BASIC THEOREMS

prove by truth table

For equality proof, $F_1=F_2$, for all possibility in the input variables (all rows), both side of equation must have equal value for same input variables.

For inequality proof, $F_1 \neq F_2$, find at least one possibility (a row) that have different values.

BASIC THEOREMS

Prove by postulates

$$X + X = X$$

$$X + X + X + \ldots + X = X$$

$$X + X = X$$

$$X + X + X + \ldots + X = X$$

$X + X \quad =$

$= (X + X)\ 1$ using identity $e_\times = 1$

$$X + X = X$$
$$X + X + X + \ldots + X = X$$

$X + X =$

$= (X + X)\,1$ using identity $e_{\times}=1$

$= (X + X)\,(X+X')$ using complement property

$$X + X = X$$
$$X + X + X + \dots + X = X$$

$X + X =$

$= (X + X)\,1$ using identity $e_{\times} = 1$

$= (X + X)\,(X + X')$ using complement property

$= X + (XX')$ using distributive property of $+$ over $\times$

$$X + X = X$$

$$X + X + X + \ldots + X = X$$

$X + X =$

$= (X + X)\, 1$ using identity $e_\times = 1$

$= (X + X)\,(X + X')$ using complement property

$= X + (XX')$ using distributive property of + over $\times$

$= X + 0$ using complement property

$$X + X = X$$

$$X + X + X + \ldots + X = X$$

$X + X =$

$= (X + X)\,1$ using identity $e_\times = 1$

$= (X + X)\,(X + X')$ using complement property

$= X + (XX')$ using distributive property of + over ×

$= X + 0$ using complement property

$= X$ using identity property of $e_+ = 0$

$$X + 1 = 1$$
$$X + Y + Z + \ldots + 1 = 1$$

$$X + 1 = 1$$
$$X + Y + Z + \ldots + 1 = 1$$

$X + 1 \quad =$

$= (X + 1)\, 1$ using identity $e_{\times} = 1$

$$X + 1 = 1$$

$$X + Y + Z + \ldots + 1 = 1$$

$X + 1 \quad =$

$= (X + 1)\, 1$ using identity $e_{\times} = 1$

$= (X + 1)\,(X + X')$ using complement property

$$X + 1 = 1$$

$$X + Y + Z + \ldots + 1 = 1$$

$X + 1 \quad =$

$= (X + 1)\ 1$ using identity $e_{\times}=1$

$= (X + 1)\ (X+X')$ using complement property

$= X + (1X')$ using distributive property of + over $\times$

$$X + 1 = 1$$

$$X + Y + Z + \ldots + 1 = 1$$

$X + 1 \quad =$

$= (X + 1)\,1$ using identity $e_{\times}=1$

$= (X + 1)\,(X+X')$ using complement property

$= X + (1X')$ using distributive property of + over ×

$= X + X'$ using identity $e_{\times}=1$

$$X + 1 = 1$$

$$X + Y + Z + \ldots + 1 = 1$$

$X + 1 \quad =$

$= (X + 1)\,1$ using identity $e_{\times}=1$

$= (X + 1)\,(X+X')$ using complement property

$= X + (1X')$ using distributive property of + over ×

$= X + X'$ using identity $e_{\times}=1$

$= 1$ using complement property

$$X + XY = X$$

$$X + XY + XZW + \ldots + XWAD = X$$

Absorption

$$X + XY = X$$

$$X + XY + XZW + \ldots + XWAD = X$$

$X + XY =$

$= X1+XY$ using identity $e_\times=1$

$= X(1 + Y)$ using distributive property of $\times$ over $+$

$= X1$ using previous theorem $x+1=1$

$= X$ using identity $e_\times=1$

Absorption

DUALITY

Dual(F) = OR $\rightleftarrows$ AND, 1 $\rightleftarrows$ 0

Dual(F) may or may not equal to F!

