por algún $w \in T_v$ tq $d(v,w) = h_v$. $\boxtimes$

Algoritmo para buscar el diámetro de T.

1) BFS(v). Sea w algún vértice tq $d(v,w) = h_v$. $O(n)$

2) BFS(w). Sea u algún vértice tq $d(w,u) = h_w$. $O(n)$

3) $|w \rightsquigarrow u| = d$ es el diámetro de T.