DUALITY

$$X + 1 \rightleftarrows X0$$

$$X + X' \rightleftarrows XX'$$

$$(X + Y)' \rightleftarrows (XY)'$$

DUALITY
FOR COMPLEMENT (NOT)

DUALITY
FOR COMPLEMENT (NOT)

$$F = A + (BC) \rightarrow F' = [A + (BC)]' = [A'(BC)'] = [A'(B' + C')]$$

DUALITY
FOR COMPLEMENT (NOT)

$F = A + (BC) \rightarrow \text{Dual}(F) \rightarrow A(B + C) \rightarrow F' = A'(B' + C')$

$$F = AB(C+(DL'G(B'+A+E)))(H+(J'A'B))$$

What's F'?

$$F' = [AB(C+(DL'G(B'+A+E)))(H+(J'A'B))]'$$
$$F' = [AB(\ldots)(H+(J'A'B))]'$$
$$F' = [A'+B'+(\ldots)'+(H+(J'A'B))']$$
$$F' = [A'+B'+(\ldots)'+(H'(J'A'B)')]$$
$$F' = [A'+B'+(\ldots)'+(H'(J+A+B'))]$$
$$F' = [A'+B'+(C+(\ldots))'+(H'(J+A+B'))] \text{ OMG!}$$

$$F = AB(C+(DL'G(B'+A+E)))(H+(J'A'B))$$

What's F'?

$$\text{Dual}(F) = A$$

$$F = AB(C+(DL'G(B'+A+E)))(H+(J'A'B))$$

What's F'?

$$\text{Dual}(F) = A+$$

$F = AB(C+(DL'G(B'+A+E)))(H+(J'A'B))$

What's F'?

$\text{Dual}(F) = A+B$

$$F = AB(C+(DL'G(B'+A+E)))(H+(J'A'B))$$

What's F'?

$$\text{Dual}(F) = A+B+($$

$$F = AB(C+(DL'G(B'+A+E)))(H+(J'A'B))$$

What's F'?

$$\mathrm{Dual}(F) = A+B+(C$$

$$F = AB(C + (DL'G(B' + A + E)))(H + (J'A'B))$$

What's F'?

$$\text{Dual}(F) = A + B + (C($$

$F = AB(C+(DL'G(B'+A+E)))(H+(J'A'B))$

What's F'?

$Dual(F) = A+B+(C(D+L'+G+(B'AE)))(H(J'+A'+B))$

$$F = AB(C+(DL'G(B'+A+E)))(H+(J'A'B))$$

What's F'?

$$Dual(F) = A+B+(C(D+L'+G+(B'AE)))(H(J'+A'+B))$$

Complement all variables only!

$$F' = A'+B'+(C'(D'+L+G'+(BA'E')))(H'(J+A+B'))$$

DUALITY THEOREM

A postulate or a proved theorem for F, also a postulate or a proved theorem for Dual(F)

DUALITY

$$\{X+1=1\} \rightleftarrows \{X0 = 0\}$$

$$\{X+X'=1\} \rightleftarrows \{XX'=0\}$$

$$\{(X+Y)'=X'Y'\} \rightleftarrows \{(XY)'=X'+Y'\}$$

$$X(X+Y) = X$$

$$X(X+Y)(X+Z)\ \ldots\ (X+W) = X$$

$\{X(X+Y)= X\}$ ⇄ $\{X+XY=X\}$

⇄ We proved the dual version

⇄ Using the duality property, this is also true!

Absorption

MINIMIZATION

I) Boolean Algebra (algebraically)

aka. Algebraic Manipulation

EXAMPLE I

$$F = ZY'X' + ZYX + ZYX' + ZY'X$$

4 × 3-input-AND

1 × 4-input-OR

$$F = ZY'X' + ZYX + ZYX' + ZY'X$$

$$F = Z\,(Y'X' + YX + YX' + Y'X)$$

$$F = Z\,(Y'X' + YX + YX' + Y'X)$$

$$F = Z\,(Y'(X'+X) + YX + YX')$$

$$F = Z\,(Y'(X'+X) + YX + YX')$$

$$F = Z\,(Y'1 + YX + YX')$$

$$F = Z\,(Y'\,1 + YX + YX')$$

$$F = \boxed{Z}\,(\boxed{Y'} + YX + YX')$$

$$F = Z\,(Y' + YX + YX')$$

$$F = Z(Y' + Y(X+X'))$$

$$F = Z\,(Y' + Y\,(X + X'))$$

$$F = Z\,(Y' + Y1)$$

$$F = Z\,(Y' + Y)$$

$$F = Z\,(Y' + Y)$$

$$F = Z1$$

$$F = \boxed{Z}$$

0 gates!

$$F = ZY'X' + ZYX + ZYX' + ZY'X$$

4 × 3-input-AND
1 × 4-input-OR

EXAMPLE I

Another Approach

$$F = ZY'X' + ZYX + ZYX' + ZY'X$$

$$F = ZY'(X'+X) + ZYX + ZYX'$$

$$F = ZY' (X'+X) + ZYX + ZYX'$$

$$F = \boxed{ZY'}\,(X'+X) + \boxed{ZY}\,(X+X')$$

$$F = ZY'(X'+X) + ZY(X+X')$$

$$F = ZY'1 + ZY1$$

$$F = \boxed{ZY'} + \boxed{ZY}$$

$$F = Z\,(Y' + Y)$$

$$F = Z1$$

$$F = \boxed{Z}$$

0 gates!

$$F = ZY'X' + ZYX + ZYX' + ZY'X$$

4 × 3-input-AND
1 × 4-input-OR

EXAMPLE I

Another Approach

$$F = ZY'X' + ZYX + ZYX' + ZY'X$$

Absorption?

EXAMPLE II

$$F = ZY'X' + ZYX' + Z'Y'X$$

$3 \times$ 3-input-AND

$1 \times$ 3-input-OR

$$F = ZY'X' + ZYX' + Z'Y'X$$

$$F = ZX'(Y'+Y) + Z'Y'X$$

$$F = ZX' (Y' + Y) + Z'Y'X$$

$$F = ZX'1 + Z'Y'X$$

$$F = ZX' + Z'Y'X$$

1 × 2-input-AND
1 × 3-input-AND
1 × 2-input-OR

$$F = ZYX' + ZYX' + Z'Y'X$$

3 × 3-input-AND
1 × 3-input-OR

DESIGN RECAP

SoP (ANDs-OR) → NAND
PoS (ORs-AND) → NOR

Given two unsigned numbers x and y, design a logic circuit to see

$$x \overset{?}{\geq} y$$

What is the range of x and y?

$$x \overset{?}{\geq} y$$

What is the range of x and y?

$$x, y \in [0, 3]_{10}$$

What is the range of x and y?

$$x, y \in [0, 3]_{10} = [00{,}11]_2$$

What is the range of output?

$$F \in \{0, 1\}$$

Y2	Y1	X2	X1	F(Y2,Y1,X2,X1)=?
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Y2	Y1	X2	X1	$F(Y2,Y1,X2,X1)=\Sigma\ m(0,1,2,3,5,6,7,10,11,15)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Y2	Y1	X2	X1	$F(Y2,Y1,X2,X1)=\prod M(4,8,9,12,13,14)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Y2	Y1	X2	X1	$F(Y2,Y1,X2,X1)=\Sigma\ m(0,1,2,3,5,6,7,10,11,15)$	$F(Y2,Y1,X2,X1)=\Pi\ M(4,8,9,12,13,14)$
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Which design?

Which design?

SoP and PoS are both effective

SoP and PoS have same efficiency (2-levels)

Which design?

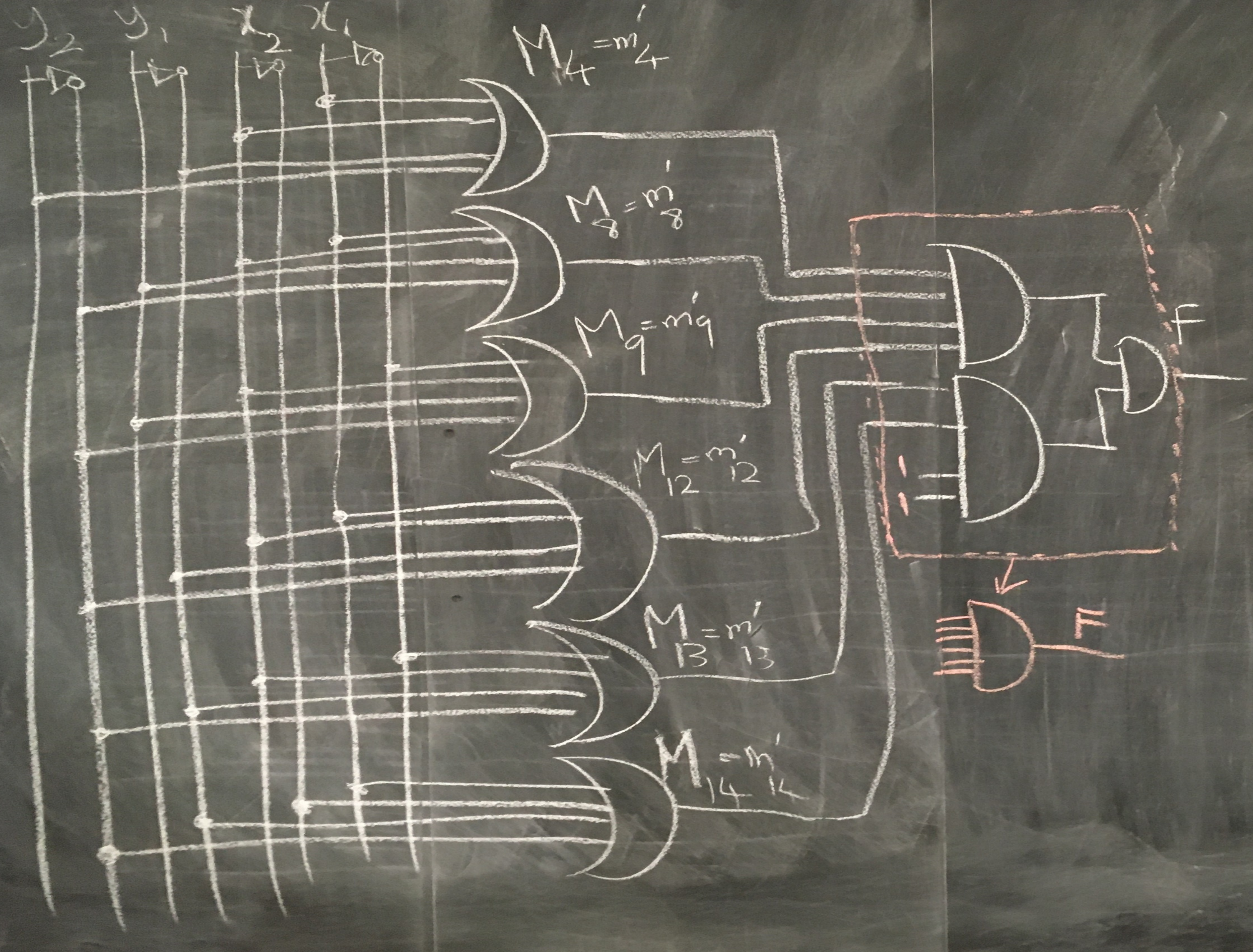
Cost: How many gates in SoP vs. PoS?

	$F(Y2,Y1,X2,X1)=$ $\Sigma\, m(0,1,2,3,5,6,7,10,11,15)$	$F(Y2,Y1,X2,X1)=$ $\Pi\, M(4,8,9,12,13,14)$
AND	?	?
OR	?	?
NOT	?	?
NAND	?	?
NOR	?	?

	F(Y2,Y1,X2,X1)= Σ m(0,1,2,3,5,6,7,10,11,15)	F(Y2,Y1,X2,X1)= Π M(4,8,9,12,13,14)
AND	Each minterm one 4-input-AND	Each MAXTERM one 4-input-OR
OR	One final 10-input-OR	One final 6-input-AND
NOT	Doesn't Matter Much	Doesn't Matter Much

	F(Y2,Y1,X2,X1)= Σ m(0,1,2,3,5,6,7,10,11,15)	F(Y2,Y1,X2,X1)= Π M(4,8,9,12,13,14)
AND	10 × 4-input-AND	6 × 4-input-OR
OR	10-input-OR = 3 × 4-input-OR	6-input-AND = 2 × 4-input-AND
NOT	Doesn’t Matter Much	Doesn’t Matter Much

	$F(Y2,Y1,X2,X1)=$ $\Sigma\, m(0,1,2,3,5,6,7,10,11,15)$	$F(Y2,Y1,X2,X1)=$ $\Pi\, M(4,8,9,12,13,14)$
AND	$10 \times$ 4-input-AND	$6 \times$ 4-input-OR
OR	10-input-OR = $3 \times$ 4-input-OR	6-input-AND = $2 \times$ 4-input-AND
NOT	Doesn't Matter Much	Doesn't Matter Much



$$F = \prod M(4,8,9,12,13,14)$$

$$= M_4 M_8 M_9 M_{12} M_{13} M_{14}$$

$$= m'_4 m'_8 m'_9 m'_{12} m'_{13} m'_{14}$$

$$= (y'_2 y_1 x'_2 x'_1)' \quad m'_4 \rightarrow y_2 + y'_1 + x_2 + x_1$$

$$(y_2 y'_1 x'_2 x'_1)' \quad m'_8 \rightarrow y'_2 + y_1 + x_2 + x_1$$

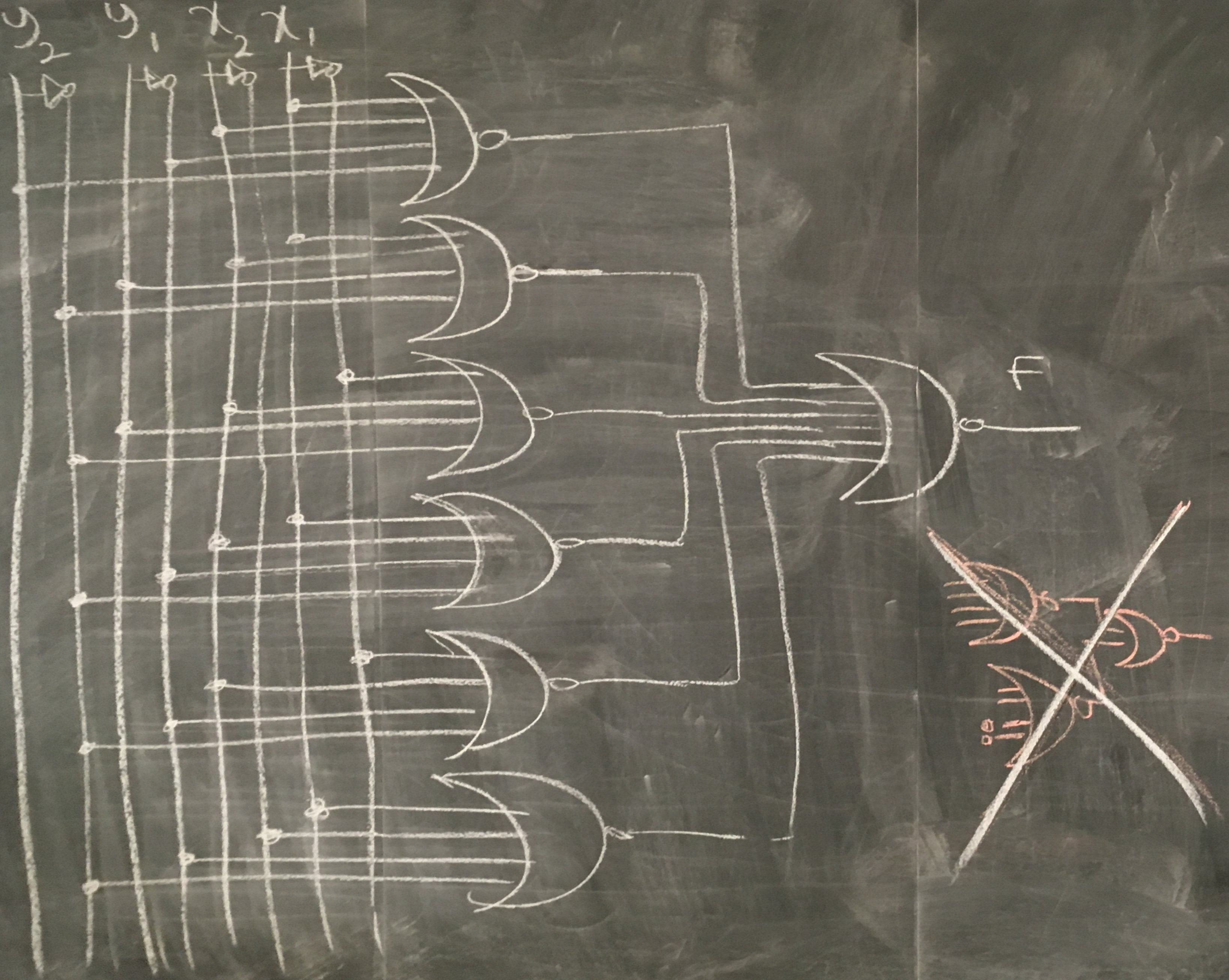
$$(y_2 y'_1 x'_2 x_1)' \quad m'_9 \rightarrow y'_2 + y_1 + x_2 + x'_1$$

$$(y_2 y_1 x'_2 x'_1)' \quad m'_{12} \rightarrow y'_2 + y'_1 + x_2 + x_1$$

$$(y_2 y_1 x'_2 x_1)' \quad m'_{13} \rightarrow y'_2 + y'_1 + x_2 + x'_1$$

$$(y_2 y_1 x_2 x'_1)' \quad m'_{14} \rightarrow y'_2 + y'_1 + x'_2 + x_1$$

	$F(Y2,Y1,X2,X1)=$ $\Sigma\, m(0,1,2,3,5,6,7,10,11,15)$	$F(Y2,Y1,X2,X1)=$ $\Pi\, M(4,8,9,12,13,14)$
NAND	10 × 4-input-NAND + 1 × 10-input-NAND	
NOR		6 × 4-input-NOR + 1 × 6-input-NOR



$$F = \prod M(4,8,9,12,13,14)$$

$$= M_4 M_8 M_9 M_{12} M_{13} M_{14}$$

$$F = (F')'$$

$$= \left(\left(M_4 M_8 M_9 M_{12} M_{13} M_{14}\right)'\right)'$$

$$= \left(M_4' + M_8' + M_9' + M_{12}' + M_{13}' + M_{14}'\right)'$$

$$= \Big((y_2+y_1'+x_2+x_1)' + (y_2'+y_1+x_2+x_1)' + (y_2'+y_1+x_2+x_1')' + (y_2'+y_1'+x_2+x_1)' + (y_2'+y_1'+x_2+x_1')' + (y_2'+y_1'+x_2'+x_1)'\Big)'$$

$F(Y_2,Y_1,X_2,X_1) = \Pi\, M(4,8,9,12,13,14)$

$= (M4)(M8)(M9)(M12)(M13)(M14)$

$= (Y_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X'_1)(Y'_2+Y'_1+X'_2+X_1)$

OMG!!

$F(Y_2,Y_1,X_2,X_1)= \Pi M(4,8,9,12,13,14)$

$= (M4)(M8)(M9)(M12)(M13)(M14)$

$= (Y_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X'_1)(Y'_2+Y'_1+X'_2+X_1)$

Dual $\rightarrow$ $(Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$F(Y_2,Y_1,X_2,X_1) = \prod M(4,8,9,12,13,14)$

$= (M4)(M8)(M9)(M12)(M13)(M14)$

$= (Y_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X'_1)(Y'_2+Y'_1+X'_2+X_1)$

Dual → $(Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$$F(Y_2,Y_1,X_2,X_1)= \Pi M(4,8,9,12,13,14)$$

$$= (M4)(M8)(M9)(M12)(M13)(M14)$$

$$= (Y_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X'_1)(Y'_2+Y'_1+X'_2+X_1)$$

Dual $\rightarrow$ $(Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(Y_1+Y'_1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$$

$F(Y_2,Y_1,X_2,X_1) = \Pi\, M(4,8,9,12,13,14)$

$= (M4)(M8)(M9)(M12)(M13)(M14)$

$= (Y_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X'_1)(Y'_2+Y'_1+X'_2+X_1)$

Dual $\rightarrow$ $(Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(Y_1+Y'_1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$F(Y_2,Y_1,X_2,X_1) = \Pi\, M(4,8,9,12,13,14)$

$= (M4)(M8)(M9)(M12)(M13)(M14)$

$= (Y_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X'_1)(Y'_2+Y'_1+X'_2+X_1)$

Dual $\rightarrow$ $(Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(Y_1+Y'_1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

Are we done?!

$F(Y_2,Y_1,X_2,X_1) = \prod M(4,8,9,12,13,14)$

$= (M4)(M8)(M9)(M12)(M13)(M14)$

$= (Y_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X'_1)(Y'_2+Y'_1+X'_2+X_1)$

Dual $\rightarrow$ $(Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(Y_1+Y'_1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$ $+(Y'_2Y_1X_2X_1)$

OMG!!

$F(Y_2,Y_1,X_2,X_1) = \Pi\, M(4,8,9,12,13,14)$

$= (M4)(M8)(M9)(M12)(M13)(M14)$

$= (Y_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X'_1)(Y'_2+Y'_1+X'_2+X_1)$

Dual $\rightarrow$ $(Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(Y_1+Y'_1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)\ +(Y'_2Y_1X_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)\ +\ (Y'_2Y'_1X_2X_1)$

$$F(Y_2,Y_1,X_2,X_1)= \Pi\, M(4,8,9,12,13,14)$$

$$= (M4)(M8)(M9)(M12)(M13)(M14)$$

$$= (Y_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X'_1)(Y'_2+Y'_1+X'_2+X_1)$$

Dual $\rightarrow$ $(Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(Y_1+Y'_1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1) +(Y'_2Y_1X_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1) + (Y'_2Y'_1X_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2(X'_1+X_1))+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$$

$F(Y_2,Y_1,X_2,X_1) = \Pi\, M(4,8,9,12,13,14)$

$= (M4)(M8)(M9)(M12)(M13)(M14)$

$= (Y_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X'_1)(Y'_2+Y'_1+X'_2+X_1)$

Dual $\rightarrow$ $(Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(Y_1+Y'_1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)\ +(Y'_2Y_1X_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)\ +\ (Y'_2Y'_1X_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2(X'_1+X_1))+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(X_2X_1Y'_2)+(Y'_2Y'_1X_2(1))+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

OMG!!

$$F(Y_2,Y_1,X_2,X_1)= \prod M(4,8,9,12,13,14)$$

$$= (M4)(M8)(M9)(M12)(M13)(M14)$$

$$= (Y_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X_1)(Y'_2+Y'_1+X_2+X'_1)(Y'_2+Y'_1+X'_2+X_1)$$

Dual → $(Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(Y_1+Y'_1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1(1))+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1) +(Y'_2Y_1X_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2X'_1)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1) + (Y'_2Y'_1X_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(Y'_2X_2X_1)+(Y'_2Y'_1X_2(X'_1+X_1))+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(X_2X_1Y'_2)+(Y'_2Y'_1X_2(1))+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$$

$$= (Y_2Y'_1X_2X_1)+(X_2X_1Y'_2)+(Y'_2Y'_1X_2)+(Y'_2Y'_1X'_2X_1)$$

Are we done?! Honestly, I don’t know ☹ ☺

MINIMIZATION

I) Boolean Algebra (algebraically)

- Needs to be smart. It is hard due to guesswork (which rules to apply?)
- If the number of variables (ABCDEF…) and/or number of minterms (MAXTERMS) grows
- No Algorithm
- Is the result minimal?!

MINIMIZATION

II) Map (Karnaugh map, K-map)

aka. Graphical Manipulation

MINIMIZATION

II) Map (Karnaugh map, K-map)

aka. Graphical Manipulation

Algorithm; Straightforward, up to six variables

Result is always minimal

MINIMIZATION

II) Map (Karnaugh map, K-map)

aka. Graphical Manipulation

Algorithm; Straightforward, up to six variables

Result is always minimal

Maurice Karnaugh

Physicist
Mathematician
Inventor

Bell Labs (1954)
"The Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits"